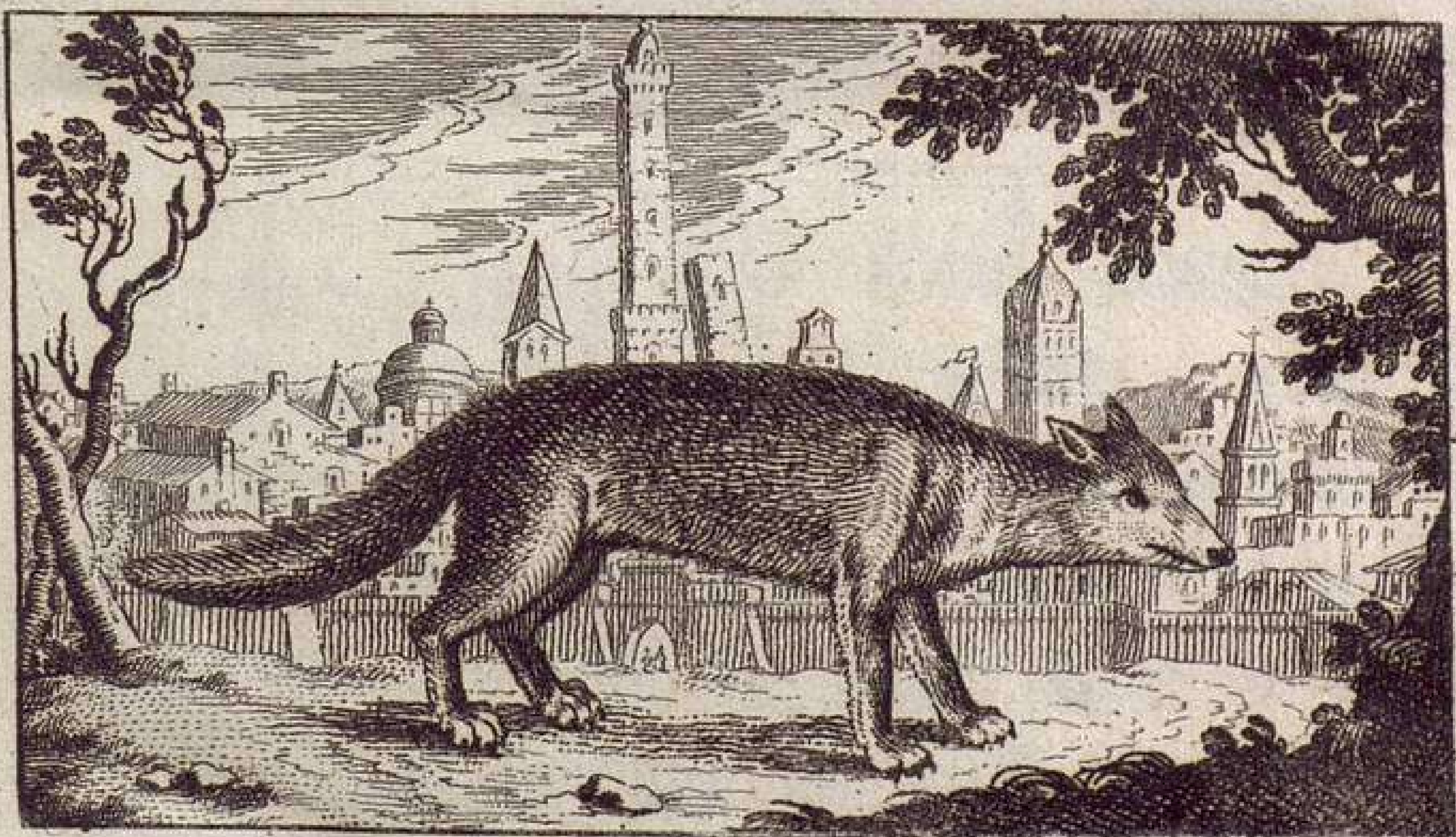
ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA
PIANA E SOLIDA
E DELLA
TRIGONOMETRIA

Opera Postuma

DEL DOTT. EUSTACHIO MANFREDI

Professore delle Matematiche, sovraintendente alle Acque, e Astronomo dello Instituto delle Scienze in Bologna, e Associato alle Regie Accademie di Londra, e di Parigi.



IN BOLOGNA

Nella Stamperia di Lelio dalla Volpe.

Con licenza de' Superiori.

LO STAMPATORE

A chi legge.

MI conviene avvisarvi, o cortese Lettore, che quest' opera da me già pubblicata colle stampe fin dall' anno 1755, e di cui se ne fa ora una seconda edizione, quantunque riconosca per suo autore il Signor Eustachio Manfredi, pure non è stata da lui interamente compita, e ridotta a quello stato, in cui trovasi presentemente. Mancavano alcune proposizioni appartenenti alla dottrina dei solidi, e sono quelle che incominciano negli Elementi della Geometria de' solidi pag. 114 num. 60, e seguono fino al fine di essi solidi. Queste sono state aggiunte dal Sig. Eustachio Zanotti professore di matematica in questa Università. Desideravasi da' Giovani studenti, che fosse compita l' opera con metodo, che corrispondesse alla facilità, ed alla chiarezza, con cui sono trattati i primi elementi. Ha creduto il Sig. Zanotti, che seguendo il metodo degli indivisibili fosse per riuscire più spedita, e più facile qualunque dimostrazione conforme il desiderio di chi studia; e in fatti tale è riuscita presso quelli, che ne' precedenti anni si sono serviti del manoscritto, prima che mi si porgesse l' occasione di ristampare questa Geometria. Ciò mi fa sperare, che sarà di gradimento al pubblico questa nuova edizione.

INDICE

Degli elementi della Geometria de' piani.

LIBRO I.

DElle linee, e degli angoli. pag. 1
Della circonferenza del circolo. 2
Degli angoli. 3
Delle linee parallele, e inclinate. 7

LIBRO II.

Delle figure, e prima de' triangoli. 10
Proprietà principali de' triangoli. 11
De' triangoli equiangoli. 12
Della corrispondenza de' lati, e degli angoli nel triangolo. ivi.
Comparazioni diverse de' triangoli. 14

LIBRO III.

Delle figure di quattro, e di più lati. 18
Proprietà de' parallelogrammi. ivi.
De' parallelogrammi, e de' triangoli di eguale altezza. 20
De' quadrati fatti su i lati de' triangoli rettangoli. 22
De' poligoni, cioè delle figure di più lati. 23

LIBRO IV.

Del circolo. 25
Proprietà delle corde, o sottese. ivi.
Delle tangenti del circolo. 27
Delle massime, e delle minime rette nel circolo. 28
Degli angoli al centro, e alla periferia. 29
Degli angoli ne' segmenti alterni del circolo. 31

LIBRO V.

Problemi elementari. 33
Problemi appartenenti alla divisione delle linee, e degli angoli. 34
Problemi, che riguardano le perpendicolari, le parallele, e gli angoli eguali. ivi.
Problemi, che appartengono a' triangoli. 37
Problemi, che appartengono a' parallelogrammi, e all' egualità delle figure. 38
Problemi appartenenti al circolo. 42

LIBRO VI.

De' principj universali delle matematiche, o della dottrina delle proporzioni; delle quantità commensurabili, e incommensurabili. 46
De' numeri irrazionali, o sordi, e come per essi si esprimono le quantità incommensurabili. 48
Delle proporzioni. 50
Delle proporzionalità. ivi.
Assiomi, e teoremi fondamentali della dottrina delle proporzioni. 54
De' modi di argomentare praticati da' Geometri nelle quantità proporzionali. 57
Delle ragioni composte. 61

LIBRO VII.

Delle proporzioni, e della misura delle figure piane rettilinee, della proporzione de' triangoli, e de' parallelogrammi di eguale altezza. 64
Della misura delle figure rettilinee, e del modo di esprimerla per numeri. 65
De' parallelogrammi equiangoli, ed eguali fra loro, e delle figure reciproche. 68
Della similitudine de' triangoli, e delle altre figure rettilinee. 70
Della proporzione, che hanno fra loro le figure simili. 73

LIBRO VIII.

Problemi, che dipendono dalla dottrina delle proporzioni. 78
Problemi, che riguardano le terze, le quarte, e le medie proporzionali in linee. 79
Problemi, che appartengono alla divisione delle linee in ragioni date. 84
Problemi, che riguardano la divisione della circonferenza del circolo, e la costruzione delle figure regolari. 87
Problemi, che riguardano le figure simili rettilinee. 92

Degli elementi della Geometria de' solidi.

LIBRO I.

Delle sezioni, e delle inclinazioni delle linee co' piani, e de' piani fra loro. 97
Delle linee perpendicolari a' piani. ivi.
Delle linee parallele in diversi piani. 100
De' piani perpendicolari ad altri piani. 101
De' piani paralleli fra loro. 102
Delle linee inclinate a' piani, e de' piani inclinati fra loro. 103
Degli angoli solidi. 105
Problemi spettanti alle inclinazioni delle linee, e de' piani. 107

LIBRO II.

De' prismi, e de' parallelepipedi. 111
Delle proprietà principali de' prismi. 112
De' solidi compresi da' piani non paralleli. 113
Delle proporzioni de' prismi, e delle piramidi di qualunque specie. 114
Del modo d' esprimere per numeri tanto la solidità, che la superficie di tutti i corpi terminati da figure piane. 119
Del Cilindro, del Cono, e della Sfera, e delle loro proporzioni. 123
Del modo di esprimere per numeri tanto la solidità, che la superficie del Cilindro, del Cono, e della Sfera. 134

Com-

Compendio della Trigonometria.

Della Trigonometria piana. 137
Definizioni trigonometriche. 139
Del canone trigonometrico. 141
Teoremi fondamentali della Trigonometria. 144
Problemi di trigonometria piana, che comprendono la ſoluzione de' triangoli rettilinei in tutti i caſi poſſibili. 146

Appendice alla Trigonometria.

Che coſa ſieno i logaritmi. 156
Come per mezzo de' logaritmi le moltiplicazioni ſi cangino in addizioni, e le diviſioni in ſottrazioni. 158
De' logaritmi comuni. 161
Proprietà ſpeciali de' logaritmi comuni. 165
Come dal canone de' logaritmi ſi ricavi il logaritmo di qualſivoglia dato numero intero, o rotto. 167
Come dato qualſivoglia logaritmo ſi trovi per mezzo del canone il numero, che gli corriſponde. 169
De' logaritmi delle linee trigonometriche. 172
Della trigonometria logaritmica. 173

ELE-

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
PIANA.

ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

LIBRO I.

Delle linee, e degli angoli.

1 LE *scienze matematiche* trattano della quantità, e della proprietà di essa.

2 Col nome di *quantità* intendono i Matematici tutto quello, che nel proprio genere è capace del più, e del meno, come il tempo, il moto, il peso, la forza, l' estensione &c.

3 Quella parte delle matematiche, che tratta della estensione, dicesi *Geometria*.

4 Un' estensione presa per un sol verso, cioè in lunghezza, chiamasi *linea*; un' estensione per due versi, cioè in lunghezza, e in larghezza, *superficie*; e un' estensione per tutti e tre i versi, cioè in lunghezza, larghezza, e grossezza, (o profondità, o altezza, che dir la vogliamo) *corpo*, o *solido*; quell'ultimo termine, che nell' estensione può concepirsi senza alcuna estensione, dicesi *punto*.

5 Delle linee altre sono *rette*, altre *curve*; le rette sono quelle, che si estendono egualmente fra' loro punti, senza pie-

gare da alcuna parte, come A, A (*Fig.* 1). Le curve ſono quelle, che piegano da qualche parte, come B, B. Onde tra' due punti poſſono tirarſi più linee curve, come C, ma una ſola retta D.

6 Parimente delle *ſuperficie* altre ſono *piane*, altre *curve*; ſuperficie piana è quella, che viene combaciata da una retta linea in qualunque poſitura queſta le ſi adatti, e chiamaſi anco neutralmente, con un ſolo vocabolo, un *piano*. Superficie curva è quella, che non può eſſere combaciata da una retta in tutte le poſiture, nella quale queſta vi ſi può applicare.

7 Tanto le linee curve, quanto le ſuperficie curve diconſi *conveſſe* al di fuori, e al di dentro *concave*.

Delle circonferenze del circolo.

8 LE linee rette non ſi ſuddividono, ma le curve ſono di molte ſpecie, ſecondo le differenti maniere di curvità, che poſſono eſſerci. Fra queſte ſi conſidera ſpecialmente da' Geometri quella curva, che chiamaſi *circonferenza di circolo*. Queſta ſi deſcrive dalla eſtremità di una linea retta, come B (*Fig.* 2), quando queſta linea, ſtando ferma coll' altra eſtremità A, gira ſopra di un piano intorno al punto A, finchè ſia tornata alla ſituazione A B, d' onde incomincia il giro. Il punto immobile A chiamaſi *centro*. La retta A B, preſa in qualſivoglia delle ſituazioni, nelle quali ſi è trovata nel ſuo giro, come in A B, in A C, in A D, diceſi *ſemidiametro*, *raggio*, o *intervallo*, ond' è manifeſto, che tutte le linee tirate dal centro alla circonferenza d' un medeſimo circolo ſono ſemidiametri, e tutte ſono eguali. Qualſivoglia porzione della circonferenza, come B C, B D &c. diceſi *arco*; e finalmente lo ſpazio piano compreſo, e chiuſo d' ogni intorno dalla circonferenza vien chiamato circolo, e la circonferenza ſteſſa diceſi ancora *perimetro*, o *periferia*.

9 Se per lo centro di un circolo E (*Fig.* 3), ſi tirerà una retta linea, come F G, terminata dall' una, e dall' altra parte alla circonferenza in F, e G, è manifeſto, che ella ſarà doppia del ſemidiametro E F, ovvero G E di quel circolo, e perciò la detta linea G F chiamaſi *diametro*; e che tutt' i diametri d' un medeſimo circolo, come G F, H I &c. ſono eguali fra loro.

10 Ogni diametro, come F G, divide il circolo in due parti eguali, che diconsi *semicircoli*, e parimente divide la circonferenza in due archi eguali F H G, G I F. Avvertasi, che qualche volta il nome di circolo si attribuisce alla stessa circonferenza F H G I, e non allo spazio chiuso da essa, come pure il nome di semicircolo alla semicirconferenza.

11 Se sopra una medesima retta linea si prenderanno più punti, come C, B, D &c. (*Fig.* 4), e si farà girare la detta linea sopra d' un piano intorno al suo punto estremo A, ciascun de' punti C, B, D &c. descriverà una circonferenza, ed il centro comune di tutte queste circonferenze sarà il punto A. Le dette circonferenze chiamansi in tal caso *concentriche*, come pure i circoli stessi, che queste abbracciano. E' manifesto, che tutti gli archi di circonferenze concentriche, come C E, B F, D G &c., che restano compresi fra due rette linee A D, A G, che passano per lo centro comune A delle dette circonferenze, sono egual parte delle loro intere circonferenze CEHC, BFIB, DGLD &c., come se CE fosse la sesta parte della circonferenza C E H C, anco B F sarebbe la sesta parte della B E I B &c. E perchè i Geometri intendono divisa ogni circonferenza di circolo in 360 parti eguali, che chiamansi *gradi*, e ogni grado in 60 *minuti*, e ogni minuto in 60 *secondi* &c., ne segue, che di quanti gradi, minuti, e secondi &c. si troverà esser uno de' detti archi, come C E d' altrettanti saranno gli altri BF, DG &c. I numeri de' minuti, secondi &c. si contrassegnano con lineette, che indicano l' ordine delle suddette divisioni, come per esprimere un arco di 75 gradi, 49 minuti, e 35 secondi, si scrive 75 49' 35''.

Degli angoli.

12 Due linee, che s' incontrino in un punto, diconsi *fare*, o *comprendere*, o *contenere angolo* una coll' altra in quel punto, eccettuandone se fossero due rette poste in dritto una dell' altra, nel qual caso non si diranno far angolo, ne si considereranno, come due linee, ma come una sola. Se amendue le linee, che fanno angolo sono in un medesimo piano, (come succede sempre quando amendue sono rette, poten-

dosi sempre immaginare un piano, che passi per l'una, e per l'altra di esse) l'angolo, che fanno chiamasi *piano*. Se l'angolo è fatto da due rette, dicesi *curvilineo*, come A, A, A (*Fig.* 5); se da due curve *curvilineo*, come B, B, B; se da una retta, e da una curva *misto*, come C, C.

13 Un angolo rettilineo dicesi maggiore, o minore a misura, che maggiore, o minore è l'apertura delle rette linee, che lo comprendono, senza avere alcun riguardo alla lunghezza di esse linee.

Così l'angolo D (*Fig.* 5), si dirà minore dell'angolo E, perocchè le linee, che comprendono il piano sono più strette, e serrate insieme di quel, che sieno le linee, che contengono il secondo, contuttochè quelle sieno per avventura più lunghe di queste; e quindi è, che per allungare, o raccorciare una, o amendue le linee, che fanno un angolo, questo non si muta punto, ma ben mutasi al mutarne l'apertura. Questa apertura dunque, nella quale consiste la quantità dell'angolo, si misura da' Geometri dal numero de' gradi, minuti, secondi &c., che contiene un arco di circonferenza di circolo compreso fra le due rette, che fanno l'angolo, e il cui centro sia nel punto medesimo, in cui si fa l'angolo.

Così se del centro D si intenderà descritta una circonferenza di circolo, della quale l'arco H I resti compresa fra le rette linee H D, I D, che contengono l'angolo D, quest'angolo si dirà essere di tanti gradi, e minuti &c. di quanti sarà il detto arco H I. E parimente se dal centro E si descriverà una circonferenza, il cui arco F G, resti compreso tra le rette, che contengono l'angolo E, dirassi l'angolo E di tanti gradi, e minuti &c. quanti ne ha quest' arco F G, nè importa di qual grandezza si descrivano detti circoli; perocchè tutti gli archi delle circonferenze concentriche comprese fra le stesse rette, che passano per lo centro di esse, hanno un egual numero di gradi, minuti &c., come si è detto nell' articolo 11. Da ciò s'intende, che fra gli angoli rettilinei quello è maggiore, che si misura da un arco di maggior numero di gradi, minuti &c., e quello minore, che si misura da un minor numero di questi.

14 Per esprimere gli angoli rettilinei costumano i Geometri di valersi di tre lettere apposte alle linee, che contengono l'angolo,

golo, di cui si parla, mettendo in secondo luogo quella, che è apposta al punto, in cui si fa l'angolo, e nel primo, e terzo luogo quelle, che sono apposte all'altre due estremità delle rette, che lo contengono. A cagion d'esempio, l'angolo fatto in H (*Fig.* 7) dalle rette F H, G H, dicesi F H G, ovvero G H F; quello, che vien fatto in G dalle due F G, O G, dirassi F G O, ovvero O G F; quello, che si fa parimenti in G dalle due F G, GH, dirassi H G F, ovvero F G H. Così O G H, oppure H G O vorrà dire l'angolo fatto in G dalle due H G, O G, e H F G significherà quello, che nel punto F vien compreso dalle G F, H F &c. Talvolta nulladimeno (ove ciò possa farsi senza equivoco) esprimonsi gli angoli con una sola lettera apposta a quel punto, in cui si fanno, come di sopra abbiamo praticato (articolo 13) per esprimere gli angoli D, E.

15 Qualunque volta l'arco di circolo B C, (*Fig.* 8) che misura l'angolo rettilineo B A C sia precisamente la quarta parte della circonferenza, (che viene ad essere gradi 90, essendo questa di gradi 360 per l'articolo 11) l'angolo BAC chiamasi *retto*, e le rette B A, C A, che lo comprendono *perpendicolari* una rispetto all'altra. Onde è chiaro, che tutti gli angoli retti sono fra loro eguali, avendo tutti per misura un arco di 90 gradi.

E' anco manifesto, che compiendo la circonferenza B C D E, il cui centro è il punto A (articolo 13), e prolungando l'una, o l'altra delle dette rette, come B A dalla parte di A, finchè di nuovo incontri la circonferenza in D, la retta B D sarà un diametro (articolo 9), e perciò l'arco B C D sarà la metà della circonferenza (articolo 10), cioè sarà di gradi 180 (articolo 11); onde toltone l'arco B C, che si suppone di gradi 90, il residuo C D sarà anch'egli di gradi 90, e perciò l'angolo C A D anch'esso sarà retto.

16 Ma se l'arco B C (*Fig.* 9), che misura l'angolo B A C, fosse minore di gradi 90, allora l'angolo B A C direbbesi *acuto*, e se maggiore ottuso, e nell'uno, e nell'altro caso *obliquo*. Posto dunque che B A C sia acuto, se si prolungherà, come sopra, una delle due rette, che lo contengono, come B A, fino alla circonferenza in D, di nuovo la retta B D sarà un diametro, e l'arco BCD di 180 gradi, e perciò è evidente, che

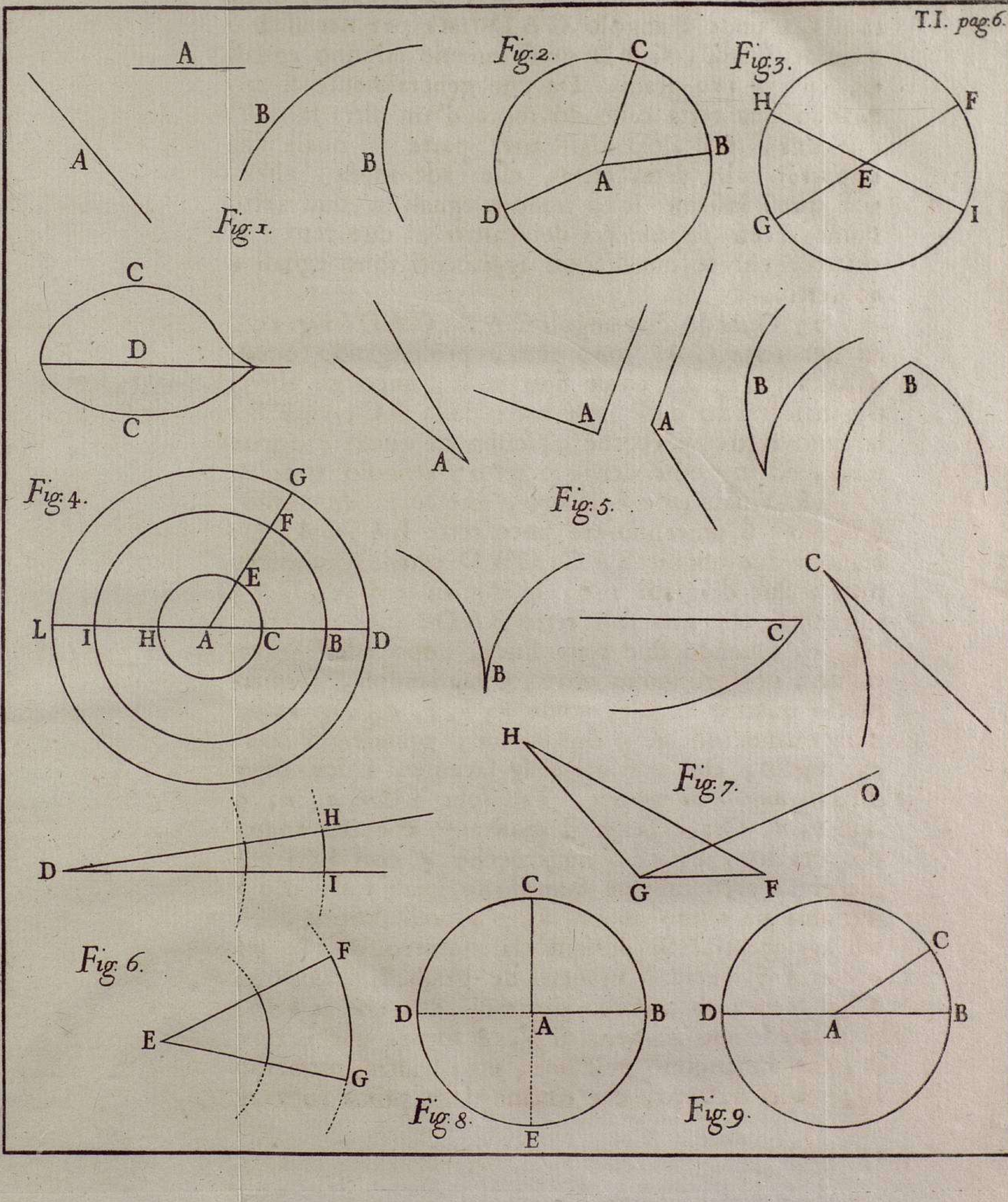
che l'arco CD di tanto eccederà 90 gradi di quanto ne manca BC; onde l'angolo CAD sarà per necessità ottuso, e amendue BAC, CAD presi insieme saranno eguali a' due retti, cioè a 180 gradi. Da che generalmente si raccoglie, che quando una retta cadendo sopra d'un' altra fa due angoli, uno dall' una, e l' altro dall' altra parte (i quali angoli diconsi *aggiacenti* alla detta retta, che cade sopra l' altra) questi angoli presi insieme sono sempre eguali a' due retti, e perciò l' uno dicesi *supplemento* dell' altro a' due retti; come pure è chiaro, che se due angoli aggiacenti sono eguali amendue sono retti.

17 Quando due angoli CAB, CAD (*Fig.* 10), aggiacenti ad una retta CA, sono retti, prolungando questa retta CA dalla parte di A, come fino in E, anco gli altri due angoli, che nasceranno dall' altra parte della BC, cioè BAE, EAD saranno retti; perocchè ciascuno di questi è aggiacente ad un retto, ed in conseguenza è retto (articolo 16).

18 Finalmente è chiaro, che se in un punto, come A, (*Fig.* 9) si uniranno tre linee rette BA, CA, DA, che facciano i due angoli BAC, CAD eguali a' due retti, cioè fra tutti e due di gradi 180, le due linee BA, DA non constituiranno, che una sola retta BAD.

19 Quando due rette linee, dopo essersi incontrate in un punto, proseguiscono oltre, e tagliandosi, formano nel detto punto quattro angoli, come *a*, *b*, *c*, *d* (*Fig.* 11), se questi si paragonano insieme a due a due, prendendo con ciascuno di essi quello, che non gli è aggiacente, i due angoli così presi diconsi *angoli al vertice*. Tali sono i due *a*, *c*, come pure i due *b*, *d*. Ora è facile il mostrare, che tali angoli sono sempre tra loro eguali: imperocchè *a* con *b* (i quali sono aggiacenti) presi insieme fanno 180 gradi (articolo 16), ed altrettanti ne fanno ancora *b*, e *c* presi insieme, essendo anch' essi aggiacenti. Se dunque dal numero di 180 gradi, che fa *a* con *b* si leverà il numero de' gradi di *b* qualunque egli sia, e dal medesimo numero di gradi 180, che fa *b* con *c*, si leverà il medesimo numero di *b*, è forza, che il numero di gradi, che rimangono nell' una, e nell' altra sottrazione sia l' istesso; ma il numero, che rimane dalla prima sottrazione è quel-

lo


T.I. pag.6.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

lo de' gradi di *a*, e dalla ſeconda quello de' gradi di *c*; dunque *a* ha l'iſteſſo numero di gradi, che *c*, e perciò gli angoli *a*, *c* ſono eguali, e nell'iſteſſo modo ſi proveranno eguali *b*, *d*.

20 Se da un punto preſo ad arbitrio ſi tireranno all'intorno quante linee rette ſi vorranno, tutte in un medeſimo piano, gli angoli fatti da ciaſcuna di eſſe con quella che immediatamente le ſegue appreſſo (cioè gli angoli *e*, *f*, *g*, *h*, *i* (*Fig.* 12), e più ſe ve ne foſſero) preſi tutti inſieme non faranno mai ne più, ne meno di 360 gradi, e perciò ſaranno preciſamente eguali a' quattro retti, come è evidente; purchè però l'arco di circolo, che ſi eſtende dalla prima all'ultima di eſſe linee, paſſando per quella di mezzo ſia maggiore di gradi 180; altrimenti ne pure arriveranno a fare due rette, come in queſt'altra figura ſuccede degli angoli *e*, *f*, *g*, *h*, *i* (*Fig.* 13), che prendono meno di 180 gradi, e quell'arco, che reſta fra le due linee eſtreme dalla parte D, non miſura alcun angolo.

Delle linee parallele, e inclinate.

21 DUe rette linee poſte ſopra un medeſimo piano, e che ſieno per tutto egualmente diſtanti fra loro, chiamanſi *parallele*, o *equidiſtanti*. La diſtanza di eſſe s'intende doverſi prendere perpendicolarmente da un punto dell'una fino all'altra; come ſe dal punto A (*Fig.* 14) della retta AB ſi ſupporrà tirata la retta AC, che ſia perpendicolare alla CD, e parimente da un altro punto B della prima AB ſarà tirata un'altra retta BD anch'eſſa perpendicolare a CD, e queſte due perpendicolari AC, BD, ſi trovano eguali fra loro, e ciò ſempre ſucceda qualunque punto ſi prenda in tutta la lunghezza delle linee AB, CD, queſte due rette ſi diranno parallele.

22 E' manifeſto per ſe ſteſſo, che ſe due rette ſi troveranno equidiſtanti per qualche tratto, come per AB, CD, non potranno ceſſare di eſſer tali proſeguendo oltre, o dall'una, o dall'altra parte; perocchè, ſe, a cagion d'eſempio, paſſato il punto B ſi accreſceſſe, o ſi diminuiſſe la diſtanza della AB dalla CD (come ſi vede nelle linee BH), allora non ſi direbbe che ABH foſſe una ſola linea retta, ma ella piegherebbe, e ſareb-

farebbe un angolo in B. Quindi si raccoglie, che due linee parallele prolungate anco in infinito dall' una, o dall' altra parte mai non si accostano insieme, e per conseguenza mai non s' incontrano, ne fanno angolo insieme.

23 E all' incontro due linee rette poste sul medesimo piano, le quali prolungate dall' una, e dall' altra parte in infinito mai non s' incontrano insieme, saranno parallele.

24 Se saranno due parallele A C, D F (*Fig.* 15), e una retta linea G B incontrerà una di esse nel punto B, è chiaro, che ella prolungata che sia, entrerà nello spazio compreso fra le parallele, e andrà ad incontrare anco l' altra di esse (almeno prolungata) in qualche punto; e perciò una retta non può tagliare una di due parallele senza andar a tagliare anco l' altra. Supposto dunque, che una retta cada sopra due parallele, e le tagli ambedue, ne nasceranno nel punto di ciascuna sezione quattro angoli, che in tutto saranno otto, ciascun de' quali per maggior facilità esprimeremo (*Fig.* 16) per una sola lettera, e sono A, B, C, D, E, F, G, H, de' quali A, B, H, G, si chiamano *esterni*, e gli altri quattro *interni*. Paragonando ora A con E, quest' ultimo si chiama *interno*, ed *opposto* rispetto a quello; e tale è pure F rispetto a B, e C rispetto a G, D rispetto ad H. Ma C, ed E insieme paragonati si chiamano *interni dall' istessa parte*; e così pure D, ed F. Finalmente C con F, e D con E diconsi *alterni*.

25 Egli è assai chiaro senz' altra prova, che quando una retta cade sopra due parallele, ognuno degli angoli esterni, come A, è eguale al suo interno, ed opposto E, che è come dire, che la detta retta altrettanto pende verso l' una delle parallele, quanto verso l' altra; che se ciò non fosse, quella delle due parallele, verso la quale la terza linea pendesse meno, penderebbe ella verso l' altra, ne più le sarebbe parallela, come se l' angolo A fosse maggiore di E, allora o la parallela di sopra guarderebbe allo in giù dalla parte K, o quella di sotto allo in sù dalla medesima parte.

26 Poichè dunque l' angolo esterno, come A è sempre eguale al suo interno, ed opposto E, e per altro l' angolo A è sempre eguale al suo angolo al vertice D (artic. 19), è forza, che i due E, D, cioè gli alterni sieno sempre tra loro eguali.

27 E

27 E perchè i due D, C presi insieme, come quelli, che sono aggiacenti, hanno per misura 180 gradi (articolo 17), così se in luogo di D metteremo E, che si è mostrato eguale a D, anco i due E, C, cioè gli interni dalla istessa parte, presi insieme, avranno la stessa misura di 180 gradi, cioè saranno sempre eguali a' due retti.

28 All' incontro qualunque volta una retta linea cadrà sopra due altre rette, se si troverà, che uno degli angoli esterni, come A, sia eguale al suo interno, ed opposto E, si dovrà dire, che queste due linee sieno parallele; e l' istesso dovrà conchiudersi, se uno degli angoli interni, come E, si troverà eguale al suo alterno D; o finalmente se due interni dall' istessa parte, come C, E, si troveranno eguali a' due retti.

29 Se due linee rette, come A B, C D (*Fig.* 17) non saranno tra loro parallele, e che tuttavia si trovino nello stesso piano, prolungando l' una, e l' altra dalla parte, ove la loro distanza si diminuisca, finalmente s' incontreranno in un punto. Da che segue, che se una retta G K (*Fig.* 18) sarà parallela ad una di due parallele L M, sarà parallela anco all' altra N O; perocchè se non fosse parallela a questa, l' incontrarebbe in qualche punto. Dunque (per l' articolo 24) incontrerebbe anco l' altra L M, a cui si suppone parallela, il che è impossibile (articolo 22). Le linee rette, come A B, C D (*Fig.* 17), che non sono parallele, diconsi *convergenti* dalla pare del loro concorso M, e *divergenti* dalla parte opposta N; diconsi ancora *inclinate*, senza aver riguardo all' una, o all' altra parte.

LIBRO II.

Delle figure, e prima de' triangoli.

30 Figura è una ſuperficie, o un ſolido terminato da tutte le parti.

31 Quelle figure, che conſiſtono in una ſuperficie, ſe queſta ſarà piana, chiameranſi *figure piane*.

32 Una figura piana diceſi *rettilinea*, quando vien terminata da linee rette, e ſuol anche in tal caſo neutralmente chiamarſi un rettilineo. Ella è poi *curvilinea*, quando è terminata da una, o più linee curve (come il circolo), e *miſta*, quando parte da linee curve, parte da rette.

33 Tutte le linee, che terminano una ſuperficie figurata, preſe inſieme, ſi chiamano il *perimetro*, il *circuito*, la *periferia*, o la *circonferenza* di quella figura, come del circolo ſi è detto di ſopra.

34 Tra le figure piane rettilinee *triangolo rettilineo* chiamaſi quella, che è terminata da tre linee rette, le quali fanno tra loro tre angoli. Le linee, che terminano un triangolo, chiamanſi i *lati* di eſſo. Qualſivoglia di queſti lati può chiamarſi *baſe* del triangolo, e allora gli altri due ritengono propriamente il nome di lati.

35 In ogni triangolo, come B A C (*Fig.* 19), prendendo qualſivoglia degli angoli di eſſo, come A, i due lati B A, C A, che formano queſt' angolo, diconſi *contenerlo*, e il terzo lato B C diceſi *ſottenderlo*. Diconſi ancora i due primi lati *aggiacenti* al detto angolo, e il terzo *oppoſto* al medeſimo. E quando uno de' lati, come B C, ſi prenda per baſe, l' angolo A, che gli è oppoſto, chiamaſi *angolo verticale*.

36 Un triangolo, che abbia i tre lati fra loro eguali, ſi dirà *equilatero*; uno, che ne abbia due ſoli eguali, *iſoſcele*; ed uno, che li abbia tutti e tre diſeguali, *ſcaleno*. A (*Fig.* 20) rappreſenta un triangolo equilatero; B, B degli iſoſceli; C, C degli ſcaleni.

Pro-

Proprietà principali de' triangoli.

37 IN ogni triangolo rettilineo tutti e tre gli angoli presi insieme sempre sono eguali a due retti, cioè vagliono 180 gradi. Imperocchè se intenderemo per uno degli angoli del triangolo, come per B (*Fig.* 21), esser tirata una retta, parallela al lato opposto a quest' angolo (che è la linea punteggiata), è certo, che l'angolo C preso insieme coll' angolo totale, che risulta dai due B, A vale precisamente 180 gradi (articolo 27). Dunque se in vece di A metteremo D, che è eguale ad A (articolo 26), avremo l'angolo C con i due B, D, tutti e tre insieme di 180 gradi.

38 Da ciò segue, che in ogni triangolo, prolungando qualsivoglia de' suoi lati, l'angolo *esterno*, che viene allora a formarsi fuori del triangolo, sempre sarà eguale ai due interni B, C, che sono dall' altra parte opposta a quella del prolungamento, e chiamansi *interni*, ed *opposti*. Perocchè se l'angolo D preso coi due B, C vale 180 gradi (articolo 37), e se lo stesso D preso col solo E val pure 180 gradi (articolo 17), è forza, che E solo vaglia quanto i due B, C.

39 Da ciò, che si è detto all'articolo 37, si raccoglie, che niun triangolo può avere più di un angolo retto, nè più d'un ottuso, e avendone un ottuso, o un retto, avrà necessariamente gli altri due acuti, che se altrimente fosse, sarebbero tutti e tre gli angoli di esso maggiori di due retti. Ciò posto, se un triangolo rettilineo avrà un angolo retto, come A (*Fig.* 22), lo chiameremo *rettangolo*, ovvero *ortogonio*, se un ottuso, come B, *ottusangolo*, o *ambigonio*; se tre acuti, *acutangolo*, oppure *osigonio*, come C.

40 Se una retta linea D F (*Fig.* 23), cadendo sopra un' altra G H, sarà i due angoli aggiacenti *a*, *b* obbliqui, e preso nella D F qualsivoglia punto, come F, da esso cadrà sopra la G H la retta perpendicolare F H, è evidente, che questa cadrà dalla parte dell' angolo acuto *b*, non dall' ottuso *a*, altrimente il triangolo F D H, che viene a formarsi, avrebbe un angolo retto, (cioè quello, che fa la perpendicolare in H), e un ottuso; il che è impossibile (articolo 39).

De' triangoli equiangoli.

41 SE due triangoli avranno due de' loro angoli eguali, come l'angolo *g* (*Fig.* 24) all' angolo *e*, e l'angolo *h* all' angolo *d*, anco il terzo angolo *i* sarà eguale al terzo *f*: imperocchè tanto i tre *g*, *h*, *i*, quanto i tre *d*, *e*, *f* debbono (articolo 37) far la stessa somma di 180 gradi. Due triangoli pertanto, che abbiano gli angoli eguali nel modo, che si è detto, si diranno *equiangoli*. E quì è manifesto, che se in un triangolo *d e f*, si tirerà una retta *a m* parallela ad uno de' lati *d e*, essendo l'angolo *m o f* eguale al *d*, e l'angolo *f m o* all' *e* (articolo 25), i triangoli *f m o*, *f e d* saranno equiangoli.

42 In qualsivoglia triangolo rettangolo A B C (*Fig.* 25) se dall' angolo retto A B C cadrà sul lato opposto ad esso A C la perpendicolare B D, che divida il detto triangolo ne' due triangoli A B D, B D C, ciascuno di questi sarà equiangolo a tutto il triangolo A B C. Imperocchè l'angolo retto A B C del triangolo A B C sarà eguale al retto B D C del triangolo B D C, e l'angolo B C A del primo triangolo non solo è eguale, ma l'istesso coll' angolo D C B del secondo. Dunque anco il terzo angolo B A C del primo triangolo sarà eguale al terzo angolo D B C del secondo (articolo 41), e i triangoli saranno equiangoli: E nell' istesso modo si proverà, che il triangolo A B C è anco equiangolo all' altro A B D; da che segue ancora, che i due triangoli B D C, B D A sono equiangoli fra loro.

Della corrispondenza de' lati, e degli angoli nel triangolo.

43 IN niun triangolo un solo lato può pareggiare gli altri due presi insieme, ma sempre sarà minore di essi. Come nel triangolo A B C (*Fig.* 26) per quanto sia lungo il lato A C, non arriverà ad eguagliare la somma degli altri due A B, B C, essendo evidente, che da A in C la strada più breve è la retta A C, non l'obbliqua A B C.

44 Se nelle due estremità D, E (*Fig.* 27) d'una retta D E si faranno due angoli acuti eguali fra loro H D E, G E D, le ret-

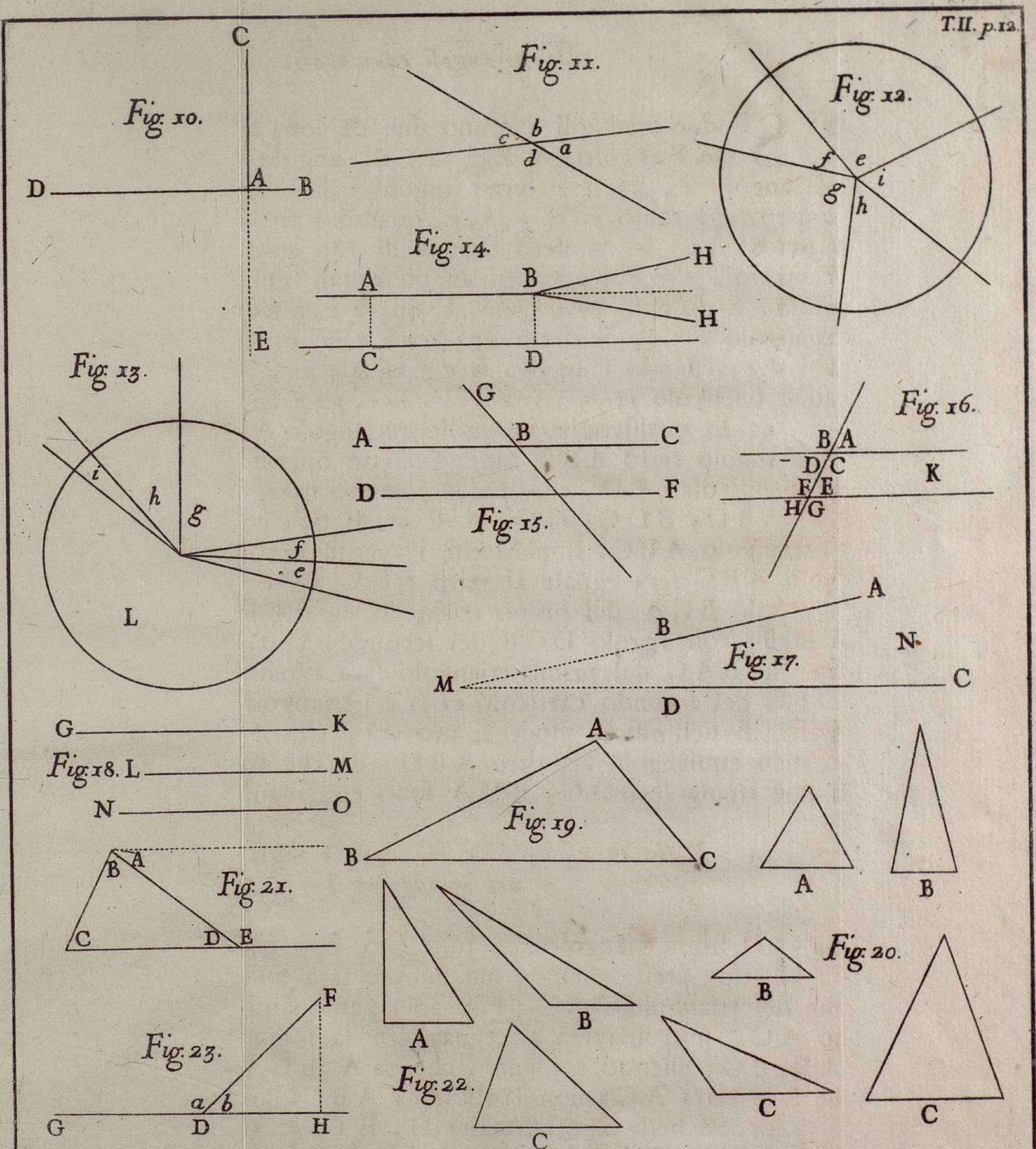


Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.

le rette HD, GE, che fanno questi angoli colla DE, prolungate finchè s' incontrino nel punto F, riusciranno eguali, come FD, FE; non potendosi immaginare ragione alcuna, per cui l' una di esse debba riuscir maggiore dell' altra; e perciò in ogni triangolo, che abbia due angoli eguali fra loro, anco i lati opposti a questi angoli saranno eguali.

45 All' incontro se un triangolo avrà due lati fra loro eguali, gli angoli opposti ad essi saranno eguali. Sia il triangolo GHI (*Fig.* 28) coi lati GH, GI eguali. Qualunque sia la grandezza dell' angolo I opposto ad uno di essi, cioè al GH, se vorremo tirare per lo punto H una retta, che faccia con IH un angolo eguale a I, dico, che questa sarà la stessa HG; poichè se ella potesse essere un' altra, come HK, la quale facesse l' angolo KHI eguale all' angolo I, anco il lato HK verrebbe eguale al lato KI (articolo 44), e perciò siccome IK con KG, cioè tutta la IG, è eguale ad HG, così HK con KG sarebbe eguale ad HG, il che è impossibile (per l' articolo 43); attesochè nel triangolo HKG i due lati HK, KG debbono sempre esser maggiori del terzo HG. Onde è manifesto, che ogni triangolo isoscele ha due angoli aggiacenti alla base eguali fra loro, e per conseguenza acuti (articolo 39), ed ogni equilatero ha tutti e tre gli angoli eguali; cioè anch' essi acuti (articolo 39), e ciascuno di gradi 60; giacchè tutti e tre insieme ne fanno 180 (articolo 37).

46 In ogni triangolo, in cui un lato sia maggiore d' un altro, come HI (*Fig.* 29) maggiore d' IL, anche l' angolo HLI opposto al primo sarà maggiore dell' angolo IHL opposto al secondo; imperocchè se s' intenderà presa la parte IK eguale ad IL, e tirata la retta LK, l' angolo IKL, che sarà esterno rispetto al triangolo HKL, sarà maggiore del solo interno H (articolo 38). Ora l' angolo ILK è eguale a IKL; perocchè i lati IL, IK sono eguali (articolo 45), dunque anche l' angolo ILK è maggiore di H. Tanto più dunque tutto ILH sarà maggiore del medesimo H.

47 All' incontro se in un triangolo si saprà, che un angolo sia maggiore di un altro, dovrà dirsi, che il lato opposto a quello sia maggiore del lato opposto a questo; che altrimente se i detti lati fossero eguali, gli angoli sarebbero eguali

(arti-

(articolo 45) , e ſe il primo lato foſſe minore dell' altro , anche l' angolo oppoſto al primo ſarebbe minore dell' altro , di cui ſi ſuppone maggiore (articolo 46) . E quindi è , che in ogni triangolo ottuſangolo , in cui già ſappiamo , che l' angolo ottuſo è il maggiore (articolo 39) , anco il lato oppoſto all' angolo ottuſo ſarà ſempre il maggiore ; e per l' iſteſſa ragione in ogni triangolo rettangolo l' *ipotenuſa* , che così chiamano il lato oppoſto all' angolo retto , ſarà ſempre maggiore di ciaſcuno de' *cateti* , o *perpendicoli* , che ſono i lati , che comprendono l' angolo retto .

48 Quindi ſi raccoglie , che di tutte le rette linee , che da un punto E (*Fig.* 30) poſſono tirarſi ad una medeſima retta H F , la più breve è la perpendicolare E F . Imperocchè tirando qualſivoglia altra linea come E H , ne naſcerà ſempre un triangolo rettangolo E H F , di cui E H ſarà ipotenuſa , e perciò maggiore di E F (articolo 47) . Per queſta cagione la perpendicolare E F , che da un punto , come E , tiraſi ſopra una retta , come F H , diceſi la diſtanza di quel punto da queſta retta ; dovendoſi tal diſtanza miſurare appunto per la più brieve .

Comparazioni diverſe de' triangoli .

49 QUando due triangoli rettilinei ſi paragonano inſieme , accade ſpeſſe volte , che dall' egualità d' alcuni de' loro lati , o de' loro angoli ſi poſſa venire in cognizione dell' egualità degli altri lati , e degli altri angoli ſenza miſurarli . Il primo caſo dunque è , quando ne' due triangoli A B C , *a b c* (*Fig.* 31) ſi ſappia , che due lati dell' uno , come BA , AC ſieno eguali a due lati dell' altro , come *b a* , *a c* ; ciaſcuno a ciaſcuno , e di più gli angoli A , et *a* compreſi da queſti lati ſieno eguali ; imperocchè è manifeſto , che in tal caſo ſe il triangolo *b a c* ſi metteſſe ſopra il B A C adattando il punto *a* in A , e la retta *a b* ſopra A B , anco la retta *a c* ſi adatterebbe ſopra A C , e ciaſcun lato , ed angolo del triangolo *a b c* ſopra ciaſcun lato , ed angolo dell' altro , e perciò ciaſcuna parte dell' uno ſi troverebbe eguale a ciaſcuna parte dell' altro ; avvertendo di paragonar ſempre quelle parti , che ſi corriſpondono , cioè la baſe *b c* colla B C , e l' angolo *c* ,

che

che è l'opposto al lato *ab*, coll'angolo C, che è l'opposto al lato A B eguale ad *ab* &c. Ed è anco evidente, che tutto lo spazio del triangolo *abc* s'adatterà precisamente sopra tutto lo spazio del triangolo A B C; onde i triangoli stessi, non che i loro lati, et angoli, saranno eguali.

50 Il secondo caso è quando si sappia, che due angoli del primo triangolo sieno eguali a' due del secondo, come il B al *b*, ed il C al *c*, ed in oltre il lato B C, a cui i detti angoli sono aggiacenti, sia eguale al *bc*, a cui sono aggiacenti gli altri, che corrispondono ai primi. Perciocchè anco in questo caso portando un triangolo sopra l'altro, con mettere il punto B sopra *b*, e il C sopra il *c*, è evidente, che i triangoli s' adatteranno insieme, e nel tutto, e in ciascuna delle loro parti; onde si conchiuderà, come prima &c. Anzi è da avvertire, che quando due angoli B, C sono eguali a due *b*, *c*, e di più un lato, che non sia aggiacente ai detti angoli, ma l'opposto ad uno di essi, come A B opposto a C, sia eguale al corrispondente *ab*, ne seguirà nulladimeno l'istesso; perocchè se i due angoli B, C sono eguali a' due *b*, *c*, è forza, che anco il terzo A sia eguale al terzo *a* (articolo 41); onde i lati B A, *ba*, che si suppongono eguali saranno sempre gli aggiacenti ad angoli eguali, e il caso sarà l'istesso, che quello di prima.

51 Il terzo è quando si sappia, che i tre lati (*Fig.* 32) A B, B C, C A sieno separatamente eguali alli tre *ab*, *bc*, *ca*. Perocchè non è possibile porre il triangolo B A C sopra *bac* mettendo il punto *a* sopra A, e il *c* sopra C, senza che le altre parti s'adattino insieme, e in conseguenza si trovino eguali. E che ciò sia vero, s'intendano due circonferenze di circolo, che passino per lo punto B, delle quali una B G abbia il centro in C, e l'altra B H lo abbia in A. E' certo, che quando si sarà adattato, come sopra, il lato *ac* al lato A C, l'estremo *b* della linea *ab* dovrà trovarsi in un qualche punto della circonferenza B H, di cui A è il centro; perocchè *ab* si suppone eguale al semidiametro di questa circonferenza A B; è anche certo, che l'estremo *b* della linea *cb* dovrà trovarsi in un qualche punto della circonferenza B G, di cui C è il centro; giacchè *bc* si suppone eguale a B C semidiametro di questa circonferenza. E finalmente è certo, che il punto, in

cui

cui dee trovarsi il punto *b* dee esser un solo. Se dunque egli dee essere un solo, e trovarsi nulladimeno su tutte e due le circonferenze B G, B H, è forza, ch' egli si trovi in B, dove queste circonferenze s' incontrano. Se dunque *b* si trova in B, e già *a* si è collocato in A, e *c* in C, tutti gli angoli di due triangoli, e tutt' i triangoli stessi si adattano insieme. Dunque &c.

52 Il quarto caso è, quando si sappia, che due lati dell'uno (*Fig.* 33) A B, A C sieno (come nel primo caso) eguali a' due dell' altro *a b*, *a c*, e di più ne' triangoli vi sia un altro angolo eguale; ma non (come allora) il compreso da' lati eguali, ma l' opposto ad uno di questi, cioè a quello, che corrisponde in ambedue i triangoli; come se l' angolo C, che è opposto al lato A B fosse eguale al *c*, opposto al lato corrispondente *a b*. In questo caso però se l' angolo noto sarà opposto al lato più piccolo per poter conchiudere, che i triangoli abbiano le altre parti eguali, e sieno eguali fra loro, vi vuole una condizione di più, cioè che l' altro angolo B, opposto all' altro de' suddetti lati sia della medesima specie del suo corrispondente *b*, cioè, o sieno amendue ottusi, o amendue retti, o acuti. Imperocchè è da osservare, che ritenendo l' istesso angolo *c*, l' istesso lato *a c*, e l' istessa lunghezza del lato *a b*, può darsi che si facciano due diversi triangoli diseguali fra loro nel tutto, e nelle altre parti. In fatti se dal centro *a* col semidiametro *a b* fosse descritta una circonferenza di circolo, che tagliasse di nuovo la retta *b c* nel punto *d*, e si tirasse la retta *d a*, ecco che il triangolo *a c d* avrebbe l' istesso angolo *c* del triangolo *a c b*, avrebbe l' istesso lato *a c*, ed avrebbe il lato *a d* dell' istessa lunghezza di *a b*, e pure avrebbe le altre parti, cioè gli altri angoli, e il terzo lato di diversa misura di quelli del triangolo *a c b*. Ben è vero, che siccome la detta circonferenza non può tagliare la retta *b c*, che al più in un solo punto diverso da *b*, cioè in *d* (come per se stesso è manifesto), così ritenendo l' angolo *c*, e il lato *a c*, un solo triangolo, cioè *a c d*, può farsi, che abbia l' altro lato *a d* della stessa lunghezza di *a b*, e che tuttavia sia diverso da *a b c*; e questo triangolo *a c d*, non può mai avere l' angolo *a d c* dell' istessa specie dell' *a b c*; perocchè essendo *a b d* isoscele, e gli

gli angoli *adb*, *abd* eguali (articolo 45), *adb* sarà sempre acuto (articolo 39), e *adc* diverso di specie da *abc*; giacchè due angoli aggiacenti non possono essere della medesima specie (articolo 18); posto dunque, che i lati AB, AC sieno eguali ai lati *ab*, *ac*, e che l'angolo C sia eguale al *c*, e finalmente, che ambedue gli angoli B, *b* sieno d'una medesima specie, verbigrazia acuti, (come nella figura) dico, che questi triangoli hanno tutte le altre parti eguali, e sono essi medesimi fra loro eguali: Imperocchè portando il triangolo *acb* sopra ACB col mettere il punto *a* in A, e il *c* in C, la retta *cb* giacerà su la estensione della CB (a cagione degli angoli *c*, C eguali), e la retta *ab* non potrà cadere, che sopra AB; perchè sebbene a riguardo della sua lunghezza potrebbe anco cadere in AD (supposto che D sia il punto, ove una circonferenza descritta col centro A, e col raggio AB taglia la retta CB), non potrà tuttavia cadere in questa situazione a riguardo dell'angolo *b*, che si suppone acuto, che non può adattarsi all'ADC. Il quale dee esser ottuso, cioè di specie diversa dall'ABC, come poc'anzi dell'angolo *adc* si è dimostrato. Onde rimane, che *ab* si adatti a AB, e tutte le parti del triangolo *abc* a tutte quelle del triangolo ABC, e perciò sieno eguali &c.

LIBRO III.

Delle figure di quattro, e di più lati.

53 LE figure terminate da quattro linee rette, che comprendono fra loro quattro angoli, si chiamano *quadrilateri*, o *quadrangoli*, e le linee, che le terminano *lati*, ognuno de' quali si può prendere per base.

54 *Lati aggiacenti* d'un quadrilatero sono quelli, che comprendono uno degli angoli di esso, e *lati opposti* quelli, che non ne comprendono alcuno. Quando i lati opposti sono paralleli fra loro a due a due, il quadrilatero si chiama un *parallelogrammo*, come A, A (*Fig.* 34); quando non sono paralleli a due a due, *trapezio*, come B, B, B.

55 Quando un parallelogrammo abbia un angolo retto, come D (*Fig.* 35), è manifesto, che avrà retti anco gli altri F, G, E, dovendo, per cagione delle parallele (articolo 26), i due interni della istessa parte esser sempre eguali a' due retti; perciò un parallelogrammo, che abbia un angolo retto, chiamasi un *rettangolo*, come DEFG; che se di più avrà tutti e quattro i suoi lati eguali, dirassi un *quadrato*, come H (*Fig.* 36).

56 Se poi un parallelogrammo non avrà gli angoli retti, ma tuttavia avrà i quattro lati eguali, si chiamerà *rombo*, come I (*Fig.* 37), e se non avendo gli angoli retti, ne pure i quattro lati non saranno uguali, *romboide*, come K (*Fig.* 38).

57 Un linea retta tirata da un angolo d'un parallelogrammo all'angolo opposto, si chiama *diametro*, o *diagonale* di quel parallelogrammo, come AB (*Fig.* 39), ovvero CD.

Proprietà de' Parallelogrammi.

58 IN qualsivoglia parallelogrammo tirata, che sia una diagonale, è manifesto, che l'angolo *a* (*Fig.* 40) sarà eguale al *d* (articolo 26), e il *c* eguale al *b*. Dunque ne' due triangoli HLN, HMN abbiamo due angoli eguali a' due angoli,

goli, e il lato H N aggiacente ad essi, comune all'uno, e all' altro triangolo, e perciò (articolo 50) il terzo angolo L sarà eguale al terzo M, ed il lato L N al lato H M, e il lato H L al lato M N, e finalmente tutto il triangolo H L N a tutto il triangolo H M N. Generalmente dunque la diagonale divide in due parti eguali il parallelogrammo; e i lati opposti di ciascun parallelogrammo, come pure gli angoli opposti, sono per necessità sempre eguali.

59 All'incontro se due linee parallele, ed eguali H L, M N si congiungeranno nelle loro estremità con due rette linee H N, L N, ancor queste saranno parallele, ed eguali, e formeranno insieme colle prime un parallelogrammo. Imperocchè tirata la retta H N ne' due triangoli H L N, H M N, l'angolo *a* sarà eguale al *d* (articolo 26), e il lato H L è già eguale ad M N, e finalmente H N è lato comune all'uno, e all'altro triangolo; onde abbiamo quanto basta a conchiudere (per l'articolo 49), che le parti corrispondenti di questi triangoli sieno eguali, cioè il lato H M al lato L N, e l'angolo *c* all'angolo *b*; i quali due angoli essendo alterni, le rette H M, N L saranno parallele (articolo 27).

60 Per maggior facilità da quì avanti esprimeremo i parallelogrammi per due sole lettere, cioè per quelle, che denotano due de' suoi angoli opposti. Così quando diremo il parallelogrammo M L, ovvero H N, intenderemo il parallelogrammo H L N M.

61 Se in un parallelogrammo qualunque si sia, come A D (*Fig.* 41), intenderemo tirata una diagonale A D, e preso in questo qualsivoglia punto, come E, immagineremo, che per questo punto passino due rette, una parallela ai lati B D, A C, la quale sia H E F, ed un'altra parallela ai lati A B, C D, la quale sia I E G; avremo diviso il parallelogrammo A D in quattro parallelogrammi, due che saranno intorno alla suddetta diagonale, cioè A E, E D, e due altri per li quali non passerà la diagonale, cioè C E, E B, e questi due ultimi si chiamano i *complementi*; e tutta la figura composta de' due complementi, e di uno de' parallelogrammi posti intorno alla diagonale, chiamasi *gnomone*, come I E H B D C I.

62 I due complementi sono sempre eguali fra loro; impe-

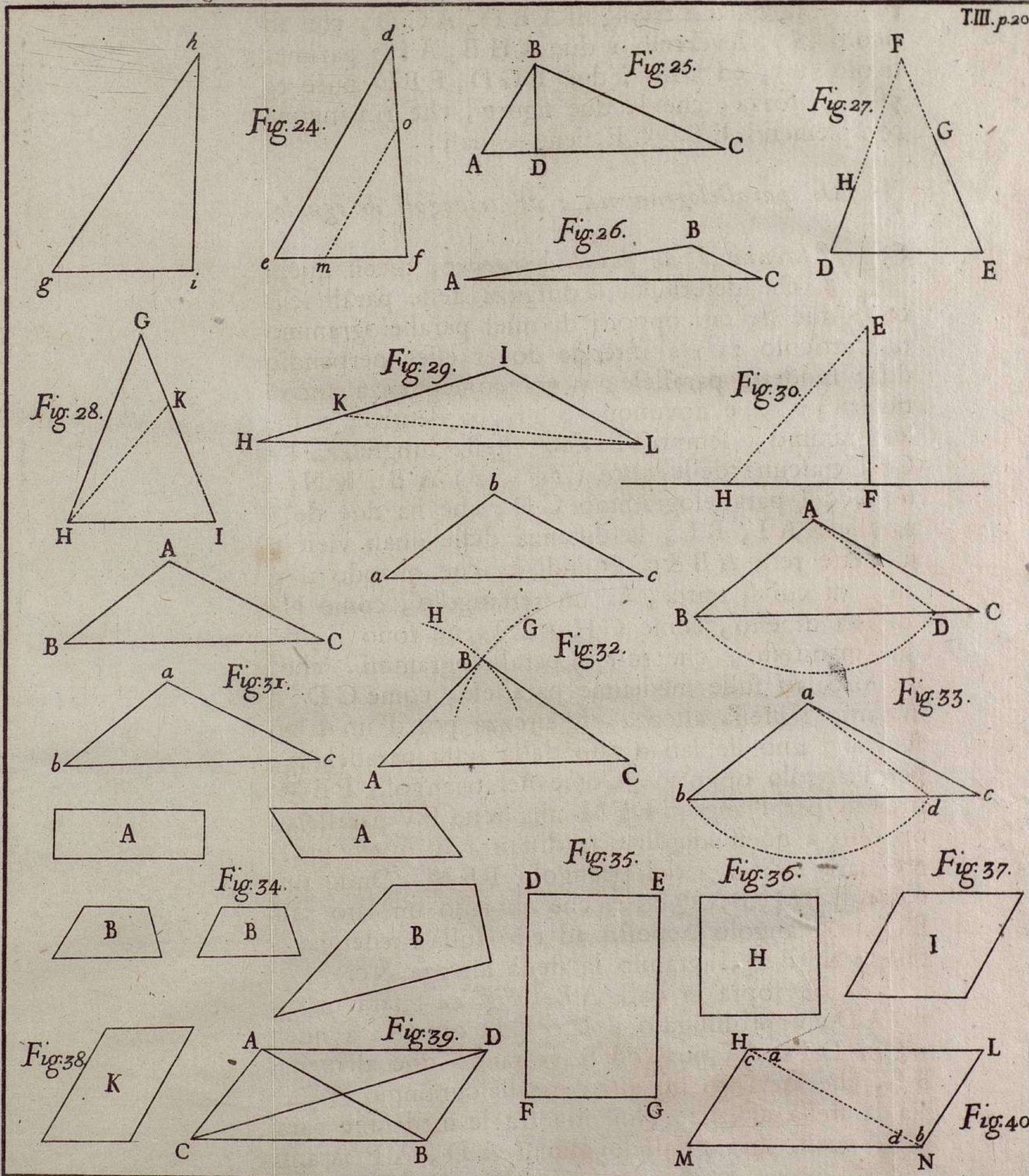
rocchè ſe da' due triangoli A B D, A C D, che ſono eguali (articolo 58), leveremo i due A H E, A I E parimente eguali (articolo 58), ed anco i due E G D, E F D pure eguali (articolo 58), è forza, che le due figure, che rimangono, cioè i due complementi E B, C E ſieno eguali.

De' parallelogrammi, e de' triangoli di eguale altezza.

63 *Altezza d' un parallelogrammo*, diceſi quella retta linea, che determina la diſtanza delle parallele, che coſtituiſcono due de' lati oppoſti di quel parallelogrammo, la qual retta (articolo 21) s' intende dover eſſer perpendicolare ad una delle ſuddette parallele, e per conſeguenza anco all' altra (articolo 37); e dovunque ſi tiri, o dentro, o fuori del parallelogrammo, ſempre è dell' iſteſſa lunghezza (articolo 22). Così ciaſcuna delle rette (*Fig.* 42) A B, K N, I L ſarà l' altezza del parallelogrammo C D, che ha due de' ſuoi lati ſulle parallele A I, B L, la diſtanza delle quali vien miſurata dalle ſuddette rette A B &c. Quindi è, che quando il parallelogrammo, di cui ſi tratta, ſia un rettangolo, come N G, i medeſimi lati di eſſo, come G H, K N, ne ſono l' altezza. E' dunque manifeſto, che tutt' i parallelogrammi, che abbiano due de' loro lati ſulle medeſime parallele, come C D, N G, A L &c. avranno l' iſteſſa altezza. L' altezza poi d' un triangolo è la diſtanza d' uno de' lati d' eſſo dalla retta parallela a queſto tirata per l' angolo oppoſto. Come nel triangolo F E M (*Fig.* 43), tirando per l' angolo E F M una retta F V parallela al lato E M, oppoſto a queſt' angolo, la diſtanza di queſta parallela S T, F O &c. ſarà l' altezza del triangolo F E M. Onde tutt' i triangoli, come E F M, P R Q &c., che abbiano un lato ſulla ſteſſa retta E Q, e l' angolo oppoſto ad eſſo ſulla medeſima retta V R parallela ad E Q, avranno la ſteſſa altezza &c.

64 Se ſopra la baſe A B (*Fig.* 44) ſarà un parallelogrammo A D, e prolungato il lato C D oppoſto a queſta baſe, come in D F, dai punti A B verranno due altre parallele A E, B F, che facciano un altro parallelogrammo A F, il quale abbia la ſteſſa altezza, cioè ſtia fra le medeſime parallele col primo, queſti due parallelogrammi A D, A F ſaranno eguali fra

loro.


T.III. p.20.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.

loro. Imperocchè essendo C D eguale ad A B (artic. 58), ed anco E F eguale ad A B (artic. 58), saranno eguali C D, E F. Dunque aggiungendo all' una, ed all' altra la stessa retta D E, sarà C D con D E, cioè C E, eguale a E F con D E, cioè a D F. Per altro l' angolo F D B è eguale all' angolo E C A (artic. 25), ed il lato D B al lato C A (artic. 58). Dunque ne' due triangoli F D B, E C A abbiamo quanto basta per conchiudere, che sono eguali fra loro (articolo 49), e perciò levando d' amendue il triangolo bianco D I E, ed aggiungendo ad amendue il triangolo segnato in croce A I B, le due figure, che ne risulteranno, cioè i parallelogrammi A D, A F, saranno eguali.

65 E' evidente, che prolungando la retta A B, come in H, se da' punti E, F verranno due altre linee parallele E G, F H terminate alla retta A H, il parallelogrammo F G sarà eguale al parallelogrammo A F, col quale ha comune la base E F, ed è fra le medesime parallele; e che questo parallelogrammo F G avrà il lato G H eguale ad E F (articolo 58), cioè ad A B. Ma il parallelogrammo A F si è mostrato eguale all' A D; dunque o siavi, o non vi sia il parallelogrammo A E, i due parallelogrammi F G, A D, che hanno le basi H G, A B eguali, e sono fra le stesse parallele C F, A H sono eguali.

66 E perchè due triangoli, come A B C (*Fig.* 45), G H E, che abbiano le basi A B, G H eguali poste sulla stessa retta A H, e che terminino coi loro vertici C, ed E alla stessa retta C E parallela ad A H, sono ciascuno di essi (articolo 58) la metà d' un parallelogrammo A D, G F, che ha l' istessa base col triangolo, ed è compreso fra le istesse parallele con esso, siccome questi parallelogrammi A D, G F si sono mostrati eguali (articolo *65*), così i triangoli A B C, G H E saranno eguali. Tanto più è manifesto ciò succedere quando i triangoli non siano sopra basi diverse, ed eguali, ma sulla stessa base comune, e siano, come sopra terminati alla stessa parallela, come i triangoli E G H, I G H.

67 All' incontro se due triangoli posti sopra l' istessa base, e sopra basi eguali situate nella medesima retta, come G E H, G I H, oppure G E H, A C B, si troveranno eguali, la retta, che passa per li loro vertici E, I, ovvero, C, E sarà parallela alla linea delle basi, e il medesimo vale di due parallelogrammi.

mi. Altrimente se C E non fosse parallela ad A H, si potrebbe tirare per E, ovvero per C un' altra retta, come C P, parallela alla suddetta A H, la quale incontrando una delle linee G E, H E, come in P, compito il triangolo G P H, questo sarebbe eguale al triangolo A C B (articolo *66*); il quale si suppone eguale al triangolo G E H; onde G P H, ed E G H sarebbero eguali; cioè il tutto eguale a una delle sue parti: il che è impossibile.

Dei quadrati fatti su i lati de' triangoli rettangoli.

68 IN qualsivoglia triangolo rettangolo, come A G F (*Fig. 46*), se sopra l' ipotenusa A F, si descriverà un quadrato A F S E, e dall' angolo retto del detto triangolo A G F, si tirerà la retta G C parallela al lato A E del detto quadrato, il rettangolo A C, ch' essa formerà dentro il quadrato della parte dell' angolo G A F, sarà eguale al quadrato A M O G, che ha per base il lato G A del detto triangolo aggiacente al detto angolo G A F. Imperocchè prolungate le rette C G, M O, finchè s' incontrino in R, e prolungata parimente E A, finchè incontri M O R in P, essendo, che l' angolo P A F, aggiacente al retto E A F, è anch' egli retto (articolo *16*), e parimente l' angolo M A G è retto, saranno eguali gli angoli P A F, M A G, e toltone il comune P A G, resteranno G A F, P A M eguali. Ne' triangoli dunque G A P, P A M, che hanno eguali i suddetti angoli, ed anco i due A G F, P M A (amendue retti), ed hanno inoltre eguali i lati A G, A M aggiacenti a questi angoli, sarà (articolo *50*) la base P A eguale alla base A F, cioè ad A E. Poichè dunque i due parallelogrammi A R, A C, sono fra le stesse parallele, ed hanno le basi A P, A P eguali, saranno tra loro eguali (articolo *65*). Ma il parallelogrammo A R è eguale al quadrato A O, col quale ha comune la base A G, ed è fra le medesime parallele (articolo *64*); dunque anco il parallelogrammo rettangolo A C sarà eguale al quadrato A O.

69 E perchè per la medesima ragione si mostrerà essere il rettangolo F C (*Fig.* 47) eguale al quadrato F N, che si farebbe sopra l' altro lato G F del medesimo triangolo rettangolo, ne segue, che in qualsivoglia triangolo rettangolo il quadrato fatto

fatto ſopra l' ipotenuſa ſia eguale alla ſomma de' due quadrati fatti ſopra i due perpendicoli, o cateti.

De' poligoni, cioè delle figure di più lati.

70 LE figure compreſe da maggior numero di lati, che quattro chiamanſi generalmente *poligoni*. Se ſono compreſe da cinque lati, diconſi *pentagoni* (*Fig.* 48) (A), ſe da ſei *eſagoni* (B), ſe da ſette *ettagoni* (C), ſe da otto *ottagoni* (D), ſe da nove *enneagoni* (E), ſe da dieci *decagoni* (F), e così degli altri. Quando una figura ha tutt' i lati eguali, e tutti gli angoli eguali chiamaſi *regolare*, o *ordinata*, altrimente diceſi *irregolare*. Così un triangolo equilatero ſarà figura regolare (articolo 45), e parimente lo ſarà un quadrato (articolo 63).

71 Abbiamo veduto, che gli angoli di qualſivoglia triangolo, preſi inſieme, ſono eguali a' due retti (artic. 37); egli è anco manifeſto, che quelli di qualſivoglia quadrilatero, come A B C D (*Fig.* 49), ſono uguali a' quattro retti; perchè ſono eguali a quelli di due triangoli B A D, B C D, ne' quali ſi può riſolvere il quadrilatero col tirare per due degli angoli oppoſti la retta D B. Aggiungeremo ora per regola generale, che in tutt' i poligoni per ſapere a quanti angoli retti equivagliano gli angoli loro, baſta raddoppiare il numero de' lati del poligono, e da queſto doppio levar ſempre quattro, che così reſterà il numero, che ſi cerca. Così nell' ettagono, o figura di 7 lati, raddoppiando 7, che fa 14, e levandone 4, reſterà 10; onde concluderemo, che gli angoli tutti d' un ettagono preſi inſieme vagliano dieci retti, o gradi 900. La ragione di queſta regola è, perchè preſo dentro la figura data, qualſiſia punto, come H (*Fig.* 50), e fatto ſopra ciaſcun lato di eſſa un triangolo, che abbia il vertice in H, il numero di queſti triangoli ſarà eguale a quello de' lati della figura, e il numero degli angoli retti di eſſi triangoli ſarà doppio dal detto numero. Ma perchè fra gli angoli de' ſuddetti triangoli entrano anche quelli, che ſono intorno al punto H, i quali per non eſſere nella periferia della figura, non debbono metterſi in conto, e queſti ſono ſempre (articolo 20) eguali a' 4 retti, ſi

ti, ſi dovranno levare dal detto numero queſti 4 retti, e il rimanente ſarà il numero de' retti, che ſono eguali a quelli della figura. Dacchè poi ſegue, che ove la figura ſia regolare, dividendo il numero così trovato in tante parti eguali, quanti ſono gli angoli di eſſa, ſi avrà il valore di ciaſcuno degli angoli. Con queſta regola è ſtata fatta la ſeguente tavola, la quale può continuarſi ancora per qualſivoglia poligono di maggior numero di lati.

Poligoni regolari.	*Valore di tutti gli angoli del Poligono.*	*Valore di ciaſcun angolo del Poligono.*
Triangolo equilat.° 3 angoli.	2 *retti* gr. 180.	gr. 60.
Quadrato 4 angoli.	4 *retti* gr. 360.	gr. 90.
Pentagono 5 angoli.	6 *retti* gr. 540.	gr. 108.
Eſagono 6 angoli.	8 *retti* gr. 720.	gr. 120.
Ettagono 7 angoli.	10 *retti* gr. 900.	gr. $128.\frac{4}{7}$.
Ottagono 8 angoli.	12 *retti* gr. 1080.	gr. 135.
Enneagono 9 angoli.	14 *retti* gr. 1260.	gr. 140.
Decagono 10 angoli.	16 *retti* gr. 1440.	gr. 144.

LI.

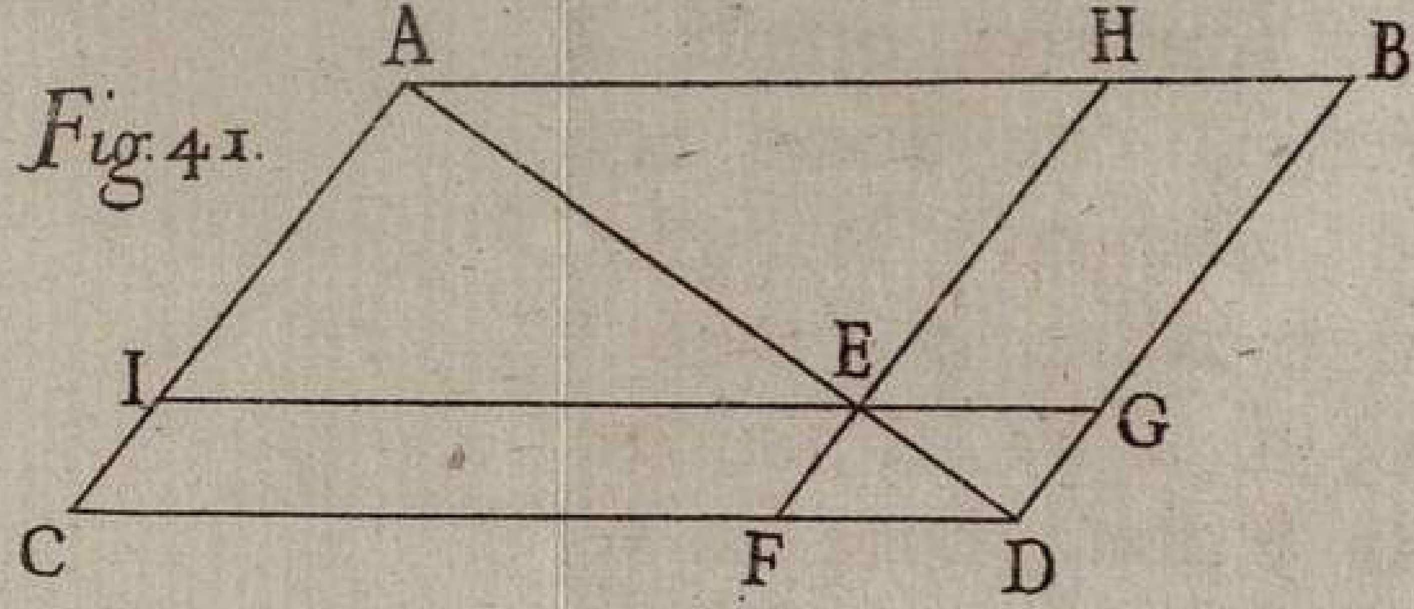


Fig. 41.

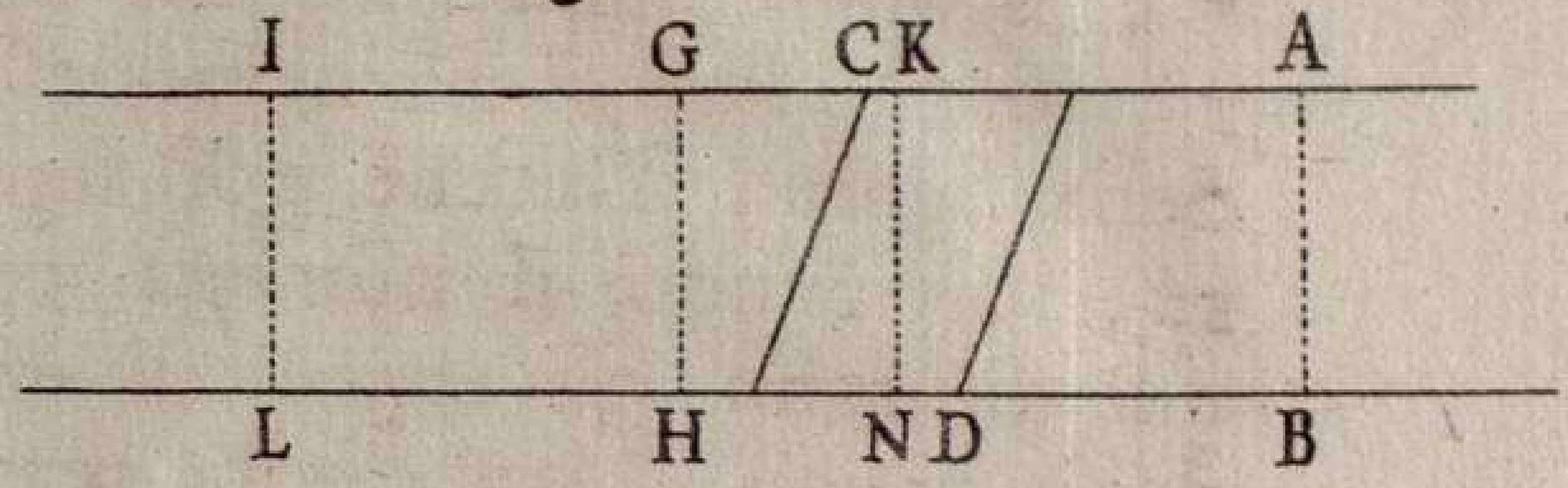


Fig. 42.

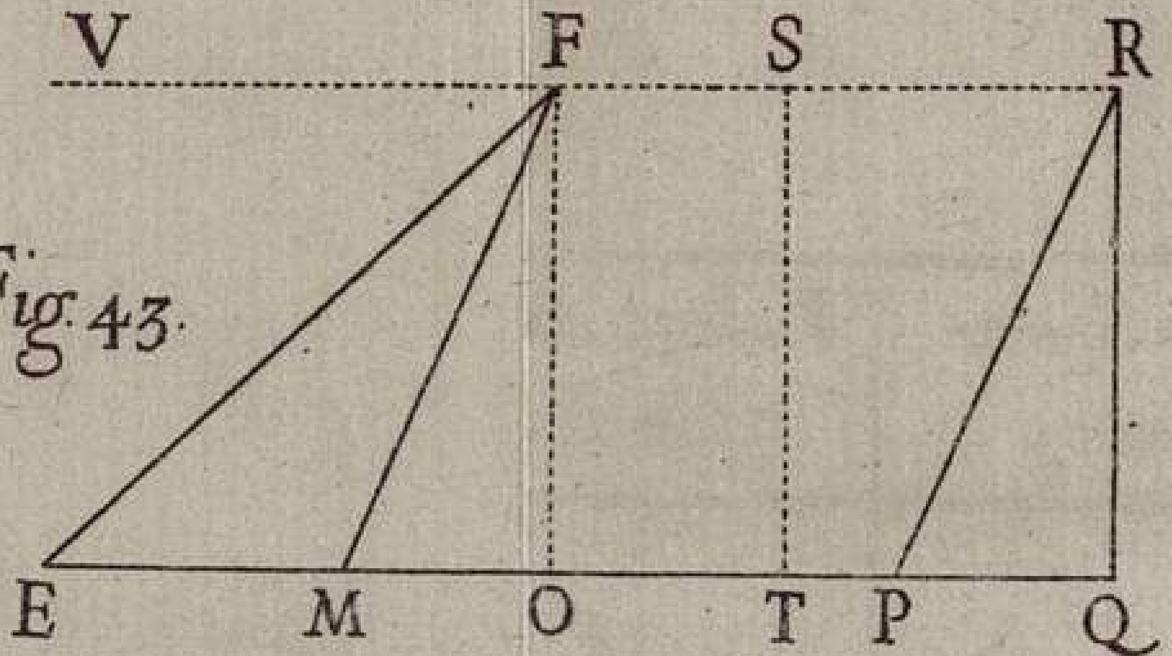


Fig. 43.

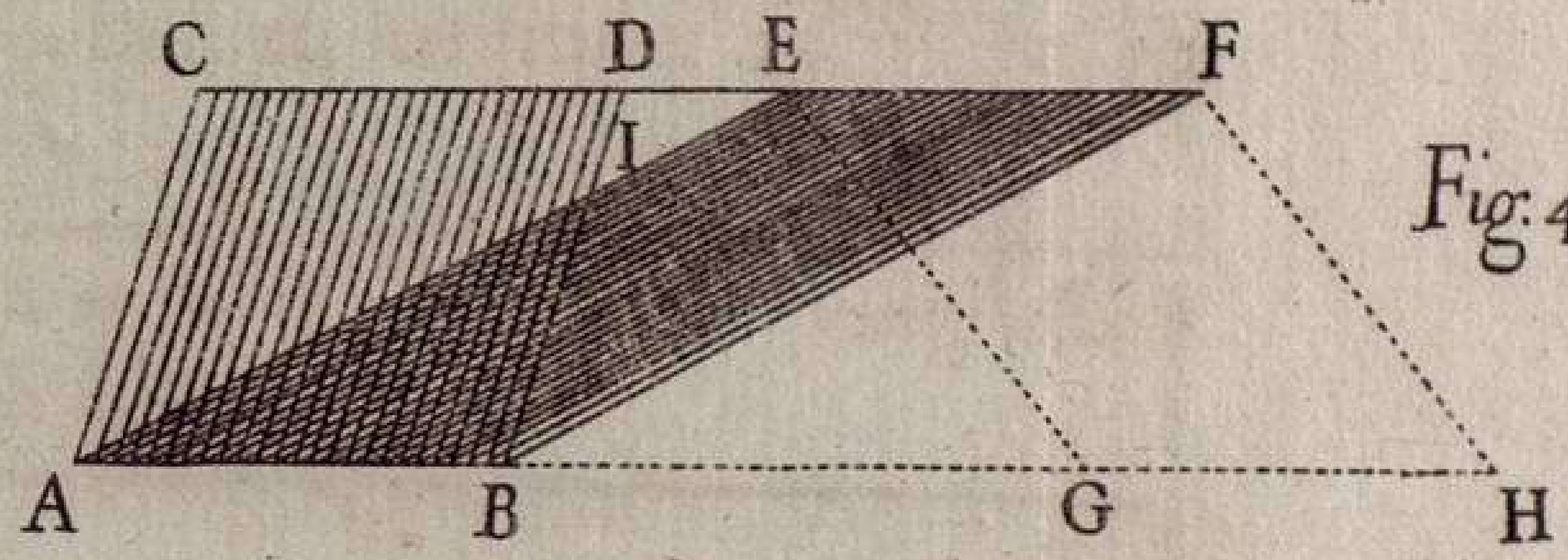


Fig. 44.

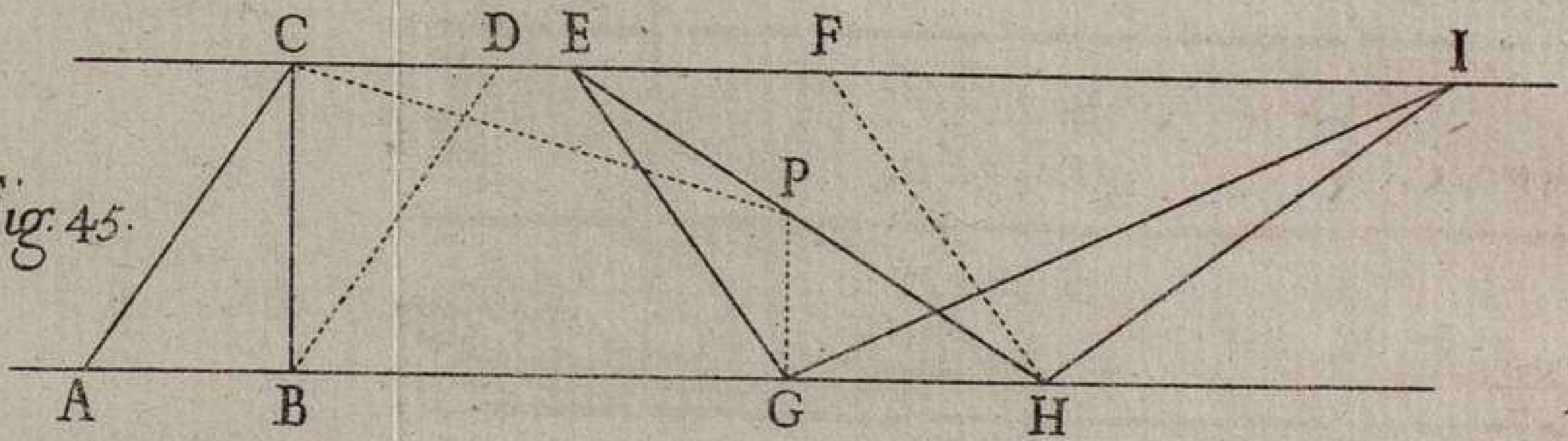


Fig. 45.

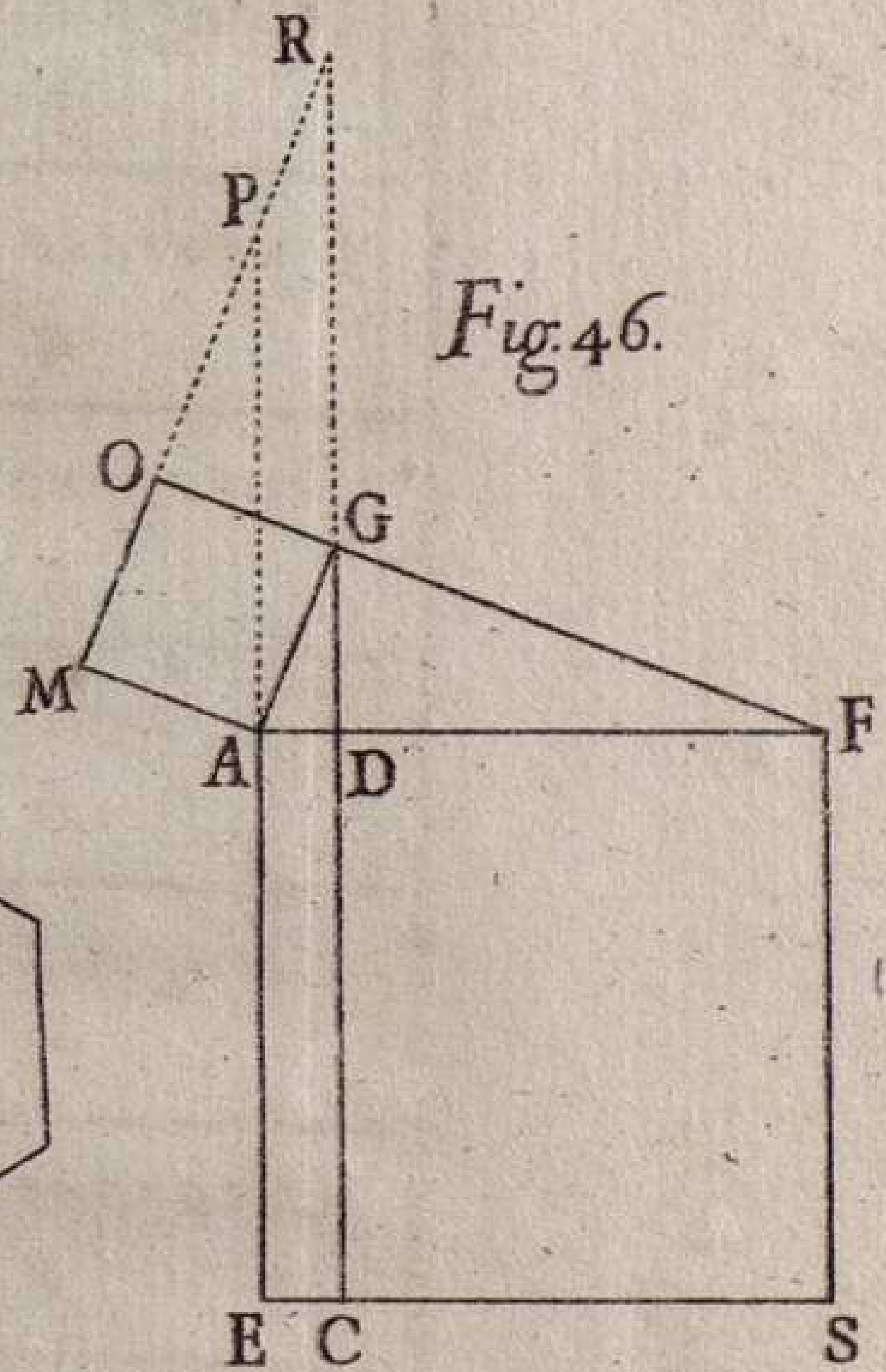


Fig. 46.

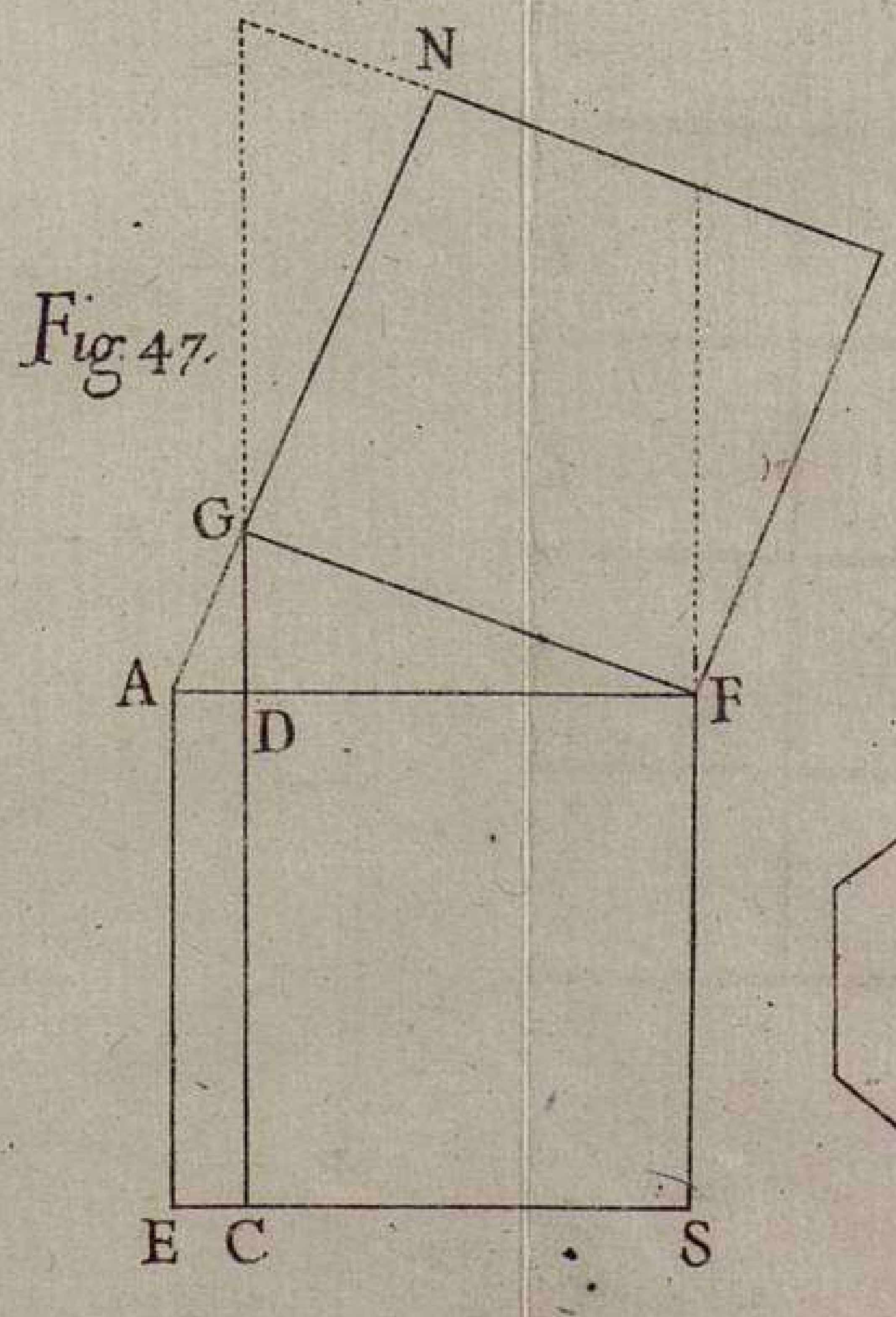


Fig. 47.

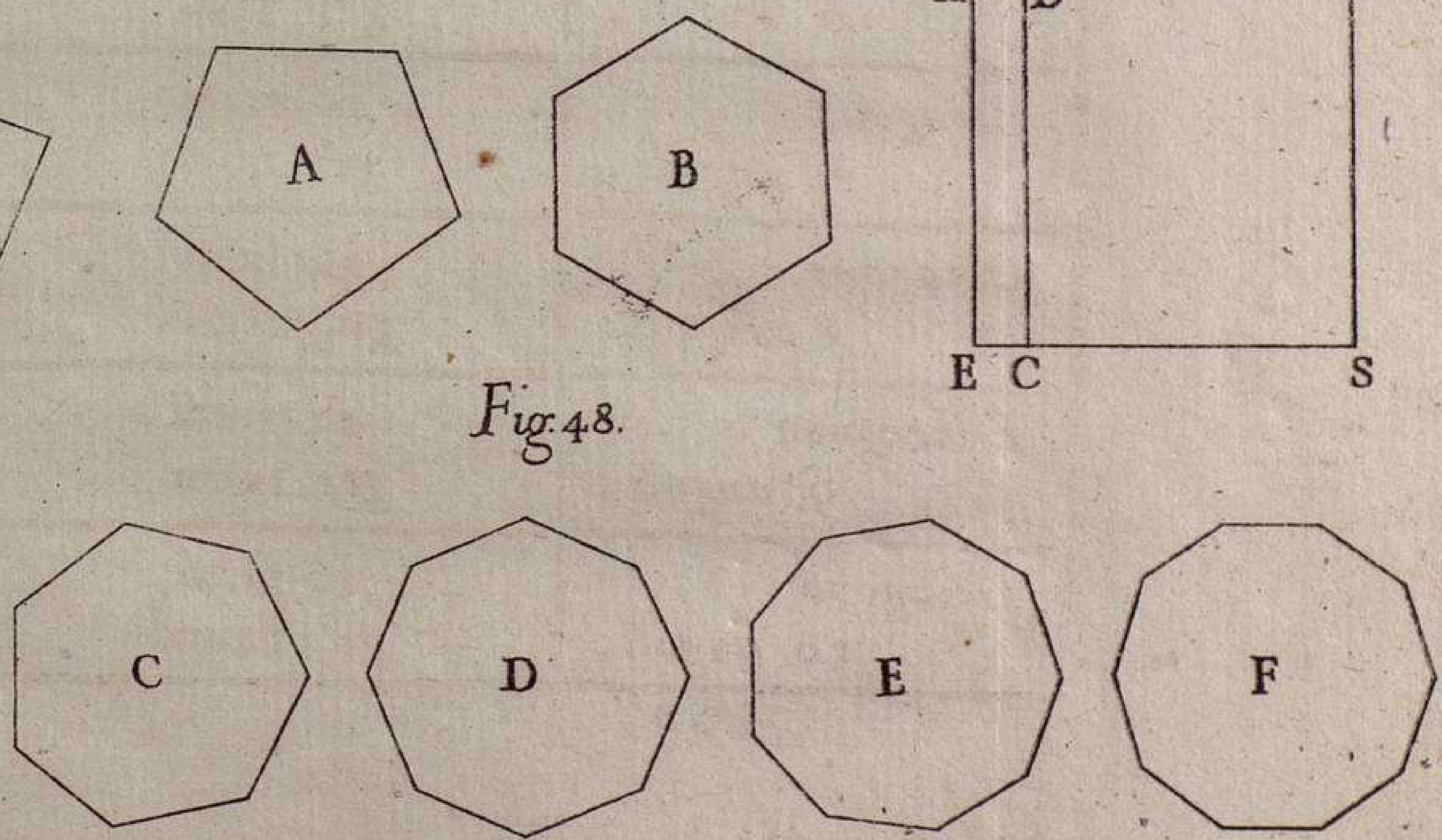


Fig. 48.

LIBRO IV.

Del circolo.

71 UNa retta linea, che tocchi un circolo ſenza entrarci dentro nè dall' una, nè dall' altra parte, come in A (*Fig.* 51), chiamaſi *tangente* di quel circolo. Il toccamento, come è manifeſto, non ſi fa, che in un punto, e la tangente laſcia ſubito il circolo di quà, e di là dal contatto.

73 Quando due circoli ſi toccano o al di dentro, come in B (*Fig.* 52), o al di fuori, come in C, ſenza tagliarſi, diconſi *tangenti*. Anche queſta ſorta di contatto non ſi fa, che in un ſolo punto, e i circoli ſi ſcoſtano immediatamente fra loro. Due circoli, che ſi tocchino, non poſſono avere lo ſteſſo centro, e la retta, che paſſa per li loro centri, paſſa eziandio per lo punto del contatto. Parimente due circoli, che ſi taglino, non poſſono avere lo ſteſſo centro, nè poſſono tagliarſi, che in due punti.

74 Una retta tagliando un circolo in due punti, lo dividerà in due parti; le quali, quando la retta non ſia un diametro, ſaranno diſuguali, e chiamanſi *ſegmenti*, de' quali uno ſarà maggiore del ſemicircolo, come A (*Fig.* 53), e l' altro minore, come B. La retta C D, che forma queſti ſegmenti, e ne è baſe, diceſi *corda*, o *ſotteſa* d' amendue gli archi, che eſſa ſepara.

Proprietà delle corde, o ſotteſe.

75 QUalſivoglia ſotteſa, come D E (*Fig.* 54) vien diviſa per metà dalla perpendicolare F G tirata dal centro F dal circolo ſopra di eſſa. Poichè ſupponendoſi retti i due angoli in G, ed eſſendo per altro eguali gli angoli F D E, F E D, a cagione della retta F D, F E eguali (articolo 45), avremo ne' due triangoli F D G, F E G, che hanno inoltre il lato comune F G, quanto baſta (articolo 52) per conchiudere eguali i loro lati D G, G E. E all' incontro è facile il moſtrare, che ſe una retta, che venga dal centro, taglierà per mezzo la corda di un

arco, la taglierà ad angoli retti, e se una retta taglierà una corda ad angoli retti, e in parti eguali ella passerà per lo centro.

76 Anzi perchè ne' suddetti due triangoli F G E, D F G saranno anche eguali gli angoli D F G, E F G (articolo 49), prolungata la retta F G in H fino alla periferia del circolo, saranno per necessità eguali gli archi D H, E H (articolo 13). E tirate le rette H E, H D, i triangoli D F H, E F H avranno due lati eguali coll' angolo compreso eguale; onde le basi H E, H D saranno eguali; e perciò ad archi eguali di un medesimo circolo corrispondono corde eguali, e all' incontro a corde eguali facilmente si vede, che converranno archi eguali &c.

77 Niuna corda può mai esser eguale al diametro del circolo, ma sempre ne è minore, essendo chiaro, che la corda, verbigrazia D E è minore (artic. 43) dei due lati D F, F E, che presi insieme costituiscono la lunghezza d' un diametro.

78 Se dal centro A (*Fig.* 55) preso sulla circonferenza d' un circolo A B D, sarà descritto un altro circolo, che tagli il primo in B, D, e si tirerà la retta A B, che sarà la sottesa di due archi, A D B maggiore, ed A C B minore del semicircolo; è manifesto, che qualunque altra corda, come A C, che convenga all' arco A C minore di A C B resterà tutta dentro del circolo, che passa per B D, e perciò sarà minore di A B. Dunque generalmente quando si tratta d' archi minori del semicircolo, al diminuirsi l' arco si diminuisce la corda, e al contrario al diminuirsi la corda, si diminuisce l' arco. Ma quando si tratta d' archi maggiori del semicircolo all' accrescersi l' arco, si diminuisce la corda &c. Così pure è manifesto, che o sia l' arco maggiore, o minore del semicircolo, crescendo l' arco, cresce il segmento del circolo; e o sia il segmento maggiore, o minore del semicircolo, al crescere del segmento, cresce l' arco &c.

79 Se in un circolo saranno due corde eguali (*Fig.* 56) A B, C D, tirate le perpendicolari sopra di esse E H, E I del centro E, e compiti i triangoli C E D, B E A, le due H B, I D, saranno (artic. 75) metà di due linee eguali; e perciò eguali tra loro; ed essendo per altro gli angoli B H E, D I E retti, cioè eguali fra loro, e li semidiametri E B, E D eguali, e finalmente gli angoli I E D, B E H dell' istessa specie, cioè acuti,

(arti-

(articolo 39) necessariamente (per l'artic. 52) saranno eguali i lati EH, EI, cioè la distanza di esse corde dal centro del circolo. All' incontro se le distanze EH, EI fossero eguali, si proverebbero nel medesimo modo eguali le mezze corde HB, ID, e per conseguenza le rette BA, DC.

80 Se due corde GF, IK (*Fig.* 57) d' un medesimo circolo, saranno parallele fra loro, è chiaro, che la distanza dal centro della corda IK, che conviene al minor arco IK, cioè la retta CM, è maggiore della retta CL, che è la distanza dal centro della corda GF, che conviene al maggior arco GF. Ma posto, che gli archi IK, GF siano minori del semicircolo, la corda IK, che conviene al minor arco, e minore della GF, che conviene al maggior arco (articolo 78): dunque la distanza dal centro della corda minore è maggiore della distanza dal centro della corda maggiore. E perchè corde eguali hanno distanze eguali dal centro (articolo 79), ancorchè le corde non fossero parallele, sempre la minore, sarà la più distante dal centro. Così pure all' incontro, se la distanza CM si supporrà maggiore di CL, la corda IK si mostrerà minore di GF, o siano le corde parallele, o non lo siano.

Delle tangenti del circolo.

81 SE nell' estremità B (*Fig.* 58) di qualunque semidiametro CB, si tirerà la retta AB, perpendicolare al medesimo semidiametro, questa retta toccherà il circolo nel punto B. Imperocchè tirata dal centro qualsivoglia retta CE, che incontri AB in E, nel triangolo CEB l' ipotenusa CE sarà maggiore del semidiametro del circolo CB (articolo 47); e per conseguenza il punto E sarà fuori del circolo; e il medesimo si mostrerà di tutti li punti della retta AB, fuorchè del punto B. Dunque (articolo 42) questa retta tocca il circolo in B.

82 All' incontro se AB tocca il circolo in B, tirato il semidiametro CB, l' angolo CBA sarà retto; altrimente si potrebbe dal punto C tirar sopra AB una perpendicolare CE, diversa da CB, e nel triangolo CEB il perpendicolo CE, (che si suppone maggiore del semidiametro CB, per essere il

punto E fuori del circolo) sarebbe maggiore dell' ipotenusa C B; il che è impossibile (articolo 47).

83 Fra la tangente del circolo F G (*Fig.* 59), e la periferia F H, non è possibile tirare una retta linea, che passi per lo punto del contatto F, ma tutte le linee, che si tireranno per questo punto, fuori che la tangente F G, entreranno necessariamente dentro il circolo. Sia, a cagione d' esempio, la linea F K; se si pretende, che questa non entri dentro del circolo, ella lo toccherà in F (articolo 72), e perciò tirato il semidiametro L F, l' angolo L F K, sarà retto (articolo 82); ma anche l' angolo L F G è retto; dunque il tutto L F G è uguale alla parte L F K, il che è impossibile.

84 Due tangenti (*Fig.* 60) D B, D C dello stesso circolo, tirate da un medesimo punto D, saranno eguali tra loro. Imperocchè, tirati i semidiametri A B, A C, e la corda B C, poichè gli angoli A B D, A C D sono retti (articolo 82), e gli angoli A B C, A C B eguali (articolo 44), sottraendo questi da quelli, rimarranno D B C, D C B eguali, e per conseguenza le rette D B, D C saranno eguali (articolo 45).

Delle massime, e delle minime rette nel circolo.

85 PReso dentro un circolo qualsivoglia punto A (*Fig.* 61): di tutte le rette, che da questo punto possono tirarsi fino alla periferia del circolo, la massima è A B, che passa per lo centro del circolo C, e la minima è A D, che è in diritto della massima A B. Imperocchè tirata dal punto A qualsivoglia retta fino alla periferia, come A E, e congiunta E C, i due lati C A, A E saranno maggiori di C E (articolo 43), cioè di C D. Se dunque dalla somma di C A, A E si leverà C A, e da C D si leverà la stessa C A, rimarrà A E maggiore di A D, e perciò A D è la minima. Parimente C A, con C E, è maggiore di A E (articolo 43); ma C E è uguale a C B; dunque anche C A, con C B, cioè A B, è maggiore di A E; e perciò A B è la massima.

86 Preso fuori d' un circolo qualsivoglia punto D (*Fig.* 62): di tutte le rette, che cadono da questo punto nel convesso della periferia, la minima è D F, che, prodotta, passe-

rebbe

rebbe per lo centro C. Imperocchè tirata al convesso suddetto qualsivoglia altra retta DG, e congiunta CG, è evidente, che DC è minore di DG con GC; dunque sottraendo da un canto, e dall' altro le rette eguali CF, GC, resterà DF minore di DG. Ma di tutte quelle, che dal punto D cadano nel concavo della periferia, la massima è DH, che passa per lo centro C. Perocchè tirando a questo concavo qualsisia altra retta DK, e congiunta CK, è evidente, che le due DC, CK, o quel, che è lo stesso, DC, CH, o sia la sola DH, sarà maggiore di DK.

Degli angoli al centro, e alla periferia.

87 SE nel centro A (*Fig.* 63) d' un circolo si farà un angolo BAC, che prenda un arco BEC, e in qualsivoglia punto del rimanente della periferia, come in D, si farà un altro angolo BDC, che prenda l' istesso arco BEC, tanto l' angolo BAC, quanto il BDC si diranno *insistere all' arco* BEC; e tirata la corda BC, l' angolo BDC, si dirà nel *segmento* BDC.

88 Se un angolo fatto al centro, e un altro alla periferia insisteranno al medesimo arco, quello che sarà al centro, sarà sempre il doppio di quello alla periferia. Perocchè primieramente se una delle linee, che comprendono l' angolo al centro, sarà ella medesima una di quelle, che comprendono l' angolo alla periferia, come nella Figura 64, allora è manifesto, che l' angolo *a* esterno, essendo eguale ai due interni *c*, *b* (articolo 28), che sono eguali fra loro (articolo 44), sarà doppio dell' angolo *b*. 2. Se niuna delle linee, che fanno l' angolo al centro coincide con quelle, che lo fanno alla periferia, nè eziandio taglia queste linee, come nella figura 65; allora tirata dall' angolo, che è alla periferia, una retta per lo centro del circolo (che è la retta punteggiata), l' angolo *a* sarà doppio di *b*, come già si è mostrato nel primo caso, e per la medesima ragione *d* sarà doppio di *i*; dunque amendue, *a*, *d*, che presi insieme fanno l' angolo al centro, sono doppj di *b*, *i*, che presi insieme fanno l' angolo alla periferia. 3. Se una delle rette, che fanno l' angolo al centro, ne

ne taglia una di quelle, che lo fanno alla periferia, come nella figura *66*, allora tirata, come sopra, la linea punteggiata per li punti de' due angoli, l' angolo *a* sarà doppio di *c*, come nel caso primo, e per la medesima ragione l' angolo intiero, che risulta da' due *a*, *b*, sarà doppio dell' angolo, che risulta da' due *c*, *d*. Dunque il residuo *b*, sarà doppio del residuo *d*.

89 Da ciò segue, che tutti gli angoli alla periferia, i quali insistono ad un medesimo arco, cioè a dire tutti gli angoli, che sono nell' istesso segmento, sono eguali tra loro, come (*Fig. 67*) B, C, D &c.; giacchè tutti sono la metà dell' angolo al centro E A F. E per fare, che un angolo alla periferia sia eguale ad un angolo al centro del medesimo circolo, converrà, che quello alla periferia insista ad arco doppio di quello, a cui insiste l' angolo al centro.

90 Poichè dunque tutti gli angoli nel medesimo segmento sono uguali, ciascun segmento di circolo è capace di un angolo di una determinata misura, e non maggiore, nè minore; e poichè l' angolo nel segmento è metà dell' angolo al centro, che insiste a quell' arco, che manca al segmento per compire l' intero circolo; quindi è, che sottraendo il numero de' gradi, minuti &c., che contiene un segmento, da gradi 360, e prendendo la metà del residuo, si avrà il numero de' gradi, e minuti &c., che misurano l' angolo, di cui è capace quel segmento. E al contrario dato il numero de' gradi, minuti &c. d' un angolo fatto in un segmento, se il doppio di questo numero si leverà da gradi 360, resterà il numero de' gradi, minuti &c. del segmento, che capisce quell' angolo.

91 Tutt' i segmenti, che capiscono angoli eguali, ancorchè appartengano a' circoli diversi, e diseguali, si chiamano *simili* fra loro. Ed è manifesto, che i segmenti simili contengono un numero eguale di gradi, e minuti &c., raccogliendosi ciò facilmente dall' articolo 90.

92 E' anco evidente, che quando il segmento, in cui è un angolo, sia un semicircolo, come A C B (*Fig. 68*), quell' angolo sarà retto; quando sia minore d' un semicircolo, sarà ottuso, come F G H (*Fig. 69*); e quando maggiore d' un semicircolo, sarà acuto, come L M N (*Fig. 70*). Imperocchè, fatto

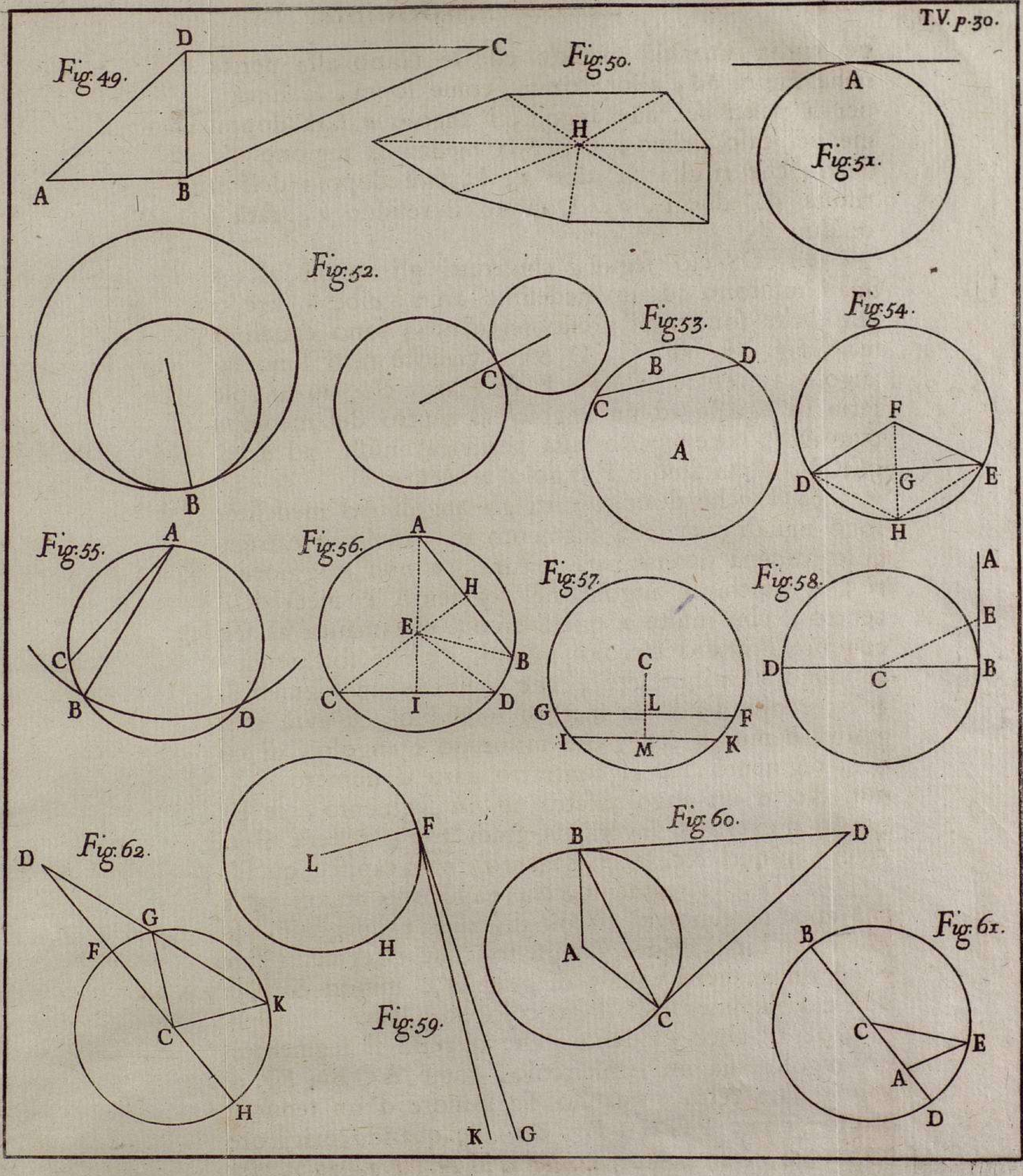


Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.

fatto ciò, che le figure dimostrano nel primo caso gli angoli A C D, D C B saranno (articolo 88) metà dei due adjacenti A E D, D E B, che sono eguali a' due retti; e però tutto A C B sarà eguale a un retto. Nel secondo caso per essere F K H maggiore nel semicircolo, saranno i due F I K, K I H maggiori di 180 gradi, e in conseguenza i due F G I, I G H, metà di essi, cioè tutto l' angolo F G H, sarà più di 90 gradi, cioè ottuso. E finalmente nel terzo caso, essendo L O N minore di 180 gradi, e perciò l' angolo L P N minore anch' esso di 180, la metà di esso L M N sarà minore di 90, cioè acuto.

93 Se sopra una medesima corda C D (*Fig.* 71) si faranno due angoli, uno nel segmento minore C A D, un altro nel maggiore C B D, è chiaro, che valendo ciascuno di essi la metà dell' arco, a cui insiste, tutti e due insieme valeranno la metà della circonferenza, cioè 180 gradi, e perciò saranno eguali a' due retti. Perciò quand' anco non vi fosse la corda C D, ogni volta, che si darà un quadrilatero A C B D, di cui tutti e quattro gli angoli sieno alla periferia d' un medesimo circolo, i due opposti fra loro, come A, e B, presi insieme sempre valeranno due retti.

Degli angoli ne' segmenti alterni del circolo.

94 QUando una retta F E G (*Fig.* 72) tocca un circolo, e per lo punto del contatto E passa un' altra retta E H, che taglia il circolo, dividendolo in due segmenti E I H, E L H, ciascuno di questi segmenti, si chiama *alterno*, rispetto a quell' angolo, che si fa dalla tangente colla detta retta dalla parte opposta a quella, in cui è quel segmento; e così il segmento E I H, dicesi alterno, rispetto all' angolo H E F, e il segmento E L H, rispetto all' angolo H E G. Ora noi mostreremo, che ciascuno de' due angoli H E G, H E F è eguale all' angolo, di cui è capace il suo segmento alterno. Imperocchè tirata per E alla tangente F G la perpendicolare L E, la quale passerà necessariamente per lo centro del circolo (artic. 82), e congiunta L H nel triangolo L H E, l' angolo L H E, per essere nel semicircolo, sarà retto (articolo

colo 92). Dunque i due E L H, L E H valeranno un altro retto; giacchè tutti e tre vagliono due retti. Ma anche i due L E H, H E G fanno un retto L E G; dunque è forza, che E L H sia eguale ad H E G. E però l' angolo H E G è uguale all' angolo, di cui è capace il suo segmento alterno E L H. Perchè poscia gli angoli, de' quali sono capaci i due segmenti E L H, E I H presi insieme vagliono due retti (articolo 93), e nè più, nè meno i due angoli adjacenti H E G, H E F vagliono due retti, e già l' angolo H E G si è mostrato eguale all' angolo del suo alterno segmento E L H, è forza, che anco l' angolo H E F sia eguale a quello del suo alterno segmento E I H.

LIBRO V.

Problemi elementari.

95 LE proposizioni matematiche, nelle quali si espone precisamente qualche proprietà, o affezione delle quantità, si chiamano *teoremi*, come questo: In ogni triangolo rettilineo due lati sono maggiori del terzo; o pur questo: fra la tangente del circolo, e la periferia non è possibile tirare una retta linea, ed altri simili; e tali sono tutte quelle proposizioni, che finora abbiamo spiegate.

96 Le altre poi, nelle quali s' insegna di determinare la misura, o la posizione di qualsivoglia quantità, vengono chiamati *problemi*, come questo: sopra una data retta linea fare un quadrato; o questo: divider un angolo in due parti eguali. E di queste proposizioni siamo per spiegarne alcune nel presente libro, cioè le più importanti, ed insieme le più facili; le quali non dipendono da altri teoremi, che da quelli, che si sono spiegati ne' quattro libri antecedenti.

97 Ma prima dimanderemo, come cosa assai facile per se stessa, e che non ha bisogno d' alcuno artificio geometrico di poter tirare una retta linea da qualsivoglia punto dato a qualsivoglia altro punto dato.

98 Di più dato un punto per centro, ed una retta linea per semidiametro, di poter descrivere da quel centro un circolo, che abbia il semidiametro eguale alla data retta linea.

99 E dato un punto di poter tirare per esso verso qualunque parte una linea di lunghezza eguale ad una data.

100 E finalmente data una linea di poterla prolungare ad arbitrio, finchè sia eguale ad un' altra; oppure di poterne levar una parte eguale ad un' altra data minore di essa. Le quali cose supposte sciorremo facilmente i seguenti problemi.

Problemi appartenenti alla divisione delle linee, e degli angoli.

101 DIvidere una retta data in due parti eguali. Sia la retta da dividere A B (*Fig.* 73). Dal punto A, come centro, col semidiametro A B, si descriva il circolo C B D; quindi da B, come centro, col medesimo semidiametro si descriva un altro circolo C A D, i quali due circoli si tagliano in C, D, e tirisi la retta C D, che tagli A B in E. Dico, che A B resterà divisa in parti eguali nel punto E. Imperocchè tirate le rette A C, B C, A D, B D, saranno queste tutte eguali fra loro, per essere tutte semidiametri dell' uno, e dell' altro circolo, ed eguali al semidiametro A B. Dunque ne' due triangoli C A D, C B D tutt' i lati sono eguali, ed in conseguenza anche l' angolo A C D eguale all' angolo B C D (articolo 51). Ora nei triangoli A C E, B C E, essendo eguali i lati A C, C B, ed E C comune, e finalmente essendosi mostrati gli angoli A C E, B C E eguali, le basi A E, B E (articolo 49) saranno per necessità eguali; onde la retta A B sarà divisa in parti eguali nel punto E.

102 Dividere un angolo rettilineo dato in due parti eguali. Sia l' angolo da dividere G F H (*Fig.* 74). Si descriva dal punto F, come centro, con qualsivoglia lunghezza di semidiametro un arco di circolo I H, che tagli le rette, che comprendono il dato angolo nei punti I, H; e tirata la retta H I, questa si divida a mezzo in K (articolo 101), e congiungasi K F. Nei due triangoli F K I, F K H, essendo per la costruzione eguali i tre lati a' tre lati, gli angoli I F K, H F K (articolo 51) saranno eguali; e perciò l' angolo G F H verrà ad essere diviso per metà dalla retta K F, il che era da fare.

Problemi, che riguardano le perpendicolari, le parallele, e gli angoli eguali.

103 PEr un punto dato in una retta tirata ad essa una perpendicolare. Sia la retta A B (*Fig.* 75), e il punto in essa C, per cui convenga tirare una perpendicolare alla retta A

ta A B. Si prendano di quà, e di là dal punto C due linee eguali fra loro, e di qualsivoglia lunghezza, amendue sopra la retta A B, prolungata ove faccia il bisogno, e sieno B C, C D. Quindi col centro B, e col semidiametro B D, si descriva il circolo D E; e col centro D, e col semidiametro D B si segni parimente il circolo B E. Sia il punto E uno di quelli ne' quali si tagliano i detti due circoli, e si tiri la retta E C. Dico che questa è la perpendicolare cercata. Ciò è manifesto; perocchè i triangoli E C B, E C D hanno per la costituzione, e per l'articolo 101, i tre lati eguali, e perciò gli angoli E C B, E C D (articolo 51) saranno eguali; onde, essendo essi aggiacenti, saranno retti (artic. 16). Altro modo. Sia il punto dato A (*Fig.* 76) nella retta A C. Prendasi fuori di essi un punto qualunque D, e congiunta D A, si descriva dal centro D per A il circolo A C E, che tagli A C in C, e congiunta C D, si prolunghi fino al circolo in E, e congiungasi A E. L'angolo C A E sarà retto per essere nel semicircolo, e però E A sarà perpendicolare ad A C.

104 Da un punto dato fuori di una retta tirata sopra di essa la perpendicolare. Sia la data retta A B (*Fig.* 77), e fuori di essa il punto H, da cui convenga tirare una perpendicolare sopra A B. Dal centro H si descriva un circolo A F I di qualunque grandezza siasi, purchè tagli la retta A B in due punti, il qual fine dovrà questa retta, ove faccia bisogno prolungarsi. Siano i punti delle due sezioni A, I; dividasi A I in parti eguali nel punto K (articolo 101), e congiungasi K H. Poichè dunque K H passa per lo centro del circolo A F I, e divide la corda A I in parti eguali, la dividerà ad angoli retti (articolo 75), e perciò sarà perpendicolare sopra la data retta B A.

105 Dato in una retta un punto tirar per esso una linea, che faccia con quella un angolo eguale a un dato. Sia data la retta A B (*Fig.* 78, e 79), ed in essa il punto C. Sia anche dato l'angolo D, e convenga tirare per lo punto C una retta, che faccia con A B un angolo eguale all'angolo D. Dal punto D, come centro descrivasi un arco di circolo, la cui porzione E F resti compresa fra le linee, che comprendono l'angolo D, e tirisi la retta E F. Quindi da C, come centro coll' intervallo C H, eguale a D E, descrivasi l'arco di circolo H K G, e da H, come centro, con un semidiametro eguale ad E F de-

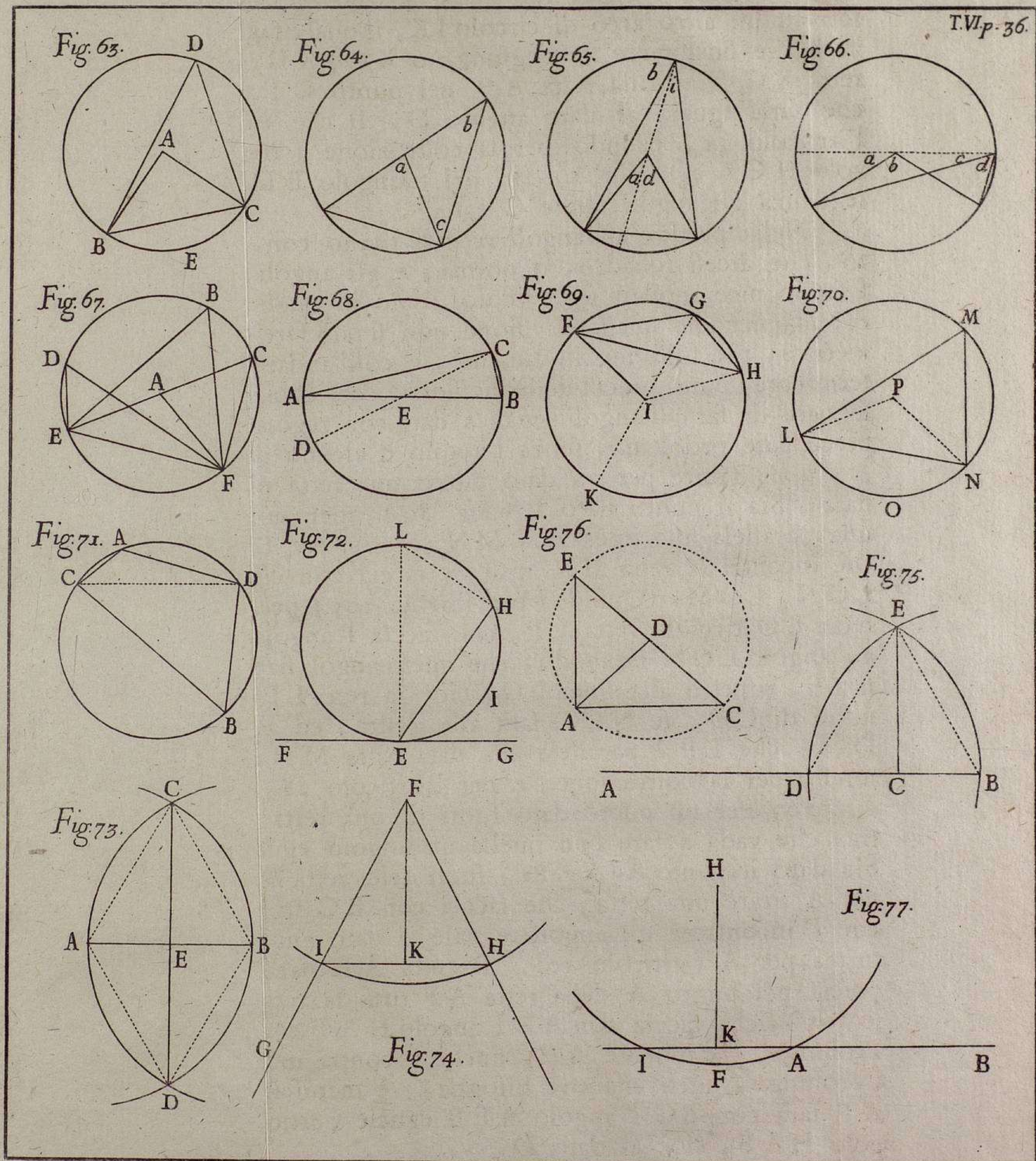
ſcrivaſi un altro arco di circolo I K, il quale tagli l'arco H K G in K, e finalmente ſi congiungano K C, K H. Dico, che la retta K C farà colla retta A B nel punto C l'angolo K C H, che ſarà eguale al dato angolo D. Il che è manifeſto per l'articolo 51, eſſendo per la coſtruzione i tre lati del triangolo H C K eguali a' tre lati del triangolo E D F, e per conſeguenza gli angoli D, e C eguali.

Nella pratica gli angoli retti ſi tirano con quell' iſtrumento, che diceſi ſquadro, o norma, e gli angoli d'altra miſura, ſi fanno mediante un ſemicircolo diviſo in gradi, e parti di gradi; ma ſiccome queſta diviſione non ſi può fare con regola geometrica, ma ſolo mecanicamente, e coll' andare tentando il determinare i punti preciſi delle diviſioni, così abbiamo dovuto inſegnare di far gli angoli eguali a' dati con regola geometrica nel precedente problema, ſenza biſogno d' alcuno iſtrumento.

106 Tirare per un dato punto una retta parallela ad una data. Sia il punto dato L (*Fig.* 80), per cui debbaſi tirare una parallela alla linea data M N. Si tiri per L la retta L O, che incontri la retta M N in O, e faccia con eſſa i due angoli L O N, L O M. Quindi (per l'artic. 105) pel punto L della retta L O tiriſi la retta L P, che faccia l'angolo O L P eguale all' angolo L O N in modo, che queſti angoli ſiano alternamente ſituati, riſpetto alla linea L O, cioè la retta L P, ſi tiri alla ſiniſtra di L O, ſe N O L ſarà alla deſtra, ed al contrario &c. Dico, che L P è parallela alla data retta M N. Il che è manifeſto per la coſtruzione, e per l'articolo 28.

107 Per un punto dato fuori di una retta tirarne un' altra, che vada a fare con quella un angolo eguale a un dato. Sia dato il punto A (*Fig.* 81) fuori della retta B C, e convenga per A tirare una retta, che faccia con B C in quel punto, in cui l' incontrerà un angolo eguale al dato angolo D. Si tiri prima per A (articolo 106) la retta A F parallela a B C, e poſcia pel punto A della retta A F tiriſi la retta A H (articolo 105), che faccia con A F l'angolo H A F eguale al dato D. Prolunghiſi finalmente A H, finchè incontri in E la retta B C (prolungata anch' eſſa ove biſogna); è manifeſto, che la retta A E farà con B C l'angolo A E B eguale (articolo 26) all' angolo H A F, cioè al dato D.

Pro-


T.VI. p. 36.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 76.
Fig. 75.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 77.

Problemi, che appartengono a' triangoli.

108 SOpra una data retta fare un triangolo equilatero. Sia la retta data (*Fig.* 82) A B. Deſcrivaſi dal centro A col ſemidiametro A B il circolo B C, e dal centro B col medeſimo ſemidiametro A B il circolo A C, i quali circoli ſi taglino in C; e ſi congiungano A C, B C. E' manifeſto, che il triangolo A C B ſarà quello, che ſi cerca.

109 Date tre rette linee fare un triangolo, che abbia ciaſcun lato eguale a ciaſcuna di eſſe. Sieno le tre linee (*Fig.* 83) A B, C D, E F, e convenga fare un triangolo, i cui lati ſieno eguali a queſte linee. Dall' eſtremità B dell' una di eſſe deſcrivaſi un circolo con ſemidiametro eguale alla retta C D; e dall' altra eſtremità A della medeſima un altro circolo con intervallo eguale alla terza E F. Si taglino queſti circoli in G, e ſi congiungano B G, A G. E' manifeſto, che il triangolo A G B ſarà quello, che ſi dimanda. Avvertaſi, che quando i circoli così deſcritti non ſi tagliaſſero in alcun punto, il problema non potrebbe ſciorſi; e ciò accaderebbe quando le tre linee date foſſero tali, che due qualunque di eſſe non foſſero maggiori della terza; perocchè in tal caſo ſappiamo non poterſi da tali linee fare un triangolo in virtù di quello, che ſi dimoſtrò di ſopra coll' articolo 43. Tal caſo ſi vede nelle tre rette (*Fig.* 84) *a b*, *c d*, *e f*, fra le quali le due *c d*, *e f*, preſe inſieme, non ſono maggiori della terza *a b*.

110 Sopra una data retta linea fare un triangolo equiangolo a un dato. Sia la retta D E (*Fig.* 85), ſopra cui convenga fare un triangolo equiangolo al dato triangolo A B C. Si tiri per uno de' due eſtremi della data retta, come per D, la retta F D, che faccia con D E l' angolo F D E eguale a quello, che ſi vuole de' tre angoli del triangolo A B C, come all' angolo B. Parimente per l' altro eſtremo E ſi tiri E F, che colla retta E D faccia l' angolo F E D eguale a qualſivoglia altro degli angoli del dato triangolo, come al C; e queſte due linee D F, E F ſi incontrino nel punto F. E' dunque manifeſto, ch' eſſendo per la coſtruzione i due angoli D, ed E eguali a' due B, C, anco il terzo angolo F del triangolo F E D

ſarà

sarà eguale al terzo A del triangolo A B C (articolo 41); onde i triangoli saranno equiangoli.

Problemi, che appartengono a' parallelogrammi, e all' egualità delle figure.

111 SOpra una data retta linea descrivere un quadrato. Sia la data retta A B (*Fig.* 86). Si tirino le due perpendicolari A C, B D (articolo 193), e si faccino eguali alla retta A B, e congiungasi C D. Poichè dunque le rette A C, B D sono eguali, e parallele per la construzione, sarà A D un parallelogrammo (articolo 59), il quale avendo i lati opposti A B, C D eguali (articolo 58), ed essendo i due lati A C, B D eguali ad A B per la construzione, saranno tutti e quattro i detti lati eguali, e tutti gli angoli saranno retti; poichè lo sono i due A, B (articolo 55), dunque A D sarà un quadrato (articolo 55).

112 Dato un triangolo fare un parallelogrammo eguale ad esso, e che abbia un angolo uguale a un dato angolo. Sia dato il triangolo A B C (*Fig.* 87), a cui convenghi fare un parallelogrammo eguale, il quale abbia inoltre uno de' suoi angoli eguali all' angolo dato H. Dividasi a mezzo uno de' lati del triangolo, come A B, nel punto D, e congiunta D C si tiri la F D, la quale faccia con D B l' angolo F D B eguale al dato angolo H. Quindi tirata per l' angolo C, opposto al lato A B, la retta C G parallela a questo lato, e che tagli D F in F, si compisca il parallelogrammo F D B G. E' manifesto, che questo parallelogrammo per essere sopra la istessa base B D, e fra le stesse parallele D B, C G col triangolo C D B, sarà doppio di questo triangolo, perciocchè egli sarà eguale al parallelogrammo K D, che si farebbe sulla stessa base, e tra le medesime parallele (artic. 64), il quale (per l' artic. 58) sarebbe doppio del detto triangolo C D B. Ma anco il triangolo A C B è doppio del triangolo medesimo C D B, attesochè le basi A D, D B de' due triangoli A D C, D C B sono eguali, e la loro altezza è la medesima (artic. 66): dunque il parallelogrammo F D B G, e il triangolo A C B sono eguali, e l' angolo del parallelogrammo F D B è eguale al dato angolo H: il che era da fare.

113

113 All' incontro se si dovesse fare un triangolo eguale a un dato parallelogrammo, e che avesse un angolo eguale a un dato angolo, è manifesto, che dovrebbe prendersi per lo triangolo doppia base di quella del parallelogrammo, e fare il rimanente, come nel precedente articolo. E in fine se convenisse fare un triangolo eguale ad un altro triangolo, o un parallelogrammo eguale ad un altro parallelogrammo con un angolo eguale a un dato, dovrebbe prendersi l' istessa, o egual base, come è manifesto per gli articoli *64*, *65*, e *66*.

114 Fare un parallelogrammo eguale a un dato triangolo, o parallelogrammo, e che abbia un angolo eguale a un dato angolo, e di più abbia per uno de' suoi lati una data retta linea. Sia la retta linea OS (*Fig.* 88), sulla quale debba farsi un parallelogrammo, che sia eguale alla figura GKP posta fra le parallele KP, GM, o sia questa un triangolo, o un parallelogrammo, e che inoltre abbia uno de' suoi angoli eguale all' angolo T. Facciasi prima il parallelogrammo IM tra le parallele suddette, il quale sia eguale alla data figura, ed abbia l' angolo IPM eguale al dato angolo T, e ciò per gli articoli 112, e 113. Quindi prolunghisi la retta SO in R, finchè OR sia eguale alla base IP del parallelogrammo IM, e tirisi la retta CO, che con OR faccia l' angolo COR eguale all' angolo MPI (articolo 105), cioè all' angolo T. Prendasi poscia OC eguale a PM, altro lato del parallelogrammo IM, e per C tirisi BCQ parallela ad ROS, come pure per S tirisi QSL parallela a COF, e per R si tiri parimenti ARB parallela a queste due linee; e congiunta QO, si prolunghi, finchè incontri BRA in A, e finalmente per A si tiri AFL parallela ad ROS. Ciò fatto sarà AQ un parallelogrammo diviso in quattro parallelogrammi dalle due rette RS, FC, che passano per lo punto O della diagonale QOA, e per conseguenza i due complementi OL, OB saranno eguali fra loro (articolo 62). E perchè OB facilmente si conosce esser eguale per la costruzione al parallelogrammo IM, cioè alla data figura KGP, anco il parallelogrammo OL sarà eguale a questa figura, ed avrà per uno de' suoi lati la data retta OS, e di più l' angolo FOS (articolo 19) eguale all' angolo ROC, o all' angolo IPM, cioè al dato angolo T. Il che era da fare.

115

115 Sopra una data retta linea fare un parallelogrammo, che abbia un angolo eguale a un dato angolo, e che ſia eguale a una data figura rettilinea di qualſivoglia numero di lati. Da uno degli angoli della figura data ſi tirino a tutti gli altri angoli della medeſima delle linee rette, le quali divideranno la figura in tanti triangoli, che ſieno (*Fig.* 89) A, B, C, D, e più ſe ve ne foſſero. Sia ora data la retta E F, ſulla quale debba farſi il parallelogrammo eguale alla detta figura, che abbia un angolo eguale a un dato angolo. Tiriſi la retta E G, che faccia con F E nel punto E l'angolo F E G della data miſura (articolo 105), e ſopra di F E facciaſi (articolo 114) il parallelogrammo E H eguale ad uno de' ſuddetti triangoli; e che abbia per uno de' ſuoi angoli l'angolo F E G. Parimente ſopra la retta I H, che è il lato oppoſto ad E F, facciaſi nell' angolo H I G un altro parallelogrammo H L eguale ad un altro de' triangoli della figura, e coll' iſteſſe regole ſi proceda, finchè vi hanno in queſta de' triangoli. E' manifeſto, che la figura, la quale riſulterà finalmente come E F O P, ſarà un parallelogrammo, che avrà un angolo eguale al dato, avrà per uno de' ſuoi lati la data retta E F, e finalmente ſarà eguale alla figura data. Se in vece d'un parallelogrammo ſi voleſſe un triangolo eguale ad una data figura, e che aveſſe un angolo eguale a un dato, e finalmente aveſſe per uno de' ſuoi lati la data retta E F, ſi dovrebbe far prima ſopra queſta retta il parallelogrammo E O colle ſuddette condizioni, come ora ſi è moſtrato, e quindi prolungata E G in Q, finchè P Q foſſe eguale a E P, e tirata Q F, il triangolo E Q F ſarebbe quello, che ſoddisferebbe alla queſtione; come è manifeſto per le coſe dette all' articolo 112.

116 Data una figura rettilinea fare un quadrato eguale ad eſſa. Se la figura data non foſſe un rettangolo, ſi traſmuti prima in rettangolo, cioè facciaſi ſopra una retta di qualſivoglia lunghezza un parallelogrammo, che abbia un angolo retto, e ſia eguale alla data figura (articolo 115). Sia dunque il rettangolo A C (*Fig.* 90) dato, o fatto eguale alla figura data. Si prolunghi il lato A D, che ſuppongo eſſere il minore de' due aggiacenti, fino in F, talchè tutta A F ſia eguale al lato maggiore A E. Diviſa poſcia A F in due parti eguali

nel

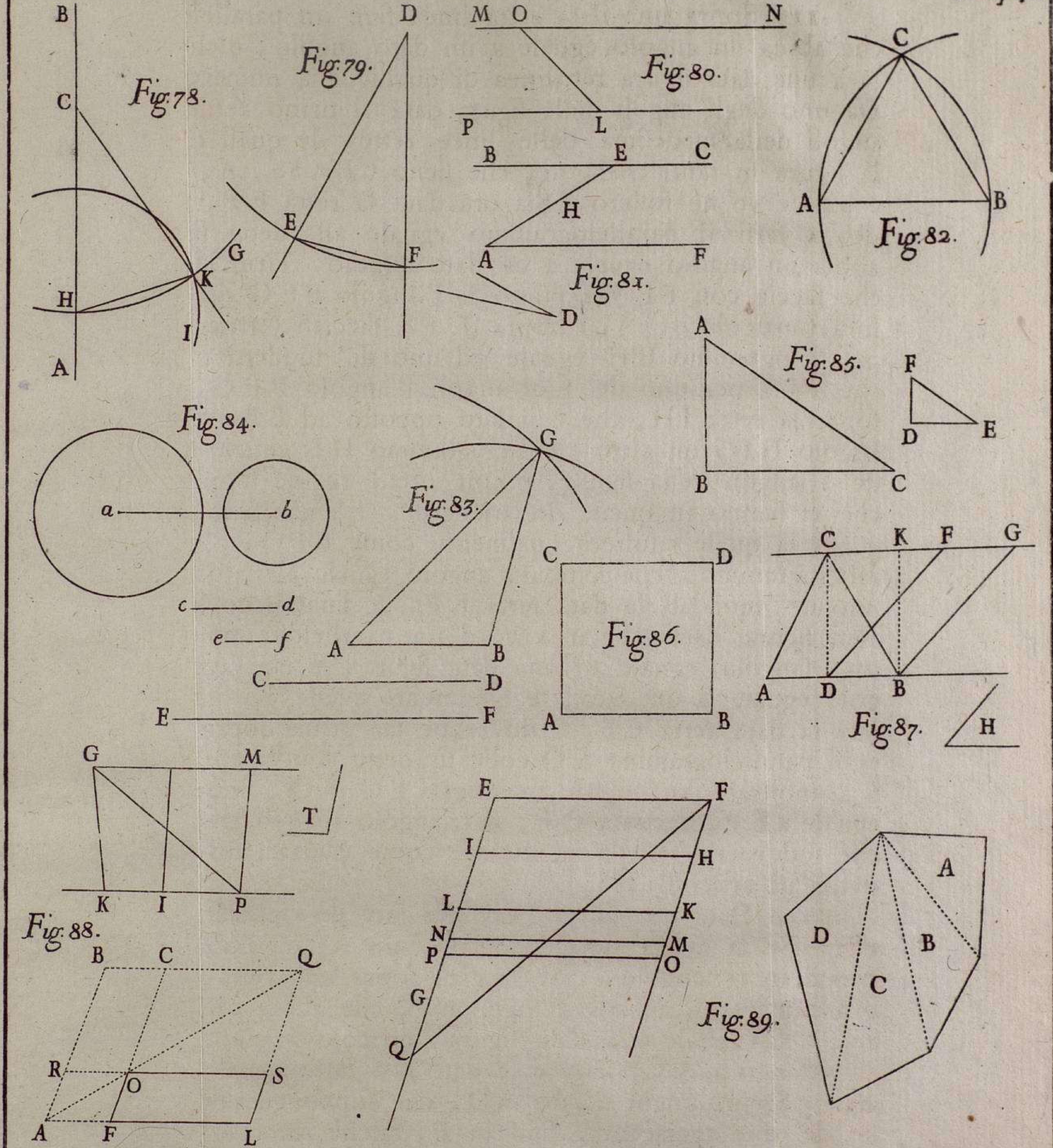


Fig. 78.
B
C
G
H
K
I
A
Fig. 79.
D
E
F
Fig. 80.
M O N
P L
B E C
H
A F
Fig. 81.
D
Fig. 82.
C
A B
Fig. 84.
a b
c d
e f
Fig. 83.
G
A B
C D
E F
Fig. 85.
A
B C
F
D E
Fig. 86.
C D
A B
Fig. 87.
C K F G
A D B
H
Fig. 88.
G M
T
K I P
B C Q
R O S
A F L
E F
I H
L K
N M
P O
G
Q
Fig. 89.
A
D
B
C

nel punto K, col centro K descrivasi un circolo col semidiametro KA, il qual circolo passerà per lo punto F, e prolunghisi CD, finchè incontri in G la periferia AGF. Tirata finalmente AG, dico, che se sopra questa retta, si farà il quadrato AP, questo sarà eguale al rettangolo AC. Imperocchè essendo AGF un semicircolo, se si tirerà FG, l'angolo FGA sarà retto (articolo 92), e perchè AF è eguale ad AE, compito il parallelogrammo EF, il quale si suppone aver l'angolo A retto, sarà EF il quadrato dell'ipotenusa AF del triangolo rettangolo AGF. Dunque poichè dall'angolo retto AGF è tirata la retta GC parallela al lato AE di questo quadrato, il rettangolo AC, ch'essa taglierà nel detto quadrato è uguale al quadrato AP fatto sopra il lato AG del triangolo rettangolo AGF (articolo 68). Si è dunque fatto il quadrato AP eguale al dato rettangolo AC, cioè alla data figura rettilinea, il che era da fare.

117 Dati due quadrati farne un altro eguale alla somma di ambedue. Il lato CD (*Fig.* 91) dell'uno de' due quadrati si prolunghi in F tanto, che DF sia eguale ad HI, lato dell'altro quadrato, e congiungasi EF. Se sopra questa retta EF si farà il quadrato, è manifesto (articolo 96), che egli sarà eguale alla somma de' due quadrati delle rette ED, DF, cioè delle rette ED, HI, che sono i due quadrati dati. Il che era da fare. Da ciò si vede, come si possa fare un quadrato doppio d'un altro. Come per far un quadrato doppio del quadrato EC (*Fig.* 92), si prolungherà CD in F, tantochè DF sia eguale a DC, cioè ad ED, e congiunta EF, è manifesto, che il quadrato di questa sarà eguale a' due quadrati di ED, e di DF, i quali essendo fra essi eguali, sarà il quadrato di EF doppio del quadrato di ED, cioè doppio del quadrato EC.

118 Dati tre, o più quadrati farne un altro eguale alla somma di essi. Facciasi prima (articolo 117) un quadrato FH (*Fig.* 93) eguale a' due de' dati A, B; quindi prolungando un lato HG del quadrato FH in D tanto, che DG sia eguale al lato del terzo quadrato C, congiungasi FD. E' manifesto, che il quadrato di FD sarà eguale a' due quadrati di GD, e di FG, cioè (per la costruzione) a' tre quadrati dati C, B, A. Nel medesimo modo si procederebbe, se i dati fossero più di tre.

119 Dati due quadrati farne un altro eguale alla differenza di quelli. Sieno i due quadrati (*Fig. 94*) K, M, e vogliasene un altro, che sia eguale alla loro differenza, cioè a dire a quello spazio, che resterebbe levando il quadrato M dal quadrato K, che suppongo essere il maggiore de' due. Sopra un lato del quadrato K descrivasi il semicircolo P T R (il che si fa dividendo a mezzo questo lato, e dal mezzo, come centro descrivendo un circolo, che abbia per raggio la metà del medesimo lato); quindi da uno de' due estremi del lato P R, come da R descrivasi un arco di circolo col semidiametro T R eguale al lato del quadrato M, il quale arco tagli il semicircolo P T R in T, e congiungasi T P. Dico che il quadrato, che si farà sopra la retta P T sarà quello, che si cerca. Imperocchè essendo l'angolo P T R nel semicircolo, sarà retto (articolo 92); onde il quadrato dell' ipotenusa K sarà eguale ai quadrati de' due lati P T, T R (articolo *69*); ma il quadrato di T R è per la construzione eguale al quadrato M; dunque il quadrato K è eguale alla somma del quadrato M col quadrato di P T, e perciò levando dal quadrato K il quadrato M, la differenza, che resta, sarà eguale al quadrato di P T; il che era da fare.

Problemi appartenenti al circolo.

120 DAto un arco di circolo trovarne il centro. Sia dato l'arco di circolo D C E (*Fig. 95*), di cui convenga trovar il centro. Si prendano sul dato arco tre punti ad arbitrio, come D, C, E, e congiungansi le rette D C, C E, ciascuna delle quali si divida per metà ne' punti F, I, e per essi si tirino ad elle le perpendicolari F K, I K, le quali concorrono in K. Dico, che il punto K è il centro del dato circolo. Imperocchè questo centro dee trovarsi certamente nella retta F K, la quale divide per metà, e ad angoli retti la corda D C; e per la stessa ragione dee trovarsi nella retta I K, che divide nell' istesso modo la corda C E (articolo 75). Dunque è forza, che il centro sia nel punto K, che è il solo punto comune ad ambedue le rette F K, I K.

121 Descriver un circolo, che passi per tre punti dati.

Sie-

Sieno nella medesima figura dati i tre punti E, C, D, per li quali debba farsi passare una circonferenza di circolo. Si congiungano CE, CD: di poi fatta la medesima costruzione dell' articolo antecedente, si incontrino le rette IK, FK nel punto K; e dal centro K si descriva un circolo, che passi per uno de' tre punti dati, come per C. Dico, che il medesimo circolo passerà ancora per gli altri due punti dati D, E. Imperocchè tirate le rette KC, KE vedesi facilmente per la construzione esservi ne' triangoli KCI, KEI un lato eguale, ed uno comune, e l'angolo compreso da questi lati in amendue i triangoli esser retti. Dunque (articolo 49) le basi KE, KC sono eguali, ed essendo K centro, e KC semidiametro del circolo, che passa per C, è manifesto, che il medesimo circolo passerà anco per E. Nel medesimo modo proverassi, che il detto circolo passa anco per lo terzo punto dato D.

122 Per un dato punto sulla periferia d'un circolo tirare a questo la tangente. Sia il punto dato B (*Fig.* 96); si trovi il centro del circolo (articolo 120), che sia A, e tirisi il semidiametro BA, su cui pel punto B si conduca la perpendicolare DBC (articolo 103). E' manifesto, che questa toccherà il circolo nel punto B per l'articolo 81.

123 Dato un punto fuori del circolo tirare ad esso una tangente. Sia dato il punto C (*Fig.* 97) fuori del circolo BD, il cui centro sia E. Congiungasi EC, e sopra di essa facciasi il semicircolo EDC, che tagli il circolo dato in D. Tirisi in semidiametro ED, e la retta CD. L'angolo dunque CDE sarà retto (articolo 92), e la retta CD toccherà il circolo BD in D (articolo 81); il che era da fare.

124 Divider un arco di circolo in due parti eguali. Dagli estremi A, B (*Fig.* 98) dell'arco da dividersi si tirino i semidiametri BC, AC, e dividasi per metà l'angolo BCA (articolo 102) per la retta DC, la quale tagli il circolo ne' punti D, E. E' manifesto, che se l'arco dato è minore del semicircolo, come ADB, la retta DC, che divide egualmente l'angolo ACB, divide eziandio egualmente in D l'arco ADB. Se poi è maggiore, come AEB, il prolungamento CE della suddetta retta dividerà quest' arco per metà in E; perchè essendo eguali gli angoli DCB, DCA, anco i loro aggiacenti

B C E, A F E ſaranno eguali [articolo 16], e perciò gli archi B E, A E ſaranno anch' eſſi eguali.

125 Dato un circolo tirare da un dato punto della periferia una retta, che ne tagli un ſegmento, che capiſca un angolo eguale a un dato. Sia il circolo A C B [*Fig.* 99], e il punto ſulla periferia B. Si tiri per B la tangente E B, e nel punto B di queſta tiriſi la retta A B, che faccia l' angolo E B A, eguale al dato, e tagli il circolo nel punto A. E' dunque manifeſto, che il ſegmento A C B, che è alterno riſpetto all' angolo E B A, ſarà capace di un angolo eguale all' angolo E B A (articolo 94), cioè uguale al dato: il che era da fare.

126 Data una retta linea fare ſopra di queſta un ſegmento di circolo, che capiſca un angolo eguale a un dato. Sia la data retta A B (*Fig.* 100). Per uno degli eſtremi di eſſa A ſi tiri la retta A C, che faccia l' angolo B A C eguale al dato; e ſopra la retta A C per lo punto A ſi alzi la perpendicolare A D. Poſcia per l' altro eſtremo B della data retta ſi tiri B E, che faccia l' angolo E B A eguale all' angolo D A B, che la detta perpendicolare comprende colla data retta A B. Sia il punto E quello, in cui s' incontrino le rette E B, D A. E poichè gli angoli E A B, E B A ſi ſono fatti eguali, ſaranno i lati E A, E B eguali; onde un circolo deſcritto col centro E, e col ſemidiametro A E paſſerà per lo punto B. Deſcrivaſi un tal circolo, e ſia A B F. Dico, che il ſegmento di queſto A F B, che è poſto alternativamente riſpetto all' angolo B A C, è quello, che ſi domanda. Imperocchè, eſſendo E A ſemidiametro del circolo, e l' angolo E A C retto, la retta A C toccherà il circolo in A. L' angolo dunque C A B ſarà eguale all' angolo, di cui è capace l' alterno ſegmento A F B (articolo 94). Ma il detto angolo C A B è eguale al dato per la conſtruzione; dunque il ſegmento A F B, fatto ſopra la data retta A B è capace d' un angolo eguale al dato. Il che era da fare. Queſto problema medeſimo può enunciarſi anche in altri termini, cioè: data una retta fare ſopra di eſſa un ſegmento di circolo ſimile a un dato ſegmento; giacchè ſegmenti ſimili ſi chiamano quelli, che ſono capaci d' angoli eguali, come ſi è detto all' articolo 91.

127 Dato un circolo deſcrivere un triangolo equiangolo

a un

a un dato, e che abbia ciascuno de' suoi angoli sulla periferia del circolo. Tirisi per qualsivoglia punto D (*Fig.* 101) della data periferia una tangente EDF; poscia per lo punto del contatto D si tiri la retta GD, che colla tangente faccia l'angolo EDG eguale ad uno degli angoli del triangolo dato, come al C. Parimente per D si tiri un' altra retta DH, che faccia colla tangente l'angolo HDF eguale ad un altro degli angoli del dato triangolo, come al B; e per li punti G, H, ne' quali le rette GD, HD tagliano il circolo, si tiri GH. Poichè dunque all' angolo EDG è eguale quello, che è nell' alterno segmento GHD (articolo 94), e parimente all' angolo FDG quello, che è nel segmento DGH, e ciascuno de' due EDG, HDF è eguale per la costruzione a ciascuno de' due C, B, il triangolo GDH avrà due angoli eguali a' due angoli del triangolo ABC, e per conseguenza anche il terzo angolo GDH sarà eguale al terzo BAC (articolo 41): onde il triangolo GDH avrà i suoi angoli alla periferia del dato circolo, e sarà equiangolo al triangolo BAC; il che era da fare.

LIBRO II.

De' principj universali delle matematiche, e della dottrina delle proporzioni; delle quantità commensurabili, e incommensurabili.

128 Misura è una quantità, che o presa una sol volta, o replicata alcune volte ne uguaglia precisamente un' altra del medesimo genere. La quantità misurata dicesi *moltiplice* della sua misura secondo quel numero, per cui resta misurata, come doppia, tripla &c., e la misura chiamasi, secondo il medesimo numero, *summultiplice* di quella, come suddupla, suttripla &c., che dicesi ancora la metà, la terza, la quarta parte &c.

129 Due quantità diseguali d'un medesimo genere si diranno *commensurabili*, quando si possa trovare una terza quantità, che sia misura comune di amendue, cioè, che presa un numero di volte ne misura una, e presa un altro numero di volte misuri l' altra. Quando niuna comune misura potrà trovarsene, si chiameranno *incommensurabili*. Non dee recar maraviglia, che si diano delle quantità incommensurabili. Imperocchè potendosi ogni quantità intender divisa in infinito, si possono concepire in essa delle parti minori di qualsivoglia quantità per noi assegnabile. Se dunque saranno due quantità, delle quali la massima comune misura sia minore di qualsivoglia quantità di quel genere per noi assegnabile, niuna comune misura di esse potrà mai assegnarsi, nè ritrovarsi, onde queste due quantità saranno incommensurabili. In fatti si dimostra, che tali sono il lato di qualsivoglia quadrato, e la diagonale di questo; il lato del triangolo equilatero, e il perpendicolo, che cade da un angolo di esso sul lato opposto, e moltissime altre linee.

130 Ogni quantità si dice *esprimersi* per quel numero, che dimostra, come essa si commisuri ad un' altra quantità del medesimo genere, la quale prendesi per l' unità, e si esprime per lo numero 1. Così perchè il numero 7 dimostra, come

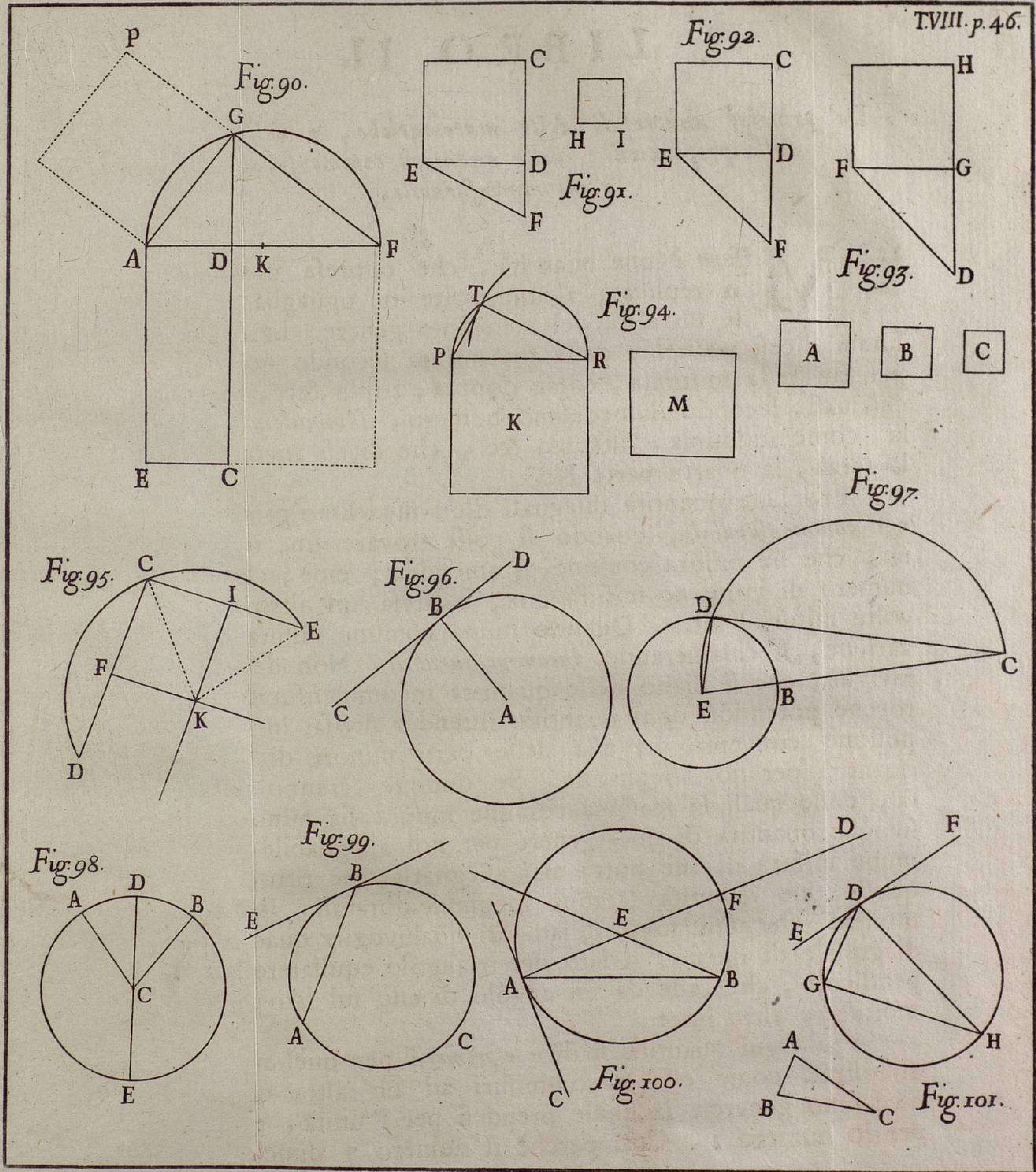


Fig. 90.
P G A D K F E C
Fig. 91.
C E D F H I
Fig. 92.
C E D F
Fig. 93.
H F G D
Fig. 94.
T P R K M
A B C
Fig. 95.
C I E F K D
Fig. 96.
D B C A
Fig. 97.
D C E B
Fig. 98.
D A B C E
Fig. 99.
B E A C
Fig. 100.
D F E A B C
Fig. 101.
F D E G H A B C

una linea di sette palmi si commisuri con un palmo, il numero 7 dirassi esprimere una linea di sette palmi; supponendo, che il palmo si prenda per l'unità. E perchè il numero $\frac{3}{4}$ dimostra, come una linea lunga tre quarte parti d'un palmo si commisuri con esso, perciò preso il palmo per 1, il numero $\frac{3}{4}$ si dirà esprimere la detta linea. E perchè il numeto $2\frac{5}{6}$ dimostra, come una linea lunga due palmi, con di più cinque seste parti d'un palmo si commisuri con esso; perciò il numero $2\frac{5}{6}$ dirassi esprimere la detta linea, preso sempre il palmo per l'unità.

131 Da ciò è manifesto, che ogni quantità eguale a quella, che prendesi per l'unità, si esprime per lo numero 1. Che ogni quantità maggiore di quella, che si prende per l'unità, e moltiplice di questa, si esprime per quel numero intero, che dimostra quante volte ella sia misurata dall'unità; come il 7 nel primo esempio dell'articolo 130. Che ogni quantità minore dell'unità, e commensurabile ad essa si esprime per un numero rotto, il cui denominatore mostra quante volte una qualche misura comune ad essa, e all'unità misuri l'unità; e il numeratore dimostra quante volte la stessa misura comune misuri la quantità da esprimersi; come $\frac{3}{4}$ nel secondo esempio del detto articolo. Che ogni quantità maggiore dell'unità, e commensurabile ad essa, ma non moltiplice, si esprime per un numero composto d'intero, e rotto; de' quali l'intero mostra quante volte si contenga in essa l'unità; e il rotto ha per denominatore il numero, che dimostra quante volte una qualche misura comune ad essa, e all'unità misuri l'unità; ed ha per numeratore il numero, che dimostra quante volte questa medesima misura comune misuri il residuo della quantità da esprimersi, come $2\frac{5}{6}$ nel terzo esempio del detto articolo. Che finalmente niuna quantità incommensurabile con quella, che si prende per unità si può esprimere con alcun numero, e perciò le quantità incommensurabili diconsi ancora *irrazionali*, siccome le commensurabili *razionali*.

De'

De' numeri irrazionali, o sordi, e come per essi si esprimono le quantità incommensurabili.

132 Un numero, il qual sia noto per qualche sua proprietà, che lo specifichi, e lo distingua da tutti gli altri, ma che tuttavia non possa esprimersi con alcun numero finito di figure aritmetiche, chiamasi irrazionale, o sordo.

Così quel numero, la cui proprietà sia questa: che moltiplicandolo per se medesimo produca precisamente il numero 2, viene per questa proprietà bastantemente specificato, e distinto da tutti gli altri numeri, non potendo esservene, che un solo, che abbia tale proprietà. Ma perchè si mostra nell' aritmetica, che un tal numero è un intero, con di più una certa frazione, la quale non può esprimersi per alcun numero finito di caratteri; perciò dirassi irrazionale, o sordo. Si trova, che questo numero è maggiore di 1, ed è minore di $1\frac{1}{2}$; e si possono anco assegnare de' limiti più vicini, tra' quali egli debba restar compreso, come a dire, ch' egli è maggiore di $1\frac{4}{10}$, e minore di $\frac{5}{10}$; e di nuovo è maggiore di $1\frac{41}{100}$, e minore di $1\frac{42}{100}$; e parimente maggiore di $1\frac{414}{1000}$, e minore di $1\frac{415}{1000}$ &c.; ma la precisa quantità di esso allora solo potrebbe esprimersi quando si potesse esprimere una frazione d' un numero infinito di figure nel numeratore, e d' un altro numero infinito nel denominatore.

Parimente quel numero, che risulterebbe, se dall' unità si levasse un terzo di essa, e al residuo si aggiungesse un quinto, e da questo rimanente si togliesse un settimo, e al residuo si aggiungesse un nono, e col medesimo ordine si proseguisse in infinito, quel numero dico, che risulterebbe dopo queste infinite sottrazioni, e addizioni, non può certamente essere, che un solo, e per questa proprietà, che si è detta, egli è bastantemente distinto da tutti gli altri numeri, e possono anche assegnarsi de' limiti, dentro de' quali egli resti compreso; ma perchè è impossibile esprimerlo con un numero finito di figure aritmetiche, e solamente si esprimerebbe con una fraziozione di numeratore, e di dominatore infinito; perciò egli sarà numero irrazionale, o sordo.

133 Le quantità incommensurabili, delle quali abbiamo di sopra parlato, con quella, che si prende per unità, benchè, come si è detto (articolo 131), non si possano esprimere per numeri razionali, però possono esprimersi per que' numeri irrazionali, o sordi, che mostrerebbero, come esse si commisurassero alla unità. Così, benchè prendendo per unità il lato d' un quadrato, la diagonale di esso, che, come si è detto, (articolo 129) è incommensurabile al lato, non possa esprimersi per alcun numero razionale, nulladimeno, perchè si dimostra da' Geometri, che se potesse assegnarsi un numero, che moltiplicato in se stesso producesse precisamente 2, questo numero mostrerebbe, come la diagonale si commisuri col lato suddetto; perciò quel numero irrazionale, o sordo, che moltiplicato per se stesso produce 2, esprimerà la diagonale del quadrato preso il lato di eso per unità.

134 Nel che è da sapere, che quando un numero razionale, o irrazionale moltiplicato in se stesso ne produce un altro, chiamasi *radice quadrata*, o semplicemente *radice* di quel prodotto, e ciò suole denotarsi con questo carattere $\surd$, che significa radice, aggiungendovi appresso il numero, di cui egli è radice. Così il numero, che moltiplicato in se stesso produrebbe 2, si scrive $\surd 2$, che vuol dire radice di due. Il numero poi, che nasce dalla moltiplicazione d' un altro in se stesso, chiamasi *quadrato* di quello, se da due moltiplicazioni *cubo*, e così se da 3, 4, 5 &c. moltiplicazioni dicesi quarta, quinta potestà &c.

E parimente quando un numero moltiplicato in se stesso ne produce un altro, il quale di nuovo moltiplicato per lo primo faccia un prodotto, chiamasi *radice cubica* di questo prodotto, che si scrive così $\sqrt[3]{}$, con aggiungervi appresso il numero del prodotto suddetto. Così $\sqrt[3]{24}$ vuol dire quel numero, che moltiplicato due volte in se stesso produca 24. E lo stesso discorso si applica alle radici del 4°, 5°, ed altri gradi ulteriori.

Da che si vede, che molte quantità incommensurabili rispetto a quella, che si è presa per unità, si potranno esprimere con radici irrazionali, o sorde. Così a cagion d'esempio preso per unità il lato d'un quadrato, la diagonale di esso si esprimerà (articolo 133) per questa radice irrazionale $\sqrt{2}$, e così d'altre molte.

Delle proporzioni.

135 Ogni quantità paragonata con un' altra del medesimo genere ha verso di essa un particolar rapporto in quel genere di quantità, per cui chiamasi o uguale, o in un certo modo maggiore, o minore di quella. Questo rapporto dicesi *ragione*, o *proporzione*; onde in ogni proporzione sono sempre due quantità, che diconsi i *termini* di essa, cioè quella quantità, che si riferisce ad un' altra, chiamasi *antecedente*, e quella, a cui si riferisce, dicesi *conseguente* della proporzione.

136 Quando l'antecedente d'una proporzione è eguale al conseguente, la ragione dicesi *d'egualità*.

Quando l'antecedente è maggiore del conseguente, di *maggiore inegualità*, quando minore, di *minore inegualità*.

137 Se i due termini della proporzione sono commensurabili fra loro, la proporzione dicesi *razionale*, se incommensurabili *irrazionale*.

138 Fra le proporzioni razionali se l'antecedente sarà *moltiplice* del conseguente, la ragione si dice *moltiplice*, se sarà *summoltiplice* del conseguente, la ragione dicesi *summoltiplice*. Le altre ragioni razionali hanno anch' esse dei particolari nomi, ma che non sono molto usuali, nè necessarj a sapersi.

139 Quando si abbiano due, o più proporzioni, quei termini, che in esse prestano il medesimo ufficio in ordine alla proporzione si dicono *moltiplici* fra loro; cioè a dire gli antecedenti si dicono termini omologhi agli altri antecedenti, e i conseguenti chiamansi termini omologhi agli altri conseguenti.

Delle proporzionalità.

140 L'Antecedente d'una proporzione dirassi avere una *simile*, o *eguale*, o *medesima ragione* al suo conseguente, che un altro antecedente al suo, quando espressi amendue

gli

gli antecedenti per l' unità, verranno i due conseguenti ad esfere espressi per un medesimo numero razionale, o irrazionale. O pure quando espressi per l' unità i conseguenti, verranno gli antecedenti ad essere espressi per un medesimo numero razionale, o irrazionale.

Per maggior chiarezza sieno due proporzioni, nella prima delle quali sia l' antecedente (*Fig.* 102) A, conseguente B; nella seconda antecedente C, conseguente D; le quali quantità se bene per facilità maggiore si mettono sotto gli occhi come linee rette, possono tuttavia essere quantità di qualsivoglia genere, come tempi, pesi, forze &c.; anzi possono essere di due diversi generi; purchè però ciascuno antecedente sia del medesimo genere col suo conseguente, altrimenti non sarebbe tra essi proporzione (articolo 137). Si eleggano due de' termini omologhi, verbigrazia, gli antecedenti; e preso il primo antecedente A per l' unità, sia un qualsivoglia numero razionale, o irrazionale quello, che esprime il suo conseguente B, come 3. Se ora prendendo nella seconda proporzione per unità l'antecedente C, si troverà il medesimo numero 3 esser quello, che esprima il conseguente D, si dirà la ragione di A a B esser simile, o eguale, o pur la medesima colla ragione di C a D. Così se a cagion d' esempio A fosse una linea di 7 piedi, e B di 21, e C fosse un peso di 15 libbre, e D di 45, si diranno simili le ragioni della retta A alla B, e del peso C al D. Imperocchè presa la retta A, che è di 7 parti per l' unità, cioè considerata questa retta, come 1, la retta B, che è di 21 di quelle prime parti sarà precisamente tre di queste misure, delle quali A è 1, e parimente presa la quantità C, che è libbre 15 per 1, la quantità D, che è libbre 45, sarà anch' essa precisamente 3 di queste misure, delle quali C è una. Dunque i due conseguenti B, D saranno espressi dal medesimo numero 3, quando gli antecedenti vengono amendue espressi per 1; e perciò le ragioni saranno simili, o eguali, o piuttosto una medesima ragione. Il medesimo s' intende in tutte le altre proposizioni razionali, o irrazionali.

141 La similitudine, o egualità, o identità delle ragioni dicesi *proporzionalità*, o *analogia*, e i termini di due ragioni simili diconsi fra loro *proporzionali*, e così dicesi *essere*, o *stare*

 l'anl'antecedente d'una delle date ragioni al ſuo conſeguente, come l'antecedente dell'altra al ſuo. Sogliono i Geometri per eſprimere in compendio, che quattro quantità ſono proporzionali, cioè l'antecedente A al conſeguente B, come l'altro antecedente C al conſeguente D, ſcrivere, ed appuntare i termini delle proporzioni nella ſeguente maniera, che ſervirà d'eſempio in tutti i caſi ſimili, A : B : : C : D.

142 Quando due quantità preſe egual numero di volte, ne miſurano due altre, queſte due diconſi *egualmente moltiplici* di quelle. Ed è manifeſto, che di due quantità, che ſieno egualmente moltiplici di due altre; così ſarà la prima a quella, di cui è moltiplice, così la ſeconda a quella, di cui è ugualmente moltiplice, e al contrario. Come, ſe *b* (*Fig.* 103) ſarà miſurata ſei volte da *a*, e *d* ſei volte da *c*, è manifeſto, che preſe verbigrazia le due *a*, *c* per antecedenti, e ciaſcuna di eſſe per l'unità, le due altre *b*, *d*, che ſi conſiderano come conſeguenti, ſaranno eſpreſſe per lo medeſimo numero 6 (articolo 130), e l'iſteſſo vale ſe *b*, *d* ſi prendano per antecedenti, e per l'unità, e perciò ſaranno *a* : *b* : : *c* : *d* (articolo 140), oppure *b* : *a* : : *d* : *c*.

143 Se due quantità avranno la medeſima ragione, a due altre, i due termini omologhi minori, ſi diranno *parti ſimili* de' maggiori, qualunque ſia la detta ragione. Da che ſi raccoglie, che due quantità, delle quali due altre ſieno egualmente moltiplici, ſono parti ſimili di queſte (articolo 142).

144 Oltre la proporzionalità propriamente detta, che è quella, che abbiamo finora ſpiegata, e diceſi anco *proporzionalità geometrica*, ſi conſidera ancora da' Geometri un'altra ſpecie di proporzionalità, benchè impropria, che chiamaſi *aritmetica*. Diconſi dunque proporzionali aritmeticamente quattro quantità, quando la prima eccede, o manca della ſeconda altrettanto, quanto la 3 dalla quarta. Come ſe *f* (*Fig.* 104) foſſe d'una miſura, *g* di due, *h* di 4, *i* di 5, delle medeſime miſure, queſte quattro quantità ſarebbero in proporzionalità aritmetica; mentre il difetto della prima dalla ſeconda, cioè di 1 da 2, che è di una miſura, ſarebbe eguale al difetto della terza dalla quarta, cioè di 4 da 5, che è parimente di una miſura. Laddove a volere, che la proporzionalità foſſe geometrica,

trica, cioè vera proporzionalità, posto *f* 1, *g* 2, *h* 4, facilmente si vede, che *i* dovrebbe essere 8, e non 5.

145 Si considera ancor talvolta da' Geometri un' altra impropria specie di proporzionalità, che dicesi *armonica*; ed è in un certo modo mista della geometrica, e dell' aritmetica, cioè quando sono tre quantità tali, e talmente ordinate, che la prima di esse ha la medesima proporzione geometrica alla terza, che ha la differenza tra la prima, e la seconda, alla differenza tra la seconda, e la terza. Come se saranno (*Fig.* 105) tre linee di questa misura 3, 4, 6, (presa per tutte e tre una comune misura) saranno in proporzione armonica; attesochè la prima 3 alla terza 6 ha la medesima proporzione geometrica, che ha la differenza 1 fra la prima, e la seconda, alla differenza 2 fra la seconda, e la terza; essendo in fatti tanto 3 suddupla di 6, quanto 1 di 2, e perciò geometricamente proporzionali (articolo 142).

146 Tornando alla proporzionalità propria, e geometrica, se il conseguente della prima proporzione sarà egli medesimo, che farà anche ufficio di antecedente nella seconda, la proporzionalità dirassi continua. Come se l' antecedente *a* (*Fig.* 106) fosse al conseguente *b* nella medesima ragione, che il medesimo *b*, preso ora per antecedente, ad un altro conseguente *c*. E ciò, com' è manifesto, non può accadere, se non quando tutte e tre le quantità sieno d' un medesimo genere. Ma ove l' antecedente della seconda proporzione sia quantità diversa dal conseguente della prima, la proporzione dirassi *discreta*, e questa può aver luogo anche fra quantità di diversi generi, come si è detto all' articolo 140. Un esempio della continua sarebbe fra le quantità espresse per questi numeri 2. 4. 8. presa per tutti e tre una comune misura; e della discreta in questi 2, 4, 9, 18 presa una comune misura per le due prime, e l' istessa, o pure un' altra misura per le due ultime.

147 E' manifesto, che la proporzionalità continua equivale ad una discreta, nella quale il secondo antecedente sia eguale al primo conseguente. Onde tutto quello, che si mostrerà nelle proporzioni discrete, cioè in quattro diversi termini proporzionali, si potrà applicare anco alle proporzioni continue.

Assio-

Assiomi, e teoremi fondamentali della dottrina delle proporzioni.

148 SE una quantità sarà doppia d' un' altra, si esprimerà per un numero doppio, se tripla per un numero triplo &c. prendendo sempre per unità una medesima grandezza. E se una quantità sarà espressa con numero doppio d' un' altra, sarà doppia di questa, se con triplo, tripla &c., purchè l' unità sia sempre la medesima. Il che è evidente per se stesso.

149 Ogni quantità, che sia espressa per qualsivoglia numero razionale, o irrazionale, prendendo per unità una tal grandezza; se si prenderà poscia per unità un' altra grandezza moltiplice della prima, verrà espressa per un altro numero summultiplice del primo, secondo la stessa moltiplicazione; e se si prenderà per unità una summultiplice della prima, verrà espressa per un numero multiplice del primo, secondo, l' istessa moltiplicazione.

Come se essendo l' unità *a* (*Fig.* 107), la linea *c* venisse espressa per un tal numero, che mostrerebbe, come che ella si commisurasse coll' unità *a* (qualunque si fosse questo numero anche irrazionale), se poscia si prendesse per unità un' altra quantità *b* verbigrazia doppia della prima, e con questa nuova unità dovesse *c* esprimersi per un numero, cioè trovar quel numero, che mostrerebbe, come ella si commisurasse colla nuova unità *b*, è manifesto, che questo numero sarebbe la metà del primo numero, con cui *c* era espressa per rapporto alla prima unità *c*. Perocchè se *c* si esprimerà verbigrazia col numero 6, cioè conterrà sei volte *a*, non potrà contenere, che tre volte *b*, che è del doppio maggiore di *a*; onde si esprimerà per 3, che è suddoppio di 6; e se *c* si esprimerà col numero $2\frac{4}{5}$, cioè conterrà due volte *a*, e di più quattro di quelle parti, delle quali *a* era 5, non potrà contenere *b*, che una volta, e di più due di quelle parti delle quali *b* sia 5, per essere tanto *b* doppio di *a*, quanto la quinta parte di *b* doppia della quinta parte di *a*, e perciò esprimerassi per $1\frac{2}{5}$, che è numero sudduplo del primo numero $2\frac{4}{5}$, e il medesimo vale di ogni altro numero anco inassignabile, come pare per se evidente senza alcun' altra prova.

150

150 Nelle quantità proporzionali se due termini omologhi si esprimeranno per un medesimo numero razionale, o irrazionale, anche gli altri due termini omologhi saranno espressi da un medesimo numero razionale, o irrazionale; e se saranno quattro quantità, delle quali esprimendone due per un medesimo numero razionale, come sopra, o irrazionale, anco le altre due vengono ad esprimersi per un medesimo numero, come sopra, le quantità saranno proporzionali, e omologhi quei termini, che restano espressi per lo medesimo numero.

Per metter in chiaro questa verità, sieno due quantità (*Fig.* 108) a, b, e due altre proporzioni ad esse, cioè c, d per modo che si abbia $a:b::c:d$. E' manifesto, che esprimendo due termini omologhi, verbigrazia gli antecedenti a, c per l'unità, cioè considerandoli ciascuno per una misura, anche gli altri due omologhi, cioè i conseguenti b, d, verranno ad esprimersi per un medesimo numero, ciascuno per rapporto a quella misura, mentre in ciò appunto consiste la proporzionalità (art. 140). Poniamo ora, che il termine a, il quale si è una volta considerato come unità, si esprima con qualche altro numero; cioè a dire, che in vece di prendere per unità la quantità a, se ne prenda un' altra del medesimo genere, che sia f, e in ordine a questa unità si esprima a, con quel numero, che le conviene, cioè con quello, che mostra come a si commisuri coll' unità f. Poniamo inoltre, che la quantità c si esprima col medesimo numero di a, cioè, che prendendo in vece dell' unità c un' altra quantità del medesimo genere, che sia g, la quantità c venga espressa col medesimo numero, con cui è espressa a prendendo l' unità f. Dico, che se ora la quantità b si esprimerà con un numero per rapporto all' unità f, e parimente d, si esprimerà con un numero per rapporto all' unità g, i numeri, che esprimeranno b, d non saranno diversi, ma uno stesso numero. Questa proposizione, come pure la conversa di essa, ben' intesa che sia, è per se stessa evidente senza altra prova non meno, che le altre due antecedenti.

151 Ciò posto, dico, che se saranno due quantità del medesimo genere, e due altre egualmente moltiplici di quelle, come la prima alla seconda, così sarà il moltiplice della prima all' egualmente moltiplice della seconda.

Sie-

Sieno a, b (*Fig.* 109) del medeſimo genere, e ſia c egualmente moltiplice di a, che d di b, dico che $a:b::c:d$. Imperocchè ſia prima c doppia di a, e perciò anche d doppia di b. Prendaſi per unità qualſivoglia quantità f del medeſimo genere, e per rapporto a queſta ſi eſprimono a, b, co' loro numeri razionali, o irrazionali. Parimente per rapporto alla medeſima unità f ſi eſprimano c, d co' loro numeri; è manifeſto, che il numero di c ſarà doppio del numero di a, e il numero di d doppio di quello di b (articolo 148). Prendaſi ora un' altra unità g doppia della prima f, e per rapporto ad eſſa eſprimanſi le due ſole quantità c, d. Poichè dunque l' unità g è doppia dell' unità f, il numero, che eſprime c, per rapporto all' unità g ſarà ſudduplo del numero, che eſprimerà la medeſima c per rapporto all' unità f (articolo 139), e perciò ſarà eguale al numero, che eſprima a per rapporto all' unità f. Per la medeſima ragione ſi troverà, che il numero, che eſprime d per rapporto all' unità g, ſarà eguale a quello, che eſprime b per rapporto all' unità f. Abbiamo dunque quattro quantità, cioè a antecedente, b conſeguente; e di nuovo c antecedente, d conſeguente; e ſi è moſtrato, che eſpreſſi i due antecedenti con un medeſimo numero, i conſeguenti vengono anch' eſſi eſpreſſi con un medeſimo numero, ciaſcuno per rapporto all' unità del ſuo antecedente. Dunque le quantità ſuddette ſono proporzionali (articolo 150), cioè $a:b::c:d$. Il che era da moſtrare. Nel medeſimo modo ſi argomenterebbe ſe le quantità c, d foſſero non doppie, ma triple di a, b, prendendo allora l' unità g tripla di f, e così in ogni altra moltiplicazione. Dunque &c.

152 Da ciò ſi inferiſce, che ſe ſaranno due quantità h, i (*Fig.* 110), e di più ſarà un qualunque numero di quantità eguali ad h, come a cagione d' eſempio le tre k, l, m, ed altrettante eguali ad i, come le tre n, o, p; così ſarà h ad i, come tutte inſieme h, k, l, m, a tutte inſieme i, n, o, p. Imperocchè l' aggregato di tutte h, k, l, m, non è, che un moltiplice di h, e l' aggregato di altrettante i, n, o, p, non è, che un ugualmente moltiplice di i; dunque (articolo 151) avremo, come h ad i, così l' aggregato di h, k, l, m, all' aggregato di i, n, o, p.

De'

De' modi di argomentare praticati da' Geometri nelle quantità proporzionali.

153 SOgliono i Geometri, proposte che siano quattro quantità proporzionali, prese con un tal ordine come queste $a:b::c:d$, inferire che sono eziandio proporzionali, prese che sieno in alcune altre maniere, e con altro ordine; e queste maniere diverse, noi prendiamo ora a spiegare, e insieme a dimostrare per legittime.

154 Il primo modo dicesi argomentare *invertendo*, che altri dicono *convertendo*, e consiste nel prendere i due conseguenti, come antecedenti, e riferire ciascuno al suo antecedente, come a conseguente; così perchè $a:b::c:d$; dunque $b:a::d:c$. Che questa illazione sia legittima, e per se stessa evidente, mentre o si prendano per antecedenti a, c, e per conseguenti b, d, o per antecedenti questi due ultimi, e per conseguenti i due primi, sempre si verifica, che espressi due de' termini omologhi per l'unità, gli altri due sono espressi per uno stesso numero, e tanto basta per essere le quantità proporzionali (articolo 140).

155 Il secondo modo dicesi *alternando*, ovvero *permutando*, ed è quando il primo antecedente si riferisce al secondo, come a conseguente, e il primo conseguente, preso anch' esso come antecedente, si riferisce al secondo conseguente. Così, perchè $a:b::c:d$; dunque $a:c::b:d$. Il qual modo però non può aver luogo, se non quando tutti e quattro i termini sieno quantità d' un medesimo genere, come è evidente. Che questo modo sia conchiudente, e legittimo si dimostra. Imperocchè se si tratta di proporzione moltiplice, già si è mostrato all' articolo 151, che gli egualmente moltiplici hanno fra loro la medesima ragione, che le quantità, delle quali sono moltiplici. Dunque $a:c::b:d$. Se poi non si tratta di proporzione moltiplice, ma di qualunque altra razionale, o irrazionale, intendasi una comune misura di a, e di b, che sia f (*Fig.* 111), la quale sarà assegnabile, se la proporzione è razionale, e inassegnabile, se irrazionale, e il numero, per cui f misura a, come pure quello, per cui misura b, sarà finito nel primo caso, e in infinito nel secondo. Intendasi ora c divisa in altrettante

parti, quanto è il numero finito, o infinito, che f misura a, e sia una di queste parti g; onde le due a, c, saranno egualmente moltiplici delle due f, g, e per conseguenza avremo (articolo 151) $a:c::f:g$. Ora poichè $a:b::c:d$, e il numero, che esprime a coll' unità f, è il medesimo, che esprime c coll' unità g, è forza, che anche il numero finito, o infinito, che esprimerà b coll' unità f, sia il medesimo, che esprimerà d coll' unità g (articolo 150), e perciò le due b, d saranno egualmente moltiplici delle due unità f, g. Dunque $b:d::f:g$. Ma poc' anzi si è mostrato, che $a:c:f:g$; dunque $a:c::b:d$; il che era da dimostrare.

156 Il terzo modo è *argomentare componendo*, che è il prender la somma dell' antecedente col conseguente per una quantità sola, ordinando la proporzione in una delle due seguenti maniere, cioè: posto che sia $a : b : : c : d$
sarà anco $a+b:b::c+d:d$
o pure $a+b:a::c+d:c$
dove il segno $+$ significa *più*, ovvero *con*, per modo, che $a+b$ vuol dire *a con b*, o sia *a con di più b*, cioè la quantità sola composta delle due a, b, o diciamo la somma di a, e di b. Questa maniera di argomentare è legittima; imperocchè essendo $a:b::c:d$, espressi i due antecedenti a, c con un medesimo numero, anco i conseguenti b, d, si esprimeranno con un medesimo numero (articolo 150). Essendo dunque il numero di a eguale al numero di c, se a questi due numeri eguali aggiungeremo i due numeri eguali di b, e di d, le somme saranno eguali; cioè il numero di $a+b$ eguale al numero di $c+d$. Noi abbiamo dunque quattro quantità, cioè $a+b$ antecedente, b conseguente, $c+d$ antecedente, d conseguente, e si è mostrato, che i termini omologhi sono espressi co' medesimi numeri. Dunque (articolo 150) le quantità prese con quest' ordine sono proporzionali; cioè $a+b:b::c+a:d$, e poco diverso sarà il raziocinio per mostrare l' altra parte; cioè $a+b:a::c+d:c$.

157 Il quarto modo è argomentare *dividendo*, che consiste nel prender la differenza tra l' antecedente, ed il conseguente [cioè quello, che resta sottraendo il minore di essi dal maggiore] per una quantità, e ordinare poscia la proporzione in

una

una delle due ſeguenti maniere: Perchè $a : b :: c : d$

poſto l' antecedente maggiore del conſegu. $\begin{cases} \text{ſarà ancora} & a - b : b :: c - d : d \\ \text{o pure} & a - b : a :: c - d : c \end{cases}$

poſto l' antecedente minore del conſeguente $\begin{cases} b - a : b :: d - c : d \\ b - a : a :: d - c : c \end{cases}$

dove il ſegno — ſignifica *meno*, o pure ſenza, per modo, che $a - b$ vuol dire *a meno b*, o pure *a ſenza b*, cioè quella quantità, che reſta ſottraendo b da a, che dee intenderſi per una ſola quantità, benchè eſpreſſa per due lettere, ed è inſomma l' eccesſo di a ſopra b, o ſia il difetto di a da b, o, in una parola, la differenza tra b, ed a. Che dunque un tal modo d' argomentare ſia legittimo, ſi moſtrerà, come nell' articolo 156, ſe non che ivi ſi fece la ſomma, e quì dee farſi la ſottrazione de' numeri eguali, e procedere nel rimanente, come prima.

158 Il quinto modo diceſi per *converſion di ragione*, e conſiſte nel prendere o la ſomma, o la differenza dell' antecedente, e del conſeguente, con ordinare le propoſizioni in una delle ſeguenti maniere: Perchè $a : b :: c : d$

prendendo la ſomma $\begin{cases} \text{ſarà ancora} & a : a + b :: c : c + d \\ \text{o pure,} & b : a + b :: d : c + d \end{cases}$

prendendo la differenza $\begin{cases} \text{poſto l' antecedente maggiore del conſeguente} & \begin{cases} a : a - b :: c : c - d \\ b : a - b :: d : c - d \end{cases} \\ \text{poſto l' antecedente minore del conſeguente} & \begin{cases} a : b - a :: c : d - c \\ b : b - a :: d : d - c \end{cases} \end{cases}$

e la dimoſtrazione non è punto diverſa da quelle de' due articoli precedenti.

159 Il ſeſto modo è *per egualità ordinata*, e ſi pratica nella ſeguente maniera. Sia la ragione di a a b la medeſima, che di o a q, e inoltre b ad un' altra quantità c, come q ad un' altra r; e parimente ſia c ad una quarta d, come r ad una quarta t, e così proſeguiſca la proporzionalità in tanti termini, quanti ſi vorrà; da che poi ſi inferiſce, che come il primo antecedente a del primo ordine all' ultimo conſeguente d del medeſimo ordine, così ſta il primo antecedente o del ſecondo ordine all' ultimo conſeguente t del medeſimo ordine.

a, b, c, d

o, q, r, t

Che tal modo d'argomentare ſia concludente ſi dimoſtra. Imperocchè eſpreſſe *a*, *b* per due numeri, ſi potranno i loro omologhi *a*, *q* eſprimere co' medeſimi numeri (articolo 150), ſieno queſti razionali, o irrazionali. Se dunque ritenute le medeſime unità, ſi eſprimerà anche *c* per quel numero razionale, o irrazionale, che gli conviene, è forza, che parimente *r* venga eſpreſſo col medeſimo numero di *c*; giacchè ſi ſuppone $b:c::q:r$. E perciò ſaranno $a:c::o:r$. E procedendo col medeſimo diſcorſo, finchè vi ſono termini nelle proporzioni, ſi moſtrerà, che gli ultimi due *d*, *t* ſi eſprimeranno col medeſimo numero, poſto ſempre, che i due primi *a*, *o* ſieno eſpreſſi con un medeſimo. Dunque ſaranno $a:d::o:r$; il che era da dimoſtrare.

160 Il ſettimo, ed ultimo modo diceſi ***per egualità perturbata***. Sieno dunque due ordini di quantità, nel primo de' quali ſia la prima *a* alla ſeconda *b*, come nel ſecondo la prima *o* alla ſeconda *q*, e come

$$a,\ b,\ c$$
$$r,\ o,\ q,\ ʃ$$

nel primo la ſeconda *b* ad una terza *c*, così nel ſecondo una terza *r* alla prima *o*. Dico, che come nel primo ordine la prima *a* alla terza *c*, così nel ſecondo la terza *r* alla ſeconda *q*; e in queſto conſiſte l' egualità perturbata. Imperocchè intendaſi un' altra quantità *ʃ*, alla quale ſtia la quantità *q*, come ſta la *b* alla *c*. Dunque le tre quantità *a*, *b*, *c*, e le tre altre *o*, *q*, *ʃ*, ſono diſpoſte, come nell' egualità ordinata, e ſono proporzionali con quell' ordine, che in eſſa ſi richiede, e perciò avremo $a:c::o:ʃ$ (articolo 159), ciò premeſſo, come ſi ſuppone $q:ʃ::b:c$
e parimente, come ſi ſuppone $b:c::r:o$
ſarà neceſſariamente ancora $q:ʃ::r:o$
e alternando queſta proporzione (articolo 155), ſarà $q:r::ʃ:o$
e invertendo queſt' ultima (articolo 154), ſarà $o:ʃ::r:q$
ma poc' anzi ſi è moſtrato eſſere $o:ʃ::a:c$
dunque ſarà finalmente $r:q::a:c$
il che era da dimoſtrare. La medeſima dimoſtrazione verrebbe, ſe il numero de' termini foſſe maggiore di tre, e foſſero diſpoſti nel modo, che in tre termini ſi è moſtrato.

Delle

Delle ragioni composte.

161 PRoposte due quantità del medesimo genere una per antecedente, e un' altra per conseguente, la ragione dell' antecedente al conseguente, qualunque ella si sia, dicesi *composta* di quella di esso antecedente a qualsivoglia terza quantità dello stesso genere, e di quella di questa terza quantità al conseguente. Come se saranno due linee a, b (*Fig.* 112), la ragione dell' antecedente a al conseguente b si dirà composta dalla ragione di esso antecedente a ad una terza linea, qualunque siasi verbi grazia c, e della ragione di questa stessa linea c al conseguente b.

Parimente la ragione dell' antecedente al conseguente dicesi composta della ragione di esso antecedente a qualsivoglia terza quantità, della ragione di questa terza ad una quarta, e della ragione di questa quarta al conseguente. Così la ragione dell' antecedente a al conseguente b, si dirà eziandio composta dalle ragioni dell' antecedente a alla c, dalla c alla d (che è un' altra linea di qualsivoglia grandezza), e di questa d al conseguente b. E il medesimo s' intende qualunque sia il numero delle ragioni intermedie, che si prendono. Onde generalmente qualunque ragione si può intendere composta di qualsivoglia numero di ragioni, qualunque esse sieno, purchè l' antecedente della composta sia il primo antecedente delle componenti, e ciascun conseguente di queste sia antecedente di quella, che segue; e per fine l' ultimo conseguente delle componenti sia lo stesso, che il conseguente della composta.

Benchè non sia necessario addurre alcuna cagione, per cui i Geometri chiamano composte le ragioni nella maniera, che si è spiegata, non essendo questa, che una maniera di parlare, che è stata in loro arbitrio d' introdurre anche senza cagione alcuna; nulladimeno è bene osservare, che quel numero, che esprime la cagione di un antecedente ad un conseguente, viene appunto ad essere composto dalla moltiplicazione di due numeri, uno de' quali esprima la ragione del detto antecedente a qualsisia terza quantità dello stesso genere, e l' altro esprima la ragione di questa terza quantità al conseguente. Così posto,

posto, che *a* sia verbi grazia di due parti, e *b* di quattro, e così *a* sia la metà di *b*; questo numero rotto $\frac{1}{2}$ esprimerà la ragione di *a* verso *b*, cioè mostrerà, che *a* è appunto metà di *b*. Poniamo ora, che *c* sia otto di quelle medesime parti, e che perciò *a*, che è di due, venga ad esser un quarto di *c*, onde il numero $\frac{1}{4}$ esprima la ragione di *a* verso *c*. Essendo ora *c* otto, *b* quattro delle dette parti, sarà *c* doppia di *b*, e questo numero 2 esprimerà la ragione di *c* verso *b*. Moltiplichiamo $\frac{1}{4}$, che esprime la ragione di *a* verso *c* per 2, che esprime la ragione di *c* verso *b*; ecco, che verrà a comporsi appunto il numero $\frac{2}{4}$, o sia $\frac{1}{2}$, che è quello, che esprime la ragione dell'antecedente *a* al conseguente *b*. Bene sta dunque, che i Geometri abbiano chiamata la ragione di *a* verso *b* composta di quella di *a* verso *c*, e di quella di *c* verso *b*. Il medesimo si troverà in tutti gli altri casi, qualunque sia il numero delle ragioni componenti, ancor che queste fossero irrazionali, cioè espresse con numeri sordi, e potrebbe anco addursene una dimostrazione, come alcuni hanno fatto, ma si tralascia, perchè questa ne condurrebbe troppo in lungo, e per altro non si stima necessaria, non avendo i Geometri debito di render conto delle cagioni, che hanno avuto d'imporre più uno, che un altro vocabolo alle cose, che hanno difinite.

162 Quando le ragioni, delle quali una ragione s'intende esser composta, sono tutte eguali fra loro, la composta si dice *duplicata*, *triplicata* &c. d'una di quelle ragioni secondo il numero di esse ragioni. Sia dunque la ragione di *a* verso *b* (*Fig.* 113.) qualunque si voglia, e sia un'altra quantità *c* tale, che $a : c :: c : b$; in tal caso la ragione di *a* verso *b*, che è composta (articolo 161) della ragione di *a* verso *c*, e di quella di *c* verso *b*, si dirà duplicata di ciascuna di queste due ragioni, che sono amendue eguali, o piuttosto la medesima. Parimente se sarà $a : d :: d : e$, e di nuovo $d : e :: e : b$, la ragione di *a* verso *b* si dirà triplicata di ciascuna di queste tre ragioni, e così in tutti gli altri casi, qualunque sia il numero delle ragioni. Ove è da avvertire, che i Geometri per esprimere brievemente una ragione duplicata, triplicata, o in altro modo moltiplice di un'altra, tralasciano di ripetere il voca-

vocabolo ragione, e solamente esprimono i termini di essa. Così per esprimere, che la ragione di *a* verso *b* è duplicata di quella di *a* verso *c*, non diranno *la ragione di a* a *b esser duplicata della ragione di a* a *c*, ma diranno *la ragione a* a *b esser duplica di a* a *c*, e così in ogni altro caso.

163 Quando, come la prima alla seconda, così la seconda è alla terza, la seconda si dirà *media proporzionale* fra la prima, e la terza, o semplicemente *media*, o pur *media geometrica*.

164 Quando una proporzione Geometrica continua oltrepassa i tre termini, l' aggregato di questi presi per ordine dicesi una *progressione*, o *serie geometrica*. Come se *a* (*Fig.* 114) fosse due terzi di *b*, *b* due terzi di *c*, *c* due terzi di *d* &c. l' aggregato de' termini *a*, *b*, *c*, *d*, presi con quest' ordine, dirassi una progressione geometrica. Se i termini non saranno, che quattro, il secondo, e il terzo si diranno i due medj proporzionali, e il primo, e il quarto i due estremi. Se cinque il secondo, terzo, e quarto saranno tre medj proporzionali, e il primo, e il quinto i due estremi, e così in ogni altro caso.

165 Si considerano ancora da' Geometri talvolta le *progressioni*, o *serie aritmetiche*, che sono aggregati di più termini, ciascuno de' quali eccede, o manca dal suo antecedente d' una differenza sempre eguale. Come in queste quantità espresse per li numeri 3, 5, 7, 9 &c., presa sempre per unità una misura costante.

Molti teoremi potrebbero quì aggiungersi in materia delle proporzioni, ma si tralasciano, come quelli, che o non sono punto necessarj, o con facilità si intendono, intese che sieno le cose finora dette.

LIBRO VII.

Delle proporzioni, e della misura delle figure piane rettilinee, della proporzione de' triangoli, e de' parallelogrammi di eguale altezza.

166 Sieno due triangoli (*Fig.* 115) ABE, CFD, che abbiano eguale, o comune altezza, e le loro basi sieno EB, FD. Dico, che il triangolo ABE sta al triangolo CFD, come la base EB alla base FD. Imperocchè se le due basi saranno commensurabili, presa una comune misura di amendue, e divisa l'una, e l'altra base in parti di tal misura, è manifesto, che tirando da ciascuna divisione al vertice A, o rispettivamente C, delle rette linee, ciascuno de' due triangoli AEB, CFD resterà da queste diviso in altri triangoli; e che non solo tutt' i triangoli di AEB saranno eguali tra loro, come pure quelli di CFD tra loro, ma eziandio ciascuno di quelli di AEB sarà eguale a ciascuno di quelli CFD, a cagione delle altezze de' vertici A, C sopra le basi EB, FD, le quali altezze si suppongono eguali (articolo *66*). E' anche manifesto, che il numero de' triangoli in AEB sarà eguale al numero delle divisioni di EB, e quello de' triangoli in CFD eguale al numero delle divisioni di FD. Poichè dunque abbiamo quattro quantità, cioè EB antecedente, FD conseguente; e di nuovo AEB antecedente, CFD conseguente, e i due antecedenti EB, ed AEB essendo espressi con un medesimo numero (cioè con quello della divisione di EB) anco i due conseguenti FD, e CFD sono espressi con un altro medesimo numero di misure eguali alle prime (cioè con quello delle divisioni di FD), ne segue (articolo 150), che come la base EB alla base FD, così stia il triangolo AEB al triangolo CFD. Se poi le basi fossero incommensurabili la dimostrazione sarà la medesima, se non che i numeri delle divisioni di EB, FD dovranno intendersi infiniti, come quelle, che non avranno misura comune se non infinitamente piccola, il che

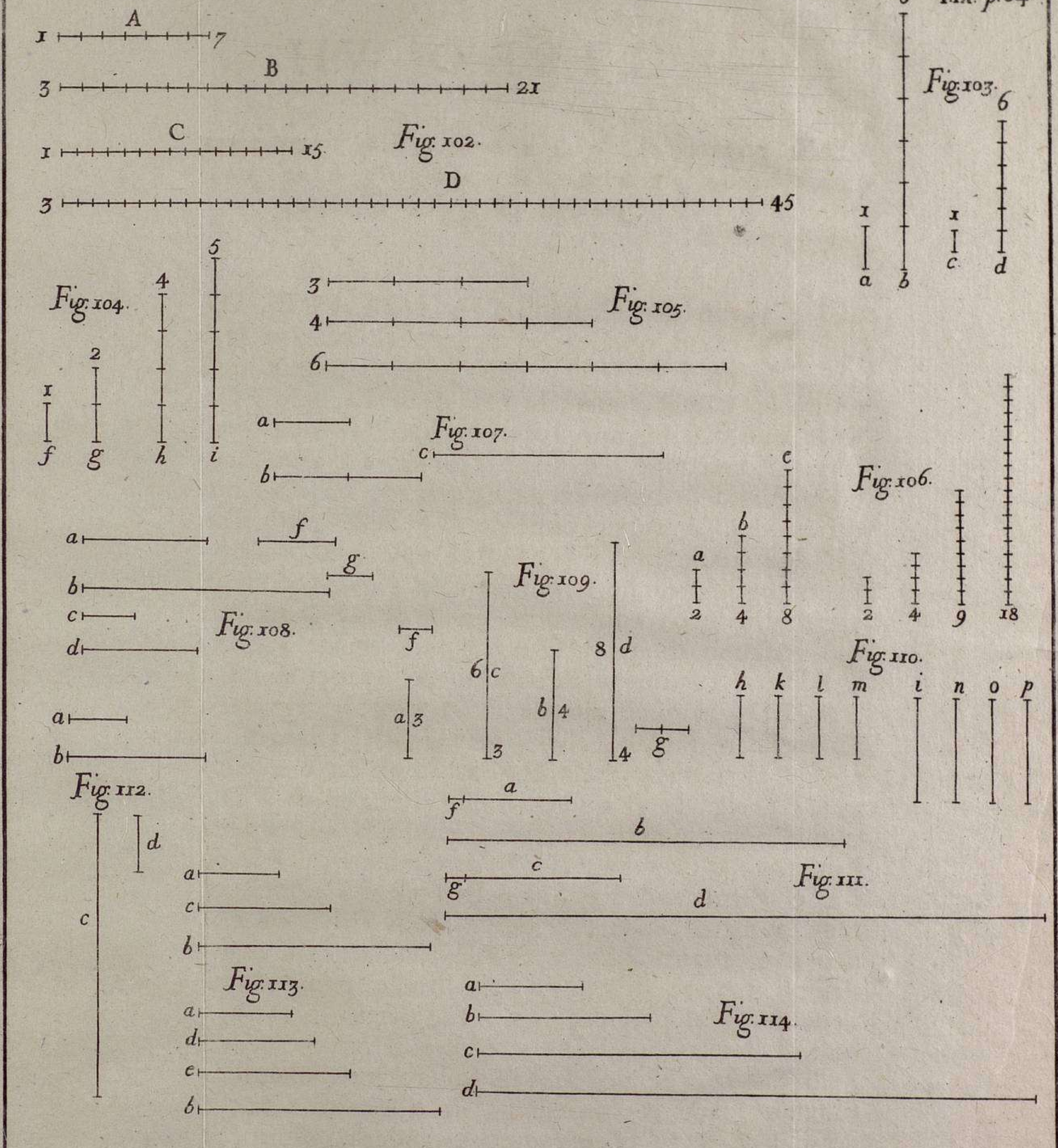


Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.

il che non ostante i numeri de' triangoli di AEB, CFD saranno sempre i medesimi con quelli delle loro basi.

167 E' evidente, che questa medesima dimostrazione si può anche applicare a' due parallelogrammi (*Fig.* 116) AB, CD della medesima, o di eguale altezza (articolo 65), e che perciò anche questi avranno tra loro la medesima ragione, che hanno le loro basi.

Della misura delle figure rettilinee, e del modo di esprimerla per numeri.

168 Siccome le linee si misurano per linee, così i piani si misurano per piani; e siccome il numero, che mostra quante volte replicata una linea ne misuri un' altra, dicesi esprimere questa linea, così quel numero, che mostra quante volte replicato un piano ne misuri un altro, diraffi esprimere questo piano, di qualunque figura sia tanto il piano, che si misura, quanto l' altro, che prendesi per misura di questo, potendo qualsivoglia specie di figura piana intendersi misurata per qualsivoglia specie di figura piana. E quando qualsivoglia figura piana si prenda per unità, tutte le altre commensurabili, o incommensurabili ad essa si esprimeranno per quel numero razionale, o sordo, che mostrerà, come esse si commisurano coll' unità, che si sarà presa, come si fa delle linee, e di ogni altra quantità (articolo 130).

169 Sogliono nulladimeno i Geometri per maggior facilità esprimere la misura delle figure piane per quadrati piuttosto, che per altra figura piana. Sia dunque da misurare, e da esprimer per numeri un rettangolo (*Fig.* 117) AC. Stabiliscasi per misura, o sia per unità una linea, il cui quadrato prendasi parimente per unità, come il quadrato di un' oncia, d' un piede, di una pertica &c., che dicesi anco oncia quadrata, piede quadrato, pertica quadrata &c. Poniamo, che la linea presa per unità misuri tanto il lato AB, quanto il BC del rettangolo AC, come AB sette volte, e BC tre volte. E' manifesto, che tirando per tutte le divisioni di AB, che nasceranno dall' applicarci attualmente la detta misura, delle rette linee parallele al lato BC, e all' incontro per tutte le

divisioni, che similmente risulteranno di B C, altre linee parallele ad A B, tutto il rettangolo A C rimarrà risoluto in quadrati di quella misura, che si è presa per unità, e che il numero di tutti questi quadrati sarà necessariamente quello, che nascerà dalla moltiplicazione del numero, che esprime la misura di un lato A B, per lo numero, che esprime la misura dell' altro lato B C, cioè nel nostro caso di 7 per 3. Il numero dunque, che risulta dalla moltiplicazione de' numeri de' due lati (che nel nostro caso è 21) esprimerà la grandezza del rettangolo A C in misure quadrate della grandezza, che si sarà stabilita per unità, o misura.

Poniamo in secondo luogo, che l' unità, che si è presa, misuri il lato (*Fig.* 118) A B, verbi grazia, sette volte, come prima, ma non il B C, in cui capisca, verbi grazia, tre volte coll' avanzo D C, minore dell' unità suddetta, il qual perciò si potrà esprimere per un numero rotto, o almeno per un irrazionale, o sordo. Tirate come sopra le parallele per tutte le divisioni di A B, e di B C, è manifesto, che per esprimere il rettangolo A C, al numero, che esprime il rettangolo A D (cioè al prodotto di A B in B D) converrà aggiungere quello, che esprimerà il rettangolo D F fatto coll' altezza A B, o sia C F sopra l' avanzo D C, come base, cioè la somma di tutti i rettangoli eguali a C K, che hanno per altezza l' unità D K, e per base D C. Ora il rettangolo C K, prendendo per unità uno de' quadrati D L, si esprime col medesimo numero, con cui si esprime il lato D C, prendendo per unità una delle linee G D, attesochè (per l'articolo 166) G D : D C :: D L : C K. Dunque tutti li rettangoli eguali a C K, che costituiscono D F, si esprimeranno in misura dell' unità quadrata D L, per lo numero D C (qualunque egli sia, anche irrazionale) moltiplicato nel numero di F C, cioè di A B; e questo prodotto aggiunto al numero di A D esprimerà il rettangolo A C. Ma il prendere il prodotto del numero A B nel numero B D, e l' aggiungervi il prodotto del numero A B nel numero D C, non è altro, che il fare il prodotto del numero A B in tutto il numero B C; dunque anco in questo caso il prodotto, che risulta dalla moltiplicazione de' numeri de' due lati, esprimerà il rettangolo fatto da' medesimi.

Final-

Finalmente se l' unità non misurasse nè l' uno, nè l' altro de' lati AB, BC, come nella (*Fig.* 119), non sarà tuttavia difficile applicare anche a questo caso la medesima dimostrazione. Onde in universale conchiuderemo, che la misura d' ogni rettangolo si esprime col numero, che risulta dalla moltiplicazione de' due numeri esprimenti i lati di esso.

170 Dalche si raccoglie, che ogni quadrato si esprimerà per la moltiplicazione in se stesso di quel numero, che esprime uno de' suoi lati. E questa è la cagione, per cui dagli Aritmetici il prodotto dalla moltiplicazione d' un numero per se medesimo chiamasi il quadrato di questo numero, e all' incontro radice quadrata di un numero dicesi quello, che moltiplicato in se medesimo lo produce; e finalmente numeri quadrati si denominano tutti quelli, che nascono dalla moltiplicazione d' un numero razionale per se stesso, come 1, 4, 9, 16 &c., a distinzione degli altri 2, 3, 5, 7, 8, che non vengono detti quadrati.

191 E perchè ogni parallelogrammo, come (*Fig* 120) AB, è sempre eguale a un rettangolo CF fatto su la medesima base AC, e che abbia la medesima altezza AF (artic. 65), perciò la espressione di qualsivoglia paralellogrammo in numeri si avrà moltiplicando il numero, che ne esprime l' altezza per quel numero, che ne esprime la base, giacchè questa appunto (articolo 169) sarà l' espressione del rettangolo, che ad esso è eguale.

172 Parimente, perchè ogni triangolo, come (*Fig.* 121), ABC è la metà d' un rettangolo CD fatto sopra la medesima base BC nell' istessa altezza DB (articolo 66); perciò la metà del numero, che esprime un rettangolo, cioè (artic. 169) la metà del prodotto del numero dell' altezza nel numero della base esprimerà il triangolo. Può dunque aversi l' espressione d' ogni triangolo in tre modi; o col prendere la metà dell' altezza DB, cioè GB, e moltiplicarla per tutta la base BC; o col prendere la medesima base BC, cioè BH, e moltiplicarla per tutta l' altezza BD; o col moltiplicare tutta l' altezza BD per tutta la base BC, e prender poscia la metà del prodotto; giacchè in tutti e tre questi modi risulta il medesimo numero, cioè GC, ovvero DH, che sempre sarà la metà del rettangolo DC.

173 E finalmente, perchè ogni figura rettilinea ABCDE

 (*Fig.*

(*Fig.* 122) sempre si può risolvere in triangoli, trovata che sia in numeri l' espressione di questi (prendendo però per ciascuno di essi sempre la medesima unità) la somma di tutti li numeri, che esprimono i detti triangoli esprimerà la figura suddetta, qualunque sia il numero de' lati di essa. A ciò fare il modo più spedito è di tirare da un angolo della figura, come B, delle rette a tutti gli altri non adjacenti D E, delle quali rette una, o più d' una divenendo sempre lato comune di due triangoli, può prendersi per base comune d' ambedue, e per altezza la perpendicolare, che dagli angoli opposti a questo lato cade sulla medesima comune base, che con ciò si risparmierà il numero delle calcolazioni, che si richiederebbero, risolvendo la figura in triangoli in altra maniera.

De' parallelogrammi equiangoli, ed eguali fra loro, e delle figure reciproche.

174 Sieno quattro linee proporzionali fra loro (*Fig.* 123) G F : I L : : L M : G N, e dalle due estreme G F, G N, sia contenuto il rettangolo G H, come pure delle due intermedie I L, L M il rettangolo L K. Dico che questi triangoli sono eguali fra loro. Intendasi una comune misura delle due G F, I L, o finita, o infinitamente piccola, caso che fossero incommensurabili, e divisa l' una, e l' altra linea in tali misure, per tutte le divisioni si tirino delle parallele a' lati G N, L M. E' certo che se ora si dividerà L M nel medesimo numero di parti eguali, in cui è divisa G F (le quali però saranno di lunghezza maggiore, o minore di quelle di G F), il numero di queste parti, che misurerà G N, sarà il medesimo, che quello delle parti di L I; mentre essendo gli antecedenti G F, L M espressi con un medesimo numero, anco i conseguenti I L, G N debbono essere espressi con un medesimo numero (articolo 150); divisa dunque la retta G N colla misura delle parti di L M, e tirate per le divisioni dell' una, e dell' altra le rette parallele a' lati G F, L I, saranno i due rettangoli G H, L K divisi in rettangoli tutti fra loro eguali, mentre ciascuno di essi ha per un lato una delle divisioni delle due prime G F, I L, e per un altro lato una delle divisioni

ſioni delle due ultime L M, G N. Ed è anco manifeſto, che il numero di queſti rettangoli, che coſtituiſce G H, è eguale al numero de' medeſimi, che coſtituiſce L K; mentre l' uno, e l' altro naſce dalla moltiplicazione de' numeri eguali di G F, L M per i numeri eguali di G N, L I. Dunque i rettangoli G H, L K ſono fra loro eguali.

175 Nell' iſteſſa maniera ſi moſtrerà, che ſe tre linee ſaranno proporzionali, come (*Fig.* 124) A B : C D : : C D : B E, il quadrato fatto dalla media C D ſarà eguale al triangolo fatto dalle eſtreme A B, B E. Imperocchè facendo ora C D ufficio di due termini della proporzione, queſto caſo viene ad eſſere il medeſimo, che quello dell' articolo antecedente.

176 All' incontro ſe due rettangoli F G, H I (*Fig.* 125) ſaranno eguali; come un lato del primo F K a un lato del ſecondo H L, così ſarà l' altro lato di queſto H N un altro lato del primo F M. Imperocchè ſe così non foſſe, accreſciuto, o ſminuito uno de' lati ſuddetti, verbi grazia F M, ſino in P per modo, che foſſe F K : H L : : H N : F P, e compito il rettangolo P K, ſarebbe queſto eguale al rettangolo H I, a cui già ſi ſuppone eguale il rettangolo F G; onde la parte B G ſarebbe eguale al tutto P K, il che è impoſſibile. E nel medeſimo modo ſi moſtrerà, che ſe un quadrato ſarà eguale ad un rettangolo, il lato del quadrato ſarà media proporzionale fra i due lati del rettangolo.

177 Tutto ciò, che ſi è detto negli articoli 174, 175, e 176 intorno ai rettangoli, e ai quadrati, ſi può applicare nella ſteſſa maniera, e colle medeſime dimoſtrazioni alle romboidi, e ai rombi, cioè a tutti gli altri parallelogrammi non rettangoli, purchè però i due parallelogrammi, de' quali ſi tratta, ſieno fra loro equiangoli, cioè abbiano un angolo eguale, che tanto baſta per dover avere neceſſariamente eguali anco gli altri angoli.

178 Anzi perchè ogni triangolo è metà d' un parallelogrammo, che abbia per lati due de' lati del triangolo, e l' angolo compreſo da queſti comune con eſſo (articolo 58), ſi applicheranno i ſuddetti teoremi eziandio a' triangoli, purchè i lati, de' quali ſi tratta, comprendano in amendue un angolo egua-

lo eguale, o pure angoli, de' quali l'uno ſia ſupplemento dell' altro, giacchè compiendo i parallelogrammi, ſarebbero queſti equiangoli, e ſarebbero i triangoli le loro metà.

179 Quando due triangoli, o due parallelogrammi hanno i lati proporzionali con quell' ordine, che ſi è finora detto, cioè, come un lato della prima figura ad uno della ſeconda, così l' altro lato della ſeconda all' altro della prima, diconſi avere i lati *reciprocamente proporzionali*, ed eſſe figure ſi chiamano *reciproche*. Onde per le coſe dette è evidente, che le figure reciproche ſempre ſono eguali fra loro; purchè amendue ſieno parallelogrammi, o amendue triangoli, e purchè gli angoli compreſi dai lati reciprocamente proporzionali ſieno eguali, o pure l' angolo d' una delle due figure ſia il ſupplemento dell' altro a' due retti.

Della ſimilitudine de' triangoli, e delle altre figure rettilinee.

180 Sieno due triangoli ABC, DCE (*Fig.* 126) fra loro equiangoli, cioè l' angolo A ſia eguale al D, il B al DCE, e il BCA al CED. Si prolunghi uno de' lati del primo triangolo, come BC, e ſopra di eſſo, così prolungato, ſi ſtenda il lato CE, che nell' altro triangolo gli corriſponde per l' oppoſizione dell' angolo eguale; talchè i due angoli ACB, DCE ſi tocchino nel punto C, come la figura moſtra. E' manifeſto, che eſſendo eguali gli angoli BCA, CED, la linea DE verrà a giacere in ſito parallelo alla CA, e per una ſimil ragione la DC ſarà parallela alla BA (articolo 28). Si prolunghino ora ED, BA finchè s' incontrino in F. Per B ſi tiri BH parallela ad AC, e per E ſi tiri EH parallela ad AB, e prolungate le due DC, AC, incontrino BH in G, ed EH in I. Sarà dunque BE un parallelogrammo, e la retta BE diagonale di eſſo, e perciò i complementi CF, CH eguali fra loro (articolo 62), i quali eſſendo inoltre equiangoli, a cagione degli angoli, che hanno in C, oppoſti per vertice, avranno i lati reciprocamente preſi proporzionali fra loro, cioè, come DC a CI, così CG a CA (articolo 177).

Ma

Ma CI è eguale a DE, e CG eguale ad AB (articolo 58). Dunque, come DC a DE, così AB ad AC. Nell'istessa maniera, prolungato qualsivoglia altro lato del primo triangolo, si mostrerà, che gli altri due sono proporzionali ai lati corrispondenti del secondo triangolo. Dunque generalmente ne' triangoli equiangoli, i lati, che comprendono angoli eguali, sono proporzionali fra loro, e omologhi nella proporzione sono que' lati, che sono opposti ad angoli eguali.

181 Poichè dunque in qualsivoglia triangolo MNO (*Fig.* 127) tirando una retta PR parallela ad uno de' lati NO, il triangolo MPR, che ne risulta, è equiangolo al triangolo MNO (artic. 41), i lati de' triangoli MPR, MNO saranno proporzionali, prendendoli col dovuto ordine,

a cagione d' esempio ON : NM :: RP : PM
ON : OM :: RP : RM
NM : OM :: PM : RM

E così in tutte le altre maniere, nelle quali possono combinarsi, prendendo sempre per termini della proporzione que' lati, che contengono angoli eguali, e per omologhi quelli, che sono opposti ad angoli eguali.

182 Da ciò si inferisce, che in ogni triangolo MNO, tirata una retta RP parallela ad un lato ON, gli altri due lati MN, MO restano proporzionalmente divisi da essa ne' punti PR, cioè a dire, che MP : PN :: MR : RO. Imperocchè essendo per l' articolo antecedente MP : MR :: MN : MO
sarà alternando (articolo 155) MP : MN :: MR : MO
dunque per conversione di ragione
(articolo 158) MP : PN :: MR : RO
e con poco diversa maniera si proverebbe, che anco le parti NP, OR saranno proporzionali a tutti NM, OM, applicando debitamente i diversi modi di argomentare spiegati nel libro antecedente, il che per brevità si tralascia.

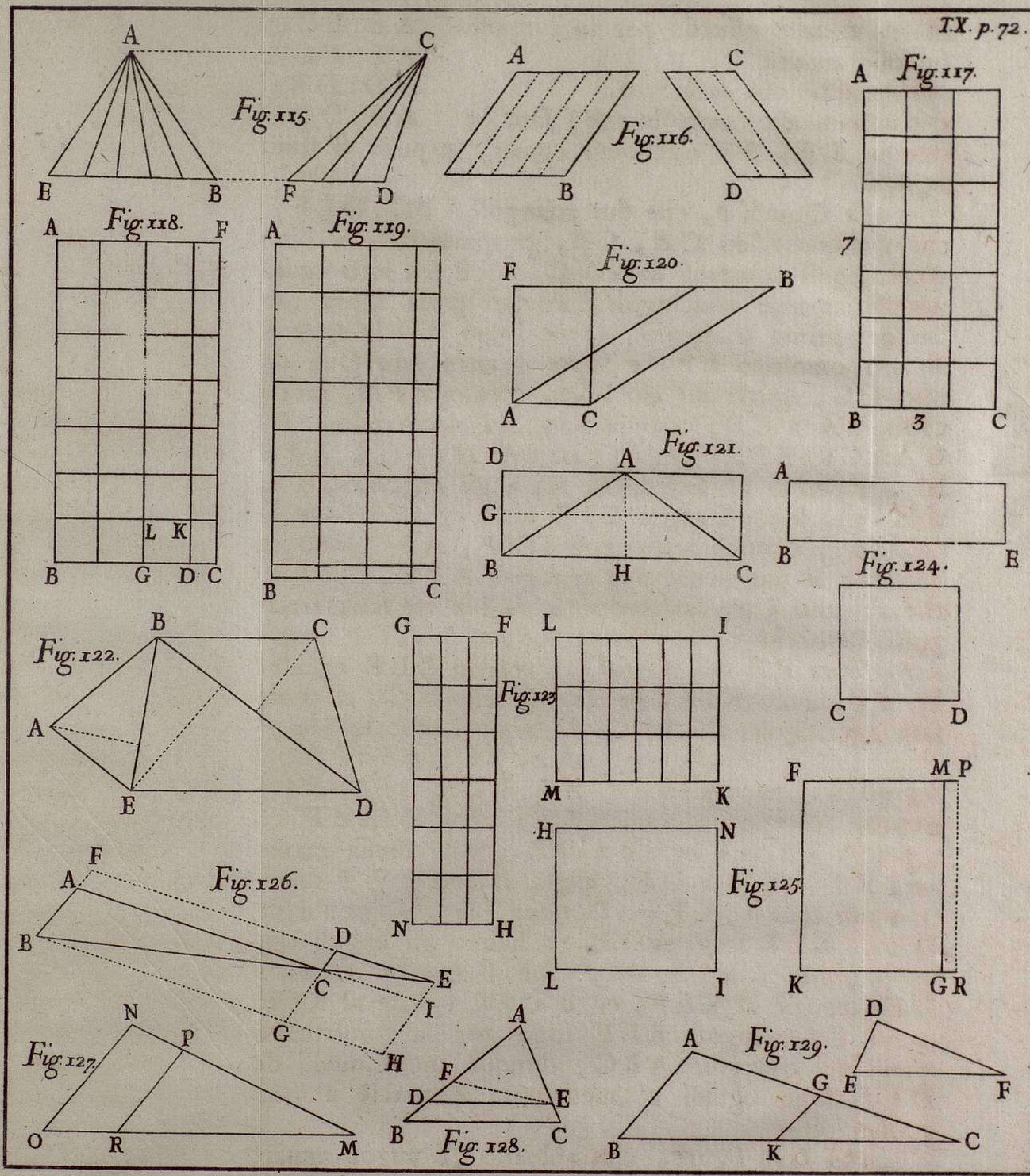
183 E all' incontro se in un triangolo ABC (*Fig.* 128) una retta DE dividerà proporzionalmente i lati AB, AC in D, ed E, essa sarà parallela alla base BC. Imperocchè se tale non fosse, potrebbe per lo punto E tirarsi un' altra retta EF parallela ad essa BC, il che fatto, sarebbero i lati AB, AC proporzionalmente divisi in E, F (artic. 182); il che è impossibi-

sibile; mentre essendo per lo supposto AE:EC::AD:DB
se fosse ancora AE:EC::AF:FB
converrebbe che fosse AD:DB::AF:FB
e componendo (articolo 156) sarebbe AB:DB::AB:FB
dunque DB, FB sarebbero eguali, e pure si sono poste diseguali.

184 Quindi è, che due triangoli ABC, DEF (*Fig.* 129), che abbiano i lati CA, CB, proporzionali a' lati FD, FE cogli angoli compresi da essi C, ed F fra loro eguali, saranno necessariamente equiangoli. Poichè presa sopra uno de' detti lati del primo triangolo, come sopra BC la retta CK eguale al lato omologo EF, e sopra l' altro lato CA del primo la retta CG, eguale all' altro lato omologo FD, sarà CG a CK, come CA a CB, e dividendo, ed alternando, saranno CG: GA::CK:KB; e perciò (articolo 183) GK, AB sono parallele, e perciò gli angoli G, A, e gli angoli K, B eguali (articolo 25). Ma gli angoli G, K sono eguali a' due D, E (articolo 49); dunque i triangoli DEF, ABC sono equiangoli.

185 E parimente due triangoli ABC, DEF (*Fig.* 130), che abbiano i tre lati proporzionali a' tre lati, saranno equiangoli. Perocchè posto, che i due lati BC, EF sieno omologhi, fatto sopra EF nel punto E l' angolo KEF eguale all' angolo B, e l' angolo KFE, eguale all' angolo C, il triangolo EKF sarà eguiangolo ad ABC. Dunque (articolo 180) saranno
AB:BC::KE:EF
ma già si suppongono AB:BC::DE:EF
dunque saranno KE:EF::DE:EF
e perciò KE sarà eguale a DE. Nell' istessa maniera si proverà KF eguale a DF, e già il lato EF è comune a' due triangoli EDF, KEF. Dunque (articolo 51) i due triangoli DEF, KEF sono eguali, ed hanno gli angoli eguali, che si oppongono a' lati eguali, cioè l' angolo D eguale al K, il DEF eguale al KEF, ed il DFE eguale al KFE; ma i tre angoli del triangolo KEF sono per la construzione eguali a quelli del triangolo ABC; dunque anche quelli del triangolo DEF sono eguali a' medesimi, e perciò i triangoli sono equiangoli.

186 Due figure, che abbiano gli angoli eguali, e i lati, che


T.X. p.72.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.

che li comprendono proporzionali, si chiamano *figure simili*; qualunque sia il numero de' loro lati. E perciò due quadrati sono sempre figure simili. E perchè ne' triangoli si è dimostrato (agli articoli 180, 185), che quando abbiano una di queste due condizioni, avranno necessariamente anco l'altra; perciò una di esse basterà per conchiudere, che due triangoli sieno simili.

187 E' anche manifesto, che due parallelogrammi A B, B C (*Fig.* 131), i quali sieno intorno al diametro d'un altro parallelogrammo A C, saranno simili e fra di loro, e col tutto A C; imperocchè facilmente si vede, che sono equiangoli, e dalle cose dette all'articolo 180 risulta, che hanno proporzionali que' lati, che contengono gli angoli eguali; onde quando il parallelogrammo A C fosse un quadrato, gli altri due A B, B C sarebbero anch' essi quadrati, e all' incontro essendo uno di essi un quadrato, anche il residuo, ed il tutto lo sarebbero.

Della proporzione, che hanno fra loro le figure simili.

188 SE saranno tre linee B K, D G, ed F (*Fig.* 132) proporzionali, il quadrato A K della prima starà al quadrato D E della seconda, come la prima B K alla terza F. Perocchè prolungando un lato del primo A B in B C, talchè B C sia eguale ad F, e compiendo il rettangolo C K, sarà questo eguale al quadrato D E (articolo 175); ora il quadrato A K sta al rettangolo C K, come A B a B C (artic. 167), cioè come B K ad F; dunque il quadrato A K sta anche al quadrato D E, come B K ad F; il che era da dimostrare.

189 E perchè la ragione di B K ad F dicesi duplicata di quella B K a D G (artic. 162); perciò due quadrati, come A K, D E staranno sempre fra loro in ragione duplicata de' loro lati.

190 Se di nuovo saranno tre linee proporzionali, un triangolo qualunque A F B (*Fig.* 133) fatto sopra la prima A B, starà al triangolo simile C G D fatto sopra la seconda C D, ed in cui questa sia lato omologo ad A B, come la prima A B

alla terza E. Imperciocchè presa sopra la retta B A la retta B H eguale ad E, e congiunta H F, essendo che si suppongono simili i triangoli A F B, C G D, avranno proporzionali i lati, che sono intorno agli angoli eguali D, B, e perciò avremo A B : B F : : C D : D G
dunque alternando (articolo 149) A B : C D : : B F : D G
ma per la costruzione abbiamo A B : C D : : C D : B H
dunque saranno B F : D G : : C D : B H
e perciò i due triangoli F B H, C D G hanno i lati reciprocamente presi proporzionali fra loro, onde sono necessariamente eguali (articolo 178); giacchè gli angoli B, D compresi da questi lati si suppongono per altro eguali. Posto ciò, essendo certo, che il triangolo F B A sta al triangolo F B H, come la base B A alla base B H (articolo 166), converrà dire, che lo stesso triangolo F B A stia anco al triangolo C D G, come B A a B H, cioè come B A ad E; il che era da dimostrare.

191 Da ciò nasce, che due triangoli simili stanno fra loro nella medesima ragione, in cui stanno due quadrati fatti sopra due lati omologhi (articolo 188), che è il medesimo, che dire stanno in duplicata ragione de' loro lati omologhi (articolo 189).

192 Quando si abbiano due figure simili (*Fig.* 134) A B C D E, F G H I K, i lati omologhi delle quali sieno A B, ed F G; B C, e G H; C D, ed H I; D E, ed I K; E A, ed F K; e gli angoli eguali sieno quelli, che vengono compresi da' detti lati omologhi, è manifesto, che in quanti triangoli si risolverà una delle dette figure, in altrettanti potrà risolversi l' altra. Sieno dunque amendue risolute, verbi grazia in tre triangoli per mezzo di rette linee tirate dagli angoli eguali A, F a tutti gli altri, come la figura dimostra. E' manifesto, che i due triangoli A B C, F G H, che hanno i lati proporzionali intorno agli angoli eguali B, G saranno simili (articolo 188), e l' angolo B C A sarà eguale al G H F; i quali angoli tolti dagli eguali B C D, G H I, lasciano eguali gli angoli A C D, F H I; e perchè C A starà a C B, come H F ad H G, e già C B si suppone stare a C D, come H G ad H I, starà anche per l' egualità ordinata (articolo 159) C A a C D, come H F ad H I. Dunque anco i triangoli A C D, H F I hanno i lati loro pro-

por-

porzionali intorno ad angoli eguali, e perciò sono simili fra loro; onde facendo passaggio da questi agli altri A D E, F I K, si mostrerà medesimamente, che questi due sono fra loro simili, e così di tutti gli altri, se più ve ne fossero; dacchè è manifesto, che due figure rettilinee simili si possono sempre risolvere in triangoli, non solo pari di numero, ma eziandio simili fra di loro, paragonando quelli, che sono sopra i lati omologhi.

193 Ora ciò posto è da considerare, che come sta il triangolo A B C al triangolo F G H, così il triangolo A D C al triangolo F I H; poichè essendo tanto i due primi, quanto i due ultimi simili fra loro (artic. 192), staranno così questi, come quelli nella ragione de' quadrati fatti su i lati comuni C A, H F, che sono lati omologhi (articolo 191). Parimente i due triangoli C A D, H F I, staranno fra loro, come i due A E D, F K I, dovendo stare tanto gli uni quanto gli altri, come i quadrati di A D, F I, e così degli altri triangoli, se maggior numero ve ne fosse; onde tutt' i triangoli d'un poligono hanno una medesima ragione a tutti i triangoli, che corrispondono a ciascun d'essi nell'altro poligono; e perciò tutto il poligono A B C D E sta a tutto il poligono F G H I K, come uno di essi triangoli A B C al suo corrispondente F G H. Ma il triangolo A B C sta al triangolo F G H in ragione duplicata de' lati omologhi, verbi grazia di A B ad F G (articolo 190), o sia nella ragione de' quadrati di A B, F G (articolo 191); dunque anche tutto il poligono sta a tutto il poligono in ragione duplicata di quella di A B, E G, o sia in ragione de' quadrati di A B, F G, i quali sono lati omologhi di essi poligoni.

194 Combinando pertanto le cose dette agli articoli 189, 191, 193, si raccoglie generalmente, che tutte le figure simili stanno fra loro nella proporzione duplicata de' loro lati omologhi.

195 Si raccoglie ancora, che se quattro linee (*Fig.* 135) A, B, C, D saranno proporzionali, le figure rettilinee descritte sopra di esse, che sieno simili fra loro a due a due, ed abbiano per lati omologhi quelle linee, che sono proporzionali, saranno anch' esse proporzionali; cioè a dire, se come A a B, così sarà C a D, e le due figure sopra A, B saranno simili fra

loro, come pure le due ſopra C, D ſimili fra loro per modo, che i lati omologhi delle figure A, B ſieno A, B, e gli omologhi delle figure C, D ſieno C, D; ſtarà la figura A alla B, come la C alla D. Imperocchè la ragione della figura A alla figura B ſarà duplicata di quella del lato A al lato B (articolo 194), cioè di quella della retta C alla retta D. Ma anche la ragione della figura C alla figura D è la ragione duplicata della retta A alla retta B (articolo 194); dunque è manifeſto, che le figure ſono proporzionali. E al contrario facilmente ſi moſtrerà, che le quattro figure ſaranno proporzionali, e ſimili fra loro a due a due, i loro lati omologhi ſaranno proporzionali.

196 Poichè per le coſe dette all' articolo 194 tutte le figure ſimili hanno fra loro la ragione duplicata de' loro lati omologhi, ne ſegue, che due parallelogrammi ſimili abbiano anch' eſſi una tal ragione. Se poi non ſaranno ſimili, ma che tuttavia ſiano equiangoli, dico che avranno fra loro la ragione compoſta di quelle de' loro lati prendendo gli antecedenti delle ragioni in uno de' parallelogrammi, e i conſeguenti nell' altro. Sieno dunque due parallelogrammi equiangoli (*Fig.* 136) A C, C F. Dico che la ragione del parallelogrammo A C al parallelogrammo C F è compoſta della ragione d' uno de' lati del primo, qualunque egli ſia, verbi grazia B C ad uno de' lati del ſecondo verbi grazia C G, e della ragione dell' altro lato del primo C D all' altro lato del ſecondo C E. Intendanſi i due lati B C, C G poſti in diritto uno dell' altro nel punto C per modo, che B C G ſia una ſola retta linea; il che fatto, è facile il vedere (per l' artic. 18), che eziandio gli altri due lati D C, C E non coſtituiranno, che una ſola retta D C E. Si prolunghino i lati A D, F G, finchè s' incontrino nel punto H. Quindi come il lato B C al lato C G così intendaſi, che ſtia una retta di qualſiſia lunghezza I ad un' altra K; e come il lato D C al C E, così queſta retta K ad una terza L. Poichè dunque la ragione del parallelogrammo A C al parallelogrammo C H è quella di B C a C G (artic. 166), cioè di I a K, e quella del parallelogrammo C H al parallelogrammo C F è quella di C D a C E, cioè quella di K ad L, sarà anche per egualità ordinata (artic. 159) la ragione del parallelogrammo A C

al paal parallelogrammo CF quella di I ad L. Ma la ragione di I ad L è composta delle ragioni di I a K, e di K ad L (articolo 161), cioè delle ragioni di BC, CG, e di DC a CE. Dunque la ragione del parallelogrammo AC al parallelogrammo CF è composta delle ragioni del lato BC al CG, e del lato DC al CE: il che era da dimostrare.

197 E perchè due rettangoli sono parallelogrammi equiangoli, avranno sempre fra loro la ragione composta di quelle de' loro lati; cioè il primo di essi starà al secondo in ragion composta dell' altezza del primo all' altezza del secondo, e della base del primo alla base del secondo.

198 E finalmente, perchè due triangoli sono sempre la metà di due rettangoli, che hanno per base un lato del triangolo, e per altezza la perpendicolare tirata a questo lato dall' angolo opposto, ne segue, che due triangoli, ancorchè non avessero alcun angolo eguale, saranno sempre in ragion composta delle loro basi, e delle loro altezze, prendendo in ciascuno di essi per base quel lato, che si vorrà, e per altezza la perpendicolare, che cade dall' angolo opposto sopra il detto lato.

LIBRO VIII.

Problemi, che dipendono dalla dottrina delle proporzioni.

NEl presente Libro, benchè non ſiamo per eſporre, che problemi geometrici fondati ſu la dottrina delle proporzioni, ſarà tuttavia facile il dedurre da queſti molti utiliſſimi, ed importantiſſimi teoremi, che a bella poſta abbiamo tralaſciati fin' ora, e particolarmente nel Libro ſettimo, come quelli, la dimoſtrazione de' quali più facilmente ſi ſarebbe compreſa, deducendoli a guiſa di corolarj da' problemi di queſt' ottavo Libro. Imperocchè la ſoluzione di ciaſcun problema, ſe ben ſi conſidera, ſempre forniſce un teorema, ſiccome all' incontro ciaſcun teorema ſomminiſtra il fondamento, e l' artificio per ſciogliere uno, o più problemi; onde per lo più la medeſima dottrina con poca mutazione o per modo di teorema, o di problema ſi può proporre. Così, a cagione d' eſempio, ſi è da noi dimoſtrato all' articolo *69* per modo di teorema, che ne' triangoli rettangoli il quadrato dell' ippotenuſa è eguale alla ſomma de' quadrati de' perpendicoli, dal che è ſtato facile lo ſciorre il problema dell' artic. 117, cioè dati due quadrati, farne un altro eguale alla ſomma di amendue, mentre a ciò fare altro non ha biſognato, che diſporre i lati de' due quadrati dati per modo, che faceſſero angolo retto, e compito poſcia il triangolo fare un quadrato ſopra l' ippotenuſa di queſto. Che ſe da principio aveſſimo preſo a ſciorre queſto medeſimo problema, la coſtruzione, e la dimoſtrazione di eſſo ci avrebbe paleſata la medeſima proprietà de' triangoli rettangoli, che per modo di teorema ſi era premeſſa, cioè la egualità de' quadrati de' perpendicoli al quadrato dell' ippotenuſa. Per ſimil modo adunque non ſarà difficile il raccorre da' molti de' problemi, che ora ſciorremo, diverſe proprietà de' circoli, e delle figure rettilinee, delle quali per lo ſtudio della brevità, e della facilità non ſi era fin' ora data notizia; e a tal fine ſi darà talvolta da noi più d' un metodo per ſciorre un' iſteſſo problema.

Pro-

Problemi, che riguardano le terze, le quarte, e le medie proporzionali in linee.

199 DAte due rette linee, trovare ad esse la terza proporzionale. Si stendano le due rette date una sopra l'altra incominciando dal medesimo punto A (*Fig.* 137), come A B, A D, e fatto in A qualsivoglia angolo rettilineo D A E, per l'altro estremo D di quella linea, che dee essere la seconda nella proporzione, si descriva un arco di circolo, che abbia per centro il punto A, e che tagli A E in C, quindi congiunto B C, si tiri per D la retta D E parallela a B C, la quale tagli A E in E. Dico, che A E è la terza proporzionale cercata. Imperocchè essendo i triangoli B A C, D A E equiangoli (articolo 41) avranno i lati intorno all'angolo comune A proporzionali (articolo 180), cioè come A B ad A C, così A D ad A E. Ma A C per la costruzione è eguale ad A D; dunque come A B ad A D, così A D ad A E. Il che era da fare.

Lo stesso problema si potrà eziandio sciorre nella seguente maniera. Sia la prima delle due date A B (*Fig.* 138), a cui nell'estremo B si drizzi a perpendicolo la seconda B C, e congiunta A C, si tiri a questa per C la perpendicolare C D, che incontri la A B prolungata nel punto D. Dico, che D B è la terza proporzionale cercata. Imperocchè essendo l'angolo A C D retto, e da esso cadendo sull'ippotenusa A D la perpendicolare C B, saranno i triangoli A B C, B C D equiangoli (articolo 42), e perciò avranno i lati proporzionali, prendendo per omologhi quelli, che sono opposti ad angoli eguali (articolo 180), cioè a dire, come A B a B C, così B C a B D; il che era da fare.

200 Quando delle linee date la seconda sia minore della prima, si sciorrà ancora il problema nel seguente modo. Sia la prima F G (*Fig.* 139), e sopra di essa descrivasi il semicircolo F H G, e dall'uno de' due estremi F si applichi nel semicircolo F H eguale alla seconda delle date. Poscia dal punto H tirisi la H K perpendicolare ad F G, che la incontri in K. Dico, che F K è la terza proporzionale, che si cerca. Imperocchè congiunta H G, l'angolo F H G sarà retto (articolo

colo 92); onde il triangolo FHK sarà equiangolo al tutto FHG, e perciò, come nel precedente articolo, ordinando debitamente i termini della proporzione, si avrà FG:FH::FH:FK. Il che &c.

201 Finalmente potrà trovarsi la terza proporzionale a due date in quest' altra maniera. Sia AB (*Fig.* 140) la prima, AC la seconda, che si dispongano in A a qualsivoglia angolo. Si congiunga BC, e poscia all' angolo B facciasi eguale l' angolo ACD, e la retta CD, che fa quest' angolo tagli AB (prolungata ove facesse uopo) nel punto D. Dico, che AD è la terza cercata. Perocchè i due triangoli ACB, ACD, avendo comune l' angolo A, ed eguali per la costruzione i due ABC, ACD, saranno equiangoli, e perciò si conchiuderà, come sopra AB:AC::AC:AD. Il che era &c.

202 Date due rette, trovare fra esse la media proporzionale. Primo modo. Sulla maggiore delle due date AB (*Fig.* 141) si descriva il semicircolo ACB, e da uno degli estremi A prendasi sopra AB la retta AD eguale all' altra delle date. Quindi alzando la perpendicolare DC, che incontri il semicircolo in C, e congiungendo AC, è evidente per le cose dette all' articolo 200, che sarà AB ad AC, come AC ad AD, e perciò AC sarà la media cercata.

Secondo modo. Si costituiscono le due date EF, FG (*Fig.* 142) in diritto nel punto F per modo, che GFE sia una sola retta, sopra la quale facciasi il semicircolo GHE, e si alzi la perpendicolare HF fino al semicircolo in H. E' manifesto perciò, che si disse all' articolo 199, che FE starà ad FH, come FH ad FG; e perciò HF è la media, che si cerca.

Terzo modo. Sieno le linee date AF, AH (*Fig.* 143) amendue stese sulla retta AH, e incominciant dal punto A. Si descriva un circolo, che passi per i due punti H, F (il che si fa agevolmente o col prendere per diametro del circolo la retta HF, o col tirare sopra di essa una perpendicolare, che la divida a mezzo, e poscia far centro del circolo in un punto, qual siasi, di questa perpendicolare coll' intervallo della distanza di questo punto dal punto H, ovvero F), e a questo circolo si tiri dal punto A la tangente AE (articolo 123). Dico, che questa è la media, che si cerca. Imperocchè

chè congiungendo dal punto del contatto E le rette E H, E F, l' angolo A E F ſarà eguale all' angolo H, che è nell' alterno ſegmento (articolo 49). Dunque i triangoli E A H, E A F (come ſi è moſtrato all' articolo 201) ſi moſtreranno equiangoli, e i loro lati proporzionali, cioè A F : A E : : A E : A H. Il che era da &c.

203 Date tre rette linee, ritrovare la quarta proporzionale. Primo modo. Si congiungano le due prime B A, B C (*Fig.* 144) a qualunque angolo in B, e ſulla prima, che ſia B A, ſi prenda (prolungandola ove faccia biſogno) la retta B D eguale alla terza delle date. Quindi congiungendo A C, ſi tiri ad eſſa la parallela D E, che incontri B E (prolungata quanto occorra) in E. Dico, che B E è la quarta cercata; il che è evidente; mentre a cagione delle parallele, i due triangoli A B C, D B E hanno i lati intorno all' angolo B proporzionali, cioè B A : B C : : B D : B E (per l' articolo 180).

Secondo modo: nella medeſima figura poſta B A la prima delle date, ed A C la ſeconda, che faccia con eſſa qualunque angolo B A C, ſi congiunga B C, che prolungaſi indefinitamente, e prendendo ſopra B A la B D eguale alla terza data, ſi tiri D E parallela ad A C, che incontri B C in E. Dico, che D E ſarà la quarta. O pure poſta B A la prima, e in diritto di eſſa A D la ſeconda, e fatto qualſiſia angolo D B E nel punto B, ſi prenda ſopra B E la B C eguale alla terza, e congiunta A C, ſi faccia a queſta parallela D E. Dico, che C E ſarà la quarta. La dimoſtrazione dell' una, e dell' altra di queſte due ultime coſtruzioni è evidente per le coſe dette agli articoli (180, 181) per eſſere i triangoli A B C, D B E nell' uno, e nell' altro caſo equiangoli a cagione delle parallele A C, D E.

Terzo modo. Si diſpongono le tre linee date in maniera, che la ſeconda A D (*Fig.* 145), e la terza A C ſieno ſopra una medeſima retta A D, incomincianti dal punto A, e la prima A B ſopra un' altra retta A E, che cominci dal medeſimo punto A, e faccia con eſſa qualunque angolo D A B. Per li tre punti D, C, B, ſi deſcriva un circolo (articolo 121), il quale tagli la retta A B, prolungata, ſe biſogna, nel punto E. Dico, che A E ſarà la quarta proporzionale, che ſi cerca. Imperocchè congiunte C B, D E, essendo C D B E un quadrilatero, i cui quattro angoli sono nella periferia d'un circolo, saranno i due angoli fra loro opposti D C B, D E B eguali a' due retti (articolo 93). Ma anche D C B, A C B sono eguali a' due retti (articolo 16). Dunque D E B, A C B sono eguali fra loro, e i triangoli A C B, A E D equiangoli; onde (articolo 180) saranno A B : A C :: A D : A E, o pure alternando A B : A D :: A C : A E. Il che &c.

Quarto modo. Si costituiscano in diritto la seconda B E (*Fig.* 146), e la terza E D una da una parte, e l'altra dall'altra di un loro estremo comune E, e tirisi per E in qualunque angolo B E A, la A E eguale alla prima data. Per li tre punti A, B, D si descriva un circolo, che tagli A E prolungata dalla parte di E in C. Dico, che E C è la quarta proporzionale cercata. Perocchè congiungendo A B, D C, i due triangoli B E A, C E D, che hanno gli angoli al vertice in E eguali, e di più gli angoli A B D, A C D, che insistono alla stessa periferia A D eguali (articolo 89), saranno equiangoli. Dunque (articolo 180) avranno i lati proporzionali, cioè A E : B E :: E D : E C. Il che &c.

204 E' manifesto, che il problema dell'articolo 199, cioè date due rette, trovar la terza proporzionale, è il medesimo, che si proporrebbe in questi termini: Dato un quadrato, e una retta per lato d'un rettangolo, trovar l'altro lato di questo, talchè il rettangolo sia eguale al quadrato; imperocchè la seconda delle date può intendersi esser lato d'un quadrato, il quale dee esser eguale al rettangolo, che si comprenderebbe dalla prima, e dalla terza (articolo 175). Così pure, che il problema dell'articolo 202, cioè fra due rette trovar la media proporzionale, è lo stesso, che, dato un rettangolo, fare un quadrato eguale ad esso; giacchè le due date possono intendersi lati d'un rettangolo, a cui dee essere eguale il quadrato della media (articolo 175). E che finalmente il problema dell'articolo 203: date tre rette, trovare la quarta proporzionale, è lo stesso, che, dato un rettangolo, farne un altro, che abbia un lato eguale a un dato; mentre la seconda, e la terza delle tre date possono intendersi contenere un rettangolo, a cui dee esser eguale quello, che si farebbe

dalla

dalla prima data, e dalla quarta, che si cerca (articolo 174); onde dalle soluzioni date ne' suddetti articoli, restano anche sciolti in più maniere i medesimi problemi, quando fossero proposti in questi altri termini, che ora si sono detti.

205 Data la retta terminata A B (*Fig.* 147), descrivere una linea curva, da ciascun punto della quale P tirando una perpendicolare P M sulla detta retta, essa P M sia media proporzionale fra le parti A M, B M della retta A B. Descrivasi sopra A B come diametro il circolo A P B, e sarà la curva cercata; imperocchè, preso nell' uno, e nell' altro semicircolo qualunque punto P, la perpendicolare P M sarà media fra A M, B M per le cose dette all' articolo 202 nella seconda soluzione del problema ivi proposto. La stessa soluzione servirebbe, se il problema fosse espresso in questi termini: data una retta terminata, descrivere una curva, da ciascun punto della quale, tirata una perpendicolare sopra la retta suddetta, il quadrato della perpendicolare sia eguale al rettangolo compreso dalle parti della retta fatte dalla sezione di essa colla perpendicolare; come è evidente per l' articolo 175.

206 Dato un circolo A B C, (*Fig.* 148) trovare fuori di esso il punto D tale, che tirando da esso una retta D C B, la quale tagli il circolo in due punti C, B, e un' altra D A, che lo tocchi in A, il rettangolo fatto dalle rette B D, C D, sia eguale al quadrato della tangente D B; o pure, che la tangente D A sia media proporzionale fra le rette B D, C D. Questo problema si scioglie prendendo qualsivoglia punto fuori del circolo, e tirando da esso qualsivoglia retta, che tagli il circolo in due punti, come si rende manifesto per le cose dette all' articolo 202 nella terza soluzione.

207 Dato un circolo G H I, (*Fig.* 149) trovar dentro di esso il punto E, e tirare per questo punto due sottese G E F, H E I talmente, che il rettangolo fatto dalle parti dell' una G E, E F sia eguale al rettangolo delle parti dell' altra H E, E I; o pure G E ad E H stia come E I ad E F. Questo ancora si scioglie prendendo dentro al circolo qualsisia punto, e tirando per esso due sottese totalmente ad arbitrio, come risulta dalle cose dette all' articolo 203 alla soluzione quarta. I problemi di questa sorte, ne' quali ogni punto, che si prenda

ſopra un dato piano, o in un dato ſpazio ſoddisfa alla queſtione, debbono riguardarſi piuttoſto come teoremi, come nel caſo dell' articolo 206 ſi riduce il problema a queſto teorema: ſe fuori del circolo ſi prenderà un punto, da cui ſi tiri una tangente al medeſimo, ed un' altra linea, che lo tagli in due punti, il quadrato della tangente ſarà eguale al rettangolo delle rette compreſe fra il punto preſo, e le ſezioni della ſecante col circolo; e nel caſo del preſente articolo 207, ſi ridurrà il problema in queſto teorema: ſe dentro un circolo ſi prenderà un punto, per cui ſi tirino due ſotteſe; il rettangolo delle porzioni dell' una ſarà eguale al rettangolo di quelle dell' altra.

Problemi, che appartengono alla diviſione delle linee in ragioni date.

208 Tagliar una retta linea in ragione di due linee date. Sia la retta A B (*Fig.* 150), che ſi debba tagliare in due parti, che abbiano fra loro la ragione delle linee *a g*, *g f*. E' manifeſto, che facendo in A un angolo B A F di qualſivoglia miſura, e prendendo ſopra A F le due A G, G F eguali alle due *a g*, *g f*, ſe ſi congiungerà F B, e ad eſſa ſi tirerà parallela G H, che tagli A B in H, reſterà A B tagliata in H, come ſi deſidera (articolo 182). L' iſteſſo ſarebbe, ſe ſi proponeſſe, che tutta A B doveſſe ſtare ad A H, come A F ad A G, o ſe in altri ſimili modi ſi eſprimeſſe la proporzione, in cui doveſſe tagliarſi A B; come è manifeſto per la dottrina de' modi d' argomentare nelle proporzioni ſpiegate di ſopra.

209 L' iſteſſo ſi farebbe ſe occorreſſe tagliar la retta M N (*Fig.* 151) in tre, e più parti, che aveſſero una ragione data, cioè come M K, K V, V S. Poichè congiunta S N, e per li punti V, K tirate le rette V P, K R parallele ad S N, è manifeſto, che M R ſarebbe ad R P, come M K a K V, e, tirando R T O parallela ad M S, ſarebbe anche R P a P N, come R T, cioè K V a T O, cioè ad V S, e perciò le tre parti M R, R P, P N avrebbero l' iſteſſa ragione colle tre M K, K V, V S.

210 Tagliar una retta in modo, che la ragione delle parti di

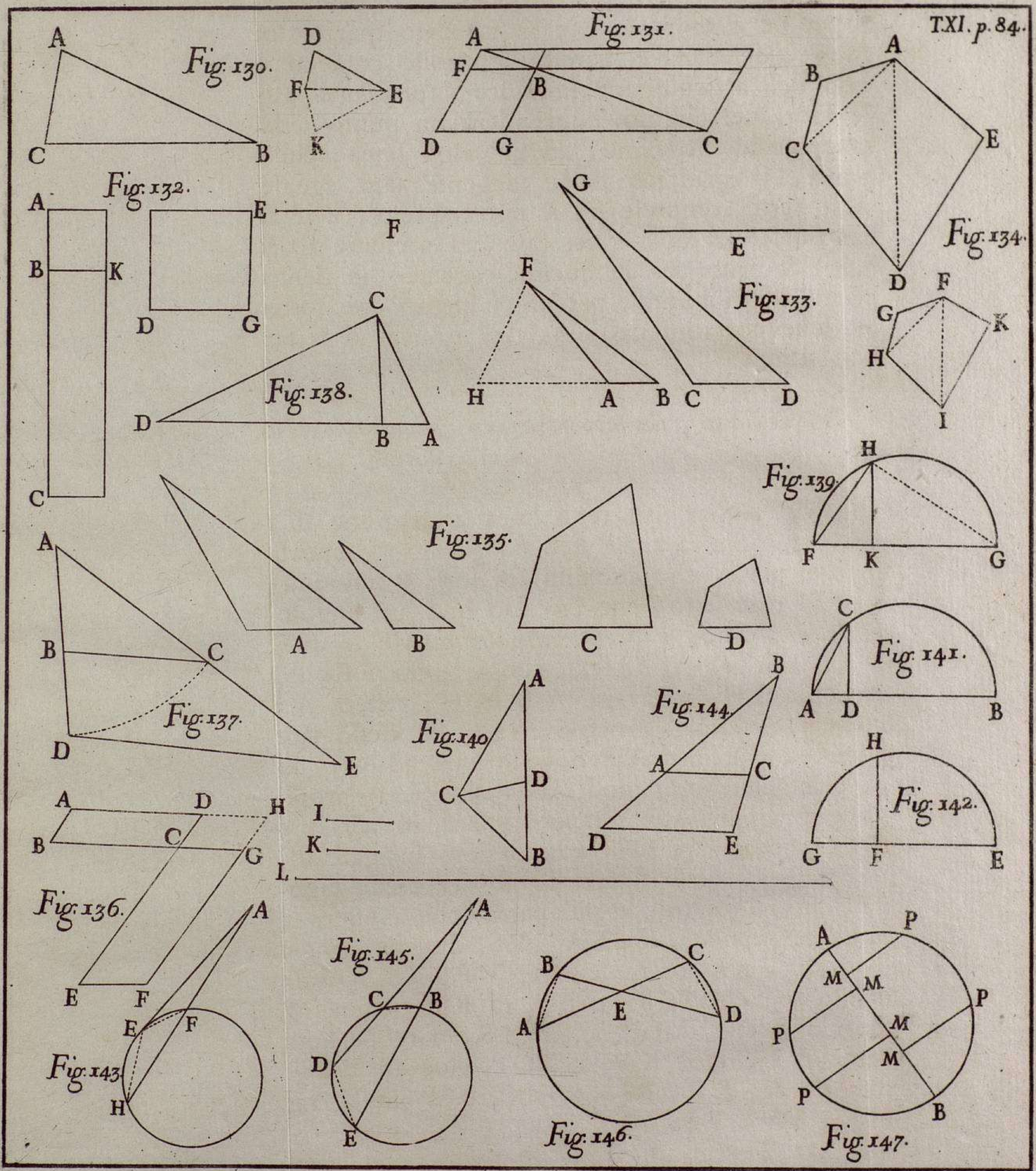


Fig. 130.
Fig. 131.
Fig. 132.
Fig. 133.
Fig. 134.
Fig. 135.
Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.

di essa sia quella, che si esprime con due, o più numeri dati. Sia (*Fig.* 152) A B da tagliar in tre parti, che abbiano fra loro quella ragione, che si esprime con questi tre numeri 2, 5, 3. Si faccia in A un angolo di qual si voglia misura F A B, e sopra F A prendasi A C d'una lunghezza arbitraria, la qual lunghezza si vada replicando in C D, D I &c. tante volte quante è la somma de' numeri dati 2, 5, 3, che nel nostro caso è 10. Posto dunque, che A C preso 10 volte determini la lunghezza A F, si congiunga F B; indi, perchè il primo numero dato è 2, si prendano da A verso F due delle misure suddette, che siano A D, e per D si tiri D G parallela ad F B; e perchè il secondo numero è 5, si prendano da D verso F cinque altre misure, che sieno D E, e per E si tiri E H parallela ad F B, e così si proseguisca, finchè vi sono divisioni da farsi. E' manifesto, che le parti A G, G H, H B sono proporzionali alle parti A D, D E, E F (articolo 209), e perciò si esprimeranno le loro ragioni co' medesimi numeri di queste, cioè nel nostro caso co' numeri 2, 5, 3. Il che era da fare. L' istesso si farebbe, se si proponesse di tagliare una linea in modo, che la ragione della tutta alle sue parti si esprimesse con numeri dati, come nel nostro caso, se A B dovesse essere diviso in tre parti, talchè tutta A B fosse a ciascuna di esse, come dieci a due, cinque, e tre; che è come dire se si cercassero i due decimi, i cinque decimi, e i tre decimi della linea A B, e così in ogni altro numero possibile.

211 Da ciò è manifesto, che per tagliare una linea C D (*Fig.* 153) in tante parti eguali quanto si vuole, verbi grazia in sette, basta fare in uno de' due estremi C l'angolo D C E di qualunque grandezza, e quindi presa sulla linea indefinita C E una grandezza arbitraria C I, replicarla sette volte sopra di essa fino in E, e poscia congiunta E D per ciascuna divisione di C E, come per I, tirare delle rette linee, come I F parallele a D E, le quali divideranno C D nella maniera, che si desidera.

212 Tagliare speditamente la base B C (*Fig.* 154) d'un dato triangolo B A C in due parti proporzionali a' lati adiacenti a ciascuna di esse parti. Dividete per mezzo l'angolo B A C opposto alla base B C, colla retta A D, la quale tagli essa base

se

ſe in D. Dico, che come B A ad A C, così B D a D C. Imperocchè tirando C E parallela a D A, che incontri B A prolungata in E, l' angolo B A D ſarà eguale all' interno, ed oppoſto A E C, e l' angolo D A C all' alterno E C A; ma B A D, D A C per la coſtruzione ſono eguali; dunque anco A E C, E C A ſono eguali, onde i lati A E, A C ſono eguali. Ma a cagion delle parallele A D, C E, abbiamo B D : D C : : B A : A E (articolo 182). Dunque ſaranno ancora B D : D C : : B A : A C; il che era da fare. Da ciò ſi raccoglie per teorema, che la retta, che divide a mezzo l' angolo d' un triangolo divide la baſe di eſſo in parti proporzionali a' lati, che comprendono il detto angolo.

213 Tagliar una linea data *nell' eſtrema*, e *media ragione*, cioè in modo, che come tutta la linea ad una delle ſue parti da trovarſi, così ſtia queſta all' altra parte. Sia la data retta A B (*Fig.* 155); ſopra di eſſa deſcrivaſi il quadrato A C, di cui un lato A D dividaſi per mezzo in E, e tirata E B, dal centro E ſi deſcriva per B il circolo G B F, e prendaſi A L eguale ad A F. Dico, che la retta A B, e tagliata in L, come ſi domanda, cioè, che tutta A B ſta ad A L, come A L ad L B. Imperocchè tirata per L la retta K L parallela ad A F, e per F la F K parallela ad A L; eſſendo E G, E F eguali, e parimenti E D, E A eguali, reſteranno D G, A F eguali, e perciò D G con D A, cioè G A, eguale ad A F con D A, cioè ad F D; e perchè anco F K è eguale ad A F, il rettangolo D K fatto da D F, F K, ſarà eguale al rettangolo, che ſi farebbe da G A, A F. Ma il rettangolo di G A, A F è eguale al quadrato di A B (articolo 175), cioè al quadrato A C; dunque anco il rettangolo D K è eguale al quadrato A C, e toltone la parte comune D L, reſta il rettangolo L C eguale al quadrato A K. Dunque (articolo 176) come B C, cioè A B ad A L, così A L ad L B; il che era da fare &c.

Proble-

Problemi, che riguardano la divisione della circonferenza del circolo, e la costruzione delle figure regolari.

214 LA metà della circonferenza del circolo, cioè gradi 180 si determina tirandone un diametro. La quarta parte, cioè gr. 90, tirando un altro diametro perpendicolare al primo. L' ottava parte, che è di gr. 45, dividendo a mezzo l' angolo compreso da' suddetti diametri, e così di tutte le altre suddivisioni per metà, cioè gr. 22°. 30′; 11°. 15′ &c., come è noto per le cose dette ne' primi libri di questi elementi. Per trovar ora la terza, la sesta, la duodecima, e le altre parti della circonferenza, che da queste dipendono, suddividendo per metà, cioè a dire i gradi 120°, 60°, 30°, 7°, 30′ &c. si applichi primieramente sulla periferia del circolo in B C (*Fig.* 156) il semidiametro di esso A B, e l' arco sotteso B C sarà la stessa parte della periferia; imperocchè congiungendo A C, è manifesto per la costruzione, che il triangolo A B C sarà equilatero, e perciò ciascuno degli angoli di esso, come B A C sarà la terza parte di due retti, cioè gradi 60. Dunque l' arco B C sarà di gradi 60, cioè un sesto di tutta la periferia. Prendendo poscia l' arco C D eguale a C B, sarà B D gradi 120, cioè il terzo della periferia. E dividendo per mezzo C B in E, sarà E B il dodicesimo di essa, cioè gradi 30, e di nuovo dividendo per mezzo E B, si avranno altre, ed altre suddivisioni della circonferenza. Onde è manifesto potersi avere tutte le parti di questa, che sono denominate da' numeri di questa serie geometrica, 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c. in infinito, come pure di quest' altra, 3, 6, 12, 24, 48, 96 &c. in infinito, le quali amendue crescono in ragione doppia.

215 Per trovar poscia la quinta parte della circonferenza del circolo, e susseguentemente la decima, la ventesima, e tutte le altre denominate da' numeri di questa serie geometrica crescente in ragione doppia, in infinito, 5, 10, 20, 40, 80 &c., cioè gr. 72, 36, 18, 9 &c. dividete il semidiametro di esso A B (*Fig.* 157) nel punto C in tal maniera, che A C sia media proporzionale fra A B, e B C (articolo 213), il che fatto,

to, applicate ſulla periferia del circolo la retta B D eguale ad A C. Dico, che l'arco B D è la decima parte della periferia, cioè gradi 36; onde preſo l'arco D E eguale a D B, verrà ad eſſere l'arco B E la quinta parte di eſſa, cioè gradi 72. Imperocchè eſſendo per la coſtruzione B A : B D : : B D : B C i triangoli B A D, B D C avranno i lati proporzionali intorno ad un angolo comune B, e perciò ſaranno equiangoli (articolo 184). Ma B A D è iſoſcele per la coſtruzione; dunque anco B D C è iſoſcele, e il lato C D eguale a B D, cioè a C A, e perciò ſarà iſoſcele eziandio il triangolo C D A. Ciò poſto eſſendo gli angoli C A D, C D A eguali fra loro, ed eſſendo B C D eſterno eguale a' due ſuddetti interni, egli ſarà doppio di C A D. Dunque anco C B D, che è uguale a B C D, ſarà doppio di C A D. E perchè C B D, o ſia A B D è eguale ad A D B, i due A B D, A D B ſaranno inſieme quadrupli di C A D, o ſia di B A D; onde ſe la ſomma de' tre angoli A B D, A D B, B A D, che è di 180 gradi, s' intenderà diviſa in cinque parti eguali, l'angolo B A D ſarà una di queſte parti, cioè gradi 36. Il che era da dimoſtrare.

216 Da ciò ſi raccoglie il modo di trovar eziandio la decimaquinta parte della circonferenza, come pure la trenteſima, e le altre ſummoltiplici nella ſerie 15, 30, 60 &c., cioè i gradi 24, 12, 6, 3 &c. Imperocchè trovata, che ſia (per l'articolo 214) la terza parte della circonferenza A B (*Fig.* 158), che è di gradi 120, e la quinta A C, che è di gradi 72 (per l'articolo 217), il reſiduo C B ſarà di gr. 48, e la metà di eſſo D B di gradi 24, che è la decimaquinta parte, dalle quali, dividendo ſempre per metà, ſi avrà la trenteſima e seſſanteſima, e le altre dette di ſopra. Con artificio non diſſimile ſi poſſono trovare molte altre parti della circonferenza.

217 Non oſtante, che per le coſe dette ſi poſſano avere infinite diviſioni della periferia del circolo, ne rimangono nulladimeno infinite altre, che non poſſono averſi co' metodi fin' ora eſpoſti. A cagion d' eſempio non è poſſibile trovare, per le coſe fin quì ſpiegate, la ſettima parte della periferia, nè la nona, nè l'undecima, nè la trediceſima, nè la deciſetteſima &c., nel che è d' avvertire, che ſiccome per ritrovare

la

la quinta parte ſi è fatto (all' articolo 215) un triangolo iſoſcele, che ha gli angoli alla baſe doppj dell' angolo verticale, così per trovare la ſettima parte, converrebbe far un iſoſcele, che aveſſe gli angoli alla baſe triplici del verticale; mentre in tal modo intendendo la ſomma de' tre angoli del triangolo, che è di gradi 180, diviſa in ſette parti, ſei ne toccherebbero agli angoli ſulla baſe, e una al verticale, il quale ſarebbe perciò la ſettima parte di gradi 180, e il doppio di eſſo la ſettima parte della periferia. Nell' iſteſſo modo per aver la nona parte di queſta, converrebbe far un triangolo iſoſcele cogli angoli alla baſe quadrupli dell' angolo verticale, e così negli altri caſi. Il metodo di fare queſti triangoli iſoſceli, che abbiano gli angoli alla baſe moltiplici in qualſivoglia ragione dell' angolo verticale, dipende dalla invenzione di due, o più medie continuamente proporzionali fra due linee date, i quali problemi (come i moderni Geometri hanno dimoſtrato) non poſſono ſcioglierſi col tirare ſolamente linee rette, e circoli, al che ſi riducono tutte le coſtruzioni fin' ora da noi praticate, ma richieggono la deſcrizione d' altre linee curve, e perciò non abbiamo per ora luogo a parlarne.

218 Una figura ſi chiama *iſcritta* in un circolo, quando tutti gli angoli di eſſa ſono nella periferia di queſto, e *circoſcritta* al circolo, quando tutti i lati della figura toccano il circolo. All' incontro un circolo ſi chiama iſcritto in una figura, quando egli tocca tutti i lati di queſta, e circoſcritto alla figura, quando paſſa colla ſua periferia per tutti gli angoli di eſſa.

219 Per iſcrivere un poligono regolare di qualunque numero di lati in un dato circolo, baſta ſaper trovare una tanta parte della periferia, quanto è il numero de' lati del poligono. Come ſe nel circolo A B C (*Fig.* 159) ſi doveſſe iſcrivere un pentagono regolare, trovata prima (articolo 215) la quinta parte della periferia A B, e quella cinque volte replicata in B C, C E, E F, F A, e tirate le corde A B, B C &c. è manifeſto, che queſte corde, ſottendendo tutte archi eguali, ſarebbero eguali, e che ciaſcun angolo, come A B C, eſſendo in un ſegmento di due quinte parti della periferia, ſarebbe eguale a ciaſcun altro, e perciò il pentagono A B C E F ſarebbe regola-

re, ed iſcritto nel circolo. Il medeſimo diſcorſo ſi applica a tutti gli altri poligoni regolari di qualſivoglia numero di lati; onde qualunque volta non ſi poſſa trovare la parte della periferia, che corriſponde al poligono da iſcriverſi, non ſi potrà queſto iſcrivere co' metodi fin' ora dati.

220 Per circoſcrivere ad un dato circolo A B C (*Fig.* 160) un poligono regolare di ſpecie data, baſta ſaper iſcrivere nel medeſimo circolo un ſimil poligono A B C D E, e poſcia per tutti gli angoli di queſto tirare delle tangenti al circolo, le quali comprenderanno il poligono richieſto F G H I K. Imperocchè tirate dal centro L le rette L B, L G, L A, L F, L E, eſſendo le tangenti F A, F E eguali (articolo 84), ſaranno i tre lati del triangolo F E L eguali a' tre del triangolo F A L; e perciò l' angolo A L E doppio di A L F. Per una ſimil ragione ſarà A L B doppio di A L G, ed eſſendo A L E, A L B eguali (articolo 76), le metà A L F, A L G ſaranno eguali; onde ne' triangoli A L F, A G L, che hanno gli angoli in L eguali, e quelli in A retti, con un lato comune A L, i lati A G, A F ſaranno eguali, ed A F ſarà metà di F G. Così pure ſi proverà F E metà di F K; e perciò eſſendo F A, F E eguali, ſaranno eguali F G, F K, e lo ſteſſo ſi moſtrerà di tutti gli altri lati del poligono circoſcritto, il quale perciò ſarà equilatero. Finalmente eſſendo i due angoli A F L, A G L eguali, e ciaſcuno di eſſi la metà de' due A F E, A G B, queſti ſaranno anch' eſſi eguali, e il poligono ſuddetto, oltre eſſere equilatero, ſarà anco equiangolo, e perciò ſarà regolare, e circoſcritto al circolo; il che &c.

221 Dato un poligono regolare A C E G I (*Fig.* 161) inſcrivere in eſſo un circolo. Si dividano per metà due angoli del poligono vicini fra loro, come I A C, A C E, per le rette A O, C O, che concorrono in O. Tirando poſcia dal punto O ſul lato A C la perpendicolare O B, e ſul lato A I la perpendicolare O L, eſſendo, che ne' triangoli B A O, L A O gli angoli in A ſono eguali, quelli in B, ed L retti, e il lato A O comune, ſaranno O B, O L eguali. Per una ſimil maniera tirata la perpendicolare O D, ſi moſtrerà queſta eguale ad O B. Perchè poſcia, congiunta O E, i due lati A C, C E ſono eguali, come pure gli angoli A C O, E C O, e il lato C O comune,

ne, ſaranno eguali anco gli angoli C E O, C A O; onde eſſendo C A O metà di C A I, che è eguale a C E G, ſarà anco C E O metà di C E G; e nello ſteſſo modo ſi moſtrerà tutti gli angoli del poligono reſtar diviſi per metà dalle rette tirate ad eſſi dal punto O; onde procedendo come ſopra, apparirà, che tutte le perpendicolari O F, O H &c. tirate dal punto O ſopra i lati del poligono ſono fra loro eguali. Se dunque dal punto O, come centro, ſi deſcriverà un circolo, che paſſi per lo punto L, egli paſſerà per tutti gli altri B, D, F, H, e per eſſere retti gli angoli, che ſi fanno in queſti punti, il circolo ſuddetto toccherà i lati A I, A C &c. Dunque ſarà iſcritto al poligono A C E G I. Il che &c.

222 Circoſcrivere un circolo intorno un dato poligono regolare A B C D E (*Fig.* 162). Si dividano per mezzo due degli angoli vicini del poligono, come E A B, A B C per le rette G A, G B, le quali concorrono in G. Ciò fatto, ſi moſtrerà, come nel precedente articolo, che le rette tirate a ciaſcun altro angolo dal punto G, come G C, G D, G E, dividono per mezzo i detti angoli, e che eſſe ſono tutte eguali fra loro; e perciò è manifeſto, che un circolo deſcritto dal centro G per lo punto A, paſſerà per tutti gli altri angoli del poligono, e ſarà circoſcritto al medeſimo. Il che &c.

223 Sopra una data retta A B (*Fig.* 163) deſcrivere un poligono regolare di ſpecie data. Facciaſi un circolo di qualſiſia ſemidiametro C M, e prendaſi tanta parte della periferia di eſſo M N, quanto è il numero de' lati del poligono da deſcriverſi; il che ſi farà per le regole date all' artic. 214, e ſeguenti, eccettuandone i caſi eſpreſſi all' artic. 217, ne' quali ſi è detto ciò non poterſi fare per mezzo di circoli, e di rette linee. Congiunta poſcia M N, e tirate le rette C M, C N, facciansi ne' punti A, B gli angoli D A B, D B A eguali agli angoli M N, e dal punto D, ove concorrono le rette A D, B D, ſi deſcriva per A, o ſia per B il circolo A B E. E' manifeſto, che eſſendo l' angolo D eguale per neceſſità all' angolo C, quanta parte della periferia M N O è l' arco M N, tanta parte della periferia A B E ſarà l' arco A B; onde replicando A B in B G, G E &c., ſi farà un poligono regolare di tanti lati, quanto è il numero, per cui M N miſura il circolo, il che era da fare.

Problemi, che riguardano le figure simili rettilinee.

224 SOpra una data retta A B (*Fig.* 164) fare una figura simile ad una data M N O P Q talmente, che il lato A B sia omologo ad un dato lato di questa M N. Si risolva la figura data in triangoli. Quindi si faccia in A l' angolo B A E eguale ad N M Q, ed in B l' angolo A B E eguale ad M N Q; il che fatto, sarà il triangolo A E B equiangolo, e simile ad M N Q. Parimente sopra E B si facciano gli angoli B E D, E B D eguali agli angoli N Q P, Q N P; e così il triangolo E B D sarà simile a Q N P; e nell' istesso modo proseguiscasi l' operazione, finchè vi abbiano triangoli nella figura data; il che fatto, sarà la figura A B C D E quella, che si cerca, come si raccoglie dall' articolo 192.

225 Date due figure rettilinee M, N, (*Fig.* 165) farne una terza simile alla M, ed eguale alla N. Sopra il lato A B della figura M facciasi un rettangolo A D eguale alla stessa figura (articolo 115), e sopra l' altro lato di questo B D, un altro rettangolo D C eguale alla figura N. Fra A B, B C si prenda la media proporzionale (articolo 202), che sia E F, e sopra E F facciasi la figura O simile alla data M, la quale abbia il lato E F omologo al lato A B (articolo 224). Dico, che O è la figura cercata. Imperocchè essendo E F media fra A B, B C, e le figure M, ed O simili co' lati omologhi A B, E F, starà M ad O, come A B a B C (articolo 194), cioè come il rettangolo A D al rettangolo D C (artic. 166), cioè come la figura M alla figura N. Stando dunque M ad O come M ad N, è forza, che O, ed N sieno eguali. Dunque O, che già per la costruzione è simile ad N, è anco eguale ad N. Il che &c.

226 Far una figura simile ad una data P (*Fig.* 166), e che abbia a questa la ragione data di S ad R. Facciasi come R ad S, così un lato A B della figura P alla quarta C D (artic. 203). Poscia fra A B, C D trovisi la media E F (artic. 202), e sopra E F si faccia la figura T simile a P. E' manifesto, che P starà a T, come A B a C D (art. 194), cioè per la costruzione, come R ad S. Il che era da fare.

227

227 Fare una figura simile alla data I (*Fig.* 167), e che abbia ad un' altra figura data K la data ragione di M ad L. Facciasi prima il rettangolo A E eguale alla figura K sopra qualsivoglia linea A B (articolo 115). Poscia facciasi come L ad M, così A B ad A C (articolo 203), e tirata C D parallela a B E, sia compito il rettangolo A D. Sarà dunque A D ad A E, come A C ad A B (articolo 166), cioè come M ad L; e perchè A E è uguale alla figura K, starà anche il rettangolo A D alla figura K, come M ad L. Se dunque ora si farà (per l'articolo 225) la figura P simile alla I, ed eguale al rettangolo A D, avrà la figura P alla figura K la ragione di M ad L, e sarà quella, che si cerca.

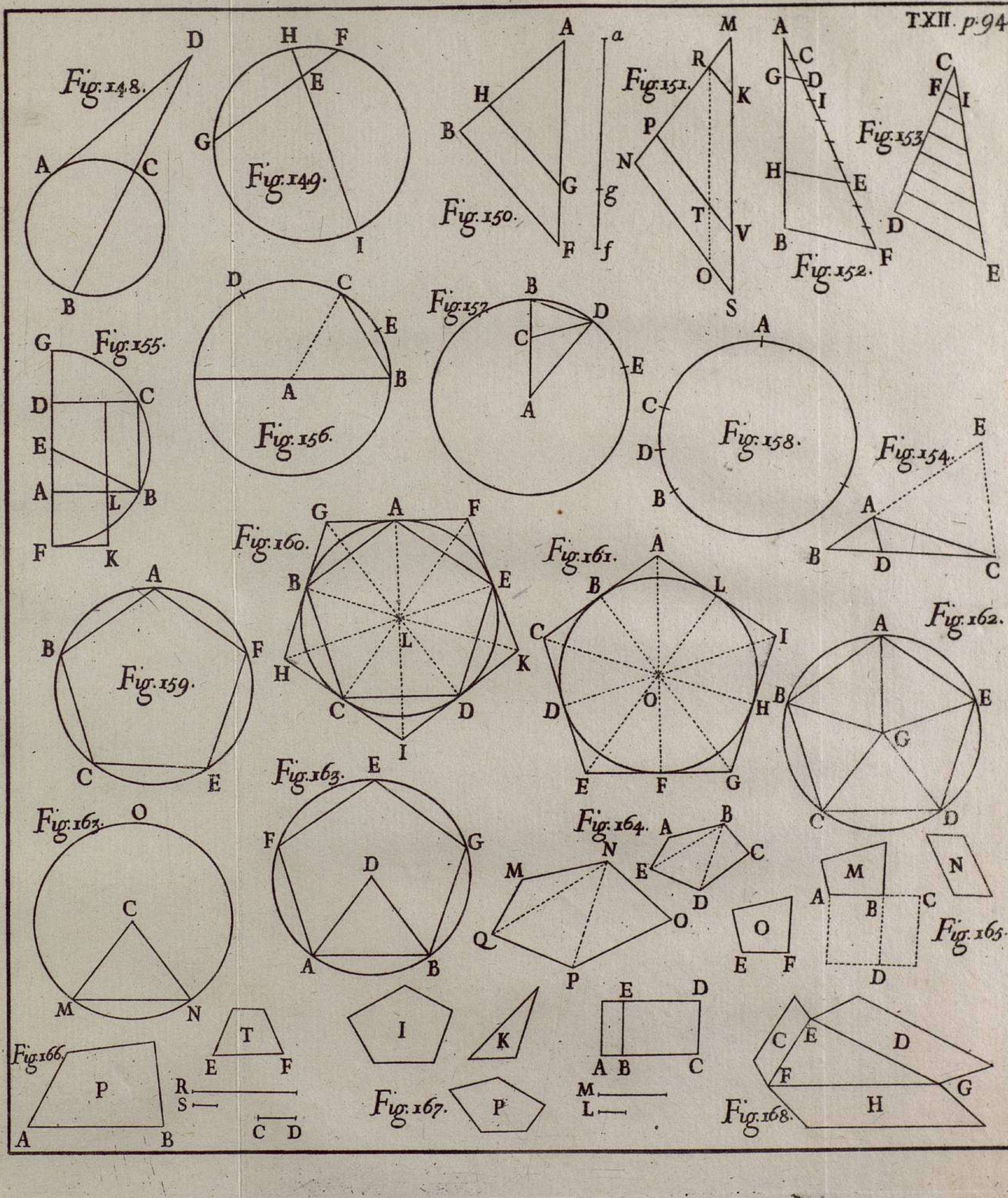
228 Date due figure simili C, D (*Fig.* 168), farne un'altra simile ad essa, ed eguale ad amendue prese insieme. Si dispongano i lati omologhi delle figure C, D per modo, che comprendano l' angolo retto F E G, e sopra l'ipotenusa F G si faccia la figura H simile alle dette figure (artic. 224), il cui lato F G sia omologo a' lati F E, E G: dico, che questa è eguale ad amendue C, D prese insieme. Imperocchè la figura H sta alla figura C (artic. 194), come il quadrato di F G al quadrato di F E; e parimente l' istessa figura H sta alla figura D, come il quadrato di F G al quadrato di G E. Dunque H sta a C con D, come il quadrato di F G a' due quadrati di F E, G E. Ma il quadrato di F G sta a' due quadrati di F E, G E in ragione di egualità (artic. 69). Dunque anco la figura H alle due figure C, D prese insieme avrà ragione di egualità. Il che &c.

229 Se si volesse una figura simile a due date, ed eguale non alla loro somma, ma alla loro differenza, il problema si sciorrebbe, come ne' quadrati si è fatto all' articolo 119, e la dimostrazione sarebbe facile da trovare alla maniera di quella dell' articolo antecedente.

230 E se si volesse una figura eguale alla somma di tre, o più figure date, tutte simili fra loro, e simile anch' essa alle medesime, ciò parimenti si otterrebbe, come ne' quadrati si è detto all' articolo 118.

Fine degli Elementi de' Piani.

ELE-


T.XII. p. 94.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.
Fig. 154.
Fig. 155.
Fig. 156.
Fig. 157.
Fig. 158.
Fig. 159.
Fig. 160.
Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 163.
Fig. 163.
Fig. 164.
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 167.
Fig. 168.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DE' SOLIDI.

ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA DE' SOLIDI.

LIBRO I.

Delle ſezioni, e delle inclinazioni delle linee co' piani, e de' piani fra loro.

NOi ſupporremo in primo luogo come aſſai chiare per ſe medeſime alcune propoſizioni, le quali da tutti ſi confeſſano, e riconoſcono per vere, con tutto che ſia più facile il crederle tali, che il dimoſtrarle; cioè:

1 Che tutti li piani, che paſſano per due punti, paſſino eziandio per quella linea retta, che congiunge queſti due punti, per modo, che ciaſcun punto di eſſa ſi trovi in ciaſcuno di queſti piani.

2 Che due linee rette, le quali ſi taglino in un punto ſieno amendue in un medeſimo piano, e che ogni retta, la quale tagli due parallele, ſia nel medeſimo piano di queſte.

3 Che dati in qualſivoglia modo tre punti, queſti ſiano ſempre in un medeſimo piano, cioè nel piano del triangolo, che ſi fa dalle rette, che congiungono i detti punti.

4 Che quando due piani fra loro ſi tagliano, la comune ſezione loro ſia una linea retta poſta in amendue i detti piani.

Delle linee perpendicolari a' piani.

5 CIò poſto, una linea retta diraſſi *perpendicolare ad un piano*, o pure *retta a quel piano*, quando eſſa comprenda angoli retti con tutte le rette linee, che in eſſo piano poſſono tirarſi per quel punto, in cui la detta retta lo incontra;

 dac-

dacchè si vede manifesto, che per un medesimo punto d'un piano non può tirarsi altro, che una linea, che a quel piano sia retta.

6 Quando una retta A B (*Fig.* 1) è perpendicolare in B a due rette C D, O S, che s' incontrano nel detto punto B, ella sarà necessariamente retta al piano G H, che passa per le dette due linee C D, O S. Imperocchè prendendo sopra C D le due B C, B D eguali fra loro, e tirando A C, A D, queste due saranno fra loro eguali (art. 49 degli elementi de' piani). Parimente prendendo B O, B S eguali fra loro, saranno anco eguali A O, A S; di più congiungendo O C, C S, S D, D O, è facile il mostrare, che O D S C sarà un parallelogrammo (art. 49 elem. de' piani), e gli angoli O S C, S O D, come pure C D O, D C S eguali, e parimente i lati C S, O D, e O C, D S eguali; e perciò ne' due triangoli A O D, A C S, che hanno i tre lati eguali, gli angoli A S C, A O D saranno anch' essi eguali (art. 51 el. p.); e così pure accaderà rispettivamente de' triangoli A O C, A D S. Dunque se ora per lo medesimo punto B passerà qualsivoglia altra retta K B E posta nel medesimo piano G H, e che tagli due de' lati del detto parallelogrammo, verbi grazia O D, C S in E, K, ne' triangoli opposti al vertice O B E, K B S, si troverà B E eguale a K B, e K S eguale ad O E (art. 50 el. p.), e congiunte K A, E A, ne' triangoli K A S, O E A, che hanno gli angoli K S A, E O A già mostrati eguali, e le linee K S, O E, come pure A S, A O parimente trovate eguali, saranno eguali K A, E A. Dunque finalmente ne' triangoli K B A, E B A i tre lati sono eguali, e perciò (art. 51 el. p.) anche gli angoli A B K, A B E eguali, cioè retti. Il medesimo si mostrerà di tutte le altre linee, che nel piano G H si potranno tirare per lo punto B; dunque (art. 5) la retta A B è retta al piano G H.

7 Se una retta A R (*Fig.* 2) sarà perpendicolare a tre rette A B, A C, A F nel punto del loro comune concorso A, queste tre rette saranno tutte in un medesimo piano. Imperocchè, se a cagione d'esempio una di esse A B fosse fuori del piano delle altre due A C, A F, intendendo tirato per essa, e per R il piano R A B, che tagliasse nella retta A O il piano delle due A C, A F, sarebbe l'angolo R A O retto; perocchè

R A

RA essendo perpendicolare alle due AC, AF, è retta al piano FAO (art. 6). Ma anche RAB si suppone retto; dunque il tutto, e la parte sarebbero eguali; il che è impossibile.

8 Due rette AB, GD (*Fig.* 3), che sieno perpendicolari al medesimo piano EF, saranno fra loro parallele. Imperocchè congiunti colla retta BD i punti B, D, ne' quali esse incontrano il detto piano, è manifesto, che ciascuno degli angoli ABD, CDB sarà retto (art. 5); e perciò amendue insieme sono eguali a' due retti; onde le linee AB, CD saranno parallele fra loro (art. 28 el. p.), purchè si provi, che amendue sieno in un medesimo piano, il che così proveremo. Tirisi nel piano EF la retta GD perpendicolare a BD, e di lunghezza eguale a BA, e congiungansi BG, GA, DA. Ne' triangoli rettangoli ABD, BDG fatti sul lato comune BD, e che hanno gli altri lati BA, DG eguali, le ipotenuse AD, BG sono eguali (art. 49 el. p.). Dunque ne' triangoli AGB, ADG tutti e tre i lati saranno eguali, e perciò (art. 51 el. p.) gli angoli ABG, ADG eguali; ma ABG è retto; perocchè la linea AB si suppone retta al piano BDG (art. 5); dunque anco ADG sarà retto. Ora poichè anco CD si suppone retta al medesimo piano, sono eziandio retti CDB, CDG; dunque la retta GD fa angoli retti nel punto D colle tre linee BD, AD, CD. Dunque (art. 7) queste tre rette sono in un medesimo piano. Ma nel piano, in cui sono BD, AD, vi è anco AB (art. 3). Dunque CD è nel medesimo piano di AB, il che rimaneva da provare.

9 E all' incontro se di due parallele AB, CD si saprà, che una, come CD, sia perpendicolare al piano EF, anco l'altra AB sarà perpendicolare a questo. Perocchè, fatta la costruzione di prima, essendochè l'angolo CDB è retto (art. 5), e le due CD, AB sono parallele, sarà retto eziandio ABD. Ne' triangoli dunque rettangoli ABD, BDG si mostrerà, come poc' anzi, essere BG eguale ad AD; e di nuovo ne' triangoli ABG, AGD si inferirà, come prima, l'angolo ABG eguale all' ADG. Ora poichè CD, BD, AD sono in un medesimo piano (cioè in quello delle parallele AB, CD), e la retta GD fa angolo retto colla BD, per la costruzione, e colla CD per la supposizione (art. 5), essa farà angolo retto

 ezian-

eziandio colla terza A D (art. 6); dunque A D G è retto; e perciò A B G, che gli si è mostrato eguale, anch' esso è retto. Fa dunque la retta A B angoli retti colle due B G, E D poste nel piano E F; dunque ella è retta a questo piano, il che era da mostrare.

Delle linee parallele in diversi piani.

10 SE due rette linee A B, C D (*Fig.* 4) saranno parallele ad una terza, ancorchè il piano di A B, E F sia diverso da quello di C D, E F, saranno tuttavia A B, C D fra loro parallele. Imperocchè preso in E F qualsivoglia punto G, e tirate da esso le perpendicolari G H, G I sopra A B, C D, e congiunta H I, è manifesto, che essendo retto l' angolo A H G, lo sarà anche l' angolo E G H, a cagione delle parallele E G, A H. Nell' istesso modo si troverà retto l' angolo E G I; dunque la retta E G, che fa angoli retti colle due G H, G I poste nel piano G H I, è retta a questo piano (art. 6). E perciò anco le due A H, C I, che si suppongono parallele ad E G, saranno rette al medesimo piano (art. 9), e perciò saranno fra loro parallele (art. 8).

11 Se in un piano A C B (*Fig.* 5) saranno due rette A C, C B, che concorrano in C, e in un altro piano D E F due altre D F, F E, che concorrano in F, e le due prime saranno parallele alle due ultime, cioè A C a F D, e B C ad E F, dico, che gli angoli A C B, D F E saranno eguali. Imperocchè prese le porzioni eguali A C, F D, come pure C B, F E, e tirate tutte le linee, che la figura dimostra, essendo A C, F D parallele, ed eguali, saranno anche A D, C F parallele, ed eguali (art. 59 el. p.) Nel medesimo modo si mostreranno parallele, ed eguali le due B E, C F. Dunque (art. 10) B E, ed A D sono parallele, e di più sono eguali; e perciò saranno ancora eguali A B, D E (art. 59 el. p.) Ne' triangoli dunque A C B, D F E ciascun lato è eguale a ciascun lato, e perciò l' angolo A C B eguale al D F E (art. 51 el. piani).

Di

De' piani perpendicolari ad altri piani.

12 Un piano dicesi *perpendicolare*, ovvero *retto ad un altro piano*, quando tutte le linee rette, tirate in uno di essi piani, e perpendicolari alla comune sezione di questi, saranno rette all' altro piano.

13 Ogni volta, che una retta linea A B (*Fig. 6*), che sia in un piano E G, sarà retta ad un altro piano D C, anche il piano E G, in cui è quella retta, sarà retto a questo piano medesimo D C. Perocchè se A B è retta al piano D C, ella sarà perpendicolare alla comune sezione B G de' due piani E G, D C; giacchè questa comune sezione passa per lo punto B, in cui essa A B incontra il piano D C (art. 5); laonde preso in questa retta B G qualsivoglia altro punto diverso da B, come H, e tirata nel piano E G la retta H I perpendicolare a B G, saranno i due angoli A B H, I H B retti, e le linee A B, I H parallele (art. 51 el. p.) Ora A B si suppone retta al piano D C; dunque anco H I parallela ad A B è retta al medesimo piano (art. 9). Nel medesimo modo si mostrerà, che ogni altra linea tirata nel piano E G, e che sia perpendicolare alla comune sezione de' piani suddetti B G, sarà retta al piano D C. Dunque il piano E G è retto al piano D C (art. 12).

14 Da ciò si deduce, che quando una retta A B è perpendicolare ad un piano D C, tutti i piani, che passano per essa A B sono perpendicolari al medesimo piano D C; giacchè di tutti può dimostrarsi quello, che nell' antecedente articolo si è dimostrato nel piano E G.

15 E all' incontro se due, o più piani, che tutti sieno retti ad un altro piano, avranno per comune sezione una medesima retta linea, questa sarà anch' essa retta al detto piano, a cui que' piani si suppongono retti.

16 E se un piano sarà retto ad un altro, ogni linea, che si tiri in uno di questi retta all' altro piano, caderà nella comune sezione di essi piani.

De' piani paralleli fra loro.

17 Piani *paralleli* diconsi quelli, che prodotti da qualsivoglia parte mai non concorrono insieme.

18 E' manifesto, che quando una medesima retta linea sia retta a due piani, questi saranno fra loro paralleli, e che quando due piani sieno fra loro paralleli, ogni linea, che sia retta ad uno di essi, sarà retta anche all' altra.

19 Se due rette linee B A, C A (*Fig.* 7), che concorrano in A, saranno parallele a due altre F D, D E, che concorrano in D, anche il piano delle due prime sarà parallelo al piano di queste. Imperocchè se dal piano A s' intenderà tirata la retta A G perpendicolare al piano E D F, e che lo incontri nel punto G, e per questo punto si tireranno nel piano E F le due rette G I, G H parallele a D F, D E, saranno queste (art. 10) parallele eziandio ad A C, A B. Essendo pertanto gli angoli I G A, H G A (art. 5) retti, dovranno esser retti anco gli angoli C A G, B A G (art. 28 el. p.), e perciò A G sarà (art. 6) retta al piano C B; onde essendo ella per la costruzione retta anco al piano E F, i piani C B, E F saranno paralleli (art. 18).

20 Se due piani A B, C D (*Fig.* 8) fra loro paralleli verranno tagliati da un altro piano H G, le comuni sezioni di questo co' detti piani, cioè le rette E H, G F saranno parallele. E la ragione si è, perchè non essendo parallele, dovrebbero concorrere in un punto, il che non può succedere, senza che in quel punto si vengano a toccare i due piani A B, C D, che si suppongono paralleli, cioè non mai concorrenti.

21 Se tre piani fra loro paralleli P Q, R S, T V (*Fig.* 9) taglieranno due rette linee B D, H G in qualsivoglia modo situate, sempre le taglieranno in parti proporzionali. Imperocchè tirando da' punti B, D a' punti H, G le rette B H, D G, e congiungendo B G, la quale tagli in F il piano R S, e dalle sezioni C, L delle rette B D, H G con questo piano tirando L F, C F, è manifesto, che il piano del triangolo B D G, che taglia i piani paralleli R S, V T, farà le sezioni D G, C F parallele fra loro (art. 20); dunque (art. 182 el. piani) sarà B C : C D :: B F : F G. Parimente si mostrerà, che il piano del trian-

triangolo B G H farà le ſezioni F L, B H parallele, e perciò H L : L G : : B F : F G; ma ſi è moſtrato B C : C D : : B F : F G; dunque H L : L G : : B C : C D; il che era da dimoſtrare.

Delle linee inclinate a' piani, e de' piani inclinati fra loro.

22 QUando una linea retta non è perpendicolare, o ſia retta ad un piano, col quale eſſa concorra, diceſi *inclinata a quel piano*.

23 Se da qualſivoglia punto B (*Fig.* 10) della linea A B, inclinata al piano D C, s' intenderà tirata B E retta al medeſimo piano, e dal punto E, in cui queſta incontra il detto piano, ſi tirerà la retta E A al punto A, in cui lo incontra la retta B A, l' angolo acuto B A E chiameraſſi *inclinazione della linea* B A *al piano* D C.

24 Se in vece di B ſi prenderà qualſivoglia altro punto nella retta A B, o nel prolungamento di eſſa, come P, da cui ſi tiri un' altra linea retta al piano D C, queſta caderà in un punto M della retta E A; perocchè eſſendo B E, P M rette al piano D C, ſaranno parallele fra loro (art. 8); dunque le tre rette E B, B P, P M ſaranno in un medeſimo piano (art. 2). Ma il piano di B E, B P è il piano del triangolo B E A; dunque P M è nel piano di queſto triangolo. Dunque eſſendo il punto M per la ſuppoſizione anco nel piano D C, egli ſarà nella comune ſezione de' due piani E B A, e D C, cioè nella retta E A.

25 Da ciò ſi raccoglie, che da qualunque punto dell' inclinata A B ſi tiri la perpendicolare B E ſul piano D C, l' inclinazione reſterà ſempre determinata, e miſurata dal medeſimo angolo B A E.

26 Quando due piani A B, D C (*Fig.* 11) ſi tagliano nella comune ſezione D E, e uno di eſſi non è retto all' altro, ſi chiamano *inclinati fra loro*.

27 Se per un medeſimo punto F della detta comune ſezione ſi tireranno due perpendicolari ad eſſa, una nel piano A B, che ſia F G, l' altra nel piano D C, che ſia F H, l' angolo acuto H F G compreſo da queſte perpendicolari, è quello, che diraſſi *inclinazione* de' ſuddetti due piani.

28 Qua-

28 Qualunque punti si prendano nella comune sezione D E (*Fig.* 12) di due piani inclinati B A, D C, come F, G, se per essi punti si tireranno nell' uno, e nell' altro piano le perpendicolari alla detta sezione, cioè H F, I G nel piano D C, ed F K, G N nel piano B A; l' angolo dell' inclinazione H F K, I G N sempre si troverà della medesima quantità, o misura. Imperocchè essendo le due H F, I G in un medesimo piano, e perpendicolari alla medesima retta D E, saranno fra loro parallele, e per la medesima ragione saranno anco parallele fra loro K F, N G. Dunque abbiamo due linee concorrenti nel piano H F K, cioè H F, F K, e due altre nel piano I G N, cioè I G, G N, e le due prime sono parallele alle due ultime rispettivamente, e perciò gli angoli H F K, I G N (art. 11) sono fra loro eguali.

29 Due linee si dicono *egualmente*, o *similmente inclinate ad un piano*, quando gli angoli della loro inclinazione sono eguali. Così pure due piani similmente, o egualmente inclinati ad un altro, quando le loro inclinazioni sono eguali.

30 Se due linee saranno fra loro parallele A B, C D (*Fig.* 13), esse saranno egualmente inclinate ad uno stesso piano F G. Imperocchè prendendo in esse due porzioni B A, D C, e da' punti A, C intendendo cadere sul piano F G le due D E, C H rette al piano F G, saranno queste parallele fra loro (art. 8). Ma anche A B, C D si suppongono parallele; dunque abbiamo due piani, cioè i triangoli B A E, D C H, in ciascun de' quali sono due linee concorrenti B A, A E, e D C, C H, che a due a due sono parallele; e perciò (art. 11) gli angoli A, C sono eguali. Congiungendo dunque E B, E H ne' triangoli A E B, C D H, che hanno gli angoli E, H retti, e gli angoli A, C eguali, anco gli altri due B, D, cioè le inclinazioni delle dette rette, col piano F G (art. 23) saranno eguali. Nel che è da avvertire, che questa proposizione convertendola non si verifica, cioè, che due linee egualmente inclinate ad un medesimo piano non sono necessariamente parallele.

31 Se due piani E I, G K (*Fig* 14) saranno fra loro paralleli, le loro inclinazioni con qualsivoglia terzo piano A B, saranno eguali. Imperocchè essendo le sezioni di essi col piano A B, cioè le rette E F, G H necessariamente parallele (art. 20), pre-

preso in E F qualunque punto C, e tirata nel piano A B la retta C D P perpendicolare ad E F, essa sarà eziandio perpendicolare a G H nel punto D, in cui l' incontra. Intendansi ora per li punti C, D le due N C, O D rette al piano A B, esse saranno per necessità parallele (art. 8); onde N C D O sarà un sol piano (art. 2). Tagli questo piano i piani E I, G K nelle rette C L, M D, e queste saranno fra loro parallele (art. 20). E perchè N C è retta al piano A B, sarà l' angolo N C F retto (art. 5); onde essendo anche retto per la costruzione l' angolo F C D, la retta C F sarà necessariamente retta al piano N C D (art. 6); dunque (art. 5) ella sarà perpendicolare alla C L, che è posta nel piano N C D. Nel medesimo modo si mostrerà essere D H perpendicolare a D M; dunque (art. 27) gli angoli L C D, M D P sono le inclinazioni de' piani E I, G K col piano A B. Ma gli angoli L C D, M D P sono eguali; perocchè L C, M D si sono mostrate parallele; dunque le inclinazioni suddette sono eguali, il che &c. Quì ancora è da avvertire, che la conversa di questa proposizione non è vera, cioè, che due piani egualmente inclinati ad un terzo non sono necessariamente paralleli.

Degli angoli solidi.

32 QUando tre, o più piani tagliandosi *fra di loro* vengono a concorrere in un medesimo punto, diconsi contenere, o comprendere in quel punto un *angolo solido*, come (*Fig.* 15) i piani A B C, A C D, A B D nel punto A.

33 Quando un angolo solido A è fatto dal concorso di tre piani, allora i tre angoli rettilinei, che si fanno nel punto A, presi a due a due, sono sempre maggiori del terzo. Sia a cagione d' esempio l' angolo B A D (*Fig.* 16) il massimo de' tre B A D, B A C, C A D, dico, che ciò non ostante egli è minore de' due B A C, C A D presi insieme; imperocchè tirata nel piano B A D la retta A E, che faccia l' angolo B A E eguale a B A C, e presa A E eguale ad A C, e finalmente tirata per E la retta B E D, che tagli A B, A D in B, D, se si congiungeranno B C, D C ne' due triangoli B A C, B A E, è manifesto (art. 49 el. p.), che le basi B E, B C saranno eguali. Mettendo dunque da una parte B C con C D, che per l' art. 43 el. p. sono maggiori di

BD, e dell' altra BD, e levando poſcia da quelle BC, e da queſta BE, che ſi è moſtrato eguale a BC, il rimanente CD ſarà maggiore del rimanente DE. Ne' triangoli dunque CAD, EAD, che hanno il lato comune AD, e i lati eguali AC, AE, ma la baſe CD è maggiore della baſe ED, facilmente ſi vede (art. 49 el. p.), che l'angolo DAC è maggiore di EAD. Ma BAC è eguale a BAE per la coſtruzione; dunque i due BAC, DAC ſono maggiori di BAD.

34 Tre angoli piani BAC, CAD, DAB, che concorrono a comprendere un angolo ſolido A (*Fig.* 15), ſono ſempre minori di 4 retti. Perocchè intendendo un piano, che tagli le tre rette AB, AC, AD ne' punti B, C, D, è manifeſto, che ne' punti B, C, D ſi faranno tre altri angoli ſolidi, e che i due angoli piani ABD, ABC ſaranno maggiori del ſolo CBD (art. 33); per l'iſteſſa ragione ADB, ADC ſono maggiori di BDC, e finalmente DCA, BCA maggiori di DBC; dunque i ſei angoli ABD, ABC, ADB, ADC, DCA, BCA ſono maggiori de' tre CBD, BDC, DCB, cioè maggiori di due retti (art. 37 el. p.). Ma i ſei angoli ſuddetti, inſieme co' tre BAC, CAD, DAB (art. 37 el. p.), non vagliono più, che ſei retti, dunque queſti tre non arrivano al valore di 4 retti.

35 L'iſteſſo diſcorſo può applicarſi a qualunque numero d' angoli piani ſi uniſcono a farne un ſolido; mentre ſi moſtrerà ſempre, che tutti inſieme non arrivano a quattro retti; e ciò col fondamento di ciò, che ſi è dimoſtrato all' artic. 71 el. p.; cioè a dire, che gli angoli di qualſivoglia poligono tutti inſieme vagliono tanti retti, quanto è il doppio del numero de' lati, meno quattro. Come ſe l'angolo ſolido F (*Fig.* 17) ſarà compreſo da 5 piani *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, tirando un piano, che tagli tutte le rette, che concorrono in F, ſi avrà un poligono di 5 lati, o ſia un pentagono, i cui angoli vagliono 6 retti, e col diſcorſo fatto di ſopra ſi troverà, che gli angoli de' 5 triangoli *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, che toccheranno il detto poligono, vagliono più di ſei retti, onde gli altri angoli de' medeſimi triangoli, che ſono in F non arriveranno a 4 retti, giacchè tutti gli angoli di 5 triangoli debbono fare dieci retti.

36 Da ciò ſi raccoglie, che volendo comporre un angolo ſolo cogli angoli piani di più figure regolari ſimili fra loro, ciò

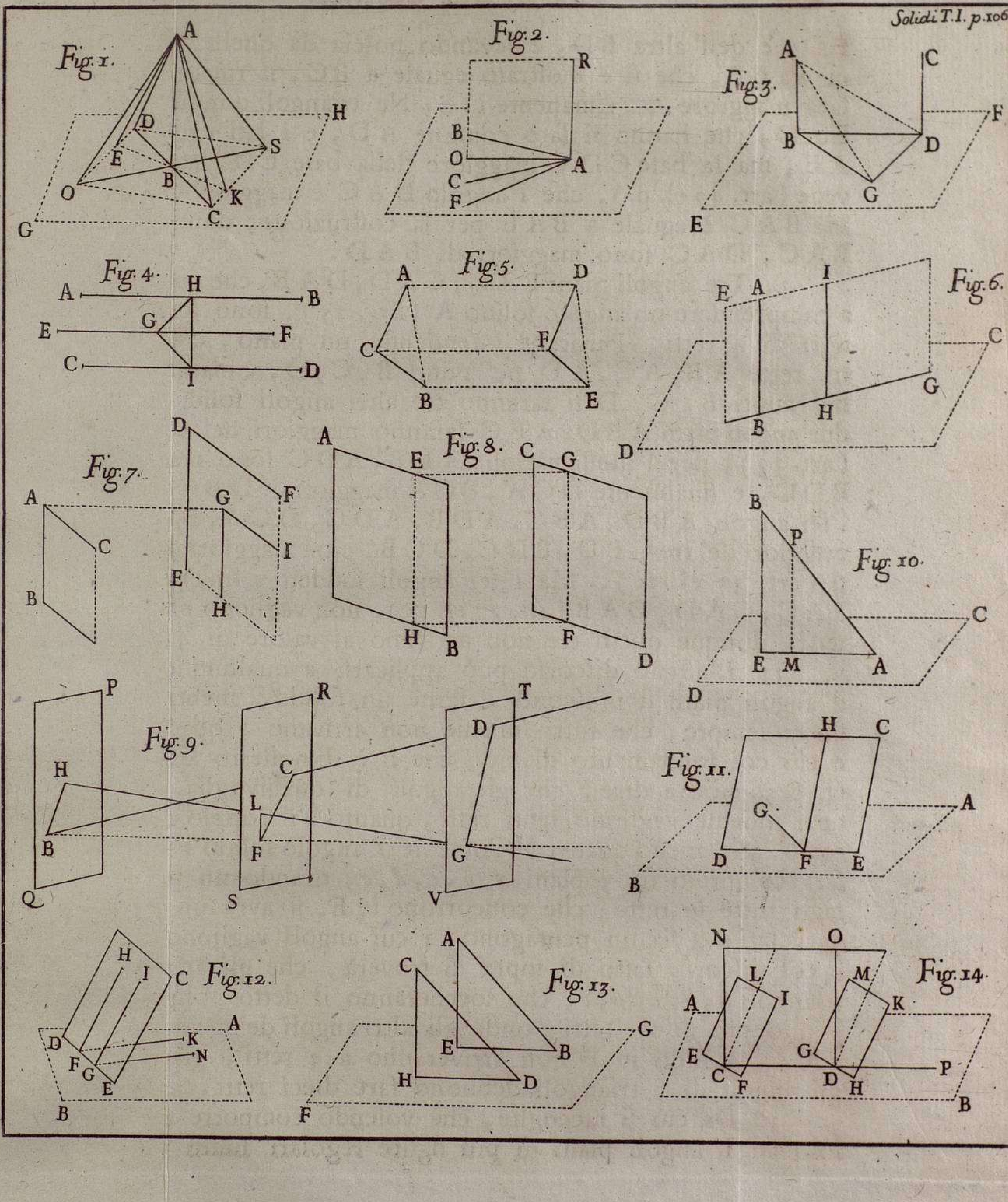


Fig. 1.
A D H E S O B K C G
Fig. 2.
R B O A C F
Fig. 3.
A C F B D G E
Fig. 4.
A H B E G F C I D
Fig. 5.
A D C F B E
Fig. 6.
E A I C B H G D
Fig. 7.
A C B D F G I E H
Fig. 8.
A E C G H B F D
Fig. 10.
B P C E M A D
Fig. 9.
P R T D H C L B F G Q S V
Fig. 11.
H C G A D F E B
Fig. 12.
H I C A D K F G N E B
Fig. 13.
A C E B H D G F
Fig. 14.
N O L M I K A E G C F D H P B

ciò non potrà farsi, che o con tre angoli di pentagono, ciascun de' quali vale gradi 108, e in conseguenza tre vagliono gradi 324, o con tre angoli di quadrato, che sono gr. 270, o con tre angoli di triangolo equilatero, che sono gr. 180, o con quattro di triangolo equilatero, che sono gradi 240, o finalmente con 5 pure di triangolo equilatero, che fanno gr. 300. Ogni altra combinazione, che si faccia degli angoli di qualsivoglia numero di questa, o d' altre figure regolari tutte simili fra loro per accoppiarle insieme, non se ne potrà mai ricavarne un angolo solido; mentre ne risulterà sempre la somma degli angoli piani, che si accoppieranno insieme o eguali, o maggiore di quattro angoli retti.

Problemi spettanti alle inclinazioni delle linee, e de' piani.

37 DAto il punto C (*Fig.* 18) fuori del piano AB, tirare per quello una linea, che sia retta a questo piano. Si segni nel piano AB qualsivoglia retta linea EF; e nel piano ECF si tiri dal punto C sopra di essa la perpendicolare CD, alla quale per lo punto D si tiri nel piano AB la perpendicolare DK, e finalmente nel piano CDKE si tiri alla DK la perpendicolare CK. Dico, che questa sarà retta al piano AB. Imperocchè tirata per K la retta GK parallela ad EF; poichè per la costruzione gli angoli EDC, EDK sono retti, la retta ED sarà retta al piano CDK (art. 6); dunque anche GK, che è parallela a ED, sarà retta allo stesso piano (art. 9); dunque l' angolo GKC sarà retto (art. 5); ma anco CKD è retto per la costruzione; dunque (art. 6) la retta CK è retta al piano DKG, cioè al piano AB.

38 Dato il punto A (*Fig.* 19) nel piano EF tirare per esso punto una linea retta al detto piano. Prendasi qualunque punto D fuori del piano, e da esso si tiri (art. 37) DB retta al piano EF. Quindi congiunta BA, si tiri AC parallela a BD. E' manifesto, che AC sarà anch' essa retta al piano EF (art. 9).

39 Per un punto dato A (*Fig.* 20), ovvero B tirare un piano retto ad un dato piano DE. Si tiri per lo punto dato

una linea A B retta al dato piano, e ciò per l'art. 37, o 38 secondo che il dato punto è sul piano medesimo, o fuori di esso. Allora segnando sul dato piano qualsivoglia retta linea B C, che passi per lo punto B, ove la detta retta lo incontra, il piano A B C sarà retto al piano D E (art. 13). Quindi anche s'intende, come per una retta B C data sul piano D E, o pure per una data A B, che sia retta al detto piano D E, si tiri il piano A B C retto al medesimo piano.

40 Dato il piano A C (*Fig.* 21) retto al piano D F, ed in esso il punto K fuori della comune sezione de' piani G C, tirare per K nel piano A C una retta inclinata al piano F D con angolo eguale al dato angolo acuto H. Si tiri prima per K la linea K I retta al piano F D (art. 37), che sarà nel piano A C (art. 1), e nel medesimo piano A C si tiri K O, che faccia con K I l'angolo I K O eguale al complemento di H, e che tagli I C in O, è manifesto, che K O farà l'angolo d'inclinazione K O I eguale al dato H (art. 37 el. p.).

41 Dato il piano I K (*Fig.* 22) retto al piano B D, e nella loro comune sezione K F dato il punto G, tirare per G una retta inclinata al piano con angolo acuto eguale al dato H. E' manifesto, che se nel piano I K si tirerà per G la retta O G, che faccia l'angolo O G K eguale al dato H, sarà O G la retta, che si cerca; mentre preso in essa qualsivoglia punto O, e tirata O P retta al piano B D, questa cadrà nella retta F K; onde l'angolo O G K sarà l'inclinazione di O G col piano B D (art. 23).

42 Per un dato punto C (*Fig.* 23) posto fuori del piano K G tirare un piano parallelo a questo. Si tirino prima nel piano K G due rette A D, D B, che concorrino in qualsivoglia punto di esso D, e congiunta D C, si tiri per C nel piano A D C la retta F C parallela a D A, e parimente per C nel piano B D C la retta C E parallela a D B. E' manifesto, che il piano F C E sarà parallelo al piano A D B, cioè al piano K G (art. 19).

43 Per una data retta A B (*Fig.* 24) posta nel piano C D far passare un piano, il cui angolo d'inclinazione col piano C D sia eguale al dato H acuto. Si tiri nel piano C D per qualsivoglia punto K della retta A B la perpendicolare ad essa

G K;

G K; e preso in questa un punto G, si alzi G F retta al piano C D, e nel piano F G K, che sarà retto a C D (art. 13), tirisi la K F, che faccia in K colla K G l' angolo F K G eguale al dato H; è chiaro, che A K sarà retta al piano F K G, e l' angolo A K F sarà retto; onde il piano, che passa per A B, K F sarà quello, che si cerca (art. 27).

44 Dato il punto A (*Fig.* 25) fuori del piano K G, per lo qual punto passi il piano A B retto a K G, far passare per lo medesimo punto A un altro piano, che insieme sia retto al piano A B, e inclinato al piano K G con inclinazione eguale al dato angolo acuto H. Si tiri dal punto A la perpendicolare A C alla comune sezione C B de' due piani A B, K G, e fatto nel piano A B l' angolo C A D eguale al complemento dell' angolo H, per lo punto D, in cui A D incontra la detta comune sezione, si tiri nel piano K G la retta E D, perpendicolare a C B. Dico, che il piano, che passa per A D, D E soddisfa al problema. Perocchè facilmente si raccoglie dalle cose dette, che l' angolo A D C è quello della sua inclinazione col piano K G, e che quest' angolo è eguale al dato H, e che finalmente il piano E D A è retto al piano A B.

45 Data la retta A B (*Fig.* 26), la cui inclinazione al piano K G sia l' angolo A B C, far passare per essa un piano, che abbia al medesimo piano K G inclinazione eguale al dato angolo H maggiore di A B C. Prendasi nella retta A B qualsivoglia punto A, da cui si tiri A C retta al piano K G; e nel piano A B C si tiri per A la retta A D, che comprenda con C A l' angolo C A D eguale al complemento di H, e segni B C in D; quindi col centro C, e coll' intervallo D C si segni nel piano K G il circolo D E, a cui per lo punto B si tiri la tangente B E. Dico, che il piano A B E è quello, che si cerca. Perocchè congiunta E C, essendo gli angoli D C A, E C A retti, e le rette D C, E C eguali, e C A comune, è manifesto, che ne' triangoli D C A, E C A, l' angolo C E A sarà eguale a C D A, che per la costruzione viene a essere eguale all' angolo H. Ed essendo il piano A E C retto a K G, la retta B E, che fa l' angolo B E C colla comune sezione di questi piani E C retto, sarà retta ad esso piano A E C (art. 13). Dunque l' angolo B E A è retto (art. 5); perciò A E C sarà l' inclinazione del piano B E A col

col piano B E C, cioè col piano K G. Ma A E C ſi è moſtrato eguale all' angolo H; dunque il piano A B E ha col piano K G inclinazione eguale ad H, e per altro egli paſſa per la linea A B; dunque egli è quello, che ſi cerca. E' d' avvertire, che ſe l' angolo H foſſe minore di A B C, il ſuo compimento C A D ſarebbe maggiore di C A B, onde il punto D non cadrebbe fra C, e B, ma oltre il punto B, e perciò reſtarebbe dentro il circolo D E, ne potrebbe allora tirarſi la tangente B E, e così la ſoluzione del problema ſarebbe impoſſibile.

LIBRO II.

De' prismi, e de' parallelepipedi.

46 *Prisma* è una figura solida contenuta da più figure piane rettilinee, due delle quali fra loro opposte, sono eguali, simili, parallele, e similmente poste. A misura, che queste sono di tre, quattro, cinque, o più lati, i prismi si dicono *triangolari*, come A (*Fig.* 27), *quadrangolari*, come B, *pentagonici*, come C &c.

47 E' evidente, che gli altri piani, che oltre i due suddetti comprendono il prisma, sono parallelogrammi qualunque sia la figura de' detti piani: altrimenti se verbigrazia nel prisma CED (*Fig.* 28) il piano CABD non fosse un parallelogrammo, cioè AB non fosse parallela a CD, concorrerebbe la retta AB colla CD in qualche punto, e in conseguenza il piano della base AEB concorrerebbe col piano della base CHD, a cui si suppone parallelo. Se dunque AB è parallela a CD, dovendogli per altro esser eguale [altrimenti non sarebbero le figure AEB, CHD eguali, simili, e similmente poste], saranno anche parallele AC, BD; onde il piano ACBD sarà un parallelogrammo (art. 59 el. p.).

48 *Parallelepipedo* è una figura solida contenuta da sei piani quadrilateri, de' quali gli opposti fra loro a due a due sono paralleli.

49 E' manifesto, che tutti i piani, che comprendono un parallelepipedo sono parallelogrammi, e che gli opposti a due a due sono simili, eguali, e similmente posti. Perocchè il piano AF (*Fig.* 29), tagliando i due piani paralleli BD, FH, farà le sezioni BA, FE tra loro parallele (art. 20). L'istesso piano AF, tagliando gli altri due piani paralleli AH, BG, farà le sezioni AE, BF parallele: dunque AF sarà un parallelogrammo, e l'istesso si troverà degli altri cinque piani, che formano il parallelepipedo. Di più essendosi mostrate AB, BC parallele ad EF, FG, saranno gli angoli ABC, EFG eguali (art. 11); onde essendo inoltre il lato AB eguale all'EF, e BC egua-

eguale ad F G, i due parallelogrammi B D, F H, saranno eguali, e simili, e similmente posti.

50 Da ciò segue, che ogni parallelepipedo non è, che una specie di prisma, che ha per base due parallelogrammi (art. 46).

51 Un parallelepipedo, che venga contenuto da sei quadrati eguali, chiamasi *cubo*, e perciò anche il cubo cade sotto la specie de' prismi, cadendo sotto quella de' parallelepipedi (art. 50).

Delle proprietà principali de' prismi.

52 Tra le figure solide rettilinee, *simili* si chiamano quelle, che sono contenute da un egual numero di figure piane, ciascuna simile alla sua corrispondente.

53 Tra le medesime figure, quelle si chiameranno *eguali*, e *simili*, che sono contenute da un egual numero di figure piane, ciascuna simile, ed eguale alla sua corrispondente.

54 Se un parallelepipedo, o altro prisma A B C D E F (*Fig.* 30) sarà tagliato da un piano H G K parallelo a' piani opposti, e paralleli fra loro B A C, E D F, che comprendono il prisma, la sezione H G K sarà eguale, e simile ad essi piani A B C, E D F. Perocchè non può la retta H K concorrere nè con D E, nè con A B, senza che il piano H G K concorra col piano E D F, o coll' A B C, a' quali si suppone parallelo; onde sarà H K parallela a D E; ed essendo anche D A parallela ad E B (art. 47), sarà H D un parallelogrammo, nel quale il lato H K sarà eguale ad E D. Per l' istessa ragione i lati K G, H G sono eguali a D F, F E, ed a C A, C B, e così degli altri lati, se si trattasse di un prisma compreso da basi di più lati; onde facilmente si raccoglie, che la figura piana H K G è simile, ed eguale ad E D F, o sia ad A B C.

55 Da ciò segue, che quando un prisma è tagliato da un piano parallelo a' piani opposti, come H K G, ne risultano due altri prismi A H G, K E F contenuti da due piani opposti simili, ed eguali ai primi B A C, D E F.

56 In ogni parallelepipedo A B (*Fig.* 31), se si tireranno le diagonali H B, A G di due de' parallelogrammi opposti D E, F C, che passino per gli angoli D H E, F A C, che si fanno

agli

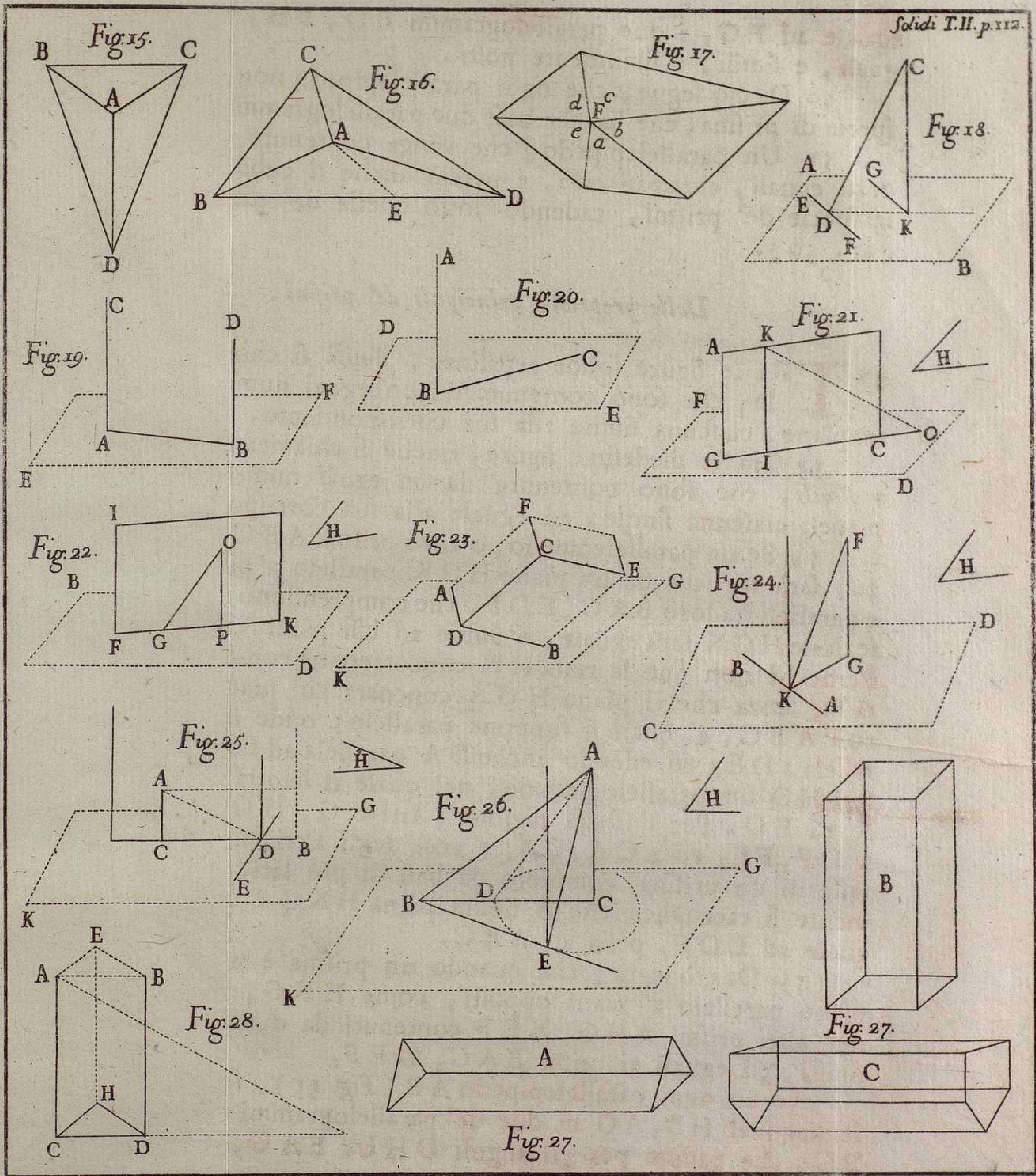


Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 27.

agli estremi della medesima retta H A, le dette due diagonali H B, A G saranno in un medesimo piano, e comprenderanno colla detta retta A H, e coll' opposta per diametro B G un parallelogrammo A H B G. Perocchè essendo le due H A, B G parallele alla terza D F, saranno parallele fra loro (art. 10), e perciò saranno in un medesimo piano; ed essendo per altro eguali [come quelle, che si agguagliano alla terza D F], sarà A H B G un parallelogrammo.

57 Il piano, che passa per le dette diagonali, cioè A H B G, dividerà il parallelepipedo in due prismi triangolari A B D G, A B C G, che saranno eguali, e simili fra loro; perocchè, come facilmente si vede, essi sono contenuti da un egual numero di piani, cioè da cinque, de' quali A H B G è comune ad amendue i prismi, e gli altri sono eguali, e simili, ciascuno al suo corrispondente, cioè G E ad H F, A E ad F B, A G C ad A F G, ed H B E ad H D B; dunque (art. 53) i detti prismi sono eguali, e simili.

De' solidi compresi da' piani non paralleli.

58 DEscritta in un piano una figura qualunque rettilinea A B C D &c. (*Fig.* 58), e fatta passare una retta linea per ciaschedun angolo A, B, C &c. d'essa figura, in maniera, che tutte cotelte rette concorrano in un punto V esistente fuori del piano di quella, è chiaro, che quanti sono i lati A B, B C, C D &c. della figura predetta, altrettanti saranno i triangoli, che per simil guisa si formeranno, e che i varj piani, ne' quali sono cotesti triangoli, s'uniranno tutti in quel punto V, in cui concorrono le rette A V, B V, C V &c. che passano per gli angoli della figura medesima. Ora il solido V A B C D &c. compreso dalla descritta figura A B C D &c., e da tutti i suddetti piani triangolari A B V, B C V, C D V &c. si chiama *piramide*. Essa figura rettilinea A B C D dicesi *base della piramide*. Il punto V esistente fuori del piano della base, nel qual punto si uniscono tutte le rette A V, B V, C V &c., che passano per gli angoli di detta base, dicesi *vertice della piramide*. Ciascheduna di dette rette A V, B V, D V &c., dicesi *lato della piramide*. Finalmente la distanza del vertice sud-

detto dal piano della base [la qual distanza si misura con una retta V P guidata da esso vertice perpendicolarmente sopra cotesto piano], dicesi *altezza della piramide*.

59 Le piramidi hanno nome differente, secondo la differente specie del rettilineo, che ad esse servono di base. Se il rettilineo è triangolare, diconsi *piramidi triangolari*, come A, A &c. (*Fig.* 59). Se quadrilatero, *quadrangolari*, come B, B &c. (*Fig.* 60). Se pentagono, *pentagonie*, come C, C &c. (*Fig.* 61), e generalmente diconsi *poligone* quelle, la base delle quali è un rettilineo di più di quattro lati.

Della proporzione dei prismi, e delle piramidi di qualunque specie.

60 PEr facilitare le dimostrazioni, che servono a ben conoscere le proporzioni, che hanno fra loro i corpi solidi, ricorreremo a quei metodi, che insegnano prima di dividere qualunque figura o piana, o solida in tanti elementi, che ciascuno de' quali abbia al tutto una proporzione minore di qualunque proporzione assegnabile. Il Cavalieri fu il primo, che proponesse un tal metodo, che chiamò degli indivisibili, e che poscia è stato abbracciato da quasi tutti i geometri sott' altro nome, essendo loro piacciuto di riguardare i predetti elementi come porzioni infinitamente piccole, rispetto alla figura, di cui essi sono i componenti; e sebbene la idea di questi infinitamente piccoli a prima vista paja affatto contraria a quella degli indivisibili, pure esaminandosi ciò, che serve all' una, e all' altra di fondamento, si scorgerà, che non differiscono, che nel nome, onde gli Oltramontani, che si danno il vanto d' essere stati i primi ad aprire questa nuova strada a maggiori progressi della geometria, altro non hanno fatto, che perfezionare, e ridurre a calcoli la prima scoperta del Cavalieri. Comunque sia, noi considereremo le linee come composte di punti, e di lineette infinitamente piccole, le superficie, o piani composti di linee, e i corpi solidi composti di piani. Sia un prisma qualunque (*Fig.* 33) A B C L I H, e sia una linea E F costituita ad angolo retto fra il piano della base, e il piano opposto del prisma, la quale misurando la distanza dei piani, darà l' altezza del prisma.

ma. Intendasi un piano parallelo alla base, che tagli la linea in S, e il prisma in MNO. Qualunque sezione, come MNO, che facciasi nella maniera detta, è sempre eguale alla base (art. 54); onde prendendosi come elemento del solido, si avranno eguali tutti gli elementi, e questi saranno tanti, quanti sono i punti della linea EF. Da ciò si raccoglie, che tagliandosi un prisma qualunque con un piano parallelo alla base, le due porzioni del solido, che saranno due prismi, avranno fra loro la stessa ragione, che hanno le parti, nelle quali resta divisa la linea EF; imperocchè essendo tutti gli elementi eguali, ed essendo tanti nell' uno, e nell' altro prisma, quanti sono i punti delle linee corrispondenti ES, SF, è forza, che i due prismi ABCMON, MNOLIH sieno come le linee ES:SF.

61 Due prismi, che abbiano le altezze, e le basi eguali, sono fra loro eguali, sebbene fossero i prismi di differente specie, e uno fosse per esempio triangolare, e l' altro pentagonio. In fatti se intenderemo i due prismi costituiti fra due piani paralleli [lo che potrà sempre farsi, quando abbiano eguali altezze] qualunque piano parallelo al piano delle basi, che tagli un prisma, taglierà ancora l' altro, onde tanti saranno gli elementi nell' uno, quanti nell' altro; e perchè questi elementi sono tutti fra loro eguali, per essere eguali le basi, ne segue che la somma di tutti gli elementi, che compongono un prisma, sia eguale alla somma di tutti gli elementi dell' altro prisma; e però che sieno i prismi eguali fra loro.

62 Servirà lo stesso discorso a provare la eguaglianza delle piramidi di qualunque specie esse sieno, perchè abbiano eguali le basi, e le altezze. Sia la piramide triangolare ABCD (*Fig.* 34), e la quadrangolare VLMNO costituita fra due piani paralleli. Facciasi una sezione per mezzo di un piano parallelo al piano delle basi, e sia la sezione della prima piramide HIL, e della seconda PQRT. Sarà facile il provare, che la sezione in ciascuna piramide è una figura simile alla base. Imperocchè per essere il piano della sezione parallelo alla base, saranno parallele le linee PQ, LM (art. 20), come pure le linee QR, NM; onde l' angolo PQR (art. 11) sarà eguale all' angolo LMN; e nello stesso modo si proveranno eguali gli altri angoli delle due figure PQRT, LMNO. Essendo poi

nel triangolo VML, VM : VQ : : ML : QP, e parimente nel triangolo VMN, VM : VQ : : MN : QR, si deduce essere ML : QP : : MN : QR, cioè proporzionali i lati intorno a due angoli eguali. Lo stesso potrà dirsi degli altri lati; onde resta dimostrata la somiglianza delle figure. La sezione dell' altra piramide HIL si dimostra seguendo presso a poco lo stesso modo simile alla base BCD. Ora conviene avvertire, che ciascun lato delle piramidi resta diviso secondo la stessa ragione del piano parallelo alla base (art. 21), di modo che tutto il lato VL stia al segmento VP, come il lato AD al segmento AL, dal che si deduce, che la ragione ML : QP sia eguale a quella di BD : HL, e per conseguenza, che la duplicata della prima ragione sia eguale alla duplicata della seconda; cioè sia la base MNOL alla sezione PQRT, come la base BDC alla sezione HLI; ma le basi si sono supposte eguali, dunque saranno eguali ancora le sezioni, cioè gli elementi corrispondenti di ciascuna piramide; con che resta dimostrata la ugualianza di questi due solidi.

63 Ogni prisma è triplo di una piramide, purchè la base, e l' altezza dell' uno, e dell' altra sieno eguali. Supporremo prima il prisma triangolare. La dimostrazione è semplicissima, e tutta la difficoltà consiste nello immaginare la divisione, che può farsi del prisma in tre piramidi. S' intendano condotte nel prisma ABCHIL (*Fig.* 35) le diagonali dei tre parallelogrammi, che chiudono il solido, cioè IC, CH, IA. Ecco nel prisma apparisce una piramide fatta sulla base HIL col vertice in C, e un' altra eguale piramide si riconosce prendendo per base il triangolo ABC, e per vertice il punto I. Non v' ha dubbio, che queste piramidi non sieno eguali avendo basi eguali, e altezze eguali, cioè la base, e l' altezza dello stesso prisma. La terza piramide, che resta, detratte le due precedenti, si presenterà alla nostra idea, se la considereremo come formata sopra il triangolo AHI col vertice in C. Questa piramide, paragonata colla seconda delle due descritte di sopra, cioè con quella, che ha per base il triangolo ABC, e per vertice il punto I, facilmente si scorgerà, che se di questa piramide in vece di prendere per base il triangolo ABC, si prenderà per base il triangolo ABI, avremo allora il vertice

nel

nel punto C; e perchè la terza piramide ha per base il triangolo A H I eguale alla base A I B della seconda, ed il vertice nello stesso punto C, saranno esse di base, e di altezza eguali, e però eguali nella solidità; onde resta dimostrato ciò, che in primo luogo si era proposto.

64 Sia un prisma fatto sopra un poligono di qualsivoglia numero di lati, e sia una piramide sopra lo stesso poligono, o sopra un poligono eguale, e simile; e in oltre abbiano il prisma, e la piramide altezza eguale. Egli è certo, che dividendosi nello stesso modo l' una e l' altra base in triangoli, si avrà per questo mezzo una divisione del prisma poligonio in altrettanti prismi triangolari, e in altrettante piramidi triangolari potrà dividersi la piramide totale. Ora per l' antecedente proposizione ogni prisma triangolare è triplo della piramide corrispondente, cioè di quella, che sia fatta sulla stessa base; dunque tutto il solido, o prisma poligonio sarà triplo della piramide fatta sullo stesso poligono, e colla medesima altezza.

65 Due prismi di eguale altezza, ma sopra basi diverse sono come le basi; imperocchè immaginando i due solidi divisi in elementi, ed essendo questi per l' uguaglianza delle altezze eguali di numero, ed essendo in oltre tutti gli elementi di ciascun solido eguali alla base, l' aggregato di tutti gli elementi, che compongono un prisma starà all' aggregato di tutti gli elementi, che compongono l' altro prisma, come un solo elemento del primo prisma ad un solo elemento del secondo, cioè come la base alla base.

66 Ne segue, che due piramidi di eguale altezza, ma di base diversa, sieno fra loro come le basi, giacchè ciascuna piramide (art. *64*) vale la terza parte di un prisma fatto sopra la stessa base, e colla medesima altezza.

67 Due prismi costituiti sopra basi eguali, ma differenti nell' altezza stanno fra loro nella ragione delle altezze. Per restar di ciò persuasi, basta riflettere, che gli elementi dell' uno, e dell' altro prisma secondo il supposto sono eguali, e che la differenza consiste nel numero; imperocchè quel prisma, che ha maggiore altezza, avrà ancora maggior numero d' elementi. Ora questo numero si misura dalla lunghezza di una linea perpendicolare al piano della base, come si spiegò (art. *60*); dun-

dunque un prisma starà all' altro prisma come l' altezza del primo all' altezza del secondo.

68 E perchè due piramidi di base eguali, ma di altezza disuguali sono ciascuna la terza parte di un prisma, che fosse fatto sulla stessa base, e colla medesima altezza, però le piramidi di base eguali saranno esse pure come le altezze.

69 Dalle proposizioni dimostrate ne' precedenti numeri si deduce, che due prismi, o due piramidi qualunque sieno, avranno sempre tal ragione fra loro, che sia composta della ragione della base alla base, e dell' altezza all' altezza. Sia un prisma, o piramide (*Fig. 36*), che abbia per base la figura M, coll' altezza eguale alla linea E; e sia un altro prisma, o piramide, che abbia per base la figura N, e per altezza la linea F. Immaginiamo un altro solido, che sia prisma, o piramide, secondo, che si suppongono o prismi, o piramidi i due dati solidi M, N, ed abbia questo una base Q eguale alla base M del primo solido, ed un' altezza eguale alla F del secondo. La ragione del solido M al solido N si dirà composta di quella del solido M al solido Q, e del solido Q al solido N; ma il solido M sta al Q, come la linea E alla linea F, giacchè sono eguali le basi; e il solido Q sta al solido N, come la base Q alla base N, giacchè sono eguali le altezze; dunque il solido M starà al solido N nella ragione composta di E ad F, e della base Q alla base N; ma la base Q si suppone eguale alla M; dunque la ragione sarà composta di quella dell' altezza E all' altezza F, e della base M alla base N; che era da dimostrare.

70 Siccome fra le figure piane alcune ve ne sono, che chiamansi reciproche, così due prismi, o due piramidi si diranno reciproche, se le basi saranno fra loro nella ragione reciproca delle altezze. Dimostro ora, che questi solidi sono fra loro eguali, valendomi in gran parte delle supposizioni fatte nell' articolo precedente, e aggiungendo la sola condizione, che i due solidi (*Fig. 36*) sopra le basi M, ed N abbiano le altezze E, F reciprocamente proporzionali alle basi; per la qual cosa sarà E : F : : N : M; ma per ciò, che abbiamo allora supposto il solido sopra M sta al solido sopra Q : : E : F; ed il solido sopra N sta al medesimo solido sopra Q : : M : N;

dun-

dunque i due solidi sopra le basi M, ed N hanno la stessa ragione al solido Q; dunque sono eguali.

71 Quando due prismi, o due piramidi fossero simili, giacchè le altezze avrebbero quella stessa ragione, che hanno due lati omologhi, e le basi avrebbero la ragione duplicata de' medesimi lati, componendosi allora una ragione dalle basi, e dalle altezze, ne risulterebbe una ragione composta di tre ragioni eguali, la quale perciò direbbesi triplicata di quella di due lati omologhi. Due cubi essendo solidi, simili saranno perciò nella ragione triplicata de' loro lati. Quindi è, che paragonandosi due prismi, o due piramidi simili, in vece di dire che stanno nella ragione triplicata di due lati omologhi, costumano spesso i geometri di dire, che stanno come i cubi di detti lati.

72 Questo discorso può applicarsi ai solidi di qualunque genere essi sieno, purchè sieno simili; imperocchè potendosi essi dividere in tante piramidi, che prese ad una ad una in un solido sieno simili a quelle dell' altro, la ragione, che avrà ciascuna piramide di un solido a quella, che gli corrisponde nell' altro solido, la quale abbiamo detto essere triplicata di quella di due lati omologhi, sarà la stessa, che avranno tra loro i due solidi simili.

Del modo d' esprimere per numeri tanto la solidità, che la superficie di tutti i corpi terminati da figure piane.

73 SPiegata la proporzione, che hanno i prismi, le piramidi, e i corpi simili, s' intenderà facilmente come s' abbiano ad esprimere per numeri, avendo sempre riguardo ad una unità costante, che sia un solido di grandezza cognita, siccome cognita è la lunghezza di quella linea, che prendesi per unità delle altre linee, e la grandezza di quella superficie, che serve di misura alle altre. Supponiamo, che la lunghezza di un piede sia quella unità, a cui siamo soliti di riferire le altre linee, e che il quadrato fatto sulla linea di un piede sia unità per la superficie. Seguendo lo stesso ordine, dovrà prendersi per unità dei corpi solidi quel cubo, che si

farà

farà colla linea di un piede. A questo cubo preso per unità abbiasi ora a riferire qualsivoglia dato prisma. Non v' ha dubbio, che il cubo non sia ancor esso un prisma, la cui base sarà uno, giacchè il quadrato della unità è l' unità stessa, ed essendo l' altezza essa pure eguale ad uno, verrà espressa la solidità del cubo col numero uno. Supponiamo, che la base del prisma sia espressa col numero 10, poco importando ora il definire se sia triangolare, o quadrangolare, o di qualsivoglia altro numero di lati, bastando solo avvertire, che può sempre trovarsene il suo valore col metodo spiegato (art. 173 el. p.); e l' altezza si esprima col numero 2. Sappiamo che due prismi stanno nella ragione composta delle basi, e delle altezze; onde nel nostro caso dovrà farsi la composta della ragione di 1 : 10, e della ragione di 1 : 2, moltiplicando gli antecedenti, e i conseguenti. Ciò fatto, avremo la ragione di 1 : 20, la quale c' insegna, che il prisma contiene venti unità, cioè venti volte il cubo, che ha il piede per lato, e che però dovrà detto prisma esprimersi per il numero 20. Da ciò si ricava questa regola generale, che per esprimere un prisma in numeri, bisogna moltiplicare la base per l' altezza, mentre il prodotto darà il numero esprimente il prisma con quella unità, che uguaglia un cubo da noi stabilito per misura comune de' corpi solidi.

74 Qualunque piramide si è dimostrata essere la terza parte di un prisma, che abbia la stessa base, e la stessa altezza. Prima dunque si cerchi il valore del prisma, moltiplicando la base per l' altezza, e poi se ne prenda un terzo, e sarà questo il numero esprimente la piramide.

75 Due corpi simili stanno fra loro nella ragione triplicata dei lati omologhi (art. 71). Parlandosi di due cubi, sia il primo fatto con una linea di un piede, e l' altro di piedi tre. Giacchè sono i seguenti numeri 1, 3, 9, 27 in ragione continua, sarà il primo cubo al secondo, come 1 : 27, il qual numero 27 sarebbesi appunto trovato, se fosse stato considerato il cubo come un prisma, e per averne la espressione fosse stata moltiplicata la base per l' altezza. Imperocchè essendo il lato 3, il quadrato, o base sarebbe 9, il quale moltiplicato per 3 dà 27. Non è dunque senza ragione, che gli aritmetici

chia-

chiamano cubo quel prodotto, che nasce moltiplicando un numero per se stesso, e questo prodotto per il primo numero. Ciò, che abbiamo detto di due cubi, potrà applicarsi a tutti i solidi simili, con questa differenza però, che la ragione triplicata di due lati omologhi mostra bensì la proporzione, che hanno i due solidi, ma non già come ciascuno di loro si commisuri colla unità; perchè sebbene il lato di un solido fosse di un piede, e l' omologo dell' altro solido fosse di piedi 3, e però la ragione del primo solido al secondo fosse di 1 : 27, non per questo potrebbe dirsi, che il primo fosse eguale a quella unità, nella quale siamo convenuti per le misure de' corpi solidi, cioè al cubo di un piede; e nemmeno, che il secondo solido contenesse 27 di quelle unità. Quando mai si volesse esprimere in numeri un solido, il quale non fosse nè prisma, nè piramide, rispetto a quel cubo, che si prende per unità, converrebbe allora dividere il solido in tante piramidi, lo che potrà sempre farsi, e poi cercare la espressione di ciascuna piramide per mezzo della base, e dell' altezza, perchè poi uniti insieme tutti i valori delle piramidi, si avrebbe la espressione dell' intiero solido.

76 Abbiamo trattato della solidità dei corpi; parleremo ora della superficie, e il faremo brevemente, giacchè essendo questa composta di figure piane, avremo dalla geometria piana quanto basta per conoscerne il valore. Si forma la superficie di qualunque prisma e dalla base, e dal piano opposto, ed in oltre da tanti parallelogrammi, quanti sono i lati della figura, che è base del prisma. Considerandosi i parallelogrammi, che formano il contorno del solido, potranno questi esprimersi ad uno ad uno per numeri col moltiplicare la base per l' altezza. Fatta la somma di tutti questi prodotti, e aggiunto ad essa il valore delle due figure opposte, delle quali una è base, si avrà tutta la superficie. Così (*Fig.* 40) si avrà il parallelogrammo A F moltiplicando la base E F per l' altezza, cioè per la distanza, che hanno le due linee parallele A B, E F, come pure si avrà il parallelogrammo B G moltiplicando la base F G per la distanza delle due parallele B C, F G; e fattosi lo stesso degli altri parallelogrammi, si avrà la superficie, o contorno del prisma, a cui aggiungendosi le due figure A B C D, E F G H, si avrà tutta intiera la superficie.

77 Se il prisma fosse retto, in vece de' parallelogrammi si avrebbero dei rettangoli, e l' altezza di ciascuno sarebbe eguale all' altezza del prisma; onde per avere in tal caso la somma di loro, si potrebbero prima unire in una sola linea tutti i lati, che formano il perimetro della base, e ponendo con questa ad angoli retti l' altezza del prisma, il rettangolo, che ne verrebbe, sarebbe eguale al contorno del prisma.

78 Le piramidi restano chiuse d' intorno da piani triangolari, che s' alzano sopra la base, la quale può essere un poligono qualunque, dal cui numero de' lati dipende il numero dei triangoli sopraddetti. Per avere il valore della superficie di ciascun triangolo, basta condurre dall' angolo verticale la perpendicolare a ciascun lato del poligono, e si avranno tutte le altezze dei triangoli. Moltiplicandosi poi ciascuna perpendicolare per il lato, su cui essa cade, e prendendosi la metà del prodotto, si avrà l' area di ciascun triangolo. Si faccia la somma di tutte queste aree, e vi si aggiunga l' area del poligono, che è base della piramide, per avere l' intiera superficie, che si cerca.

79 Se la piramide sarà retta, e sarà regolare, il poligono, che ne forma la base, saranno in tal caso tutte le altezze dei triangoli eguali; onde disposti tutti i lati del poligono in una retta linea, e descritta ad angolo retto una linea eguale all' altezza, o perpendicolare trovata dei triangoli, si formerà un rettangolo, la cui metà sarà eguale al contorno della superficie. Colla aggiunta poi del poligono, o base della piramide, si avrà tutta intiera la superficie.

80 Quando due solidi sieno simili, senza cercare la espressione della superficie riferita a quella misura, che si vuol prendere per unità, purchè sia cognita la proporzione di due lati omologhi, potrà sempre sapersi la proporzione della superficie. Questi solidi possono essere due prismi, due piramidi, o due solidi di qualunque altra specie. Essendo le figure, che chiudono i solidi, simili a due a due, sarà sempre la figura di un solido alla simile dell' altro nella ragione duplicata di due lati omologhi. Troverassi la stessa ragione fra due altre figure simili,

mili, e proſſime alle prime, che neceſsariamente avranno con quelle un lato comune; e così procedendo, ſi dirà lo ſteſso di tutte le altre figure, le quali conſervando ſempre la ſteſsa ragione duplicata di due lati, anche la ſomma di tutte, o la intiera ſuperficie di un ſolido ſtarà a quella dell' altro nella detta ragione duplicata di due lati omologhi, o come i quadrati dei medeſimi lati. Da ciò ſi manifeſta quanto ſia diverſa la proporzione della ſuperficie dalla proporzione della ſolidità in due corpi ſimili. Se intenderemo ſopra due linee, delle quali una ſia doppia dell' altra fatti due ſolidi ſimili, creſcerà ſempre la proporzione al creſcere il numero delle dimenſioni, che ſi prendono a conſiderare. Eſsendo il lato triplo dell' altro, la ſuperficie, come abbiamo veduto, ſarà nove volte maggiore, e la ſolidità (art. 75) ventiſette.

Del Cilindro, del Cono, e della Sfera, e delle loro proporzioni.

81 MEritano di eſsere conſiderati altri ſolidi, de' quali ſpeſso fanno uſo i matematici, voglio dire il cilindro, il cono, e la sfera. Il cilindro è una ſpecie di priſma, che ha per baſe un circolo, eſsendo parimente circolo il piano oppoſto. Immaginiamo due circoli (*Fig.* 41) B D, H L in ſituazione parallela, e immaginiamo una linea, che congiunga i centri A, C. Sieno condotte per tutti i punti di una circonferenza a quelli dell' altra tante linee parallele ad A C. Queſte linee formeranno una ſuperficie curva, che chiuderà un ſolido, il quale chiamaſi cilindro, e la detta ſuperficie cilindrica; onde, quand' altro non s' aggiunga, per ſuperficie del cilindro s' intenderà quella ſuperficie curva, che ſi aggira intorno ai due circoli, altrimenti volendoſi computare anche i due circoli, conviene eſpreſsamente indicarli. La linea A C diceſi aſse del cilindro, e qualunque linea, come B H, lato del cilindro. Se A C foſse perpendicolare al piano di un circolo, e per conſeguenza anche al piano dell' altro, il cilindro direbbeſi retto, e negli altri caſi obbliquo. Eſsendo retto il cilindro, tutte le linee, che compongono, come ſi è detto, la ſuperficie, ſono rette al piano della baſe.

82 Il cono è un solido, che s' intende descritto presso a poco nella stessa maniera, con cui si descrive una piramide. Sia (*Fig.* 42) un circolo B D, e un punto V fuori del piano di esso circolo. Da tutti i punti della circonferenza del circolo s' intendano condotte tante linee rette al punto V, che prese tutte insieme, chiuderanno uno spazio, o un solido, che dicesi cono; e l' aggregato di tutte le linee darà la superficie del cono. La linea V C condotta dal punto V vertice del cono al centro del circolo, che è base del cono, dicesi asse, e qualunque linea di quelle, che abbiamo condotte dai punti della circonferenza al vertice, dicesi lato del cono. Essendo V C perpendicolare alla base, il cono dicesi retto, e negli altri casi obbliquo, o cono scaleno.

83 Abbiasi una linea come A C (*Fig.* 43), e sopra di essa s' intenda descritto un semicircolo A D C. Stando la linea A C nella stessa situazione, si aggiri il semicircolo intorno ad essa. Presentiamoci alla mente tutto lo spazio, che resta entro la rivoluzione del semicircolo, e con ciò formeremo l' idea di quel solido, che dicesi sfera, la cui superficie viene abbastanza indicata dal moto della circonferenza. S' intende facilmente, che questo solido ha un punto egualmente lontano da tutti i punti della superficie, il qual punto è lo stesso centro del semicircolo, che perciò dirassi centro della sfera. La linea A C, intorno cui abbiamo ora immaginato farsi la rivoluzione del semicircolo, si chiama asse della sfera. Ciascuno vede, che il circolo principalmente contribuisce alla formazione di questi solidi; onde prima di esaminare le loro proprietà, mi conviene trattare del circolo in una maniera alquanto differente da quella, che si è tenuta nella prima parte della geometria, e dimostrare alcuni teoremi, che bisogna necessariamente premettere, a ciò che siamo per dire.

84 Sia circoscritta ad un circolo una figura regolare, per esempio, un quadrato (*Fig.* 44). Indi si circoscriva un altra figura di maggior numero di lati, che noi intenderemo sempre figura regolare, non ostante, che molte delle cose, che siamo per ispiegare, potessero egualmente applicarsi alle figure non regolari circoscritte al circolo. Dividasi la circonferenza per metà tra i punti del contatto del quadrato col

cir-

circolo, e per questi punti si tirino delle tangenti fino all' incontro de' lati del quadrato. Apparisce tosto un ottagono regolare circoscritto al dato circolo, e continuandosi una simile costruzione, si andrebbero circoscrivendo altre, ed altre figure regolari di maggior numero di lati, cioè di 16, e poi di 32 &c. Egli è manifesto, che maggiore è lo spazio compreso dal quadrato dello spazio compreso dall' ottagono, e questo maggiore dello spazio compreso dalla figura di sedici lati, e così procedendo, si arriverebbe finalmente ad una figura, che non sarebbe differente dal circolo, che di una quantità minore di qualunque quantità assegnabile. Se dunque questa figura non differisce dal circolo, possiamo senza temer di errore riguardare il circolo come una figura regolare composta di un numero di lati presso che infinito. Questa idea corrisponde a ciò, che da principio si è detto, cioè che una linea può riguardarsi come composta d' infinite linee rette infinitamente piccole. Ciò che si è detto delle figure circoscritte, potrà applicarsi alle figure iscritte, ma con ordine inverso, mentre di queste la più piccola sarebbe il quadrato, e maggiore sarebbe l' ottagono, crescendo sempre lo spazio al crescere del numero de' lati della figura, finchè si arrivi a quel poligono, che non sia sensibilmente diverso dal circolo.

85 Tornando alle figure circoscritte, egli è chiaro, che queste ponno dividersi in triangoli tutti eguali conducendo dal centro del circolo a ciascun angolo della figura delle rette linee. Che se dal centro si condurranno altre linee ai punti del contatto, si avrà l' altezza di ciascun triangolo, e questa sarà in tutti eguale al raggio del circolo. Per la qual cosa volendosi ridurre tutta l' area della figura ad un solo triangolo, basta prendere una linea, che sia la somma di tutti i lati del poligono, e alzare perpendicolarmente sopra uno degli estremi di questa linea il raggio del circolo, mentre con ciò si avrà un triangolo rettangolo eguale all' area della figura.

86 Ne segue come corollario, che se fosse data una linea AB (*Fig.* 45) eguale alla circonferenza del circolo C, condotto un raggio CA ad angolo retto con AB, e compito il triangolo CAB, sarebbe l' area di questo eguale all' area del circolo. Imperocchè essendo il circolo una figura regolare, la cir-

circonferenza sarà la somma di tutti i lati, che formano il perimetro, onde questa col raggio darà un triangolo rettangolo eguale all' area del circolo.

87 Considerandosi i circoli come figure regolari, giacchè in queste condotto essendo qualunque diametro, purchè sieno la figure dello stesso numero di lati, e purchè i diametri sieno in tutte similmente descritti, per la similitudine delle figure saranno esse in ragione duplicata dei detti diametri, cioè come i quadrati dei diametri; dovrà dirsi lo stesso di due circoli, i quali perciò seguono la ragione dei quadrati dei loro diametri. Perchè poi il perimetro di una figura sta al perimetro di un' altra simile, come il diamètro della prima al diametro della seconda, così paragonandosi le circonferenze di due circoli, avranno queste la stessa ragione, che hanno i diametri.

88 Il problema di trovare con esattezza geometrica un triangolo, o un quadrato eguale all' area di un circolo non è stato per anche sciolto da alcuno. Per ciò, che si è detto, si manifesta, che se modo vi fosse di trovare una linea retta eguale alla circonferenza del circolo, niente resterebbe a desiderare per la soluzione del detto problema. Non avendo potuto i geometri giugnere a capo di questa ricerca, si sono essi ingegnati di ridurre almeno alcune porzioni di circolo a figure rettilinee, del qual genere sono certe lunule dette d' Ippocrate Chio, prendendo esse il nome da lui, che ne fu l' inventore. Abbiasi un triangolo rettangolo A D B (*Fig.* 46), e si descriva un semicircolo sopra l' ipotenusa, come pure sopra ciascun cateto. Giacchè i circoli stanno come i quadrati dei diametri, avrà il semicircolo sopra l' ipotenusa ai due semicircoli sopra i cateti la stessa ragione, che hanno i quadrati delle predette linee; ma questa ragione è di egualità; dunque il semicircolo sopra l' ipotenusa sarà eguale agli altri due presi insieme. Da queste quantità eguali si levino i due segmenti A D F A, B D E B, che ad esse sono comuni, e resterà da una parte il triangolo A D B, e dall' altra due lunule D H A F D, D I B E D, le quali perciò saranno eguali al triangolo. Se i cateti fossero eguali, cioè se il punto D cadesse nel mezzo del semicircolo, sarebbero eguali le lunule, e ciascuna sarebbe eguale alla metà del triangolo.

89 Quan-

89 Quando vi fosse bisogno per le operazioni pratiche di conoscere l' area, o la circonferenza di un circolo, potremo ricorrere ad alcune misure dateci in numeri dai geometri, le quali se non sono esatte, si accostano però così da vicino al vero, che ponno prendersi per giuste, almeno rispetto all' uso, che se ne vuol fare, cioè d' appagare i nostri sensi, che sono di un accorgimento assai limitato. Archimede col circoscrivere ad un circolo una figura di 96 lati, calcolò, che il perimetro di essa, essendo il diametro eguale ad 1, riesce minore di $3\frac{1}{7}$, e molto più dovrebbe riuscire minore la circonferenza del circolo, la quale non arriva ad eguagliare il perimetro della figura circoscritta. Iscrivendo poscia una figura di lati 96 al medesimo circolo, e posto come prima il diametro eguale ad 1, risulta il perimetro della figura maggiore di $3\frac{10}{71}$, e perchè la circonferenza del circolo eccede il detto perimetro, è forza che essa pure sia maggiore di $3\frac{10}{71}$. Riducendosi i due rotti alla stessa denominazione, avremo la circonferenza del circolo, posto il diametro eguale ad 1, minore di $3\frac{71}{497}$, e maggiore di $3\frac{70}{497}$; e però la esattezza geometrica resta compresa entro il limite di $\frac{1}{497}$. Altri geometri o col mezzo di figure di un maggior numero di lati iscritte, e circoscritte al circolo, o coll' ajuto di serie infinite inventate dopo l' uso dell' algoritmo, hanno assegnato dei limiti assai più ristretti. Noi crediamo di provedere abbastanza al bisogno della pratica, assegnando la seguente proporzione:

Diametro del circolo = 100, 000, 000
Circonferenza = 314, 159, 265

90 Riguardandosi il circolo come un poligono rettilineo non incontreremo alcuna difficoltà nello stabilire con esattezza geometrica le proporzioni, che convengono ai cilindri, e ai coni paragonati insieme. Imperocchè qualunque cilindro potrà prendersi per un prisma, e qualunque cono per una piramide, che sieno costituiti sopra un poligono, il quale però non differisca dal circolo, che di una quantità minore di qualunque quantità assegnabile. Per le dimostrazioni spiegate poc' anzi, e che sarebbe inutile di ripetere, restano comprovate le seguenti proporzioni.

Due cilindri, che abbiano altezze, e basi eguali sono eguali (art. 61).

Lo steſſo dovrà dirſi di due coni, che abbiano baſi eguali, e altezze eguali (art. 62).

Il cono è la terza parte di un cilindro fatto ſopra egual baſe, e con eguale altezza (art. 64).

Due cilindri di eguale altezza, ma di baſi diſuguali, ſtanno fra loro come le baſi (art. 65).

Due cilindri ſopra baſi eguali, ma differenti nelle altezze, ſono in ragione delle altezze (art. 67).

E perchè un cono è ſempre la terza parte di un cilindro, il quale abbia la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza, facendoſi il confronto di due coni, diremo di loro ciò, che abbiamo detto di due cilindri, cioè che ſtieno in ragione delle baſi, ſe ſieno eguali le altezze, e in ragione delle altezze, quando ſieno eguali le baſi (art. 66, 68).

E finalmente due cilindri, o due coni di qualſivoglia grandezza ſtanno fra loro nella ragione compoſta di quella della baſe alla baſe, e dell'altezza all'altezza (art. 69).

Da queſta propoſizione ne ſegue, che eſſendo le baſi reciprocamente proporzionali alle altezze, i due cilindri, o i due coni ſieno eguali (art. 70).

91 La ſuperficie di un cilindro, quando eſſo ſia retto, uguaglia un rettangolo, che abbia per un lato l'altezza del cilindro, e per l'altro lato una linea eguale alla circonferenza del circolo, che è baſe del cilindro. In fatti conſiderandoſi il detto circolo come un poligono, e il cilindro come un priſma, giacchè la ſomma di tutti i lati del poligono diſpoſti in una retta linea, forma coll'altezza del priſma un rettangolo eguale alla ſuperficie (art. 77), reſta dimoſtrato, che lo ſteſſo deve ſuccedere nel cilindro. Abbiamo detto ciò avvenire, quando ſia retto il cilindro, perchè ſe foſſe obbliquo, non potrebbe più ſervire la circonferenza del circolo, ma converrebbe ricorrere ad altra curva, che diceſi elliſſe, per aver quel lato del rettangolo, che coll'altezza comprendeſſe uno ſpazio eguale alla ſuperficie.

92 Poichè la ſuperficie di un cilindro retto ſi trasforma in un rettangolo, volendo fare il paragone della ſuperficie di un cilindro retto con quella d'un altro, dovremo a queſte concedere quelle proprietà, che convengono ai rettangoli, i quali ſtan-

ſtanno nella ragione compoſta dei loro lati; e però conchiuderemo, che la ſuperficie di un cilindro ſtia a quella d'un altro, eſſendo ambidue retti nella ragione compoſta dell'altezza all'altezza, e della circonferenza della baſe alla circonferenza dell'altra baſe. Ma le circonferenze (art. 87) ſtanno come i diametri; dunque le due ſuperficie avranno la ragione compoſta delle altezze, e dei diametri delle baſi.

93 La ragione compoſta poc' anzi detta diviene ragione d'egualità, cioè ſono eguali i due rettangoli (art. 179 geom. de' piani) ſe i lati ſieno reciprocamente proporzionali; dal che ſi raccoglie, che due cilindri abbiano eguali le ſuperficie, ſe l'altezza del primo ſtia all'altezza del ſecondo, come il diametro della baſe di queſto al diametro della baſe del primo.

94 Eſſendo propoſto di deſcrivere un circolo, che eguagli la ſuperficie curva di un cilindro, ſi prenda la media proporzionale tra il ſemidiametro del circolo, che è baſe, e la doppia altezza del cilindro, e con queſta linea trovata ſi deſcriva un circolo, che ſarà della miſura cercata. Per ben intendere la dimoſtrazione immaginiamoci, che A B (*Fig.* 44) ſia l'altezza del cilindro, e che B C ſia eguale alla circonferenza della baſe; onde il rettangolo A B C comprenda la ſuperficie cilindrica. Ora ſi vuole deſcrivere un circolo uguale a queſto rettangolo. Sia B E il ſemidiametro del circolo, che è baſe del cilindro, e giacchè B C uguaglia la circonferenza, ſarà il triangolo E B C eguale al detto circolo, o baſe del cilindro. Prendaſi la media proporzionale tra E B, e 2 A B, e ſia queſta M, con cui deſcrivaſi un circolo. Eſſendo M media proporzionale tra E B, e 2 A B il circolo fatto col raggio E B, cioè il triangolo E B C ſtarà al circolo M (art. 87) come E B : 2 A B. La ſteſſa ragione troveremo tra il triangolo E B C, e il rettangolo A C, cioè quella di E B : 2 A B; dunque il triangolo E B C ſta al circolo M, come il medeſimo triangolo E B C al rettangolo A C, e però è forza, che ſia il circolo deſcritto col raggio M eguale al rettangolo A C, cioè alla ſuperficie del cilindro. Egli è chiaro, che il raggio M potrebbe egualmente determinarſi cercando la media proporzionale tra 2 E B, e A B, giacchè il rettangolo di queſte due è eguale al rettangolo delle due prime. Dunque la ſuperficie

del cilindro è eguale all' area d' un circolo fatto col raggio, che sia medio proporzionale tra il diametro della base, e l' altezza.

95 La superficie del cono retto, non essendo dissimile dalla superficie di una piramide, quando vogliasi riguardare il circolo come un poligono rettilineo per avere un triangolo ad essa eguale converrà segnare una linea come B C (*Fig.* 45) eguale alla circonferenza della base, e tirando per B una retta perpendicolare, e di lunghezza eguale al lato del cono, si avrà il triangolo A B C eguale alla superficie del cono, siccome si è veduto della piramide (art. 79). Chi volesse formare un circolo eguale alla detta superficie, basterà trovare la media proporzionale M tra il semidiametro della base, e il lato del cono, e con questa linea come raggio descrivere un circolo. Prendasi E B eguale al semidiametro della base, e si congiunga E C. La dimostrazione non sarà punto diversa dalla precedente.

96 Per ciò che fra poco esporremo, giova ora avvertire, che essendo un cono retto A B C (*Fig.* 46) diviso da un piano G H parallelo alla base, non sarà difficile determinare la superficie curva di quel solido, che resta tra la base, e la sezione, e che dicesi cono troncato. Si faccia un triangolo rettangolo a b c eguale alla superficie del cono A B C col prendere b c eguale alla circonferenza della base, ed a b eguale al lato A B del cono; indi si prenda a g eguale ad A G, e si tiri la parallela g h, la quale non potrà a meno di non essere eguale alla circonferenza del circolo G H, e però il triangolo a g h eguale alla superficie del cono A G H, che sottratta dalla superficie del cono maggiore darà il trapezio b g h c eguale alla superficie curva del cono troncato. Volendosi ridurre in un rettangolo questo trapezio, ciò potrà farsi in molti modi, ed è facile l' intendere, che divisa per metà g b in m, e condotta m n, il rettangolo fatto da tutta g b in m n è eguale al trapezio. Questa m n è metà della somma delle due g h, b c, onde la superficie del cono troncato si avrà facendosi un rettangolo di B G colla metà della somma delle due circonferenze G H, B C; oppure divisa B G per metà, e condotto un piano parallelo alla base, per cui si abbia una sezione corrispondente ad m n, la circonferenza del circolo, che nasce per tal sezione colla retta B G darà lo stesso rettangolo, che comprende la superficie del cono troncato.

97 L' al-

97 L' altro solido, che resta da considerare è la sfera, che ora paragoneremo al cilindro, e al cono, spiegando quei teoremi, che hanno particolarmente renduta celebre la memoria di Archimede. Perchè riescano facili le dimostrazioni, ricorreremo al metodo di dividere il solido in tanti elementi. Sia un rettangolo A B H D (*Fig.* 47) circoscritto ad un semicircolo A S D, che però avrà base doppia dell' altezza. Sieno pure condotte dal centro C le rettte C B, C H, e la perpendicolare C S. Immaginiamoci, che la figura si aggiri intorno alla linea C S come asse, e con questo moto intenderemo formarsi un cilindro dal rettangolo A H, un emisferio dal semicircolo A S D, ed un cono dal triangolo B C H. Oltre a questi tre solidi possiamo immaginarne un altro separando l' emisfero dal cilindro, con che rimane un solido in forma di scodella, la cui superficie interna, o concava sarà sferica, e la esterna cilindrica, formandosi esso dalla rivoluzione della figura A S D H B A. Sia condotto un piano M N parallelo alla base, che tagli i predetti solidi. Per mezzo di questo piano si faranno diverse sezioni, dalle quali riconosceremo gli elementi di ciascun solido. Elemento del cilindro sarà il circolo, che ha per raggio E M; elemento della sfera il circolo, che ha per raggio E I; e del cono quel circolo, che ha per raggio E L. Che se vorremo l' elemento del quarto solido, che abbiamo detto somigliante ad una scodella, altro non si ricerca, che levare dal circolo fatto con E M il circolo fatto con E I, mentre allora resterà una zona terminata da due circoli concentrici, che servirà per elemento di questo solido. Si descriva la linea C I, che chiude il triangolo C E I rettangolo, per cui la differenza tra i due circoli E M, E I sarà eguale al circolo E L; e perchè abbiamo veduto che l' elemento del quarto solido uguaglia appunto la differenza dei due circoli E M, E I, e l' elemento del cono si ha per mezzo del circolo E L, resta dimostrato, che il solido intorno all' emisfero è eguale al cono C B H, essendo che ciascuno elemento dell' uno uguaglia ciascuno elemento dell' altro. Il cono (art. 90) è la terza parte del cilindro A B H D, a cui essendo eguale il solido intorno all' emisfero, ne risulta che l' emisfero sia due terzi del cilindro circoscritto; e tutta la sfera sarà due terzi di un cilindro ad essa circoscritto, il quale perciò avrà per base un

circolo eguale a quello, che colla sua rivoluzione forma la sfera, e per altezza il diametro della sfera.

98 La superficie della sfera è eguale alla superficie del cilindro circoscritto. Intenderemo la formazione di questi due solidi, (*Fig.* 48) supponendo come nell' articolo precedente, che un circolo, a cui sia circoscritto un quadrato s' aggiri intorno al diametro E S. Per fare idea degli elementi dell' una, e dell' altra superficie è necessario riguardare il circolo, che genera la sfera come un poligono rettilineo, di cui un latercolo sia I L. Nello aggirarsi, che fa il poligono intorno all' asse E S, qualunque latercolo come I L descrive una zona, o sia la superficie di un cono troncato. In fatti prolungandosi I L, finchè incontri l' asse in un punto T, dalla rivoluzione della T I verrà descritta la superficie di un cono avente per base un circolo fatto col semidiametro I M, e la sola I L darà la superficie di un cono troncato da una sezione L N. Tra il piano della base M I, e della sezione N L resta intercetta una porzione della superficie del cilindro, che potrà riguardarsi come elemento di essa superficie, che viene descritto dal moto in giro della linea P Q. Ora se dimostreremo, che preso qualunque latercolo I L, la superficie di esso descritta col moto intorno all' asse sia eguale alla corrispondente descritta nel cilindro dalla P Q, sarà provato, che tutta la superficie del cilindro A B H D sia eguale alla superficie della sfera. Per il punto del contatto V si tiri C V, e l' ordinata V R, e perchè vogliamo supporre regolare il poligono, il punto del contatto V cadrà nel punto di mezzo della linea I L; onde la superficie del cono troncato sarà eguale (art. 96) alla superficie di un cilindro, che abbia V R per semidiametro della base, e I L per altezza. E' evidente essere I L : M N : : T V : T R, e per essere rettangolo in V il triangolo T V C, sarà pure T V : T R : : C V : V R, e però I L : M N : : C V : V R, oppure I L : M N : : P M : V R, giacchè C V è eguale a P M. Per la qual cosa se paragoneremo i due piccoli cilindri, uno de' quali ha per altezza I L, e per semidiametro della base V R, l' altro per altezza M N, e per semidiametro della base P M, ci accorgeremo per l' analogia ultimamente scritta, che hanno le altezze reciprocamente proporzionali ai semidiametri delle basi, e che

però

però (art. 93) hanno eguali le ſuperficie. Il primo di queſti cilindri, come abbiamo veduto, ſomminiſtra colla ſua ſuperficie l' elemento della sfera, e l' altro l' elemento del cilindro circoſcritto alla sfera; dunque eſſendo eguali gli elementi, saranno ancora eguali le intiere ſuperficie; lo che era da dimoſtrare.

99 Abbiamo inſegnato (art. 94) di deſcrivere un circolo, di cui l' area ſia eguale alla ſuperficie di un dato cilindro, lo che ſi fa prendendo la media proporzionale tra il diametro della baſe, e l' altezza, e ſervendoſi di quella linea come raggio per deſcrivere un circolo. Nel cilindro circoſcritto alla sfera eſſendo l' altezza eguale al diametro della baſe, la media proporzionale non differiſce dall' una, e dall' altra, onde deſcrivendoſi un circolo col raggio eguale al diametro della sfera, ſarà l' area di eſſo eguale alla ſuperficie del cilindro, ed inſieme alla ſuperficie della sfera; e perchè queſto circolo è quadruplo del circolo, che ha per diametro lo ſteſſo diametro della sfera, e che però diceſi circolo maſſimo di eſſa, conchiuderemo, che la ſuperficie della sfera ſia quadrupla di un circolo maſſimo della medeſima.

100 Altre proprietà potrebbero dimoſtrarſi dipendentemente dai teoremi ſpiegati, le quali per brevità ſi tralaſciano. Avvertiremo ſolamente, che non ſolo tutto il ſolido della sfera, e la intiera ſuperficie di eſſa ponno averſi per le dimenſioni convenienti al cilindro circoſcritto, ma che può farſi lo ſteſſo per qualunque ſegmento della sfera sì in riguardo alla ſolidità, che in riguardo alla ſuperficie. Queſte verità, che ſono belle per ſe ſteſſe, e degne della contemplazione dei geometri, giovano ancora moltiſſimo alla pratica; perchè occorrendo di dover eſprimere per numeri o la ſolidità, o la ſuperficie di tutta la sfera, oppure di una ſola parte, ciò potrà ſempre farſi coll' ajuto del cilindro circoſcritto; del che parleremo negli articoli ſeguenti.

Del

Del modo di esprimere per numeri tanto la solidità, che la superficie del cilindro, del cono, e della sfera.

101 PEr esprimere in numeri il valore di un cilindro, o di un cono, giacchè l' uno si riguarda come un prisma, e l' altro come una piramide, dovranno valere le stesse regole, che hanno servito per questi solidi, cioè di moltiplicare la base per l' altezza, quando si voglia il valore del cilindro, e di questo prodotto prenderne la terza parte, quando si voglia il valore del cono. La difficoltà, che s' incontra per eseguire un tal calcolo si è di esprimere la base con rigor geometrico, perchè non essendo per anche stata geometricamente determinata l' area di un circolo, non possiamo riferirla a quelle superficie a noi cognite, per esempio al quadrato di un piede, che voglia prendersi per unità. La mancanza di questa notizia, sebbene niente pregiudichi al conseguimento di quelle proporzioni, che abbiamo dimostrate fra questi solidi, non permette però d' indicare il rapporto di un cilindro, o di un cono ad un cubo dato. Tuttavia se ci contenteremo di un calcolo per approssimazione, potrà esso eseguirsi nel modo seguente. Sia per esempio un cilindro, che abbia per base un circolo di 5 piedi di diametro, e sia l' altezza di piedi 8. Abbiamo di sopra accennata la proporzione tra il diametro, e la circonferenza del circolo per mezzo di due numeri composti di nove cifre, i quali potranno ridursi a minore denominazione coll' ommettere nell' uno, e nell' altro un egual numero delle ultime cifre, dovendo dipendere questa riduzione dalla maggiore, o minore esattezza, che si vuol ottenere. Ora per brevità supporremo, che basti all' importanza del presente calcolo esprimere la detta proporzione colle sole tre cifre, cioè 100, e 314. Facciasi $100 : 314 :: 5 :$ al quarto, che sarà piedi $15\frac{7}{10}$, e darà questo numero la circonferenza del circolo, che è base del cilindro. Moltiplicandosi poscia questa circonferenza per il raggio, e presa la metà del prodotto, si avrà l' area del circolo di piedi quadrati $19\frac{5}{8}$, la quale moltiplicata per l' altezza 8, darà il valore del solido di piedi cubi 157.

102 Per avere la solidità del cono si cerchi prima il valore di un cilindro di eguale altezza fatto sulla medesima base, e poi se ne prenda la terza parte. Sia l'altezza del cono piedi 8, e sia il diametro della base piedi 5. Un cilindro di queste dimensioni, come abbiamo poc' anzi veduto, contiene piedi cubi 157, il qual numero diviso per 3 dà il valore del cono di piedi cubi $52\frac{1}{3}$.

103 Essendo dato il diametro di una sfera di piedi 5, per averne la solidità si cerchi prima il numero, che esprime il cilindro circoscritto, il quale perciò avrà un circolo per base, il cui diametro sarà di piedi 5, e di altrettanti piedi sarà l'altezza. L'area di un circolo del dato diametro si è trovata (art. 101) piedi quadrati $19\frac{5}{8}$, onde moltiplicandosi per l'altezza 5, si avrà il cilindro di piedi cubi $98\frac{1}{8}$, e di questi prendendone due terzi, risulta il valore della sfera di piedi cubi $65\frac{5}{12}$.

104 Con questi pochi esempj ci faremo strada ad altre simili ricerche. Chi non vede, che volendosi esprimere per numeri un cono troncato, essendo questo solido la differenza di due coni, trovata l'espressione dell'uno, e dell'altro, e sottraendo la minore dalla maggiore, sarà il residuo quel numero, che si cerca. Un segmento di sfera non richiede operazioni diverse da quelle, che si sono fatte fin' ora. Supponiamo, che fosse proposto di esprimere per numeri quel segmento, che resta (*Fig.* 47) tra i due piani M N, e B H. Essendo dato il diametro della sfera, e la distanza dei due predetti piani, cioè la linea E S, si troverà senza difficoltà quel cono troncato, che resta fra questi piani, il quale per l'uguaglianza dimostrata fra gli elementi equivale alla porzione del solido in forma di scodella, che rimane fra quei medesimi piani, e che staccato dal cilindro M N H B lascia il segmento della sfera, di cui si vuole l'espressione.

105 La superficie del cilindro retto si fa moltiplicando la circonferenza del circolo, che è base, per l'altezza. Ritenendo i numeri proposti, (art. 101) si troverà la superficie di piedi quadrati $125\frac{3}{5}$.

205 La superficie del cono retto uguaglia un triangolo rettangolo, che abbia per un cateto la circonferenza del circolo,

colo, che è base, e per l'altro cateto il lato del cono. Cerchisi in primo luogo questo lato del cono, il quale (come mostra la figura 46) sarà la radice di quel numero, che risulta fatta la somma di due quadrati, cioè del quadrato dell' altezza, e di quello del semidiametro della base. Prendendo il diametro della base piedi 5, e l'altezza piedi 8, come si fece nell' esempio proposto (art. 102) sarà la predetta radice prossima al vero $8\frac{2}{5}$. La circonferenza fu trovata $15\frac{7}{10}$ (art. 100), onde fatto il prodotto di questi due numeri, e presane la metà, si avrà la superficie di piedi quadrati $65\frac{47}{50}$.

107 Abbiamo dimostrato (art. 98), che la superficie della sfera uguaglia la superficie del cilindro circoscritto; onde trovata questa, si avrà ancora l'altra; e perchè la superficie della sfera, o di qualunque segmento procede in modo, che sia sempre eguale alla superficie del cilindro, che gli corrisponde, come per esempio (*Fig.* 48) la superficie del segmento di sfera compreso fra i due piani A D, P G è eguale alla superficie del cilindro A D P G, non vi sarà alcuna difficoltà per esprimere la superficie di qualunque porzione, o segmento di sfera.

COM-

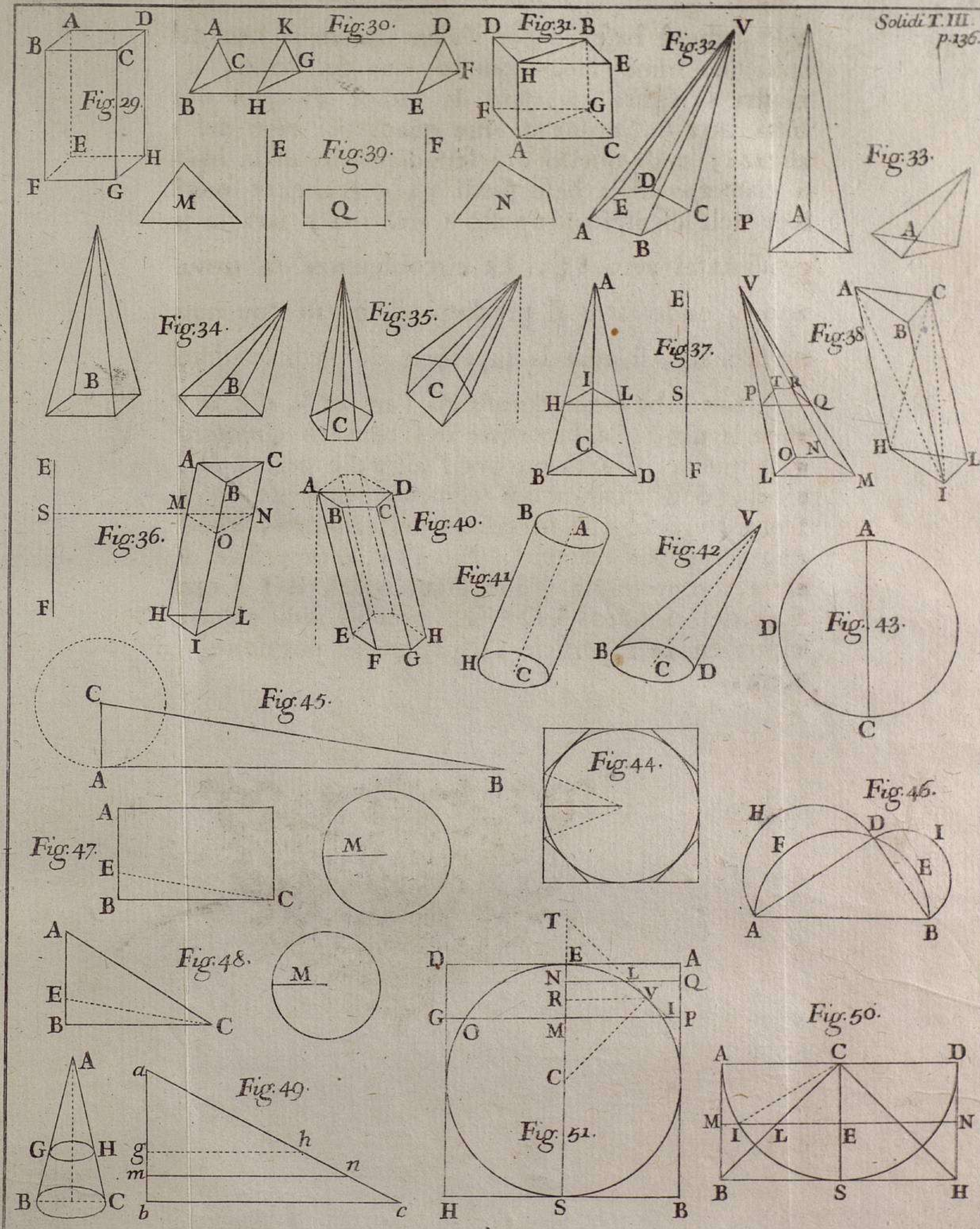


Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.

COMPENDIO
DELLA
TRIGONOMETRIA
PIANA.

COMPENDIO DELLA TRIGONOMETRIA PIANA.

1 NEgli elementi della Geometria abbiamo moſtrato, come date le miſure di due lati d' un rettangolo ſi poſſa eſprimere in numeri la ſuperficie di eſſo, e parimente come, date le miſure della baſe, e dell' altezza d' un triangolo, o d' un parallelogrammo, ſi eſprima in numeri la loro ſuperficie, dacchè abbiamo poſcia dedotto il metodo di miſurare la ſuperficie di qualſivoglia altra figura rettilinea. Moſtreremo ora ſuccintamente, come ſi poſſano ritrovar in numeri le miſure di ciaſcun lato, e di ciaſcun angolo de' triangoli rettilinei, date che ſieno le miſure di alcuni altri lati, o angoli de' medeſimi; il che diceſi *ſciorre il triangolo*, e queſta parte della Geometria diceſi *Trigonometria piana*, o *rettilinea*; e da ciò non ſarà difficile dedurre le regole per trovar le miſure de' lati, e degli angoli di tutte le figure rettilinee, quando ſi abbia un numero ſufficiente di dati degli angoli, e de' lati di queſte, giacchè tutte le figure ſuddette ſi riducono in triangoli.

2 E' d' avvertire, che colle regole, le quali ſiamo per dare, ſpeſſe volte non ſi avrà la miſura degli angoli, o de' lati, che ſi cercano, con tutta l' eſattezza geometrica, ma ſolamente in numeri aſſai proſſimi al vero, e con eſattezza, che baſti per non errare ſenſibilmente nella pratica; sì perchè potrà accadere, che l' angolo, o il lato, la cui miſura ſi cerca, debba eſprimerſi riſpetto all' unità, di cui ci ſerviamo, con qualche numero irrazionale, laddove i Trigonometri non adoperano, che numeri proprj, cioè razionali; sì anco perchè, quanto agli angoli può darſi caſo, che l' angolo, che ſi cerca ſia tal parte della circonferenza, che non poſſa eſprimerſi con alcun numero ſeſſageſimale, cioè di gradi, minuti, ſecondi &c., che ſono que' ſoli numeri, che da noi ſi adoperano per gli angoli, ma

S deb-

debba esprimersi con numero non sessagesimale, ancorchè razionale, come se egli dovesse essere la settima, o la quattordicesima parte della circonferenza &c. Per la medesima ragione ciascun' angolo, o lato dato, che debba servire per manifestare gli altri angoli, o lati del triangolo, ove fosse espresso in numeri irrazionali, o rispetto agli angoli in numeri non sessagesimali, dovrà sempre ridursi in numeri razionali, e rispetto agli angoli in sessagesimali, che sieno prossimi alla giusta misura di quel lato, o di quell' angolo; e in tali sorte di numeri sempre li supporremo ridotti, qualunque volta diremo esser dato un lato, o un angolo d' un triangolo. E finalmente in tutti i casi, ne' quali sarà dato più d' un lato del triangolo, dovranno questi lati ridursi, o esser ridotti in misura della medesima specie, cioè, che abbiano la medesima linea per unità, non potendosi altrimente procedere alla soluzione.

3 In ogni triangolo tre essendo i lati, e tre gli angoli, è manifesto, che di queste sei parti tre almeno debbono esser date per poter sciorre il triangolo, cioè per trovar le tre altre, e che fra le date, una almeno dee essere un lato. Imperocchè se di queste sei parti due soltanto fossero date, come due angoli, o due lati, o un lato, e un angolo, facilmente si vede, che da questi dati non potrà necessariamente dedursi la misura delle altre parti incognite, potendo queste, salva la misura de' dati suddetti, essere o maggiori, o minori in infinite maniere. Così se io saprò, che la linea A B (*Fig.* 1) è di dieci piedi, e l' angolo A B F di 125 gradi, non da questo potrò mai dedurre quanto sia l' angolo A del triangolo, che abbia per uno de' lati A B, e per uno degli angoli il B, potendo esservi infiniti triangoli, che abbiano questi due dati; nè eziandio potrò dedurre quanta sia la lunghezza degli altri lati, o la misura del terzo angolo del detto triangolo; e il medesimo succederà in qualsivoglia altra combinazione, che si prenda di due soli dati. E parimente se io saprò la misura di ciascun di tre angoli A, B, C (*Fig.* 2) del triangolo A B C, non potrò mai da questo dedurre di qual lunghezza ex. gr. di quanti piedi, o palmi &c. sieno i lati di esso; perocchè possono intendersi infiniti altri triangoli, come *abc* equiangoli ad A B C, i quali non abbiano però i lati di quelle lunghezze, ma maggiori, o minori. Per poter

ter dunque sciorre un triangolo conviene avere date tre parti di esso, e che queste parti date non sieno i tre triangoli, ma fra esse sia almeno un lato; che in tal maniera la misura delle altre parti incognite potrà ritrovarsi per le regole, che prescriveremo, e salvo in certi casi un'avvertenza, che a suo luogo si indicherà. Avvertendo tuttavia, che sebbene non si può propriamente sciorre un triangolo, in cui non si abbia altro di dato, fuorchè gli angoli di esso, cioè non si può da questi dati inferire la misura de' lati, si può nulladimeno sciorre impropriamente, cioè trovare la proporzione, che essi lati hanno fra loro, come a suo luogo mostreremo.

Definizioni trigonometriche.

4 *Compimento*, o *complemento* d'un arco, o d'un angolo è la differenza di esso arco, o angolo del quadrato, o sia dell'angolo retto, cioè de' gradi nonanta. Quindi è, che il complemento d'un arco minore del quadrante, o sia d'un angolo acuto è il difetto di esso da 90 gradi; ma il complemento d'un arco maggiore del quadrante, o sia d'un angolo ottuso è l'eccesso di esso sopra 90 gradi. E due angoli aggiacenti A C B, E C B hanno sempre il medesimo complemento B C D (*Fig.* 3); e ogni complemento è sempre minore di gradi 90.

5 *Supplemento* d'un angolo è il difetto di esso da gradi 180, o sia da due retti. Quindi è, che due angoli aggiacenti A C B, E C B sono sempre supplementi l'uno dell'altro, come si è anche detto all'articolo 16 degli Elementi della Geometria.

6 Se dal punto C di qualsivoglia angolo B C A (acuto nella prima figura, e ottuso nella seconda) come centro si descriverà un circolo B A H (*Fig.* 4), che tagli le linee B C, A C, le quali comprendono il detto angolo ne' punti B, A, e congiungerassi la retta B A, e quindi dall'uno de' due punti A, B, come da A si tirerà sopra l'altra linea B C (prolungata ove faccia bisogno) la perpendicolare A D; e parimente per un de' suddetti punti A, B, come per B si tirerà la retta B E, che tocchi il circolo nel detto punto B, ed incontri l'altra retta C A prolungata nel punto E; la retta A B dirassi *corda*, o *sottesa*

tesa tanto dell' arco A B, quanto dell' angolo B C A; la retta A D *ſino retto*, o ſemplicemente *ſino* del detto arco, e del detto angolo; la retta D B *ſaetta*, o *ſino verſo*, la retta B E *tangente*, e la retta C E *ſecante* del medeſimo arco, ed angolo; e finalmente la retta C A, o C B, che è ſemidiametro del circolo deſcritto, chiameraſſi *raggio*, o *ſino totale*.

7 Da queſte definizioni ſeguono alcuni corollarj, che ſemplicemente eſporremo ſenza altra dimoſtrazione, perchè è aſſai facile il dedurle dalle definizioni ſteſſe. E prima è manifeſto, che prendendo ſempre un medeſimo raggio, cioè miſurando ſempre le corde, i ſini, le tangenti &c. in un medeſimo circolo, la corda ſarà maggiore quanto l' angolo, che la ſottende ſarà maggiore; ed all' incontro:

8 Che negli angoli acuti a maggior angolo corriſponde maggior ſino, e all' incontro a maggior ſino maggior angolo; e il ſino maſſimo di tutti è quello, che conviene all' angolo retto, che è lo ſteſſo raggio, il quale perciò appunto diceſi *ſino totale*; ma negli angoli ottuſi a maggior angolo corriſponde minor ſino; e che il ſino di qualſivoglia angolo è ſempre eguale al ſino del ſupplemento di eſſo.

9 Che il ſino verſo è ſempre maggiore, quanto maggiore è l' angolo, o ſia queſto acuto, o ottuſo, e all' incontro &c.; e che il ſino verſo dell' angolo acuto è minore del raggio, quello dell' angolo retto eguale al raggio, e quello dell' ottuſo maggiore del raggio.

10 Che negli angoli acuti a maggior angolo riſponde maggior tangente, e all' incontro: che la tangente dell' angolo retto è infinita: che negli angoli ottuſi a maggior angolo riſponde minor tangente, e all' incontro: e che la tangente di qualſiſia angolo è ſempre eguale alla tangente del ſupplemento di quello.

11 Che la ſecante è ſempre maggiore del raggio, e negli angoli acuti maggior angolo, e maggior ſecante ſi corriſpondono; che la ſecante dell' angolo retto è infinita; e che negli angoli ottuſi maggior angolo riſponde a minor ſecante; e che finalmente la ſecante d' ogni angolo è eguale alla ſecante del ſuo ſupplemento.

12 La corda, il ſino, la ſaetta, la tangente, e la ſecante,

te, che conviene al complemento d' un arco, o d' un angolo, dicesi *corda seconda*, *sino secondo*, *saetta seconda*, *tangente seconda*, e *secante seconda* di quell' arco, o angolo, al cui complemento conviene: come se sarà l' angolo FCE, il cui complemento sia ECD, la corda ED di questo complemento si dirà corda seconda dell' angolo FCE (*Fig.* 5); e così il sino EH la saetta DH, la tangente DK, e la secante CK del detto complemento ECD si diranno sino secondo, saetta seconda, tangente seconda, e secante seconda del medesimo angolo FCE. Sogliono alcuni moderni, in vece di sino secondo, dire *cosino*, e per tangente seconda *cotangente*, e per secante seconda *cosecante*.

13 Da ciò segue, che due angoli aggiacenti FCE, BCE hanno la medesima corda seconda, il medesimo sino secondo, la medesima saetta, e tangente, e secante seconda; giacchè (art. 4) hanno il medesimo complemento DCE.

14 Ne segue ancora, che il complemento DCE di qualsivoglia angolo acuto FCE avrà per suo sino secondo il sino di quest' angolo FCE, e per sua tangente seconda la tangente di questo, e così delle altre linee trigonometriche di sopra definite.

15 E finalmente, che in qualsivoglia angolo acuto FCE, ovvero ottuso BCE la porzione del semidiametro CA, compresa fra il punto dell' angolo, o sia il centro del circolo C, e il sino di esso angolo EA è sempre eguale al suo secondo HE del detto angolo FCE, ovvero BCE.

Del canone trigonometrico.

16 SE dal punto A di qualsisia angolo BAC, come centro, si descriveranno più circoli, i cui semidiametri sieno Ab, AB (*Fig.* 6), e che seghino l' altra linea AC, che comprende il detto angolo ne' punti c, C, e si congiungeranno BC, bc, che saranno ciascune nel suo circolo corde del suddetto angolo, è manifesto, che i triangoli cAb, CAB saranno simili per avere l' angolo A comune, e i lati, che lo comprendono cA, bA nell' istessa proporzione, che i lati CA, BA, cioè in ragione d' egualità; e perciò, come il raggio Ab alla corda bc, così il raggio AB alla corda BC. Dunque quella

ragio-

ragione, che ha in un circolo il raggio alla corda di qualsivoglia angolo, quella medesima ha il raggio in qualsivoglia altro circolo alla corda del medesimo angolo. Parimente se si tireranno i seni c d, C D, si mostreranno simili i triangoli A c d, A C E, come quelli, che oltre l'angolo comune A, hanno anco gli angoli retti d, D; e perciò come il raggio A C al sino C D, così il raggio A c in qualsivoglia altro circolo al sino c d del medesimo angolo. Così pure si mostrerà, come il raggio A b alla tangente b e, o alla secante A e, così in ogni altro circolo il raggio A B alla tangente B E, o alla secante A E del medesimo angolo. Finalmente essendo anco simili i triangoli c d b, C D B, ed essendosi mostrato poc' anzi essere A b : b c : : A B : B C, ed essendo parimente b c : b d : : B C : B D, sarà anco per egualità di ragione A b : b d : : A B : B D. Dunque come il raggio alla saetta in un circolo, così il raggio alla saetta del medesimo angolo in qualsivoglia altro circolo. Generalmente dunque in ogni circolo il raggio ha la medesima proporzione a ciascuna delle linee trigonometriche, che appartengono ad un medesimo angolo, o sia da un medesimo arco.

17 Quindi è, che se il raggio di qualsivoglia circolo si esprimerà sempre per un medesimo numero, quel numero, che esprimerà la corda, il sino, la tangente, la secante &c. di qualsisia angolo in un circolo, esprimerà ciascuna di queste stesse linee convenienti al medesimo angolo in qualsivoglia altro circolo. Onde i numeri di tutti i sini, di tutte le tangenti &c., che possono convenire a qualsivoglia angolo, trovati, che sieno una volta in un circolo, serviranno per tutti gli altri circoli, purchè in tutti s' intenda il raggio di un egual numero di parti.

18 Sono pertanto convenuti fra loro i moderni autori di Drigonometria d' intendere il raggio di ciascun circolo diviso in 10000000 parti eguali, o talvolta ancora in altro numero maggiore, o minore, ma sempre decadico per maggiore comodità, avvegnachè gli antichi fossero soliti valersi del numero 60, o d' altri numeri sessagesimali. Quindi con particolari artificj, e non senza incredibil fatica hanno preso a calcolare i numeri de' sini, delle tangenti, e delle altre linee trigonometri-

metriche di ciascun angolo acuto a grado per grado, anzi a minuto per minuto, e questi numeri hanno disposti per ordine in alcune tavole, che costituiscono quello, che si chiama *canone trigonometrico*, acciocchè col mezzo di questo canone, dato qualsivoglia arco, o angolo di gradi, e minuti senza frazioni, si possa subito trovare il numero del sino, della tangente &c., che gli corrisponde; e dato all' incontro qualsivoglia numero per sino, per tangente &c. d' un angolo, il qual numero sia fra quelli, che sono registrati nel detto canone, si possa ritrovare di quanti gradi, e minuti sia il detto angolo, come è necessario di fare nelle soluzioni trigonometriche, secondo le regole, che appresso esporremo. Anzi hanno inoltre dimostrato, come si possano eziandio col soccorso del medesimo canone trovare i numeri de' sini &c. degli angoli, che oltre i gradi, e minuti contengono delle seconde, e all' incontro come, dato un numero per sino, per tangente &c., ancorchè non sia fra quelli, che sono registrati nel canone, si possa trovare a qual angolo di gradi, minuti, e seconde egli corrisponda; purchè sempre s' intenda il raggio di 10000000, o di qual altro siasi numero decadico, da ciascuno di essi supposto nella costruzione del suo canone; e purchè si convenga in vece de' numeri esatti, e precisi di questi sini, tangenti &c., come pure degli angoli (i quali numeri spesse volte sono irrazionali, e inesprimibili, come di sopra si è detto) di contentarsi di numeri razionali prossimi al vero.

19 Quali sieno stati gli artificj suddetti, col mezzo de' quali hanno potuto rinvenire i numeri di ciascuna delle accennate linee, non è nostro intendimento di spiegarlo in questo luogo, per non allungar di soverchio il presente compendio. Così ancora per servire alla brevità non daremo in iscritto i precetti, che riguardano l' uso del canone, ma piuttosto li spiegheremo in pratica col canone stesso alla mano, il che farà assai meglio intendere la forma, e l' uso, che qualsivoglia precetto far non potrebbe. Passeremo dunque a mostrare in alcuni pochi teoremi i fondamenti delle regole, che appartengono alle soluzioni de' triangoli rettilinei, in grazia delle quali è stato costrutto il canone trigonometrico, e appresso esporremo le regole stesse in alcuni problemi, che conterranno tutt' i casi possibili delle dette soluzioni.

Teo-

Teoremi fondamentali della Trigonometria.

20 IN ogni triangolo A B C, ſe da uno degli angoli acuti A come centro ſi deſcriverà per l' angolo retto B (*Fig.* 7) un circolo, il cui raggio ſarà per conſeguente il perpendicolo A B aggiacente all' angolo A, l' altro perpendicolo B C diverrà tangente, e l' ippotenuſa A C ſecante del detto angolo A. Che ſe dal medeſimo centro A ſi deſcriverà un circolo, che paſſi per l' altro angolo acuto C, e così abbia per raggio l' ippotenuſa A C, allora il perpendicolo C B oppoſto all' angolo A diverrà ſino di eſſo angolo A, e l' altro perpendicolo A B ſarà eguale al ſino ſecondo del detto angolo A. Tutto queſto è evidente per gli articoli 6, e 15.

21 In ogni triangolo rettilineo i lati hanno la medeſima proporzione fra loro, che hanno i ſini degli angoli oppoſti. Sia il triangolo rettilineo D B C (*Fig.* 8). Deſcrivaſi intorno ad eſſo un circolo, il centro ſia A, e da queſto punto tiriſi ſopra qualſivoglia de' lati del triangolo D B C la perpendicolare A F, che prolunghiſi fino alla periferia in H, e ſi congiungano B A, C A. Preſa dunque A B, ovvero A C per raggio, è manifeſto, che B F (che è la metà di B C) ſarà il ſino dell' angolo B A H, il qual angolo eſſendo metà dell' angolo B A C, ed eſſendo parimente l' angolo B D C alla periferia metà del detto angolo B A C al centro, la linea B F potrà dirſi ſino anche dell' angolo B D C in un circolo, che abbia per raggio A B. Nell' iſteſſo modo ſi moſtrerà, che B K, metà di B D, diviene ſino dell' angolo B C D nel medeſimo circolo; e che C G, metà di C D, diviene ſino dell' angolo C B D, ſempre nel medeſimo circolo, che ha per raggio A B. Dunque ciaſcun lato del triangolo C B D viene ad eſſer doppio del ſino dell' angolo a lui oppoſto, prendendo ſempre i ſini in uno ſteſſo circolo; e perciò i lati ſono tra loro come i ſini degli angoli oppoſti. Il che &c.

22 In ogni triangolo ſcaleno, come il lato maſſimo alla ſomma degli altri due, così la differenza di queſti alla differenza della baſe. Sia il triangolo ſcaleno F G H, il cui lato maſſimo F H (*Fig.* 9). Preſo per centro il punto G dell' angolo

golo F G H opposto a questo lato, e per semidiametro il lato G F il minore degli altri due, descrivasi il circolo L F I K, che tagli F H in I, e G H in K. Si prolunghi H G sino alla periferia in L; la porzione I H del lato massimo F H, che resta fuori del circolo chiamasi *differenza della base*. Dico dunque, che come F H, lato massimo, alla somma degli altri due G H, G F, cioè ad H L; così la differenza di questi due, cioè K H, alla differenza della base I H. Il che è evidente per le cose dimostrate all' articolo (205) degli Elementi della Geometria.

23 In ogni triangolo rettilineo, come la somma di due lati alla loro differenza, così la tangente della semisomma degli angoli opposti ad essi alla tangente della semidifferenza de' medesimi (*Fig.* 10). Sia il triangolo rettilineo D B C D a uno degli angoli di esso B, come centro, descrivasi un circolo, il cui semidiametro sia B D, cioè il minore dei due lati, che comprendono il detto angolo B, il qual circolo tagli D C, B C ne' punti E, F. Si prolunghi C B sino alla periferia in A, e congiungasi A D, la quale sia divisa per mezzo in S dalla perpendicolare F S; e per B tirando B K parallela a C D, si prenda S O eguale ad S K, (onde seguirà, che anco O D sia eguale ad A K), e si congiunga O B. Quì è manifesto, che i due triangoli A K B, A D C sono simili. Perciò come A D ad A C, così A K ad A B; e alternando A D : A K : : A C : A B; e perciò come A D ad A K presa due volte (cioè ad A K con O D), così A C ad A B due volte, cioè ad A F. Dunque dividendo, come A D a K O, così A C ad F C. Ma come A D a K O, così la metà di A D, cioè A S, alla metà di K O, cioè ad S K; dunque come A C a F C, così A S ad S K. Ciò supposto si consideri, che di queste quattro linee, che si sono mostrate proporzionali A C : F C : : A S : S K, la prima A C non è altro, che la somma de' lati D B, B C, che comprendono l' angolo B del triangolo D B C; la seconda F C, non è altro, che la differenza de' medesimi lati; la terza A S non è altro, che la tangente dell' angolo A B S in un circolo, che abbia per raggio B S; il qual angolo A B S è la metà dell' angolo esterno A B D, cioè della somma de' due interni B D C, B C D opposti a' detti lati B C, B D, onde A S viene ad essere la tangente

T della

della ſemiſomma de' due angoli ſuddetti; e finalmente la quarta S K, non è altro, che la tangente dell' angolo K B S in un circolo, che abbia parimente per raggio A S; il qual angolo K B S è la metà di K B O, cioè la metà della differenza dell' angolo O B D, o ſia A B K, ovvero B C D, dall' angolo K B D, ovvero B D C, e perciò S K viene ad eſſere la tangente della ſemidifferenza de' detti due angoli B C D, B D C. Dunque come la ſomma de' lati D B, B C alla loro differenza, così la tangente della ſemiſomma degli angoli B C D, B D C oppoſti a' detti lati alla tangente della loro ſemidifferenza. Il che &c.

24 Da queſti pochi teoremi dipendono tutte le regole di ſciorre, mediante il canone trigonometrico, qualſivoglia triangolo rettilineo in tutti i caſi poſſibili, le quali eſporremo nei ſeguenti Problemi, nella pratica de' quali tutte le operazioni aritmetiche, che occorre di fare, conſiſtono d' ordinario nel trovare un quarto numero proporzionale a tre numeri dati, il che ſi fa, come è noto, per la regola detta aurea; cioè con moltiplicare il ſecondo de' numeri dati per lo terzo, e divider poſcia il prodotto per lo primo, e il quoziente, che ne riſulta, è il quarto proporzionale, che ſi cerca.

Problemi di trigonometria piana, che comprendono la ſoluzione de' triangoli rettilinei in tutti i caſi poſſibili.

25 NE' triangoli rettangoli (ne' quali, eſſendo già dato l' angolo retto, baſtano per la ſoluzione due altri dati), dati i due perpendicoli A B, B C, trovare l' ipotenuſa A C (*Fig.* 11). Queſto primo problema ſi ſcioglie ſenza uopo del canone, facendo i quadrati di A B, e di B C, e dalla ſomma di queſti eſtraendo la radice quadrata, che ſarà la linea A C, che ſi cerca, come è manifeſto per l' articolo *69* degli Elementi della Geometria.

Eſempio. Sia A B piedi 3, B C piedi 4; ſi cerca l' ippotenuſa A C. Il quadrato di A B è 9; quello di B C 16; la ſomma di amendue è 25; la radice quadrata di queſta ſomma è 5, e tanta ſarà l' ipotenuſa A C.

Se la ſomma de' quadrati de' perpendicoli non foſſe numero quadrato, cioè non aveſſe radice quadrata, dovrebbe pren-

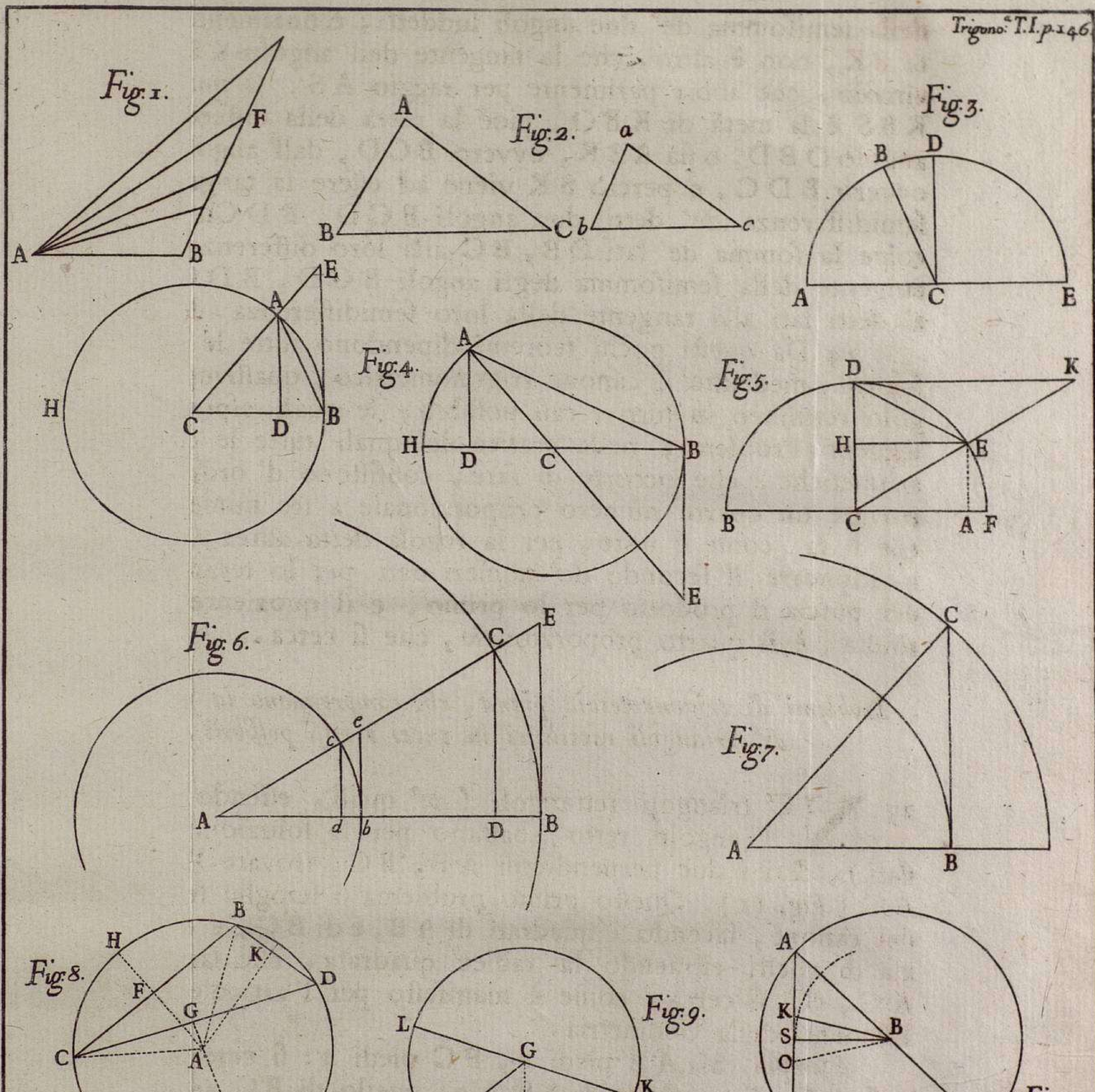


Fig. 1.
A B F
Fig. 2.
A B C
a b c
Fig. 3.
B D A C E
Fig. 4.
E A H C D B
H D C B A E
Fig. 5.
D K H E B C A F
Fig. 6.
E C e c A d b D B
Fig. 7.
C A B
Fig. 8.
H B K F G D C A
Fig. 9.
L G K F M I H
Fig. 10.
A K S B O F D E C

prenderſi tal radice per approſſimazione, e il medeſimo s' intenda in tutt' i caſi ſimili.

26 Ne' triangoli rettangoli data l' ipotenuſa A C, con uno de' perpendicoli A B, trovar l' altro B C. Queſto ancora ſi ſcioglie ſenza il canone, facendo il quadrato dell' ipotenuſa A C, e quello del perpendicolo dato A B, e ſottratto queſto quadrato dal primo, reſterà un numero, la cui radice quadrata ſarà il perpendicolo cercato B C, il che è evidente come ſopra.

Eſempio. Sia A C piedi 5, A B piedi 3; ſi cerca B C. Il quadrato di A C ſarà 25; il quadrato di A B ſarà 9; ſottraendo queſto da quello reſta 16, del qual numero la radice quadrata è 4, e tanto ſarà il perpendicolo cercato B C.

27 Ne' triangoli rettangoli dati i due perpendicoli A B, B C, trovare gli angoli. Facciaſi come il numero, in cui è dato uno de' perpendicoli A B (*Fig.* 12), al numero in cui è dato l' altro B C, così il numero 10000000, o altro numero, che eſprima il raggio (che per tale può intenderſi A B) ad un quarto numero, e queſto (per l' articolo 20) eſprimerà B C, come tangente dell' angolo A adjacente ad A B; onde cercando a qual' angolo convenga queſto quarto numero fra le tangenti del canone trigonometrico, ſi avrà l' angolo A; e ſottraendo queſto da gradi 90, ſi avrà l' altro angolo C.

Eſempio. Sia A B piedi 27, B C piedi 59; ſi cercano gli angoli A, C. E prima per l' angolo A la proporzione dovrà ordinarſi come ſegue; A B (27) : B C (59) : : raggio (10000000) : tangente dell'angolo A aggiacente ad A B, moltiplicando il ſecondo termine 59 per lo terzo 10000000, e dividendo il prodotto per lo primo 27, ne viene per quarto numero $21851851\frac{23}{27}$; e queſta ſarà la tangente dell' angolo A; il qual numero (traſcurando la frazione) cercato nel canone trigonometrico fra le tangenti, ſi trova eſſer tangente dell' angolo di gr. $65\ 24'\ 35''$, e tanto ſarà l' angolo A. Sottratto poſcia queſto da gr. 90, reſterà l' angolo C di gradi $24\ 35'\ 25''$.

28 Ne' triangoli rettangoli data l' ipotenuſa F G con uno de' perpendicoli G H, trovare gli angoli (*Fig.* 13). Facciaſi come il numero, in cui è data l' ipotenuſa F G, al numero, in cui è dato il perpendicolo G H, così il numero 100000,

che esprime il raggio (che per tale può intendersi FG) ad un quarto numero, e questo (per l' articolo 20) esprimerà GH, come sino dell' angolo F opposto a esso GH; e perciò trovato nel canone questo numero fra i sini, si avrà l' angolo F, che sottratto poscia da gradi 90, manifesterà eziandio l' angolo G.

Esempio. Sia l' ipotenusa FG miglia 60, il perpendicolo GH miglia 53. Si cercano gli angoli F, G, e prima l' angolo F opposto a GH. Si ordini dunque la proporzione così FG (60) : GH (53) :: raggio (100000) : sino dell' angolo F opposto a GH, moltiplicando 53 per 100000, e dividendo per 60, ne proviene 88333 (trascurando una frazione), e questo sarà il sino dell' angolo F, e cercando questo numero fra i sini del canone, si troverà l' angolo F di gradi 62 2′ 46″, e tolto poscia quest' angolo da gradi 90, resterà l' angolo G gr. 27 57′ 14″.

29 Ne' triangoli rettangoli dato un perpendicolo FH, e dato un angolo (per cui è dato anco l' altro) trovare l' altro perpendicolo HG (*Fig*. 14). Facciasi come il numero del raggio 100000 al numero della tangente dell' angolo F aggiacente al dato perpendicolo FH, così il perpendicolo FH nella misura, nella quale è dato, al quarto numero, che sarà quello del perpendicolo HG nella stessa misura (art. 20).

Esempio. Sia il perpendicolo FH pertiche 187; sia l' angolo F (o dato, o dedotto dalla misura dell' angolo G), che è l' aggiacente ad FH, di gradi 48 14′; la cui tangente nel canone è 111975, e per tale si considererà il perpendicolo cercato GH, considerandosi dato FH come raggio di parti 100000. Perciò facciasi questa proporzione. Raggio (100000) : tangente dell' angolo F (111975) :: perpendicolo FH (187) : perpendicolo cercato GH, moltiplicando, e dividendo secondo il solito, ne viene il quarto numero 209 $\frac{39325}{100000}$; e tanto è il perpendicolo GH in pertiche.

30 Ne' triangoli rettangoli dato un perpendicolo FH, ed un angolo (per cui è dato anche l' altro) trovare l' ipotenusa FG. Facciasi come il raggio alla secante dell' angolo F aggiacente al dato perpendicolo, così FH nelle misure, nelle quali è no-

è nota, al quarto numero, che ſarà l'ipotenuſa FG nelle medeſime miſure (art. 20).

Eſempio. Sia il perpendicolo FH, come prima, pertiche 187, e l'angolo F gradi 48 14′. La ſecante di queſt'angolo (per cui ſi conſidererà l'ipotenuſa FG) ſi trova nel canone 150128, poſto il raggio 100000, di cui fa l'uficio il perpendicolo FH. Si cerca l'ipotenuſa FG. Raggio (100000) : ſecante dell'angolo F (150128) :: perpendicolo FH (187) : ipotenuſa cercata FG. Fatta l'operazione, ſi troverà l'ipotenuſa FG di pertiche 280 $\frac{73936}{100000}$.

31 Ne' triangoli rettangoli data l'ipotenuſa AB, ed un angolo (per cui è dato anche l'altro) trovare qualſivoglia de' due perpendicoli, come BC (*Fig.* 15). Facciaſi come il raggio al ſino dell'angolo A oppoſto al perpendicolo cercato BC, così l'ipotenuſa AB nelle miſure date, al quarto, che ſarà il perpendicolo BC nelle ſteſſe miſure (art. 20).

Eſempio. Sia l'ipotenuſa AB palmi 49; l'angolo ABC gradi 28 16′ 15″, e cerchiſi il perpendicolo BC. L'angolo A oppoſto a queſto perpendicolo ſarà gradi 61 43′ 45″, il cui ſino trovaſi nelle tavole trigonometriche 88072. Pertanto l'analogia ſarà queſta. Raggio (100000) : ſino dell'angolo A (88072) :: ipotenuſa AB (49) : perpendicolo cercato BC. Il perpendicolo cercato BC ſi troverà, fatta la ſolita operazione di palmi 43 $\frac{15528}{100000}$.

32 In tutt' i triangoli rettilinei dati due angoli D, F (dachè è noto anco il terzo G) col lato FG (*Fig.* 16) oppoſto all'uno di quelli D, trovare qualſiſia degli altri lati. Se ſi cerca il lato DG oppoſto all'altro angolo dato F, facciaſi come il ſino dell'angolo D oppoſto al lato noto FG, al ſino dell'angolo F oppoſto al lato cercato DG, così FG al quarto, che ſarà DG nelle ſteſſe miſure, nelle quali è noto FG (art. 121). Se poi ſi cerca il lato DF oppoſto al terzo angolo G, troviſi prima l'angolo G col ſottrare la ſomma de' due noti D, F da gradi 180, e con ciò il lato DF verrà anch'egli ad eſſer oppoſto ad un angolo, che ſarà dato; onde ſi potrà determinare colla medeſima regola, che ſi è data per trovare DG.

Eſem-

Esempio. Sia l' angolo D gradi 88 50', l' angolo F gradi 63 9' 22". Il sino dell' angolo D sarà 99979, quello di F sarà 89224. Sia il lato FG once 131, e si cerchi il lato DG opposto all' angolo F. L' analogia si farà con quest' ordine. Sino dell' angolo D (99979) : sino dell' angolo F (89224) : : FG (131) : DG, che si cerca. Moltiplicando al solito il secondo, e il terzo numero, e dividendo per lo primo, avrassi il lato, che si cerca, DG di once 116 $\frac{90780}{99979}$.

Se poi si cercasse il lato FD opposto al terzo angolo G, essendo che la somma de' due D, F è di gradi 151 59' 22", che tolta da gradi 180, lascia l' angolo G di gradi 28 0' 38", il cui sino è 46963, è manifesto, come si debba procedere nel calcolo per ritrovare questo lato; cioè: Sino dell' angolo D (99979) : sino dell' angolo G (46963) : : FG : (131) : FD e ne risulterà il lato FD di once 61 $\frac{53414}{99979}$.

33 In tutt' i triangoli rettilinei, dati due angoli D, F (dal che è dato anco il terzo G) col lato FD aggiacente a quello, trovare gli altri lati. Questo problema non è punto differente da quello dell' antecedente articolo; imperocchè essendo noto per mezzo de' due angoli D, F; anco il terzo G, il lato noto FD, che è aggiacente a' due D, F, viene ad essere l' opposto ad uno de' dati G; onde si hanno in questo caso i medesimi dati del precedente problema, e si cercano, come in esso, i lati opposti ad angoli dati, e perciò si dee procedere in tutto, e per tutto colla regola ivi prescritta; nè ciò ha bisogno d' essere illustrato con esempio alcuno.

34 In tutt' i triangoli rettilinei, dati due lati AB, BC, e l' angolo A opposto ad uno di essi BC (*Fig.* 17), trovare gli altri angoli, purchè sia nota la loro specie, e trovare il terzo lato CA. Facciasi come il lato BC opposto al dato angolo A, al lato BA opposto all' angolo ACB, che si cerca, così il sino dell' angolo dato A, al quarto, che sarà il sino dell' angolo cercato ACB (art. 21); questo sino dunque del canone trigonometrico mostrerà l' angolo ACB, quando si sappia dover questo esser acuto; ma se dovesse esser ottuso (come se ritenendo tutti i dati, la linea BC fosse nella positura Bf, e l' an-

l'angolo cercato dovesse essere B f A si dovrà sottrare l'angolo, a cui conviene il sino, poc'anzi trovato, da' gradi 180, per avere l'angolo, che si cerca, come è evidente per le cose dette all'articolo 52 della Geometria, e all'articolo 8 del presente trattato. Manifesto per tal modo, oltre l'angolo A, che già era dato, un altro angolo del triangolo, come A C B, (dal che viene ad esser dato anche il terzo C B A) si avranno nel triangolo C B A tutti gli angoli, ed in oltre si avrà uno, anzi due lati A B, B C; onde il terzo lato C A si potrà ritrovare per l'articolo 32.

Esempio. Sia il lato A B di parti 95, e il lato B C di 29 delle medesime parti; e finalmente sia l'angolo A di gradi 17 25'. Si cerca l'angolo A C B, che si suppone dover esser acuto. Il sino di gr. 17 25' si trova nel canone 29932. Dunque lato B C (29) : lato B A (95) : : sino dell'angolo A (29932): sino dell'angolo cercato A C B, ne verrà il sino dell'angolo A C B 98053, trascurando le frazioni, al qual sino corrispondono nel canone gr. 78 40' 30", e tanto sarà l'angolo A C B, giacchè si suppone dover questo essere acuto. Che se egli dovesse essere ottuso, come se si trattasse del triangolo A f B (nel quale B f è eguale a B C, e si cercasse in esso l'angolo A f B, co' medesimi dati di prima, dovrebbe l'angolo suddetto di gradi 78 40' 30" sottrarsi da gradi 180, e il residuo gradi 101 19' 30" sarebbe l'angolo cercato. Trovato poscia l'angolo A C B, e per esso l'angolo A B C, se si vorrà il lato A C, si procederà secondo l'articolo 32, il che non ha bisogno d'altro esempio.

35 In tutti i triangoli rettilinei, dati due lati G F, G H coll'angolo G compreso da essi, trovare gli altri angoli, e la base F H (*Fig.* 18). Si faccia la somma de' lati F G, G H, e se ne raccolga parimente la differenza con sottrare il minore di essi F G dal maggiore G H (se pure non fossero eguali, nel qual caso non vi sarebbe bisogno d'operazione trigonometrica per trovare gli angoli F, H, mentre il triangolo sarebbe isoscele, e sottratto l'angolo G da' due retti, la metà del residuo sarebbe l'angolo F, ovvero H) si sottragga poscia l'angolo dato G da' due retti, e il rimanente sarà la somma de' due F, H, la qual somma divisa per metà darà la semi-

som-

somma di essi, e di questa semisomma trovisi nel canone la tangente. Quindi facciasi come la somma de' due lati F G, G H poc' anzi trovata, alla loro differenza parimente trovata, così la tangente della semisomma degli angoli F, H, al quarto numero, il quale (art. 32) sarà la tangente della semidifferenza di questi angoli. Questo numero dunque cercato nel canone fra le tangenti, mostrerà quanta sia la detta semidifferenza, la quale si dovrà sottrare dalla semisomma de' medesimi angoli per avere l' angolo H opposto al lato minore F G, e si dovrà aggiungere alla semisomma per aver l' angolo F opposto al lato maggiore H G. Trovati per tal modo gli angoli F, H (oltre G, che già è dato), si avranno nel triangolo G F H i tre angoli con uno, anzi due lati, onde per l' articolo 32 si potrà trovare il terzo lato, o sia la base F H.

Esempio. Sia F G miglia 16, G H miglia 34, e l' angolo G gradi 98 43'. La somma de' lati F G, G H sarà 50; la differenza di essi 18; l' angolo G sottratto da' due retti, o sia da gr. 180, lascia gr. 81 17', che è la somma de' due F H, la cui metà, che è gr. 40 38' 30", sarà la semisomma de' medesimi, e di questa semisomma la tangente è 85836. Si ordinerà dunque la proporzione così: somma di F G, G H (50): differenza di F G, G H (18) :: tangente della semisomma degli angoli F, H (85836) : tangente della semidifferenza degli angoli F, H, moltiplicando, e dividendo secondo la regola aurea, ne proviene la tangente della semidifferenza degli angoli F, H, 30901; alla qual tangente corrispondono nel canone gradi 17 10' 18", e tanta è la semidifferenza degli angoli F, H. Aggiungendo dunque questa semidifferenza 17 10' 18" alla semisomma de' medesimi, trovata poc' anzi di gr. 40 38' 30", ne proviene l' angolo F opposto al lato maggiore G H di gr. 57 48' 48"; sottraendo la detta semidifferenza dalla detta semisomma, ne risulta l' angolo H, opposto al lato minore G F, di gr. 23 28' 12". Trovati in tal modo gli angoli, per ciò che appartiene al trovar la base F H veggasi l' esempio dell' art. 32.

36 In tutt' i triangoli rettilinei dati i tre lati trovare gli angoli. Se il triangolo sarà equilatero, ciascun angolo sarà di gr. 60; se isoscele, come o p q (*Fig.* 19), tirando una perpendicolare p r sopra la base dell' angolo p opposto ad essa, si ri-

si risolverà in due triangoli rettangoli, in ciascuno de' quali è noto il lato o r, ovvero r q, metà della base, e l' ipotenusa o p, ovvero p q, oltre l' angolo retto in r; e perciò gli angoli o, e q si troveranno in ciascuno di questi due triangoli (per l' articolo 28). Da che si avrà poi anche il terzo angolo o p q. Sia dunque finalmente il triangolo scaleno, come A C B (*Fig.* 20), il cui lato massimo sia A B. Facciasi la somma degli altri due lati A C, B C, come pure la loro differenza; e intendasi dal centro C, che è l' angolo opposto al lato massimo, descritto il circolo A D col semidiametro A C del lato minimo, il qual circolo tagli A B in D; e dal punto C, tirando la perpendicolare C E sopra A B, la quale dividerà per mezzo A D in E, la porzione D B sarà la differenza della base (art. 22). Facciasi ora come il lato massimo A B alla somma de' due A C, C B, così la differenza di questi, ad un quarto numero, che sarà la differenza della base D B (art. 22). Sottratto poscia D B da A B, prendasi la metà del residuo A D, la qual metà, come è manifesto, sarà A E. Nel triangolo dunque A E C, rettangolo in E, essendo ora data l' ipotenusa A C col perpendicolo A E, si trovi (art. 28) l' angolo A, con che si troverà anco l' angolo A C E. Parimente sottratta A E da A B si avrà E B, colla quale, e coll' ipotenusa C B nel triangolo rettangolo C B E, troverassi l' angolo B (art. 28), e nello stesso tempo si avrà E C B, e in fine tornando al triangolo A C B, la somma de' due A C E, E C B darà l' altro angolo A C B.

Esempio. Sia A C miglia 120, C B miglia 260, A B miglia 370. Si cercano gli angoli. Il lato massimo è A B: la somma degli altri due A C, C B sarà 380; la loro differenza 140. Dunque così deesi ordinare la proporzione. Lato massimo A B (370) : somma degli altri due lati A C, C B (380) : : differenza di questi lati (140) : differenza D B della base; ne viene D B differenza della base $143\frac{29}{37}$. Questo numero sottratto da A B, cioè da 370, lascia A D di $226\frac{8}{37}$; la cui metà A E sarà $113\frac{4}{37}$. Ora dunque nel triangolo A E C, nel quale è dato il perpendicolo A E di 113 (trascurando, se si vuole, la frazione), e l' ipotenusa A C di 120, oltre l' angolo retto E, operando secondo l'articolo 28, si farà AC (120) : AE (113) : : raggio (100000) : sino dell'angolo ACE; ne viene il sino dell'angolo ACE di 94167; onde l'angolo ACE viene ad essere di gradi 70 20′, e per conseguente l'angolo A di gradi 19 40′. E questo è già uno degli angoli, che si cercano del triangolo ACB.

Aggiugnendo ora AE ($113\frac{4}{37}$) a DB ($143\frac{29}{37}$) si avrà EB, $256\frac{33}{37}$, oppure (trascurando, se si vuole, la frazione) 257. Pertanto nel triangolo CEB, nel quale è dato il perpendicolo EB (257), e l'ipotenusa CB (260), oltre l'angolo E retto, faremo, secondo l'articolo 28, CB (260) : EB (257) : : raggio (100000) : sino dell'angolo BCE, e ne ricaveremo il sino dell'angolo BCE di 98846, onde l'angolo BCE sarà di gr. 81 17′ 15″, e l'angolo CBE, che è uno de' tre, che si cercano, sarà di gr. 8 42′ 45″. Finalmente sommando i due ACE, trovato di sopra gradi 70 20′, e BCE, determinato ora di gr. 81 17′ 15″, avremo tutto l'angolo ACB, (che è anch'esso uno de' tre del dato triangolo ACB, i quali si cercano) di gr. 151 37′ 15″; Il che era da fare.

37 In tutti i triangoli rettilinei, dati i tre angoli, trovare la proporzione de' lati. Si prendano i sini degli angoli opposti a quei lati, de' quali si cerca la proporzione. E' manifesto (per l'articolo 21), che i numeri di questi sini esprimeranno la proporzione cercata de' detti lati.

Esempio. Sia l'angolo B di gradi 58 14′; l'angolo BAC (*Fig.* 21) di gr. 103 25′; e per conseguenza l'angolo C di gr. 18 21′. Si cerca la proporzione del lato BA al lato BC. Il sino dell'angolo C, opposto al lato BA, è 31482. Il sino dell'angolo A, opposto al lato BC (del qual angolo, per esser ottuso, dee cercarsi prima il supplemento 76 35′, col quale egli ha comune il sino) trovasi 97271. Starà dunque il lato BA, al lato BC, come 31482 a 97271.

38 Benchè colle regole fin' ora spiegate si possano sciorre tutte le questioni della trigonometria piana, nulladimeno considerando i moderni Geometri, che la pratica di queste regole è spesse volte faticosa per la necessità, che vi è di moltipli-

plicare talvolta, e di dividere numeri aſſai grandi, hanno penſato, e trovato un metodo di facilitarla, col ſoſtituire a quei numeri, che ſi debbono maneggiare nelle operazioni trigonometriche alcuni altri numeri, che chiamano logaritmi, col mezzo de' quali ſi ſchivano le moltiplicazioni, e le diviſioni; e in vece di eſſe ſi ſpediſcono i calcoli colle ſemplici addizioni, e ſottrazioni. Di queſti logaritmi (de' quali il primo inventore fu il Nepero ſul principio del ſecolo paſſato, e che poi ſono ſtati ridotti a maggior perfezione, e facilità da altri Scrittori) diremo ora qualche coſa per compimento del preſente Trattato, cioè quanto baſta a intenderne l'uſo nelle operazioni trigonometriche.

APPENDICE
ALLA TRIGONOMETRIA,
Cioè Trattato de' logaritmi, e del loro uso nella soluzione de' triangoli.

Che cosa sieno i logaritmi.

39 Sia una serie, o progressione geometrica A di numeri, che crescano in qualsivoglia ragione (come quì nella ragione tripla), ed un' altra progressione aritmetica B d' altrettanti numeri, che crescano anch' essi con qualsivoglia differenza (come quì colla differenza 2). Se ciascun termine della seconda s' intenderà corrispondere a ciascun termine della prima serie per ordine, cioè il primo al primo, il terzo al terzo &c., allora i termini della progressione aritmetica B si diranno *logaritmi* di quelli della geometrica A, ciascuno del suo corrispondente; come quì, o sarà logaritmo di 1; 6 sarà logaritmo di 27 &c.

40 Se nella serie geometrica si prenderanno due numeri distanti fra loro di qualunque intervallo (cioè, che abbiano framezzo qualsisia numero di termini), e si cercherà il terzo proporzionale ad essi due numeri presi, questo si troverà nella medesima serie tanto distante dal secondo, quanto lo è questo dal primo. Come prendendo 3, e 27, il terzo proporzionale, che è 243, è distante dal 27 due intervalli, appunto quanto lo è 27 da 3. E parimente se si prenderanno tre termini della medesima serie, che abbiano qualsivoglia intervallo, eguale, o diseguale fra essi, il quarto proporzionale si troverà nella stessa serie tanti intervalli distante dal terzo, quanti il secondo dal primo. Come prendendo 3. 27. 729, il quarto proporzionale sarà 6561 distante dal 729 due intervalli, appunto quanto il 27 è distante dal 3. La dimostrazione di tutto questo, come pure di alcune altre proprietà di queste progressioni, che siamo per aggiungere, si tralasciano, sì perchè non sono

ſono difficili a ritrovarſi, sì anche perchè propriamente appartengono all' aritmetica.

41 Da ciò ſegue, che preſi nella ſerie geometrica tre termini proporzionali, i loro logaritmi creſceranno per differenze eguali. Così perchè 3. 27. 243 ſono proporzionali, i loro logaritmi 2. 6. 10 creſcono con differenza eguale, che è di 4. Parimente preſi nella ſerie geometrica quattro termini proporzionali, i logaritmi de' due ultimi avranno differenza eguale a quella de' due primi. Per eſempio eſſendo 3. 27. 729. 6561 proporzionali, i logaritmi 12. 16 de' due ultimi hanno differenza di 4, appunto quanto ne hanno i logaritmi 2. 6 de' due primi.

42 Quando tre numeri creſcono con differenze eguali (come 2. 6. 10) la ſomma de' due eſtremi (12) è eguale al doppio del termine di mezzo (12). E parimente quando ſono quattro numeri, e la differenza de' due primi è eguale a quella de' due ultimi (come 2. 6. 12. 16), la ſomma de' due eſtremi (18) è eguale alla ſomma di que' di mezzo (18).

43 Da tutto ciò ſi raccoglie, che quando tre numeri ſono proporzionali, la ſomma de' logaritmi degli eſtremi è eguale al doppio del logaritmo di quello di mezzo; e che quando quattro numeri ſono proporzionali, la ſomma de' logaritmi degli eſtremi è eguale alla ſomma de' logaritmi de' due di mezzo. Così perchè 3. 27. 243 ſono proporzionali, facendo la ſomma del logaritmo di 3, che è 2, col logaritmo di 243, che è 10 (la qual ſomma è 12), ella ſi trova appunto eguale al doppio del logaritmo di 27, il qual logaritmo è 6, e il ſuo doppio 12. E parimente perchè 3. 27. 729. 6561 ſono proporzionali, facendo la ſomma del logaritmo di 3, che è 2, col logaritmo di 6561, che è 16 (la qual ſomma è 18) ella ſi troverà eguale alla ſomma del logaritmo di 27, che è 6, col logaritmo di 729, che è 12, la qual ſomma è appunto 18.

Come

Come per mezzo de' logaritmi le moltiplicazioni si cangino in addizioni, e le divisioni in sottrazioni.

44 DA ciò è manifesto, come dati in una serie geometrica A due numeri, e data la serie B de' logaritmi di quella, si possa trovare il terzo proporzionale a' detti due numeri, senza uopo di moltiplicazione, o di divisione. Imperocchè dovendo la somma de' logaritmi del primo, e del terzo essere eguale al doppio del logaritmo del secondo (art. 43), basterà cercare nella serie de' logaritmi quello del secondo numero, e raddoppiato questo logaritmo, sottrare il logaritmo del primo, che si troverà dalla stessa serie di logaritmi, e quello, che ne risulterà, sarà il logaritmo del terzo numero proporzionale; il qual logaritmo cercato nella detta serie di logaritmi, avrà di rincontro nella serie geometrica il numero, che gli corrisponde, e questo sarà il terzo proporzionale, che si brama; il che è molto più comodo, che moltiplicare il secondo numero per se stesso, e poscia dividerlo per lo primo, come prescrive la regola aurea ordinaria. Così per trovare il terzo proporzionale a' due numeri 3, e 27 (che amendue sono nella serie geometrica A) raddoppio il logaritmo di 27, che è 6, e faccio 12, dal quale tolto il logaritmo di 3, che è 2, resta 10, logaritmo del terzo proporzionale; e pertanto cercando 10 nella serie de' logaritmi, prendo il numero 243, che gli corrisponde nella serie geometrica A, e questo è il terzo proporzionale bramato. Nell' istessa maniera per trovare il quarto proporzionale a' tre numeri della serie geometrica, giacchè la somma de' logaritmi del secondo, e del terzo dee esser eguale (art. 43) alla somma de' logaritmi del primo, e del quarto; basterà cercare nella serie de' logaritmi quelli del secondo, e del terzo, che sono dati, e fattane la somma, sottrarne il logaritmo del primo, che parimente è dato, e quello, che ne verrà, sarà il logaritmo del quarto proporzionale, che si brama; onde esso quarto proporzionale sarà quel numero, che nella serie geometrica si troverà corrispondere a quest' ultimo logaritmo. Così per trovare il quarto proporzionale a' tre numeri 3. 27. 729 (che tutti sono nella serie geometrica

A)

A) prendo il logaritmo del ſecondo 27, che è 6, e vi aggiungo il logaritmo del terzo 729, che è 12, e faccio 18, da cui ſottraggo il logaritmo del primo 3, che è 2, e reſta 16, il quale cercato nella ſerie de' logaritmi, mi dà di rincontro nella ſerie geometrica 6561, e queſto è il quarto proporzionale, che ſi brama. E con ciò ſi vede il comodo de' logaritmi, che conſiſte nel cangiare le moltiplicazioni, che dovrebbono farſi de' numeri in ſemplici addizioni de' loro logaritmi, e le diviſioni di quelli in ſottrazioni di queſti.

45 Anzi quando la ſerie geometrica abbia per primo termine l'unità, e quella de' logaritmi abbia per logaritmo corriſpondente all' unità il zero (come hanno le ſerie quì eſpoſte A, e B) un altro uſo può ricavarſi da' logaritmi, che è quello di trovare ſpeditamente il prodotto, che naſcerebbe dalla moltiplicazione de' due numeri dati della ſerie; mentre a ciò fare baſta unir inſieme i logaritmi de' due numeri ſuddetti, e la ſomma ſarà il logaritmo, che converrà al prodotto. Come per trovar il prodotto di 9 per 243 (che amendue ſono nella ſerie A), ſenza aver uopo di moltiplicar l'uno per l'altro faccio la ſomma de' loro logaritmi 4, e 10, che è 14, e queſto logaritmo mi moſtra, che il prodotto della loro moltiplicazione è 2187, giacchè queſto è il numero, che veggo corriſpondere al logarimo 14. La ragione di queſto è, perchè ogni prodotto, ſe ben ſi conſidera, naſce da un' operazione della regola aurea, mentre egli è il quarto proporzionale dopo l'unità, che può fingerſi il primo numero, e i due numeri, che ſi moltiplicano, che poſſono fingerſi il ſecondo, e il terzo, atteſochè quante volte è contenuta l'unità in uno de' numeri, che ſi debbono moltiplicare, altrettante dee eſſer contenuto l'altro numero nel prodotto, che ſi cerca. Poichè dunque per trovare il quarto proporzionale a' tre numeri dati, ſi prende la ſomma de' logaritmi del ſecondo, e del terzo, e ſe ne leva il logaritmo del primo, con che reſta il logaritmo del quarto, che ſi cercava (art. 40), e nel caſo preſente il primo numero è l'unità, il cui logaritmo ſuppongo eſſer zero, che ſottratto, niente muta la ſomma de' logaritmi ſuddetti, è manifeſto, che il logaritmo del prodotto bramato di qualſiſia moltiplicazione, ſarà eguale alla ſomma de' logaritmi de' numeri, che ſi debbono moltiplicar inſieme.

46 Per

46 Per una ſimil ragione (poſto ſempre, che il zero ſia il logaritmo dell' unità) ſi troverà ſpeditamente il quoziente della diviſione di due numeri della ſerie, ſottraendo il logaritmo del diviſore dal logaritmo di quello, che ſi dee dividere, mentre il reſiduo ſarà il logaritmo del quoziente. Così volendo dividere 6561 per 27 (che amendue ſono numeri della ſerie A). Dal logaritmo di quello, che è 16, ſottraggo il logaritmo di queſto, che è 6, e reſta 10, che veggo eſſere il logaritmo di 243, onde il quoziente della diviſione ſarà 243. Di queſto ancora può renderſi ragione in un modo ſimile a quello dell' articolo precedente, che tralaſcieremo per brevità.

47 Finalmente, perchè il quadrato di qualſivoglia numero non è altro, che il prodotto di queſto, moltiplicato in ſe ſteſſo, è manifeſto (art. 45), che il logaritmo del quadrato ſarà doppio del logaritmo della radice, poſto ſempre, che il logaritmo dell' unità ſia zero. Onde dato qualſiſia numero della ſerie A, come 81, troveremo ſpeditamente il quadrato con raddoppiare il logaritmo 8, che farà 16, il quale ſi troverà eſſere logaritmo di 6561, che ſarà il quadrato di 81. All' incontro dato qualſiſia numero, come 6561, ne troveremo la radice quadrata prendendo la metà del ſuo logaritmo 16, che fa 8; e queſto (ſe ſi troverà nella ſerie de' logaritmi B, come nel noſtro caſo vi ſi trova) corriſponderà alla radice quadrata, che ſi brama, che nel caſo preſente ſi troverà eſſere 81. Per una ſimil ragione il cubo de' numeri della ſerie A ſi troverà triplicandone il logaritmo, e la radice cubica all' incontro, prendendo la terza parte del logaritmo; e così delle altre poteſtà, e radici di grado ſuperiore.

48 Da tutto queſto ſi vede, che ſe poteſſe averſi una ſerie geometrica, nella quale entraſſero tutt' i numeri poſſibili, che cominciando dall' unità ſi ſeguono ordinatamente, cioè 1. 2. 3. 4. 5. 6 &c. aſſegnata, che foſſe a queſta ſerie un' altra ſerie di logaritmi, tutte le più difficili operazioni aritmetiche, cioè le moltiplicazioni, le diviſioni, e le eſtrazioni delle radici ſi potrebbero ſempre riſparmiare col ſoccorſo di queſti logaritmi; mentre non vi ſarebbe alcun numero, che non foſſe nella ſerie, e di cui per conſeguenza non poteſſe averſi il logaritmo per valerſene nelle dette operazioni, il che non ſuccede

cede nella ſerie A poſta da noi, per cagion d'eſempio, coll' altra aritmetica B, mentre mancando in quella molti numeri, come 2. 4. 5. 6 &c. tutto il vantaggio, che può averſi da' logaritmi della ſerie B, ſi ha ſolo in que' caſi, ne' quali ſi tratta di numeri, che ſi trovino nella ſerie A, reſtando eſſa inutile per gli altri numeri. Benchè però non ſia poſſibile una ſerie geometrica, che comprenda, come ſi è detto, tutt' i numeri naturali, e con ciò paja a prima viſta, che l'uſo de' logaritmi non poſſa eſſere univerſale, nè eſtenderſi a tutt' i caſi poſſibili delle ſuddette operazioni aritmetiche, che occorra di fare, hanno tuttavia i Geometri provveduto in modo, che almeno a un dipreſſo, e ſenza errore ſenſibile poſſa farſi uſo de' logaritmi in ogni caſo, che venga, e ciò nella maniera, che oramai ſiamo per iſpiegare.

De' logaritmi comuni.

49 SIa una ſerie geometrica C, i cui numeri creſcano in qualſivoglia ragione, come quì nella ragione ottupla; e ſia D una ſerie di logaritmi aſſegnati alla ſerie C, che creſcano con qualſivoglia differenza, come quì colla differenza di 3. Se fra i due primi termini della ſerie C, che ſono 1. 8, prenderemo uno, o più numeri medj proporzionali in proporzione continua, verbi grazia due, che ſaranno i numeri 2. 4; e parimente altrettanti medj proporzionali, cioè altri due, ne prenderemo fra i due termini 8, e 64, i quali medj ſieno 16, e 32, e così proſeguiremo formando con queſti numeri la colonnetta c, è manifeſto, che la ſerie, che riſulterà dalle due C, c preſe inſieme, cioè 1. 2. 4. 8 &c. (la quale ſi vede in E) ſarà una nuova ſerie geometrica, non però più in ragione ottupla, ma in un' altra, che nel noſtro caſo è la ragione doppia. Ciò poſto, per aſſegnare a queſta ſerie nuova E, compoſta dalle due C, c, i ſuoi logaritmi, ſenza variare quelli, che già nella ſerie D ſono aſſegnati a ciaſcun termine della ſerie C, baſterà prendere fra' termini della ſerie D altrettanti medj proporzionali aritmetici, quanti geometrici ſe ne ſono preſi fra i termini della ſerie C, cioè nel noſtro caſo due per ciaſcun intervallo, che ſaranno 1. 2 nel primo interval-

lo; 4. 5 nel ſecondo &c., come ſi vede nella colonnetta d; e allora la ſerie, che ſi comporrà dalle due D, d preſe inſieme, cioè 0. 1. 2. 3. 4 &c., la quale ſi vede in F, ſarà anch' eſſa una ſerie aritmetica di logaritmi corriſpondenti alla ſerie E (non però più con la differenza di 3, ma con altra differenza, che nel noſtro caſo ſarà di 1), e a ciaſcun numero di queſta ſarà aſſegnato il ſuo logaritmo, ſenza che ſi ſieno mutati quelli, che prima nella ſerie D corriſpondevano alla ſerie C. Di tutto queſto tralaſcieremo per brevità la dimoſtrazione, che non è difficile da ritrovare. Aggiungeremo ſolamente, che ſebbene queſto ſi è eſemplificato ſolamente in numeri intieri, e in proporzioni moltiplici, dee però valere in tutti i numeri, anche rotti, e in tutte le proporzioni poſſibili.

50 Su queſto fondamento è ſtata calcolata dagli autori una ſerie di logaritmi, che chiamanſi *comuni*, e che coſtituiſce quello, che diceſi *canone logaritmo de' numeri aſſoluti*, nel quale ſi hanno i logaritmi (ſe non preciſamente, almeno a un dipreſſo, e quanto baſta per non errare ſenſibilmente nella pratica) di tutt' i numeri intieri dall' uno fino a diecimila, e poſſono anche ricavarſene quelli di tutti gli altri intieri, almeno fino a dieci millioni, anzi quelli di tutti i numeri rotti, o intieri con rotti fino a queſto termine con incredibil comodo in ogni ſorta di calcoli, che occorrano, e particolarmente nelle operazioni trigonometriche. Hanno dunque eſſi preſa la ſerie de' numeri decadici 1. 10. 100. 1000 &c., come vedeſi in A, che è una ſerie geometrica in ragione decupla; e a ciaſcun numero di queſta ſerie hanno aſſegnati per logaritmi i numeri 0. 10000000. 20000000. 30000000 &c., che ſi veggono nella ſerie B, che è una ſerie aritmetica, che creſce colla differenza di dieci millioni. Immaginando poſcia, che fra il primo termine 1, e il ſecondo 10 della ſerie A ſieno interpoſti nove millioni novecento novantanove milla, e novecento novantanove medj proporzionali, che inſieme col ſecondo termine 10 coſtituiſcono dieci millioni di termini (il primo di queſti termini viene ad eſſer 1 $\frac{23025853}{1000000000000000}$, e gli altri ſeguono di mano in mano ſempre colla proporzione, che ha l' unità a queſto rotto), ed altrettanti fra il termine 10, e il 100,

fra

fra il 100, e il 1000 &c., hanno altresì figurati altrettanti medj aritmetici fra i termini della ſerie B (i quali medj aritmetici vengono ad eſſere nel primo intervallo 1. 2. 3. 4. 5 &c. fino a 10000000, nel ſecondo intervallo 10000001. 10000002. 10000003 &c., e così degli altri); onde per le coſe poc' anzi dette, la ſerie, che riſulta da' numeri decadici della ſerie A, e da' detti medj geometrici preſi fra queſti, viene a coſtituire una nuova ſerie geometrica, a ciaſcun termine della quale viene a corriſpondere per logaritmo ciaſcun termine dell' altra ſerie aritmetica, che riſulta da' numeri della ſerie B, e da' detti medj aritmetici preſi fra queſti numeri.

51 E perchè i numeri di queſta ſerie geometrica così compoſta ſebbene, a riſerva dell' uno, e de' decadici, vengono tutti ad eſſer rotti, nulladimeno alcuni di queſti rotti per neceſſità, e a cagione de' piccoliſſimi intervalli, che hanno fra loro, cadono sì preſſo agl' intieri, che ſe ne può ſenza errore traſcurare la differenza, e prenderli come ſe foſſero gli ſteſſi interi viciniſſimi a tali rotti, nè vi ha alcun numero intiero, almeno dall' uno al diecimila, che non ſia viciniſſimo a qualch' uno de' rotti, che coſtituiſcono la detta ſerie geometrica; perciò hanno ſcielti i logaritmi di que' ſoli termini rotti della ſerie, che inſenſibilmente differiſcono dagl' intieri, e gli hanno aſſegnati per logaritmi degl' intieri loro più vicini; e con ciò hanno formato il canone, in cui ogni numero intiero è venuto ad avere il ſuo logaritmo, che non è veramente preciſo, ſe non riſpetto a' numeri decadici, ma è sì poco lontano dal preciſo, che ſi può prendere per giuſto ſenza ſcrupolo d' errore. A cagione d' eſempio hanno veduto, che ſebbene il numero intero 9 non entra nella detta ſerie geometrica, ben vi entra il numero rotto $8\,\frac{9999998}{10000000}$, il cui logaritmo hanno trovato eſſere 9542425; ma perchè la detta frazione $8\,\frac{9999998}{10000000}$ non manca dall' intero 9, che due diecimilleſime parti, hanno traſcurata tal differenza, ed hanno aſſegnato al numero intero 9 il detto logaritmo 9542425; e in ſimil guiſa hanno aſſegnati i logaritmi a tutti gli altri numeri interi fino a diecimila, potendoſi da queſti ſoli ricavar quelli de' numeri anche

maggiori di diecimila, come tra poco vedremo. Molte cose potrebbero quì dirsi intorno a' metodi, che hanno tenuti nel far questi calcoli compendiosamente, e senza esser obbligati a ricavare uno per uno un numero sì esorbitante di medj geometrici, ed aritmetici, ma lo studio della brevità ci obbliga a tralasciarle.

52 Non è dunque il canone de' logaritmi una serie geometrica di numeri proporzionali, a cui corrisponda un' altra serie aritmetica de' loro logaritmi; ma è una scelta di que' soli numeri ricavati dalla serie geometrica detta di sopra, che erano più utili per gli usi delle calcolazioni, cioè de' soli interi (giacchè tutti questi o rigorosamente, o prossimamente entrano nella detta serie) co' loro corrispondenti o prossimamente, o rigorosamente nella detta serie aritmetica, restando esclusi gli altri numeri rotti, ancorchè la serie geometrica per la maggior parte fosse costituita precisamente di questi; il che non ostante si può, colle regole da darsi appresso, assegnare anche a qualsivoglia rotto il suo logaritmo per mezzo di quelli degli intieri: e il logaritmo del canone d' un qualsivoglia numero non viene ad esser altro, che il numero de' termini, o sia degl' intervalli, che si contano fra l' unità, ed esso numero in quella serie geometrica, che si è detta, e da cui il canone è stato ricavato; mentre, come abbiamo veduto, il logaritmo del primo termine della detta serie dopo l' unità è uno, quello del secondo termine è due, quello del 10000000mo termine (che è il numero intero 10) è 10000000, e così degli altri.

53 E' d'avvertire, che gli autori del canone ad effetto di dare a tutti i logaritmi un numero eguale di figure, cioè otto per ciascuno (il che riesce di molto comodo nelle calcolazioni, e in ogni uso, che voglia farsi del canone, come tra poco vedremo) supplisçono le figure, che mancano ad otto (quando ne manchino) con altrettanti zero aggiunti alla sinistra alle figure, che ha quel logaritmo. Così un logaritmo, che fosse 1 si scriverebbe 00000001, un logaritmo, che sia 3010300, si scriverà 03010300, e così degli altri.

Pro-

Proprietà speciali de' logaritmi comuni.

54 DAlle cose fin quì dette si raccoglie, che tutti i numeri dall' uno fino al 10 esclusivamente, cioè tutti quelli, che si scrivono con una sola figura aritmetica (o abbiano poi, o non abbiano annesse frazioni) avranno nel loro logaritmo nel primo luogo a sinistra un zero; siccome quelli, che hanno il logaritmo necessariamente minore di quello del numero 10, che è 10000000. Così pure tutti quelli, che si scrivono con due figure, cioè dal 10 al 100 esclusivamente, avranno nel logaritmo per prima figura l' unità 1; quelli dal 100 al 1000 avranno per prima figura un 2 &c., e generalmente la prima figura del logaritmo d' un numero è di tante unità meno una, quante sono le figure, colle quali si esprime, e si scrive quel numero, non comprendendo però le figure della frazione, che a lui fosse annessa. Questa prima figura a sinistra di ciascun logaritmo, dicesi *carateristica*, e suole dagli autori separarsi dalle altre seguenti con un punto. Ma è da avvertire, che la carateristica medesima, potendo ecceder il numero 9 (come se si trattasse del logaritmo d' un numero, che si scrivesse con undici figure), dee per conseguenza esprimersi allora con più d' una figura; e perciò quando si disse (art. 53), che i logaritmi tutti si scrivono con otto figure, ciò si dee intendere considerando la carateristica per una sola figura, ancorchè fosse di più figure. Generalmente dunque ne' logaritmi comuni, levando le sette ultime figure a destra, quell' una, o più, che rimangono a sinistra saranno la carateristica. Pertanto dato un numero, sapremo di quante unità sia la carateristica del logaritmo di esso, levando 1 dal numero delle figure, colle quali il dato numero si esprime, e all' incontro dato un logaritmo, sapremo di quante figure sia il numero, a cui conviene, aggiungendo 1 al numero della carateristica di esso logaritmo; senza metter mai in conto le frazioni, che per avventura fossero annesse al numero, di cui si tratta.

55 Quando un numero, qualunque egli sia, intero, o rotto, trovasi nella serie geometrica, dalla quale è ricavato il canone de' logaritmi comuni, anco il decuplo, il centuplo &c. di

di quel numero ſarà nella medeſima ſerie, e così ancora il ſuddecupla, il ſubcentuplo &c. Imperocchè come 1 a 10, così ſta qualſivoglia numero al ſuo decuplo, e come 1 a 100, così qualſivoglia numero al ſuo centuplo &c. Dunque il decuplo d'un numero, che ſia nella detta ſerie, non è altro, che il quarto proporzionale a queſti tre numeri 1, 10, e il dato, i quali ſono tutti e tre nella ſerie ſuddetta. Ma quando tre numeri ſono in una ſerie geometrica, vi è anco il quarto proporzionale ad eſſi (art. 40); dunque quando un numero è nella ſerie, di cui parliamo, vi è anco il ſuo decuplo; e il medeſimo ſi moſtrerà del centuplo &c., come pure del ſuddecuplo &c. Da ciò ſegue, che eſſendo tutti i numeri interi o rigoroſamente, o proſſimamente nella detta ſerie (art. 51), anche i decupli, i centupli &c., come pure i ſuddecupli, ſubcentupli &c. di tutti gl' interi ſaranno nella medeſima ſerie o preciſamente, o proſſimamente, ancorchè per avventura queſti ſuddecupli &c. foſſero rotti; e perciò dovranno avere un numero nella ſerie de' logaritmi, che corriſponda loro come logaritmo. Il modo di trovarlo tra poco s' inſegnerà.

56 Due numeri, uno de' quali ſia decuplo, centuplo &c. dell' altro, hanno per neceſſità i loro logaritmi, che convengono in tutte le figure, e differiſcono ſolamente nella carateriſtica. Così il logaritmo di 92 trovaſi nel canone 1.9637878, e quello di 9200 (centuplo di 92) è 3.9637878, cioè l' iſteſſo, che il primo, ſalvo nella carateriſtica, che in quello è 1 (come conviene al numero 92 di due figure per l' art. 54), e in queſto 3 (come conviene al numero 9200 di quattro figure per lo ſteſſo articolo). La ragione è, perchè il decuplo, il centuplo &c. d' un numero, altro non è, che il prodotto di quel numero per 10, per 100 &c., e perciò il logaritmo d' un qualſivoglia numero, aggiunto al logaritmo di 10, di 100 &c. vien a formare il logaritmo del ſuo decuplo, del ſuo centuplo &c. (art. 45). Ora quando ad un logaritmo ſi aggiunge il logaritmo di 10, di 100 &c. nella ſomma ne proviene lo ſteſſo logaritmo di prima, ſalvo nella carateriſtica (imperocchè i logaritmi di 10, di 100 &c. non hanno numero, fuorchè nella carateriſtica, eſſendo gli altri luoghi riempiti con zero, come all' art. 50 ſi è veduto). Dunque il logaritmo

ritmo del decuplo, del centuplo &c. d'un qualſivoglia numero non è diverſo dal logaritmo di queſto numero, fuorchè nella carateriſtica.

57 Su queſti fondamenti paſſeremo a moſtrare, come dal canone de' logaritmi comuni ſi poſſa trovare il logaritmo di qualſiſia numero intero, o rotto dato, e al contrario, come dato qualſivoglia logaritmo ſi poſſa trovare il numero intero, o rotto, che gli corriſponde; avvertendo però prima, riſpetto a' numeri rotti, che col nome di queſti ſempre intenderemo le frazioni decimali, cioè frazioni di parti decime, o di centeſime, o di milleſime &c. Onde quando foſſe data una frazione non decimale, come $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{15}$ &c. dovrà intenderſi prima ridotta in decimale, il che può ſempre farſi, almeno proſſimamente, con queſta regola: come il denominatore della frazione data a quel denominatore decimale, che vuol prenderſi (verbi grazia 10, oppure 100, o ſia 1000 &c.), così il numeratore della frazione data al quarto numero, che ſarà il numeratore della frazione ridotta. A cagione d'eſempio, per ridurre $\frac{3}{4}$ in frazione centeſima, faremo come 4 a 100, così 3 al quarto numero, che ſarà 75; onde la detta frazione ridotta in centeſima ſarà $\frac{75}{100}$. E per ridurre $\frac{7}{15}$ v. gr. in milleſime faremo come 15 a 1000, così 7 al quarto, che ſarà proſſimamente 467, onde la frazione ridotta ſarà $\frac{467}{1000}$; e così negli altri caſi.

Come dal canone de' logaritmi ſi ricavi il logaritmo di qualſivoglia dato numero, intero, o rotto.

58 SE il numero, di cui ſi cerca il logaritmo, è intero, ed è minore di diecimila, egli ſi troverà nel canone logaritmico dirimpetto al dato numero; anzi nel canone grande d'Ulacq, e di alcuni altri ſi trovano i logaritmi di tutti gli interi fino a centomila, ma noi ſupporremo, che uno voglia valerſi del canone ordinario, che non eccede diecimila,

Così

Così il logaritmo di 2 trovasi 0.3010300, quello di 999 si trova 2.9995655, quello di 7678 trovasi 3.8852481; e così degli altri.

59 Ma se il dato numero o non è intero, o essendolo, è maggiore di diecimila, talchè non sia registrato nel canone, allora conviene vedere se partendolo, o moltiplicandolo per 10, ovvero per 100, o sia per altro numero decadico egli possa ridursi ad un intero, che sia minore di diecimila, e perciò si trovi nel canone; e se ciò succede, prenderassi per logaritmo del dato numero quello del numero, a cui egli colla detta divisione, o moltiplicazione sarà stato ridotto, con mutargli solo la carateristica, dandogli quella, che conviene al numero dato, cioè una carateristica di tante unità, quante sono le figure del detto numero, meno una, e senza mettere in conto le figure delle frazioni; come è manifesto per le cose dette agli articoli 54, e 56. Gli esempj faranno meglio intendere queste regole.

Esempio primo. Si cerchi il logaritmo del numero 92860. Partendo questo numero per 10, ne viene 9286, che è intero, ed è minore di diecimila. Il logaritmo di questo si trova nel canone 3.9678287. Mutata dunque solamente la carateristica 3 in 4 (perchè il dato numero 92860 ha cinque figure), sarà il logaritmo cercato 4.9678287.

Esempio secondo. Si desidera il logaritmo del num. $282\frac{7}{10}$. Moltiplicandolo per 10, ne viene 2827, che è intero, e minore di diecimila. Il logaritmo di questo è nel canone 3.4513258; e mutata debitamente la carateristica, ne viene il logaritmo bramato 2.4513258.

60 Che se non potesse riuscire di ridurre colla moltiplicazione, o colla divisione per numeri decadici il dato numero ad esser intero, e minore di diecimila; allora si riduca almeno ad un intero con rotto, maggiore di 1000, e minore di 10000, e il logaritmo di questo si ricavi dal canone col mezzo della parte proporzionale, come si pratica nel canone trigonometrico, e in tutte le altre tavole: operazione, che veramente non è giustissima, ma può praticarsi senza scrupolo d'errore sensibile; e mutando poscia debitamente al detto logaritmo così ricavato la carateristica, si avrà il logaritmo cercato.

Esem-

Esempio primo. Si cerchi il logaritmo del numero $631 \frac{34}{100}$. Moltiplicandolo per 100, faccio 63134, e partendo poscia questo per 10, ne viene $6313 \frac{4}{10}$, che è maggior di 1000, e minore di diecimila. Di questo numero rotto $6313 \frac{4}{10}$ il logaritmo, presa la parte proporzionale, si trova 3.8002633, onde mutata debitamente la carateristica, il logaritmo cercato sarà 2.8002633.

Esempio secondo. Si desideri il logaritmo del numero 47549. Partendolo per 10, ne viene $4754 \frac{9}{10}$, che è maggior di 1000, e minore di diecimila. Il logaritmo di questo si trova per mezzo della parte proporzionale essere 3.6771413; onde il logaritmo del dato numero sarà 4.6771413.

Esempio terzo. Si cerca il logaritmo del num. $15420 \frac{27}{100}$. Moltiplicando per 100, e successivamente partendo per 1000, ne proviene $1542 \frac{027}{1000}$, e il logaritmo, presa la parte proporzionale, e mutata la carateristica, si troverà 4.1880920.

61 E' d' avvertire, che quando il numero dato eccedesse dieci millioni, i logaritmi non si possono avere dal canone ordinario con quella esattezza, che spesse volte può esser necessaria nella calcolazione. Ma nell' opera grande dell' Ulacq, ed anco in altri autori trovasi un canone, in cui i logaritmi hanno maggior numero di figure, e possono servire esattissimamente per simili grandissimi numeri; onde a questi autori convien ricorrere in tali casi.

Come dato qualsivoglia logaritmo si trovi per mezzo del canone il numero, che gli corrisponde.

62 SE il dato logaritmo si troverà precisamente nel canone, il numero, che gli corrisponde, gli si vedrà scritto a sinistra. Se non vi si troverà, mutisi la carateristica del logaritmo in un 3, e veggasi se si trovi nel canone colla carateri-

ſtica così mutata, e ciò ſuccedendo, il numero, che gli riſponde, dovrà moltiplicarſi, o dividerſi per 10, per 100, per 1000 &c. finchè divenga di tante figure, quante ne richiede la carateriſtica del logaritmo dato, cioè quante unità contiene queſta, più una, e quello, che ne riſulterà, ſarà il numero, che converrà al dato logaritmo.

Eſempio primo. Se foſſe propoſto il logaritmo 2.2247920, che non trovaſi nel canone, mutata la carateriſtica 2 in 3 avremo 3.2247920, che vi ſi trova. Il numero, che corriſponde a queſto è 1678, che è di 4 figure, ma perchè la carateriſtica 2 del dato logaritmo non lo richiede che di tre, divido 1678 per 10, e ne proviene $167\frac{8}{10}$, che ſarà il numero cercato.

Eſempio ſecondo. Sia dato il logaritmo 7.8949803. Soſtituendo alla carateriſtica 7 un 3, faremo 3.8949803, e troveremo, che a queſto logaritmo corriſponde il numero 7852, che è di quattro figure. Per averlo dunque di otto, come lo domanda la data carateriſtica 7, lo moltiplicheremo per 10000, ed avremo 78520000, numero cercato.

63 Che ſe poi il logaritmo dato neppure dopo avergli mutata la carateriſtica in 3 ſi trovaſſe preciſamente nel canone, fingaſi ciò non oſtante, che la carateriſtica ſia 3, o ſia veramente, o non ſia, e preſi i due logaritmi proſſimi, tra' quali cade il dato, cerchiſi la frazione decadica, che gli corriſponde per mezzo della parte proporzionale, la qual frazione ſi aggiunga al numero intero, che corriſponde al minore de' due proſſimi logaritmi ſuddetti. Ma in queſta operazione è d' avvertire, che il denominatore decadico di tal frazione, che ſi cerca, ſe il logaritmo dato aveva 3, oppure meno di 3 per carateriſtica, ſarà arbitrario, ma ſe aveva più di 3, dovrà queſto denominatore prenderſi di tante cifre, o zero, quante figure mancano al detto numero intero per far il numero di figure, che richiede la data carateriſtica. Trovato dunque il detto intero colla dovuta frazione, ſe la carateriſtica era 3, egli ſarà il numero, che conviene al dato logaritmo; ma ſe era maggiore, o minore di 3, ſi dovrà moltiplicare, o dividere il numero così trovato per quel numero decadico, che biſogna, affinchè il numero intero, che ne riſulterà abbia quel numero di

di figure, che conviene alla data carateristica (resti poi, o non resti oltre questo una frazione), e questo sarà il numero, che corrisponderà al dato logaritmo.

Esempio primo. Sia dato il logaritmo 5.8962640, il quale, mutata la carateristica in 3, diviene 3.8962640. E perchè neppure così trovasi nel canone, prendo i due logaritmi prossimi 3.8962506, e 3.8963057, fra' quali egli cade, che convengono a due numeri interi 7875, 7876; onde il numero, che conviene al logaritmo dato colla carateristica 3, è 7875 con un rotto, che rimane da cercare. Per trovarlo dunque, osservo, che la data carateristica 5 richiede un numero intero di sei figure, e quì non l' abbiamo, che di quattro; dunque due ne bisognano; e perciò prendo il denominatore decadico 100, come quello, che ha due zero, e cerco nel modo solito quante di coteste parti centesime convengano al logaritmo suddetto, e trovo $\frac{24}{100}$. Dunque se la carateristica data fosse 3, il numero cercato sarebbe $7875\,\frac{24}{100}$; ma perchè ella è 5, il numero suddetto dovrà avere sei figure, onde lo moltiplico per 100, e faccio 787524, che sarà il numero cercato.

Esempio secondo. Dato il logaritmo 2.9999502, e mutata la carateristica, trovo, che cade fra i due 3.9999131, e 3.9999566, al minore de' quali corrisponde 9998: e perciò il numero, che conviene al dato logaritmo colla carateristica 3, sarà 9998 con una frazione da cercarsi ora quì, perchè la data carateristica non è maggiore di 3, prendo un denominatore decadico ad arbitrio, come 100, e col mezzo della parte proporzionale, veggo, che al proposto logaritmo convengono $\frac{85}{100}$ sopra l' intero 9998. Ora essendo questo di quattro figure, e non avendo io bisogno, che di tre, a cagione della data carateristica 2, divido $9998\,\frac{85}{100}$ per 10, e ne proviene $999\,\frac{885}{1000}$. E questo sarà il numero ricercato.

De' logaritmi delle linee trigonometriche.

64 OLtre il canone de' logaritmi de' numeri assoluti, del quale finora abbiamo parlato, hanno gli autori aggiunte al canone trigonometrico due, o tre colonne, nella prima delle quali hanno registrati a dirittura d'ogni arco, o angolo di ciascun grado, e minuto il logaritmo (preso dal canone de' logaritmi), che conviene al numero del sino di quell' angolo, il quale chiamasi da alcuni *semilogaritmo*, e da altri semplicemente *logaritmo di quell' arco*; nella seconda quello, che conviene al numero della tangente, e dicesi *mesologaritmo*, e da alcuni *tangilogaritmo*; e nella terza (la quale però molti tralasciano) quello, che conviene al numero della secante, detto *tomologaritmo*.

65 E' d'avvertire, che sebbene i sini, le tangenti, e le secanti registrate nel canone trigonometrico sono calcolate col raggio di 10000000, i logaritmi però, che convengono a queste linee le suppongono calcolate col raggio di 10000000000, come in fatti si trovano ne' canoni trigonometrici di alcuni autori. Onde è, che le carateristiche de' logaritmi de' sini, tangenti &c. non corrispondono al numero delle figure, che hanno queste linee nel canone trigonometrico ordinario; e il logaritmo v. g. del raggio (il qual raggio nel canone ordinario è 10000000) non ha per carateristica 7, come lo richiede il raggio di otto figure, ma 10, come domanda il raggio 10000000000 di undici figure, e così de' sini, tangenti &c. Tal diversità niente turba nelle operazioni trigonometriche, anzi riesce di comodo considerabile, mentre in queste entrando per lo più per uno de' dati il raggio, per cui deesi o moltiplicare, o dividere un altro numero dato; quando si fanno le operazioni per logaritmi, basta aggiungere al logaritmo di questo numero un' unità a sinistra, o sottrarnela per aggiungervi, o sottrarne il logaritmo del raggio, che equivale al moltiplicare, o rispettivamente al dividere per lo raggio.

66 Rispetto agli angoli, che oltre i gradi, e minuti hanno delle seconde, i logaritmi de' loro sini, tangenti &c. si trovano, prendendo la parte proporzionale nello stesso modo, che

che si farebbe se si cercasse il sino, la tangente &c. di quell' arco: e all' incontro dato il logaritmo d' un sino, d' una tangente &c., se ne trova l' arco a gradi, minuti, e seconde, come se fosse dato un sino, una tangente &c.; operazioni, che sebbene non hanno tutto il rigore geometrico, sono tuttavia esenti da ogni errore sensibile.

67 Rispetto a' logaritmi delle secanti, che d' alcuni non si registrano nel canone trigonometrico, questi possono facilmente trovarsi mediante i logaritmi de' sini. Imperocchè in ogni angolo C A D, come sta la linea A B (*Fig.* 22) (sino secondo dell' angolo C A D per l' art. 12) ad A C raggio, così sta A D raggio ad A E secante del medesimo angolo. Trovisi dunque il logaritmo del sino secondo dell' angolo dato, e sottraendolo dal doppio logaritmo del raggio, ne resterà il logaritmo della secante di quell' angolo (art. 44).

Della Trigonometria logaritmica.

68 DA tutto ciò, che si è detto de' logaritmi si raccoglie, come tutte quelle operazioni trigonometriche, che consistono in trovare un quarto numero proporzionale a' tre dati, si possono fare per via di logaritmi molto più comodamente, che per linee; o sia poi, che i numeri dati sieno numeri assoluti, de' quali si trovano i logaritmi nel canone logaritmico, o numeri di tangenti, sini &c., de' quali i logaritmi sono nel canone trigonometrico, e che lo stesso quarto, che si cerca sia dell' una, o dell' altra specie di numeri; si raccoglie, dico, come tutte queste operazioni possono farsi per logaritmi, cioè aggiungendo il logaritmo del secondo numero dato a quello del terzo, e dalla somma levando quello del primo, con che ne verrà il logaritmo del quarto; onde trovato il numero, che a questo corrisponde, o sia nel canone logaritmico, o nel trigonometrico, si avrà il quarto numero, che si cerca. Noi ne tralascieremo gli esempj per brevità, non potendo averne bisogno chi avrà ben inteso quanto si è finora spiegato.

IL FINE.

Vidit

Vidit D. Aurelius Castanea Cler. Regul. S. Pauli, & in Ecclesia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius pro Eminentissimo, & Reverendissimo Domino D. Vincentio Cardinali Malvetio Archiepiscopo Bononiæ, & S. R. I. Principe.

Die 9 Septembris 1755.

Imprimatur.

F. Petrus Paulus Salvatori Vicarius Gener. S. Officii Bononiæ.

Fig. 11.

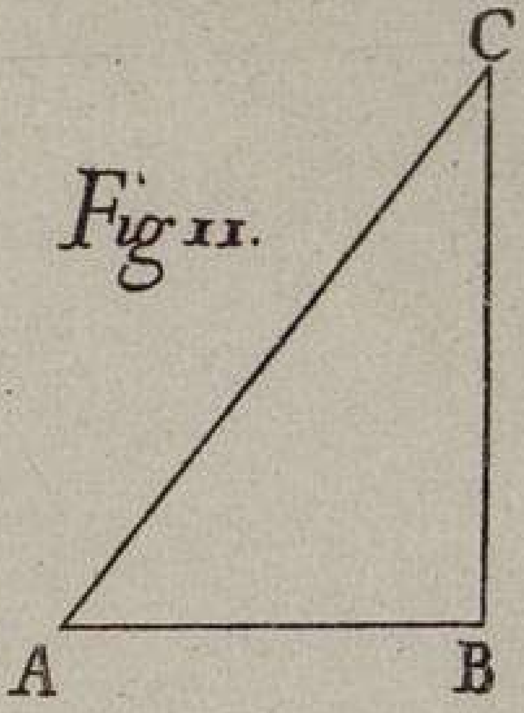


Fig. 12.

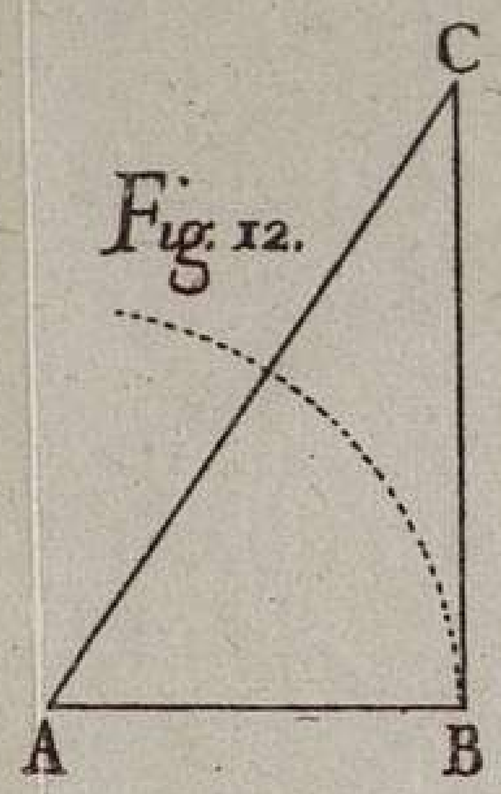


Fig. 13.

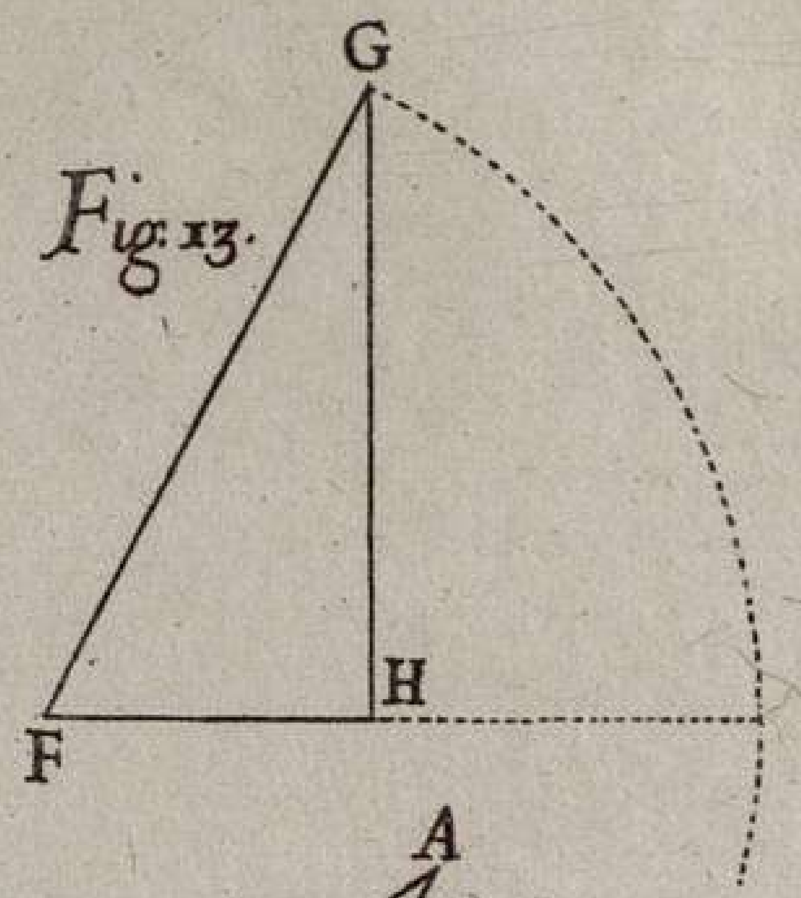


Fig. 14.

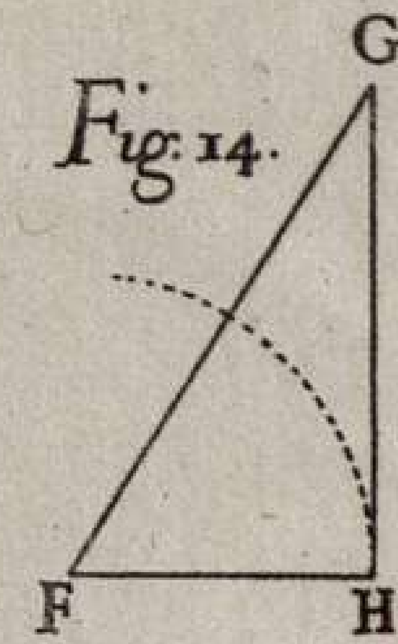


Fig. 15.

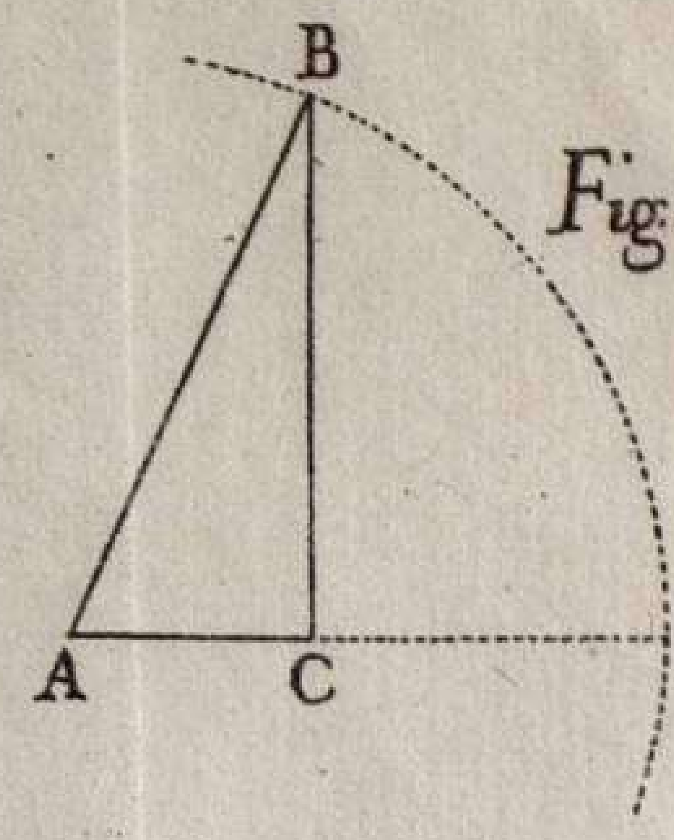


Fig. 16.

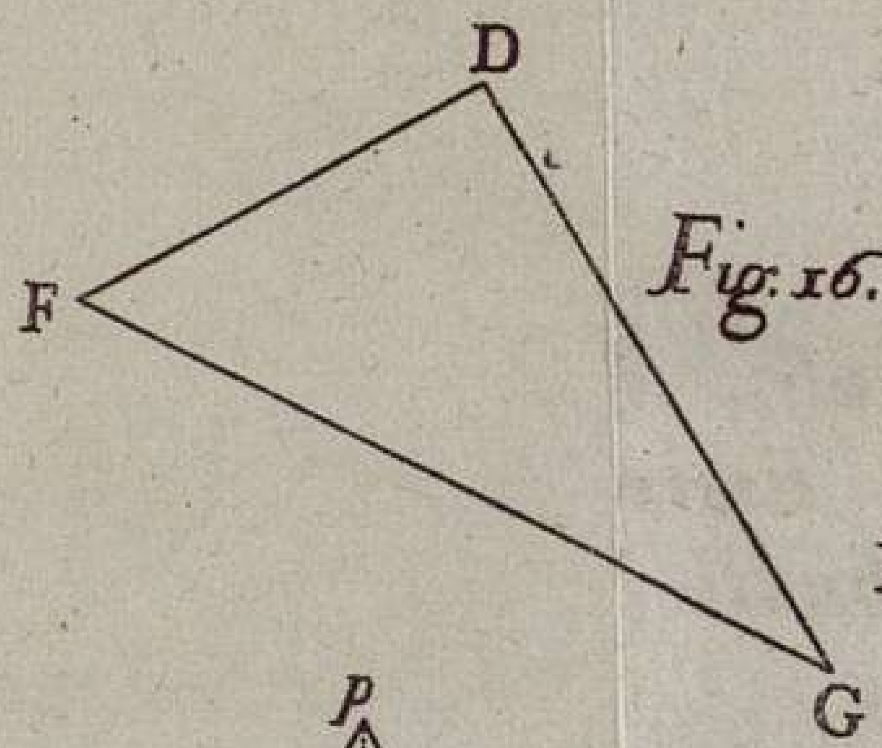


Fig. 17.

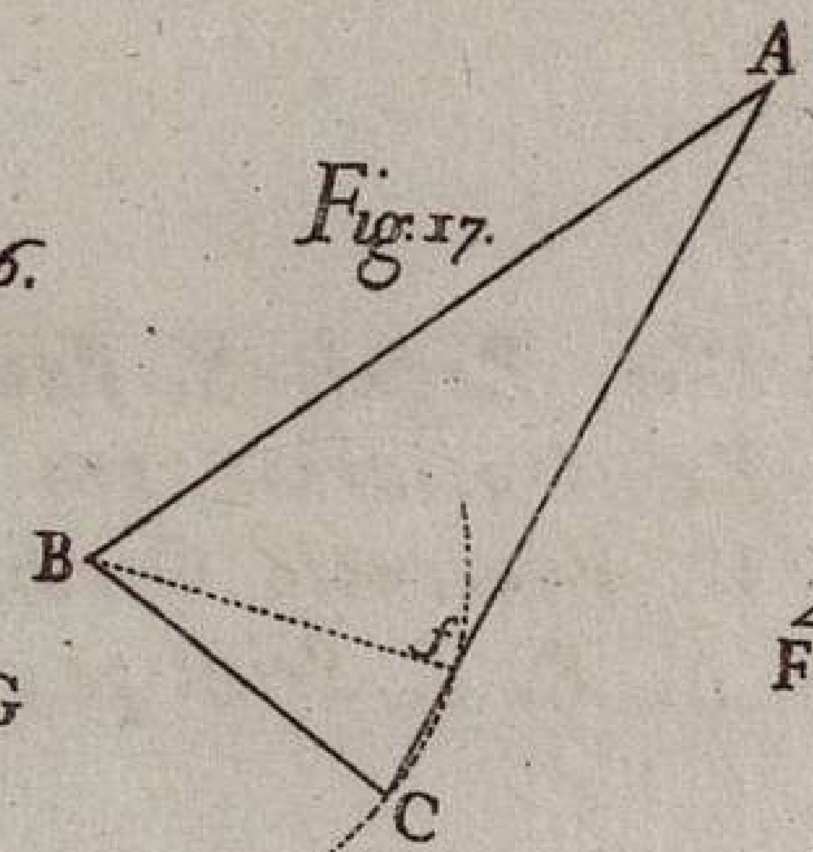


Fig. 18.

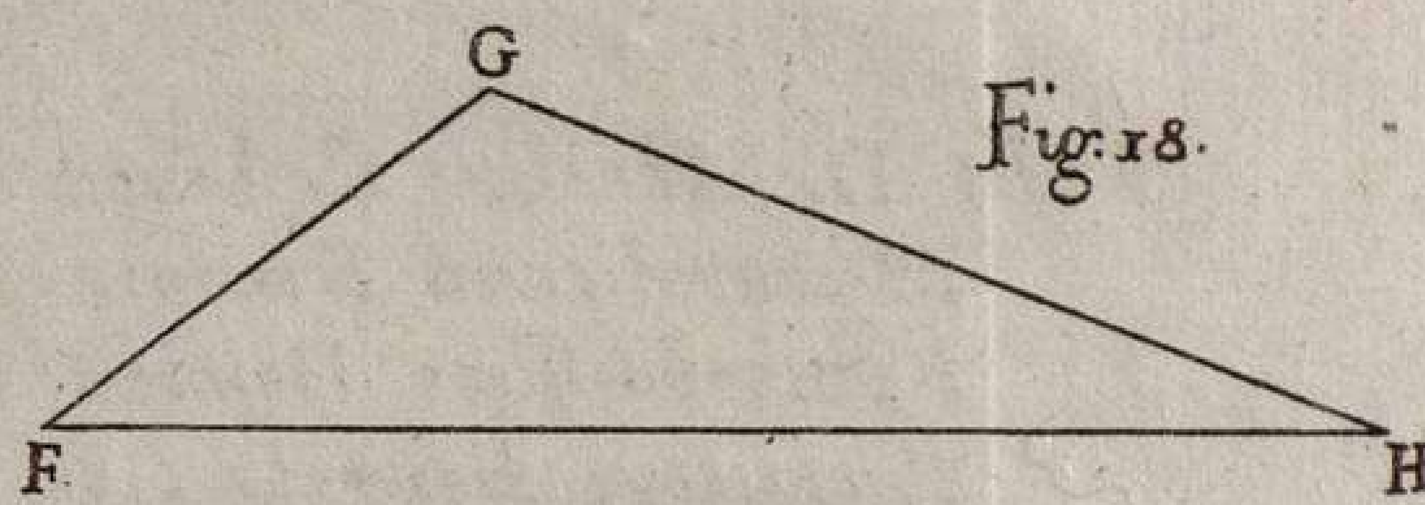


Fig. 19.

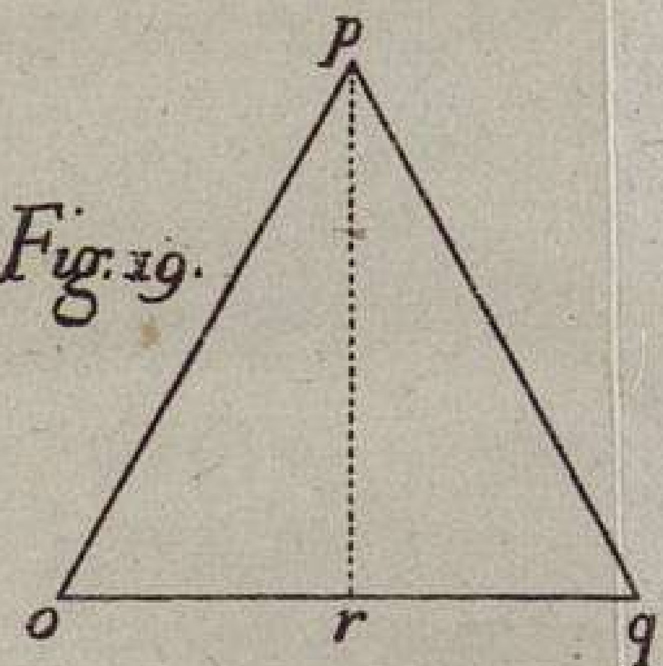


Fig. 20.

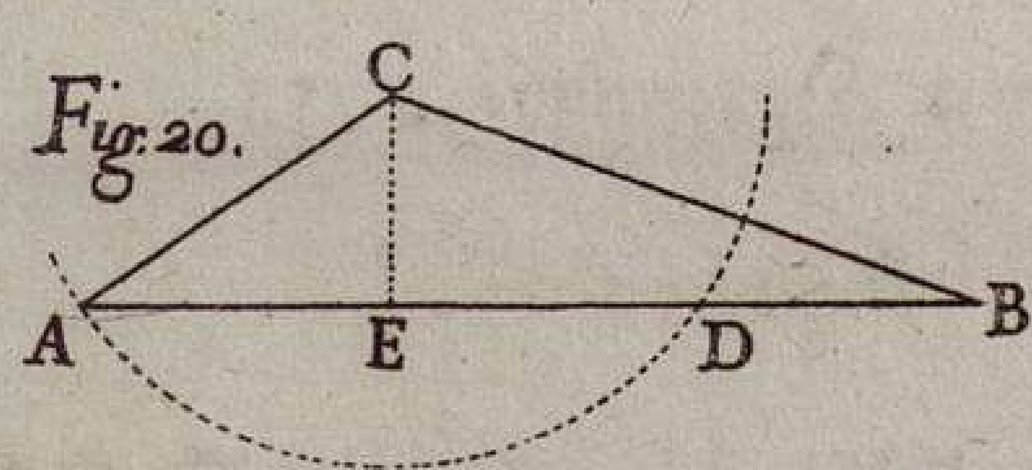
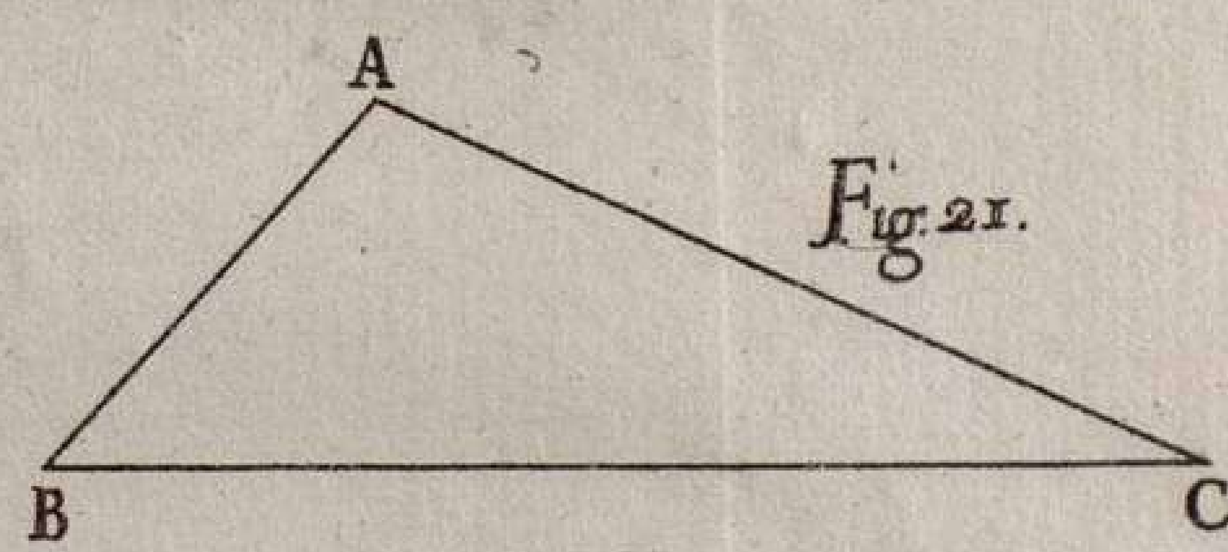


Fig. 21.



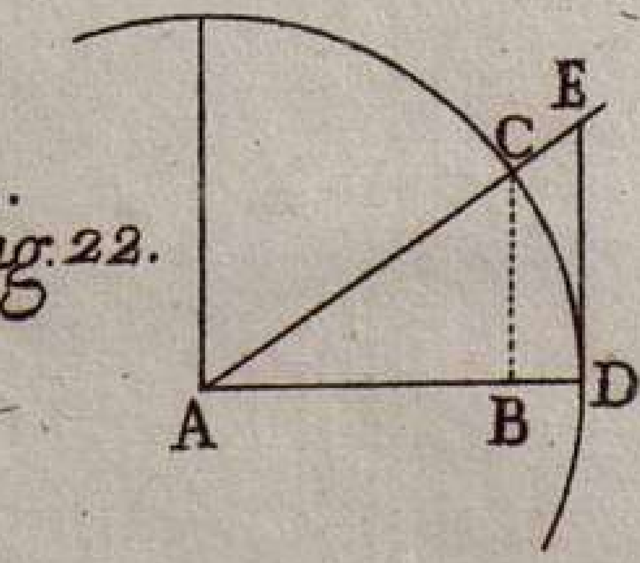
A	B
1	0
3	2
9	4
27	6
81	8
243	10
729	12
2187	14
6561	16
19683	18
&c	&c

C	c	D	d
1		0	
	2		1
	4		2
8		3	
	16		4
	32		5
64		6	
	128		7
	256		8
512		9	

E	F
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9

A	B
1	0
10	10000000
100	20000000
1000	30000000
10000	40000000

Fig. 22.



MANFRE
GEOMET.