Basilio Gayarrola

B.G.

BG

Goyarrola: empezó á
las matematicas el
dia 11 de Enero 1843

Es de Basilio Goyarrola

ELEMENTOS

DE MATEMATICAS PURAS Y MIXTAS:

POR DON ALBERTO LISTA,

PROFESOR DE MATEMATICAS EN LA CASA DE EDUCACION, SITA EN LA CALLE DE SAN MATEO DE ESTA CORTE.

Quidquid praecipies, esto brevis.

Horat.

SEGUNDA EDICION.

Basilio Goyarrola entro á las matematicas el dia 1 de 1842 de [illegible]

TOMO I.

MADRID:

Imprenta de D. Leon Amarita, plazuela de Santiago, núm. 1, año de 1823.

año de 12

PROLOGO.

La benignidad con que el público ha recibido mi obra elemental de Matemáticas, me ha dado osadía para reimprimirla; y las advertencias de algunos profesores beneméritos que me honran con su amistad, me han determinado á corregirla y adicionarla.

El estado presente de las ciencias exactas exige en los libros elementales, no solo el rigor matemático de las demostraciones, sino tambien el orden en las teorías y la generalidad en los principios. Los que han examinado mi obra con los ojos severos y perspicaces de la verdadera amistad, si bien la han recomendado en cuanto al orden y generalidad de las ideas, han observado que algunas demostraciones no estan colocadas en su debido lugar: que otras carecen del rigor necesario, y que en algunas materias faltan explicaciones interesantes. En esta segunda edicion he procurado corregir estos defectos, como tambien los yerros de tipografía, para dar á mi obra toda la perfeccion que debe tener un curso elemental: esto es, que reuna la claridad y la brevedad, y que ponga á los alumnos en estado de leer y estudiar por sí solos las obras maestras.

En el prólogo de la primera edicion de mi Aritmética dije: *Hemos procurado incluir tambien en este tratado las raices, proporciones y logaritmos con dos objetos: el primero, que los que se contenten con avrender solo Aritmética, aprendan* *á lo menos todas las teorías á que este ramo puede estenderse: el segundo, que los que continúen el estudio de los demas ramos de matemáticas conozcan los límites hasta donde alcanza el arte de la numeracion; y cuando vean despues las mismas materias tratadas por el Algebra, sepan apreciar la influencia de la análisis en las ciencias exactas, y los efectos maravillosos que se le deben.* Estas reflexiones conservan para mí todo el valor que tuvieron entonces; y la esperiencia propia y agena, adquirida en cuatro años de enseñanza, me ha convencido de su exactitud. Asi que las únicas variaciones que he hecho en estos elementos de Aritmética, son: primera, explicar con mas claridad las teorías de los restos, quebrados y logaritmos: segunda, estender las aplicaciones de la regla de proporcion en obsequio de los que se limitan al estudio de la Aritmética.

Me lisonjeo que con estas adiciones y correcciones reunirá este tratado las dotes que se requieren en una obra elemental de aritmética. Con el mismo cuidado retocaré despues mis elementos de los demas ramos de matemáticas, cuya reimpresion urge ya.

Los artículos de letra pequeña, ó son esplicaciones mas estensas, ó nuevas aplicaciones de los principios; y por consiguiente ó bastará leerlos, ó podrán omitirse hasta el segundo repaso de la Aritmética.

ARITMÉTICA.

ARTICULO PRIMERO.

NUMERACION.

1. Llámase *unidad* la cantidad que sirve para medir todas las demas de su misma especie, examinando cuántas veces está contenida en cada una de ellas: y *número* el signo que representa las veces que se contiene la unidad en la cantidad medida. La *Aritmética* es la ciencia de los números.

Si al servirnos de la unidad para medir una cantidad sucede que despues de contar una, dos ó mas unidades, no queda nada que medir de la cantidad, el número será *entero*. Pero si despues de una, dos ó mas mediciones queda un residuo menor que la unidad, este residuo se llama *fraccion* ó *quebrado*, y no se podrá medir con la unidad, sino con una parte de ella; como, por ejemplo, su mitad, su tercio, su cuarta parte etc. El signo que representa en este caso toda la cantidad se llama número *fraccionario* ó *mixto*.

Por ejemplo, si al medir el largo de una sala con la vara, que es unidad de distancias, hallo que despues de contar seis varas he llegado exactamente al fin de la longitud, diré que esta vale seis varas, y este número seis es entero. Pero si despues de haber contado diez varas queda un residuo menor que una vara, el número será fraccionario, y la longitud valdrá diez varas y una fraccion. Para medir esta fraccion dividiré la vara en un número conveniente de partes, por ejemplo en doce, y mediré la fraccion con una duodécima parte de la vara; y si veo que esta nueva unidad se contiene en la fraccion siete veces, diré que la sala tiene de largo diez varas y siete duodécimas partes de otra vara.

Las cantidades que contienen *una*, *dos*, *tres*, *cua-*

tro, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve* unidades, se representan respectivamente con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que se llaman *notas*, *cifras* ó *guarismos*.

Con ellos se espresa cualquier cantidad por grande que sea. Para esto de cada diez unidades se ha formado una *clase*, que se llama *decena*: de cada diez decenas una *centena*, llamada asi porque contiene cien unidades: de cada diez centenas un *millar*: de cada diez millares una *decena de millar*: de cada diez decenas de millar una *centena de millar*. Las cifras que representan estas clases se colocan sucesivamente á la izquierda desde la unidad hasta la centena de millar.

Si la cantidad es tan grande que las clases ya nombradas no basten á espresarla, se usa de otras seis clases superiores, que se colocan en el mismo orden, las mayores hácia la izquierda. Sus nombres son: *cuento*, *decena de cuento*, *centena de cuento*, *millar de cuento*, *decena de millar de cuento*, *centena de millar de cuento*. Para espresar mayores cantidades se han formado órdenes semejantes de bicuento, tricuento etc., siempre bajo la ley de que *diez unidades de una clase compongan una unidad de la que se le sigue á la izquierda*. En la clase donde no hay unidades se coloca la cifra 0, que se pronuncia *cero*.

Para leer un número se dividirá de seis en seis notas, y se distinguirán sin dificultad las notas que pertenecen á los órdenes de cuento, bicuento, tricuento...... El número 512″006281′670023 se lee asi: quinientos doce bicuentos, seis mil doscientos ochenta y un cuento, seiscientos setenta mil veinte y tres unidades.

Se ve, pues, que cada nota se hace 10 veces mayor por cada lugar que se retire hácia la izquierda; luego para hacer una cantidad diez veces mayor de lo que es, se le unirá un cero á la derecha, lo que retirará cada una de sus notas un lugar á la izquierda. Por la misma razon si se quiere hacer la cantidad cien veces mayor, se le unirán dos ceros á la derecha: si mil veces mayor, se le unirán tres ceros etc. Y al contrario, suprimiendo 1, 2, 3...... ceros de la derecha de una cantidad, se hará 10, 100, 1000...... veces menor.

2.º *Operaciones aritméticas con los números enteros.*

2. Adicion es la reunion de muchos números en uno solo. Se espresa interponiendo entre ellos el signo $+$, que se pronuncia *mas*, y se llama signo positivo. *Suma* es el resultado de la adicion. Asi $2+3+4$ indica la reunion de 2, 3, 4, y la suma es 9. Se escribe asi: $2+3+4=9$; porque este signo $=$ significa la igualdad de la cantidad de su izquierda con la de su derecha. *Ecuacion* es la igualdad de dos cantidades, espresada por medio del signo $=$. Las dos cantidades que se igualan, se llaman *miembros* de la ecuacion.

La desigualdad de dos cantidades se denota ó con el signo $<$, ó con el signo $>$. La cantidad menor se escribe siempre en la punta. Asi $4<9$, $9>4$ se lee: 4 es menor que 9, 9 es mayor que 4.

Multiplicacion es la suma de muchas cantidades iguales. La cantidad que se repite se llama *multiplicando*: el número, que representa cuántas veces se repite, se llama *multiplicador*, y la suma toma el nombre de *producto*. *Factores* del producto son el multiplicando y el multiplicador. Esta operacion se espresa poniendo un aspa ó un punto entre los dos factores. Asi $4+4+4+4+4+4=24$, se espresa asi: $4\times6=24$, y se lee: 4 multiplicado por 6 es igual á 24. El multiplicando es 4: el multiplicador 6: el producto 24: 4 y 6 son factores de 24.

La *sustraccion*, operacion inversa de la adicion, consiste en hallar el número, que añadido á otro dado, produce otro tambien dado; ó en hallar, dada la suma y una de sus partes, la otra que falta. Esta operacion se espresa con el signo $-$, que se pronuncia *menos*, y se llama signo negativo, puesto entre la cantidad mayor, que se llama *minuendo*, y la menor, que se llama *subtrahendo.* El resultado de esta operacion se llama *residuo* ó *diferencia.* Asi $9-5=4$, porque $4+5=9$: 9 es el minuendo, 5 el subtrahendo, y 4 el residuo.

La *division*, operacion inversa de la multiplicacion, consiste en hallar un número, que multiplicado por otro dado, produzca otro tambien dado; ó en hallar, conocido el producto y uno de los factores, el otro factor. El producto toma el nombre de *dividendo*: el factor conocido, el de *divisor*, y el factor que se busca, el de *cociente*. Se espresa con una linea, en cuya parte superior se escribe el dividendo, y en la inferior el divisor. Asi $\frac{8}{4}=2$: porque $4\times2=8$. El dividendo es 8, el divisor 4, y el cociente 2.

3. Para sumar los números enteros reunanse sucesivamente todas sus unidades, decenas, centenas...... Si en la suma de las unidades de una clase resulta una ó mas unidades de la clase inmediatamente superior, se *reservan* para añadirlas á esta clase.

Ejemplo.

3731
349
12487
54
16621

La suma de las unidades compone 1 unidad y 2 decenas. Escribo 1 debajo de las unidades, y reservo las 2 decenas para añadirlas á la clase de las decenas. La suma de esta clase compone 2 decenas y 2 centenas. Pongo 2 debajo de las decenas, y añado á la columna siguiente las 2 centenas de la *reserva*; y asi de las demas clases.

Para *restar* ó sustraer dos números enteros, busco un número, cuyas clases, sumadas con las correspondientes del subtrahendo, produzcan las correspondientes del minuendo: luego restando de cada clase del minuendo la correspondiente del subtrahendo, tendré la correspondiente del residuo. Si la cifra del minuendo es menor que la del subtrahendo (por ejemplo, si la primera es 5 y la segunda 7), querrá decir, que la nota del subtrahendo, sumada con la del residuo, compone la del minuendo con 10 de mas (en el ejemplo presente, la nota del residuo, sumada con 7, no podrá componer 5, sino 15), y esta decena se habria reservado en la suma para la clase siguiente. Considérese, pues, una decena de mas en la nota del minuendo, y réstesele la nota del subtrahendo (diré en el ejemplo presente $15-7=8$); y en la clase inmediatamente superior quitaré á la nota del minuendo una unidad (que es la decena que añadí al 5), ó lo que es lo mismo, añadiré una unidad á la nota del subtrahendo.

Ejemplo.

$$\begin{array}{r} 36147 \\ 19328 \\ \hline 16819 \end{array}$$

Diré: de 8 á 17 van 9: de 3 á 4, 1: de 3 á 11, 8: de 10 á 16, 6: de 2 á 3, 1.

4. Llámase *complemento aritmético* de un número su diferencia á la unidad seguida de tantos ceros como notas tiene el número, es decir, á la unidad inmediatamente superior á la clase mayor del número. Asi el complemento de 6 es su diferencia á 10: el de 32, su diferencia á 100: el de 824, su diferencia á 1000: el de 54208, su diferencia á 100000.

El complemento aritmético de un número se halla con suma facilidad, restando todas sus notas de 9 y la última de las unidades de 10. El complemento de 5342 es 4658.

Cuando el número acaba en ceros, la nota que se resta de 10 es la última significativa de la derecha; y el complemento ha de tener á la derecha de esta nota tantos ceros como el número. El complemento de 45300 es 54700.

Sirve el complemento aritmético para convertir en adicion la resta de dos cantidades; pues si en lugar de restar el subtrahendo del minuendo, le añado á este el complemento del subtrahendo, esto es, lo que le falta para componer la unidad superior, debe resultar el residuo aumentado en dicha unidad superior, que es facil suprimir.

Ejemplo.	*Por complemento.*	
5432	5432	Añado al minuendo el complemento de 3957; y resulta el resíduo con 10000 de mas.
3957	6043	
1475	11475	

Cuando hay que sumar y restar varias cantidades, en lugar de las que se han de restar se ponen sus complementos: se suman; y quitando las unidades superiores correspondientes á los complementos que se tomaron, se tendrá en una sola suma el resultado de todas las sumas y restas.

Ejemplo.	
9427	Se quiere saber cuánto es 9427—3522+1257+6034—5040.
1257	En la suma hay 20000 de mas, 10000 por el complemento de 3522, y 10000 por el de 5040. El resultado es 8156.
6034	
6478	
4960	
28156	

5. *La suma de varias cantidades se aumenta ó disminuye en la misma cantidad que se aumente ó disminuya una de ellas.* Porque si $9=5+4$, y queremos añadir al número 4, 3 unidades, será necesario añadir el mismo 3 al primer miembro para que subsista la igualdad, y será $9+3=5+4+3$, ó $12=5+7$. Por la misma razon $9-3=5+4-3$, ó $6=5+4$.

La suma de varias cantidades no se altera, aunque una de ellas se aumente en la misma cantidad que se disminuya otra: porque si $9=5+4$, añadiendo 3 á 5, y restando 3 de 4, no se altera el segundo miembro; pues equivale á añadirle $3-3$, que es cero.

El resíduo de la sustraccion se aumenta ó disminuye en la misma cantidad que se aumente ó disminuya el minuendo: porque el minuendo es la suma del subtrahendo y resíduo.

El resíduo se disminuye en la misma cantidad que se aumente el subtrahendo, y se aumenta en la misma cantidad que se disminuya el subtrahendo, permaneciendo el mismo minuendo: porque, siendo este la suma de subtrahendo y residuo, y debiendo no sufrir alteracion, es necesario que una de sus partes se aumente en la misma cantidad que se disminuye la otra.

El resíduo no se altera, aunque á minuendo y á subtrahendo se les añada ó reste una misma cantidad: porque si $6=9-3$, añadiendo á 9 y á 3 el número 5, equivale á añadir al segundo miembro $5-5$, que es cero: y por tanto $6=14-8$. Del mismo modo, quitando 1 de 9 y de 3, equivale á quitar del segundo miembro 1 y añadirle 1: pues el 1, que se quita al subtrahendo, se aumenta al resíduo: luego el segundo miembro, que representa el valor del resíduo, no sufrirá alteracion.

6. *El producto de dos factores no se altera, aunque se tome al multiplicando por multiplicador, y á este por multiplicando:* esto es, $4\times 3=3\times 4$.

Demostracion. El producto de 4×3 se halla, repitiendo 3 veces cada una de las unidades del 4: lo que produce el siguiente cuadro, en el cual cada punto representa una unidad.

• • • •

• • • •

• • • •

El producto de 3×4 se halla, repitiendo 4 veces cada una de las unidades del 3: lo que produce el siguiente cuadro

• • •

• • •

• • •

• • •

Este cuadro es idéntico con el anterior; pues mirándolo de lado tiene las mismas unidades en hilera y en columna: luego $3\times 4=4\times 3$: luego etc.

El producto de tres factores no se altera, sea cual fuere el orden en que se multipliquen.

Demostracion. Propongámonos multiplicar $4\times 3\times 5=(4+4+4)\,5$. (El paréntesis significa que lo que está fuera de él debe multiplicarse por lo que hay dentro). Pero $(4+4+4)\,5=20+20+20=20\times 3=4\times 5\times 3=5\times 4\times 3$: luego el 3 puede dejarse para último factor. Tambien podrá dejarse el 4: pues $4\times 3\times 5=(3+3+3+3)5=15+15+15+15=15\times 4=3\times 5\times 4=5\times 3\times 4$.

Demostremos este mismo principio de cualquier número de factores.

Si son cuatro, por ejemplo, $6\times4\times3\times2=24\times3\times2=(24+24+24)\,2=48+48+48=48\times3=6\times4\times2\times3=6\times2\times4\times3=2\times6\times4\times3$, y á todos los productos en que se permuten los factores 6, 4, 2 y el 3 sea el factor último. Si se quiere, que lo sea otro de los tres primeros, por ejemplo el 6, como $6\times4\times3=4\times3\times6=12+12+12+12+12+12$, será $6\times4\times3\times2=(12+12+12+12+12+12)\,2=24+24+24+24+24+24=24\times6=2\times3\times4\times6$: luego si el principio es cierto en el producto de tres factores, lo será en el de cuatro: si lo es en el de cuatro, lo será en el de cinco, y asi sucesivamente.

7 Llámase *potencia* de un número el producto de tantos números iguales á él como unidades tiene el índice de la potencia. Asi potencia segunda ó *cuadrado* de 5, que se escribe asi 5^2, es $5\times5=25$. Potencia tercera ó *cubo* de 5, esto es, $5^3=5\times5\times5=125$: potencia cuarta de 5, ó $5^4=5\times5\times5\times5=625$ etc.

Llámase *raiz* de una cantidad el número que elevado á la potencia del mismo índice que la raiz, produce la cantidad propuesta. Asi la raiz segunda ó cuadrada de 25, que se escribe asi, $\sqrt[2]{25}$, ó $\sqrt{25}$, es 5: porque $5^2=25$. La raiz tercera ó cúbica de 343, que se escribe asi $\sqrt[3]{343}=7$, porque $7^3=343$: $\sqrt[4]{625}=5$, porque $5^4=625$, etc.

Para multiplicar los números *dígitos*, esto es, que no pasan de 9, sirve la tabla siguiente, llamada de multiplicar, en la cual estan formados todos los productos de dichos números.

$2\times2=4, 2\times3=6, 2\times4=8, 2\times5=10, 2\times6=12, 2\times7=14, 2\times8=16, 2\times9=18$
$3\times3=9, 3\times4=12, 3\times5=15, 3\times6=18, 3\times7=21, 3\times8=24, 3\times9=27$
$4\times4=16, 4\times5=20, 4\times6=24, 4\times7=28, 4\times8=32, 4\times9=36$
$5\times5=25, 5\times6=30, 5\times7=35, 5\times8=40, 5\times9=45$
$6\times6=36, 6\times7=42, 6\times8=48, 6\times9=54$
$7\times7=49, 7\times8=56, 7\times9=63$
$8\times8=64, 8\times9=72$
$9\times9=81$

8. Para multiplicar un número que tiene mas de una cifra por otro que tenga una sola cifra, se repite cada clase del primero las veces que indica el segundo; y si hay reserva, se agrega al producto de la clase siguiente.

Ejemplo.

8276
8
66208

Para multiplicar 8276 por 8, digo: 6 × 8=48: tengo 4 decenas. Digo: 7 × 8=56 decenas, que con las 4 reservadas componen 60: tengo 6 centenas. Digo: 2 × 8=16 centenas, y 6 de la reserva son 22, y tengo 2 millares. Digo: 8 × 8=64, y dos de la reserva son 66.

Si el multiplicador fuere igual á una cifra multiplicada por 10, 100, 1000...., como 40, 400, 4000...., el producto seria el mismo que si se multiplicase el multiplicando, primero por la cifra y despues por 10, 100, 1000.... (6): la segunda multiplicacion se hará, uniendo al producto por la cifra los ceros que la acompañan en el multiplicador (1 *al fin*). *Ejemplo*: 8276 × 800=8276 × 8 × 100=66208 × 100=6620800.

Para multiplicar dos números, compuestos cada uno de mas de una cifra, como 5738 × 927, es preciso repetir el multiplicando tantas veces como unidades espresa cada clase del multiplicador. Multiplíquese, pues, el multiplicando por las unidades del multiplicador (por 7): despues por las unidades que espresa la clase de las decenas (que son 20), lo que se hace multiplicando por la nota 2 de las decenas, y uniendo un cero á la derecha, ó retirando el producto un lugar á la izquierda: despues por las unidades que espresa la clase de las centenas (que son 900), multiplicando por 9 y uniendo dos ceros, ó retirando el producto un lugar mas á la izquierda que el anterior, y asi en las demas clases, como se ve en el ejemplo.

$$\begin{array}{r} 5738 \\ 927 \\ \hline 40166 \\ 11476 \\ 51642 \\ \hline 5319126 \end{array}$$

Si en medio del multiplicador hay ceros, se omite la multiplicacion por ellos, y el producto de la nota que les anteceda, se atrasará todos los sitios que debian ocupar los ceros.

Ejemplo.

$$\begin{array}{r} 47518 \\ 6008 \\ \hline 380144 \\ 285108 \\ \hline 285488144 \end{array}$$

Se omite la multiplicacion por los dos ceros, y el producto por la nota 6 se retira dos lugares mas.

Si al fin de los dos factores hay ceros, se multiplican las cifras significantes, y al producto se unen tantos ceros como hay al fin de los factores.

Dem. Se quiere multiplicar 4500×300: como $4500 = 45 \times 100$ y $300 = 3 \times 100$, el producto pedido será $45 \times 100 \times 3 \times 100$, ó $45 \times 3 \times 100 \times 100$ (6). El producto 45×3 es el de las notas significativas; y para multiplicarlo despues por 100×100, bastará unirle los dos ceros que hay al fin del multiplicando, y los dos que hay al fin del multiplicador. El producto es de 1350000.

Cuando una cantidad debe ser multiplicando muchas veces en una operacion, se forma una tabla de sus productos por las nueve notas, y se copian despues estos productos en sus lugares correspondientes. El producto de cada nota se saca con facilidad, añadiendo el número al producto de la nota anterior. Los productos de una nota par se hallan tambien doblando el de la nota que es su mitad. El producto por 5 se puede hallar uniendo un cero al número y sacando su mitad. El uso enseñará otras muchas abreviaciones en la práctica de la multiplicacion, como las siguientes: para multiplicar por 15 se añade un cero al multiplicando, se pone debajo la mitad y se suma: para multiplicar por 34 se pone debajo del multiplicando su duplo: debajo de este su duplo, adelantada una nota, y se suma.

Para multiplicar por 11, 12, 13 hasta 19, se pone debajo del multiplicando su producto por las unidades, adelantada una nota, y se suma.

10. *Si uno de los factores se multiplica por un número, el producto quedará multiplicado por el mismo número:* porque si $12=4\times3$, y el 3 se multiplica por 5, será necesario multiplicar el primer miembro por 5, para que subsista la igualdad, y será $12\times5=20\times3$.

Si uno de los factores se divide por un número, el producto quedará dividido por el mismo número: porque si $20\times3=60$, $\frac{20}{5}\times3=12$, por ser esta operacion inversa de la anterior, que debe reproducir el anterior producto.

Si uno de los factores se multiplica por un número, y el otro se divide por el mismo número, el producto no se altera; pues la primer operacion lo multiplica, y la segunda lo divide por el mismo número.

Cualquier número multiplicado por un digito ha de tener una reserva menor que el multiplicando: esto es, si multiplicamos 8 por 9, la reserva ha de ser menor que 8: si multiplicamos 57 por 9, la reserva ha de ser menor que 57.

Dem. El producto de 57 por 10 es 570, es decir, 0 de unidades, y 57 de reserva: como el multiplicador 9 es menor que 10, el producto de 57 por 9 no puede llegar á 57 de reserva, mucho mas cuando deberá tener algunas unidades, y el producto de 57 por 10 no tiene ninguna: luego etc. En efecto el producto de 57 por 9 es 513, es decir, 3 unidades y 51 de reserva.

De aqui se infiere que la reserva, aglomerada en las clases superiores del producto por la multiplicacion de las notas inferiores del multiplicando, debe ser siempre menor que el multiplicador: por ejemplo, si multiplicamos 418 por 7, el producto es 2926: en las 29 centenas hay 4×7 y 1 centena, reserva del producto de las decenas. Esta centena agregada con las 2 decenas del producto, compone 12 decenas, que contiene á 1×7 y 5 decenas, reserva del producto de las unidades. Estas 5 decenas, agregadas con las 6 unidades del producto, componen 56 unidades, producto de 8×7. Todas las reservas son menores que el 7.

Otro ejemplo. El producto de 532×28 es 14896. Las 148 centenas se componen de 5×28 y de 8 centenas, reserva de la multiplicacion de las clases inferiores. Estas 8 centenas y las 9 decenas componen 89 decenas, en las cuales está el producto de 3×28, y ademas 5 decenas, reserva de la clase inferior. Las 56 unidades que resultan son el producto de 2×28.

Del mismo modo se podrá descomponer el producto de 1438 por 127, que es 182626. La clase superior $182 = 1.127 + 55$. La reserva es 55.

La clase inferior inmediata $556 = 4.127 + 48$.

La inmediata $482 = 3.127 + 101$.

La inferior $1016 = 8.127$.

Todas las reservas son menores que 127.

11. Cuando existe un número entero, que multiplicado por el divisor, produzca exactamente el dividendo, la division es *exacta:* tal es la de 28 por 7, cuyo cociente exacto es 4.

Pero si no existe un número entero, que multiplicado por el divisor produzca el dividendo, la division es inexacta, como la de 30 por 7, en la que el cociente, ni es 4, porque $4 \times 7 = 28$, y sobran 2 de 30, ni es 5, porque $5 \times 7 = 35$, y le faltan 5 á 30. En este caso se pone en el cociente el mayor número de veces que cabe el divisor en el dividendo, y lo que sobra de este, quitándole el producto de aquel cociente por el divisor, se llama *resto* de la division. Por ejemplo, partiendo 30 por 7, el cociente es 4 y el resto 2.

Este resto indica lo que sobra al dividendo, ó lo que es menester quitarle para que sea divisible exactamente por el divisor; y por eso se llama algunas veces *resto por esceso.* Obsérvese, que puede tomarse por resto de una division, no solo el que ha resultado, sino este sumado con el divisor, añadido una, dos ó mas veces. El resto de la division de 30 por 7, es, no solo 2, sino $2+7=9$, $2+2\times7=16$, $2+3\times7=23$: porque quitando sucesivamente de 30 los restos 2, 9, 16, 23, resultan 28, 21, 14, 7, que todos se pueden dividir exactamente por 7.

Llámase *resto por defecto* lo que falta al dividendo para que la division sea exacta. Por ejemplo á 30 le faltan 5 para ser divisible exactamente por 7: luego 5 es el resto por defecto de 30 partido por 7. Tambien se puede decir que el resto por defecto de 30 partido por 7 es $5+7=12$, $5+2\times7=19$, $5+3\times7=26$, etc.: pues cualquiera de estos números añadido al 30 dará una suma exactamente divisible por 7.

El menor resto por defecto y el menor resto por esceso componen el divisor: porque si 30 contiene al 7 4 veces, y sobran 2, para que lo contenga exactamente una vez mas, es decir, 5 veces, le falta lo que hay del sobrante 2 al divisor 7, es decir 5, que será el resto por defecto; luego etc.

En toda division inexacta el dividendo es igual al cociente entero, multiplicado por el divisor, añadiendo el resto al producto; pues el resto es el sobrante que queda del dividendo, deduciendo de él el producto del divisor por el cociente entero.

El resto menor ha de ser siempre mas pequeño que el divisor; pues si fuera igual ó mayor que él, el divisor se contendria á lo menos una vez mas en el dividendo.

Un número es *múltiplo de otro ó divisible* por otro, cuando se puede dividir exactamente por él; y el número que divide exactamente á otro se llama *factor*, *divisor* ó *parte alicuota* de él. Ejemplo: 35 es múltiplo de 7 y de 5, y es divisible por ambos; y tanto el 5 como el 7 son factores, divisores y partes alicuotas del 35.

Número *par* es todo múltiplo del 2, é *impar* el que no lo es.

Número *primo* es el que no es divisible sino por sí mismo ó por la unidad. Los números primos de la primer centena son estos: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

12. Veamos cómo se debe hacer la particion de un

número, compuesto de muchas notas, por otro de una sola (40761 por 7).

Considerando el dividendo 40761 como el producto del divisor 7 por el cociente incógnito, su especie superior 40 se compone (10) del producto de 7 por la especie superior del cociente, y de la reserva del producto de 7 por la clase inmediata del cociente: y como esta reserva ha de ser menor que 7, se infiere que será el resto *parcial* que deje 40 partido por 7: digo, pues, $\frac{40}{7}$ da 5 de cociente (que será la especie superior del cociente), y 5 de resto que será la reserva de la clase siguiente del dividendo, y lo que falta que partir será 5761.

Haciendo sobre esta cantidad la misma observacion, será 8 la clase segunda del cociente, y 1 la reserva de la inmediata: lo que falta que partir es 161.

La tercera nota del cociente es 2, la reserva de la clase siguiente 2; lo que falta por partir 21, y la última nota del cociente 3.

Véase la forma que se da á la particion.

$$\begin{array}{l|l} 40,7,6,1 & 7 \\ \cline{2-2} \ \ 5\ 7 & 5823 \\ \ \ \ 16 & \\ \ \ \ \ 21 & \end{array}$$

Esta operacion puede hacerse llevando los restos de memoria, y escribiendo el cociente debajo del dividendo, como se ve en el ejemplo siguiente:

$$\begin{array}{l|l} 50832 & 9 \\ \cline{2-2} 5648 & \end{array}$$

Si el divisor tiene mas de una nota, el cociente tendrá ó una nota ó mas de una nota. Tendrá una nota sola cuando sea menor que 10, lo que se conocerá en que uniendo un cero á la derecha del divisor (1) resulte mayor que el dividendo. Asi el cociente de 5342 por 798 no puede tener mas que una nota. Pero si el divisor con el cero unido á la derecha se iguala con el dividendo, ó es mayor que él, el cociente es 10 ó mayor que 10, y tiene mas de una nota.

El cociente de 5342 por 79 ha de tener mas de una nota.

Cuando el cociente ha de tener una sola nota (como en 5342 partido por 798) la clase superior 53 del dividendo debe contener el producto de la nota incógnita por la clase superior 7 del divisor, y la reserva del producto de dicha nota incógnita por la segunda clase 9 del divisor. Si conociésemos esta reserva, quitándola de 53, y partiendo lo que quedase por 7, tendríamos la nota del cociente. Mas como no conocemos la reserva, es preciso examinar por tanteo la nota del cociente. Parto, pues, 53 por 7: el cociente es 7: esta nota será la verdadera, si la reserva 4 que deja es suficiente para cubrir el producto de 7×9.

Si la reserva 4 fuera igual ó mayor que la nota 7 del cociente, estaríamos seguros de que esta nota es buena, y no seria necesario continuar el examen; porque (10) del producto de 7×9 nunca puede resultar una reserva igual al 7, y por tanto seria suficiente la que tendríamos.

Pero como 4 es menor que la nota 7 del cociente, continúo el examen, uniendo la reserva 4 á la clase siguiente 4 del dividendo, de la cual es reserva, y compone 44. Comparo esta cantidad con el producto de la nota 7 por la clase siguiente 9 del divisor, y veo que es menor: luego la nota 7 del cociente es demasiado alta.

Bájola, pues, á 6, que me deja de reserva 11, mayor que 6: luego 6 es la verdadera nota del cociente. Multiplícola por todo el divisor, y réstola del dividendo para tener el resto de la particion. La forma de esta operacion es la siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 5342 & 798 \\ \cline{2-2} 554 & 6 \end{array}$$

El cociente entero es 6, y el resto 554.

Mientras la reserva sea menor que la nota del cociente, es necesario continuar el examen con todas las notas del divisor hasta la de las unidades; y la nota será la verdadera si la última clase del dividendo es mayor que el producto del cociente por las unidades del divisor, ó igual á él, como se ve en el siguiente ejemplo.

40761 | 5823
 0000 | 7

Digo: 40 entre 5, á 8. No queda reserva; y como la segunda clase del dividendo 7 es menor que 8 por 8, la nota 8 es demasiado alta. Rebájola á 7: la primer reserva es 5, la segunda clase del dividendo es 57, que deja de reserva 1. La tercera 16 deja de reserva 2. La cuarta 21 es igual al producto 7×3. La nota 7 es el cociente verdadero.

Si el cociente ha de tener mas de una nota, partiendo la clase superior del dividendo por el divisor, el resto parcial que quede será la reserva de la segunda clase del dividendo. Se forma esta clase, y se repite en ella y en las demas la misma operacion hasta llegar á la última.

Ejemplo.

528,9,6,4 | 79
 549 | 6695
  756
   454
    59

Siendo 52 menor que 79, tomo una nota mas para formar la clase superior del dividendo, que será 528. Partiéndola por 79, da de cociente 6, y de resto 54, que será la reserva de la segunda clase del dividendo, y esta clase será 549. Su cociente es 6, su resto 75, y la tercer clase es 756. Su cociente es 9, su resto 45, y la última clase es 454: su cociente es 5, y el resto de la particion es 59.

13. *Consecuencias.* 1.ª La division debe empezar por la izquierda, para que los restos parciales den las reservas de las clases inferiores.

2.ª Cada resto debe ser menor que el divisor, porque este resto es la reserva del producto del divisor por la nota inmediatamente inferior del cociente (10), y esta reserva debe ser menor que el divisor.

3.ª Es facil conocer el número de notas de un cociente, porque la clase superior del dividendo debe producir una nota en el cociente; y por cada una de las notas que sigan en el dividendo á su clase superior, se ha de tener una nota en el cociente. El cociente de $\frac{7814}{94}$ ha de tener dos notas.

4.ª Ningun cociente parcial puede pasar de 9, porque este es el mayor número de una cifra. Asi, aunque al partir 171 por 19 haya que decir 17 *partido por* 1, no se puede decir que toca mas que á 9.

5.ª *Si el dividendo se multiplica por un número, el cociente quedará multiplicado por el mismo número:* porque si $\frac{24}{4}=6$, será $24=4\times 6$ (2); y si el primer miembro de esta ecuacion, que es el dividendo 24, se multiplica por un número, por ejemplo, por 5, será necesario multiplicar el segundo por 5 para que subsista la igualdad: luego $24\times 5=4\times 6\times 5$, ó $24\times 5=4(6\times 5)$, ó $\frac{24\times 5}{4}=6\times 5$. En efecto, $\frac{120}{4}=30$.

6.ª *Si el dividendo se parte por un número, el cociente quedará dividido por el mismo número:* porque si $\frac{24}{4}=6$, será $24=4\times 6$; y si el primer miembro se parte por un número, por ejemplo, por 3, será necesario partir el segundo miembro por 3 para que subsista la igualdad, y será $\frac{24}{3}=\frac{4\times 6}{3}$; pero el producto 4×6 se parte por 3, partiendo por 3 cualquiera de sus factores (10): luego $\frac{24}{3}=4\times\frac{6}{3}$, ó $8=4\times 2$, de donde $\frac{8}{4}=2$: luego etc.

7.ª *Si el divisor se multiplica por un número, el cociente quedará partido por el mismo número:* porque si $\frac{24}{4}=6$, será $24=4\times 6$; y si el divisor 4 se multiplica por 3, será necesario partir por 3 el cociente 6, para que el dividendo 24, que ahora es producto, quede el mismo; y será $24=(4\times 3)\frac{6}{3}$, de donde $\frac{24}{4\times 3}=\frac{6}{3}$. En efecto, $\frac{24}{12}=\frac{6}{3}$.

8.ª *Si el divisor se parte por un número, el co-*

ciente quedará multiplicado por el mismo número: porque si $\frac{24}{4}=6$, será $24=4\times6$; y si el divisor 4 se parte por 2, será necesario multiplicar el cociente 6 por 2 para que subsista el mismo dividendo. En efecto $\frac{24}{2}=12=6\times2$.

9.ª *Si dividendo y divisor se multiplican ó parten por un mismo número, el cociente no se altera:* porque si el producto y un factor se multiplican ó parten por un mismo número, el otro factor ha de conservar su mismo valor. Asi, si $\frac{24}{4}=6$, $\frac{24\times2}{4\times2}=6$, y $\frac{24:2}{4:2}=6$. (La espresion 24 : 2 significa 24 partido por 2.)

De aqui se infiere que si al fin de dividendo y divisor hay ceros, se podrán suprimir en uno y otro igual número de ceros, porque esta supresion equivale á dividirlos ambos por 10, si se ha suprimido un cero, por 100, si se han suprimido 2 etc.; y por tanto no se alterará el cociente. Ejemplo: el cociente de $\frac{21600}{600}$ es el mismo que el de $\frac{216}{6}$, que es 36.

10.ª Para tomar la *mitad*, *tercio*, *cuarto* etc. de un número, se dividirá por 2, 3, 4 etc., pues la mitad multiplicada por 2, el tercio por 3 etc. deben reproducir el número.

Cuando un número ha de ser divisor muchas veces, se formarán sus productos por las 9 cifras; y será facil ver cuál es el producto que mas se acerca á cada dividendo parcial: la cifra que le corresponde es la del cociente; y restado dicho producto del dividendo parcial, se tendrá el resto ó reserva para la clase siguiente.

Ejemplos de division.

721,3,4,2	291	386782,6,7	99887	700200,0,3,1	68367
1393	2478	871216	387	1652103	1024
2294		721207		2847451	
2572		21998		112735	
244					

3.° *Pruebas de las cuatro reglas.*

14. Para probar si está bien hecha la adicion, vuélvase á sumar, empezando por la columna de la izquierda; y restando esta suma de la que ya tenemos debajo de la misma columna, se tendrá la reserva de la columna siguiente. Repítase en esta y en las demas la misma operacion hasta la columna de las unidades, cuyo resto debe ser cero.

Ejemplo.

2758
3099
469
1029
7355
1230

Para probar esta suma, sumo la columna de la izquierda: la suma es 6, que restado de 7 da 1 de reserva, y por tanto la clase que sigue es 13. Sumo la segunda columna: la suma es 11, que restada de 13 da 2, y la clase que sigue es 25. La suma de la tercer columna es 22, que restada de 25 da 3, y la clase siguiente es 35: la suma de las unidades es 35, y por tanto la suma está bien hecha.

Para probar la resta súmese el subtrahendo con el resíduo, y la suma ha de ser igual al minuendo.

Para probar la multiplicacion truéquense los factores, y ha de resultar el mismo producto.

Para probar la division exacta multiplíquese cociente por divisor, y el producto ha de ser igual al dividendo. Para probar la division inexacta multiplíquese el cociente entero por el divisor; añádase al producto el resto, y la suma ha de ser igual al dividendo.

4.° *Algunas propiedades de los números enteros.*

15. *Si un producto y sus dos factores se parten por un mismo número, el resto del producto será el producto de los restos de los factores*, esto es, si $24 \times 41 = 984$, partiendo estos tres números por 7, y siendo sus restos respectivos 3, 6, 4, el producto 3×6 de los restos de los factores será el resto del producto. En efecto, $3 \times 6 = 18$, del cual restando 2 veces el 7, queda el resto 4, que es el del producto (11).

Dem. Siendo $24=3\times7+3$, será $24\times41=(3\times7+3)41$. El producto de 3×7 multiplicado por 41 es múltiplo de 7, y por tanto no dejará resto alguno si se le parte por 7. Luego si queda algun resto será el que deje 3×41; pero $41=5\times7+6$: luego $3\times41=3(5\times7+6)$. El producto de 5×7 por 3 es múltiplo de 7: luego el único resto que habrá será el que deje 6×3, que es el producto de los restos de los factores: luego etc.

De aqui se infiere, que el resto de un producto puede ser, ó el que deja el producto, ó el producto de los restos de los factores, ó el producto de uno de los factores multiplicado por el resto del otro. El resto de 984, que es 24×41, es, ó 4, ó 6×3, ó 3×41, ó 6×24; pues siempre se viene á parar en el resto menor, ó *final* 4, quitando de los otros restos los múltiplos de 7 que contienen.

16. *Determinar la ley que siguen entre sí los restos de los números* 1, 10, 100, 1000 *etc., divididos por cualquier número mayor que la unidad.*

El resto de 1, dividido por cualquier número mayor que la unidad, es 1: porque el cociente entero debe ser cero, y queda de resto el dividendo 1.

El resto de 10 es facil de calcular por la division. Asi si el divisor es 7, el resto de 10 es 3.

Como $100=10\times10$, el resto de 100 es igual al producto del resto de 10 por sí mismo (15), ó al cuadrado del resto de 10.

Como $1000=100\times10$, el resto de 1000 es igual al resto de 100 multiplicado por el resto de 10; y en general *el resto de cualquier unidad superior es igual al resto de la inmediata inferior multiplicado por el resto de* 10.

Ejemplo. Los restos de los números 1, 10, 100, 1000 etc. divididos por 7, son sucesivamente 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5.....

Determinar el resto, que dejará un número cualquiera partido por otro mayor que la unidad.

Todo número se puede descomponer en unidades, decenas, centenas etc. Las primeras estan multiplicadas por 1, las segundas por 10, las terceras por 100 etc. Luego el resto de las unidades (15) será igual al resto de 1 multiplicado por la nota de las unidades: el de las decenas será igual al resto de 10 multiplicado por la nota de las decenas: el de las centenas será igual al resto de 100 multiplicado por la nota de las centenas etc.; y sumando estos restos parciales se tendrá el resto final.

Coloco, pues, debajo de las unidades el resto de 1, debajo de las decenas el resto de 10, debajo de las centenas el resto de 100 etc. Multiplico cada resto por su nota correspondiente, y la suma de los productos será el resto final. Si el resto final es divisible por el divisor, lo será el número propuesto.

Ejemplo. Hallar el resto de 3284179 partido por 7.
Coloco debajo los restos de 1,
10, 100 etc.............................. 1546231
Sumo los productos 1×9, 3×7, 1×2, 4×6, 4×8, 2×5, 1×3, quitando á cada uno los 7 que contenga para mayor brevedad; y resulta de resto final $2+2+3+4+3+3=17$, ó 3, resto del número propuesto partido por 7, como se puede probar efectuando la particion.

Si en lugar de estos restos, que son por esceso, se quisiesen transformar algunos de ellos en restos por defecto (11), se podrá hacer poniendo en lugar de cada resto su diferencia al divisor, que es el correspondiente resto por defecto; y como estos restos deben restarse de los otros, se les señalará con el signo — debajo. Si en el ejemplo anterior hubiésemos querido tomar por defecto los restos de la 4.ª, 5.ª y 6.ª nota, hubiéramos puesto 3284179

$1\underline{231}231$.

Los restos por esceso dan $2+2+3=7$ ó 0.
Los restos por defecto dan $4+3+4=4$ por defecto. Restándole 0, queda de resto final 4 por defecto, que equivale á $+3$ por esceso, como hallamos en el caso anterior.

Consecuencias. 1.ª Todo numero, cuya última nota de la derecha es cero ó par, es divisible por 2: porque el resto de 1, dividido por 2, es 1: el de 10 es cero, como tambien los de las demas unidades superiores que son potencias de 10: luego el resto será la nota de las unidades multiplicada por 1. Si dicha nota es cero ó par, el resto final será nulo, y la cantidad divisible por 2.

2.ª Toda cantidad en que el duplo de las decenas sumado con las unidades componga un múltiplo de 4, es divisible por 4: porque los restos de 1 y 10 divididos por 4, son 1, 2: el de 100 y demas unidades superiores es cero: luego el resto de toda la cantidad será el doble de las decenas mas las unidades. Si este resto es divisible por 4, lo será la cantidad.

3.ª Toda cantidad en que el cuádruplo de las centenas, mas el doble de las decenas, mas las unidades, sea un múltiplo de 8, es divisible por 8: porque los restos de 1, 10, 100, divididos por 8, son 1, 2, 4: el de 1000 y demas unidades superiores es cero: luego el resto de toda la cantidad será el cuádruplo de las centenas, mas el doble de las decenas, mas las unidades. Si este resto es divisible por 8, lo será la cantidad.

4.ª Todo número cuyas notas sumen un múltiplo de 3, es divisible por 3: porque el resto de 1, 10, 100, 1000 etc., divididos por 3, es 1: luego el resto de toda la cantidad es la suma de sus notas. Si esta suma es divisible por 3, lo será la cantidad.

5.ª Todo número, cuya última nota de la derecha es 5 ó cero, es divisible por 5; porque el resto de 1 dividido por 5 es 1: el de 10, 100, 1000, etc. es cero: luego el resto de toda la cantidad es la nota de las unidades. Si esta es 5 ó cero, será la cantidad divisible por 5.

6.ª Todo número, cuya última nota es cero, es divisible por 10: porque el resto de 1, dividido por 10, es 1: el de 10, 100, 1000, etc., es cero: luego el resto de toda la cantidad es la nota de las unidades: si esta nota es cero, será divisible por 10 la cantidad.

7.ª Todo número cuyas notas sumen un múltiplo de 9, es divisible por 9; porque el resto de 1, 10, 100, 1000, etc., divididos por 9, es 1: luego el resto de toda la cantidad es la suma de sus notas. Si esta suma es múltiplo de 9, lo será la cantidad.

8.ª Todo número, cuyas notas sumadas alternativamente den sumas iguales, ó que se diferencien en 11 ó en un múltiplo de 11, es divisible por 11. Porque los restos de 1, 10, 100, 1000, etc., partidos por 11, son 1, 10, 1, 10, 1, 10..., ó 1, —1, 1, —1, 1, —1, etc.: luego el resto final es la suma de las notas alternativas, empezando desde la unidad, menos la suma de las que se dejaron: si estas dos sumas son iguales ó se diferencian en 11 ó un múltiplo de 11, el resto final es cero, y la cantidad es divisible por 11.

17. *Todo divisor comun de dos números ha de ser tambien divisor del resto de su particion:* esto es, si 30 y 20 tienen el divisor comun 5, el resto de su particion ha de ser divisible por 5. Porque partiendo 30 por 20, el cociente es 1 y el resto 10: y por tanto $30 = 1 \times 20 + 10$, y quitando de ambos miembros 1×20, es $10 = 30 - 1 \times 20$: partiendo ambos miembros de esta ecuacion por 5, será $\frac{10}{5} = \frac{30}{5} - \frac{1 \times 20}{5}$: pero $\frac{30}{5}$ es entero, porque 30 se supone divisible por 5: $\frac{1 \times 20}{5}$ es entero, porque 20 se supone tambien divisible por 5, y siéndolo 20, lo debe ser cualquier múltiplo suyo: luego el segundo miembro de la ecuacion es un número entero, pues es la diferencia de dos números enteros: luego el primero lo es tambien, y el resto 10 es divisible por 5: luego etc.

Buscar el mayor divisor comun de dos números. Sean los dos números 216 y 36: como el mayor divisor de 36 es el mismo 36, es evidente que si 36 es divisor de 216, será el mayor divisor comun de ambos números. En efecto $\frac{216}{36}=6$, cociente exacto: luego *deberé partir el mayor número por el menor; y si la division es exacta, el menor será el mayor divisor comun.*

Pero si esta division deja un resto, como en él deben hallarse todos los divisores comunes á ambos números, examinaré si es él el mayor divisor comun, *partiendo el divisor por el resto. Hago lo mismo con los restos* que resulten sucesivamente hasta llegar á una division exacta: su divisor será el mayor divisor comun, no solo de los dos números propuestos, sino de todos los dividendos y divisores anteriores.

Véase la forma que se da á esta operacion. Se pide el mayor divisor comun de 2961 y 799.

2961	799	564	235	94	47
	3	1	2	2	2
63	17	12	5	2	1

Los números 1, 2, 5, 12, 17, 63 representan las veces que cada uno de los números 47, 94, 235, 564, 799, 2961 contienen al mayor divisor comun 47. Estos números se hallan asi:

El mayor divisor comun se contiene á sí mismo 1 vez: por consiguiente el cociente que le corresponde es 1.

El dividendo inmediato 94, partido por 47, dió de cociente 2 en la última division: por tanto 2 es el cociente que le corresponde.

El anterior dividendo $235=2\times 94+47$: partiendo esta ecuacion por 47, será $\frac{235}{47}=2\times\frac{94}{47}+\frac{47}{47}=2\times 2+1$: es decir, para hallar el cociente de 235 por 47, multiplico el cociente 2 de su particion por el cociente 2 del dividendo inferior, y añadiendo el cociente 1 del divisor comun.

Del mismo modo, siendo $564=2\times 235+94$, partiendo por 47, será $\frac{564}{47} = 2 \times 5 + 2$, donde se observa la misma regla.

Pongo, pues, 1 *debajo del último divisor, y el último cociente debajo del último dividendo: multiplico los dos números que hay debajo de este dividendo, y añado el número que está debajo de su divisor, y se tendrá el cociente del dividendo anterior partido por el mayor divisor comun.* La misma operacion se hace hasta llegar al primer dividendo.

1.° Si el mayor divisor comun es 1, quiere decir que los dos números propuestos no tienen mas divisor comun que la unidad; lo que ya sabiamos, pues todo número entero es múltiplo de la unidad: en este caso los dos números se llaman *primos entre sí.*

Todo número, no divisible por un número primo, es primo con él: no siendo 20 divisible por 7, 20 y 7 son primos entre sí: porque si 7 no es factor del 20, y 7, por ser primo, no tiene mas factor que 7, el 7 no contendrá ningun factor del 20, y será primo con él: luego etc.

El producto de dos números, que no son múltiplos de un número primo, no puede ser múltiplo del mismo número primo: esto es, si 20 y 30 no son múltiplos de 7, el producto 20×30 no puede ser múltiplo de 7.

Dem. Siendo 20 primo con 7, su mayor divisor comun debe ser 1: hecha, pues, la operacion como se ve,

$$\begin{array}{c|c|c|c} 20 & 7 & 6 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

resultan de las divisiones las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 20 = 2 \times 7 + 6, \text{ ó } 6 = 20 - 2 \times 7 \\ 7 = 1 \times 6 + 1, \text{ ó } 1 = 7 - 1 \times 6 \end{array}\right\} \text{Multiplicando estas ecuaciones por 30,}$$

$$\text{será } \begin{array}{l} 30 \times 6 = 20 \times 30 - 2 \times 7 \times 30 \\ 30 \times 1 = 7 \times 30 - 1 \times 6 \times 30. \end{array}$$

De la primer ecuacion se infiere, que si 20×30 es múltiplo de 7, lo debe ser 30×6: pues lo es $2 \times 7 \times 30$.

De la segunda se infiere, que si lo es 6×30, lo ha de ser 30×1, pues 7×30 lo es; y como siempre se ha de venir á parar al resto 1, buscando el mayor divisor comun de 20 y 7, números primos entre sí, se infiere que para que 20×30 sea múltiplo de 7, es preciso que lo sea 30, contra el supuesto: luego etc.

Para que un producto sea divisible por un número, es preciso que alguno de sus factores sea divisible por cada uno de los factores primos ó SIMPLES *del número.* Esto es, para que 15×24 sea divisible por $30 = 2 \times 3 \times 5$, es preciso que cada uno de estos tres factores simples lo sea del 15 ó del 24: porque si no lo es, por ejemplo el 5, el producto no será divisible por 5, y mucho menos por 30.

El producto de dos números primos no es divisible sino por estos dos números primos, por sí mismo y por la unidad: esto es, 5×7 no es divisible sino por 5, por 7, por 35 y por 1. Porque para que fuese divisible por otro número, por ejemplo, por 6, es necesario que 5 ó 7 fuesen múltiplos de los factores simples del 6: lo que es imposible por ser 5 y 7 números primos.

Un producto no es divisible por mas factores primos que los que entran en su composicion: es decir, si $30 = 2 \times 3 \times 5$, 30 no puede ser múltiplo de 11: porque para esto era necesario que alguno de los factores primos 2, 3, 5 fuese múltiplo de 11, lo que es imposible.

Un número divisible por dos números primos entre sí, es divisible por el producto de ellos: es decir, si 300 es divisible por 4 y por 25, es divisible por 4×25, ó por 100. Porque despues de dividido 300 por 4, el cociente 75 ha de ser múltiplo de 25: en efecto $300 = 75 \times 4$; y como 4 y 25 son primos entre sí, 4 no contiene ningun factor del 25, y es menester que 75 sea múltiplo de 25 para que lo sea el producto 300.

19. Para hallar el mayor divisor comun de muchos números, se halla el de dos; despues el del mayor divisor hallado y el tercero; y asi hasta llegar al último número. Para hallar el mayor divisor comun de 150,

90, 40 y 200, busco el de 150 y 90, que es 30: busco el de 30 y 40, que es 10; y en fin, el de 10 y 200, que es 10. Este es el mayor divisor comun de los cuatro números propuestos.

El cociente de dos números es igual al cociente de los números de veces que comprenden su mayor divisor comun: porque si 2961 y 799 tienen por mayor divisor comun á 47, y el primero lo contiene 63 veces y el segundo 17, será $2961=47\times63$, y $799=47\times17$: y como dividendo y divisor se pueden partir por un mismo número, sin que se altere el cociente, dividiendo uno y otro por el mayor divisor comun 47, solo tendremos que partir 63 por 17: luego etc.

20. *Buscar los factores simples de un número.* Divídase cuantas veces sea posible con exactitud por 2; despues por 3, 5, 7.... y demas números primos hasta que resulte de cociente la unidad: la unidad y los divisores anteriores serán los factores primos del número.

Ejemplo.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

será $360=1\times2\times2\times2\times3\times3\times5=1\times2^3\times3^2\times5$.

Hallar todos los factores de un número. Con las potencias de cada factor simple (escepto la unidad) se forma una série de *términos*, empezando por la unidad, y siguiendo con las potencias 1.ª, 2.ª, 3.ª etc. del factor hasta aquella á que está elevado en el producto. En el ejemplo anterior, en que hay tres factores simples, formaré las tres series $1, 2, 2^2, 2^3$, ó 1, 2, 4, 8.
$1, 3, 3^2$ ó 1, 3, 9
1, 5 ó 1, 5.

Multiplico cada término de la segunda por todos los de la primera, y tendré 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72.

Multiplico cada término de la tercer serie por todos los de esta; y será 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

Continuando la misma operacion con las demas series que se sigan, la última me dará todas las combinaciones posibles de los factores primos, y por tanto (18 al fin) todos los factores del número.

Despues, si se quiere, se colocan en el orden de sus magnitudes asi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Otro ejemplo. Los factores simples de

2310	2	dan $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$.
1155	3	
385	5	
77	7	
11	11	
1		

Formo las series 1, 2: 1, 3: 1, 5: 1, 7: 1, 11.

Las dos primeras dan 1, 2, 3, 6.

Por la 3.ª.................... 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30.

Por la 4.ª.................... 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210.

Por la 5.ª.................... 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210, 11, 22, 33, 66, 55, 110, 165, 330, 77, 154, 231, 462, 385, 770, 1155, 2310.

Luego los factores de 2310 son: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 21, 22, 30, 33, 35, 42, 55, 66, 70, 77, 105, 110, 154, 165, 210, 231, 330, 385, 462, 770, 1155, 2310.

El número total de factores es igual al producto de los números de términos de todas las series: asi en el primer ejemplo 360 tiene 24 factores, y en el segundo 2310 tiene 32.

Hallar el menor dividendo comun de varios números, es decir, el menor número, que es divisible por varios números dados, como por ejemplo 4, 6, 12, 18, 20, 24 y 25.

1.° No hago caso de los números que son factores de otros, como en el caso presente, del 4, 6, 12, que son factores del 24: porque el número que sea divisible por 24, lo ha de ser por 4, 6, 12.

2.° Descompongo en sus factores simples los que quedan, que son 18, 20, 24 y 25; y tengo $18=2\times3^2$, $20=2^2\times5$, $24=2^3\times3$, $25=5^2$, donde veo que en la composicion de estos números no entran mas factores simples que 2, 3, 5.

3.° Multiplico las mayores potencias de estos factores simples que se encuentren en las descomposiciones: esto es, $2^3\times3^2\times5^2=1800$: este es el menor número divisible por todos los propuestos; porque solo tiene los factores necesarios para ser divisible por cada uno de ellos.

5.° *De las fracciones.*

21. Para medir un quebrado (1) se divide la unidad en cierto número de partes iguales, y se ve cuántas de aquellas partes contiene el quebrado. *Denominador* es el número que espresa en cuántas partes se divide la unidad; y *numerador* el que espresa cuántas partes de la unidad dividida contiene el quebrado. Uno y otro se llaman *términos* del quebrado. El quebrado se escribe poniendo el numerador sobre una linea con el denominador debajo de ella, y se lee, leyendo el numerador, y dándole por adjetivo el partitivo del denominador. Asi $\frac{1}{2}$ se lee *un medio*: $\frac{3}{5}$ *tres quintos*: $\frac{4}{13}$ *cuatro trece avos*: $\frac{14}{123}$ *catorce ciento veinte y tres avos*: $\frac{151}{1000}$ *ciento cincuenta y uno milésimos*. Cualquiera de ellos, como por ejemplo $\frac{4}{13}$ significa que dividida la unidad en 13 partes, el quebrado contiene 4 de estas partes; de modo que $\frac{4}{13}=\frac{1}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}$.

Todo quebrado es el cociente de su numerador partido por su denominador, y por eso el quebrado y el cociente se espresan con un mismo signo.

Dem. Partir 4 por 13 es lo mismo que partir $1+1+1+1$ por 13: cada unidad partida por 13 da el quebrado $\frac{1}{13}$: luego 4 partido por 13 da $\frac{1}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{4}{13}$: luego etc.

Consecuencias. 1.ª Los restos de las particiones inexactas (11) producen un quebrado, cuyo numerador es el resto, y cuyo denominador es el divisor: este quebrado debe agregarse al cociente entero para tener el cociente completo. Asi $\frac{750}{7}=107\frac{1}{7}$.

2.ª *Todo quebrado, cuyo numerador es igual al denominador, vale* 1, que es el cociente de dos cantidades iguales: asi $\frac{12}{12}=1$, $\frac{1331}{1331}=1$. Si el *numerador* vale mas que el denominador, el quebrado vale mas que 1, como $\frac{14}{6}=1\frac{5}{9}$. Estos quebrados se llaman *impropios*, porque son mayores que la unidad, á diferencia de los *propios*, que tienen el numerador menor que el denominador, y valen menos que la unidad. El quebrado impropio se reduce á número mixto ó entero, partiendo el numerador por el denominador. Asi $\frac{39}{5}=7\frac{4}{5}$; $\frac{65}{5}=13$.

Recíprocamente un entero se reduce á determinada especie de quebrado, multiplicándolo por el denominador que se le quiere dar, y dándole al producto el mismo denominador; lo que equivale á multiplicar y partir el entero por un mismo número. Asi 13 reducido á quintos es$=\frac{13\times5}{5}=\frac{65}{5}$. El mixto se reduce á la especie de su quebrado, reduciendo el entero á dicha especie, para lo cual se le multiplica por el denominador, añadiendo al producto el numerador, y dando á la suma el mismo denominador del quebrado. Asi $6\frac{2}{7}=\frac{44}{7}$, $12\frac{19}{25}=\frac{319}{25}$. A esta operacion se da tambien el nombre de *incorporacion*.

3.ª A cualquier entero se le puede dar la forma de quebrado poniéndole por denominador la unidad; pues $12=\frac{12}{1}$.

4.ª Pueden aplicarse á los numeradores, denominadores y quebrados todo lo que se ha demostrado

(13 desde 5.°) de dividendos, divisores y cocientes; y por tanto

Si el numerador se multiplica ó parte por un número, el quebrado quedará multiplicado ó partido por el mismo número. Asi $\frac{4}{5}\times 6=\frac{24}{5}$ y $\frac{4}{5}:2=\frac{2}{5}$.

Si el denominador se multiplica ó parte por un número, el quebrado quedará partido ó multiplicado por el mismo número. Asi $\frac{4}{9}:3=\frac{4}{27}$, y $\frac{4}{9}\times 3=\frac{4}{3}$.

Si los dos términos de un quebrado se multiplican ó parten por un mismo número, el quebrado no se altera. Asi $\frac{5}{9}=\frac{15}{27}$, y $\frac{40}{64}=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$.

De donde se infiere, que si dos quebrados tienen un mismo denominador, es mayor el que tenga mayor numerador; y que si dos quebrados tienen un mismo numerador, es mayor el que tenga menor denominador; pues el quebrado se multiplica multiplicando el numerador, y se divide multiplicando el denominador. Asi $\frac{8}{5}$ es cuádruplo de $\frac{2}{5}$, y $\frac{9}{4}$ es mitad de $\frac{9}{2}$.

5.ª *El producto de un quebrado multiplicado por su denominador es igual á su numerador;* pues el cociente multiplicado por el divisor es igual al dividendo. Asi $\frac{4}{7}\times 7=4$, $\frac{51}{97}\times 97=51$.

22. Para reducir varios quebrados á un mismo denominador, multiplíquense los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los otros: ningun quebrado mudará de valor, y todos tendrán un mismo denominador, que será el producto de todos los denominadores.

Ejemplo. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, reducidos á un mismo denominador, son respectivamente $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{45}{105}$.

Esta operacion se abrevia cuando en los denominadores hay factores comunes, buscando el menor dividendo comun (20 al fin) de todos los denominadores, partiéndolo por el denominador de cada quebrado, y multiplicando por el cociente el numerador. El menor dividendo comun es el denominador.

Ejemplo. Reducir á un mismo denominador los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{5}{8}$. Prescindiendo del 2, factor de 10; de 3, factor de 15, y de 5, factor de 15, descompongo 10, 15, 8, y es 10=2

$\times 5$, $15 = 3 \times 5$, y $8 = 2^3$. El menor dividendo comun es $2^3 \times 3 \times 5 = 120$, y los quebrados, reducidos á un mismo denominador, son respectivamente $\frac{60}{120}$, $\frac{40}{120}$, $\frac{96}{120}$, $\frac{36}{120}$, $\frac{56}{120}$, $\frac{75}{120}$.

Si dos quebrados tienen numeradores y denominadores diferentes, para ver cuál es mayor se reducen á un mismo denominador; y el que asi reducido tenga mayor numerador es mayor. Asi $\frac{4}{5}$ es mayor que $\frac{2}{7}$.

23. *Si dos quebrados son iguales, los productos en cruz de sus términos deben ser iguales*; porque si los quebrados son iguales, reducidos á un comun denominador, deben ser iguales los nuevos numeradores; y como estos son los productos en cruz de ambos quebrados, se infiere que etc. Asi, si $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, será $8 \times 3 = 2 \times 12$.

Recíprocamente, si dos productos son iguales se podrán formar de ellos dos quebrados iguales, siendo los numeradores un factor de cada producto, y los denominadores los dos factores que quedan, pero trocados. Porque si $8 \times 3 = 2 \times 12$, partiendo ambos miembros por el producto 8×2, resulta $\frac{8 \times 3}{8 \times 2} = \frac{2 \times 12}{8 \times 2}$. Dividiendo (21, 4.ª) los términos del primer quebrado por 8, y los del segundo por 2, es $\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$. Del mismo modo se demuestra que $\frac{3}{12} = \frac{2}{8}$, $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$, $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

24. Para reducir una fraccion á sus menores términos se dividen sus dos términos por su mayor divisor comun (18). Tambien se puede reducir dividiendo ambos términos sucesivamente por todos los factores comunes que tengan.

Ejemplo.

$\frac{648}{1080} = -$, porque el mayor divisor comun es 216.

Por partes alicuotas: $\frac{648}{1080} = \frac{324}{540} = \frac{162}{270} = \frac{81}{135} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

Una fraccion cuyos dos términos son primos entre sí, es *irreductible*: porque si se dice que $\frac{33}{40}$ se reduce á $\frac{}{4}$, será (23) $33 \times 4 = 3 \times 40$: como el segundo miembro es divisible por 40, lo será el primero, y como el 4 es menor que 40, será necesario que alguno de los factores primos de 40 sea factor de 33, (18), lo que no puede ser: porque 40 y 33 se suponen primos entre sí.

Si una fraccion irreductible es igual á otra, los términos de esta han de ser múltiplos de los correspondientes de la irreductible: porque si $\frac{4}{9}=\frac{8}{18}$, será $4\times18=8\times9$. El segundo miembro de esta ecuacion es divisible por 9: luego tambien el primero: y no conteniendo el 4 ningun factor del 9, porque es primo con él, será preciso que 18 sea múltiplo de 9. Tambien el primer miembro es divisible por 4: luego el segundo lo debe ser; y no teniendo 9 ningun factor del 4, es preciso que 8 sea múltiplo del 4: luego etc.

24. *Si dos quebrados son iguales, sumando ó restando sus numeradores y denominadores ha de resultar un quebrado igual á cualquiera de ellos*: esto es, si $\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$, $\frac{4+8}{6+12}=\frac{4}{6}$, y $\frac{8-4}{12-6}=\frac{4}{6}$.

Dem. Si $\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$ (23), $4\times12=6\times8$. Añadiendo ó restando á ambos miembros el producto 4×6, resulta $4\times12+4\times6=6\times8+4\times6$, ó $4\times12-4\times6=6\times8-4\times6$. *Separando* en cada miembro *el factor comun*, es $4\,(12+6)=6\,(8+4)$, y $4\,(12-6)=6\,(8-4)$: de donde $\frac{4}{6}=\frac{8+4}{12+6}$ y $\frac{4}{6}=\frac{8-4}{12-6}$: luego etc.

Si dos quebrados son iguales, las sumas ó restas de sus términos forman un quebrado igual al que forman sus numeradores ó denominadores; esto es, si $\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$, $\frac{4+6}{8+12}=\frac{4}{8}=\frac{6}{12}$, y $\frac{6-4}{12-8}=\frac{4}{8}=\frac{6}{12}$.

Dem. En primer lugar: si $\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$, será $4\times12=6\times8$, de donde se sacará $\frac{4}{8}=\frac{6}{12}$.

Siendo $4\times12=6\times8$, añadiendo ó restando á ambos miembros 4×8, será $4\times12+4\times8=6\times8+4\times8$, ó $4\times12-4\times8=6\times8-4\times8$. Separando en cada miembro el factor comun, será $4\,(12+8)=8\,(6+4)$, y $4\,(12-8)=8\,(6-4)$, de donde $\frac{4}{8}=\frac{6+4}{12+8}$, y $\frac{4}{6}=\frac{6-4}{12-8}$: luego etc.

6.° *Operaciones aritméticas con los quebrados.*

25. Para sumar los quebrados, se reducen á un mismo denominador, si lo tienen diverso, se suman los nuevos numeradores, y se da á la suma el denominador comun.

Ejemplo: $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+\frac{1}{3}=\frac{63}{105}+\frac{30}{105}+\frac{35}{105}=\frac{128}{105}=1\,\frac{23}{105}$.

Para sumar los mixtos, se suman los quebrados; y si de su suma resulta algun entero, se añade á la suma de los enteros. *Ejemplo*: $3\frac{1}{2}+5\frac{3}{4}=9\frac{1}{4}$: porque $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}=1\,\frac{1}{4}$.

Para restar los quebrados, se reducen á un mismo denominador, si lo tienen diverso, se restan los nuevos numeradores, y se da al resíduo el denominador comun. *Ejemplo*: $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{11}{35}$.

Para restar los mixtos, se resta quebrado de quebrado, y entero de entero. Si el quebrado del subtrahendo es mayor que el del minuendo, se añade á este una unidad, añadiendo á su numerador su denominador, y otra al entero del subtrahendo. *Ejemplo*: $3\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$. *Otro*: $3\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}$. *Otro*: $142-135\frac{4}{9}=6\frac{5}{9}$, suponiendo en el minuendo el quebrado $\frac{9}{9}$.

Otros: $142-\frac{3}{5}=141\frac{2}{5}$: $47\frac{2}{3}-30=17\frac{2}{3}$: $63\frac{2}{5}-\frac{4}{7}=62\frac{29}{35}$.

26. Para multiplicar un quebrado por un entero, ó multiplico el numerador por el entero, ó parto el denominador por el entero, si esta division es exacta: porque el quebrado (21) se multiplica, multiplicando el numerador, ó dividiendo el denominador. *Ejemplos*: $\frac{3}{4}\times 5=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$: $\frac{19}{24}\times 12=\frac{19}{2}=9\frac{1}{2}$.

Para partir un quebrado por un entero, ó se parte el numerador por el entero, si esta division es exacta, ó se multiplica el denominador por el entero: porque el quebrado (21) se divide, dividiendo el numerador, ó multiplicando el denominador. *Ejemplos*: $\frac{15}{11}:5=\frac{3}{11}$; $\frac{3}{4}:5=\frac{3}{20}$.

Para tomar de un número, sea entero, quebrado, ó mixto, las partes que indica una fraccion propia, como por ejemplo, los $\frac{4}{5}$, se toma la quinta parte del número, y despues se multiplica por 4 esta quinta parte. Por ejemplo, los $\frac{4}{5}$ de 40 son 32. Los $\frac{3}{7}$ de 40 son $\frac{120}{7} = 17\frac{1}{7}$.

Esta operacion se llama *multiplicar por un quebrado*, dándole cierta estension á la palabra *multiplicar*, y entendiendo por *multiplicacion*, no solo repetir un número las veces que indica otro, sino tambien rebajar un número á aquella parte de sí mismo, que otro es de la unidad. Asi multiplicar 40 por $\frac{4}{5}$, será rebajar el 40 á sus cuatro quintas partes: del mismo modo que $\frac{4}{5}$ son las cuatro quintas partes de la unidad. Esta latitud que se da á la palabra *multiplicar*, no tiene inconveniente, siempre que quede bien entendido lo que quiere decir *multiplicar por un quebrado*, y tiene una grande utilidad; porque simplifica el lenguage en el uso comun de la multiplicacion. Supongamos, por ejemplo, que se quiera averiguar el valor de $8\frac{3}{4}$ varas de paño, valiendo cada vara 100 reales vellon. Es evidente que deberé repetir los 100 reales vellon 8 veces; y al producto 800 añadir los $\frac{3}{4}$ de 100, valor de las $\frac{3}{4}$. Estas dos operaciones las espresamos con un solo signo, diciendo, que el valor de las $8\frac{3}{4}$ es $100 \times 8\frac{3}{4}$: porque aunque la operacion de multiplicar por 8, y la de multiplicar por $\frac{3}{4}$ sean diferentes, tienen sin embargo un mismo objeto.

El producto de un número por un quebrado propio es menor que el multiplicando; pues la multiplicacion por un quebrado propio tiene por objeto tomar una parte del multiplicando.

Para multiplicar dos quebrados se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.

Dem. Multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{7}$, es tomar los $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{5}$, ó multiplicar por 3 la séptima parte de $\frac{4}{5}$ que es $\frac{4}{35}$: luego el producto es $\frac{12}{35}$: luego etc.

Para multiplicar los mixtos, se reducen á quebrados, y se multiplican como quebrados: ó bien se multiplica entero por entero, cada entero por el quebrado del otro, y quebrado por quebrado, y despues se suman estos productos parciales.

Ejemplo.

$$45\tfrac{3}{4} \times 17\tfrac{2}{3} = \tfrac{183}{4} \times \tfrac{53}{3} = \tfrac{61}{4} \times 53 = \tfrac{3233}{4} = 808\tfrac{1}{4}.$$

$$\begin{array}{r} 45\ \tfrac{3}{4} \\ 17\ \tfrac{2}{3} \\ \hline 315 \\ 45 \\ 30 \\ 12\ \tfrac{3}{4} \\ \tfrac{1}{2} \\ \hline 808\ \tfrac{1}{4} \end{array}$$

Multiplico primero 45 por 17: despues 45 por $\frac{2}{3}$ que equivale á multiplicar $15 \times 2 = 30$. Despues $17 \times \frac{3}{4} = \frac{51}{4} = 12\frac{3}{4}$. Despues $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ que produce $\frac{1}{2}$. Despues se suma y se tiene el producto total.

27. Para partir los quebrados, se multiplican en cruz.

Dem. Háyase de partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{7}$: multiplicando por 7 dividendo y divisor, no se altera el cociente, y la particion se reduce á $\frac{28}{5} : 3 = \frac{28}{15}$: luego etc.

Ejemplos.

$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$ | $8 : \frac{3}{5} = \frac{8}{1} : \frac{3}{5} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{33}{20} = 1\frac{13}{20}$.
$\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ | $\frac{18}{19} : \frac{9}{38} = \frac{2}{1} : \frac{1}{2} = 4$.

Para partir los mixtos, se reducen á quebrados: asi $2\frac{1}{3} : 4\frac{3}{4} = \frac{7}{3} : \frac{19}{4} = \frac{28}{57}$.

Cuando el divisor es menor que la unidad, el cociente es mayor que el dividendo; porque cuando el divisor es 1, el cociente es igual al dividendo.

7.° *Quebrados decimales.*

28. Quebrados decimales son los que tienen por denominador á 10, 100, 1000, etc. Estos quebrados pueden escribirse sin denominador, poniendo los numeradores á la derecha de la clase de las unidades, separados de ella con una vírgula, y estendiendo á las clases decimales la ley de los enteros «que cada nota sea diez veces menor por cada lugar que se adelanta á la derecha», se colocarán sucesivamente despues de la

vírgula las décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, etc. Asi $3,3 = 3\frac{3}{10} = \frac{33}{10}$; $42,05 = 42\frac{5}{100} = \frac{4205}{100}$; $0,403 = \frac{403}{1000}$.

Para leer una fraccion decimal, se lee como si fuera entera, añadiendo al fin la denominacion del último guarismo; 8,701201 se lee 8 enteros, y 701201 millonésimas.

Para escribir una cantidad decimal, se escribe despues de la vírgula, y se interponen entre esta y la cantidad los ceros necesarios para que haya tantas cifras decimales como ceros tiene el denominador. Asi $\frac{33}{1000} = 0,0033$; $1000\frac{4}{100} = 1000,04$; $\frac{13000}{1000000000} = 0,000013000$.

Toda cantidad decimal tiene por denominador implícito á la unidad con tantos ceros como cifras tiene la cantidad.

Una cantidad decimal no se altera, porque se unan ceros á su derecha; pues añadiéndose otros tantos ceros al denominador implícito que tiene, se aumentan en igual razon los dos términos del quebrado.

Si la vírgula de una cantidad decimal se mueve de la izquierda á la derecha, se hace la cantidad 10 veces mayor por cada lugar que adelante la coma: pues cada clase de la cantidad se retira un lugar á la izquierda. Al contrario, si la coma se mueve de la derecha á la izquierda, se hace la cantidad 10 veces menor por cada lugar que atrase la vírgula. *Ejemplo*: $342,53 \times 10 = 3425,3$; $\frac{342,53}{100} = 3,4253$.

29. Para sumar las cantidades decimales se ponen unas debajo de otras con la correspondencia de sus clases, y se suman como enteros, colocando la vírgula delante de la suma de las unidades.

Ejemplo.

$$\begin{array}{r} 4852,791 \\ 4,00745 \\ 2,7 \\ 0,049 \\ \hline 4859,54745 \end{array}$$

De la suma de las décimas (que es 15) paso la reserva 1 á la clase de las unidades, y pongo delante la coma.

Para restar los decimales, coloco el subtrahendo debajo del minuendo, y resto como en los enteros, colocando la vírgula delante de las unidades. Si el minuendo tiene menos notas que el subtrahendo, se le unen á la derecha los ceros necesarios para que haya las mismas notas en uno que en otro.

Ejemplo.

3,842000	He unido tres ceros al minuendo para
1,004554	igualar el número de notas decimales en
2,837446	minuendo y subtrahendo.

Para multiplicar decimales, se multiplican como enteros, y al producto se separan tantas notas para decimales, como decimales hay en ambos factores.

Dem. Queremos multiplicar 43,7 por 3,91. El factor $43{,}7=\frac{437}{10}$: y $3{,}91=\frac{391}{100}$: debemos, pues, multiplicar $\frac{437}{10}\times\frac{391}{100}$. Los numeradores multiplicados entre sí dan el producto 170867, que es el de las dos cantidades consideradas como enteras. El producto de los denominadores es 1000, y debe tener tantos ceros como notas decimales hay en los dos factores; luego el producto de las dos fracciones, que es $\frac{170867}{1000}$, si lo quiero escribir como quebrado decimal, debo separarle al numerador tantas notas para decimales, como hay en ambos factores, y será el producto 170,867.

Otro ejemplo: $2{,}4542\times 0{,}0053=0{,}01300726$.

Para partir los decimales, redúzcolos á un mismo denominador, haciendo igual en ambos el número de notas decimales, y parto despues los numeradores, es decir, las dos cantidades consideradas como enteras.

Ejemplo.

$$\frac{8{,}445}{3{,}22}=\frac{8{,}445}{3{,}220}=\frac{8445}{3220}=2\,\frac{2005}{3220}=2\,\frac{401}{644}.$$

Otros.

$$\frac{49,1}{20,074}=\frac{49100}{20074}=2\,\frac{8952}{20074}=2\,\frac{4476}{10037}$$

$$\frac{57}{4,039}=\frac{57000}{4039}=14\,\frac{454}{4039}$$

Cuando el divisor es entero, se hace la particion como en los enteros, colocando la vírgula delante del cociente de la clase de las unidades. Asi $\frac{4,028}{7}=0,575$.

El último resto se desprecia comunmente: $\frac{0,0324}{52}=0,0006$; $\frac{42,5}{13}=3,2$.

8.º *Aproximaciones y periodos.*

30. Aproximarse á una fraccion en menos de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, ó $\frac{1}{7}$ etc. es hallar una fraccion mas sencilla, que se le diferencie en menos de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ ó $\frac{1}{7}$ etc. Para esto se multiplica el numerador por el denominador 3, 5, 7, etc. de la aproximacion; y partiendo el producto por el denominador del quebrado, el número entero que resulte será el numerador de la fraccion aproximada, y el denominador será 3, 5 ó 7, segun el grado de aproximacion.

Porque sea la fraccion $\frac{427}{680}$, y quiero aproximarme á ella en menos de $\frac{1}{8}$. Multiplicando la fraccion por 8, y poniéndole 8 por denominador, quedará la misma en esta forma: $\frac{\frac{3416}{680}}{8}$. El numerador $\frac{3416}{680}$ está entre 5 y 6: luego la fraccion propuesta está entre $\frac{5}{8}$ y $\frac{6}{8}$: luego $\frac{5}{8}$ se diferencia de la fraccion propuesta en menos de $\frac{1}{8}$.

Luego para aproximar una fraccion en menos de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ etc., se multiplicará el numerador por 10, 100, 1000 etc., y se partirá el producto por el denominador. En la práctica se añade un cero al numerador y á los restos que van quedando, y se parte el producto por el denominador, hasta la concurrencia de los decimales que se piden en la aproximacion. Asi $\frac{25}{7}=$

3,5714 aproximado hasta las diezmilésimas, ó aproximado en menos de una diezmilésima.

31. Una fraccion es convertible exactamente en decimales, cuando los factores simples del denominador son 2 ó 5 solamente, y el número de decimales será igual al grado de la mayor potencia de 2 ó 5: porque sea el denominador 200, ó $2^3 . 5^2$. Si multiplico el numerador por 10^3 ó 1000 para reducir el quebrado á milésimas, como 10^3 es divisible por $2^3 . 5^2$, resultará por numerador un cociente exacto, que llegará á milésimas, ó tendrá tres notas decimales. Asi $\frac{3}{200}=0{,}015$.

Si en el denominador hay algun factor, que no sea 2 ó 5, como los números 10, 100, 1000 etc., por los cuales se multiplica el numerador, no son divisibles sino por 2 ó 5, jamas podrá tener el quebrado espresion exacta en decimales. Como los restos que se van obteniendo deben ser menores que el divisor, al cabo de tantas divisiones por lo menos, como unidades menos una tiene el divisor, se habrá repetido alguno de los restos anteriores, y por tanto desde él volverán en el cociente las mismas notas decimales que se llaman *periodo*, porque se repiten periódica é indefinidamente. Asi $\frac{4}{7}=0{,}571428571428...$ $\frac{1}{37}=0{,}027027...$ $\frac{1}{13}=0{,}076923076923...$ $\frac{1}{41}=0{,}0243902439....$

32. La fraccion, de donde ha procedido un periodo decimal, que empieza desde la vírgula, es igual al periodo dividido por una cantidad compuesta de tantos 9, como notas tiene el periodo.

Dem. Si el periodo consta de solo una nota (como 0, 777777), sabiéndose que $\frac{1}{9}=0{,}111111$, el periodo propuesto vendrá de $\frac{7}{9}$.

Si el periodo consta de dos notas (como 0,636363...) como $\frac{1}{99}$ reducido á decimal es 0,010101, el periodo propuesto procederá de $\frac{63}{99}$ ó $\frac{7}{11}$. La misma demostracion se estiende á los periodos de 3 notas, de 4, de 5 etc. Asi el periodo 0,571428571428 procede de $\frac{571428}{999999}$, que se reduce á $\frac{4}{7}$.

De aqui se infiere, que los periodos que empiezan desde la vírgula, proceden de fracciones, en cuyo denominador no entran como factores ni el 2 ni el 5.

Si el periodo no empieza desde la vírgula, se escribirá como si fuese completo, es decir, como si empezase desde las décimas, se hallará la fraccion comun á que corresponde, y se añadirá á esta ó se restará la diferencia entre el periodo propuesto y el periodo completo, segun que el 1.° sea mayor ó menor que el 2.°

Ejemplo. El periodo incompleto sea 0,58333... Hecho completo es $0,33333=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$: su diferencia con el propuesto es $0,25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$, que añadido á $\frac{1}{3}$, por ser el periodo completo menor que el propuesto, es $\frac{7}{12}$.

Otro. El periodo propuesto sea 0,21333.. El completo es $0,33333=\frac{1}{3}$: réstole la diferencia $0,12=\frac{3}{25}$, y tendré la fraccion generatriz $\frac{16}{75}$.

Otro. Sea el periodo 5,4565656.. El completo es 0,6565.. que procede de $\frac{65}{99}$. La diferencia es $4,8=\frac{24}{5}$: luego la fraccion pedida es $\frac{65}{99}+\frac{24}{5}=\frac{2701}{495}$.

33. Todo periodo incompleto tiene en el denominador de la fraccion de donde procede tantos factores iguales á 2 ó á 5, como notas anteceden desde la vírgula al periodo.

Dem. El periodo incompleto procede de la suma ó diferencia de dos quebrados, cuyos denominadores son, el del uno una cantidad compuesta de tantos 9 como notas tiene el periodo, y el del otro es la unidad con tantos ceros como notas anteceden al periodo, como se ve en el periodo 0,21333 que procede de $\frac{3}{9}-\frac{12}{100}$: luego el comun denominador (en el ejemplo presente es 900) que será el de la fraccion comun, á que se reduce la decimal propuesta, debe tener á 10 por factor tantas veces como notas anteceden al periodo, y por tanto la mayor potencia del 10, que será la del 2 ó del 5, contenida en dicho denominador, indicará el número de notas que anteceden al periodo. Asi la fraccion $\frac{7}{30}=\frac{7}{2.5.3}$, reducida á decimal, tendrá una nota antes del periodo, porque en su denominador es 1 la mayor potencia á que estan elevados el 2 y el 5.

34. Cuando en el producto de dos cantidades decimales no se quiere tanta aproximacion, como se tendria haciendo la multiplicacion por la regla general, se observará el método siguiente:

1.° Márquese con un punto encima la nota del multiplicando inferior á aquella en que se quiere la aproximacion. (En el ejemplo de enfrente, si se quiere la aproximacion hasta las centésimas, póngase el punto sobre las milésimas.)

$$\begin{array}{r}
93,4528 \\
23,4277 \\
\hline
280\ 356 \\
1869\ 056 \\
37\ 380 \\
1\ 868 \\
651 \\
63 \\
\hline
2189,\ 37.
\end{array}$$

2.° Multiplíquense las unidades del multiplicador por todo el multiplicando, empezando desde la nota marcada: las décimas del multiplicador, empezando desde la nota inmediatamente superior á la marcada: las centésimas desde la que sigue superior, y asi hasta la última. Todos estos productos pertenecerán á una misma clase decimal, pues de cada vez bajo una clase en el multiplicador y subo otra en el multiplicando.

3.° Si hay decenas en el multiplicador, estas se multiplicarán por la nota inmediatamente inferior á la marcada: si hay centenas, por la que sigue inferior etc.; para esto se aumentarán ceros á la derecha del multiplicando, si no tiene bastantes cifras. De este modo todos los productos pertenecerán á una misma clase decimal, y deberán empezarse á escribir unos debajo de otros.

4.° Hecha la suma despreciese la última nota de la derecha: pero si pasa de 5, añádase una unidad á la última que queda; de este modo se cometerá menos error: porque si dicha nota es 8, como con respecto á la clase anterior son décimas, menos error es añadir $\frac{2}{10}$ á la clase anterior, que quitarle $\frac{8}{10}$.

5.° La vírgula se pondrá debajo de la del multiplicando.

35. Para aproximar en decimales un cociente, en vez de unir un cero al resíduo, se desprecia la última nota del divisor. El error que produce este método no recae sino sobre la clase inferior del cociente.

Ejemplo.

Se pide en enteros y decimales el valor de $\frac{3203281}{34277}$

	38	Cuando tengo el resíduo 15520, desprecio la nota 7 del divisor, y como pasa de 5, convierto la anterior en 8; y asi de las demas.
3203281	34277	
118351	93,4528	
15520		
.1808		
...93		
25		

9.° *Números complejos.*

36. Llámase número *abstracto* aquel en que solo se considera el número de unidades que contiene, y se prescinde del tamaño ó especie de la unidad. Por

ejemplo, si decimos $5+4=9$, el 5, el 4 y el 9 son números abstractos; porque sean varas, libras ó onzas, siempre se verifica que $5+4=9$.

Número *concreto* es el que se refiere á una unidad definida en cuanto á su tamaño ó especie. Por ejemplo, 5 varas, que es verdaderamente el producto de 1 vara multiplicada por 5, número abstracto.

Obsérvese que en toda multiplicacion *el multiplicador es un número abstracto*; pues sirviendo solo para denotar las veces que se ha de repetir el multiplicando, no hay que atender á su especie, sino al número de sus unidades. Asi es locucion inexacta decir, que para hallar el valor de 48 varas de paño á 100 reales cada una, *se han de multiplicar* 100 *reales por* 48 *varas*. Se debe decir que es necesario *multiplicar* 100 *reales por* 48, número abstracto. Y en efecto, si en lugar de ser 100 reales el valor de una vara de paño, lo fuese por ejemplo de un cordero, para hallar el valor de 48 corderos tendriamos que multiplicar tambien 100 reales por 48, y el producto sería el mismo en ambos casos, 4800 reales: luego la especie del multiplicador no influye en el producto.

En el comercio, las artes y las ciencias se han adoptado varias unidades de todas especies, de diferentes tamaños en cada especie, para proporcionarlas á los tamaños de las cantidades que se han de medir; de modo que no resulten números demasiado grandes, ni fracciones demasiado pequeñas.

Las medidas españolas mas usuales son: para las longitudes, la vara que tiene tres pies, el pie que tiene 12 pulgadas, la pulgada que tiene 12 líneas, y la línea que tiene 12 puntos. Sus relaciones son las siguientes:

1 vara $=$ 3 pies $=$ 36 pulgadas $=$ 432 líneas $=$ 5184 puntos.

$1^{P} = \frac{1}{3}^{v} = 12^{p} = 144^{\text{lin.}} = 1728^{\text{pun.}}$

$1^{p} = \frac{1}{36}^{v} = \frac{1}{12}^{P} = 12^{\text{lin.}} = 144^{\text{pun.}}$

$1^{\text{lin.}} = \frac{1}{432}^{v} = \frac{1}{144}^{P} = \frac{1}{12}^{p} = 12^{\text{pun.}}$

$1^{\text{pun.}} = \frac{1}{5184}^{v} = \frac{1}{1728}^{P} = \frac{1}{144}^{p} = \frac{1}{12}^{\text{lin.}}$

Para los pesos, la libra que tiene 2 marcos, el marco que tiene 8 onzas, la onza que tiene 16 adarmes. Sus relaciones son las siguientes:

$1^{\text{lib.}} = 2^{\text{mc.}} = 16^{\text{on}} = 256^{\text{ad.}}$

$1^{\text{mc.}} = \frac{1}{2}^{\text{lib.}} = 8^{\text{on.}} = 128^{\text{ad.}}$

$1^{\text{on.}} = \frac{1}{16}^{\text{lib.}} = \frac{1}{8}^{\text{mc.}} = 16^{\text{ad.}}$

$1^{\text{ad.}} = \frac{1}{256}^{\text{lib.}} = \frac{1}{128}^{\text{mc.}} = \frac{1}{16}^{\text{on.}}$

Para el tiempo, el dia que tiene 24 horas, la hora que tiene 60 minutos, y el minuto que tiene 60 segundos. Sus relaciones son las siguientes:

$1^{\text{d.}} = 24^{\text{h.}} = 1440' = 86400''$

$1^{\text{h.}} = \frac{1}{24}^{\text{d.}} = 60' = 3600''$

$1' = \frac{1}{1440}^{\text{d.}} = \frac{1}{60}^{\text{h.}} = 60''$

$1'' = \frac{1}{86400}^{\text{d.}} = \frac{1}{3600}^{\text{h.}} = \frac{1}{60}{}'$.

Para el dinero, el duro que tiene 20 reales, y el real que tiene 34 maravedis. Las relaciones son las siguientes:

$1^{\text{du.}} = 20^{\text{rs.}} = 680^{\text{mrs.}}$

$1^{\text{r.}} = \frac{1}{20}^{\text{du.}} = 34^{\text{mrs.}}$

$1^{\text{mr.}} = \frac{1}{680}^{\text{du.}} = \frac{1}{34}^{\text{r.}}$ (Véase el *apéndice* al fin de la Geom.)

Números *complejos* son números concretos, compuestos de diferentes partes referidas á unidades de diferentes tamaños, pero de una misma especie, como $4^{\text{du.}}\ 6^{\text{rs.}}\ 7^{\text{mrs.}}$, $9^{\text{d.}}\ 8^{\text{h.}}\ 40'$, $6^{\text{v}}\ 1^{\text{P}}\ 7^{\text{ps.}}$

Por consiguiente el número complejo no es mas que un número mixto ó fraccionario: por ejemplo, $9^{\text{d}}\ 8^{\text{h}}\ 40' = 9^{\text{d}} + \frac{8}{24} + \frac{40}{1440}$, que efectuando la incorporacion y la suma (21 y 25) $\frac{12960 + 480 + 40}{1440} = \frac{13480}{1440} = \frac{337}{36}$ d. Esta operacion se llama *reducir el número complejo á quebrado de su especie superior*, y se hace reduciendo todo el número á su denominacion inferior, y dándole por denominador una unidad de su denominacion superior reducida á la inferior.

Los números complejos se pueden calcular por las reglas de los quebrados, pues se pueden reducir á quebrados. Tambien se pueden calcular por las reglas de los decimales, reduciéndolos á quebrados y estos á decimales: es verdad que en este caso los resultados no serian ordinariamente mas que aproximados; pero como está al arbitrio del calculador el grado de esta aproximacion, se puede siempre hacer que el error de esta especie de cálculos sea despreciable.

Es facil valuar un quebrado comun de unidad superior en sus partes inferiores, porque si $\frac{4}{9}^{\text{du.}}$ es lo mismo que $4^{\text{du.}}$ partidos por 9 (21), reduciendo los duros á reales se podrá hacer la particion, y será $\frac{4}{9}$ du. $= 8^{\text{rs}}\frac{8}{9}$. Estos $\frac{8}{9}^{\text{rs.}}$ componen $\frac{272}{9}^{\text{mrs.}} = 30\frac{2}{9}^{\text{mrs.}}$: luego $\frac{4}{9}^{\text{du.}} = 8^{\text{rs.}}\ 30\frac{2}{9}^{\text{mrs.}}$ Esto se llama reducir los quebrados á complejos.

Del mismo modo se podrian reducir los decimales tomando el entero para la especie superior. Asi 3^{v}, $42 = 3^{v}$, 1^{P}, 3^{p}, 12.

Sin embargo como es mas facil algunas veces calcular los números complejos bajo su forma propia, se dan las siguientes reglas para efectuar con ellos las operaciones aritméticas.

37. Para sumarlos ó restarlos se escriben unos debajo de otros, poniendo en columna las partes de una misma denominacion, y sumando ó restando despues, empezando por la especie inferior. Si la suma de una columna contiene una ó mas unidades de la denominacion siguiente, se reservan para añadirla á ella. Si el subtrahendo parcial es menor que su correspondiente minuendo, se le añade á este una unidad de la denominacion superior inmediata, y para compensarla se añade otra al subtrahendo de dicha denominacion superior.

Ejemplos de sumar.

154^{v}	2^{P}	7^{p}	$9^{l.}\frac{1}{2}$
23	2	8	$11\frac{5}{6}$
132	2	10	$3\frac{1}{3}$
20	2	7	1
332	1	10	$1\frac{2}{3}$

$322^{du.}$	$17^{rs.}$	$5^{mrs.}$
43	11	7
7	8	4
18	2	30
43	16	32
435	16	10

Ejemplos de restar.

$32^{lb.}$	$1^{mc.}$	$1^{on.}$	$15^{a.}$
17	1	7	7
14	1	2	8

$487^{d.}$	$0^{h.}$	$0'$	$0''$
18	4	30	54
468	19	29	6

Otros ejemplos de restar. Descartes nació en 3 de abril de 1596, y murió en 11 de febrero de 1650. Pascal nació en 19 de junio de 1623, y murió en 19 de agosto de 1662. Newton nació en 15 de diciembre de 1642, y murió en 18 de marzo de 1727. Se pregunta cuánto tiempo vivió cada uno de estos insignes matemáticos.

38. La multiplicacion de los números complejos consiste en valuar cada una de las partes del multiplicador, suponiendo que todo el multiplicando es valor de una unidad de la denominacion superior del multiplicador. Asi que, como ya hemos indicado (36), jamás se debe proceder á la multiplicacion de números complejos, sin que antes se proponga con toda claridad la cuestion que da lugar á esta multiplicacion. Por ejemplo, si se nos dice que multipliquemos $6^{du.}$ $8^{rs.}$ $10^{mrs.}$ por 4^{v} 2^{p} 8^{p}, no lo haremos sin que antes se nos esplique con qué objeto se ha de hacer esta multiplicacion. Porque si es para valuar las 4^{v} 2^{p} 8^{p} en la inteligencia de que cada vara vale el dinero que espresa el multiplicando, en este caso el multiplicador es $4+\frac{2}{3}+\frac{8}{36}$. Pero si el multiplicando fuese el valor de un pie, el multiplicador seria $14+\frac{8}{12}$, que es el número de pies contenido en 4^{v} 2^{p} 8^{p}. Esto quiere decir que las espresiones de *multiplicar* y *partir complejos* son impropias, y solo se adoptan por su brevedad; pero en la práctica se debe atender á la propuesta de la cuestion para dirigir bien el cálculo.

Si el multiplicador es un número entero se multiplica por él cada denominacion del multiplicando.

Ejemplos. 1.° ¿Cuánto valen 7 libras de un género, á razon de $57^{du.}$ $5^{rs.}$ $4^{mrs.}$ la libra? El multiplicador es 7, que multiplicado por todas las denominaciones del multiplicando, da $399^{du.}$ $35^{rs.}$ $28^{mrs.}$ Reduciendo las inferiores á las superiores, resulta...

$57^{du.}$	$5^{rs.}$	$4^{mrs.}$	
7			
399	35	28	
$400^{du.}$	$15^{rs.}$	$28^{mrs.}$,	valor de 7 lib.

2.° Se pide el valor de 17^{v} á razon de..... $45^{du.}$ $12^{rs.}$ $6^{mrs.}$ el pie. El multiplicador es

51, número de pies	$45^{du.}$	$12^{rs.}$	$6^{mrs.}$	
contenido en $17^{v.}$	51			
	2295	612	306	
	$2326^{du.}$	$1^{rl.}$	$0^{mrs.}$	valor de 17^{v}.

Si el multiplicador es número mixto, es mejor dejarlo bajo la forma de complejo para valuar sucesivamente sus partes, que se dividirán de tal modo que cada una sea parte alicuota de la anterior, es decir, que sea divisor exacto de la anterior.

Ejemplos. 1.° Se pide el valor de 4^{v} 2^{p} 8^{p} de un género, á razon de $5^{du.}$ $8^{rs.}$ $10^{mrs.}$ la vara. El multiplicador es $4+\frac{2}{3}+\frac{8}{36}$; pero acomoda dejarlo bajo su forma compleja.

Forma del cálculo.

Valor de una vara	$5^{du.}$	$8^{rs.}$	$10^{mrs.}$	
	4^{v}	2^{p}	8^{p}	
Por 4^{v}	20	32	40	
Por 1^{p}	1	16	$3\frac{1}{3}$	
Por 1^{p}	1	16	$3\frac{1}{3}$	
Por 6^{p}	0	18	$1\frac{2}{3}$	
Por 2^{p}	0	6	$0\frac{5}{9}$	
	$26^{du.}$	$9^{rs.}$	$14\frac{8}{9}^{mrs.}$	valor de 4^{v} 2^{p} 8^{p}.

Esplicacion. Coloco en primer fila el multiplicando, anotando que es valor de una vara, y pongo debajo el multiplicador bajo su forma compleja.

Valúo primero las 4 varas, multiplicando por 4 el valor de una vara.

Tengo que valuar 2 pies: pero como estos no son parte alicuota de la vara, valúo un solo pie, que es tercera parte de la vara, sacando el tercio del multiplicando. Pongo debajo el valor del otro pie.

Tengo ahora que valuar 8 pulgadas. Como 6 pulgadas componen medio pie, les corresponde la mitad de lo que vale el pie. Quedan que valuar 2 pulgadas, que son la tercera parte de 6 pulgadas, y les corresponde la tercera parte del producto anterior. Sumo y tengo el producto total.

2.° ¿Cuánto valen $18^{lib.}\ 0^{mc.}\ 6^{on.}\ 4^{ad.}$ de cualquier género, valiendo el marco $51^{d.}\ 15^{rs.}\ 5^{mrs.}$? El multiplicador es $36 + \frac{6}{8} + \frac{4}{128}$. Dejémoslo bajo la forma compleja $36^{mc.}\ 6^{on.}\ 4^{ad.}$

Valor de $1^{mc.}$.. $51^{d.}\ 15^{rs.}\ 5^{mrs.}$

$36^{mc.}\ 6^{on.}\ 4^{ad.}$

por $36^{mc.}$..	306	90	180	
	153	45		
por $4^{on.}$......	25	17	$19\frac{1}{2}$	, mitad del valor del $m^{co.}$
por $2^{on.}$......	12	18	$26\frac{3}{4}$	, mitad del valor de $4^{on.}$
por $4^{ad.}$......	1	12	$11\frac{27}{32}$	, octava del valor de $2^{on.}$

$1903^{du.}\ 14^{rs.}\ 0\frac{3}{34}^{mrs.}$, valor de $18^{lib.}\ 0^{me.}\ 6^{on.}\ 4^{ad.}$

3.° Se pide el valor de $36^{lib.}\ 6^{on.}\ 9^{ad.}$ de plata, cuya *ley es de* 11 *dineros y* 12 *granos.*

Para resolver esta cuestion debemos observar, que teniendo la plata liga considerable de otras materias desde que sale del mineral, y no despojándose nunca enteramente de ellas por las operaciones que sufre despues, cuando está labrada, bajo cualquier forma que sea, contiene siempre alguna porcion de aquellas materias no preciosas. Pero como unos pedazos de mineral contienen mas liga que otros; y por otra parte, las operaciones que sufre hasta que está labrada, dejan en unas porciones mas liga que en otras, de aqui es, que la cantidad de plata pura es diferente en las diversas piezas labradas de este metal, y su precio es diverso segun la diferente cantidad de plata pura, que contiene cada pieza, que es lo que se llama la *ley de la plata* en aquella pieza.

Para valuar esta ley, se divide el marco de peso en 12 *dineros*, y cada *dinero* en 24 *granos;* de modo que el marco consta de 288 granos.

Un pedazo de plata enteramente pura tendria la ley de 12 dineros: es decir, que todo el marco seria plata sin liga alguna.

La operacion del *contraste*, propia del arte de la platería, consiste en averiguar la ley de una pieza de plata, es decir, de los 12 dineros que contiene cada marco suyo, averiguar cuantos son de plata pura, y cuantos de liga. Así, cuando en el contraste se declara que la ley de una pieza de plata es de $10\frac{1}{2}$ dineros ó de $10^{di.}$ $12^{gr.}$, esto quiere decir, que en cada marco de aquella pieza hay $10\frac{1}{2}$ dineros de plata pura, y $1\frac{1}{2}$ de liga sin valor, ó 252 granos de plata pura y 36 de liga.

Conocida la ley de una pieza de plata, es fácil de averiguar su valor en reales, porque cada grano de plata pura vale $\frac{20}{33}$ de real por las leyes de España.

En el ejemplo propuesto la ley de la plata es $11^{d.}$ $12^{gr.}$, ó $276^{gr.}$: lo que quiere decir, que teniendo el marco 276 granos de plata pura, vale $276 \times \frac{20}{33}$, ó $\frac{5520}{33} = 167^{rs.}\frac{9}{33} = 167^{rs.}\frac{3}{11}$. La cuestion se reduce, pues, á esta: valiendo el marco $167^{rs.}\frac{3}{11}$, ¿cuánto valdrán $36^{lib.}$ $6^{on.}$ $9^{ad.}$? El multiplicador es $72^{mc.}$ $6^{on.}$ $9^{ad.}$ Como $\frac{3}{11}$ de real valen $9\frac{3}{11}$ maravedí, el multiplicando es

Valor de 1 marco.	$167^{rs.}$	$9^{mrs.}\frac{3}{11}$	
	$72^{mc.}$	$6^{on.}$ $9^{ad.}$	
Por 72 marcos...	334 1169	$667\frac{7}{11}$	
Por 4 onzas.......	83	$21\frac{7}{11}$,	mitad del valor del marco.
Por 2 onzas.......	41	$27\frac{9}{22}$,	mitad del valor de 4 onzas.
Por 8 adarmes...	10	$15\frac{5}{22}$,	cuarta parte del valor de 2 onz.
Por 1 adarme....	1	$10\frac{19}{44}$,	octava parte del valor de 8 ad.s
	$12180^{rs.}$	$28\frac{43}{44}^{mrs.}$,	valor de la pieza de plata.

39. Dos casos diferentes pueden ocurrir cuando hay que partir números concretos: el primero cuando hay que averiguar el número de veces que una cantidad se contiene en otra de su misma especie: el segundo, cuando se trata de repartir el dividendo en cierto número de partes iguales. En el primer caso el divisor es concreto: en el segundo es abstracto (36).

Ejemplo del primer caso. Habiendo empleado $60^{du.}$ $8^{rs.}$ $14^{mrs.}$ en una pieza de paño á razon de $3^{du.}$ $4^{rs.}$ $20^{mrs.}$ la vara, se pide cuantas varas tenia la pieza. Tendria tantas como veces el precio de una vara se contiene en el valor de toda la pieza: por tanto deberé partir los $60^{du.}$ $8^{rs.}$ $14^{mrs.}$ por $3^{du.}$ $4^{rs.}$ $20^{mrs.}$, particion en la cual el divisor es concreto, y el cociente debe ser abstracto, aunque la propuesta de la cuestion lo obliga á ser varas.

Esta particion se hace con facilidad, reduciendo dividendo y divisor á una misma denominacion, que ordinariamente es la menor, y partiendo despues. En el ejemplo el dividendo se reduce á 41086 mrs., y el divisor á 2196: el cociente es $18^{v}\,\frac{779}{1098} = 18^{v}\,2^{P}\,1^{p}\,\frac{33}{61}$.

Ejemplo del segundo caso. Habiendo empleado $60^{du.}\ 8^{rs.}\ 14^{mrs.}$ en $3^{v}\ 2^{P}\ 8^{p}$, averiguar el precio de una vara. Esta cuestion se reduce á dividir $60^{du.}\ 8^{rs.}\ 14^{mrs.}$ en el número de partes iguales, que espresa el número $3+\frac{2}{3}+\frac{8}{36}$. Asi el divisor es abstracto, y el cociente será concreto y de la especie del dividendo, pues es una parte suya.

Para hacer la division en este caso, despues de simplificar los quebrados del divisor, se reduce todo él á un solo quebrado; y se partirá el dividendo por él (27), multiplicando el dividendo por el denominador, y partiendo el producto por el numerador. Si el divisor es entero, no hay mas que partir por él sucesivamente las partes del dividendo, reduciendo los restos de denominacion superior á la inferior inmediata. En el ejemplo anterior el divisor es $3+\frac{2}{3}+\frac{8}{36} = 3+\frac{2}{3}+\frac{2}{9} = 3\frac{8}{9} = \frac{35}{9}$. Multiplico, pues, el dividendo por 9, y pártolo por 35.

$60^{du.}$	$8^{rs.}$	$14^{mrs.} \times 9$	
540	72	126	
$543^{du.}$	$15^{rs.}$	$24^{mrs.}$	35
193	$37{,}5^{rs.}$		
18	25	$87{,}4^{mrs.}$	$15^{du.}\ 10^{rs.}\ 24^{mrs.}\,\frac{34}{35}$
		174	
		34	

La particion de $543^{du.}$ por 35 deja de resto $18^{du.}$ Los reduzco á 360rs., que con los 15 que tiene el dividendo componen 375 rs. Su resto 25 rs. = 850 mrs., que con los 24 del dividendo componen 874 mrs.

Un obrero ha recibido $151^{rs.}\ 20^{mrs.}$ por $42^{ds.}$ de trabajo: ¿á cómo ha salido por dia? El divisor es 42.

$151^{rs.}$	$20^{mrs.}$	42
25	870	$3^{rs.}\ 20^{mrs.}\,\frac{5}{7}$
	30	

10.° *Formacion de las potencias.*

40. Para elevar un número á la segunda potencia se le multiplica por sí mismo una vez: para elevarlo á la tercera, dos veces: para elevarlo á la cuarta, tres veces etc.

Potencias de los números dígitos.

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32763	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000

La potencia de un producto es igual al producto de las potencias del mismo índice de sus factores: porque si $35=5\times 7, 35^4=35\times 35\times 35\times 35=5\times 7\times 5\times 7\times 5\times 7\times 5\times 7$; y siendo indiferente el orden en que se multipliquen estos factores (6), será $35^4=5^4\times 7^4$: luego etc.

La raiz de un producto es igual al producto de las raices del mismo índice de sus factores: porque si $35=5\times 7$, y $35^4=5^4\times 7^4$, para estraer raiz 4.ª de esta segunda ecuacion y reproducir la primera, deberá estraerse la raiz 4.ª de los factores 5^4 y 7^4, lo que da 5 y 7, y multiplicarse despues: luego etc.

Una fraccion se eleva á una potencia elevando sus dos términos: porque $\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3^3}{5^3}=\frac{27}{125}$: luego etc.

La raiz de una fraccion se estrae estrayéndola de sus dos términos: porque si $\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{3^3}{5^3}$, $\sqrt[3]{\frac{3^3}{5^3}}=\frac{3}{5}$;

y para volver de $\frac{3^3}{5^3}$ á $\frac{3}{5}$, debe estraerse raiz cúbica de los dos términos del quebrado: luego etc.

41. *Una fraccion irreductible, elevada á cualquier potencia, produce una fraccion irreductible.*

Dem. Sea la fraccion irreductible $\frac{4}{15}$, y por consiguiente 4 y 15 son primos entre sí. Elevada al cubo produce $\frac{4\times4\times4}{15\times15\times15}$: es decir, quedan en numerador y en denominador los mismos factores primos que en $\frac{4}{15}$: pero en 4 y 15 no hay ningun factor comun: luego tampoco lo hay en $\frac{4\times4\times4}{15\times15\times15}$: luego etc.

11.º *Estraccion de las raices cuadradas.*

42. *El cuadrado de un número dividido en dos partes consta del cuadrado de la 1.ª, dos veces el producto de la 1.ª por la 2.ª, y el cuadrado de la 2.ª*

Porque para multiplicar $7+5$ por $7+5$ deberé multiplicar $7+5$, primero por 7, y luego por 5: la primer multiplicacion da $7^2+7.5$; y la segunda $7.5+5^2$; y reuniendo se tiene $(7+5)^2=7^2+2.7.5+5^2$. No se crea, pues, que para cuadrar la cantidad $7+5$ basta cuadrar el 7 y el 5: es menester añadir á sus cuadrados el doble de 7×5. *De aqui se infiere que el cuadrado de un número de dos cifras se compone del cuadrado de las decenas, dos veces el producto de decenas por unidades y cuadrado de unidades.*

El cuadrado de un número tiene doble número de cifras que la raiz, ó doble número de cifras menos una. Porque siendo 100 el cuadrado de 10, y 10000 el de 100, todo número de dos cifras (por consiguiente comprendido entre 10 y 100) tendrá su cuadrado entre 100 y 10000, es decir, tendrá ó 4 cifras ó 3: del mismo modo probaré que siendo el cuadrado de 100, 10000, y el de 1000, 1000000, todo número de 3 cifras ha de tener en su cuadrado ó 6 cifras ó 5 etc.

43. Los números de una cifra ó de dos tienen un número dígito por raiz cuadrada. Veamos cómo se halla esta, cuando el número tiene 3 ó 4 cifras.

Sea, por ejemplo, el número propuesto 784, que deberá estar compuesto del cuadrado de las decenas, del duplo de decenas por unidades y del cuadrado de unidades. El cuadrado de las decenas se forma cuadrando la cifra de las decenas, y añadiéndole dos ceros: luego este cuadrado no entra en la suma hasta la clase de las centenas. Luego deberé separar las dos primeras cifras de la derecha, y lo que quede á la izquierda (el 7) contendrá el cuadrado de la cifra de las decenas, y ademas las centenas que produzcan las otras dos partes del cuadrado.

Tómese, pues, la raiz del mayor cuadrado contenido en la primer division de la izquierda (esta raiz es 2), y se tendrá la cifra de las decenas. Restando su cuadrado de la primer division, el resto (que es 3) será la reserva del doble de decenas por unidades y del cuadrado de unidades. Esta reserva, reunida con las dos notas separadas á la derecha, formará un todo (que es 384), que contendrá las dos segundas partes del cuadrado.

El duplo de decenas por unidades se forma multiplicando el doble de la cifra de las decenas por las unidades, y agregando un cero á la derecha: luego en la suma este producto estaba contenido en las decenas: separando, pues, la nota de las unidades, lo que quede á la izquierda (que es 38) será el duplo de la nota de las decenas por las unidades. Pártase, pues, por el duplo de la nota de las decenas, y se tendrá la de las unidades. Multiplicando el cociente por el divisor, y restando del dividendo, el resíduo será la reserva del cuadrado de las unidades. Si este resíduo, uniéndole la última nota (que es 4) iguala al cuadrado de las unidades, la raiz es exacta, y la operacion está concluida. Si es menor que el cuadrado de las unidades, quiere decir que es necesario disminuir la nota de las unidades. Hé aqui el cálculo.

$\sqrt{7,84} = 28$	$\sqrt{27,35} = 52$	$\sqrt{1,21} = 11$
$38,4 \mid 48$	$23,5 \mid 102$	$.2,1 \mid 21$
$000 \quad 8$	$.31 \quad 2$	$. \; . \quad 1$

Cuando el número pasa de 4 cifras, la raiz tendrá mas de dos: eso quiere decir, que las decenas de la raiz constan de mas de una cifra, y el procedimiento del cálculo será el mismo.

$\sqrt{27,35,29} = 523$
$23,5 \mid 102$
$312,9 \; 2 \mid 1043$
$\ldots\ldots \quad 3$

En este número el cuadrado de las decenas está contenido en 2735; la raiz del mayor cuadrado contenido en este número, se halla por el método anterior, y es 52, el resto es 31: luego 3129 contiene el duplo de decenas por unidades y el cuadrado de unidades: separando, pues, la cifra 9, y dividiendo 312 por el duplo de las decenas, que es 104, se tendrán las unidades 3.

Como este razonamiento puede aplicarse á cualquier número, se ve que se deberá dividir el número de dos en dos cifras desde la derecha á la izquierda. Cuando el número de cifras es impar, la última division de la izquierda tendrá solo una cifra. Cada division debe producir una cifra en la raiz.

44. Si el número entero propuesto no es cuadrado perfecto, no podrá espresarse su raiz ni en números enteros, ni en números fraccionarios. Asi $\sqrt{5}$ no puede ser un número entero, pues está entre 2 y 3, ni puede ser un número fraccionario; pues este, elevado al cuadrado, produciria una fraccion irreductible (41), que no podria ser igual á 5. Por esta razon se llaman *inconmensurables* las raices de números que no son potencias perfectas.

Es posible acercarse cuanto se quiera á una raiz inconmensurable: para esto fijo la aproximacion que quiero tener, es decir, determino si quiero aproximarme al valor de la raiz con diferencia de menos de $\frac{1}{5}$, de $\frac{1}{7}$, de $\frac{1}{10}$ etc. Multiplico la cantidad propuesta por el cuadrado del denominador de la aproximacion: estraigo raiz cuadrada del cuadrado mayor contenido en el producto, y á esta raiz doy por denominador el de la aproximacion. Por ejemplo: quiero la raiz cuadrada de 5 con diferencia de menos de $\frac{1}{6}$. Multiplico $5 \times 6^2 = 180$: su raiz próxima menor es 13: y digo que $\frac{13}{6}$ se diferencia de $\sqrt{5}$ menos de $\frac{1}{6}$.

Dem. Es evidente que $\sqrt{5} = \frac{6\sqrt{5}}{6}$. Tambien lo es que $6\sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 6^2} = \sqrt{5 \cdot 36} = \sqrt{180}$: luego $\sqrt{5} = \frac{\sqrt{180}}{6}$. Pero $\sqrt{180}$ está entre 13 y 14: luego $\frac{\sqrt{180}}{6}$, ó $\sqrt{5}$ está entre $\frac{13}{6}$ y $\frac{14}{6}$; pero de $\frac{13}{6}$ á $\frac{14}{6}$ hay de diferencia $\frac{1}{6}$: luego de $\frac{13}{6}$ á $\sqrt{5}$ hay menos de $\frac{1}{6}$ de diferencia.

Si la aproximacion debe ser por decimales se multiplicará la cantidad por el cuadrado del denominador de la aproximacion; lo que equivale á añadirle tantas veces dos ceros como notas decimales se quieren. En la práctica se añaden dos ceros á cada residuo, y cada dos ceros han de dar una nota decimal en la raiz.

Ejemplo.

```
√3,2 1 = 17,916
 2 2,1   |27
  3 20,0 7 |349
   ..590,0  9 |3581
     231 90,0  1|35825
                   6
```

Al resíduo 32 uno dos ceros, y continúo la misma operacion de la raiz cuadrada, teniendo cuidado de poner la coma decimal antes de las notas que van á resultar.

45. Para estraer raiz cuadrada de un quebrado, cuyos dos términos la tienen exacta, se estrae de ambos. Asi $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Si el denominador es el único que tiene raiz exacta, se estrae del numerador aproximada, y del denominador exacta, y se parten despues: asi $\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1,414}{3} = 0,471$.

Si el denominador no tiene raiz exacta, se multiplican los dos términos del quebrado por el denominador: el quebrado que resulte será igual al propuesto, y su denominador tendrá raiz exacta.

Ejemplo. $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{21}{7^2}}=\frac{4.582}{7}=0,654.$

Para estraer la raiz cuadrada de un número mixto, se le reduce á quebrado, y se le estrae despues la raiz.

$\sqrt{3\frac{5}{7}}=\sqrt{\frac{26}{7}}=\sqrt{\frac{182}{7^2}}=\frac{13,4907}{7}=1,9272.$

Para estraer raiz cuadrada de una cantidad decimal, se hará la misma operacion que en los enteros; pero antes debe hacerse el denominador cuadrado perfecto. Para esto es menester que el número de notas decimales de la cantidad sea par.

Ejemplo. $\sqrt{0,3}=\sqrt{0,30}=0,54$, aproximando la raiz hasta las centésimas.

Cuando una raiz inconmensurable está multiplicada ó partida por otra, deberá estraerse la raiz del producto ó cociente de las dos cantidades. Asi $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{5}{7}}$ (40).

12.° *Raices cúbicas.*

46. El cubo de una cantidad $(7+5)$, compuesta de dos partes, consta de cuatro productos: á saber, cubo de la primera, triplo del cuadrado de la primera por la segunda, triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, y cubo de la segunda $(7^3+3.7^2.5+3.7.5^2+5^3)$.

Dem. El cuadrado de una cantidad $7+5$, compuesta de dos partes, es igual al cuadrado de la primera, duplo de la primera por la segunda y cuadrado de la segunda: esto es, $7^2+2.7.5+5^2$. Multiplicando este cuadrado por $7+5$, resultará el cubo de $7+5$. Multiplico, pues, $7^2+2.7.5+5^2$, primero por 7, y despues por 5, y tendré

$$\left.\begin{array}{l}7^3+2.7^2.5+7.5^2\\ \quad+\quad 7^2.5+2.7.5^2+5^3\end{array}\right\}=7^3+3.7^2.5+3.7.5^2+5^3:$$ luego etc.

De aqui se infiere que toda cantidad compuesta de decenas y unidades, tendrá su cubo compuesto de estas cuatro partes: cubo de decenas (esto es, la nota de las decenas elevada al cubo, uniéndole tres ceros): tres veces el cuadrado de las decenas por las unidades (producto que tendrá dos ceros á la derecha; esto es, pertenece á una clase inferior un lugar á la anterior): triplo de decenas por cuadrado de unidades (que será de una clase inferior en un lugar á la anterior), y cubo de unidades, que tambien bajará un lugar con respecto á la clase anterior.

Ejemplo.

$45^3=64$	cubo de decenas.
240	triplo del cuadrado de dec.^s por unidades.
300	triplo de dec.^s por cuadrado de unidades.
125	cubo de unidades.
91125.	

Los números de una nota (que estan entre 1 y 10) tienen sus cubos entre 1 y 1000, esto es, no pasan sus cubos de tres notas. Los números de dos notas (que estan entre 10 y 100) tienen sus cubos entre 1000 y 1000000, esto es, no tienen sus cubos menos de cuatro notas, ni mas de 6; y en general el número de notas que tiene el cubo, ó es triplo del que tiene la cantidad, ó es dicho triplo menos 1, ó dicho triplo menos 2.

47. Si se quiere estraer raiz cúbica de un número que no pasa de tres notas, dicha raiz cúbica no tendrá mas que una, y se hallará en la tabla de los cubos de los números dígitos: asi $\sqrt[3]{216}=6$.

Si el número tiene mas de tres notas, y no pasa de seis notas, su raiz cúbica tendrá dos, una de decenas y otra de unidades: luego el número propuesto contendrá el cubo de las decenas, el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, y el cubo de las unidades. Como el cubo de las decenas está en los millares, separo las tres primeras notas de la derecha, busco la raiz cúbica próxima menor contenida en los millares, que quedarán á la izquierda, y esta raiz cúbica será la nota de las decenas. Tomo su cubo, y réstolo de los millares; y uniendo al resíduo las notas que se separaron primero, su conjunto compondrá el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, y el cubo de las unidades.

El primero de estos tres productos debe estar en las centenas: separo, pues, las dos primeras notas de la derecha, y parto las centenas por el triplo del cuadrado de las decenas, y tendré en el cociente la nota de las unidades. Multiplico el cociente por el divisor, y añadiéndole á este producto las dos partidas que faltan para completar el cubo, que son: triplo de decenas por cuadrado de unidades y cubo de unidades, restaré la suma de la cantidad, y debe quedar cero si la raiz es exacta. Si esta suma es mayor que la cantidad, debe disminuirse la nota de las unidades.

Ejemplo.

$$\begin{array}{rl}
\sqrt[3]{91,125}=45 & \\
64 & \\
\hline
271,25 & \underline{|\,48\,} \\
240 & \quad 5 \\
300 & \\
125 & \\
\hline
\ldots &
\end{array}$$

Separo las tres primeras notas. $\sqrt[3]{91}$ es próximamente 4, nota de las decenas. Resto su cubo 64 de los millares. El resto es 27: únole la 1.ª division 125. Las centenas son 271: pártolas por 48, triplo del cuadrado de 4. El cociente 5 son las unidades. Multiplico cociente por divisor, completo el cubo, añadiendo 300, que es $3.4.5^2$ y 125, que es 5^3. No queda nada.

Es, pues, $45=\sqrt[3]{91125}$.

Si el número tiene mas de 6 notas, las decenas de la raiz tienen mas de una nota. Se hallan empleando para la estraccion de la raiz cúbica de los millares la regla anterior.

Ejemplo. $\sqrt[3]{12,305,472} = 230$

$23^3 = 4$ 43,05 | 12 36

129 4167 3 54

529 1384.72 | 1587 27

0 4167

Para estraer la raiz cúbica de los millares 12305, separo las tres notas 305, y hago la operacion anterior. Las decenas son 23. Para hallar las unidades repito la misma operacion. La raiz 230 es inexacta.

48. Para aproximar una raiz cúbica inexacta se multiplica la cantidad por el cubo del denominador de la aproximacion, y se estrae la raiz cúbica en enteros, poniéndole despues el denominador de la aproximacion. Asi $\sqrt[3]{2}$ en menos de $\frac{1}{4}$, es $\frac{\sqrt{64.2}}{4} = \frac{5}{4}$.

Si la aproximacion es por decimales, se agregan tantas veces tres ceros como notas decimales se pidan en la aproximacion: esto equivale á multiplicar cada vez por 1000, que es el cubo de 10.

Ejemplo.

$\sqrt[3]{477} = 7,813$

343

1340.00 | 147

..24480.00 98

6204590,00

| 18252 1176

1 1344 18252

| 1829883 512 2341

3

El 9 no es buena nota como se ve en el cálculo siguiente: 1323 la suma de 1701. Solo estas dos partidas es mayor que el dividendo.

Si el número es fraccionario, se hará su denominador cubo exacto, si no lo es, multiplicando los dos términos del quebrado por el cuadrado del denominador. Se estrae despues la raiz del numerador, exacta ó aproximada, segun sea, y se parte por la del denominador.

Ejemplos. $\sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5.7^2}{7^3}} = \frac{6,2573}{7} = 0,8939.$

Otro. $\sqrt[3]{17\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{53}{3}} = \sqrt[3]{\frac{53.3^2}{3^3}} = \frac{7,813}{3} = 2,604.$

Si la cantidad de que se quiere estraer raiz cúbica es decimal, deberá tener un número de decimales triplo del que ha de tener la raiz; para esto se le unen á la derecha los ceros necesarios. Despues se estrae la raiz cúbica, como en los enteros. La coma decimal se pondrá en la raiz, cuando se empiecen á bajar las divisiones decimales. Asi $\sqrt[3]{5,7}$ aproximada hasta las décimas, es $\sqrt[3]{5,700} = 1,7$; $\sqrt[3]{3,2178}$, aproximada hasta las décimas, es $\sqrt[3]{3,218} = 1,4$; $\sqrt[3]{0,3}$ aproximada hasta las centésimas es $\sqrt[3]{0,300000} = 0,66$.

13.° *Equidiferencias y proporciones.*

49. Cuando se comparan dos cantidades, ó es con el objeto de averiguar el esceso de la una sobre la otra, ó con el de averiguar cuántas veces cabe la una en la otra. El resultado de esta segunda comparacion, que es el cociente de las dos cantidades, se llama *razon*. La razon de 12 á 4 es $\frac{12}{4}$, ó 3. El primer término de la razon se llama *antecedente*, y el segundo *consecuente*.

La diferencia entre dos números no se altera añadiendo ó restando á ambos una misma cantidad (5). Asi $12-5=13-6=11-4$.

La razon de dos números no se altera, multiplicándolos ó partiéndolos por un mismo número (13, 9.°). Asi $\frac{42}{12}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$.

La razon de las cantidades irracionales es la de sus valores aproximados. Tal vez esta relacion puede ser racional. Asi $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}=2$.

Hay equidiferencia entre cuatro cantidades, cuando la diferencia de las primeras es igual á la de las segundas. $10-8=7-5$.

En toda equidiferencia la suma de los términos estremos es igual á la de los medios: porque si $10-8=7-5$, añadiendo á ambas partes $5+8$, resulta $10+5=7+8$: luego etc.

Reciprocamente de la igualdad de dos sumas se puede deducir una equidiferencia: porque si $10+5=7+8$, restando de ambos miembros 5 y 8, resulta $10-8=7-5$.

Conociendo tres términos de una equidiferencia se puede averiguar el que falta: porque si es estremo, se suman los medios, y de la suma se resta el estremo conocido; y si es medio, se suman los estremos, y de la suma se resta el medio conocido.

Ejemplos. Si $9-7=10-x$ (x representa el término desconocido), será $x=10+7-9=8$, y la equidiferencia será $9-7=10-8$.

$9-7=x-14$, da $x=16$, y $9-7=16-14$.

La equidiferencia es *contínua* si los términos medios son iguales, como $9-7=7-5$. En ella *la suma de los estremos es igual al doble del término medio, y este $=$ á la semisuma de los estremos.* Asi el término medio entre 15 y 29 es 22, de modo que $29-22=22-15$.

50. *Proporcion* es la igualdad de dos razones; y como razon no es mas que el cociente de dos cantidades ó el quebrado que forman (49), se infiere, que la proporcion no es mas que la igualdad de dos quebrados. Tal es $\frac{20}{10}=\frac{30}{15}$, que se pinta asi $20:10::30:15$. La proporcion es contínua cuando sus medios son iguales, como esta $20:10::10:5$.

En toda proporcion *el producto de los estremos es igual al de los medios*, porque si $\frac{20}{10}=\frac{30}{15}$, será 20×15

$=30\times 10$ (23): luego etc. Si la proporcion es contínua, el producto de los estremos será igual al cuadrado del término medio, y este igual á la raiz cuadrada del producto de los estremos. Asi el término medio entre 3 y 12, es $\sqrt{3\times 12}=6$, y la proporcion contínua es $3:6::6:12$.

De dos productos iguales se puede formar una proporcion, pues se pueden formar de ellos dos quebrados iguales. Asi si $8\times 5=4\times 10$, será $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, ó $8:10::4:5$.

Por la misma razon, si el cuadrado de un número es igual al producto de otros dos, aquel número será *medio proporcional* entre los otros dos: asi si $6^2=3\times 12$, será $3:6::6:12$.

Dados tres términos de una proporcion, se podrá averiguar el que falta, si es estremo, multiplicando los medios, y partiendo el producto por el estremo conocido; si es medio, multiplicando los estremos y partiendo el producto por el medio conocido.

Ejemplo. $7:9::21:x=\frac{21\times 9}{7}=27$.

51. Dada una proporcion se podrán disponer sus términos de otras siete maneras, conservando siempre el producto de estremos igual al de medios, empezando por un mismo término en cada dos disposiciones.

Ejemplo.

$7:21::9:27$

$7:9::21:27$. Esta se llama *la alternada* de la primera.

$21:7::27:9$. Esta se llama *la invertida* de la primera.

$21:27::7:9$

$9:27::7:21$

$9:7::27:21$

$27:9::21:7$

$27:21::9:7$

Tambien se pueden multiplicar y partir los dos antecedentes ó los dos consecuentes por un mismo número; pues esto equivale á multiplicar ó partir los productos de estremos y medios por un mismo número.

Suma ó diferencia de antecedentes es á suma ó diferencia de consecuentes, como un antecedente á su consecuente; y suma ó diferencia de los términos de una razon es á suma ó diferencia de los términos de la otra, como antecedente á antecedente, ó consecuente á consecuente: pues se ha demostrado (24), que si $\frac{8}{24}=\frac{7}{21}$, será $\frac{8+7}{24+21}=\frac{8-7}{24-21}=\frac{8}{24}=\frac{7}{21}$, y $\frac{24+8}{21+7}=\frac{24-8}{21-7}=\frac{8}{7}=\frac{24}{21}$: luego etc.

En una serie de razones iguales la suma de antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente á su consecuente: porque si $\frac{6}{3}=\frac{4}{2}=\frac{10}{5}\ldots$ será $\frac{6+4+10}{3+2+5}=\frac{6}{3}$.

Multiplicando dos proporciones término á término, habrá proporcion. Porque si $\frac{6}{3}=\frac{14}{7}$, y $\frac{9}{2}=\frac{18}{4}$, multiplicando estas dos ecuaciones será $\frac{6\times 9}{3\times 2}=\frac{14\times 18}{7\times 4}$. Luego elevando los términos de una proporcion á una misma potencia, ó estrayéndoles una misma raiz, resultará proporcion.

14. *Regla de tres.*

51. Regla de tres simple es la que se aplica á todas las cuestiones, en que dos cantidades estan en proporcion con otras dos, siendo la 4.ª la incógnita. *Ejemplo.* Si 30 obreros hacen 20 varas de obra, 21 ¿cuántas harán? Se conoce que el número de obreros debe ser proporcional á las varas que harán, observando que á doble número de trabajadores debe corresponder doble número de varas, etc.

Se llaman *datos* las dos cantidades conocidas de una misma especie, y resultados las otras dos.

La regla es directa, cuando aumentando ó disminuyendo los datos, aumentan ó disminuyen los resultados; inversa, cuando aumentando los datos disminuyen los resultados, ó disminuyendo los datos, aumentan los resultados. Por ejemplo: 57 obreros hacen una obra en 5 dias: 19 obreros ¿en cuánto tiempo la harán? A proporcion que disminuya el número de obreros, aumentará el tiempo que necesitan para hacer la misma obra, y por tanto esta regla es inversa.

La directa se resuelve diciendo: dato del resultado conocido es al dato del resultado incógnito, como el resultado conocido es al incógnito; y se busca el cuarto término de esta proporcion. En la inversa se dice: dato del resultado incógnito es al dato del resultado conocido, como el resultado conocido es al incógnito: pues este debe ser tantas veces mayor que el resultado conocido, cuantas su dato es menor que el del resultado conocido.

Ejemplos.

1.° 30 obreros hacen 20 varas de pared: 21 ¿cuántas harán? A menos obreros menos varas. Regla directa: $30:21$, ó $10:7::20:x=14$ varas.

2.° Cincuenta y siete obreros hacen una obra en 5 dias: 19 ¿en cuánto tiempo la harán? A menos obreros mas dias: regla inversa: $19:57$, ó $1:3::5:x=15$ dias.

3.° Para forrar un mueble se han gastado de una tela de $\frac{3}{4}$ de ancho 6 varas: ¿cuántas serian necesarias para forrarlo de una tela de $\frac{2}{3}$ de ancho? A menos ancho mas largo: inversa: $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}::6:x=6\frac{3}{4}$ varas.

4.° Un viagero para caminar 50 leguas ha empleado 8 dias: para caminar 80 ¿cuántos empleará? A mas leguas mas dias; directa: $50:80$, ó $5:8::8:x=12\frac{4}{5}$ dias.

5.° Un hombre caminando 7 horas al dia emplea 8 dias en acabar su viage: si hubiese caminado 10 horas al dia ¿cuántos dias hubiera empleado? Mientras mas horas ande al dia menos tiempo necesita para el viage: inversa: $10:7::8:x=5,6$ dias.

6.° $17^{\text{lib.}}\ 5^{\text{on.}}\ 4^{\text{ad.}}$ de plata valen 869 pesetas $3^{\text{rs. vn.}}$

$6^{mrs.}$; $14^{lib.}$ $3^{on.}$ $2^{ad.}$ $\frac{1}{2}$ ¿cuánto valdrán? A menos libras de plata menos valor: directa.

$17^{lib.}$ $5^{on.}$ $4^{ad.}$: $14^{lib.}$ $3^{on.}$ $2^{ad.}$ $\frac{1}{2}$: : $869^{pes.}$ $3^{rs.\ vn.}$ $6^{mrs.}$: x. Reduzco los dos primeros términos á su menor especie, y simplificando es 8872 : 7269 : : 869 $^{pes.}$ $3^{rs.}$ $6^{mrs.}$: $x = 712^{pes.}$ $2^{rs.}$ $18^{mrs.}$ $\frac{2013}{2218}$.

7.° Seis escuadrones han consumido un almacen de víveres en 54 dias: ¿9 escuadrones en cuánto tiempo lo hubieran consumido? A mas escuadrones menos tiempo: inversa: 9 : 6, ó 3 : 2 : : 54 : $x = 36$ dias.

8.° Un navío tiene víveres para 10 dias, pero aun tiene que estar 15 en la mar. ¿A cuánto debe reducirse la racion de cada navegante?

Llamando 1 á la racion que tienen, observo que mientras mas tiempo esten en la mar menos racion debe darse á cada uno, si se quiere que alcancen los víveres hasta 15 dias: luego la regla es inversa : 15 : 10, ó 3 : 2 : : 1 : $x = \frac{2}{3}$. Luego la racion debe reducirse á los $\frac{2}{3}$ de lo que era.

52. Regla de tres compuesta es aquella en que cada resultado pende de mas de un dato, como esta: si 20 hombres para hacer 160 varas de obra han gastado 15 dias, 30 hombres para hacer 192 varas ¿cuántos dias necesitarán? Los resultados son los dias, y su número depende del número de hombres y del de varas.

Para resolver la regla de tres compuesta se forma de cada dos datos de igual especie una razon (que deberá invertirse si aquellos datos son inversos con los resultados): se multiplicarán dichas razones, y su producto se comparará con los resultados. De este modo la regla de tres compuesta queda reducida á una proporcion simple.

Dem. Sea la regla propuesta: Si 20 hombres hacen 160 varas en 15 dias, 30 hombres para hacer 192 varas ¿cuántos dias necesitan?

Digo primeramente: si 20 hombres para hacer 160 varas necesitan 15 dias, 30 hombres para hacer la misma obra ¿cuántos necesitarán? Como las varas son las mismas, deberemos comparar los hombres con los dias: esta regla de tres es simple é inversa: diremos, pues, $30 : 20 :: 15 : \frac{20 \times 15}{30}$, dias que necesitan 30 hombres para hacer 160 varas.

Mas no son 160 varas las que deben hacer los 30 hombres, sino 192. Digo, pues: si 30 hombres para hacer 160 varas necesitan $\frac{20 \times 15}{30}$, número de dias, los mismos hombres para hacer 192 varas ¿cuántos dias necesitan? Esta es otra regla de 3 simple, porque siendo los hombres los mismos, solo habrá que comparar las varas con los dias, y es directa: luego será $160 : 192 :: \frac{20 \times 15}{30} : \frac{192 \times 20 \times 15}{160 \times 30}$, número de dias, en que 30 hombres harán 192 varas. Pero este resultado es visiblemente el cuarto término de esta proporcion $30 \times 160 : 2 \times 192 :: 15 : x$; cuya primer razon viene de multiplicar entre sí las razones de los datos, la de los hombres inversa, y la de las varas directa: luego deberemos multiplicar las razones de los datos, y comparar con el producto la de los resultados.

Este método tiene la ventaja de poderse simplificar separadamente las razones de los datos. Por ejemplo,
la de los hombres se reduce á $3 : 2$
la de las varas á $20 : 24$ ó á $5 : 6$. . $5 : 6$
antes de multiplicar suprimo el 3, factor comun en un antecedente y un consecuente, y la razon compuesta será $5 : 4$. Digo pues $5 : 4 :: 15 : x = 12$, dias que tardarán 30 hombres en hacer 192 varas de obra.

Otro ejemplo. Si 40 hombres trabajando 7 horas al dia para hacer 300 varas necesitan 8 dias, 51 hombres trabajando 6 horas al dia, para hacer 459 varas ¿cuántos dias necesitarán?

Dispongo asi los términos: $40^{hom.}\ 7^{hor.}\ 300^{v.}\ 8^{d.}$
$\qquad 51 \quad 6 \quad 459 \quad x$

Comparo los hombres con los dias, y estan en razon inversa. . . . . $51 : 40$

Las horas tambien estan en razon inversa con los dias.................... 6:7

Las varas estan en razon directa con los dias.................................... 300:459

La última razon partida por 3 da 100: 153. Este consecuente y el primer antece- 1:40
dente 51 se pueden partir por 51: las ra- 6:7
zones se reducen pues á................ 100:3

El antecedente 6 y el consecuente 3 pueden partirse por 3; el antecedente 100 y el 1:2
consecuente 40 pueden dividirse por 20, y 2:7
queda................................ 5:1

El antecedente 2 y el consecuente 2 se desvanecen; y la razon compuesta queda reducida á 5: 7: será pues, $5:7::8:x = 11\frac{1}{5}$ dias.

53. La regla de compañías enseña á dividir la ganancia ó pérdida de un fondo en proporcion con los capitales de los asociados. Para esto se hace esta proporcion: el fondo es á su ganancia ó pérdida, como el capital de cada asociado á su ganancia ó pérdida correspondiente.

Si los capitales han estado diferentes tiempos en el fondo, deberán reducirse á un mismo tiempo, multiplicando cada uno por el número de meses que ha estado en el fondo; pues un capital que ha estado 4 meses se reputa igual á un cuádruplo capital que hubiera estado un mes.

Ejemplo. Tres asociados han puesto en fondos, el primero 12000 duros, el segundo 8000, el tercero 4000: han ganado 5430 duros. De estos tocarán al primero 2715, al segundo 1810, al tercero 905.

Otro. Tres asociados han puesto en fondos, el primero 1000 reales por 7 meses: el segundo 8000 por 5 meses: el tercero 4000 por 20 meses: han ganado 1500 reales, ¿cuánto toca á cada uno? El capital del primero se reputa de 7000 reales, el del segundo de 40000, y el del tercero de 80000. Ya este caso está reducido al anterior.

54. Regla de *interes* es la que enseña á hallar la ganancia de una suma prestada bajo la condicion de que 100 unidades de aquella suma produzcan al prestador un cierto tanto. La regla de tres será: si 100 produce un cierto tanto, la suma prestada ¿cuánto

producirá? Asi 2500 duros á $6\frac{1}{2}$ por 100 al año dan $162\frac{1}{2}$ duros.

55. Regla de *descuento* es la que enseña á hallar la diminucion que debe hacerse á una letra cuando se paga antes del término en que cumple. Esta diminucion debe ser el interes que se supone estár acumulado en la letra, y se hallará diciendo: si 100 mas el tanto del descuento se han de quedar en 100, ¿la letra en cuánto quedará?

Pero el modo mas usual de hacer el descuento es deducir de la letra su tanto por 100. Asi 6000 reales descontados al 5 por 100 quedan en 5700, quitándole á la letra 300 rs., que es su 5 por 100. Esta manera, aunque es la mas usada, no es justa; porque descontando de cada 100, 5 del tanto, supone que en la letra se acumularon 5 de interes á cada 95, lo que no es asi: que solo se han acumulado 5 á cada 100. En efecto 5700 al 5 por 100 se convierten en 5985, añadiéndole 285, que es el 5 por 100 de 5700; de modo que el tenedor de la letra pierde 15 reales, ademas del interes que estaba acumulado en la letra. Este interes pasa justamente á poder del banquero; pero para calcularlo no se deben quitar 5 de 100, sino 5 de 105, que es como estan acumulados en la letra.

El tanto del descuento se enuncia ordinariamente por un año; y si la anticipacion es solo de algunos meses se calcula el tanto que corresponde á esta anticipacion por una sencilla regla de tres. *Ejemplo.* Se pide descontar una letra, que se paga con $4\frac{1}{2}$ meses de anticipacion, siendo el tanto del descuento anual $5\frac{1}{2}$ por 100. Formo esta proporcion: 12 meses : $4\frac{1}{2}$ meses : : $5\frac{1}{2}$: $x = \frac{99}{4} : 12 = \frac{33}{16} = 2\frac{1}{16}$. A este tanto deberé descontar la letra.

56. Regla de conjunta es la que enseña á reducir cantidades de una especie á otra con el auxilio de varias especies intermedias. Para esto no es necesario valuar la cantidad en especies intermedias, sino multiplicar entre sí las razones que indican la relacion de unas especies con otras, teniendo cuidado de observar las siguientes reglas:

1.ª Que el antecedente de la primer razon sea de la especie dada: 2.ª que el consecuente de la última razon sea de la especie á que se va á reducir la cantidad: 3.ª que el consecuente de cada razon sea de la especie del antecedente de la que sigue.

La razon compuesta que resulta se compara con la cantidad propuesta y con la cantidad reducida: el 4.º término de esta proporcion será la cantidad reducida.

Ejemplo. 50 libras de París valen 51 libras de Hamburgo: 25 libras de Hamburgo valen 24 de Francfort: 6000 libras de París ¿cuántas libras de Francfort valdrán?

Las razones componentes son . . . . 50 : 51
25 : 24

La compuesta es . . . . 1250 : 1224 : : 6000

$x = \frac{24 \times 1224}{5} = \frac{29376}{5} = 5875\frac{1}{5}$ libras de Francfort, que valdrán las 6000 de París.

Otro. Se quieren reducir 100 doblones de cambio de España á francos, moneda francesa; sabiendo que un doblon de cambio de España vale 1088 mrs., 375 mrs. componen un ducado español de cambio, este ducado 95 gros de Amsterdam, 12 gros componen un sueldo de Amsterdam, 34 de estos sueldos 240 dineros esterlines ingleses, y 32 dineros esterlines 3 francos.

1 : 1088
375 : 1
1 : 95
12 : 1
17 : 120
32 : 3

Estas razones se simplifican, partiendo . . . . . 1088 y 32 por 32: 12 y 120 por 12: 375 y 95 por 5; y se reducen

á 1 : 34
75 : 1
1 : 19
17 : 10
1 : 3

Se vuelve á simplificar partiendo 75 y 3 por 3, y $\frac{75}{3}$ y 10 por 5, y 34 y 17 por 17, y es

1 : 2
5 : 1
1 : 19
1 : 2

5 : 76 : : 100 : $x = \frac{7600}{5} = 1520$ francos, valor de los 100 doblones de cambio.

57. El *cambio*, que se reduce á una regla de conjunta, es la reduccion de una suma espresada en moneda de un pais á moneda de otro pais. Las relaciones entre ambas monedas se espresan por medio de monedas imaginarias. Estas relaciones varian; y para espresar sus variaciones se usa en el comercio de la siguiente nomenclatura. En uno de los dos paises que cambian se supone constante la unidad de su moneda imaginaria, y se dice que *da lo cierto*. A esta moneda corresponden en el otro pais diferentes cantidades de su moneda imaginaria en diferentes épocas; y de este pais se dice que *da lo incierto*. Este número variable de unidades es lo que se llama *cambio*, y sirve para convertir las monedas imagina-

rias de un pais en las del otro. Por ejemplo. España cambia con Inglaterra con *pesos* de 512 mrs.; y si en una época determinada dan en Lóndres por 512 mrs. 36 dineros esterlines, se dice que el *cambio* está entonces á 36. España da lo cierto, porque siempre da un peso de 512 mrs., y Londres da lo incierto, porque unas veces da en cambio de este peso 36 esterlines, otras veces $35\frac{1}{2}$, otras 34 etc.

Ejemplo 1.° Un comerciante de Madrid toma sobre Lóndres letra de 1505 rs. 30 mrs., ¿cuánto se debe pagar por ella en Lóndres estando el cambio á $35\frac{1}{2}$? Sabiendo que la libra esterlina vale 240 dineros esterlines, la conjunta se hará asi, reduciendo la letra á maravedis, y será 51200.

$$\begin{array}{l} 512 : 35\frac{1}{2} \\ 240 : 1 \\ \hline \end{array}$$

$512 \times 240 : 35\frac{1}{2} :: 51200 : x = \frac{100 \times 35\frac{1}{2}}{240} = 14$ libras, 15 esquelines, 10 dineros esterlines.

2.° Un comerciante de Lóndres toma sobre Madrid letra de 97 libras esterlinas, estando el cambio á 35. ¿Cuánto se debe pagar en Madrid por dicha letra? 10016 rs. y $9\frac{1}{7}$ mrs.

58. Regla de *aligacion* es la que enseña á buscar el precio á que se debe vender la mezcla de varias especies, de las cuales cada una tiene precio distinto, para no perder ni ganar. Se supone que en la mezcla no se disminuye ni el peso ni el volumen de las especies mezcladas. Tambien se emplea esta regla cuando se conoce el precio de la mezcla, que se llama *precio medio*, y se buscan las cantidades que se han de tomar de las especies mezcladas.

Para conocer el precio medio se buscan los valores de las especies, multiplicando el precio de cada una por el número de unidades que hay en ella: sumando estos valores resultará el valor de la mezcla: partiéndolo por el número de sus unidades, que ha de ser igual á la suma de unidades de todas las especies, se tendrá el precio á que se ha de vender la mezcla.

Ejemplo 1.° Se han mezclado 15 cántaros de vino de á 5 rs. el cántaro con 9 de á 7: ¿á cuánto se han de vender los 24 cántaros de la mezcla?

Los 15 cántaros valen 75 rs., los 9, 63 rs.: luego toda la mezcla vale 75 + 63, ó 138 rs.: partiéndolos por los 24 cántaros de la mezcla será el precio medio $x = \frac{138}{24} = 5$ rs. $25\frac{1}{2}$ mrs.

2. Se han mezclado 14 fanegas de trigo de 25 rs. con 50

de á 30, y con 22 de á 28: ¿á cuánto se deberán vender las 86 fanegas de la mezcla? $x = \frac{350+1500+616}{86} = 28$ rs. $22\frac{40}{43}$ mrs.

Si se mezclan dos especies, las cantidades que se han de tomar de ellas estan en razon inversa de las diferencias de sus precios al precio medio.

Dem. Supongamos que se hayan mezclado 15 cántaros de vino de á 5 rs. con 9 de á 7; y llamo x al precio medio. Será $x(15+9) = 15\times5+9\times7$; ó $x\times15+x\times9=15\times5+9\times7$.

7 . . . $x-5$ Resto de ambos miembros los productos $x\times9$ y 15×5,
x y tendré
5 . . . $7-x$ $x\times15-15\times5=9\times7-x\times9$, ó separando en cada miembro el factor comun es $15(x-5)=9(7-x)$, y como de dos productos iguales se puede formar una proporcion, será $\frac{9}{15}=\frac{x-5}{7-x}$, es decir, que las cantidades 9 y 15 que se toman de las dos especies son proporcionales á las diferencias trocadas entre el precio medio x, y los precios mayor y menor.

Por consiguiente cuando se da el precio medio, y se busca la proporcion en que se han de mezclar las especies, se resta el precio de cada especie del precio medio, y se ponen encontradas estas diferencias.

Ejemplo. Un cosechero tiene vino de á 9 rs. el cántaro, y vino de á 5 rs. el cántaro: ¿en qué proporcion los deberá mezclar para vender el cántaro de la mezcla á 6 rs.?

9 . . . 1 Hemos puesto las diferencias encontradas; y quieren
6 decir, que á cada cántaro de á 9 rs. debe mezclar 3
5 . . . 3 de á 5.

Cuando se da la cantidad de una especie, conocida la proporcion que deben guardar, es fácil de hallar la cantidad de las demas especies.

Ejemplo. Tengo 40 fanegas de trigo de á 30 rs.: ¿cuántas le deberé mezclar de á 24 para que resulte trigo de á 28? Deberé
40 30 . . . 4 mezclar 4 de á 30 con 2 de á 24. Ahora formo
28 esta proporcion $4:2::40:x=20$, número de
20 24 . . . 2 fanegas de á 24, que deberé mezclar con las 40 de á 30.

Cuando es conocido el número de unidades de la mezcla se reparte entre *las diferencias proporcionales*, como en la regla de compañias.

Ejemplo. ¿Qué cantidades debo tomar de trigo de á 24 rs. y de trigo de á 30 rs. para que resulten 600 fanegas de trigo de á 26? A cada 2 de á 30 debo mezclar 4 de á 24 para que resulten 6 de á 26. Ahora digo: si para 6 de la mezcla tomo 2 de la primer especie, para 600 ¿cuánto deberé tomar? 6 : 2 : : 600 : 200.

200		30 . . . 2
600	26	
400		24 . . . 4

Del mismo modo hallaré que debo tomar 400 fanegas de la segunda especie.

Si las especies superiores é inferiores á la media son mas de dos, la cuestion se podrá resolver de muchas maneras. Compárense de cada vez dos especies, una superior y otra inferior á la media, y hállense sus diferencias proporcionales. Súmense despues las diferencias que se hayan aglomerado en una especie, y se tendrá la proporcion de la mezcla. Como se pueden combinar de muchos modos las especies que se han de comparar de cada vez, podrá resolverse de muchas maneras la cuestion.

Ejemplo. Se quiere mezclar plata de 10 dineros de ley con plata de 11 dineros y 3 granos, de 11 y de 10 dineros y 7 granos para que resulte plata de 11 dineros y 2 granos.

$$11\tfrac{3}{24} \ldots\ldots \tfrac{2}{24} + \tfrac{19}{24} + 1\tfrac{2}{24} = \tfrac{47}{24} \ldots\ 47$$

$11\tfrac{2}{24}$.

$$11 \ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{24} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1$$
$$10\tfrac{7}{24} \ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{24} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1$$
$$10 \ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{24} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1$$

No hay mas que una especie superior. Tengo que compararla sucesivamente con todas las inferiores; y resultan los números proporcionales $\frac{47}{24}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{24}$, ó multiplicándolos todos por 24, 47, 1, 1, 1.

59. Regla de *falsa posicion* es la que enseña á hallar el valor de un número incógnito por medio de otro supuesto.

Si las operaciones que hay que hacer con el número supuesto para llegar al resultado de la cuestion, son todas multiplicaciones ó particiones por números conocidos, el resultado que producirán con el número supuesto será al resultado que producirán con el número verdadero en la razon de estos dos números; pues esta razon no deberá alterarse, aunque ambos se multipliquen por una misma cantidad. Diré, pues: resultado que ha producido el número supuesto es al resultado verdadero como el número supuesto al verdadero. Esta regla se llama de falsa posicion *simple*.

Ejemplos: 1.º Se pide un número, cuya mitad, cuarto y quinto sumen 456. Como $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$, lo que se pide es un número, cuyos $\frac{19}{20}$ compongan 456.

Sea dicho número 40 (número supuesto): sus $\frac{19}{20}$ componen 38 (resultado falso). Formo la proporcion $38 : 456 :: 40 : x = 480$, número pedido. En efecto $\frac{1}{2}.\ 480+\frac{1}{4}.\ 480+\frac{1}{5}.\ 480=456$.

2.º Un estanque tiene cuatro caños que lo llenan, el 1.º en 2 horas, el 2.º en 3, el 4.º en 5, el 5.º en 6: ¿en cuánto tiempo lo llenarán todos juntos?

El tiempo que se pide, partido sucesivamente por los números 2, 3, 5, 6, hará conocer las partes del estanque, que llenarán respectivamente las fuentes en el tiempo que corran juntas, y estas partes deben sumar el estanque. Luego lo que se pide es un número, cuya mitad, tercio, quinto y sexto sumen 1, que representa el estanque. Y como $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6}{5}$, lo que se pide es un número, cuyos $\frac{6}{5}$ produzcan 1.

Sea dicho número 5 (número falso): sus $\frac{6}{5}$ producen 6 (resultado falso). Digo $6 : 1 :: 5 : x = \frac{5}{6}$ de hora, tiempo en que los cuatro caños llenarán el estanque.

En efecto en este tiempo la 1.ª llenará $\frac{5}{12}$ del estanque.

La 2.ª . . . . . $\frac{5}{18}$

La 3.ª . . . . . $\frac{1}{6}$

La 4.ª . . . . . $\frac{5}{36}$

y $\frac{5}{12}+\frac{5}{18}+\frac{1}{6}+\frac{5}{36}=\frac{36}{36}=1$ estanque.

Pero si ademas de multiplicaciones y particiones hay que hacer con el número incógnito sumas ó restas de números conocidos, ya no existirá la proporcion anterior, pues añadiendo ó restando á los múltiplos ó cocientes de los números verdadero y supuesto unas mismas cantidades, se altera la razon que antes tenian. Entonces la regla de falsa posicion se llama *doble*, porque es preciso hacer dos supuestos. Propongámonos un ejemplo para comprenderla bien.

De dos jugadores el mas hábil pone 12 reales contra 8 en cada juego: al cabo de 10 juegos ha ganado 20 rs.: ¿cuántos ganó y cuántos perdió de estos diez juegos?

Supongamos que ganó 4; y tendremos $4\times8-12\,(10-4)=$ no á 20 reales, sino á $20-60$: (este -60 es el error que se comete adoptando el número supuesto 4). Será pues $4\times8-$

$12 \times 10 + 12 \times 4 = 20 - 60$, $4(8+12) - 12 \times 10 = 20 - 60$.

Supongamos que ganó 6; y tendremos $6 \times 8 - 12\ (10-6) = 20 - 20$ (este -20 es el segundo error). Esta ecuacion se reduce á $6\ (8+12) - 12 \times 10 = 20 - 20$.

En fin, sea x el número verdadero. Será $x\ (8+12) - 12 \times 10 = 20$.

Restando de esta ecuacion las otras dos, tendremos

$(x-6)(8+12) = 20$

$(x-4)(8+12) = 60$,

y partiendo será $\frac{x-6}{x-4} = \frac{20}{60}$. Multiplicando estremos y medios será $60 \times x - 60 \times 6 = 20 \times x - 20 \times 4$. Añadiendo á ambos miembros 60×6, y restando $20 \times x$, será $60 \times x - 20 \times x = 60 \times 6 - 20 \times 4$, ó $x\ (60-20) = 60 \times 6 - 20 \times 4$, de donde $x = \frac{60 \times 6 - 20 \times 4}{60-20}$.

Luego el número verdadero es igual *á la diferencia de los productos de cada supuesto por el error del otro, partida por la diferencia de los errores.* Estas sumas se convierten en diferencias, si los errores tienen contrarios signos. El artificio de la demostracion consiste en *eliminar* del cálculo todo lo que no sea el número buscado, los supuestos y los errores.

En el caso propuesto el número verdadero es 7. Ganó 7 juegos, y en ellos 56 rs.: perdió 3 juegos, y en ellos 36 rs.: quedó ganando 20 rs.

15.° *Progresiones.*

60. Llámase *progresion aritmética* ó *por diferencia* una serie de términos, tales, que entre cada dos consecutivos hay siempre una misma diferencia, como esta: 1.3.5.7.9.11....

Cualquier término de una progresion aritmética es igual al primero, mas la diferencia, multiplicada por el número de términos menos uno: porque el 2.° término consta del 1.° + 1 diferencia; el 3.°, del 1.° + 2 diferencias: el 4.° del 1.° + 3 diferencias... Asi el término vigésimo de la progresion anterior será $= 1 + 19.2 = 39$. Se puede, pues, calcular cualquier término de una progresion, sin calcular los anteriores.

Interpolar entre dos números dados cualquier número de medios aritméticos. Por ejemplo, se pide interpolar entre 4 y 39 seis medios aritméticos. Si conociésemos la diferencia de la progresion añadida al primer término 4, daria el segundo, añadida al segundo daria el 3.° etc. Luego lo que hay que buscar es la diferencia de la progresion; llámola x.

Si se han de interpolar seis términos entre 4 y 39, 39 es el 8.° término, y será $=$ al 1.° $+$ 7 diferencias; luego $39 = 4 + 7 \times x$. Resto de ambos miembros 4, y es $7 \times x = 39 - 4$; luego $x = \frac{39-4}{7}$. Luego *restaré del último término el primero: partiré la diferencia por el número de medios que se han de interpolar, mas uno*, y tendré la diferencia de la progresion. En el caso propuesto la diferencia es 5, y la progresion 4 . 9 . 14 . 19 . 24 . 29 . 34 . 39.

Para interpolar entre 4 y 11 ocho medios, la razon es $\frac{11-4}{9} = \frac{7}{9}$, y la progresion es $4 \cdot 4\frac{7}{9} \cdot 5\frac{5}{9} \cdot 6\frac{3}{9} \cdot 7\frac{1}{9} \cdot 7\frac{8}{9} \cdot 8\frac{6}{9} \cdot 9\frac{4}{9} \cdot 10\frac{2}{9} \cdot 11$.

61. *Si entre cada dos términos de una progresion aritmética se interpola igual número de medios aritméticos, resultará progresion aritmética*: porque la diferencia será la misma en cada interpolacion, siendo la misma la diferencia de los estremos y el número de términos interpolados. *Ejemplo*: Si en la progresion 4 . 9 . 14 . 19 . 24 interpolamos 2 medios entre cada dos términos, resultará otra progresion, cuya diferencia es $1\frac{2}{3}$: $4 \cdot 5\frac{2}{3} \cdot 7\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 10\frac{2}{3} \cdot 12\frac{1}{3} \cdot 14 \cdot 15\frac{2}{3} \cdot 17\frac{1}{3} \cdot 19 \cdot 20\frac{2}{3} \cdot 22\frac{1}{3} \cdot 24$.

62. Llámase progresion *geométrica ó por cociente* una série de términos, de los cuales cada dos consecutivos tienen una misma razon; como esta 2:6:18:54:162:486, cuya razon es 3.

Cualquier término de una progresion geométrica es igual al primero, multiplicado por la razon elevada á la potencia, que indica el número de términos menos *uno*: porque el segundo término es igual al primero multiplicado por la razon: el 3.º es igual al primero multiplicado por el cuadrado de la razon: el 4.º es igual al primero multiplicado por el cubo de la razon, etc. Asi el término décimo de la progresion anterior será $2 \times 3^9 = 39366$.

Interpolar entre dos números dados cualquier número de medios geométricos. Por ejemplo, se pide interpolar entre 2 y 162 tres medios geométricos. Si conociésemos la razon de la progresion, multiplicada por el primer término 2, daria el 2.º: multiplicada por el 2.º daria el 3.º etc. Luego lo que hay que buscar es la razon de la progresion: llámola x.

Si se han de interpolar tres términos entre 2 y 162, 162 es el quinto término de la progresion, y por tanto $162 = 2 \times x^4$: partiendo ambos miembros por 2, es $x^4 = \frac{162}{2}$, y estrayendo de ambos miembros la raiz cuarta, será $x = \sqrt[4]{\frac{162}{2}}$. Luego *estraeré del cociente de los estremos la raiz que indica el número de medios que se han de interpolar, mas uno*, y tendré la razon de la progresion. En el ejemplo propuesto es $\sqrt[4]{81} = 3$, y la progresion es $2:6:18:54:162$.

Otro ejemplo. Interpolar entre 3 y 1536 ocho medios proporcionales. La razon es $\sqrt[9]{\frac{1536}{3}} = \sqrt[9]{512} = \sqrt[3]{8} = 2$: y la progresion $3:6:12:24:48:96:192:384:768:1536$.

Puede ocurrir que la raiz sea inconmensurable, en cuyo caso no se puede hacer la interpolacion sino aproximadamente.

Esta operacion es muy dificil, cuando hay que estraer raices superiores á la cúbica de cantidades grandes ó inconmensurables.

63. *Si entre cada dos términos de una progresion geométrica se interpola igual número de medios geométricos, resultará progresion geométrica*: porque en

cada interpolacion resultará una misma razon, siendo uno mismo el cociente de los estremos, y el número de medios que se han de interpolar. *Ejemplo:* Sea la progresion geométrica 1 : 4: 16 : 64: 256. Si entre cada dos términos interpolamos un medio geométrico, resulta la serie 1 : 2 : 4: 8: 16 : 32 : 64 : 128 : 256, que tambien es progresion geométrica, y su razon es 2, raiz cuadrada de la razon de la progresion anterior.

16.° *Logaritmos.*

64. Sea la progresion aritmética 0.1.2.3.4.5.6.

Si elegimos un número cualquiera, por ejemplo 3, y formamos una progresion geométrica, cuyo primer término sea 1, y la razon el número elegido, colocando esta progresion debajo de la aritmética, los términos de la geométrica se llaman *números*, y los correspondientes de la aritmética se llaman *logaritmos* de aquellos números.

Asi la progresion geométrica.....1 : 3: 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 es la de los *números*; y la aritmética.........0. 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 es la de los *logaritmos*. Por tanto 1 es logaritmo de 3, 4 de 81 etc. lo què se indica así: L. 3 = 1, L. 81 = 4.

El número 3, que sirvió de razon para formar la progresion geométrica se llama *base logarítmica;* y como es arbitrario, se infiere que puede haber muchos sistemas de logaritmos: pues la progresion geométrica variará, variando la base; de modo que un mismo logaritmo corresponderá á diferentes números en diferentes sistemas, y al contrario, á un mismo número corresponderán diferentes logaritmos.

Ejemplo: Si se toma por base el 9, las progresiones serán 1 : 9 : 81 : 729
0 . 1 . 2 . 3
donde se ve que en este sistema 2 es logaritmo de 81,

y en el sistema anterior 2 es logaritmo de 9. Tambien en el sistema cuya base es 3, L. 729=6, y en el sistema cuya base es 3, L. 729=3.

La base puede ser entera, fraccionaria, inconmensurable: en una palabra, puede ser la cantidad que queramos. Pero en todo sistema *el logaritmo de la unidad es cero, y el de la base es* 1, como se conoce por la simple inspeccion de las progresiones.

Se ve ademas que los logaritmos son *los esponentes de las potencias á que se eleva la base para producir el correspondiente número*: es decir, L. $243=5$, porque $3^5=243$.

65. *Cada logaritmo contiene como parte á la diferencia de la progresion aritmética tantas veces, como su número contiene como factor á la razon de la progresion geométrica*: esto es, si L. $243=5$, el logaritmo 5 contiene como parte á la diferencia 1, tantas veces, cuantas 243 contiene como factor á la razon 3; ó lo que es lo mismo, si $5=1\times 5$, $243=3^5$.

Demostracion. Cualquier término de una progresion aritmética es igual al 1.º mas la diferencia multiplicada por el número de términos menos uno: pero como en la progresion propuesta el primer término es cero, cada término será igual á la diferencia multiplicada por el número de términos menos uno.

Tambien cualquier término de una progresion geométrica es igual al 1.º multiplicado por la razon elevada á la potencia, que indica el número de términos menos uno: pero como en la progresion geométrica el primer término es 1, cualquier otro término será igual á la razon elevada á la potencia que indica el número de términos menos uno.

Tomando, pues, dos términos correspondientes de ambas progresiones, es decir, que sean logaritmo y número, será uno mismo el número de términos contados desde el primero hasta cada uno de ellos: y por tanto en el logaritmo se hallará la diferencia multiplicada por un número igual al índice de la potencia que tendrá la razon en el número: luego etc.

La suma de los logaritmos de dos números es igual al logaritmo del producto de dichos números.

Demostracion. Sean los números 27 y 243, cuyos logaritmos son 3 y 5. El logaritmo 3 contiene como parte á la diferencia las mismas veces (en el caso presente son 3) que su número 27 contiene como factor á la razon.

El logaritmo 5 contiene como parte á la diferencia las mismas veces (en el caso presente son 5) que su número 243 contiene como factor á la razon.

Luego la suma 8 contendrá como parte á la diferencia las mismas veces (en el caso presente son 8), que el producto 6561 contiene como factor á la razon: luego 8 y 6561 son términos correspondientes de ambas progresiones, es decir, que 8 es logaritmo de 6561: luego etc.

Luego *para multiplicar dos números, deben sumarse sus logaritmos, y la suma será el logaritmo del producto; búsquese el número que le corresponde, y ese será el producto:* asi para multiplicar 27 por 81, sumo sus logaritmos 3 y 4; y la suma 7 es el logaritmo del producto que se busca, que será 2187.

Al contrario, *para partir dos números restaré del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor, y tendré el logaritmo del cociente: busco el número que le corresponde, y este será el cociente;* porque siendo el dividendo producto del divisor por el cociente, el logaritmo del dividendo será igual al logaritmo del divisor, mas el logaritmo del cociente: luego restando del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor, se tendrá el del cociente. Asi para partir 6561 por 27, resto sus logaritmos 8 y 3, y el resíduo 5 es el logaritmo del cociente, que será 243.

Para elevar un número á una potencia se multiplicará el logaritmo del número por el índice de la potencia, y se tendrá el logaritmo de la potencia: búsquese su número, y ese será la potencia. Porque si se ha de elevar 9 al cubo, como $9^3 = 9 \times 9 \times 9$, será $L.\ 9^3 = L.\ 9 + L.\ 9 + L.\ 9 = 3\ L.\ 9$. Siendo 2 el logaritmo de 9, multiplícolo por 3, índice de la potencia, y será 6 el logaritmo de 9^3: el número que corresponde al logaritmo 6, es 729, y este será el cubo de 9.

Para estraer una raiz cualquiera de un número se partirá el logaritmo del número por el índice de la raiz, y se tendrá el logaritmo de la raiz: búsquese su número, y ese será la raiz; porque la estraccion de raiz es operacion inversa de elevar á la potencia. Asi para estraer $\sqrt[4]{6561}$, parto el logaritmo de 6561, que es 8, por 4, índice de la raiz. Será 2 el logaritmo de la raiz pedida, que es 9.

Se ve, pues, que los logaritmos simplifican estraordinariamente los cálculos, pues reducen la multiplicacion á suma, la particion á resta, la elevacion á potencia á una sencilla multiplicacion, y la estraccion de raiz á una sencilla particion. Neper, gran geómetra escocés, fue el inventor de los logaritmos.

66. Para sacar de esta invencion toda la utilidad posible se eligió una base logarítmica conveniente. El matemático Briggs propuso el 10, base del sistema de la numeracion vulgar; y esta base se ha adoptado para los logaritmos *tabulares*, llamados así, porque son los que comprende la tabla mas usual de logaritmos.

Siendo la base logarítmica 10, serán las progresiones de los números y de los logaritmos las siguientes:

1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 *números.*
0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 *logaritmos.*

Pero en estas progresiones solo se encuentran los logaritmos de los números, que son potencias del 10, y no tenemos los logaritmos de los números intermedios 2, 3, 4 etc., 11, 12, 13, etc., 101, 102, 103 etc.

Para hallar los logaritmos de estos números intermedios se interpolaron entre cada dos términos de cada progresion un término medio, y no por eso dejó de haber progresion (61 y 63). Esta operacion se repitió muchas veces, de modo que siendo muy pequeña la razon de la progresion geométrica, se encontraron en ella todos los números intermedios entre 1 y 10, entre 10 y 100, entre 100 y 1000 etc.; y si no se encontró exactamente el 2, por ejemplo, se encontró otro que se le acercaba con la aproximacion deseada: por ejemplo, si la aproximacion fue de seis notas decimales, y entre los medios geométricos se encontró 2,0000024, ó 1,9999996, cualquiera de estos se pudo tomar como =2, y asi de los demas números intermedios: los correspondientes medios aritméticos fueron sus logaritmos, que en las tablas de Callet tienen 7 notas de aproximacion.

Cada logaritmo consta de una nota entera, que se llama *característica*, y de una fraccion decimal, que se llama *mantisa*.

La característica de un logaritmo en el sistema tabular es igual al número de notas que tiene su número, menos una.

Dem. Los números de una nota estan comprendidos entre 1 y 10, y sus logaritmos entre 0 y 1: luego la característica debe ser cero.

Los números de dos notas estan entre 10 y 100, y sus logaritmos entre 1 y 2: luego la característica debe ser 1. Del mismo modo se prueba que los logaritmos de los números de 3 notas deben tener 2 de característica, los de 4 notas 3...... luego etc.

Por consiguiente dado el número es facil determinar la característica de su logaritmo, que será igual al número de notas enteras que tenga el número, menos una. Asi el logaritmo de 57292 tendrá 4 de característica: el de 57,924 tendrá 1 de característica. Por esa razon las tablas de logaritmos de Callet no tienen características.

Al contrario, dado el logaritmo se podrá conocer el número de notas que ha de tener el número, que serán tantas como unidades tiene la característica del logaritmo, mas una. Asi el logaritmo 2,5734991 ha de corrésponder á un número que tenga tres notas enteras: el logaritmo 0,8215792 es de un número que solo tiene una nota entera.

Si un número se multiplica ó parte por 10, 100 *etc., la mantisa de su logaritmo no varia.*

Dem. Para multiplicar ó partir un número por 10, 100 etc., se añadirá ó quitará á su logaritmo el logaritmo de 10, que es 1, ó el de 100, que es 2, etc. Pero como estas adiciones ó sustracciones se han de efectuar sobre la nota entera, que es la característica, y no sobre la parte decimal, se infiere que la mantisa no varia: luego etc.

De aqui se infiere que la mantisa del logaritmo de un número se queda la misma, aunque al número se le añadan ó quiten ceros á su derecha; y si es decimal, aunque la vírgula se mueva de derecha á izquierda, ó de izquierda á derecha.

Asi el logaritmo de 2 tiene la misma mantisa que los de 20, 200, 2000 etc.

El logaritmo de 5246 tiene la misma mantisa que los de 524,6: 52,46: 5,246.

Luego 1.° *la mantisa nos da á conocer la magnitud y orden de las notas de un número, y la característica, cuáles de estas notas son enteras, y cuáles decimales.*

2.° Podremos hallar el logaritmo de cualquier decimal impropia, por ejemplo, de 527,42. Porque la característica debe ser 2, pues hay tres notas enteras en el número; y la mantisa debe ser la misma que la de 52742, número entero.

Tambien se podrá hallar el logaritmo de cualquier fraccion impropia, restando del logaritmo del numerador el del denominador, pues dicha fraccion no es mas que el cociente de sus términos.

Podemos, pues, por medio de las tablas aplicar el cálculo logarítmico á los enteros y fracciones impropias, ya comunes, ya decimales.

67. Las tablas de Callet contienen los logaritmos de los números *naturales* desde 1 hasta 108000.

En las primeras hojas se hallan los logaritmos desde 1 á 1200 con ocho notas decimales, es decir, una nota mas de las que se necesitan en los cálculos ordinarios. Esta nota última se desprecia comunmente.

Siguen despues los logaritmos de los números comprendidos desde 1020 hasta 100000, es decir, de los números que tienen 4 y 5 notas dispuestos con este artificio.

Las cuatro primeras notas del número se buscan en la columna vertical, encabezada N, la quinta nota en la columna horizontal. En la enfilacion de ambas estan las cuatro notas últimas del logaritmo. Las tres primeras son las que estan á la izquierda, y son comunes á todos los sistemas de 4 notas que hay entre cada dos sistemas de tres notas.

Si el número no tiene mas que cuatro notas, se toma cero por quinta nota.

Ultimamente dichas tablas acaban con los logaritmos de los números comprendidos entre 100000 y 108000: estos logaritmos tienen ocho notas decimales. Las cinco primeras notas del número se buscan en la columna vertical, y la sesta en la columna horizontal.

Buscar el logaritmo de un número mayor que el último de las tablas. Se pide, por ejemplo, el logaritmo de 57682496. En las tablas de Callet solo se encuentran las cinco primeras notas, y se tiene L.57682, cuya mantisa es 7610403.

El logaritmo del número propuesto tiene la misma mantisa que si considerásemos como decimales sus tres últimas notas, que no se encuentran en las tablas. Busquemos, pues, la mantisa de L. 57682,496; es decir, busquemos lo que se debe añadir á la mantisa de 57682 por 0, 496, fraccion que falta á su número.

Examinando las tablas con atencion se ve que los logaritmos próximos tienen una misma diferencia, y este fenómeno se verifica en mayor número de logaritmos, á proporcion que los números son mas grandes. Esto nace de que en los números de 1 nota la unidad en que escede el logaritmo de 10 al de 1, se reparte no mas que entre 10 logaritmos, siendo asi que en los números de 5 notas la unidad en que escede L. 100000 á L. 10000 se reparte entre 90000 logaritmos: asi debe ser mas lenta la variacion de las diferencias entre los logaritmos próximos.

Es, pues, verdadera aproximadamente esta proporcion: *las diferencias de los logaritmos son proporcionales á las de los números, cuando unos y otros son próximos.*

Volviendo á nuestro ejemplo, como de 57682 al número inmediato hay 1 de diferencia, busco la de sus logaritmos, que es 0,0000076, y formo esta proporcion: 1, diferencia entre los números próximos de las tablas, es á 0,0000076, diferencia entre sus logaritmos, como 0,496, diferencia del número menor al propuesto, es al 4.º término, que será la diferencia de sus logaritmos. Este 4.º término es 0,0000037696, que añadido á la mantisa 7610403, dará la que se pide. Pero como las mantisas no pasan de siete notas, se desprecian en el 4.º término las tres últimas, es decir, tantas como notas se han separado en el número para decimales: asi lo que hay que añadir es 38 á las clases inferiores de la mantisa, que será 7610441. Como el número tiene 8 notas enteras, la característica es 7, y L. 57682496=7,7610441.

En las tablas de Callet estan calculadas las diferencias entre los logaritmos próximos, que se encontrarán en la columna vertical encabezada *dif.* Ademas estan calculadas las partes que deben añadirse á la mantisa por cada nota de mas que tenga el número en unas tablitas, que se llaman de *partes proporcionales.* Lo que corresponde á la primer nota de las que no se encuentran en las tablas se escribe debajo de las clases inferiores de la mantisa; y las partes proporcionales, correspondientes á las notas que sigan, se escriben sucesivamente unas debajo de otras, adelantando cada una un lugar hácia la derecha, porque pertenecen á una clase inferior decimal. Despues se suma, despreciando las notas inferiores á la séptima decimal.

Ejemplo. L. 57682496=7,7610403 mantisa de 57682.
La diferencia es 76 : pongo.........30 por el 4.
68 por el 9.
46 por el 6.

7,7610440, logaritmo pedido.

Obsérvese que la parte proporcional de la última nota 6 no influye ya en el logaritmo, que seria el mismo, aunque no existiese dicha nota. Esto quiere decir, que reduciendo las mantisas á 7 notas decimales, las tablas no pueden dar con seguridad sino 7 notas en el número, y que la 8.ª no puede ser segura, como no compongan las cinco primeras una cantidad menor que 108000, en cuyo caso nos podrán dar con seguridad hasta ocho notas en el número.

68. *Buscar el número de un logaritmo, cuya mantisa no se halla en las tablas.*

Resto la próxima menor que se encuentre de la dada, y digo: diferencia que hay entre la mantisa tomada en las tablas y su próxima mayor en las mismas tablas es á 1, diferencia entre sus números, como la diferencia de la mantisa menor á la dada, es á la diferencia del número menor al pedido. Este 4.° término se reduce á decimales, y las notas que dé, se unen á la derecha del número de la mantisa próxima menor. La reduccion á decimales solo deberá llegar hasta dos notas, porque ya no hay seguridad en la tercera.

Ejemplo. Se pide el número correspondiente al logaritmo.................................7.7610440
La mantisa próxima menor que dan las tablas es.................................0403

37

La fraccion que se debe añadir al número es $\frac{37}{76}$ que da, reducida á decimales, las notas 49. La mantisa tomada corresponde á las notas 57682: luego las notas del número son 5768249; y como la característica es 7, el número será 57682490.

Con las tablas de Callet no es necesario hacer la reduccion á decimales: porque la diferencia 37 se busca en la tabla de partes proporcionales; y no encontrándose, se ve cual es la próxima menor, que es 30, correspondiente á la nota 4.

Resto 30 de 37, y quedan 7: uniéndole un cero para reducirlo á la especie decimal inferior, es 70, cuya parte proporcional próxima menor es 68, á la que corresponde la nota 9.

Este ejemplo confirma lo que ya hemos dicho, que con 7 decimales en la mantisa solo se puede contar con 7 notas en el número. Por tanto no se puede aplicar el cálculo logarítmico á operaciones en que intervienen números muy grandes. Por ejemplo, si se quiere elevar 14 á la potencia 40, no servirá el cálculo logarítmico sino para hacernos ver en la característica cuántas notas deberá tener la potencia cuadragésima de 14, y las siete primeras notas de esta potencia. Hé aqui el cálculo.

L. $14 = 1{,}14612804$, tomando todas las 8 notas de las tablas.

Multiplicado por 40 40

$45{,}84512160 = $ L. 14^{40}, que deberá tener 46 notas.

Mantisa próxima menor. 1167.... sus notas 7000379.

49

Parte proporcional próxima menor . . . . 43, su nota 7.

60

Parte proporcional próxima menor . . . . 56, su nota 9.

Las 7 primeras notas del número forman la cantidad de 7000379.

En general la aplicacion mas útil del cálculo logarítmico no es en las operaciones de un resultado exacto, sino en las de aproximacion.

Propongamos ya algunos ejemplos.

1.° Se pide el producto de 47×863 . . L. $47 = 1{,}6720979$

L. $863 = 2{,}9360108$

Sumando . . . . $4{,}6081087$: su número 40561 es el producto que se pide.

2.° Se pide la raiz 5 de 1419857:

su logaritmo es . . . . $6{,}1522272$

Parte proporcional por 5 153

por 7 214

$6{,}1522446$

Su quinta parte es . . . . $1{,}2304489$, cuyo número 17 es la raiz quinta del número propuesto.

3.° Se pide el valor de $x = 4000\,(1{,}05)^{10}$.

La elevacion á la 10.ª potencia es multiplicar por 10 el logaritmo del número. La multiplicacion por 4000 es añadir el logaritmo de 4000 al de $(105)^{10}$: de modo que $L. x = L. 4000 + 10 L. 1{,}05$.

$$
\begin{array}{rr}
L.\ 1{,}05 = & 0{,}0211893o \\
\text{multiplicado por} \ldots\ldots\ldots & 10 \\
 & 0{,}2118930 \\
L.\ 4000 = & 3{,}6020600 \\
\hline
 & 3{,}8139530
\end{array}
$$

3,8139530: su número 6515,58 $= x$.

Mantisa próxima menor... 9477..... 651558.

53 en la tabla de partes proporcionales su nota es 8.

2.° Se pide el cociente de $\frac{5314}{2914}$.

$$
\begin{array}{rl}
L.\ 5314 = & 3{,}7254216 \\
C.\ L.\ 2914 = & 6{,}5355105 \\
\hline
 & 10{,}2609321
\end{array}
$$

10,2609321 : su número es 9296 el cociente

$$
\begin{array}{r}
9296 \\
\hline
25\ldots
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
182361 \\
1
\end{array}
$$

pedido: y es 1,82361.

5.° Se pide el producto $3\frac{5}{7} \times 2\frac{2}{13} = \frac{26}{7} \times \frac{28}{13}$.

$$
\begin{array}{rl}
L.\ 26 = & 1{,}4149734 \\
L.\ 28 = & 1{,}4471580 \\
C.\ L.\ 7 = & 9{,}1549020 \\
C.\ L.\ 13 = & 8{,}8860566 \\
\hline
 & 20{,}9030900
\end{array}
$$

20,9030900: su número es 8, producto pedido.

6.° Se pide el cuarto término de la proporcion $153 : 459 :: 17 : x$. Súmense los logaritmos de los medios, y réstese el logaritmo del primer término, y se tendrá el del cuarto.

$$
\begin{array}{rl}
L.\ 17 = & 1{,}2304489 \\
L.\ 459 = & 2{,}6618127 \\
C.\ L.\ 153 = & 7{,}8153086 \\
\hline
 & 11{,}7075702
\end{array}
$$

11,7075702: su número es 51, 4.° término pedido.

69. La interpolacion de medios geométricos (62) se hace muy fácilmente, construyendo la progresion aritmética de sus logaritmos, y buscando despues los números que les corresponden.

Ejemplo. Queremos interpolar entre 8 y 64 cuatro medios geométricos.

El logaritmo de 8 es 0,9030900: el de 64 es 1,8061800. Interpolemos entre estos dos logaritmos cuatro medios aritméticos, y la progresion será

0,9030900	Sus números formarán la geo-	8
1,0837080	métrica, cuya razon es $\sqrt[5]{8} =$	12,1257
1,2643260	1,5157.	18,3792
1,4449440		27,8576
1,6255620		42,2243
1,8061800		64

70. El logaritmo de un quebrado propio deberia hallarse restando del logaritmo del numerador el logaritmo del denominador; pero esta sustraccion es imposible. Haciéndola por complementos no se pueden quitar las 10 que resultan de mas, y queda el logaritmo gravado con aquellas 10. A estos llamarémos *logaritmos complementarios*. Asi el logaritmo complementario de $\frac{5}{7}$ es 9,8538720.

El logaritmo complementario de 0,024 es 8,3802112 añadiendo al logaritmo de su numerador el complemento 7 del logaritmo de su denominador 100.

En general el logaritmo complementario de una fraccion decimal propia tiene la misma mantisa que indican las notas decimales, y su característica es 9 si la cantidad empieza por décimas, 8 si empieza por centésimas, 7 si empieza por milésimas etc. Porque el logaritmo de una fraccion decimal que no tenga mas que una nota en las décimas, como 0, 4, siendo cero la característica del logaritmo de 4, debe tener por característica 9, complemento del logaritmo de 10. Si solo tiene una nota en las centésimas, como 0,04, será 8 complemento del logaritmo de 100. Si solo tiene una nota en las milésimas, será 7, complemento del logaritmo de 1000, etc.

Pero si tiene muchas notas, las características quedan las mismas: porque cuantas unidades se aumenten á la característica del numerador, por el aumento de notas, otras tantas se aumentan al logaritmo del denominador, y por tanto siempre queda la característica, como si solo hubiera una nota: luego etc.

De aqui se infiere, que para hallar el número correspondiente á un logaritmo complementario, se deben buscar las notas correspondientes á la mantisa, y estas serán las notas decimales: si la característica es 9, la primera de la izquierda representará décimas; si 8, centésimas; si 7, milésimas etc.

Ejemplo. El logaritmo complementario 9,1872386 corresponde al número 0,1539.

El logaritmo complementario 6,6020600 tiene por número á 0,0004.

Cuando una fraccion propia se eleva á una potencia, al multiplicar su logaritmo complementario por el índice de la potencia, se multiplicarán por dicho esponente las 10 que tiene mas; y resultará el logaritmo complementario de la potencia con tantos 10 de mas, como unidades tiene el índice de la potencia.

Ejemplo. Se quiere elevar $\frac{5}{7}$ á la potencia 4.ª

L. C. $\frac{5}{7} = 9,8538720$

$\underline{\qquad\qquad\qquad 4}$

39,4154880: este es el L. C. $(\frac{5}{7})^4$ con 4 decenas de mas. Quitándole tres, será 9,4154880 el L. C. $\frac{5}{7}{}^4$; y por tanto $(\frac{5}{7})^4 = 0,2603$.

Para estraer una raiz de una fraccion propia, añádanse á su logaritmo complementario tantas decenas menos una, como unidades tiene el índice de la raiz, y al partir por dicho índice quedará una sola decena de mas en el logaritmo de la raiz. *Ejemplo.* $\sqrt[3]{}$ 0,004 se halla añadiendo 2 decenas al L. C. de 0,004, que es 7,6020600. La suma 27,6020600 partida por 3, dará L. C. $\sqrt[3]{0,004} = 9,2006866$, y por tanto $\sqrt[3]{0,004} = 0,15874$.

Ejemplo complicado resuelto por el cálculo logarítmico.

$$\text{Sea } x = \frac{(63,9)\sqrt{\tfrac{21}{5}} \times \sqrt[3]{\tfrac{4}{13}}\,(2,618)}{27 \times 0,062}$$

$$\begin{aligned}
\text{L. } 63,9 &= 1,8055009\\
\text{L. } \sqrt{\tfrac{21}{5}} &= 0,3116246\\
\text{L. C. } \sqrt[3]{\tfrac{4}{13}} &= 9,8293722\\
\text{L.}(2,618)^4 &= 1,6718784\\
\text{C. L. } 27 &= 8,5686362\\
\text{C. L. C. } 0,062 &= 1,2076083\\
\hline
& 23,3946206 = \text{L. } x:
\end{aligned}$$

luego $x = 2480,964$; y este será el resultado de todas las operaciones indicadas en el ejemplo.

71. En los cálculos de cambios intervienen siempre factores ó divisores *constantes*, cuales son los números que espresan las razones entre las monedas corrientes de cada pais y su moneda de cambio. Buscando pues el cuarto término de la proporcion de conjunta, y viendo cuál es en él el factor constante, se podrá tener calculado su logaritmo, y no será menester buscar en cada caso particular, sino los logaritmos de la letra y del cambio.

En el ejemplo que propusimos (57) para el cambio de Madrid con Londres, el 4.º término fué $\frac{51200 \times 35\frac{1}{2}}{112 \times 240}$ y su factor constante es $\frac{1}{512 \times 240}$. Su logaritmo complementario es 4,9105188. Sumando este logaritmo con el de la letra en maravedises y el del cambio, se tendrá el logaritmo de la letra en esterlinas.

Haciendo lo mismo en los cambios de Paris, Amsterdam y otras partes, se formará una tabla de los logaritmos de los factores constantes: lo que reducirá todos los cálculos de cambio á una operacion sencillísima.

17.° *Fracciones contínuas.*

72. Fraccion contínua es aquella cuyo denominador en lugar de ser un número entero, es un número mixto; y el quebrado de este tiene por denominador otro número mixto, y asi sucesivamente. Cualquier fraccion comun se puede reducir á contínua, dividiendo sus dos términos por su numerador, y repitiendo la misma operacion en los quebrados que resulten en el denominador. Asi todos los numeradores de las fracciones subordinadas serán iguales á la unidad.

Ejemplo:

La fraccion comun $\frac{216}{887}$ reducida á fraccion contínua es

$$\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\cfrac{1}{1\frac{1}{4}}}}}},$$

que para abreviar se pinta asi $1\,(4,\ 9,\ 2,\ 1,\ 1\frac{1}{4})$, teniendo presente que el numerador 1, que se escribe fuera del paréntesis, sirve para la fraccion y para todas las subordinadas: dentro del paréntesis estan los denominadores escritos en su órden. El último quebrado $\frac{1}{4}$ se escribe como está en la fraccion propuesta.

La fraccion contínua sirve para hallar una serie de fracciones comunes que se van acercando cada vez mas y mas á la propuesta, de las cuales la primera es mayor que la propuesta, la segunda menor, la tercera mayor, la cuarta menor, y asi sucesivamente. La última debe ser igual á la propuesta. Esta aproximacion se hace 1.° despreciando todas las fracciones subordinadas. Asi resulta en el ejemplo anterior $\frac{1}{4}$, fraccion mayor que la propuesta: porque habiendo disminuido su denominador por la supresion de $1\,(9,\ 2,\ 1,\ 1\frac{1}{4})$, habrá resultado una fraccion mayor que la contínua.

2.° Despreciando todas las fracciones subordinadas menos la primera, quedará $1\,(4\frac{1}{9})$, que quiere decir la unidad dividida por $4\frac{1}{9}$, ó $\frac{9}{37}$. Esta fraccion es menor que la propuesta: porque el quebrado $\frac{1}{9}$, que es parte del divisor, se ha aumentado, puesto que he disminuido su denominador por la supresion de las fracciones siguientes.

3.° Tomo otra fraccion mas de las subordinadas, y quedará 1 $(4, 9\frac{1}{2})$; $9\frac{1}{2}$, partiendo á la unidad es $\frac{2}{19}$. Partiendo ahora la unidad por $4\frac{2}{19}$, resulta $\frac{19}{78}$ fraccion mayor que la propuesta: porque habiendo disminuido el denominador de $\frac{1}{2}$, el divisor $9\frac{1}{2}$ es demasiado grande: luego el cociente de 1 partido por $9\frac{1}{2}$ es demasiado pequeño, como tambien el divisor $4\frac{2}{19}$; luego la unidad partida por $4\frac{2}{19}$ dará un cociente mayor que el verdadero.

Ya está conocido el orden y la razon de esta aproximacion. De cada vez se toma una fraccion subordinada mas que en la aproximacion anterior.

La cuarta aproximacion será 1 $(4, 9\frac{1}{3})$, que es $\frac{28}{115}$, menor que la fraccion propuesta.

La quinta es 1 $(4, 9, 2\frac{1}{2})$: el cociente de 1 partido por $2\frac{1}{2}$, es $\frac{2}{5}$, que añadido á 9 es $\frac{47}{5}$. La unidad partida por $\frac{47}{5}$ es $\frac{5}{47}$; que añadido á 4 es $\frac{193}{47}$: la unidad partida por este quebrado es $\frac{47}{193}$, mayor que la propuesta.

Ultimamente, si se toman todas las fracciones subordinadas, resultará la fraccion comun propuesta.

Esta operacion es utilísima para formar idea aproximada del valor de una fraccion irreductible, cuyos términos son muy grandes, en términos mas sencillos: por ejemplo, la fraccion propuesta $\frac{216}{887}$, podemos decir, que está entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{9}{37}$, menor que la primera, y mayor que la segunda, pero se acerca mas á la segunda,

FIN DE LA ARITMETICA.

ELEMENTOS

DE

MATEMATICAS PURAS Y MIXTAS:

POR

DON ALBERTO LISTA.

Quidquid præcipies, esto brevis.

HORAT.

TERCERA EDICION.

TOMO II.

MADRID:

IMPRENTA DE DON NORBERTO LLORENCI.

1838.

PROLOGO

DE LA TERCERA EDICION.

En esta tercera edicion no he hecho tantas adiciones y correcciones al álgebra como á la aritmética, porque la parte esencial, que consiste en los métodos generales y en la interpretacion de las expresiones *exóticas*, me parece que está explicada en la primera edicion con la suficiente claridad. Asi que he hecho muy pocas alteraciones en los artículos de las *Observaciones sobre las ecuaciones de primer grado, de las ecuaciones de segundo grado, y del teorema de los límites.*

No he hecho mas que coordinar los problemas, poner en todos las ecuaciones y la resolucion para alivio de los principiantes, y exponer extensamente la resolucion de algunas cuestiones dificiles, que estaba no mas que indicada en la primera edicion. He aumentado el número y la dificultad de los ejemplos que sirven para ejercitar las reglas del cálculo, ampliando algun tanto las explicaciones cuando me ha parecido necesario.

La adicion mas considerable es el último artículo, que no se hallaba en la primer edicion, y en el cual me he propuesto demostrar por el método algebráico casi todos los teoremas de la aritmética, y generalizar las teorías de los números. A la verdad, ni la naturaleza de un tratado, escrito para la enseñanza, ni el corto círculo á que se extienden los principios del álgebra elemental, me han permitido exponer los sublimes descubrimientos de Fermat, Gauss, Wilson y Legendre. Me he contentado con indicar los primeros principios de la teoría de los números á los que se complacen en las combinaciones aritméticas; y con hacer ver prácticamente, no solo la facilidad con que el álgebra demuestra aquellas verdades que parecieron en la aritmética tan dificiles de comprender, sino tambien la sagacidad con que estudia y desentraña las propiedades mas recónditas de los números, inaccesibles á la simple aritmética, cuando los somete á la accion infalible de su idioma.

Los artículos de letra pequeña son ó explicaciones mas latas de los principios, ó cuestiones y aplicaciones nuevas: asi ó bastará leerlos, ó deberán omitirse hasta el segundo repaso del álgebra.

ALGEBRA.

ARTÍCULO 1º

Objeto de esta ciencia.

1. Algebra es aquella ciencia que expresa por medio de caractéres generales las operaciones que ligan entre sí las diversas cantidades que hay que considerar en una cuestion. El artificio algebráico consiste en expresar tanto las cantidades conocidas ó *datos* del problema, como las desconocidas ó *incógnitas*, por símbolos arbitrarios, que comunmente son las letras de los diferentes alfabetos; ligarlas por medio de los signos que indican las diferentes operaciones que deben ejecutarse sobre dichas cantidades, y en virtud de raciocinios, que el uso y las reglas convierten en un cálculo tan mecánico como los de la aritmética, inferir qué operaciones deben hacerse sobre las cantidades conocidas para deducir de ellas el valor de las incógnitas.

Sirva de ejemplo la cuestion siguiente: *buscar dos números que sumen* 100, *y se diferencien en* 40.

Sea x el menor de estos dos números; el mayor será $x+40$: y como la suma de los dos debe ser igual á 100, será $x+x+40=100$, ó $2x+40=100$.

Quitando de ambos miembros 40, será $2x=60$; y partiendo ambos miembros por 2, será $x=30$; luego el número menor será 30, y el mayor 70. En efecto, la suma de ambos es 100. La cuestion se ha resuelto con mucha sencillez por solo haber introducido el signo x en lugar del número menor.

Mas no se limita el álgebra á resolver con sencillez las cuestiones: su principal objeto es generalizarlas y extenderlas á todos los casos particulares de una misma especie. El buen calculador deberá presentar la cuestion anterior bajo esta forma: *buscar dos números, dada su suma y diferencia*, y la resolverá del modo siguiente:

Sea s la suma, d la diferencia, y x el número menor: el mayor será $x+d$: y como la suma de los dos debe ser igual á s, será $2x+d=s$. Quitando d de ambos miembros, será $2x=s-d$. Partiendo ambos miembros por 2, será $x=\frac{s-d}{2}$, ó $x=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d$, valor del número menor. Añadiéndole d para tener el número mayor, este será $\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d+d$, ó $\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d$.

Examinemos la significacion de estas dos expresiones $\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d$ y $\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d$. Como no son numéricas, no resuelven ningun problema particular; pero hacen mas, porque dan la siguiente regla general: *el número menor es igual á la semisuma menos la semidiferencia; y el número mayor es igual á la semisuma mas la semidiferencia*. Esta regla es aplicable á todos los casos particulares de la misma especie. Asi, si se piden dos números que sumen 100, y se diferencien en 40, el menor será $50-20$ ó 30, y el mayor $50+20$ ó 70. Si se piden dos números que sumen 80, y se diferencien en 27, el menor será $40-13\frac{1}{2}$, ó $26\frac{1}{2}$, y el mayor $40+13\frac{1}{2}$, ó $53\frac{1}{2}$ etc.

Llámanse *fórmulas* las expresiones que indican las operaciones que han de hacerse con los datos para tener el valor de las incógnitas. Las fórmulas del problema anterior son $\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d$ y $\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d$.

Obsérvese que los raciocinios que hemos hecho para resolver la cuestion propuesta no son mas que las traducciones en escritura algebráica de los raciocinios mas largos y complicados, que hubiera sido necesario hacer en lenguage comun para resolver la misma cuestion, y son los siguientes:

Traduccion.

1.º El número mayor es igual al número menor mas la diferencia. . . . . $x+d$.

2.º El mayor mas el menor compone dos veces el menor mas la diferencia, y esto es igual á la suma. . . . . $2x+d=s.$

3.º Quitando de ambas sumas iguales la diferencia, el doble del número menor será igual á la suma menos la diferencia. . . . . $2x=s-d.$

4.º Partiendo estas dos cantidades iguales por 2, será el número menor igual á la semisuma menos la semidiferencia. . . . . $x=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d.$

5.º Añadiendo al número menor, que es la semisuma menos la semidiferencia, la diferencia, será el número mayor la semisuma mas la diferencia menos la semidiferencia, ó la semisuma mas la semidiferencia. . . . . $x+d=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d.$

La ventaja del lenguage algebráico sobre el comun consiste en su *concision*; porque siendo mas conciso, es mas fácil de escribir, presenta las ideas con mas prontitud, y evita el trabajo de la memoria.

2. Dos son, pues, las principales ventajas del álgebra; la primera, que simplificando los raciocinios que hay que hacer sobre las cantidades, extiende el dominio de las matemáticas á las cuestiones mas complicadas: la segunda, que el resultado algebráico ó la fórmula sirve de regla para resolver todas las cuestiones de la misma especie; pues tengan los datos el valor que tuvieren, las fórmulas indican las operaciones que deben hacerse sobre ellos para tener los valores de las incógnitas.

2º *Algoritmo, ó expresion y simplificacion de las operaciones.*

3. La suma, resta, multiplicacion y division no se efectúan en las cantidades algebráicas, solo se indican. Pero es de suma importancia simplificar esta indicacion todo lo posible; y este es el objeto del *algoritmo*, ó de la suma, resta, multiplicacion y division *algebráicas*.

La suma de cantidades iguales, como $a+a+a+a$, se expresa poniendo la a una sola vez, y anteponiéndole el número de cantidades sumadas. Asi $a+a+a+a=4a$. El número que antecede á una letra se llama *coeficiente* suyo, y denota que la letra está multiplicada por él.

La reunion de dos ó mas letras significa el producto de las cantidades que representan: abc equivale á $a\times b\times c$: $4abt$ equivale á $4\times a\times b\times t$: $^3/_5 ab$ equivale á $^3/_5 \times a\times b$.

Cuando en el producto hay letras iguales, se pone cada letra una sola vez, y sobre ella un poco á la derecha el número de letras iguales: este número se llama *exponente* de la letra. Asi $4aabbb$ se escribirá $4a^2b^3$. El exponente, pues, es el índice de la potencia, á que está elevada la letra.

3. Cuando varias cantidades están sumadas ó restadas, cada una de ellas se llama *término*, y el conjunto de todas *polinomio*. *Binomio* es el que consta de dos términos: *trinomio* el que consta de tres etc. $4a^2b-5ab^3+7bc$ es un trinomio. *Monomio* es un término solo.

4. Términos semejantes son los que constan de un mismo número de factores literales respectivamente iguales. En el polinomio $4ab^3-5a^3b+6a^3b+9ab^3$, $4ab^3$ y $9ab^3$ son semejantes entre sí: $-5a^3b$ y $6a^3b$ son semejantes entre sí: $4ab^3$ y $-5a^3b$ no son semejantes.

Los términos semejantes se reducen á uno solo, considerando el conjunto de letras como un factor comun, que está repetido en cada uno las veces que indica su coeficiente; y sumando despues ó restando estos coeficientes, segun tengan un mismo signo ó signo contrario. El resultado de la suma ó resta será el coeficiente del producto de las letras; será aditivo ó tendrá el signo $+$, si la suma de coeficientes positivos es mayor que la de los negativos: en el caso contrario tendrá el signo $-$ ó será sustractivo.

En el ejemplo anterior diré: $4ab^3+9ab^3$ son $13ab^3$, $-5a^3b+6a^3b$ queda en a^3b. Asi aquel polinomio se reduce á $13ab^3+a^3b$; $4a^2b-5a^2b+a^2b$ es cero.

5. La suma de las cantidades algebráicas se expresa poniendo las unas á continuacion de las otras, unidas con el signo $+$, haciendo antes la reduccion de términos semejantes si los hay.

Ejemplo.

$$\begin{array}{l} 4a^2b-5abc+9b^2 \\ 7b^2-4a^2b-8abc \\ 6t-2a^2b-6abc \\ \hline \end{array}$$

$16b^2-2a^2b-19abc+6t$ es la suma expresada con la mayor sencillez posible.

6. Para restar las cantidades algebráicas se escribirá el minuendo, y á continuacion el subtrahendo con los signos mudados.

Dem. Háyase de restar de a, $b-c$. El resíduo no se alterará aunque á minuendo y subtrahendo se añada la cantidad c: luego la operacion se reduce á restar de $a+c$, b: el resíduo es $a+c-b$, es decir, igual al minuendo mas el subtrahendo con los signos mudados: luego etc.

Ejemplo. Restando de $4a^2-9ab+7b^2$, $3a^2+7ab-6c^2$, el resíduo es $4a^2-9ab+7b^2-3a^2-7ab+6c^2=a^2-16ab+7b^2+6c^2$.

Acomoda muchas veces presentar con los signos mudados dos ó mas términos de un polinomio: entonces se les encierra en un paréntesis, y se le pone fuera el signo $-$, que denota que estan restados de lo demas de la cantidad; pues verificada la resta tendrian aquellos términos su signo primitivo. Asi $a-b+c$ equivale á $a-(b-c)$; $4a-3b-3c=4a-(3b+3c)$.

7. Para multiplicar los monomios, se multiplican con cierto orden los factores de que constan. Primero se multiplican entre sí los factores numéricos, es decir, los coeficientes: las letras desiguales se escriben juntas; y si hay una misma letra en ambos factores, se suman sus

exponentes, porque en el producto debe entrar aquella letra como factor tantas veces como entre en el multiplicando mas tantas veces como entre en el multiplicador.

Adviértase que á un termino que esté sin coeficiente, se le entiende el coeficiente 1, y á una letra que esté sin exponente, se le entiende el exponente 1.

Ejemplo. $5a^3b^4cm \times 7a^2bc^2z = 35a^5b^5c^3mz$.

8. Para multiplicar dos polinomios se multiplicará cada término del uno por todos los del otro; y cada producto parcial tendrá el signo $+$, si los dos términos de que proviene tienen un mismo signo; y tendrá el signo $-$, si dichos dos términos tienen signo contrario.

Dem. Háyase de multiplicar $a+b$ por $c+d$, que se indica asi $(a+b)(c+d)$. Esta operacion quiere decir repetir $a+b$, c número de veces, y luego d número de veces, y sumar los productos. Ahora bien: $a+b$ multiplicado por c es $a \times c$ mas $b \times c$ ó $ac+bc$: por la misma razon $(a+b)d = ad+bd$, y el producto total será $ac+bc+ad+bd$. Se ve pues que cuando en los factores no hay signo negativo, todos los términos del producto son positivos.

2º Si se hubiera de multiplicar $(a-b)(c-d)$, esto equivale á multiplicar $(a-b)c$, luego $(a-b)d$, y restar este producto del anterior. Ahora bien, $(a-b)c$ es $ac-bc$: porque si de cada a hay restada una b, de a repetida c número de veces deberá restarse b repetido c número de veces ó bc. Por la misma razon $(a-b)d = ad-bd$. Restando este producto del anterior, será $(a-b)(c-d) = ac-bc-ad+bd$.

Aunque los polinomios fueran diferentes de los propuestos se podrian reducir á la misma forma que estos tienen haciendo igual a la suma de los términos positivos de un factor, $=c$ la de los positivos del otro, $=b$ la suma de los negativos del primero, é $=d$ la de los negativos del segundo: cuando en el producto anterior pusiéramos por a, b, c, d sus valores, como en estos valores no entra ningun signo $-$, veríamos que al multiplicarse cada término del multiplicando por cada término del multiplicador, todos los productos parciales, procedentes de factores de un mismo signo, toman el signo $+$, y los procedentes de factores de distinto signo toman el signo $-$: luego etc.

Ejemplo de la multiplicacion de los polinomios.

$$\begin{array}{l} 4a^2-3ab+7b^2 \\ \underline{(2a^2-6ab+3b^2)} \\ \left.\begin{array}{l} 8a^4-6a^3b+14a^2b^2 \\ \quad -24a^3b+18a^2b^2-42ab^3 \\ \qquad +12a^2b^2-9ab^3+21b^4 \end{array}\right\} = 8a^4-30a^3b+44a^2b^2-51ab^3+21b^4. \end{array}$$

9. La regla de multiplicar nos da los siguientes teoremas:

1º Elevando el binomio general $a+b$ al cuadrado, ó multiplicándolo por sí mismo, da $a^2+2ab+b^2$: luego el cuadrado de un binomio consta del cuadrado de su primera parte, duplo de la primera parte por la segunda, y cuadrado de la segunda.

2º Elevando el binomio $a+b$ al cubo, ó multiplicando su cuadrado $a^2+2ab+b^2$ por el mismo binomio $a+b$, resulta $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$: luego el cubo de un binomio consta del cubo de la primera parte, triplo del cuadrado de la primera por la segunda, triplo de la primera por el cuadrado de la segunda y cubo de la segunda.

3º Multiplicando $a+b$ por $a-b$ resulta a^2-b^2: luego la suma de dos cantidades, multiplicada por su diferencia, produce la diferencia de los cuadrados de ambas cantidades.

4.º Si se multiplican varios factores binomios, cuya primer parte sea igual en todos, y la segunda diferente, como $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$..... el producto que tomado hasta 4 factores, es $x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$, tendrá las propiedades siguientes:

El primer término será igual á la primera parte elevada á la potencia que indica el número de factores; pues debe ser el producto de los primeros términos de los factores; es decir, de tantas x como factores hay.

El último término debe ser igual al producto de las segundas partes, que son los segundos términos de los factores.

Desde el primer término al último, deben disminuir los exponentes de la primer parte de unidad en unidad.

Habrá tantos términos como factores hay mas uno, contando como un solo término todos aquellos en que x esté elevado á una misma potencia.

Cada término debe contener tantos factores literales como factores binomios hay en el producto.

El coeficiente del segundo término debe ser la suma de las segundas partes; porque en cada producto de este término, que tiene una x menos que el primero, no debe entrar mas que una de las segundas partes; y como el producto será siempre el mismo, aunque las letras a, b, c, d se permuten, es necesario que el coeficiente de dicho término sea tal que no se altere por dicha permutacion. Esto no sucede sino á la suma de las segundas partes $a+b+c+d$: luego este coeficiente es la suma de las segundas partes.

El coeficiente del tercer término debe ser la suma de los productos de dos en dos que se pueden formar con las segundas partes. Porque este término contiene dos x menos que el primero; y por tanto cada producto suyo debe contener dos de los factores $a, b, c, d \ldots\ldots$; y como la permutacion de estas letras no debe alterarlo, será forzosamente la suma de los productos de dos en dos que se pueden formar con dichas letras $ab+ac+ad+bc+bd+cd$.

Del mismo modo se demostrará que el coeficiente del cuarto término es la suma de los productos de tres en tres de las segundas partes, el del quinto la suma de los productos de cuatro en cuatro de las mismas etc.

10. La division de las cantidades monomias debe hacerse por reglas inversas á las de la multiplicacion; es decir, partiendo los coeficientes y restando los exponentes de las letras iguales: en cuanto á las letras desiguales, las del dividendo quedarán en el numerador, y las del divisor en el denominador.

Ejemplos. $\frac{12a^3b^2c}{3ab}=4a^2bc$: $\frac{4ac^3de^3}{8bd^3e}=\frac{ac^3e^2}{2bd^2}$: la letra d queda en el denominador, donde tenia el mayor exponente: porque suprimiendo un factor d en numerador y denominador, en el numerador no queda d, y en el denominador donde habia d^3, quedará d^2.

11. Para partir los polinomios es necesario ante to-

das cosas buscar en el dividiendo (producto del divisor dado por el cociente incógnito) un término que provenga de la multiplicacion de otros dos, uno del divisor y otro del cociente, sin reduccion alguna. Este término es seguramente en el que tiene mayor exponente una de las letras, porque procede ciertamente de la multiplicacion de los dos términos del divisor y cociente, en que tiene dicha letra mayor exponente. Dispongo, pues, los términos del dividendo y divisor de manera que los exponentes de una letra disminuyan en ambos desde el primer término hasta el último, lo que se llama *ordenar un polinomio con respecto á una letra*; y partiendo el primer término del dividendo por el primero del divisor, tendré el primer término del cociente.

Multiplico este término por todo el divisor, resto el producto del dividendo, y me quedará el producto del divisor por los términos que faltan del cociente.

El mismo raciocinio haré en este nuevo producto, y partiendo su primer término por el primero del divisor, tendré el segundo término del cociente; y del mismo modo hallaré los demas. La operacion acaba cuando en una de las restas queda cero de resíduo, y entonces la division algébrica es exacta: ó cuando el exponente de la letra que ordena es menor en el primer término del dividendo parcial que en el divisor, en cuyo caso es la division inexacta, pues aquel término no ha podido proceder de la multiplicacion del primer término del divisor por una cantidad entera. En este caso se forma un quebrado del resto y divisor, y se añade al cociente obtenido.

Cuando en las divisiones parciales de los términos, algunos de ellos ó ambos tengan el signo —, deberá dársele al cociente un signo tal, que su multiplicacion por el primer término del divisor produzca el primer término del dividendo: esto se conseguirá dando al cociente el signo + si los términos que se parten tienen un mismo signo, y el signo — si lo tienen diverso.

Si la letra que ordena se halla con un mismo exponente en varios términos, se estimarán todos como uno solo, poniendo la letra con su exponente fuera de un paréntesis, y dentro de él la suma de las cantidades que la multiplican en aquellos términos.

Ejemplos.

1º

$$
\begin{array}{l|l}
4a^6 - 25a^2b^4 + 20ab^5 - 4b^6 & 2a^3 - 5ab^2 + 2b^3 \\
\hline
-4a^6 + 10a^4b^2 - 4a^3b^3 & 2a^3 + 5ab^2 - 2b^3 \\
\hline
+10a^4b^2 - 4a^3b^3 - 25a^2b^4 + 20ab^5 - 4b^6 & \\
-10a^4b^2 + 25a^2b^4 - 10ab^5 & \\
\hline
-4a^3b^3 + 10ab^5 - 4b^6 & \\
+4a^3b^3 - 10ab^5 + 4b^6 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

2º

$$
\begin{array}{l|l}
a^4 - b^4 & a - b \\
\hline
-a^4 + a^3b & a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \\
\hline
a^3b - b^4 & \\
-a^3b + a^2b^2 & \\
\hline
a^2b^2 - b^4 & \\
-a^2b^2 + ab^3 & \\
\hline
ab^3 - b^4 & \\
-ab^3 + b^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

3º

$$
\begin{array}{l|l}
a^4 + (b - 5c)a^3 - (4b^2 - 6c^2)a^2 + (b^3 - 5bc^2 - 5b^2c + c^3)a + b^4 - c^4 & a^2 - (2b + 2c)a + b^2 - c^2 \\
\hline
-a^4 + (2b + 2c)a^3 - (b^2 - c^2)a^2 & a^2 + (3b - 3c)a + b^2 + c^2 \\
\hline
+(3b - 3c)a^3 - (5b^2 - 7c^2)a^2 + (b^3 - 5bc^2 - 5b^2c + c^3)a + b^4 - c^4 & \\
-(3b - 3c)a^3 + (6b^2 - 6c^2)a^2 - (3b^3 - 3bc^2 - 3b^2c + 3c^3)a & \\
\hline
+(b^2 + c^2)a^2 - (2b^3 + 2bc^2 + 2b^2c + 2c^3)a + b^4 - c^4 & \\
-(b^2 + c^2)a^2 + (2b^3 + 2bc^2 + 2b^2c + 2c^3)a - b^4 + c^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

4º

$$\begin{array}{l|l} (4b^2-4bc+c^2)a^4-(b^4+2b^3c+b^2c^2)a^2+(2b^5+2b^4c)a-b^6 & (2b-c)a^2-(b^2+bc)a+b^3 \\ \hline -(4b^2-4bc+c^2)a^4+(2b^3+b^2c-bc^2)a^3-(2b^4-b^3c)a^2 & (2b-c)a^2+(b^2+bc)a-b^3 \\ \hline (2b^3+b^2c-bc^2)a^3-(3b^4+b^3c+b^2c^2)a^2+(2b^5+2b^4c)a-b^6 & \\ -(2b^3+b^2c-bc^2)a^3+(b^4+2b^3c+b^2c^2)a^2-(b^5+b^4c)a & \\ \hline -(2b^4-b^3c)a^2+(b^5+b^4c)a-b^6 & \\ +(2b^4-b^3c)a^2-(b^5+b^4c)a+b^6 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Se empieza partiendo el coeficiente de a^4 que es $4b^2 - 4bc + c^2$, por el de a^2 que es $2b - c$; y resulta $2b - c$: por tanto el cociente de los primeros términos de ambos polinomios es $(2b - c)a^2$. Multiplicado por el divisor y restado del dividendo, la reduccion de los términos, que contienen una misma potencia de a, se hace del modo siguiente: los términos que contienen a^2, tienen ambos el signo $-$: sumo sus coeficientes, y resulta $3b^4 + b^3c + b^2c^2$. Si ambos tienen diferente signo, se elige el que se quiera para el resultado, y se resta del coeficiente que tiene el signo elegido el coeficiente que tiene el signo contrario.

12. La division algebráica da los teoremas siguientes:

1º $\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4}$ $+ \ldots\ldots\ldots\ldots + a^{m-1}$: porque disminuyendo de unidad en unidad en cada término el exponente de la x, y aumentando el de la a, cuando desaparezca x del término del cociente, este será a^{m-1}, que multiplicado por $-a$ produce $-a^m$, que restado del dividendo lo desvanece: luego la diferencia de dos potencias de un mismo grado dividida por la diferencia de sus raices da un cociente exacto, cuya forma es la série $x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3}$ $+ a^3x^{m-4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a^{m-1}$.

2º Haciendo en la fórmula anterior $a = 1$, será $\frac{x^{m}{}_{1}}{x-1} = x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1$; luego si una potencia disminuida en una unidad se divide por su raiz, disminuida tambien en una unidad, el cociente es exacto é igual á la unidad sumada con las potencias sucesivas de la misma raiz, desde la primera hasta la que es inferior en una unidad á la potencia qne dicha raiz tiene en el dividendo.

Aplicacion numérica: $\frac{3^5-1}{3-1}=1+3+3^2+3^3+3^4$; como se puede comprobar.

Si un polinomio ordenado con respecto á una letra x se divide por el binomio $x-a$, el resto de la particion será el mismo polinomio, substituyendo en él á la letra que lo ordena la letra a. Este teorema se explica y comprueba con el ejemplo siguiente:

Si partimos $x^2+2bx+c^2$ por $x-a$, haciendo la particion, da de cociente $x+2b+a$, y el resto es $a^2+2ba+c^2$, es decir, el dividendo mismo mudada la x en a.

Dem. Sea el polinomio general $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots\ldots +tx+u$. Dividiéndolo por $x-a$, el primer término del cociente será x^{m-1}: y el primer término del dividendo que queda será $(a+p)x^{m-1}$: despues de la segunda particion el primer término que queda es $(a^2+pa+q)x^{m-2}$: al fin de la tercera queda $(a^3+pa^2+qa+r)x^{m-3}$: luego despues de m, número de particiones, desaparecerá del resto la x, y quedará $a^m+pa^{m-1} +qa^{m-2}+\ldots\ldots\ldots+ta+u$: luego etc.

3º *De las fracciones algebráicas.*

13. Las fracciones algebráicas se calculan como las numéricas.

Ejemplos. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$; $\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(m+\frac{p}{q}\right)=\frac{ac+b}{c}\times\frac{mq+p}{q}=\frac{(ac+b)(mq+p)}{cq}$; $\frac{5b^2}{6a^3}:\frac{3b}{5ac}=\frac{25bc}{18a^2}$. $a+\frac{x-2a}{5}=\frac{5a+x-2a}{5}=\frac{3a+x}{5}$; $\frac{p}{y}-\frac{z^2}{3p^2}=\frac{3p^3-z^2y}{3p^2y}$: $3a-\frac{ab}{a+b}=\frac{3a^2+2ab}{a+b}$; $\frac{4c^2}{m^3}\times 3m=\frac{12c^2}{m^2}$; $x-\frac{a+b}{p}:p=\frac{px-a-b}{p^2}$.

14. La investigacion del máximo comun divisor para la reduccion de las fracciones algebráicas polinomias, ofrece algunas dificultades, que se desvanecen, teniendo presentes estos dos principios:

1º Si un polinomio es divisible por un factor, independiente de la letra que lo ordena, este factor ha de ser comun á todos los términos del polinomio: pues vemos que al multiplicar un polinomio por un factor, independiente de la letra que lo ordena, no se altera el orden de los exponentes de dicha letra, y parece el factor en todos los términos del producto.

2º El máximo comun divisor de dos cantidades no se altera aunque se multiplique ó parta una de ellas por una cantidad que no tenga ningun factor comun con la otra; porque no añadiendo esta multiplicacion, y no suprimiendo esta particion, ningun factor comun á ambas, no se podrá alterar la mayor medida comun, que es el producto de todos los factores comunes á ambas cantidades. Asi la mayor medida de 50 y 30 es la misma que la de 50 y 10, porque el 3, por quien he partido el 30, no es factor del 50. Tambien dicha mayor medida comun es la misma que la de 350 y 30, porque el 7 no es factor del 30.

En las cantidades algebráicas se ve lo mismo. Sean ac, bc^2 las dos cantidades algebráicas, y supongamos que a y b son primos entre sí y con c; es evidente que podremos multiplicar la segunda por d, siendo d primo con a y c, y partir la primera por a; en cuyo caso se reducirán á dc^2 y c, cuya medida comun es c, la misma que tenian las dos cantidades propuestas.

Sentado esto, comenzaré á buscar el mayor divisor comun de los dos polinomios propuestos, viendo si tienen algun factor comun, ya numérico, ya algebráico, que sea independiente de la letra que ordena. Este factor aparecerá facilmente, porque debe ser comun á todos los términos de ambos polinomios. Si lo hay, se pondrá aparte, como factor del comun divisor, y partiré ambos polinomios por él.

Despojados por esta particion del factor independiente, buscaré el factor comun que tengan, dependiente de la letra que ordena, por la sucesiva particion, como se enseñó en aritmética. Para evitar los quebrados que podrian resultar en los cocientes, observaré estas dos reglas: 1ª Partir el divisor por toda cantidad que sea comun á sus términos, y que no tenga ningun factor comun con el dividendo: 2ª Multiplicar despues el dividendo por los factores necesarios para que su primer término sea divisible por el primero del divisor.

Cuando se llegue á una division exacta, el último divisor será el factor comun que tienen los dos polinomios dependiente de la letra que ordena: se multiplicará por el factor independiente, si lo hubo, y se tendrá el máximo comun divisor que se pedia.

Pero si continuando la division se llega á un resto independiente de la letra que ordena, esto probará que los polinomios no tienen ningun factor comun dependiente de dicha letra; y por tanto no tendrán mas divisor comun que el factor independiente si lo hubo.

Ejemplos. Reducir á mínimos términos el quebrado $\frac{6a^3-6a^2y+2ay^2-2y^3}{12a^2-15ay+3y^2}$. No hay factor independiente. suprimo en el denominador el factor 3, y queda en $4a^2-5ay+y^2$. Multiplico el numerador por 2 para que su primer término sea divisible por $4a^2$: el numerador quedará en $12a^3-12a^2y+4ay^2-4y^3$: partiendo, tengo el cociente $3a$ y el resto $3a^2y+ay^2-4y^3$. Multiplícolo por 4 para que su primer término sea divisible por $4a^2$, y es $12a^2y+4ay^2-16y^3$. Parto, y el cociente es $3y$ y el resto $19ay^2-19y^3$. Como en este tiene la letra que ordena menor exponente que en el primer término del divisor, partiré el divisor por el resto, suprimiendo antes en este el factor independiente $19y^2$. Partiendo pues $4a^2-5a+y^2$ por $a-y$, sale el cociente exacto $4a-y$: luego $a-y$ es el mayor divisor comun de los términos de la fraccion propuesta: partiéndolos por él quedará reducida á $\frac{6a^2+2y^2}{12a-3y}$.

Otro.

Sea la fraccion propuesta $\frac{4a^4-4a^2b^2+4ab^3-b^4}{6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4}$ No hay factor comun independiente. El divisor comun de numerador y denominador es $2a^2+2ab-b^2$ que la reduce á $\frac{2a^2-2ab+b^2}{3a^2-ab-2b^2}$

Otro.

Sea la fraccion $\frac{54a^2b-24b^3}{45a^3b+3a^2b^2-9ab^3+6b^4}$; hay el factor independiente $3b$. Dividiendo por él ambos polinomios quedan reducidos á $15a^3+a^2b-3ab^2+2b^3$ y $18a^2-8b^2$. El divisor comun de estos es $3a+2b$: luego el de los polinomios propuestos es $3b(3a+2b)$. Para reducir la fraccion será mejor partir sus términos, primero por $3b$, y despues por $3a+2b$, y se reduce á $\frac{6a-4b}{5a^2-3ab+b^2}$.

Sea en fin la fraccion
$$\frac{a^2(b^2-c^2)-ab(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c)}{a^3(b^2+2bc+c^2)-a^2b(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c)}.$$
Hay el factor independiente $b+c$. Partiendo ambos polinomios por él, busco el divisor comun de $a^2(b-c)-ab(2b-c)+b^3$ y $a^3(b+c)-a^2b(2b+c)+ab^3$, que es $a-b$. Obsérvese que las particiones necesarias para hallarlo son de la misma especie que las de los ejemplos tercero y cuarto que pusimos en la division de los polinomios. En la primer particion hay que multiplicar el dividendo por $b-c$. El divisor comun de los polinomios propuestos es $(b+c)(a-b)$, y la fraccion se reduce á $\frac{a(b-c)-b^2}{a^2(b+c)-ab^2}$

4.º *Ecuaciones de primer grado con una sola incógnita.*

15. *Ecuacion de primer grado* es aquella en que el mayor exponente de la incógnita es 1, como $3x-4=2x+7$. *Ecuacion del 2.º grado*, en la que el mayor ex-

ponente de la incógnita es 2: del 3º en la que es 3 etc. La ecuacion $3x^2-5x^3=x^4-9x-35$ es *ecuacion del 4º grado.*

16. Para resolver un problema es necesario, primero, hallar una ecuacion en que esten indicadas las relaciones de la incógnita con las cantidades conocidas: segundo, deducir de esta ecuacion el valor de la incógnita. *Poner el problema en ecuacion* es cifrar en una ecuacion las relaciones entre incógnitas y datos. *Despejar la incógnita ó resolver la ecuacion* es hallar el valor de la incógnita, deducido de la ecuacion del problema.

17. Para poner el problema en ecuacion *deben indicarse con la incógnita las mismas operaciones que se harian con su valor numérico, si fuera conocido, para comprobar la condicion del problema.* El siguiente ejemplo hará entender bien esta regla.

Se pregunta: ¿cuánto debia un comerciante, que habiendo pagado en una ocasion la mitad de la deuda, en otra el tercio y en otra la duodécima parte, queda todavía á deber 630 duros?

Si se dijese que la deuda era al principio de 1200 duros, para ver si esto era cierto, es decir, para ver si este número satisfacia á la condicion del problema, sacaria su mitad, su tercera, su duodécima parte, las sumaria, añadiria 630 duros; y si esta suma era igual á la deuda 1200, era señal de que el número 1200 era el número pedido. Pues suponiendo que dicho número es x, indico con la x, por medio de los signos algebráicos las mismas operaciones que he hecho con el número 1200; y resulta $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{12}+630=x$, y esta es la ecuacion del problema propuesto.

18. Para despejar la incógnita en una ecuacion del primer grado se observarán las reglas siguientes:

1ª Si hay quebrados en la ecuacion, redúzcanse dichos quebrados á un mismo denominador, y suprímase este: para esto deberán multiplicarse los términos enteros por el comun denominador. La supresion del comun denominador equivale á multiplicar ambos miembros por él.

En el ejemplo anterior 12 es el comun denominador. La ecuacion despejada de quebrados es $6x+4x+x+7560=12x$.

2ª Pásense á un miembro todos los términos que contienen la incógnita, y á otro todos los que no la contienen, y múdesele el signo al término que pasa de un miembro á otro; porque esto equivale á restar aquel término de ambos miembros, y no altera la igualdad.

La ecuacion anterior, pasando las x al segundo miembro, es $7560=x$; luego la deuda era de 7560 duros.

3ª Si hecha la trasposicion de los términos queda la incógnita con algun multiplicador, la incógnita será igual al otro miembro dividido por dicho multiplicador.

Ejemplo.: Un padre tiene cuadrupla edad de su hijo, y sus edades suman 45 años: ¿qué edad tiene cada uno? Sea x la edad del hijo, la del padre será $4x$: su suma $5x=45$; de donde $x={}^{45}/_{5}=9$, edad del hijo. La del padre es 36 años.

19 Teorema. *En una ecuacion de primer grado la incógnita solo puede tener un valor.*

Dem. Sea la ecuacion general de primer grado, ya despejada de quebrados, $ax+b=cx+d$: sea $x=m$: esto es, que sustituyendo en lugar de x, m, la ecuacion quede satisfecha: será $am+b=cm+d$. Si hay otro número n, que sustituido por x en la ecuacion, la satisfaga tambien, será $an+b=cn+d$. Restando estas dos últimas ecuaciones, será $am-an=cm-cn$, ó $a(m-n)=c(m-n)$; luego $a(m-n)-c(m-n)=0$, ó $(a-c)(m-n)=0$; luego ó $a-c$ ó $m-n$ debe ser cero; pero $a-c$ no puede ser cero; pues si a fuese $=c$, la ecuacion propuesta se reduciria á $b=d$, y no habria en ella incógnita: luego es preciso que $m=n$; es decir, que solo el número m sustituido por la incógnita satisface á la ecuacion.

Ejemplos de ecuaciones resueltas.

$^6/_5x-90+{}^2/_3x={}^4/_3x-82$ . . . . . . $x=15$.

$^2/_7x+9={}^1/_3x-10$ . . . . $x=399$.

$\frac{ax}{b}+\frac{cx}{f}+m=px+\frac{cx}{f}+n$ . . . . $x=\frac{b(n-m)}{a-bp}$.

5º *Problemas de primer grado que se resuelven con una sola incógnita.*

20. I. Diofanto, insigne matemático, pasó la sexta parte de su edad en la niñez, y la duodécima en la adolescencia: se casó; y habiendo vivido sin hijos la séptima parte de su vida y cinco años mas, tuvo un hijo, que vivió la mitad de la edad del padre, y que murió cuatro años antes que Diofanto. ¿De qué edad murió este?

Sea x dicha edad: $\frac{x}{6}$ pasó en la niñez, $\frac{x}{12}$, en la adolescencia, $\frac{x}{7}+5$ casado sin hijos, $\frac{x}{2}$ mientras vivió su hijo, y cuatro años le sobrevivió: luego su edad total $x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+\frac{x}{2}+9$. Multiplico por 84 para quitar quebrados, y será $84x=14x+7x+12x+42x+9.84$: de donde $9x=9.84$, y $x=84$.

II. Preguntándole á uno qué edad tenia su hijo, respondió: si del doble de su edad se resta el triplo de la edad que tenia seis años há, quedará su edad actual. ¿Cuánta era esta?

Sea x su edad actual, $x-6$ la que tenia seis años antes. Resto de $2x$, $3(x-6)$ ó $3x-18$, y será $18-x=x$, de donde $x=9$.

III. Un comisionado de comercio salió de Barcelona con géneros que valian una cierta suma. Llegó á Zaragoza, donde gastó la mitad de la suma, y ganó en la venta de sus géneros 20 doblones. Pasó á Burgos, donde gastó la cuarta parte de lo que llevaba, y ganó 15 doblones. De alli pasó á Oviedo, donde gastó el tercio de lo que tenia, y ganó 16 doblones. Llegó á la Coruña, y gastó la sexta parte de lo que tenia, y ganó 18 doblones. Se embarcó para Cádiz; y pagado el flete, que fue de cinco doblones, halló que habia doblado la suma con que salió de Barcelona. ¿Cuánta era esta?

Sea x esta suma. De Zaragoza salió con $x+\frac{x}{2}+20$, ó $\frac{x+40}{2}$ En Burgos gastó $\frac{x+40}{8}$, y ganó 15: luego salió de Burgos con $\frac{3x+240}{8}$. En Oviedo gastó $\frac{x+80}{8}$, y ganó 16: luego salió de alli con $\frac{x+144}{4}$. En la Coruña gastó $\frac{x+144}{24}$, y ganó 18: luego se embarcó con $\frac{5x+1152}{24}$. Restando los cinco doblones del flete, debe quedar $2x$: luego $\frac{5x+1152}{24}-5=2x$. Quito quebrados, y es $5x+1152-120=48x$, de donde $43x=1032$, y $x=24$ doblones, suma con que salió de Barcelona.

IV. ¿Cuál es el número cuyo tercio es excedido de 20, en lo que 30 excede á dicho número?

Sea dicho número x: será $20-\frac{x}{3}=30-x$, y $x=15$.

V. En todo relox el minutero está sobre la manilla á las 12. ¿Cuándo volverán á encontrarse?

Cuando la manilla esté en la una, el minutero volverá á estar en las 12. Sea pues x el camino de la manilla desde la una al punto de encuentro: el del minutero será $1+x$: y como el minutero anda doce veces mas que la manilla en tiempo igual, será $1+x=12x$, de donde $x={}^{1}/_{11}=5\,{}^{5}/_{11}$ minutos: luego volverán á encontrarse á la $1^{h}\ 5^{m}\,{}^{5}/_{11}$.

VI. Hurtaron dos 60 doblones: al partirlos, riñeron, y arrebató cada uno lo que pudo: puestos en paz, dió el primero al segundo la cuarta parte de lo que habia arrebatado; y el segundo al primero la tercera parte de lo que habia arrebatado, y asi quedaron con partes iguales. ¿Cuánto arrebató cada uno? El primero 24 doblones, y el segundo 36. La ecuacion es $\frac{3x}{4}+\frac{60-x}{3}=30$.

21. Es preferible resolver los problemas *algebráicamente*, es decir, sustituyendo letras en lugar de los números conocidos: entonces el valor de la incógnita, deducido de la ecuacion, no será un número, sino una fórmula, que servirá de regla para resolver todos los casos particulares de la misma especie.

Ejemplo. El problema del número 18, regla tercera, propóngase asi: el padre tiene m número de veces mas edad que el hijo: la suma de ambas edades es a: ¿qué edad tiene cada uno? Sea x la edad del hijo; la del padre será mx: su suma $mx+x=a$, de donde $x=\frac{a}{m+1}$: es decir, *la edad del hijo igual á la suma dada partida por la denominacion del múltiplo mas 1.* Con esta regla podemos resolver todos los problemas semejantes al propuesto, sin necesitar de nueva ecuacion. Por ejemplo: si el padre debe tener séptupla edad del hijo, y la suma de ambas debe ser 40, la edad del hijo será $\frac{40}{7+1}=5$, y la del padre 35.

La resolucion algebráica trae otra ventaja, y es que su ecuacion puede servir para resolver no solo el problema propuesto, sino todos aquellos en que, permaneciendo una misma la condicion, se considere como incógnita alguna de las cantidades que entran en dicha ecuacion, y como conocidas las demas. Por ejemplo, la ecuacion anterior $mx+x=a$ resuelve este problema general. *De estas tres cosas, la suma de las edades de un padre y un hijo, las veces que el padre tiene mas edad que el hijo, y la edad del hijo, dadas dos determinar la tercera.* No hay mas que despejar en la ecuacion la letra que se suponga desconocida. Asi es como el álgebra cifra en breves fórmulas una teórica entera.

El problema V, resuelto generalmente, presenta una fórmula muy elegante para hallar todos los puntos de encuentro de la manilla con el minutero. Supongamos que la primera esté en la hora a, cuando el minutero está en las 12. Sea x el camino de la manilla desde la hora a hasta el punto de encuentro: el del minutero en el mismo tiempo será $a+x$, de donde $a+x=12x$, y $x=\frac{a}{11}$. Asi los encuentros sucesivos despues de la 1, 2, 3.......... 11, serán á las $1\,{}^{1}/_{11}$, $2\,{}^{2}/_{11}$, $3\,{}^{3}/_{11}$, $4\,{}^{4}/_{11}$....... $11\,{}^{11}/_{11}$ ó 12.

VII. Dadas las edades de un padre y un hijo, determinar el número de años que deberán vivir para que la edad del padre sea m número de veces múltipla de la del hijo.

Sea a la edad del padre, b la del hijo, x los años que deberán vivir para que $a+x=(b+x)m$ ó $a+x=bm+mx$: será $x=\frac{a-bm}{m-1}$: fórmula que se puede aplicar á cualquier caso particular.

VIII. Buscar un número que dividido por otros dos, los cocientes tengan una diferencia dada.

Sean a y b los divisores, d la diferencia de los cocientes, x el número pedido. La ecuacion es $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=d$: de donde $x=\frac{abd}{b-a}$.

IX. Con un número dado de cartas a se forma un número dado b de montones, teniendo cada uno el número de puntos c, contados de modo que la carta inferior de cada monton valga el punto que significa, y las demas valga cada una por 1: sobra el número de cartas d, y se pide la suma de puntos de las cartas inferiores, que llamo x.

Las cartas inferiores valen x número de puntos:

añadiendo el número de cartas superiores, que es $a-d-b$, de las cuales cada una vale un punto, se tendrá el total de puntos, que es el número de montones b multiplicado por c puntos de cada uno: por tanto la ecuacion es $x+a-d-b=bc$, de donde $x=b(c+1)-(a+d)$.

X. Uno quiere repartir el dinero que tiene entre varios pobres: si les da á cada uno a, le falta c, para hacer la distribucion: si les da á cada uno b, le sobra d, despues de hecha la distribucion: ¿cuántos eran los pobres, y qué dinero tenia?

Sea x el número de pobres: la ecuacion es $ax-c=bx+d$ y $x=\frac{c+d}{a-b}$.

XI. Dividir un número dado en partes proporcionales á varios números dados. (Este problema es la regla de compañías generalizada).

Sea a el número dado, los proporcionales sean m, n, p etc., y x la parte del número que ha de ser proporcional á m. La ecuacion es $x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}+\text{etc.}=a$: de donde $x=\frac{ma}{m+n+p+\text{etc.}}$ ó $m+n+p+\text{etc.}:m::a:x$, proporcion semejante á la que resuelve la regla de compañías.

XII. Dados los tiempos que tarda cada una de dos fuentes en llenar un estanque, determinar cuánto tardarán en llenarle las dos corriendo á la par.

Sea a el tiempo que tarda en llenarlo la primera, b el tiempo que tarda la segunda, y x el tiempo en que lo llenarán las dos juntas. En el tiempo x la primer fuente llenará la parte $\frac{x}{a}$ del estanque, y la segunda la parte $\frac{x}{b}$ del mismo; y como entre ambas deben llenarlo todo en dicho tiempo, será $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$, representando por 1 la capacidad del estanque. De esta ecuacion $x=\frac{ab}{a+b}$.

XIII. Un pescador promete á su hijo darle un cierto número de cuartos en premio por cada vez que saque peces en la red, con tal que el hijo le pague otro cierto número de cuartos por cada vez que no los saque. Al cabo de un determinado número de redadas ajustan cuentas, y queda debiendo el uno al otro un número de cuartos conocido tambien. Se pregunta, ¿cuántas veces sacó la red vacía, y cuántas con pescado?

Sea a el número total de redadas, b los cuartos de premio, c los de pérdida, d lo que quedó ganando ó perdiendo el hijo despues de ajustadas las cuentas, y x el número de veces que salió la red vacía: será $a—x$ el número de veces que sacó pescado.

Perdió por consiguiente cx, porque c número de cuartos en x, número de redadas inútiles, compone cx, número de cuartos que perdió; y ganó $ab—bx$, esto es, $a—x$, número de redadas útiles, multiplicado por b número de cuartos que ganó en cada una. La diferencia entre estas dos cantidades es la pérdida ó ganancia líquida: si ganó diremos $ab—bx—cx=d$, y $x=\frac{ab-d}{b+c}$. Si perdió será $cx—ab+bx=d$, y $x=\frac{ab+d}{b+c}$. Vemos pues que ambos casos están comprendidos en una misma fórmula, con solo mudar el signo de d, ó hablando en el lenguage usado en el álgebra, con solo hacer negativa la d. Si quedaron en paz, $d=o$, y $x=\frac{ab}{b+c}$.

XIV. Buscar un número, cuyas partes de una cierta denominacion multiplicadas entre sí dén el mismo producto que las partes del mismo número de una denominacion mayor en una unidad que la primera.

Sea x el número: cada parte suya de la denominacion m, vale $\frac{x}{m}$, y el producto de todas es $\left(\frac{x}{m}\right)^m$. Cada parte de la denominacion $m+1$ vale $\frac{x}{m+1}$, y el producto de todas es $\left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1}$. Como ambos productos deben ser iguales, será $\left(\frac{x}{m}\right)^m = \left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1}$ ó $\frac{x^m}{m^m} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^{m+1}}$. Quitando quebrados es $(m+1)^{m+1} x^m = m^m x^{m+1}$ ecuacion del grado $m+1$ que se reduce al primer grado, partiendo ambos miembros por x^m: resulta $(m+1)^{m+1} = m^m x$, de donde $x = \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}$.

XV. Dos jugadores se ponen á jugar con una misma cantidad de dinero: el primero pierde a, el segundo pierde b; y la cantidad que queda al primero es m número de veces múltipla de la que queda al segundo. ¿Con qué dinero se pusieron á jugar?

Sea x dicho dinero. La ecuacion es $x-a=m(x-b)$, y $x=\frac{mb-a}{m-1}$.

XVI. Se pide dividir el número a en varias partes tales, que la primera exceda á la segunda en b, la segunda á la tercera en c, la tercera á la cuarta en d ect.

Sea x la parte menor y n el número de partes: la ecuacion es $nx+b+2c+\ldots\ldots=a$, de donde $x=\frac{a-b-2c-3d-\ldots}{n}$. Si x es la parte mayor, seria $x=\frac{a+b+2c+3d+\ldots}{n}$.

XVII. ¿Cuál es el número que sumado primero con a, y despues con b, tienen estas sumas la razon de $m:n$?

El número es $\frac{an-bm}{m-n}$.

XVIII. Un Oficial queriendo disponer su tropa en batallon cuadrado, le sobra a número de soldados. Añade 1 soldado por fila é hilera, y le falta b número de soldados para formar este segundo cuadro: ¿cuántos soldados tenia?

Sea x el número de soldados que habia: con $x-a$ soldados formó el primer cuadro, cuyo lado fue $=\sqrt{(x-a)}$. Pudo formar el segundo cuadro con $x+b$ soldados, y su lado fue $=\sqrt{x+b}$; y como este lado excedia al primero en 1 unidad, será $\sqrt{(x+b)}=1+\sqrt{(x-a)}$.

Elevando al cuadrado ambos miembros, será $x+b=1+2\sqrt{x-a}+x-a$, ó reduciendo y despejando á $\sqrt{(x-a)}$, es $\sqrt{(x-a)}=\frac{a+b-1}{2}$. Elevando al cuadrado ambos miembros, será $x-a=\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2$ y $x=\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2+a$. Esta fórmula manifiesta que el problema es imposible, si a y b son ambos pares ó ambos impares.

XIX. Uno reparte su hacienda de modo que al primero de sus hijos toque a, y la parte p del resto: al segundo $2a$ y la parte p del resto: al tercero $3a$ y la parte p del resto etc. Todos salen con partes iguales. ¿Cuánta era la haciende, cuánto tocó á cada uno, y cuántos eran los hijos?

Sea x la hacienda: la parte del primero será $a+\frac{x-a}{p}$, ó $\frac{ap+x-a}{p}$.

La del segundo será $2a+\frac{x-2a-\frac{ap+x-a}{p}}{p}=$ $\frac{2ap^2+px-3ap-x+a}{p^2}$: estas dos partes deben ser iguales: luego $\frac{ap+x-a}{p}=\frac{2ap^2+px-3ap-x+a}{p^2}$; de donde $x=ap^2-2ap+a$, ó $x=a(p-1)^2$, valor de la hacienda.

La parte del primero, que es la cuota de todos, es $a+ap-2a$, ó $a(p-1)$, y el número de hijos es $p-1$.

Este problema puede resolverse suponiendo que la cuota es x, y esta será la parte del primero: la parte p del resto que tocó al primero será $x-a$, el resto $px-ap$, y la hacienda $px-ap+a$, porque todavía no se habia sacado de la hacienda mas que la cantidad a.

La parte del segundo es $2a+\frac{px-ap+a-2a-x}{p}$ que debe ser $=x$. De esta ecuacion resulta $x=a(p-1)$.

La hacienda $px-ap+a$, es $a(p^2-p-p+1)$, ó $a(p-1)^2$, como antes.

Tambien puede ponerse la incógnita por el número de hijos: sea x el número de hijos: la parte del último, y por consiguiente la cuota será ax; porque en la parte del último no puede haber resto. Si lo hubiera, como solo se le debiera dar la parte p del resto, quedaria algo de la hacienda contra el supuesto.

Siendo la parte del primero ax, su parte p del resto es $ax-a$, su resto $apx-ap$, la hacienda $apx-ap+a$, la parte del segundo $2a+\frac{apx-ap+a-2a-ax}{p}=ax$, de donde $x=p-1$: la cuota ax es $a(p-1)$, y la hacienda $apx-ap+a$ es $a(p^2-p-p+1)=a(p-1)^2$.

XX. Un comerciante emplea todos los años a, número de duros, en el gasto de su casa; pero en virtud de su comercio aumenta cada año su capital en la parte p de lo que le queda, deducido aquel gasto. Al cabo de n, número de años, ha multiplicado por m su capital: ¿cuánto era al principio?

Sea x el capital con que empezó: $x-a$ será lo que le quedó, deducida la cantidad a. Ganó la parte p de $x-a$: luego multiplicó el resto por $1+\frac{1}{p}$: haciendo $1+\frac{1}{p}=q$, para la mayor sencillez del cálculo, será su capital al fin del primer año $qx-qa$.

Quitándole a, y multiplicando el resto por q, al cabo del segundo año tuvo q^2x-q^2a-qa: al cabo del tercero, $q^3x-q^3a-q^2a-qa$, y al cabo de n, número de años, su capital era $q^nx-qa(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots+1)$ ó $q^nx-qa.\frac{q^n-1}{q-1}$ (12), y como esto debe ser $=mx$, será $x=\frac{qa(q^n-1)}{(q-1)(q^n-m)}$.

Aplicacion. Sea $a=3000$, $p=3$, $n=3$, $m=2$, será $x=44400$.

La ecuacion fundamental manifiesta que la diferencia entre $q^n x$, cantidad que hubiera adquirido el capitalista si no hubiera deducido nada de su caudal, y mx, cantidad que tiene realmente, es $=qa.\frac{q^n-1}{q-1}=$ $qa(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots+1)$, es decir, á la suma de las cantidades que hubieran producido la a del primer año en n años, la a del segundo en $n-1$, etc.

Si consideramos atentamente el problema, vemos que debe ser asi, porque segregando el capitalista de su negociacion una a al principio de cada año, se priva de las existencias que le corresponden al cabo de n años, que son sucesivamente aq^n, aq^{n-1}, aq^{n-2}, ...qa; cuya suma restada de $q^n x$, cantidad que hubiera obtenido no segregando nada, debe ser igual á mx.

Esta manera de establecer la ecuacion es mas elegante, porque se obtiene sin calcular las cantidades que quedan al fin de cada año, de las cuales hemos inferido por induccion la que quedará al cabo de n años.

Vemos, pues, que la solucion de un problema, aunque sea por medios complicados, nos sirve de guia para deducirla de reflexiones mas sencillas y elegantes.

XXI. Un capitalista aumenta todos los años su caudal en su parte p, y extrae al fin de cada año la cantidad a: al cabo de n años ha multiplicado su caudal por m: ¿cuánto era al principio?

La ecuacion es $mx=q^n x-a.\frac{q^n-1}{q-1}$, que manifiesta haberse podido deducir de reflexiones análogas á las del problema anterior. Con la primer segregacion se priva de la existencia correspondiente á a al cabo de $n-1$ número de años; porque empieza la segregacion un año despues que en el problema anterior. Con la segunda se priva de aq^{n-2}, con la tercera de aq^{n-3}, ...con la última solo de a. La suma de estas existencias perdidas es $a.\frac{q^n-1}{q-1}$, y la ecuacion será $mx=q^nx-a.\frac{q^n-1}{q-1}$.

La diferencia entre las existencias perdidas en ambos problemas es aq^n-a, y asi debe ser; porque siendo la existencia perdida en cada año en la primer hipótesi igual á la perdida el año anterior en la segunda, no debe haber entre ambas pérdidas otra diferencia que la que existe entre la cantidad perdida en el primer año en la primera hipótesi, y la perdida en el último año en la segunda, siendo iguales las pérdidas intermedias en ambas hipótesis. Aunque en la primera sea mayor la pérdida, como la cantidad que necesite el capitalista para sostener su casa el primer año se ha de deducir de alguna parte, la pérdida de los intereses que dicha cantidad le produciria desvanece la ventaja aparente de la segunda hipótesis.

XXII. Un comerciante quiere asegurar un cargamento, y recibir en caso de pérdida la totalidad de él de los aseguradores, lo que podrá ser si la ley mercantil permite asegurar no solo el capital sino tambien el premio del seguro. En una parte le piden a por 100 por el seguro: en otra le piden b por 100, en caso de que su capital se salve, y d por 100 mas, en caso de que se pierda. Se pregunta qué relacion debe existir entre a, b y d, para que en el caso de salvamento pague lo mismo á un asegurador que á otro.

El *seguro* es un tanto por ciento que el capitalista paga al asegurador, ya perezca su capital, ya se salve, con la condicion de que en el primer caso el asegurador le ha de pagar su capital. Por ejemplo, yo envio á América un cargamento, cuyo valor es de 60000 duros, y lo aseguro á 5 por 100 contra los riesgos del viage, yo debo pagar el 5 por 100 de 60000, que es 3000 duros; pero si mi capital perece, me lo debe devolver el asegurador. En el caso presente, si el capital se pierde, el asegurador deberá pagarme 57000 duros, deduciendo los 3000 del seguro que siempre le debo pagar.

Pero si quiero que se me devuelvan íntegros los 60000, en este caso deberé asegurar no solo el capital efectivo, sino ademas un capital *entendido* correspondiente al premio del seguro. Deberé decir: si para que me vuelvan 95 debo asegurar 100, para que me vuelvan 6000 ¿cuánto deberé asegurar? $\frac{60000 \times 100}{95}$ ó 63157 $\frac{17}{19}$. El 5 por 100 de este capital, que es el que se asegura, es 3157 $\frac{17}{19}$, que debe pagar en todos casos. En el de pérdida recibe íntegro el capital 60000. Este convenio de un capital ficticio es ventajoso al asegurador en caso de salvamento, y al asegurado en caso de pérdida. Sentado esto, si el capitalista ha de asegurar no solo el capital (que supondremos 100, representado por la letra c), sino tambien el premio del seguro, de modo que pagado este premio reciba 100, deberá decir: si por $c-a$ pago a, por c ¿cuánto pagaré? $\frac{ac}{c-a}$. Deberá, pues, asegurar $\frac{c^2}{c-a}$, cuyo a por c es $\frac{ac}{c-a}$.

En el caso de premio parcial y sobrepremio, deberá decir: si por $c-b-d$ pago $b+d$, por c ¿cuánto pagaré? $\frac{c(b+d)}{c-(b+d)}$. Deberá, pues, asegurar $\frac{c^2}{c-(b+d)}$, cuyo b por c (que es lo que paga en caso de salvamento) es $\frac{bc}{c-(b+d)}$.

La ecuacion es $\frac{ac}{c-a}=\frac{bc}{c-(b+d)}$, de donde $d=c-\frac{bc}{a}$.

Ejemplo. Si $a=10$ y $b=8$, $d=20$, es decir, que en caso de salvamento, lo mismo es asegurar á 10 por 100 premio absoluto, que á 8 por 100 y 20 por 100 mas en caso de pérdida. En efecto, en el caso del premio absoluto 10 por 100, tiene que asegurar $111\frac{1}{9}$, cuyo 10 por 100 es $11\frac{1}{9}$; y en el caso de 8 por 100 parcial y 20 de sobrepremio, tiene que asegurar $138\frac{8}{9}$, cuyo 8 por 100 es $11\frac{1}{9}$.

Vemos, pues, que en caso de salvamento el asegurado, pagando b por 100 de premio parcial sobre la cantidad asegurada $\frac{c^2}{c-(b+d)}$, paga lo mismo que si hubiese asegurado $\frac{c^2}{c-a}$ al premio absoluto a por 100. Si el cargamento se pierde, en ambos casos recibe c del asegurador; porque en el primero $\frac{c^2}{c-a}-\frac{a}{c}\times\frac{c^2}{c-a}=c$, y en el segundo pagando $b+d$ por 100 de $\frac{c^2}{c-(b+d)}$, será $\frac{c^2}{c-(b+d)}-\frac{b+d}{c}\times\frac{c^2}{c-(b+d)}=c$.

Tambien vemos que por cada unidad que disminuya el premio parcial b aumenta el sobrepremio d la cantidad $\frac{c}{a}$. Asi lo mismo es asegurar á 8 de premio parcial y 20 de sobrepremio, que á 7 de premio parcial y 30 de sobrepremio, á 6 de premio parcial y 40 de sobrepremio etc.

Tambien se ve que el premio absoluto debe ser mayor que el premio parcial; y que los sobrepremios deben estar en la misma razon que las diferencias de cada premio parcial al absoluto.

6º *Observaciones sobre las ecuaciones de primer grado.*

21. En toda ecuacion de primer grado el valor de la incógnita puede reducirse al cociente de dos diferencias; pues siendo la fórmula general de dichas ecuaciones, ya despejadas de quebrados, $ax+b=cx+d$,

resulta $x=\frac{d-b}{a-c}$. Esta fórmula admite cinco casos esencialmente diversos.

Caso 1º Cuando ambas sustracciones son posibles, es decir, $d>b$ y $a>c$: entonces el valor de la incógnita satisface á la ecuacion y al problema.

—2º Cuando ninguna de ellas puede hacerse, es decir, $d<b$ y $a<c$: entonces, aun cuando expresásemos el valor de la incógnita por $\frac{-(b-d)}{-(c-a)}$, ni sabriamos qué quieren decir estas dos cantidades negativas aisladas, ni cuál debe ser su cociente.

Pero obsérvese que la imposibilidad de hacer estas sustracciones procede de haber hecho en la ecuacion la trasposicion de las x al primer miembro; pues haciéndola al segundo resulta $b-d=cx-ax$ y $x=\frac{b-d}{c-a}$, valor en el cual pueden verificarse las dos sustracciones, y que satisface á la ecuacion y al problema. Como este valor no se diferencia del primero sino en la variacion de los signos, podemos mirar el cociente de las dos cantidades negativas como si fueran positivas, lo que concuerda con las reglas de la multiplicacion de los signos y convenir en las siguientes reglas.

1ª Es lícito mudar el signo á los dos términos de un quebrado, lo que equivale por otra parte á multiplicarlos por la cantidad aislada -1.

2ª Es lícito mudar el signo á todos los términos de una ecuacion, lo que equivale á trasponerlos todos ó á multiplicar ambos miembros por -1.

Estas reglas se fundan en que, aunque las cantidades negativas aisladas no representan cantidades existentes ni operaciones posibles, su introduccion en el cálculo no admite inconveniente y lo facilita. Son signos de convencion que se someten á las leyes del álgebra, como si fuesen cantidades verdaderas, asi como las palabras *absurdo*, *disparate*, *imposible* se someten á las leyes de la gramática, aunque nada verdadero representan, porque son útiles en la locucion; pues con ellas se pueden formar frases y proposiciones ciertas y evidentes como esta: *un círculo cuadrado es un disparate. Círculo cuadrado y disparate* son voces que nada existente significan; y sin embargo por su reunion forman una proposicion cierta. Del mismo modo, aunque $-(b-d)$ y $-(c-a)$ nada signifiquen, podemos decir que $x=\frac{-(b-d)}{-(c-a)}$, porque siguiendo las reglas del cálculo algebráico, esta ecuacion equivale á $x=\frac{b-d}{c-a}$.

3ª Puede suceder que una de las dos sustracciones sea posible y la otra no, como si $d<b$ y $a>c$. Entonces la ecuacion $ax+b=cx+d$ tiene el término $ax>cx$ y el término $b>d$, y es imposible que $ax+b$ sea igual á $cx+d$. Y como en este caso el valor de x resulta negativo, se infiere que *cuando el valor de* x *resulta negativo de una ecuacion, el problema es imposible.*

Pero como este valor negativo ha de satisfacer algebráicamente á la ecuacion, si en ella variamos el signo de x, será $b-ax=d-cx$, ecuacion posible, aunque perteneciente á otro problema diferente del que expresa la primer ecuacion $ax+b=cx+d$: luego siempre que el *valor de la incógnita resulte negativo, no resolverá el problema propuesto que declara por imposible, sino otro, cuya propuesta se inferirá de la ecuacion, mudando en ella el signo de* x.

Ejemplo. ¿Cuál es el número cuyo tercio y quinto sumados y disminuidos de 7 han de dar el mismo número? Ecuacion: $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}-7=x$, de donde $x=-15$. Mudo pues el signo de x en la ecuacion, y resulta $-\frac{x}{3}-\frac{x}{5}-7=-x$, ó cambiando todos los signos $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+7=x$, de donde $x=15$. Luego el problema propuesto era imposible, y el valor negativo hecho positivo resuelve el siguiente problema: ¿cuál es el número cuyo tercio y quinto sumados con 7 han de dar el mismo número?

El valor -15 de x es lo que se llama una cantidad negativa aislada; y ya hemos visto que estas cantidades nada significan sino la absurdidad del problema que las ha producido; pero tambien hemos visto que combinadas entre sí como en el caso 2º pueden dar resultados verdaderos, sometiéndolas á las reglas comunes del cálculo: por consiguiente las reglas de los signos que hemos explicado (desde 5 hasta 11) para las cantidades negativas unidas con otras positivas, sirven tambien para las cantidades negativas aisladas; y sus resultados serán, ya absurdos, ya verdaderos, segun que sean positivos ó negativos. El ejemplo siguiente manifestará la utilidad de las cantidades negativas aisladas.

Supongamos que 10, partido por el número a, y dándole al cociente una unidad mas que lo que le toca, deje el resto $-b$, cantidad absurda, que manifiesta que hemos tomado un cociente mayor que el verdadero: se pide el resto que dejarán 10^2, 10^3, 10^4,..... partidos por el mismo número a.

Sea q el cociente verdadero de $\frac{10}{a}$ y r el resto verdadero será $10=aq+r$; pero siendo $r+b=a$ (*Aritmética* 11), será $10=aq+a-b$, ó $10=a(q+1)-b$.

Elevando al cuadrado será $10^2=a^2(q+1)^2-ab(q+1)+b^2$: luego el resto verdadero de 10^2, partido por a, será b^2; es decir, $-b\times-b$, aplicando al resto absurdo $-b$ la regla de los signos.

Luego si conozco el resto absurdo (ó por *defecto*) de $\frac{10}{a}$, tendré el verdadero (ó por *exceso*) de 100, que es 10^2, multiplicando el resto absurdo $-b$ por sí mismo, ó elevándolo al cuadrado.

Si multiplicamos $10^2=a^2(q+1)^2-2ab(q+1)$

$+b^2$ por $10=a(q+1)-b$, se verá, sin hacer la multiplicacion, que el único término no divisible por a, será el producto de b^2 por $-b$, ó $-b^3$, ó $(-b)^3$: luego el resto absurdo $-b$, elevado al cubo, me dará el resto absurdo de 10^3 ó de 1000. El de 10000, ó 10^4, será b^4 verdadero; el de 10^5 será $(-b)^5$ . . . . . y en general el resto de 10^m, será $(-b)^m$, por exceso ó por defecto, esto es, verdadero ó absurdo, segun m sea par ó impar. Luego puede extenderse á los restos negativos, ó por defecto, la regla que dimos para los positivos, ó por exceso (*Aritm.* 16).

Vemos, pues, que el cálculo de las cantidades negativas aisladas es útil: 1º, porque algunas veces da resultados verdaderos: 2º, porque, aun cuando los da absurdos, es fácil deducir el verdadero. En efecto, conocido el resto por defecto, es fácil de averiguar el resto por exceso.

4º El denominador es cero cuando $c=a$, entonces $x=\frac{d-b}{0}$: este cociente no existe: pues ninguna cantidad, por grande que sea, multiplicada por cero, da otra cosa que cero. El *infinito* en matemáticas es el cociente de una cantidad partida por cero, y se expresa con este signo, ∞. En este caso la ecuacion $ax+b=cx+d$ es imposible, siempre que b no sea $=d$: luego el valor *infinito de la incógnita declara absurdo el problema.*

Pero esta absurdidad procede de haber supuesto posible un caso, al cual se van acercando otras hipótesis diferentes, sin llegar nunca á él; porque suponiendo que la diferencia entre a y c disminuya gradualmente hasta ser $=0$, los valores que en estos grados vaya teniendo la x irán aumentando á proporcion que disminuya el denominador $a-c$: luego el caso de ser $a=c$, que resulta imposible, es el límite de todas las diminuciones posibles de $a-c$: luego el *valor infinito de la incógnita, declarando imposible el pro-*

blema, denota el límite á que se va acercando alguna de las condiciones del problema.

Ejemplo. Sale Pedro de un lugar caminando diariamente a leguas. Despues de b dias sale Juan en su alcance, caminando c leguas por dia, de un pueblo en la direccion del camino de Pedro, y adelantado al pueblo de donde salió Pedro en d leguas: ¿cuándo se encontrarán?

P ——————— J ——————— E

Sea P el lugar de que sale Pedro, J el lugar de que sale Juan y E el punto en que se encuentran. La direccion de ambos movimientos es desde P hácia E.

Sea x el tiempo que tardará Juan en encontrarse con Pedro.

Pedro, desde que salió de P hasta que llegó á E, estuvo en camino $b+x$, número de dias, y á razon de a, número de leguas diarias, anduvo $ab+ax$, número de leguas.

Juan en x dias, á razon de c, número de leguas diarias, anduvo cx, número de leguas; y como Pedro caminó d leguas mas que Juan, será $ab+ax=cx+d$, de donde $x=\frac{ab-d}{c+a}$.

Aplicacion. Sea $a=c=8$, $b=6$, $d=1$: $x=\frac{47}{0}=\infty$, problema imposible. En efecto, si Pedro llevaba 47 leguas adelantadas cuando Juan salió, y Juan andaba todos los dias tanto como Pedro, jamás le debe alcanzar. Mientras menor sea el exceso de la velocidad de Juan sobre la de Pedro, tanto mas lejano estará el punto de encuentro. Pero si aquel exceso llega á ser nulo, que es el caso del límite designado por el valor infinito de la incógnita, será imposible el encuentro.

Otra aplicacion. Sea $a=9$, $c=5$, $d=20$, $b=4$. Resulta $x=-4$; luego el problema es absurdo. Mudando el signo de x en la ecuacion, resulta $ab-ax=d-cx$; es decir, que los caminos ax, cx, andados por

Pedro y Juan desde que salió Juan, deben restarse, el primero del camino que ya habia andado Pedro, y el segundo de d: lo que no puede ser si no se supone que Pedro en el momento que salió Juan volvió á andar hácia el pueblo J, que J caminaba hácia P, y que el punto de encuentro está en el camino de J, á P, á los 4 dias que salió Juan. En efecto, Pedro llevaba andadas 36 leguas cuando salió Juan, y por consiguiente se hallaba á 16 leguas á la derecha de J; volvió atrás, y en las 4 jornadas que señala el valor de x anduvo 36 leguas, y por consiguiente volvió á P. Juan en las 4 jornadas anduvo 20 leguas, y se encontró con Pedro en P.

Otra. Sea $a=9$, $c=5$, $d=40$, $b=4$: resulta $x=\frac{-4}{-4}=1$. En efecto, Pedro en los 4 primeros dias llevaba andadas 36 leguas, y le faltaban 4 para llegar á J. Como x vale 1, en un dia se adelantó Pedro 5 leguas al pueblo de donde salió Juan: Juan anduvo aquel dia 5 leguas, y por tanto se encontraron.

Si Pedro y Juan salen de un mismo pueblo $d=0$, y la fórmula es $x=\frac{ab}{c-a}$.

5º Pueden ser iguales á cero el numerador y el denominador, siendo $a=c$, $b=d$: entonces $x=\frac{0}{0}$, cociente que indica todos los números posibles; porque todo número, multiplicado por el divisor cero, produce el dividendo, que es cero. La ecuacion fundamental en este caso es $ax+b=ax+b$, ecuacion que es verdadera, sea cual fuere el valor de x. Luego si *el valor de la incógnita es* $\frac{0}{0}$, *todos los valores posibles de ella satisfarán la ecuacion, y el problema tendrá infinitas soluciones.*

Un problema se llama indeterminado cuando se puede resolver de muchos modos: determinado cuando solo hay un valor de la incógnita que lo satisfaga.

Verifiquemos los principios que hemos sentado en el siguiente problema:

Conocido el camino diario de dos correos, y la distancia á que se hallaba el uno del otro antes de salir, hallar el camino que tendrán que andar para encontrarse.

Supongamos que empiezan á caminar á un mismo

E'' $\quad A \quad E \quad B \quad E'$

tiempo y en direccion contraria, el primer correo desde A hácia B, caminando diariamente a leguas, y el correo segundo desde B hácia A, caminando diariamente b leguas. Sea E el punto de encuentro, y la distancia $AB=d$.

Sea $AE=x$, $BE=d-x$: el primer correo tardará en llegar á E, $\frac{x}{a}$; el segundo $\frac{d-x}{b}$, y como estuvieron en camino el mismo tiempo, será $\frac{x}{a}=\frac{d-x}{b}$, de donde $x=\frac{ad}{a+b}$, $d-x=\frac{bd}{a+b}$.

Pero si el primer correo se puso en camino h, número de dias antes que el segundo, será $\frac{x}{a}=\frac{d-x}{b}+h$, de donde $x=\frac{a(d+bh)}{a+b}$; $d-x=\frac{b(d-ah)}{a+b}$.

Si entrambos correos salen á un mismo tiempo y en una misma direccion hácia E', que supongo que es el punto de encuentro, sea $AE'=x$, $BE'=x-d$, y la ecuacion fundamental será $\frac{x}{a}=\frac{x-d}{b}$, de donde $x=\frac{ad}{a-b}$, $x-d=\frac{bd}{a-b}$. Si $b=a$, $x=\infty$ y el problema imposible, lo que es evidente. Si $d=0$, y $b=a$, $x=0/0$, y el encuentro se verifica en todos los puntos del camino. Si $b>a$, x es negativo, y el problema imposible. Mudando el signo de x en la ecuacion fundamental, es $-\frac{x}{a}=-\frac{x+d}{b}$, ó $\frac{x}{a}=\frac{x+d}{b}$, lo que supone que el segundo correo anduvo mas camino que el primero, y por consiguiente que la direccion comun de ambos fue desde B hácia E'', y su encuentro á la izquierda de A.

Si el primer correo se puso en camino h, número de dias antes que el segundo, será $\frac{x}{a}=\frac{x-d}{b}+h$, de donde $x=\frac{a(d-bh)}{a-b}$, $x-d=\frac{b(d-ah)}{a-b}$. Si $d=ah$ y $a=b$, el encuentro se verifica en todos los puntos. Si solamente hay la condicion $a=b$, $x=\infty$ y el problema imposible.

Si $a>b$ y $d>ah$, el problema es posible; porque d será mayor que bh.

Si $a<b$ y $d<ah$ será $d<bh$, el problema es posible; porque los valores de x y $x-d$ resultan positivos.

Si $a>b$ y $d<bh$ será $d<ah$, y los valores de x y $x-d$ serán negativos. Mudo sus signos en la ecuacion fundamental, y será $-\frac{x}{a}=-\frac{x+d}{b}+h$, ó $\frac{x}{a}=\frac{x+d}{b}-h$; en este caso el movimiento será hácia E'' y el segundo correo saldrá h dias antes que el primero.

Si $a<b$ y $d>bh$, y por tanto $d>ah$, x es negativa, la ecuacion es $\frac{x}{a}=\frac{x+d}{b}-h$, caso ya examinado.

Si $a<b$, $d<bh$, y $d>ah$, x es positivo y $x-d$ negativo, lo que indica que el segundo correo caminaba en la direccion de B á A, y que h es la suma de los tiempos.

Si el segundo correo se puso en camino h dias antes que el primero, será $\frac{x}{a}=\frac{x-d}{b}-h$, de donde $x=\frac{a(d+bh)}{a-b}$, $x-d=\frac{b(d+ah)}{a-b}$. Si $b=a$, es imposible el encuentro; si $a<b$, x y $x-d$ son negativos, la ecuacion es $\frac{x}{a}=\frac{x-d}{b}+h$; y por tanto es preciso que el primer correo salga antes, si se han de encontrar.

7º *Resolucion de los problemas determinados con muchas incógnitas.*

22. Cuando hay muchas incógnitas en un problema, es necesario para que sea determinado que el número de ecuaciones sea igual al de incógnitas; pues si hubiera dos incógnitas (por ejemplo) en una sola ecuacion, seria necesario determinar arbitrariamente una de ellas para poder despejar la otra; y esta determinacion arbitraria multiplicaria al infinito el número de soluciones, y haria indeterminado el problema.

Tres métodos hay para hallar el valor de muchas incógnitas en otras tantas ecuaciones:

1º Despéjese una misma incógnita en todas las ecuaciones: igualando sus valores dos á dos, resultará una ecuacion menos y una incógnita menos; porque la que se despejó primero no se hallará ya en ninguna ecuacion. Esto es lo que se llama *eliminar* una incógnita entre varias ecuaciones, deducir de ellas otras ecuaciones, en las que no se encuentre dicha incógnita.

Repítase la misma operacion sobre las ecuaciones que resulten, hasta que resulte una sola incógnita en una sola ecuacion. Hallado en esta el valor de dicha incógnita, por él se podrán hallar los de las otras.

Sirva de ejemplo el problema siguiente: se encargó á un arriero la conduccion de varios vasos de tres diferentes tamaños, á condicion de que pagase por cada vaso que rompiese una cantidad igual al precio de su conduccion. Hizo tres viages: en el primero transportó 5 vasos pequeños, 6 medianos, y 9 grandes; rompió los pequeños, y recibió por precio de la conduccion 68 reales. En el segundo viage llevó 12 pequeños, 4 medianos, y 10 grandes; rompió los medianos, y recibió 68 reales. En el tercer viage llevó 16 vasos pequeños, 10 medianos, y 3 grandes; rompió los grandes, y recibió 54 reales. ¿Cuál era el precio de conduccion de cada vaso pequeño, de cada vaso mediano, y de cada vaso grande?

Sea x el precio de conduccion de cada vaso pequeño, y el de cada vaso mediano, z el de cada vaso grande.

En el primer viage ganó $6y$ por la conduccion de los medianos, $9z$ por la de los grandes, y perdió $5x$ por haber quebrado los pequeños: luego la ecuacion será:

$6y+9z-5x=68$. Igualmente se tendrá

$$\left.\begin{array}{l}12x-4y+10z=68\\16x+10y-3z=54\end{array}\right\}$$ en atencion á los otros dos viages.

Despejando la y en todas tres será $y=\frac{68-9z+5x}{6}$, $y=\frac{6x+5z-34}{2}$ (porque la segunda ecuacion es toda divisible por 2) $y=\frac{54-16x+3z}{10}$.

Igualando el segundo valor de y, que es el mas sencillo, á los otros dos resultarán las dos ecuaciones con dos incógnitas $\frac{6x+5z-34}{2}=\frac{68-9z+5x}{6}$, $\frac{6x+5z-34}{2}=\frac{54-16x+3z}{10}$. Partiendo los denominadores por 2 (lo que equivale á multiplicar por 2 ambas ecuaciones) tendré $6x+5z-34=\frac{68-9z+5x}{3}$, $6x+5z-34=\frac{54-16x+3z}{5}$.

Quitando quebrados es $18x+15z-102=68-9z+5x$, $30x+25z-170=54-16x+3z$. Trasponiendo y reduciendo es $13x+24z=170$, $46x+22z=224$. Despejando la z en ambas es $z=\frac{170-13x}{24}$, $z=\frac{112-23x}{11}$. Igualando sus valores y despejando de quebrados, resulta $1870-143x=2688-552x$. Trasponiendo y reduciendo es $409x=818$, de donde $x=2$, precio de conduccion de los vasos pequeños.

Sustituyo por x su valor en el de $z=\frac{112-23x}{11}$, y será $z=\frac{66}{11}=6$, precio de conduccion de los vasos grandes.

Sustituyo por x y z sus valores en el de $y=\frac{6x+5z-34}{2}=\frac{8}{2}=4$, precio de conduccion de los vasos medianos.

2º Despéjese en una de las ecuaciones el valor de una incógnita, y sustitúyase por dicha incógnita en las demas ecuaciones. Quedará una ecuacion menos y una incógnita menos, y la incógnita primera quedará eliminada. Este método se llama *método de las substituciones*.

Ejemplo. La pólvora se compone de salitre, azufre y carbon. El triplo del peso del salitre debe ser igual á 13 veces el del carbon mas 5 veces el del azufre: y el quíntuplo del peso del salitre debe ser igual á 37 veces el peso del azufre menos siete veces el del carbon. Se pregunta, ¿qué cantidades deben mezclarse de salitre, azufre y carbon, para componer 100 libras de pólvora.

Sea x la cantidad de salitre, y la de azufre, z la de carbon. Las ecuaciones son $x+y+z=100$, $3x=13z+5y$, $5x=37y-7z$. Despejo la x en la primera, $x=100-y-z$. Sustituyendo su valor en las otras dos es $300-3y-3z=13z+5y$, $500-5y-5z=37y-7z$. Trasponiendo y reduciendo es $300=16z+8y$, $500=42y-2z$. Partiendo la primera por 4 y la segunda por 2, es $75=4z+2y$, $250=21y-z$. Despejo la y en la primera, y es $y=\frac{75-4z}{2}$. Sustituyo su valor en la segunda, y es

$250=\frac{1575-84z}{2}-z$, ó $500=1575-84z-2z$, de donde

$86z=1075$, y $z=12^1/_2$, y sucesivamente $y=12^1/_2$, $x=75$.

3º Para eliminar una incógnita de dos ecuaciones, multiplíquese cada una por el coeficiente que dicha incógnita tiene en la otra: resultarán dos ecuaciones, en que dicha incógnita tendrá un mismo coeficiente: restándolas, desaparecerá dicha incógnita. Asi, eliminando una misma incógnita de cada dos ecuaciones, quedará una ecuacion menos y una incógnita menos.

Ejemplo. Hay tres cargas de granos. La primera tiene 30 fanegas de centeno, 20 de cebada, y 10 de trigo, y vale 230 pesetas. La segunda tiene 27 fanegas de centeno, 24 de cebada, y 18 de trigo, y vale 270 pesetas. La tercera tiene 7 fanegas de centeno, 11 de cebada, y 12 de trigo, y vale 121 pesetas. ¿Cuál es el precio del centeno, el de la cebada, y el del trigo?

Sea x el precio de la fanega de centeno, y el de la cebada, z el del trigo. Las ecuaciones serán:

$$30x+20y+10z=230\text{, ó }3x+2y+z=23$$
$$27x+24y+18z=270\text{, ó }9x+8y+6z=90$$
$$7x+11y+12z=121.$$

Despejo la z en la primera ecuacion, y su valor es $z=23-3x-2y$, y la elimino entre la primera y la segunda ecuacion, multiplicando la primera por 6, y restando la segunda. Despues la elimino entre la segunda y la tercera, multiplicando la segunda por 2, y restando del producto la tercera: y tendremos $9x+4y=48$

$$11x+5y=59.$$

Despejo la y en la primera, y es $y=\frac{48-9x}{4}$. Elimino la y entre ambas, multiplicando la primera por 5, la segunda por 4, y restando de la primera la segunda, lo que da $x=4$, precio del centeno, y sucesivamente $y=3$, precio de la cebada, $z=5$, precio del trigo.

Propondremos muchos ejemplos para ejercicio de los alumnos.

I. Una persona tiene monedas en ambas manos. Si pasa una de la derecha á la izquierda, habrá igual número de monedas en ambas manos: si pasa una de la izquierda á la derecha, habrá en esta m número de veces mas monedas que en la izquierda. ¿Cuántas tiene en cada mano?

Sea x el número de monedas de la derecha, y el de la izquierda. Las ecuaciones serán $x-1=y+1$, $x+1=my-m$. Eliminando la x, será $2=my-y-m-1$, de donde $y=\frac{m+3}{m-1}$, y $x=\frac{3m+1}{m-1}$.

II. Un carro está cargado con 50 bombas de dos diversos calibres: las del primero pesan cada una 72 libras, y las del segundo 50. El peso de todas es 2698 libras: ¿cuántas bombas hay de cada calibre?

Ecuaciones: $x+y=50$, $72x+50y=2698$. Valores: $x=9$, $y=41$.

III. Se piden dos números que sumen 570, y que la suma de la mitad, octava y duodécima parte del primero sea igual á la suma del tercio, sexta y novena parte del segundo.

Las ecuaciones son: $x+z=570$, $\frac{x}{2}+\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=\frac{z}{3}+\frac{z}{6}+\frac{z}{9}$. Valores: $x=264$, $z=306$.

IV. Uno deja en su testamento 120000 duros, 12000 á cada sobrino, y 9000 á cada sobrina; y hecho el reparto no queda nada del caudal. Si hubiera dejado 9000 á cada sobrino y 12000 á cada sobrina, hubieran sobrado 9000 duros de la herencia: ¿cuántos eran los sobrinos y cuántas las sobrinas? Ecuaciones $12000x+9000z=120000$, $9000x+12000z=111000$. Valores: $x=7$, $z=4$.

V. Se han comprado tres caballos: el valor del primero, sumado con la mitad del de los otros dos, compone 25 duros: el segundo, con el tercio de los otros dos, vale 26 duros: el tercero, con la mitad de los otros dos, vale 29 duros. ¿Cuánto vale cada uno?

Sea el valor del primero x, el del segundo y, el del tercero z. Las tres ecuaciones serán $x+{}^{1}/_{2}y+{}^{1}/_{2}z=25$, $y+{}^{1}/_{3}x+{}^{1}/_{3}z=26$, $z+{}^{1}/_{2}x+{}^{1}/_{2}y=29$, que despejadas de quebrados son $2x+y+z=50$, $x+3y+z=78$, $x+y+2z=58$. Eliminando la x entre primera y segunda da $5y+z=106$. Eliminando la misma entre segunda y tercera da $2y-z=20$. Eliminando la z de estas dos ecuaciones, es $7y=126$, $y=18$, $z=16$, $x=8$.

VI. Antonio, Benito y Cárlos se ponen á jugar: en la primer partida doblaron Benito y Cárlos su puesta, perdiendo Antonio esta ganancia. En la segunda doblaron Antonio y Cárlos lo que tenian, perdiendo Benito lo que ganaron: en la tercera doblaron Antonio y Benito, perdiendo Cárlos lo que ganaron. Salieron todos con 16 duros: ¿con cuántos empezaron á jugar?

Sea x la cantidad con que empezó Antonio, y la de Benito, y z la de Cárlos. En la primer partida quedó Antonio con $x-y-z$, Benito con $2y$, y Cárlos con $2z$. En la segunda quedó Antonio con $2x-2y-2z$, Benito con $2y-x+y+z-2z$, ó $3y-x-z$, y Cárlos con $4z$. En la tercera quedó Antonio con $4x-4y-4z=16$, Benito con $6y-2x-2z=16$, y Cárlos con $4z-2x+2y+2z-3y+x+z$, ó $7z-x-y=16$. Simplificando primera y segunda ecuacion, resulta $x-y-z=4$, $3y-x-z=8$, $7z-x-y=16$. Eliminando la x es $2y-2z=12$, y $6z-2y=20$, ó $y-z=6$, $3z-y=10$. Eliminando la y es $2z=16$, ó $z=8$; $y=14$, $x=26$.

VII. Un brigadier tiene tres batallones; uno de españoles, otro de portugueses, otro de ingleses. Quiere asaltar una plaza, y ofrece repartir á la tropa, si se apodera de ella, 2707 doblones, dando tres doblones á cada soldado del batallon que entre primero, y repartiendo el resto con igualdad entre los demas. Hecha la cuenta se ve, que si los españoles entran primero, toca á doblon y medio á cada uno de los demas soldados; si entran primero los portugueses, toca á cada uno de los otros á doblon, y si entran primero los ingleses, toca á cada uno de los otros á $^3/_4$ de doblon. ¿Cuántos soldados tiene cada batallon?

Sea x el número de españoles, z el de portugueses, u el de ingleses. Las ecuaciones son $3x+{}^3/_2z+{}^3/_2u=2703$, $3z+x+u=2703$, $3u+{}^3/_4x+{}^3/_4z=2703$, de donde $x=265$, $z=583$, $u=689$.

VIII. Entre 49 personas, en cuyo número hay hombres, mugeres y niños, han gastado 40 reales: cada hombre gastó 4 reales, cada muger 3, y entre cada 5 niños gastaron 1 real. El número de niños es el cuádruplo de la suma de hombres y mugeres aumentada en una unidad. ¿Cuántos hombres, mugeres y niños habia?

Ecuaciones: $x+y+z=49$, $4x+3z+\frac{u}{5}=40$, $u=4x+4z+4$. Valores: $x=5$, $z=4$, $u=40$.

IX. Tres amigos han puesto á la lotería. Los billetes del primero y del segundo costaron juntos 21 pesetas; los del primero y tercero 24; los del segundo y tercero 27; ¿cuánto costó cada billete?

Ecuaciones: $x+z=21$, $x+u=24$, $z+u=27$. Valores: $x=9$, $z=12$, $u=15$.

X. Hallar cuatro números tales, que la suma de los tres primeros componga 50; el primero sumado con el séxtuplo del cuarto sea igual al tercero; la mitad del primero sumada con el triplo del segundo sea igual al décuplo del cuarto, y el tercio del primero sea igual á la mitad del segundo.

Las ecuaciones son: $x+y+z=50$, $x+6u=z$, ${}^1/_2x+3y=10u$, ${}^1/_3x={}^1/_2y$. Valores: $x=12$, $y=8$, $z=30$, $u=3$.

XI. En una Villa hay 600 habitantes repartidos en cuatro barrios. En el primer barrio hay doble número de habitantes que en el cuarto; en el segundo y tercero reunidos hay tantos habitantes como en el primero y cuarto, y el número de habitantes del tercer barrio es los $^5/_7$ del segundo. ¿Cuántos habitantes hay en cada barrio?

Las ecuaciones son: $x+y+z+u=600$, $x=2u$, $y+z=x+u$, $z={}^5/_7y$. Valores: $x=200$, $y=175$, $z=125$. $u=100$.

8º *Problemas indeterminados.*

23. Todo problema en que hay mas incógnitas que ecuaciones, es forzosamente indeterminado: porque si hay m, número de incógnitas, y n, número de ecuaciones, como de estas solo se pueden eliminar $n-1$, número de incógnitas, quedarán en la última ecuacion $m-n+1$, número de incógnitas; y siendo $m>n$, quedará mas de una incógnita en la última ecuacion. Será, pues, preciso determinar arbitrariamente todas las incógnitas de la última ecuacion menos una; y esta determinacion arbitraria hará infinito el número de soluciones.

Ejemplo. Se piden cuatro números cuya suma sea 100, y que multiplicados respectivamente por los números 1, 2, 3, 4, la suma de los productos sea 100.

Las ecuaciones son $x+y+z+u=100$.
$$x+2y+3z+4u=1000.$$

Las incógnitas son cuatro; las ecuaciones dos. De dos ecuaciones solo se puede eliminar una incógnita: luego vendré á parar á una sola ecuacion con tres incógnitas. En efecto, eliminando la x tendré $y+2z+3u=900$, única ecuacion. En ella es preciso determinar arbitrariamente 2 de las incógnitas: por ejemplo la z y la u para conocer la y, y despues la x. Cada determinacion arbitraria produce una nueva solucion del problema.

En todo problema que tenga mas ecuaciones que incógnitas, eliminadas estas quedará una ó mas ecuaciones entre los datos. Si los datos son tales que verifican estas ecuaciones de *condicion*, las ecuaciones propuestas se identifican unas con otras, y se reducen á tantas como incógnitas hay. Si los datos no verifican las ecuaciones de condicion, el problema es absurdo.

Ejemplo. Se piden dos números cuya suma sea a, la diferencia b, y el producto p. Las tres ecuaciones son $x+z=a$, $x-z=b$, $xz=p$. Despejadas la x y z en las dos primeras, sus valores son $x={}^1/_2a+{}^1/_2b$, $z={}^1/_2a-{}^1/_2b$. Sustituidos sus valores en la 3ª, resulta la ecuacion de condicion ${}^1/_4a^2-{}^1/_4b^2=p$ ó $a^2-b^2=4p$, que dice que el cuadrado de la suma menos el cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuádruplo de su producto. Si los datos no verifican esta condicion, el problema es absurdo, como si se pidiesen dos números, cuya suma sea 100, la diferencia 40, y el producto 12. Si la verifican, una de ellas seria inútil, como si la suma fuese 7, la diferencia 1, y el producto 12.

24. Resolver en números enteros una ecuacion indeterminada con dos incógnitas.

Sea la ecuacion $ax+by=c$. Los coeficientes a y b deben ser primos entre sí; pues si no lo fuesen, y tuviesen un factor comun d, que no lo fuese del segundo miembro c, x é y, no podrian ser enteros; porque partiendo toda la ecuacion por d, como $\frac{a}{d}$ y $\frac{b}{d}$ son enteros: si lo son x é y, el primer miembro será entero, no siéndolo el segundo $\frac{c}{d}$, lo que es absurdo. Asi la ecuacion $6x+9y=7$, no puede ser satisfecha con valores enteros de x y de y. La ecuacion $3x+9y=21$ puede serlo; pues partida por 3 es $x+3y=7$, en que los coeficientes de x é y son números primos entre sí.

Esto supuesto, sea $x=m$, $y=n$ dos valores de las incógnitas que satisfagan á la ecuacion: será $am+bn=c$, que restada de la ecuacion propuesta da $a(x-m)+b(y-n)=0$; $x-m=-\frac{b(y-n)}{a}$. Como el primer miembro $x-m$ debe de ser entero, debe serlo tambien el segundo: luego el producto $b(y-n)$ debe ser divisible por a: y como b no tiene ningun factor comun con a, es necesario que el otro factor $y-n$ sea divisible por a. Sea pues $y-n=at$, siendo t un número entero y arbitrario: será $x-m=-bt$: luego $x=m-bt$, $y=n+at$, fórmulas en que, conociendo los valores de m y n, y dando todos los valores enteros posibles á t, se tendrán las infinitas soluciones enteras que tendrá el problema.

Para hallar los valores de m y n, ó una solucion entera del problema, despejando la x en la ecuacion, y sacando los enteros del quebrado, á que es igual el quebrado que forme el resto, se igualará á un entero cualquiera E. En esta nueva ecuacion despéjese la y; sáquense los enteros, y el quebrado que forme el residuo iguálese á E'. Despéjese la E, y continúese la misma operacion, hasta que el valor de una de las indeterminadas E, E', E'' etc. resulte entero. Dése un valor cualquiera á la indeterminada que resulte en este valor; y determinando por él las anteriores y la y y la x, se tendrán los valores de m y n: y por las fórmulas $x=m-bt$, $y=n+at$, se obtendrán las soluciones del problema en números enteros.

Problema 1º Dada una fraccion, como $^{58}/_{77}$, cuyo denominador sea el producto de dos números primos entre sí, descomponerla en dos fracciones, cuyos denominadores sean dichos factores.

Sean x é y los númeradores; será $^{58}/_{77}=\frac{x}{11}+\frac{y}{7}$

ó despejando de quebrados $7x+11y=58$; $x=\frac{58-11y}{7}$

$=8-y+\frac{2-4y}{7}$. Ahora $\frac{2-4y}{7}$ debe ser entero, para lo

cual debe serlo su mitad $\frac{1-2y}{7}$, ó $\frac{2y-1}{7}=E$. Resulta $y=$

$\frac{7E+1}{2}=3E+\frac{E+1}{2}$; $\frac{E+1}{2}$ debe ser entero; sea $=E'$, y es $E=2E'-1$ que ya es entero.

Haciendo $E'=0$, es $E=-1$; $y=-3$; $x=13$. Estos dos valores enteros satisfacen á la ecuacion. Haciendo $m=13$, $n=-3$, y sustituyendo en las fórmulas $x=m-bt$, $y=n+at$, tendremos $x=13-11t$, $y=-3+7t$. Dando á t todos los valores enteros posibles, ya positivos, ya negativos, se tendrán todas las soluciones enteras del problema.

$t=\ 0,1,\ \ 2,\ \ \ 3$ etc. $-1,-2,-3$ etc.
$x=13,2,-9,-20$ etc. $24,\ 35,\ 46$ etc.
$y=-3,4,11,\ \ 18$ etc. $-10,-17,-24$ etc.

25. Si se quieren limitar las soluciones á las que dén los valores de las incógnitas, no solo enteros, sino tambien positivos, en las ecuaciones $x=m-bt$, $y=n+at$, debe dársele á t un valor tal, que estos dos valores de x é y resulten positivos, y podrá ser limitado el número de soluciones. Los límites en que debe estar comprendido el valor de t, han de resultar de las condiciones que obliguen el término positivo de cada valor á ser mayor que el negativo.

II. Dividir el número 117 en dos partes, de las cuales la primera sea múltipla de 7, y la segunda de 19.

Sea la primera parte $7x$ y la segunda $19y$. La ecuacion es $7x+19y=117$, $x=\frac{117-19y}{7}=16-2y+\frac{5-5y}{7}$.

Como $\frac{5-5y}{7}$ debe ser entero, deberá serlo $\frac{1-y}{7}$ ó $\frac{y-1}{7}=E$; $y=7E+1$. Hago $E=o$, y es $y=1=n$, $x=14=m$. Luego las fórmulas son $x=14-19t$, $y=1+7t$. El valor de y será positivo, siempre que t lo sea; pero el valor de x no puede ser positivo siéndolo t, sino cuando $19t<14$, ó $t<\frac{14}{19}$.

Si t es negativo, el valor de x será siempre positivo; pero no lo será el de y si no es $7t<1$ ó $t<{}^1/_7$. Luego el problema no tiene solucion entera y positiva mas que una, la de $t=o$; entonces $x=14$, $y=1$ y las dos partes del 117 que se piden, son 98 y 19.

26. Cuando el número de incógnitas excede solo en una unidad al de ecuaciones, eliminando todas las incógnitas que se puedan, se llegará á una ecuacion con dos incógnitas, que ya se sabe resolver.

III. Quebraron á una muger cierto número de huevos que traía al mercado; y queriendo saber cuantos eran para pagárselos, solo se acordó de que habia mas de 200 y menos de 300, y de que habiéndolos contado en su casa 3 á 3 salian cabales: contándolos 7 á 7 le sobraba 1, y contándolos 10 á 10 le sobraban 6: ¿cuántos eran?

Sea N el número de huevos, x el número de veces que los contó 3 á 3, z el número de veces que los contó 7 á 7, y u el número de veces que los contó 10 á 10. Las ecuaciones son $N=3x$, $N=7z+1$, $N=10u+6$. Tenemos pues tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Eliminando la N quedan $3x=7z+1$, $3x=10u+6$, dos ecuaciones con tres incógnitas. Eliminando la x resulta $7z+1=10u+6$, ó $7z-10u=5$, ecuacion con dos incógnitas z y u, que deben ser números enteros. Expresémoslas, pues, en números enteros por el método general.

Siendo $z=\frac{5+10u}{7}$, sacando los enteros queda $\frac{5+3u}{7}=E$, de donde $u=\frac{7E-5}{3}$. Sacando los enteros es $\frac{E-2}{3}=E'$, de donde $E=3E'+2$. Haciendo $E'=o$, es $E=2$, $u=3$, $z=5$. Luego en el caso presente $m=5$, $n=3$; y aplicando las fórmulas generales $x=m-bt$, $y=n+at$, será $z=5+10t$, $=u3+7t$, valores que resolverán siempre el problema en números enteros.

Vamos á hallar el valor de x por cualquiera de las dos ecuaciones en que entra esta incógnita. Sea por la primera $3x=7z+1$. Sustituyo el valor de z, y es $3x=35+70t+1$, ó $3x-70t=36$. Es forzoso, si x ha de ser entero, aplicar á esta ecuacion el método general.

Siendo $x=\frac{36+70t}{3}$, sacando los enteros queda $\frac{t}{3}=E$, y $t=3E$. Haciendo $E=0$, $t=0$, $x=12$, y aplicando las fórmulas generales, es $x=12+70t'$, llamando t' á esta variable auxiliar para distinguirla de la t. Sustituido este valor en $N=3x$, es $N=36+210t'$. Haciendo $t'=0, 1, 2, 3, 4$.......
resulta $N=36,246,456,666876$....... luego el número de huevos era $246 > 200$ y < 300.

IV. Buscar un número que dividido por 5 dé de resto 4, y dividido por 7 dé de resto 2. Se calcula como en el anterior. La fórmula es $N=35t-26$. El número menor que satisface al problema es 9.

V. Buscar un número que dividido por 28 dé 17 de resto, y dividido por 19 dé 6 de resto. La fórmula es $N=101+532t$.

VI. Buscar un número que dividido por 2 dé 1 de resto, dividido por 3 dé 2, dividido por 5 dé 3. La fórmula es $N=30t-7$.

VII. Se ha comprado una librería compuesta de 1000 volúmenes en 2190 duros. Los de á folio se han vendido á 6 duros, los de en cuarto á 3 duros, y los en octavo á 30 reales. ¿Cuántos volúmenes habia de cada tamaño?

Las ecuaciones son $x+y+z=1000$, $6x+3y+{}^3/_2 z=2190$; esta segunda se reduce á $4x+2y+z=1460$. Eliminando la z es $3x+y=460$, de donde $y=460-3x$, $z=540+2x$, x es la incógnita arbitraria, y puede tener todos los valores enteros desde $x=1$, hasta $x=153$.

27. Si resulta una ecuacion final con tres incógnitas, se dan á cada una de ellas los diferentes valores arbitrarios que pueda admitir. Como en cada una de estas determinaciones de la tercera incógnita queda la ecuacion con solas dos, y se podrá resolver, se infiere que cada determinacion de la tercer incógnita produce un sistema diferente de soluciones.

VIII. Un posadero ha cobrado 20 duros de varias personas, 4 duros de cada amo, 2 duros de cada criado, y $2\frac{1}{2}$ duros por cada caballo: ¿cuántos amos, criados y caballos habia?

La ecuacion es $4x+2y+\frac{5}{2}z=20$, ú $8x+4y+5z=40$. Hay tres incógnitas y una ecuacion: luego es necesario determinar arbitrariamente una incógnita, y sea la z. Observo que todos los términos de la ecuacion son divisibles por 4 excepto $11z$: luego es preciso que z sea un múltiplo de 4, si ha de subsistir la igualdad.

Hago pues $z=4$, la ecuacion es $2x+y=5$, que solo tiene dos soluciones. Y no hay mas soluciones en el problema en números enteros y positivos, porque z no puede ser igual 8 ni mayor, porque en el primer caso seria el segundo miembro cero, y en el segundo negativo.

Luego hubo un amo, tres criados y cuatro caballos, ó dos amos, un criado y cuatro caballos.

IX. ¿De cuántas maneras se pueden pagar 19 duros con columnarias, escudos y ducados? La ecuacion es $5x+10y+11z=380$. Haciendo á z arbitraria, obsérvese que ha de ser múltiplo de 5, y que su mayor valor ha de ser $z=30$. Cada valor de z produce un sistema de soluciones.

Proponemos los siguientes problemas indeterminados para el ejercicio de los alumnos.

X. Pagar 2000 pesetas con paño de dos especies, uno de á 9 pesetas la vara y otro de á 13.

La ecuacion es $9x+13y=2000$: las fórmulas son $x=228-13t$, $y=-4+9t$, que dan 17 soluciones.

XI. Un negociante ha pagado pesetas de 5 rs. con ducados de 11 rs., y ha dado 15 rs. mas. ¿Cuántas son las pesetas y los ducados?

La ecuacion es $5x-11y=-15$; y las fórmulas $x=-3+11t$, $y=5t$, que dan infinitas soluciones desde $t=1$.

XII. Componer 50 rs. con monedas de 4 y de 5 rs.

La ecuacion es $4x+5y=50$, y las fórmulas $x=10-5t$, $y=2+4t$, que dan una solucion.

XIII. ¿De cuántas maneras se pueden componer 264 duros con monedas de 6 duros y de 3 duros?

Ecuacion: $2x+y=88$, que da 43 soluciones.

9º *Potencias y raices de los monomios.*

28. Para elevar un monomio á una potencia cualquiera se elevarán todos sus factores. Las letras se elevan facilmente, multiplicando sus exponentes por el de la potencia: porque $(a^m)^n$ equivale á un producto de tantos factores iguales á a^m, como unidades tiene n: luego habrá que sumar tantos exponentes iguales á m, como unidades tiene n, lo que equivale á multiplicar $m \times n$; será pues, $(a^m)^n = a^{mn}$.

Ejemplos. $(2ab^2)^2 = 4a^2b^4$; $\left(\frac{3a^2b^3}{cd^2}\right)^5 = \frac{243a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}$.

29. Para extraer una raiz cualquiera de un monomio se extraerá de su coeficiente, y se partirán los exponentes de las letras por el de la raiz; pues esta operacion es inversa de la de elevar á potencias.

Ejemplos. $\sqrt{4a^2b^4} = 2ab^2$; $\sqrt[5]{\frac{243a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}} = \frac{3a^2b^3}{cd^2}$.

Cuando la raiz es de grado par podrá ser positiva ó negativa; pues con cualquiera de estos dos signos, elevada al cuadrado ó á cualquier otra potencia par, dará el producto positivo. Asi $\sqrt{4a^2b^4}$ puede ser $2ab^2$ ó $-2ab^2$; cualquiera de estas dos cantidades, elevada al cuadrado, dará $4a^2b^4$.

Es imposible extraer raiz par de una cantidad negativa, pues no hay cantidad alguna, ya positiva, ya negativa, que elevada á una potencia par, dé el resultado negativo. Por eso se llaman imaginarias las raices pares de cantidades negativas, y cuando ocurren en la resolucion de un problema, muestran que el problema es absurdo.

Ejemplo. Se pide un número, cuyo cuadrado sumado con 5 dé 4. La ecuacion es $x^2+5=4$, $x^2=-1$,

$x=\sqrt{-1}$, cantidad imaginaria; el problema es absurdo.

Las cantidades imaginarias, asi como las negativas, se someten á las leyes del lenguage algebráico, y por su combinacion se obtienen resultados muy importantes.

30. Si el exponente de una potencia es descomponible en factores, se podrá hacer la elevacion, elevando la cantidad á la potencia indicada por el primer factor, esta potencia á la que indica el segundo, esta á la que indica el tercero, y asi hasta el último. Si se quiere elevar 4 á la potencia sexta, lo elevaremos primero al cuadrado, y será 16: elevando este número al cubo, se tendrá la potencia sexta de 4. Esto se funda en que $(4^2)^3=4^6$.

Si el exponente de la raiz es descomponible en factores, se extraen sucesivamente las raices que estos indican. Asi $\sqrt[12]{531441}$ se halla, extrayendo primero raiz cuadrada, que da 729, despues raiz cuadrada, que da 27, y últimamente raiz cúbica, que da 3, y por tanto $\sqrt[12]{531441}=3$.

Una expresion radical se podrá reducir, siempre que el exponente de la raiz y el de la cantidad tengan algun factor comun, partiendo ambos exponentes por dicho factor. Asi $\sqrt[4]{a^2b^2}=\sqrt{ab}$; porque esto equivale á extraer primero la raiz cuadrada de a^2b^2, é indicar despues la extraccion de la raiz cuadrada de ab.

31. Si alguno de los factores que están debajo del radical tiene exacta la raiz que este indica, se le extrae y se le pone por coeficiente del radical.

Ejemplos. $\sqrt{8}=\sqrt{2.4}=2\sqrt{2}$.

$$\sqrt[3]{432}=\sqrt[3]{2.216}=6\sqrt[3]{2}.$$

$$\sqrt{Nq^2}=q\sqrt{N}.$$

$$\sqrt[5]{\frac{-c^6d^8}{a^5}}=\sqrt[5]{\frac{c^5d^5}{a^5}.cd^3}=\frac{cd}{a}\sqrt[5]{cd^3}.$$

$$\sqrt{(3a^2-6ab+3b^2)}=\sqrt{3(a^2-2ab+b^2)}=\sqrt{3(a-b)^2}=(a-b)\sqrt{3}.$$

32. Para multiplicar ó partir los radicales de un mismo grado, se multiplican ó parten las cantidades, y al producto ó cociente se deja el mismo signo radical; porque la raiz de un producto equivale al producto de las raices de sus factores; y la raiz de un quebrado equivale á la raiz del numerador partida por la raiz del denominador.

Ejemplos. $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$, $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}={}^1/_2$;

$$\sqrt[n]{5x^2y^4}\times\sqrt[n]{20ax}=\sqrt[n]{100ax^3y^4};$$

$$\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{33}}={}^1/_4\sqrt{{}^{11}/_{33}}=\frac{1}{4\sqrt{3}};$$

$$\sqrt[n]{p}\times\sqrt[n]{-q}=\sqrt[n]{-pq};$$

$$\frac{\sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{bxy}}=\sqrt[n]{\frac{a}{by}};\ a\sqrt[5]{-\frac{b}{a}}=\sqrt[5]{a^4b}.$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b;\ (a+\sqrt{b})^3=$$
$$a^3+3a^2\sqrt{b}+3ab+b\sqrt{b}.$$

$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m=a$: en general si un radical se eleva á la potencia del mismo grado que la raiz, el resultado será la cantidad que está debajo del radical.

33. Para multiplicar ó partir radicales de diferente grado se reducirán á tener un mismo grado. Para esto se multiplicará el exponente de cada radical por

el producto de los exponentes de los demas, y se elevará la cantidad que tenga debajo al grado de potencia que indica dicho producto: esta operacion no altera el valor del radical, porque equivale á elevarlo á la potencia, y al mismo tiempo extraerle la raiz que indica dicho producto.

Ejemplos.

$$\sqrt{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2}.$$

$$\sqrt[m]{a^p}\times\sqrt[n]{b^q}=\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qm}};\ \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}.$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{s}{t}}:\frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{y}{z}}=\frac{ad}{bc}\sqrt[mn]{\frac{s^n z^m}{t^n y^m}}.$$

34. Para multiplicar los imaginarios de raices cuadradas, como $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$, debe descomponerse cada uno en los factores, de este modo: $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-b}=\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$. Multiplicando los dos factores reales $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$, el producto es $\sqrt{ab}$. Multiplicando $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$, lo que equivale á elevar al cuadrado $\sqrt{-1}$, este cuadrado es -1. Multiplicándolo por el anterior producto $\sqrt{ab}$, el producto de los dos radicales propuestos será $-\sqrt{ab}$; luego el producto de dos radicales cuadrados imaginarios es una expresion *real*; es decir, libre de radical imaginario.

Del mismo modo tendremos $(\sqrt{-a})^1=\sqrt{-a}$: $(\sqrt{-a})^2=-a$, $(\sqrt{-a})^3=-a\sqrt{-a}$; $(\sqrt{-a})^4=a^2$ etc. $(1+\sqrt{-1})^2=2\sqrt{-1}$, $(x+a+b\sqrt{-1})$

$(x+a-b\sqrt{-1})=(x+a)^2+b^2$. Es decir, el producto de dos polinomios, en parte reales, y con un término imaginario, y que solo se diferencien en el signo del término imaginario, es real.

Varios ejemplos de multiplicacion y division de radicales.

$$\left(x+\sqrt{(x^2-a^2)}\right)\left(x-\sqrt{(x^2-a^2)}\right)=a^2.$$

$$\sqrt{(a^2-b^2)}\times\sqrt{3(a-3b)}=\sqrt{3(a+b)(a-b)^2}=(a-b)\sqrt{3(a+b)}.$$

$$\frac{5c\sqrt{(a+b)}}{6c^2\sqrt{(a^3+b^3)}}=\frac{5}{6c\sqrt{(a^2-ab+b^2)}}.$$

$$\frac{6a^4-23a^2\sqrt{-1}-13ab-20+\frac{22b\sqrt{-1}}{a}+\frac{6b^2}{a^2}}{2a^2-5\sqrt{-1}-\frac{3b}{a}}=3a^2-4\sqrt{-1}-\frac{2b}{a}.$$

Los radicales se suman y restan como las demas cantidades algebráicas. Los términos que contienen radicales son semejantes cuando el radical es igual, y se reducen como términos semejantes.

Ejemplos.

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}+2\sqrt[3]{a}-3\sqrt{b}=3\sqrt[3]{a}-2\sqrt{b}$$

$$\sqrt[4]{x^2y}-a\sqrt[4]{x^2y}+b\sqrt[4]{x^2y}=(1-a+b)\sqrt[4]{x^2y};$$

$$\sqrt{75}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$

$$\sqrt{75a^3b^2}-4\sqrt{3a^3b^2}=ab\sqrt{3a};$$

$$\sqrt{27a^3b}-\sqrt{3a^3b^5}=a(3-b^2)\sqrt{3ab}.$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}+\frac{f}{q}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}=\frac{aq+bf}{bq}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$$

10. *Exponentes negativos y fraccionarios.*

35. Toda cantidad cuyo exponente se reduzca á cero, equivale á la unidad; y toda cantidad, cuyo exponente se haga negativo, equivale á la unidad, dividida por la misma cantidad con el mismo exponente positivo.

Dem. Como la resta de los exponentes equivale á la particion de las cantidades, será $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, expresion general.

Si m es mayor que n, $m-n$ es positivo, a^{m-n} es un resultado que sabemos interpretar.

Si $m=n$, $a^{m-n}=a^0$. Para interpretar esta expresion es necesario volver al quebrado propuesto $\frac{a^m}{a^n}$, que siendo $m=n$ se reduce á 1; luego $a^0=1$.

Si $m<n$, sea $n=m+t$, será $a^{m-n}=a^{-t}$. Para interpretar esta expresion volvamos al quebrado $\frac{a^m}{a^n}$, ó $\frac{a^m}{a^{m+t}}$, que se reduce á $\frac{1}{a^t}$: luego $a^{-t}=\frac{1}{a^t}$: luego etc.

Todo factor puede trasladarse de un término á otro del quebrado mudando el signo á su exponente; pues lo mismo es a^{-t} en el numerador que a^t en el denominador. Asi $(bc)^{-p}=\frac{1}{(bc)^p}$; $\frac{1}{a}=a^{-1}$; $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}=a^m b^n c^{-p} d^{-q}$; $\frac{c}{f}=cf^{-1}=\frac{f^{-1}}{c^{-1}}$; $\frac{a^2+b^2}{a+b}=(a^2+b^2)\ (a+b)^{-1}$.

36. Las reglas dadas en las operaciones algebráicas para los exponentes positivos se aplican tambien á los negativos.

Demostremos esto en la multiplicacion, de cuya regla dependen las de la particion, potencias y raices; y demostremos que para multiplicar cantidades con exponentes negativos, deben sumarse dichos exponentes; esto es, que $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$.

Dem. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; luego $a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$; luego etc.

37. Toda cantidad con exponente fraccionario indica la cantidad elevada á la potencia que indica el numerador de la fraccion, y extraida de ella la raiz que indica su denominador.

Dem. Como para extraer una raiz debe partirse el exponente de la cantidad por el de la raiz, será $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$: cuando n es divisible por m, $\frac{n}{m}$ es entero, y la expresion $a^{\frac{n}{m}}$ es fácil de interpretar; pero si n no es divisible por m, no hay otro modo de interpretar la expresion $a^{\frac{n}{m}}$ que por las operaciones de donde ha procedido; es decir, $a^{\frac{n}{m}}$ significa $\sqrt[m]{a^n}$; luego etc.

38. Las reglas dadas para los exponentes enteros sirven tambien para los fraccionarios.

Dem. Digo que $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{m+p}{n}}$; porque $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, y $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$; luego $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}} = a^{\frac{m+p}{n}}$; luego etc.

Los radicales se pueden calcular, reduciéndolos á cantidades con exponentes fraccionarios, y aplicando á estas las reglas algebráicas.

Ejemplos. $\sqrt[5]{a^3b^4} : \sqrt[7]{a^2b^3} = a^{3/5}b^{4/5} : a^{2/7}b^{3/7} = a^{11/35}$ $b^{13/35} = \sqrt[35]{a^{11}\,b^{13}}$.

Hallar el mayor divisor comun de $90ab^{1/3} - 195a^{-1/2}$ $b^{1/3} + 90a^{-2}b^{1/3}$ y $12ab^{2/3} - 36a^{-1/2}b^{2/3} + 27a^{-2}b^{2/3}$.

El factor comun independiente es $3b^{1/3}$: partiendo ambos por él, y despojando al divisor del factor $b^{1/3}$, que ya no es comun al dividendo, parto

$$\begin{array}{r|l} 30a - 65a^{-1/2} + 30a^{-2} & \\ 60a - 130a^{-1/2} + 60a^{-2} & 4a - 12a^{-1/2} + 9a^{-2} \\ \hline 50a^{-1/2} - 75a^{-2} & 15 \end{array}$$

Despojando al que va á ser divisor del factor $25a^{-1/2}$, partiremos

$$\begin{array}{r|l} 4a - 12a^{-1/2} + 9a^{-2} & 2 - 3a^{-3/2} \\ \hline - 6a^{-1/2} + 9a^{-2} & 2a - 3a^{-1/2} \\ 0 & \end{array}$$

Luego el comun divisor es $3b^{1/3}\left(2 - 3a^{-3/2}\right)$, ó $3b^{1/3}$ $\left(2 - \frac{3}{a^{3/2}}\right) = 3b^{1/3}\left(\frac{2a^{3/2} - 3}{a^{3/2}}\right)$. Como el denominador $a^{3/2}$, al partir ambos polinomios por el divisor comun, se convertiria en multiplicador de ellos, se debe suprimir, y el divisor comun pedido será $3b^{1/3}\left(2a^{3/2} - 3\right)$.

11º *Raices cuadradas y cúbicas de los polinomios.*

39. Para extraer raiz cuadrada de un polinomio, despues de ordenado; extráigase raiz cuadrada de su primer término, y se tendrá la primer parte de la raiz,

Como el segundo debe ser duplo de la primera por la segunda, pártase por el duplo de la primera y se tendrá la segunda.

Para destruir el cuadro del binomio, que ha resultado en la raiz, multiplico cociente por divisor, y este producto sumado con el cuadrado de la segunda, réstese de la cantidad.

Si queda resíduo, es prueba de que la raiz tiene mas de dos términos. Tomo los dos hallados por primera parte, y continúo la misma operacion hasta que ó no quede resto, en cuyo caso se tendrá la raiz exacta, ó resulte un resto en el que la letra que ordena tenga menor exponente que en el primer término del divisor. En este caso la raiz es inexacta; y continuando su extraccion, resultará una série de términos indefinida.

Ejemplo.

$$\sqrt{(9a^4-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4)}=3a^2-2ab+5b^2.$$

$$\begin{array}{r|l}
-9a^4+12a^3b-4a^2b^2 & 6a^2-2ab \\
0 \qquad\qquad\qquad\qquad & -2ab \\
\hline
30a^2b^2-20ab^3+25b^4 & 6a^2-4ab+5b^2 \\
-30a^2b^2+20ab^3-25b^4 & 5b^2 \\
\hline
0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

40. Para extraer raiz cúbica de un polinomio, despues de ordenado, extráigase raiz cúbica de su primer término, y se tendrá la primer parte de la raiz. Como el segundo término debe ser triplo del cuadrado de la primera por la segunda, pártase por el triplo del cuadrado de la primera parte ya conocida, y se tendrá la segunda.

Para destruir el cubo del binomio, que ha resultado en la raiz, multiplíquese el cociente por el divisor, y el producto sumado con el triplo de la primera multiplicado por el cuadrado de la segunda y con el cubo de la segunda, réstese de la cantidad.

Si queda algun resíduo es prueba de que la raiz tiene mas de dos términos. Tómense pues como primera parte los dos hallados, y continúese la misma operacion hasta que, ó no quede resto, y entonces la raiz hallada será exacta, ó resulte menor en el dividendo que en el primer término del divisor el exponente de la letra que ordena, y entonces la raiz será una série de términos indefinida.

Ejemplo.

$$\sqrt[3]{(a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6)}=a^2-2ab+b^2$$

$$\underline{-a^6}\;+6a^5b-12a^4b^2+8a^3b^3 \qquad \left|\underline{3a^4}\right.$$

$$0 \qquad\qquad -2ab$$

$$3a^4b^2-12a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6 \qquad \left|\underline{3a^4-12a^3b+12ab^2}\right.$$

$$-3a^4b^2+12a^3b^3-12a^2b^4 \qquad\qquad b^2$$

$$-3a^2b^4+6ab^5-b^6$$

$$0$$

Otros ejemplos de extraccion de raiz cuadrada.

$$\sqrt{(9a^4-12a^5\sqrt{-1}-2a^2(2-3\sqrt{-2})+4a\sqrt{(2-2)}}=3a^2-2a\sqrt{-1}+\sqrt{-2}$$

$$+6a^2\sqrt{-2}+4a\sqrt{2}-2 \qquad \left|\underline{6a^2-2a\sqrt{-1}}\right.$$

$$0 \qquad\qquad -2a\sqrt{-1}$$

$$\left|\underline{6a^2-4a\sqrt{-1}+\sqrt{-2}}\right.$$

$$\sqrt{-2}$$

$$\sqrt{(4a^2-12ab^{1/2}+9b+12-18a^{-1}b^{1/2}+9a^{-2})}=2a-3b^{1/2}+3a^{-1}$$

$$0 \qquad\qquad \left|\underline{4a-3b^{1/2}}\right.$$

$$-3b^{1/2}$$

$$\left|\underline{4a-6b^{1/2}+3a^{-1}}\right.$$

$$3a^{-1}$$

12. *Ecuaciones de segundo grado.*

14. Ecuaciones de segundo grado son aquellas en que el mayor exponente de la incógnita es 2.

Toda ecuacion de segundo grado puede reducirse á la forma $x^2+px+q=0$, trasponiendo al primer miembro todos los términos que estén en el segundo, ordenándolos con respecto á la incógnita x, y partiendo toda la ecuacion por el coeficiente que tenga x^2.

42. *Toda ecuacion de segundo grado puede ser satisfecha por dos diferentes valores de la incógnita.*

Dem. Sea la ecuacion general de segundo grado $x^2+px+q=0$. Supongamos que $x=a$ satisfaga á esta ecuacion de modo que $a^2+pa+q=0$; será $q=-a^2-pa$. Sustituido este valor de q en la ecuacion propuesta, recibe la forma $x^2-a^2+px-pa=0$, ó $(x+a)(x-a)+p(x-a)=0$, ó $(x-a)(x+a+p)=0$, ecuacion que solo puede ser satisfecha en dos casos: cuando $x=a$, y cuando $x=-a-p$; porque un producto no puede ser igual á cero sino cuando lo es uno de sus factores: luego etc.

Asi se vé en la ecuacion $x^2-3x+2=0$, que es satisfecha cuando $x=1$, y que tambien lo es cuando $x=-1+3=2$.

Raices de una ecuacion de segundo grado son los valores de la incógnita que la satisfacen.

43. *La suma de las raices de una ecuacion de segundo grado es igual al coeficiente del segundó término mudado el signo, y su producto es igual al tercer término.*

Dem. En la ecuacion general $x^2+px+q=0$ está demostrado, que si una raiz es a, la otra será $-a-p$, cuya suma es $-p$, y su producto $-a^2-pa$ ó q: luego etc.

44. Tratemos ya de resolver una ecuacion de segundo grado.

El trinomio $x^2+px+q=0$ puede no ser un cuadrado perfecto, y es necesario que lo sea para que la ecuacion se reduzca al primer grado, extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros. Un trinomio será cuadrado perfecto, cuando el producto de sus extremos sea igual al cuadrado de la mitad del término medio, como se observa en el cuadrado general $x^2+2ax+a^2$. Luego si los dos primeros términos son x^2 y px, el tercero debe ser $\frac{p^2}{4}$. Es necesario, pues, quitar del primer miembro q y añadir $\frac{p^2}{4}$, y hacer lo mismo en el segundo miembro para que subsista la igualdad, y será $x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$.

Extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros, será $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}$; la duplicidad de signo procede de ser raiz par la que se extrae. Despejando la x, se tiene $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}$; es decir, *en toda ecuacion ordenada de segundo grado la incógnita es igual á la mitad del coeficiente del segundo término mudado el signo $\pm$ la raiz cuadrada del cuadrado de dicha mitad sumado con el tercer término mudado el signo.*

El mismo resultado se hubiera obtenido presentando esta teórica bajo la forma siguiente:

Hallar las raices de la ecuacion $x^2+px+q=o$ es buscar dos números, cuya suma sea $-p$, y cuyo producto sea q. Llamo d la diferencia de dichos números: siendo el cuádruplo de un producto igual al cuadrado de la suma de sus factores menos el cuadrado de la diferencia de los mismos, será $4q=p^2-d^2$, de donde $d=\sqrt{(p^2-4q)}$.

Conocemos ya la suma $-p$ y la diferencia $\sqrt{(p^2-4q)}$ de las raices. Una de ellas será $-\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$; y otra $-\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$, y si se quieren encerrar en una misma fórmula, $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$.

Esta demostracion parece mas elegante que la anterior, porque se deduce inmediatamente del teorema fundamental, por medio de las relaciones conocidas entre el producto, la suma y la diferencia de dos cantidades, sin necesidad de otras nociones independientes de aquel teorema.

115. De esta fórmula resultan todas las propiedades de las ecuaciones de segundo grado.

1ª El radical será imaginario, y por consiguiente las dos raices, siempre que q sea positivo y mayor que $\frac{p}{4}$: luego *las dos raices serán imaginarias, siempre que el tercer término sea positivo, y mayor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo.*

2ª El radical es nulo y ambas raices se reducen á $-\frac{p}{2}$, siempre que q sea positivo é igual á $\frac{p^2}{4}$: luego *las dos raices son iguales, siempre que el tercer término sea positivo é igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo.*

3ª El radical será real, aunque q sea positivo cuando sea $q < \frac{p^2}{4}$; pero el radical será menor que el término exterior $\frac{p}{2}$: por lo tanto, si este es positivo (ó p negativo) ambas raices son positivas; y si es negativo (ó p positivo) ambas raices son negativas: luego *cuando el tercer término es positivo y menor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, las dos raices son reales y de signo contrario al del segundo término.*

4ª Tambien será real el radical cuando q es negativo, y en este caso será el radical mayor que el término exterior $\frac{p}{2}$: luego el signo del radical dominará en el resultado; por tanto una raiz será positiva y otra negativa: luego *si el tercer término es negativo, las dos raices son reales y de signo contrario.*

5ª Si $q=o$, $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-\frac{p^2}{4}}=-\frac{p}{2}\pm\frac{p}{2}$: las dos raices son $o, -p$: luego *si la ecuacion no tiene tercer término, una raiz será igual cero, y la otra el coeficiente del segundo término mudado el signo.*

6ª Si $p=o$, $x=\pm\sqrt{-q}$: luego *si no hay segundo término, la incógnita tiene dos valores iguales y de signo contrario: reales, si el tercer término es negativo, é imaginarios, si es positivo.*

Por medio de estas propiedades se podrá conocer la naturaleza de las raices de una ecuacion de segundo grado, sin necesidad de resolverla, por la simple inspeccion de sus términos.

Ejemplos.

$x^2-3x+8=0$, tiene sus raices imaginarias: $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{23}{4}}$.

$x^2-7x+1=0$, las tiene reales y positivas: $x=\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{45}$.

$x^2+7x+1=0$, las tiene reales y negativas: $x=-\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{45}$.

$x^2-6x-16=0$, las tiene reales y de signo contrario: $x=8$, $x=-2$.

$x^2-6x+9=0$, las tiene iguales: $x=3$.

$x^2-6x=0$, tiene por raices: $x=0$, $x=6$.

$x^2-8=0$, las tiene reales, iguales y de signo contrario: $x=\pm2\sqrt{2}$.

$x^2+9=0$, las tiene imaginarias: $x=\pm3\sqrt{-1}$.

13. *Problemas del segundo grado.*

I. Buscar un número tal, que restando 2 de su cuadrado, quede 1.

La ecuacion es $x^2-2=1$, ó $x^2=3$, $x=\pm\sqrt{3}=\pm1$, 732... Valor aproximado.

II. Dividir un número en dos partes tales, que un múltiplo determinado de la primera, multiplicado por otro múltiplo determinado de la segunda, dé un producto determinado.

Sea a el número dado, x la primera parte, $a-x$ la segunda, m el múltiplo de la primera, n el múltiplo de la segunda, y el producto p; la ecuacion es $mx.\,n\,(a-x)=p$, de donde $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{p}{mn}\right)}$.

Si $m=n=1$, entonces $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-p)}$, valor que resuelve el problema siguiente: dividir un número en dos partes, cuyo producto sea dado. Este problema es imposible, si $\frac{1}{4}a^2<p$, ó $a^2<4p$. En efecto, se sabe que el cuádruplo del producto de dos cantidades debe ser igual al cuadrado de su suma menos el cuadrado de su diferencia; luego el cuadrado de la suma debe ser mayor, ó cuando menos, igual al cuádruplo del producto.

A esta fórmula general se reduce el siguiente problema: dada la suma de capitales y ganancias de dos asociados, y el capital del uno y la ganancia del otro, determinar la ganancia del primero y el capital del segundo.

En efecto, sea c el capital del primero, q la ganancia del segundo, x la ganancia del primero, y el capital del segundo, y s la suma de estas cuatro cantidades. Tendremos primero $c+x+y+q=s$, de donde $x+y=s-c-q$, primera ecuacion.

2º Siendo los capitales proporcionados á las ganancias, será $\frac{c}{x}=\frac{y}{q}$, de donde $xy=cq$, segunda ecuacion. Estas dos ecuaciones manifiestan, que lo que se busca son dos números, cuya suma es $s-c-q$, y cuyo producto es cq. Haciendo pues en la fórmula del problema anterior $a=s-c-q$, y $p=cq$, será $x=\frac{s-c-q}{2}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{s-c-q}{2}\right)^2-cq\right)}$. De estas dos raices, la una es el valor de x, y la otra el de y; pues ambas raices suman $s-c-q$.

III. Buscar dos números, dada su diferencia y su producto.

Sea la diferencia d y el producto p, x el mayor, $x-d$ el menor; la ecuacion será $x^2-dx=p$, $x={}^1/_2d\pm\sqrt{(p+{}^1/_4d^2)}$; el menor será $-{}^1/_2d\pm\sqrt{(p+{}^1/_4d^2)}$.

IV. Buscar dos números, dada su suma y la de sus cubos.

Sea la suma de los números a, la de sus cubos b, x uno de ellos, $a-x$ el otro; la ecuacion es $x^3+(a-x)^3=b$, de donde $a^3-3a^2x+3ax^2=b$, $x^2-ax=\frac{b-a^3}{3a}$, $x={}^1/_2a\pm\sqrt{\left({}^1/_4a^2+\frac{b-a^3}{3a}\right)}$, $a-x={}^1/_2a\mp\sqrt{\left({}^1/_4a^2+\frac{b-a^3}{3a}\right)}$.

V. Buscar un número que elevado á una potencia y multiplicado por un número dado, sea igual á una potencia del mismo número, superior en dos grados á la primera, multiplicada por otro número dado.

La ecuacion es $mx^p = nx^{p+2}$; partiendo por x^p, es $nx^2 = m$, de donde $x = \pm\sqrt{\frac{m}{n}}$.

VI. Buscar dos números, dada su suma y la razon de sus cuadrados.

Sea a la suma de los números, m la razon de sus cuadrados, x uno de los números, $a-x$ el otro, la ecuacion es $\frac{x^2}{(a-x)^2} = m$; extrayendo raiz cuadrada de ambos miembros, es $\frac{x}{a-x} = \pm\sqrt{m}$, de donde $x = \pm a\sqrt{m} \mp x\sqrt{m}$, $x \pm x\sqrt{m} = \pm a\sqrt{m}$, $x = \frac{\pm a\sqrt{m}}{1 \pm \sqrt{m}}$. Los signos superiores resuelven el problema propuesto; los inferiores lo resuelven, siendo a, no la suma, sino la diferencia de los dos números.

VII. Entre varias personas deben pagar los gastos de un proceso, que ascienden á 800 duros; pero tres son insolventes, y cada una de las otras tiene que pagar 60 duros mas: ¿cuántas personas son?

Sea x el número de personas, será $\frac{800}{x}$ lo que toca pagar á cada una, y $\frac{800}{x-3}$ lo que pagó cada uno de los que quedaron; y como esta cuota excede á la anterior en 60 duros, será $\frac{800}{x-3} = \frac{800}{x} + 60$, de donde $60x^2 - 180x = 2400$, $x^2 - 3x = 40$, $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2}$.

Los dos valores de x son 8, -5. El primero resuelve el problema. Para interpretar el segundo hago x negativa en la ecuacion, y es $\frac{800}{-x-3} = \frac{800}{-x} + 60$, ó mudando el signo de todos los términos, $\frac{800}{x+3} = \frac{800}{x} -$

60, que resuelve este problema: debiendo pagar x número de personas 800 duros, vinieron 3 mas á pagar, y tocó á cada uno á 60 duros menos.

VIII. Uno compró un caballo, y lo vendió despues en 24 doblones, perdiendo en la venta tanto por 100 como le habia costado. ¿En cuánto lo compró?

Sea x el precio del caballo: la proporcion es $100 : 100-x :: x : 24$; haciendo producto de extremos igual al de medios, es $100x-x^2=2400$; los dos valores de x son 40 y 60. Ambos resuelven el problema.

IX. Se pide un número, cuyo cuadrado, sumado con su séptuplo, dé 44.

La ecuacion es $x^2+7x=44$, $x=-{}^7/_2\pm\sqrt{{}^{225}/_4}=-{}^7/_2\pm{}^{15}/_2$. Los valores de x son 4, -11.

El segundo es un número, de cuyo cuadrado, restado su séptuplo, produce 44.

X. Un regimiento de caballería ha comprado cierto número de caballos en 750 doblones; un regimiento de dragones ha comprado con $1066\,{}^2/_3$ doblones 15 caballos mas; y cada caballo de este regimiento ha costado $3\,{}^1/_3$ doblones menos que los del primero. ¿Cuántos caballos compró cada regimiento?

La ecuacion es $\frac{750}{x}=\frac{1066\,{}^2/_3}{x+15}+3\,{}^1/_3$: $x=25$, $x=-135$.

XI. Tres compañías de obreros trabajando juntas podrian hacer un bastion en 15 horas. La primera compañia sola emplearia los ${}^4/_5$ del tiempo que emplearia la segunda en hacer la misma obra. La segunda compañía emplearia en el mismo trabajo 15 horas menos que la última. ¿Cuánto tiempo emplearia cada compañía en hacer el bastion?

Sea x el tiempo que empleará la última en hacer el bastion;

Ecuacion: $\frac{15}{x}+\frac{15}{x-15}+\frac{75}{4(x-15)}=1$: valores de x, 60 y ${}^{30}/_8$.

XII. Se piden dos números tales, que el doble de su suma sea igual al triplo de su producto, y á la diferencia de sus cuadrados.

Las ecuaciones son $2x+2y=3xy$, y $3xy=x^2-y^2$: $x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{3}$, $y=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}$.

XIII. Buscar un número tal, que si á su duplo se añade 7 veces el cociente de 30 partido por dicho número, y de la suma se resta 15, resulte 9 veces la mitad del número y 5 mas. Ecuacion: $2x+\frac{210}{x}-15=\frac{9}{2}x+5$: valores de x 6, -14.

XIV. Se han descontado dos letras, una de 4140 duros con 7 meses de anticipacion, y otra de 6120 duros con 4 meses de anticipacion: se ha pagado por ambas 10000 duros: ¿á cuánto por 100 ha sido el descuento mensual? Ecuacion: $\frac{414000}{100+7x}+\frac{612000}{100+4x}=10000$: valores de x; $\frac{1}{2}$ y $-\frac{130}{7}$.

XV. Buscar dos números, dada su diferencia y la de sus cubos.

Ecuaciones: $x^3-(x-a)^3=b$: $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{}(\frac{1}{4}a^2+\frac{b-a^3}{3a})$.

XVI. Buscar dos números, dada la diferencia de sus cuartas potencias y la suma ó diferencia de sus cuadrados.

Ecuaciones del primer caso: $x^4-y^4=a$, $x^2+y^2=b$: valores, $x=\sqrt{(\frac{1}{2}b+\frac{a}{2b})}$, $y=\sqrt{(\frac{1}{2}b-\frac{a}{2b})}$.

Ecuaciones del segundo caso: $x^4-y^4=a$, x^2-y^2-b; $x=\sqrt{(\frac{a}{2b}+\frac{1}{2}b)}$, $y=\sqrt{(\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}b)}$.

14. *Cálculo exponencial.*

46. Cálculo exponencial es el que enseña á hallar el valor de un exponente incógnito.

La cantidad que lo tiene se llama cantidad exponencial.

Para hallar el valor del exponente incógnito se despeja el exponencial, se toman los logaritmos de ambos miembros, y como entonces el exponente incógnito está multiplicado por el logaritmo de su cantidad, es fácil despejarlo.

Ejemplos. Sea la ecuacion $a^x=c$; tomando los logairtmos de ambos miembros, es $x L.a=L.c$, y $x=\frac{L.c}{L.a}$.

En la ecuacion $c^{mx}=ab^{nx-1}$ es $mxL.c=L.a+nxL.b-L.b$, $x=\frac{L.a-L.b}{mL.c-nL.b}$.

En la ecuacion $b^{n-\frac{a}{x}}=c^{mx}f^{x-p}$ es $nL.b-\frac{a}{x}L.b=mxL.c+xL.f-pL.f$, ó quitando quebrados y ordenando $(mL.c+L.f)x^2-x(pL.f+nL.b)+aL.b=0$.

Si se pide en las dos ecuaciones $l=ab^{x-1}$, y $m=\frac{a(b^x-1)}{b-1}$ despejar la x y la b, eliminaré el exponencial b^x de ambas ecuaciones, lo que da la ecuacion $\frac{lb}{a}=\frac{mb-m+a}{a}$, de donde $b=\frac{m-a}{m-l}$, y sustituyendo su valor en la primera ecuacion, sale $x=1+\frac{L.l-L.a}{L.(m-a)-L.(m-l)}$.

15. *De los límites.*

47. Se llama cantidad variable aquella que por su naturaleza recibe sucesivamente incrementos ó decrementos; y cantidad constante la que conserva siempre un mismo valor. Una cantidad decimal periódica es variable, porque á cada período que se considere en ella de mas, aumenta su valor: el período es una cantidad constante, porque conserva siempre el mismo valor.

Llámase *límite* de una cantidad variable aquella constante, á la cual se va acercando continuamente la variable, sin llegar nunca á ser igual á ella, aunque pueda acercarse tanto que su diferencia sea menor que cualquier cantidad dada.

Por ejemplo, la fraccion $^2/_3$, que da la cantidad decimal periódica 0, 666. . . . es el límite de dicha cantidad, pues por mas períodos que se añadan, nunca podrá la cantidad decimal hacerse igual á $^2/_3$; mas pueden añadirse tantos períodos que su diferencia sea menor que una cantidad dada, por pequeña que sea.

48. *Teorema general de los límites.* Si dos cantidades variables son iguales en cualquier punto de su aproximacion á sus límites, sus límites serán tambien iguales.

Dem. Sea a el límite de la primer variable, y x lo que le falta á dicha cantidad para llegar al límite: podrá expresarse generalmente dicha variable por $a-x$. Sea b el límite de la segunda variable, y z lo que le falta para llegar á él; la segunda variable será $b-z$. Por hipótesis $a-x=b-z$, en todos los puntos de la aproximacion á los límites; digo que $a=b$, y $x=z$: porque si no, habrá una cierta diferencia d entre a y b. Trasponiendo en la ecuacion será $a-b=x-z$, y será $x-z=d$, y $x=d+z$, lo que obliga á x á ser mayor que d, cuando por la hipótesis x y z pueden ser menores que cualquier cantidad por pequeña que sea. Luego no puede haber diferencia entre a y b, y por tanto, si las cantidades variables son iguales en cualquier punto de su aproximacion á sus límites, estos son iguales.

Aplicacion. La fraccion $^2/_3$ da la cantidad decimal periódica 0; 666. . . . La fraccion $^{262}/_{393}$ da la cantidad decimal periódica 0, 666. . . . Estas dos variables son evidentemente iguales en todos los puntos de su aproximacion á los límites; podemos, pues, inferir que los límites $^2/_3$ y $^{262}/_{393}$ son iguales. En efecto, partiendo por 131 los dos términos del segundo quebrado, se reduce á $^2/_3$.

Si las cantidades variables se acercasen á los límites disminuyendo, seria $a+x=b+z$, $a-b=z-x$. Si a no es $=b$, $a-b=d$, será $z-x=d$, $z=d+x$; luego z está obligada á ser mayor que d, contra la hipótesis de que z y x pueden ser menores que cualquier cantidad dada; luego $a=b$, esto es, los límites son iguales.

16. *Algunas aplicaciones de los principios del álgebra elemental.*

49. *Progresiones aritméticas.* De estas cinco cosas,

el primer término, el último, la diferencia, el número de términos y la suma de una progresion aritmética, dadas tres, determinar las otras dos.

Sea la progresion aritmética $a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d. \ldots a+d(n-1)=u$, siendo n el número de términos y u el último. Sea s la suma: la suma del primero y último es igual á la del segundo y penúltimo, á la del tercero y antepenúltimo, y en general á la de cualesquiera dos términos equidistantes de los extremos; porque la misma diferencia en que se aumenta cada término, desde el primero hasta el medio de la progresion, se disminuye cada término desde el último hasta el medio; luego la suma de todos será igual á la suma de los extremos, multiplicada por el número de estas sumas: este número es igual á la mitad del número de términos, y si el número de términos es impar, añadiendo el término medio, que es la semisuma de los extremos, queda tambien multiplicada la suma de los extremos por la mitad del número de términos; luego en todos casos la suma de una progresion aritmética es igual á la suma de los extremos, multiplicada por la mitad del número de términos ó $s=(a+u)\frac{n}{2}$. En las dos ecuaciones $u=a+d\,(n-1)$, $s=(a+u)\frac{n}{2}$, se despejarán las incógnitas que se pidan.

Aplicaciones. 1ª Un grave, al caer, corre en el primer segundo 4,9 metros: en el segundo 3×4,9: en el tercero 5×4,9, y asi continúa siguiendo la progresion de los números impares: ¿en cuánto tiempo descenderá de 400 metros de altura? Aqui es $a=4{,}9$, $d=2\times4{,}9$, $s=400$, y se pide la n. Despejada en las dos ecuaciones es $n=\frac{1}{2}-\frac{a}{d}+\sqrt{\left(\frac{2s}{d}+\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{d}\right)^2\right)}$. Substituyendo es $n=9''$.

2ª ¿Cuántos golpes da el reloj de doce horas en medio dia? 78.

3ª Una porcion de bolas está dispuesta en 18 filas, que crecen de dos en dos, y la primer fila tiene tres. ¿Cuántas bolas hay?

4ª Un viagero que quiere llegar á su destino en cuatro dias, acelera cada dia su marcha en tres leguas, y el último dia anduvo $29\frac{1}{2}$ leguas: ¿cuántas anduvo el primer dia?

50. *Progresiones geométricas.* De estas cinco cosas, el primer término, el último, el cociente, el número de términos, y la suma de una progresion geométrica, dadas tres, determinar las otras dos.

Sea la progresion general $a: aq: aq^2: aq^3: aq^4$....... $aq^{n-1}=u$, siendo n el número de términos, y u el último. Sea la suma S; será $S=a(1+q+q^2+q^3+\ldots$

$+q^{n-1})=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$. En las dos ecuaciones $u=aq^{n-1}$,

$s=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ se despejan las dos incógnitas que se pidan.

Ejemplos. Un pródigo ha gastado su caudal en cinco meses, gastando en cada uno el cuádruplo del gasto del mes anterior. En el primer mes gastó 100 duros: ¿qué caudal tenia? Sus gastos mensuales forman una progresion geométrica, en que $a=100$, $q=4$, $n=5$. La incógnita es S; $S=\frac{100(4^5-1)}{3}=\frac{100(1023)}{3}=100\times341=34100$.

2º Un arriero, encargado de conducir un barril de 100 botellas de vino, saca 12 botellas y las reemplaza con agua. ¿Cuántas veces debió hacer la misma operacion para que no quedasen mas que 40 botellas de vino puro?

En la primer operacion quedaron 88 botellas de vino puro. En la segunda, sacando 12 de 100, sacó de 88 de vino puro $\frac{88\times12}{100}$, y quedó de vino puro $\frac{88^2}{100}$: en la tercera quedó $\frac{88^3}{100^2}$. Estos resultados forman la progresion geométrica $88:\frac{88^2}{100}:\frac{88^3}{100^2}:$ etc., en que se conoce $a=88$, $q=\frac{88}{100}$, $u=40$, y la incógnita es n. La ecuacion $u=aq^{n-1}$, ó multiplicando por q, $aq^n=qu$, da $n=\frac{L.q+L.u-L.a}{L.q}$; sustituyendo se tendrá el valor de n.

3º Se pide el valor de un caballo, ajustado asi: que por el primer clavo de los 32 de sus cuatro herraduras debe darse un maravedí, por el segundo dos, por el tercero cuatro, por el cuarto ocho, y asi de los demas, duplicando siempre.

En la misma hipótesis se pregunta: ¿con cuántos clavos, empezando desde el primero, pasaria el valor del caballo de 6000 duros?

51. *Interés compuesto.* Interés compuesto es aquel en que se acumula sobre el capital el interés de cada año para ganar entrambos reunidos el año siguiente.

De estas cuatro cosas, el capital, el tanto por 100, el número de años, y la suma final de capital y réditos, dadas tres, determinar la cuarta.

Sea a el capital, r el tanto por 1, t el número de años, y s la suma de capital é intereses al cabo de este tiempo.

Formo esta proporcion: si 1 se convierte en $1+r$ al cabo del año, a, capital del primer año, ¿en qué se convertirá? En $a(1+r)$: este es el capital para el segundo año: al cabo de él se habrá convertido en $a(1+r)^2$; al cabo del tercer año en $a(1+r)^3$, y al cabo de t, número de años, el capital a se habrá convertido en $a(1+r)^t$: luego $S=a(1+r)^t$, y en esta ecuacion se despejará la incógnita que se pida.

Ejemplos. 1º Un hombre destina 10000 duros para pagar una deuda de 12000, poniendo su capital á 5 por 100, ¿en cuántos años habrá pagado los 12000 duros? Aqui es $a=10000$, $r=0,05$, $s=12000$, y la incógnita es t. En la ecuacion $12000=10000(1+r)^t$ despejo el exponencial $(1,05)^t=1,2$, y es $t=\frac{L.1,2}{L.1,05}=3$ años, 9 meses con corta diferencia.

2.º ¿Á cuánto por 100 se han impuesto 6000 duros para convertirse en 18000 en 15 años y 4 meses? Aqui es $a=6000$, $s=18000$, $t=15^1/_3$, y la incógnita es r: como

$(1+r)^t=\frac{s}{a}$, será $1+r=\sqrt[t]{\frac{s}{a}}=\sqrt[46/3]{3}=\sqrt[46]{27}$. Esta raiz se extre por logaritmos.

3.º ¿Cuántos años se ha de imponer un capital para que ascienda á una suma m número de veces mayor de lo que era? Aqui es $s=ma$, y la ecuacion $m=(1+r)^t$, y $t=\frac{L.m}{L.(1+r)}$.

52. *Anualidades*. Anualidad es la renta que se paga cada año por un capital prestado, con el objeto, no solo de pagar los intereses, sino de amortizar el capital.

Problema general. De estas cinco cosas el capital prestado, el tanto por 100, el número de años, la anualidad, y lo que se debe del capital al cabo de dicho número de años, dadas cuatro determinar la quinta.

Sea a el capital, r el tanto por 1, x la anualidad, t el número de años, y z la cantidad que se debe del capital al cabo de este tiempo. Al cabo del primer año el capital con sus intereses es $a(1+r)$, y lo que se debe para el segundo año es $a(1+r)-x$. Este capital con sus intereses al cabo del segundo año es $a(1+r)^2-x(1+r)-x$. Lo que se debe al fin del tercer año es $a(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x$; y en general lo que se debe al cabo de t, número de años que hemos llamado z, es $z=a(1+r)^t-x\Big((1+r)^{t-1}+(1+r)^{t-2}+\ldots+\ldots\ldots 1\Big)$ La cantidad, que multiplica la x equivale á $\frac{(1+r)^t-1}{1+r-1}$: luego $z=a(1+r)^t-\frac{x((1+r)^t-1)}{r}$, ecuacion en que deberá despejarse la incógnita que se pida.

Si se supone que la deuda está completamente pagada al cabo de t número de años, será $z=0$, y $ar(1+r)^t=x\left((1+r)^t-1\right)$. Si se pide la anualidad, es $x=\frac{ar(1+r)^t}{(1+r)^t-1}$; si se pide el capital, es $a=\frac{x((1+r)^t-1)}{r(1+r)^t}$. Si se pide el número de años es necesario despejar $(1+r)^t$, y es $(1+r)^t=\frac{x}{x-ar}$, y $t=\frac{L.x-L(x-ar)}{L(1+r)}$. Si se pide la r será necesario resolver una ecuacion de grado superior; por consiguiente la solucion de este caso se reserva para el álgebra *trascendental*.

A esta cuestion se reduce la de *rentas vitalicias*. Llámase vitalicia ó de *por vida* la renta que se paga á un prestamista anualmente, durante su vida, al cabo de la cual se extingue el capital y renta. La fórmula $x=\frac{ar(1+r)^t}{(1+r)^t-1}$, representa el valor de esta renta, representando a el capital, que ha impuesto á renta de por vida, r el tanto por 1, y t el número de años que le faltan de vida. El valor de t se deduce de las tablas de probabilidad de la vida humana. Si el prestamista no llega á la edad probable que tomó por valor de t, pierde dinero; si pasa de dicha edad gana, porque sigue gozando la renta que no se calculó sino para aquel valor de t. Pondremos aqui la tabla que comunmente se usa para saber la vida probable de un hombre. Los números de la primer fila representan las diferentes edades, y los de la segunda la edad probable que falta por vivir.

1. 5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. 75. 80 años.
37. $45\frac{1}{2}$. 43. 39. $35\frac{1}{2}$. $32\frac{1}{2}$. $29\frac{1}{2}$. 26. 23. 20. 17. 14. 11. $8\frac{2}{3}$. $6\frac{1}{2}$. 5. $3\frac{1}{2}$ años.

Ejemplo. Un hombre de 40 años de edad qniere imponer su capital á renta de por vida: ¿cuánto por 100 deberá exigir de renta cada año, suponiendo que el precio corriente del dinero prestado es á 5 por 100?

En este caso $a=100$, $r=0{,}05$, $t=23$, número probable de años que faltan de vida á un hombre de 40 años de edad. El valor de $x=5.\frac{(1{,}05)^{23}}{(1{,}05)^{23}-1}$.

Log. $(1{,}05)^{23}=0{,}4873539$, de donde $(1{,}05)^{23}=3{,}071524$, y $(1{,}05)^{23}-1=2{,}071524$; y *Log.* $(1{,}05^{23}-1)=0{,}3162899$.

$$\begin{array}{r} Log.\ 5=0{,}6989700 \\ Log.\ (1{,}05)^{23}=0{,}4873539 \\ C.^{to}\ Log.\ (1{,}05^{23}-1)=9{,}6837101 \\ \hline \end{array}$$

Log. $x=0{,}8700340$: luego $x=7{,}4136$. Esta debe ser la renta anual que debe gozar por cada 100 unidades del capital que imponga.

Otro. Un hombre de edad de 40 años quiere poner su capital á renta vitalicia por dos vidas, la suya y la de su hijo, que tiene 15 años. En este caso $t=39$; porque la vida probable que falta al padre está incluida en la vida probable que falta al hijo, que es de 39 años segun la tabla. Este caso se resuelve por logaritmos como el anterior.

17.° *Demostraciones algebráicas de algunos principios de la aritmética.*

53. *Numeracion.* La base del sistema comun de numeracion es 10: mas pudiera haberse adoptado cualquiera otra base, y aun seria de desear que se hubiese adoptado el 12, porque tiene mas factores que el 10, y no añade mas dificultad que la de aprender dos nuevas cifras elementales, una para el 10 y otra para el 11.

Sea x la base de un sistema de numeracion: a, b, c, d..... las notas sucesivas con que se expresa un número cualquiera N en dicho sistema, colocadas desde la derecha á la izquierda: será $N=a+bx+cx^2+dx^3+.....$, fórmula que nos dará el valor de N dadas las notas. Al contrario; si dado el valor de N se quiere escribir en el sistema, cuya base es x, partiendo N por x, el resto será la primer nota de la derecha, y el cociente $b+cx+dx^2+.....$ Partiendo este cociente por x, el resto será b, segunda nota de la derecha, y el cociente será $c+dx+.....$ Continúo partiendo los cocientes por x, y los resíduos serán las notas sucesivas. Cuando se llegue á un cociente menor que la base, ese será la primer nota de la izquierda.

Ejemplo. ¿Cuánto vale el número 3120 escrito en el sistema, cuya base es 4? $N=0+2\times4+1\times16+3\times64=216$. Al contrario, se pide escribir el número 216 en el sistema cuya base es 4: partiendo sucesivamente por 4, los resíduos son 0, 2, 1, y el último cociente es 3, menor que 4: luego se debe escribir 312 o.

54. *Complemento aritmético.* Sea m el minuendo, s el subtrahendo, r el resíduo: será $r=m-s$: sea A la unidad superior de que se resta el subtrahendo para tener su complemento, que llamo c: será $c=A-s$: luego $m+c=m+A-s=r+A$: es decir: *añadiendo al minuendo el complemento aritmético del subtrahendo, resulta el resíduo con una unidad superior de mas.*

55. *Propiedades de los números enteros.* (*Aritmética, artículo* 4.º) Sean F y F' los factores de un producto P. Supongamos que F partido por d, da de cociente q y de resto r, y que F' partido por d, da de cociente q' y de resto r': será $F=qd+r$, $F'=q'd+r'$: luego $P=FF'=qq'd^2+qr'd+rr'+q'rd$: partiendo esta ecuacion por d, es $\frac{P}{d}=qq'd+qr'+q'r+\frac{rr'}{d}$: luego el *resto de la particion del producto es* rr', *producto de los restos de los factores.*

Sea r el resto de 10 partido por d; el resto de 10^n será r^n, producto de los restos de los factores, 10, 10, 10..... del producto 10^n.

Sean a, b, c, d..... las notas sucesivas de un número N. Será $N=a.\ 1+b.\ 10+c.\ 10^2+d.\ 10^3+$....... El resto de $a.\ 1$ partido por d es a; el de b por 10 será br, llamando r al resto de 10, el de $c.10^2$ será cr^2, el de $d.10^3$ será dr^3......: luego el resto de N partido por d, será $a+br+cr^2+dr^3+$......

Dividamos el número N en divisiones de m, número de cifras, y expresemos por A_1 la primera division de la derecha, por A_1 la segunda, por A_2 la tercera.... será $N=A_1+A_2.10^m+A_3.10^{2m}+A_4 10^{3m}+$.....

Añadiendo y quitando en el segundo miembro $A_2+A_3+A_4+$....., será $N=A_1+A_2+A_3+$.... $A_2(10^m-1)+A_3(10^{2m}-1)+A_4(10^{3m}+$...... Añadiendo y quitando en el segundo miembro en primer lugar las divisiones impares y despues las pares, es

$N = A_1 + A_3 + \ldots - (A_2 + A_4 + \ldots) + A_2(10^m + 1) + A_3(10^{2m} - 1) + A_4(10^{3m} + 1) + A_5(10^{4m} - 1) + \ldots$ Estos tres valores de N nos darán todas las reglas necesarias para conocer si un número N es divisible por un divisor D que sea factor de 10^m, ó de $10^m - 1$, ó de $10^m + 1$.

Si es factor de 10^m, el resto de $\frac{N}{D}$ será A_1 en la primera ecuacion.

Si es factor de $10^m - 1$, el resto será $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ en la segunda ecuacion, porque $10^m - 1$, $10^{2m} - 1$, $10^{3m} - 1, \ldots$ son divisibles por $10^m - 1$. En efecto, haciendo $10^m = y$, sabemos que $y - 1$, $y^2 - 1$, $y^3 - 1 \ldots$ son divisibles por $y - 1$.

Si D es factor de $10^m + 1$, el resto será $A_1 + A_3 + \ldots - (A_2 + A_4 + \ldots)$ en la tercera ecuacion, porque $10^{2m} - 1 = (10^m + 1)(10^m - 1)$, $10^{4m} - 1 = (10^{2m} + 1)(10^{2m} - 1) \ldots$ son divisibles por $10^m + 1$; y $10^m + 1$, $10^{3m} + 1$, $10^{5m} + 1$, son divisibles por $10^m + 1$, como se ve en la fórmula $\frac{x^n - a^n}{x - a}$, haciendo $x = 10^m$, y $a = -1$, con tal que n sea un número impar.

Haciendo, pues, $m = 1$, $10^m = 10$, cuyos factores son 2, 5, 10. Tambien $10^m - 1 = 9$, cuyos factores son 3, 9. Tambien $10^m + 1 = 11$ número primo: luego.

Son divisibles por 2, 5 ó 10 todos los números en que A_1 lo sea. Son divisibles por 3 ó 9 todos los números en que $A_1 + A_2 + A_3 \ldots$, es decir, la suma de las notas sea divisible por 3 ó por 9. Son divisibles por 11 todos los números en que $A_1 + A_3 + \ldots - (A_2 + A_4 + \ldots)$, es decir, la suma de las notas de sitio impar menos la suma de las notas de sitio par es divisible por 11.

Si $m = 2$, $10^m = 100$, cuyos factores son 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100: un número será divisible por cualquiera de estos factores, cuando la primer division de la derecha, compuesta de dos notas, lo sea. Tambien $10^m - 1 = 99$, cuyos factores son

3, 9, 11, 33, 99: será divisible por cualquiera de estos factores aquel número cuya suma de divisiones de dos notas sea divisible por el mismo factor. Tambien $10^m + 1 = 101$, número primo: será divisible por él todo número en que la suma de divisiones de dos notas de sitio impar menos la suma de divisiones de sitio par sea divisible por 101.

Si $m = 3$, $10^m = 1000$, sus factores son 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000: es divisible por cualquiera de estos factores aquel número cuya última division de tres notas de la derecha lo sea. Tambien $10^m - 1 = 999$: sus factores son 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999: será divisible por cualquiera de ellos aquel número cuya suma de divisiones de tres notas lo sea. Tambien $10^m + 1 = 1001$: sus factores son 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001: es divisible por cualquiera de estos factores aquel número en que lo sea la suma de divisiones de tres notas de sitio impar menos la suma de divisiones de tres notas de sitio par.

Si hacemos $m = 4$, $m = 5$, $m = 6$, deduciremos reglas para otros muchos divisores.

55. *Dado un número primo, hallar una regla para conocer en qué caso una cantidad cualquiera es divisible por dicho número primo.* Sea dicho número d: si no es 2 ni 5, no podrá ser factor de 10^m; pero podrá serlo de $10^m \mp 1$; y en ambos casos hay regla. Deberá, pues, ser $10^m \mp 1 = dh$, siendo h un entero arbitrario. Dénsele, pues, diferentes valores hasta que su producto por d se diferencie de una potencia del 10 en una unidad. El exponente de esta potencia indica el número de notas de cada division; y será fácil deducir la regla pedida.

56. *Mayor divisor comun.* Sea d factor comun de dos números A y B, de modo que $\frac{A}{d} = x$, y $\frac{B}{d} = z$, siendo x y z enteros. Será $A = dx$ y $B = dz$: partiendo A por B sea q el cociente y r el resto: será $dx = dzq + r$, de donde $r = dx - dzq$, es decir, el resto es divisible por d, factor comun al dividendo y al divisor. Tambien $\frac{A}{B} = \frac{dx}{dz} = \frac{x}{z}$: esto es, la razon de dos cantidades es igual á la razon de los números de veces que contienen á su divisor comun.

Sea d un número primo: ab el producto de dos factores, que se supone divisible por dicho número primo: digo que si a no es divisible por d, lo ha de ser b. Porque si a no es divisible por d, a y d son primos entre sí, pues d es primo absoluto, y su divisor comun será 1: buscando este divisor comun, sean $q, r, q', r', q'', r'', q''', r'''$, los cocientes y restos respectivos hasta llegar al resto 1. Tendremos las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} a=dq+r \\ d=q'r+r' \\ r=q''r'+r'' \\ r'=q'''r''+r''' \text{ etc.} \end{array}\right\} \text{Multiplicándolas por } b \text{, dan } \left\{\begin{array}{l} ab=bdq+rb \\ bd=bq'r+br' \\ br=bq''r'+br'' \\ br'=bq'''r''+br''' \text{ etc.} \end{array}\right.$$

La primer ecuacion manifiesta que rb es divisible por d: la segunda que lo es br', la tercera que lo es br'' etc.: luego $b\times$ el último resto, que es 1, es divisible por d.

57. *Fracciones.* ¿Qué cantidades x é y añadiré ó quitaré á los dos términos de la fraccion $\frac{a}{b}$, de modo que esta fraccion no varíe? será $\frac{a}{b}=\frac{a\pm x}{b\pm y}$: de donde $ab\pm ay=ab\pm bx$, $ay=bx$, $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$: luego es necesario que las cantidades x é y, que se han de añadir ó sustraer de los dos términos de la fraccion propuesta, formen otra fraccion igual á ella. De aqui proceden los métodos, que llaman *componer*, *dividir*, *componer* y *dividir* para sacar nuevas proporciones de una proporcion dada: por ejemplo, si $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$, componiendo será $\frac{a+x}{b+y}=\frac{a}{b}$, ó $\frac{a+b}{x+y}=\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Dividiendo será $\frac{a-x}{b-y}=\frac{a}{b}$, ó $\frac{a-b}{x-y}=\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$: componiendo y dividiendo será $\frac{a+x}{b+y}=\frac{a-x}{b-y}$, ó $\frac{a+b}{a-b}=\frac{x+y}{x-y}$.

58. *Aproximaciones.* Sea la fraccion $\frac{a}{b}$: queremos aproximarnos á ella en menos de $\frac{1}{q}$: sea $\frac{x}{q}$ la fraccion que se aproxima á $\frac{a}{b}$ en menos de $\frac{1}{q}$, de modo que $\frac{x}{q}<\frac{a}{b}$, y $\frac{x+1}{q}$ mayor que $\frac{a}{b}$: multiplicando por q estas dos desigualdades, será $x<\frac{aq}{b}$ y $x+1>\frac{aq}{b}$; luego x es igual al cociente entero que dé $\frac{aq}{b}$, despreciando el resto.

Sea N un número que tenga inexacta la raiz m: queremos aproximarnos á $\sqrt[m]{N}$ en menos de $\frac{1}{q}$: sea $\frac{x}{q}$ la fraccion que se aproxima á $\sqrt[m]{N}$ en menos de $\frac{1}{q}$, será $\frac{x}{q} < \sqrt[m]{N}$ y $\frac{x+1}{q} > \sqrt[m]{N}$. Multiplicando ambas desigualdades por q, será $x < q\sqrt[m]{N}$ y $x+1 > q\sqrt[m]{N}$, ó introduciendo el coeficiente q debajo de los radicales, $x < \sqrt[m]{Nq^m}$ y $x+1 > \sqrt[m]{Nq^m}$: luego x debe ser igual al entero que dé la extraccion de $\sqrt[m]{Nq^m}$, despreciando el resto.

59. *Períodos.* Propóngase una fraccion, en la cual los factores simples del denominador sean solamente 2 ó 5: dicha fraccion se expresará generalmente por $\frac{a}{2^m . 5^n}$: y supongamos $m > n$. Reduciéndola, pues, á decimales de la clase 10^m, será $\frac{a . 10^m}{2^m . 5^n . 10^m} = \frac{a . 5^{m-n}}{10^m}$: como $m > n$, el numerador es un número entero, y la reduccion á la clase 10^m exacta. Si $n > m$, seria exacta la reduccion á la clase 10^n. Si $m = n$, la fraccion reducida á la clase 10^m es $\frac{a}{10^m}$.

60. *Si el denominador no tiene ningun factor* 2 ó 5, *el período decimal empezará desde la vírgula.*

Dem. Sea $\frac{a}{b}$ la fraccion comun que queremos reducir á decimal: supongamos que b no sea divisible ni por 2 ni por 5: digo que siempre que el resto resulte uno mismo, los cocientes y los dividendos han de ser iguales. Porque supongamos que $10D$ y $10D'$ son dos dividendos que han dado un mismo resto r: sean q y q' los cocientes: tendremos $10D = bq + r$ y $10D' = bq' + r$. Restando es $10(D - D') = b(q - q')$. Como b no tiene ningun factor comun con 10, y $q - q'$ no puede ser divisible por 10, porque q y q' son menores que 10; esta ecuacion no puede ser satisfecha, á no ser que $D = D'$ y $q = q'$. Luego cuando los restos son iguales proceden de dividendos y cocientes iguales: luego no puede suceder que restos iguales procedan de dividendos desiguales; y por consiguiente todos los dividendos anteriores tienen que reproducirse para que los restos iguales se reproduzcan, incluso el primer dividendo: luego el período empieza desde la vírgula.

61. *Hallar la fraccion comun de donde ha procedido un período decimal completo.*

Sea p el período y n el número de sus notas: la fraccion decimal formará la progresion geométrica indefinida $\frac{p}{10^n}+\frac{p}{10^{2n}}+\frac{p}{10^{3n}}+\ldots$.. Sea x la fraccion comun de donde se originó el período: será $x=\frac{p}{10^n}+\frac{p}{10^{2n}}+\frac{p}{10^{3n}}+\ldots$.. Esta progresion se va acercando á su límite x mientras mas términos se tomen de ella. Súmola, pues, hasta m número de términos, y llamo b lo que falta de la progresion para completar el valor de x. La suma de la progresion hasta m número de términos se halla por la fórmula $S=a.\frac{q^{n'}-1}{q-1}$ que representa la suma de una progresion geométrica poniendo en esta fórmula $a=\frac{p}{10^n}$, $q=\frac{1}{10^n}$, $n'=m$; y la suma pedida será $\frac{p}{10^n}.\frac{\frac{1}{10^{mn}}-1}{\frac{1}{10^n}-1}$, ó $\frac{p}{10^{mn}}.\frac{1-10^{mn}}{1-10^n}$, ó $\frac{p}{10^{mn}}\left(\frac{10^{mn}-1}{10^n-1}\right)$. Será, pues, $x=\frac{p}{10^{mn}}.\frac{10^{mn}-1}{10^n-1}+b$, ó $x-b=\frac{p}{10^n-1}-\frac{p}{10^{mn}(10^n-1)}$. Pero b es disminuible á voluntad, tomando á m mayor, y $\frac{p}{10^{mn}(10^n-1)}$ disminuye tambien á voluntad conforme aumenta m: luego los límites de ambos miembros son iguales: esto, es $x=\frac{p}{10^n-1}$, fraccion de donde resultó el período p.

62. *Dividir el número* a *en partes proporcionales á los números* m, n, p...... Esta es la regla de compañía.

Sea x la parte proporcional á m, z la parte proporcional á n, u la parte proporcioual á p..... Debiendo ser $m:n::x:z$, $m:p::x:u$ etc., será $z=\frac{nx}{m}$, $u=\frac{px}{m}$ etc., y la ecuacion será $x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}$

$+\ldots\ldots=a$, de donde $x=\frac{ma}{m+n+p+\ldots\ldots}$, $z=\frac{na}{m+n+p+\ldots}$, $u=\frac{pa}{m+n+p+\ldots\ldots}$..... de donde estas proporciones: $m+n+p+\ldots\ldots: a::m:x::n:z::p:u\ldots\ldots$ esto es, suma de capitales es á la ganancia ó pérdida total como cada capital á su ganancia.

63. *Descuento.* Sea a la letra que queremos descontar, r el tanto por 1, x la letra descontada: la proporcion es $1+r:1::a:x=\frac{a}{1+r}$.

Segun el método usual se dirá $1:1-r::a:x=a(1-r)$. La diferencia entre estos dos valores es $\frac{a}{1+r}-a(1-r)=a.\frac{r^2}{1+r}$: esta cantidad es el r por 1 de $\frac{ar}{1+r}$, que es el descuento; porque $\frac{ar}{1+r}$ es $=a-\frac{a}{1+r}$: esto es, la cantidad que descuenta el banquero de la letra.

64. *Intereses.* Sea a la cantidad prestada, r el tanto por 1, x la suma de cantidad y rédito: tendremos $1:1+r::a:x=a(1+r)$.

Esta fórmula nos da una nueva demostracion de la del descuento; porque si el banquero debe pagar al tenedor de la letra la cantidad a que prestó, esta cantidad es $=\frac{x}{1+r}$: es decir, á la letra partida por $1+r$.

65. *Aligacion* Tenemos las cantidades A, B, $C\ldots\ldots$, cuyos precios respectivos son a, b, $c\ldots\ldots$, ¿cuál deberá ser el precio de la mezcla? Sea este precio x. Los valores de las especies son Aa, Bb, $Cc\ldots\ldots$ y el de la mezcla es $(A+B+C+\ldots\ldots)x$; y como este valor debe ser igual á la suma de los valores de las especies, para que no haya ganancia ni pérdida en la operacion, será $Aa+Bb+Cc+\ldots\ldots=(A+B+C+\ldots\ldots)x$, de donde $x=\frac{Aa+Bb+Cc+\ldots\ldots}{A+B+C+\ldots}$, valor del precio medio.

Se piden las cantidades que deben tomarse de dos especies, cuyos precios son a, b para que la mezcla pueda venderse á un precio dado x. La ecuacion es $Aa+Bb=(A+B)x$, y las incógnitas son A y B; dejando á cada una de estas letras en un solo miembro, será $A(a-x)=B(x-b)$, de donde $\frac{A}{B}=\frac{x-b}{a-x}$: es decir, *las cantidades que han de tomarse de ambas especies* *están en razon inversa de las diferencias de sus precios con el medio.*

Para que el problema sea determinado es forzoso añadir otra condicion: por ejemplo, se quiere que la cantidad de la mezcla sea M; esto es, que $M=A+B$: luego deberemos dividir el número M en dos partes proporcionales á $x-b$, y á $a-x$: haremos, pues, la regla de compañías: $x-b+a-x$, ó $a-b:M::x-b:A::x-a:B$, de donde $A=\frac{M}{a-b}(x-b)$, $B=\frac{M}{a-b}(a-x)$. Estos valores manifiestan que debe multiplicarse la *diferencia proporcional*, correspondiente á cada especie, por el factor $\frac{M}{a-b}$, para tener la cantidad que se ha de tomar de aquella especie.

66. *Logaritmos.* Sea a la base del sistema logarítmico: la progresion aritmética será $0.1.2.3.4\ldots$ y la geométrica $1:a:a^2:a^3:a^4\ldots$ Llamo y á un número, y x á su logaritmo: es evidente que $a^x=y$. Esta ecuacion nos dará todas las propiedades de los logaritmos.

1.° Si a es entero, x ha de ser positivo para los valores enteros de y, y negativo para los fraccionarios. Si a es fraccionario, serán negativos los logaritmos de los números enteros, y positivos los de los fraccionarios.

2.° Las cantidades negativas no tienen logaritmo, siempre que se suponga la base positiva, porque si a es positiva, tenga x el valor que tuviere, jamás será y negativa.

3.° Si la base es negativa, las cantidades positivas tendrán logaritmos pares, y las negativas tendrán logoritmos impares.

4.° El logaritmo del producto es la suma de los logaritmos de los factores; porque sean x y x' los logaritmos de y é y' será $a^x=y$, $a^{x'}=y'$, $a^{x+x'}=yy'$, y $x+x'=\text{Log. } yy'$.

5.° El logaritmo del cociente es la diferencia del logaritmo del divisor al del dividendo; porque siendo $\frac{y}{y'}=a^{x-x'}$, será $x-x'=\text{Log.}\frac{y}{y'}$.

6.° El logaritmo de una potencia es igual al logaritmo de la raiz multiplicado por el índice de la potencia; porque siendo $y=a^x$, será $y^m=a^{mx}$, y $mx=\text{Log. } y^m$.

7.° El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo de la cantidad partido por el índice de la raiz; porque siendo $y=a^x$, será

$$\sqrt[m]{y}=a^{\frac{x}{m}},\ y\ \frac{x}{m}=\text{Log.}\ \sqrt[m]{y}.$$

67. *Restos de las potencias de un mismo número.* Aqui generalizaremos cuanto hemos dicho anteriormente acerca de las potencias del 10 partidas por un número primo con 10, ó absolutamente primo: particion que se verifica en los períodos decimales.

Sea a un número cualquiera: la série de sus potencias es 1, a, a^2, a^3..... sea p un número primo con a: el primer término 1 dividido por p deja de resto 1: digo que habrá una potencia a^t del número a, que dividida por p deja tambien el resto 1, siendo $t<p$.

Dem. Sea a^m una cualquiera de las potencias de a.

Si en la expresion a^m doy á m un número de valores diferentes de la série, igual á p, partiendo sucesivamente por p estos valores de a^m habrá dos divisiones por lo menos, que dejarán un mismo resto a'; porque el número de divisiones es igual á p, y cada resto ha de ser menor que p. Sean, pues, a^n, $a^{n'}$ las dos potencias que dan el mismo resto a'. Será $a^n=Ep+a'$, $a^{n'}=E'p+a'$, siendo E' y E los cocientes de las dos divisiones. Restando estas dos ecuaciones, será $a^{n'}-a^n=p(E'-E)$, ó $a^n(a^{n'-n}-1)=p(E'-E)$; pero p es primo con a, y por consiguiente con a^n; luego p es factor de $a^{n'-n}-1$, y por tanto $a^{n'-n}$ dividido por p deja el resto 1; pero $n'-n$ es menor que p, pues están tomados en la série de los números naturales, y pertenecen á una porcion de términos de esta série, cuyo número es p; luego hay una potencia de a, cuyo exponente es inferior á p, la cual dividida por p deja de resto la unidad.

Si $a^t=Ep+1$, es decir, deja de resto 1,

$a^{t+1}=Epa$, que dejará el mismo resto que a 1.

$a^{t+2}=Epa^2+a^2$, que dejará el mismo resto que a^2 etc.: luego se reproducirán periódicamente los mismos restos, y las potencias a^{2t}, a^{3t}, a^{4t}...... a^{nt}, dejarán de resto 1.

Formando, pues, el período de los restos a^0 hasta a^t, se podrá determinar el resto de una potencia muy elevada. Por ejemplo, se quiere saber el resto de 10^{1000} dividido por 7.

Examino cuál potencia de 10 dividida por 7 deja de resto 1, y hallo que es la sexta; pues el período de los restos es 1, 3, 2, 6, 4, 5. Luego en todas las potencias, cuyo índice sea divisible por 6, hay el resto 1. Partiendo 1000 por 6, el cociente es 166, y el resto 4. Luego 10^{996} deja de resto 1, y 10^{1000} deja el mismo resto que 10^4, es decir, 46.

68. Sea p un número primo, y a^t la menor potencia de a que deja el resto 1: *digo que el exponente* t, *ó es* p--1, *ó factor de* p--1. Aplicado á los períodos decimales, ó el número de notas del período es igual al denominador disminuido de 1, ó es factor suyo.

Dem. Como siempre hay un exponente t menor que p, con el cual la potencia a^t deja de resto 1, se infiere que t no puede ser mayor que $p-1$, y asi debe ser uno de los números de la série 1, 2, 3, 4...... $p-1$.

Supongamos que los términos de la série a^0, a^1, a^2, a^3........ a^{t-1}, divididos por p, dejen los restos..... 1, b, b' b''.........

El número de estos restos es t, y todos ellos son diferentes. El número de ellos es t, porque la série de 1, a, a^2..... a^{t-1} tiene t número de términos: todos estos restos son diferentes, porque si hubiera dos potencias a^n, a^m que dejáran el mismo resto q, seria $a^n = Ep + q$, $a^m = E'p + q$, y $a^n - a^m = p(E - E')$, ó $a^m(a^{n-m} - 1) = p(E - E')$, en cuyo caso a^m seria divisible por p, lo que es imposible, pues a y p son primos, ó a^{n-m} dividido por p dejaria el resto 1, lo que es contra la hipótesi, porque a^t es la menor potencia que deja de resto 1 y $n-m$ es menor que t: luego todos los restos de la série 1, b, b', b''...... son diferentes; pero como su número es t, y el de la série 1, 2, 3..... $p-1$ es $p-1$, se infiere, ó que la série 1, b, b', b''..... contiene todos los números naturales desde 1 hasta $p-1$, en cuyo caso $t = p-1$, ó si $t < p-1$, la série de los restos 1, b, b', b''...... no contendrá todos los números naturales comprendidos entre 1 y $p-1$.

Sea h uno de estos números naturales no comprendidos en la série de los restos; multiplicando esta série por h tendremos la série $h, bh, b''h, b'h....$, que partida por p dará una nueva série de restos $h, h,' h,'' h'''.....$ Digo que estos restos son diferentes entre sí, y son diferentes de los restos.. $1, b, b', b''.....$

Son diferentes entre sí; porque sean a^m, a^n dos términos de la série de las potencias, E, E', r, r' los cocientes y restos que dejan, partiéndolos por p; será $a^m = Ep + r$, $a^n = E'p + r'$: multiplicando estas dos ecuaciones por h, será $ha^m = hEp + hr$, $ha^n = hE'p + hr'$. Pero como r, r' son términos de la série $1, b, b', b''....$, hr, hr' son términos de la série $h, bh, b'h, b''h......$; y si partidos por p pudiesen dejar un mismo resto R, seria $hr = ep + R$, $hr' = e'p + R$; de donde $ha^m = p(hE + e) + R$, y $ha^n = p(hE' + e') + R$. Restando será $h(a^n - a^m) = p(hE' - hE + e' - e)$: luego p es factor de $h(a^n - a^m)$; pero de h no lo es, porque h es menor que p; luego lo será de $a^n - a^m$, ó de $a^m(a^{n-m} - 1)$; pero de a^m no lo es porque es primo con a, ni tampoco de $a^{n-m} - 1$, porque a^{n-m} dividido por p no puede dejar 1 de resto, pues $n - m < t$: luego hr y hr' no pueden dejar restos iguales, y por tanto todos los números de la série $h, h', h''......$ son diferentes entre sí.

Tambien son diferentes de los términos de la série $1, b, b', b''....$ Porque si un término de esta série fuese igual á un término de la série $h, h', h''.....$, llamémosle R. Sea a^m la potencia que deja este resto, y será $a^m = Ep + R$. Sea $a^{m'}$ la potencia correspondiente al término de la série $h, bh, b'h.....$ que deja el mismo resto R; y sea $a^{m'} = E'p + v$: multiplicando por h, será $ha^{m'} = hE'p + hv = E''p + R$; pues el término hv de la série $h, bh, b'h......$ deja el resto R por hipótesi. Si m' es menor que m, será $a^m - ha^m$, ó $a^{m'}(a^{m-m'} - h) = p(E - E'')$, ecuacion imposible, porque ni $a^{m'}$ es divisible por p, ni $a^{m-n'} - h$ lo es, pues el resto de $a^{m-m'}$ es menor que p, y tambien lo es h. Si $m' > m$, como el término a^{t+m} deja el mismo resto que a^m, será $a^{t+m} = Ep + R$, y restando será $a^{t+m}-ha^{m'}$, ó $a^{m'}(a^{t+m-m'}-h)=p(E''-E)$, ecuacion imposible como la anterior, porque $t+m-m'<t$.

Tenemos, pues, dos séries 1, b, b'..... h, h', h''....., cuyo número de términos es $2t$, y cuyos términos son todos diferentes entre sí, y se hallan entre los términos de la série 1, 2, 3...... $p-1$. Si aun quedan en esta términos que no se encuentren en ninguna de las dos anteriores, sea l uno de ellos: multiplico la série 1, b, b'...... por l: parto por p, y resultará una nueva série de restos, diferentes entre sí, diferentes de la série 1, b, b'..... (lo que se prueba como en el caso anterior), y diferentes de los términos de la série h, h', h''..... Porque si en las séries h, $b'h$, $b''h$.....l, $b'l$, $b''l$..... hubiese dos términos que dejasen un mismo resto R, siendo $a^{m'}$, a^{m} las potencias que les corresponden, será $ha^{m}=Ep+R$, $la^{m'}=Ep+R$, y $a^{m'}(ha^{m-m'}-l)=p(E-E')$, ecuacion imposible, ya sea $m'<m$, porque $ha^{m-m}-l$ ha de ser menor que p, ya sea $m'>m$; pues entonces sería $a^{m}(la^{m'-m}-h)=p(E'-E)$. Tenemos, pues, tres séries de restos todos diferentes, cuyo número es $3t$. Si aun no se encuentran en ellas todos los términos de la série 1, 2, 3..... $p-1$, multiplico la série 1, b, b', b''..... por uno de los términos que faltan en ellas, y tendré una nueva série de restos, diferentes entre sí y con los anteriores. Continuando la misma operacion, por grande que sea p, llegaré á comprender en las séries de restos, todos diferentes, todos los términos de la série 1, 2, 3....... $p-1$, y por tanto $p-1$, número de términos de esta série, será igual al número de términos de todas las séries de restos, que es nt, siendo n el número de séries.

La ecuacion $p-1=nt$ prueba que t es factor de $p-1$: luego etc.

Teorema de Fermat. Siendo $a=Ep+1$, elevando ambos miembros á la potencia entera $\frac{p-1}{t}$, será $a^{p-1}-1=\acute{E}p$, ó $(a^{\frac{p-1}{2}}+1)(a^{\frac{p-1}{2}}-1)=\acute{E}p$; luego *siendo* p *un número primo, la potencia* $a^{\frac{p-1}{2}}$, *dividida por* p, *ha de dejar de resto* $+1$ ó -1.

Este teorema sirve para saber á qué potencia m debo elevar el 10, para que $10^{m}+1$, ó $10^{m}-1$, sea divisible por un número primo, por ejemplo 41. Dicha potencia es $\frac{p-1}{2}=20$: de modo que $10^{20}+1$, ó $10^{20}-1$ es divisible por 41, lo que sirve para hallar la regla del 41: es decir, qué carácter ha de tener un número entero para ser divisible por 41.

FIN DEL ALGEBRA.

INDICE.

ALGEBRA.

ELEMENTOS

DE MATEMATICAS

PURAS Y MISTAS:

POR DON ALBERTO LISTA,

Profesor de Matemáticas en la casa de educacion, sita en la calle de S. Mateo de esta Corte.

Quidquid praecipies, esto brevis.

Quidquid praecipies Horat.

SEGUNDA EDICION.

TOMO III.

MADRID:

Imprenta de Don Leon Amarita, Plazuela de Santiago, N.º 1.

1825.

ADVERTENCIA.

Este tomo comprende la Geometría elemental, la aplicacion del Algebra á la Geometria, la Trigonometría rectilínea, la Geodesia, los principios de Geometría descriptiva, y un apéndice acerca de los pesos y medidas.

Muy poco hemos innovado en la Geometría elemental y en la Trigonometría plana, porque nuestra esperiencia y la de muchos profesores de mérito ha sido favorable al método y órden de ideas adoptado en la primer edicion; pero ha sido necesario aumentar el número de problemas en la aplicacion del Algebra á la Geometría, y esplicar los métodos de resolucion con mas claridad. Ademas hemos coordinado los problemas de Geodesia, y añadido algunas ideas acerca del objeto de este importante ramo de la Geometría. Hemos añadido tambien un gran número de problemas y proposiciones, que aunque no pertenezcan á la enseñanza elemental, serán muy á propósito para ejercitar á los alumnos en la investigacion de las resoluciones, ya analíticas, ya gráficas. En estas se indica la construccion, y en aquellas la ecuacion. En fin, hemos añadido los principios de Geometría descriptiva, para que no se eche menos en este tratado ninguna de las doctrinas elementales que componen en el dia el inmenso estudio de las matemáticas.

GEOMETRIA ELEMENTAL.

1. GEOMETRIA es la ciencia que examina las propiedades de la cantidad estensa. Todo cuerpo es estenso en longitud, latitud y profundidad. Los límites que terminan el cuerpo se llaman *superficies*, y solo se consideran en ellas longitud y latitud. Los límites de las superficies se llaman *líneas*, que solo tienen longitud. Los límites de la línea se llaman puntos, en los que no se considera estension alguna.

ARTICULO I.

Medicion de las rectas y arcos.

2. La línea se divide en *recta*, *quebrada* y *curva*. Línea recta es la mas breve distancia entre dos puntos. Quebrada la que se compone de líneas rectas sin formar toda ella una línea recta. Curva la que ni es recta ni quebrada.

De un punto á otro no se puede tirar mas que una línea recta, pues la distancia mas corta debe ser una sola.

La verdadera distancia de un punto á otro se mide por la línea recta tirada entre ambos; porque, siendo la mas breve, es la mas fácil de medir; y, siendo la única que se puede tirar entre los dos puntos, no hay otra con quien equivocarla.

Dos rectas no se pueden cortar mas que en un punto; pues si pudieran cortarse siquiera en dos, tendrian dos puntos comunes, y por ellos podrian pasar dos rectas contra lo demostrado.

Una recta se puede prolongar indefinidamente por ambas partes; y si en ella se toman dos puntos cualesquiera, la recta que los uniese coincidiria en toda su estension con la primera; pues si no, podrian pasar dos rectas por dos puntos.

Una superficie es *plana*, cuando la recta que une dos cualesquiera de sus puntos coincide con la superficie en toda su extension.

3. Dos rectas se suman colocando la una en la prolongacion de la otra. Se restan tomando el sustraendo sobre el minuendo.

Un recta se multiplica por un número, sumándola con ella misma tantas veces como unidades tenga el multiplicador.

La medida comun de dos rectas se halla colocando la menor sobre la mayor cuantas veces se pueda, colocando el residuo sobre el divisor cuantas veces se pueda, y continuando la misma operacion hasta que un resíduo quepa exactamente en el anterior: este último resíduo será la medida comun de ambas rectas; y la razon que tengan entre sí los números de veces que contienen á la medida comun será la razon de ambas rectas (Arit. 19).

Medir una recta es buscar su relacion con otra recta que se toma por unidad. El número de veces que la recta dada contenga á la unidad, representará su valor.

Las rectas son cantidades que pueden someterse al cálculo, tanto aritmético, como algebráico, pues pueden representarse por números.

Dos rectas son *incomensurables* entre sí, cuando al buscar su medida comun no se halla resíduo que quepa exactamente en el anterior. En este caso se toma por medida comun aproximada el resíduo que se juzgue suficientemente pequeño.

4. Llámase contorno convexo el que no puede ser cortado por una recta sino en dos puntos.

De todos los contornos convexos que van de un *punto á otro, es menor el que se acerca mas á la linea recta que une los dos puntos.* Dem. 1.º Sean A y B los estremos de los dos contornos convexos rectilíneos (Fig. 1.) ACEB, AFGB: digo que ACEB es mayor que AFGB. Porque prolongando la recta AF hasta que corte el contorno ACEB en D, será $AC+CD>AD$, por ser AD línea recta: añadiendo á ambos miembros de esta desigualdad $DE+EB$, será el contorno ACEB mayor que el contorno ADEB. Del mismo modo se demostrará que prolongando la FG hasta que encuentre el contorno ACEB en H, será el contorno ADEB mayor que AFHB, y siendo este mayor que AFGB, se infiere que el contorno ACEB es el mayor de todos. La misma demostracion se haria si el contorno AFGB constase de mas rectas: luego etc.

2.º Sean en fin los dos contornos convexos curvos AMB, ACB. (Fig. 2.) Tiro la recta EF, que toque el contorno ACB. $EMF>EF$ por ser esta línea recta. Añadiendo á ambas partes $AE+FB$ será $AMB>AEFB$. Tirando la Ki, que toque el contorno ACB, se demostrará que $AEFB>AiKFB$; y continuando de la misma manera podremos formar un número indefinido de contornos, que cada vez se van haciendo menores conforme se van acercando al contorno ACB; pero cuando las cantidades que estan entre dos límites aumentan acercándose al uno y disminuyen acercándose al otro, es prueba de que el primer límite es mayor que el segundo: luego el contorno $AMB>ACB$: luego etc.

5. *Linea circular* es una curva, cuyos puntos estan todos en un plano, y distan igualmente de otro punto fijo. *Centro* es el punto fijo que equidista de todos los de dicha línea, llamada *circunferencia* del espacio que encierra, al que se da el nombre de *círculo. Radios* son las rectas tiradas desde el centro á la circunferencia. *Diámetro* es cualquiera recta que, pasando por el centro, se termina en la circunferencia. *Arco* es cualquier porcion de la circunferencia. *Cuerda* es la recta que une los dos estremos del arco. *Segmento*

:

es el espacio comprendido entre el arco y la cuerda. *Sector* es el espacio comprendido entre dos radios y el arco que interceptan.

Los radios son iguales, porque miden la distancia del centro á la circunferencia, que es la misma en todos sus puntos. Los diámetros son iguales, porque cada uno vale el doble del radio. El diámetro divide por medio la circunferencia; porque si doblando el círculo por el diámetro no coincidieran las dos partes de la circunferencia, los puntos de la una no distarian tanto del centro como los puntos de la otra.

6. (Fig. 3) *El diámetro es mayor que cualquier cuerda*; porque si á los estremos de la cuerda EF tiramos los radios CE y CF, será $EF < CE + CF$; pero la suma de los dos radios CE y CF es igual al diámetro DG: luego el diámetro es mayor que la cuerda EF.

7. *Si dos arcos son iguales, lo serán sus cuerdas*; porque si los arcos son iguales, se podrán sobreponer el uno al otro, se ajustarán sus estremos, y por tanto las rectas que pasan por ellos, que son las cuerdas: luego etc.

8. *Al mayor arco corresponde mayor cuerda.*

Dem. Sea el arco DF mayor que DB. Tiro los radios CF, CB: tenemos que $CI + IF > CF$ por ser CF línea recta; pero $CF = CB$: luego $CI + IF > CB$. Restando de ambas partes CI, es $IF > IB$: añadiendo á ambas partes ID, es $DF > ID + IB$; pero $ID + IB > DB$, por ser DB línea recta: luego con mas razon $DF > DB$: luego etc.

9. *Si dos cuerdas son iguales, lo serán sus arcos*; pues si estos no lo fueran, el mayor tendria mayor cuerda (8) contra el supuesto de ser las cuerdas iguales.

Medir un arco es buscar cuantas veces contiene á otro arco del mismo radio que se toma por unidad. Para esto no es necesario poner en línea recta ó *rectificar* dichos arcos: podrémos ver cuantas veces cabe un arco en otro, llevando sobre este la cuerda del primero cuantas veces se pueda colocar, y las divisiones que resulten serán iguales al primer arco, pues tienen su misma cuerda (9). Si resulta resto, se hallará la medida comun por el mismo método que en las rectas.

Los arcos pueden someterse á todas las operaciones del cálculo aritmético y algebráico, pues pueden espresarse por números.

II. *De los ángulos.*

10. *Angulo* es la abertura de dos rectas que concurren en un punto. *Vértice* del ángulo es el punto donde concurren las rectas que lo forman. *Lados* del ángulo son las rectas que lo forman.

11. *Dos ángulos serán iguales cuando, coincidiendo el vértice y un lado, coincide el otro lado*; pues habrá igual abertura entre los lados de cada ángulo.

La magnitud de un ángulo no pende del tamaño de sus lados, pues la abertura ó separacion de los lados es siempre la misma, sean estos mayores ó menores.

12. *Si dos ángulos son iguales, los arcos descritos desde sus vértices con un mismo radio deben ser iguales* (Fig. 4.): pues coincidiendo los ángulos por ser iguales, el punto A' caerá sobre A por ser el radio A'C'=AC, y el punto B' caerá sobre B por ser el radio C'B'=CB: luego los arcos AB, A'B' coincidirán y serán iguales.

Para hallar la mayor medida comun de dos ángulos, se podrá restar el menor del mayor cuantas veces se pueda, ajustándolos por el vértice y un lado, y viendo lo que queda del ángulo mayor; pero como al mismo tiempo se restan los arcos descritos desde sus vértices con un mismo radio, será mas fácil buscar la mayor medida comun de sus arcos, y el ángulo que corresponda á esta será la mayor medida comun de los dos ángulos.

13. *Construir un ángulo igual á otro dado.* Sea C el ángulo dado: para construir en el punto C' un ángulo igual á C, desde C y C' con un mismo radio

describro los arcos AB determinado, y A'B' indefinido. Tomo sobre este A'B'=AB, tomando sus cuerdas iguales (9), y tirando C'A', el ángulo C' será =C, pues sus arcos son iguales (12).

14. *Dos ángulos cualesquiera son proporcionales á los arcos descritos desde sus vértices con un mismo radio.*

(Fig. 5.) Dem. Sean los dos ángulos BCA, DO*n*, y los arcos *ab* y *dn*; ó estos son comensurables, ó incomensurables.

Si son comensurables, supongamos que su medida comun *xd* quepa *m* número de veces en *ab*, y *n* número de veces en *nd*: será $\frac{ab}{nd}=\frac{m}{n}$ (Arit. 19). La mayor medida comun de los ángulos será *x*O*d*, que cabrá *m* número de veces en ACB, y *n* número de veces en NOD: luego $\frac{ACB}{NOD}=\frac{m}{n}$: luego $\frac{ACB}{NOD}=\frac{ab}{nd}$.

Si los arcos son incomensurables, divido el arco *nd* en el número de partes iguales que quiera; y llevando una de ellas sobre el arco *ba* desde *b*, no podrá caer en *a* ningun punto de division por la hipótesi de ser *dn* y *ba* incomensurables: cayga el último punto de division en *i*, y siendo los arcos *ib* *nd* comensurables, serán como sus ángulos, esto es, $\frac{iCb}{NOD}=\frac{ib}{nd}$; pero iCb=ACB+IC*a*; *ib*=*ab*+*ai*: sustituyendo será $\frac{ACB}{NOD}+\frac{ACI}{NOD}=\frac{ab}{nd}+\frac{ai}{nd}$. Los primeros términos de cada miembro son límites invariables, y los segundos son incrementos disminuibles á voluntad; pues el ángulo ACI y el arco *ai* pueden hacerse cuan pequeños se quieran acercando el punto *i* al punto *a*, lo que se logra dividiendo el arco *nd* en mayor número de partes: luego los límites son iguales, pues hay ecuacion entre los variables que se aproximan á ellos: luego $\frac{ACB}{NOD}=\frac{ab}{nd}$: luego etc.

15. *La medida de un ángulo es el arco descrito desde su vértice y comprendido entre sus lados.*

Dem. Sea el ángulo NOD la unidad á que se refieren los ángulos y su arco *nd* la unidad á que se refieren los arcos; siendo $\frac{ACB}{NOD}=\frac{ab}{nd}$ (14) poniendo 1 por NOD y por *nd*, será ACB$=ab$; ecuacion que quiere decir que cualquier ángulo comprende á la unidad de los ángulos tantas veces como su arco á la unidad que se tome para los arcos: luego la medida del ángulo es el arco que le corresponde.

(Fig. 6.) Se llaman *arcos semejantes* los que miden un mismo ángulo, aunque descritos con diferentes radios.

16. *Los arcos semejantes son proporcionales á sus circunferencias.*

Dem. Sean los arcos semejantes AB, *ab*. Prolongo la CA y los arcos, hasta que la recta sea diámetro y los arcos semicircunferencias (5): los ángulos BCA, BCD son como sus arcos, esto es, $\frac{BCA}{BCD}=\frac{AB}{BD}$, y $\frac{BCA}{BCD}=\frac{ab}{bd}$: luego siendo los segundos miembros iguales, será $\frac{AB}{BD}=\frac{ab}{bd}$, y componiendo (Arit. 51), será $\frac{ABD}{AB}=\frac{abd}{ab}$, es decir, los arcos semejantes AB, *ab* son como las semicircunferencias; y siendo estas como las circunferencias, se infiere que etc.

III. *Perpendiculares y oblicuas.*

17. Una recta es *perpendicular* á otra cuando los dos ángulos que forma con ella son iguales. Una recta es *oblicua* respecto á otra, cuando los ángulos que forma con ella son desiguales.

Angulo *recto* es el que forma una recta con otra, á la cual es perpendicular: su medida es la cuarta parte de la circunferencia ó el *cuadrante* ; porque siendo AD diámetro, ABD es la mitad de la circunferencia ; y como los ángulos rectos ACE, ECD son iguales, siendo EC perpendicular á AD, sus medidas AE, ED son iguales, y cada uno de estos arcos vale un cuadrante.

Angulo *agudo* es el que no llega á recto: ángulo *obtuso* es el que es mayor que el recto.

Angulos *adyacentes* son los que forma una recta con otra, con la cual concurre en un punto.

18. *Los ángulos adyacentes suman dos rectos.*

Dem. Sean los ángulos adyacentes BCA, BCD: desde C describo una circunferencia. Las medidas de los ángulos BCA, BCD son los arcos BA, BD (15), cuya suma es ABD; pero ABD es media circunferencia, porque el diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales: luego la suma de los ángulos adyacentes BCA, BCD vale media circunferencia ó dos rectos.

Reciprocamente si dos ángulos unidos suman dos rectos, sus lados esteriores estan en línea recta, es decir: si BCA+BCD=2 rectos, las rectas CD, CA forman una sola; porque si CA no es prolongacion de CD, lo será CK por ejemplo, y la suma de los ángulos adyacentes BCD+BCK=2 rectos; pero BCD+BCA=2 rectos: luego BCD+BCK=BCD+BCA; quitando de ambas partes BCD es BCK=BCA, el todo igual á la parte, lo que es absurdo: luego CK no puede ser prolongacion de CD ni otra ninguna recta sino CA: luego etc.

19. Consecuencias. La suma de los ángulos sucesivos, que forman varias rectas hácia una misma parte, y en un mismo punto de una recta dada es =2 rectos; porque la suma de dos ángulos adyacentes vale tanto como los ángulos sucesivos, esto es, 2 rectos (18).

20. La suma de los ángulos sucesivos, que forman varias rectas saliendo de un mismo punto hácia to-

das partes, es $=4$ rectos, porque entre sus lados interceptarán toda la circunferencia.

21. *Los ángulos opuestos al vértice son iguales* (Fig. 7.): porque ACD+ACB=2 rectos por adyacentes: ACB+BCE=2 rectos por adyacentes: luego ACD+ACB=ACB+BCE: quitando ACB de ambas partes, queda ACD=BCE: luego etc.

Complemento de un ángulo es lo que le falta ó sobra para componer un recto.

Suplemento de un ángulo es lo que le falta para componer dos rectos.

22. *La perpendicular es el camino mas corto de un punto á una recta.*

Dem. (Fig. 8.) Sea AC perpendicular á DCB: tiro la oblícua AB: digo que AB > AC. Prolongo la AC hasta que CH=AC, y tiro la BH. Doblando la figura por la CB, caerá CA sobre CH por ser rectos é iguales los ángulos BCA, BCH (11). El punto A caerá sobre H por ser CA=CH: luego las rectas AB, BH, que coinciden por sus estremos, coincidirán en toda su estension (2), y serán iguales. Ahora AB+BH > AH por ser AH línea recta: luego la mitad de AB+BH, que es AB, será mayor que la mitad de AH, que es la perpendicular AC: luego etc.

23. *Las oblícuas, que se separan igualmente de la perpendicular, son iguales, y tambien los ángulos que forman con las que son perpendiculares.*

Dem. Sea CB=CD: digo que la oblícua AB=AD. Porque doblando la figura por la AC, caerá CB sobre CD por ser iguales los ángulos rectos ACB, ACD: el punto B caerá en D por el supuesto de ser iguales CB y CD: luego AB caerá sobre AD, y serán iguales: luego etc. Respecto que las figuras se ajustan, el ángulo ADC=ABC, y el ángulo DAC=BAC.

24. *La oblícua que se separa mas de la perpendicular es mayor.*

Dem. Digo que AE > AB. Porque si prolongo la AC hasta que CH=AC, y tiro las BH, EH, será AB=

BH por oblícuas equidistantes de la perpendicular BC, y EA=EH por la misma razon; pero AE+EH > AB+BH, porque el contorno convexo, que se aparta mas de la recta AH, es mayor: luego la mitad de AE+EH que es AE, es mayor que la mitad de AB+BH que es AB: luego etc.

25. *Reciprocamente la línea mas corta, que se puede tirar de un punto á una recta, le es perpendicular*; pues si no lo fuera, lo seria otra, y esta seria la menor distancia del punto á la recta, contra el supuesto.

26. *Las oblícuas iguales distan igualmente de la perpendicular*; pues si no, la que distara mas, seria mayor, contra el supuesto de ser iguales.

27. *La oblícua mayor dista mas de la perpendicular*; pues si distara tanto como la menor, serian iguales, contra el supuesto; y si distara menos, seria menor que ella, tambien contra el supuesto.

28. Consecuencias. *De un punto á una recta no se le puede bajar mas que una perpendicular*; pues siendo la mas breve distancia del punto á la recta, debe ser única.

29. *La perpendicular mide la distancia de un punto á una recta*; pues siendo la mas breve es la mas fácil de medir; y siendo única, no hay con quien equivocarla.

30. *En un punto de una recta no se le puede levantar mas que una perpendicular que esté en un plano determinado*; pues otra cualquiera levantada en el mismo punto, y que estuviese en dicho plano, formaria ángulos desiguales, en el supuesto de ser iguales los que formó la primera por ser perpendicular.

31. *Desde un punto á una recta no se pueden tirar mas que dos oblícuas iguales*; pues la tercera que se tirase, distaria de la perpendicular mas ó menos que las otras dos, y seria mayor ó menor que ellas.

32. *La perpendicular levantada á una recta en su mitad tiene todos sus puntos equidistantes de los estremos de dicha recta.*

Dem. (Fig. 9.) Sea CA perpendicular á DB en su mitad: digo que cualquier punto F de la CA equidista de D y B; pues tirando FD, FB, estas son dos oblícuas iguales, porque distan igualmente de la perpendicular: luego etc.

33. *Los puntos que equidistan de los estremos de una recta, estan en la perpendicular levantada en su mitad, ó lo que es lo mismo, los puntos que no estan en dicha perpendicular, no pueden equidistar de los estremos de la recta.*

Dem. Sea AC la perpendicular levantada en la mitad de DB: el punto G, que no está en la AC, no puede equidistar de D y B. Tiro GD, GB y FB: BF+FG > GB por ser GB línea recta; pero FD=FB por oblícuas equidistantes de la perpendicular: luego FD+FG ó DG > GB: luego etc.

34. *Si una recta tiene dos puntos equidistantes de otros dos tomados en otra, le es perpendicular*; pues tomando por estremos de la segunda los puntos señalados, los dos puntos de la primera deben estar en la perpendicular levantada en la mitad de la segunda; y como por dos puntos solo puede pasar una recta, se infiere que la perpendicular es la misma recta, que tiene dos puntos equidistantes de los estremos de la segunda.

35. *En un punto tomado en una recta levantarle una perpendicular.* (Fig. 10.)

Sea el punto dado A; tomo dos porciones iguales AD, AB. Haciendo centro primero en D y luego en B con un mismo radio, describo dos arcos que se corten en H. Tiro la HA, y es perpendicular á DB. Porque tiene dos puntos A y H equidistantes de D y B. El punto H equidista de D y B, porque los radios DH, BH de ambos arcos son iguales por construccion.

36. *Desde un punto dado fuera de una recta bajarle una perpendicular.* (Fig. 11.)

Sea F el punto dado y DB la recta. Desde F describo un arco que corte la recta en los puntos D y B. Desde D y B con un mismo radio describo dos arcos que se corten en H: tiro la FH, y será perpendicular á DB. Porque tiene dos puntos F y H equidistantes de D y B: F, por ser centro del arco DB, y H, porque los radios BH, DH de los dos arcos que se cortan en H, son iguales.

37. *Dividir una recta dada en dos partes iguales.* (Fig. 12.) Sea DB la recta dada: desde D y B con iguales radios describo dos arcos que se corten en A, y otros dos que se corten en H: tiro la AH. Esta será perpendicular á la DB en su mitad, pues tiene dos puntos A y H equidistantes de los estremos D y B, á causa de ser iguales los radios DA, BA, y DH, BH.

IV. *De las paralelas.*

38. *Paralelas* son las rectas que estan en un mismo plano, y que prolongadas indefinidamente no se encuentran nunca.

39. *Dos rectas perpendiculares á una misma son paralelas*; pues si se encontrasen, desde el punto de concurso habria tiradas dos perpendiculares sobre una misma recta.

40. *Si á dos rectas las corta una tercera formando los ángulos de contraria posicion iguales, dichas dos rectas serán paralelas.* (Fig. 13.)

Dem. Sean las rectas BD, AC cortadas por la HG, de modo que los ángulos DFG, AEH sean iguales: digo que BD y AC serán paralelas. Para demostrarlo divido la FE por medio en I, tiro la IL perpendicular á BD, tomo LS=LF, tiro la SI, y tiro IR perpendicular á LK. Tenemos IS=IF por oblícuas equidistantes de la perpendicular IL, y por la misma razon los ángulos IFL, ISL son iguales; pero IFL=IEK por hipótesi: luego ISL=IEK. Tambien por la equidistancia de las oblícuas el ángulo FIL=LIS; pero FIL=EIK por verticales: luego LIS=EIK. Doblo la figura por la IR: por ser rectos los ángulos RIL, RIK caerá IL sobre IK; por ser iguales los ángulos SIL, EIK (11), caerá IS sobre IE; por ser iguales IS é IE, caerá el punto

S sobre E; y por ser iguales los ángulos en S y E, la recta SL caerá sobre EK: luego el punto L caerá sobre K, porque dos rectas no pueden cortarse mas que en un punto. El ángulo en K será igual al ángulo en L, y por tanto será recto: luego las rectas BD, AC serán perpendiculares á una misma LK, y por tanto serán paralelas: luego etc.

41. Tambien, *si á dos rectas las corta una tercera, formando los ángulos de una misma posicion iguales, las dos rectas serán paralelas.*

Dem. Si el ángulo HFB=HEA, las dos rectas serán paralelas; porque el ángulo HFB=DFG por verticales: luego DFG=FEA; pero cuando los ángulos de contraria posicion son iguales (40), las rectas son paralelas: luego etc.

42. Tambien, *si á dos rectas las corta una tercera, formando la suma de los dos ángulos internos igual á dos rectos, las dos rectas serán paralelas.*

Dem. Si EFB+FEA=2 rectos, como EFB+EFD=2 rectos por adyacentes (18), será EFB+FEA=EFB+EFD; quitando EFB comun, será FEA=EFD; pero cuando los ángulos de contraria posicion son iguales, las rectas son paralelas: luego etc.

43. *Por un punto dado no se puede tirar mas que una paralela á una recta dada.*

Este es el célebre postulado de Euclides, cuya demostracion rigorosa no han podido hallar todavía los matemáticos. La proposicion es evidente á primera vista; pues cualquiera otra línea que no caiga sobre la primer paralela ha de tomar una direccion diferente de la de ambas paralelas, y ha de cortarlas por precision. Mas este raciocinio no es una demostracion rigorosa, tal como se pide en geometría, sino una simple esposicion de lo que nos enseña la esperiencia. El siguiente razonamiento es el mas luminoso que se ha hecho en esta materia. (Fig. 14.)

Sea EF la recta dada: por el punto C tírole la perpendicular CD: levanto en C la CB perpendicular á la CD; será paralela á EF (39) por ser ambas perpendiculares á la CD. Digo que la CA, que forma ángulo agudo con la CD, se ha de encontrar con la EF. Para demostrarlo veo cuantas veces cabe el ángulo BCA en el recto BCD, y sea n este número de veces. Tomo sobre la CD n número de partes iguales á la CE, y por los puntos de division tiro GH, MN..... perpendiculares á CD. Habré formado n númeró de bandas iguales; porque, teniendo las bases iguales y los ángulos adyacentes á las bases rectos, se podrán sobreponer unas á otras. Ahora, el espacio indefinido, comprendido en el ángulo recto BCD, es mayor que el espacio indefinido BCMN; porque este no se estiende sino por la parte superior, y el otro se estiende por la derecha y por la parte superior: dividiendo uno y otro espacio por n, quedará el espacio angular BCA mayor que la banda BCEF. Pero el espacio angular BCA no puede ser mayor que la banda BCEF, si la CA no se corta con la EF: luego por el punto C no se puede tirar á la EF mas paralela que la CB.

Si el ángulo BCA no se contiene exactamente en el recto, de modo que $n = m +$ una fraccion, tomo una banda mas que las que indica el número entero m, siempre será el ángulo recto mayor que la banda total: luego partiendo el primero por n, y la segunda por $m+1 > n$, el cociente primero, que es BCA, será mayor que el segundo que es BCEF; y la demostracion es la misma. El defecto de esta demostracion consiste en que las bandas y los ángulos tienen diferentes límites, y por tanto no se pueden comparar.

44. *Si de dos paralelas la una es perpendicular á una tercer recta, la otra lo será tambien.*

Dem. Sean EF y CB paralelas: si EF es perpendicular á CD, lo será tambien CB; porque si no lo fuese, lo seria otra CA, y esta seria paralela á EF: luego por el punto C se podrian tirar dos paralelas á la recta EF, lo que es imposible (43): luego CA no es perpendicular á CM, ni otra alguna sino la CB: luego etc.

45. *Angulos alternos* son los que forma en contra-

rias posiciones una recta que corta dos paralelas.

46. *Angulos correspondientes* son los que forma en igual posicion una recta que corta dos paralelas.

47. *Si á dos paralelas las corta otra tercer recta, los ángulos alternos serán iguales.* (Fig. 13.)

Sean las paralelas BD, AC, y la recta que las corta HG: digo que el ángulo EFD=HEA; pues sino, se podria tirar por el punto F una recta que formase un ángulo =FEA, y esta recta seria, por lo ya demostrado (40), paralela á AC, y por el punto F podrian tirarse dos paralelas á la AC, lo que es imposible: luego el ángulo EFD=HEA: luego etc.

48. Tambien, *si á dos paralelas las corta otra tercer recta, los ángulos correspondientes serán iguales*; porque el ángulo EFD=AEF por alternos (47); pero EFD=BFH por verticales: luego HFB=HEA: luego etc.

49. Tambien, *si á dos paralelas las corta otra tercer recta, la suma de los ángulos interiores será igual á dos rectos*; porque BFE+BFH=2 rectos por adyacentes; pero BFH=AEF por correspondientes (48): luego BFE+AEF=2 rectos: luego etc.

50. Consecuencias. 1.ª *Dos rectas, paralelas á una tercera, son paralelas entre sí* (Fig. 14.); porque sea BC paralela á EF, y HG paralela á EF: tiro CD perpendicular á BC: lo será á su paralela EF, y por serlo á esta, lo será á su paralela HG: luego BC y HG perpendiculares á CD son paralelas entre sí: luego etc.

51. 2.ª *Los ángulos, cuyos lados son paralelos, y tienen la abertura hácia una misma parte, son iguales.* (Fig. 15.)

Dem. Sean los dos ángulos BAC, FED por ser AB y EF paralelas, los ángulos corespondientes BAC, FGC son iguales: por la misma razon FGC=FED: luego BAC=FED: luego etc.

52. 3.ª *Los puntos de una recta equidistan de su paralela.* (Fig. 16.)

Dem. Sean AB y CD paralelas: tiro desde dos puntos de la primera A y B las perpendiculares AC y BD sobre CD: digo que AC=BD. Para demostrarlo divido la CD por medio en F, y tiro FE perpendicular á CD; esta y las AC y BD lo serán á su paralela AB. Doblo la figura por la EF: caerá FC sobre FD y EA sobre EB por la igualdad de los ángulos rectos: caerá el punto C sobre D por ser FC=FD: caerá CA sobre DB por la igualdad de los ángulos rectos en C y D: luego el punto A, concurso de AE y AC, caerá sobre B, concurso de BE y BD, y será AC=BD: luego etc.

53. Problema. *Por un punto dado fuera de una recta tirarle una paralela.*

Sea CD la recta, y B el punto dado. Tiro desde él la BC á cualquier punto de la CD: formo en B el ángulo CBA=BCD, y será BA paralela á CD, porque los ángulos de contraria posicion BCD, CBA son iguales (40).

V. *De las rectas tiradas en el círculo.*

54. *El radio perpendicular á una cuerda la divide á ella y á su arco en dos partes iguales.* (Fig. 17.)

Dem. Sea el radio CD perpendicular á la cuerda AB: tiro los radios CA, CB, que serán dos oblícuas iguales: luego se separarán igualmente de la perpendicular: luego EA=EB. Siendo CD perpendicular á AB en su mitad, todos los puntos de la CD equidistan de A y B: luego las cuerdas DA y DB son iguales, y por consiguiente sus arcos etc. Si el arco AD=DB, prolongando el radio DC hasta la otra parte de la circunferencia, será AF=FB por ser iguales las semicircunferencias FAD, FBD.

55. La línea que satisfaga á dos de estas cuatro condiciones, pasar por el centro, pasar por la mitad de una cuerda, pasar por la mitad de su arco, y ser perpendicular á dicha cuerda, ha de satisfacer á las otras dos; porque con dos de estas condiciones queda determinada dicha perpendicular, que por lo demostrado debe satisfacer á todas cuatro.

56. Para dividir un arco ó un ángulo en dos par-

tes iguales se bajará desde el vértice una perpendicular sobre la cuerda del arco (54). Dividiendo cada mitad en dos partes iguales, quedará dividido el arco en cuatro partes iguales. Del mismo modo se podrá dividir un arco en 8, 16 etc., y en general en el número de partes iguales que indique cualquier potencia del 2.

57. *Por tres puntos dados hacer pasar una circunferencia.*

(Fig. 18.) Sean dichos puntos A, B, D. Tiro las rectas AB, BD. En sus mitades E y F levántoles las perpendiculares EH, FK. Solamente los puntos de la EH equidistan de A y B, por ser perpendicular á AB en su mitad. Solamente los puntos de la FK equidistan de B y D por la misma razon: luego el punto C de concurso de ambas perpendiculares es el único que equidista de A, B, D: haciendo centro en C con el radio CA describo la única circunferencia que puede pasar por los puntos A, B, D.

A la verdad estas dos perpendiculares no se encontrarán si los tres puntos estan en línea recta, pues dos rectas perpendiculares á una misma son paralelas entre sí; pero si las dos rectas AB, BD no forman una sola, las perpendiculares EH, FK se han de encontrar; pues si fuesen paralelas, por ser BK perperpendicular á EH, lo seria á su paralela KF, y desde el punto B podrian bajarse sobre FK dos perpendiculares BF, BK, lo que es absurdo.

58. Consecuencias. 1.ª *Tres puntos, que no estan en línea recta, determinan la posicion de un círculo;* pues por dichos tres puntos solo puede pasar una circunferencia (57).

59. 2.ª *Dos círculos solo se pueden cortar en dos puntos;* pues si se cortasen en tres puntos, coincidirian (58).

60. 3.ª *Una recta no puede cortar á un círculo mas que en dos puntos;* pues si lo cortase en tres, pasaria una circunferencia por tres puntos, que estuviesen en línea recta, contra lo demostrado (57).

61. 4.ª *Dado un círculo, ó un arco, se puede buscar su centro*, tomando en él tres puntos, tirando dos cuerdas, y levantando dos perpendiculares en sus mitades: el punto de concurso de estas dos perpendiculares será el centro buscado (57).

62. *Tangente* al círculo es una recta, que solo tiene un punto comun con la circunferencia.

63. *El radio tirado al punto de contacto es perpendicular á la tangente.*

(Fig. 17.) Dem. Sea TG la tangente: tendrá todos sus puntos fuera del círculo, escepto el del contacto F: luego el punto F es el mas próximo que tiene al centro; pero la línea mas corta, tirada desde un punto á una recta, es perpendicular á ella: luego CF, menor que cualquier otra recta CG tirada desde el centro á la tangente, es perpendicular á la tangente: luego etc.

64. Reciprocamente, la perpendicular al radio en su estremo es tangente al círculo; porque si CF es perpendicular á TG, es la linea mas corta que se puede tirar del centro á la TG: luego todos los demas puntos de la TG distan del centro mas que el punto F: luego la TG no tiene mas punto comun con la circunferencia que el punto F: luego es tangente: luego etc.

65. Es fácil, pues, tirar una tangente á un punto dado de la circunferencia, tirando un radio á aquel punto, y levantándole en él una perpendicular (64).

66. Por un punto dado en la circunferencia solo se le puede tirar una tangente, pues al radio tirado á aquel punto solo se le puede levantar en él una perpendicular.

67. *Los arcos comprendidos entre rectas paralelas son iguales.*

Dem. Si las rectas son dos cuerdas D'E', AB, tirando el diámetro DF perpendicular á la una, lo será á la otra, y dividirá por medío sus arcos (54): luego el arco FD'A=FE'B, y FD'=FE': restando queda D'A=E'B.

Si las rectas son la tangente TG, y la cuerda DE', tirando el diámetro FD al punto de contacto, será perpendicular á la tangente (63), y por consiguiente á la cuerda, que le es paralela, y dividirá por medio su arco: luego FD'=FE'.

Ultimamente, si las rectas son dos tangentes TG, HI, tirando la cuerda AB paralela á la una, lo será á la otra, y el arco AD=BD, y el arco AF=FB: sumando, será DAF=DBF, y cada uno de estos será una semicircunferencia: luego etc.

VI. *De los triángulos.*

68. *Triángulo* es el espacio encerrado por tres rectas. *Lados del triángulo* son las rectas que lo forman. El triángulo es *escaleno* si sus tres lados son desiguales: *isósceles* si dos de ellos son iguales: *equilátero* si sus tres lados son iguales: *rectángulo* si tiene un ángulo recto: *obtusángulo* si tiene un ángulo obtuso: *acutángulo* si sus tres ángulos son agudos.

69. *Hipotenusa* de un triángulo rectángulo es el lado opuesto al ángulo recto. *Base* es cualquiera de los lados del triángulo, sobre el cual se considera formado. *Vértice* del triángulo es el vértice del ángulo opuesto á la base. *Altura* del triángulo es la perpendicular tirada desde su vertice á su base.

70. *El ángulo esterno, que se forma prolongando un lado de un triángulo, es igual á la suma de los dos ángulos internos opuestos.*

(Fig. 19.) Dem. Sea el triángulo ABC; prolónguese el lado AC, y tírese CD paralela á AB. El ángulo BCD=B por alternos: el ángulo DCK=A por correspondientes; pero el ángulo esterno BCK=BCD+DCK: luego tambien es igual á B+A: luego etc.

71. *La suma de los tres ángulos de un triángulo es = á dos rectos.*

Dem. Sea el triángulo ABC: prolongando el lado AC, el ángulo esterno BCK=B+A (70); pero BCK+

BCA = 2 rectos: luego B + A + BCA = 2 rectos: luego etc.

72. Consecuencias. 1.ª *Si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, el tercero será igual al tercero*; pues es lo que falta á la suma de los dos ángulos iguales para componer dos rectos (71).

73. 2.ª *En un triángulo, que tiene un ángulo recto ú obtuso, los otros dos deben ser agudos*; pues si alguno de ellos fuese recto ú obtuso, entre los tres compondrian mas de dos rectos contra lo demostrado (71).

74. 3.ª *En el triángulo rectángulo los dos ángulos agudos deben sumar un recto*, y será el uno complemento del otro.

75. 4.ª *Si son agudos los ángulos de la base de un triángulo, la altura debe caer dentro del triángulo*; pues si cayese fuera, como BA′, en el triángulo BAA′ habria un ángulo recto A′ y un obtuso BAA′ (que lo seria por ser suplemento del agudo BAC), contra lo demostrado (73).

76. 5.ª *Si los ángulos sobre la base son el uno agudo y el otro obtuso, la perpendicular debe caer fuera del triángulo*; pues si cayese dentro, el triángulo parcial formado hácia la parte donde está el ángulo obtuso, tendria un ángulo recto y otro obtuso, contra lo demostrado (73).

77. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido igual.*

(Fig. 20.) Dem. En los triángulos ABC, A′B′C′ sea el lado AB = A′B′, AC = A′C′ y el ángulo A = A′. Háganse coincidir estos dos ángulos que son iguales: caerá el lado A′B′ sobre AB; y como son iguales, coincidirá el punto B′ con B. Tambien caerá A′C′ sobre AC, y como son iguales, el punto C′ caerá sobre C. El lado B′C′, que se ajusta en dos puntos con BC, coincidirá con él en toda su estension: luego los dos triángulos coincidirán: luego serán iguales: luego etc.

78. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un*

lado igual y dos ángulos iguales semejantemente colocados.

Dem. Teniendo dos ángulos iguales, el tercer ángulo será tambien igual. Sea el lado igual AB=A′B′. Háganse coincidir estos dos lados iguales: por ser el ángulo A′=A, caerá el lado A′C′ sobre AC; y por ser el ángulo B=B′, el lado B′C′ caerá sobre BC: como dos rectas no tienen mas que un punto de concurso, el punto C′, donde se encuentran A′C′, B′C′, caerá sobre C, encuentro de AC y BC: luego los dos triángulos coinciden y son iguales: luego etc.

79. *Si dos triángulos tienen dos lados iguales, el que tenga mayor el ángulo comprendido, tendrá mayor el tercer lado.*

(Fig.21.) Dem. Sean los dos triángulos ABC, ABC′, cuyo lado comun es AB, BC=BC′ y el ángulo ABC > ABC′. Colocando el triángulo ABC′ sobre ABC, de modo que los lados iguales AB se ajusten, por ser el ángulo ABC > ABC′, el lado BC′ vendrá por dentro del triángulo ABC, y el vértice C′, ó caerá en la base AC, ó fuera del triángulo ABC, ó dentro de él.

Si cae el punto C′ en la base, el tercer lado AC′ es visiblemente menor qne AC. Si cae fuera, tendremos AI+IC′ > AC′ por ser AC′ línea recta, y por la misma razon BI+IC > BC: sumando estas desigualdades, será AC+BC′ > AC′+BC. Quitando de ambas partes BC=BC′ por la hipótesi, será el tercer lado AC > AC′. Si el vertice C′ cae dentro del triángulo, el camino AC+CB > AC′+BC′, por separarse mas de la línea recta: quitando BC=BC′, será AC > AC′: luego etc.

80. *Si dos triángulos tienen dos lados iguales, el que tenga mayor el tercer lado, tendrá mayor el ángulo que se le opone.*

Dem. Sea AB comun, BC=BC′, y AC > AC′. Si el ángulo ABC fuese igual á ABC′, los dos triángulos, teniendo dos lados y el ángulo comprendido igual, serian iguales (77) y el lado AC=AC′, contra la hipótesi. Si el ABC fuese menor que el ABC′, seria el lado AC <

AC′, tambien contra la hipótesi: luego el ángulo ABC, que no puede ser igual ni menor que ABC′, será mayor que él: luego etc.

81. *Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados iguales.*

(Fig. 20.) Dem. Sea AB=A′B′, AC=A′C′, y BC=B′C′. El ángulo A es igual á A′; pues si fuese menor, siendo iguales los lados que lo comprenden, seria el lado BC < B′C′, contra la hipótesi, y si el ángulo A fuese mayor que A′, el lado BC seria mayor que B′C′, tambien contra la hipótesi: luego el ángulo A=A′ y los dos triángulos, teniendo dos lados y el ángulo comprendido igual, son iguales: luego etc.

82. Problemas. 1.° *Dados dos ángulos de un triángulo, hallar el tercero.*

(Fig. 22.) En el punto O de una recta KN formo los ángulos MON, MOL, iguales respectivamente á los dos ángulos dados; y el ángulo LOK, que completa los dos rectos, es el tercer ángulo pedido, pues la suma de los tres ángulos del triángulo vale 2 rectos.

83. 2.° *Dado un ángulo y los lados que lo comprenden, construir el triángulo.*

(Fig. 23.) Sea K el ángulo dado, y m y n los lados que lo deben comprender. Formo el ángulo A=K, tomo AB=m y AC=n; y tirando la BC, el triángulo ABC será el pedido.

84. 3.° *Dados un lado y dos ángulos, construir el triángulo.*

(Fig. 24.) Busco el tercer ángulo (82): sea n el lado dado, y k y l los ángulos adyacentes á él. Tiro la recta AB=n, y formo en A un ángulo =k, y en B un ángulo =l, y el triángulo ABC será el pedido.

85. 4.° *Construir un triángulo dados sus tres lados.*

(Fig. 25.) Sean m, n y p los tres lados. Tomo CC′=m, y haciendo centro en C con un radio =n, y en C′ con un radio =p, describo dos círculos. Desde su punto de encuentro M, tiro las MC y MC′; y como estas son respectivamente iguales á n y á p, el triángulo MCC′ será el pedido. El problema será imposible, cuando algun lado es igual ó mayor que la suma de los otros dos; porque el camino mas corto de un punto á otro es la línea recta.

86. 5.º *Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, construir el triángulo.*

(Fig. 26.) Sea K el ángulo dado, a su lado opuesto, y c su lado adyacente. Formo el ángulo A=K, tomo AB=c; y desde B con un radio $=a$ describo un círculo que cortará la AC′ en los puntos C y C′: tirando BC y BC′, los triángulos ABC, ABC′ satisfarán á la cuestion. En este problema pueden ocurrir varios casos.

1.º Si a es menor que c, pero mayor que la perpendicular BD, resultarán los dos triángulos ya dichos.

2.º Si a es mayor que c, entonces el segundo punto C, en que el círculo corta la CA, está á la derecha de A: pues la oblicua menor BA debe distar menos de la perpendicular. Entonces el triángulo ABC′ es el único que satisface á la cuestion.

3.º Si a es menor que la perpendicular BD, el problema es imposible: pues el arco descrito desde B no llegará á la base.

4.º Si a=BD, el arco será tangente á CA en D (64), y el problema quedará resuelto por el triángulo rectángulo BDA.

87. 6.º *Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un lado.*

(Fig. 27.) Fórmese el ángulo recto A. Tómese AC igual al lado conocido. Hágase centro en C con un radio igual á la hipotenusa, y al punto B, donde el arco corte la base, tiro la CB: el triángulo CAB es el pedido.

88. Dos triángulos rectángulos, que tengan la hipotenusa y un lado igual, son iguales; pues estos datos bastan para construir y determinar el triángulo.

89. En general, dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales, el ángulo opuesto á uno de ellos igual, y ambos triángulos son de una misma especie, es decir, rectángulos, obtusángulos ó acutángu-

los; pues con los dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, se puede determinar el triángulo, con tal que se conozca su especie (86, 87).

90. Son cuatro pues los casos en que se puede conocer la total igualdad de dos triángulos, conocida la igualdad de algunas de sus partes: 1.º Cuando sus lados son iguales: 2.º Cuando son iguales dos lados y el ángulo comprendido: 3.º Cuando son iguales dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, y son ambos triángulos de una misma especie: 4.º Cuando tienen un lado igual y dos ángulos iguales, y semejantemente colocados.

91. *En el triángulo isósceles los ángulos opuestos á los lados iguales son iguales, y la altura biseca á la base y al ángulo vertical.*

(Fig. 28.) Dem. Sean los lados iguales BC, AC: por ser oblicuas iguales equidistan de la perpendicular CD, y forman ángulos iguales con CD y AB: luego A=B, ACD=BCD y AD=DB: luego etc.

92. *En todo triángulo á ángulos iguales se oponen lados iguales.*

Dem. Sea A=B: los triángulos ACD, BCD tienen A=B, los ángulos en D iguales por rectos, y CD comun: luego son iguales (78): luego AC=CB: luego etc.

93. En el triángulo equilatero los tres ángulos son iguales, porque se oponen á lados iguales (91), y cada ángulo vale un tercio de dos rectos ó dos tercios de un recto (71).

94. *Las partes de dos paralelas interceptadas entre otras dos paralelas son iguales.*

(Fig. 29.) Dem. Sean AB y CD paralelas, y BD y AC paralelas. Tirada la AD, los triángulos ADB, ADC, que tienen AD comun, el ángulo BAD=ADC por alternos, y el ángulo BDA=DAC por alternos, son iguales: luego BA=DC, y BD=AC: luego etc.

95. *Si á dos rectas iguales las unen otras dos iguales, cada una será paralela á su opuesta.*

Dem. Sea AB=CD, y BD=AC: tirada la AD, los triángulos ABD, ADC, que tienen AB=CD, AC=BD y el lado AD comun, son iguales: luego el ángulo BAD=ADC; y siendo alternos, las rectas BA, DC son paralelas: tambien el ángulo BDA=DAC, y siendo alternos, las rectas BD, AC son paralelas: luego etc.

96. *Si dos rectas son iguales y paralelas, las rectas que las unan serán tambien paralelas é iguales.*

Dem. Sea AB igual y paralela á CD. Tirada la AD, los triángulos BAD, DAC, que tienen AD comun, el lado AB=DC por la hipótesi, y los ángulos BAD, ADC iguales por alternos, serán iguales: luego BD=AC, y el ángulo BDA=DAC; y siendo alternos, las rectas BD, AC serán paralelas: luego etc.

97. *En todo triángulo al mayor ángulo se opone el mayor lado.*

(Fig. 30.) Dem. Sea el ángulo BAC > C. Tiro la AD que forme el ángulo DAC=C. En el triángulo DAC, será DA=DC, por oponerse á ángulos iguales (92); pero AD+DB > AB, por ser AB linea recta, luego CD+DB ó CB > BA: luego etc.

98. *En todo triángulo al mayor lado se opone el mayor ángulo.*

Dem. Sea el lado BC > BA: el ángulo BAC no puede ser igual á C, porque entonces los lados BC y BA, opuestos á ángulos iguales, serán iguales, contra la hipótesi. Tampoco el ángulo BAC < C; pues el lado BC seria < BA, por oponerse al menor lado: luego si el ángulo BAC ni es igual ni es menor que C, es mayor que C: luego etc.

99. *Dos cuerdas iguales equidistan del centro.*

(Fig. 31.) Dem. Sean iguales las cuerdas AE, CD: bájoles desde el centro las perpendiculares OL, OI, y tiro los radios OC, OA. Los triángulos OCL, OAI, que tienen CL=AI por mitades de cuerdas iguales (54), OC=OA por radios, y son rectángulos, son iguales (88): luego OL=OI: luego etc.

100. *Dos cuerdas equidistantes del centro son iguales.*

Dem. Si OL=OI, tirando los radios OC, OA, los triángulos OAI, OLC, que tienen OC=OA por radios, OL=OI por hipótesi, y son rectángulos, serán iguales (88), y será AI=CL; pero estas son mitades de las cuerdas (54): luego las cuerdas son iguales: luego etc.

101. *La cuerda mayor dista menos del centro.*

Dem. Sea AB mayor que CD, será el arco AB mayor que CD: tomo sobre el arco AB, AE=CD, y tiro la cuerda AE: siendo iguales los arcos AE, CD, sus cuerdas serán iguales, y equidistarán del centro (99): luego OL=OI; pero OI es mayor que OG, y OG, oblicua con respecto á la AB, es mayor que la perpendicular OK: luego OL > OK: luego etc.

102. *La cuerda que dista menos del centro es mayor.*

Dem. Sea OK < OL. Si la cuerda AB fuese igual á CD, equidistarian del centro (99) contra la hipótesi. Si AB fuese menor que CD, distaria mas del centro (101) contra la hipótesi: luego AB, que no es igual, ni menor que CD, es mayor que ella: luego etc.

VII. *Medida de los ángulos en el círculo.*

103. Llámase *inscripto en el círculo* el ángulo, cuyo vértice está en la circunferencia, y cuyos lados son cuerdas del círculo.

104. *La medida del ángulo inscripto es la mitad del arco sobre que insiste.*

Dem. O uno de los lados pasa por el centro, ó el centro está entre los lados, ó fuera de ellos.

(Fig. 32.) Sea el ángulo inscripto GAD, cuyo lado AD pasa por el centro. Tiro el diámetro EF, paralelo á AG. Los ángulos GAD, ECD son iguales por correspondientes; pero el arco ED es medida del ángulo DCE: luego tambien lo es de DAG. El arco ED=FA, por medidas de los ángulos DCE, ACF, iguales por verticales; pero AF=EG por comprendidos entre paralelas (67): luego DE=EG: luego DE es mitad de DG:

luego el ángulo GAD tiene por medida la mitad del arco DG.

Sea el ángulo BAG, que tiene el centro entre sus lados; tiro el diámetro AD.

El ángulo BAD, que tiene el centro en su lado AD, tiene por medida la mitad del arco BD. El ángulo GAD, por la misma razon, tiene por medida la mitad del arco DG: luego el ángulo BAG, suma de los dos, tiene por medida $\frac{1}{2}$BD+$\frac{1}{2}$DG, ó $\frac{1}{2}$BG.

Sea el ángulo HAB, que tiene el centro fuera de sus lados. Tiro el diametro AD. La medida del ángulo HAD, que tiene el centro en su lado AD, es $\frac{1}{2}$HD: la del ángulo BAD, por la misma razon, es $\frac{1}{2}$BD: luego la del ángulo HAB, diferencia de los dos, es $\frac{1}{2}$HD—$\frac{1}{2}$BD, ó $\frac{1}{2}$HB: luego etc.

105. Consecuencias. 1.ª Se llama *ángulo del segmento* el que está formado por una tangente y una cuerda tirada al punto de contacto. Su medida es la mitad del arco que subtende la cuerda. Porque sea TAB el ángulo del segmento; tiro el diámetro AD. La medida del ángulo recto (64) TAD es la mitad de la semicircunferencia ABD. La medida del ángulo inscripto BAD es $\frac{1}{2}$BD (104): luego la del ángulo TAB, diferencia de los dos, es $\frac{1}{2}$ABD—$\frac{1}{2}$BD, ó $\frac{1}{2}$AB: luego etc.

106. 2.ª El ángulo inscripto en el semicírculo es recto; pues su medida será la mitad de la semicircunferencia (104). El ángulo inscripto sobre un arco, mayor que la semicircunferencia, es obtuso, pues su medida será mayor que la mitad de la semicircunferencia. El ángulo inscripto sobre un arco menor que la semicircunferencia es agudo, pues su medida será menor que la mitad de la semicircunferencia.

107. 3.ª Los ángulos inscriptos, que insisten sobre un mismo arco, son iguales, pues todos tienen por medida la mitad de dicho arco.

108. 4.ª El ángulo inscripto es la mitad del central, cuando ambos insisten sobre un mismo arco; pues

el inscripto tiene por medida la mitad del arco, y el central todo el arco.

109. Problemas. 1.º *Levantar una perpendicular en el estremo de una recta sin prolongarla.*

(Fig. 33.) Sea A el punto donde se quiere levantar una perpendicular á la AB. Desde un punto cualquiera C hago centro con el radio CA, y describo un círculo que cortará á AB en A y en B. Tiro el diámetro BD y por su estremo D la cuerda DA, que será perpendicular á AB, porque el ángulo DAB inscripto en el semicírculo es recto (106).

110. 2.º *Desde un punto dado fuera de un círculo tirarle una tangente.*

(Fig. 34.) Sea C el círculo, y D el punto dado. Desde D al centro del círculo tiro la DC; y haciendo centro en su punto medio con un radio igual á su mitad, describo un círculo que cortará al dado en los puntos B y A: tirando á ellos las rectas DB, DA, estas serán tangentes al círculo C; porque tirando los radios CA, CB, los ángulos DBC, DAC, que insisten sobre el diámetro DC, serán rectos (106): luego las rectas BD, DA son perpendiculares á los radios CB, CA en sus estremos; luego serán tangentes al círculo C (64).

111. 3.º *Sobre una recta dada construir un arco de círculo tal, que cualquier ángulo inscripto en él sea igual á un ángulo dado.*

Sea BE la recta dada, y A el ángulo dado. Formo en el punto E el ángulo BER=A. En la mitad de BE levántole la perpendicular GC: en el punto E levanto la EC perpendicular á ER. En el punto C de concurso de estas dos perpendiculares hago centro, y con el radio CE describo un círculo que pasará por B, porque el punto C, que está en la CG, perpendicular á BG en su mitad, debe equidistar de los estremos de la BE: luego el círculo que pasa por E, debe pasar por B. Tambien la ER debe ser tangente al círculo, por ser perpendicular al radio CE en su estremo (64): sentado esto, digo que cualquier ángulo inscripto en el arco BE, como BOE, es igual al ángulo A.

Dem. El ángulo BOE tiene por medida la mitad del arco BE, por ser inscripto (104); pero el ángulo BER, por ser del segmento (105), tiene por medida la mitad del mismo arco: luego los ángulos BOE, BER son iguales; pero BER=A por construccion: luego BOE=A: luego etc.

VIII. *Líneas proporcionales y triángulos semejantes.*

112. *Si sobre una recta se toman partes iguales, y por los puntos de division se tiran rectas paralelas entre sí, que terminen en otra recta cualquiera, interceptarán en esta partes iguales.*

(Fig. 35.) Dem. Sobre la recta *AH* tómense las partes iguales *AB*, *BC*, *CD*,.... y tírense las paralelas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*.... que terminen en la *ah*: digo que las partes *ab*, *bc*, *cd*...... serán iguales. Para demostrarlo, por los puntos *a*, *b*, *c*.... tiro *ai*, *bl*, *cm*.... paralelas á AH, como *ai*=*AB*, *bl*=*BC*, *cm*=*CD* por paralelas entre paralelas (94), siendo AB=BC=CD, será *ai*=*bl*=*cm*: y los triángulos *aib*, *blc*, *cmd*..... tienen un lado igual, los ángulos en *a*, *b*, *c* iguales por correspondientes, y los ángulos en *b*, *c*, *d* iguales por correspondientes: luego son iguales (78): luego *ab*=*bc*=*cd*: luego etc.

113. *Si tres paralelas cortan á dos rectas, las cortan en partes proporcionales.*

(Fig. 36.) Dem. Si á las rectas AH, *ah* las cortan las paralelas A*a*, E*e*, H*h*, será $\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{EA}}=\frac{eh}{ea}$ ó componiendo (Arit. 51) $\frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{EA}}=\frac{ha}{ea}$. Puede suceder que las partes EH, EA sean conmensurables ó inconmensurables entre sí.

Si son conmensurables, tendrán una medida comun, que cabrá un número exacto de veces en EH y en EA, y tirando por los puntos de division paralelas á *Aa*, interceptarán en la *ah* partes iguales (112), de las cuales habrá tantas en *he* y *ea*, como veces cabe en

EH y EA su medida comun: luego la razon de *he* á *ea* será la misma que de HE á EA.

Si son inconmensurables, dividiendo la EA en cualquier número de partes iguales, y llevando una de ellas sobre la EH, ningun punto de division podrá caer en H, pues serian en este caso conmensurables las EH, EA. Sea pues I el punto de division mas cercano á H: tiro I*i* paralela á *Aa*, y como AE y EI son conmensurables, tendremos $\frac{EI}{EA}=\frac{ei}{ea}$. Pongo por EI su igual EH+HI, y por *ei*, *eh*+*hi*, y será $\frac{EH}{EA}+\frac{HI}{EA}=\frac{eh}{ea}+\frac{hi}{ea}$. HI y *hi* pueden ser cuan pequeñas se quieran, tomando mayor número de partes en la EA, lo que aproximará el punto I al punto H cuanto se quiera: luego si los dos miembros de la ecuacion son iguales en cualquier grado de aproximacion á sus límites, sus límites lo serán tambien, y por tanto $\frac{EH}{EA}=\frac{eh}{ea}$: luego etc.

114. *Si en un triángulo se tira una recta paralela á un lado, cortará los otros dos en partes proporcionales.*

Dem. Sea el triángulo AHC: si EB es paralela á HC, será $\frac{AE}{EH}=\frac{AB}{BC}$. Porque tirando por *A* la A*a* paralela á EB, y de cualquier tamaño, y tirando *ah* paralela á AC, y prolongando EB y HC hasta *ah*, por estar las dos rectas *AH*, *ah* cortadas por las tres paralelas *Aa*, *Ee*, *Hh*, será $\frac{AE}{EH}=\frac{ae}{eh}$; pero *ae*=AB, y *eh*=BC por paralelas entre paralelas (94): luego $\frac{AE}{EH}=\frac{AB}{BC}$: luego etc.

115. *Reciprocamente, si una recta corta proporcionalmente dos lados de un triángulo, es paralela al tercero.*

Dem. Si $\frac{AE}{EH}=\frac{AB}{BC}$, EB es paralela á HC; porque sino, lo seria á otra recta HL, y seria $\frac{EA}{EH}=\frac{AB}{BL}$ (114):

luego estas dos ecuaciones, que tienen los primeros miembros iguales, tendrán tambien iguales los segundos, y será $\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{BL}$: siendo en estos dos quebrados iguales los numeradores iguales, tambien lo serán los denominadores y BL=BC, el todo igual á la parte, lo que es imposible: luego HL no puede ser paralela á EB, ni otra alguna recta que no sea la HC: luego etc.

116. *Si á varias rectas, que salen de un punto, las cortan dos paralelas, las cortan en partes proporcionales.*

(Fig. 37.) Dem. Sean las rectas AB, AC, AD, AF, cortadas por las paralelas BF, *bf*. En el triángulo ABC, por ser *bc* paralela á BC (114), será $\frac{AB}{Ab}=\frac{AC}{Ac}$. En el triángulo ACD, por ser *cd* paralela á CD, será $\frac{AC}{Ac}=\frac{AD}{Ad}$: del mismo modo se prueba que $\frac{AD}{Ad}=\frac{AE}{Ae}$, y que $\frac{AE}{Ae}=\frac{AF}{Af}$: luego $\frac{AB}{Ab}=\frac{AC}{Ac}=\frac{AD}{Ad}=\frac{AE}{Ae}=\frac{AE}{Af}$: luego etc.

117. Problemas. 1.º *A tres rectas dadas, hallar una cuarta proporcional.*

(Fig. 38.) Sean las tres rectas, *m*, *n*, *p*. Formo el ángulo A. Tomo AE=*m*, AB=*n*, y tiro la EB: tomo AH=*p*, y tiro HC paralela á EB, será AC la cuarta proporcional; porque siendo EB paralela á HC, será $\frac{AE}{AB}=\frac{AH}{AC}$ ó $\frac{m}{n}=\frac{p}{AC}$.

118. 2.º *Dividir una recta en cualquier número de partes iguales.*

(Fig. 39.) Sea AH la recta dada. Tiro cualquier recta H*a*, y tomo sobre ella tantas partes iguales, como debe tener la recta dada. Desde *a*, á donde llega la última, tiro A*a*, y por los demas puntos de division tiro paralelas á A*a*. Estas paralelas, que dividen la H*a* en partes iguales, dividirán tambien la HA en el mismo número de partes iguales (112)

119. 3.º *Dividir una recta en partes proporcionales á las de otra recta dada.*

(Fig. 40.) Quiero dividir la recta AF en partes proporcionales á las de la recta *af*. Tiro por F la F*a*, y tomo sobre ella sucesivamente las partes de la *fa*: por el último punto *a* tiro la A*a*, y por los demas puntos de division sus paralelas, y dividirán la FA en partes proporcionales á las partes de F*a* ó de *fa* (114).

120. Dos triángulos son semejantes, cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales.

121. *Dos triángulos son semejantes*: 1.º *Si tienen dos ángulos del uno respectivamente iguales á dos ángulos del otro*; porque los terceros ángulos deberán ser tambien iguales (72).

122. 2.º *Si tienen sus lados respectivamente paralelos*; porque los ángulos formados de lados paralelos son iguales (51).

123. 3.º *Si tienen sus lados respectivamente perpendiculares.*

(Fig. 41.) Dem. Sean los dos triángulos ABC, DEF, cuyos lados son respectivamente perpendiculares, DE á BC, DF á AB, y EF á AC; digo que el ángulo A=F, B=D, y C=E. Porque tirando por A la AG paralela á EF, y la AH paralela á DF, la primera será perpendicular á AC, pues lo es su paralela EF, y por la misma razon AH será perpendicular á AB (44): luego los ángulos HAB y GAC son rectos é iguales; quitando la parte comun GAB, es HAG=BAC; pero HAG=DFE, porque sus lados son paralelos (51): luego el ángulo A=F: del mismo modo demostraré la igualdad de los otros ángulos: luego etc.

124. 4.º *Si tienen sus lados proporcionales.*

(Fig. 42.) Dem. Sea $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$; tomo AD = A'B', y tiro DE paralela á BC; será $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$; pero $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$: luego $\frac{AC}{AE}=\frac{AC}{A'C'}$: luego AE=A'C'. Tiro EF paralela á AB, y será $\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{BF}$: pero AE=A′C′, y BF= DE por paralelas entre paralelas: luego $\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{DE}$; pero $\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$: luego $\frac{BC}{DE}=\frac{BC}{B'C'}$: luego DE=B′C′: luego los triángulos ADE, A′B′C′, que tienen sus lados iguales (81), son iguales; pero ADE es semejante á ABC, porque tienen el ángulo A comun, y los ángulos en B y D iguales por correspondientes: luego ABC y A′B′C′ son semejantes: luego etc.

125. 5.° *Si tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.*

Dem. Sea el ángulo A=A′, y $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$. Coloco el triángulo A′B′C′ sobre ABC, de modo que se ajusten los ángulos iguales en A, y la base B′C′ venga á ser DE. Como por la hipótesi hay proporcion $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$, será DE paralela á BC (115), y los ángulos en D y B iguales por correspondientes: luego el triángulo ADE, ó A′B′C′ es semejante á ABC, pues tienen dos ángulos iguales: luego etc.

126 *Lados homólogos* son los que se oponen á iguales ángulos en los triángulos semejantes.

127. *Los triángulos semejantes tienen sus lados homólogos proporcionales.*

Dem. Sean semejantes los triángulos ABC, A′B′C′, será el ángulo A=A′, B=B′, C=C′. Coloco el triángulo A′B′C′ sobre ABC, de modo que el ángulo A′ coincida con su igual A, y el lado B′C′ caiga en la posicion DE; por ser el ángulo B′ ó D igual al de la misma posicion B, será DE (41) paralela á BC, y cortará proporcionalmente los lados AB, AC; luego $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$, ó $\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}$. Tiro por E la EF paralela á AB, y cortará proporcionalmente á AC y BC (114): luego $\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{BF}$.

ó por ser BF=DE por paralelas entre paralelas, será $\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$: luego etc.

128. *Las paralelas, que cortan á varias rectas, que salen de un mismo punto, estan cortadas por estas rectas en partes proporcionales.*

(Fig. 37.) Dem. Los triángulos ABC, Abc semejantes, por tener el ángulo en A comun y $B=b$ por correspondientes, dan (127) $\frac{AC}{Ac}=\frac{BC}{bc}$. Los triángulos CAD, C$ad$ semejantes por la misma razon, dan $\frac{AC}{Ac}=\frac{CD}{cd}$: luego por igualdad de los primeros miembros, $\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}$. Del mismo modo probaré que $\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}$, y $\frac{DE}{de}=\frac{EF}{ef}$: luego etc.

129. *Si dos rectas estan cortadas por tres paralelas equidistantes, lo estarán en su mitad, y la paralela media será igual á la semisuma de las otras dos.*

(Fig. 43.) Dem. Sea Ee la paralela media, la cual, pues divide en dos partes iguales á la distancia perpendicular entre las estremas, bisecará tambien las rectas AH y ah (112). Siendo semejantes los triángulos AEO, AHh, será (127) $\frac{AE}{AH}=\frac{Eo}{Hh}$; pero $AE=\frac{1}{2}AH$: luego $EO=\frac{1}{2}Hh$. Por la misma razon, siendo semejantes los triángulos hAa, hOe, será $\frac{he}{ha}=\frac{Oe}{Aa}$; pero $he=\frac{1}{2}ha$: luego $Oe=\frac{1}{2}Aa$: luego Ee, que es la suma de EO y Oe, será $\frac{1}{2}Hh+\frac{1}{2}Aa$: luego etc.

130. *Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular sobre la hipotenusa, quedará el triángulo dividido en dos semejantes al total, y semejantes entre sí.*

(Fig. 27.) Dem. Sea el triángulo rectángulo ABC. Bajo AD perpendicular sobre la hipotenusa: el triángulo BAD es semejante al total BAC, porque tienen el ángulo B comun, y los ángulos en D y A iguales por rectos (121): por la misma razon el triángulo CAD es semejante al total: luego todos tres son semejantes: luego etc.

131. Consecuencias. 1.ª *La perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa, es media proporcional entre los segmentos de esta;* porque los triángulos semejantes BAD, DAC tendrán sus lados homólogos proporcionales, y darán $\frac{BD}{DA}=\frac{DA}{DC}$, ó $DA^2=BD \times DC$.

132. 2.º *Cada lado del ángulo recto es medio proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento que le corresponde;* porque los triángulos semejantes BAD, BAC dan $\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}$, ó $AB^2=BC \times BD$. Tambien en los triángulos semejantes CAD, CAB se tiene $\frac{CD}{AC}=\frac{AC}{BC}$, ó $AC^2=BC \times CD$.

133. 3.ª *El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados.* Porque siendo $AB^2=BC \times BD$ y $AC^2=BC \times CD$, sumando será $AB^2+AC^2=BC \times BD+BC \times CD=BC(BD+CD)=BC \times BC=BC^2$. Esta famosa proposicion es la 47 del libro 1.º de los elementos de Euclides, y la mas clásica de toda la Geometría.

134. 4.ª *En el triángulo rectángulo, dados dos de sus tres lados, se puede determinar el que falta.* Porque sea a la hipotenusa, b y c los lados; será $a^2=b^2+c^2$, y en esta ecuacion, dadas dos de las tres cantidades a, b, c, se puede determinar la tercera.

135. 5.ª *El cuadrado del lado opuesto á un ángulo agudo en un triángulo es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados, menos dos veces el producto de uno de ellos por el segmento correspondiente al ángulo agudo; y el cuadrado del lado opuesto á un ángulo obtuso en un triángulo es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados, mas dos veces el pro-*

ducto de uno de ellos por el segmento correspondiente al ángulo obtuso.

(Fig. 44.) Dem. Sean A, B, C los ángulos del triángulo, y represento los lados opuestos con las letras minúsculas correspondientes a, b, c. Esto es, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

Sea el ángulo agudo A; bajo la perpendicular BD sobre el lado b, y hago el segmento $AD=x$; será $DC=b-x$. En los triángulos rectángulos BDC, ABD, tendremos (133) $BC^2=BD^2+b^2-2bx+x^2$ y $BD^2=c^2-x^2$: substituyendo por BD^2 su valor en la primera ecuacion, será $BC^2=b^2+c^2-2bx$: luego etc.

Sea el ángulo obtuso A: bajo la perpendicular BD sobre AC, que caerá fuera del triángulo (76): sea $AD=x$, será $CD=b+x$. En los triángulos rectángulos BDC, BDA, tendremos $a^2=BD^2+b^2+2bx+x^2$, y $BD^2=c^2-x^2$: substituyendo, como antes, será $a^2=b^2+c^2+2bx$: luego etc.

136. 6.ª *Dados los lados de un triángulo, es fácil determinar de qué especie son los ángulos opuestos;* pues si el cuadrado de un lado es igual á la suma de cuadrados de los otros dos, su ángulo opuesto será recto: si es menor que dicha suma, su ángulo opuesto será agudo; y si es mayor, obtuso (133, 135).

137. 7.ª *La perpendicular, bajada desde un punto de la circunferencia sobre el diámetro, es media proporcional entre los segmentos del diámetro, y la cuerda tirada al estremo del diámetro es media proporcional entre el diámetro y el segmento correspondiente:* porque el triángulo, que forma el diámetro con las dos cuerdas tiradas á sus estremos, es rectángulo, por ser recto el ángulo, que insiste sobre el semicírculo (106); pero en el triángulo rectángulo la perpendicular es media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa (131), y cada lado del ángulo recto es media proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente (132): luego etc.

138. *Si dos cuerdas se cortan en un círculo, el pro-*

ducto de las partes de la una es igual al producto de las partes de la otra.

(Fig. 45.) Dem. Sean las dos cuerdas BC, DE. Tiro las BE, CD: los triángulos ACD, ABE son semejantes, porque tienen los ángulos en A iguales por verticales, y el ángulo B=D, por inscriptos que insisten sobre un mismo arco CE (107): luego son semejantes, y sus lados proporcionales; y será $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$, ó $AB \times AC = AD \times AE$: luego etc.

139. *Si desde un punto tomado fuera de la circunferencia se le tiran dos secantes, cada una multiplicada por su parte esterna da el mismo producto.*

(Fig. 46.) Dem. Sean las dos secantes AC, AE. Tiro BC y DE. Los triángulos ABC, ADE tienen el ángulo A comun, y los ángulos C y E iguales, por inscriptos que insisten sobre un mismo arco BD (107): luego son semejantes, y sus lados proporcionales; y será $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$, ó $AC \times AD = AE \times AB$: luego etc.

140. *Si desde un punto dado fuera de la circunferencia se le tiran una secante y una tangente, la tangente será media proporcional entre la secante y la parte esterna.*

(Fig. 47.) Dem. Sea AE la secante, y AB la tangente. Tiro BE y BD. Los triángulos ABE, ABD tienen el ángulo A comun, y el ángulo E=ABD; pues ambos tienen por medida la mitad del arco BD, el primero por inscripto, y el segundo por formarse de una tangente y una cuerda (105): luego estos dos triángulos son semejantes, y sus lados proporcionales, esto es, $\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AD}$: luego $AB^2 = AD \times AE$: luego etc.

141. Prob. *Entre dos rectas dadas hallar una media proporcional.* (Fig. 48.)

Sean las dos rectas *m*, *n*. Tomo sobre una misma recta BA=*m*, AC=*n*. Sobre BC describo un semicírculo: levanto en A, AD perpendicular á BC, y será media proporcional entre los segmentos BA, AC del diámetro (137), ó entre las dos rectas dadas *m* y *n*.

142. Dividir una recta dada en media y estrema razon es dividirla en un punto tal, que la parte mayor sea media proporcional entre toda la recta y su parte menor.

143. *Dividir una recta en media y estrema razon.* (Fig. 49.) Sea la recta dada AC. En su estremo A levántole la perpendicular AD$=\frac{1}{2}$AC. Haciendo centro en D con el radio DA describo un círculo: tírole por el centro la secante CD: tomo su parte esterna CE sobre CA, y señalará el punto B, en que CA estará dividida en media y estrema razon.

Dem. Siendo CE′ secante y CA tangente, por ser perpendicular al estremo A del radio (64), será la tangente media proporcional entre la secante y el segmento esterno (140): luego $\frac{CE'}{CA}=\frac{CA}{CE}$: restando numeradores y denominadores, resultará un quebrado igual á cualquiera de estos (Arit. 24), como $\frac{CA}{CE}$: luego $\frac{CA}{CE}=\frac{CE'-CA}{CA-CE}$; pero CE′—CA=CE, por ser CA = al diámetro del círculo EE′, pues $\frac{1}{2}$CA es = á su radio, y CA—CE=AB: luego $\frac{CA}{CB}=\frac{CB}{AB}$: luego $CB^2=AC\times AB$: luego etc.

IX. *De los polígonos.*

144. *Polígono* es toda figura terminada por líneas rectas. *Cuadrilátero* es el polígono de 4 lados: *pentágono* el de 5: *exágono* el de 6: *octógono* el de 8: *decágono* el de 10: *pentedecágono* el de 15, etc.

145. *Diagonal* es toda recta tirada desde un ángulo á otro de una figura.

146. *Angulos salientes* son aquellos cuya abertura está hácia lo interior de una figura; y *ángulos entrantes* son aquellos, cuya abertura está hácia fuera de la figura.

147. *La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos.*

Dem. Tirando diagonales desde un ángulo á los opuestos, resultarán tantos triángulos, como lados tiene el polígono menos dos; porque todos los lados del polígono, menos los dos adyacentes al ángulo, serán bases de dichos triángulos. Los tres ángulos de cada triángulo valen dos rectos (71); pero los ángulos del polígono se componen de los ángulos de estos triángulos: luego etc.

148. *La suma de los ángulos esteriores de un polígono, que resultan prolongando todos sus lados en un mismo sentido, es igual á 4 rectos.*

Dem. Sea n el número de lados del polígono. Cada ángulo esterior con su interior suman dos rectos: luego la suma de los ángulos interiores y esteriores es $2R \times n$. La suma de los interiores se ha demostrado que es $=2R(n-2)=2Rn-4R$. Restando de la suma total, queda 4 rectos, suma de los esteriores: luego etc.

149. *Polígonos regulares* son los que tienen todos sus lados y ángulos iguales: *irregulares* los que no.

150. El valor de cada ángulo interior de un polígono regular se halla partiendo la suma de sus ángulos por el número de ellos; $\frac{2R(n-2)}{n}$ es la fórmula, que representa el valor de un ángulo interior de un polígono regular de n número de lados.

151. Los cuatro ángulos de un cuadrilátero valen 4 rectos; porque la fórmula $2R(n-2)$, siendo $n=4$, se convierte en $4R$.

152. El cuadrilátero que tiene dos lados paralelos, y los otros dos no, se llama *trapecio.*

153. *Paralelogramo* es el que tiene cada lado paralelo á su opuesto.

154. Si un cuadrilátero tiene cada lado igual á su opuesto, ó dos lados opuestos iguales y paralelos, es paralelogramo; porque en ambos casos los lados

opuestos son paralelos (95, 96).

155. En todo paralelogramo los lados opuestos son iguales, por paralelas entre paralelas (94).

156. En todo paralelogramo los ángulos opuestos son iguales, por suplementos de uno mismo, que es el inmediato á ambos (49).

157. Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, lo serán todos cuatro; porque el opuesto le es igual, y los adyacentes son sus suplementos.

158. *Rectángulo* es un paralelogramo, cuyos 4 ángulos son rectos.

159. *Las diagonales de un rectángulo son iguales.*

(Fig. 50.) Dem. Los triángulos ADC, BDC tienen los ángulos en D y C iguales por rectos, el lado DC comun, y el lado AD=BC por opuestos de un paralelogramo: luego son iguales, y AC=BD: luego etc.

160. *Cuadrado* es un rectángulo, cuyos cuatro lados son iguales.

161. *Rombo* es un paralelogramo, cuyos lados son iguales, sin ser rectos sus ángulos.

162. *En todo paralelogramo las diagonales se cortan en su mitad.*

(Fig. 29.) Dem. Sea el paralelogramo ADCB. Los triángulos AOC, BOD tienen los ángulos en *O* iguales por verticales: los ángulos CAO, ODB iguales por alternos; y el lado AC=BD por opuestos de un paralelogramo (155): luego son iguales, y AO=OD, y CO=OB: luego etc.

163. *En todo rombo las diagonales son perpendiculares entre sí, y bisecan los ángulos de donde salen.*

(Fig. 51.) Dem. Siendo AD=AB por lados del rombo, y OB=OD, porque la diagonal de un paralelogramo está dividida en su mitad por la otra, tiene la AOC dos puntos equidistantes de D y B: luego es perpendicular á DB.

Tambien siendo isósceles el triángulo DAB, la altura AO debe bisecar el ángulo vertical DAB: luego etc.

164. Cuando todos los lados de un polígono son

cuerdas de un círculo, se dice que el polígono está inscripto en el círculo, ó el círculo circunscripto al polígono.

165. Cuando todos los lados de un polígono son tangentes de un círculo, se dice que el polígono está circunscripto al círculo, ó el círculo inscripto en el polígono.

166. *Todo polígono regular puede inscribirse y circunscribirse en un círculo.* (Fig. 52.)

Dem. Sea regular el polígono ABCDEF. Divido en dos partes iguales los ángulos en A y B con las rectas AO, BO, que se encontrarán en O: tiro la OC y digo que esta será igual á OA y OB, y dividirá por medio el ángulo en C; porque el triángulo OAB es isósceles (92), por ser los ángulos OAB, OBA iguales por mitades de los ángulos iguales del polígono. Ademas, el triángulo OBC es igual á OAB, por tener el lado OB comun, BC=BA por lados de un polígono regular, y los ángulos comprendidos OBA, OBC iguales por construccion (77): luego el triángulo BOC es tambien isósceles, y por tanto OC=OB, y el ángulo OCB=OBC es tambien mitad del ángulo del polígono. Del mismo modo demostraremos que OD, OE, OF son iguales á OA, y dividen por medio el ángulo del polígono: luego haciendo centro en O con el radio OA, la circunferencia que se describa pasará por todos los vértices del polígono; y por tanto este quedará inscripto en ella.

Tambien, si desde O bajo la OG perpendicular al lado del polígono, lo dividirá por medio (54), y haciendo centro desde O con el radio OG, la circunferencia que se describa, pasará por los puntos medios de los lados del polígono; porque siendo estos cuerdas iguales del círculo circunscripto, deben equidistar del centro (99); y como en dichos puntos medios son los lados del polígono perpendiculares á los radios, serán tangentes á la circunferencia (64), y quedará el polígono circunscripto á ella: luego etc.

167. Llámase *centro de un polígono regular* el cen-

tro de sus círculos inscripto y circunscripto. *Radios oblícuos* del polígono son las rectas tiradas desde el centro á los ángulos, y deben dividirlos por medio.

168. Para circunscribir un círculo á un polígono regular dado, tírense dos radios oblícuos, dividiendo por medio dos ángulos contiguos. El punto de su encuentro será el centro. Haciendo centro en él con el radio oblícuo, se tendrá la circunferencia circunscripta al polígono.

169. Para inscribir un círculo en un polígono dado, tiro dos apotecmas, levantando dos perpendiculares en las mitades de dos lados contiguos; el punto de su encuentro será el centro. Haciendo centro en él con la apotecma, tendré la circunferencia inscripta.

170. *Angulo del centro* del polígono es el formado por dos radios oblícuos contiguos. Su medida debe ser el arco (15) que subtende el lado del polígono en el círculo cincunscripto. Este arco es igual á toda la circunferencia, ó 4 rectos, dividida por el número de lados.

171. Problemas. 1.º *Dado un círculo y un polígono regular inscripto en él, circunscribirle otro polígono del mismo número de lados.*

Tírense tangentes en los puntos medios de los arcos, que subtenden los lados del polígono inscripto; y estas tangentes formarán el polígono circunscripto.

(Fig. 53.) Dem. Sea el polígono inscripto ABCD. Las tangentes *ab*, *bc*, *cd etc.* por ser perpendiculares á los radios, *og*, *oi* (63) etc. son paralelas á los lados del polígono inscripto (39), forman ángulos iguales á los de este (51); y por consiguiente iguales entre sí. Ademas, los triángulos GOB, BOI, iguales, por ser rectángulos, y ser OB comun y OG=OI por apotecmas (88) son iguales; luego el ángulo GOB=BOI, y el ángulo GOI está dividido en su mitad por la OB. Tambien los triángulos *g*O*b*, *b*O*i*, tienen, además de ser rectángulos, O*b* comun, y O*g*=O*i*: luego son iguales: luego la *b*O divide tambien por mitad el ángulo GOI, y por tanto cae sobre la OB: luego las dos tangentes *ab*, *bc* se encuentran en la prolongacion del radio OB. Los triángulos semejantes OBA, O*ba* dan $\frac{OB}{Ob}=\frac{BA}{ba}$; los triángulos semejantes OBC, O*bc* dan $\frac{OB}{Ob}=\frac{BC}{bc}$: luego por ser los primeros miembros iguales, $\frac{BA}{ba}=\frac{BC}{bc}$; pero BA=BC: luego *ba*=*bc*. Lo mismo se probará de los demas lados del polígono circunscripto *abcd;* y siendo sus ángulos iguales, se infiere que es regular.

172. Pudiera circunscribirse el polígono pedido tirando tangentes en los vértices del polígono inscripto, el polígono formado de estas tangentes seria regular, por la igualdad de los triángulos formados sobre los lados del inscripto: igualdad fácil de demostrar.

173. 2.º *Dado un círculo y un polígono circunscripto á él, inscribirle otro del mismo número de lados.*

Tiro los radios oblícuos del polígono circunscripto, y los puntos en que corten la circunferencia, serán los vértices del inscripto; porque se ha demostrado (171), que el centro y cada dos vértices correspondientes del polígono inscripto y del circunscripto deben estar en una misma recta.

174. 3.º *En un círculo dado inscribir un exágono regular.*

Llévese el radio como cuerda sobre la circunferencia, y la dividirá en 6 partes iguales; porque el lado del exágono regular es igual al radio del círculo circunscripto.

(Fig. 52.) Dem. Sea FE el lado del exágono regular inscripto: tirando los radios OF, OE, será el ángulo del centro $O=\frac{4R}{6}=\frac{2}{3}R$; y como los tres ángulos de un triángulo valen dos rectos, la suma de los ángulos OFE, OEF será $=2R-\frac{2}{3}R=\frac{4}{3}R$; y como estos dos ángulos son iguales, por ser isósceles el triángulo OFE, cada uno vale $\frac{2}{3}R$, y es igual al ángulo O: lue-

:

go el triángulo OFE es equiángulo, y por tanto equilátero: luego FE=OF: luego etc.

175. 4.º *Inscribir en un círculo dado un triángulo equilátero.*

Inscríbase en dicho círculo un exágono regular, y tomando arcos dobles de los que subtenden sus lados, las cuerdas de estos arcos formarán un triángulo equilátero; porque siendo iguales dichos arcos dobles, lo serán sus cuerdas.

176. Para hallar el valor del lado FD del triángulo equilátero inscripto, tiro los radios OF, OD, que siendo iguales á los lados DE, EF del exágono regular inscripto, forman con ellos un rombo, y sus diagonales DF, OE se cortan perpendicularmente. En el triángulo rectángulo DIO, es $DI=\sqrt{(DO^2-OI^2)}$; pero $OI=\frac{1}{2}OE=\frac{1}{2}OD$: luego $DI=\sqrt{\frac{3}{4}DO^2}=\frac{1}{2}DO\sqrt{3}$: luego su doble $DF=DO\sqrt{3}$: luego el lado del triángulo equilátero inscripto es inconmensurable con el radio.

177. 5.º *Inscribir en un círculo dado un cuadrado.*

Tírense dos diámetros perpendiculares, y tírense cuerdas por sus estremos, y formarán el cuadrado. (Fig. 53.)

178. El lado del cuadrado inscripto AD se halla en el triángulo rectángulo ADC en que $AD^2+DC^2=AC^2$; pero $DC=AD$: luego $2AD^2=AC^2=4AO^2$: luego $AD^2=2AO^2$, y $AD=AO\sqrt{2}$: luego el lado del cuadrado es inconmensurable con el radio del círculo.

179. El lado del cuadrado es inconmensurable con su diagonal; porque esta es el diámetro del círculo circunscripto, y si el lado del cuadrado inscripto es inconmensurable con el radio del círculo, lo será tambien con el diámetro.

180. 6.º *En un círculo dado inscribir un decágono regular.*

Divídase el radio en media y estrema razon, y su segmento mayor será el lado del decágono regular inscripto.

(Fig. 54.) Dem. Sea AB el lado del decágono regular inscripto. Tiro los radios OA, OB, y la BC, que divida por medio el ángulo OBA. El ángulo $O=\frac{4}{10}R=\frac{2}{5}R$: luego $OBA+OAB=2R-\frac{2}{5}R=\frac{8}{5}R$, y como son iguales, será cada uno $=\frac{4}{5}R$: luego el ángulo $ABC=\frac{2}{5}R=O$: luego los triángulos AOB, ABC tienen el ángulo A comun y el ángulo $ABC=O$: luego son semejantes, y si AOB es isósceles, tambien lo es ABC, y por consiguiente $AB=BC$; tambien es isósceles el triángulo OCB por ser el ángulo $OBC=O$: luego $BC=CO$, y por tanto $AB=CO$. Los triángulos semejantes OAB, ABC dan $\frac{OA}{AB}=\frac{AB}{AC}$, ó poniendo por AB, su igual CO, $\frac{OA}{CO}=\frac{CO}{AC}$: luego el radio OA está dividido en C en media y estrema razon; y su segmento mayor OC es igual al lado del decágono regular inscripto: luego etc.

181. *El lado del decágono regular es inconmensurable con el radio.*

Dem. Sea el radio r, x el lado del decágono regular inscripto, que será el segmento mayor del radio dividido en media y estrema razon (180): luego el segmento menor será $r-x$, y se tendrá $\frac{r}{x}=\frac{x}{r-x}$ (142), de donde $x^2=r^2-rx$, $x^2+rx=r^2$, $x=-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{5}{4}r^2}=\frac{1}{2}r(-1\pm\sqrt{5})$. Tomando el signo $-$, saldria x negativo y mayor que el radio: luego se debe tomar el signo $+$ y será $x=\frac{1}{2}r(-1+\sqrt{5})$; espresion en la cual x es inconmensurable con r: luego etc.

182. Para inscribir el pentágono regular en un círculo, se inscribe primero el decágono, y se tiran despues las cuerdas de los arcos dobles. Estas formarán el pentágono regular inscripto.

183. Como los lados del exágono, y del decágono inscripto subtenden arcos, que son la 6.ª y 10.ª parte de la circunferencia, la diferencia de estos arcos, esto es, $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$, dará el lado del pentedecágono inscripto.

184. 7.º *Dado un círculo y un polígono regular inscripto en él, inscribirle otro polígono regular de doble número de lados.*

Divídanse por medio los arcos del polígono ya inscripto, y sus cuerdas formarán el polígono inscripto de doble número de lados.

185. Se sabe, pues, inscribir en el círculo los polígonos, cuyos números de lados estan representados por 3×2^n, 4×2^n, 5×2^n, y 15×2^n. Los demas polígonos se inscriben comunmente dividiendo por tanteo la circunferencia en tantas partes iguales como lados debe tener el polígono; aunque hay algunos, que la geometría inscribe con exactitud por medios, cuya esplicacion no tiene lugar en un tratado elemental.

X. *De las figuras semejantes y de la circunferencia.*

186. Dos polígonos son semejantes, cuando las diagonales, tiradas desde ángulos homólogos, los dividen en triángulos colocados en un mismo órden, y respectivamente semejantes.

187. Prob. *Construir sobre una recta dada un polígono semejante á otro dado.*

(Fig. 55.) Sea la recta dada *ab*, homóloga de AB. Tiro las diagonales AC, AD, AE. Construyo sobre *ab* un triángulo *t* semejante á T, haciendo los ángulos *cab*, *cba* iguales respectivamente á CAB, CBA (121). Construyo sobre *ac* el triángulo t', semejante á T'; y sobre *ad* el triángulo t'' semejante á T'', y sobre *ae*, t''' semejante á T''': la figura *abcdef* será semejante ABCDEF, porque los triángulos parciales de la una son semejantes á los parciales de la otra.

188. *Dos figuras semejantes tienen sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales.*

Dem. Sean semejantes las figuras ABCDEF, *abcdef*. Por ser semejantes los triángulos T y *t* sus lados serán proporcionales; y por tanto $\frac{BC}{bc}=\frac{CA}{ca}$; por ser semejantes los triángulos T' y t', será $\frac{CA}{ca}=\frac{CD}{cd}$; y por igualdad de razones $\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}$. Del mismo modo se demuestra la proporcionalidad de los demas lados. Tambien por ser semejantes los triángulos T y t, será el ángulo $BCA=bca$: por ser semejantes T' y t', será el ángulo $ACD=acd$: sumando estas dos ecuaciones, será $BCD=bcd$: del mismo modo se demuestra la igualdad de los demas ángulos: luego etc.

189. *Si dos figuras tienen sus lados proporcionales y sus ángulos iguales, son semejantes.*

Dem. Los triángulos T y t son semejantes (125), por ser el ángulo $B=b$ por la hipótesi, y los lados que lo comprenden proporcionales, tambien por la hipótesi: luego será el ángulo $BCA=bca$: restándolos de BCD y bcd iguales por la hipótesi, será $ACD=acd$. Tambien por ser T y t semejantes es $\frac{BC}{bc}=\frac{AC}{ac}$; pero $\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}$ por la hipótesi: luego $\frac{AC}{ac}=\frac{CD}{cd}$: luego los triángulos T' y t' tienen iguales los ángulos en C, y comprendidos por lados proporcionales: luego son semejantes. Del mismo modo se demuestra la semejanza de los demas triángulos: luego estas dos figuras, que tienen semejantes sus triángulos parciales, son semejantes: luego etc.

190. *Los polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes.*

Dem. Por ser regulares, los lados de cada uno serán iguales entre sí: luego la razon de un lado del uno al homólogo del otro será siempre la misma. Tambien por tener un mismo número de lados, el valor de cada ángulo será igual en ámbos polígonos; luego tendrán sus lados proporcionales y sus ángulos iguales: luego etc.

191. Llámanse *líneas homólogas* en dos polígonos semejantes las que forman ángulos iguales con los lados homólogos, y los dividen en partes proporcionales.

192. *Las líneas homólogas de dos polígonos semejantes son proporcionales á sus lados.*

(Fig. 56.) Sean las dos figuras semejantes ABCDEF y *abcdef*, y las líneas homológas HG, *hg*, de modo que GHC=*ghc* y $\frac{BC}{bc}=\frac{CH}{ch}$: los triángulos CED, *ced*, son semejantes. Tambien lo son FCE, *fce*. Tambien lo son FCH, *fch*, por tener el ángulo FCH=*fch*, por tener el ángulo FCH=*fch*, por diferencias de ángulos iguales, y por ser $\frac{FC}{fc}=\frac{CB}{cb}=\frac{CH}{ch}$. Tambien lo son GHF=*ghf*, porque los ángulos en H y F, *h* y *f* son diferencias de ángulos iguales: luego $\frac{GH}{gh}=\frac{HF}{hf}=\frac{HC}{hc}=\frac{BC}{bc}$: luego etc.

193. Se llama *perímetro* en una figura á la suma de sus lados.

194. *Los perímetros de los polígonos semejantes son proporcionales á sus líneas homólogas.*

(Fig. 55.) Dem. Por ser semejantes los polígonos ABCDEF, *abcdef*, será $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{ED}{ed}$(188). Sumando numeradores y denominadores, resultará una fraccion igual á cualquiera de ellas: luego $\frac{AB+BC+CD+-}{ab+bc+cd+-}=\frac{AB}{ab}$; pero la razon de dos lados homólogos AB, y *ab* es igual á la de dos cualesquiera dimensiones homólogas: luego etc.

195. *Los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados son como sus radios rectos ú oblícuos.*

(Fig. 57.) Dem. Sean ABCD, *abcd* dos polígonos regulares de un mismo número de lados; O, *o* sus centros, AO, *ao* sus radios oblícuos; OI, *oi*, sus radios rectos. El ángulo DAB=*dab*, porque ambos polígonos son semejantes (188): luego sus mitades (166) OAI, *oai* son iguales, y siendo iguales por rectos los ángulos AIO, *aio*, los dos triángulos OAI, *oai* son semejantes, y tendremos $\frac{AI}{ai}=\frac{AO}{ao}=\frac{OI}{oi}$; pero $\frac{AI}{ai}=\frac{2AI}{2ai}=\frac{AB}{ab}$: luego $\frac{AB}{ab}=\frac{AO}{ao}=\frac{OI}{oi}$; pero los perímetros de estos dos polígonos semejantes (194) son como sus lados AB, *ab*: luego etc.

196. *El círculo es el límite de todos los polígonos que se le pueden inscribir y circunscribir.*

(Fig. 58.) Dem. Sea *abcd* un polígono regular inscripto en el círculo: inscribo (184) el de doble número de lados: siendo $aN+Nb>ab$, tendrá el nuevo polígono mayor perímetro; tambien comprende mas espacio, pues sobre cada lado tiene de mas un triángulo igual á aNb; pero nunca podrá llegar á igualarse con el círculo, porque toda cuerda es menor que el arco, y siempre queda entre ambos algun espacio: luego doblando indefinidamente el número de lados del polígono inscripto, este aumentará en perímetro y espacio, y se acercará á la circunferencia cuanto se quiera; mas nunca podrá igualarse con ella.

Circunscribo un polígono regular del mismo número de lados que *abcd*, tirando tangentes en las mitades de los arcos (171), y otro del mismo número de lados que *aNbQdTcLa*, tirando tangentes por sus vértices (172). El primero comprende mas espacio que el segundo, pues en cada esquina tiene de mas un triángulo igual á AKM. Tambien tiene mas perímetro; pues tirando la LQ, el contorno convexo LABQ > LKMOPQ, y LDCQ > LHGSRQ (4). Sumando estas dos desigualdades será el perímetro del primer polígono mayor que el del segundo: luego doblando indefinidamente el número de lados de un polígono circunscripto, disminuye este en espacio y perímetro; pero siempre es mayor en uno y en otro que el círculo, porque las tangentes no se pueden confundir con los arcos, y siempre ha de quedar algun espacio entre dos tangentes y el arco que interceptan, y tambien la suma de estas dos tangentes es mayor que el arco, porque se aparta mas de la cuerda: luego etc.

197. *Las circunferencias son como sus radios.*

Dem. Sean C y c dos circunferencias: Z y z los escesos de los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados circunscriptos á ellas: dichos perímetros serán $C+Z$ y $c+z$. Sean R y r los radios de dichas circunferencias. Por ser los polígonos de un mismo número de lados, serán sus perímetros como los radios rectos R y r (195); y tendremos $\frac{C+Z}{c+z}=\frac{R}{r}$, ó despejando de quebrados, $Cr+Zr=cR+zR$. Cr y cR son invariables: Z y z son disminuibles á voluntad; pues mientras mas se doble el número de lados de los polígonos circunscriptos, menores serán sus escesos Z y z sobre las circunferencias: luego si hay ecuacion entre las variables, la habrá entre sus límites, y $Cr=cR$, ó formando de estos productos iguales una proporcion, será $\frac{C}{c}=\frac{R}{r}$: luego etc.

198. Sea p la circunferencia de un círculo, cuyo diámetro es 1, ó la relacion de todo diámetro á su circunferencia. Para hallar el valor de la circunferencia, cuyo radio es R, ó cuyo diámetro es 2R, diré: el diámetro 1 es á su circunferencia p como el diámetro 2R es á su circunferencia $C=2pR$. Y si dada la circunferencia se pide el radio, su valor $R=\frac{C}{2p}$.

199. *Determinar la relacion del diámetro á la circunferencia.*

Para resolver este problema, han empezado los matemáticos por resolver este otro: conocido el lado de un polígono regular inscripto, hallar el lado del circunscripto del mismo número de lados, y el del inscripto de doble número de lados.

(Fig. 58.) Sea $ab=a$ el lado del polígono inscripto dado. Sea su distancia OI al centro $=z$. Sea el lado AB del polígono circunscripto del mismo número de lados $=y$; y el lado aN del polígono inscripto de doble número de lados $=x$. El radio ON=R.

IO ó z se determina en el triángulo rectángulo aIo, donde $IO = \sqrt{aO^2 - aI^2}$ (134), ó $z = \sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}a^2)}$.

Conocida la z, para determinar la AB, ó y, en los triángulos semejantes NOB, IOb tenemos $\frac{NO}{IO} = \frac{OB}{ob}$; pero $\frac{OB}{ob} = \frac{AB}{ab}$ (195): luego $\frac{AB}{ab} = \frac{NO}{IO}$, ó $\frac{y}{a} = \frac{R}{z}$; de donde $y = \frac{Ra}{z}$.

Ultimamente el lado aN del polígono inscripto de doble número de lados es hipotenusa del triángulo rectángulo aNI, en el cual $aI = \frac{1}{2}a$, $NI = R - z$: luego $AN = \sqrt{(aI^2 + NI^2)}$, ó $x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + R^2 - 2Rz + z^2)}$. Pero como $z^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2$, será $x = \sqrt{(2R^2 - 2Rz)}$.

Conocido, pues, el lado del exágono regular inscripto en el círculo, que es igual á su radio, buscando primero el valor correspondiente de z, y despues los de y y x se tendrá el lado del exágono circunscripto, y el del polígono de 12 lados inscripto.

Hago este lado $=a$, y busco por las mismas fórmulas el valor del lado del polígono de 12 lados circunscripto y del de 24 lados inscripto; despues el lado del polígono de 24 lados circunscripto, y el lado del polígono de 48 lados inscripto: esta operacion puede continuarse indefinidamente.

Si hacemos el diámetro igual á 1, y por tanto el radio $=\frac{1}{2}$, los cálculos para determinar los lados de los polígonos, siendo estracciones de raices cuadradas inexactas, son cálculos de aproximacion. Fíjese, pues, el número de notas decimales de esta aproximacion; y cuando se determinan los lados del polígono inscripto y circunscripto, determínense sus perímetros, multiplicando el valor del lado por el número de lados. Como en cada operacion se dobla el número de lados de dichos polígonos, se van acercando á la circunferencia, y entre sí, y va siendo menor su diferencia: luego cuando los perímetros lleguen á ser iguales en las notas de la aproximacion, esto indica que la diferencia del perímetro inscripto al circunscripto es entonces menor que la última clase de la aproximacion, y con mas razon la diferencia de uno de ellos á la circunferencia, que está entre ambos: luego el valor, que entonces tenga cada uno de dichos perímetros, será el valor de la circunferencia en el grado de aproximacion pedido; y como el diámetro es 1, dicho valor será la relacion del diámetro á la circunferencia, ó el valor de p.

Arquimedes lo halló de $\frac{22}{7}$: Mecio de $\frac{355}{113}$: los modernos de 3,14159 etc. hasta 140 decimales.

SUPERFICIES.

XI. *Areas de los polígonos y del círculo.*

200. *Area* es la estension comprendida entre las líneas que terminan una figura. *Areas equivalentes* son las que comprenden igual espacio, aunque no pueden coincidir por ser de diferente figura.

201. Medir una área es ver cuántas veces cabe en ella otra área conocida, que se toma por unidad. Comunmente se toma por unidad para medir las áreas un cuadrado, cuyo lado sea igual á la unidad lineal.

202. *Dos rectángulos de igual base y altura son iguales.*

(Fig. 59.) Dem. Sean los rectángulos ADFE, *adfe*, y sea AD=*ad*, DF=*df*. Sobreponiendo el segundo sobre el primero, de modo que coincidan sus bases iguales AD, *ad*, por ser el ángulo D=*d* por rectos, caerá la DF sobre *df* (11), y siendo iguales, el punto *f* caerá sobre F. Del mismo modo se demuestra la coincidencia de los demas lados y ángulos: luego etc.

203. *Todo paralelógramo es equivalente á un rectángulo de igual base y altura.*

(Fig. 60.) Dem. Sea el paralelógramo ADCB y el rectángulo ADFE, que tienen la misma base AD; y teniendo igual altura, sus bases superiores BC, EF deben estar en una misma recta paralela á AD. Los triángulos ABE, DCF, que tienen AB=DC por paralelas entre paralelas, AE=DF por la misma razon, y el ángulo comprendido igual por ser sus lados paralelos, son iguales: restándolos sucesivamente de la figura total ADCE, los paralelógramos que quedan ADCB y ADFE son equivalentes: luego etc.

204. *Los paralelógramos de igual base y altura son equivalentes entre sí*; pues lo serán á los rectángulos de igual base y altura que ellos; y estos son iguales (202).

205. *Todo triángulo es la mitad de un paralelógramo de igual base y altura.*

(Fig. 29.) Dem. Sea el triángulo ABC. Tiro CD paralela á AB y BD paralela á AC. El paralelógramo ABDC tiene la misma base y altura que el triángulo, y es doble de él, porque los triángulos ABC, BCD, que tienen sus lados iguales, son iguales: luego etc.

206. Los triángulos de igual base y altura son equivalentes; pues lo son sus duplos, que son los paralelogramos de igual base y altura que los triángulos.

207. *Los triángulos formados sobre una misma base, y cuyos vértices estan en una misma paralela á dicha base, son equivalentes*; pues tienen igual base y altura.

208. *Los rectángulos de igual base son como sus alturas.* (Fig. 61).

Dem. Sean los rectángulos ABCD, *abcd*, cuyas bases AB, *ab* sean iguales. Si sus alturas son conmensurables, supongamos que la medida comun quepa *m* número de veces en BC, y *n* número de veces en *bc*, será $\frac{BC}{bc}=\frac{m}{n}$. Por los puntos de division tiro paralelas á las bases aB~~C~~ y *ab~~c~~*; y quedarán formados en el rectángulo ABCD *m* número de rectángulos parciales, y en el rectángulo *abcd* *n* número de rectángulos parciales: estos serán todos iguales (202); pues tendrán por base á AB ó ab, y por altura la medida comun: luego $\frac{ABCD}{abcd}=\frac{m}{n}$; por igualdad de razones será $\frac{ABCD}{abcd}=\frac{BC}{bc}$; es decir, los rectángulos en razon de las alturas.

Pero si las alturas son incomensurables, divido la BC en cualquier número de partes iguales, y llevo una de ellas sobre bc. Es evidente que ningun punto de division podrá caer en c, por ser inconmensurables BC y bc. Sea l el mas próximo al punto c, y concluyo el rectángulo $abli$. Este y ABCD tienen sus bases iguales y sus alturas conmensurables: serán pues como sus alturas: luego $\frac{abli}{ABCD}=\frac{bl}{BC}$. Pongo en lugar de $abli$, $abcd+clid$, y en lugar de bl, $bc+cl$, y es $\frac{abcd}{ABCD}+\frac{clid}{ABCD}=\frac{bc}{BC}+\frac{cl}{BC}$. Los dos primeros términos de ambos miembros son invariables; mas los segundos son incrementos disminuibles á voluntad; pues el punto l puede acercarse á c, aumentando el número de partes en que se divide la BC. Luego si hay ecuacion entre las variables, la hay entre sus límites, y es $\frac{abcd}{ABCD}=\frac{bc}{BC}$: luego etc.

209. *Los rectángulos son como los productos de sus bases por sus alturas.*

(Fig. 62.) Dem. Sean los rectángulos ABCD, $abcd$. Coloco $abcd$ sobre ABCD ajustando el ángulo recto a sobre A, y será el rectángulo ALKI$=abcd$. Prolongo IK hasta que corte en H la CB. Los rectángulos ALKI, ABHI que tienen la misma base AI, serán como sus alturas AL, AB: esto es $\frac{ALKI}{ABHI}=\frac{AL}{AB}$. Los rectángulos ABHI, ABCD, que tienen la misma base AB, son como sus alturas AI, AD: esto es, $\frac{ABHI}{ABCD}=\frac{AI}{AD}$. Multiplicando las dos ecuaciones, y suprimiendo ABHI, factor comun en numerador y denominador, será $\frac{\text{ALKI}}{\text{ABCD}} = \frac{\text{AL} \times \text{AI}}{\text{AB} \times \text{AD}}$: luego etc.

210. *El área de un rectángulo es igual á su base multiplicada por su altura.*

(Fig. 63.) Dem. Comparando el rectángulo ABCD con el cuadrado *abcd*, que se toma por unidad, serán entre sí como los productos de sus bases por sus alturas (209), esto es, $\frac{\text{ABCD}}{abcd} = \frac{\text{AB} \times \text{BC}}{ab \times bc}$: pero $ab=1$, y $bc=1$ (201), luego $\frac{\text{ABCD}}{abcd} = \text{AB} \times \text{BC}$, esto es, el rectángulo contiene al cuadrado las veces que indica el producto de su base por su altura: luego etc.

211. *El área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura*; pues es equivalente á la de un rectángulo de igual base y altura (203).

212. *El área de un triángulo es la mitad de su base por su altura*; pues es mitad de un paralelógramo de igual base y altura que él (205).

213. *El área de un cuadrado es el cuadrado de su lado*; pues siendo igual la base á la altura, el producto de las dos es el cuadrado de una de ellas.

214. El producto de dos líneas representa el área de un rectángulo formado sobre ellas. Una de las dos rectas, base ó altura del rectángulo, se llama *longitud* y la otra *latitud*; y de ambas se dice que son las dos *dimensiones* á que se reduce toda área. El cuadrado de una línea representa el cuadrado formado sobre ella; y por tanto todas las proposiciones demostradas acerca del producto de dos líneas y del cuadrado de una, quedan tambien demostradas de los rectángulos y cuadrados construidos con dichas líneas.

215. *El área de un trapecio es igual á su altura multiplicada por su base media.*

(Fig. 43.) Dem. Sea el trapecio AH*ha*. Si concebimos tirada la diagonal A*h*, quedará dividido en dos triángulos, cuyas áreas son (llamando A la altura del trapecio) A. $\frac{1}{2}$Hh, A. $\frac{1}{2}$Aa (212): luego el área del trapecio será A ($\frac{1}{2}$Hh+$\frac{1}{2}$Aa); pero la base media Ee es igual á la semisuma de las bases Hh y Aa (129): luego el área del trapecio es A × Ee: luego etc.

216. *El área de un polígono regular es igual á su perímetro multiplicado por la mitad de su apotecma.*

Dem. Tirando los radios oblícuos quedará dividido en tantos triángulos como lados tiene. El área de cada uno es el lado que le sirve de base multiplicado por la mitad de la apotecma, altura igual de todos: luego el área del polígono será la mitad de la apotecma (que es factor comun), multiplicada por la suma de los lados, que es el perímetro: luego etc.

217. *El área de un círculo es igual al radio multiplicado por la semicircunferencia.*

Dem. Circunscribo al círculo un polígono regular cualquiera. Sea S el área del círculo, x su diferencia á la del polígono: el área del polígono será S+x. Sea C la circunferencia, z su diferencia con el perímetro del polígono. Será C+z el perímetro del polígono. Sea R el radio del círculo, que servirá de apotecma al polígono circunscripto. Siendo el área de un polígono regular igual á su perímetro multiplicado por la mitad de la apotecma (216), será S+x=$\frac{1}{2}$CR+$\frac{1}{2}z$R. Los primeros términos S y $\frac{1}{2}$CR son invariables; x y z son disminuibles á voluntad, haciendo mayor el número de lados del polígono circunscripto: luego, si hay ecuacion entre las variables, debe haberla entre sus límites, y será S=$\frac{1}{2}$CR: luego etc.

218. La fórmula del área del círculo es pR². Porque siendo R el radio, la circunferencia es 2pR (198), la semicircunferencia es pR, que multiplicada por el radio, da pR², área del círculo.

219. *Hallar el área de un segtor.*

El segtor es á la área del círculo, como su arco á la circunferencia. Porque si el arco es conmensurable con la circunferencia, dividiendo uno y otro en partes iguales cada una á la mayor medida comun, tirando radios á los puntos de division, quedará el círculo y el segtor divididos en segtores parciales, que será fácil sobreponer, y que por consiguiente son iguales. El segtor total contendrá de estos segtores parciales tantos como divisiones hay en su arco, y el círculo contendrá tantos como divisiones hay en la circunferencia: luego el segtor será al círculo como el arco á la circunferencia.

Pero si el arco y la circunferencia son inconmensurables, divido esta en cualquier número de partes iguales, y llevando una de ellas sobre el arco, ningun punto de division podrá caer en su estremo; pues entonces seria conmensurable con la circunferencia contra la hipótesi: luego el último punto de division caerá fuera del arco, y tirando á él un radio, se tendrá un segtor conmensurable con el círculo, pues su arco lo es con la circunferencia.

Sea, pues, S el segtor propuesto: A el área del círculo: b el arco del segtor: C la circunferencia: z el esceso del segtor que termina en el último punto de division, sobre el propuesto: x el del arco correspondiente sobre el propuesto: será $S+z$ el segtor conmensurable, y $b+x$ su arco: será, pues, $\frac{s+z}{A}=\frac{b+x}{C}$, ó $SC+Cz=Ab+Ax$; pero x y z son disminuibles á voluntad, pues podemos dividir la circunferencia en mayor número de partes iguales: luego habrá ecuacion entre los límites, y será $SC=Ab$, ó $\frac{S}{A}=\frac{b}{C}$: luego etc.

De esta fórmula resulta $S=\frac{Ab}{C}$; pero $A=\frac{1}{2}CR$: luego $S=\frac{1}{2}Rb$; es decir, *el área de un segtor es igual á la mitad del radio multiplicado por la longitud del arco.*

Tambien, siendo $A=pR^2$, será $S=pR^2\times\frac{b}{C}$, ó llamando n á la fraccion $\frac{b}{C}$, que forma el arco partido por la circunferencia, $S=pR^2n$.

220. *Reducir una figura á otra que tenga un lado menos.*

(Fig. 64) Sea la figura ABDGFE. Tiro la diagonal AD, y por B su paralela BC que encuentre la GD prolongada en C, y tirando la AC, será la figura ABDGFE equivalente á ACGFE, que tiene un lado menos. Porque los triángulos ADC, ADB, que tienen la base comun AD, y sus vértices en la paralela BC, son equivalentes (207). Añadiéndoles sucesivamente la figura ADGFE, será ABDGFE=ACGFE.

221. *Reducir cualquier figura á triángulo.*

Redúzcase á otra que tenga un lado menos; esta á otra de un lado menos. Continuando esta operacion, se llegará á tener un triángulo equivalente á la figura dada.

222. *Reducir un triángulo á cuadrado.*

Busco una media proporcional entre su base B y la mitad de su altura A (141). Sea esta media proporcional x; será $x^2 = \frac{1}{2}AB$, y por tanto construyendo sobre ella un cuadrado, este será igual á $\frac{1}{2}AB$, que es la área del triángulo dado.

223. *Reducir cualquier figura á cuadrado.*

Redúzcase á triángulo, y este á cuadrado.

224. *Reducir un círculo á cuadrado.*

Búsquese una media proporcional entre su radio y la mitad de su circunferencia. El cuadrado construido sobre esta media proporcional será igual al radio multiplicado por la mitad de la circunferencia, que es el área del círculo (217). Para resolver este problema con exactitud, es preciso tener una recta igual á la circunferencia; y como esto no se ha conseguido sino por aproximacion (199), tampoco se ha podido resolver sino aproximadamente el problema de la cuadratura del círculo.

225. *Hallar el área de un segmento circular.*

Tírense dos radios á sus estremos, y búsquese el área del segtor que encierran estos dos radios y el arco. Réstese de esta área la del triángulo, que forman los dos radios y la cuerda, y se tiene el área del segmento.

(Fig. 65.) Sea, pues, ACB el segmento: su arco ACB$=a$, y el radio $=$R. Bajo la perpendicular BD sobre el radio AO. El área del segtor ACBO es $\frac{1}{2}Ra$, y el área del triángulo AOB, es $\frac{1}{2}AO\times BD$, ó $\frac{1}{2}R\times BD$: luego el área del segmento será $\frac{1}{2}R(a-BD)$: luego *el área de un segmento, menor que el semicírculo, es igual á la mitad del radio multiplicada por la diferencia entre la longitud del arco y la perpendicular bajada desde un estremo suyo, sobre el radio que pasa por el otro estremo.*

Si el segmento es mayor que el semicírculo, se deberá agregar al segtor el triángulo, y por tanto la diferencia entre el arco y la perpendicular se convertirá entonces en suma.

226. *Hallar el área de un polígono irregular.*

Divídase en triángulos: búsquese el área de cada uno, y la suma de todas será la del polígono.

XII. *Comparacion de las áreas.*

227. *Los triángulos semejantes son como los cuadrados de sus líneas homológas.* (Fig. 66.)

Dem. Sean semejantes los triángulos ABC, *abc*: el área de ABC$=\frac{1}{2}AC\times BD$ y la de $abc=\frac{1}{2}ac\times bd$: luego $\frac{ABC}{abc}=\frac{AC}{ac}\times\frac{BD}{bd}$. Pero los triángulos ABD, *abd* son semejantes, por ser rectángulos y tener el ángulo $A=a$: luego $\frac{BD}{bd}=\frac{AB}{ab}$; pero en los triángulos semejantes ABC, *abc* es $\frac{AC}{ac}=\frac{AB}{ab}$: luego sustituyendo, será $\frac{ABC}{abc}=\frac{AB^2}{ab^2}$; pero $\frac{AB}{ab}$ es igual á la razon de cualesquiera dos líneas homólogas de ambos triángulos: luego etc.

228. *Los polígonos semejantes son como los cuadrados de sus líneas homólogas.*

(Fig. 55.) Dem. Por ser semejantes los triángulos T, *t*, T', *t'*, T'', *t''*... serán como los cuadrados de sus lados $\frac{T}{t}=\frac{AB^2}{ab^2}$, $\frac{T'}{t'}=\frac{AC^2}{ac^2}$ etc.: los segundos miembros son iguales, porque en los polígonos semejantes los lados son proporcionales: luego los primeros miembros lo son tambien, y es $\frac{T}{t}=\frac{T'}{t'}=\frac{T''}{t''}$ etc. $=\frac{AB^2}{ab^2}$. Suma de antecedentes es á suma de consecuentes como un antecedente á su consecuente: luego $\frac{T+T'+T''+\ldots}{t+t'+t''+\ldots}=\frac{AB^2}{ab^2}$; pero $\frac{AB}{ab}$ es igual á la razon de otras dos líneas homólogas de ambas figuras: luego etc.

229. Los polígonos regulares de igual número de lados son como los cuadrados de sus radios rectos y oblícuos; porque estos polígonos son semejantes (190), y los radios rectos y oblícuos son proporcionales á sus lados.

230. *Los círculos son como los cuadrados de sus radios.*

Dem. Sean R y r los radios de dos círculos: sus áreas serán pR^2, pr^2 (217); luego $\frac{pR^2}{pr^2}=\frac{R^2}{r^2}$: luego etc.

231. *La figura construida sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de las figuras semejantes construidas sobre los dos catetos*, nombre que se da á los otros dos lados. (Fig. 27.)

Dem. Sean M, N, P dichas tres figuras, cuyos lados homólogos son BC, AB, AC; serán como los cuadrados de dichos lados: esto es, $\frac{M}{BC^2}=\frac{N}{AB^2}=\frac{P}{AC^2}$ (228). Sumando los términos de estos dos últimos quebrados, resultará una fraccion igual á cualquiera de ellos: esto es, $\frac{M}{BC^2}=\frac{N+P}{AB^2+AC^2}$; pero $BC^2=AB^2+AC^2$ (133): luego $M=N+P$: luego etc.

232. *El círculo construido sobre la hipotenusa es igual á la suma de los dos círculos construidos sobre los dos catetos.*

Dem. Sean C, c, c' dichos círculos, cuyos diámetros son la hipotenusa H y los dos catetos h, h': siendo los círculos como los cuadrados de los diámetros (230), será $\frac{C}{H^2}=\frac{c}{h^2}=\frac{c'}{h'^2}$: sumando los términos de las dos últimas fracciones, será $\frac{C}{H^2}=\frac{c+c'}{h^2+h'^2}$; pero $H^2=h^2+h'^2$: luego $C=c+c'$: luego etc.

233. *Construir una figura igual á la suma de otras dos semejantes, y semejante á cada una de ellas.*

Tomo por catetos dos lados homólogos de las figuras dadas; y tirando la hipotenusa, la figura semejante á las dadas, construida sobre ella, será igual á la suma de las dadas (231).

234. *Construir una figura semejante á dos dadas é igual á su diferencia.*

Tomo dos lados homólogos de ambas figuras, el de la mayor servirá de hipotenusa, y el de la menor de cateto; y tirando el otro cateto, la figura construida sobre él, semejante á cualquiera de las dadas, será igual á su diferencia.

235. *Construir una figura* $=M+N+P-Q-R$, *siendo todas estas figuras semejantes y dadas.*

Construyo una figura $=M+N$, y llámola x: será la figura pedida $=x+P-Q-R$. Construyo una figura $=x+P$, y llámola x': la fórmula se reduce á $x'-P-R$. Construyo una figura $=x'-P$, y llámola x'', y la cuestion se reduce á hallar una figura $=x''-R$.

236. *Construir un círculo igual á la suma de otros dos dados.*

Tomo los radios de los círculos por catetos: tiro la hipotenusa, y el círculo descrito con ella será igual á la suma de los otros dos (232).

237. *Construir un círculo igual á la diferencia de otros dos dados.*

Tomo el radio mayor por hipotenusa, y el radio menor por cateto. Tiro el otro cateto, y el círculo descrito con él será la diferencia pedida.

238. *Construir un círculo* $=M+N+P-Q-R$, *todos círculos dados.*

Construyo un círculo $=M+N$, y llámole x. Construyo un círculo $=x+P$, y lo llamo x'. Construyo un círculo $=x'-Q$, y llámola x''; la cuestion se reduce á construir un círculo $=x''-R$.

XIII. *De los planos y de los ángulos diedros.*

239. *Tres puntos, que no esten en linea recta, determinan la posicion de un plano.* (Fig. 67.)

Dem. Si tres puntos A, B y C, que no estan en línea recta, son comunes á dos planos, digo que otro punto cualquiera D del primero será comun al segundo. Porque si los puntos A, B, C estan en ambos planos, las rectas AB, BC estarán en ambos planos; pues la recta que tiene dos puntos en un plano, los tiene todos. Tiro por D la recta DF que corte á la AB y á la BC, lo que podrá hacerse, pues ambas estan en el mismo plano que el punto D, es decir, en el primer plano. Si la DF corta á AB y BC en los puntos E y F, como estos puntos estan en las rectas AB y BC, estarán en ambos planos: luego la recta DF estará en ambos planos, y por consiguiente el punto D. Pudiéndose demostrar lo mismo de cualquier otro punto del primer plano, se infiere que ambos planos tienen todos sus puntos comunes y coinciden: luego etc.

240. *Dos rectas que se cortan estan en un mismo plano*; porque la posicion de dichas rectas está determinada por tres puntos, el de concurso y otros dos, tomado cada uno en cada recta.

241. *Un triángulo está todo entero en un mismo plano*; pues lo determinan sus tres vértices, que no estan en línea recta.

242. *Dos rectas paralelas estan en un mismo plano*; pues las determinan dos puntos para la una, y otro fuera de ella para tirarle la paralela.

243. *La comun seccion de dos planos es una recta;*

pues si fuera una curva, podrian pasar dos planos por tres puntos, tomados en dicha curva, que no estuviesen en línea recta; pero por tres puntos, que no esten en línea recta, solo puede pasar un plano: luego etc.

244. *Una recta es perpendicular á un plano, cuando lo es á dos rectas, que se cruzan por su pie en dicho plano.*

245. *Si una recta es perpendicular á un plano, lo es á cualquier recta, que pase por su pie en dicho plano.*

(Fig. 68.) Dem. Sea CD perpendicular á DE, DF, tiradas en el plano AB: digo que será tambien perpendicular á DG, tirada en el mismo plano, y que pasa por D. Tiro la EF, que encuentre en G, á la DG: tiro CE, CG, CF. Prolongo la CD, hasta que DC′=DC, y tiro EC′, GC′, FC′. Por ser ED perpendicular á CC′ en su mitad, EC=EC′, y por la misma razon FC=FC′: luego los triángulos EFC, EFC′, que tienen EF comun, y los otros dos lados iguales, son iguales: luego el ángulo CEF=C′EF. Los triángulos CEG, C′EG, que tienen GE comun, EC′=EC, y el ángulo comprendido igual, son iguales: luego CG=C′G: luego la GD, que tiene los puntos G y D equidistantes de C y C′, es perpendicular á CC′; y pudiéndose demostrar lo mismo de cualquier otra recta tirada en el plano AB, y que pase por D, se infiere que etc.

246. *Si desde un punto tomado fuera de un plano se le baja una perpendicular, y desde su pie se tira en el mismo plano una perpendicular á otra recta tirada en él, la recta, que una el principio de la primer perpendicular y el pie de la segunda, será perpendicular á la recta tirada en el plano. Esto es, si CD es perpendicular al plano AB, y DG lo es á FE, CG será perpendicular á FE.*

Dem. Tomo GF=GE, y tiro CF, CE, FD, DE. FD=DE por oblícuas equidistantes de la perpendicular GD; y siendo CD perpendicular al plano, y por tanto á FD y á DE, los triángulos rectángulos CDF, CDE serán iguales, y CF=CE: luego el triángulo FCE será isósceles, y la recta CG tirada á la mitad de su base, será perpendicular á ella: luego etc.

247. *Las oblícuas, que se separan igualmente de la perpendicular á un plano, son iguales.*

Dem. Si FD=DE, los triángulos rectángulos CDF, CDE serán iguales, y por tanto CF=CE: luego etc.

248. *Las oblícuas iguales se separan igualmente de la perpendicular á un plano;* porque si CF=CE, los triángulos CDF, CDE rectángulos son iguales, por tener un lado comun, y sus hipotenusas iguales: luego DE=DF: luego etc.

249. Para tirar desde un punto una perpendicular á un plano, tírole desde el mismo punto tres oblícuas iguales; hago pasar por sus pies una circunferencia, y su centro será el pie de la perpendicular; pues esta debe equidistar de todas las oblícuas iguales.

250. *La línea mas corta que se puede tirar desde un punto á un plano, es la perpendicular;* pues tirando desde el mismo punto una oblícua, esta será hipotenusa, y la perpendicular lado del triángulo rectángulo que se forma.

251. *Desde un punto tomado fuera de un plano, solo se le puede tirar una perpendicular; pues la distancia mas corta debe ser una sola. Tampoco en un punto á un plano se puede levantar mas que una perpendicular;* pues si pudieran levantarse dos, haciendo pasar un plano por ambas, habria dos perpendiculares á la comun seccion de ambos planos, y ambas estarian en un mismo plano, lo que es imposible (30).

252. *Dos planos perpendiculares á una recta no pueden encontrarse.*

Dem. Si los planos prolongados concurriesen en un punto, las rectas tiradas, una en un plano, y otra en otro, desde dicho punto á los pies de la perpendicular, serian perpendiculares á esta: luego desde un mismo punto podrian tirarse dos perpendiculares á una recta, lo que es imposible: luego los planos no pueden concurrir. Los planos que no se encuentran prolongados indefinidamente, se llaman paralelos.

253. *Si dos rectas son paralelas, y una de ellas es perpendicular á un plano, la otra lo será tambien.*

(Fig. 69.) Dem. Sean las paralelas AP, BQ. Sea AP perpendicular al plano MN; digo que BQ será perpendicular al mismo plano; porque tirando la AB, por ser AP perpendicular al plano MN, lo será á la AB (245). Tiro la BE perpendicular á BA y la CB, á cualquier punto de la AP, será CB perpendicular á BE (246): luego BE, perpendicular á AB y á BC, será perpendicular al plano ABC, y á la recta BQ, que encuentra en él; pero BQ es tambien perpendicular á BA, por ser paralela á PA: luego BQ, perpendicular á las rectas BA, BE, es perpendicular al plano MN: luego etc.

254. *Si dos rectas son perpendiculares á un plano, son paralelas entre sí;* pues son perpendiculares á la recta que une sus pies (245).

255. Dos rectas, paralelas á una tercera, son paralelas entre sí; porque tirando un plano perpendicular á la primera, lo será á la tercera y á la segunda (253), luego si todas son perpendiculares á un mismo plano: todas serán paralelas entre sí (254).

256. *Si á dos planos paralelos los corta un tercero, las comunes secciones serán paralelas;* pues si se encontrasen, se encontrarian tambien los planos en que estan, y no serian paralelos.

257. *Una recta perpendicular á un plano, lo es á cualquier plano, paralelo al primero.*

(Fig. 70.) Dem. Sean paralelos los planos MN, *mn*; sea PA perpendicular al plano MN, lo será á cualquier recta que encuentre en el plano *mn*, como P*c*. Para demostrarlo, tiro el plano PA*c*: AC y P*c* serán paralelas, por comunes secciones de los planos paralelos con el plano PAC, y siendo PA perpendicular á AC, lo será á su paralela P*c*: luego PA, perpendicular á cualquier recta que encuentre en el plano *mn*, es perpendicular á dicho plano: luego etc.

258. *Las paralelas comprendidas entre planos paralelos son iguales.*

Dem. Sean los planos paralelos MN, *mn*, y las rectas paralelas AP, C*c*. Imaginando por ellas el plano A*c*, su comun seccion con *mn* que es P*c*, y su comun seccion con MN, que es AC, serán paralelas (256): luego la figura APC*c* es un paralelogramo, y AP=C*c* por lados opuestos de un paralelogramo (155): luego etc.

259. *Angulo diedro* es la mayor ó menor abertura de dos planos que se cortan. *Su arista* es la comun seccion de ambos planos.

260. *Si dos planos paralelos cortan un ángulo diedro, los ángulos rectilineos, que resultan de la interseccion de cada uno, son iguales.* (Fig. 71.)

Dem. Sean A*ab*, A*ac* los dos planos, que forman el ángulo diedro, que se denota asi *ba*A*c*. Sean *abc*, ABC los dos planos paralelos que cortan el ángulo diedro. Tomo *ab* y AB iguales; *ac* y AC iguales, y tiro C*c*, B*b*, BC, *bc*. Las rectas AB, *ab*, son paralelas por comunes secciones del plano A*ab* con los paralelos (256); las rectas *ac*, AC son paralelas, por comunes secciones del plano A*ac* con los paralelos. Siendo *ab* y AB paralelas é iguales, lo serán A*a* y B*b*: siendo AC y *ac* paralelas é iguales, lo serán A*a* y C*c*: luego B*b* y C*c* paralelas é iguales á la A*a*, son paralelas é iguales entre sí: luego BC, *bc* son tambien paralelas é iguales: luego los triángulos ABC, *abc*, que tienen sus lados iguales, son iguales: luego los ángulos BAC, *bac* son iguales: luego etc.

261. *Si dos ángulos tienen sus lados paralelos, son iguales, y los planos en que estan son paralelos.*

Dem. Sea AB paralela á *ab* y AC paralela á *ac*. Si el plano BAC no es paralelo á *bac*, lo será otro que pase por la AB, y su comun seccion con A*ac* será paralela á *ac*; pero AC lo es: luego por el punto A podrian pasar dos rectas paralelas á *ac*, lo que es imposible (43). Siendo dichos planos paralelos, los ángulos BAC, *bac* resultan de sus intersecciones con el ángulo diedro *ba*A*c*, y por tanto son iguales (260): luego etc.

262. *Los triángulos, que reunen las estremidades de tres rectas paralelas é iguales, son iguales, y sus planos paralelos.*

Dem. Dichos triángulos son iguales, porque sus lados, que unen á rectas paralelas é iguales, deben ser iguales y paralelos; y como cualquiera de los ángulos de dichos triángulos tienen sus lados paralelos, se infiere que sus planos son paralelos (261): luego etc.

263. *La medida del ángulo diedro es el ángulo rectilíneo, que resulta de la interseccion de un plano, perpendicular á su arista, con ambos planos.*

(Fig. 72.) Dem. Sean BAPC, *bapc* dos ángulos diedros, y BAC y *bac* los ángulos rectilíneos, que resultan de la interseccion de los planos BAC, *bac* perpendiculares á las aristas AP, *ap*.

Si los ángulos BAC, *bac* son conmensurables, divídase cada uno en tantas partes iguales, como veces contiene á su medida comun, y tirando planos por las rectas de division A*z*, A*y*. . . . *az'*. . ., y por las aristas AP, *ap*, quedará cada ángulo diedro dividido en tantos ángulos diedros parciales, como divisiones hay en su ángulo rectilíneo. Estos ángulos diedros parciales son tambien iguales entre sí; porque haciendo coincidir los ángulos iguales BA*z*, *baz'*, coincidirán sus planos, y tambien las aristas AP, *ap*; pues en un punto no se puede levantar á un plano mas que una perpendicular (251): luego concurriendo respectivamente las aristas AP, *ap*, y las rectas AB, *ab*, A*z*, *az'*, coincidirán los ángulos diedros BAP*z*, *bapz'*, y serán iguales: luego si la razon de los ángulos rectilíneos BAC, *bac* es $\frac{m}{n}$, la de los diedros será tambien $\frac{m}{n}$, y por tanto los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos, cuando estos son conmensurables.

Pero si los ángulos rectilíneos son inconmensurables, divídase el uno de ellos *bac* en el número de partes iguales, que se quiera, y llévese una de ellas sobre el otro, y sea la última recta divisoria Ax. Los ángulos xAB, cab son conmensurables, y proporcionales por consiguiente á sus correspondientes ángulos diedros: luego $\frac{\mathrm{BA}x}{bac}=\frac{\mathrm{BAP}x}{bapc}$; pero BA$x$=BAC+CA$x$, y BAP$x$=BAPC+CAP$x$: luego $\frac{\mathrm{BAC}}{bac}+\frac{\mathrm{CA}x}{bac}=\frac{\mathrm{BAPC}}{bapc}+\frac{\mathrm{CAP}x}{bapc}$; pero CA$x$, CAP$x$ pueden hacerse cuan pequeños se quieran, tomando mayor número de partes en el ángulo bac, lo que acercará la recta ax á la AC: luego si estos miembros son iguales en cualquier proximidad que tengan á sus límites, sus límites serán iguales: luego $\frac{\mathrm{BAPC}}{bapc}=\frac{\mathrm{BAC}}{bac}$, es decir, los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos, aunque estos sean inconmensurables. Si $bapc$ se toma por unidad de los ángulos diedros, y bac por unidad de los rectilíneos, será BAPC=BAC: luego etc.

264. Las propiedades de los ángulos diedros, que resultan del concurso de varios planos, son las mismas que las que se han demostrado para los ángulos rectilíneos; pues estos los miden. Asi la suma de dos diedros adyacentes es igual á dos rectos; si á dos planos paralelos los corta otro tercero, los diedros alternos y correspondientes serán iguales, etc.

265. El ángulo diedro se mide por el rectilíneo, que forman dos perpendiculares á ambos planos, levantadas en un mismo punto de la comun seccion.

Dem. Sea el ángulo diedro BAPC: tirando el plano CAB perpendicular á PA, el ángulo rectilíneo BAC será la medida del diedro. Siendo AD perpendicular al plano CAP, lo será á la AC, que encuentra en él (245), y el ángulo DAC será recto, como tambien EAB por la misma razon: restando de ambos el ángulo EAC, serán iguales los ángulos DAE y BAC, y si este mide el ángulo diedro, tambien le medirá DAE: luego etc.

266. Se dice que un plano es perpendicular á otro, cuando es recto el ángulo diedro que forman.

267. *Si una recta es perpendicular á un plano, todo plano que pase por ella, será tambien perpendicular al primer plano.* (Fig. 73.)

Dem. Sea AB perpendicular al plano MN. Tiro el plano PQ por la AB. Tiro AC en el plano MN perpendicular á AR. La recta AR perpendicular á BA y AC lo será al plano BAC: luego el ángulo BAC es medida del diedro, que forman los planos; y siendo BAC recto, los planos son perpendiculares: luego etc.

268. Por una recta dada no se puede tirar mas que un plano perpendicular á otro dado; pues dicho plano quedará determinado por dicha recta, y por una perpendicular tirada al plano dado desde cualquier punto suyo.

269. Si tres rectas son perpendiculares entre sí, cada una lo es al plano de las otras dos; pues es perpendicular á dos rectas, que encuentra en él.

270. *Si dos planos son perpendiculares entre sí, y en el uno se tira una perpendicular á la comun seccion, esta recta será tambien perpendicular al otro plano.*

Dem. Sea el plano PQ perpendicular á MN, y sea BA perpendicular á AR. Tirada la AC perpendicular á AR, siendo AR perpendicular á AB y AC, lo será al plano BAC: luego el ángulo BAC, que mide al diedro, debe ser recto, y AB perpendicular á AC; y siéndolo á AR, lo es al plano MN: luego etc.

271. *Si dos planos son perpendiculares entre sí, y en un punto de su comun seccion se tira una perpendicular al uno de ellos, estará en el otro.*

Dem. Si el plano PQ es perpendicular al plano MN, y AB tambien, AB estará en el plano PQ; porque sino, levantando en A una perpendicular á AR en el plano PQ, esta seria perpendicular al plano MN; y en el punto A se podrian tirar dos perpendiculares al plano MN, lo que es imposible: luego AB está en el plano PQ: luego etc.

272. *Si dos planos son perpendiculares á un ter-*

cero, su comun seccion lo será tambien.

Dem. Si en el punto comun á los tres planos, se levanta una perpendicular al tercero, deberá estar en los otros dos que son perpendiculares al tercero: luego dicha perpendicular será la comun seccion de los otros dos: luego etc.

273. La proyeccion de un punto sobre un plano es el pie de una perpendicular bajada desde dicho punto sobre el plano.

274. La proyeccion de una recta sobre un plano es la serie de las proyecciones de sus puntos, ó la comun seccion del plano con otro perpendicular al que pase por dicha recta; porque todos los pies de las perpendiculares bajadas desde los puntos de la recta al plano, deben estar en dicha comun seccion. En efecto, estas perpendiculares no se separan del plano perpendicular: si se separasen, se podria tirar otra perpendicular al otro plano desde un punto de la recta dada, que seria la que se tirase desde dicho punto perpendicular á la comun seccion.

275. La inclinacion de una recta sobre un plano se mide por el ángulo que forma dicha recta con su proyeccion.

XIV. *De los ángulos poliedros.*

276. *Angulo poliedro* ó *sólido* es el espacio indefinido, comprendido entre varios planos que se cortan en un mismo punto. *Angulo plano* es cada uno de los que se forman en el vértice del ángulo poliedro por las intersecciones de cada plano con los adyacentes.

277. *Pirámide* es el cuerpo que resulta cortando con un plano todos los planos de un ángulo poliedro.

La pirámide es regular, cuando su base es un polígono regular, y la línea que pasa por el vértice y el centro de la base es perpendicnlar á dicha base.

278. La pirámide, cuya base es un triángulo, se llama *tetraedro.*

279. *Todo plano paralelo á la base de una pirá-*

mide corta todas las rectas tiradas desde el vértice á la base en la misma razon que un lado de la base tiene al correspondiente de la seccion. (Fig. 74.)

Dem. Sea el plano *abc* paralelo á la base. AB y *ab* son paralelas por ser las comunes secciones de la base y del plano paralelo con el triángulo lateral SAB (256), por la misma razon son paralelas BC y *bc*, AC y *ac* etc. luego los triángulos SAB y *sab*, SBC y *sbc*, SCA y *sca* etc. son semejantes, y habrá estas proporciones $\frac{AB}{ab}=\frac{SA}{sa}=\frac{SB}{sb}=\frac{SC}{sc}$, etc. Tambien tirando la SH desde el vértice á la base, y tirando las AH, *ah* deben ser paralelas por ser comunes secciones de la base y del plano paralelo con el plano SAH: luego los triáugulos SAH, *sah* semejantes dan $\frac{SA}{sa}=\frac{SH}{sh}$; pero $\frac{SA}{sa}=\frac{AB}{ab}$: luego $\frac{SH}{sh}=\frac{AB}{ab}$. luego etc.

280. *Todo plano paralelo á la base de una pirámide forma una seccion semejante á dicha base.*

Dem. La base ABC y la seccion *abc* tienen sus lados paralelos, y por tanto sus ángulos iguales (261); ademas sus lados estan en la misma razon que estan cortadas las aristas por el plano: luego sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales: luego son figuras semejantes (189): luego etc.

281. *Si en una pirámide se tira un plano paralelo á la base, la base y la seccion son como los cuadrados de sus distancias al vértice.*

Dem. Sea la base B y la seccion S: siendo figuras semejantes, serán como los cuadrados de sus dimensiones homólogas (228): luego $\frac{B}{S}=\frac{AB^2}{ab^2}$; pero $\frac{AB}{ab}=\frac{SH}{sh}$: luego $\frac{B}{S}=\frac{SH^2}{sh^2}$: luego etc.

282. Altura de una pirámide es la perpendicular bajada desde su vértice sobre el plano de su base.

283. *Si á dos pirámides de igual altura y bases equivalentes las cortan dos planos equidistantes de los respectivos vértices, las secciones serán áreas equivalentes.*

Dem. Sea B el valor comun de ambas bases y A la altura comun de ambas pirámides. Sea a la distancia del vértice á los planos secantes, que es la misma en ambas. Sean S y s las áreas de las secciones. Por ser las bases y las secciones como los cuadrados de sus distancias al vértice, será $\frac{S}{B}=\frac{a^2}{A^2}$ en la primer pirámide, y $\frac{s}{B}=\frac{a^2}{A^2}$ en la segunda. De estas ecuaciones sale $S=\frac{Ba^2}{A^2}$, y $s=\frac{Ba^2}{A^2}$: luego $S=s$: luego etc.

284. *Si tres ángulos planos forman un ángulo triedro, cualquiera de ellos es menor que la suma de los otros dos.* (Fig. 75.)

Dem. Sea el ángulo triedro S formado de los tres ángulos planos ASB, ASC, BSC. Sea ASB el mayor de ellos. Tiro la SD que forme en el plano ASB el ángulo DSB=CSB. Tomo SD de cualquier tamaño, y SC=SD; tiro por D cualquier recta BA, y en fin BC y CA; los triángulos BSC, BSD, que tienen BS comun, SC=SD y el ángulo comprendido igual por construccion, son iguales: luego BC=BD; pero BC+CA > BA, por ser BA línea recta: luego quitando BC=BD, será CA > DA: luego en los triángulos CSA, DSA, que tienen SA comun, y SC=SD, el que tenga mayor el tercer lado, tendrá mayor el ángulo opuesto: luego el ángulo CSA > DSA; añadiendo á ambas partes BSC=BSD, será ASC+CSB > ASD+DSB, ó > ASB: luego etc.

285. *La suma de los ángulos planos, que componen un ángulo poliedro, es menor que cuatro rectos.* (Fig. 76.) Dem. Sea S el ángulo poliedro. Tiro el plano ABCD, que corte todos los del ángulo poliedro. Tomo en dicho plano cualquier punto O, y tiro á los vértices de la base las rectas OA, OB, OC, OD. Se

formarán en la base tantos triángulos, como triángulos laterales hay en la pirámide; y como los tres ángulos de cada triángulo valen dos rectos, la suma de los ángulos de los triángulos laterales valdrán tanto como la suma de los ángulos de los triángulos de la base. Cada ángulo ABC de esquina de la base es menor que la suma de los dos ángulos ABS, SBC de los triángulos laterales, que forman con él un ángulo triedro (284): luego los ángulos inferiores de los triángulos laterales valen mas que los ángulos del polígono de la base: luego en compensacion los ángulos verticales de los triángulos laterales valen menos que los ángulos del punto O; pero estos valen cuatro rectos (20): luego los ángulos del punto S valen menos que cuatro rectos: luego etc.

286. Llámase cuerpo regular el que tiene todas sus caras regulares é iguales y sus ángulos poliedros compuestos de igual número de ángulos planos iguales.

287. *No hay mas que cinco cuerpos regulares.*

Dem. Con tres ángulos de triángulo equilátero se puede formar ángulo poliedro; porque suman dos rectos. El poliedro que resulta tiene cuatro triángulos equiláteros por caras. Se llama *tetraedro.*

Con cuatro ángulos de triángulo equilátero, que suman $\frac{8}{3}$ de un recto, se puede formar ángulo poliedro. El poliedro que resulta tiene ocho triángulos equiláteros por caras, y se llama *octoedro.*

Con cinco ángulos de triángulo equilátero, que valen $\frac{10}{3}$ de un recto, se puede formar ángulo poliedro. El poliedro que resulta, tiene veinte triángulos equiláteros por caras, y se llama *icosaedro.*

No se pueden formar mas cuerpos regulares con triángulos, porque seis ángulos de triángulo equilátero valen cuatro rectos (285).

Con tres ángulos de cuadrado, que valen tres rectos, se puede formar ángulo poliedro. El cuerpo que resulta tiene seis cuadrados por caras, y se llama *exaedro.*

Con cuatro ángulos de cuadrado, que valen cuatro rectos, no se puede formar ángulo poliedro.

Con tres ángulos de pentágono regular, que componen $\frac{18}{5}$ de un recto (150), se puede formar ángulo poliedro. El cuerpo que resulta, tiene doce pentágonos regulares por caras, y se llama *dodecaedro*.

Con tres ángulos de exágono, que componen cuatro rectos, no se puede formar ángulo poliedro, y menos con tres ángulos de eptágono, octógono etc.: luego no hay mas que cinco cuerpos regulares.

288. *Dos ángulos triedros, que tienen sus ángulos planos respectivamente iguales, tienen iguales los ángulos diedros.*

(Fig. 77.) Dem. Sean los ángulos triedros S y s, que tienen el ángulo $ASB=asb$, el ángulo $ASC=asc$, y el ángulo $BSC=bsc$: tomo $SB=sb$, y tiro los planos BAC, bac perpendiculares á SB, sb; y por tanto SB será perpendicular á las rectas BA, BC; y sb á las rectas ba, bc.

Los triángulos rectángulos SBA, sba, que tienen $SB=sb$ por construccion, y el ángulo $BSA=bsa$ por la hipótesi, son iguales: luego $SA=sa$ y $BA=ba$.

Los triángulos rectángulos SBC, sbc, que tienen $SB=sb$, y $BSC=bsc$ por la hipótesi, son iguales: luego $BC=bc$ y $SC=sc$.

Los triángulos CSA, csa, que tienen dos lados y el ángulo comprendido igual, son iguales, y por tanto $CA=ca$.

Los triángulos ABC y abc, que tienen sus lados iguales, son iguales: luego el ángulo $CBA=cba$; pero estos ángulos rectilíneos miden á los ángulos diedros CBSA, $cbsa$: luego estos ángulos diedros son iguales. Del mismo modo se demostrará la igualdad de los demas: luego etc.

Se dice que dos ángulos poliedros son iguales por *simetría*, cuando los ángulos planos iguales estan colocados á contrarias partes; los ángulos diedros se demuestran tambien iguales en este caso, como en el anterior; mas no es posible hacer coincidir los ángulos poliedros.

289. Dos ángulos triedros, que tienen un ángulo diedro igual, é iguales los ángulos planos adyacentes, son iguales; pues haciendo coincidir las aristas del ángulo diedro igual, coincidirán los ángulos planos adyacentes, pues son iguales, y por consiguiente se ajustarán las otras aristas, y los ángulos triedros coincidirán.

290. *Si dos ángulos poliedros constan de ángulos planos y de ángulos diedros, iguales y colocados en el mismo órden, son iguales.*

Dem. Ajustando dos ángulos diedros iguales, los ángulos planos adyacentes coincidirán, porque son iguales. Tambien coincidirán los ángulos diedros, que siguen á cada dos planos iguales, porque se suponen iguales. Del mismo modo se demostrará la coincidencia de los demas ángulos planos y diedros, y por tanto la de los dos ángulos poliedros propuestos: luego etc.

XV. *Areas de los cuerpos.*

291. *Prisma* es el cuerpo engendrado por el movimiento de una recta siempre paralela é igual á sí misma, que describe con su estremo un polígono cualquiera.

292. *Arista* del prisma es la recta que se mueve paralela á sí misma. *Prisma recto* es aquel en que la arista es perpendicular al plano de la base, y *oblícuo* en el que la arista está inclinada al plano de la base.

293. *Las caras de un prisma son paralelógramos;* pues si A*a* es igual y paralela á B*b*, AB será igual y paralela á *ab*, y el cuadrilátero que forman, será un paralelógramo. (Fig. 78).

294. *Toda seccion, paralela á la base de un prisma, es igual á dicha base.*

Dem. Sea la seccion *a'b'c'* paralela á ABC: *a'b'*= AB por paralelas entre paralelas: lo mismo se demostrará de los demas lados de la seccion y de la base. Tambien los ángulos ABC, *a'b'c'* serán iguales, porque sus lados son paralelos (261): luego si la seccion y la base tienen sus lados y ángulos iguales, son iguales: luego etc.

295. *Altura del prisma* es la distancia perpendicular de sus dos bases.

296. *El área lateral de un prisma es igual á su arista multiplicada por el perímetro de una seccion perpendicular á ella.*

Dem. Si la arista A*a* es perpendicular al plano de la seccion A′B′C′, lo serán todas las aristas, que son paralelas á A*a* (253): luego los lados de la seccion, que son perpendiculares á las aristas, serán las alturas de los paralelógramos laterales: el área de cada uno es igual á su base A*a*, que es la arista, multiplicada por su altura, que será un lado de la seccion (211): luego el área lateral ó la suma de los paralelógramos, será igual á la arista, factor comun, multiplicada por la suma de los lados de la seccion.

297. El área de un prisma recto es igual á su arista multiplicada por el perímetro de su base; pues siendo la arista perpendicular á la base, la seccion perpendicular á la arista será igual á la base (294).

298. *Paralelipípedo* es un prisma, cuya base es un paralelógramo.

299. *Las seis caras del paralelipípedo son iguales y paralelas cada una á su opuesta.* (Fig. 79).

Dem. Los paralelógramos opuestos A*d*, B*c* tienen los lados CB y *cb* iguales á DA y *da*, por ser las bases paralelógramos: tambien tienen B*b*, C*c*, A*a*, D*d* iguales por aristas del prisma; y el ángulo *c*CB=*d*DA, por ser sus lados paralelos (261): luego son iguales, y tambien sus planos son paralelos por comprender los ángulos *c*CB, *d*DA.

300. En un paralelipípedo se pueden tomar por bases cualesquiera dos de los paralelógramos opuestos; pues son iguales y paralelos, y las demas caras son paralelógramos.

301. *Paralelipípedo rectángulo* es aquel, que ade-

mas de ser recto, tiene por base un rectángulo. *Cubo* es un paralelipípedo rectángulo, que tiene por base un cuadrado, y su arista igual al lado de la base, y por tanto sus caras son seis cuadrados iguales. Es el mismo cuerpo que el exáedro regular (287).

302. *Cilindro* es un cuerpo formado por el movimiento de una recta, que corre con un estremo una curva cualquiera, quedando siempre paralela á sí misma. *Generatriz* del cilindro es la recta que lo forma con su movimiento. Si la base es un círculo (1), el eje del cilindro es la recta que une los centros de las dos bases paralelas.

303. *Toda seccion de un cilindro paralela á su base es igual á ella*; porque tirando planos por el eje del cilindro y la generatriz, que son rectas iguales y paralelas, las comunes secciones con la base, y la seccion serán iguales y paralelas: luego si la base es un círculo, y sus radios son iguales, la seccion lo será tambien, y tendrá un radio igual al de la base: luego etc.

304. Cilindro recto es el que tiene sus generatrices perpendiculares al plano de la base, y oblícuo el que no.

305. El área lateral de un cilindro recto es igual á su eje multiplicado por la circunferencia de la base.

Dem. Sea S el área lateral del cilindro: C la circunferencia de su base: H su altura: circunscribo á la base un polígono regular, y sobre él construyo un prisma de la misma altura que el cilindro: el área de este prisma tendrá con la del cilindro, á quien envuelve, una cierta diferencia x: sea z el esceso del perímetro de la base del prisma sobre el de la del cilindro: será $S+x$ el área del prisma, y $C+z$ el perímetro de su base; pero el área del prisma recto es igual al perímetro de su base por su altura (297): luego $S+x=H(C+z)$. S, H y C son cantidades invariables: x y z disminu-

(1) Los únicos cilindros, que se consideran en la geometría elemental, son los que tienen al círculo por base.

yen doblando el número de lados del polígono de la base: luego si hay ecuacion entre las variables, la habrá entre sus límites, y será S=CH: luego etc.

306. Sea R el radio de la base del cilindro: será $2p$R su circunferencia, y el área lateral del cilindro será $2p$RH.

307. *El área del cilindro oblícuo es igual á su eje multiplicado por el perímetro de una seccion perpendicular á su eje.*

Dem. Cortando el cilindro por dicha seccion, y uniendo sus bases, se convertirá en un cilindro recto, cuyo eje y área serán los mismos, y sus bases serán iguales á la seccion: luego su área será el perímetro de la seccion multiplicado por el eje; pues es facil estender lo que hemos demostrado de los polígonos circunscriptos al círculo, á los polígonos regulares ó irregulares circunscriptos á la curva que forma la seccion.

308. El área de una pirámide cualquiera se halla sumando las áreas de sus caras.

309. *El área lateral de una pirámide regular es igual al semiperímetro de su base multiplicado por la apotecma.*

Dem. Los triángulos laterales son iguales, porque las aristas son oblícuas equidistantes de la altura que pasa por el centro de la base: luego las apotecmas que son alturas de estos triángulos laterales son iguales; pero el área de cada uno es igual á su altura multiplicada por la mitad de su base: luego la suma de todos es igual á la apotecma, factor comun, multiplicada por la semisuma de las bases, que es el semiperímetro de la base de la pirámide: luego etc.

310. *Cono* es un sólido engendrado por el movimiento de una recta, que, fija en un estremo, corre con el otro una curva cualquiera. En estos elementos solo hablamos del cono, cuya base es un círculo. *Eje del cono* es la recta tirada de su vértice al centro de su base. El cono es *recto*, cuando el eje es perpendicular al plano de la base, y *oblícuo*, cuando no.

311. *Toda seccion paralela á la base del cono es un círculo.* (Fig. 80.)

Dem. Sea el cono ABC; tiro el plano *blc* paralelo á su base: digo que esta seccion es un círculo; porque haciendo pasar por el eje AO y la generatriz AB un plano, sus comunes secciones con la base y la seccion, que son OB y *ob*, son paralelas: luego los triángulos ABO, A*bo* serán semejantes y darán $\frac{AO}{Ao}=\frac{BO}{bo}$. Tiro otro plano por el eje AO y otra cualquiera generatriz AL: las comunes secciones OL, *ol* serán paralelas, los triángulos AOL, A*ol* serán semejantes, y $\frac{AO}{Ao}=\frac{OL}{ol}$. Por igualdad de razones, será $\frac{BO}{bo}=\frac{OL}{ol}$; pero $BO=OL$ por radios de un mismo círculo: luego $bo=ol$: luego todos los puntos de la seccion equidistan de *o*: luego la seccion es un círculo, cuyo centro está en el eje: luego etc.

312. *El área lateral del cono recto es igual á su lado multiplicado por la mitad de la circunferencia de su base.*

Dem. Sea *S* el área lateral del cono: *C* la circunferencia de su base: *L* su lado. Circunscribo á la base un polígono regular, y construyendo sobre él una pirámide regular del mismo vértice que el cono, será $S+x$ el área lateral de esta pirámide, y $C+z$ el perímetro de su base, siendo x y z las respectivas diferencias de la pirámide con el cono: luego $S+x=\frac{1}{2}L(C+z)$ (309), de donde resulta ecuacion entre los límites $S=\frac{1}{2}CL$, por ser x y z disminuibles á voluntad: luego etc.

313. Sea *R* el radio de la base del cono: su circunferencia será $2pR$, y el área lateral del cono será LpR.

314. *El área lateral de una pirámide truncada de bases paralelas es igual á la altura de uno de sus trapecios laterales multiplicada por el perímetro de una seccion media entre las dos bases;* porque siendo sus caras trapecios de igual altura, la suma de ellas será la

altura de un trapecio multiplicada por la semisuma de los perímetros de las bases, ~~medias~~, ó por el perímetro de una seccion media entre ambas bases.

315. *El área de un cono truncado es igual á su lado multiplicado por la circunferencia de la base media.*

Dem. Sea S el área de un cono truncado, $S+x$ la de la pirámide regular circunscripta: C la circunferencia de la base media: $C+z$ el perímetro del polígono regular circunscripto á ella: L el lado del cono, que será la altura del trapecio lateral. El área de la pirámide truncada será $S+x=L(C+z)$: luego si hay ecuacion entre las variables, los límites son iguales, y $S=CL$: luego etc.

Sean R y r los radios de ambas bases: el de la media será $\frac{R+r}{2}$ (129), y su circunferencia será $p(R+r)$, y el área del cono truncado $Lp(R+r)$.

316. La *esfera* es un cuerpo engendrado por la revolucion de un semicírculo al rededor de su diámetro.

317. Se llama *casquete esférico* la superficie engendrada por un arco próximo al diámetro: *zona* la superficie engendrada por un arco que no toca al diámetro: *segtor esférico* el sólido engendrado por la revolucion de un segtor circular: *segmento esférico* el sólido engendrado por la revolucion de un semisegmento circular al rededor del diámetro.

318. *Todos los puntos de la superficie de la esfera distan igualmente de su centro;* pues los puntos de la semicircunferencia generatriz se han conservado equidistantes de dicho centro en toda la revolucion.

319. *Cualquier diámetro de la esfera pudo haber servido de eje para su formacion;* pues su correspondiente semicircunferencia hubiera pasado en la revolucion por los mismos puntos que otra cualquiera; es decir, por los puntos que distan del centro de la esfera una cantidad igual á su radio.

320. *Todo plano que pasa por el centro de la esfera, la corta por su círculo generador;* pues cualquiera

de los diámetros, que cogerá dicho plano, puede suponerse que es el eje de la esfera.

321. *Círculos máximos* de la esfera son aquellos, cuyos planos pasan por el centro de la esfera.

322. *Superficie de revolucion* es la que forma cualquier curva girando al rededor de un eje.

323. *Todo plano perpendicular al eje de una superficie de revolucion, forma una circunferencia circular en su interseccion con dicha superficie* (Fig. 81.); porque la recta KL perpendicular al eje forma en su revolucion un plano perpendicular tambien al eje, cuya interseccion con la superficie es la curva descrita por el punto K; pero el punto K describe un círculo, porque siempre conserva la misma distancia al eje: luego etc.

324. *Toda seccion de la esfera, hecha por un plano, es un círculo;* porque si el plano pasa por la KL, tomando por eje de la esfera el diámetro AO, perpendicular á este plano, su seccion con la superficie de la esfera será un círculo (323).

325. *Las secciones mas lejanas del centro de la esfera forman círculos mas pequeños;* porque el diámetro del círculo de la seccion es una cuerda, y las cuerdas son tanto mas pequeñas, cuanto mas se alejan del centro (102).

326. *Círculos menores de la esfera* son aquellos, cuyos planos no pasan por su centro.

327. Un plano es tangente á la esfera, cuando la toca en solo un punto.

328. *El radio tirado al punto de contacto de un plano con la esfera es perpendicular á dicho plano;* porque es la línea mas corta que se puede tirar desde el centro á dicho plano. En efecto, cualquiera otra saldria de la esfera, y seria mayor que dicho radio.

329. *El plano perpendicular á un radio de la esfera en su estremo es tangente á la esfera*; porque esceptuando dicho estremo, todos los demas puntos del plano han de estar fuera de la esfera. En efecto, las rec-

tas tiradas desde el centro al plano serán mayores que el radio, por ser oblícuas y el radio perpendicular.

330. *Si un semipolígono regular gira al rededor de un eje que pase por su centro, el área de cualquier porcion de la superficie engendrada es igual á la parte del eje que le corresponde á dicha porcion multiplicada por la circunferencia del círculo inscripto.*

Dem. Sea ADIP una porcion de semipolígono, AO su eje, C el centro del círculo inscripto. El lado AD inmediato al eje forma un cono, cuya área lateral es la mitad de su lado multiplicada por la circunferencia de su base, esto es, AQ × circunferencia DH. Tirando el radio CQ, los triángulos rectángulos ACQ, ABH semejantes por tener el ángulo comun A, dan $\frac{CQ}{DH} = \frac{AQ}{AH}$; pero $\frac{CQ}{DH} = \frac{\text{Circunf. CQ}}{\text{Circunf. DH}}$: luego $\frac{AQ}{AH} = \frac{\text{Circunf. CQ}}{\text{Circunf. DH}}$ y AQ × circunf. DH = AH × circunf. CQ; y representando el primer producto el área del cono, tambien la representará el segundo, que es la parte AH de eje que le corresponde × por la circunferencia del círculo inscripto.

El lado DI, oblícuo al eje, describe un cono truncado. Su área es = DI circunf. KL, base media. Los triángulos DIG, KLC semejantes por tener sus lados perpendiculares dan $\frac{CK}{KL}$ ó $\frac{\text{Circunf. CK}}{\text{Circunf. KL}} = \frac{DI}{DG}$, de donde MH × circunf. CK = DI circunf. KL, y si el segundo miembro es el área del tronco, tambien lo será el primero: luego cada cono truncado tiene por área la parte de eje que le corresponde, multiplicada por la circunferencia inscripta.

Ultimamente, si hay un lado IP paralelo al eje, describirá un cilindro, cuya área es MO × circunf. PO; pero PO es = al radio CS del círculo inscripto: luego tambien esta área es igual á su porcion de su eje multiplicada por la circunferencia inscripta.

Luego, sumando varias áreas de estas, cualquier porcion de superficie engendrada será = á la circunferencia inscripta, factor comun, multiplicada por la suma de porciones del eje: luego etc.

331. *El área de un casquete esférico es igual á la parte de eje que le corresponde multiplicada por la circunferencia del círculo máximo.*

Sea AI una porcion de polígono regular circunscripto al arco de círculo máximo, cuya revolucion forma el casquete: el número de lados de esta porcion de polígono se determina por el número de partes en que se divida el arco. Sea C el área del casquete: u la diferencia del área engendrada por la porcion de polígono sobre el área del casquete: esta área será $C+u$: sea x la altura del casquete, y z el esceso de la altura AM del área, formada por el polígono, sobre la altura del casquete: será $x+z$ la altura de dicha área; y como dicha área es igual á su altura multiplicada por la circunferencia del círculo máximo, llamando esta circunferencia P, será $C+u=P(x+z)$, ó $C+u=Px+Pz$; C y Px son invariables, u y Pz disminuyen á arbitrio; pues mientras mas lados tenga el pedazo de polígono, mas se acercan su área y su altura á las del casquete: luego habrá ecuacion entre las invariables, y será $C=Px$: luego etc.

332. Poniendo en lugar de P, que es la circunferencia del círculo máximo, su valor $2pR$, será $2pRx$ la fórmula del área del casquete.

333. *El área de media esfera es igual al radio multiplicado por la circunferencia del círculo máximo;* pues es un casquete, cuya altura es el radio. Su fórmula será $2pR\times R$ ó $2pR^2$.

334. *El área de la esfera es igual á su diámetro, multiplicado por la circunferencia del círculo máximo;* pues debe ser doble del área de media esfera: su fórmula es $2pR\times 2R$ ó $4pR^2$.

335. *El área de la esfera es cuadrupla de la de su círculo máximo;* pues el área de la esfera es $4pR^2$, y la del círculo máximo pR^2.

336. *El área de una zona esférica es igual á su*

altura multiplicada por la circunferencia del círculo máximo; porque la zona es la diferencia de los dos casquetes, que rematan en sus bases: sea x la altura del mayor, y x' la del menor: el área del mayor será $2pRx$, la menor $2pRx'$; restando será la de la zona $2pR\ (x-x')$; pero $x-x'$ es la altura de la zona: luego etc.

337. *El área de la esfera es igual á la lateral del cilindro circunscripto*; porque, siendo el área de este igual á su eje multiplicado por la circunferencia de su base, será $2R \times 2pR$, por ser la base un círculo del mismo radio que el de la esfera; pero $2R \times 2pR = 4pR^2$, área de la esfera: luego etc.

338. *El área de la esfera es $\frac{2}{3}$ de la total del cilindro circunscripto*; porque la lateral de este, igual á la de la esfera, es igual á cuatro círculos máximos: luego añadiendo las dos bases, que equivalen á dos círculos máximos, el área del cilindro equivaldrá á seis círculos máximos: la de la esfera equivale á cuatro: luego etc.

XVI. *De los poliedros semejantes y simétricos.*

339. Llámase poliedro todo espacio encerrado por superficies planas. *Poliedros convexos* son aquellos, cuya superficie no puede ser cortada por una línea recta mas que en dos puntos. En estos poliedros, prolongado indefinidamente el plano de una de sus caras, todo el sólido ha de quedar situado á un mismo lado de dicho plano. En estos elementos solo tratamos de los poliedros convexos.

340. *Dos tetraedros son semejantes*, cuando tienen dos caras semejantes é igualmente situadas, y el ángulo diedro, que forman dichas caras, es igual.

341. *Los tetraedros semejantes tienen*: 1.° *sus aristas proporcionales*: 2.° *todas sus caras semejantes*: 3.° *sus ángulos diedros y triedros respectivamente iguales.*

Dem. (Fig. 74.) Sea el tetraedro SABC semejante á

Sabc, es decir, sea la cara SBC semejante á *Sbc*, SAC semejante á *Sac*, y el ángulo diedro BSCA=*bSca*. Coloco la arista *Sc* sobre SC, y llegará á *c*, y la cara *Sbc* sobre SBC : por ser iguales los ángulos diedros BSCA, *bSca*, cayendo el plano *Sbc* sobre SBC, el plano *Sca* caerá sobre SCA. Por ser el triángulo SBC semejante á *Sbc*, serán iguales sus ángulos en S ; y cayendo el lado Sc sobre SC, el lado *Sb* caerá sobre SB hasta *b*; y por ser tambien iguales los ángulos en B y *b*, la base *bc* caerá paralelamente á BC (41).

Del mismo modo demostraré, por ser semejantes los triángulos *Sca*, SCA, que la arista *Sa* caerá sobre SA, hasta *a*, y la base *ac* caerá en *ac* paralelamente á *AC*: luego el plano *abc*, pasando por el ángulo *bca*, cuyos lados son paralelos á los de BCA, será paralelo á la base ABC; pero dos planos paralelos, que cortan un ángulo triedro, hacen todas las aristas proporcionales: luego las aristas del tetraedro *Sabc* son proporcionales á las del tetraedro SABC. Tambien el triángulo *bac* es semejante al BAC, por ser sus ángulos formados de paralelas, y por tanto iguales; y el triángulo *Sab* es semejante á SAB, por ser iguales los ángulos en *b* y *B*, *a* y *A* por correspondientes: luego todas las caras de un tetraedro son semejantes á las del otro. Tambien todos los ángulos triedros son iguales; pues cada dos correspondientes se compondrán de ángulos planos, que serán iguales por pertenecer á triángulos semejantes; y los ángulos diedros serán tambien iguales, porque lo son los planos: luego etc.

342. *Dos tetraedros, que tienen todas sus aristas proporcionales, son semejantes;* porque los triángulos, que forman las aristas, serán semejantes, por tener sus lados proporcionales: luego tendrán sus ángulos iguales, y los ángulos triedros se compondrán de ángulos planos iguales, y los ángulos diedros serán iguales: luego habrá un ángulo diedro igual formado por caras semejantes, y los tetraedros serán semejantes : luego etc.

343. *Dos tetraedros, que tienen todas sus caras semejantes, son semejantes*; pues tendrán todas sus aristas proporcionales, por ser lados de triángulos semejantes.

344. *Dos poliedros son semejantes*, cuando tirando diagonales desde dos ángulos homólogos á los demas, quedan divididos en tetraedros respectivamente semejantes.

345. *Los poliedros semejantes tienen sus aristas proporcionales, sus ángulos poliedros y diedros iguales, y sus caras semejantes.* (Fig. 82.)

Dem. Suponiendo los dos poliedros semejantes divididos en tetraedros semejantes por medio de las diagonales tiradas desde los ángulos homólogos *A* y *a*, las aristas del poliedro serán respectivamente aristas de los tetraedros parciales; y siendo estos semejantes, dichas aristas serán proporcionales; y como cada una se halla en dos tetraedros, se podrán comparar las de dos tetraedros semejantes con las de otros dos contiguos, y todas serán proporcionales.

Los ángulos poliedros se componen de los ángulos triedros de los tetraedros semejantes; y siendo estos ángulos triedros respectivamente iguales, tambien lo serán los poliedros.

Cada ángulo diedro de dos caras es la suma de los ángulos diedros de los tetraedros que pasan por la arista comun á dichas dos caras; y siendo los ángulos diedros de los tetraedros semejantes respectivamente iguales, tambien lo serán los ángulos diedros de los poliedros.

Sean I, D, E, F cuatro vértices de un poliedro é *i*, *d*, *e*, *f* los correspondientes del otro. Sean IDE, IEF las bases de los tetraedros formados por las diagonales tiradas desde A, é *ide*, *ief* las bases de los tetraedros semejantes del otro poliedro. Si los triángulos IDE, IEF forman un solo plano cuadrangular, las bases *ide*, *ief* formarán otro plano cuadrangular semejante al primero; porque el ángulo DIE=*die* por la semejanza de los triángulos en que estan; por la misma razon $EIF = eif$: tambien tirando las DF, *df*, serán semejantes los triángulos DIF, *dif* por ser sus lados proporcionales, y será el ángulo $DIF = dif$; pero $DIF = DIE + EIF$, por la hipótesi de estar los triángulos DIE, EIF en un mismo plano: luego $dif = die + eif$; pero esto no podria ser si los triángulos *die*, *eif* no estuviesen en un mismo plano; pues entonces el ángulo *dif* seria menor que la suma de los otros dos *die*, *eif*: luego estos dos triángulos forman un mismo plano; y del mismo modo demostraré que si las bases de los tetraedros parciales forman en un poliedro cualquier polígono, las bases de los correspondientes tetraedros formarán en el otro un polígono del mismo número de lados que el primero, y semejante á él; pues constará de triángulos respectivamente semejantes á los del primero: luego las caras de los poliedros semejantes son semejantes: luego etc.

346. *Las áreas de los poliedros semejantes son como los cuadrados de sus aristas homólogas.*

Dem. Estas áreas se componen de caras, respectivamente semejantes: luego serán como los cuadrados de sus aristas homólogas; pero todas sus aristas son proporcionales: luego las caras tambien, y la suma de todas las caras de un poliedro, que componen su área, es á la área del otro en la misma razon que dos caras semejantes, ó en la misma razon que los cuadrados de sus aristas homólogas: luego etc.

347. *Cilindros semejantes* son los que tienen los rectángulos generadores semejantes, es decir, sus alturas proporcionales á los radios de sus bases.

348. *Las áreas de los cilindros semejantes son como los cuadrados de sus alturas ó de los radios de sus bases.*

Dem. Sean R y r los radios de las bases, y H y h las alturas: llamando S y s las áreas, será $S = 2pRH$, y $s = 2prh$ (306): luego $\frac{S}{s} = \frac{RH}{rh} = \frac{R}{r} \times \frac{H}{h}$; pero $\frac{H}{h} =$

$\frac{R}{r}$ en los cilindros semejantes: luego sustituyendo será $\frac{S}{s}=\frac{R^2}{r^2}$: luego etc.

349. *Conos semejantes* son los que tienen semejantes sus triángulos generadores, y por tanto los radios de las bases proporcionales á alturas y apotecmas.

350. *Las áreas de los conos semejantes son como los cuadrados de los radios de sus bases, ó como los cuadrados de sus alturas y apotecmas.*

Dem. Sean S, s las áreas de los dos conos: R y r los radios de sus bases: A y a sus apotecmas: será $S=p$AR, $s=par$ (313): luego $\frac{S}{s}=\frac{AR}{ar}=\frac{A}{a}\times\frac{R}{r}$; pero en los conos semejantes $\frac{A}{a}=\frac{R}{r}$: luego sustituyendo $\frac{S}{s}=\frac{R^2}{r^2}$: luego etc.

351. *Las áreas de las esferas son como los cuadrados de sus radios.*

Dem. Sean S y s las áreas de las esferas, R y r los radios: será $S=4pR^2$, y $s=4pr^2$ (334): luego $\frac{S}{s}=\frac{R^2}{r^2}$: luego etc.

352. Dos poliedros son *simétricos*, cuando cada dos vértices correspondientes estan en una misma recta perpendicular á un plano, y á igual distancia de dicho plano.

353. *Los poliedros simétricos tienen iguales sus aristas, caras, ángulos poliedros y diedros.*

(Fig. 83.) Dem. Sean A, B, C, D, a, b, c, d los vértices de dos poliedros simétricos con respecto al plano MN: será AP$=a$P, BQ$=bQ$. Doblando el trapecio AabB por la recta PQ, caerá QB sobre qb por ser rectos los ángulos en Q, y PA sobre Pa por ser rectos los ángulos en P: por ser PA$=$Pa, caerá A sobre a; y por ser QB$=$Qb, caerá B sobre b: luego AB se ajustará con ab y serán iguales: luego las aristas son iguales.

El triángulo ABC$=abc$ por ser iguales las aristas que lo forman, por la misma razon ACD=*acd*: si ABC y ACD forman un solo plano cuadrangular, *abc* y *acd* formarán tambien un solo plano cuadrangular; porque el ángulo BAC=*bac* por estar en triángulos iguales: CAD=*cad* por la misma razon: BAD=*bad*, porque tirando las aristas BD, *bd*, serán iguales los triángulos BAD, *bad*; pero el ángulo BAD=BAC+CAD por la hipótesi de estar los triángulos BAC y CAD en un mismo plano: luego *bad*=*bac*+*cad*; pero si los triángulos *bac* y *cad* estuviesen en diferentes planos, seria *bad* menor que *bac*+*cad*: luego dichos triángulos forman un solo plano; y por tanto á cada cara de un sólido corresponde otra en su simétrico del mismo número de lados é igual á ella, pues constan de triángulos respectivamente iguales: luego las caras son iguales.

Los ángulos poliedros son iguales, porque constan de ángulos triedros iguales. Los ángulos diedros son iguales por ser iguales los ángulos diedros de los tetraedros: luego etc. A pesar de la igualdad de todas sus partes no es posible hacer coincidir los poliedros simétricos.

354. *Todo paralelepípedo se compone de dos prismas triangulares simétricos.* (Fig. 84.)

Dem. Sea el paralelepípedo Ac. Por las aristas opuestas D*d*, B*b* tiro el plano D*d*B*b*, que será un paralelógramo, por ser D*d* igual y paralela á B*b* (154); por tanto los sólidos ABD*abd*: DBC*dbc* son dos prismas triangulares, pues todas sus caras son paralelógramos, y sus bases son triángulos paralelos é iguales, por ser mitades de los paralelógramos iguales ABCD, *abcd*. Ahora, bajando desde *a* la perpendicular *a*F, al plano ABCD, y tirando la AF, DF, y desde *c* la perpendicular *cf* al plano *abcd*, y tirando las *bf*, *cf*, tendremos que las perpendiculares *a*F, C*f* son iguales por paralelas entre planos paralelos. Tambien los triángulos rectángulos *a*AF, C*cf* son iguales; por ser A*a*=C*c* por aristas, y *a*F=C*f* (88): luego el lado AF=*cf*. Del mismo modo demostraremos que DF$=$*bf*, suponiendo tiradas las rectas *a*D, C*b* que serán iguales y paralelas, porque las unen DC y *ab* iguales y paralelas: luego el triángulo ADF$=$*bcf* por tener sus lados iguales.

Coloco el prisma DBC*bcd* bajo el prisma ADB*adb*, de modo que la base *dbc* coincida con su igual ADB, poniendo *bc* sobre su igual AD, y *cd* sobre su igual AB. El triángulo *cfb* coincidirá con su igual ADF, el punto caerá *f* sobre F, y las F*a*, C*f* perpendiculares á un mismo plano, estarán en una misma recta; y como son iguales, los vértices *a* y C (tranferido á E) equidistarán de la base comun; y como se podrá demostrar lo mismo de los vertices *d* y B transferido á I, y *b* y D transferido á H, serán dichos dos prismas simétricos: luego etc.

XVII. *Volúmenes.*

355. *Se puede construir un prisma recto equivalente á un oblícuo, teniendo ambos una misma arista.*

(Fig. 85.) Dem. Sea el prisma oblícuo AD: prolongo sus aristas, y tiro el plano MN perpendicular á su prolongacion: tomo P*p*$=$BD, y tiro el plano *po* paralelo á PO. El sólido OB se puede sobreponer á OD. Porque la base OP se puede sobreponer á su igual *op*. Siendo P*p*$=$BD, añadiendo á ambas partes *p*B, será PB$=$*p*D, y por tanto el punto B caerá sobre D. Los planos AB, CD coincidirán por estar igualmente inclinados á la arista; y siendo las bases AB, CD iguales, coincidirán tambien: luego los sólidos OB, OD coinciden, y son iguales: quitando de ambos el sólido *o*B, será el prisma recto O*p* equivalente al oblícuo AD: luego etc.

356. *Dos prismas simétricos son equivalentes.*

Dem. Sean los dos prismas simétricos AD, *ad*, simetrizados con respecto al plano MN perpendicular á la direccion de sus aristas: construyo los prismas rectos O*p*, O*p'* respectivamente equivalentes á los prismas simétricos: estos prismas rectos podrán coincidir por ser sus bases y aristas iguales: luego serán iguales: luego los simétricos, que son equivalentes á ellos, son equivalentes entre sí.

357. *Los paralelepípedos de igual base y altura son equivalentes.* (Fig. 86.)

Dem. Sean los dos paralelepípedos EI, EN, cuyas bases superiores MI, HN esten entre las paralelas MN, GK: los prismas triangulares EGMH, FINK son superponibles, haciendo coincidir las bases triangulares GEH, IFK que son iguales; y como las aristas MG, NK de ambos prismas son iguales, coincidirán el uno con el otro, y serán iguales: restándolos ambos del sólido total, quedará el paralelepípedo EI= al paralelepípedo EK: luego dos paralelepípedos de una misma base y altura, que ajustados por la base inferior tienen las superiores entre unas mismas paralelas, son equivalentes.

Si ajustadas las bases inferiores, no quedan las superiores entre unas mismas paralelas, como sucede á las bases ABCD, *abcd* (Fig. 87.), prolongando CD y BA, *bc* y *ad* hasta que se encuentren, formarán el paralelógramo A′B′C′D′: este será igual á cada uno de los otros dos; porque sus ángulos son iguales á los de ABCD, y *abcd* por las paralelas, y los lados A′D′, B′C′ son iguales á AD, y BC por paralelas entre paralelas, asi como los lados C′D′, B′A′ son iguales á *cd*, *ba* por paralelas entre paralelas: luego el paralelógramo A′B′C′D′, siendo igual á cualquiera de los otros dos será igual á la base comun inferior; y haciendo pasar un tercer paralelepípedo desde la base inferior hasta el paralelógramo A′B′C′D′, este será equivalente al que tiene por base superior á ABCD, porque sus bases superiores estan entre unas mismas paralelas CD′, BA′: el tercer paralelepípedo será equivalente al que tiene por base superior á *abcd*, porque sus bases superiores estan entre unas mismas paralelas *b*C′, *a*D′: luego los dos paralelepípedos propuestos, equivalentes al tercero, son equivalentes entre sí: luego etc.

358. *Un paralelepípedo oblicuángulo es equivalente*

á otro rectángulo de igual altura y base equivalente.
(Fig. 88.) Dem. Sea ABCD la base del paralelepípedo oblicuángulo propuesto: levantando en sus vértices cuatro perpendiculares iguales á su altura, el paralelipípedo ABEI, que tiene la misma base y altura que el propuesto, será equivalente á él. Tomo en el paralelipípedo ABEI por base la cara AM; y levantando en sus vértices cuatro perpendiculares iguales á la altura del paralelógramo ABCD, formaré el paralelipípedo rectángulo AH, equivalente á ABEI, por tener la misma base y altura que él, y por tanto equivalente al propuesto: luego etc.

359. *Dos paralelepípedos rectángulos de una misma base son entre sí como sus alturas.*

Dem. Si las alturas son comensurables, dividiéndolas en partes iguales á su medida comun, y tirando planos paralelos á la base, quedarán divididos en paralelepípedos rectángulos iguales, porque tendrán iguales bases y alturas (357), y como en cada uno de los dos paralelepípedos habrá tantos parciales como veces contiene su altura á la medida comun, será un paralelepípedo al otro en la misma razon que sus alturas.

Si las alturas BC, *bc* son incomensurables, (Fig. 61.) divídase la altura BC en un cierto número de partes iguales, y tómense sobre *bc* partes iguales á las de BC: el último punto de division no caerá en *c*, pues BC y *bc* son incomensurables, sino en *l* fuera de la *bc*: tiro el plano *li* paralelo á la base *ab*; y como *bc* y *bl* son comensurables, los paralelepípedos *al*, AC son como sus alturas: esto es $\frac{al}{AC}=\frac{bl}{BC}$: pero $al=ac+dl$ y $bl=bc+cl$, sustituyendo es $\frac{ac}{AC}+\frac{dl}{AC}=\frac{bc}{BC}+\frac{cl}{BC}$. Los primeros términos de cada miembro son constantes; pero *dl* y *cl* son disminuibles á voluntad, pues el punto *l* puede acercarse cuanto se quiera al punto *c*, tomando partes mas pequeñas en la BC: luego si existe la ecuacion entre las variables, existe entre sus límites y será $\frac{ac}{AC}=\frac{bc}{BC}$: luego etc.

360. *Dos paralelepípedos rectángulos de igual altura son entre sí como sus bases.*

(Fig. 62.) Dem. Sean dichos paralelepípedos P y p, y colóquense de modo que coincidan en un ángulo triedro, y en la arista de la altura, que es igual; y sean sus bases AC y AK. Prolónguese la IK hasta H, y levántese sobre la base AH un paralelepípedo, que llamo Q, de igual altura que los otros dos. Los paralelepípedos P y Q tienen comun la base levantada sobre la arista AB, y serán como sus alturas AD, AI: esto es, $\frac{P}{Q}=\frac{AD}{AI}$. Los paralelepípedos Q y p tienen comun la base levantada sobre la arista AI, y serán como sus alturas AB, AL, ó $\frac{Q}{p}=\frac{AB}{AL}$: multiplicando estas dos ecuaciones, será $\frac{P}{p}=\frac{AD\times AB}{AI\times AL}$; pero AD × AB es el área del rectángulo AC, base del paralelepípedo P, y AI × AL es área del rectángulo AK, base de p: luego etc.

361. *Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera son como los productos de sus bases por sus alturas.*

Dem. Sean los dos paralelepípedos P y p, sus bases B y b, sus alturas A y a. Prolongo el paralelepípedo p hasta que tenga tanta altura como P, y llamo Q al paralelepípedo p prolongado. Como P y Q tienen una misma altura, serán como sus bases (360), esto es, $\frac{P}{Q}=\frac{B}{b}$: como Q y p tienen una misma base, serán como sus alturas (359), esto es, $\frac{Q}{p}=\frac{A}{a}$: multiplicando estas dos ecuaciones será $\frac{P}{p}=\frac{A\times B}{a\times b}$.

362. *Los paralelepípedos rectángulos son como los productos de sus tres dimensiones, es decir, de las*

tres aristas que concurren en un ángulo triedro.

Dem. Una de estas aristas es A, a: las otras dos C, D, multiplicándolas entre sí componen el área de la base B; y en el otro paralelepípedo c, d multiplicadas entre sí componen el area de la base b: siendo, pues, $\frac{P}{p}=\frac{A\times B}{a\times b}$, poniendo por B, $C\times D$, y por b, $c\times d$, será $\frac{P}{p}=\frac{A\times C\times D}{a\times c\times d}$: luego etc.

363. Para medir el volúmen de los cuerpos, se ha tomado por unidad el cubo, cuyas aristas son iguales á la unidad lineal.

364. *El volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al area de su base multiplicada por su altura.*

Dem. Sea P el paralelepípedo y C el cubo que se toma por unidad. Sea A la altura del paralelepípedo, y D y G las dimensiones de su base: como el cubo es un paralelepípedo rectángulo, cuyas dimensiones son 1, 1 y 1, será $\frac{P}{C}=\frac{A\times D\times G}{1\times 1\times 1}=A\times D\times G$: y como las veces que P contiene al cubo C es lo que se toma por volumen del paralelepípedo, será este volúmen $A\times D\times G$; pero A es la altura, y $D\times G$ es la base: luego etc.

365. El volúmen de un cubo es igual á la tercera potencia de su lado; porque el area de su base es el cuadrado de su lado, y multiplicándola por la altura, igual tambien al lado, resultará la tercera potencia de este.

366. *El volúmen de un paralelepípedo oblicuángulo es igual al area de su base por su altura*; porque es igual á un paralelepípedo rectángulo de igual altura y base equivalente (358).

367. *El volúmen de un prisma triangular es igual á su base por su altura.*

Dem. Si el triángulo de la base se duplica formando un paralelógramo, y sobre este se construye un paralelepípedo, quedará dividido en dos prismas triangulares y simétricos (354), y por consiguiente iguales (356): luego el volúmen de uno de ellos será la mitad del paralelepípedo, es decir, igual á su altura por la mitad de su base, ó por la base del prisma: luego etc.

368. *El volúmen de cualquier prisma es igual á su base por su altura*; porque tirando planos de una arista á las opuestas, quedará dividido en prismas triangulares de igual altura; y valiendo cada uno el producto de su altura por su base, el volúmen total será igual á la altura factor comun, multiplicada por la suma de las bases, ó por la base total del prisma.

369. *El volúmen de un cilindro es igual á su base multiplicada por su altura.*

Dem. Circunscribo á la base del cilindro un polígono regular, y construyo sobre él un prisma de igual altura que el cilindro. Sea S la base del cilindro: x el esceso del polígono sobre dicha base: será la base del prisma $S+x$. Sea V el volúmen del cilindro: sea z el esceso del prisma sobre el cilindro: será $V+z$ el prisma: llamo A la altura, y será $V+Z=AS+Ax$; y como x y z son disminuibles á voluntad, habrá ecuacion entre las constantes, y será $V=AS$: luego etc.

370. Sea A la altura de un cilindro y R el radio de su base: la área de esta será pR^2, y el volúmen del cilindro pR^2A.

371. Si se divide la altura del tetraedro en partes iguales, y por los puntos de division se tiran planos paralelos á la base, construyendo sobre las secciones que resulten, varios prismas, uno sobre cada seccion, circunscripto al tetraedro, y otro por la parte inferior, inscripto en el tetraedro truncado siguiente, la diferencia entre la suma de los prismas inscriptos y la de los circunscriptos, es el prisma construido sobre la base inferior, y cuya altura sea la misma que la de los demas.

Porque cada prisma circunscripto debe ser igual al inscripto en la parte inferior de su base, por tener ambos igual base é igual altura (368): luego cada prisma circunscripto se desvanecerá en la resta con el inscripto sobre su misma base, y solo escederán los circunscriptos á los inscriptos en el prisma construido sobre la base inferior, que no tiene otro con que desvanecerse: luego etc.

372. *Los tetraedros de igual base y altura son iguales.*

Dem. Sean T y t los tetraedros propuestos; y dividiendo sus alturas en un mismo número de partes iguales, tirando por los puntos de division planos paralelos á las bases, cada dos secciones correspondientes serán iguales, porque serán proporcionales á las bases que son iguales: luego los prismas circunscriptos en el primer tetraedro serán iguales á los correspondientes del 2.°; pues tendrán igual base y altura: luego la suma de los prismas circunscriptos será la misma en ambos tetraedros. Sea x el esceso de la suma de los prismas circunscriptos al tetraedro T sobre el volúmen de dicho tetraedro: será $T+x$ la suma de dichos prismas. Sea z el esceso de la suma de los prismas circunscriptos al tetraedro t sobre el volúmen de dicho tetraedro: será la suma de dichos prismas $t+z$; y como ambas sumas son iguales, será $T+x=t+z$. Ahora x y z son disminuibles á voluntad, porque la suma de los prismas circunscriptos puede aproximarse cuanto se quiera á la de los inscriptos, y por tanto al tetraedro que está entre las dos, dividiendo la altura en mayor número de partes, lo que disminuirá la altura del prisma construido sobre la base del tetraedro, el cual prisma es la diferencia entre ambas sumas: luego si $T+x$ y $t+z$ son iguales, sus límites lo serán, y por tanto $T=t$: luego etc.

373. *Todo tetraedro es la tercera parte de un prisma triangular de igual base y altura.*

(Fig. 71.) Dem. Sea el tetraedro cABC; sobre sus aristas AB, BC, Cc, fórmese el prisma AE: quitándole el tetraedro, quedará la pirámide cuadrangular cABba, que dividirémos con el plano caB en dos tetraedros iguales, por tener sus vértices en un mismo punto, y ser sus bases mitades del paralelógramo AB*ab*. Tambien el tetraedro B*abc* es igual al propuesto *c*ABC, por tener ambos la misma altura que el prisma, y por bases las de este: luego los tres tetraedros son iguales, y uno de ellos, como *c*ABC, es la tercera parte del prisma de igual base y altura.

374. *El volúmen de un tetraedro es el tercio de su altura multiplicado por el área de su base;* pues es la tercera parte del prisma de igual base y altura.

375. *El volúmen de una pirámide es el tercio de su altura multiplicado por su base;* pues dividiéndola en tetraedros con planos tirados desde una arista á las opuestas, estos tetraedros tendrán una misma altura, y siendo el volúmen de cada uno el tercio de la altura por su base parcial, la suma de todos será el tercio de la altura, factor comun, multiplicado por la suma de sus bases, ó por la base total.

376. *El volúmen de un cono es el tercio de su altura por su base.*

Dem. Circunscribo á la base del cono un polígono regular, y construyo sobre este una pirámide, cuyo cúspide sea el del cono. Sea S el área de la base del cono; x su diferencia á la del polígono circunscripto: esta será igual á $S+x$: sea V el volúmen del cono; z su diferencia al de la pirámide circunscripta: esta será $V+z$; y como debe ser igual al tercio de su altura por la base, siendo A la altura del cono, será $V+z=\frac{1}{3}A(S+x)$ ó $V+z=\frac{1}{3}AS+\frac{1}{3}Ax$; y siendo z y x cantidades disminuibles á voluntad, dando mas lados al polígono circunscripto, los límites V y $\frac{1}{3}AS$ serán iguales: luego etc.

377. Sea R el radio de la base del cono, A su altura: su base será pR^2 y su volúmen $\frac{1}{3}pAR^2$.

378. El volúmen de un poliedro se halla dividiéndolo en pirámides, y sumando los volúmenes de estas.

379. *El volúmen de una pirámide ó cono truncado de bases paralelas es el tercio de su altura, multiplica-*

do por la suma de sus bases con una base media proporcional entre ellas.

Dem. Sea a la altura del tronco, B^2, b^2 dos cuadrados, iguales en área á sus bases: x la altura de la pirámide parcial que falta al tronco para ser pirámide completa. Siendo las bases B^2, b^2 como los cuadrados de sus distancias al vértice, será $\frac{B^2}{b^2}=\frac{(a+x)^2}{x^2}$, ó estrayendo raiz cuadrada, $\frac{B}{b}=\frac{a+x}{x}$, de donde $Bx=ab+bx$, y $x=\frac{ab}{B-b}$, y $a+x=\frac{aB}{B-b}$. El volúmen de la pirámide total (375) será $\frac{\frac{1}{3}aB^3}{B-b}$, el de la parcial $\frac{\frac{1}{3}ab^3}{B-b}$: luego restando, el volúmen del tronco será $\frac{1}{3}a.\frac{B^3-b^3}{B-b}=\frac{1}{3}a(B^2+b^2+Bb)$; pero $Bb=\sqrt{B^2b^2}$: luego etc.

380. En el cono truncado, siendo R el radio de la base superior y r el de la inferior, las áreas de estas dos bases serán pR^2, pr^2: la base media proporcional será $\sqrt{pR^2\times pr^2}=\sqrt{p^2R^2r^2}=pRr$: luego el volúmen del cono truncado será $\frac{1}{3}A(pR^2+pr^2+pRr)=\frac{1}{3}Ap(R^2+r^2+Rr)$.

381. *El volúmen de la esfera es igual al tercio del radio multiplicado por el área de la esfera.*

Dem. Circunscríbase al círculo máximo de la esfera un polígono regular, que girando al rededor del eje, formará un sólido compuesto de un cilindro, conos truncados y conos enteros. Circunscríbanse á estos, al cilindro un prisma, y á los conos pirámides: quedará la esfera rodeada de superficies planas tangentes á ella; y tirando por el centro y por las aristas planos, quedará el poliedro circunscripto dividido en pirámides, cuya altura comun será el radio de la esfera (328), y sus bases las caras del sólido: luego el volúmen del poliedro será igual al tercio del radio multiplicado por su área.

Sea V el volúmen de la esfera: x el esceso del poliedro sobre la esfera: S el área de la esfera, z el esceso del área del poliedro sobre la de la esfera; será $V+x$ el volúmen del poliedro; y $S+z$ su área; y como multiplicada esta por $\frac{1}{3}R$, debe producir el volúmen del poliedro, será $V+x=\frac{1}{3}SR+\frac{1}{3}zR$; como x y z pueden disminuir cuanto se quiera, aumentando indefinidamente los lados del polígono circunscripto al círculo máximo de la esfera, será $V=\frac{1}{3}RS$: luego etc.

382. Poniendo por S, $4pR^2$, será el volúmen de la esfera $\frac{4}{3}pR^3$.

383. *Dos segtores esféricos de una misma esfera coinciden, cuando sus casquetes son iguales;* pues coincidiendo estos, han de coincidir los centros; si no, no podrian ser iguales los radios tirados á un mismo estremo del casquete; pues se separaria mas el uno que el otro de la perpendicular bajada desde dicho estremo sobre la recta que une los centros.

384. *El volúmen de un segtor esférico es al de la esfera como el área de su casquete á la de la esfera.*

Dem. Si el área del casquete es comensurable con la de la esfera, dividiendo entrambas áreas en partes, iguales cada una á su medida comun, quedarán el segtor y la esfera divididos en igual número de segtores iguales; y por tanto el segtor será á la esfera como el área del casquete al área de la esfera.

Si las dos áreas son inconmensurables, sea a el área del casquete, A la de la esfera: v el volúmen del segtor, V el de la esfera. Divido el área A en un número arbitrario de partes iguales, y tomando en el área del casquete partes iguales á cada una de las que se han tomado en el área de la esfera, para tomar la última parte será necesario salir fuera del casquete; pues si no, fuera este comensurable con el área de la esfera, y su medida comun seria una de las partes iguales del área de la esfera. Sea, pues, x la parte que es necesario tomar fuera del casquete; y será $a+x$ comensurable con el área de la esfera. Sea z el aumento del segtor correspondiente al aumento x del casquete; y será $v+z$ comensurable con el volúmen de la esfera, y tendremos $\frac{v+z}{V}=\frac{a+x}{A}$, ó $vA+Az=Va+Vx$; pero z y x son disminuibles á voluntad, tomando mayor número de partes en el área de la esfera: luego los límites de ambos miembros son iguales, esto es, $vA=Va$, ó $\frac{v}{V}=\frac{a}{A}$: luego etc. La fórmula del segtor será $\frac{2}{3}pR^2x$, siendo x la altura de su casquete.

385. *El volúmen del segmento esférico se halla, restando del segtor $CDAG=\frac{2}{3}pR^2x$, el cono $CDIG=\frac{1}{3}CI\times$ área del círculo DI.* (Fig. 89.) Ahora $CI=R-x$: área del círculo $DI=pDI^2$; pero $DI^2=CD^2-CI^2=R^2-R^2+2Rx-x^2$: luego el área del círculo $=p\ (2Rx-x^2)$ $=px\ (2R-x)$; y el cono $\frac{1}{3}px\ (2R-x)\ (R-x)=\frac{1}{3}px$ $(2R^2-3Rx+x^2)$. Restada del segtor, será el segmento $=\frac{1}{3}px(2R^2-2R^2+3Rx-x^2)=\frac{1}{3}px^2(3R-x)$.

386. *Los poliedros circunscriptos á la esfera estan con ella en la razon de sus áreas;* pues el tercio del radio es factor comun en sus volúmenes, y sus áreas son los factores desiguales (381).

387. *El volúmen de la esfera es los $\frac{2}{3}$ del cilindro circunscripto;* pues el área de la esfera es los $\frac{2}{3}$ de la del cilindro, y los volúmenes deben estar en la razon de las áreas.

388. *Los volúmenes de las pirámides semejantes son como los cubos de sus dimensiones homólogas.*

(Fig. 74.) Dem. Las pirámides SABC, *sabc* tienen por volúmenes $\frac{1}{3}SH\times ABC...$ y $\frac{1}{3}sh\times abc...$ luego $\frac{SABC}{sabc}=\frac{SH}{sh}\times\frac{ABC...}{abc...}$; pero las bases ABC.... *abc*.... son como los cuadrados de sus alturas: luego $\frac{ABC...}{abc...}=\frac{SH^2}{sh^2}$; y sustituyendo será $\frac{SABC...}{sabc...}=\frac{SH^3}{sh^3}$; pero SH y *sh* son proporcionales á otras dos cualesquiera dimensiones homólogas: luego etc.

389. *Los volúmenes de los poliedros semejantes son como los cubos de sus dimensiones homólogas.*

Dem. Sean P y p los poliedros: por ser semejantes podrán dividirse en los tetraedros T, T′, T″... t, t', t''... respectivamente semejantes: estos tetraedros serán como los cubos de dos líneas homólogas A y a; de modo que $\frac{T}{t}=\frac{A^3}{a^3}$, $\frac{T'}{t'}=\frac{A^3}{a^3}$, $\frac{T''}{t''}=\frac{A^3}{a^3}$ etc. Sumando los términos de estos quebrados iguales será $\frac{T+T'+T''+\ldots}{t+t'+t''+\ldots}=\frac{A^3}{a^3}$; pero $T+T'+T''+\ldots=P$, $t+t'+t''\ldots=p$: luego $\frac{P}{p}=\frac{A^3}{a^3}$: luego etc.

390. *Los volúmenes de las esferas son como los cubos de sus radios.*

Dem. Sean R y r los radios de las dos esferas: sus volúmenes serán $\frac{4}{3}pR^3$, $\frac{4}{3}pr^3$ (381): luego $\frac{\text{Esfera}}{\text{esfera}}=\frac{R^3}{r^3}$: luego etc.

391. *Los volúmenes de los cilindros semejantes son como los cubos de sus generatrices.*

Dem. Sean A y a sus alturas, R, r los radios de sus bases: sus volúmenes serán pAR^2, par^2: luego $\frac{\text{Cil.}}{\text{cil.}}=\frac{A}{a}\times\frac{R^2}{r^2}$; pero en los cilindros semejantes $\frac{A}{a}=\frac{R}{r}$: luego $\frac{\text{Cil.}}{\text{cil.}}=\frac{R^3}{r^3}$; y siendo los radios de las bases como las generatrices, serán los cilindros como los cubos de las generatrices.

392. *Los volúmenes de los conos semejantes son como los cubos de sus generatrices.*

Dem. Sean A y a sus alturas, pR^2, pr^2 sus bases: será $\frac{\text{Cono}}{\text{cono}}=\frac{A}{a}\times\frac{R^2}{r^2}$; pero $\frac{A}{a}=\frac{R}{r}$: luego $\frac{\text{Cono}}{\text{cono}}=\frac{R^3}{r^3}$, ó como los cubos de las generatrices.

393. *Los poliedros simétricos son iguales en volumen.*

Dem. Descompuestos los poliedros simétricos en tetraedros, estos serán simétricos respectivamente, y teniendo iguales bases y alturas cada dos tetraedros (372), tendrán igual volúmen: luego los poliedros serán tambien iguales.

XVIII. *Apéndice de proposiciones y problemas de Geometría* (1).

394. (Fig. 7.) *Angulos. Si en un punto de una recta se tiran dos rectas hácia contrarias partes de la primera, que formen con ella ángulos iguales hácia contrarias partes, estas dos rectas forman una sola.* Sean iguales los ángulos ACB, DCE: si CD no es prolongacion de BC, lo será CO, y los ángulos ACB y ECO serán iguales por verticales: pero ACB=DCE, luego DCE=ECO, la parte al todo, lo que es absurdo, etc.

Si dos ángulos tienen sus lados perpendiculares, serán iguales ó suplemento el uno del otro, segun que el vértice del uno esté ó no comprendido entre los lados del otro. Porque si el vértice G está entre los lados BA, BI como los cuatro ángulos del cuadrilátero BHGI valen cuatro rectos (151), y los ángulos H é I son rectos, será G suplemento de B. Pero si el vértice D está fuera de los lados AB, BI ó sus prolongaciones, por ser el ángulo D complemento de E en el triángulo rectángulo DCE, y B complemento de E en el triángulo rectángulo BFE, será D=B. (Fig. 90.)

Por un punto dado fuera de una recta, tirar otra que forme con ella un ángulo dado. Por cualquier punto de la recta tiro otra que forme con ella un ángulo igual al dado; y tirándole por el punto dado una paralela, esta formará el mismo ángulo con la propuesta.

(Fig. 91.) *Por un punto dado dentro de un ángulo tirar una recta, que quede bisecada en dicho punto entre los lados del ángulo.* Tírese por el punto una paralela á un lado del ángulo, y tómese una parte BC=BD, y tiro la CA. Siendo BC=BD, será CO=OA. (112.)

(1) Hemos procurado no omitir en los artículos anteriores ninguna de las verdades geométricas que son elementales; en este artículo indicarémos con brevedad muchas demostraciones y soluciones que aunque no sean rigorosamente necesarias para la enseñanza elemental, no deben ser ignoradas de los que se dediquen al estudio de las Matemáticas.

Por un punto dado tirar una recta, que corte á otras dos. Si son paralelas, cualquier recta que no sea paralela á ellas, las cortará. Si forman ángulo, tiro una paralela á cada una, y cualquier otra recta las cortará á entrambas.

(Fig. 92.) *Dados dos puntos y una recta, buscar en esta un punto tal, que las rectas tiradas á él desde los otros dos, formen ángulos iguales con la recta dada.* Sean los puntos A, B, y la recta dada CD: tiro BE perpendicular á CD, tomo EG=BE, y tiro la AG. Será el ángulo AFC=GFD=BFD (23).

Dado un ángulo y dos puntos, tirar por ellos rectas á los lados igualmente inclinadas con dichos lados, dos á dos: esto es, que el ángulo CME=CMT, y MTO=DTA. (Fig. 93.)

Para esto tiro CE perpendicular á OB, tomo EF=EC. Tiro FG perpendicular á AO: tomo GH=GF: tiro HD, y luego FT y luego MC: las rectas pedidas son CM, MT y TD.

Si el contorno es de tres lados como BOAP, y se quiere ir desde *C* hasta *N* formando siempre ángulos iguales con los lados del contorno, tiro CE perpendicular á OB, tomo EF=CE, tiro FG perpendicular á OA, tomo GH=GE, tiro HQ perpendicular á QP, tomo QV=QH, y tiro VN, RH, TF, MC: y será el ángulo NRP=TRA, RTA=MTO, TMO=CME. La demostracion de ambos problemas pende de que las oblícuas equidistantes de la perpendicular forman ángulos iguales con ella.

395. *Rectas en el círculo. Si desde un punto tomado dentro ó fuera del círculo, se tiran varias rectas á la parte mas distante de la circunferencia, la que pasa por el centro es la mayor, y entre las demas lo es la que pasa mas cerca del centro; pero si se tiran á la parte mas cercana de la circunferencia, es menor la que prolongada pasa por el centro; y entre las demas la que prolongada pasa mas cerca del centro.* Estas proposiciones se demuestran, tirando radios á los estremos de las rectas, que no pasan por el centro, y aplicando el principio de que el camino mas corto entre dos puntos es la línea recta.

De aqui se infiere, *que las rectas que forman ángulos iguales con la que pasa por el centro, son iguales: y que no hay ningun punto, desde el cual se puedan tirar á la circunferencia tres rectas iguales como no sea el centro.*

396. *Intersecciones y tangencias. Si dos circunferencias se cortan en un punto, que esté fuera de la línea que une sus centros, se han de cortar en otro punto* (Fig. 34). Porque córtense las dos circunferencias en B, fuera de la NC: tiro BO perpendicular á NC:

prolongo la BO hasta que $OA=OB$; siendo NC perpendicular á AB en su mitad, los puntos N y C equidistan de A y B, y por tanto el punto A está en ambas circunferencias: luego etc.

Consecuencias. 1.ª Si dos circunferencias se cortan, la recta que une los centros es perpendicular á la cuerda comun y la biseca. 2.ª Si dos circunferencias se tocan, es decir, tienen un solo punto comun, este punto de contacto se ha de hallar en la recta que une los centros; pues si estuviera fuera de ella, habria dos puntos comunes á entrambos círculos, contra la hipótesi. 3.ª Si dos círculos se tocan, la tangente al uno en el punto de contacto, lo ha de ser al otro; pues debe ser perpendicular á la recta que une los centros (63).

Sea d la distancia de los centros de dos círculos, R y r sus radios: es facil demostrar por la inspeccion de las figuras: 1.º Que si se cortan en dos puntos, $d<R+r>R-r$: 2.º Si se tocan esteriormente $d=R+r$: 3.º Si se tocan interiormente $d=R-r$: 4.º Si son esteriores, $d>R+r$: 5.º Si son interiores, $d<R-r$. Las recíprocas son evidentes, porque cualquiera de las fórmulas anteriores escluye las demas.

Dado un punto en una recta, y otro fuera de ella, tirar un círculo que pase por ambos puntos y sea tangente á la recta. En el primer punto levanto una perpendicular á la recta: esta deberá pasar por el centro. Uno los dos puntos, y en la mitad de la cuerda que los una levántole una perpendicular: esta deberá pasar por el centro: luego el centro será el punto de encuentro de las dos perpendiculares (54).

Dado un punto en una circunferencia y otro fuera de ella, describir un círculo que pase por ambos y toque á la circunferencia dada. Tiro en el primer punto una tangente á la circunferencia dada, y repito la construccion del problema anterior.

Dado un círculo y una recta, tirar una tangente paralela á la recta. Tiro un diámetro perpendicular á dicha recta, y las tangentes en sus estremos serán paralelas á la recta.

Dada una recta y dos puntos fuera de ella, tirar un círculo que pase por dichos puntos, y toque á la recta. Tiro una recta por los dos puntos: si esta segunda recta es paralela á la dada, la perpendicular en su mitad pasará por el centro, y marcará en la recta dada, á la cual será tambien perpendicular, el punto de contacto; tendré pues tres puntos de la circunferencia.

Pero si la recta que una los dos puntos se encuentra con la recta dada, el valor de la tangente se hallará, buscando una media proporcional entre la que ha de ser secante y su parte esterna. Esta tangente dará el punto de contacto.

Dados dos círculos, tirar una recta, tangente á ambos. Uno sus centros con una recta, tiro dos radios paralelos y uno sus estremos con otra recta. Si desde el punto donde se encuentran estas dos rectas, tiro una tangente á un círculo lo será al otro. Porque estando en proporcion las distancias de dicho punto á los centros, con dos radios paralelos, si el radio de un círculo es perpendicular á su tangente, es preciso que lo sea el radio del otro círculo (63, 64).

(Fig. 94.) *Dado un círculo y una recta, describir otro círculo, que sea tangente al dado, que pase por un punto de la recta dada, y que tenga su centro en otro punto de la misma recta.* CE es la recta dada, y *D* el punto por donde ha de pasar la circunferencia. Tomo DC$=$ al radio del círculo; tiro CA, y en su mitad B, la perpendicular BE: E es el centro y ED el radio del círculo pedido: porque siendo EC$=$EA (32), quitando DC$=$IA, será ED$=$EI; y como EA es igual á la suma de los dos radios habrá contacto entre los dos círculos.

Tirar un círculo, que toque á un círculo dado y á dos rectas dadas.

(Fig. 95.) Si las dos rectas se encuentran, como cK y cn, en el vértice c del ángulo que forman, levanto la cb perpendicular á cK, y la cd, perpendicular á cn, tomando cb y cd iguales al radio del círculo dado o. Por b y d tiro bl y dm paralelas respectivamente á cK y cn, las cuales se encontrarán en a: tiro la $acfi$, que bisecará los ángulos iguales bad, Kcn por ser iguales los triángulos bac, cad. En un punto cualquiera f de la $acfi$, tiro las fe, fg perpendiculares respectivamente á al, am: estas perpendiculares serán iguales: hago centro en f con el radio fg, y describo una circunferencia: tiro la ao, que la cortará en h: tiro la fh, y su paralela oi: i será el centro del círculo pedido, y su radio ir.

Dem. Los triángulos semejantes afh, aoi dan $\frac{ai}{af}=\frac{io}{fh}$: los triángulos semejantes afg, aim dan $\frac{ai}{af}=\frac{im}{fg}$: luego $\frac{io}{fh}=\frac{im}{fg}$; pero $fh=fg$: luego $io=im$: quitando $ro=nm$, será $ir=in$; y como $in=iK$, se infiere que haciendo centro en i con el radio ir, el círculo descrito tocará al círculo o y á las dos rectas dadas.

Si las rectas dadas fuesen paralelas, el centro del círculo dado estará en la paralela media entre ellas: tiro por fuera de las paralelas dadas otras dos, que disten de las primeras una cantidad igual al radio del círculo dado: desde el centro de este describo un arco con un radio igual á la distancia de la paralela media á cualquiera de las nuevamente tiradas; y el punto en que este arco corte á la paralela media es el centro del círculo pedido.

Describir un círculo, que pase por un punto dado, y sea tangente á dos rectas dadas.

Sean las rectas *al*, *am* y el punto dado *h*: tiro la *ai*, que biseque el ángulo *lam*: en ella deberá estar el centro del círculo pedido. Tiro *hu*, perpendicular á *afi*, y tomo $ut = uh$: el círculo pedido pasará por *t*, y la cuestion se reduce á describir un círculo, que pase por *h* y *t*, y toque á la *al*.

Si las dos rectas son paralelas, la paralela, media entre ellas, hace el mismo oficio, que la recta que biseca el ángulo en el caso anterior.

(Fig. 96.) *Si desde cada punto de una recta se tiran dos tangentes á un círculo, las cuerdas que unan los puntos de contacto, han de pasar todas por un mismo punto;* esto es, si tiro OP perpendicular á la recta, y desde P las tangentes PK, PL, tirando la cuerda KL, por su mitad han de pasar todas las cuerdas mencionadas.

Dem. KL es paralela á PM, por ser perpendicular á OP, respecto á que los puntos K, L equidistan de P y O. Por A, mitad de KL, tiro la cuerda CG, y desde el centro su perpendicular OF*p*: digo que *p*G es tangente; porque en el triángulo rectángulo OKP es $OP \times OA = OK^2$, y en los triángulos semejantes OFA, OP*p*, es $OP \times OA = Op \times OF$: luego $Op \times OF = OG^2$: luego el ángulo *p*GO es recto (132) y *p*G tangente: luego etc.

397. *Triángulos. Las rectas que bisequen los ángulos de un triángulo se han de encontrar en un solo punto;* porque tirando dos rectas, que bisequen á dos ángulos, y desde su punto de encuentro una recta al tercer ángulo, y perpendiculares sobre los tres lados; se verá en los triángulos rectángulos que resultan, cuya igualdad se demuestra, tomándolos dos á dos, que el tercer ángulo está tambien bisecado, y al mismo tiempo, que son iguales las perpendiculares.

Inscribir en un triángulo dado un círculo. Biseco dos ángulos y el punto de concurso de las rectas, que los bisequen, será el centro; y el radio, la perpendicular bajada desde dicho punto sobre un lado.

Tambien es fácil demostrar, *que cada tangente contada desde* *el vértice de un ángulo es igual á la semisuma de los tres lados, menos el opuesto á dicho vértice.* Porque sean a, b, c los tres lados: A, B, C las tangentes respectivas, contadas desde los vértices opuestos: será $A=b-C$, $A=c-B$, y $2A=b+c-(B+C)$; pero $B+C=a$: luego $2A=b+c+a-2a$, y $A=\frac{1}{2}(b+c+a)-a$: luego etc.

Si sobre los lados de un triángulo se toman partes iguales cada una al semiperímetro del triángulo, menos el lado opuesto al ángulo, desde donde se ha empezado á tomar dicha parte, las perpendiculares levantadas en sus estremos, se encontrarán todas en un mismo punto y serán iguales; porque serán radios del círculo inscripto.

Las perpendiculares bajadas desde los vértices de un triángulo sobre los lados opuestos, se encuentran todas en un mismo punto.

(Fig. 97.) Dem. Sea el triángulo ABC. Circunscribo un círculo á dicho triángulo: tiro la BS perpendicular á AC, y la CD perpendicular á AB: digo que $OM=MS$. Porque el ángulo $ACS=ABS$: luego sus complementos (74) CSM y BOD, ó COM son iguales, y el triángulo OCS es isósceles. Del mismo modo demostraré que si tiro AE, perpendicular á BC, llamando O' su punto de concurso con la BM, será $MO'=MS$: luego $MO'=MO$, y O' coincide con O: luego etc.

Las rectas tiradas desde los vértices del triángulo á las mitades de los lados opuestos, se encuentran en un mismo punto, que está á los $\frac{2}{3}$ de cada una, contando desde el vértice.

(Fig. 98.) Dem. Tiro AC y BE que bisequen los lados DB, AD. Tirando la EC será paralela á AB, porque biseca los otros dos lados, y $EC=\frac{1}{2}AB$: luego en los triángulos semejantes OEC, OAB, será $OC=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{3}AC$: luego $AO=\frac{2}{3}AC$. Tirando la DF á la mitad del lado AB, y llamando O' al punto en que se encuentra con la AC, demostraré que $AO'=\frac{2}{3}AC$, y que el punto O' coincide con O: luego etc.

(Fig. 17.) *Describir un círculo en el cual una recta dada subtenda un arco doble, del que subtenderá en el mismo círculo otra recta dada.* Sean las dos rectas AB, AD. Haciendo centro en A y B con un radio $=AD$, señalo por decusacion el punto D en la CD perpendicular á AB en su mitad, y hago pasar el círculo por A, D y B (54).

(Fig. 99.) *Construir un triángulo rectángulo, dado el perímetro y un cateto.* Sea AE el perímetro y AB un cateto: tiro BD=

BE, y perpendicular á AE: tiro DA: en su mitad *O* levántole la perpendicular OC: el triángulo pedido será ACB; pues siendo AC=CD, será AC+CB=BD=BE.

Por un punto dado dentro de un ángulo tirar una recta, que corte partes iguales en sus dos lados. Biseco el suplemento del ángulo dado, y por el punto dado tiro una paralela á la recta bisecadora. La demostracion es por la propiedad del ángulo esterno de un triángulo.

Inscribir en un círculo una cuerda de un tamaño determinado, y que pase por un punto dado. Inscribo la cuerda en cualquier sitio de la circunferencia, y desde el centro tiro un círculo tangente á ella: tiro despues desde el punto dado una tangente al nuevo círculo: la parte de esta tangente comprendida en la primer circunferencia, será la cuerda pedida; pues será igual á la que se inscribió por equidistantes del centro.

Por un punto dado tirar á dos círculos concéntricos una recta tal, que su parte comprendida entre ambas circunferencias tenga una magnitud determinada: en cualquier sitio coloco esta magnitud entre ambas circunferencias: describo desde el centro un círculo tangente á esta recta, y desde el punto dado una tangente al nuevo círculo: esta será la recta pedida.

Construír un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa y la suma ó diferencia de los catetos. En un estremo de la recta, que es la suma ó diferencia dada, formo un ángulo semirecto, y desde el otro estremo hago centro con la hipotenusa dada: el punto en que corte al lado del ángulo semirecto es el vértice del triángulo pedido. Se demuestra por la propiedad del triángulo isósceles.

398. *Angulos en el círculo. El ángulo formado en la circunferencia por una cuerda y la prolongacion de otra, tiene por medida la semisuma de los arcos que subtenden ambas cuerdas:* porque es suplemento del inscripto que forman las dos cuerdas. *El ángulo excéntrico*, es decir, que tiene su vértice dentro del círculo, *tiene por medida la semisuma de los arcos, que comprenden sus lados; y el ángulo circunscripto*, es decir, el que tiene su vértice fuera de la circunferencia, y por lados rectas tangentes ó secantes del círculo, *tiene por medida la semidiferencia de los arcos que comprenden sus lados.*

Estas proposiciones se demuestran por la igualdad de los ángulos correspondientes, y la medida del ángulo inscripto ó del segmento tirando una paralela á un lado del ángulo por el punto, en que el otro lado corta ó toca la circunferencia.

Dados tres puntos, determinar otro, conocidos los ángulos que forman las rectas, que le unan con los otros tres: tiro dos rectas que unan los tres puntos: construyo sobre cada una un segmento de círculo capaz del respectivo ángulo dado (111), y el punto pedido estará en el de encuentro de ambas circunferencias.

Construir un triángulo, dada su base, su altura y su ángulo vertical. Sobre la base construyo un segmento de círculo capaz del ángulo vertical; tiro una paralela á la base, á una distancia de ella igual á la altura, y el punto de encuentro de esta paralela con la circunferencia será el vértice del triángulo pedido.

El problema puede tener dos soluciones, ó una, ó ser imposible.

Construir un triángulo, dada la base, el ángulo vertical, y el radio del círculo inscripto.

Las rectas que bisecan los ángulos sobre la base, forman un ángulo que llamo x: sea C el ángulo vertical, y A y B los ángulos sobre la base: será $x+\frac{1}{2}(A+B)=2$ rectos; pero $A+B=2$ rectos$-C$: luego $x=$ un ángulo recto $+\frac{1}{2}C$. Construyo, pues, un triángulo, dada su base, su ángulo vertical, que es el valor hallado de x, y su altura, que es el radio del círculo inscripto: el vértice de este triángulo será el centro de dicho círculo, que será facil describir, pues se conoce su radio.

Desde los estremos de la base tírole dos tangentes, y estas serán los otros dos lados del triángulo pedido.

Dados dos círculos, concéntricos y un triángulo, construir otro semejante á este, que tenga dos vértices en el círculo mayor y otro en el menor.

(Fig. 100.) Sea ABC el triángulo dado. Desde A con un radio igual al del círculo mayor describo el arco mn, y tomo en el círculo mayor en cualquier sitio un arco $B't=2mn$: construyo sobre la cuerda $B't$ un segmento de círculo capaz del ángulo suplemento de C: el arco cortará al círculo menor en C': tiro las $tC'A'$, $A'B'$ y $B'C'$: el triángulo pedido es $A'B'C'$. Este problema puede tener dos soluciones ó una, ó ninguna para cada posicion de la cuerda $B't$.

399. *Proporciones. En todo triángulo, bajada una perpendicular desde el vértice de un ángulo sobre el lado opuesto, el lado sobre que cae la perpendicular será á la suma de los otros dos, como su diferencia á la diferencia de los segmentos que la*

perpendicular forma en dicho lado, si cae dentro, ó á su suma, si cae fuera.

Dem. Sean a, b, c los tres lados del triángulo, p la perpendicular bajada sobre c, y x, z los segmentos de c. En los triángulos rectángulos, que forma la perpendicular, será $p^2=a^2-x^2$, $p^2=b^2-z^2$: luego $a^2-x^2=b^2-z^2$, $a^2-b^2=x^2-z^2$, $(a+b)(a-b)=(x+z)(x-z)$. Si la perpendicular cae dentro, $x+z=c$, y será $c : a+b :: a-b : x-z$. Si la perpendicular cae fuera, será $x-z=c$, y será $c : a+b :: a-b : x+z$: luego etc.

Si en dos puntos de una recta se tiran dos paralelas á un lado y dos á otro, si hay proporcion entre las cuatro paralelas, las rectas que unan sus estremos se han de encontrar en un mismo punto con la dada.

(Fig. 101.) Dem. Si $\frac{BD}{CE}=\frac{BF}{CG}$, las rectas ED, CB, GF se han de encontrar en un mismo punto. Sea A el encuentro de DE con BC, y tendré $\frac{BD}{CE}=\frac{BA}{CA}$. Sea A′ el encuentro de BC con FG, y será $\frac{BF}{CG}=\frac{BA'}{CA'}$: los primeros miembros son iguales por la hipótesi: luego $\frac{BA}{CA}=\frac{BA'}{CA'}$. Dividiendo será $\frac{BC}{BA}=\frac{BC}{BA'}$: luego BA $=$ BA′, y A′ coincide con A: luego etc.

Tirar por un punto dado una recta, que se encamine al punto de concurso de otras dos dadas, cuando este concurso está muy lejos. Sean las rectas dadas CB, GF y el punto dado D. Por dos cualesquiera puntos tomados en la BC tiro en cualquier direccion las paralelas BF, CG. Tiro la BD, y su paralela CE: tomo sobre esta una parte CE igual á la cuarta proporcional á BF, CG y BD; y tirando la ED, esta se encaminará al punto de concurso de las CB, GF.

La recta que divide por medio el ángulo de un triángulo, divide el lado opuesto en partes proporcionales á los otros dos lados.

(Fig. 102.) Dem. Sea el triángulo ABC, y la recta BE biseque el ángulo ABC: tiro AD paralela á BE, que encuentre á la CB prolongada, en D; será $\frac{AE}{EC}=\frac{DB}{BC}$; pero DB $=$ AB, por ser el ángulo D $=$ DAB, pues lo son sus iguales EBC, ABE: luego $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}$: luego etc.

La recta que saliendo de un ángulo de un triángulo corta el lado opuesto en partes proporcionales con los otros dos lados, biseca el ángulo de donde sale. Se demuestra fácilmente con la misma proporcion.

La altura de un triángulo forma el mayor segmento de la base adyacente al mayor lado.

Dem. Sean b la base, y a, c los otros dos lados del triángulo y $a>c$. Sean x, y los segmentos respectivamente adyacentes á a, c: la altura sea z, tendremos $z^2=a^2-x^2$, $z^2=c^2-y^2$, ó $a^2-x^2=c^2-y^2$, ó $a^2-c^2=x^2-y^2$, pero $a>c$, luego $x>y$: luego etc.

(Fig. 97.) *En una circunferencia dada buscar un punto tal, que las cuerdas tiradas desde él á dos puntos dados en la misma circunferencia, esten en una razon dada.* Sean A, B los puntos dados: divido por medio el arco AB en R: divido la cuerda AB en la razon dada, en D, tiro la RD, y el punto pedido es C: por la CR, bisecando al arco AB, biseca al ángulo ACB, y por tanto $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$.

Por el punto de interseccion de dos círculos tirar una recta de un tamaño determinado $=$m, *y cuyas partes sean cuerdas de ambos círculos.*

(Fig. 103.) Sea E el punto dado: tiro la AEF en cualquiera direccion: tiro la BA, y busco una cuarta proporcional á AF, m, y AB; y haciendo centro con ella en A, describo un arco que corte al círculo BAE en D, y tirando la DEC, será $=m$.

Dem. Los triángulos ABF, DBC semejantes dan $\frac{AF}{DC}=\frac{AB}{BD}$; pero por construccion $\frac{AF}{m}=\frac{AB}{BD}$: luego DC$=m$. El problema tiene dos soluciones.

A un triángulo dado circunscribir otro tambien dado.

Sobre dos lados del primero formo dos segmentos de círculo, capaces de los ángulos, que han de estar respectivamente opuestos en el circunscripto, y por el punto de encuentro de ambos círculos tiro una doble cuerda igual al lado del circunscripto, comprendido entre aquellos dos ángulos.

Los cuadrados de las cuerdas tiradas á los estremos del diámetro son como los segmentos correspondientes; pues el cuadrado de cada una es igual al diámetro multiplicado por el segmento correspondiente (137).

En todo triángulo el producto de dos lados es igual al producto del diámetro del círculo circunscripto por la altura bajada sobre el tercer lado.

Sea el triángulo EBC. Tiro el diámetro EQ, la perpendicular ER y la cuerda BQ. Serán semejantes los triángulos EBQ, ERC, y dan $\frac{EB}{EQ}=\frac{ER}{EC}$.

Si en el radio de un círculo y su prolongacion se toman dos puntos tales, que el radio sea medio proporcional entre sus distancias al centro, las distancias de cualquier punto de la circunferencia á aquellos dos estarán en una razon constante. Se demuestra por la semejanza de los triángulos que se forman.

400. *Polígonos. En todo cuadrilátero inscripto en el círculo, cada ángulo es suplemento del opuesto*; pues sus medidas componen media circunferencia.

Todo cuadrilátero, en que un ángulo sea suplemento del opuesto, es inscriptible en el círculo; pues sino, un ángulo será igual á otro, cuyo vértice está en su abertura, insistiendo ambos sobre una misma recta, lo que es imposible.

Todo rectángulo es inscriptible en el círculo, y sus diagonales son diámetros del círculo circunscripto.

En todo cuadrilátero inscripto el producto de sus diagonales es igual á la suma de los productos de los lados opuestos.

(Fig. 104.) Dem. Tómese el arco $CO=AD$, tírese la BO. Los triángulos ABD, IBC semejantes dan $\frac{AD}{CI}=\frac{BD}{BC}$, de donde $BD\times CI=AD\times BC$. Los triángulos ABI, BDC semejantes dan $\frac{AB}{BD}=\frac{AI}{CD}$, de donde $BD\times IA=AB\times CD$: sumando será $AC\times BD=AD\times BC+AB\times CD$: luego etc.

Las diagonales de un cuadrilátero inscripto son entre sí como las sumas de los productos de los lados, que terminan en sus estremos.

Dem. Los triángulos ABD, BIC semejantes dan $\frac{BD}{BC}=\frac{AB}{BI}$, de donde $BD\times BI=AB\times BC$: tiro la CO: los triángulos semejantes ICO, BDC dan $\frac{BD}{CO}=\frac{DC}{OI}$, de donde $BD\times OI=AD\times DC$. Sumando será $BD\times BO=AB\times BC+AD\times DC$.

Tomo $BP=AD$, y tiro la CP: demostraré que $AC\times CP=$

$AB \times AD + BC \times CD$, y partiendo será $\frac{BD}{AC} = \frac{AB \times BC + AD \times DC}{AB \times AD + BC \times CD}$: luego etc.

Dados los cuatro lados de un cuadrilátero inscripto en el círculo, hallar sus diagonales. Se reduce á resolver este problema algebraico: *hallar dos cantidades, dado su producto y su cociente.*

En todo paralelógramo, la suma de cuadrados de sus diagonales es igual á la suma de los cuadrados de sus lados. Se demuestra bajando desde los estremos de un lado perpendiculares sobre el opuesto, y hallando el valor del cuadrado de cada diagonal por la proposicion del núm. 135.

En todo polígono regular de un número par de lados, cada lado es paralelo á su opuesto; pues inscribiéndole en el círculo serán iguales los arcos comprendidos entre los lados opuestos.

En todo polígono regular de un número impar de lados, el radio oblícuo está en línea recta con la apotecma tirada al lado opuesto; pues tirando las diagonales á los estremos de dicho lado desde el ángulo opuesto, se demuestra que estas diagonales son iguales, el triángulo, que resulta isósceles, y su altura debe bisecar el ángulo vertical y confundirse con el radio oblícuo tirado á él.

En todo polígono regular de un número par de lados las rectas que unen dos lados opuestos, forman con ellos un paralelógramo; pues dichas rectas unen á otras dos iguales y paralelas.

Este paralelógramo es rectángulo en el exágono regular: se demuestra calculando el ángulo que forma la recta que une los lados opuestos, con el adyacente, el cual ángulo debe ser la tercera parte de un ángulo recto: restándole del ángulo del exágono, que es $\frac{4}{3}$ de un recto, queda un ángulo recto.

Hallar el lado del triángulo equilátero circunscripto al círculo. Las fórmulas del núm. 199 $z = \sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}a^2)}$, $y = \frac{Ra}{z}$, nos darán el lado del polígono regular circunscripto, siendo a el lado del inscripto del mismo número de lados. Siendo, pues, en el triángulo equilátero inscripto $a = R\sqrt{3}$, será $z = \frac{1}{2}R$, $y = 2R\sqrt{3}$, doble del lado del triángulo inscripto.

Lado del cuadrado circunscripto. Ahora $a = R\sqrt{2}$, $z = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$, $y = 2R$, igual al diámetro del círculo.

Lado del exágono circunscripto. Ahora $a = R$: $z = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$, $y = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$.

Lado del decágono circunscripto. Ahora $a = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)$: $z = \frac{1}{4}R\sqrt{2}(\sqrt{5}+5)$, $y = R\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{(5+\sqrt{5})}}$.

El lado del pentágono regular inscripto es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son el radio y el lado del decágono regular.

Dem. Sea p el lado del pentágono; d el del exágono (tenemos $d = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)$, y $d^2 = \frac{1}{4}R^2(6-2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}R^2(3-\sqrt{5})$. Tambien tenemos $z = \sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}p^2)}$, y por la fórmula del polígono de doble número de lados, que está en el núm. 199, $d^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}p^2)}$. Igualando estos dos valores, quitando radicales, la ecuacion final da $p^2 = \frac{1}{2}R^2(5-\sqrt{5}) = R^2 + d^2$.

Lado del pentágono circunscripto. Ahora $a = \frac{1}{2}R\sqrt{2}(5-\sqrt{5})$: $z = \frac{1}{4}R\sqrt{2}(5-\sqrt{5})$; $y = R.2\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$.

400. *Figuras semejantes. Si desde un punto tomado en lo interior de una figura se tiran rectas á sus vértices, y se prolongan proporcionalmente á sus longitudes, la figura que pase por los estremos de las prolongaciones será semejante á la dada;* pues tendrá sus lados paralelos y proporcionales á los de la figura dada.

Si construidas las dos figuras semejantes del teorema anterior, se toman en cada recta que pasa por dos vértices partes proporcionales á los dos lados homólogos de ambas, las figuras que unan los estremos de estas partes proporcionales serán semejantes entre sí.

Hallar la longitud de un arco, conocida su relacion con la circunferencia. Sea l la longitud del arco: n el quebrado que representa su relacion con la circunferencia; R el radio: será $l = 2pRn$.

401. *Areas. Hallar el área comprendida entre dos círculos, de los cuales el uno está dentro del otro.* Siendo sus radios R y r, sus áreas son pR^2, pr^2, y la del espacio comprendido entre ellos es $pR^2 - pr^2 = p(R+r)(R-r)$: esta fórmula demuestra, que en cualquier posicion que esté el círculo interior, como no deje de serlo, el área comprendida es siempre la misma.

Esta fórmula comprende la determinacion de las áreas de los *arbelos* de Proclo y Arquímedes, y del *Salinon* de este último, que son espacios comprendidos entre un círculo mayor, y otros menores inscriptos en él con dimensiones y leyes determinadas.

Las *lúnulas* de Hipócrates son los espacios comprendidos entre el semicírculo descrito sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y los semicírculos descritos sobre los catetos. Su suma es igual al triángulo, y cada una de ellas es igual á la mitad del triángulo, cuando es isósceles. Es facil determinar sus áreas.

El lado del cuadrado equivalente á un paralelógramo es medio proporcional entre su base y su altura; pues x^2=AB.

Si sobre dos lados de un triángulo se construyen dos paralelógramos cualesquiera, se prolongan los lados esteriores de estos, desde su encuentro se tira una recta al vértice, se prolonga hasta debajo de la base, se corta en la parte que está debajo de la base una parte igual á la parte de dicha recta, comprendida entre el vértice y el punto mencionado de concurso, se tira por el estremo de la prolongacion una paralela á la base, y sobre esta se construye un paralelógramo, cuya otra base esté en la paralela tirada, este paralelógramo será igual á la suma de los otros dos. (Fig. 105).

Dem. Sea el triángulo DAI; construyo sobre AD el paralelógramo AC, y sobre AI el paralelógramo AH. Prolongo los lados esteriores CB, FH, hasta que se encuentren en E: tiro la EANO, y tomo NO=AE: tiro POL paralela á DI, y sobre DI construyo el paralelógramo DK: será DK=AC+AH; porque tirando NM paralela á IK, y GIL paralela á EO, será el paralelógramo NK=OI=IE=AH: del mismo modo demostraré que el paralelógramo NP=AC: luego DK=AC+AH: luego etc.

Si el triángulo es rectángulo y los paralelógramos son cuadrados, es facil aplicar esta proposicion general, y deducir la propiedad del cuadrado de la hipotenusa.

El área terminada por dos paralelas y dos líneas curvas tirando paralelas medias equidistantes que dividan las curvas en partes, que se puedan considerar como líneas rectas, es igual aproximadamente á la distancia entre dos paralelas multiplicada por la suma de todas ellas menos la semisuma de las estremas. Esto se demuestra, hallando las áreas de los trapecios, en los cuales es factor comun la altura, y sumando despues (215).

Las áreas de los triángulos que tienen un ángulo igual, son como los productos de los lados que lo comprenden; porque tirando las alturas, su razon ha de ser igual á la de las hipotenusas en los triángulos rectángulos, y semejantes que resultan hácia la parte donde está el ángulo igual.

Construir un triángulo equivalente á otro dado, conocida su base y la recta en que ha de estar su vértice (Fig. 106).

Dado el triángulo ABC construir otro equivalente, cuya base sea FL, y cuyo vértice esté en un punto de la NM. Por el punto F tiro FD paralela á BC; tiro DC y su paralela AE y la recta DE. El triángulo BDE es equivalente á BAC; porque siendo $\frac{BD}{BA}=\frac{BC}{BE}$, será BD $\times$ BE $=$ BC $\times$ BA. Esta construccion sirve para construir un triángulo equivalente á otro dado, y que tenga su vértice en un punto dado de uno de sus lados y la base sobre la del otro.

Tomo GH$=$BE, y tiro FG, FH: el triángulo FGH es equivalente al dado. Sabemos, pues, construir un triángulo equivalente á otro dado, que tenga su vértice en un punto cualquiera, y su base en la misma recta que la del triángulo dado.

Construyo un triángulo equivalente á FGH, cuyo vértice esté en L y su base sobre la recta FG, este triángulo es FIL. Esta construccion sirve para hallar un triángulo equivalente á otro dado, cuyo vértice esté en un punto cualquiera, y su base sobre una recta dada.

Finalmente, tiro IM paralela á FL, y M es el vértice del triángulo pedido.

402. *Planos. La menor distancia de dos rectas, que ni son paralelas ni se cortan en el espacio, es la perpendicular á entrambas.* Porque tirando por cada pie de esta perpendicular un plano paralelo á la otra recta, la menor distancia entre ambas ha de ser la de estos dos planos paralelos que es la perpendicular á ambas rectas.

Tres planos paralelos cortan á dos rectas en partes proporcionales.

Esto se demuestra tirando una transversal entre los pies opuestos de las paralelas en los planos estremos, y despues dos planos por la transversal y cada paralela: resultarán triángulos semejantes, que darán la propiedad anunciada en el teorema.

403. *Areas de los cuerpos. Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en su mitad, y en un mismo punto*; porque son diagonales de los dos paralelógramos que se forman, tirando dos planos por las aristas opuestas. El punto en que todas se bisequen, ha de estar en la comun seccion de estos dos planos; pues esta recta, bisecando las diagonales de las bases opuestas del paralelepípedo, que son lados opuestos de los dos paralelógramos mencionados, ha de bisecar tambien las diagonales de estos. La bisecacion de las cuatro diagonales ha de ser en un solo punto, porque se ha de verificar en la comun seccion de los dos

planos transversales y en el plano paralelo á las bases del paralelepípedo que biseque las aristas.

Las diagonales del paralelepípedo rectángulo son iguales; porque son diagonales de rectángulos iguales. Por tanto, todo paralelepípedo rectángulo es inscriptible en la esfera: su centro será el punto donde se bisequen las diagonales, y estas serán diámetros de la esfera.

El cuadrado de la diagonal de un paralelepípedo rectángulo es igual á la suma de cuadrados de sus tres aristas.

(Fig. 88.) Dem. Sea FM la diagonal. Siendo la arista MB perpendicular á la base del paralelepípedo, lo será á la FB que encuentra en él; y en el triángulo FMB, rectángulo en B, será $FM^2 = MB^2 + BF^2$; pero en el triángulo FBG, rectángulo en G, es $BF^2 = FG^2 + BG^2$: luego $FM^2 = MB^2 + FG^2 + BG^2$: luego etc.

Si se circunscribe un triángulo equilátero al círculo máximo de la esfera, y uno de sus lados gira al rededor de su altura, el área total del cilindro circunscripto es media proporcional entre la del cono y la de la esfera.

Dem. Sea R el radio de la esfera: su área es $4pR^2$, la total del cilindro circunscripto $6pR^2$. El lado del triángulo equilátero circunscripto al círculo $2R\sqrt{3}$ (399). La circunferencia de la base del cono será $2pR\sqrt{3}$: el área lateral del cono es $6pR^2$: la de su base $3pR^2$, y la total $9pR^2$; pero 6 es medio proporcional entre 4 y 9: luego etc.

Lo mismo se verifica en los conos y cilindros inscriptos en la esfera; porque el lado del triángulo inscripto es $R\sqrt{3}$: la circunferencia de la base del cono $pR\sqrt{3}$: la área de dicha base $\frac{3}{4}pR^2$: el área lateral del cono es $\frac{3}{2}pR^2$, y la total $\frac{9}{4}pR^2$.

El lado del cuadrado inscripto es $R\sqrt{2}$, la circunferencia de la base del cilindro es $pR\sqrt{2}$, el área de dicha base $\frac{1}{2}pR^2$, el área lateral del cilindro $2pR^2$, y la total $3pR^2$; pero 3 es medio proporcional entre 4 y $\frac{9}{4}$: luego etc.

Llámase *triángulo esférico* aquella parte del área de la esfera, que está comprendida entre las circunferencias de tres círculos máximos, que se cortan dos á dos; y *ángulo esférico* el ángulo diedro, que forman los planos de dos círculos máximos. *Cohete esférico* es la parte del área de la esfera comprendida entre dos semicircunferencias máximas, que se terminan en un diámetro comun.

El área del cohete esférico es á la de la esfera como el ángulo diedro, que forman los dos círculos máximos, que com-

prenden el cohete á cuatro rectos. Si el ángulo es comensurable con cuatro rectos, se demuestra por superposicion, que dos cohetes son iguales, cuando lo son sus ángulos diedros. Si dicho ángulo es incomensurable con cuatro rectos, la proposicion se demuestra por el método de los límites. Asi el área del cohete es $4pR^2n$, siendo n la razon del ángulo diedro á cuatro rectos.

Si dos círculos máximos se cortan, la suma de los dos triángulos opuestos, que formarán con otro tercer círculo máximo, es igual al cohete que dichos círculos comprenden.

(Fig. 107.) Dem. Sean AODN, COBN las dos circunferencias que se cortan en O y N, y que forman el cohete ODNBO. Sea la tercer circunferencia ACDB; digo que el cohete equivale á los dos triángulos AOC, ODB; porque AOC=DNB, como se puede ver por la superposicion, siendo el ángulo diedro O=N, ND=AO, restando de las semicircunferencias AOD, ODN la parte OD comun, y NB=CO, por la misma razon; luego etc.

Hallar el área de un triángulo esférico. Prolongo sus lados hasta que se encuentren en un círculo máximo cualquiera. Tomemos el recto por unidad de los ángulos, y sean A, B, C los tres ángulos esféricos del triángulo: cada dos triángulos opuestos han de componer el área del cohete que forman los círculos de sus lados: luego la suma de los 6 triángulos será $pR^2(A+B+C)$; pero esta suma escede al área del hemisferio en el doble del área del triángulo propuesto, que llamo T: luego $2pR^2+2T=pR^2(A+B+C)$, de donde $2T=pR^2(A+B+C-2)$, y $T=pR^2\left(\frac{A+B+C}{2}-1\right)$: luego *el área del triángulo esférico es igual á la del círculo máximo, multiplicada por el número de ángulos rectos, que comprende la semisuma de sus tres ángulos disminuida en una unidad.*

El triángulo esférico toma el nombre de *trirectángulo*, cuando sus tres ángulos son rectos: su área es la mitad del círculo máximo ó la octava parte del área de la esfera.

El área de un polígono esférico es igual á un triángulo trirectángulo, multiplicado por el número de rectos que contiene la suma de sus ángulos, disminuido en el duplo del número de lados menos 2.

Dem. Tirando desde el vértice de un ángulo esférico arcos de círculo máximo diagonales á los demas vértices, quedará el polígono dividido en tantos triángulos, como lados hay menos 2. Sumando sus áreas, la del polígono será, llamando S la suma de los ángulos, y n su número, $pR^2\left(\frac{S}{2}-(n-2)\right)$. Llamo T al área del triángulo trirectángulo, y será $pR^2=2T$: luego el área del polígono es $T(S-2(n-2))=T\left(S-2n+4\right)$.

Teorema de Eulero. En todo poliedro el número de ángulos poliedros mas el número de caras es igual al número de aristas mas 2.

Dem. Tómese un punto cualquiera en lo interior del poliedro, y desde él tírense rectas á todos sus vértices. Hago centro en dicho punto y describo una esfera: tiro arcos de círculo máximo, que formen tantos polígonos esféricos como caras tiene el poliedro. El área de cada uno será $T\left(S-2n+4\right)$; y la suma de todas sus áreas será T (el número de rectos que hay en la suma de todos los ángulos menos dos veces el número de todos los lados mas 4 multiplicado por el número de caras).

Sea S el número de ángulos poliedros; y como todos los que se reunan en cada vértice de los polígonos, han de valer juntos 4 rectos, se infiere que el número de rectos comprendido en la suma de todos los ángulos es 4S.

Sea A el número de aristas: como cada arista sirve de lado á dos polígonos contiguos, se infiere que el número de lados es doble del de aristas.

En fin, sea C el número de caras.

La suma de áreas de todos los polígonos será $T(4S-4A+4C)$. Esta suma debe ser 8 T, área de la esfera. Partiendo por 4 T, resulta $S+C=A+2$: luego etc.

La suma de los ángulos planos de un poliedro es igual á 4 rectos multiplicados por el número de ángulos poliedros menos 2.

Dem. Sea n el número de lados de una cara: la suma de sus ángulos será $2n-4$, tomando por unidad el ángulo recto. Pero la suma de los $2n$, lados de todas las caras, es $4A$, y el 4 repetido tantas veces como caras hay, es $4C$: luego la suma de todos los ángulos planos es $4(A-C)$; ó por la ecuacion $S+C=A+2$, $4(S-2)$: luego etc.

Todo poliedro regular es inscriptible y circunscriptible á la esfera. (Fig. 108.)

Dem. Sea AB el lado comun á dos caras adyacentes del poliedro, C y E sus centros: tiro las apotecmas CD, ED que serán perpendiculares al lado AB, y lo bisecarán. AB será perpendicular al plano CDE; y tirando en este plano CO, OE perpendiculares á CD, ED, serán iguales por la igualdad de los triángulos rectángulos COD, DOE. Ademas, *CO* está en el plano CDE perpendicular al plano CAB, y es perpendicular á su comun seccion *CD*: luego es perpendicular al plano CAB, y tambien EO lo será al plano BAE: luego las perpendiculares levantadas á dos caras adyacentes en su centro, se encuentran en un punto y son iguales. El triángulo CDO es igual en todas las caras del poliedro, porque CD y el ángulo CDO$=\frac{1}{2}$CDE, han de ser los mismos para todas las caras: luego si con el radio *OC* describo una esfera, esta pasará por los centros de todas las caras, y siendo estas perpendiculares al radio, serán tangentes á la esfera.

Tirando OA, OB, serán iguales por oblícuas equidistantes de la OD perpendicular á la AB: lo mismo se demostrará de todas las rectas tiradas á los vértices del poliedro: luego haciendo centro en *O* con el radio OA, y describiendo una esfera, esta quedará circunscripta al poliedro: luego etc.

403. *Volúmenes. El volúmen de un prisma triangular truncado por cualquier plano es igual á la base multiplicada por el tercio de la suma de las alturas de los vértices de los ángulos triedros de la base superior.* Se demuestra dividiéndolo en tetraedros con planos tirados por las diagonales de los trapecios laterales.

Hallar el volúmen del cilindro circunscripto á la esfera: es $2pR^3$.

El del cono circunscripto: el área de su base es $3pR^2$: su altura es 3R: luego su volúmen es $3pR^3$; *y el volúmen del cilindro circunscripto es medio proporcional entre los volúmenes de la esfera y del cono.*

El volúmen del cilindro inscripto es $\frac{1}{2}pR^3\sqrt{2}$; *y el del cono inscripto es* $\frac{3}{8}pR^3$. *El cilindro inscripto es tambien medio proporcional entre el cono y la esfera.*

FIN DE LA GEOMETRIA.

APLICACION
DEL ALGEBRA A LA GEOMETRIA.

ARTICULO I.

Construccion de las fórmulas.

1. Llámase *aplicacion del álgebra á la geometría* la solucion de los problemas geométricos por medio de ecuaciones algebraicas.

2. La solucion analítica de un problema geométrico consta de cuatro partes: 1.ª, representar por letras los datos y las incógnitas: 2.ª, poner el problema en ecuacion, ya por las propiedades de la figura geométrica, ya por las condiciones del problema: 3.ª, despejar las incógnitas: 4.ª, *construir las fórmulas*, es decir, hacer las operaciones geométricas, que indica el valor de la incógnita.

3. La ventaja de la solucion analítica es la seguridad que tiene el calculador de resolver el problema por medio de las ecuaciones, cuando seria contingente atinar con la solucion valiéndose de consideraciones puramente geométricas. Ademas la fórmula nos puede servir para hallar *en números* el valor de la incógnita, cuando los datos se dan en números.

4. Las construcciones de la geometría elemental se hacen por medio de la línea recta y del círculo; y como las propiedades de estas dos líneas, demostradas en la geometría, solo producen ecuaciones de primero y segundo grado, se infiere que en la aplicacion del álgebra á la geometría elemental solo se pueden construir fórmulas de primero y segundo grado.

5. Si suponemos que todas las letras del cálculo representan distancias, la ecuacion debe ser *homogénea*,

es decir, todos sus términos deben constar del mismo número de *dimensiones* ó factores literales; pues si la ecuacion fuera por ejemplo, $a=bx-c^3$, querria decir que *una recta es igual á un rectángulo menos un cubo.* (G. 210, 365.)

6. Llámanse ecuaciones *eterogéneas* aquellas cuyos términos no contienen igual número de factores literales, por haberse hecho alguno de ellos igual á la unidad. Para hacer homogénea una ecuacion heterogénea se hace $=1$ una letra, por ejemplo r, y se multiplican por sus potencias los términos que tengan menos dimensiones. *Ejemplo.* Si la ecuacion heterogénea es $a=bx+c^2m$, hecha homogénea será $ar^2=brx+c^2m$.

7. De aqui se infiere: 1.°, que si x representa una distancia, y su valor algebraico es un polinomio, no puede ser otra cosa que la suma ó diferencia de varias líneas representadas por los términos del polinomio: 2.°, si el valor de x es fraccionario, debe tener en su numerador un factor mas que en su denominador, para que despejando de quebrados, resulte la ecuacion homogénea: 3.°, si el valor de x es un radical de segundo grado, la cantidad que esté debajo debe tener dos factores, para que elevando al cuadrado ambos miembros, resulte la ecuacion homogénea.

8. *Construir un polinomio.*

Sea $x=a+b-c+d-h$. Sobre una misma recta tómense las líneas positivas a, b, d, á continuacion unas de otras. Quítesele á la línea que resulta la suma de las rectas c y h, y el resíduo será el valor de x.

9. *Construir un valor fraccionario.*

Hay varios casos. 1.° Siendo los dos términos monomios. La fórmula mas sencilla para este caso es $x=\frac{ab}{c}$; de donde $c : a :: b : x$. Búsquese una cuarta proporcional á c, a y b, y dicha cuarta proporcional será el valor de x (G. 117).

10. Si $x=\frac{abc}{de}$, hágase $\frac{ab}{d}=k$, y será $x=\frac{kc}{e}$. Busco,

pues, una cuarta proporcional á d, a y b, y tendré el valor de k: busco despues otra cuarta proporcional á e, k y c, y tendré el valor de x.

Si $x = \frac{abcd}{efg}$, hago $\frac{ab}{e} = k$, $\frac{cd}{f} = l$, y será $x = \frac{kl}{g}$.

Se reduce el problema á buscar tres cuartas proporcionales.

11. Si el numerador es polinomio, como $x = \frac{abc + def - ghi}{lm}$, se descompone en fracciones, y es $x = \frac{abc}{lm} + \frac{def}{lm} - \frac{ghi}{lm}$. Se construye cada fraccion aparte, y despues se suman ó restan las líneas que resulten. Si $x = \frac{a^2 - c^2}{b}$, descomponiendo el numerador en sus factores, es $x = \frac{(a+c)(a-c)}{b}$, y se buscará una cuarta proporcional á b, $a+c$, y $a-c$.

12. Si el denominador es polinomio, se iguala á un monomio, cuyos factores sean todos conocidos menos uno. Por ejemplo, si $x = \frac{abc + def}{ab + cd}$, hago $ab + cd = ak$, de donde $k = b + \frac{cd}{a}$, que se sabe construir: el valor de x será $\frac{abc + def}{ak} = \frac{bc}{k} + \frac{def}{ak}$, que se sabe construir conocida la k.

$x = \frac{abc^2 + q^3h - m^3p}{q^2i - klq + cmd}$. Sea $q^2i - klq + cmd = q^2z$, de donde $z = i - \frac{kl}{q} + \frac{cmd}{q^2}$; y $x = \frac{abc^2 + q^3h - m^3p}{q^2z} = \frac{abc^2}{q^2z} + \frac{qh}{z} - \frac{m^3p}{q^2z}$.

$x = \frac{abc^3 - a^2b^2}{abc + c^3}$ se construye facilmente, haciendo $\frac{ab}{c} = m$, de donde $ab = cm$, y $x = \frac{c^3m - c^2m^2}{c^2m + c^3} = \frac{cm - m^2}{m + c} = \frac{m(c-m)}{m+c}$, una cuarta proporcional.

13. *Construir un radical.*

1.° $x=\sqrt{ab}$ es una media proporcional entre a y b (G. 141).

2.° $x=\sqrt{a^2+b^2}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son a y b (G. 134).

3.° $x=\sqrt{a^2-b^2}$ es un lado de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es a y el otro lado b.

14. En las fórmulas complicadas se igualará la cantidad, que está debajo del radical, al producto de dos factores, uno conocido y el otro desconocido, y se buscará una media proporcional entre ambos (13).

Ejemplos. $x=\sqrt{\frac{ab^2+cd^2}{b+c}}$: hago $\frac{ab^2+cd^2}{b+c}=ak$ de donde $k=\frac{b^2}{b+c}+\frac{cd^2}{a(b+c)}$. El valor de k se determina buscando una tercera y dos cuartas proporcionales. La media proporcional entre k y a es el valor de x.

Si $x=\sqrt{(ac-fg+mq+rd)}$, hago $ac-fg+mq+rd=ak$; de donde $k=c-\frac{fg}{a}+\frac{mq}{a}+\frac{rd}{a}$ y $x=\sqrt{ak}$.

Si $x=\sqrt{\left(a^2-f^2\frac{c^2+d^2}{ab+cd}\right)}$, hago $c^2+d^2=k^2$ (k es una hipotenusa) $ab+cd=l^2$, y será $x=\sqrt{\left(a^2-\frac{f^2k^2}{l^2}\right)}$ hago $\frac{fk}{l}=t$, cuarta proporcional, y será $x=\sqrt{(a^2-t^2)}$ lado de un triángulo rectángulo.

15. Ultimamente si $x=\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots)}$ hago $a^2+b^2=z^2$ (z es una hipotenusa): hago $z^2+c^2=y^2$ (y es otra hipotenusa), y resulta $x=\sqrt{(y^2+d^2+\ldots)}$ En quedando debajo del radical dos cuadrados, x será una hipotenusa.

16. $\sqrt{n}$ se puede construir buscando una media proporcional entre 1 y n; la espresion $\sqrt{2}$, ó buscando una media proporcional entre 1 y 2 ó la hi-

potenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados valgan 1 cada uno.

17. Toda espresion de dos dimensiones representa un área. Iguálese al cuadrado x^2, construyase la x, y el cuadrado construido sobre esta línea será $=$ al área espresada por la fórmula.

Ejemplo. La espresion $\frac{cd^2+a^2c}{m+n}$, que representa un área, iguálese á x^2, y será $x=\sqrt{\frac{cd^2+a^2c}{m+n}}$. Construyo este valor de x y el cuadrado formado sobre él será $=$ $\frac{cd^2+a^2c}{m+n}$.

18. Ultimamente, si la espresion es el producto de tres factores, representará un volúmen, como $\frac{a^3b+cd^3}{m-n}$. Hago esta espresion $=ax^2$, siendo a conocida, de donde $x=\sqrt{\frac{a^3b+cd^3}{(m-n)a}}$. Hallado el valor de x, ax^2 ó la espresion propuesta, representará un paralelepípedo, cuya altura es a, y cuya base es un cuadrado que tenga por lado á x (364).

19. Si x representa la razon de dos distancias, el quebrado que esprese su valor ha de tener tantas dimensiones en el numerador como en el denominador.

II. *Teoría de los signos en la análisis geométrica.*

20. Cuando dos figuras no se diferencian sino en el tamaño de sus partes, y estas estan colocadas en ambas en un mismo sentido, se dice que las figuras estan en correlacion directa. La ecuacion que ligue entre sí las partes de dichas figuras, debe ser la misma para ambas; pues son casos particulares de una misma cuestion.

21. Cuando dos figuras estan entre sí combinadas de tal manera, que una parte es en la una la suma

de dos líneas, y en la otra es la diferencia de las mismas líneas, se dice que las figuras estan en *correlacion indirecta*; y las ecuaciones, que las representen, deben diferenciarse en el signo de la línea, que es sumando en la una y subtraendo en la otra. Las líneas que se añaden en una figura, y se restan en la otra, y que por consiguiente varian de signo en la ecuacion, se llaman *indirectas*. Para abreviar la frase, se suelen llamar las figuras directas ó indirectas segun su correlacion.

Ejemplo. Comparando entre sí dos triángulos, cuyas alturas caigan una dentro y otra fuera, son indirectos, porque la distancia de un vértice A á la perpendicular en el uno es = á la base menos el otro segmento; y en el otro la distancia del vértice correspondiente á la perpendicular es igual á la base mas el otro segmento. Este segmento, que es subtraendo en la primera figura, y sumando en la segunda, es la cantidad indirecta.

22. Una misma ecuacion puede servir para dos figuras indirectas, variando el signo, en la ecuacion hallada para la primer figura, á las cantidades que se hacen indirectas en la segunda.

23. Cuando de la resolucion de un problema geométrico resulta un valor negativo de la incógnita x, se muda el signo de esta en la ecuacion, y se tendrá la condicion á que satisface dicho valor negativo. Entonces se conocerán las líneas que se hacen indirectas en el problema, para que el valor negativo de x, hecho positivo, lo satisfaga. (Al. 21, 3.º)

24. Si la x representa una parte, que se debe tomar sobre una recta desde un punto fijo, el valor negativo satisface al problema, tomándolo desde dicho punto fijo hácia la parte opuesta á aquella en que se hubiera tomado, si la x hubiera sido positiva.

(Fig. 109.) Porque sea A el punto fijo, y sea la incógnita x la distancia de A á B, quedando este punto B determinado por una condicion establecida, sobre la cual se funda la ecuacion (2). Sea C otro punto cualquiera fijo tomado en la línea. Cuando el punto B está á la derecha de A, es CB=CA+AB: cuando está á la izquierda es CB′=CA—AB′: luego AB es cantidad indirecta, y su signo debe mudar de un caso para otro: luego el valor negativo de x debe interpretarse tomándolo á la izquierda del punto A.

La análisis da negativo este valor, por la absurdidad que se ha cometido en la figura hipotética, que nos ha servido para formar la ecuacion; pues en dicha figura hemos supuesto el punto buscado B á la derecha de A, debiendo estar á la izquierda, segun lo ha hecho conocer el cálculo, dando negativo el valor de x.

25. *Toda cantidad variable, que de directa se hace indirecta, se hace igual á cero ó igual al infinito en el valor intermedio.*

Dem. Si la cantidad x se hace indirecta, será sumando antes y subtraendo despues; de modo que habrá dos cantidades a y b tales que $a=b+x$, cuando x es directa, y $a=b-x$, cuando es indirecta. En el primer caso $x=a-b$, en el 2.° $x=b-a$: luego en el primer caso a era mayor que b, y en el 2.° menor; luego en el intermedio ha habido un caso en que $a=b$, y $x=o$.

Puede suceder que el valor de x se determine por una fórmula de esta especie $x=\frac{A}{a-b}$, y entonces en el caso intermedio en que $a=b$, será $x=\infty$: luego etc.

III. *Problemas geométricos de 1.° y 2.° grado.*

26. *Problemas.* 1.° *Inscribir un cuadrado en un triángulo dado.* Sea el triángulo dado ABC, y supongamos ya inscripto el cuadrado, y sea DEFG.

(Fig. 110.) Sea la base AC$=a$, la altura BH$=b$, y el lado del cuadrado DE=IH$=x$.

Los triángulos semejantes ABC, DBE dan $\frac{AC}{BH}=\frac{DE}{BI}$; ó analíticamente, $\frac{a}{b}=\frac{x}{b-x}$.

Resuelta esta ecuacion, da $x=\frac{ab}{a+b}$, fórmula, que se construye buscando una cuarta proporcional á $a+b$, a y b.

Sea, pues, A'BC el triángulo dado: tiro su altura BH; prolongo la base, y tomo CL=AH, y LK=BH: será HK$=a+b$. Tiro la KB, y su paralela LI; será IH la cuarta proporcional pedida, ó el valor de x. Tiro, pues, DIE paralela á la base, y DF y EG perpendiculares á la base, y quedará inscripto en el triángulo el cuadrado DEGF.

27. II. *Dadas dos paralelas y un punto, tirar por él una recta tal, que su parte interceptada entre las paralelas sea igual á una recta dada.* (Fig. 111.)

Sea A el punto dado, DB y EC las paralelas dadas: tiro AB perpendicular á DB, y por tanto á EC. Y supongo tirada la recta pedida, que sea AE: su parte DE debe ser igual á la recta dada m.

Sea AC$=a$, BC$=b$, y CE$=x$, incógnita del problema. Será AE$=\sqrt{(a^2+x^2)}$, y por ser DB paralela á EC en el triángulo AEC, será $\frac{AC}{CB}=\frac{AE}{DE}$, ó $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{m}$.

Elevando al cuadrado, y resolviendo la ecuacion, resulta $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{(m^2-b^2)}$.

El radical $\sqrt{(m^2-b^2)}$ es el cateto de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es m, y el otro cateto es b; y x es una cuarta proporcional á b, a y al radical.

Sea, pues, A' el punto dado, y DB, EE' las paralelas dadas: tiro ABC perpendicular á ellas. Haciendo centro en B con un radio $=m$, describo un arco que cortará la CE en O; será CO$=\sqrt{(m^2-b^2)}$: tiro la BO, y su paralela A'E: será CE cuarta proporcional á b, a

y co, y por consiguiente CE es el valor de x y A'E la recta pedida.

El valor negativo de x se interpreta (24), tomando hácia la parte contraria $CE' = CE$, y tirando la A'E', esta recta dará otra solucion del problema.

Si $m=b$, $x=o$, y la perpendicular AC es la única solucion que tiene el problema. Si $m<b$, el valor de x es imaginario y el problema imposible.

28. III. *Dado un diámetro y una cuerda perpendicular á él, tirar desde el estremo del diámetro otra cuerda tal, que su parte comprendida entre la primer cuerda y su arco sea igual á una recta dada.*

(Fig. 112.) Sea AB el diámetro dado, CD la cuerda dada, y supongo tirada la cuerda pedida, y sea AE: la parte IE debe ser igual á la recta dada m. Tiro las cuerdas AD, DE.

Sea $AD=a$, $AE=x$, $AI=u$. Tendremos $x-u=m$. Los triángulos ADE, AID tienen el ángulo en A comun, y los ángulos AED, ADI iguales, porque sus medidas son las mitades de los arcos iguales AD, AC: luego dichos triángulos son semejantes, y dan $\frac{AE}{AD}=\frac{AD}{AI}$, ó $\frac{x}{a}=\frac{a}{u}$; de donde $xu=a^2$.

Eliminando la x de estas dos ecuaciones, resulta $mu+u^2=a^2$; de donde $u=-\frac{1}{2}m\pm\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+a^2)}$, y $x=\frac{1}{2}m\pm\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+a^2)}$. Los valores superiores de x y u son positivos: los inferiores negativos.

Construyamos el valor positivo de x. Sea A'B el diámetro, CD la cuerda: tiro A'D y DB, que forman ángulo recto. Tomo $DO=\frac{1}{2}m$: tiro la hipotenusa A'O, que será igual $\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+a^2)}$. Prolóngola, hasta que la prolongacion $TO=\frac{1}{2}m$. Será A'T el valor de x. Hago centro en A' con él, y describo un círculo. Si este corta al dado en dos puntos, E y G, tirando las A'E, A'G, estas darán dos soluciones del problema. Se ve, pues, que *un solo valor de la incógnita* puede dar mas de una solucion.

Si el círculo descrito desde A' no tiene mas de un punto comun con el dado, este no podrá ser otro que el punto B. Esto se verifica cuando $m = FB$, y entonces el valor de x es el diámetro, y el problema no tiene mas que una solucion con el valor positivo de x.

Si m es mayor que FB, los dos círculos no tendrán ningun punto comun, y por consiguiente el valor positivo de x no dá ninguna solucion.

Vamos á interpretar los valores negativos de x y de u. Haciendo ambas incógnitas negativas en las ecuaciones del problema, $xu = a^2$ no se altera; pero $x - u = m$, se reduce á $u - x = m$, lo que prueba 1.º que la m es la línea que se hace indirecta; pues antes era $x = u + m$, y ahora es $= u - m$.

2.º Que ahora es $u > x$, y por tanto que la cuerda pedida debe cortar al círculo antes que á la cuerda CD. Observando que el valor negativo de u es igual al positivo de x, se ve que prolongando la cuerda CD y el arco EG hasta que se encuentren en M y N, y tirando las A'M, A'N, estas serán iguales al valor negativo de u, y darán otras dos soluciones del problema: de modo que este problema puede tener dos soluciones esteriores y dos interiores, dos esteriores y una interior, ó dos esteriores solamente.

29. IV. *Señalar en una recta un punto tal, que sus distancias á dos puntos dados formen un rectángulo igual á un cuadrado dado q^2.* (Fig. 113.)

Sea la recta ACB, A y B los puntos dados. Supongo que el punto está señalado, y sea C.

Sea $AB = a$, $AC = x$, $CB = a - x$, y $ax - x^2 = q^2$.

Resolviendo esta ecuacion, será $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - q^2}$.

Si q es mayor que $\frac{1}{2}a$, el radical es imaginario, y no se puede resolver el problema tomando el punto entre A y B.

Si $q = \frac{1}{2}a$, $x = \frac{1}{2}a$, el punto está en la mitad de la recta, el rectángulo pedido es el mismo cuadrado dado, y el problema tiene una solucion entre A y B.

Si q es menor que $\frac{1}{2}a$, $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-q^2)}$, es un cateto, cuya hipotenusa es $\frac{1}{2}a$ y el otro cateto es q. Hago, pues, centro en m con un radio igual $\frac{1}{2}a$, y describo un arco, que cortará á ns en t: el radical será nt. Tomo sobre mt á uno y otro lado del punto t, $to=tz=nt$, y los valores de x serán mo y mz. Su suma es a, coeficiente del 2.º término de la ecuacion, mudado el signo (Al. 43).

Tomo, pues, AC y BC′, iguales cada una á mo, y los puntos C y C′ darán las dos soluciones interiores, que el problema tiene en este caso.

Pero la hipótesis de estar el punto C entre A y B limita la ecuacion $ax-x^2=q^2$ á no dar mas que las soluciones interiores. Supongamos el punto en O, fuera de A y B, y sea AO$=x$, será BO$=a+x$, y la ecuacion $ax+x^2=q^2$ dará las soluciones esteriores. De ella resulta $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+q^2)}$.

Prolongo, pues, la ns y tomo $sh=\frac{1}{2}a$, y tirando la rh, esta será $=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+q^2)}$. Quitándole $ho=hs$ será ro el valor positivo de x. Añadiéndole $hl=hs$, será rl el valor negativo de x. Ambos son reales en todos casos: el 1.º se toma desde A hasta O: el 2.º hácia la parte contraria, y llega hasta O′, siendo BO′=AO; porque $\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+q^2)}-a=-\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+q^2)}$.

El problema tiene dos soluciones fuera de los puntos A y B, y dos dentro, ó dos fuera y una dentro, ó solamente dos fuera.

30. V. *Dadas dos paralelas y su perpendicular, tirar una secante tal, que la mitad de la perpendicular sea media proporcional entre las partes de las paralelas comprendidas entre la perpendicular y la secante.* (Fig. 114.)

Sean AE, BF las paralelas, AB la perpendicular, EF la secante pedida. Sea $\frac{1}{2}$AB$=a$, AE$=x$, BF$=y$; la ecuacion será $xy=a^2$, y el problema es indeterminado. Dando diferentes valores á y, se hallarán los correspondientes de x, por la fórmula $x=\frac{a^2}{y}$.

Pero si se quiere hacer la construccion de una manera mas elegante, introduzcamos una nueva incógnita auxiliar. Para esto levántese en C, mitad de AB, la perpendicular CD, que encuentre á la secante EF en D, y hago $CD=r$, y se trata de hallar los valores de x é y, espresados en r.

Siendo CD paralela media entre AE y BF, será $x+y=2r$. Esta ecuacion y la fundamental $xy=a^2$ dan $x=r\pm\sqrt{(r^2-a^2)}$, $y=r\mp\sqrt{(r^2-a^2)}$.

Haciendo centro en D con el radio $DC=r$, describo un círculo, y tiro II′ paralela á AB. EE′ y FF′ son iguales por cuerdas equidistantes del centro; y cada mitad de estas cuerdas, como $EI=\sqrt{(r^2-a^2)}$. Luego los dos valores de x son AE′, AE; y los correspondientes de y son BF′ y BF.

Luego cada punto de la CD da dos secantes, escepto aquellos en que $r<a$, en los cuales será imposible la solucion, y aquel en que $r=a$, para el cual no habrá mas que una solucion, y la secante será el diámetro paralelo á la AB.

31. VI. *Inscribir en un triángulo una recta dada paralelamente á un lado.*

(Fig. 98.) Sea ADB el triángulo dado, en el cual se quiere inscribir una paralela á AB, que sea $=m$. Sea $AD=b$, $AB=d$, y $DE=x$. Será $\frac{d}{m}=\frac{b}{x}$, $x=\frac{bm}{d}$, que es una cuarta proporcional. Hallada y tomada desde D sobre DA, marcará el punto E, por el cual tirando EC paralela á AB, será $=m$.

32. VII. *Inscribir entre los lados de un ángulo recto una recta dada, que pase por un punto dado equidistante de los dos lados del ángulo.* (Fig. 115.)

Sea A el ángulo recto, E el punto dado, de modo que $EB=EC=a$; sea m la recta que se ha de inscribir, y supongamos que esté inscripta en la posicion FD. Sea K el punto medio de la recta; llamo l á la mitad de la recta, y tomo por incógnita la distancia EK del punto á la mitad de la recta. Sea $EK=x$, será

EF$=l+x$, ED$=l-x$, CD$=\sqrt{((l-x)^2-a^2)}$, y en los triángulos semejantes FBE, ECD, tendré $\frac{FE}{BE}=\frac{ED}{CD}$, ó $\frac{l+x}{a}=\frac{l-x}{\sqrt{((l-x)^2-a^2)}}$, de donde hechas todas las reducciones sale $x^4-(2l^2+2a^2)x^2+l^4-2a^2l^2=o$, ecuacion del 4.° grado; pero que se puede reducir al 2.°, haciendo $x^2=y$. En efecto, será $y^2-(2l^2+2a^2)y+l^4-2a^2l^2=o$, de donde $y=l^2+a^2\pm\sqrt{a^4+4a^2l^2}$, ó $y=l^2+a^2\pm a\sqrt{(a^2+4l^2)}$.

Siendo, pues, $x^2=l^2+a^2\pm a\sqrt{(a^2+4l^2)}$, será $x=\pm\sqrt{(l^2+a^2\pm a\sqrt{(a^2+4l^2)})}$. La incógnita tiene 4 valores, dos positivos y dos negativos.

Los positivos son $x=\sqrt{(l^2+a^2+a\sqrt{(a^2+4l^2)})}$, y $x=\sqrt{(l^2+a^2-a\sqrt{(a^2+4l^2)})}$.

El primero es siempre real y mayor que l. Se construye haciendo $\sqrt{(a^2+4l^2)}=t$, hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son a y $2l$: haciendo $l^2=au$, siendo $u=\frac{l^2}{a}$, tercera proporcional á a y l; $x=\sqrt{a(u+a+t)}$, y se busca una media proporcional entre a y $u+a+t$. Teniendo ya la EK, añádole KF$=l$, y resultará EF mayor que m. Haciendo centro en E con el radio EF describo un arco que cortará la AF en dos puntos, uno sobre A y otro debajo de A. El primero no resolverá el problema; pues desde E hasta él habrá una distancia mayor que m. Supongamos que el 2.° sea G. Tirando la EG, quedará inscripta en el ángulo DAG una hipotenusa m.

El 2.° valor positivo $x=\sqrt{(l^2+a^2-a\sqrt{(a^2+4l^2)})}$ es imaginario, y no da solucion, cuando $l<\sqrt{2a^2}$ ó $l<$ AE. Es nulo, cuando $l=$AE; y en este caso la recta está en el ángulo FAD, y bisecada en E. Es real y menor que l siempre que $l>$ AE; porque en este caso $a^2-a\sqrt{(a^2+4l^2)}$ es cantidad negativa; pues $\sqrt{(a^2+4l^2)}>3a$. Se construye por una media proporcional, pues $x=\sqrt{a(u+a-t)}$. Teniendo la EK, añádole l, y tengo la EF: haciendo centro en E con el radio EK, describo un arco que cortará la FA en dos puntos, el uno sobre A, que será la segunda solucion del problema, y el otro debajo de A, que no dará solucion; pues suponiendo que sea $\mathfrak{G}$, y tirando la E$\mathfrak{G}$ su parte comprendida en el ángulo DA$\mathfrak{G}$ ha de ser menor que m.

Los valores negativos son $x=-\sqrt{((l^2+a^2+a\sqrt{(a^2+4l^2)})}$ y $x=-\sqrt{(a^2+l^2-a\sqrt{(a^2+4l^2)}}$. Se construyen como los positivos, y son iguales á ellos, y se interpretan colocando el punto E entre F y K.

El primero es mayor que l: restándole l, tendré la EF. Haciendo centro en E con el radio EF, describo un arco, que cortará la AF en dos puntos por cima del punto A: tiro por E al mas cercano de A una recta, que formará en el ángulo FAH una hipotenusa $=m$. La recta tirada desde E al punto mas lejano A no dará solucion; pues su parte comprendida en el ángulo FAD ha de ser mayor que m.

El 2.º valor negativo es imaginario, si $l <$ AE; es nulo, si $l=$AE, y la solucion que da es la misma que la del 2.º valor positivo, cuando $l=$AE, es decir, una recta bisecada en E; y es real y menor que l, si l es mayor que AE. Restándolo de l, tendré la EF. Haciendo centro en E con el radio EF describo un arco, que cortará la FA en dos puntos por encima del punto A. Tirando desde E una recta mas cercana á A, no dará solucion; pues la hipotenusa, que quedará inscripta en el ángulo FAH, será menor que m. Tirando una recta desde E al punto mas lejano de A, quedará inscripta en el ángulo FAD una hipotenusa $=m$.

El problema tiene ó cuatro soluciones, dos en el ángulo donde está el punto E, y una en cada ángulo colateral, ó tres soluciones una en cada uno de estos tres ángulos, ó dos soluciones una en cada ángulo colateral.

33. VIII. *Hallar dos rectas, dada la suma de sus cuadrados y el área del rectángulo que forman.*

Sean x é y las dos rectas. Sea la suma de sus cuadrados $=a^2$, y sea b^2 un cuadrado igual á su rectángulo. Las ecuaciones serán $x^2+y^2=a^2$, $xy=b^2$. Sumando y restando la primera ecuacion con el doble de la 2.ª, será $(x+y)^2=a^2+2b^2$, $(x-y)^2=a^2-2b^2$; de donde $x+y=\sqrt{(a^2+2b^2)}$, $x-y=\sqrt{(a^2-2b^2)}$, y por tanto $x=\frac{1}{2}(\sqrt{(a^2+2b^2)}+\sqrt{(a^2-2b^2)})$, $y=\frac{1}{2}(\sqrt{(a^2+2b^2)}-\sqrt{(a^2-2b^2)})$.

Para que el problema sea posible, es menester que $a^2>2b^2$. Si $a^2=2b^2$, las dos rectas son iguales. La construccion se hace por hipotenusas y catetos, haciendo $2b^2=t^2$, donde t es hipotenusa.

34. IX. *Hallar el sector esférico, cuyo cono es equivalente en volúmen al segmento.*

Sea r el radio de la esfera, x la altura del casquete.

El volúmen del segtor $=\frac{2}{3}p\text{R}^2x$, el del segmento $\frac{1}{3}px^2\,(3r-x)$ (G. 384, 385), y como el segmento ha de ser mitad del segtor, será $\frac{1}{3}px^2\,(3r-x)=\frac{1}{3}pr^2x$, ó $x(3r-x)=r^2$, lo que equivale á resolver este problema. *Dividir la recta $3r$ en dos partes tales, que el tercio de la recta sea media proporcional entre ellas.*

La fórmula es $x=\frac{3}{2}r\pm\sqrt{\frac{5}{4}r^2}$. El primer valor es mayor que r, y no sirve para nada en el problema del segtor. El segundo se construye por una hipotenusa; pues $\sqrt{\frac{5}{4}r^2}=\sqrt{(r^2+\frac{1}{4}r^2)}$.

35. X. *Dado un círculo tirar en él una cuerda, cuyos segmentos esten en la razon dada de $m:n$.*

Sea x un segmento: el otro será $\frac{mx}{n}$, y su producto $\frac{mx^2}{n}$.

Llamando r el radio y b la distancia del punto dado al centro, los segmentos del diámetro que pasa por el punto dado son $r-b$, $r+b$, y su producto $r^2-b^2=\frac{mx^2}{n}$ (G. 138). Hago $r^2-b^2=q^2$: q será la perpendicular al diámetro en el punto dado; pues será media proporcional entre sus segmentos $r+b$ y $r-b$. La ecuacion es, pues, $\frac{mx^2}{n}=q^2$; de donde $x=\sqrt{\frac{nq^2}{m}}$, que se construye buscando una media proporcional entre q y $\frac{nq}{m}$. Pero es mas elegante la construccion siguiente. Sobre una recta AH tomo dos partes AQ y QH, que esten en la razon de $m:n$. Sobre AH, como diámetro, describo un semicírculo. Levanto en q la QB perpendicular al diámetro: tiro las cuerdas BA, BH: tomo sobre BA una parte igual á la recta q: tiro CD paralela á AH, y BD será el valor de x.

Dem. Los cuadrados de las cuerdas tiradas á los estremos del diámetro son como los segmentos de este (G. 137): luego $\frac{BA^2}{BH^2}=\frac{m}{n}$; pero $\frac{BA}{BH}=\frac{q}{BD}$: luego $\frac{BA^2}{BH^2}=\frac{Q^2}{BD^2}$, y por tanto $\frac{m}{n}=\frac{q^2}{BD^2}$, de donde $BD=\sqrt{\frac{nq^2}{m}}=x$.

FIN DE LA APLICACION DEL ALGEBRA A LA GEOMETRIA ELEMENTAL.

TRIGONOMETRIA PLANA.

ARTICULO I.

Líneas trigonométricas.

1. Llámase *trigonometria plana* aquel ramo de geometría, que enseña á resolver este problema: *dadas tres de las seis cosas que contiene un triángulo, á saber, tres lados y tres ángulos, determinar las otras tres.*

2. Este problema tiene infinitas soluciones, cuando se dan los tres ángulos; pues hay infinitos triángulos, que tienen unos mismos ángulos; tales son los que son semejantes á uno mismo.

3. Si se dan dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, el problema tendrá dos soluciones, ó una sola, ó será imposible, segun las relaciones que tengan entre sí los datos. (G. 86).

4. Para la resolucion de un triángulo son necesarias tres ecuaciones, pues contiene el problema tres incógnitas; pero como los ángulos se refieren á diferente unidad que los lados, en lugar de los ángulos, se introducen ciertas líneas, llamadas *trigonométricas*, ligadas de tal manera con el ángulo, que serán conocidas si este lo es; y al contrario conocida cualquiera de ellas, será conocido el ángulo.

(Fig. 117.) Sea ACO un ángulo cualquiera. Haciendo centro en C con un radio cualquiera CA=1, describo un círculo. Será el arco OA la medida del ángulo OCA. Tiro OP y TA perpendiculares al radio CA. Es evidente que conocida cualquiera de las tres rectas OP, TA, CT, se podrá construir el ángulo OCA, y quedará dicho ángulo conocido. Estas líneas se llaman respectivamente *seno*, *tangente y secante* del ángulo ó del arco que le mide.

Seno de un arco es, pues, la perpendicular bajada desde un estremo del arco sobre el radio que pasa por el otro estremo. Tangente es la perpendicular levantada al radio en un estremo del arco, contada hasta el radio prolongado que pasa por el otro estremo. Secante es el radio que pasa por un estremo del arco, prolongado hasta la tangente en el otro estremo.

5. *Coseno, cotangente y cosecante* de un arco, son el seno, tangente y secante de su complemento. Sirven para determinar el arco; pues sirven para determinar su complemento. QO es coseno del arco OA, BG es su cotangente, y CG su cosecante.

Seno verso ó ságita de un arco es la parte AP del radio comprendida entre el estremo del arco y el seno. Se hace poco uso de esta línea.

6. Las líneas trigonométricas son las relaciones que tienen con el radio; pues este se supone $=1$. Cuando se quieran hallar sus valores en un círculo, cuyo radio no sea $=$ á la unidad, bastará hacer homogéneas las ecuaciones que las ligan (Ap. 6).

7. *Dado el seno de un arco, hallar las demas líneas trigonométricas.*

El arco $OA=a$. En el triángulo rectángulo OCP es $OC^2=OP^2+CP^2$, ó $1=\text{sen.}^2 a+\cos.^2 a$, por ser $CP=OQ$. De esta fórmula sale $\cos. a=\pm\sqrt{(1-\text{sen.}^2 a)}$.

Los triángulos OCP, CAT dan estas dos proporciones $\frac{CP}{OP}=\frac{CA}{AT}$ y $\frac{CP}{CO}=\frac{CA}{CT}$, ó $\frac{\cos. a}{\text{sen.} a}=\frac{1}{\text{tang.} a}$, y $\cos. a=\frac{1}{\text{sec.} a}$, de donde sale la tangente y la secante, $\text{tang.} a=\frac{\text{sen.} a}{\cos. a}$, y $\text{sec.} a=\frac{1}{\cos. a}$.

Los triángulos OCQ, BCG semejantes dan $\frac{CQ}{QO}=\frac{CB}{BG}$ y $\frac{CQ}{CO}=\frac{CB}{CG}$, ó $\frac{\text{sen.} a}{\cos. a}=\frac{1}{\cot. a}$ y $\text{sen.} a=\frac{1}{\text{cosec.} a}$, de donde $\cot. a=\frac{\cos. a}{\text{sen.} a}$ y $\text{cosec.} a=\frac{1}{\text{sen.} a}$.

8. *Dada una línea trigonométrica, determinar las demas.*

En las fórmulas $sen.^2 a + cos.^2 a = 1$, $tang.\ a = \frac{sen.\ a}{cos.\ a}$, $cot.\ a = \frac{cos.\ a}{sen.\ a}$, $sec.\ a = \frac{1}{cos.\ a}$, $cosec.\ a = \frac{1}{sen.\ a}$, conocida una línea trigonométrica, tendremos cinco incógnitas; y como son cinco las ecuaciones, se podrán hallar sus valores.

Ejemplo. Dada la tangente, determinar las demas líneas trigonométricas.

Para determinar el coseno despejo sen. a en la segunda ecuacion, y es $sen.\ a = cos.\ a\ tang.\ a$, y pongo su valor en la primera ecuacion, y será $cos.^2 a.\ tang.^2 a + cos.^2 a = 1$, de donde $cos.\ a = \frac{1}{\sqrt{(1 + tang.^2 a)}}$.

Para determinar el seno, pongo el valor del coseno en el del seno, y es $sen.\ a = \frac{tang.\ a}{\sqrt{(1 + tang.^2 a)}}$.

La secante, cotangente y cosecante se determinan poniendo en sus fórmulas en lugar de seno y coseno sus valores; y será $sec.\ a = \sqrt{(1 + tang.^2 a)}$, $cot.\ a = \frac{1}{tang.\ a}$, $cosec.\ a = \frac{\sqrt{(1 + tang.^2 a)}}{tang.\ a}$.

9. Los matemáticos consideran toda circunferencia dividida en 360 partes iguales, que llaman grados; cada grado en 60 partes iguales, que llaman minutos; cada minuto en 60 partes iguales, que llaman segundos etc. Estas divisiones se espresan con los signos °, ′, ″, etc. Estas divisiones indican la parte que cada arco es de su circunferencia; y por consiguiente los arcos semejantes deben tener un mismo número de grados, (G. 16) con la diferencia de que en el arco menor el grado es menor, á proporcion de su radio. El ángulo se mide por el número de grados que abraza su arco, sea cual fuere la magnitud del radio.

10. Cuando el arco es nulo, ó $a = o$, su seno es nulo: haciendo, pues, sen. $a = o$ en las fórmulas anteriores, resulta $cos.\ a = \pm 1$; tomarémos el signo $+$,

pues vemos que el coseno se toma á la derecha del centro: tang. $a=o$, cot. $a=\infty$, sec. $a=1$, cosec. $a=\infty$.

11. Aumentando el arco desde o hasta 90°, aumentan seno, tangente y secante, y disminuyen coseno, cotangente y cosecante.

Cuando $a=30^\circ$, su seno es mitad de la cuerda del arco doble ó de 60°; pero la cuerda de 60° es igual al radio, por ser el lado del exágono inscripto: luego el seno de 30° es igual á la mitad del radio, ó sen. $30^\circ=\frac{1}{2}$. De donde cos. $30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

El seno de $60^\circ=$cos. $30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, y cos. $60^\circ=\frac{1}{2}$: tang. $30^\circ=\dfrac{\text{sen. }30^\circ}{\text{cos. }30^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, y cotang. $30^\circ=\sqrt{3}$. Tambien tang. $60^\circ=\sqrt{3}$ y cotang. $60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Si el arco es de 45°, el seno será igual al coseno: por tanto la ecuacion sen.$^2 a+$cos.$^2 a=1$ se convertirá en 2 sen.$^2 a=1$, sen.$^2 a=\frac{1}{2}$, y sen. $45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Tambien cos. $45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$: tambien tangente de $45^\circ=$cot. $45^\circ=1$, es decir, igual al radio.

12. Cuando el arco es de 90°, su seno es el radio, ó 1. Sustituyendo en las cinco fórmulas, será cos. $90^\circ=o$, tang. $90^\circ=\infty$, sec. $90^\circ=\infty$, cot. $90^\circ=o$, cosec. $90^\circ=1$.

13. Desde los 90° hasta los 180°, el seno, tangente y secante disminuyen: el coseno, la cotangente y la cosecante aumentan. El seno conserva el mismo signo que en el primer cuadrante; pero el coseno, la tangente y la cotangente se hacen indirectas y toman el signo negativo. (Ap. 24).

14. Cuando el arco es de 180°, su seno es o; y sustituyendo este valor en las cinco fórmulas, se tendrá cos. $180^\circ=-1$ (tomo el signo $-$, porque en pasando de 90° el arco, el coseno es indirecto): tang. $180^\circ=o$: cotang. $180^\circ=-\infty$: sec. $180^\circ=1$: cosec. $180^\circ=\infty$.

15. Si el arco AO se toma negativamente, es decir, desde A hácia N, se ve que su seno, tangente y cotan-

gente son negativas; pero el coseno queda positivo. Si pasa de los 90° por la parte negativa, el seno y coseno son negativos; pero la tangente y cotangente son positivas.

16. Las líneas trigonométricas de un arco se quedan las mismas, aunque al arco se le añada la circunferencia una ó muchas veces; pues dichas líneas pertenecerán siempre á un mismo punto del círculo.

17. En el tercer cuadrante el seno y coseno son negativos, y la tangente y cotangente positivas.

En el cuarto cuadrante el seno, tangente y cotangentes son negativos, y el coseno positivo. En fin, sen. $270° = -1$, su coseno$=o$, su tangente y secante infinitas, su cotangente$=o$, y su cosecante$=1$.

18. *Las líneas trigonométricas de un arco son iguales á las de su suplemento.*

Dem. Sea el arco AO. Si por O tiro OD paralela al diámetro, será el arco AOD suplemento de ED: pero ED=AO por comprendidos entre paralelas; luego AOD es suplemento de AO; sus senos OP, DI son iguales por paralelas entre paralelas; pero en siendo el seno igual, sustituido en las cinco fórmulas dará igual el valor de cada una de las otras líneas trigonométricas: luego etc.

19. *En todo triángulo rectángulo un lado es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto, ó por el coseno del ángulo adyacente al lado.*

Sea el triángulo CFG. Sea CO el radio, OA el arco que mide el ángulo C, y OP su seno. Los triángulos semejantes CFG, COP dan $\frac{GF}{CG} = \frac{OP}{CO} = \frac{\text{sen. C}}{1}$: luego GF$=$CG sen. C; sen. C$=$cos. G, por ser C y G complemento el uno del otro: luego tambien GF$=$CG $\times$ cos. G: luego etc.

20. *En todo triángulo rectángulo un lado es igual al otro multiplicado por la tangente de su ángulo adyacente.* Porque en el triángulo rectángulo CGF, tenemos GF$=$CG $\times$ sen. C y CF$=$CG cos. C; partiendo será

$\frac{GF}{CF}=\frac{\text{sen. C}}{\text{cos. C}}$; pero $\frac{\text{sen. C}}{\text{cos. C}}$ es tang. C; luego $\frac{GF}{CF}=$ tang. C, y GF$=$CF tang. C.

II. *Fórmulas generales.*

21. *Dados los senos y cosenos de dos arcos, hallar los senos y cosenos de su suma y diferencia.* (Fig. 118.)

Sean dados los arcos AB$=a$, BD$=b$: su suma será AD$=a+b$; tomando BK$=b$, su diferencia será AK$=a-b$: se pide el valor de DP, CP, seno y coseno de la suma, y KO′ y CO, seno y coseno de la diferencia. Como el radio CB divide por medio al arco DK, será perpendicular á la cuerda DK, y la dividirá por medio (G. 55). Tiro IE y KO paralelas á CA, é IG perpendicular á CA: y siendo DI$=$IK, será DE$=$IO′, y EI$=$OK.

DP$=$PE$+$ED$=$IG$+$DE: CP$=$CG$-$PG$=$CG$-$EI: KO′$=$IG$-$IO$=$IG$-$DE: CO′$=$CG$+$GO′$=$CG$+$EI. Busquemos pues las cuatro líneas IG, CG, DE, EI.

El ángulo EDI es$=$C, por ser sus lados perpendiculares.

En el triángulo rectángulo ICG (19) tendremos IG$=$IC$\times$sen. C$=$cos. $b\times$sen. a y CG$=$CI$\times$cos. C$=$ cos. $b\times$cos. a.

En el triángulo rectángulo DEI, tendremos EI$=$ DI$\times$sen. D$=$sen. $b\times$ sen. a y DE$=$DI$\times$cos. D$=$ sen. $b\times$cos. a. Sustituyendo será

DP, ó sen. $(a+b)=$cos. $b\times$sen. $a+$ sen. $b\times$cos. a.
CP, ó cos. $(a+b)=$cos. $b\times$cos. $a-$sen. $b\times$sen. a.
KO′, ó sen. $(a-b)=$cos. $b\times$sen. $a-$sen. $b\times$cos. a.
CO′, ó cos. $(a-b)=$cos. $b\times$cos. $a+$sen. $b\times$sen. a.

Estas cuatro fórmulas por la duplicidad de los signos pueden reducirse á dos; sen. $(a\pm b)=$sen. $a\times$ cos. $b\pm$cos. $a\times$sen. b: cos. $(a\pm b)=$cos. $a\times$cos. $b\mp$ sen. $a\times$sen. b.

22. *Hallar el seno y coseno de un arco duplo, triplo etc. de otro dado.*

Hágase en las fórmulas de sen. $(a+b)$, cos. $(a+b)$,

$b=a$, y será sen. $2a=2$ sen. $a\times$cos. a, y cos. $2a=$ cos.$^2a-$sen.^2a, seno y coseno del arco doble.

Hágase en las mismas fórmulas $b=2a$, y será sen. $3a=$sen. $a\times$cos. $2a+$cos. $a\times$sen. $2a$. En lugar de sen. $2a$ y cos. $2a$, sustitúyanse sus valores, y será sen. $3a=$ sen. $a\times$cos.$^2a-$sen.$^3a+2$ sen. $a\times$cos.$^2a=3$ sen. $a\times$ cos.$^2a-$sen.^3a, y cos. $3a=$cos.$^3a-$cos. $a\times$sen.$^2a-2$ cos. $a\times$sen.$^2a=$cos.$^3a-3$ cos. $a\times$sen.^2a. Pongo en la 1.ª por cos.^2a, $1-$sen.^2a; y en la 2.ª por sen.^2a, $1-$cos.^2a; y será seno y coseno del arco triplo, sen. $3a=3$ sen. $a-$ 3 sen.$^3a-$sen.$^3a=3$ sen. $a-4$ sen.^3a, cos. $3a=$cos.$^3a-$ 3 cos. $a+3$ cos.$^3a=4$ cos.$^3a-3$ cos. a.

Para hallar el seno y coseno del arco cuadruplo, será $b=3a$, etc.

23. *Dado el seno de un arco, hallar el seno, coseno y tangente de su mitad.*

En la fórmula cos. $2a=$cos.$^2a-$sen.^2a pongo por cos.^2a, $1-$sen.^2a, y es cos. $2a=1-2$ sen.^2a, de donde sen.$^2a=\frac{1-\text{cos. } 2a}{2}$, y sen. $a=\sqrt{\frac{1-\text{cos. } 2a}{2}}$. Haciendo $2a=m$, es $a=\frac{1}{2}m$, y sen. $\frac{1}{2}m=\sqrt{\frac{1-\text{cos. } m}{2}}$.

En la misma fórmula pongo por sen.^2a, $1-$cos.^2a, y es cos. $2a=2$ cos.$^2a-1$ y cos. $a=\sqrt{\frac{1+\text{cos. } 2a}{2}}$: hago $2a=m$, y $a=\frac{1}{2}m$, y es cos. $\frac{1}{2}m=\sqrt{\frac{1+\text{cos. } m}{2}}$.

Como la tangente es igual al seno dividido por el coseno, será tangente $\frac{1}{2}m=\frac{\text{sen. }\frac{1}{2}m}{\text{cos. }\frac{1}{2}m}=\sqrt{\frac{1-\text{cos. } m}{1+\text{cos. } m}}$.

24. *Dadas las tangentes de dos arcos, hallar la tangente de su suma ó diferencia.*

Siendo tang. $(a\pm b)=\frac{\text{sen. }(a\pm b)}{\text{cos. }(a\pm b)}$, poniendo por sen. $(a\pm b)$ y cos. $(a\pm b)$ sus valores, será tang. $(a\pm b)=$ $\frac{\text{sen. } a\times\text{cos. } b\pm\text{cos. } a\times\text{sen. } b}{\text{cos. } a\times\text{cos. } b\mp\text{sen. } a\times\text{sen. } b}$. Partiendo numerador y denominador por cos. $a \times$ cos. b, será $\text{tang.}(a \pm b) = \dfrac{\frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a} \pm \frac{\text{sen. } b}{\text{cos. } b}}{1 \mp \frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a} \times \frac{\text{sen. } b}{\text{cos. } b}}$

y como $\dfrac{\text{sen.}}{\text{cos.}} = \text{tang.}$, será $\text{tang.}(a \pm b) = \dfrac{\text{tang. } a \pm \text{tang. } b}{1 \mp \text{tang. } a \times \text{tang. } b}$.

Si $b = 45°$, $\text{tang.}(a \pm 45°) = \dfrac{\text{tang. } a \pm 1}{1 \mp \text{tang. } a}$.

25. Para hallar la tangente de un arco doble, hago $b = a$, y tomo el signo superior y será $\text{tang. } 2a = \dfrac{2 \text{ tang. } a}{1 - \text{tang.}^2 a}$.

26. *Hallar las relaciones que tienen entre sí las sumas ó diferencias de dos senos ó dos cosenos.*

En las cuatro fórmulas

$\text{sen. }(a+b) = \text{sen. } a \times \text{cos. } b + \text{cos. } a \times \text{sen. } b$
$\text{sen. }(a-b) = \text{sen. } a \times \text{cos. } b - \text{cos. } a \times \text{sen. } b$
$\text{cos. }(a+b) = \text{cos. } a \times \text{cos. } b - \text{sen. } a \times \text{sen. } b$
$\text{cos. }(a-b) = \text{cos. } a \times \text{cos. } b + \text{sen. } a \times \text{sen. } b$

hago $a+b=s$, $a-b=d$; y el arco mayor $a = \frac{1}{2}(s+d)$ y el arco menor $b = \frac{1}{2}(s-d)$. Sumando y restando las dos primeras y luego las dos segundas, y sustituyendo, será

$\text{sen. } s + \text{sen. } d = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(s+d) \times \text{cos. } \frac{1}{2}(s-d)$
$\text{sen. } s - \text{sen. } d = 2 \text{ cos. } \frac{1}{2}(s+d) \times \text{sen. } \frac{1}{2}(s-d)$
$\text{cos. } s + \text{cos. } d = 2 \text{ cos. } \frac{1}{2}(s+d) \times \text{cos. } \frac{1}{2}(s-d)$
$\text{cos. } d - \text{cos. } s = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(s+d) \times \text{sen. } \frac{1}{2}(s-d)$

dividiendo estas fórmulas cada una por las que le siguen, y poniendo en lugar de $\dfrac{\text{sen.}}{\text{cos.}}$, tangente, se tendrán las relaciones pedidas.

$$\frac{\text{sen. } s + \text{sen. } d}{\text{sen. } s - \text{sen. } d} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(s+d)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(s-d)} \qquad \frac{\text{sen. } s - \text{sen. } d}{\text{cos. } s + \text{cos. } d} = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(s-d)$$

$$\frac{\text{sen. } s + \text{sen. } d}{\text{cos. } s + \text{cos. } d} = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(s+d) \qquad \frac{\text{sen. } s - \text{sen. } d}{\text{cos. } d - \text{cos. } s} = \frac{1}{\text{tang. } \frac{1}{2}(s+d)}$$

$$\frac{\text{sen. } s + \text{sen. } d}{\text{cos. } d - \text{cos. } s} = \frac{1}{\text{tang. } \frac{1}{2}(s-d)} \qquad \frac{\text{cos. } s + \text{cos. } d}{\text{cos. } d - \text{cos. } s} = \frac{1}{\text{tang. } \frac{1}{2}(s+d)\ \text{tang. } \frac{1}{2}(s-d)}$$

III. *Construccion de las tablas de senos y cosenos.*

27. Siendo el radio del círculo 1, sen. $30^\circ = \frac{1}{2}$. Conocido el seno de 30°, se puede conocer el de su mitad, el de su 4.ª parte, 8.ª, 16.ª etc. hasta llegar á un arco tan pequeño, que su longitud, calculada como se ha enseñado en geometría (G. 199), se confunda con su seno en las notas decimales que se señalen para la aproximacion.

Despues se halla el seno de $10''$, partiendo el del arco hallado por las veces que contenga á $10''$; pues en los arcos inferiores al hallado los senos se pueden suponer proporcionales con los mismos arcos.

Ahora, siendo sen. $(a+b)$=sen. $a\times$cos. b+cos. $a\times$ sen. b, y sen. $(a-b)$=sen. $a\times$cos. b—cos. $a\times$sen. b. Sumando estas dos fórmulas, será sen. $(a+b)$+sen. $(a-b)=2$ sen. $a\times$cos. b. Haciendo $a=mb$, será sen. $b(m+1)$+sen. $b(m-1)=2$ sen. $mb\times$cos. b: luego sen. $b(m+1)=2$ cos. b sen. mb—sen. $b(m-1)$. Conociendo, pues, los senos de dos arcos sucesivos $b(m-1)$ y mb, se podrá conocer el seno de $b(m+1)$, multiplicando el seno del anterior por 2 cos. b, y restando el seno del anterior.

Igualmente, siendo cos. $(a+b)$ = cos. $a\times$ cos. b—sen. $a\times$sen. b, y cos. $(a-b)$=cos. $a\times$cos. b+sen. $a\times$sen. b, sumando será cos. $(a+b)$+cos. $(a-b)=$ 2 cos. $a\times$cos. b: haciendo $a=mb$, será cos. $b(m+1)$ + cos. $(m-1)b=2$ cos. $mb\times$cos. b, y cos. $b(m+1)=$ 2 cos. $mb\times$cos. b—cos. $b(m-1)$, fórmula que manifiesta para los cosenos la ley misma que para los senos.

Haciendo, pues, $b=10''$, y conociendo su coseno, como tenemos sen. $0^\circ=o$, cos. $o=1$, y sen. $10''$ y cos. $10''$, se podrán tener por las fórmulas anteriores los senos y cosenos de $20''$ de $30''$... hasta 45°. En los arcos mayores que 45° el seno de un arco es igual al coseno de su complemento: asi bastará en las tablas encabezar en la parte inferior el complemento del arco que hay en la parte superior, y llamar seno al que es coseno para el arco superior, y coseno al que es seno. Para hallar las tangentes y cotangentes han servido las fórmulas tang. $a=\frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a}$ y cotang. $a=\frac{\text{cos. } a}{\text{sen. } a}$, conocidos ya senos y cosenos.

28. Los arcos mayores que 90° no estan en las tablas; porque sus líneas trigonométricas son las mismas que las de sus suplementos; y, siendo estos menores que 90°, estan en las tablas.

29. Las tablas no contienen los valores de las líneas trigonométricas, sino sus logaritmos, porque estos son los que se emplean en el cálculo.

30. Cuando el arco no está en las tablas (como si se pidiese Log. sen. (32° 40′ 3″, 24) se buscará el arco próximo menor que se halla en las tablas; Log. sen. (32°, 40′)=9,7321932. Multiplíquese la diferencia que dan las tablas entre este seno y el siguiente (328) por la cantidad del arco, que no se halla en las tablas (3″, 24), y resulta 1063, que partido por 10, porque las tablas proceden de 10 en 10 segundos, da 106, cantidad que añadida al seno hallado dará el que se pide, y es Log. sen. (32°, 40′, 3″, 24)=9,7322038.

Si la línea buscada es coseno ó cotangente, deberá ser sustractiva dicha cantidad; porque, aumentando el arco, disminuyen coseno y cotangente.

31. Si dada una línea que no se halla en las tablas (como el seno 9,7322038), se pide el arco que le corresponde, tomo su próximo menor 9,7321932, cuyo arco es 32° 40′. La diferencia 106 entre los dos multiplicada por 10 pártola por la diferencia de las tablas 328: y saldrán los segundos y decimales de segundo, que deberán agregarse al arco hallado, si la línea es seno ó tangente; ó restarse si es coseno, ó cotangente. El arco pedido es de 32° 40′ 3″ 24.

IV. *Resolucion de los triángulos rectángulos.*

32. En la resolucion de un triángulo rectángulo, *ó se dan dos lados ademas del ángulo recto, ó se dan un lado y un ángulo.*

Caso 1.° *Cuando se dan dos lados, ó son los dos catetos, ó la hipotenusa y un cateto.*

Si se dan los dos catetos, sean A, B, C los tres ángulos del triángulo, siendo A el ángulo recto, y a, b, c los tres lados respectivamente opuestos; y sean los datos b y c.

La hipotenusa a se determina por la ecuacion $a = \sqrt{(b^2+c^2)}$.

El ángulo B, por ser tang. $B = \frac{b}{c}$ (20), y el ángulo $C = 90° - B$.

Si se da la hipotenusa a y el cateto b, el cateto c se determina por la ecuacion $C = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$.

El ángulo B, por ser sen. $B = \frac{b}{a}$ (19): y el ángulo $C = 90° - B$.

Caso 2.° *Cuando se da un ángulo, se da el otro por ser su complemento.* Si el lado conocido es la hipotenusa a, el lado $b = a$ sen. B y el lado $c = a$ sen. C.

Si el lado conocido es un cateto b, será $a = \frac{b}{\text{sen. B}}$ y $c = \frac{b}{\text{tang. B}}$. Estas fórmulas se resuelven por logaritmos, como se vé en el ejemplo siguiente:

Sea dada la hipotenusa $a = 400$ v.s y el cateto $b = 150$. El cateto $c = \sqrt{(400+150)(400-150)} = \sqrt{550 \times 250}$. Sumo, pues, los logaritmos de 550 y 250, saco la mitad de su suma, y tengo el logaritmo de c.	L. 550 = 2,7403627 L. 250 = 2,3979400 5,1383027 2,5691513 = L. c $c = 370,81$

Sen. $B=\frac{150}{400}$. Añado al logaritmo de 150 el complemento del logaritmo de 400 y tengo el logaritmo sen. B.

$$\begin{array}{rl} \text{L. } 150 & = 2,1760913 \\ \text{C.}^{\text{to}}\text{ L. } 400 & = 7,3979400 \\ \hline \text{L. sen. B} & = 9,5740313 \end{array}$$

Buscado en las tablas, dará el ángulo $B = 22°\ 1'\ 20''$

El ángulo $C=90°-B=67°\ 58'\ 40''$.

$$\begin{array}{rl} 89°59'60'' & = 90° \\ 22\quad 1\ 20 & = B \\ \hline 67°58'40'' & = C \end{array}$$

V. *Analogías de los triángulos oblicuángulos.*

33. 1.ª *En todo triángulo oblicuángulo los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

(Fig. 119.) Dem. Sea el triángulo ABC. Desde el vértice B bajo la perpendicular BO sobre AC, y queda dividido en dos triángulos rectángulos. En el triángulo ABO, el cateto $BO=AB \times$ sen. A, y en el triángulo BOC, el cateto $BO=BC \times$ sen. C: luego $AB \times$ sen. $A = BC \times$ sen. C, y como de dos productos iguales se puede formar una proporcion, será $\frac{AB}{\text{sen. } C}=\frac{BC}{\text{sen. } A}$: luego etc.

Si la perpendicular cayese fuera, siempre en el triángulo BAO seria $BO=BA \times$ sen. BAO, ó $=BA \times$ sen. A, por ser A suplemento de BAO y tener el mismo seno un ángulo que otro (18), y asi siempre seria la misma demostracion.

2.ª *En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de ellos multiplicado por el coseno del ángulo comprendido.*

Dem. Está demostrado, que bajando la perpendicular BO, el cuadrado del lado BC, opuesto á un ángulo agudo A, es = á la suma de cuadrados de los otros dos lados menos dos veces el lado CA multiplicado por el segmento AO: sea, pues, $BC=a$, $AB=c$, $CA=b$:

será $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times \mathrm{AO}$; pero en el triángulo rectángulo ABO, el cateto $\mathrm{AO} = \mathrm{AB} \times$ cos. $\mathrm{A} = c \times$ cos. A; luego sustituyendo será $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times$ cos. A: luego etc. Es verdad que si el ángulo A es obtuso, el tercer término es positivo; pero como entonces cos. A es negativo, y hace dicho término positivo, la fórmula es general para todos los casos.

3.ª *En todo triángulo el producto de dos lados es al producto de las diferencias de cada lado á la semisuma de los tres, como el cuadrado del radio al cuadrado del seno de la mitad del ángulo comprendido.*

Dem. Siendo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \text{cos. A}$, será $2bc$ cos. $\mathrm{A} = b^2 + c^2 - a^2$, y cos. $\mathrm{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. En la fórmula sen. $\frac{1}{2}\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1 - \text{cos. A}}{2}}$, que elevada al cuadrado es sen.$^2 \frac{1}{2}\mathrm{A} = \frac{1 - \text{cos. A}}{2}$, pongo por cos. A su valor, y es

$$\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{4bc} = \frac{(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c)\,(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c)}{bc}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - c)\,(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - b)}{bc}.$$ Hago $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = p$, semiperímetro del triángulo; será sen.$^2 \frac{1}{2}\mathrm{A} = \frac{(p-c)\,(p-b)}{bc}$, de donde $bc : (p-c)(p-b) :: 1 :$ sen.$^2 \frac{1}{2}$ A: luego etc.

4.ª *En todo triángulo la suma de dos lados es á su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es á la tangente de su semidiferencia.*

Dem. Sean A, B, C los ángulos, y a, b, c los lados respectivamente opuestos. Siendo los lados como los senos de los ángulos opuestos, será $\frac{a}{b} = \frac{\text{sen. A}}{\text{sen. B}}$. Componiendo y dividiendo es $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{sen. A}+\text{sen. B}}{\text{sen. A}-\text{sen. B}}$: pero hemos demostrado que $\frac{\text{sen. A}+\text{sen. B}}{\text{sen. A}-\text{sen. B}}=\frac{\text{tang. }\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}{\text{tang. }\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}$: luego $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{tang. }\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}{\text{tang. }\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}$: luego etc.

VI. *Resolucion de los triángulos oblicuángulos.*

34. En estos, *ó se dan los tres lados, ó dos ángulos y un lado, ó dos lados y un ángulo.*

Caso 1.º Si se dan los tres lados, se suman y al semiperímetro se llama p; y se resuelven las fórmulas sen. $\frac{1}{2}\text{A}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}}$, sen $\frac{1}{2}\text{B}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ac}}$, sen. $\frac{1}{2}\text{C}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ (33, 3.ª)

Ejemplo. Sea $a=600$ var.s $b=400$, $c=320$: $p=660$. Sen. $\frac{1}{2}\text{A}=\sqrt{\frac{340\times260}{400\times320}}$: sumo pues los logaritmos de 340 y 260 con los complementos logarítmicos de 400 y 320. Saco la mitad de la suma y tengo log. sen. $\frac{1}{2}$ A: de donde $\frac{1}{2}\text{A}=56°\ 12'\ 20''$, y $\text{A}=112°\ 24'\ 40''$.

$$
\begin{array}{rl}
\text{L. } 260 = & 2{,}4149733 \\
\text{L. } 340 = & 2{,}5314789 \\
\text{C.}^{\text{to}}\ \text{L. } 400 = & 7{,}3979400 \\
\text{C.}^{\text{to}}\ \text{L. } 320 = & 7{,}4948500 \\
\hline
 & 19{,}8392422 \\
 & 9{,}9196211 = \text{L. sen. } \tfrac{1}{2}\text{A}
\end{array}
$$

Haciendo un cálculo semejante para sen. $\frac{1}{2}$ $B=\sqrt{\frac{340\times 60}{600\times 320}}$, resulta $\frac{1}{2}B=19^\circ\ 1'\ 25''$ y $B=38^\circ\ 2'\ 50''$.

$$
\begin{array}{rl}
\text{L. } 340 = & 2,5314789 \\
\text{L. } 60 = & 1,7781512 \\
\text{C.}^{to}\ \text{L. } 600 = & 7,2218488 \\
\text{C.}^{to}\ \text{L. } 320 = & 7,4948500 \\
\hline
 & 19,0263289 \\
 & 9,5131644 = \text{L. sen. } \tfrac{1}{2}B
\end{array}
$$

Un cálculo semejante para sen. $\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{60\times 260}{600\times 400}}$, da $\frac{1}{2}C=14^\circ\ 46'\ 14''$ y $C=29^\circ\ 32'\ 28''$.

$$
\begin{array}{rl}
\text{L. } 60 = & 1,7781512 \\
\text{L. } 260 = & 2,4149733 \\
\text{C.}^{to}\ \text{L. } 600 = & 7,2218488 \\
\text{C.}^{to}\ \text{L. } 400 = & 7,3979400 \\
\hline
 & 18,8129133 \\
 & 9,4064566 = \text{L. sen. } \tfrac{1}{2}C
\end{array}
$$

Comprobacion: $A+B+C=180^\circ$ sin error sensible (pues es $2''$).

Caso 2.° Cuando se dan dos ángulos, se da el tercero; pues es lo que falta á la suma de los otros dos para componer 180°.

Sea a el lado; siendo $\frac{\text{sen. A}}{a}=\frac{\text{sen. B}}{b}$, será $b=\frac{a \text{ sen. B}}{\text{sen. A}}$; y siendo $\frac{\text{sen. A}}{a}=\frac{\text{sen. C}}{c}$, será $c=\frac{a \text{ sen. C}}{\text{sen. A}}$. La aplicacion del cálculo logarítmico es facil en este caso.

Caso 3.° Cuando se dan dos lados, ó se da el ángulo comprendido entre ellos, ó el ángulo opuesto á uno de ellos.

Si se da el ángulo comprendido entre los dos lados conocidos, sean a y b los lados conocidos, y C el ángulo comprendido. Restando C de 180°, tendré el valor de A+B: sacando la mitad, tendré el valor de $\frac{1}{2}$(A+B). Formo despues la proporcion $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{tang. }\frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang. }\frac{1}{2}(A-B)}$ (33, 4.ª) y determino el 4.° término tang. $\frac{1}{2}$(A—B).

Conocida la semisuma y semidiferencia de los ángulos A y B, el mayor de ellos (que será el que se oponga al mayor lado), será igual á la semisuma mas la semidiferencia; y el menor será igual á la semisuma menos la semidiferencia.

El lado c se determina por la proporcion $\frac{\text{sen. A}}{a} = \frac{\text{sen. C}}{c}$, de donde $c = \frac{a \text{ sen. C}}{\text{sen. A}}$.

Ejemplo. Sea $a = 420$ varas, $b = 630$, $C = 54^\circ\ 32'\ 50''$, será $A + B = 125^\circ\ 27'\ 10''$, y $\frac{1}{2}(A+B) = 62^\circ\ 43'\ 35''$. La proporcion es $\frac{1050}{210} = \frac{\text{tang. } 62^\circ\ 43' 35''}{\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B)}$.

Sumo, pues, L. 210 y L. tang. 62° 43′ 35″ con el complemento logarítmico de 1050: tendré el log. tang. $\frac{1}{2}(A-B)$, y será $\frac{1}{2}(A-B) = 21^\circ\ 12'\ 10''$. El ángulo mayor $B = 83^\circ\ 55'\ 45''$, el menor $A = 41^\circ\ 31'\ 25''$.

$$
\begin{array}{rl}
\text{L. tang. } (62^\circ\ 43' 30'') & = 0{,}2876988 \\
 & \quad\ \ 258 \text{ por } 5'' \\
\hline
\text{L. tang. } (62^\circ\ 43'\ 35'') & = 0{,}2877246 \\
\text{L. } 21 & = 1{,}3222193 \\
\text{C.}^{\text{to}} \text{ L. } 105 & = 7{,}9788107 \\
\hline
 & 9{,}5887546 = \text{L. tang. } \frac{1}{2}(A-B).
\end{array}
$$

Para determinar el lado c por la fórmula $\frac{a \text{ sen. C}}{\text{sen. A}}$, sumo L. 420 con L. sen. 54° 32′ 50″ y con el complemento logarítmico de sen. A, y tengo el logaritmo de c: luego $c =$ 516,08 varas.

$$
\begin{array}{rl}
\text{L. } 240 = & 2{,}6232493 \\
\text{L. sen. C} = & 9{,}9109411 \\
\text{C.}^{\text{to}} \text{ L. sen. A} = & 0{,}1785332 \\
\hline
 & 12{,}7127236 = \text{L. } c
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{L. sen. } (41^\circ\ 31'\ 20'') & = 9{,}8214549 \\
\text{por los } 5'' & \qquad\qquad 119 \\
\hline
\text{L. sen. } (41^\circ\ 31'\ 25'') & = 9{,}8214668
\end{array}
$$

Ultimamente, si se dan dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, pueden ocurrir muchos casos.

1.º Dados AB y BC y el ángulo A, si el lado opuesto al ángulo conocido es mayor que AB opuesto al ángulo C incógnito, el ángulo C deberá ser agudo; y se determinará por la proporcion $\frac{BC}{\text{sen. }A}=\frac{AB}{\text{sen. }C}$. El ángulo $B=180^\circ-A-C$; y el lado CA se determina por la proporcion $\frac{\text{sen. }A}{BC}=\frac{\text{sen. }B}{AC}$.

2.º Si el lado BC opuesto al ángulo dado es igual á la perpendicular bajada desde B sobre AC, ó $=AB.\text{sen. }A$, el ángulo C será recto. En efecto, en la proporcion $\frac{BC}{\text{sen. }A}=\frac{AB}{\text{sen. }C}$, poniendo por BC, su valor $AB\ \text{sen. }A$, se tendrá $AB=\frac{AB}{\text{sen. }C}$, y $\text{sen. }C=1$: luego $C=90^\circ$.

3.º Si el lado opuesto al ángulo conocido A es menor que la perpendicular bajada desde B sobre AC, no podrá formarse triángulo: en efecto, en la fórmula $\frac{BC}{\text{sen. }A}=\frac{AB}{\text{sen. }C}$ pongo por BC, $AB\ \text{sen. }A-D$, siendo D el esceso de la perpendicular sobre BC; será $AB-\frac{D}{\text{sen. }A}=\frac{AB}{\text{sen. }C}$, y $\text{sen. }C=\frac{AB}{AB-\frac{D}{\text{sen. }A}}$. Este quebrado es mayor que 1, por ser el numerador mayor que el denominador: luego $\text{sen. }C>1$; pero ningun seno es mayor que el radio: luego es imposible formar triángulo, cuando el lado BC es menor que la perpendicular.

4.º Si el lado opuesto al ángulo A es mayor que la perpendicular, pero menor que el lado AB, los datos convendrán á dos triángulos, uno en que C es obtuso, y el otro en que el ángulo en C es agudo: el problema tendrá dos soluciones; y será necesario saber si el ángulo, opuesto al otro lado conocido, es agudo ó es obtuso, para saber en qué triángulo debe hacerse el cálculo. Si C es agudo, se tomará el arco que den las tablas cuando se busca en ellas el valor de sen. C. Si es obtuso, se tomará el suplemento del arco que den las tablas.

VII. *Aplicaciones y fórmulas.*

35. Un arco, cuya longitud fuese igual al radio, tendria $57°, 29578$; porque en la fórmula (G. 199) $l = 2prn$, l representa la longitud del arco, y n su relacion con la circunferencia, ó $\frac{a}{360°}$, siendo a el número de grados del arco: haciendo $l = r$, y $n = \frac{a}{360}$, resulta $a = \frac{360}{2p} = \frac{180°}{3{,}14159} = 57°, 29578$. Este número es el radio valuado en grados.

El número de grados de un ángulo es al radio valuado en grados, como la longitud del arco es á la del radio. En efecto, la ecuacion $l = 2pr\,\frac{a}{360}$, da $a : \frac{360}{2p} :: l : r$.

Si se toma por unidad para la graduacion de los ángulos el radio valuado en grados, será $a = \frac{l}{r}$: es decir, *el ángulo es igual á la longitud del arco partida por el radio.* Pero se debe tener presente, que el quebrado $\frac{l}{r}$ debe multiplicarse por $57°{,}29578$ para tener el número de grados del arco. Por ejemplo, se pregunta: ¿cuántos grados tiene un arco de tres varas, perteneciente á un círculo cuyo radio es de 2 varas? será $a = \frac{3}{2}$; y el número de grados del ángulo, correspondiente á dicho arco, será $\frac{3}{2} \times 57°{,}29578 = 85°{,}94367$.

36. *Fórmulas fáciles de demostrar.*

$$\frac{\text{sen.}\,(a+b)}{\text{sen.}\,(a-b)} = \frac{\text{cot.}\,b + \text{cot.}\,a}{\text{cot.}\,b - \text{cot.}\,a} = \frac{\text{tang.}\,a + \text{tang.}\,b}{\text{tang.}\,a - \text{tang.}\,b}$$

$$\frac{\text{sen.}\,(a \pm b)}{\text{cos.}\,(a \mp b)} = \frac{\text{cot.}\,b \pm \text{cot.}\,a}{\text{cot.}\,a \times \text{cot.}\,b \pm 1} = \frac{\text{tang.}\,a \pm \text{tang.}\,b}{1 \pm \text{tang.}\,a \times \text{tang.}\,b}$$

$$\frac{\text{cos.}\,(a+b)}{\text{cos.}\,(a-b)} = \frac{\text{cot.}\,b - \text{tang.}\,a}{\text{cot.}\,b + \text{tang.}\,a} = \frac{1 - \text{tang.}\,a \times \text{tang.}\,b}{1 + \text{tang.}\,a \times \text{tang.}\,b}.$$

Haciendo $s = 90°$ en los valores de sen. s + sen. d, y sen. s — sen. d (26), será $1 + \text{sen.}\,d = 2\,\text{sen.}\,(45° + \frac{1}{2}d)$.
$\text{cos.}\,(45° - \frac{1}{2}d) = 2\,\text{sen.}^2\,(45° + \frac{1}{2}d) = 2\,\text{cos.}^2\,(45° - \frac{1}{2}d)$.
$1 - \text{sen.}\,d = 2\,\text{cos.}^2\,(45° + \frac{1}{2}d) = 2\,\text{sen.}^2\,(45° - \frac{1}{2}d)$.

$$\text{sen.}\,(a+b)\times\text{sen.}\,(a-b)=\text{sen.}^2\,a-\text{sen.}^2\,b=\text{cos.}^2\,b-\text{cos.}^2\,a$$

$$\text{cos.}\,(a+b)\times\text{cos.}\,(a-b)=\text{cos.}^2\,a-\text{sen.}^2\,b=\text{cos.}^2\,b-\text{sen.}^2\,a$$

$$\frac{1+\text{sen.}\,d}{1-\text{sen.}\,d}=\text{tang.}^2\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}d)\quad\frac{1+\text{sen.}\,d}{\text{cos.}\,d}=\text{tang.}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}d).$$

$$\begin{array}{l}1+\text{cos.}\,a=2\,\text{cos.}^2\,\tfrac{1}{2}a\;\ldots\\ 1-\text{cos.}\,a=2\,\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}a\;\ldots\end{array}\quad\frac{1+\text{cos.}\,a}{1-\text{cos.}\,a}=\text{cot.}^2\,\tfrac{1}{2}a.$$

$$\frac{1+\text{sen.}\,d}{1+\text{cos.}\,d}=\frac{\text{sen.}^2\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}d)}{\text{cos.}^2\,\tfrac{1}{2}d}.$$

$$\frac{1-\text{sen.}\,d}{1-\text{cos.}\,d}=\frac{\text{sen.}^2\,(45^\circ-\tfrac{1}{2}d)}{\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}d}$$

$$\text{tang.}\,a\pm\text{tang.}\,b=\frac{\text{sen.}\,(a\pm b)}{\text{cos.}\,a\times\text{cos.}\,b};$$

$$\text{cot.}\,a\pm\text{cot.}\,b=\frac{\text{sen.}\,(b\pm a)}{\text{sen.}\,a\;\text{sen.}\,b};$$

$$\text{tang.}\,a\pm\text{cot.}\,b=\frac{\pm\text{cos.}\,(a\mp b)}{\text{cos.}\,a\times\text{sen.}\,b};$$

$$\text{cot.}\,a\pm\text{tang.}\,b=\frac{\text{cos.}\,(a\mp b)}{\text{sen.}\,a\times\text{cos.}\,b}.$$

37. *Fórmulas del triángulo isósceles.* Sea A el ángulo vertical, B y C los ángulos sobre la base: tenemos $B=C=90^\circ-\frac{1}{2}A$. Tambien sen. $\frac{1}{2}A=\frac{\frac{1}{2}a}{b}$. Estas dos fórmulas bastan para todos los casos posibles.

Dada una cuerda hallar su arco, ó al contrario. Sea a la cuerda, b el radio. En el triángulo isósceles que forman los dos radios y la cuerda, tendremos $\frac{1}{2}\,a=b$ sen. $\frac{1}{2}A$, ó $a=2\,b$ sen. $\frac{1}{2}A$, ecuacion que resuelve el problema en ambos casos.

38. *La proyeccion de una recta sobre otra, que está en el mismo plano, es igual á la recta dada multiplicada por el coseno del ángulo que forman entrambas*; pues la recta dada es la hipotenusa y su proyeccion cateto del triángulo rectángulo que forman con la perpendicular que sirve para la proyeccion.

En todo polígono el cuadrado de un lado es igual á la suma de cuadrados de los demas menos dos veces el producto de cada dos lados multiplicado por el coseno del ángulo que forman.

Dem. Sean a, b, c, d.... los lados del polígono: sean ab, ac, ad, bc, bd.... los ángulos que forman cada dos lados.

Proyectando sobre el lado a todos los demas, sus proyecciones respectivas serán b cos. $(a\,b)$, c cos. $(a\,c)$, d cos. $(a\,d)$... El lado a será igual á la suma de estas proyecciones; y por tanto $a = b$ cos. $(a\,b) + c$ cos. $(a\,c) + d$ cos. $(a\,d) +$...... Obsérvese que si algun ángulo es obtuso, su coseno será negativo, y la proyeccion correspondiente deberá restarse.

Del mismo modo se demostrará que

$b = a$ cos. $(a\,b) + c$ cos. $(b\,c) + d$ cos. $(b\,d) +$...

$c = a$ cos. $(a\,c) + b$ cos. $(b\,c) + d$ cos. $(c\,d) +$...

$d = a$ cos. $(a\,d) + b$ cos. $(b\,d) + c$ cos. $(c\,d) +$...

Multiplico estas ecuaciones respectivamente por a, b, c, d... y resto de la primera las demas, y tendré $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - \ldots = -2\,bc$ cos. $(b\,c) - 2\,bd$ cos. $(b\,d) - 2\,cd$ cos. $(c\,d)$..., de donde $a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + \ldots\ldots - 2\,bc$ cos. $(b\,c) - 2\,bd$ cos. $(c\,d) - 2\,cd$ cos. $(c\,d)$... luego etc.

39. *Inscribir en el círculo un polígono regular de 17 lados.* Sea $\frac{180^\circ}{17} = f$; ó $180^\circ = 17\,f$. Se tendrá esta ecuacion: cos. $f +$ cos. $3\,f +$ cos. $5\,f + \ldots +$ cos. $15\,f = \frac{1}{2}$.

Porque llamando P al polinomio cos. $f + \ldots +$ cos. $15\,f$, y multiplicándolo por 2 cos f, será 2 P cos. $f = 2$ cos. f. cos. $f + 2$ cos. f. cos. $3\,f + \ldots.$ 2 cos. f. cos. $15\,f$.

Pero siendo generalmente 2 cos. a. cos. $b =$ cos. $(a+b) +$ cos. $(a-b)$, poniendo por cada producto la suma de dos cosenos, será 2 P cos. $f = 1 + 2$ cos. $2\,f + 2$ cos. $4\,f + 2$ cos. $6\,f + \ldots$ cos. $16\,f$.

Ahora bien, cos. $2\,f =$ cos. $(17\,f - 15\,f) =$ cos. $(180^\circ - 15\,f) = -$ cos. $15\,f$.

cos. $4\,f =$ cos. $(17\,f - 13\,f) =$ cos. $(180^\circ - 13\,f) = -$ cos. $13\,f$

cos. $16\,f =$ cos. $(17\,f - f) =$ cos. $(180^\circ - f) = -$ cos. f. etc.

luego 2 P cos. $f = 1 - 2$ cos. $15\,f - 2$ cos. $13\,f - 2$ cos. $11\,f$...... $-$ cos. f, ó quitando y añadiendo cos. f, será 2 P cos. $f = 1 +$ cos. $f - 2$ P, de donde $P = \frac{1}{2}$.

Descompongo el ~~polígono~~ polinomio P en dos partes x é y tales que $x =$ cos. $3\,f +$ cos. $5\,f +$ cos. $7\,f +$ cos. $11\,f$

$y =$ cos. $f +$ cos. $9\,f +$ cos. $13\,f +$ cos. $15\,f$;

de donde $x + y = \frac{1}{2}$.

Multiplicando y convirtiendo los productos de cosenos en sumas, se tendrá $xy =$ cos. $2\,f +$ cos. $4\,f +$ cos. $4\,f +$ cos. $6\,f +$ cos. $6\,f +$ cos. $8\,f +$ cos. $10\,f +$ cos. $12\,f +$ cos. $6\,f +$ cos. $12\,f +$ cos. $4\,f +$ cos. $14\,f +$ cos. $2\,f +$ cos. $16\,f +$ cos. $2\,f -$ cos. $3\,f +$ cos. $10\,f +$ cos. $16\,f +$ cos. $8\,f -$ cos. $f +$ cos. $6\,f -$ cos. $3\,f +$ cos. $2\,f -$

cos. $7f$ + cos $12f$ — cos. f + cos. $10f$ — cos. $3f$ + cos. $8f$ — cos. $5f$ + cos. $4f$ — cos. $9f$: 2.

O $xy = 2$ (cos. $2f$ + cos. $4f$ + cos. $6f$ + cos. $8f$ + cos. $10f$ + cos. $12f$ + cos. $14f$ + cos. $16f$).

O $xy = -2$ (cos. $15f$ + cos. $13f$ + ... + cos. f), ó $xy = -1$.

De las dos ecuaciones $x + y = \frac{1}{2}$, $xy = -1$, resulta $x = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17})$, $y = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{17})$.

Descompongo el polinómio x en dos partes s y t, de modo que $s =$ cos. $3f$ + cos. $5f$, $t =$ cos. $7f$ + cos. $11f$, de donde por un cálculo semejante resulta $st = -\frac{1}{4}$.

Descompongo el polinomio y en dos partes u y z tales, que $u =$ cos. f + cos. $13f$, $z =$ cos. $9f$ + cos. $15f$, de donde $uz = -\frac{1}{4}$; de modo que se podrán tener los valores de r, t, u, z resolviendo ecuaciones de 2.º grado.

Tenemos, pues, cos. f + cos. $13f = u$. Pero cos. f cos. $13f = \frac{1}{2}$(cos. $12f$ + cos. $14f$) $= -\frac{1}{2}$(cos. $3f$ + cos. $5f$) $= -\frac{1}{2}s$. Con estas dos ecuaciones hallo el valor de cos f, y de él deduzco el lado del polígono pedido $= 2r\sqrt{(1 - \text{cos.}^2 f)}$. El valor que resulte, se construye despues por los métodos enseñados en la aplicacion del Algebra á la Geometría.

40. *Resolver un triángulo, dadas su base, su altura y el ángulo vertical.*

Sea A el ángulo vertical, y B y C los otros dos ángulos. Sea a la base, y b y c los otros dos lados: sea h la altura. Tendremos $c = \frac{h}{\text{sen. B}}$ y $b = \frac{h}{\text{sen. C}}$.

Siendo sen. B$= \frac{h}{c}$, cos. B $= \frac{\sqrt{(c^2 - h^2)}}{c}$, sen. C$= \frac{h}{b}$, cos. C $= \frac{\sqrt{b^2 - h^2)}}{b}$ será sen. (B+C) $= \frac{h\sqrt{(c^2 - h^2)} + h\sqrt{(b^2 - h^2)}}{bc} =$ sen. A; pero $\sqrt{(c^2 - h^2)}$ y $\sqrt{(b^2 - h^2)}$ son los segmentos de la base, y su suma es a; luego $\frac{ah}{bc} =$ sen. A: pongo por b y c sus valores, y será sen. B sen. C $= \frac{h \text{ sen. A}}{a}$: pero sen. B sen. C$= \frac{1}{2}$ cos. (B—C) $- \frac{1}{2}$ cos. (B+C): luego cos. (B—C) — cos. (B+C)$= \frac{2h \text{ sen. A}}{a}$: y siendo cos. (B+C) $= -$ cos. A, será cos. (B—C)$=$

$\frac{2h \text{ sen. A}}{a} - \text{cos. A}$; conocidos $B - C$ y $B + C = 180^\circ - A$, se conocerán B y C, y por las fórmulas $c = \frac{h}{\text{sen. B}}$ y $b = \frac{h}{\text{sen. C}}$, se conocen b y c.

Para resolver por logaritmos la fórmula $\frac{2h \text{ sen. A}}{a} - \text{cos. A}$, hago $\frac{2h \text{ sen. A}}{a} = \text{cos. } f$, y es $\text{cos. }(B - C) = \text{cos. } f - \text{cos. A} = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(A + f) \text{ sen. } \frac{1}{2}(A - f)$, fórmula á la cual se puede aplicar el cálculo logarítmico.

FIN DE LA TRIGONOMETRIA PLANA.

NOCIONES
DE GEODESIA.

1. Se entiende por Geodesia la ciencia que enseña á medir la magnitud de las líneas sobre la superficie de la tierra, ya con el objeto de medir ó dividir las áreas que encierran, ya con el objeto de hallar la magnitud del globo terrestre ó de alguna parte considerable de su superficie.

2. La medicion de una línea accesible en toda su estension, y que no es muy grande, se hace por medio de la unidad lineal; pero cuando es inaccesible en alguna parte suya, no puede hacerse sino por medio de uno ó muchos triángulos, ligados entre sí, que se figuren en el terreno, en los cuales ha de haber conocidas tres cosas, siendo una de ellas un lado. Por consiguiente toda operacion geodésica debe empezar por la medicion de una recta y de algunos ángulos: medicion que se hace, con instrumentos exactísimos, tomando un término medio entre muchas mediciones, despues de haber corregido el resultado de cada una 1.º de las ilusiones ópticas, causadas por la luz y los colores de las señales: 2.º de la excentricidad de las visuales que es preciso dirigir en los instrumentos circulares: 3.º de la diversidad de planos en que estan las líneas y ángulos medidos: 4.º de la curvatura de la superficie terrestre, que convierte en arcos de círculo ó de elipse las líneas medidas ó buscadas, tanto mas, cuanto mayor es su magnitud (1).

(1) No es posible esplicar en un tratado elemental las teorías en que se fundan estas correcciones; ademas pertenecen á la as-

3. El término medio de muchas operaciones se halla partiendo la suma de sus resultados por el número de ellas. Este término medio se toma por resultado de su medicion, y debe ser menos erróneo que cada uno de los resultados parciales: 1.º porque en la suma los errores en mas se habrán compensado en parte con los errores en menos; 2.º porque los errores que quedan se hallan repartidos entre todas las operaciones; pero no debe hacerse caso de aquellos resultados, en los cuales hay fundada sospecha de que se ha cometido un error considerable.

4. Para medir una base no muy grande, se usa del estadal, que consta de cuatro varas (los franceses hacen uso del doble metro), alineando antes la distancia. Para esto se colocan en sus estremos dos anteojos, cada uno dirigido al otro estremo, y de distancia en distancia se colocan jalones que se clavan en el suelo, y que en la parte superior llevan un carton de color, para que se puedan alinear con las visuales de los anteojos. Al tiempo de medir el estadal ha de ir paralelo al horizonte ó al nivel del mar, y donde el terreno no lo permita, se ha de reducir al horizonte, como esplicarémos despues.

5. En las distancias mas grandes se usa de la cadena. La de los franceses es de diez metros: debe tener dos centímetros mas por la imposibilidad de ponerla perfectamente estendida.

6. Para las mediciones mas delicadas se usa de reglas de metal, que se colocan horizontalmente unas delante de otras, y cuyos resultados se reducen al temple de la medida, que sirve de unidad, á causa de la dilatacion que sufren los metales con el aumento del calor. Para conocer cuán escrupulosas son las precauciones que toman los geómetras en estas mediciones,

tronomía, mecánica y otras ciencias superiores. En estos elementos basta indicarlas para que los alumnos las conozcan, las busquen en los autores y aprendan á aplicar sus fórmulas.

basta lo siguiente: no ponen una regla en contacto con otra, cuando se coloca en su prolongacion; sino dejan un pequeño intervalo, que miden despues con otra regla mas delgada y pequeña, llamada *lengüeta*, que entra en mortajas practicadas en las reglas mayores. Toman esta precaucion para impedir que se gasten las reglas rozándose por las puntas, y que la anterior, chocando con la posterior, la haga retroceder algun tanto.

7. La *plancheta* es un instrumento compuesto de una tabla cuadrada que por medio de una rótula, que le permite tener un movimiento suave de rotacion, sin perder su posicion horizontal, se afirma sobre tres pies. En la tabla hay un papel bien estirado y una regla que se llama *alidada*, con dos anteojos en sus estremos para dirigir las visuales. Algunas veces en lugar de anteojos hay dos pínulas, que son reglas perpendiculares á la alidada, hendidas longitudinalmente en su mitad, con hilos muy delgados que se atan en las estremidades de la pínula, y que pasan por medio de la hendidura para dirigir con mas seguridad las visuales.

8. Sirve la plancheta para formar en el papel una figura semejante á la que forman los objetos principales del terreno, que es lo que se llama *levantar el plano de un terreno*.

9. Para levantar el plano de un terreno se eligen dos puntos, que llamo A y B, desde los cuales se puedan ver cómodamente todos los demas. Fijo la plancheta horizontalmente en el punto *A*; dirijo la alidada á B, y marco en el papel la direccion de la AB, y despues la de todas las visuales dirigidas desde *A* á los demas puntos del terreno: sea uno de ellos *C*, estará señalada en el papel la direccion de la AC. Paso despues la plancheta á B colocándola de modo que la BA del papel concurra con la del terreno. Señalo despues la direccion de la BC, y el punto del papel, en que concurra con la AC, será donde debo representar el punto *C* del terreno: de la misma manera voy marcando los demas puntos. Es evidente que el triángulo ABC del

papel es semejante al del terreno; pues sus ángulos son iguales; y siendo semejantes los triángulos de ambas figuras, lo serán dichas figuras.

10. El plano asi levantado sirve para hallar el valor de cualquier distancia del terreno, como por ejemplo, AC. Para esto se divide en partes iguales una recta dada (que es lo que se llama *la escala*), y supongo que una de estas partes iguales representa la unidad lineal del terreno.

Mido, pues, la base AB, y la línea que la representa en el papel, ha de tener tantas unidades de escala, como la base AB tiene unidades de terreno. Viendo el número de partes de escala que tiene la línea AC del papel, ese mismo número de unidades lineales tendrá la línea AC del terreno.

11. Algunas veces la línea de escala es tan pequeña que no se puede dividir cómodamente en partes iguales por el método ordinario. Por ejemplo, supongamos que la CD represente 25 partes de escala. Divídola en 5 partes, lo que puedo hacer cómodamente, y cada division suya representa 5 partes: mas estas divisiones son tan pequeñas, que no pueden subdividirse en otras cinco partes por el método ordinario. Para hacer esta division levanto CA perpendicular á CD, y tomo sobre ella 5 porciones iguales de cualquier tamaño: por los puntos de division r, t, m, h tiro paralelas á CD, y por los puntos de division de la CD, tiro paralelas á la CA, de modo que se forme la cuadrícula ACDE. Tirando la transversal BC, ro valdrá 1 parte de escala, ó $\frac{1}{5}$ AB: tb valdrá 2, mu 3, y hn 4; porque los triángulos Cro, Ctb etc. son semejantes á CAB; y siendo C$r=\frac{1}{5}$AC, será $ro=\frac{1}{5}$AB: siendo C$t=\frac{2}{5}$AC, será $tb=\frac{2}{5}$AB etc. (Figura 120.)

12. Para valuar fracciones muy pequeñas en una escala se usa de un instrumento llamado Vernier ó Nonio, del nombre de sus inventores. (Fig. 121.) (1).

(1) Nonio, ó Nonius (como dicen los estrangeros), es el ape-

Sea AB una escala dividida en partes; tomo una cierta suma de ellas, por ejemplo, 4, y tomando una regla CD (que se llama Nonio), igual á la suma de dichas partes, divido el Nonio en 5 partes iguales, esto es, una parte mas que las que contiene la porcion de escala igual al Nonio: de modo que representando n el número de partes del Nonio, represente $n-1$ el número de partes de escala que comprende el Nonio. Si hacemos coincidir el Nonio con la escala, poniendo por ejemplo el punto C en A, la division 1 del Nonio se anticipará á la division 1 de la escala en la cantidad $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n}$ de la division de la escala que llamo a. La division 2 del Nonio se anticipará á la division 2 de la escala en $\frac{2}{n}a$, la division 3 del Nonio á la de la escala, en $\frac{3}{n}a$, etc.

Sentado esto, supongamos que una recta medida sobre la escala llegue desde el punto A al punto b: comprenderá 4 partes de escala mas la fraccion $4b$ que queremos valuar. Aplico el Nonio á la escala, de modo que su division o concurra con el punto b, y veo cuál de sus divisiones coincide con otra de la escala, y supongo que sea la division 3: la division 2 se anticipará $\frac{1}{n}a$, la division 1, $\frac{2}{n}a$, y la division cero $\frac{3}{n}a$: luego la fraccion $4b=\frac{3}{n}a$. En general, siendo a una de las divisiones de la escala, n el número de divisiones del Nonio, y K la graduacion del Nonio, que coincide con una division de la escala, cuando el cero del Nonio está en b, la fraccion $4b$ equivale á $\frac{K}{n}a$. Cuando se quiere que el Nonio esprese partes decimales, su lon-

llido Nuñez latinizado: asi se llamaba el matemático español que inventó este utilísimo instrumento.

gitud ha de ser igual á 9 partes de escala, y se ha de dividir en 10 partes. Este instrumento es aplicable á la medicion de los arcos del círculo, y de los ángulos que se miden por dichos arcos.

13. Cuando se ha levantado el plano de un terreno por medio de la plancheta, se suelen medir los ángulos en el papel con un semicírculo graduado, ó en el terreno con los instrumentos de que hablarémos despues; y resolviendo los triángulos, conocida la base y los ángulos adyacentes, se calculan las distancias de los puntos del terreno á los estremos de la base. Pero en las operaciones delicadas no se debe emplear la plancheta, cuyos resultados son poco seguros, á no ser para situar algunos lugares menos importantes, y subordinados á los principales que deben figurar en el plano.

14. La *brújula* es un instrumento que sirve para medir el ángulo que forma una recta en el terreno con la línea norte sur del horizonte. Llámase asi la comun seccion del plano del horizonte con el meridiano, círculo máximo de la esfera, que pasa por el polo del mundo y por el cenit.

15. Aunque no sea aplicable este instrumento en las operaciones delicadas, sirve sin embargo en las aproximadas, como son los reconocimientos militares, para indicar sobre un plano las cimas de una misma montaña, las posiciones y formas de sus mesas, el principio y fin de las cuestas, las inflexiones de un rio etc.

Para esto se coloca la línea norte sur del círculo graduado, que acompaña á la aguja imantada, en la direccion de la recta, cuyo ángulo se quiere medir, y se ve en dicho círculo su inclinacion con la direccion de la aguja, corregida de *variacion*, porque la aguja no mira directamente al norte. Esta operacion se repite en cada vértice del polígono que se quiere describir en el plano, y se miden sus lados. Conocidos estos y los ángulos que forman con la línea norte sur, es fácil levantar el plano con la escala y el semicírculo.

16. Sirve tambien la brújula para tirar en el terre-

no por un punto dado una recta paralela á otra dada. Se determina el ángulo que la recta dada forma con la línea norte sur. Se pasa la plancheta al punto dado: se coloca la alidada de modo que forme con la línea norte sur un ángulo igual al observado; y tirando una recta en la direccion de la alidada, esta será paralela á la recta dada.

17. El *cartabon* del agrimensor es un cuadrado atravesado en su centro por dos perpendiculares, paralelas á los lados, en cuyos estremos hay pínulas para dirigir las visuales. Los vértices del polígono, cuyo plano se quiere levantar, se determinarán con este instrumento, tirando una base y uniéndola con la cadena, y bajando despues perpendiculares sobre ella desde todos los vértices del polígono. El pie de cada perpendicular se determina en la base, poniendo en la direccion de esta una de las perpendiculares del cartabon, y corriendo por la base el instrumento hasta que la otra visual enfile el vértice. Despues se miden las perpendiculares, y los segmentos de la base, y se levanta el plano por medio de la escala.

18. Los métodos trigonométricos son preferibles á los que hemos indicado para levantar los planos; pero no se pueden aplicar sin conocer los instrumentos, que sirven para medir los ángulos. Estos son el *grafómetro*, los *instrumentos de reflexion*, *y el repetidor*.

El grafómetro es un semicírculo de metal graduado con su Nonio á la estremidad de un diámetro móvil con anteojos en sus estremos. Tambien los tiene el diámetro fijo del semicírculo: se coloca el centro del grafómetro en el vértice del ángulo que se quiere medir, y dirigiendo las visuales en las direcciones de sus lados, el número de grados que comprendan los dos diámetros es la medida del ángulo.

19. (Fig. 122.) Sea ACE una parte determinada del círculo como la 6.ª ó la 8.ª, en cuyos casos el instrumento toma el nombre de sextante ú octante. El arco AE está graduado, y el punto cero está en *A*. Con la recta

CA coincide una alidada que lleva en su estremo *C* un espejo MM′ perpendicular al segtor; y en el otro radio CE hay otro espejo NN′ perpendicular tambien al segtor y paralelo al espejo MM′; pero solo tiene azogada su parte inferior.

El objeto *G* pinta su imágen en *C*, la cual es reflectada, formando el ángulo GCM de *incidencia* igual al de *reflexion* RCA. La imágen reflectada á R, reflecta tambien del espejo NN′, formando el ángulo de incidencia CRN′ igual al de reflexion NRL; pero por ser MM′ paralela á NN′ los ángulos N′RC, RCM′ son iguales: luego los ángulos GCM, NRL lo son tambien, y siendo MM′ paralela á NN′, serán tambien paralelas RL y GC, de modo que colocando un anteojo LL′ en la direccion RL, se verá en él al objeto G por medio de la parte azogada del espejo NN′ en una direccion paralela á GC; y como mirándole por su parte no azogada se le ha de ver en la misma direccion, porque la distancia de *C* al anteojo es muy pequeña comparada con la de *C* á *G*, se infiere que por el anteojo LL′ se verán juntas la imágen directa y la refleja del objeto G.

Sea D otro objeto, y quiérase medir *la distancia angular* de *D* á *C*, es decir, el ángulo DCG. Muévase la alidada CA, hasta que la imágen refleja del objeto D coincida con la directa del objeto G, vistas una y otra por el anteojo; y supongamos que entonces la alidada CA esté en la posicion CB: digo que el ángulo DCG = al doble del arco AB.

Dem. El ángulo de incidencia DCm = al de reflexion RCB, y por tanto RCB$=a+t$; tambien RCA = GCM$=x+t$: restando será BCA$=x-a$; pero BCA$=a$: luego $a=x-a$, y $x=2a=2$AB. Por eso la graduacion es de medio en medio grado, que para la evaluacion del ángulo equivalen á grados enteros.

Estos son los instrumentos de reflexion de que se hace uso en la mar para las observaciones astronómicas, porque á bordo no se puede establecer un horizonte artificial, ni poner á nivel un instrumento.

En las operaciones geodésicas, se usa del sextante ú octante cuando exigen celeridad como los reconocimientos militares. El ingeniero le lleva en una mano, y con la otra mueve la alidada, y asi observa los ángulos con mucha prontitud, aunque con alguna incorreccion.

20. El mejor instrumento para observar ángulos es sin duda el círculo *repetidor* de Laborda. Este es un círculo graduado, con dos anteojos, cuyas visuales pasan por su centro, y que puede tomar la inclinacion que se quiera con respecto al horizonte. Los anteojos pueden fijarse y hacerse móviles con respecto al limbo. Para medir con este instrumento la distancia angular de A y B, fijo el primer anteojo en la division cero, y dirijo su visual á A, y la del segundo anteojo á B. Muevo el limbo hasta que el segundo anteojo se dirija á A. Haciendo móvil el primer anteojo, y trayéndole á B, habrá descrito un arco doble del ángulo que se quiere medir.

Vuelvo á colocar el primer anteojo en A y el segundo en B, y repito la misma operacion. Al fin de ella, el primer anteojo señalará un arco cuadruplo del ángulo pedido. Al fin de la tercera operacion señalará un arco sextuplo: al fin de la cuarta un arco octuplo etc. De este modo se divide el error que pueda haber en la graduacion del limbo por el doble del número de operaciones. Un círculo repetidor de 43 centímetros basta para las operaciones mas delicadas de la geodesia.

21. Estos son los instrumentos mas usuales y los métodos prácticos mas comunes.

En un tratado elemental no se deben esperar descripciones mas circunstanciadas de los instrumentos que nunca se entienden bien sino teniéndolos á la vista. Ademas el que haya de dedicarse á la práctica de la geodesia, debe no solo consultar, sino estudiar con suma aplicacion las obras de Puissant y Delambre, en las cuales encontrará esplicados muy ámpliamente todos los instrumentos y métodos. Pasemos ahora á la aplicacion de la analisis á este ramo importante de la geometría.

22. Probl. 1.° *Reducir una distancia medida al horizonte.*

Sea d la distancia medida, h el ángulo que forma con el horizonte y p su proyeccion sobre el horizonte. Será $p=d$ cos. h, y $d-p=d\,(1-\text{cos.}\,h)=2d\,\text{cos.}^2\,\frac{1}{2}h$, cantidad que deberá restarse de la distancia medida, para tener su proyeccion sobre el horizonte.

23. 2.° *Reducir un ángulo al horizonte.*

(Fig. 123). Supongamos que desde el punto A, se halla observado el ángulo BAC en un plano inclinado con respecto al horizonte. Proyecto los puntos C y B en el plano del horizonte por medio de CF y BE perpendiculares á este plano. El ángulo EAF es el ángulo BAC *reducido* al horizonte. Para hallar su valor resuelvo: 1.°, el triángulo BAE, rectángulo en E, conocida la distancia BA y su inclinacion BAE con el horizonte, y hallo la AE y BE: 2.°, el triángulo ACF, rectángulo en F, conocida la distancia AC y su inclinacion CAF con el horizonte, y hallo la AF y la CF: 3.°, resuelvo el triángulo BAC, conocidos los lados BA, AC y el ángulo comprendido BAC, y determino la BC: 4.°, imagino CD paralela á FE, y resuelvo el triángulo CBD rectángulo en D, conocida la hipotenusa CB y el cateto BD=BE—CF, y hallo el lado CD=FE: 5.°, resuelvo el triángulo FAE conocidos sus tres lados, y hallo el ángulo EAF.

24. 3.° *Hallar una distancia accesible en un estremo.*

(Fig. 119.) Sea AB accesible en el punto A: mido desde él la base AC, de modo que desde C sea visible el estremo inaccesible B, y mido los ángulos en A y C. Conocido el lado AC$=b$ y los ángulos adyacentes, se calcula el lado AB que será$=\dfrac{b\ \text{sen. C}}{\text{sen. (A+C)}}$.

Este problema se resuelve, sin necesidad de la trigonometría, del modo siguiente:

(Fig. 124.) Sea D el punto inaccesible, cuya distancia á A se quiere medir. Tomo sobre la AD una parte accesible AC, y construyo un triángulo arbitrario ABC y mido sus lados, que llamo a, b, c. Marco en la BC un punto cualquiera E, dirijo la visual DEF, y mido $EC = g$ y $FA = d$; sea $AD = x$.

Tirando EG paralela á FA tendremos $\frac{BC}{EC} = \frac{CA}{CG} = \frac{AB}{EG}$, de donde $CG = \frac{bg}{a}$ y $EG = \frac{cg}{a}$. Siendo $\frac{DA}{FA} = \frac{DG}{EG}$, será $\frac{x}{d} = \frac{DG}{EG}$. Pero $DG = DA - GA = DA - (CA - CG) = x - b + \frac{bg}{a}$: luego substituyendo será $\frac{x}{d} = \frac{ax - ab + bg}{cg}$, de donde $x = bd \frac{g - a}{cg - ad}$.

Tambien puede resolverse con mas prontitud, aunque no tan exactamente, de este modo puramente geométrico.

Mido la base AB, y tiro por B la BM paralela á AD. Dirijo desde M la visual MD, y mido BF y FA. En los triángulos semejantes BMF, FDA, se determinará la DA por la proporcion $\frac{DA}{AF} = \frac{BM}{BF}$, de donde $DA = \frac{AF.BM}{BF}$.

25. 4.° *Determinar una distancia inaccesible.*

(Fig. 125.) Sea la distancia AB. Mido la base CD en el terreno de que puedo disponer: mido tambien los tres ángulos en C y los tres ángulos en D. En el triángulo ACD, conocidos CD, ACD, ADC, determino AC.

En el triángulo BCD, conocidos CD, BCD, BDC, determino CB.

En fin, en el triángulo ACB, conocidos AC, CB y el ángulo comprendido ACB, determino la AB.

Este problema puede resolverse con mas prontitud por el siguiente método geométrico, aunque no tan exacto. (Fig. 126.)

Sea AB la distancia que se quiere medir. Elijo en el terreno tres puntos H, F y K desde los cuales puedan verse los puntos A y B. Mido las HK y HF. Tomo KI y FG, partes alicuotas y semejantes de KH y FH, por ejemplo, cada una sea el tercio de su todo. Tiro las visuales HA, HB, FA, KB. Tiro IL paralela á HB, y GE paralela á HA. Tiro EC paralela á FH y LD paralela á HK. Tiro CD y esta será tercera parte de AB; porque á causa de los triángulos semejantes es $FG = \frac{1}{3} FH$, $FE = \frac{1}{3} FA$, y $HC = \frac{1}{3} HA$: del mismo modo $HD = \frac{1}{3} HB$: luego CD es paralela á AB y $= \frac{1}{3} AB$.

26. 5.ª Se han medido dos segmentos estremos de una recta; mas no se ha podido medir el segmento medio, porque atraviesa por un pantano ú otro terreno intransitable; *se pide hallar el valor del segmento desconocido*, dados dos ángulos bajo los cuales se ven los tres segmentos de la recta desde un punto tomado fuera de ella. (Fig. 127.)

Sean a, x, c, los tres segmentos, y m, n, p los ángulos, bajo los cuales son vistos desde el punto E. Llamo t al ángulo A. Será $EBC = m + t$, $ECD = m + n + t$ — $EDF = m + n + p + t$.

El triángulo AEB da $BE = \frac{a \text{ sen. } t}{\text{sen. } m}$, y el triángulo AEC, $CE = \frac{(a+x) \text{ sen. } t}{\text{sen. } (m+n)}$: luego $\frac{BE}{CE} = \frac{a \text{ sen. } (m+n)}{(a+x) \text{ sen. } m}$.

El triángulo DEC da $CE = \frac{c \text{ sen. } (m+n+p+t)}{\text{sen. } p}$, y el triángulo DEB da $BE = \frac{(c+x) \text{ sen. } (m+n+p+t)}{\text{sen. } (n+p)}$, de donde $\frac{BE}{CE} = \frac{(c+x) \text{ sen } p}{c \text{ sen. } (n+p)}$. Luego $\frac{a \text{ sen. } (m+n)}{(a+x) \text{ sen. } m} = \frac{(c+x) \text{ sen. } p}{c \text{ sen. } (n+p)}$; de donde $x = -\frac{1}{2}(a+c) \pm \frac{1}{2}(a-c) \sqrt{\left(1 + \frac{4\,ac}{(a-c)^2} \cdot \frac{\text{sen. } (m+n) \text{ sen. } (n+p)}{\text{sen. } m \,.\, \text{sen. } p}\right)}$. Hago $\frac{4\,ac}{(a-c)^2} \cdot \frac{\text{sen. } (m+n) \text{ sen. } (n+p)}{\text{sen. } m \,.\, \text{sen. } n} = \text{tang.}^2 f$, fórmula de la cual es facil deducir el arco f; y será $x = -\frac{1}{2}(a+c) \pm \frac{1}{2}(a-c) \cdot \frac{1}{\cos. f}$. Como x

debe ser positivo, se tomará el signo $+$, si $a > c$, y el signo $-$ si $a < c$.

27. 6.º *Dado un triángulo, determinar un punto, conocidos los ángulos, bajo los cuales se ven desde él los tres lados del triángulo.*

Conocido el triángulo ABC, y los ángulos x y z, determinar la posicion del punto D (Fig. 125). Llamo a, b, c los lados del triángulo; y los ángulos desconocidos $ABD = y$, $ACD = u$.

En el triángulo ABD, $\frac{DA}{\text{sen.}\,y} = \frac{AB}{\text{sen.}\,x}$, de donde $DA = \frac{c\ \text{sen.}\,y}{\text{sen.}\,x}$, y en el triángulo ACD, $\frac{DA}{\text{sen.}\,u} = \frac{AC}{\text{sen.}\,z}$, de donde $DA = \frac{b\ \text{sen.}\,u}{\text{sen.}\,z}$. Igualando valores es $\frac{c\ \text{sen.}\,y}{\text{sen.}\,x} = \frac{b\ \text{sen.}\,u}{\text{sen.}\,z}$: luego $\frac{\text{sen.}\,y}{\text{sen.}\,u} = \frac{b\ \text{sen.}\,x}{c\ \text{sen.}\,z}$. Sea l un ángulo, cuya tangente sea $\frac{b\ \text{sen.}\,x}{c\ \text{sen.}\,z}$, de modo que $\text{tang.}\,l = \frac{b\ \text{sen.}\,x}{c\ \text{sen.}\,z}$: será $\text{tang.}\,l = \frac{\text{sen.}\,y}{\text{sen.}\,u}$: luego $1 + \text{tang.}\,l = 1 + \frac{\text{sen.}\,y}{\text{sen.}\,u} = \frac{\text{sen.}\,u + \text{sen.}\,y}{\text{sen.}\,u}$, y $1 - \text{tang.}\,l = 1 - \frac{\text{sen.}\,y}{\text{sen.}\,u} = \frac{\text{sen.}\,u - \text{sen.}\,y}{\text{sen.}\,u}$: luego $\frac{1 + \text{tang.}\,l}{1 - \text{tang.}\,l} = \frac{\text{sen.}\,u + \text{sen.}\,y}{\text{sen.}\,u - \text{sen.}\,y}$: ahora $\frac{1 + \text{tang.}\,l}{1 - \text{tang.}\,l} = \text{tang.}\,(45° + l)$, y $\frac{\text{sen.}\,u + \text{sen.}\,y}{\text{sen.}\,u - \text{sen.}\,y} = \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(u+y)}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(u-y)}$: luego $\text{tang.}\,(45° + l) = \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(u+y)}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(u-y)}$, de donde $\text{tang.}\,\frac{1}{2}(u-y) = \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(u+y)}{\text{tang.}\,(45° + l)}$. Determino, pues, el ángulo auxiliar l por la fórmula $\text{tang.}\,l = \frac{b\ \text{sen.}\,x}{c\ \text{sen.}\,z}$: como $u + y$ es $= 360° - A - x - z$, porque los cuatro ángulos de un cuadrilátero valen 360°, será conocido. Determino, pues, $u - y$, por la ecuacion $\text{tang.}\,\frac{1}{2}(u-y) = \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(u+y)}{\text{tang.}\,(45° + l)}$. Conocida la suma y diferencia de los ángulos u, y, podré determinar estos dos ángulos. Si $\text{tang.}\,\frac{1}{2}(u-y)$ es positivo,

:

el ángulo u será el mayor; si negativo, u será el menor, porque entonces $u-y$ es negativo.

Conocidos los ángulos u, y, se podrán determinar las líneas CD, BD, AD, y por tanto todas las partes de la figura y la posicion del punto D.

Hemos dado en la Geometría elemental la solucion gráfica de este problema.

28. 7.º *Medir una altura.*

Si se puede llegar á su pie mídase desde él una base horizontal, y desde el otro estremo diríjase una visual al punto superior de la altura. Sea a el ángulo que esta visual forma con el horizonte, y sea b la base. La altura será b tang. $a+c$, siendo c la altura del instrumento que se emplea para medir el ángulo.

Tambien se mide la altura por un método geométrico clavando dos jalones verticales uno mas alto que otro; de modo que la visual, que pase por sus estremos, pase por el punto superior de la altura, y formando esta proporcion: distancia de los jalones es á su diferencia, como la distancia del jalon mas corto á la altura es al cuarto término, que será el valor de la altura menos el jalon mas corto.

Tambien se mide una altura, midiendo su sombra cuando le da el sol. Mídase tambien la altura y sombra de un estadal clavado verticalmente á poca distancia de la altura; y como los rayos solares, que determinan ambas sombras se pueden suponer paralelos en una distancia pequeña, serán las sombras proporcionales á las alturas.

29. Si no se puede llegar al estremo inferior de la altura, se mide una base en el terreno que está al arbitrio del operador; y se determina la distancia de uno de los estremos de la base al estremo inferior de la altura. El valor de esta distancia debe ponerse en lugar de b en la fórmula b tang. $a+c$.

30. *Areas.* 8.º *Hallar el área de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.*

(Fig. 119.) Sea el triángulo ABC. Su área es $\frac{1}{2}$ AC $\times$

BO; pero BO $=$ AB $\times$ sen. A: luego el área pedida es $\frac{1}{2}$ AC $\times$ AB $\times$ sen. A $= \frac{1}{2} bc$ sen. A.

9.º *Hallar el área de un triángulo, dados un lado y los ángulos.*

En la fórmula $\frac{1}{2} bc$ sen. A póngase por b su valor $\frac{C \text{ sen. } B}{\text{sen. } C}$, y será el área $\frac{1}{2} c^2 \frac{\text{sen. } A \text{ . sen. } B}{\text{sen. } C}$.

10.º *Hallar el área de un triángulo dados los tres lados.*

En la fórmula $\frac{1}{2} bc$. sen. A, póngase por sen. A, 2 sen. $\frac{1}{2}$ A cos. $\frac{1}{2}$ A, y quedará reducida el área á bc sen. $\frac{1}{2}$ A cos. $\frac{1}{2}$ A.

Pero sen. $\frac{1}{2}$ A $= \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}$, siendo p el semiperímetro del triángulo: luego cos. $\frac{1}{2}$ A $= \sqrt{1 - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} A}$ $= \sqrt{\left(1 - \frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}\right)} = \sqrt{\frac{p\,(b+c-p)}{bc}} = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}}$ luego el área es $\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$.

11.º *Hallar el área de un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.*

El área ABC $=$ ABO $\pm$ OBC, segun el ángulo c sea agudo ú obtuso. Pero ABO $= \frac{1}{2}$ AO $\times$ BO, y OBC $=$ $\frac{1}{2}$ OC $\times$ BO: luego ABC $= \frac{1}{2}$ BO (AO $\pm$ OC). Pero BO $=$ c sen. A, y AO $= c$ cos. A, y OC $= a$ cos. C: luego el área es $\frac{1}{2} c$ sen. A (c cos. A $\pm a$ cos. C).

Determino, pues, el ángulo C por la fórmula sen. C $= \frac{c \text{ sen. } A}{a}$: hago a cos. C $= c$ cos. f, y determino por esta fórmula el ángulo auxiliar f: el área será $\frac{1}{2}$ c^2 sen. A (cos. A $\pm$ cos. f).

Tomando el signo $+$, será el área $\frac{1}{2} c^2$ sen. A cos. $\frac{1}{2}$ (A $+ f$) cos. $\frac{1}{2}$ (A $- f$); y tomando el signo $-$, será $\frac{1}{2} c^2$ sen. A sen. $\frac{1}{2}$ (A $+ f$) sen. $\frac{1}{2}$ ($f -$ A).

12.º *Hallar el área del triángulo, dado el radio del círculo circunscripto.*

En todo triángulo (G. 399) el producto de dos lados es igual al diámetro del tricírculo circunscripto multiplicado por la altura bajada sobre el tercer lado.

Sean, pues, los lados a, b, c: r el radio del círculo circunscripto, z la altura bajada sobre a, será $2rz = bc$, y $z = \frac{bc}{2r}$; pero el área es $\frac{1}{2} az$: luego el área es $\frac{abc}{4r}$.

13.° *Hallar el área del triángulo, dado el radio del círculo inscripto.*

Sea r el radio del círculo inscripto, y tiro rectas desde su centro á los vértices del triángulo; resultarán tres triángulos parciales cuya suma sea el área pedida: las áreas parciales son $\frac{1}{2} ar$, $\frac{1}{2} br$, $\frac{1}{2} cr$: luego el área del triángulo es pr.

31. *Areas de cuadriláteros.* 14.° *Hallar el área de un paralelógramo, dados dos lados y el ángulo comprendido.*

Sean a y b los dos lados, y C el ángulo comprendido: el área del triángulo mitad del paralelógramo será $\frac{1}{2} ab$ sen. C, y la del paralelógramo ab sen. C.

32. 15.° *Hallar el área de un cuadrilátero, conocido un lado, las perpendiculares bajadas sobre él desde los vértices opuestos, y los segmentos que forman en dicho lado.*

(Fig. 128.) Sea $AB = a$, $AE = b$, $FB = b'$, $DE = h$, $CF = h'$. El área del triángulo ADE es $\frac{1}{2} bh$. La del triángulo CBF es $\frac{1}{2} b'h'$. La del trapecio DEFC es $\frac{1}{2}(h+h')(a-b-b')$. Sumando estas áreas será el cuadrilátero $= \frac{1}{2}(bh+b'h'+ah+ah'-bh-bh'-b'h-b'h') = \frac{1}{2}(ah-b'h+ah'-bh') = \frac{1}{2}(h(a-b')+h'(a-b))$.

Si una de las perpendiculares cae fuera, se variará el signo á su segmento.

33. 16.° *Hallar el área de un cuadrilátero dadas sus diagonales y el ángulo que forman.*

(Fig. 125.) Sea $OD = a$, $OC = b$, $OA = c$, $OB = d$. Como el área de un triángulo es el semiproducto de dos lados por el seno del ángulo comprendido, teniendo todos los ángulos en O un mismo seno, será el área $COD = \frac{1}{2} ab$ sen. O, $AOC = \frac{1}{2} bc$ sen. O, $BOA = \frac{1}{2} cd$ sen. O, $DOB = \frac{1}{2} ad$ sen. O; y la suma ó área del cuadrilátero será $\frac{1}{2}$ sen. O $(ab+bc+cd+ad) = \frac{1}{2}$ sen. O

$(a+c)(b+d)$: es decir, el semiproducto de las diagonales multiplicado por el seno del ángulo comprendido.

34. 17.° *Dados los cuatro lados de un cuadrilátero inscripto en el círculo, hallar el radio del círculo, el área del cuadrilátero y sus ángulos.*

(Fig. 129.) Sea $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Sean la diagonal $AC=x$, y la diagonal $BD=y$. Tendremos (G. 400), $xy=ac+bd$, y $\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$, de donde $x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$, $y=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$.

Sea z el radio del círculo circunscripto al cuadrilátero, que lo es al triángulo ABC, cuyos lados son a, b, x. Si llamamos S el área de este triángulo, será $S=\frac{abx}{4z}$, de donde $z=\frac{abx}{4S}$. Pero como $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-x)}$, será $z=\frac{abx}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-x)}}=$

$$\frac{abx}{\sqrt{(a+b+x)(a+x-b)(b+x-a)(a+b-x)}}=\frac{abx}{\sqrt{((a+b)^2-x^2)(x^2-(a-b)^2)}}$$

$$=\frac{abx}{\sqrt{(2ab+a^2+b^2-x^2)(2ab-(a^2+b^2-x^2))}}$$

$$z=\frac{ab\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}}{\sqrt{\left(\frac{(2ab+a^2+b^2)(ab+cd)-(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)^2}\right)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{((2ab-a^2-b^2)(ab+cd)+(ac+bd)(ad+bc))}}$$

Quito $\sqrt{(ab+cd)}$ que parte en ambos términos, traslado el divisor $\sqrt{(ab+cd)}$ que queda en el denominador, al numerador, introduzco ab debajo del radical; y es

$$z=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)a^2b^2}{(2ab+a^2+b^2)(ab+cd)-(ac+bd)(ad+bc)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{((2ab-a^2-b^2)(ab+cd)+(ac+bd)(ad+bc))}}$$

Efectuo la multiplicacion en el denominador, reduzco, quito $a^2 b^2$ comun á ambos términos, y es

$$z=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{((a+b)^2-(c-d)^2)((c+d)^2-(a-b)^2)}}=$$

$$\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)}}$$

Sea p el semiperímetro del cuadrilátero, y será el radio del círculo circunscripto $z=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$.

El área del cuadrilátero será la suma de los dos triángulos ABC, ADC. La del primero es $\frac{abx}{4z}$, la del segundo $\frac{cdx}{4z}$: luego la del cuadrilátero será $\frac{1}{4}x\left(\frac{ab+cd}{z}\right)=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Determinemos cualquier ángulo, por ejemplo, el ángulo B. Siendo cos. B$=\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$ poniendo por x su valor y reduciendo, será cos. B$=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}$. Pero tang.$^2\ \frac{1}{2}$ B$=\frac{1-\text{cos. B}}{1+\text{cos. B}}$. Sustituyendo será tang.$^2\ \frac{1}{2}$ B$=\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-(c-d)^2}=\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}$.

35. 18.° *En un cuadrilátero, que tenga dos ángulos opuestos rectos, dado uno de los otros ángulos y los lados que lo comprenden, determinar los otros dos lados y las diagonales.*

(Fig. 130.) Sean rectos los ángulos B y C: sean dados AC$=b$, AB$=c$ y el ángulo A. Prolongo BD y AC hasta su encuentro en E: en el triángulo rectángulo ABE, será AE$=\frac{c}{\text{cos. A}}$, CE$=\frac{c}{\text{cos. A}}-b$. En el triángulo DCE rectángulo en C, en el cual el ángulo CDE$=$A (G. 398) será CD$=$CE cot. A$=\frac{c-b\ \text{cos. A}}{\text{sen. A}}$. Del mismo modo BD$=\frac{b-c\ \text{cos. A}}{\text{sen. A}}$. La diagonal AD (que es diámetro) será $=\sqrt{(AC^2+CD^2)}=\frac{\sqrt{(b^2+c^2-2bc\cos. A)}}{\text{sen. } A}$: pero la diagonal BC en el triángulo BAC, es $=\sqrt{(b^2+c^2-2bc \cos. A)}$: luego la razon de BC á DA es sen. A. En efecto, bajando CF perpendicular á BA, los triángulos rectángulos BFC, ACD, que tienen iguales los ángulos ABC, ADC, darán $\frac{BC}{AD}=\frac{CF}{AC}=$ sen. A.

36. 19.° *Hallar el área de un trapecio, dados sus cuatro lados.*

Sean a, b, c, d los cuatro lados, b y d sean paralelos, y la altura incógnita del trapecio, y A su área, será $A=\frac{b+d}{2}y$. La altura y del trapecio lo es tambien de un triángulo cuyos lados son a, c, y $d-b$, que supongo $=g$. El área de este triángulo será $\sqrt{p(p-a)(p-c)(p-g)}$, siendo $p=\frac{1}{2}(a+c+g)$: luego siendo la base g, la altura $y=\frac{2}{g}\sqrt{p(p-a)(p-c)(p-g)}$. Substituyendo es $A=\frac{b+d}{g}\sqrt{p(p-a)(p-c)(p-g)}$.

37. 20.° *Hallar el área de un polígono regular.*

Sea l su lado y n el número de sus lados. El semiperímetro es $\frac{1}{2}nl$, y la apotecma $=\frac{1}{2}l$ tang. $\frac{180°(n-2)}{2n}$ $=\frac{1}{2}l$ tang. $\left(90°-\frac{180°}{n}\right)=\frac{1}{2}l$ cot. $\frac{180}{n}$: luego el área es $\frac{1}{4}nl^2$ cot. $\frac{180°}{n}$.

38. 21.° *Determinar el área de un polígono curvilíneo.*

Se tira una recta que lo atraviese en su longitud, y perpendicularmente á ella se tiran muchas rectas equidistantes que lo atraviesen por su ancho, y que dividan el perímetro en partes, que se puedan considerar como líneas rectas. El área del polígono se hallará, sumando los trapecios parciales, y será igual á la altura de uno de ellos multiplicada por la semisuma de las perpendiculares estremas, mas la suma de las medias.

39. *Division de áreas.* 22.° *Dividir un triángulo en dos partes que tengan entre sí la razon de* $m : n$, 1.° *por medio de una recta tirada desde su vértice.*

Divídase la base en la razon de $m : n$, y tírese una recta desde el vértice al punto de division: los dos triángulos parciales que resultan, tendrán una misma altura, serán como sus bases, y estarán en la razon de $m : n$.

2.° *Por medio de una recta paralela á un lado.*

El triángulo parcial que resulte será semejante al total, y estará con él en la razon de $m : m+n$, ó de $m : t$ haciendo $m+n=t$. Sea, pues, a un lado del triángulo propuesto, y x el homólogo del triángulo pedido: siendo los triángulos semejantes proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, será $\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{t}$. El valor de x se construye como (Ap. 35).

3.° *Por medio de una recta perpendicular á un lado.* (Fig. 119.) Sea el triángulo ABC, y DL la recta divisoria pedida. Sea $AC=b$, $BO=h$, $CL=x$, $LD=y$; siendo $\frac{CDL}{ABC} = \frac{m}{t}$, será $\frac{xy}{bh} = \frac{m}{t}$. Sea $CO=a$ y los triángulos semejantes CDL, CBO, dan $\frac{y}{h} = \frac{x}{a}$, de donde $y = \frac{hx}{a}$, lo que convierte la primer ecuacion en $\frac{x^2}{ab} = \frac{m}{t}$ hago $ab = k^2$, y se tiene $\frac{x^2}{k^2} = \frac{m}{t}$, que se construye como en (Ap. 35).

Si $m=n$, ó $t=2m$, será $x^2 = \frac{1}{2}ab$.

4.° *Por medio de una recta paralela á una recta dada.* (Fig. 131).

Sea ABC el triángulo dado: QP la línea divisoria paralela á qp. El área del triángulo $ABC = \frac{1}{2}c^2 . \frac{\text{sen. A. sen. B}}{\text{sen. C}}$, y llamando $AP=x$, el área del triángulo $AQP = \frac{1}{2}x^2 . \frac{\text{sen. A. sen. } p}{\text{sen. } q}$; y como estas áreas estan en la razon de $m:t$, será $\frac{x^2}{c^2}=\frac{m.\frac{\text{sen. B}}{\text{sen. C}}}{t.\frac{\text{sen. }p}{\text{sen. }q}}=\frac{m.\frac{\text{sen. B}}{\text{sen. }p}}{t.\frac{\text{sen. C}}{\text{sen. }q}}$.

Prolongo la qp hasta su encuentro en M con la CM. Divido la CM en O en la razon de $m:n$, de modo que $\frac{\text{MO}}{\text{MC}}=\frac{m}{t}$, y tiro ON paralela á AB. En el triángulo MON, $\text{MN}=\text{MO}.\frac{\text{sen. B}}{\text{sen. }p}$, y en el triángulo M$q$C, $\text{M}q=\text{MC}.\frac{\text{sen. C}}{\text{sen. }q}$: luego $\frac{\text{MN}}{\text{M}q}=\frac{\text{MO}}{\text{MC}}.\frac{\frac{\text{sen. B}}{\text{sen. }p}}{\frac{\text{sen. C}}{\text{sen. }q}}=\frac{m.\frac{\text{sen. B}}{\text{sen. }p}}{t.\frac{\text{sen. C}}{\text{sen. }q}}$:

luego $\frac{x^2}{c^2}=\frac{\text{MN}}{\text{M}q}$, que se construye como en (Ap. 35).

5.° *Por medio de la menor recta posible.*

Sea ABC el triangulo dado. Su área es $\frac{1}{2}bc$ sen. A. Sea QP la línea divisoria: hago $\text{QP}=x$, y $\frac{m}{t}=l$. Tiro AL perpendicular á QP, y el ángulo incógnito $\text{PAL}=d$, será $\text{APL}=90°-d$, y $\text{AQL}=90°-\text{QAL}=90°-\text{A}+d$. El área del triángulo $\text{QAP}=\frac{1}{2}x^2.\frac{\text{sen. }(90°-d)\text{ sen }(90°-\text{A}+d)}{\text{sen. A}}$ $=\frac{1}{2}x^2.\frac{\cos. d.\cos.(\text{A}-d)}{\text{sen. A}}$: luego $x^2=\frac{lbc\text{ sen.}^2\text{ A}}{\cos. d.\cos.(\text{A}-d)}$.

Pero $\cos. d\cos.(\text{A}-d)=\frac{1}{2}\cos.\text{A}+\frac{1}{2}\cos.(\text{A}-2d)$ (T. 26): luego $x^2=\frac{2lbc.\text{ sen.}^2\text{ A}}{\cos.\text{A}+\cos.(\text{A}-2d)}$.

Para que x^2 sea el menor posible, es menester que el denominador sea el mayor posible, y por tanto $\cos.(\text{A}-2d)=1$, $\text{A}-2d=o$, $d=\frac{1}{2}\text{A}$. *Luego la recta divisoria debe ser perpendicular á la que biseca el ángulo A.* Para tirar la recta PQ, basta conocer el punto P. Sea $\text{AP}=z$. En el triángulo APQ, es $\frac{x}{\text{sen. A}}=\frac{z}{\cos.\frac{1}{2}\text{A}}$.

Pero $x^2 = \frac{2lbc. \text{ sen.}^2 A}{1+\text{cos. } A} = \frac{2lbc \text{ sen.}^2 A}{2 \text{ cos.}^2 \frac{1}{2} A}$: luego $x = \frac{\text{sen. } A}{\text{cos. } \frac{1}{2} A} \sqrt{lbc}$; de donde $z = \sqrt{lbc}$, esto es, media proporcional entre AB y $\frac{m}{t}$ AC.

6.° *Por medio de una recta que pase por un punto dado.*

Sea ABC el triángulo dado, D el punto dado: DH, paralela al lado AB, $=f$, HA$=q$, AQ$=x$; será HQ$=x+q$, y AP$=\frac{fx}{x+q}$: el área del triángulo ABC$=\frac{1}{2}ac$ sen. A, y la del triángulo QAP$=\frac{1}{2}$AQ$\times$AP. sen. A$=\frac{fx^2}{2(x+q)}$: luego $\frac{fx^2}{ac\,(x+q)} = \frac{m}{t}$, ó $ftx^2 - acmx - acmq = o$. De los dos valores de x, el positivo resuelve el problema: el negativo sirve para construir un triángulo equivalente á APQ en el ángulo opuesto al vértice al ángulo A.

Si el punto D se diese dentro del ángulo, la q seria indirecta; el último término de la ecuacion positivo, y las dos raices de la ecuacion serian positivas, en el caso de ser reales, y el problema tendria dos soluciones.

Si el punto D estuviese en D′, la f y la q serian indirectas, la ecuacion seria $ftx^2 + acmx - acmg = o$, y el problema solo tendria una solucion. El valor negativo serviria para construir un triángulo equivalente á APQ en el ángulo opuesto al vértice al ángulo A.

Este problema es idéntico con este otro: *dado un ángulo A tirar por el punto dado D una recta tal, que con las dos del ángulo encierre un área dada;* pues siendo *S* el área del triángulo ABC, $\frac{m}{t}$ S, valor del triángulo APQ, es una cantidad conocida.

40. 23.° *Dividir un triángulo en cuantas partes iguales se quiera con rectas tiradas desde un punto tomado en uno de sus lados*; (como toda figura se puede re-

ducir á un triángulo, que pase uno de sus lados por un punto dado, puede servir este problema para dividir una heredad en partes iguales por medio de senderos, que vayan á parar á un pozo ó cisterna comun, de que se sirvan todos los interesados).

Divídase el lado, donde está el punto, en tantas partes iguales como ha de tener el triángulo; desde los puntos de division tírense paralelas á la recta que une el punto dado con el vértice opuesto: estas paralelas cortarán el perímetro del triángulo en los puntos, donde deben ir á parar los senderos.

41. 24.° *Dadas las dos bases paralelas y la altura de un trapecio, tirar una paralela á las bases tal, que el espacio comprendido entre ella y la base mas pequeña sea igual á un área dada S.*

Sea b la base mas pequeña, b' la mayor, a la altura del trapecio dado, x la del pedido, y la paralela pedida; será $x(b+y)=2S$, de donde $y=\frac{2S}{x}-b$.

Las paralelas dan esta proporcion $\frac{b'-b}{a}=\frac{y-b}{x}$, de donde $x=\frac{(y-b)a}{b'-b}$: eliminando la y, será $x^2+\frac{2ba}{b'-b}x-\frac{2Sa}{b'-b}=o$, y $x=-\frac{ba}{b'-b}\pm\sqrt{\left(\frac{2Sa}{b'-b}+\frac{b^2a^2}{(b'-b)^2}\right)}$.

El valor positivo resuelve el problema: $y=\pm\sqrt{\left(\frac{2S(b'-b)}{a}+b^2\right)}$.

42. 25.° *Dividir un cuadrilátero en dos partes que esten en una razon dada, por medio de una recta, cuya direccion sea dada.*

Sea el cuadrilátero QPBC: sea qp la línea divisoria, que ha de cortar el área PQ$pq=\frac{m}{t}$ S, siendo S el área del cuadrilátero.

Prolongo los lados QC, QB hasta su encuentro en A. Calculo el área del triángulo QAP, en el cual conozco el lado QP y los ángulos adyacentes. Añado á esta área el área $\frac{m}{t}S$, y llamo á esta suma M, y la cuestion se reduce á cortar en el triángulo ABC un triángulo $=$ M, por medio de una recta, cuya direccion sea dada. Ya hemos resuelto este problema (39, 4°).

43. 26.° *Dado un rectángulo construir sobre una base dada otro que le sea equivalente.*

Sean B y A la base y altura del rectángulo dado: b la base del rectángulo pedido, y x su altura incógnita. Será $AB = bx$, y $x = \frac{AB}{b}$, cuarta proporcional.

44. 27.° *Construir una figura semejante á otra dada y que esté con ella en una razon dada.*

Sea P la figura dada, y X la pedida; a un lado de la primera, y x el homólogo de la segunda; sea la razon dada $\frac{m}{n}$. Será $\frac{P}{X} = \frac{m}{n}$, y $\frac{P}{X} = \frac{a^2}{x^2}$: luego $\frac{m}{n} = \frac{a^2}{x^2}$. El valor de x se construye como en (Ap. 35).

45. 28.° *Construir una figura semejante á otra dada* P, *y equivalente á otra dada* Q.

Sea X la figura pedida, a un lado de la figura P, y x su homólogo en la figura X; será $\frac{P}{X} = \frac{a^2}{x^2}$; pero X ha de ser $=$ Q: luego $\frac{P}{Q} = \frac{a^2}{x^2}$. Reduzco P al cuadrado m^2 (G. 223), y Q al cuadrado n^2, y será $\frac{m^2}{n^2} = \frac{a^2}{x^2}$, de donde $x = \frac{an}{m}$, cuarta proporcional.

46. 29.° *Hallar el área de un terreno intransitable, como un pueblo, una laguna, un castillo etc.*

Circunscribo al área, que se quiere medir, un rectángulo: calculo su área, y resto de ella las áreas parciales, comprendidas entre el rectángulo y el terreno pedido, y se tendrá el área de dicho terreno.

47. 30.° *Reducir á línea recta la linde de un terreno, cuando es una curva undulante.*

(Fig. 132.) Sea *amcnt* la curva undulante que forman la linde: tiro una visual *ta*, que deje fuera una área *bce* igual á la suma de las que introduce en el terreno *amb ent*; y la linde rectilínea será *ta*.

Si se quiere hacer con mas exactitud, valúense las áreas introducidas, y las que han quedado fuera, y sea su diferencia d; construyo sobre at un triángulo rectángulo $ato = d$, es decir, su altura $ao = \frac{2d}{at}$.

48. *Prácticas mas usuales de la agrimensura.*

La regla práctica mas general para la medicion de un terreno, si es irregular su figura, y no pertenece á ninguna de las que hemos enseñado á medir en la geometría, es inscribir en él el mayor rectángulo posible, y los pedazos que queden fuera, medirlos como triángulos; ó si son capaces de admitir un nuevo rectángulo ó trapecio, entonces los recodos quedan mas pequeños, y hacen á ojo la valuacion de ellos.

Para la formacion de estos rectángulos las operaciones mas comunes de geometría son tirar una perpendicular y una paralela. Para tirar una perpendicular á una recta dada usan del cartabon con dos alidadas, que se cortan en ángulo recto: alinean con la recta dada la visual de una de las alidadas, y en la direccion de la otra fijan jalones, cuya direccion es la de la perpendicular pedida. La paralela á una recta dada se determina tirando una perpendicular á dicha recta, y despues otra perpendicular á la que se tiró primero.

En cuanto á la division de los terrenos, si estos tienen figura cuadrangular ó triangular, usan de los problemas relativos á la division de las áreas, que pueden verse en varios autores. Bails trae muchos en su geometria. Pero lo mas comun es valuar todo el terreno en estadales ó varas cuadradas: dividir su valor en el número de partes que se pide, y tomar ya rectángulos, ya trapecios, ya triángulos, que equivalgan á cada parte. La figura, que han de tener dichas partes, pende de circunstancias diferentes, como son la participacion comun de un pozo ó caserio, ó de la márgen de un rio, ó los convenios y transacciones, hechos entre los que han de repartir el terreno.

Otros hacen la valuacion y la division, levantando con suma exactitud el plano del terreno, y haciendo en él la medicion ó la division por medio de la escala, ó por operaciones geométricas.

Bien se ve cuán útil será, para no hallarse atado en ningun caso, ni esponerse á arbitrariedades é inexactitudes en las operaciones, que el agrimensor reuna á mucha práctica y tino en el manejo de los instrumentos, la competente instruccion en los principios de la geometría elemental, y de la análisis geométrica que lo pongan en estado de resolver todos los problemas que puedan ocurrirle. La necesidad de esta instruccion queda bien probada con los problemas de geodesia, que hemos resuelto anteriormente, y que son por la mayor parte de un uso contínuo en la práctica de la agrimensura. Asi es, que los agrimensores mas hábiles emplean, señaladamente en las operaciones delicadas, el grafómetro para la medicion de los ángulos, y usan de los métodos trigonométricos, como mas seguros y exactos, que el de la escala, en la determinacion de distancias no medidas en el terreno.

49. *Medida de volúmenes y aforos: arqueo de buques.*

La capacidad de los vasos cilíndricos, que contienen líquidos, se mide adoptando primeramente una unidad de medida, por ejemplo, una azumbre de líquido, poniéndola en un vaso cilíndrico pequeño, cuyo diámetro esté bien medido, y señalando con mucha exactitud la altura del fluido en dicho vaso. Refiriendo á esta base y altura las del vaso cilíndrico, que se quiere medir, el producto de dichas razones da el número de azumbres que contiene el vaso.

Para hallar estas razones con facilidad, se construye una vara, se toman sobre una de sus caras partes iguales á la altura del fluido en el vaso que sirve de unidad, y en la otra los diámetros del círculo doble, triplo, cuadruplo etc. de la base de dicha unidad; construccion que se hace por la propiedad conocida del cuadrado de la hipotenusa. Estas dos caras servirán para hallar la base y altura del vaso propuesto.

Si dicho vaso es cónico, se deberá multiplicar el tercio de su altura por la suma de las dos bases opuestas, y de una base media proporcional geométrica entre ambas. En la práctica multiplican la semisuma de las dos bases por la altura; método en que se cometen grandes errores, y tanto mayores, cuanto es mayor la diferencia de ambas bases.

Si el vaso es un tonel, lo dividen por medio con una seccion paralela á las bases, y cada mitad la consideran como un cilindro de la misma altura, y cuya base sea la semisuma de la seccion y de la base del tonel. Este método no es tan erróneo en los toneles como en los vasos cónicos, ya porque la diferencia de la seccion á la base no es muy grande, ya porque anchando el tonel mas que el vaso cónico, se acerca mas al cilindro de la base media. Pero lo mejor seria, determinada la curva de revolucion, que forma el medio tonel, y que se acerca mucho á parábola, hallar la solidez del paraboloide por los métodos que suministra el cálculo integral. Solo hacemos esta observacion para que se conozca hasta qué punto es necesario profundizar en las matemáticas puras, si se quieren obtener los resultados prácticos con la debida exactitud.

Arquear un buque es determinar el número de toneladas que contiene la capacidad de la bodega. Para hacer esta operacion con arreglo á ordenanza, dada por S. M. en Real cédula de 19 de setiembre de 1742, se deben tomar cinco dimensiones, que son: Eslora, Quilla limpia, Manga, Plan y Puntal.

La Eslora se mide en la altura de la primera cubierta de codaste á roda por la parte interior de la tablazon.

La Quilla se mide desde el nacimiento del branque hasta el alefris del codaste, ó de estopa á estopa, que es lo qué se llama quilla limpia.

La Manga se toma en lo mas ancho de la cuaderna ó barenga maestra sobre la primera cubierta, ó por lo interior de la tablazon.

El Plan se mide sobre dicha cuaderna de cabeza á cabeza de barenga, ó de palmejar á palmejar, que son los que pasan por las cabezas de los planes.

Puntal es la distancia que hay desde el sobreforro de la bodega hasta debajo de la tablazon de la primera cubierta sin incluir la vuelta del vaso; y se toma en el mismo sitio de la cuaderna maestra sobre el forro del plano.

Tomadas estas dimensiones en pies de Burgos, multiplíquense entre sí estos tres factores, semisuma de eslora y quilla; $\frac{3}{4}$ de la manga sumados con la mitad del plan; mitad del puntal; el producto será en pies cúbicos el volúmen de la bodega; multiplíquese por $\frac{100}{7019}$, y se tendrá el número de toneladas del buque. Su tercera parte se considera empleada en el peso de la arboladura y víveres etc., y las otras dos terceras partes espresan la carga.

Esta operacion equivale á multiplicar la semisuma de eslora y quilla por el puntal, lo que da el área del trapecio, que resulta del corte vertical del medio del buque, y á multiplicar despues esta área por los $\frac{5}{8}$ de la manga mas $\frac{1}{4}$ del plan. Como entre el plan y la manga hay alguna diferencia, esta operacion viene á ser multiplicar el área de dicho trapecio por la mitad de la manga y algo mas: lo que supone reducida la medida de la bodega á un prisma trapezoidal, cuyo ancho fuera poco mas de la mitad de la manga. Esta reduccion tiene mucho de arbitrario, porque aun cuando en algunos buques fuese exacta ó muy aproximada, la diversidad de las figuras en las diversas especies de barcos hace esta reduccion mas ó menos errónea, y de aqui provienen las correciones siguientes, que son de reglamento.

A todo buque, cuyos entrepuentes no bajen de seis pies de alto, se le añadirá un 14 por 100 del arqueo: á los que tienen de seis á cuatro pies, un 10 por 100, y á los que tengan menos de cuatro pies, no se añadirá nada.

Si la embarcacion es muy fina, con muchos raseles á popa y proa, estrecha de cuaderna y sin entrepuentes, se le ha de rebajar al arqueo un 8 por 100.

Si el buque tiene una figura semejante á urca, el tercer factor no será la mitad del puntal, sino los $\frac{7}{12}$ del puntal.

Si el buque está tan cargado, que no se pueden tomar las dimensiones de puntal, plan y quilla, se tomará la séptima parte de la eslora, y se tendrá la quilla limpia. Multiplíquese la suma de eslora y quilla por los $\frac{7}{8}$ de la manga; al producto se quita la última nota de la derecha, y resulta el arqueo en toneladas.

La tonelada es de 70,18945 pies cúbicos.

50. *Copia y reduccion de planos.* La copia se hace, ó con la regla y el compás, formando figuras iguales, ó calcando en un papel el dibujo ya hecho del plano.

51. La reduccion consiste en formar una figura semejante á otra dada, y cuyas dimensiones ó áreas esten en una razon dada. Puede hacerse geométricamente por los métodos ya dichos, ó bien construyendo una escala para el plano reducido, y colocando las distancias segun las partes de escala que contengan en el plano dado, ó trasladando las distancias al nuevo plano con un *compás de puntas dobles*, dando á sus lados la razon que deben tener las líneas del original y de la copia.

52. Para evitar el gran número de medidas que seria necerario tomar, si el plano contuviese muchos objetos, se ha inventado el *pantógrafo*, instrumento que se compone de cuatro reglas que forman en todas las posiciones posibles, que puede tomar, un paralelógramo oblicuángulo. En sus lados mayores se

coloca en el uno un calcador que debe recorrer el original; en el otro un lapiz que debe formar la copia; y en uno de los lados menores se coloca un eje que esté en línea recta con el calcador y el lapiz. Las distancias del lapiz al eje y calcador han de estar siempre en la misma relacion que las dimensiones de la copia han de tener con las del original.

53. El *Micrógrafo* es muy semejante al Pantógrafo: la única diferencia que hay entre estos dos instrumentos, es que en el Micrógrafo estan fijos sobre las reglas el lápiz, el eje y el calcador, y lo que varia es la posicion de las reglas. Este instrumento sirve principalmente para reducir un plano de escala mayor á menor.

54. *Nivelacion.* Nivelacion es la operacion, por la cual se determina la diferencia en *altura vertical* de dos puntos. Las alturas verticales, es decir, perpendiculares á la superficie de la tierra, son sensiblemente paralelas, cuando la distancia de los objetos es pequeña; pues en distancias cortas el plano del horizonte, tangente á la superficie de la tierra, se confunde con dicha superficie. Asi las pequeñas masas de flúido, que, segun las leyes de la Hidrostática, deben tener su superficie libre perpendicular á la direccion de la gravedad, cuando estan en equilibrio, son sensiblemente planas y horizontales; pero las grandes masas, como los lagos de mucha estension y los mares, forman una superficie esférica, cuyo centro es el de la tierra. El primero es *nivel aparente*, y el segundo verdadero.

55. Se ha elegido por *nivel* constante adonde referir todos los puntos el que forma la superficie del mar entre el mayor flujo y reflujo. Laplace ha demostrado, que este es el nivel que formaria el océano á no ser por las atracciones del sol y la luna, que producen las mareas. Este nivel se supone prolongado por la superficie de la tierra.

56. (Fig. 117.) La diferencia entre el nivel aparente, que es la tangente, y el nivel verdadero que es el arco del círculo máximo de la tierra, es la diferencia entre la secante CS y el radio CB, es decir, OS; de modo que los puntos B, S, que estan en un mismo nivel aparente, tienen sin embargo OS da diferencia en nivel verdadero. Sea a la distancia BS y OS$=h$; será (G. 140) $a^2=h(2R+h)$, de donde $h=-R+\sqrt{(R^2+a^2)}$. Aqui el radio de la tierra R$=6366198$ metros. Pero (Alg. 39) $\sqrt{R^2+a^2}=$ $R+\frac{a^2}{2R}-\frac{a^4}{8R^3}+\frac{a^6}{16R^5}-\frac{5a^8}{64R^7}+\ldots\ldots$ luego $h=\frac{a^2}{2R}-\frac{a^4}{8R^3}+$

$\frac{a^6}{16\,R^5} - \frac{5\,a^8}{64\,R^7} + \ldots$ Como R es muy grande con respecto á a, los términos disminuyen muy rápidamente, de modo que se puede tener el valor de h con cuanta aproximacion se quiera. Mientras menor sea a, menos términos habrá que tomar de la serie. En las operaciones comunes basta hacer $h = \frac{a^2}{2\,R}$; y en las mas delicadas no se pasa del tercer término.

57. Hay tres especies de nivel: *de agua*, *de aire* y *de aplomo*.

El de agua consiste en un tubo de comunicacion con otros dos perpendiculares en sus estremos. Cuando está lleno de agua, la visual que rasa las superficies superiores del agua en los dos tubos perpendiculares, es la línea horizontal ó de nivel.

Nivel de aire es un tubo cilíndrico lleno de alcohol ó de eter, pero con algun aire: la bombita de aire, por ser menos pesada que el alcohol, tiende siempre á ocupar la parte superior del tubo: cuando está exactamente en medio de él, el eje del cilindro está horizontal.

El nivel de aplomo consiste en una esfera de plomo ó de otro metal pendiente de un hilo. Suspendido este por el otro estremo, la gravedad del plomo estiende el hilo en la direccion vertical. Sirve para hallar la *distancia cenital* de un objeto que es complemento del ángulo, que forma con el horizonte la visual dirigida á dicho objeto.

58. Para hallar la diferencia del nivel entre dos puntos, se coloca el nivel enmedio de ellos, para evitar la correccion de la diferencia entre nivel aparente y verdadero. Se coloca en el primer punto un estadal dividido en varas, pies, pulgadas etc., el cual tiene un carton rectangular, la mitad blanco, y la mitad negro, que pueda correr por su longitud, y fijarse cuando sea necesario, con un tornillo. El que opera dirige la visual horizontal del nivel, y el ayudante sube ó baja el carton, hasta que la línea divisoria de los colores se corta con la visual, y se ve la altura señalada en el estadal. Este se transfiere despues al otro punto, y se hace la misma operacion. Si las dos alturas son iguales, los dos puntos estan á un mismo nivel; pero si son desiguales, el mas bajo será el que tenga mas altura, y la diferencia de ambas alturas será la diferencia de nivel.

59. *Nivelacion compuesta.* Cuando la distancia entre los dos puntos, que se quieren nivelar, es muy grande, se divide la operacion en diversas estaciones. Se suman despues todas las al-

turas que se han hallado, dirigiendo las visuales hácia el punto donde empezó la operacion: se suman tambien las alturas, que se han hallado dirigiendo las visuales hácia la parte opuesta, si estas dos sumas son iguales, los dos puntos estan á un mismo nivel; si la primera es mayor que la segunda, su diferencia indicará lo que el segundo punto está mas alto que el primero. Si la segunda suma es mayor que la primera, su diferencia indicará lo que el primer punto está mas alto que el segundo.

En la nivelacion compuesta acomoda, cuando se ha llegado al segundo punto, volver á repetir la operacion desde él hasta el primero, y tomar un término medio entre los resultados de ambas operaciones.

FIN DE LAS NOCIONES DE GEODESIA.

NOCIONES
DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA.

1. La geometría descriptiva enseña á representar con exactitud las magnitudes geométricas, y á ejecutar sobre estas magnitudes todas las operaciones posibles.

Para esto se conciben dos planos perpendiculares entre sí, uno *horizontal* y otro *vertical*, cuya comun seccion se llama *línea de tierra*. La parte del plano horizontal, que se supone estar hácia el que dibuja, se llama parte *anterior*, y la otra *posterior*. La parte del plano vertical, que está sobre la línea, se llama parte *superior* y la otra *inferior*.

Ahora bien, si desde todos los puntos de una cantidad geométrica se bajan perpendiculares sobre el plano horizontal, quedará dicha cantidad proyectada en dicho plano; y esta proyeccion bastaria para conocer la cantidad de que se trata, si conociésemos la distancia á que estan sus diferentes puntos del plano horizontal. Para conocer estas distancias proyéctense dichos puntos sobre el plano vertical, y las distancias de estas proyecciones á la línea de tierra, marca las alturas á que estan sobre el plano horizontal. Luego *toda magnitud geométrica queda suficientemente representada por las dos proyecciones, la horizontal y la vertical*. En efecto levantando sobre ellas dos cilindros rectos, los puntos comunes en el espacio á estos dos cilindros, son los de la magnitud geométrica de que se trata.

Para representar entrambas proyecciones en el papel, hay la costumbre de poner debajo de la línea de tierra la parte anterior del plano horizontal, y de suponer encima de ella la parte superior del plano vertical. Esta, aunque está en el mismo plano, se supone levantada perpendicularmente á él. La parte posterior del plano horizontal está en el mismo sitio que la superior del vertical, aunque se concibe debajo de esta; y la parte inferior del plano vertical está en el mismo sitio que la anterior del horizontal, aunque se concibe debajo de esta.

2. Si la magnitud que se quiere proyectar es una recta per-

pendicular á la línea de tierra, su proyeccion vertical debe hacerse, no sobre el plano vertical comun, pues esta proyeccion seria comun á todas las perpendiculares á dicha línea; sino sobre otro plano vertical perpendicular al primero. Esta proyeccion caerá en el papel sobre la parte anterior del plano horizontal, y el ángulo que forma con la proyeccion horizontal es la inclinacion de la recta con el plano horizontal.

3. Un plano se representa por sus intersecciones con los dos planos, horizontal y vertical: estas intersecciones se llaman los *vestigios* del plano.

4. El punto de vista para la proyeccion horizontal se supone que está á una distancia infinita en la vertical sobre la parte anterior de dicho plano; y el punto de vista para la proyeccion vertical se supone que está tambien á una distancia infinita en la horizontal sobre la parte superior de dicho plano. Suponiendo, pues, sólidos dichos planos, habrá líneas visibles y líneas ocultadas por los planos. Las visibles se tiran *llenas*: las ocultas *punteadas*. Las que solo sirven para la construccion, se tiran *picadas*.

5. Problema I. *Dadas las proyecciones de una recta, determinar los puntos en que corta los planos de proyeccion, los ángulos que forma con ellos, y la magnitud de una parte de dicha recta comprendida entre dos puntos dados.*

1.° El vestigio horizontal de la recta debe tener su proyeccion vertical en la línea de tierra, y en la proyeccion vertical de la recta: luego debe estar en la interseccion de la línea de tierra con la proyeccion vertical. La proyeccion horizontal de dicho vestigio debe hallarse en la proyeccion horizontal de la recta y en la perpendicular á la línea de tierra que pase por la proyeccion vertical del vestigio: luego si por esta proyeccion vertical se tira una perpendicular á la línea de tierra, el punto en que encuentre á la proyeccion horizontal será la proyeccion horizontal del vestigio horizontal, es decir, el punto en que la recta corta al plano horizontal.

2.° Del mismo modo se demuestra, que señalando el encuentro de la línea de tierra con la proyeccion horizontal de la recta, y tirando en él una perpendicular á dicha línea, su encuentro con la proyeccion vertical de la recta será el punto en que la recta corta el plano vertical.

(Fig. 133.) 3.° Sean BD, B'D' las proyecciones de la recta. Esta es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son, el uno la proyeccion horizontal, y el otro la diferencia entre las distancias verticales de sus estremos. Tiro pues la horizontal D$'o$, y será oB$'$ uno de los catetos: tomo on=BD, proyeccion horizontal, y la distancia pedida es nB$'$. El ángulo que forma con el plano horizontal es B$'no$.

Haciendo una construccion semejante en el plano horizontal, se tendrá el ángulo que forma la recta con el plano vertical.

6. II. *Dadas las proyecciones de un plano, hallar los ángulos que forma con los planos de proyeccion.* (Fig. 134.)

Sean AB, BC los vestigios del plano, y quiero determinar su inclinacion con el plano vertical de proyeccion. En el punto *C* del vestigio vertical tiro un plano perpendicular á dicho vestigio. El ángulo que formen sus intersecciones con el plano vertical y el dado, mide la inclinacion de estos dos planos. Su interseccion CD con el plano vertical es perpendicular á BC; y su interseccion AD con el plano horizontal, será perpendicular á la línea de tierra BD: pues dicho plano ha de ser perpendicular al vertical, y su comun interseccion con el horizontal debe serlo tambien. Luego el ángulo pedido es el que forma la CD con la recta tirada en el espacio desde *C* á *A*. Si movemos dicho plano al rededor de la AD, hasta que coincida con el plano horizontal, la DC perpendicular á la AD, no abandonará el plano vertical, y el ángulo pedido de la DC con la CA, se hallará en el plano horizontal, tomando DE=DC, y tirando la EA: el ángulo DEA es el que forma el plano propuesto con el plano vertical. Una operacion análoga nos daria su inclinacion con el plano horizontal.

7. III. *Por un punto dado tirar una paralela á una recta dada.*

Si dos rectas son paralelas, sus proyecciones deben serlo: pues lo han de ser sus planos de proyeccion á causa de que el uno tiene dos rectas paralelas á dos del otro, las rectas paralelas, y las perpendiculares bajadas desde dos puntos de ellas sobre el plano de proyeccion. Tírense, pues, por las proyecciones del punto dos rectas respectivamente paralelas á las de la recta dada, y estas serán las proyecciones de la paralela pedida.

8. IV. *Por un punto dado tirar un plano paralelo á otro dado.*

Los vestigios del plano pedido con los de proyeccion, deben ser paralelos á los del plano dado. Tiro pues por el punto dado una paralela al vestigio horizontal del plano dado, y busco el punto en que corta el plano vertical: tiro por él una paralela al vestigio vertical del plano dado, y tendré el vestigio vertical del plano pedido. Por el punto en que este vestigio corte la línea de tierra, tiro una paralela al vestigio horizontal del plano dado, y tendré el vestigio horizontal del plano pedido.

9. V. *Por tres puntos dados hacer pasar un plano.* Tiro dos rectas por estos tres puntos: busco sus vestigios verticales y horizontales, y las rectas que los unan respectivamente serán los vestigios del plano.

10. VI. *Por un punto dado tirar una recta perpendicular á un plano.*

Por las proyecciones del punto tiro perpendiculares á los respectivos vestigios del plano, y estas serán las proyecciones de la recta.

Demostracion. El plano proyectante de la recta debe ser perpendicular al dado y al plano de proyeccion: luego el vestigio del plano dado debe ser perpendicular al plano proyectante de la recta, y por consiguiente á la proyeccion de la recta, que está en dicho plano proyectante.

11. VII. *Hallar el punto de encuentro de una recta y de un plano.*

(Fig. 135.) Sean CB, CE′ los vestigios del plano, y AH, A′H′ las proyecciones de la recta. Tiro por AH su plano proyectante, que contendrá la recta, y por consiguiente su punto de encuentro con el plano dado. Este punto se hallará en la interseccion del plano dado con el proyectante; busquemos, pues, esta interseccion. Los vestigios del plano proyectante son EA y EE′ perpendicular á la línea de tierra; y como estos vestigios se encuentran con los del plano dado en F y en E′, se infiere que estos puntos son vestigios de la interseccion. Su proyeccion horizontal es la misma recta EA; pues la interseccion se halla en el plano proyectante: busquemos el punto en que la proyeccion vertical ha de encontrar la línea de tierra, tirando FF′ perpendicular á dicha línea, y será dicho punto F′, y la proyeccion vertical de la interseccion será E′F′. El punto buscado debe hallarse en el encuentro de la interseccion con la línea dada. Luego su proyeccion vertical está en H′, y tirando H′H, perpendicular á la línea de tierra, será H la proyeccion horizontal del mismo punto.

12. VIII. *Por un punto dado tirar un plano perpendicular á una recta dada.*

Los vestigios de este plano han de ser perpendiculares á las proyecciones de la recta dada (10): luego tirando por el punto dado una recta, cuya proyeccion vertical sea perpendicular á la de la recta dada, y cuya proyeccion horizontal sea paralela á la línea de tierra, esta recta será paralela al vestigio vertical del plano, y por consiguiente estará en el plano, y el punto en que atraviese el plano horizontal, será un punto del vestigio horizontal de dicho plano: tiro, pues, por dicho punto una perpendicular á la proyeccion horizontal de la recta; y esta perpendicular será el vestigio horizontal del plano. Desde el punto en que este vestigio corte la línea de tierra, tiro una perpendicular á la proyeccion vertical de la recta, y esta perpendicular será el vestigio vertical del plano.

13. IX. *Por un punto dado tirar una perpendicular á una recta dada.* Tiro por dicho punto un plano perpendicular á la recta (12): busco el punto en que la recta y el plano se cortan (11), y tirando dos rectas por las proyecciones de este punto y las del dado, estas serán las proyecciones de la perpendicular pedida.

14. X. *Dadas dos rectas, que se corten en el espacio, hallar el ángulo que forman.*

(Fig. 136.) Sean las proyecciones de la primera AB, A'B', y las de la segunda BC, B'C'. Búsquense los puntos en que ambas rectas atraviesan el plano horizontal. Sean estos puntos A y C. Es evidente que tirando un plano por las dos rectas, su vestigio horizontal será AC. Hago girar el plano al rededor del eje AC hasta que concurra con el horizontal: el punto de concurso de las dos rectas describirá un arco de círculo, cuyo plano será perpendicular al eje AC, y que tendrá en él su centro. Este plano será vertical, y por tanto comprenderá la línea proyectante del punto de concurso, y tambien su estremo B: luego si desde B se tira BD perpendicular á AC, el punto D será el centro de dicho arco. Su radio es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyo cateto horizontal es BD, y el cateto vertical es B'*b*: tomo, pues, *bd*=BD, y tirando B'*d*, esta es el radio del arco. Luego tomando DG=B'*d*, el punto G es la posicion del vértice del ángulo, cuando el plano se ha confundido con el horizontal, y GA, GC las posiciones de entrambas líneas en el mismo caso: luego el ángulo buscado es AGC.

15. Si las dos rectas no se encuentran en el espacio, no forman ángulo; pero se considera como inclinacion de dichas rectas, el que formen otras dos paralelas á ellas, y que se encuentren en un mismo punto del espacio. Este ángulo se determina por la misma construccion que acabamos de esplicar.

16. XI. *Hallar el ángulo que forma una recta con un plano.*

Este ángulo debe ser complemento del que la recta forma con una perpendicular al plano tirada por cualquier punto de la recta. Tiro, pues, por cualquier punto de la recta una perpendicular al plano (10), y busco el ángulo que forma esta perpendicular con la recta dada (14): su complemento será el ángulo pedido.

17. XII. *Hallar el ángulo que forman dos planos.*

Conocidos los vestigios de ambos planos, la recta que pase por los puntos de encuentro de los vestigios es su comun interseccion, cuyas proyecciones son fáciles de hallar; pues esta recta tiene un punto en cada uno de los planos de proyeccion. Por un punto de dicha recta tírese un plano perpendicular á ella (12): búsquense las intersecciones de este plano con los dados, y despues el ángulo que forman dichas intersecciones (14), y este ángulo será el de los planos.

18. XIII. *Dadas dos rectas, que ni se cortan, ni son paralelas, hallar su mas breve distancia.*

Tiro por un punto de la primer recta una paralela á la segunda, y por esta paralela y la primer recta, tiro un plano: este será paralelo á la segunda recta. Tiro por la segunda recta un plano perpendicular al primero, y la comun seccion de ambos cortará á la primera recta en un punto. Si en este punto se levanta una perpendicular al primer plano, esta será perpendicular á ambas rectas, y por consiguiente la menor distancia entre ellas. Todas estas construcciones se saben ya hacer por los problemas anteriores.

19. *De las curvas.* Dadas las dos proyecciones de una curva, levantando las superficies cilíndricas proyectantes, los puntos que sean comunes á ambas formarán la curva en el espacio. Si todos estos puntos estan en un mismo plano, la curva se llama *plana*; pero si no estan en un mismo plano, se llama *de doble curvatura*, porque participa de la curvatura de las dos superficies cilíndricas, cuyo concurso la determina.

Si de las dos proyecciones la una es línea recta, y la otra es línea curva, la curva es necesariamente plana, pues proviene de la interseccion de una superficie cilíndrica con un plano, que es la superficie proyectante correspondiente á la proyeccion recta: asi la proyeccion de una curva plana en un plano perpendicular al de la curva es una recta.

Para hallar los puntos en que una curva corta los planos de proyeccion, se hace la misma construccion que en la línea recta: la determinacion de estos puntos es muy importante para distinguir las partes visibles é invisibles de las curvas.

Cuando es conocida la generacion de una curva es necesario, ademas de mucho manejo y tino para describir sus proyecciones, conocer el método de tirarle tangentes, porque estas representan la direccion de las porciones indefinidamente pequeñas de la curva. Sabiendo las operaciones geométricas que determinan la tangente, será fácil tirarla en las proyecciones, por ejemplo, si la curva es un círculo, la construccion se reduce á tirarle á una recta una perpendicular en un punto dado.

20. *De las superficies curvas.* En estas no se pueden representar todos los puntos como en las rectas y en las curvas; porque seria necesario marcar con signos particulares las dos proyecciones que corresponden á cada punto, lo que seria tan embarazoso como inútil.

Para representar las superficies en los planos de proyeccion se consideran formadas por el movimiento de una línea que se llama *generatriz*, con respecto á otra que se llama *directriz*. Asi el plano puede considerarse formado por el movimiento de una recta, siempre paralela á sí misma, á lo largo de otra: la esfera por el movimiento de un semicírculo al rededor da su diámetro; el cono por el movimiento de una hipotenusa al rededor de un cateto etc. El arte, pues, de representar las superficies consiste en proyectar en los dos planos la generatriz en sus diferentes posiciones, y se representan estas posiciones en el número que basten para formar una imágen exacta de la superficie á la vista del espectador.

Estas son las nociones de Geometría descriptiva que pueden esponerse en un tratado elementar. Fácil será estender estos principios elementares á todas las representaciones posibles cuando se hayan estudiado bien la *Teórica de las curvas*, y la *Análisis de las tres dimensiones*: advirtiendo que los que desean profundizar en este ramo importante de la Geometría, no pueden escusarse de leer las obras de Monge, La-Vallée, Hachette y Dupin.

FIN DE LAS NOCIONES DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

APENDICE

DE LOS PESOS Y MEDIDAS.

Ha parecido á propósito esplicar despues de la Geometría las unidades de medida y peso, mandadas observar en España, porque los principios geométricos son necesarios para la perfecta inteligencia de las medidas de superficie y capacidad. Esplicaremos tambien el sistema decimal, establecido en Francia, y la relacion de sus unidades con las antiguas de aquel pais y con las españolas.

Medidas españolas lineares.

La vara legal del reyno, establecida por Real cédula de 26 de Enero de 1801 (1) para la medida de las líneas, es la vara de Búrgos (2): se divide en 3 pies, el pie en 12 pulgadas, la pulgada en 12 líneas, la línea en 12 puntos. Tambien se divide el pie en 16 dedos, y la vara en 4 palmos, y en 2 codos.

Los multiplos de estas medidas son el paso, que vale 5 pies; el cordel que vale 5 pasos; la milla que vale 1000 pasos; la legua de una hora de camino, que vale 20000 pies; la braza que vale 2 varas; el estadal lineal, establecido por la citada Real cédula para medir las tierras, que vale 4 varas.

Medidas españolas de superficie.

Vara cuadrada, pie cuadrado, pulgada cuadrada será un cuadrado, que tenga por lado una vara, un pie, una pulgada. Asi la vara cuadrada tendrá 9 pies cuadrados, y el pie cuadrado 144 pulgadas cuadradas etc.

(1) Inserta en la Novísima Recopilacion, lib. IX, tít. IX. ley V.
(2) De esta se valió el Sr. Ciscar para sus comparaciones en su *Memoria elemental sobre pesos y medidas.*

Las medidas agrarias de superficie son el estadal cuadrado, que contiene 144 pies cuadrados: la aranzada, que es un cuadrado de 20 estadales por lado, y por tanto contiene 400 estadales cuadrados. La fanega de tierra es un cuadrado que tiene 24 estadales por lado, y por tanto contiene 576 estadales cuadrados. La fanega se divide en 12 celemines, y el celemin en 4 cuartillos.

Los multiplos de la fanega son la yugada, que vale 50 fanegas, y la caballería que vale 60 fanegas.

Medidas españolas de volúmen.

Una vara, un pie, una pulgada cúbica, son cubos, que tienen por lados una vara, un pie, una pulgada lineal. Asi una vara cúbica tiene 27 pies cúbicos, y el pie cúbico 1728 pulgadas cúbicas. Espresaremos en estas medidas geométricas las medidas españolas de capacidad.

Para medir los áridos se usa del cahiz, que se divide en 12 fanegas, la fanega en 12 celemines, y el celemin se subdivide por mitades sucesivas, que tienen los nombres de medio celemin, cuartillo, medio cuartillo, ochavo, medio ochavo y ochavillo.

El Sr. Rebollo en las *Adiciones á su traduccion de la Aritmética de Lacroix*, supone la media fanega equivalente á 2220 pulgadas cúbicas, lo que da á la fanega 4440 pulgadas cúbicas.

El Sr. Ciscar en la citada Memoria deduce el valor de la fanega de su comparacion con el Kilolitro. Segun él 18018 fanegas equivalen á 1000 Kilolitros, ó á un millon de litros. El litro es un cubo, cuyo lado es un decímetro; y el decímetro equivale á 4,3067 pulgadas lineares: luego el millon de litros, ó 18018 fanegas contienen 79879228 pulgadas cúbicas, lo que da $4433 \frac{5430}{18018}$, ó en decimales, 4433,301 pulgadas cúbicas por fanega.

La citada Real órden no espresa la cabida de la fanega en pulgadas cúbicas; pero prescribe las dimensiones, que han de tener el celemin, la cuartilla y la media fanega (1); y de ellas resulta que el celemin contiene $370 \frac{23}{256}$ pulgadas cúbicas, la cuartilla $1110 \frac{75}{128}$, la media fanega $2297 \frac{7}{32}$; y por consiguiente la

(1) Debemos advertir, que el artículo de dicha Real órden, en que se designan las dimensiones de estas medidas, está omitido en la Novísima Recopilacion.

fanega tendrá $4441\frac{5}{64}$, $4442\frac{11}{32}$, ó $4594\frac{7}{32}$; ó en decimales 4441, 078; 4442, 343 ó 4594, 218 pulgadas cúbicas.

De estas cinco espresiones de la fanega en pulgadas cúbicas, las mas lejanas son la de Ciscar, con la que se deduce de la espresion de la media fanega. Las demas presentan errores de muy poco momento, y originados necesariamente de la dificultad de señalar sin incomensurables las dimensiones de un sólido tan poco regular, como es un prisma trapezoidal (figura adoptada para la comodidad de la medicion en casi todas las medidas grandes de áridos), cuando es dado de antemano el volúmen que debe contener.

Adviértase además, que, aun cuando el celemin fuese la sexta parte de media fanega, medida esta por 6 celemines, esperimentaria el grano al entrar en la medida 6 presiones diferentes, cuando medida con la media fanega no esperimenta mas de una. Esto disminuye algun tanto el error en esceso, que lleva la medida de la media fanega sobre la de 6 celemines; aunque debemos confesar que siempre queda dicho error sumamente considerable, pues es de un cubo de 5 pulgadas de lado, cuando menos.

Para medir los líquidos, escepto el aceite, se usa la cántara, que contiene 1289, 6 pulgadas cúbicas y sus divisiones por mitades sucesivas, que son media cántara, cuartilla, azumbre, media azumbre, cuartillo, medio cuartillo y copa.

El multiplo de la cántara es el moyo, que contiene 16 cántaras.

Para medir el aceite se usan medidas arregladas al peso, y son la arroba *mensural*, que equivale á 1004 pulgadas cúbicas, y sus divisiones por mitades sucesivas, media arroba, cuarto de arroba, medio cuarto de arroba, libra, media libra, cuarteron ó panilla, y medio cuarteron ó media panilla.

Medidas españolas de peso.

La unidad de peso es la libra, que se divide en 16 onzas, y tambien en mitades sucesivas con los nombres de media libra, cuarteron, y medio cuarteron.

La onza se divide en 8 dracmas, la dracma en 2 adarmes, el adarme en tres tomines, el tomin en 12 granos.

Los multiplos son el marco que contiene 8 onzas; y la arroba que tiene 25 libras. El quintal tiene 4 arrobas.

En medicina y farmacia se continúa usando de la libra medicinal, que tiene 12 onzas, ó $\frac{12}{16}$ de la libra comun. La onza medicinal se divide en 8 dracmas, la dracma en 3 escrúpulos, y el escrúpulo en 24 granos.

Sistema decimal.

En este sistema se ha tomado por unidad lineal el *metro*, diezmillonésima parte de la distancia del polo al ecuador, medida en el meridiano de Paris. Sus divisiones y multiplos, y los de las demas unidades de medida proceden de 10 en 10 como las clases de la numeracion; anteponiendo al nombre de la unidad las palabras *deci*, *centi*, *mili* para las divisiones, y *deca*, *hecto*, *kilo*, *miria* para los múltiplos. Asi el metro se divide en 10 decímetros, el decímetro en 10 centímetros, el centímetro en 10 milímetros. El decámetro tiene 10 metros, el hectómetro 100, el kilómetro 1000, y el miriametro 10000.

La unidad agraria para la medicion de terrenos es la *área*, que es un cuadrado, cuyo lado es un decámetro. Solo se usan dos multiplos de ella, la *hectarea* que vale 100 áreas, y la *miriarea* que vale 10000 áreas.

La unidad de volúmenes es el litro, ó un cubo, cuyo lado es un decímetro. El kilolitro contiene 1000 litros, y por consiguiente equivale á un metro cúbico. El Kilolitro es la unidad que se emplea para medir leña, y entonces se le da el nombre de *estereo*.

La unidad de peso es la *grama*, peso de la cantidad de agua destilada, que contiene un centímetro cúbico, cuando el termómetro centígrado señala cerca de 4 grados sobre el cero. Su multiplo mas usado es el kilograma, que es el peso de un decímetro cúbico de agua en su mayor grado de densidad, que es cuando el termómetro señala la graduacion ya referida.

Dos son las principales ventajas de este sistema sobre los demas. La primera, que estando tomadas sus unidades, no de un patron arbitrario, sino de la misma naturaleza, aunque se perdiesen todas las medidas existentes, seria facil volverlas á construir. Segunda, que siguiéndose en las divisiones y en los multiplos la progresion décupla de la numeracion vulgar, se escusa en los cálculos de pesos y medidas el uso de los complejos y de los quebrados comunes; pues para representar una unidad, sus multiplos y divisiones, bastará pintar una cantidad decimal, cuya vírgula esté delante de la nota que indica las unidades. Por ejemplo 7 decámetros + 9 metros + 5 decímetros + 8 milímetros, se pintará asi $79^m, 508$.

Este sistema que hasta ahora solo se ha adoptado en Francia, se ha estendido en aquel reyno á las monedas y á la division del cuadrante en grados. El *franco*, unidad de moneda, se ha dividido en 10 *décimas*, y la décima en 10 *céntimas*. El cuadrante se ha dividido en 100 grados, el grado en 100 minutos, el minuto en 100 segundos etc.

Medidas antiguas de Francia.

La unidad lineal era el *pie de rey*, dividido en 12 pulgadas, y cada pulgada en 12 líneas. Su multiplo era la toesa, que equivalia á 6 pies, y la pértiga, que tenia 22.

La unidad agraria era el *arpent* real, que equivalia á un cuadrado de 10 pértigas por lado.

Habia varias unidades de volúmen. Para la leña usaban la *cuerda*, que tenia 112 pies cúbicos. Para la madera servia la *soliva*, que valia 3 pies cúbicos.

Para los granos el *boisseau*, que equivalia á 2,74079 celemines españoles. Para los líquidos la pinta, que equivalia á 1,888 cuartillos españoles, y la pinta de aceyte á 1,8948 libras *mensurales* de España.

Las unidades de peso tenian los mismos nombres que las españolas; y cada una de ellas equivalia á 1,063928 unidad de peso española de la misma denominacion.

Correspondencia entre las antiguas medidas francesas y las del sistema decimal.

El metro tiene.	3,07844	pies de rey.
La hectarea.	2,92494	*arpents* reales.
El metro cúbico.	29,1739	pies de rey cúbicos.
El litro.	0,07687	*boisseaux*.
El litro.	1,0737	pintas.
El kilograma..	2,04268	libras francesas.

Correspondencia entre las medidas españolas y las del sistema decimal.

El metro tiene.	1,19631	varas de Búrgos.

La área.	8,94469	estadales cuadrados.
El metro cúbico.	1,71209	varas cúbicas.
El litro.	0,21589	celemines.
El litro.	1,98289	cuartillos de vino.
El litro.	1,98971	libra *mensural* de aceyte.
El kilograma	2,173474	libras españolas.

Observaciones. 1.ª El kilograma es el peso de un decímetro cúbico de agua en su máxima densidad. Equivaliendo el decímetro lineal á 4,3067 pulgadas lineares españolas, tendrá el decímetro cúbico 79,879228 pulgadas cúbicas españolas, que divididas por 2,173474 libras españolas que tiene el kilograma, dará en pulgadas españolas el volúmen necesario para contener una libra de agua destilada en su mayor densidad. Este volúmen es de 36,765963 pulgadas cúbicas, ó un cubo, cuyo lado es de 3,325 pulgadas lineares.

2.ª Diez hectólitros equivalen, con corta diferencia, á 18 fanegas españolas, medida de áridos.

3.ª Seis pies de rey equivalen á algo menos de 7 pies españoles; pues segun las comparaciones del señor Ciscar, se necesitan 6,00434 pies de rey para componer los 7 pies españoles.

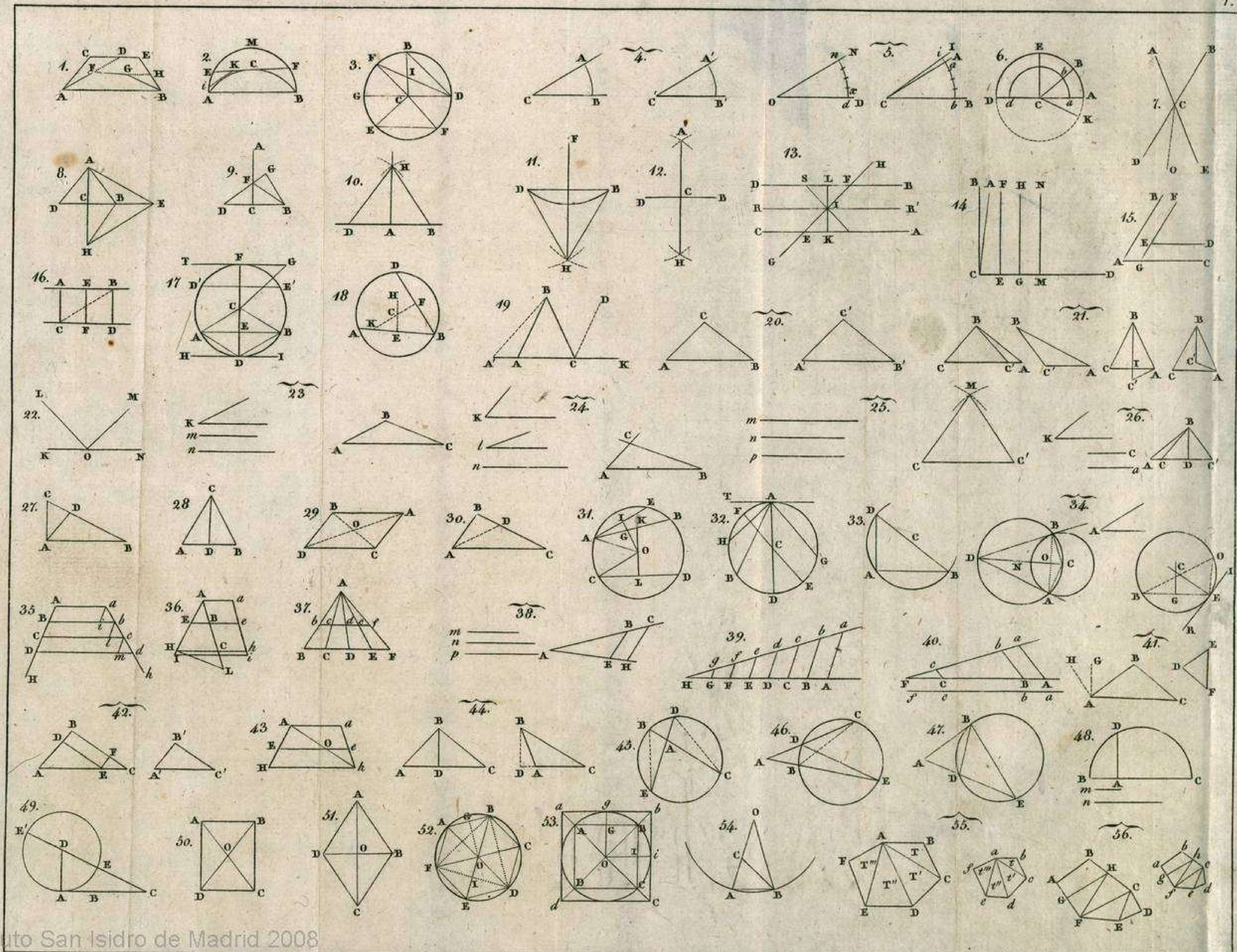
FIN DEL TOMO III.

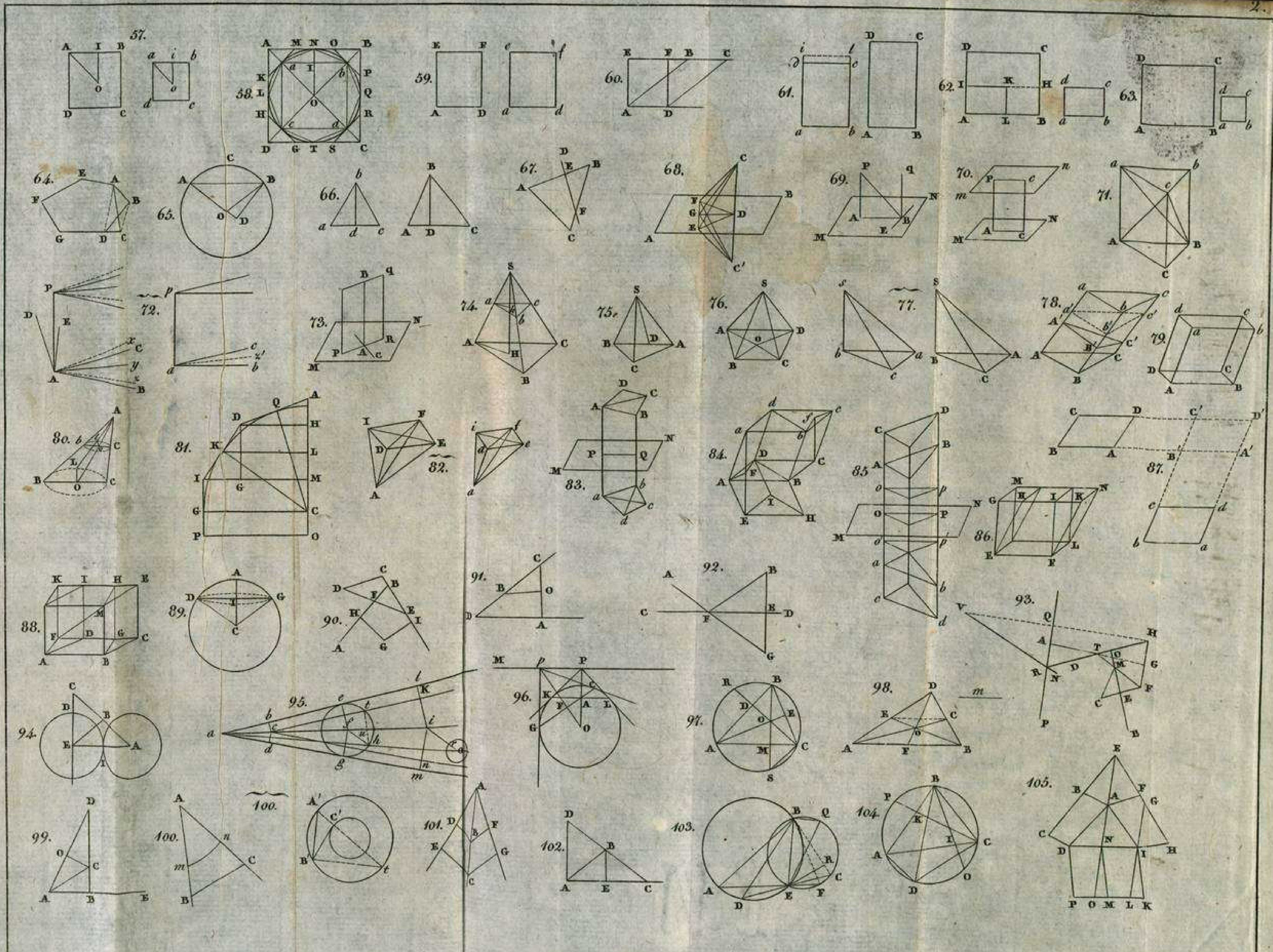
INDICE

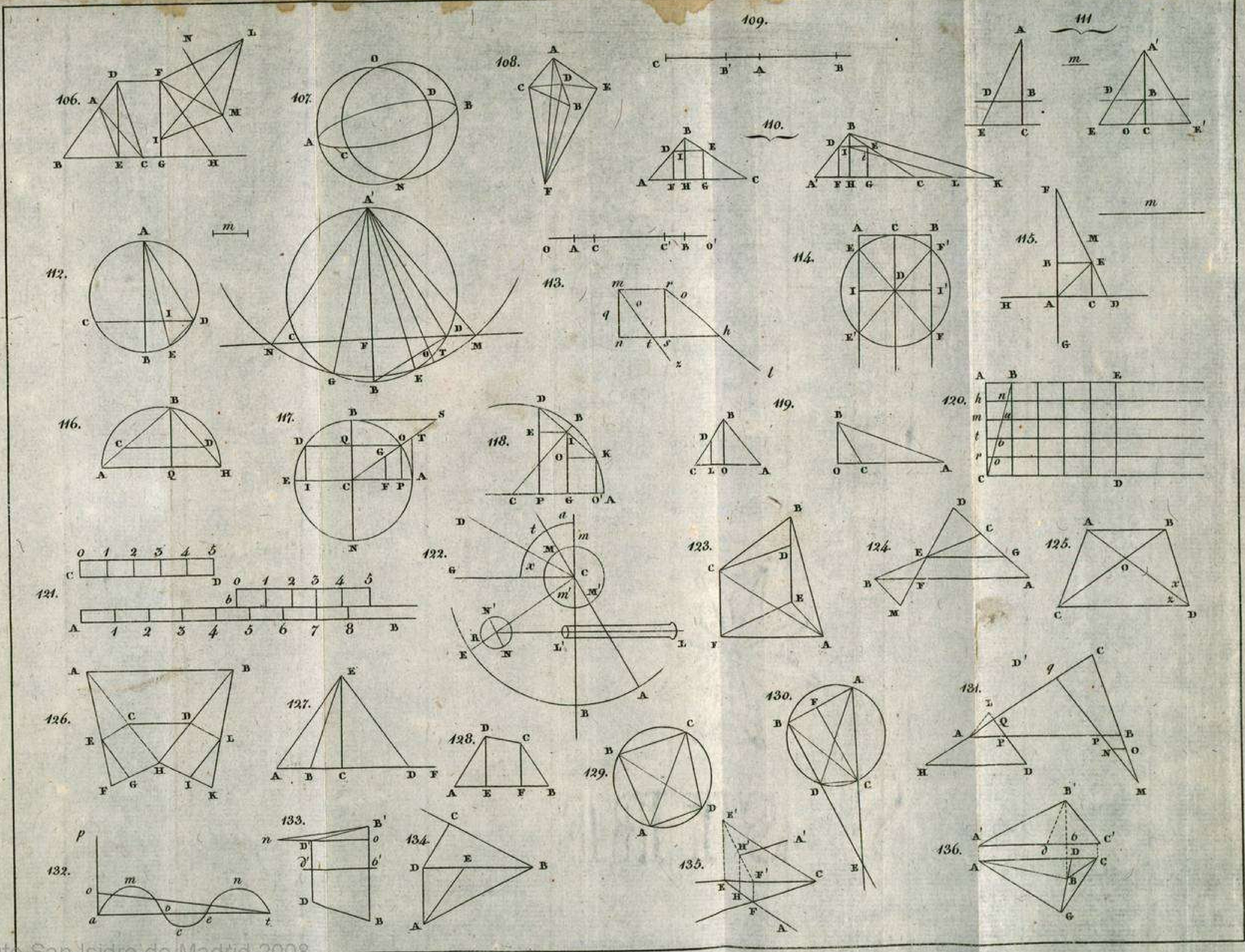
Páginas.

ERRATAS.

Pagina.	Linea.	Dice.	Lease.
3	4	mayor	mayor que
6	22	*id nd*	*ib*, *nd*
41	34	dichos	en dichos
53	36	BC, *bc*	AB, *ab*
54	13	*bl*	*cl*
57	18	arco	área
80	2	bases medias	bases
89	24	34	84
91	4	81	86
106	12	CMT	OMT nula
114	1	:	: *z*
Id.	9	175	199
129	1	ICE	CE
134	donde quiera	G	S
148	donde quiera	A, C	C, A
156	32	polígono	polinomio
175	1	$(a+b)\ (c+d)$	$(a+c)\ (b+d)$
176	5	4	$\frac{1}{4}$
180	9	$\frac{fx^2}{2(x+q)}$	$\frac{fx^2 \text{ sen. } A}{2(x+q)}$
186	23	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14
15.
16.
17
18
19
20.
21.
22.
23
24
25.
26.
27.
28
29
30.
31.
32.
33.
34.
35
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.


57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.


106.
107.
108.
109.
110.
111
112.
113.
114.
115.
116.
117.
118.
119.
120.
121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.