TRATADO

DE

MECÁNICA Y FÍSICA ELEMENTAL

POR

D. JOSÉ M. AMIGÓ Y CARRUANA

CATEDRÁTICO POR OPOSICIÓN
DE ESTA ASIGNATURA EN EL INSTITUTO PROVINCIAL
DE LUGO.

BARCELONA

ADMINISTRACIÓN DE LA «CRÓNICA CIENTÍFICA»
CALLE DE LAS CÓRTES, NÚMERO 311
1885.

TRATADO DE MECÁNICA Y FÍSICA ELEMENTAL

TRATADO

DE

MECÁNICA Y FÍSICA ELEMENTAL

POR

D. JOSÉ M. AMIGÓ Y CARRUANA

CATEDRÁTICO POR OPOSICIÓN
DE ESTA ASIGNATURA EN EL INSTITUTO PROVINCIAL
DE LUGO.

BARCELONA

ADMINISTRACIÓN DE LA «CRÓNICA CIENTÍFICA»
CALLE DE LAS CÓRTES, NÚMERO 311
1885.

BARCELONA

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE JOSÉ MIRET

calle de las Córtes, 289 y 291, Ensanche.

Al Lector

Pocas palabras pensamos escribir para justificar nuestra osadía, al publicar este Tratado elemental de Mecánica y Física. No escasean en nuestro país obras de este género, todas ellas buenas desde el punto de vista en que sus Autores se colocan, pero impulsada la Física de nuestros días por la tendencia reformista que caracteriza las ciencias naturales, los apreciables compañeros que han escrito para la enseñanza, han seguido dos direcciones opuestas: unos se han lanzado francamente en el terreno moderno y otros han continuado en el terreno antiguo, habiendo algunos pero muy pocos que han adoptado un término medio.

A estos últimos pensamos imitar, pues nosotros creemos se debe proceder con alguna cautela y exponer en las cátedras las doctrinas adquiridas definitivamente para la Ciencia, dejando para los Ateneos la discusión de los puntos dudosos que no forman cuerpo de doctrina. No por eso debemos renunciar á indicar el estado actual en que se encuentran importantes cuestiones, sobre las cuales no se ha dicho la última palabra.

En la publicación de nuestras lecciones, hemos tenido en cuenta y aceptamos con sumo gusto, mucho de lo bueno que tanto en la forma como en el fondo encontramos en las obras clásicas de los antiguos físicos y en las obras contemporáneas, indicando siempre la procedencia.

Concluimos rogando á nuestros apreciables compañeros los Profesores de esta asignatura, protejan este ensayo con su ilustrado criterio, indicándonos los muchos lunares que indudablemente encontrarán en estas mal hilvanadas lecciones.

EL AUTOR.

Lugo 1.° de enero de 1885.

TRATADO

DE

MECÁNICA Y FÍSICA ELEMENTAL

NOCIONES PRELIMINARES

LECCIÓN I.

NOCIONES PRELIMINARES: Materia. Cuerpo. Movimiento y equilibrio. Definición y división de la Mecánica.

1. Materia.—Llamamos *materia* á todo lo que existe y puede impresionar nuestros sentidos, especialmente el del tacto. Una porción limitada de materia se llama *cuerpo*. Todos los cuerpos que observamos en la Naturaleza, están sometidos á la acción de esfuerzos internos y externos, que tienden á hacerles cambiar de lugar en el espacio; estos esfuerzos tan frecuentes en el Universo, debidos á la *energía* natural de la materia, los referimos á la causa que los produce. Esta causa, cualquiera que sea, se llama *fuerza*.

2. Movimiento.—Decimos que un cuerpo se *mueve* cuando ocupa sucesivamente diversas posiciones en el espacio, y se dice que está quieto ó *en reposo* cuando permanece en el mismo lugar. Tenemos conciencia de estos estados opuestos, comparando las posiciones que ocupa el punto dado con relación á otros que suponemos fijos.

Prescindiendo del concepto filosófico de las palabras *fuerza* y *materia*, que dejamos para más adelante, nos fijaremos ahora en el concepto de *movimiento*, noción fundamental de la Mecánica, y último término del análisis en el mundo físico, pues todos los hechos naturales se reducen en el fondo á movimientos de la materia. Como la fuerza es, á nuestro juicio, una entidad íntimamente unida á la materia, y esta la encontramos en el Universo, *ya en movimiento, ya resistiendo al mismo, ya produciéndole*, llegamos á inducir que *la causa del movimiento, es, la materia en movimiento.*

El equilibrio, caso particular del movimiento, existe, cuando un cuerpo sometido á la acción de dos ó más fuerzas, no se mueve. Este estado tan frecuente, nos lo presentan los cuerpos al parecer en reposo, pues no hay alguno que no esté sometido á la acción de alguna fuerza.

3. Definición y división de la Mecánica.—La Mecánica es la ciencia que estudia el movimiento y equilibrio de los cuerpos y las causas que lo producen ó modifican. Puede considerarse bajo dos aspectos diferentes, que constituyen, el uno: la Mecánica racional y el otro la Mecánica aplicada. La primera estudia el movimiento y equilibrio, deduciendo sus leyes de algunos principios fundamentales, con auxilio del cálculo. Se divide la Mecánica racional en tres partes:

I *Cinemática.*—Estudia el movimiento, prescindiendo de las fuerzas que lo producen.

II *Estática.*—Estudia el equilibrio.

III *Dinámica.*—Estudia el movimiento teniendo en cuenta las fuerzas productoras.

La Mecánica aplicada estudia el movimiento y equilibrio de los cuerpos, tal como se presenta en la Naturaleza, esto es, de un modo práctico y con todas las circunstancias que le acompañan. En este órden de ideas, trata cuestiones muy importantes referentes á la Maquinaria y al trabajo mecánico, y es la base de profesiones útiles, dando reglas al ingeniero, artillero, constructor, marino, etc.

En este tratado ensayaremos un curso de Mecánica racional precursor de otro curso de Física, si bién ambos de carácter elemental, pero nos ocuparemos ligeramente en las tres partes de la Mecánica de algunas aplicaciones propias de la Mecánica aplicada.

CINEMÁTICA

LECCIÓN II.

Movimiento. Trayectoria. Ley del movimiento. Movimiento uniforme. Velocidad y ley del mismo. Movimiento variado en general.

4. Movimiento.—La Cinemática, palabra derivada de la raíz griega *cinema* que significa movimiento, estudia el movimiento de los cuerpos, prescindiendo de las fuerzas que puedan producirle ó modificarle, y hasta de la sustancia material que forma los cuerpos. Ya la Geometría estudia en abstracto, los movimientos del punto, de las líneas y de las superficies, generadores de los cuerpos y la Cinemática añade la idea del tiempo empleado por el punto ó línea que se mueve.

Antes de estudiar el movimiento de un cuerpo, es conveniente prescindir de las dimensiones de este, y atender únicamente al movimiento de un punto ó elemento material, con cuyo artificio simplificamos en gran manera su estudio. Pero en uno y otro caso podemos ya establecer una división del movimiento en *continuo, alternativo y periódico.*

a. Es contínuo[1] el movimiento, cuando no se modifica en toda su duración. Tal aparece el movimiento aparente del Sol y de los astros en general; en la industria lo encontramos también en los motores más perfeccionados.

b. Es alternativo el movimiento, cuando se verifica sucesivamente en dos direcciones opuestas. Se usa en la industria, cuando la potencia motriz del artefacto sólo puede recorrer un espacio limitado, como observamos en los émbolos de las bombas y máquinas de vapor, y en las sierras, líneas y muchas herramientas movidas por la mano del hombre. También lo emplean los animales para volar y nadar; vulgarmente se llama movimiento de vaiven.

Como antes hemos indicado, la sustitución del movimiento alternativo por el continuado, constituye una mejora bajo el punto de vista industrial, obteniéndose un trabajo más perfecto con un motor que actúa contínuamente en una sola dirección. Por ejemplo en la navegación, el movimiento contínuo de la hélice, y aún el de las ruedas, reemplaza ventajosamente el alternado de los remos; la sierra circular es preferible á la sierra ordinaria.

c. Es periódico el movimiento, cuando sólo se verifica en ciertos períodos, interrumpiéndose por un tiempo mayor ó menor, y continuando después en el mismo ó contrario sentido. Es el más imperfecto y sólo debe usarse cuando no se encuentren combinaciones mecánicas más favorables. Como ejemplo pueden citarse los telares y las máquinas de coser.

5. Trayectoria.—Cuando se mueve un punto material describe una recta ó una curva que se llama *trayectoria;* esta es, el lugar geométrico de las diversas posiciones que el punto móvil ocupa en el espacio. La

[1] No hay que confundir este movimiento con el perpétuo, llamado vulgarmente contínuo, absurdo mecánico que refutaremos más adelante al tratar del trabajo.

trayectoria puede ser rectilínea y curvilínea y en este último caso podrá ser elíptica, circular, parabólica, etcétera, según el punto describa una elipse, una circunferencia, una parábola, etc.

Según esto, pues, el movimiento puede ser rectilíneo ó curvilíneo, según la trayectoria sea una línea recta ó una curva; estudiaremos antes los movimientes rectilíneos que presentan siempre ménos complicación.

6. Ley del movimiento.—La relación entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerle, origina la división del movimiento en *uniforme* y *variado*. Se dice que el movimiento es uniforme cuando el móvil recorre espacios iguales en tiempos iguales, y se llama variado cuando espacios desiguales son recorridos en tiempos iguales por el punto móvil.

Para conocer el movimiento de un punto material hay que trazar geométricamente su trayectoria, y co-

Fig. 1

nocer la relación numérica existente entre el espacio recorrido y el tiempo; esta relación da la ley del movimiento y permite averiguar la posición y velocidad del móvil en cualquier instante de su duración. Sea PQ (fig. 1.ª) la trayectoria de un punto material, el cual se encuentra en a en un momento cualquiera; si observamos que trascurrido un segundo pasó al punto b, y después de otro segundo ocupa el lugar c, con estos datos podemos anunciar la ley del movimiento, pues conocemos la trayectoria y la relación entre los espacios y los tiempos.

Si en una línea férrea, fijamos en un plano horizontal la longitud de la vía con todos sus detalles, y los puntos intermedios de parada, la ley del movimiento estará contenido en el cuadro de marcha de los trenes, conociendo para cada uno de estos, la trayectoria total y los trayectos parciales entre las estaciones, así como el tiempo empleado en recorrer estas trayectorias. Lo mismo sucede en los itinerarios de los vapores ú otro vehículo cualquiera y en la marcha de un ejército ó una caravana.

7.—Estudiaremos, pues, en esta lección y la inmediata, los movimientos rectilíneos que resultan de la clasificación siguiente:

$$\text{Movimiento}\begin{cases}\text{uniforme. . . . . . .} \\ \text{variado. . . . . . .}\begin{cases}\text{acelerado}\\ \text{retardado}\end{cases} \\ \text{uniformemente variado}\begin{cases}\text{uniformemente acelerado}\\ \text{uniformemente retardado}\end{cases}\end{cases}$$

8. Movimiento uniforme.—Esta clase de movimientos se distinguen unos de otros por la mayor ó menor *velocidad* apreciando esta por el camino recorrido en la unidad de tiempo. Según la definición, la velocidad es constante para cada uno de estos movimientos, de modo que si el punto móvil recorre v metros en un segundo, recorrerá tv metros en t segundos; llamando pues e, el espacio total ó trayectoria, la ecuación del movimiento uniforme será $e = vt$ (1). Discutiendo esta ecuación, observaremos que siendo v una cantidad constante, e será función de t; de modo que podremos enunciar la ley general del movimiento uniforme, diciendo: *los espacios son proporcionales á los tiempos.*

La expresión vt puede representarse analíticamente por el rectángulo del márgen, construido con la recta *oa* que representa con sus divisiones ó abcisas las unidades de tiempo, y la recta *ob* que indica la velocidad constante *v*. El área del rectángulo contendrá tantas unidades de superficie como metros lineales valga la trayectoria.

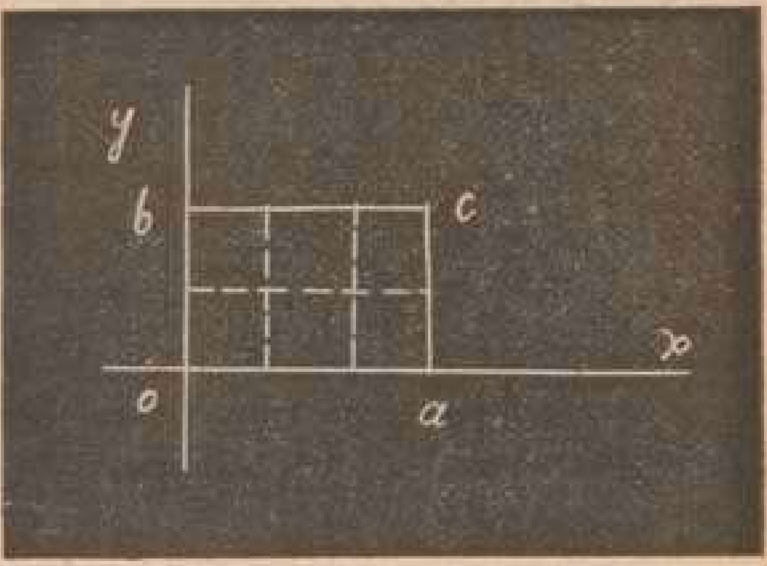

Fig. 2.

El movimiento uniforme ocurre con frecuencia en la Naturaleza; de este modo se propagan las ondulaciones que trasmiten el sonido y la luz, uniforme es el movimiento de rotación de la Tierra sobre su eje con una velocidad de 465 metros por 1″ en el Ecuador. En la industria poseen este movimiento las máquinas más perfectas, entre las que podemos citar las saetas de los relojes.

9. Movimiento variado.—Recordaremos que en esta clase de movimientos, el punto móvil recorre espacios desiguales en tiempos iguales, variando por lo tanto el camino recorrido en la unidad de tiempo, ya acelerándose, ya retardándose la velocidad del móvil. Podemos en general suponer que el movimiento variado se cambia en uniforme, considerando como constante la velocidad media que resultaría dividiendo el espacio total por el número de unidades de tiempo $\frac{e}{t}$

Encontramos ejemplos de movimientos variados, en los diversos vehículos que recorren una carretera ó vía férrea, salvando con distinta rapidez los tramos más ó ménos pendientes que las trayectorias presentan. Así que, un tren que salga de Lugo á la una de la tarde, llegando á la Coruña á las cinco horas y diez minutos, ha empleado 4 horas 10 minutos en recorrer una longitud de 115 kilómetros, de modo que la velocidad media, suponiendo recorrido el trayecto con movimiento uniforme, sería $\frac{115}{4,166} = 27,84$ kilómetros por hora ó sean $\frac{115000}{15000} = 7,66$ metros por segundo, aplicando la fórmula $v \frac{e}{t}$.

LECCIÓN III.

Movimiento uniformemente variado. Leyes y fórmulas. Su representación gráfica por el triángulo de Galileo. Movimiento uniformemente retardado.

10.—En el movimiento uniformemente variado, la velocidad varía cantidades iguales en tiempos iguales; puede ser *uniformemente acelerado* ó *uniformemente retardado* según la velocidad aumente ó disminuya una misma cantidad en la unidad de tiempo.

11. Movimiento uniformemente acelerado.—El aumento constante que adquiere la velocidad en cada segundo, se llama *aceleración*. Si suponemos que un punto material parte del reposo y que en cada unidad de tiempo aumenta w, tendremos durante t segundos un aumento wt, de modo que $v = wt$... (2). Discutiendo esta ecuación en la cual la aceleración w es una cantidad constante que caracteriza el movimiento en cada caso, podemos establecer esta ley: *las velocidades son proporcionales á los tiempos.*

La representación gráfica de este movimiento debida á Galileo es como sigue: sea t la recta $a\,b$ dividida en partes iguales representando segundos, y levantando en los puntos de división perpendiculares que indiquen la velocidad adquirida al terminar cada segundo $p\,x = w$, $g\,y = 2\,w$, etc.; estas rectas deben ser proporcionales á los tiempos. Supongamos que en cada segundo la velocidad es constante é igual al valor que tiene realmente al fin de cada uno; con esta suposición reemplazamos el movimiento uniformemente acelerado por una série de movimientos uniformes, representados por los rectángulos $a\,s\,p\,x$, $x\,t\,g\,y$, $y\,r\,m\,z$, $z\,n\,c\,b$ y el espacio total recorrido en el tiempo ab por un punto que se moviera en estas condiciones, estaría representado por la suma de dichos rectángulos.

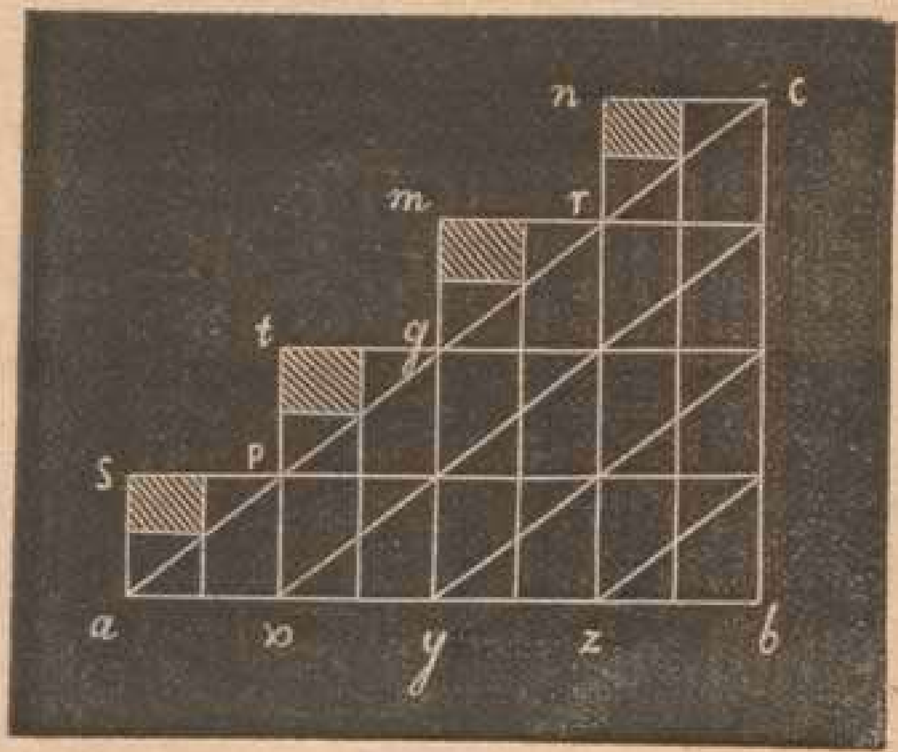

Fig. 3.

Esta suma difiere del triángulo $a\,b\,c$ de toda el área dentada externa á la hipotenusa ac. Si consideramos el tiempo t dividido en duplo número de partes iguales, la suma de los rectángulos se aproxima más á la superficie abc, quedando descartada la porción rayada de la figura.

En el límite de estas suposiciones cuando t estuviera dividido en infinitas partes iguales, la velocidad crecería de un modo contínuo, convirtiéndose la série de movimientos uniformes, en un movimiento uniformemente acelerado, y la suma de los infinitos rectángulos sería igual al área del triángulo $a\,b\,c = \frac{a\,b \times b\,c}{2}$; luégo el espacio total recorrido por el punto móvil sería $e = \frac{t \times v}{2}$ y como $v = w\,t$ tendremos $e = \frac{w\,t^2}{2} \ldots$ (3).

La simple inspección de esta fórmula, nos indica la siguiente ley: *los espacios son proporcionales á los cuadrados de los tiempos.*

12.—De las leyes anteriores se deduce que:

si los tiempos son como	1	2	3	4	5
las velocidades varían como	1	2	3	4	5

los espacios totales como	1	4	9	16	25
y los espacios parciales como	1	3	5	7	9

Este resultado puede observarse también en el triángulo de Galileo; el triángulo pequeño $a\ p\ x$ representa el espacio recorrido en el primer segundo, empezando con una velocidad cero y terminando con una velocidad $p\ x$; el trapecio $x\ y\ p\ g$ compuesto de *tres* triángulos iguales al anterior, nos indica el espacio recorrido en la segunda unidad de tiempo; los trapecios $y\ z\ g\ r$ y $z\ b\ r\ c$ el uno con *cinco* y el otro con *siete* triángulos iguales al primero, nos dan los espacios parciales recorridos durante la tercera y cuarta unidad de tiempo.

El triángulo $a\ p\ x$ que tomaremos por unidad, está contenido *cuatro* veces en el triángulo $a\ g\ y$ espacio recorrido al terminar la segunda unidad de tiempo, *nueve* veces en el $a\ z\ r$ y *diez y seis* en el $a\ b\ c$ que nos indican los espacios totales recorridos al final respectivo del tercero y cuarto segundo.

Las velocidades $p\ x$, $g\ y$, $z\ r$, y $b\ c$ son proporcionales á las rectas $a\ x$, $a\ y$, $a\ z$, $a\ b$ que representan los tiempos.

13.—De las fórmulas anteriores núm. 2 y 3 puede deducirse eliminando t una tercera muy importante $v = \sqrt{2\,w\,e}$.... (4) que nos da la velocidad en función de la trayectoria con independencia del tiempo, conocida la aceleración w.

De la fórmula del espacio $e = \frac{w\,t^2}{2}$ deducimos haciendo $t = 1$, $e = \frac{w}{2}$; cuyo resultado traducido al castellano nos dice: *la aceleración es igual al duplo del espacio recorrido por el móvil en el primer segundo de la marcha*. Esta conclusión es importante porque nos permite conocer una de dichas cantidades, dada la otra.

14. Cuando el móvil empieza su movimiento uniformemente acelerado con una velocidad inicial a, en lugar de partir del reposo, las fórmulas núm. 2, 3 y 4 se convierten en las siguientes:

$$v = a + wt \ldots (5) \quad e = at + \frac{wt^2}{2} \ldots (6) \quad v = \sqrt{a^2 + 2we} \ldots (1)$$

Para demostrar la primera observaremos que siendo constante la velocidad inicial a, se añade en cada unidad de tiempo á la aceleración, es decir, que tenemos $a + w$ al final del primer segundo, $a + 2w$ al final del segundo, etc. La fórmula del espacio se demostraría añadiendo al triángulo de Galileo el rectángulo de la velocidad a por el tiempo t. De ambas se deduciría igualmente la tercera eliminando t.

Un ejemplo sencillo de este caso sería el de un tren ó vehículo que empieza el descenso de una pendiente con la velocidad que poseía ya en el punto más alto del plano inclinado ó cuesta.

15. Movimiento uniformemente retardado.—En este la velocidad disminuye una cantidad igual en cada unidad de tiempo. Supongamos un punto móvil con una velocidad inicial a, la cual disminuya w metros en cada segundo. Al cabo de t segundos habrá disminuido wt, y tendríamos $v = a - wt$ expresión análoga á la anterior (5) salvo el signo de w por ser esta una aceleración negativa. En este caso se encontraría un cuerpo al ascender por un plano inclinado con un impulso inicial.

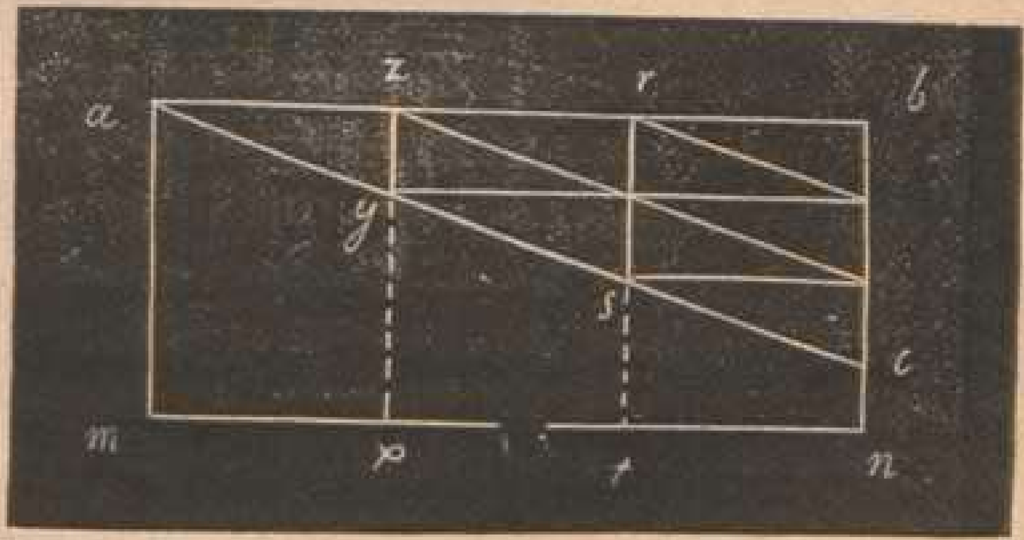

Figura 4.

El espacio total estaría representado por el área del trapecio $a\,m\,n\,c$ igual al área del rectángulo $a\,m\,n\,b$ ménos la del triángulo $a\,b\,c$, segun lo cual podemos escribir $e = at - \frac{wt^2}{2}$

expresión análoga á la anterior (6) cambiando el signo de la aceleración $w = zy$.

Como ejemplo de movimiento uniformemente acelerado, puede citarse la caida de los cuerpos en el vacío, y de movimiento uniformemente retardado, el ascenso vertical de un cuerpo también en el vacío. Ya estudiaremos más adelante ambos casos.

LECCIÓN IV.

Composición de movimientos. Movimiento curvilíneo. Traslación y rotación de un sólido.

16. Composición de movimientos.—Para conocer el movimiento de un punto en el espacio, se compara la posición que ocupa en cada instante, con la de otros puntos fijos que sirven de referencia. Si estos puntos se mueven, obtendremos el movimiento del punto dado con relación á dichos puntos, es decir, que conoceremos el movimiento *relativo* y no el *absoluto ó real* del punto en cuestión.

Se llama *composición* de movimientos, la operación que tiene por objeto encontrar el movimiento real de un punto, conociendo su movimiento relativo y el movimiento de los puntos de referencia. Este problema y el inverso de descomposición, se resuelve con trazados gráficos, representando las trayectorias con líneas rectas de distintas longitudes, con sujeción á una escala prévia. No entraremos en muchos detalles sobre esta cuestión, porque más adelante hemos de resolver problemas análogos en la composición y descomposición de fuerzas.

Supongamos un punto a moviéndose dentro de un vehículo animado á su vez de un movimiento uniforme en dirección $a\,b$, y cuya velocidad constante está representada por $a\,c$; sea también uniforme el movimiento del punto a en dirección $a\,d$, con la velocidad constante $a\,e$. Al cabo de un segundo, la dirección ó recta que la representa $a\,d$, trasportada paralelamente á sí misma por el vehículo toma la posición $c\,f$; pero el punto a ha recorrido en este tiempo la distancia $c\,g$ en dicha línea y se encuentra en g. A los t segundos el vehículo habrá recorrido la línea $a\,h = a\,c \times t$, la recta $a\,d$, se encontrará en la posición $h\,k$ pero durante el mismo tiempo el móvil a habrá recorrido la distancia $h\,k = a\,e \times t$, y se encontrará en k. Las diversas y sucesivas posiciones del punto móvil a, g, k, están

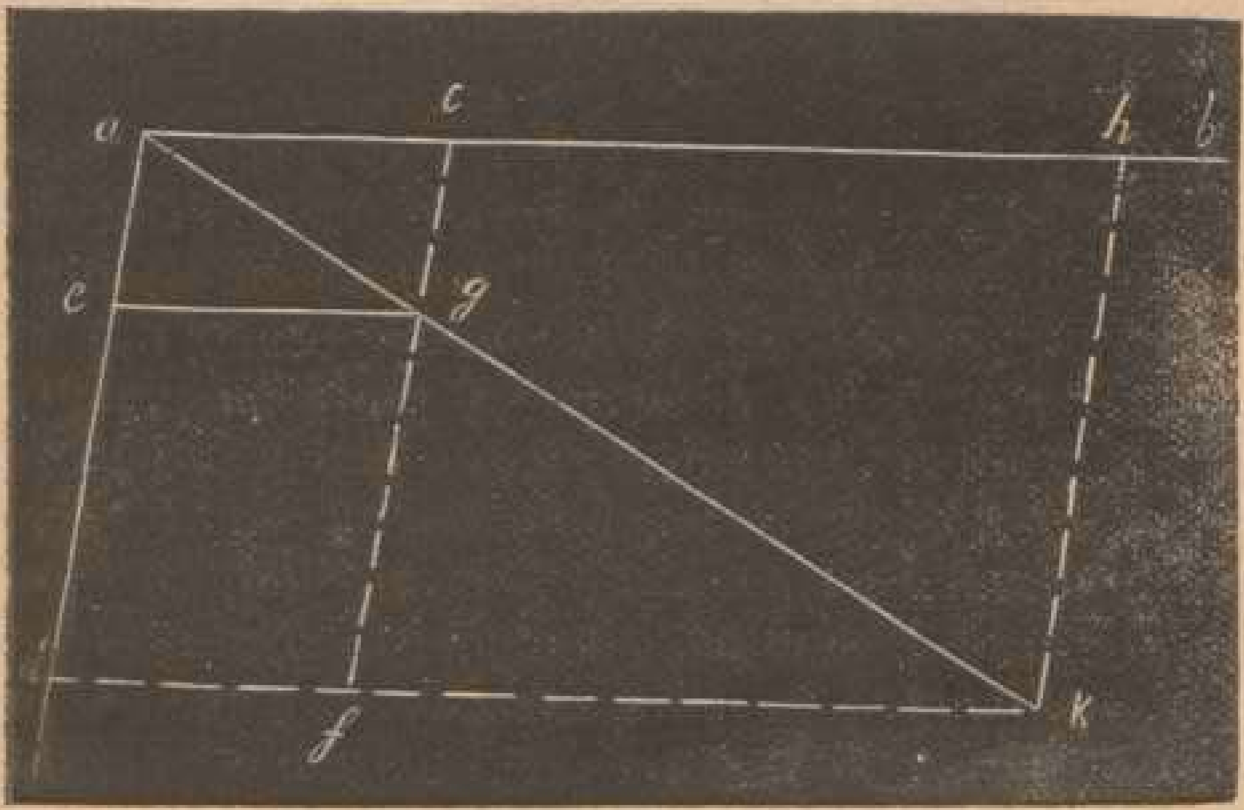

Figura 5.

situadas en línea recta y según la construcción gráfica los triángulos semejantes $a\,c\,g$, $a\,h\,k$ nos dan $\frac{a\,k}{a\,g} = \frac{a\,h}{a\,c} = \frac{t}{1}$ y por lo tanto $a\,k = a\,g \times t$ ecuación del movimiento uniforme, es decir, que el movimiento real del móvil, suponiendo fijo el planeta que habitamos, está representado por la diagonal $a\,k$ del paralelógramo $a\,h\,d\,k$.

Podríamos ahora combinar ó componer el movimiento encontrado con el de rotación y traslación de la

Tierra, encontrando entonces el movimiento real del punto móvil en el espacio. De una manera semejante combinaríamos las velocidades.

17. Movimiento curvilíneo.— Si un punto material se mueve y ninguna causa perturba su movimiento. este debería ser rectilíneo, pero en el instante que una causa cualquiera que ahora no precisamos, le desvíe contínuamente, la trayectoria será una curva, compuesta de pequeños elementos lineales, representantes de las distintas desviaciones que la causa perturbadora ha producido.

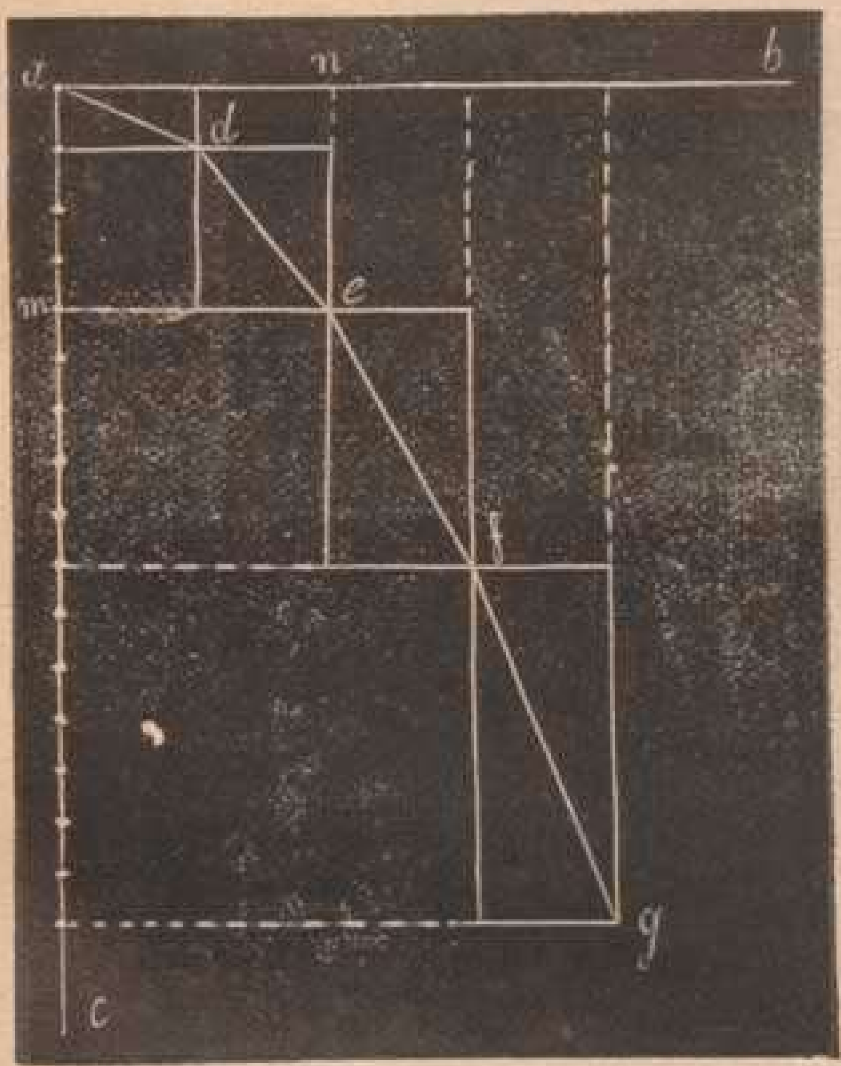

Figura 6.

Si la causa del desvío actúa en una dirección constante, la curva será una parábola, como demostraríamos componiendo el movimiento uniforme primitiyo en la dirección ab (fig. 6) y el movimiento uniforme acelerado que la causa constante de desvío imprime en la dirección $a\,c$. En efecto la línea poligonal $a\,d\,e\,f\,g$ considerando las unidades de tiempo infinitamente pequeñas, se convierte en una curva, cuyas ordenadas y abscisas responden á la ecuación de la parábola $y^2 = 2\,p\,x$ como se demuestra en Geometría superior.

Si el punto impulsado á moverse en línea recta, está sujeto á otro punto fijo, se desvía constantemente de su dirección en una cantidad igual, describiendo una circunferencia. Ya estudiaremos con más detalles en la Dinámica el movimiento circular.

18. Traslación y rotación de un sólido. —Hasta ahora nos hemos ocupado del movimiento de un punto material, y con estas nociones prévias podemos exponer ligeramente algunas ideas sobre el movimiento de un cuerpo, teniendo en cuenta sus dimenciones. Nos fijaremos en los sólidos, porque conservan su forma durante el movimiento, salvo pequeñas variaciones que por ahora no nos interesan.

Los movimientos de un sólido pueden ser dos: *de traslación y de rotación;* el primero se verifica cuando

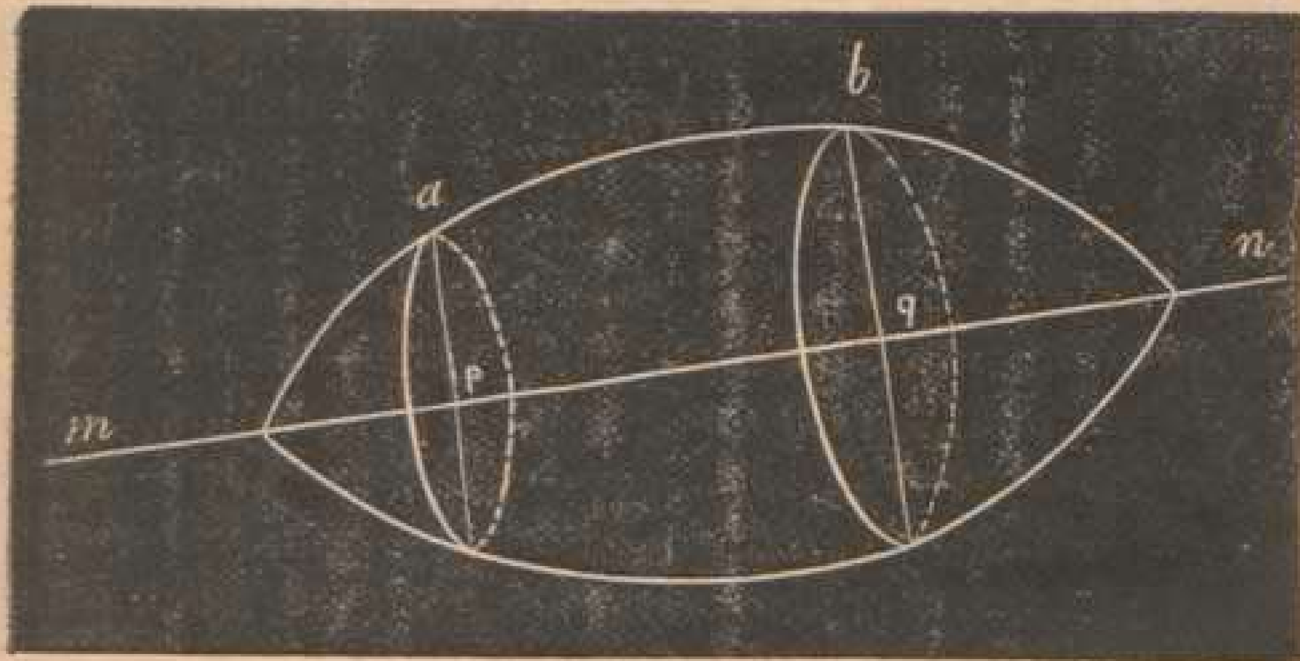

Figura 7.

todos los puntos del cuerpo describen al mismo tiempo trayectorias iguales y paralelas, no alterándose durante la marcha las distancias respectivas entre dichos puntos. El segundo existe, cuando estando fijos dos puntos del cuerpo, todos los demás situados en la línea recta que los une permanecen inmóviles; el sólido solo puede moverse girando al rededor de esta recta llamada *eje.*

Sea $m\,n$ (fig. 7) el eje de rotación, a y b puntos del cuerpo, las perpendiculares al eje desde dichos puntos $a\,p$ y $b\,q$, lo serán constantemente en todas las posiciones del sólido describiendo círculos paralelos en planos perpendiculares al eje. Si el movimiento es uniforme, estas perpendiculares ó radios, describen ángulos iguales en tiempos iguales, llamándose *velocidad angular* el ángulo de giro descrito en la unidad de tiempo. Si se miden los ángulos descritos por los puntos que disten una unidad lineal del eje, la velocidad angular de un punto que diste n unidades lineales del eje será $v = \omega \times n$.... (8) llamando ω la velocidad absoluta del punto situado á la unidad de distancia.

Todos los puntos del cuerpo describen arcos iguales, dada la uniformidad del movimiento, pero los caminos recorridos no son iguales, porque son proporcionales á sus radios respectivos, siendo la velocidad absoluta de un punto tanto menor cuanto menor sea su distancia al eje.

Ya aplicaremos estas nociones al movimiento rotatorio de nuestro planeta. La industria aplica la composición de rotaciones en los engranajes cilíndricos y cónicos destinados á trasmitir el movimiento en los ejes ó árboles de la maquinaria.

ESTÁTICA

LECCIÓN V.

Principios fundamentales de la Estática. Concepto de la fuerza. Su determinación y medida.

19. Principios fundamentales.—Son tres los postulados que constituyen la base de la Mecánica, los cuales si bién no son evidentes por sí, está comprobada su certeza por numerosas observaciones y por la conformidad que la práctica consigna en sus grandiosas aplicaciones. Su exactitud se patentiza, al observar la verdad de los movimientos celestes, acordes en un todo con las leyes obtenidas en virtud de dichos principios.

a. Principio de Keplero.—Este postulado ó ley de inercia se enuncia así: *cuando las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, cesan, el movimiento iniciado continúa en virtud de la inercia, segun una recta tangente á la trayectoria que aquel describía, con una velocidad constante é igual á la que el móvil poseía al cesar las fuerzas.*

Antes se concebía la *inercia* como propiedad característica de la materia, suponiendo á esta *inerte*, esto es, incapaz de darse á sí misma el movimiento ó el reposo; planteada así la cuestión, tiende á resolver lo que conceptuamos insoluble para la inteligencia humana, que desconoce la *esencia íntima de la materia*. El único dato cierto para la ciencia, es el enunciado anterior, consecuencia del principio de conservación de la energía base superior de la Física.

La palabra *inercia* es sinónima de *resistencia* para los naturalistas y filósofos modernos; con ambas expresan la experiencia que adquirimos de la fuerza, bajo un punto de vista objetivo, es decir, tal como se nos presenta cuando está unida á las cosas del mundo físico. La *materia* es la extensión asociada á la *fuerza* ó á la *inercia*; todo lo extenso que al mismo tiempo posea la fuerza, ya para resistir, ya para producir ó modificar un movimiento, es materia.

b. Principio de Galileo.—Este principio llamado de la independencia de las fuerzas se enuncia de este modo: *la acción de una fuerza sobre un cuerpo, es independiente del estado de equilibrio ó de movimiento que aquel posea.*

En virtud de este principio, para encontrar el efecto producido por una fuerza sobre un cuerpo en movimiento, prescindimos de las demás fuerzas y suponemos que el cuerpo está en reposo, y despues se componen sucesivamente todos los demás efectos debidos á las fuerzas restantes. De modo que, actuando simultáneamente varias fuerzas sobre un cuerpo ó sistema material, cada una produce el efecto que le corresponde como si actuara sola.

c. PRINCIPIO DE NEWTON.—*La acción es igual y contraria á la reacción.* Este enunciado significa, expresando la idea con más precisión, que cuando se inicía ó tiende á iniciarse un movimiento, se produce ó tiende á producirse otro igual y opuesto en dirección y magnitud. Así sucede en todos los hechos observados, y en cualquier órden de ideas aparece siempre la dualidad de fuerzas antagonistas. En el Universo encontramos la armonía de los astros, dependiendo del juego combinado de la gravitación ó *atracción* universal y de la fuerza centrífuga ó *repulsión*; en los fluidos existe siempre la fuerza de reacción á la presión de los mismos, como observamos en los artefactos de la industria y en los aparatos recreativos. En la Física de la electricidad existen las atracciones y repulsiones eléctricas y magnéticas sujetas al mismo principio.

20. Problema general. — Expuestos estos principios que tantas veces hemos de utilizar, podemos ya formular el problema general de la Mecánica en estos términos: dado uno ó varios cuerpos ¿qué movimiento tomarán bajo la acción de fuerzas dadas? ó viceversa ¿qué fuerzas deberán aplicarse á tal sistema de cuerpos para que adquieran un movimiento dado? El equilibrio ó reposo aparente de los cuerpos, es un caso particular de este problema general: un cuerpo ó sistema de cuerpos, está sometido á la acción de varias fuerzas ¿á qué condiciones deberán satisfacer éstas para que el sistema dado no se mueva? Empezaremos resolviendo este problema en la Estática por su mayor sencillez, dejando para la Dinámica el estudio del movimiento.

21. Concepto de la fuerza.—La fuerza es sin duda la noción más fundamental del espíritu humano, verdad primaria del mundo físico, elevada á la categoría de *causa motriz ú origen* de movimiento. Nosotros ya hemos asociado esta idea á la de la materia, (extensión que comunica un movimiento ó que resiste á él), pues en el Universo, solo encontramos como hecho real, *el movimiento de la materia*, y como ideas abstractas derivadas de este hecho, la fuerza y la materia, entidades imaginarias cuya ficción ha inspirado el tecnicismo científico y del cual no es posible prescindir. Nosotros, pues, emplearemos la palabra fuerza como símbolo indicador de *comunicación de movimiento*, proceso misterioso no bien conocido y que ampliaremos en el estudio de la Física, al tratar de la energía natural tan variada en sus manifestaciones.

Las fuerzas que utilizamos en la industria son distintas en su manifestación externa, aunque procedentes todas de la energía natural. Las principales son la gravedad ó atracción terrestre que ocasiona el peso de los cuerpos, la fuerza muscular del hombre y de los animales, el calor, la luz, la electricidad, la afinidad química, la cohesión, etc. La gravedad produce el movimiento del agua en los ríos y canales, y se aplica tambien á muchos motores de peso, ruedas hidráulicas de rotación, etc; el calor origina movimientos notables en los fluidos de nuestro globo, engendrando en las calderas el potente vapor acuoso alma de la maquinaria. El viento, el aire comprimido, la electricidad se aplican también con ventaja en algunas ocasiones.

22. Determinación de las fuerzas.—Para determinar una fuerza necesitamos conocer tres condiciones referentes á la misma; *su punto de aplicación, su dirección y su intensidad*. Fácilmente observamos el punto del cuerpo á que se aplica la fuerza, su dirección es la de la recta según la que tiende á mover su punto de aplicación y su intensidad ó valor mecánico la obtendremos relacionándola con una unidad conveniente de su misma especie. Para esta medida se elije generalmente el peso de los cuerpos, pues todos los efectos que produce una fuerza, se pueden sustituir ó contrarestar por un peso.

También se mide prácticamente la intensidad de una fuerza con el auxilio de unos aparatos llamados *dinamómetros*[1], los cuales vienen á ser unos resortes elásticos con un cuadrante ó aguja indicadora, que nos dan en kilógramos el valor de fuerzas contrarias é iguales en magnitud á las que deseamos medir.

Las fuerzas pueden representarse graficamente en el papel por medio de rectas, trazadas desde su punto de aplicación, en la dirección en que actúan con una longitud proporcional á su intensidad, con arreglo á una escala préviamente convenida.

Así la fuerza A (fig. 8) aplicada al punto a en la dirección $a\,b$ indicada por la flecha, vale 16 kilógramos, representando por dos milímetros cada unidad de peso. Esta notación nos permite utilizar la Geometría para resolver problemas de la Mecánica de un modo gráfico, y aplicar los teoremas de aquella Ciencia para la solución numérica de las cuestiones de fuerzas.

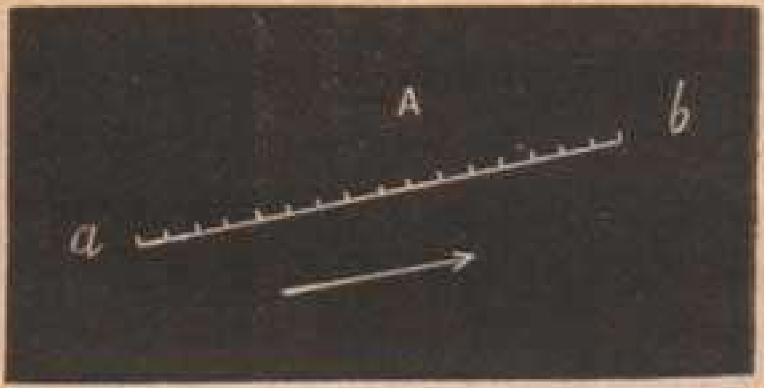

Figura 8.

LECCIÓN VI.

Composición de fuerzas. Principios en que se funda. Sistemas de fuerzas aplicadas á un punto material situadas en un plano. Momento de una fuerza. Teorema de los momentos. Sistema de fuerzas situadas en distintos planos.

23. Composición de fuerzas.—Si un punto material está sometido á la acción de varias fuerzas, se podrá obtener el mismo efecto, sustituyendo á aque-

[1] Comprendido el fundamento de los dinamómetros, el Profesor describirá aquellos que prefiera, ó que tenga á su disposición.

llas una sola fuerza. Esta se llama *resultante* del sistema y las fuerzas á quienes reemplaza *componentes*. El problema de composición consiste en determinar la resultante de varias fuerzas; se funda su resolución en algunos principios de carácter axiomático que expondremos brevemente.

a. Si varias fuerzas que actúan sobre un punto no producen el movimiento de este, es decir que se equilibran, es evidente que, *una cualquiera de ellas es igual y contraria á la resultante de las demás.*

b. También es evidente que, *dos fuerzas iguales y contrarias aplicadas á un mismo punto se equilibran.* Lo mismo sucedería si suponemos aplicadas estas fuerzas

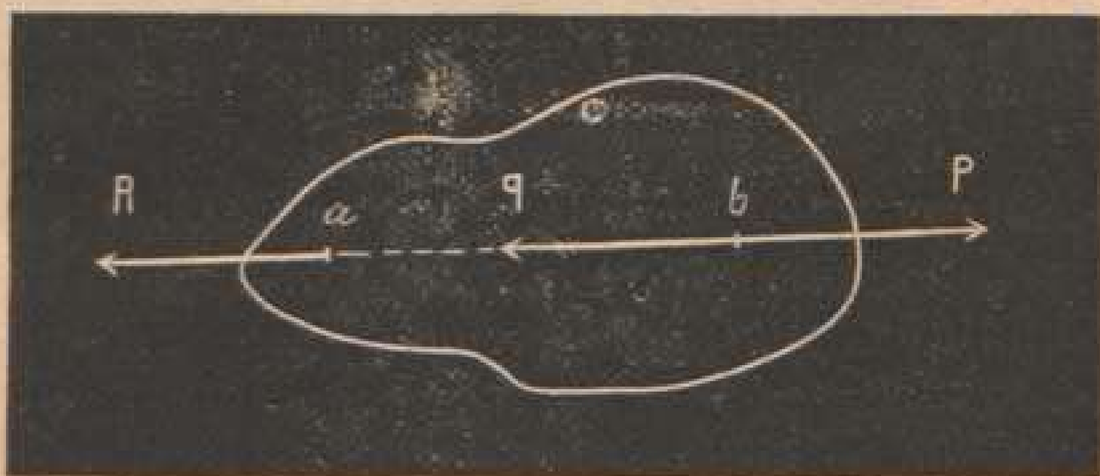

Figura 9.

á los extremos de una recta considerada como una varilla inflexible y fija, actuando en su misma dirección.

c. De lo dicho anteriormente resulta que, *una fuerza puede aplicarse á un punto cualquiera de su dirección, con tal que esté invariablemente unido al primer punto de aplicación.* Sea una fuerza R (fig. 9) aplicada al punto a, si tomamos en la dirección de esta fuerza otro punto b invariablemente unido al primero, y aplicamos en él dos fuerzas Q, P, opuestas é iguales entre sí y á la R, el punto a se hallará como antes sometido á la influencia de la fuerza R sin variación alguna, puesto que las fuerzas Q y P se neutralizan mútuamente; pero si consideramos que las fuerzas P y R iguales y opuestas, aplicadas en los extremos de la recta $a\,b$ también se neutralizan, queda solo actuando la fuerza Q sobre el punto b, ó sea su igual la fuerza R trasladada á este punto.

d. *Si dos fuerzas actúan sobre un punto y en la misma dirección, su resultante es igual á la suma de ambas*; postulado que admitimos sin demostración y que nos dá con claridad el concepto de una fuerza *doble ó múltiple* de otra.

e. *Si dos fuerzas actúan sobre un punto en dirección contraria, su resultante es igual á la diferencia de ambas, y actúa en dirección de la fuerza mayor*. Generalizando esta proposición también de carácter evidente, se verificará que: *la resultante de varias fuerzas que actúan sobre un punto, en una misma recta, será igual á la suma algébrica de las componentes;* consideraremos en este caso como positivas á las que obren en una dirección cualquiera, siendo negativas las actuantes en la opuesta.

24. Fuerzas concurrentes.—*La resultante de dos fuerzas concurrentes que actúen sobre un punto, es igual en dirección y magnitud, á la diagonal del paralelógramo construido sobre las rectas que representan dichas fuerzas.*

Es evidente que las dos fuerzas tienen una resultante porque no pueden producir equilibrio por sí solas, esta resultante estará situada en el mismo plano de las componentes, porque no hay razón alguna para que el punto material solicitado por las fuerzas salga del plano. Esto sentado probemos primero:

a. Que la diagonal del paralelógramo indica la dirección de la resultante; para esto nos apoyaremos en el principio de Galileo, y supondremos que las fuerzas actúan separadamente una en pos de otra. El punto a solicitado por la fuerza mayor Q recorrerá la recta $a\,c$ y sometido despues á la acción de la fuerza menor P, se trasladará de c á b, de modo que su trayectoria total será $a\,c\,b$; lo mismo sucedería si actuase primero la fuerza P y despues la Q, su trayectoria sería $a\,d\,b$. Si la acción de las fuerzas se verificara en la mitad del tiempo, y obraran alternativamente las mitades de las fuerzas dadas, el móvil pasaría por los puntos $a\,e\,f\,g\,b$. Iguales efectos obtendríamos si las fuerzas obraran alternativamente en cuarta, octava, etc., parte del tiempo; el punto a siempre se trasladaría desde a á b recorriendo trayectorias quebradas, y en el límite cuando las fuerzas obraran alternativamente en infinitas partes del tiempo, ó lo que es igual, obrando las fuerzas simultáneamente, la trayectoria $a\,h\,i\,j\,f\,k\,m\,n\,b$, última que hemos marcado en la figura, se confundiría con ab diagonal del paralelógramo.

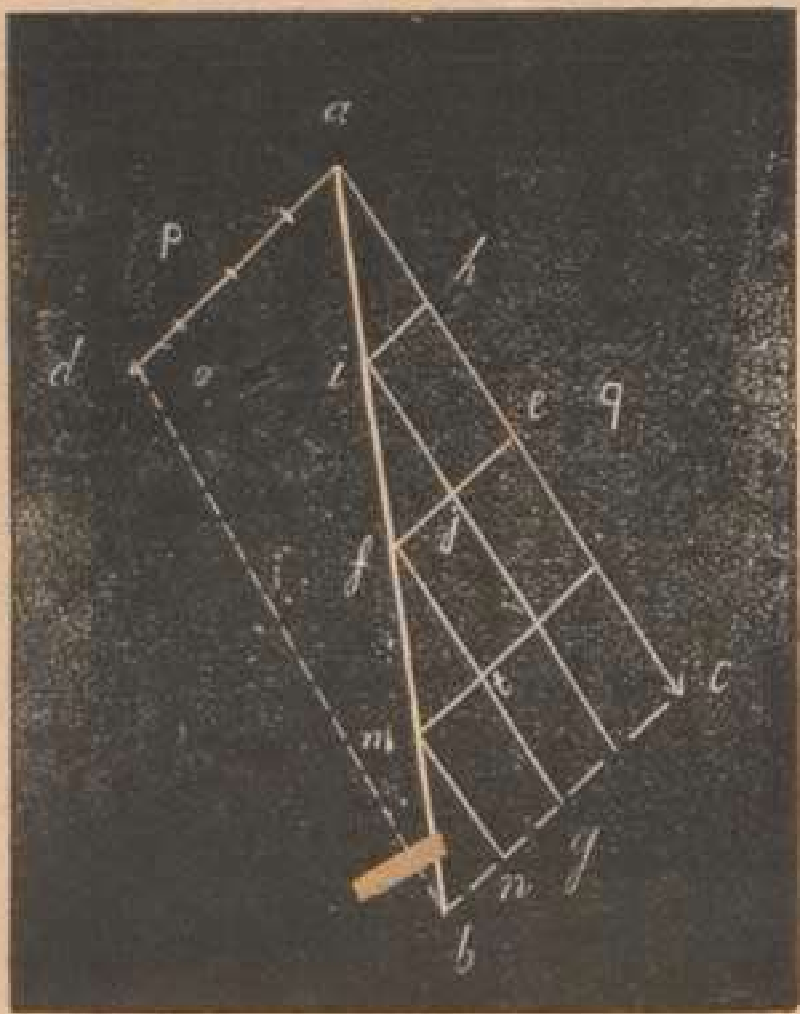

Figura 10.

b. La diagonal representa también la magnitud de la resultante. Para demostrarlo, consideremos un sistema de tres fuerzas en equilibrio $P\,Q\,S$ (fig. 11), formemos los paralelógramos que indica el grabado, y según el principio **a** que antes hemos establecido, una cualquiera de las tres fuerzas es igual y opuesta á la resultante de las otras dos; luégo las líneas $r\,a\,c$ y $e\,a\,b$ serán rectas, y por lo tanto $a\,r$ paralela, $d\,b$ y $a\,r\,d\,b$ un paralelógramo en el que $a\,r = d\,b$. Pero $d\,b$ es igual á $a\,c$, luégo la recta $r\,a$ es igual á $a\,c$; encontramos, pues, que la recta $r\,a$ es igual y opuesta á la fuerza S una de las tres dadas, luégo la recta $r\,a$ diagonal del paralelógramo construido sobre las fuerzas Q, P, es la resultante de estas en su verdadera magnitud.

c. El teorema que acabamos de demostrar, puede

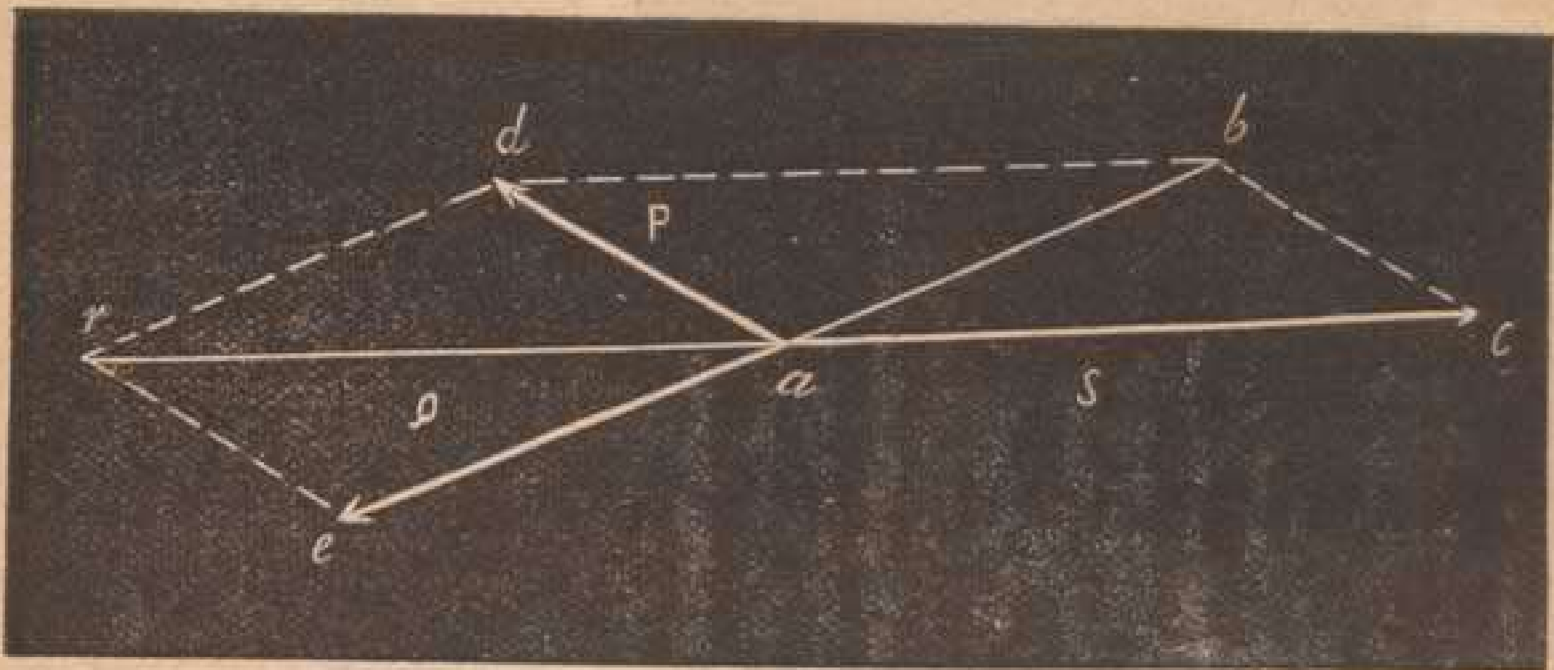

Figura 11.

comprobarse experimentalmente con aparatos más ó ménos ingeniosos, que se encuentran en los Gabinetes de Física; la Naturaleza nos ofrece algunos ejemplos en el

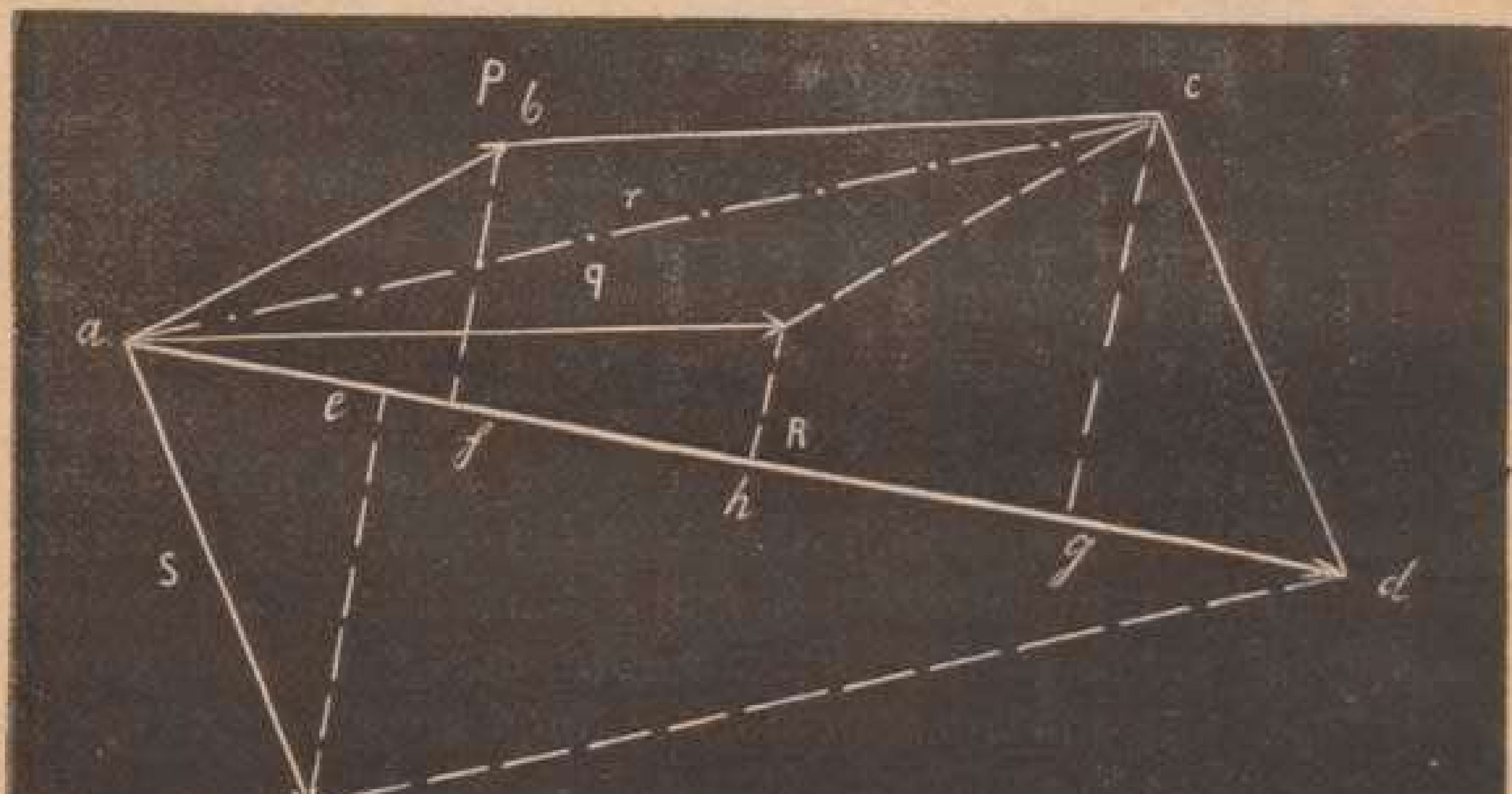

Figura 12.

vuelo de las aves, en los barcos movidos por remos etc.

25. Polígono de fuerzas.—Aplicando el teorema anterior, se encuentra fácilmente la resultante de varias fuerzas situadas en un plano. Sean las fuerzas P, Q, S, aplicadas al punto a (figura 12). Por la ley del paralelógramo encontramos la resultante r de las fuerzas P y Q y después la resultante R de las fuerzas r y S siendo por lo tanto R la resultante del sistema propuesto. Este procedimiento puede simplificarse y reducirse al trazado de una línea poligonal $a\ b\ c\ d$ formada con una de las componentes, por ejemplo la P y las demás son rectas paralelas é iguales á las demás componentes Q, S. Trazando la $a\,d$ que enlaza los extremos de la línea poligonal, esta será la resultante.

Si al construir el polígono resulta cerrado, por confundirse los extremos a y d en un solo punto, la resultante es nula, y las fuerzas se equilibran en el punto de aplicación. Estas consideraciones de índole general, son aplicables al sistema de dos fuerzas, en cuyo caso el polígono es un triángulo; de modo que siempre podremos representar un sistema de n fuerzas con su resultante por un polígono de $n + 1$ lados, siendo uno de estos la resultante y uno de sus extremos el punto de aplicación de todas las fuerzas. De aquí se deduce la posibilidad de aplicar todas las verdades de la Geometría á las cuestiones de fuerzas.

De lo dicho se deduce que, en un sistema de fuerzas aplicadas á un punto, y situadas en un plano, *la resultante es igual á la suma algébrica de las proyecciones de las componentes*. Fácilmente se comprende al inspeccionar la figura 12, que recorriendo el punto material la recta ad por la acción de la resultante R, solo contribuyen á este resultado en la citada dirección, las proyecciones de las componentes ae, af, ah, iguales respectivamente á $g\,d$, $a\,f$, $f\,g$ cuya suma es la resultante R.

26. Momento de una fuerza.—Llámase *momento* de una fuerza, con relación á un punto, *el pro-*

ducto de la intensidad de la fuerza por su distancia á dicho punto. Según esta definición un momento puede expresarse gráficamente por el duplo del área de un triángulo, cuya base es la recta que representa la fuerza y su altura la perpendicular trazada á la misma desde el *centro de momentos* ó punto dado; este suele llamarse tambien *polo* del momento.

Teorema. El momento de la resultante es igual á la suma algébrica de los momentos de las componentes.

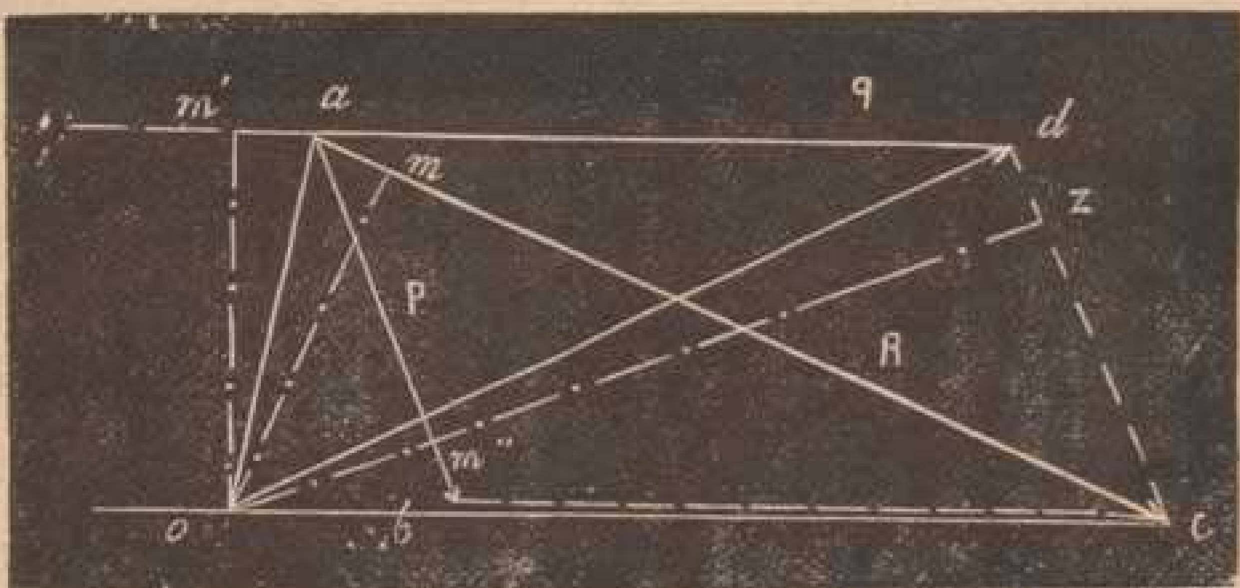

Figura 13.

Sean P, Q, las fuerzas aplicadas al punto a (fig. 13). R su resultante, o el polo ó centro de momentos; trazando las perpendiculares $o\,m$, $o\,m'$, $o\,m''$ á las tres fuerzas R, Q, P, y prolongando la $o\,m''$ hasta el punto z podemos establecer esta igualdad entre las áreas de los triángulos oac, oad y adc; $A\,oac = A\,oad + A\,odc - A\,adc$ ó sea poniendo las áreas duplicadas para suprimir el divisor 2, $R \times o\,m = Q \times o\,m' + d\,c \times o\,z - d\,c \times m''\,z$, y como $d\,c$ representa la fuerza P y $o\,z - m''\,z = o\,m''$, tendremos $R \times o\,m = Q \times o\,m' + P \times o\,m''$.

Si el polo estuviera situado entre las fuerzas dadas P Q, la demostración sería la misma, considerando á $o\,m''$ como negativa, y si el polo estuviera situado en la resultante, $o\,m = o$ y los momentos de P y Q iguales y de signo contrario; luego en todos los casos $R \times o\,m = Q \times o\,m' \pm P \times o\,m''$ como queríamos demostrar.

27. La resultante de tres fuerzas concurrentes no situadas en un plano, *es igual á la diagonal del paralelepipedo construido sobre las intensidades de las fuerzas*. Sean las fuerzas P, Q, S (fig. 14) las cuales dos á dos estarán situadas en un plano; aplicando la ley del paralelógramo encontraríamos la resultante af de las componentes Q y S y componiendo la fuerza restante P con esta resultante af, obtendremos la resultante R del sistema. De lo dicho se deduce en el caso particular de que las componentes formen ángulos rectos entre sí, que $R^2 = P^2 + Q^2 + S^2$.

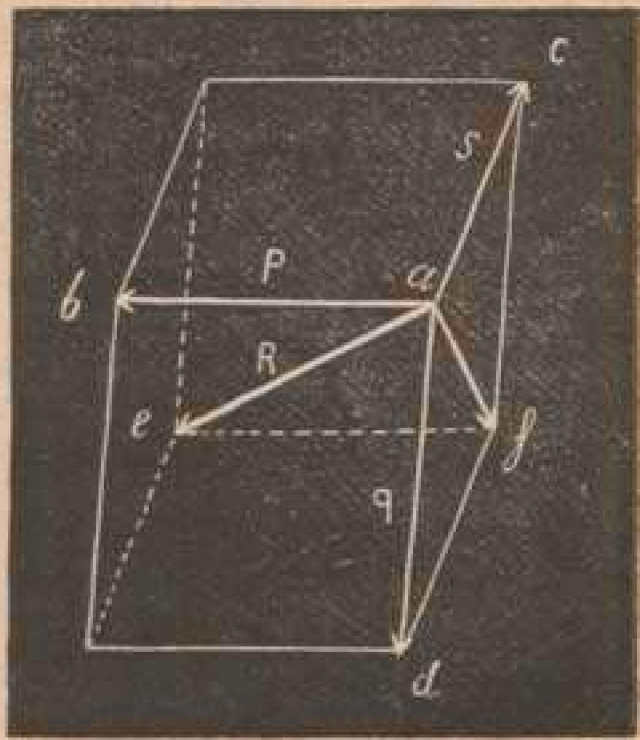

Figura 14.

LECCIÓN VII.

Composición de fuerzas paralelas. Par de fuerzas. Centro de fuerzas paralelas. Descomposición de fuerzas. Problemas.

28. Los sistemas de fuerzas paralelas, aplicadas á dos ó más puntos materiales, se reducen siempre á fuerzas concurrentes aplicadas á un punto, utilizando en su composición los axiomas fundamentales expuestos en la lección anterior.

Vamos á demostrar que, *la resultante de dos fuerzas paralelas P, Q, aplicadas á dos puntos* a, b; *es paralela á las componentes, igual á su suma algébrica, y actúa sobre un punto* c *de la recta* ab, *de tal modo situado que*

$$P \times ac = Q \times cb\ [1].$$

[1] Adoptamos para este teorema la sencilla demostración que hemos visto en el Ganot, séptima edición española.

3

Las dos fuerzas paralelas P, Q, actúan en una misma dirección (fig. 15) ó en dirección opuesta (fig. 16), y en ambos casos podemos introducir en el sistema dos fuerzas iguales y contrarias m, n, aplicadas en a y b, las cuales no alteran el sistema propuesto. Combinando la fuerza P con la m y la fuerza Q con la n, obtenemos dos fuerzas T, S, equivalentes á las primitivas, concurrentes en el punto d en el cual se cortan prolongándolas suficientemente. Trasladando al punto d las fuerzas T y S y descomponiéndolos en las cuatro fuerzas m, n, P, Q, este sistema aplicado al punto d queda reducido á las fuerzas primitivas P, Q, obrando sobre una misma recta, en la misma dirección (fig. 15) ó en opuesta dirección (fig. 16), pues las fuerzas m n se neutralizan por ser iguales y contrarias. En el primer caso tenemos una resultante $R=Q+P$ y en segundo $R=Q-P$ y en ambos la dirección de la resultante es paralela á la de las componentes.

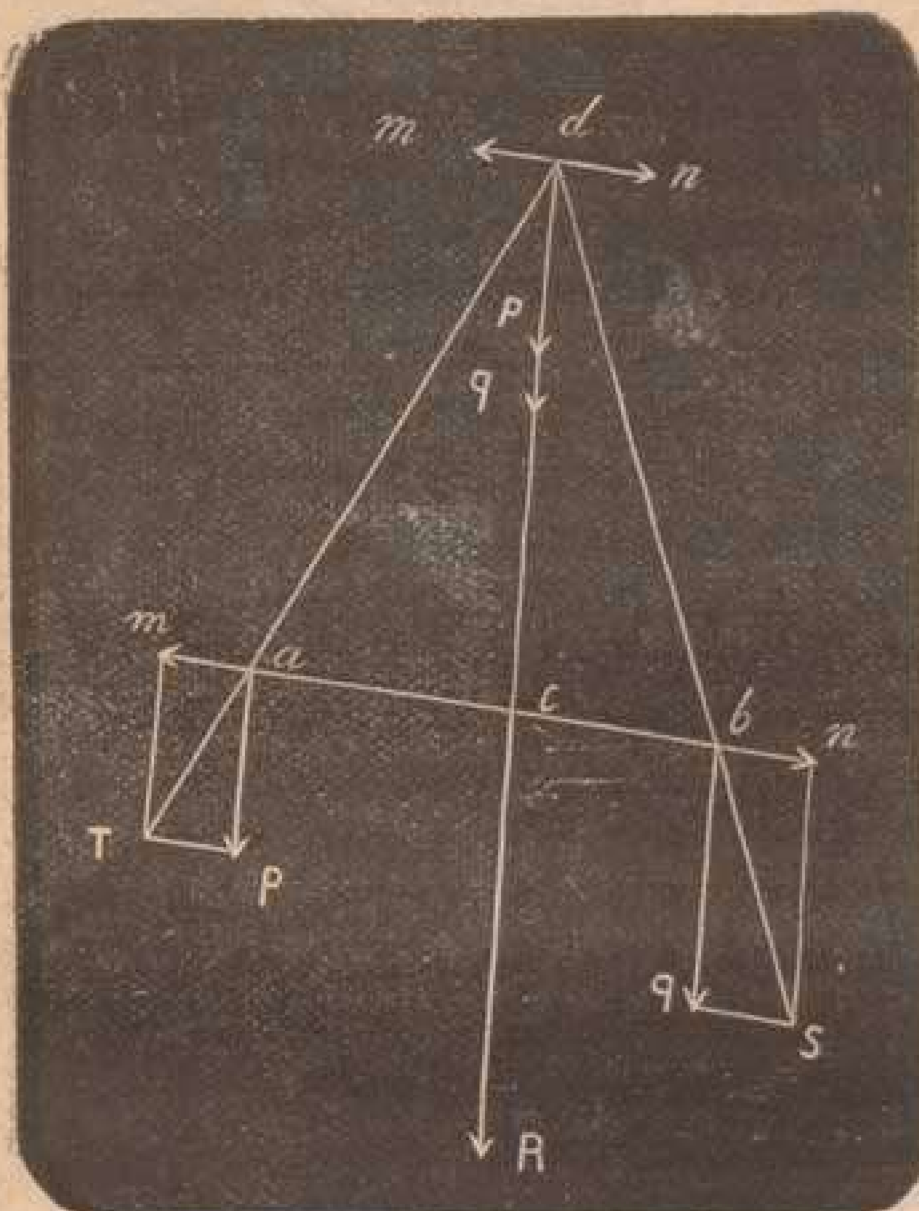

Figura 15.

Trasladando el punto de aplicación de la resultante á c, observamos que los triángulos $a\ d\ c$ y $b\ d\ c$ son semejantes respectivamente á los triángulos $T\ a\ P$ y S

$b\,Q$; podemos escribir pues $\frac{c\,d}{a\,c}=\frac{a\,P}{T\,P}$ y $\frac{c\,d}{c\,b}=\frac{b\,Q}{Q\,S}$ ó sea $c\,d \times m = a\,c \times P$; $c\,d \times n = c\,b \times Q$ de donde $a\,c \times P = c\,b \times Q$ por ser iguales las fuerzas m y n.

29. Par de fuerzas.—Si en la igualdad anterior, deseamos conocer $a\,c$ en funcion de $a\,b$ (fig. 15)

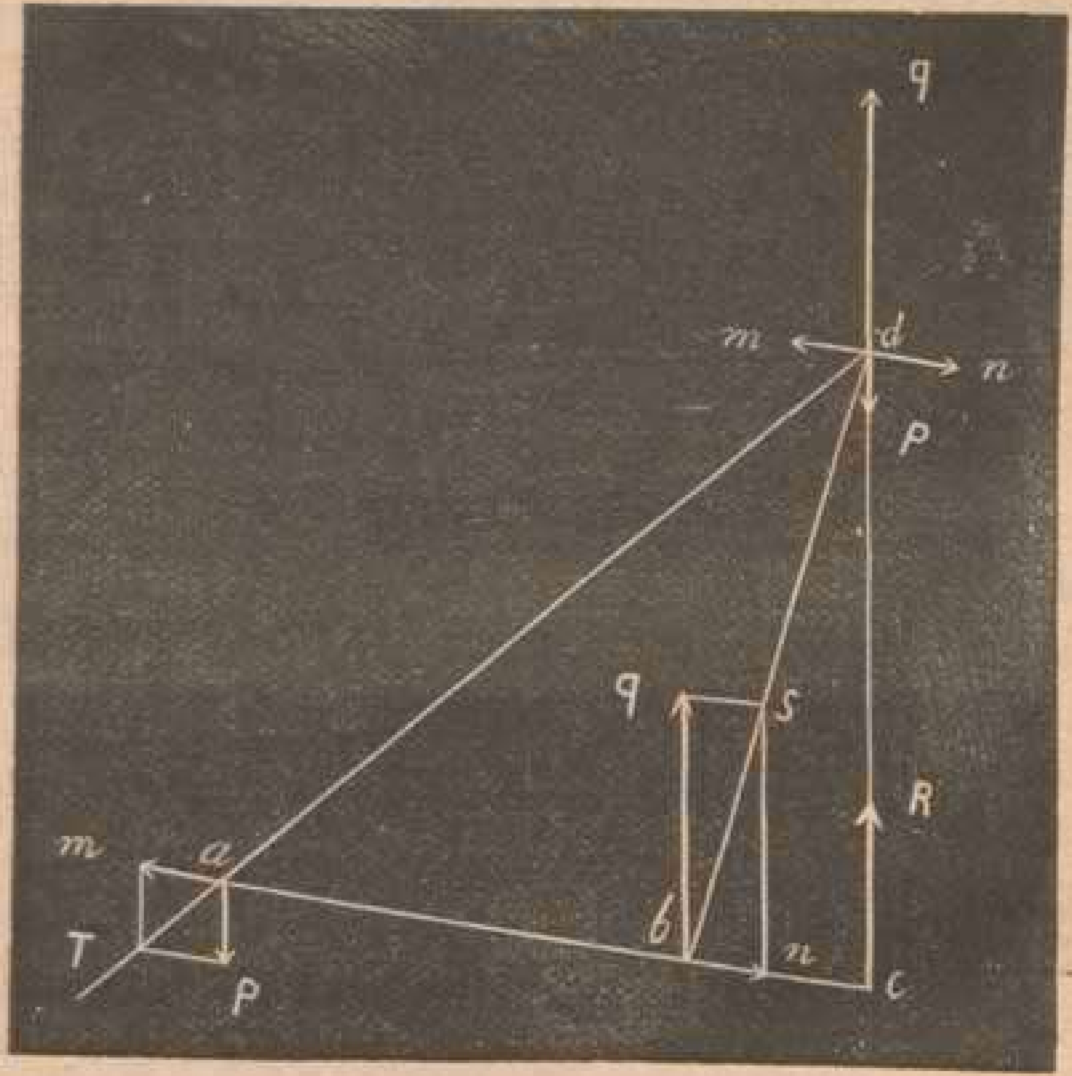

Figura 16.

sustituiremos $c\,b$ por su igual $a\,b - a\,c$ y entonces resulta $a\,c \times P = (a\,b = a\,c)$ Q de donde $a\,c = \frac{Q}{Q+P}\,a\,b.$

Haciendo igual sustitución cuando las componentes actuan en dirección opuesta (fig. 16) pondremos en vez de $c\,b$ su igual $a\,c - a\,b$ y entonces $a\,c \times = P\,(a\,c - a\,b)\,Q$ de donde $a\,c = \frac{Q}{Q-P}\,a\,b.$ Si las componentes son iguales resulta $ac=\infty$ y $R=o$, es decir, que la resultante es nula y el sistema de dos fuerzas paralelas iguales y opuestas no puede producir movimientos de traslación, imposibilidad que demuestra el álgebra, con la distancia infinita *a c*.

Semejante sistema constituye lo que en Mecánica se llama *par de fuerzas*, y se produce un movimiento de rotación originado por ambas apoyándose en el punto medio de la recta *ab*, llamada *brazo de palanca* del par, cuando es perpendicular á las componentes.

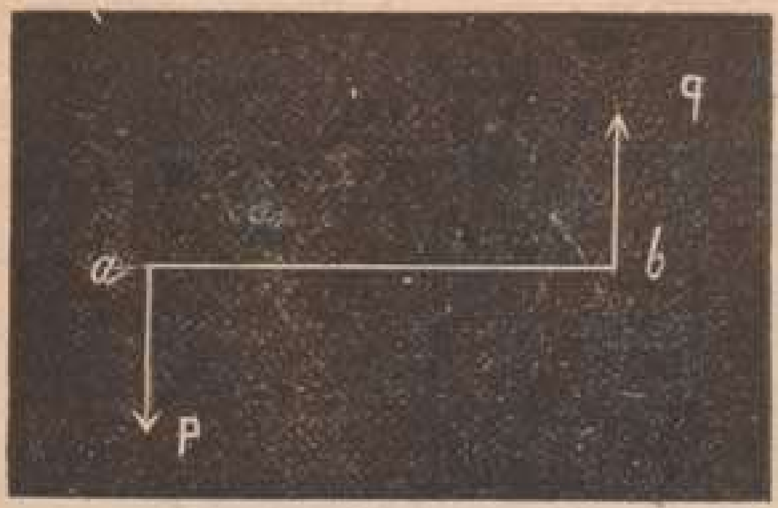

Figura 17.

30. El teorema de momentos se aplica también á las fuerzas paralelas como fácilmente demostraríamos. En el par de fuerzas se llama momento del par al producto del brazo de palanca por una de las fuerzas.

31. Para encontrar la resultante de varias fuerzas paralelas que actuen en una misma dirección, bastará componerlas dos á dos hasta concluir con todas ellas; si actuan en opuesta dirección, convendrá componer juntas las que obran en una dirección y las que son opuestas, quedando reducido en ambos casos el sistema propuesto al de dos fuerzas que ya sabemos resolver.

32. **Centro de fuerzas paralelas**.—Llámase así el punto de aplicación de la resultante, en un sistema de fuerzas paralelas, el cual es fijo, mientras no cambía la intensidad y los puntos de aplicación de las componentes, aunque varíe la dirección de las fuerzas.

Un raciocinio sencillo ó una construcción gráfica, nos demostraría la verdad de esta proposición cuya importancia pronto veremos.

En efecto los cálculos que hemos hecho para fijar el punto *c* (fig. 15 y 16) son independientes de la dirección de las componentes.

33 Descomposición de fuerzas.—Si dada una fuerza se pide su descomposición en dos ó más concurrentes, situadas ó no en un plano, el problema es indeterminado, porque la recta que representa la fuerza puede ser diagonal de infinitos paralelógramos y paralelepípedos; este problema se determina con las condiciones que exije la Geometría para construir un polígono, dado un lado, cuando las fuerzas están situadas en un plano; de modo que interesa conocer los ángulos que las desconocidas componentes forman con la recta dada.

Ya tendremos ocasión de resolver casos prácticos en muchas cuestiones de la Mecánica y de la Física; en la mayor parte de ellas, la dirección de las componentes queda indicada por la naturaleza del problema.

Cuando las componentes forman ángulos rectos con la fuerza dada queda determinado el problema, tratándose de descomponer una fuerza dada en dos ó tres componentes. En el primer caso, la recta dada R es diagonal de un rectángulo ó hipotenusa de un triángulo también rectángulo cuyos catetos llamaremos P y Q y A B los ángulos agudos de estos con la fuerza dada, de modo que podemos escribir $P=R\cos A$ y $Q=R\cos B$. Si se nos pide descomponer la fuerza dada R en tres componentes rectangulares P, Q, S, cuyos ángulos con R fueran A, B, C, tendríamos también conocidas las componentes por medio de las igualdades $P=R\cos A$, $Q=R\cos B$, $S=R\cos C$. Conviene recordar siquiera como comprobación, que en el primer caso tenemos $R^2=P^2+Q^2$ y en el segundo $R^2=P^2+Q^2+S^2$.

34. Descomposición de fuerzas paralelas.—Este problema también indeterminado se resuelve aplicando la igualdad que hemos demostrado

$$P\times ac=Q\times bc,$$

cuando son conocidas $a\,c$ y $b\,c$. Sea dada la fuerza R aplicada en el punto c de una varilla rígida cuya fuerza suponemos que vale 5 kilógramos. Para encontrar la componente P ó sea la carga en el extremo a de la varilla, escribiremos

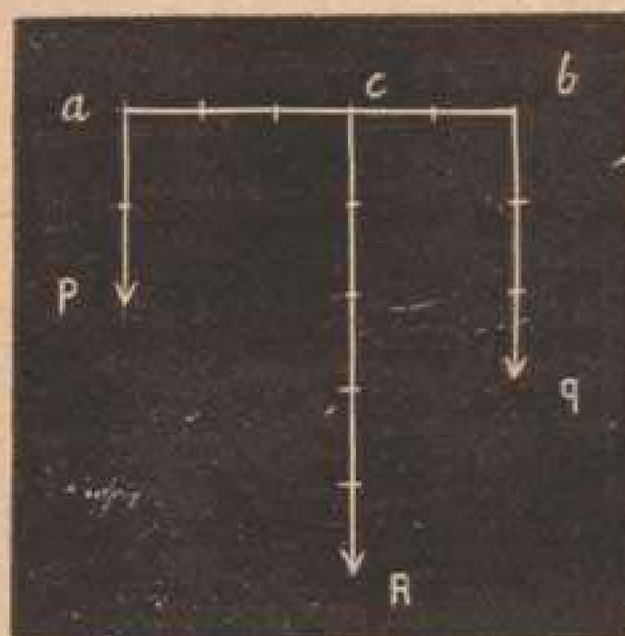

Figura 18.

$$\frac{Q}{P}=\frac{a\,c}{b\,c}$$

ó lo que es igual

$$\frac{Q+P}{P}=\frac{a\,c+b\,c}{b\,c}$$

de donde

$$\frac{R}{P}=\frac{a\,b}{c\,b}$$

y $P=\dfrac{c\,b}{a\,b}\,R=\dfrac{2}{5}\times 5=\dfrac{10}{5}=2$ kilógramos. Conocida la fuerza P, se conoce inmediatamente Q pues

$$Q=R=P=5-2=3 \text{ kilógramos.}$$

Este caso se presenta con bastante frecuencia, cuando dos personas sostienen una barra $a\,b$ en la que cuelgan un peso en cualquiera de sus puntos.

LECCIÓN VIII.

Estudio de la atracción. Gravedad. Peso de los cuerpos. Masa. Densidad. Peso específico.

35. Atracción.—Es una fuerza observada en la materia, cualquiera que sea su forma y estado, en virtud de la cual los cuerpos tienden á precipitarse unos sobre otros. Toma diversos nombres según los cuerpos entre los cuales se considera: entre los astros se llama *gravitación*; entre la Tierra, ó un planeta cualquiera, y los cuerpos situados en su superficie, se llama *gravedad*; entre los elementos materiales de los cuerpos se llama *cohesión* ó *afinidad* según los casos.

El físico inglés Newton descubrió en el siglo XVII las leyes de la gravitación, fundándose en las que anteriormente expuso Keplero, relativas al movimiento de los planetas. Como decía el gran geómetra inglés, los cuerpos actúan entre sí, como si existiera una fuerza atractiva entre las masas materiales que los forman.

36. Gravedad.—Es la fuerza en cuya virtud los cuerpos abandonados á sí mismos, *caen*, es decir, se dirigen al centro de la Tierra. Se ejerce á todas las distancias con sujeción á la siguiente ley de la gravitación: *Todos los cuerpos se atraen mútuamente en razón directa de las masas, y en razón inversa del cuadrado de la distancia que los separa.*

La dirección de esta fuerza se encuentra fácilmente por medio de la *plomada*, esta consiste en una masa cilíndrica ó esférica, taladrada en su centro, por el que pasa un hilo delgado apoyado en un punto fijo. La dirección del hilo se llama *vertical* y es perpendicular á la superficie del agua tranquila, que se denomina superficie *horizontal*. Como la Tierra es próximamente esférica, resulta que la dirección del hilo á plomo opuesta á la acción terrestre á la que equilibra, representa la prolongación del radio en un punto cualquiera de nuestro planeta. De lo dicho se deduce que los hilos tirantes de dos plomadas próximas son paralelos y determinan un plano vertical; si aquellas están separadas forman ángulos, los cuales contados sobre un meridiano ó paralelo, nos dán la latitud ó longitud de un punto terrestre con relación al otro.

37. Peso de los cuerpos.—Como la Tierra por su mayor masa atrae los cuerpos que la rodean, estos ejercen *presión* sobre los obstáculos que impiden su caida ó *tracción* sobre los hilos que los sostienen. Esta presión ó tracción se llama *peso*; este viene á ser la resultante de todas las componentes paralelas de la gravedad, aplicada á los elementos materiales que constituyen el cuerpo. De lo dicho resulta que *los pesos son proporcionales á las masas* ó sea $p = m\,g$ .....(9) representando p y m el peso y la masa de un cuerpo y g

como coeficiente numérico expresa la aceleración debida á la gravedad, igual á 9'8 metros en nuestras latitudes. La fórmula anterior cuya verdad demostraremos con todo rigor más adelante nos dá el peso *absoluto* de los cuerpos, el cual podemos conocer únicamente por medio de los dinamómetros.

Las balanzas y demás aparatos de pesar nos dan el peso *relativo* de los cuerpos, ó sea la relación entre el peso absoluto de un cuerpo y el de otro cuerpo que se toma como unidad.

38. Masa.—Densidad.—Peso especifico.—La masa *absoluta* de un cuerpo $m = \frac{p}{g}$, es la cantidad de materia que contiene; solo podemos apreciar la masa *relativa* de un cuerpo, comparándola con la de otro que se toma como unidad; este suele ser el agua destilada para los sólidos y líquidos y el aire para los vapores ó gases.

Se llama *densidad* la masa contenida en la unidad de volúmen; en virtud de esta definición podemos establecer esta igualdad $m = v\ d$.....(10) siendo d la densidad absoluta de la masa m y v el número de unidades de volúmen.

De lo dicho se deduce $d = \frac{m}{v}$, pudiendo por lo tanto considerar la densidad absoluta como relación abstracta de la masa absoluta con el volúmen, y comparando masas distintas de igual volúmen tendremos $\frac{d}{d'} = \frac{m}{m'}$ expresión que nos dá la densidad relativa entre dos cuerpos cuyas masas sean m y m'. Este cociente $\frac{m}{m'}$ podemos escribirle así $\frac{p}{p'}$ por ser las masas proporcionales á los pesos, de modo que podemos conocer la densidad relativa de un cuerpo con relación al agua pura, dividiendo el peso p del cuerpo en cuestión por el peso

p' de un volúmen igual de agua ó de aire. Este cociente $\frac{p}{p'}$ se llama peso específico.

Creemos inútil advertir que la relación entre los pesos absolutos de dos cuerpos es la misma que existe entre los pesos relativos de los mismos, referidos á la misma unidad.

39. La densidad relativa $\frac{m}{m'}$ ó el peso específico $\frac{p}{p'}$ entre dos masas m m' cuyos pesos son p p', vienen representados por el mismo número aunque expresen cosas distintas. En el plomo por ejemplo, este valor numérico es 11 próximamente, lo cual significa que un volúmen dado de plomo contiene once veces más cantidad de materia que un volúmen igual de agua pura, y por lo tanto si un centímetro cúbico de agua destilada pesa un gramo, un centímetro cúbico de plomo pesará once grámos.

La fórmula $m = v\ d$ nos indica las relaciones existentes entre el peso ó la masa de un cuerpo y su volúmen ó densidad. Discutiéndola encontramos.

1.° Si v es constante, m es función de d, es decir que, en igualdad de volúmen las masas son proporcionales á las densidades:

2.° Si d es constante m es función de v, de modo que tratándose de dos volúmenes distintos de igual naturaleza, las masas son proporcionales á los volúmenes.

3.° Si m es constante, es decir, para una masa dada, los volúmenes están en razón inversa de las densidades.

El conocimiento de la densidad tiene notables aplicaciones en la ciencia y en la industria. En la Mineralogía y en la Química, la constancia de este dato numérico permite distinguir una especie de otra.

40. Problemas.—Como aplicación de la fórmula n.° 10 resolveremos algunos problemas de mucho uso en las ciencias físicas.

a. Cuál será el rádio de una esfera de plata que pese 43,873 kilógramos?

$$v = \frac{m}{d} = \frac{43,873}{10,474} = 4,188 \text{ decímetros cúbicos de donde}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4,188 \text{ de donde } r = 1 \text{ decímetro.}$$

b. Una columna cilíndrica de mercurio que pesa 5 decígramos ocupa 130 milímetros en un tubo estrecho. ¿Cuál será el diámetro del tubo?

$$v = \frac{m}{d} = \frac{0'5}{13'6} = 0,0367 \text{ centímetros cúbicos de donde}$$

$36 = 3'14 \times r^2 \times 130$; de donde $r = \sqrt{\frac{36}{3'14 \times 130}} = 0'248$ milímetros. Por lo tanto el tubo tendrá de diámetro 0'5 milímetros.

c. Cuál será el peso de un bloque de granito cuyas dimensiones sean $3 \times 0'80 \times 0'25$ metros y cuya densidad es 2'8.

$m = v\, d = 600$ decímetros cúbicos $\times 2'8 = 1680$ kilógramos. Otros muchos problemas pueden resolverse con el auxilio de la fórmula citada, la cual se usa en muchas cuestiones como tendremos ocasión de ver más adelante.

LECCIÓN IX.

Centro de gravedad. Su determinación geométrica y experimental. Ejemplos. Equilibrio de un sólido apoyado.

41. El punto de aplicación de todas las fuerzas paralelas debidas á la gravedad, actuando sobre los elementos materiales que forman un cuerpo, se llama *centro de gravedad*. Como centro de fuerzas paralelas, su posición no varía y en él puede considerarse acumulada toda la masa del cuerpo.

Su determinación en los cuerpos homogéneos se funda en consideraciones geométricas; se dice que un cuerpo es *homogéneo* cuando dividido su volúmen en partes iguales por pequeñas que sean, queda dividido su masa ó peso total en el mismo número de partes iguales. En este caso la situación del punto que buscamos depende de la forma del cuerpo y hay proporcionalidad directa entre los volúmenes y los pesos de una masa dada.

Sabemos que las *superficies y líneas* no tienen existencia real, aquellas son los límites de los cuerpos y estas los de las superficies, pero podemos considerar á los cuerpos de espesor delgado como *superficies materiales* y á los que tienen poquísimo ancho y grueso como *líneas materiales*; y con tales antecedentes no extrañarán nuestros lectores que fijemos la posición del centro grave de algunas líneas y superficies.

42. Cuando la superficie de un cuerpo tiene un *plano diametral* ó *eje de simetría*, en él estará situado el centro que buscamos, pues en él debe aplicarse la resultante de las componentes graves sobre todas las líneas materiales que aquel plano ó eje biseca.

Por un razonamiento análogo puede demostrarse que el centro geométrico de los cuerpos regulares homogéneos, coincide con su centro de gravedad.

Por lo tanto el centro grave de una recta, de un círculo, de un polígono regular, de una esfera, etc., está situado en su punto céntrico ó medio.

43. El centro de gravedad de una superficie triangular está en la línea que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto, al primer tercio contando desde dicho lado.

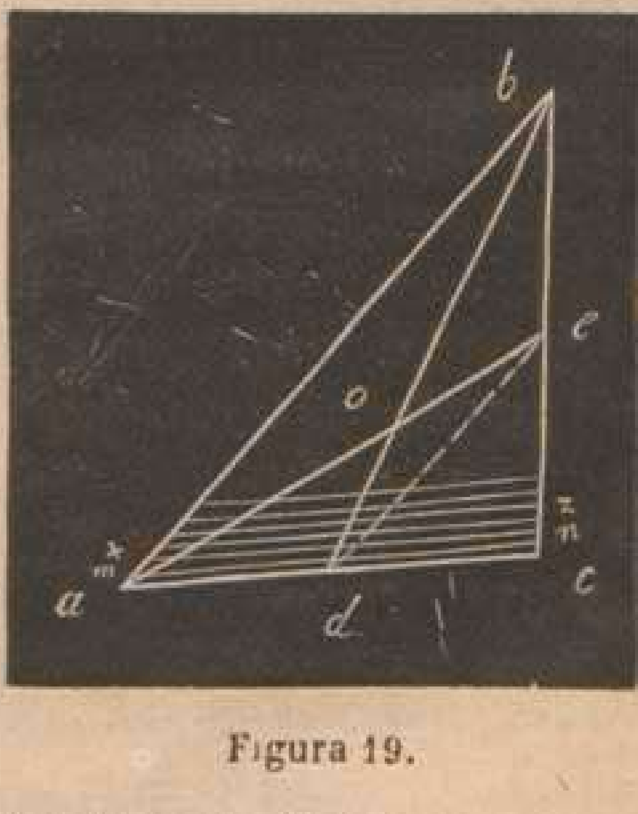

Figura 19.

Sea el triángulo *a b c* (figura 19) la línea *b d* trazada desde el punto medio *d* al vértice opuesto, biseca todas las líneas materiales *m n*, *x z*, etc., paralelas al lado *a c*, cuya suma, suponiéndolas contiguas, constituye la superficie dada; en la línea

$b\,d$ se encuentra pues el punto que buscamos. Por análogas razones, observamos que también se encuentra en la línea $a\,e$, luégo en la intersección de ambas, o, estará dicho centro. Comparando los triángulos semejantes $d\,o\,e$, y $a\,o\,b$ tendremos $\frac{d\,e}{a\,b}=\frac{o\,e}{o\,a}=\frac{o\,d}{o\,b}=\frac{1}{2}$ de modo que el punto o se encuentra en el tercio de la recta $d\,b$, puesto que $o\,d=\frac{o\,b}{2}$, luégo $o\,d=\frac{db}{3}$.

Si se trata de un polígono irregular se dividiría en triángulos y aplicando á los centros de gravedad de estos triángulos, fuerzas paralelas á sus áreas que lo serían también á sus pesos siendo superficies homogéneas, componiéndolas, el punto de aplicación de la resultante sería el que buscamos.

44. El centro de gravedad de un tetraedro, está situado en la recta trazada desde el centro de gravedad de la base al vértice opuesto, á la cuarta parte contando desde la base.

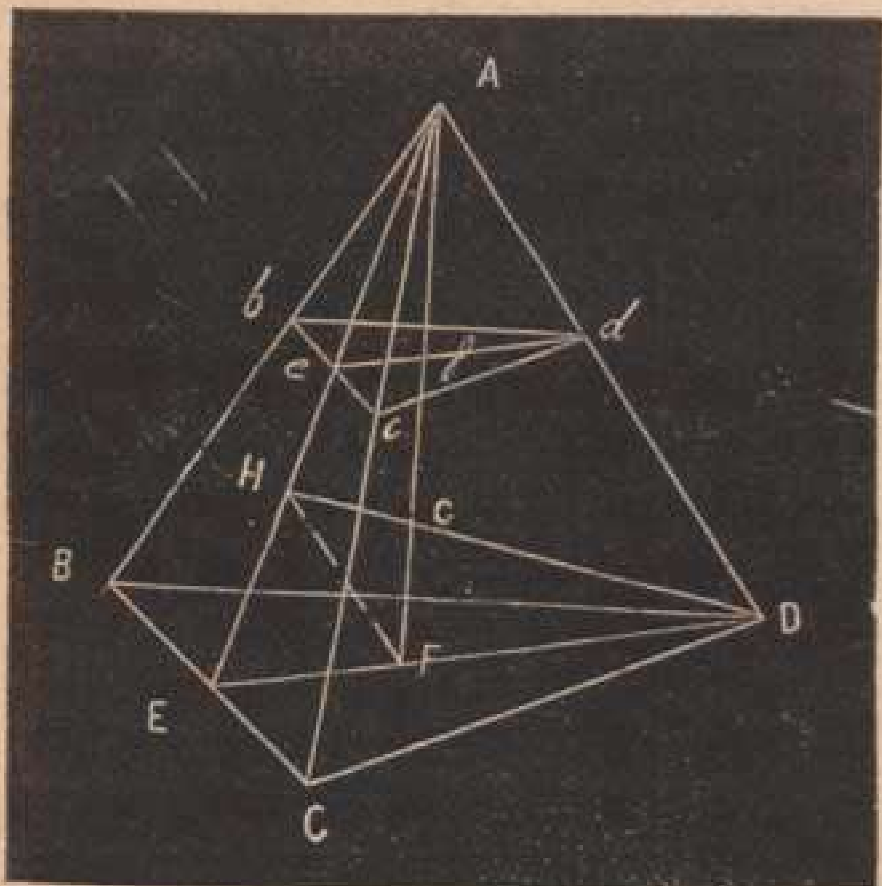

Figura 20

Sea el tetraedro $A\,B\,C\,D$ (fig. 20) el cual supondremos formado de triángulos materiales $b\,c\,d$, etc., superpuestos á partir de la base; cortando el sólido por el plano $D\,A\,E$, las intersecciónes de este plano con el triángulo $b\,c\,d$ y todos los demás superpuestos serán paralelas á la intersección $D\,E$ del mismo plano con la base. Si se toma $EF=\frac{1}{3}ED$, F será el centro de gravedad de la base y enlazando este punto con el vértice A, la recta FA pasará por todos los centros graves de los triángulos superpuestos DCB, dcb, etc, luégo en esta recta estará el centro buscado. Por análogas razones se encontrará también este centro en la recta HD luego será el punto G intersección de ambas rectas situadas en el plano DAE.

Los triángulos semejantes EHF y EAD nos dan $\frac{HF}{AD}=\frac{1}{3}$. Por otra parte los triángulos también semejantes HFG y GAD ncs dan así mismo:

$$\frac{HF}{AD}=\frac{FG}{GA}=\frac{HG}{GD}=\frac{1}{3},$$

luégo el punto G se encuentra á la cuarta parte de FA á contar desde la base, puesto que $FG=\frac{GA}{3}=\frac{FA}{4}$.

Lo mismo sucede con una pirámide poligonal, y se demuestra descomponiéndola en tetraedros; y en un cono considerándole como una pirámide de infinito número de caras.

En un prisma ó en un cilindro, el centro de gravedad se encuentra en el punto medio de la recta trazada por los centros graves de las bases.

45. Cuando el cuerpo no es homogéneo, ó aun siéndolo, su forma no permite procedimientos geométricos sencillos, puede encontrarse aproximadamente la posición del centro de gravedad, suspendiéndole de un hilo aplicado sucesivamente en dos puntos distintos de su superficie y se busca el punto en que la primera dirección del hilo cortaría á la segunda. En efecto, en cada una de las dos posiciones consecutivas del cuerpo, se establece el equilibrio cuando el peso de aquel aplicado en el centro de gravedad queda neutralizado por la tirantez del hilo sujeto á un punto fijo, y como las dos rectas ideales interiores en el cuerpo prolongándose las del hilo, contienen el centro que buscamos, este se encuentra en la intersección de ambas.

46. Equilibrio de los cuerpos pesados. —Puesto que la acción de gravedad sobre los elementos materiales que constituyen un cuerpo, equivale á una fuerza única vertical actuante de arriba abajo, aplicada al centro de gravedad; basta para el equilibrio de un sólido que sea neutralizada esta fuerza por la resistencia de un punto fijo por el cual pase su dirección. Por lo tanto si el cuerpo se sostiene en un sólo punto en la vertical que pase por él debe hallarse su centro de gravedad; si está sostenido por un eje horizontal, en la vertical que encuentra al eje debe hallarse el punto citado; finalmente si el sólido se apoya sobre varios puntos, basta que la vertical del centro grave pase por dentro del polígono de los puntos de apoyo ó *base de sustentación*.

Teniendo en cuenta la posición del centro de gravedad respecto de la base que sostiene el cuerpo, se observan tres clases de equilibrio: *estable*, *inestable* é *indiferente*.

a. Es estable el equilibrio, cuando desviado el cuerpo de su posición de equilibrio, la recobra enseguida, si alguna causa no lo impide; se verifica esto cuando el centro de gravedad está lo más bajo posible y como este tiende á descender, cuando el cuerpo se desvía oscila como un péndulo hasta recobrar la posición de estabilidad.

b. Es inestable el equilibrio, cuando desviado el cuerpo de su posición no la recobra jamás; sucede esto, cuando el centro de gravedad está lo más alto posible y al desviarle baja aquel, adquiriendo el cuerpo el equilibrio estable ó el indiferente.

c. Es indiferente el equilibrio cuando el centro de gravedad no varía de altura respecto á la base de sustentación, en cuyo caso el cuerpo permanece siempre en equilibrio en cualquiera de las posiciones posibles de estas condiciones.

47.—La figura 21, presenta un cono con las tres clases de equilibrio, según descanse el sólido sobre la base, sobre el vértice ó sobre una generatriz; el segun-

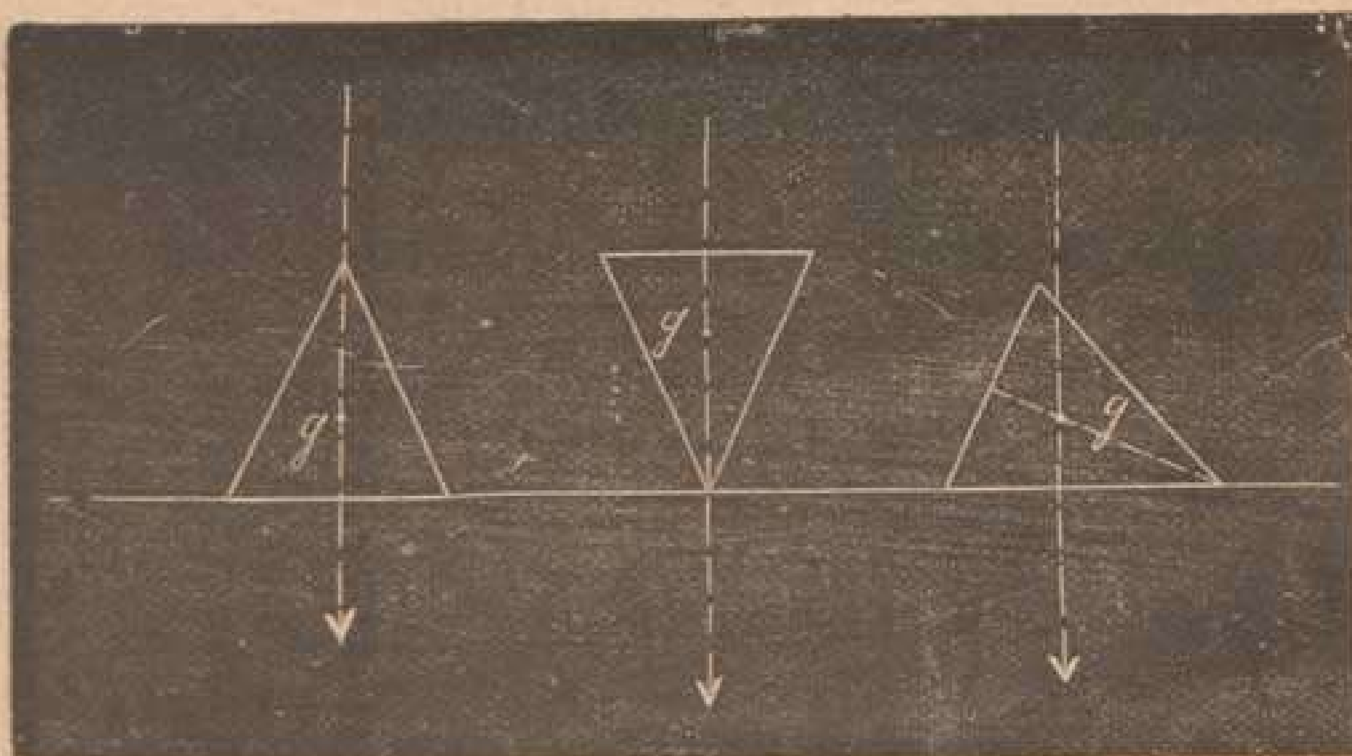

Figura 21.

do caso es difícil de realizar, siendo casi imposible colocar el cuerpo con precisión en la posición de equilibrio, y abandonarle en ella sin comunicarle alguna pequeña cantidad de movimiento. La vertical del punto g sale fuera de la pequeña base de sustentación y no estando neutralizado el peso del cuerpo, este cae inevitablemente adoptando la tercera posición.

En las torres de Zaragoza, Pisa y Bolonia, inclinadas las tres, el equilibrio existe á pesar de su inclinación, porque la vertical del centro grave corta á la base de cimentación.

La estabilidad de los edificios y obras de fábrica en general, los arriesgados ejercicios de los equilibristas y funámbulos, los medios para evitar los vuelcos de los vehículos, y otros muchos casos de esta índole se fundan en la teoría expuesta.

El instinto enseña á los animales á adaptar sus movimientos y actitudes á la posición del centro de gravedad. En el hombre, se obtiene la posición más estable cuando está echado, porque dicho centro situado en el interior de la pelvis, se encuentra lo más bajo posible y la base de apoyo es también muy grande; si está de pié, la vertical del centro grave ha de pasar por el trapecio formado por los dos piés; y si está sentado, no puede levantarse sin inclinarse hácia adelante ó retirar hácia atrás los piés.

LECCIÓN X.

Idea general de las máquinas. Su definición y clasificación. Ecuación de equilibrio. Principio de las velocidades virtuales. Teoria de la palanca. Balanza romana.

48. Nociones preliminares.—Las máquinas son instrumentos que *trasmiten* la acción de las fuerzas; en el fondo son cuerpos sujetos de alguna manera en sus movimientos, de tal suerte dispuestos, que una fuerza pequeña equilibre otra mayor; lo cual se consigue aplicando aquellas de modo, que la resultante pase por el punto de apoyo, cuya consistencia indefinida, permite variadas combinaciones entre las componentes.

A toda máquina se aplican tres clases de fuerzas: 1.ª la fuerza motora ó *potencia*, que da el impulso necesario para obtener el efecto deseado; 2.º la fuerza que resiste ó *resistencia* que deseamos vencer: 3.º *el punto ó puntos de apoyo* cuya firmeza se opone á los esfuerzos de las anteriores.

No podemos hacer un estudio completo de las máquinas en los primeros capítulos de esta obra, sin haber estudiado el trabajo de las fuerzas. Además el estudio práctico de los motores es complicado y propio solamente de la Mecánica industrial; los cuerpos que constituyen la maquinaria son por lo general sólidos pesados, originando al moverse rozamientos y resistencias pasivas, los cuales unidos al peso de la máquina complican más las cuestiones de esta índole. Prescindiendo forzosamente de estas complicaciones, reduciremos los órganos ó piezas de las máquinas á líneas ó superficies, estableciendo entre la potencia y resistencia representadas por rectas, las relaciones algébricas que nuestros conocimientos permiten.

49. Clasificación.—Dividiremos las máquinas en *simples y compuestas;* entendemos por máquina simple la formada por un solo cuerpo, y compuesta cuando la constituyen varios cuerpos enlazados entre sí.

La Mecánica estudia como máquinas simples, las siguientes: *palanca, polea, torno, plano inclinado, tornillo y cuña;* algunos añaden la *cuerda,* intermedio flexible que cuando está tirante, trasmite fuerzas. En la naturaleza del punto de apoyo, se funda una clasificación de las máquinas simples en tres grupos: palanca y polea que se apoyan en un *punto;* torno que se apoya en una *recta;* plano, tornillo y cuña que se apoyan en una *superficie.*

50. Ecuación de equilibrio.—El objeto primordial de las máquinas no suele ser utilizar una fuerza para equilibrar otra, dejando el sistema en equilibrio, sino conseguir una modificación del movimiento que se obtendría aplicando directamente la potencia motriz á la resistencia, modificación que afecta á la clase de movimiento, á su dirección y á su velocidad; pero estableciendo en estas lecciones las condiciones de equilibrio, en una máquina dada, nos encontramos en aptitud de mover el sistema fácilmente, aplicando una pequeña impulsión.

Consideradas, pues, las máquinas estáticamente, estableceremos la *ecuación de equilibrio,* igualando los momentos de la potencia y de la resistencia, que forzosamente han de ser iguales y de signo contrario si la resultante queda anulada por la consistencia del punto de apoyo elegido como centro de momentos.

51. Principio de las velocidades virtuales.—Se enuncia diciendo que en toda máquina: *se pierde en velocidad lo que se gana en fuerza* y se demuestra fundándose en la igualdad existente entre el trabajo de la potencia y el de la resistencia. Más adelante ampliaremos estas nociones, bastando para nuestro objeto establecer ahora de un modo provisional el concepto del trabajo mecánico de una fuerza; este es el producto de la intensidad de la fuerza por el camino que recorre el punto de aplicación, medido en la dirección de la fuerza; de modo que, llamando e, e', los caminos recorridos por los puntos materiales á que se aplican las fuerzas P, R, estableceremos la igualdad de trabajos $P \times e = R \times e'$; la cual nos explica cómo una fuerza pequeña P equilibra otra mayor R, recorriendo en cambio mayor espacio, ó sea ganando en fuerza lo perdido en camino recorrido.

Este principio en unión de la teoría de momentos, combate la preocupación vulgar atribuida á las máquinas, suponiendo en ellas la facultad de crear fuerzas. Las máquinas sólo utilizan de un modo favorable las fuerzas naturales, permitiendo aplicarlas á las resistencias que se desea vencer, de un modo más ventajoso, bajo el punto de vista mecánico y económico.

Figura 22.

52. Palanca.—Es una barra inflexible, recta, curva ó angular sujeta á girar sobre un punto fijo. La potencia y resistencia se aplican á dos puntos distintos de la barra; sean a y b dichos puntos (figs. 22 y 23) y P

y R las fuerzas; igualando los momentos de las componentes, estableceremos la ley de equilibrio $P \times n = R \times m$ ó sea $\frac{P}{R} = \frac{m}{n}$. Llamando *brazos de palanca* las distancias m y n, traduciremos dicha ley de este modo: *la potencia y resistencia están en razón inversa de sus brazos de palanca*. Puede enunciarse también la ley traduciendo literalmente las anteriores igualdades. El equilibrio exije además que las dos fuerzas estén situadas en un plano, como se desprende de las consideraciones anteriores.

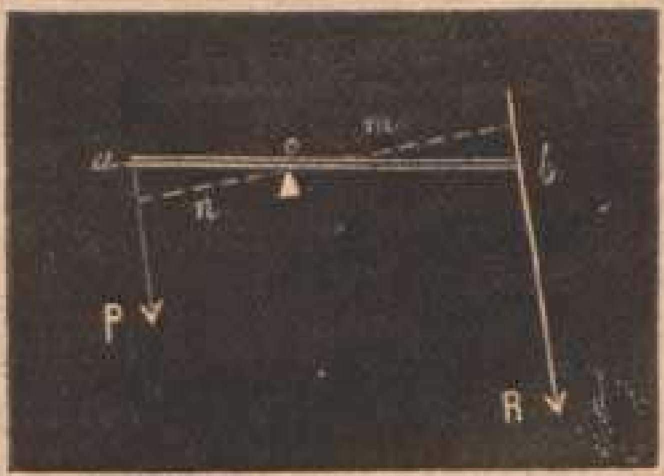

Figura 23.

La palanca puede ser de tres clases ó géneros: de primer género, cuando el punto de apoyo está entre los de aplicación de la potencia y resistencia, como sucede en las figs. 22 y 23. De segundo, cuando la resistencia se encuentra aplicada entre el punto fijo y la potencia (fig. 24); y de tercero, cuando la potencia se encuentra entre el punto fijo y la resistencia (fig. 25). En ambas se verifica la ecuación de equilibrio $P \times ao = R \times bo$, deducida de la teoría de momentos ó de la teoría de

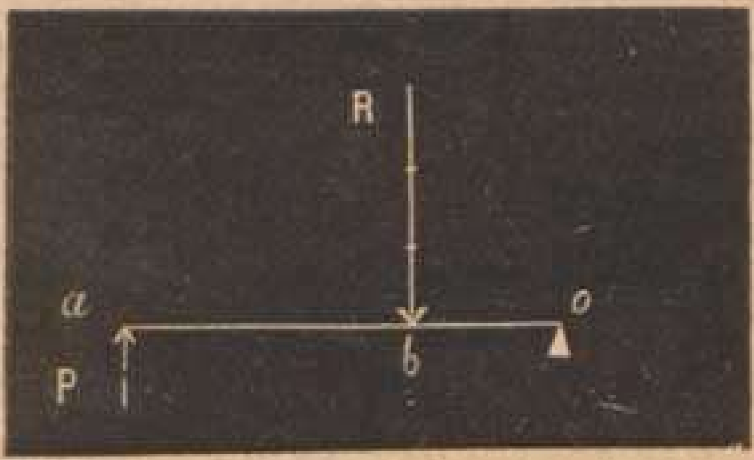

Figura 24.

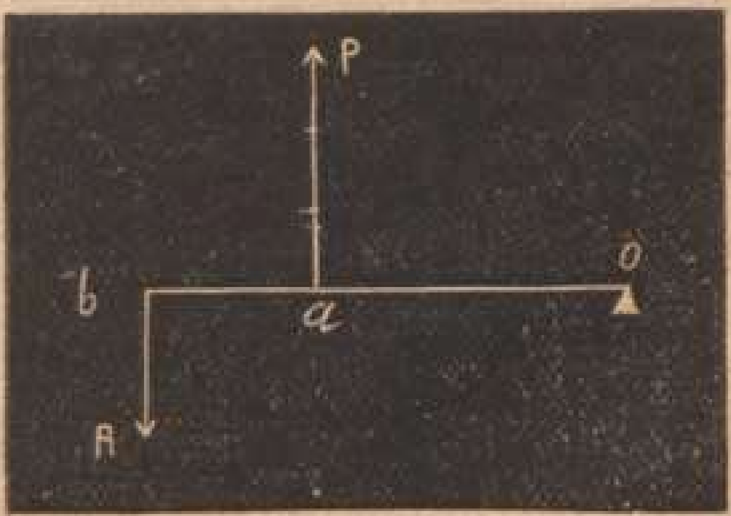

Figura 25.

fuerzas paralelas, pues cuando las fuerzas obran en sentido perpendicular á la barra, como sucede en este caso, los brazos de palanca n y m se convierten en porciones de la misma barra *ao* y *bo*.

De la ley de equilibrio se deduce, que para favorecer la potencia, es decir, para que disminuya P, hay que aumentar el brazo de palanca de la potencia ó disminuir el de la resistencia, ó hacer ambas cosas á la par como se verifica en la práctica de este útil. De modo que en las palancas de primer género fácilmente puede favorecerse la potencia, en las de segundo estará siempre favorecida, y en las de tercero siempre perjudicada.

La resultante g (fig. 22) aplicada en el punto de apoyo representa la carga que sufre dicho punto.

En la maquinaria en general y en las distintas operaciones de la vida, usamos palancas de todos géneros: las barras que manejan los obreros para mover y levantar cuerpos pesados, las tijeras, los zapapicos, pedales, teclas, etc., son palancas de primer género; las carretillas de trasporte con ruedas, los remos, etc., son de segundo; las pinzas, las extremidades del hombre y de los animales son de tercero. Así se explica la rapidez de nuestros movimientos, pues lo que se pierde en fuerza, se gana en velocidad.

53. Balanza romana.—La balanza ordinaria, aparato que se usa para encontrar el peso relativo de los cuerpos, es una palanca de primer género de brazos iguales; en la Física describiremos este instrumento y lo estudiaremos con la detención que merece.

También se usa con el mismo objeto la balanza romana, palanca de primer género de brazos desiguales; la potencia P es una pesa constante que resbala á lo largo del brazo mayor (fig. 26) y equilibra al cuerpo R cuyo peso se desea averiguar, cuando los momentos de P y R son iguales. En la ecuación de equilibrio $P \times n = R \times m$ tenemos las cantidades P y m constantes, luégo R viene dada en función de n, $R = \frac{P}{m} n$, creciendo R proporcionalmente á la distancia n; pero en vez de repetir este cálculo en cada pesada, se divide el brazo $o\,a$ en partes iguales, haciendo $R = 1... 2... 3...$ etcétera, de modo que sus divisiones distintas indican en cada caso valores de R en libras, onzas, kilógramos, etc.

Para pesar grandes masas y referir por lo tanto las divisiones del brazo $o\,a$ á unidades mayores, con una

Figura 26.

misma pesa P, conviene disminuir la longitud del brazo menor $o\,b$; así se verifica en la práctica llevando las romanas dos graduaciones para resistencias mayores ó menores, variando el gancho de suspensión y disminuyendo ó aumentando el brazo menor $o\,b$.

Hemos prescindido en el cálculo anterior del peso de la barra y colocado por lo tanto en el punto de apoyo o, el cero de la graduación, y hemos supuesto que la barra está horizontal cuando no sostiene carga alguna; pero como no suceden las cosas de este modo en la práctica, el verdadero cero debe considerarse siempre á la derecha del punto o, para compensar con lo que disminuye m, la porción del peso R que se gasta en equilibrar el peso de la barra. Así las divisiones nunca empiezan con cero, pudiéndose calcular la posición de este.

LECCIÓN XI

Polea. Su división. Ley de equilibrio. Torno. Plano inclinado. Ley de equilibrio. Cuña. Tornillo. Tornillo micrométrico.

54. Polea.—Se compone de un cilindro de poca altura que puede girar al rededor de su eje, y lleva en la superficie curva una hendidura ó garganta, por la que pasa la cuerda á la cual se aplican la potencia y la resistencia. Se dividen las poleas en *fijas* y *móviles*, las primeras sólo adquieren el movimiento de rotación sobre su eje, y las segundas tienen dos movimientos el de rotación y el de traslación.

a. En la polea fija la potencia se halla aplicada en P, la resistencia en R y el punto de apoyo en el gancho de las armas ó abrazaderas que sostienen el eje de giro (fig. 27). Si trasladamos P y R á los puntos a y b donde realmente ejercen su acción y el punto de apoyo f al centro o proyección del eje, tendremos en el plano $a\ o\ b$ aplicadas las tres fuerzas que hemos visto en la palanca, y prescindiendo de los demás puntos del sólido que no influyen en el equilibrio, queda una palanca de

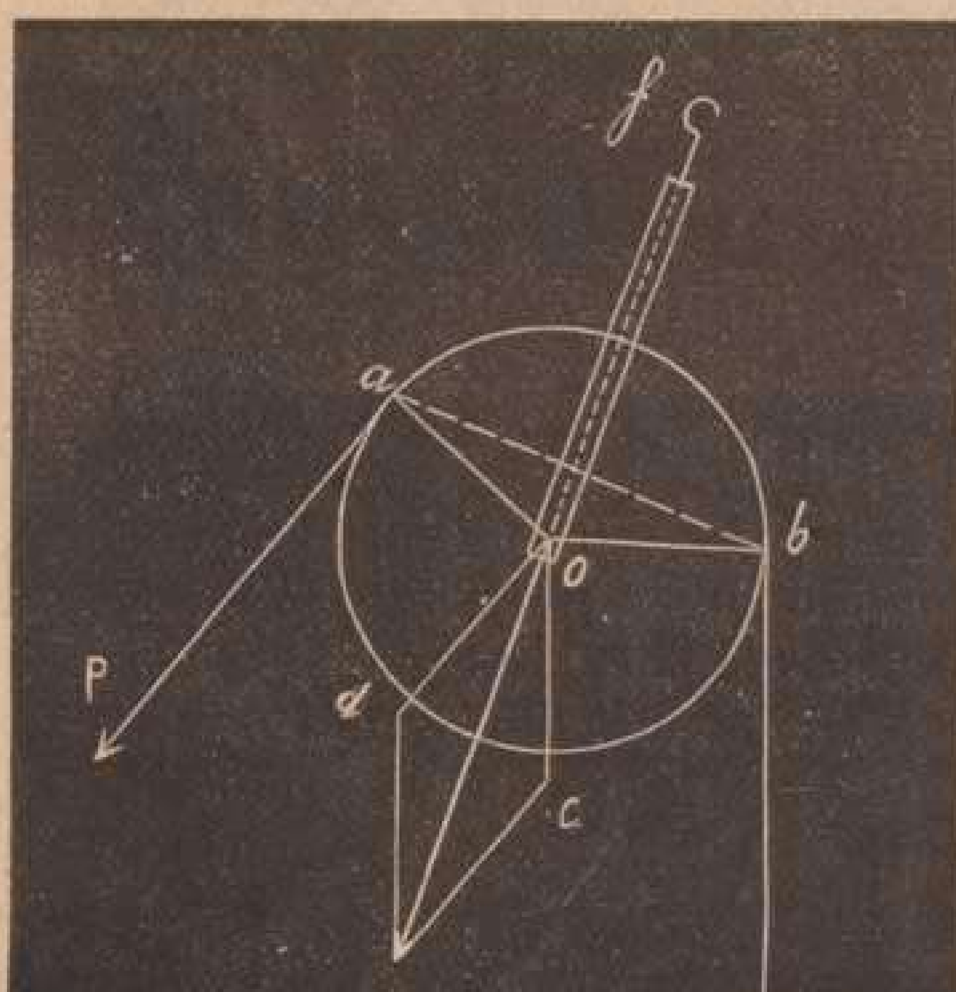

Figura 27.

primer género de brazos iguales, y la potencia por lo tanto igual á la resistencia. En esta máquina no se favorece la magnitud de la potencia, consiguiendo sólo aplicarla con más comodidad, variando la dirección del movimiento. La carga en el eje, como en la palanca será la resultante *o g* aplicada al mismo, componiendo la potencia y la resistencia trasladadas paralelamente á sí mismas al punto *o*.

b. En la polea móvil (fig. 28) la potencia se aplica

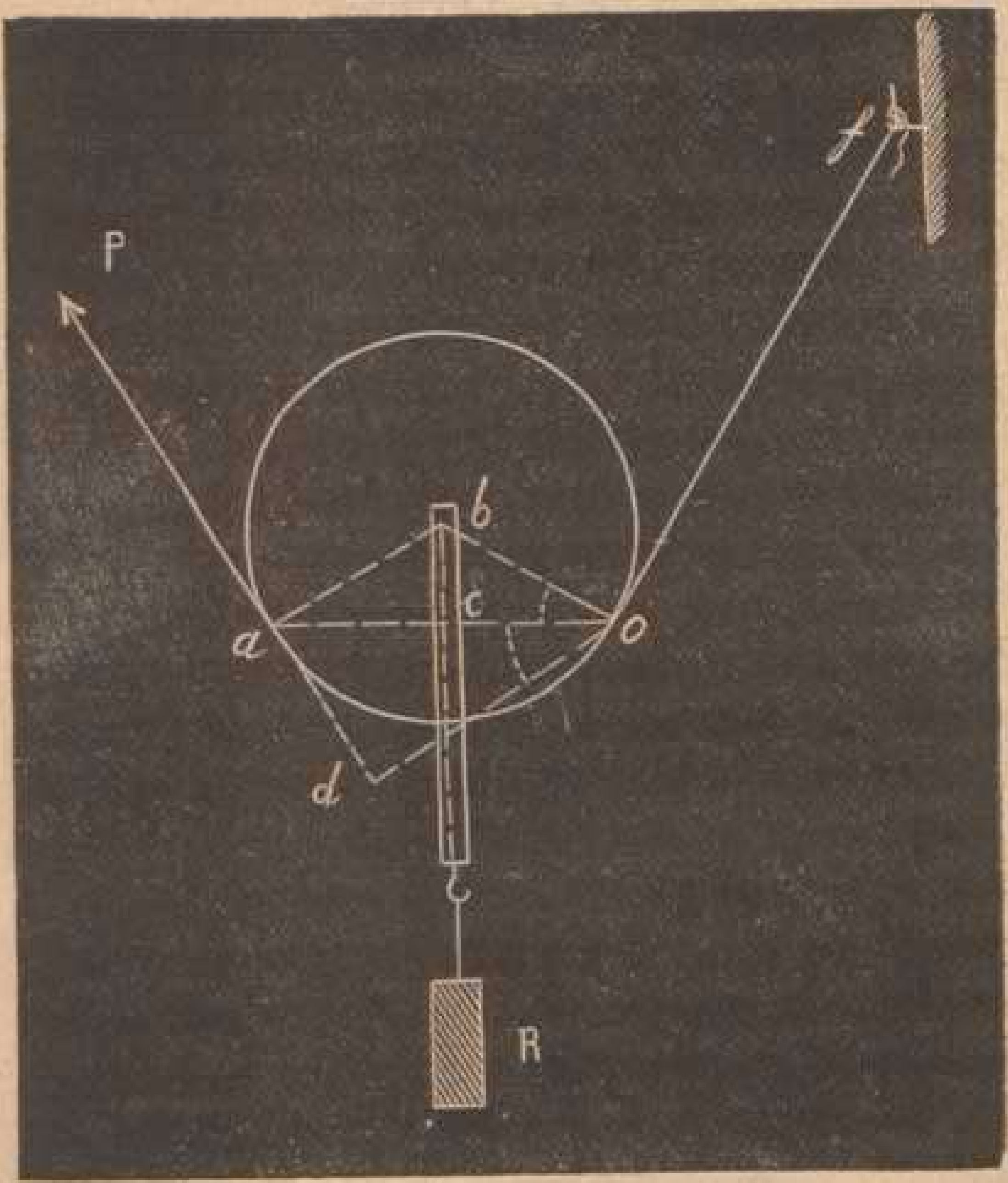

Figura 28.

en *P* al extremo del cordón, la resistencia cuelga del gancho de las armas y el punto de apoyo se encuentra en el otro extremo de la cuerda *f*; trasladando estas fuerzas á los puntos *a*, *b* y *o*, se convierte la polea en una palanca angular *a o b*, en la cual los brazos de la potencia y de la resistencia serán $o\,d$ y $o\,c$ respectivamente, y por lo tanto $\frac{P}{R} = \frac{o\,c}{o\,d}$. Pero como los triángulos $a\,d\,o$ y $b\,c\,o$ son semejantes, comparando lados homólogos nos dan $\frac{o\,c}{o\,d} = \frac{o\,b}{o\,a}$; luégo $\frac{P}{R} = \frac{o\,b}{o\,a}$ ó lo que es igual $\frac{P}{R} = \frac{r}{c}$ llamando r al rádio y c á la cuerda $o\,a$ que subtiende el arco abrazado por el cordón.

La potencia puede estar más ó ménos favorecida según la abertura de los cordones; cuanto el arco $a\,o$ sea una sexta parte de la circunferencia $a\,o = b o$ y $P = R$; cuando la cuerda ao sea un diámetro, los cordones serán paralelos y tendremos una palanca recta de segundo género, el rádio $b\,o$ vale la mitad de la cuerda convertida en diámetro y por consiguiente $\frac{P}{R} = \frac{1}{2}$, es decir, con una fuerza cualquiera P equilibraríamos teóricamente una fuerza R de doble magnitud, pues en la práctica P sería algo mayor para vencer los rozamientos del eje y del cordón.

En esta máquina como en la palanca, es fácil comprobar el principio de las velocidades virtuales, pues si $P = \frac{R}{2}$ en cambio el camino recorrido por la potencia es doble que el recorrido por la resistencia.

55. Torno.—Esta máquina consiste (fig. 29) en un cilindro de madera ó de metal que gira sobre su eje por medio de palancas, ruedas ó manubrio, etc., á cuyos órganos se aplica la potencia en un plano perpendicular al eje; la resistencia cuelga de una cuerda arrollada al cilindro. Sin alterar el equilibrio podemos trasladar las fuerzas P y R á los puntos a y b en la proyección del plano en que aquellas actúan, y tendremos con el punto o de apoyo proyección del eje, una palanca $a\,o\,b$ cuya ley será $\frac{P}{R} = \frac{o\,b}{o\,a}$; es decir que la potencia es á la resistencia como el radio de la sección del cilindro es al radio de la rueda motora ó longitud del manubrio á quién se aplica la potencia. La misma ley hubiéramos obtenido, fundados en el principio de las velocidades virtuales, pues en una vuelta completa de la rueda

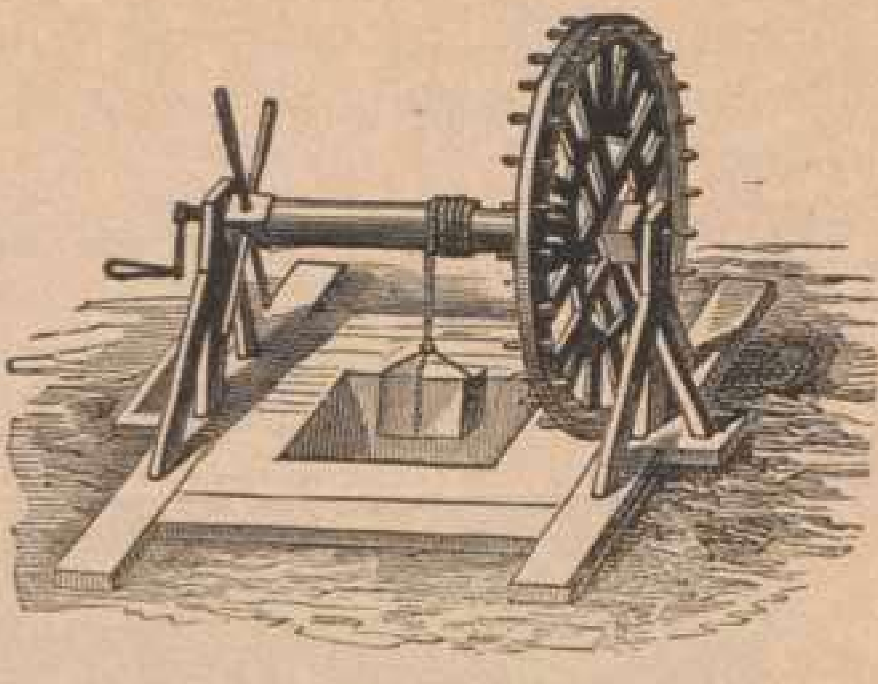

Figura 29.

y del cilindro los caminos recorridos por la potencia y resistencia son las circunferencias cuyos radios son los brazos de palanca $a\,o$ y $b\,o$.

Para mejorar la potencia en esta máquina, destinada á elevar pesos, conviene aumentar $a\,o$ á expensas de $o\,b$, pero sin exceder los límites prudenciales que prescriben el peso y el espacio en que se mueve la rueda y la delgadez del cilindro que eleva la resistencia. En este artefacto se cambian la velocidad y género de movimiento,

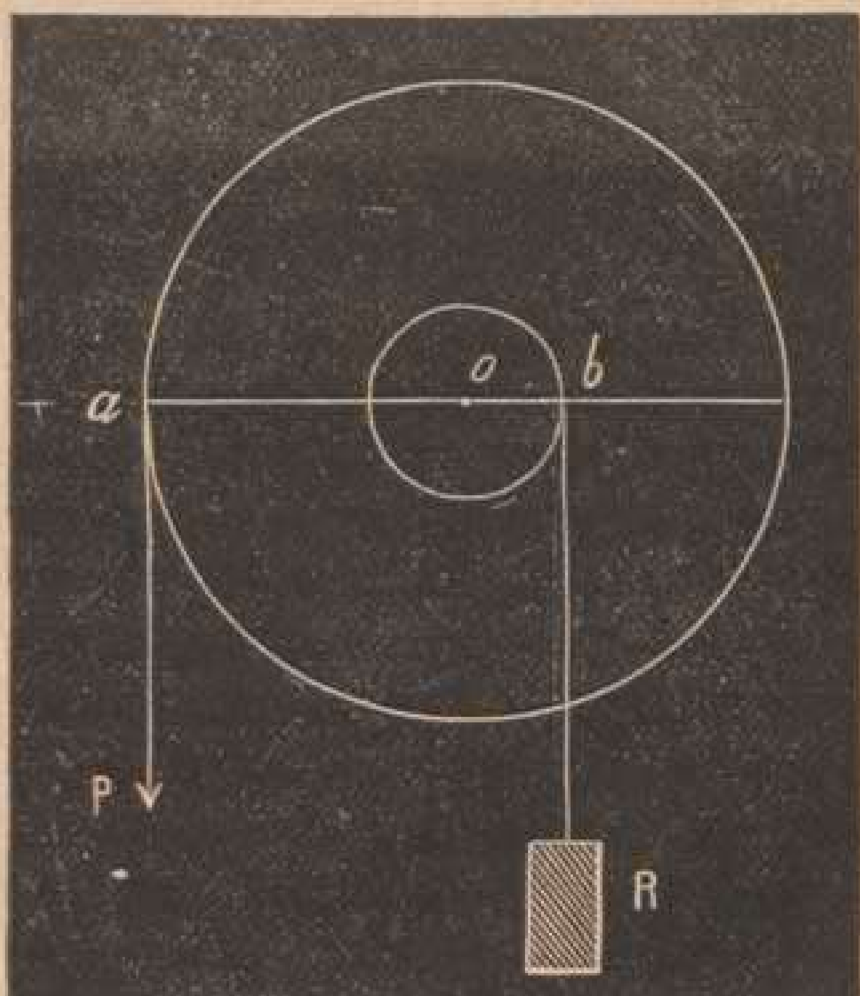

Figura 30.

rectilíneo para la resistencia y circular para la potencia.

Cuando el cilindro del torno es vertical, el aparato se llama cabrestante y se destina al arrastre de cuerpos pesados.

56. Plano inclinado.—Se llama así todo aquel que forma un ángulo agudo con un plano horizontal. Si tratamos de equilibrar un cuerpo cualquiera colocado sobre un plano inclinado, (fig. 31) es necesario que

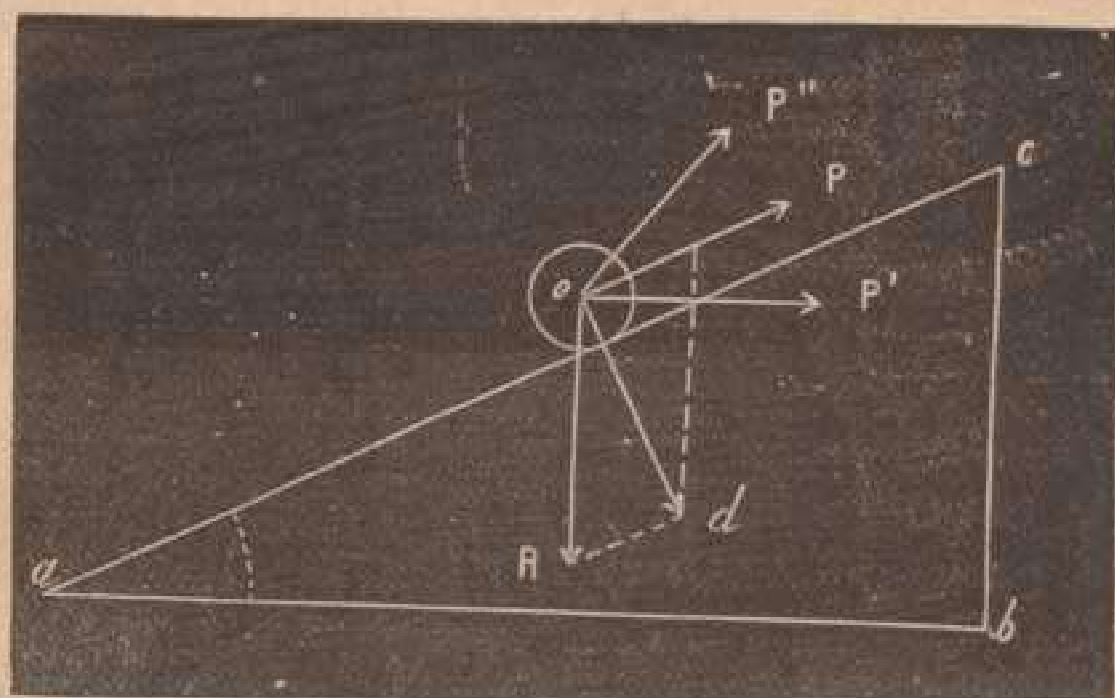

Figura 31.

la resultante de todas las fuerzas que obran sobre él, sea perpendicular al plano, para anularse con la resistencia indefinida de este. En efecto, suponiendo que la potencia tenga la dirección $o\ P$ y la resistencia ó peso del cuerpo sea $o\ R$, la resultante de ambas será $o\ d$. El triángulo de fuerzas $o\ d\ R$ nos permite establecer esta igualdad $\frac{d\ R}{o\ R} = \frac{sen.\ R\ o\ d}{sen.\ R\ d\ o}$ ó lo que es igual $\frac{P}{R} = \frac{sen.\ a}{sen.\ P\ o\ d}$.

De modo que, la relación existente entre la potencia y la resistencia es la misma que la existente entre el seno del ángulo indicador de la inclinación del plano y el seno del ángulo que forma la dirección de la potencia con la perpendicular al plano.

De esta ley general de equilibrio podemos pasar, discutiendo la expresión algébrica anterior, á la situación más favorable para la potencia. Siendo recto el ángulo $P\,o\,d$ su seno alcanza un valor máximo y entónces $\frac{P}{R} = sen.\ a$ ó sea $\frac{P}{R} = \frac{b\,c}{a\,c}$: es decir, potencia es á resistencia como la altura del plano es á su longitud.

Si la potencia obra en la dirección P', una descomposición de fuerzas análoga á la anterior nos daría $\frac{P}{R} = tg.\ a$ ó sea $\frac{P}{R} = \frac{b\,c}{b\,a}$: es decir, potencia es á resistencia como altura del plano es á la proyección horizontal de su longitud.

También se observa fácilmente la verificación del principio de las velocidades virtuales, pues miéntras la potencia recorre la longitud del plano, la resistencia asciende verticalmente la altura del mismo. Esta sencilla máquina se utiliza para la elevación de pesos, disminuyendo la altura del plano á expensas de su longitud, como se usa frecuentemente en las carreteras y vías férreas para salvar diferencias de nivel.

57. Cuña.—Esta máquina es un prisma triangular generalmente de metal; se introduce por una de sus aristas en el interior de un cuerpo que se trata de hender ó disgregar, ejerciéndose la potencia en la cara menor del prisma, llamada cabeza de la cuña. Las caras laterales se deslizan en el interior del sólido hendido, cual planos inclinados móviles, obrando normalmente á estos la resistencia molecular del cuerpo sujeto á su acción. Indicando $d\,e$ la magnitud de la potencia y descomponiéndola en las fuerzas $d\,f$ y $d\,g$ direcciones opuestas á las resistencias, el triángulo $a\,b\,c$ (fig. 32) es semejante al triángulo $d\,e\,g$ ó á su igual $d\,f\,e$, de modo que podemos escribir $d\,e : d\,g : e\,g :: a\,b : c\,b : c\,a$ ó sea: potencia es á la resistencia, como la cabeza de la cuña es á uno de los lados de la misma. Esta ley nos indica la necesidad de usar cuñas de ángulo agudo y cabeza pequeña para favorecer la potencia.

La industria saca partido de esta pequeña máquina para ejercer grandes esfuerzos en pequeño espacio. Todas las herramientas é instrumentos cortantes y punzantes, obran á manera de cuñas; también lo son el arado, las agujas, clavos, sierras, etc. Las ventajas de

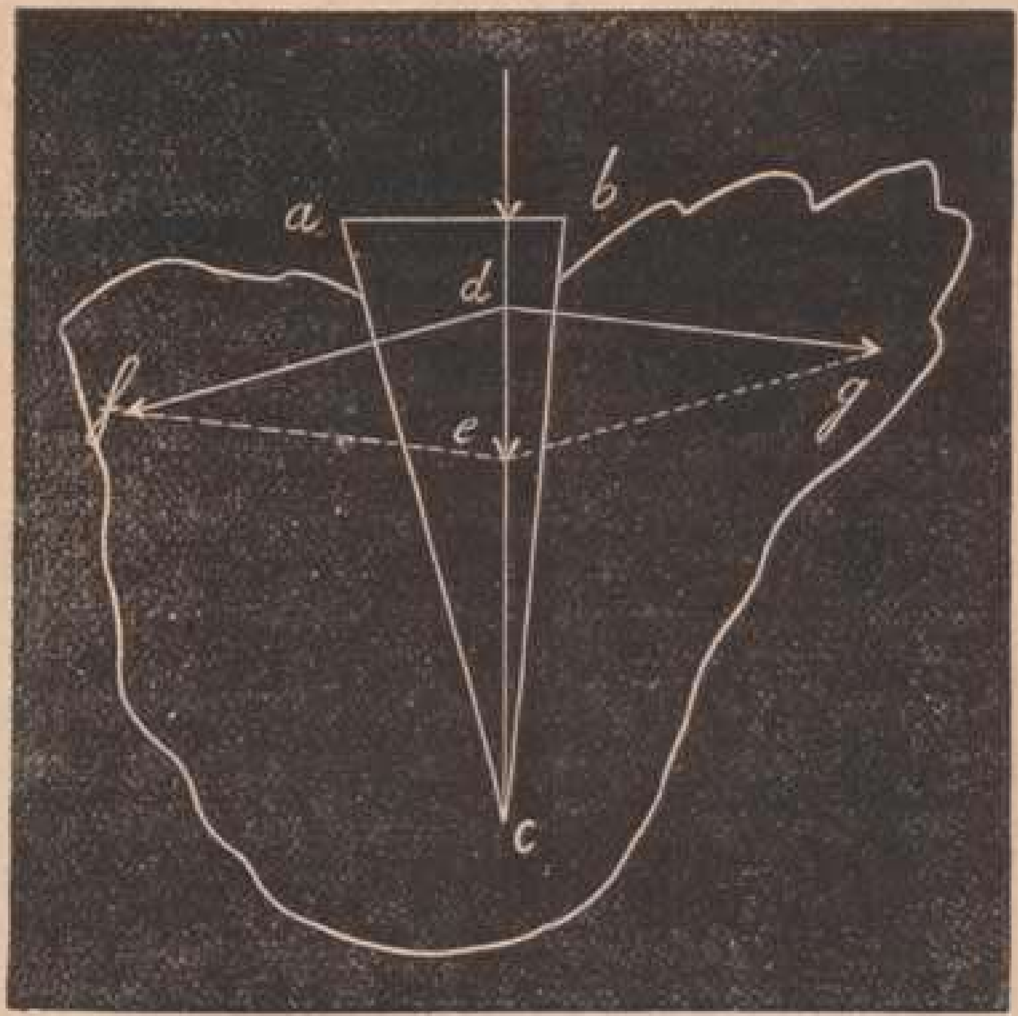

Figura 32.

la cuña dependen muchas veces del rozamiento originado entre ella y el cuerpo donde se introduce.

58. Tornillo.—Se llama así un cilindro al cual se arrolla en hélice por la superficie convexa, un filete triangular ó cuadrangular; va siempre unida esta máquina á otra pieza llamada hembra ó tuerca, sólido que lleva vaciada en hueco, una concavidad triangular ó cuadrangular donde engrana ó se aloja exactamente el filete saliente del tornillo.

Desarrollando en un plano (fig. 33) la hélice del tornillo obtendremos el triángulo rectángulo *A B C* cuya hipotenusa *A C* engendró la hélice dando varias vueltas sobre el cilindro, arrollándose el cateto $B\ C$ circularmente.

Se llama paso del tornillo la distancia constante entre dos puntos del filete helizcidal, medida sobre una generatriz del cilindro.

Suponiendo que á un punto cualquiera de la hélice se aplica para sostenerle una fuerza P actuando horizontalmente y tangente á la superficie cilíndrica, y obrando la resistencia R verticalmente en dicho punto para avanzar el tornillo, estando fija la tuerca, se encuentra este punto en las mismas condiciones que si estuviera colocado en un plano inclinado. Pero es más

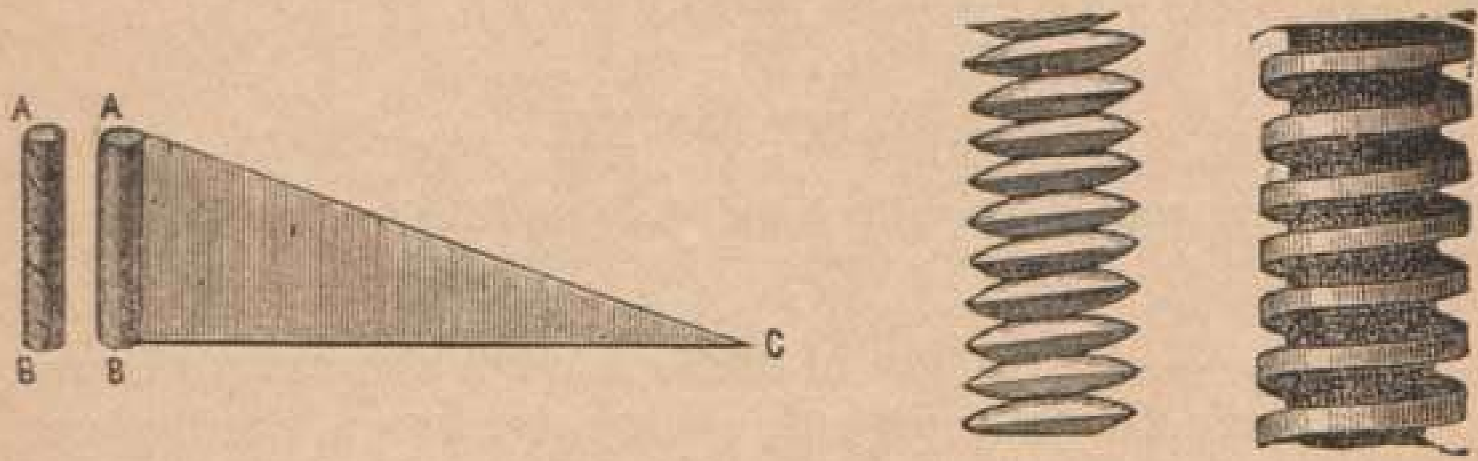

Figura 33.

sencillo obtener la ley de equilibrio del principio de las velocidades virtuales, pues miéntras la potencia recorre la circunferencia de la base ó da una vuelta completa, el tornillo moviéndose avanza una longitud igual al paso de la hélice, luégo $P : R :: paso : 2\,\pi\,r$. Algunas veces el tornillo ó la tuerca, según se mueva uno ú otro, lleva añadida una palanca para aumentar el brazo de la potencia y entónces favoreciéndose esta, resulta la siguiente ley: $P : R :: paso : 2\,\pi\,l$, siendo l la longitud de la palanca.

59.—Utilízase esta máquina para ejercer grandes presiones con poca fuerza, siendo numerosas sus aplicaciones. Entre ellas merece llamar nuestra atención *el tornillo micrométrico*, aparato que mide pequeños espesores ó movimientos rectilíneos. Para ello se usa un tornillo cuyo paso sea pequeño, por ejemplo, un milímetro, de modo que en cada vuelta completa de este sobre una tuerca fija, avanza dicha longitud. Lleva en su extremo una cabeza circular dividida en cien ó mil partes iguales lo cual permite medir avances de $\frac{1}{100}$ ó $\frac{1}{1000}$ de milímetro; estableciendo un punto de partida sobre una regla fija graduada se mide fácilmente la rotación de la cabeza, y las divisiones que han pasado por dicha regla dan las fracciones de milímetro que el tornillo avanzó, procedimiento útil y exacto para apreciar pequeñísimas longitudes.

LECCIÓN XII.

Máquinas compuestas. Ley general de equilibrio. Combinaciones de palancas, poleas y tornos.

60.—Decimos que una máquina es compuesta cuando la constituyen un conjunto mecánico de máquinas simples, ó sean diversos sólidos de tal modo enlazados, que la fuerza ó movimiento aplicado á uno de ellos se trasmita á los demás. Su número es indefinido por serlo también el de las combinaciones que pueden hacerse con las máquinas simples.

En las máquinas compuestas se distinguen tres partes principales: el *receptor* pieza sobre la que actúa directamente el motor ó agente natural; el *operador ó herramienta* pieza que realmente ejecuta el trabajo de la máquina; los *órganos trasmisores* piezas que enlazan el primero con el segundo. Generalmente suelen ser palancas, cuerdas sin fin, ruedas dentadas á guisa de tornos, etc. Además suelen tener las máquinas de alguna importancia, *un regulador* encargado de uniformar el movimiento, entre los cuales pueden citarse como tipos los volantes ó ruedas grandes adaptadas á los árboles ó el péndulo doble cónico característico en las máquinas de vapor fijas. Como ejemplo práctico distinguiremos en un molino hidráulico, la rueda que recibe el salto de agua como receptor, las muelas que descortezan y trituran el grano como operador y las demás partes como órganos trasmisores.

La necesidad de las máquinas compuestas es evidente, pues con sólo las simples que conocemos, quedaba muy restrinjida la Mecánica aplicada y no podía satisfacer las múltiples necesidades de la industria y de las artes. Ocurre con frecuencia equilibrar grandes resistencias con pequeñas fuerzas, y en las máquinas simples, si bién es fácil conseguirlo teóricamente haciendo recorrer á la potencia grandes espacios, en la práctica no conviene hacerlo así, porque resultarían aparatos de grandes dimensiones, y por lo tanto masas pesadas difíciles de mover y costosas de adquirir y manejar. Con las máquinas compuestas distribuimos la resistencia final entre varios puntos de apoyo y trasmitimos la potencia en distintas direcciones con engranaje de ruedas y correas, excéntricas, etc., con todos los cambios de movimiento apetecibles para el objeto deseado.

61. Ley general de equilibrio.—Para investigar la ecuación de equilibrio en una máquina compuesta, observaremos, que para la ventajosa trasmisión de los esfuerzos, cada órgano resiste al anterior en su dependencia correlativa y por la tanto en cada máquina simple de las agrupadas la *resistencia* de cada una debe ser *potencia* de la siguiente en el órden mecánico de enlace. Por lo tanto plantearemos tantas leyes de equilibrio como máquinas simples haya en el conjunto, expresándolas en lenguaje algébrico bajo la forma de igualdades y multiplicándolas ordenadamente obtendremos despues de la simplificación la ecuación general de equilibrio buscada.

También podemos, con mayor facilidad en muchos casos, obtener la ecuación general de equilibrio, aplicando el principio de las velocidades virtuales, midiendo los espacios recorridos por la potencia inicial y por la resistencia final. La relación numérica entre ambos espacios nos da la existente entre la potencia y resistencia, con mayor veracidad á causa de apreciar de esta manera las resistencias pasivas.

62. Báscula.—Este aparato tan usado en las oficinas de transporte es una combinación de dos palancas; se compone de una plataforma móvil que puede ascender ó descender sin dejar de ser horizontal, una palanca sobre la que se apoya, la enlaza á otra palanca que lleva un platillo destinado á sostener pesas graduadas. Un peso R colocado en la plataforma la hace bajar ó recorrer un pequeño espacio e' y el platillo recibe un impulso en sentido contrario que le hace recorrer un espacio mayor e, estableciéndose el equilibrio con una pesa ó potencia P; podemos pues plantear la ecuación $P \times e = R \times e'$ y el peso R que buscamos será $\frac{e}{e'} P$ es decir el valor de la pesa conocida multiplicada por la relación abstracta $\frac{e}{e'}$ constante para un mismo aparato.

63. Combinaciones de poleas.—Son varias y se conocen con el nombre de tróculas, polipastros, motones, aparejos, etc. Podemos marcar dos clases: una formada solamente por poleas móviles; otra constituida por poleas móviles y fijas divididas en grupos iguales.

a. En la primera clase se estudia siempre en los tratados de Mecánica una combinación formada por varias poleas móviles apoyadas cada una en un punto fijo, como indica el grabado del márgen (fig. 34). Las tensiones t t', etc., que la potencia trasmite á todas las poleas se convierte alternativamente en potencia y resistencia intermedia, y estableceremos una ley de equilibrio para cada polea móvil, pues la fija únicamente influye en la dirección del esfuerzo. En la polea n.° 1 tendremos $P : t :: 1 : 2$ en la inmediata n.° 2 escribiremos $t : t' :: 1 : 2$ y finalmente en la última n.° 3 $t' : R :: 1 : 2$ de donde $P : R :: 1 : 2^3$ ó sea que en un sistema tal de poleas la potencia es á la resistencia como la unidad es al número 2 elevado á la potencia cuyo exponente indica el número de poleas móviles.

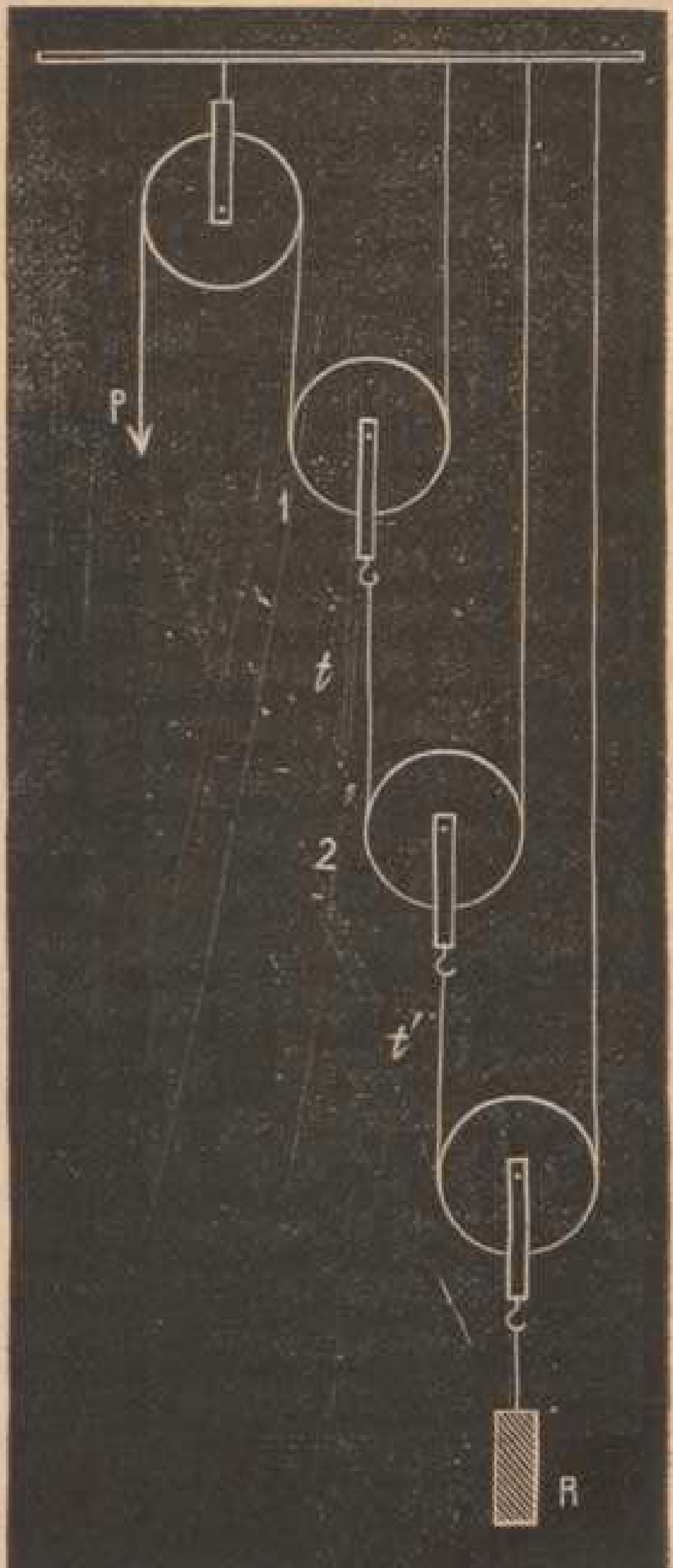

Figura 34.

Si los cordones no fuesen paralelos las proporciones anteriores serían las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} P : t :: r : c \\ t : t' :: r' : c' \\ t' : R :: r'' : c'' \end{array}\right\} P : R :: r.r'.r'' : c.c'.c''$$

ó lo que es lo mismo: potencia es á resistencia como el producto de los radios de las poleas es al producto de las cuerdas que subtienden los cordones.

b. En la segunda clase distinguiremos dos aparatos: en uno de ellos las poleas están todas en un plano (figura 35) con una armadura común; la resistencia pende de la armadura inferior donde se apoyan las poleas móviles; la cuerda fija en el extremo de la otra armadura se arrolla alternativamente ya en una móvil, ya en una fija hasta pasar por todas las poleas. La ley general de equilibrio se obtiene fácilmente en los dos aparatos del margen observando que la resistencia se reparte por igual entre los cordones que sostienen las poleas móviles, poseyendo todos igual tensión producida por la potencia aplicada en el extremo de la cuerda; luego $P = \frac{R}{6}$ en el caso que nos ocupa.

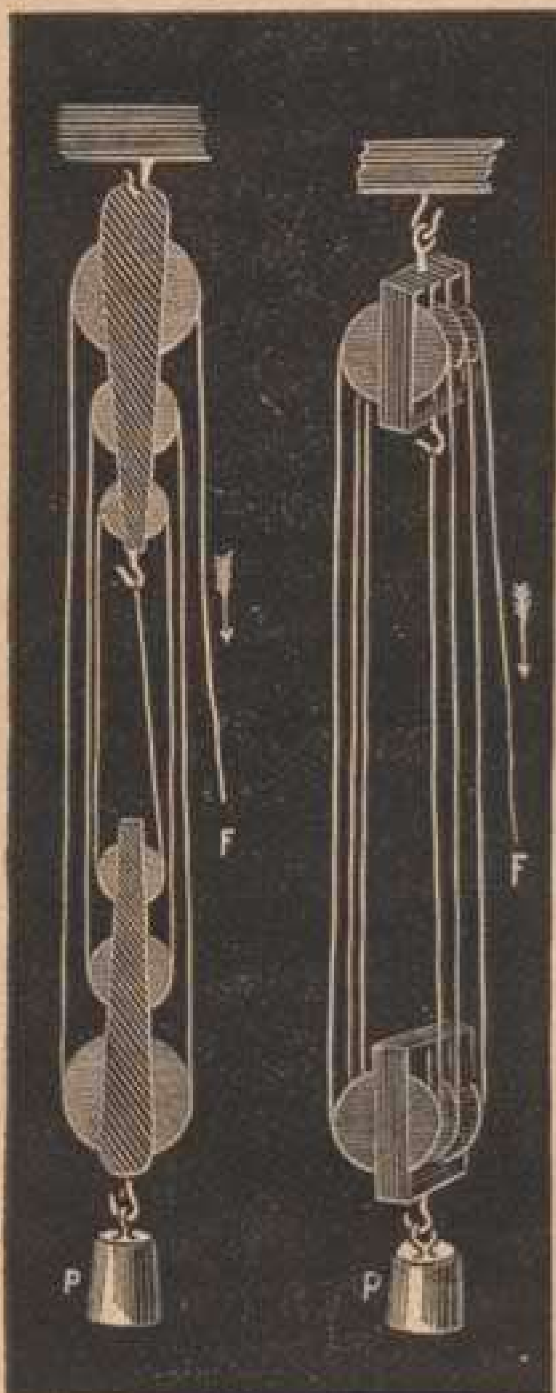

Figura 35.

Ambos sistemas se usan para elevar pesos ó producir fuertes tensiones; el primero ocupa más espacio que el segundo pero en éste pueden enredarse los cordones con más facilidad.

64. Los tornos ofrecen combinaciones muy útiles en la maquinaria, enlazando la rueda grande de uno con el cilindro del anterior, de manera que se trasmita el movimiento con el roce; la rueda grande del segundo gira en sentido contrario de la del primero, la del tercero gira en sentido contrario de la del segundo y así sucesivamente. Para enlazar los tornos con más ventaja, se construyen dentadas las ruedas grandes y también los cilindros, los cuales siendo más pequeños para ocupar ménos espacio, se llaman piñones. Estos engranajes trasmiten el movimiento de un árbol á otro, ya sean ó no paralelos; en el primer caso la llanta de la rueda dentada es una superficie cilíndrica, y en el segundo es cónica. Como tipo acabado de estas máquinas pueden citarse los relojes y los tornos compuestos de las gruas ó cabrias perfeccionadas.

La ecuación general de equilibrio se establece fácilmente para un número cualquiera de tornos de esta manera: potencia es á resistencia como $r \times r' \times r''$...: $R \times R' \times R''$.....—ó sea como el producto de los radios de los piñones es al producto de los radios de las ruedas.

65 Correa sin fin.—Para trasmitir el movimiento de rotación de un árbol ó eje á otro paralelo algo distante, se usa en vez de ruedas dentadas una correa sin fin abrazando dos tambores fijos cada uno en los árboles respectivos. En virtud de la tensión de la cuerda tangente á las dos circunferencias, el tambor ó cilindro mayor determina la rotación del menor siendo las velocidades inversamente proporcionales á los radios. Lo mismo sucedería si las ruedas estuvieran en contacto inmediato, fueren ó no dentadas. Esta combinación se usa mucho en las fábricas en las que la fuerza motriz produce la rotación de un árbol horizontal, y este por medio de varios tambores comunica su movimiento á otros árboles que mueven distintos útiles ó herrámientas por medio de correas sin fin.

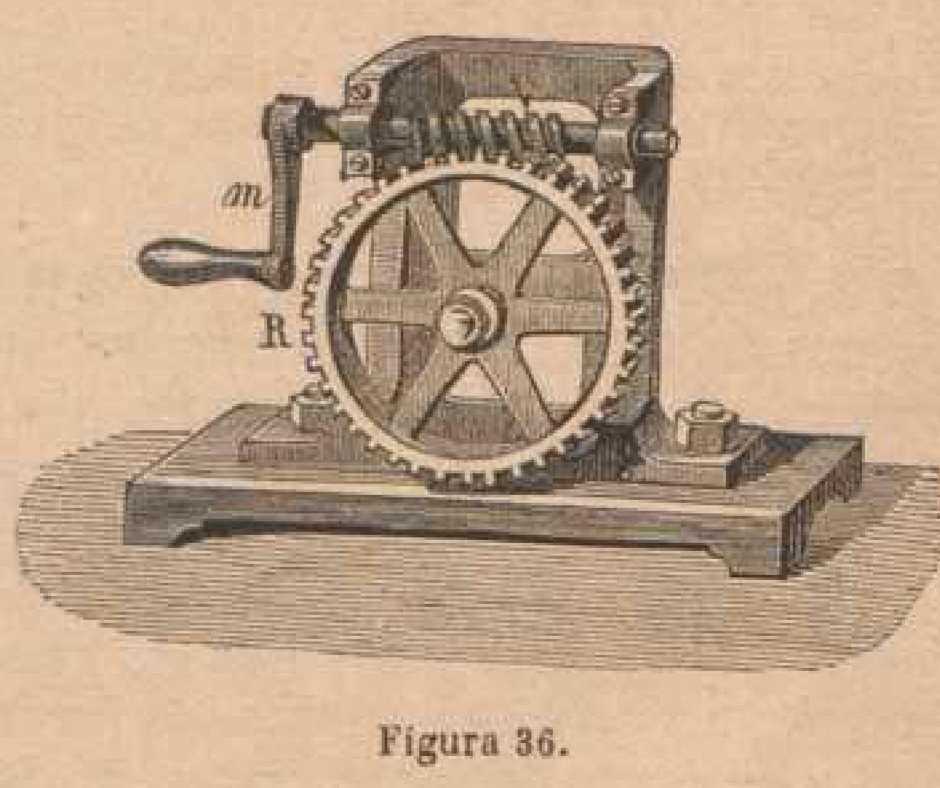

Figura 36.

66. Tornillo sin fin.—Según se ve en la figura del márgen, consta de un tornillo que gira al rededor de su eje sin avanzar en el sentido de su longitud, y cuyo filete engrana con una rueda dentada que funciona como fuerza indefinida, dejando pasar un diente á cada vuelta completa de una espira, obteniéndose una trasmisión de rotaciones en planos perpendiculares. Llamando Q al esfuerzo común á la espira y al diente como resistencia en aquella y como potencia en este, combinando por vía de multiplicación la ley del tornillo y del torno, escribiremos

$$P : Q :: \text{paso} : 2\pi R'$$
$$Q : R :: r : R''$$

ó sea $P : R :: \text{paso} \times r : 2\pi R' \times R''$. Traducida al lenguaje vulgar nos dice: potencia es á resistencia como el producto del paso del tornillo y radio de la sección recta del cilindro del torno es al producto de la circunferencia del tornillo por el radio de la rueda.

DINÁMICA

LECCIÓN XIII.

Principios fundamentales de la Dinámica. Movimiento rectilíneo de un punto. Movimiento curvilíneo. Fuerzas centrales. Leyes de la fuerza centrífuga.

67. Principios fundamentales.—La Estática nos dá las relaciones entre las intensidades y direcciones de las fuerzas aplicadas á un punto material, y las posiciones de este para obtener el equilibrio de dicho punto. Cuando las fuerzas aplicadas á un punto ó á un cuerpo material no se equilibran, el cuerpo se mueve; vamos pues á estudiar las condiciones del movimiento teniendo en cuenta las fuerzas que influyen en él y su modo de obrar. Tal es el objeto de la Dinámica.

Sus principios fundamentales son los mismos que hemos enunciado en la Estática, debidos á los sábios eminentes Keplero, Galileo y Newtón.

a. Al enunciar el primero llamado *Ley de inercia* establecimos el concepto que la ciencia moderna dá á las palabras inercia, resistencia, y materia, en relación íntima con la fuerza, concepto primordial y primario en el órden físico.

b. El principio de Galileo, afirmando la independencia de los efectos de las fuerzas, las unas con relación á las otras y todas respecto al movimiento del conjunto ó sistema material, así como nos ha permitido resolver los problemas de composición y descomposición de fuerzas, nos permitirá determinar también el movimiento adquirido por un punto material, sometido á la acción de una fuerza, y nos dará relaciones fijas entre la fuerza dada y sus efectos.

c. El principio de Newtón, estableciendo una igualdad constante entre la acción y la reacción, agrupa dos á dos todas las fuerzas de la Naturaleza; aplicándole á un cuerpo ó sistema de cuerpos podremos desde luego dividir las fuerzas que actúen sobre un sistema dado en *interiores y exteriores*, concepto notable que más adelante hemos de estudiar.

68. Movimiento rectilíneo de un punto.—Podemos clasificar las fuerzas atendiendo á su duración en *instantáneas* y *continuas*, pudiendo ser estas últimas *constantes* en su intensidad y dirección ó *variables*.

En virtud del principio de Keplero, obrando las fuerzas instantáneas en un tiempo pequeño, dejan el cuerpo abandonado á sí mismo, una vez iniciado el movimiento, y este, en tales condiciones originado, ha de ser forzosamente *rectilíneo* y *uniforme* siendo constante la razón entre los espacios y los tiempos $\frac{e}{t}=v$

Las fuerzas contínuas originan el movimiento variado, puesto que si consideramos dividido en segundos el tiempo durante el cual actúa la fuerza, la velocidad adquirida se conserva íntegra según el principio de Keplero para la segunda unidad de tiempo, y como según el principio de Galileo la fuerza actúa durante esta segunda unidad de tiempo como si el cuerpo hubiera permanecido en reposo, resultará animado al terminar, de una velocidad igual á la suma de las adquiridas en las dos unidades de tiempo. Repitiendo este razonamiento para toda lo duración del movimiento, si la fuerza es constante, lo es también el incremento de la velocidad en cada segundo, conforme con las leyes del movimiento uniformemente acelerado y la razón del incremento de la velocidad al tiempo es constante, de modo que siendo v_t la velocidad adquirida en t segundos, a la velocidad de orígen y w la aceleración, $\frac{v_t - a}{t} = w$, y si la velocidad inicial a es nula $\frac{v}{t} = w$.

69. Movimiento curvilíneo.—Si la velocidad inicial a debida á una fuerza instantánea, actúa en dirección distinta á la de la aceleración debida á una fuerza contínua, el punto móvil describe una curva parabólica como observamos en la fig. 6, en cuyo caso la fuerza contínua tiene una dirección constante. Esto sucede en los proyectiles cuya trayectoria es una parábola, estando sometidos aquellos á la expansión de los gases producidos por la combustión de la pólvora y á la fuerza de la gravedad.

Estudiaremos el movimiento circular uniforme, único caso particular de movimientos curvilíneos que merece nuestra atención. En él actúan sobre el punto material dos fuerzas, una según la dirección tangencial á la trayectoria en cada punto de la circunferencia y la otra según el radio de la misma; la primera se llama fuerza *centrífuga ó tangencial* y la segunda fuerza *cen-*

tripeta. Ambas se manifiestan con toda claridad en el movimiento circular impreso á una piedra colocada en la honda, ó atada á un hilo resistente; al recibir el cuerpo la impulsión si no estuviera sometido á fuerza alguna adquiriría un movimiento rectilíneo, pero la tensión de la cuerda tirante impide dicho movimiento, y actuando siempre en la dirección del radio, obliga al cuerpo á describir una circunferencia con movimiento uniforme. Resulta, pues, en este caso como en otros muchos, que las dos fuerzas *centrales* (así se llaman ambas) obrando en la dirección del radio se equilibran y siendo iguales y opuestas calcularemos una de ellas.

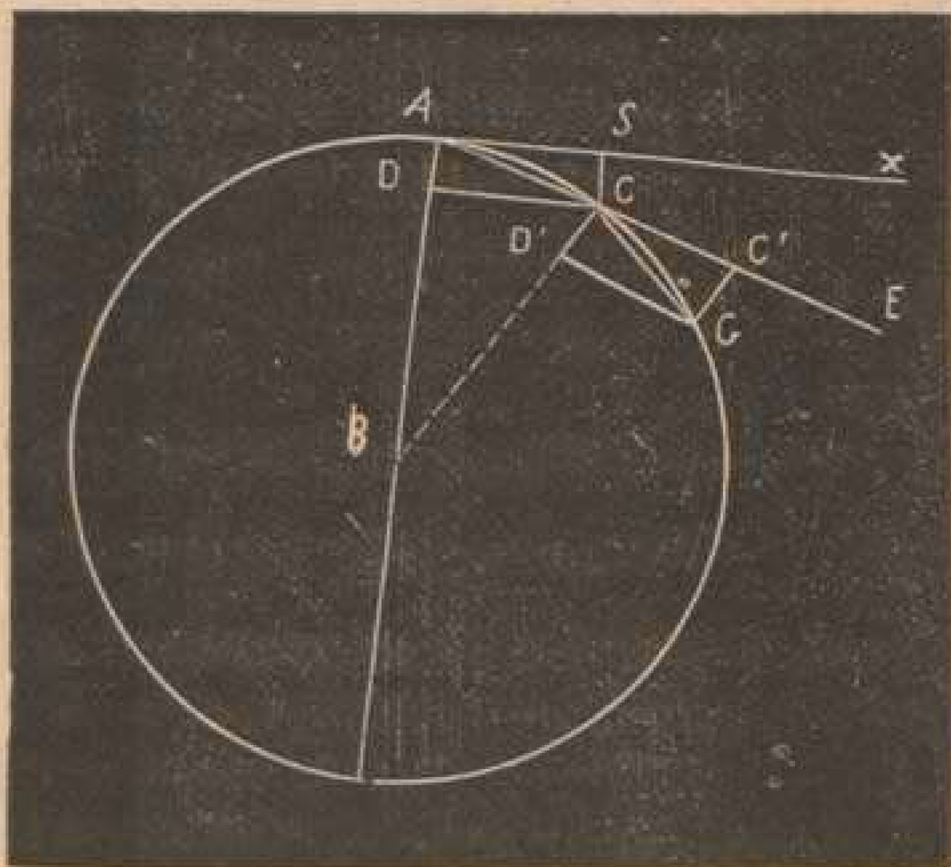

Figura 37.

Sea A el punto móvil (fig. 37) que recibe una impulsión $A\ S$ en el sentido $A\ X$, en el cual marcharía normalmente al radio en el momento de la impulsión, pero la tensión del hilo representada por $A\ D$ le obliga á recorrer la recta $A\ C$ en una unidad de tiempo, dirección resultante de la composición de ambos espacios $A\ S$ y $A\ D$. Actuando en C la tensión del hilo, el móvil no puede seguir la dirección $C\ E$ sino que combinándose esta impulsión con dicha tensión, los paralelógramos que en cada caso formaríamos, nos dan la trayectoria poligonal $A\ C\ G$ la cual se convierte en una circunferencia siendo continua y actuando en instantes infinitamente pequeños la tirantez del hilo. Llamando v la velocidad del movimiento uniforme y f la aceleración que poseería el punto A en el movimiento uniformemente acelerado que le impulsaría en la dirección $A\ B$ tendremos $A\ D = \frac{f\,t^2}{2}$. Un conocido teorema de Geometría nos dice: $A\ D = \frac{A\ C^2}{2\,r} = \frac{v^2\,t^2}{2\,r}$ de modo que $\frac{v^2\,t^2}{2\,r} = \frac{f\,t^2}{2}$ de donde $f = \frac{v^2}{r}$ valor de la aceleración normal para un punto material y para una masa $m'f = \frac{m\ v^2}{r}$.... n.° 11. Esta fórmula nos dice que la fuerza normal actúa en razón directa de la masa y del cuadrado de la velocidad y en razón inversa del radio de giro.

70. Aplicaciones.—La industria utiliza los efectos de la fuerza centrífuga en muchos aparatos como bombas, ventiladores, turbinas hidráulicas, etc., y otras veces los tiene en cuenta para evitarlos, como lo consigue en las vías férreas elevando en las curvas el carril exterior para contrarestar la impulsión centrífuga de un tren en movimiento.

La honda nos ofrece un curioso ejemplo del mecanismo de las fuerzas centrales: suelto el hilo que sujeta la piedra, es decir, cesando en aquel momento la fuerza centrípeta, no puede subsistir el movimiento circular y la fuerza centrífuga lanza la piedra en dirección de la tangente correspondiente al punto de la trayectoria considerado.

En los Gabinetes hay aparatos especiales para demostrar las leyes indicadas en la fórmula anterior y mostrar algunos ejemplos particulares, no nos detenemos en su descripción, pues basta verles para comprender su funcionamiento y el objeto final que persiguen.

Conviene estudiar también los efectos de la fuerza centrífuga en la rotación de los sólidos, particularmente en los cuerpos esféricos, los cuales si su consistencia no lo impide, se aplanan en los extremos del eje y aumentan de volúmen en el ecuador ó círculo de mayor radio. Mayor es la importancia de estas consideraciones al aplicarlas á los astros y en particular al planeta que habitamos. En cada punto de la superficie terrestre expresaremos el valor de la fuerza centrífuga, no en función de la velocidad angular variable en cada paralelo, sino en función del tiempo t empleado en cada revolución, igual para todos los puntos del esferoide. Como un punto cualquiera describe una circunferencia con movimiento uniforme, escribiremos $vt = 2\pi r$ y sustituyendo el valor $v = \frac{2\pi r}{t}$ en la expresión número 11 resultará $f = \frac{4\pi^2 r}{t^2} m$..... n.° 12, de modo que en cada punto de la Tierra la fuerza centrífuga es proporcional al radio de giro, el cual varía en cada paralelo, teniendo f su valor máximo en el ecuador y siendo nula en los polos donde $r = o$:

Todavía se complica más la cuestión si el sólido posee los dos movimientos de rotación y de traslación, es decir, si el eje no está fijo; en este caso cuyo estudio corresponde á la Mecánica superior, la experiencia nos enseña de acuerdo con el cálculo, que los sólidos tienden á conservar el paralelismo del eje, como se observa en el giroscopio de Foucault, en el peon ordinario y en todos los cuerpos colocados en análogas condiciones.

LECCIÓN XIV.

Medida de las fuerzas por sus efectos. Relación entre las fuerzas, las masas y las aceleraciones. Cantidad de movimiento. Masa. Trabajo de una fuerza. Su medida. Teorema de las fuerzas vivas.

71.—En lugar de medir las fuerzas por pesos, las evaluaremos por sus efectos; estos dependen siempre de la *masa* de los cuerpos sobre que actúan. Definen los físicos la masa por: *la cantidad de materia contenida en el cuerpo*, definición vaga porque esta cantidad desconocida en absoluto depende del número de elementos ó puntos materiales agrupados que constituyen el cuerpo. Para precisar este concepto parten los mecánicos de la idea de *masas iguales* deduciéndola de la idea de *fuerzas iguales* (párrafo 23 — *b*). Diremos, pues, que dos masas son iguales, cuando solicitadas por fuerzas contínuas iguales, adquieren aceleraciones iguales; reuniendo 2, 3..., m masas iguales adquiriremos la noción de masa dupla, triple... múltiple.

a. Establecidas las consideraciones anteriores, diremos, fundados en el principio de Galileo: *dos fuerzas continuas son entre sí, como las aceleraciones que imprimen á dos masas iguales*. Supongamos que dos fuerzas F, F', sean comensurables y sea F_1 su medida común, podremos escribir $F = n' F_1$, $F = n' F_1$. Sea W_1 la aceleración que la fuerza F_1 imprime á la masa dada; la fuerza $n F_1$ imprimirá á esta masa la aceleración $W = n W_1$ porque en virtud del citado principio cada una de las fuerzas F_1 actúa como si estuviese sola con independencia de las restantes. Del mismo modo la fuerza $n' F_1$ imprimirá la aceleración $W' = n' W_1$ á la misma masa, de modo que tenemos evidentemente

$$n F_1 : n' F_1 :: n W_1 : n' W_1$$

ó lo que es igual $F : F' :: W : W'$.

b. Diremos también: *dos fuerzas continuas son entre sí, como dos masas á las que imprimen aceleraciones iguales*. Supongamos también las dos fuerzas F, F', actuando sobre las masas M, M'; consideremos á la masa M constituida por la suma de n masas iguales m m..... sometidas á n fuerzas iguales á la medida común F_1, estas masas recibirán aceleraciones iguales y la masa total M poseerá una aceleración n F_1. Igualmente $M' = n' m$ recibirá una aceleración $n' F_1$ de modo que entre las masas M y M' hay la misma relación $\frac{n}{n'}$ que entre las fuerzas F y F' y escribiremos

$$n\,F_1 : n'F_1 : n\,m :: n'\,m$$

ó lo que es igual $F : F' :: M : M'$.

c. *Dos fuerzas continuas son entre sí, como los productos de las masas por las aceleraciones que les imprimen.* Sean también F, F', las dos fuerzas, M, M' las dos masas, W, W' las aceleraciones ó velocidades respectivas. Consideremos una tercera fuerza F_1 imprimiendo una velocidad W' á la masa M. Comparando primero las fuerzas F y F_1 según la proporción a y despues las fuerzas F_1 F' según la proporción b tendremos

$$F : F_1 :: W : W'$$

$$F_1 : F' :: M : M'$$

Multiplicando ordenadamente ambas proporciones resulta $\frac{F}{F'} = \frac{M\,W}{M'\,W'}$ como queríamos demostrar.

72. Cantidad de movimiento.—Suponiendo que F' y M' representen la unidad de fuerza y la unidad de masa, W' será forzosamente igual á 1 y entonces la igualdad última será $F = M\,W$... n.° 13, la cual traducida al lenguaje vulgar nos dice, que F contiene tantas veces la unidad de fuerza como unidades abstractas hay en el producto $M\,W$. Este producto se llama *cantidad de movimiento* y mide el impulso de la fuerza F en un segundo; en efecto, según el valor de la aceleración que conocemos $W = \frac{V}{T}$, sustituyéndole en la expresión (13) tendremos $F\,T = M\,V$... n.° 14. El primer miembro de esta igualdad expresa la acción de la fuerza F en T segundos, igual al producto de la masa M por la velocidad V adquirida en el tiempo T.

73. Masa.—Escribiendo de este modo la fórmula

(13) $\frac{F}{W} = M$ nos da la masa que podemos definir así: *la relación constante entre una fuerza contínua y la aceleración que produce.* Como una de las fuerzas que mejor conocemos es el peso de los cuerpos, ó sea la gravedad actuando sobre una masa m produciendo una aceleración que llamamos g, aplicando la fórmula (13) escribiremos $\frac{P}{g} = M$, llegando de este modo á la fórmula n.° 9 deducida ya en lecciones anteriores por otro orden de consideraciones. Esta expresión $\frac{P}{g}$ nos da un medio muy sencillo para conocer la masa de un cuerpo; como g vale 9,8 metros, el peso de la unidad de masa será 9,8 kilógramos, y la unidad de masa la contenida en un decímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4° centígrados.

74. Trabajo de una fuerza.—El efecto de una fuerza aplicada á un cuerpo es el movimiento de este; por lo tanto, el trabajo de una fuerza contínua en un tiempo dado, se representa por *el producto del espacio que recorre el punto de aplicación de la fuerza por la proyección de esta sobre dicho espacio.* Esta definición es general cualquiera que sea la dirección de la fuerza; si esta actúa oblicuamente á la dirección del movimiento obtenido, se podrá descomponer en dos: una componente normal á dicha dirección que no trabaja y otra componente eficaz en la misma dirección del movimiento. Así el trabajo de la fuerza $b\,c$ aplicada

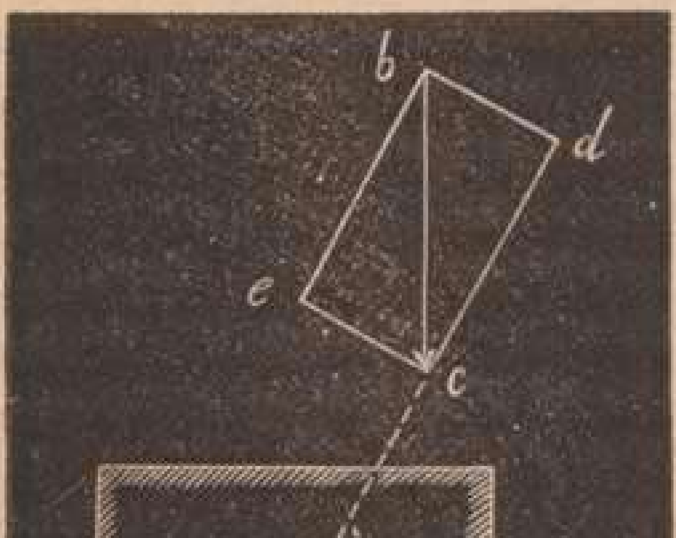

Figura 38.

al punto c (fig. 38) cuyo efecto es trasladar dicho punto á la nueva posición a, es el producto $cd \times ca$.

El trabajo es nulo: 1.° si la fuerza no actúa; 2.° si actúa normalmente á la dirección ca; 3.° si el punto de aplicación no se mueve. Así un hombre que sostiene un peso sin moverle, no produce trabajo mecánico; lo mismo sucede á un imán cuando sostiene una armadura. El ejemplo más exacto del trabajo lo encontramos en la elevación vertical de pesos; ya ampliaremos más adelante estas nociones, aplicándolas al trabajo de las máquinas y despues al trabajo interno que se verifica en todos los fenómenos físicos.

Midiendo la fuerza en kilógramos y el espacio recorrido en metros, eligiremos como unidad de trabajo, el esfuerzo necesario para elevar un kilógramo á la altura de un metro en un segundo; esta unidad se llama *kilográmetro*. Siendo muy pequeña para grandes fuerzas se acostumbra usar un múltiplo de esta llamado *caballo de vapor* equivalente á 75 kilográmetros. El uso de estas unidades permite comparar entre sí trabajos muy diversos, prescindiendo del procedimiento empleado y de la naturaleza de la obra obtenida. Dos obras pueden considerarse equivalentes bajo el punto de vista mecánico, cuando se invierte en producirlas la misma cantidad de trabajo,

Cuando la fuerza motriz actúa contínuamente por medio de una cuerda tirante, se mide fácilmente el trabajo en un tiempo dado, separando la cuerda en dos partes y uniéndolas por medio de un dinamómetro. Este aparato dá el esfuerzo en kilógramos y multiplicando el número de estos por el espacio recorrido en metros tendremos el trabajo en kilográmetros.

75. Teorema de las fuerzas vivas.—La fuerza viva mv^2 de un cuerpo m que adquiere una velocidad v á partir del reposo, es igual al duplo del trabajo realizado por la fuerza contínua qne le impulsa.

Considerando el movimiento uniformemente acelerado que se produce en el tiempo t como uniforme con la velocidad media $\frac{o+v}{2}$, el espacio recorrido sería $\frac{v}{2}\times t$ y siendo $\frac{mv}{t}$ la intensidad de la fuerza en la unidad de tiempo (medida por la cantidad de movimiento), el producto de ambos factores ó sea el trabajo T será $\frac{vt}{2}\times\frac{m\,v}{t}=\frac{mv^2}{2}$, de modo que según queríamos demostrar $m\,v^2=2\,T$..... n.° 15.

Este teorema, célebre por la discusión que promovió á principios del siglo XVIII acerca de las fuerzas vivas y las fuerzas muertas, tiene fecundas aplicaciones; nos explica los notables efectos producidos por los cuerpos en movimiento y la ventaja de aumentar la velocidad con preferencia á la masa para obtener efectos mecánicos de mayor intensidad. Razón tenía el gran Leibnitz al llamar *fuerza muerta* á la que actúa sobre un obstáculo fijo que no puede mover, y por lo tanto como $v=o$ el trabajo en este caso es nulo.

LECCIÓN XV.

Choque de los cuerpos. Su división. Estudio elemental del choque en los cuerpos poco elásticos. Choque de cuerpos elásticos. Pérdida de fuerza viva despues del choque. Comunicación del movimiento.

76.—Choque es la acción recíproca de dos cuerpos que se encuentran, lo cual sucede cuando ambos se mueven en la línea que une sus centros ó próximamente á la misma, y cuando uno está en reposo en la misma trayectoria que el otro recorre. Los efectos dinámicos del choque se calculan aplicando el principio de Newtón, sobre igualdad de acción y reacción; el choque dá siempre por resultado una comunicación de movimiento, de aquí su importancia, pues como en otro lugar hemos establecido, nosotros admitimos como orígen de un movimiento, la acción de otro movimiento.

Puede verificarse el choque de dos modos: cuando se corresponden en línea recta los centros de gravedad de las masas que chocan y cuando no se verifica dicha correspondencia; en el primer caso hay *choque central y directo* y en el segundo el *choque es excéntrico y oblícuo*. Podemos considerar los cuerpos para el estudio del choque, divididos en dos grupos: *no elásticos* y *elásticos* y como todos los sólidos son algo elásticos unos en mayor grado que otros sin llegar á serlo con perfección, llegaremos á obtener en la práctica resultados intermedios segun sea la naturaleza de los cuerpos ensayados.

Aún cuando hemos de estudiar con alguna amplitud la elasticidad, esa forma particular de la energía existente en todos los cuerpos; necesariamente hemos de anticipar algunas nociones sobre la misma, definiéndola como una fuerza especial tendiendo siempre á recobrar el volúmen y forma de los cuerpos, si una causa cualquiera los deforma. Los líquidos y gases son perfectamente elásticos, entre los sólidos poseen algunos en mayor grado esta fuerza, como el marfil, vidrio, acero, etc., y otros en pequeño grado particularmente los cuerpos blandos sebo, manteca, y la arcilla, plomo, estaño, etc.

Sólo estudiaremos de una manera elemental el choque de masas esféricas animadas únicamente de un movimiento de traslación, cuando no están en reposo. El estudio completo del choque corresponde á la Mecánica superior.

77. Choque central de cuerpos no elásticos.—Sean dos masas esféricas m, m', dotadas con velocidades v, v'; si $v > v'$ y se mueven ambas en un mismo sentido irá disminuyendo la distancia entre ellas hasta que se encuentren, pues suponemos que su trayectoria común es la recta que enlaza sus centros de gravedad. En el momento del choque se comunica el movimiento de la masa chocante m que lleva más velocidad á la masa chocada m' y ambas se mueven despues juntas con una velocidad común que llamaremos V.

Para determinarla observemos que el cuerpo m ha perdido la velocidad $v-V$ y por lo tanto perdió también la cantidad de movimiento $m(v-V)$; el cuerpo m' ganó la velocidad $V-v'$ y la cantidad de movimiento $m'(V-v')$, y como la cantidad de movimiento perdida por el primero es igual á la cantidad ganada por el segundo, podemos escribir la igualdad $m(v-V)=m'(V-v'$ de donde $mv+m'v'=(m+m')V$; la cual nos dice como) era fácil prever en virtud de la ley de inercia, que la cantidad de movimiento es la misma antes y despues del choque.

La velocidad común despues del choque es

$$V=\frac{mv\pm m'v'}{m+m'} \quad \text{......n° 16.}$$

El signo negativo de v' indica el movimiento en sentido contrario de la masa chocada m' respecto de la chocante m. Discutiendo esta expresión encontramos todos los casos prácticos que la experiencia confirma con esferas de arcilla recorriendo arcos graduados en aparatos especiales.

Si las masas se dirigen en sentido opuesto

$$V=\frac{m\,v-m'\,v'}{m+m'}$$

valor que se anula cuando $m\,v=m'\,v'$, es decir, cuando las masas están en razón inversa de las velocidades, ó cuando las velocidades son iguales siéndolo también las masas.

Si m' está en reposo $v'=o$ y $V=\frac{m}{m+m'}v$. Si $m=m'$ será $V=\frac{1}{2}v$; si $m=2m'$ será $V=\frac{2}{3}v$ etc. Una bala de cañón de 200 kilógramos con una velocidad de 600 metros por segundo, chocando con una masa fija de 299800 kilógramos, le comunica una velocidad común

$$V = \frac{200 \times 600}{200 + 299800} = \frac{120000}{300000} = 0,4 \text{ metros.}$$

Si la masa chocada m' es infinitamente grande con relación á m y está en reposo, tendremos

$$V = \frac{m\ v}{m + \infty} = o$$

78. Choque central de cuerpos elásticos. — Comprende dos periodos: en el primero se comprimen las masas comunicándose sus velocidades respectivas cual se verifica en el caso anterior (fig. 39); en el segundo la reacción elástica que la compresión mútua origina, obliga á los puntos materiales de las masas á recobrar sus posiciones primitivas, y los cuerpos apoyándose en la superficie de contacto se impelen mútuamente. Como la acción es igual y contraria á la reacción, la velocidad de cada masa varía una cantidad igual en ambos períodos y teniendo en cuenta la dirección en que obran estas fuerzas, la pérdida de velocidad sufrida por la masa chocante ó la ganancia adquirida por la masa chocada es doble de la que sería si ambas no fuesen elásticas.

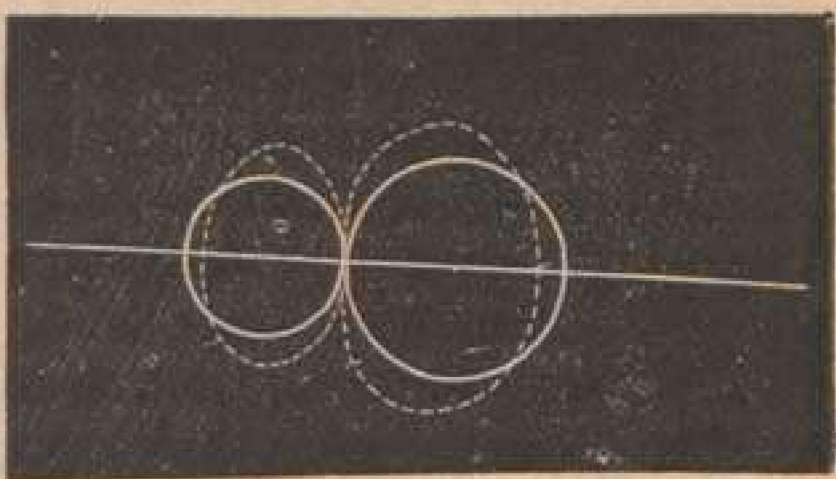

Figura 39.

En el primer período las masas toman la forma que indican con alguna exageración, las líneas punteadas del grabado y adquieren la velocidad común

$$x = \frac{m\ v + m'\ v'}{m + m'}$$

con la cual se moverían juntas si no fuesen elásticas, habiendo perdido la masa chocante m la velocidad $v - x$ y habiendo ganado la masa chocada m' la velocidad $x - v'$. Al recobrar en virtud de la elasticidad la forma primitiva, vuelve la masa m á perder la misma velocidad $v - x$ y á ganar la masa m' $x - v'$; de modo que en ambos períodos m pierde $2(v - x)$ y m' gana $2(x - v')$. Llamando V y V' las velocidades finales después del choque, adquiridas por las masas m y m', tendremos

$$V = v - 2(v - x) = 2x - v \qquad V' = v' + 2(x - v') = 2x - v'$$

Sustituyendo en estas igualdades el valor de x, reduciendo y simplificando, queda

$$V = \frac{v(m - m') + 2m'v'}{m + m'} \text{......... n.° 17} \qquad V' = \frac{v'(m' - m) + 2mv}{m + m'} \text{......... n.° 17}$$

79. Discusión.—Si suponemos $m = m'$ para mayor sencillez, resulta $V = v'$, $V' = v$, es decir, que las masas cambian sus velocidades, ley general del choque en los cuerpos elásticos.

Si v' es negativa resulta $V = -v'$, $V' = v$, es decir, que cada cuerpo retrocede con la velocidad que poseía el otro.

Si $v' = o$ la masa m' está en reposo y entónces $V = o$, $V' = v$, es decir, que el cuerpo chocante se detiene y el chocado se mueve con la velocidad que poseía el otro.

Cuando siendo las masas desiguales, m' está en reposo, $v' = o$ y entónces $V = \dfrac{v(m - m')}{m + m'}$, $V' = \dfrac{2mv}{m+m'}$.
Si $m' > m$ será V negativa, es decir, que la masa chocante retrocede después del choque con la velocidad que le corresponda. Este caso podrá suceder también aunque m' se mueva pues la expresión $v(m - m') + 2m'v'$ puede ser negativa si v' es negativa ó si siendo v' positiva su valor es menor que el dado por la ecuación

$$v(m - m') + 2m'v' = o.$$

Si $m' = \infty$ y $v' = o$ tendremos $V = -v$, es decir, que un cuerpo elástico chocando con un obstáculo fijo también elástico, retrocede con una velocidad igual á la que poseía. Si m' es bastante grande con relación á m y $v' = o$, V' es muy pequeña; por esta razón el choque del martillo sobre el yunque, apenas se comunica al soporte de éste. Se puede golpear una masa grande sostenida en la mano sin sentir dolor miéntras lo sentiríamos más si la masa fuese pequeña.

Numerosos ejemplos en confirmación de todo lo dicho podríamos indicar, todos se verifican con esferas de marfil que recorren arcos graduados antes y después del choque, ó hiriendo normalmente un plano elástico.

Si en vez de dos esferas iguales se reunen varias puestas en contacto como indica la fig. 40, al separar un número cualquiera de ellas y chocar con las restantes, se separan en el otro extremo de la serie un número igual de esferas; las intermedias que no se mueven sólo trasmiten el movimiento. Este sencillo fenómeno reviste gran importancia como tendremos ocasión de ver más adelante.

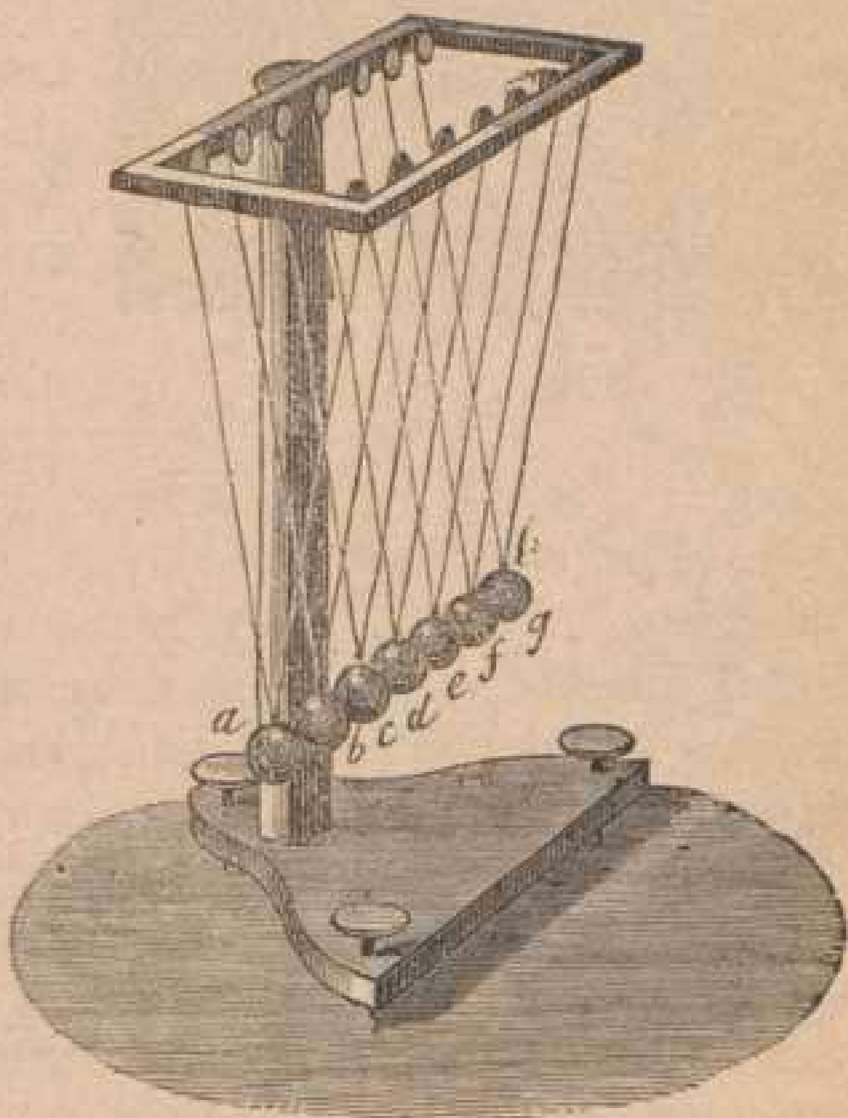

Figura 40.

80. Choque excéntrico de cuerpos elás-

ticos.—En este caso se cumple también la ley general, cambiándose las velocidades; el estudio completo de este caso no pertenece á un tratado elemental, las direcciones que siguen los cuerpos después del choque dependen de las diversas descomposiciones que sufre la fuerza poseída por el cuerpo chocante.

Cuando la masa chocada es un obstáculo fijo (fig. 41) se llama *ángulo de incidencia* al que forma la dirección $A\ D$ con la normal en el punto de contacto, y *ángulo de reflexión* el formado por la dirección $D\ A'$ con dicha normal. La reflexión ó choque en este caso está sujeta á la siguiente ley: *los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales y están situados en un plano normal á la superficie reflectante.* Esta ley se demuestra experimentalmente con esferas de marfil que se mueven en planos semicirculares graduados, chocando con un obstáculo central. Puede deducirse esta ley de la construcción geométrica, pues los dos paralelógramos en que se descomponen las velocidades $A\ D$ y $D\ A'$, son iguales.

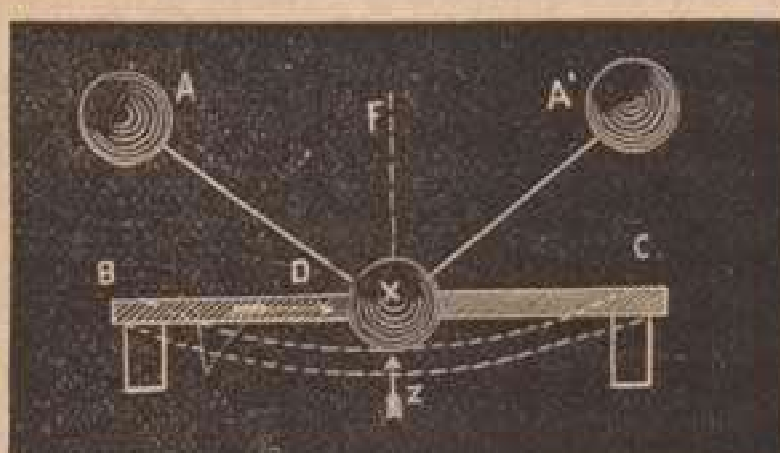

Figura 41.

En el juego de billar se verifican muchos de los fenómenos que acabamos de estudiar, particularmente el choque excéntrico de esferas de marfil animadas de un movimiento de rotación sobre el plano de la mesa, regulando el jugador con la naturaleza de la impulsión, la dirección y velocidad de las esferas después del choque.

81. Pérdida de fuerza viva.—No la hay en el choque de cuerpos elásticos, pués antes del choque la fuerza viva de las dos masas es $m\ v^2 + m'\ v'^2$ y después del choque es $m\ V^2 + m'\ V'^2$ expresiones equivalentes puesto que $V = v'$ y $V' = v$.

Un cálculo sencillo demuestra la pérdida de fuerza viva en el choque de cuerpos no elásticos. Antes del choque la fuerza viva es $m v^2 + m' v'^2$ y después del choque es $(m + m') V^2$; restando ambas expresiones resultará la pérdida que se busca, la cual como se observa, no puede ser nula.

$$m v^2 + m' v'^2 - (m + m') V^2 = m v^2 + m' v'^2 + (m + m') V^2 - 2(m + m') V^2 =$$

sumando y restando $(m + m') V^2$

$$= m v^2 + m' v'^2 + m V^2 + m' V^2 - 2(m + m') \frac{m v \pm m' v'}{m + m'} V =$$

$$= m (V - v)^2 + m' (v' \pm V)^2$$

sustituyendo en vez de uno los factores V del último monomio su valor $\frac{m v \pm m' v'}{m + m'}$.

82. Comunicación del movimiento.—En el choque hay siempre comunicación de movimiento, como acabamos de observar, esta puede efectuarse con más ó ménos rapidez, pero nunca instantáneamente como lo prueban una multitud de hechos.

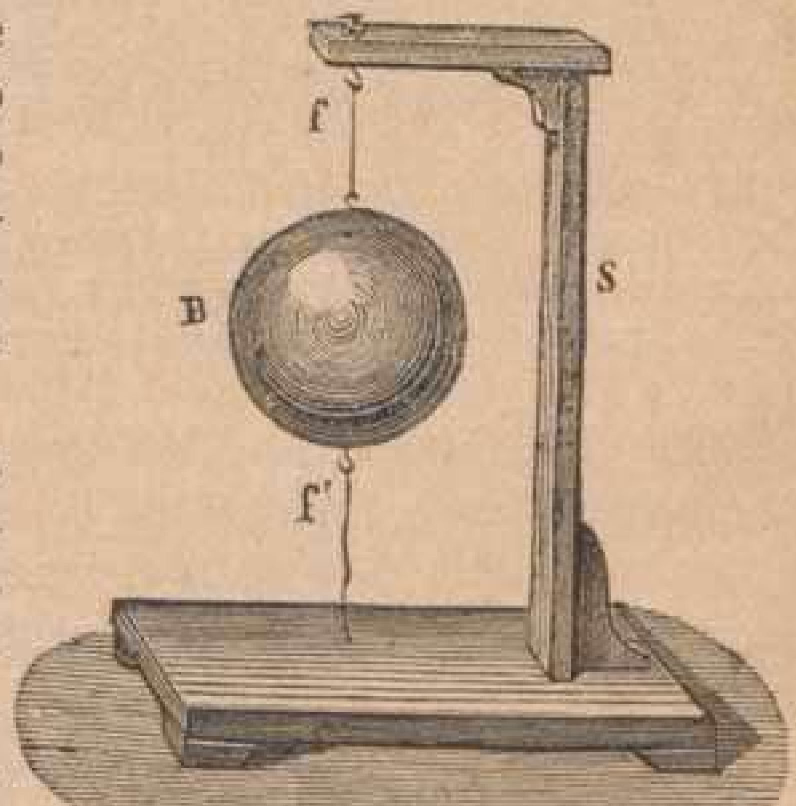

Figura 42.

Si la impulsión es enérgica y brusca, como esta necesita algún tiempo para trasmitirse á las partículas próxima á la parte atacada, puede suceder que esta parte se desprenda de la masa total sin que su movimiento se trasmita á las partículas que la rodean.

Si tiramos bruscamente de la masa B (fig. 42) se rom pe el hilo en f' y si tiramos suavemente se rompe en f porque se ha trasmitido el movimiento hasta dicho punto.

Lo mismo que en la tracción sucede en la compresión; si una bala de fusil atraviesa un cristal plano con gran velocidad, sólo queda un orificio circular como huella de su paso; lanzada hacia el cristal con una velocidad menor, deja una rotura ó huella estrellada por la mayor extensión á que se comunica el movimiento de la parte directamente conmovida por el choque.

Cuando la velocidad y la masa del cuerpo chocante es bastante grande, puede suceder que aún siendo cuerpo blando impulsa á los obstáculos duros que encuentra en su camino. Un disco de hierro girando con rapidez corta una barra de acero; el agua de un río en las grandes avenidas y el impulso del viento destrozan y arrastran los edificios por la enorme cantidad de movimiento que poseen.

LECCIÓN XVI

Trabajo mecánico. Definición del trabajo. Fórmula general. Trabajo de una fuerza central. Trabajo de la resultante. Aplicación de este á un sistema material en equilibrio. Aplicación á las máquinas y al teorema de fuerzas vivas.

83. Definición del trabajo.—Por la importancia que tiene hoy en las ciencias físicas la noción del trabajo, creemos conveniente ampliar lo dicho en lecciones anteriores, no excediéndonos de los límites propios de un tratado elemental.

Hemos establecido ya que cuando una fuerza continua de intensidad y dirección constante actúa sobre un cuerpo, el punto de aplicación de esta fuerza se mueve en la misma dirección, definiéndose el trabajo por: *el producto de la fuerza por el camino que recorre su punto de aplicación.* Llamando T el trabajo, F la fuerza y E el camino recorrido, tendremos $T = F\,E$..... n.° 18.

Si el movimiento se efectúa en el sentido de la fuerza, el trabajo se considera como una cantidad positiva y se llama *trabajo motor* y si el punto de aplicación se mueve en sentido opuesto á la dirección de la fuerza, el trabajo es negativo y se llama *trabajo resistente*. Así un peso de 20 kilógramos cayendo de una altura de 4 metros origina un trabajo motor $+ F E = 80$ kilográmetros, mientras que el mismo remontándose verticalmente á la misma altura, origina un trabajo resistente $- F E$ también de 80 kilográmetros.

84.—Si la fuerza F hace mover el punto de aplicación en la dirección $m\, n'$ (fig. 43) distinta á la suya, el

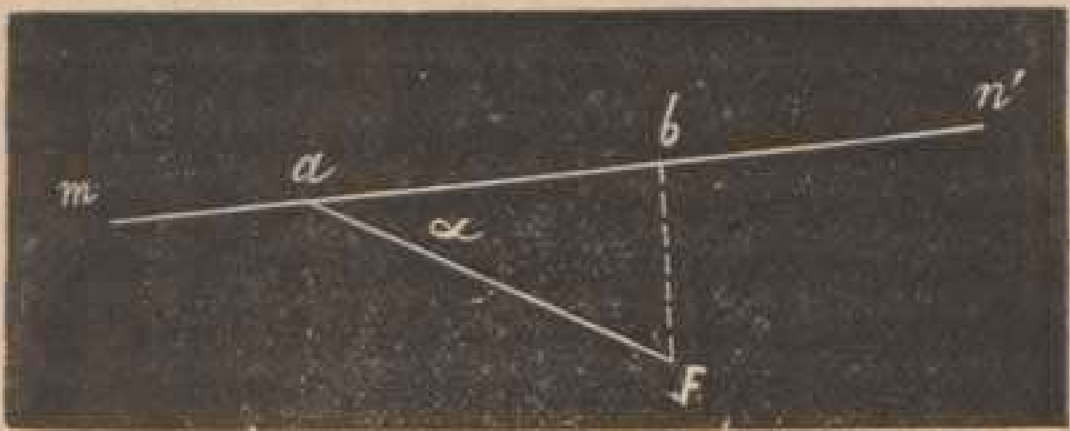

Figura 43.

trabajo es el producto de la proyección ab de la fuerza sobre la dirección del movimiento por el espacio que recorre el punto a. Llamando E este camino será:

$T = ab \times E$ y como $ab = F \cos \alpha$ escribiremos:

$T = F E \cos \alpha$ ..... n.° 19. Esta fórmula se transforma en la anterior cuando el ángulo α vale cero y la fuerza obra en la dirección del movimiento.

Miéntras el ángulo α es agudo, su coseno es positivo y el trabajo es motor. Si $\alpha = 90°$ el trabajo es nulo. Si el ángulo α es obtuso su coseno es negativo y el trabajo es resistente pués la componente eficaz ab actúa en sentido opuesto al movimiento. Tenemos pués

$$\alpha = \begin{cases} 0° \\ 90° \\ 180° \end{cases} \qquad T = \begin{cases} + F E \\ 0 \\ - F E \end{cases}$$

En vez de proyectar la fuerza F sobre la recta mn podemos hacer lo contrario, esto, es proyectar el camino recorrido sobre la dirección de la fuerza. Sea ab el ca-

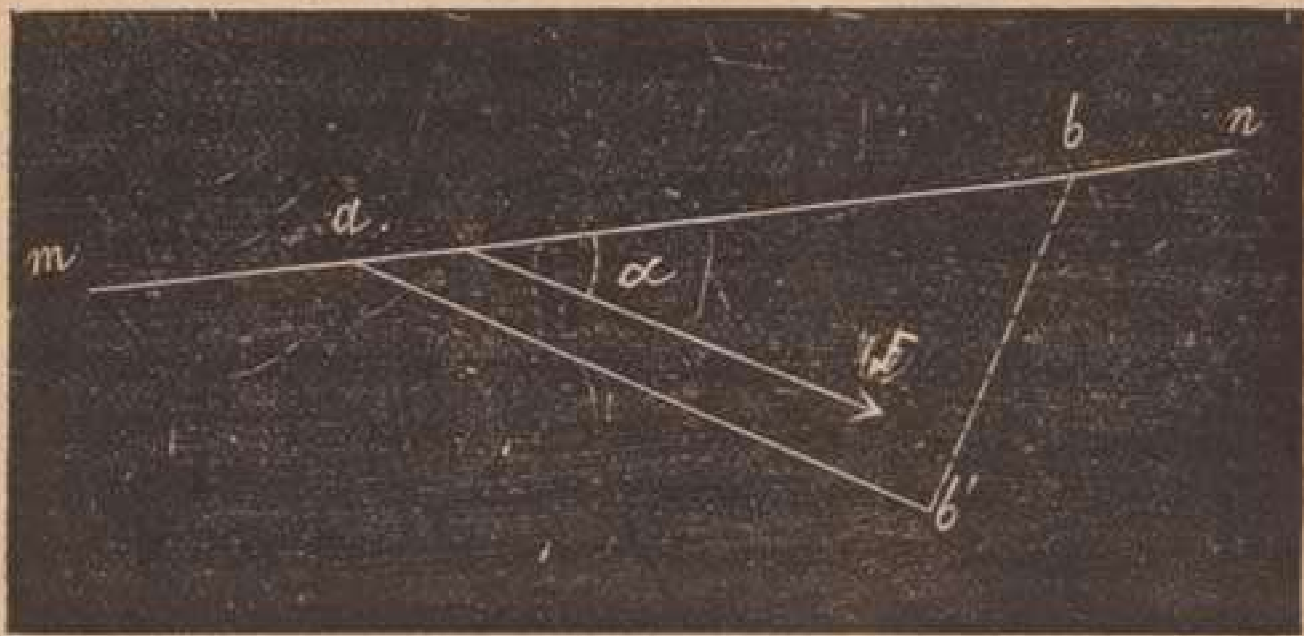

Figura 44.

mino recorrido por el punto a, su proyección sobre la dirección de la fuerza será (fig. 44) $ab' = ab \cos. \alpha$ ó lo que es igual $E' = E \cos \alpha$ llamando E' á la proyección ab' del camino recorrido ab; y por lo tanto la fórmula n.° 19 se podrá escribir también así: $T = FE'$ ... n.° 20

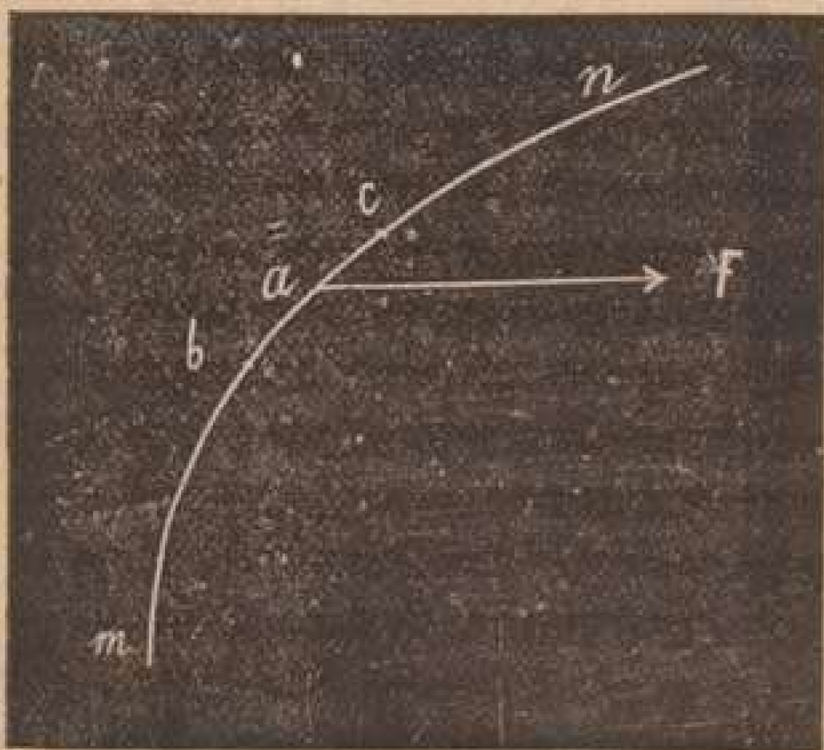

Figura 45.

85. Definición general del trabajo. — Consideremos que la fuerza F varía en dirección é intensidad y que la trayectoria es curvilínea, como caso más general. Descompondremos la porción de trayectoria $m\,n$ (fig. 45) recorrida en el tiempo durante el cual se considera el trabajo, en un gran número de partes bc sumamente pequeñas, de modo que puedan tomarse sin error sensible como líneas rectas, y supongamos que en el corto tiempo empleado por el punto a en recorrerlas, no varía la dirección é intensidad de la fuerza F. El trabajo elemental para cada uno de estos elementos lineales de la trayectoria será según lo dicho anteriormente $t=F\,e \cos \alpha$ ó $t=F\,\acute{e}$ siendo $\acute{e}$ la proyección del elemento $b\,c=e$ sobre la dirección de la fuerza F. Así definido el trabajo elemental de F se podrá definir el trabajo total entre los puntos m y n por la suma algébrica de los trabajos elementalcs t_1 t_2 t_3 en los n elementos de la trayectoria, por lo tanto

$$T=t_1+t_2+t_3 \times \ldots\ldots + t_n$$

ó sea

$$T=\begin{cases} Fe_1 \cos\alpha + Fe_2 \cos\alpha + \ldots\ldots = \Sigma\, FE \cos\alpha \ldots\ldots \\ Fe'_1 \quad + Fe'_2 \quad + \ldots\ldots = \Sigma\, FE' \quad \ldots\ldots \end{cases} \text{n.}^{\circ}21.$$ [1]

Discutiendo y traduciendo esta fórmula al lenguaje vulgar llegaríamos á conclusiones iguales á las obtenidas anteriormente, pero con mayor generalidad. Así que un cuerpo descienda en línea recta ó en línea curva, el trabajo desarrollado por el peso siempre será el producto de este por la altura vertical de la caida (proyección sobre la vertical del espacio recorrido). Si el cuerpo después de haber descendido vuelve á elevarse á la misma altura, cualquiera que sea la longitud é inclinación de la trayectoria, el trabajo total es nulo, porque el trabajo positivo del descenso es igual al trabajo negativo realizado en la ascensión.

86. Trabajo de una fuerza central.— Llámase así una fuerza que actúa siempre en la direc-

[1] El signo Σ indica una suma algébrica de términos semejantes.

Adoptamos la notación y demostración expuesta por H. Pellat, *Cours de Physique* tome premier, Paris 1883, para este teorema y el siguiente.

ción de un punto fijo ó centro, y cuyo valor cualquiera que sea la posición del móvil, sólo depende de su distancia al centro. Tal sucede con la atracción solar con respecto á la Tierra, obrando en razón inversa del cuadrado de la distancia existente entre los dos astros.

Teorema. El trabajo de una fuerza central cuyo punto de aplicación recorre una trayectoria cualquiera, sólo depende de las distancias inicial y final que separa este punto del centro, durante el trascurso del movimiento.

Sea o el centro (fig. 46) M y N la posición inicial y final de un móvil que recorre el arco $M\ C\ B\ N$, el trabajo será el mismo que si el móvil partiese de M' y recorriendo el arco $M'\ C'\ B'\ N'$ termina en N'.

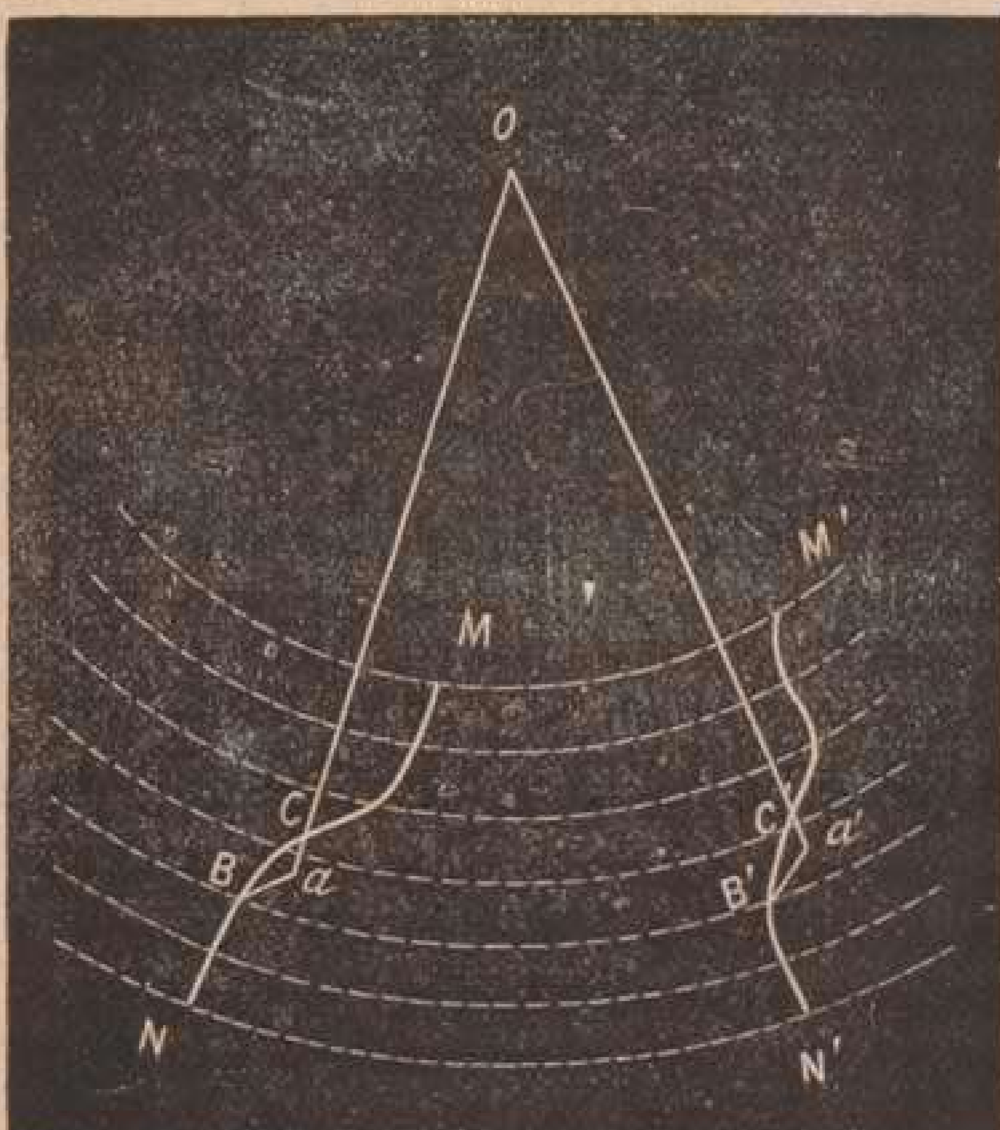

Figura 46.

Consideremos una serie de esferas concéntricas en o, la primera pasando por $M\ M'$ y la última por $N\ N'$; si son numerosas cortarán á los arcos citados en una série de elementos lineales sumamente pequeños. El trabajo elemental en dos de estos elementos $C\ B$, $C'\ B'$, comprendidos entre las mismas esferas será el mismo y como el punto de aplicación de la fuerza F dista igualmente de O, tiene el mismo valor mecánico F.

Trazemos los radios $O\,C\,a$ y $O\,C'\,a'$ y los arcos de círculo máximo $B\,a$ y $B'\,a'$, (a y a' son los puntos de intersección de los radios $O\,C\,a$ y $O\,C'\,a'$ con la superficie esférica que pasa por $B\,B'$) $C\,a$ y $C'\,a'$ representan las direcciones de la fuerza para los elementos $C\,B$ y $C'\,B'$. Luego los lados de los triángulos curvilíneos $C\,a\,B$ y $C'\,a'\,B'$ se pueden tomar como rectas, $B\,a$ y $B'\,a'$ representarán las tangentes en los puntos a y a' y los triángulos citados serán rectángulos en a y a', $C\,a$ y $C'\,a'$ son las proyecciones de los elementos $C\,B$ y $C'\,B'$ sobre la dirección de la fuerza.

El trabajo elemental para el elemento $C\,B$ será $t = F \times C\,a$ y para el elemento $C'\,B'$ es $t' = F \times C'\,a'$ y como $C\,a = C'\,a'$ también $t = t'$. Conteniendo las dos trayectorias $M\,C\,B\,N$ y $M'\,C'\,B'\,N'$ el mismo número de elementos, los trabajos de la fuerza F en ambas, son iguales. Como los razonamientos expuestos son independientes de la longitud y dirección de las trayectorias, el trabajo es el mismo cuando el movil va de M á N cualquiera que sea el camino recorrido.

Si consideramos positivo el trabajo cuando la fuerza F sea repulsiva, es decir, cuando el movil camina de M á N, será negativo cuando la fuerza F sea atractiva, ó sea cuando el movil vaya en la dirección $N\,M$. El trabajo será nulo cuando el punto de aplicación regrese á la posición inicial despues de haber recorrido un camino cualquiera.

87. Trabajo de la resultante.—El trabajo de la resultante de varias fuerzas aplicadas á un punto material, es igual á la suma algébrica de los trabajos de las componentes.

Hemos demostrado en la Estática que la magnitud de la resultante es igual á la suma algébrica de las proyecciones de las componentes sobre la dirección de dicha resultante, de modo que moviéndose el punto en dicha dirección, el camino recorrido es igual á la suma algébrica de los caminos recorridos si el punto estuviera sometido sucesivamente á la acción de cada una de las fuerzas, con lo cual queda demostrado el teorema.

De un modo análogo se demostraría esta proposición en un sistema de fuerzas aplicadas á dos ó más puntos materiales, esto es á un cuerpo ó sistema de cuerpos íntimamente unidos.

Este teorema nos conduce al principio fundamental de la Estática, llamado *del trabajo virtual*, entendiéndose por trabajo virtual de una fuerza aplicada á un punto, el trabajo elemental de esta fuerza para un movimiento sumamente pequeño atribuido ficticiamente á este punto. Este principio se deduce del teorema anterior y se enuncía de esta manera: Para que un cuerpo ó sistema material esté en equilibrio, es necesario que la suma algébrica de los trabajos de las fuerzas que actuan sobre él, sea nula. Y en efecto, si un sistema material está en equilibrio, su resultante es nula, el trabajo de esta resultante también es nulo y la suma algébrica de los trabajos de las componentes igual á cero; recordemos que el polígono de fuerzas se cierra con las rectas representantes de las fuerzas.

88. Aplicación á las máquinas.—Cuando en una máquina se equilibran la potencia y la resistencia, el trabajo motor realizado por la primera es positivo é igual al trabajo resistente realizado por la segunda, así que llamando P y R á la potencia y resistencia y e e' los caminos recorridos por los puntos de aplicación de las mismas, escribiremos, $P \times e = R \times e'$ principio que hemos llamado de las velocidades virtuales, que nos ha servido para encontrar la ecuación de equilibrio en las máquinas.

89. Aplicación al teorema de las fuerzas vivas.—De la igualdad anterior podemos llegar también á la demostración del teorema de las fuerzas vivas, principio el más importante de la Mecánica y de fecundas aplicaciones en las ciencias físicas, del cual hemos dado una ligera idea.

Como los cuerpos caen con movimiento uniformemente acelerado en el vacío, $v^2=2\,g\,e$ es la fórmula que nos dá la velocidad del descenso en función de la altura e ó espacio recorrido, siendo g la aceleración debida á la gravedad. Sustituyendo el valor $e=\frac{v^2}{2\,g}$ en el primer miembro de la igualdad anterior $P\times e=R\times e'$ tendremos $\frac{P}{g}\times\frac{v^2}{2}=R\times e'$ y como $\frac{P}{g}=m$ representa la masa del cuerpo cuyo peso es P, y $R\times e'$ es el trabajo resistente que llamaremos t, resultará $\frac{m\,v^2}{2}=t$ fórmula igual á la n.° 15 que ya conocemos.

Este principio se demuestra de un modo general en los tratados de Mecánica superior, escribiéndose entonces la fórmula anterior así: $m\,v^2-m\,v_0^2=2\,t$....n.° 22 y se enuncia de este modo: La variación de fuerza viva de un punto material es igual al doble del trabajo desarrollado por la fuerza actuante sobre dicho punto durante el tiempo considerado. Si el movil parte del reposo v_0 es nula y queda la fórmula n.° 15.

Ya aplicaremos este principio al cálculo de la energía natural que poseen los cuerpos y al de las trasformaciones de la misma, base de la Física moderna.

LECCIÓN XVII.

Trabajo de las máquinas. Igualdad del trabajo motor y del trabajo resistente. División de este último. Influencia de las resistencias pasivas. Rendimiento de las máquinas.

90. Una máquina está destinada cuando trasmite la acción de las fuerzas, á transformar un trabajo en otro más útil, cualquiera que sea la naturaleza de sus órganos ó piezas y el agente natural que intervenga en sus funciones. La máquina es un sistema material que recibe por una parte un trabajo debido á fuerzas motrices ó potencias (peso de un cuerpo, fuerza muscular, fuerza elástica del vapor acuoso, etc.) y por otra produce un trabajo consistente siempre en mover los puntos de aplicación de las resistencias que trata de vencer (elevación de pesos, desagregación de los cuerpos, tracción de un tren, etc).

El trabajo negativo de la resistencia puede dividirse en dos partes: *trabajo útil* ó sea el que deseamos obtener en el funcionamiento del aparato; *trabajo inútil* ocasionado por el movimiento de las piezas ú órganos, y que oponiéndose por su resistencia pasiva al movimiento de la máquina, exije el gasto de una parte del trabajo motor originando siempre pérdida de este, porque estas resistencias nacidas de la naturaleza de las cosas no pueden anularse.

Las resistencias pasivas que vamos á estudiar consisten en:

a. rozamientos
b. resistencia de los medios
c. conmoción de los soportes
d. ruidos
e. cambios bruscos de movimientos
f. choques

91. Rozamientos.—Se producen cuando un cuerpo resbala ó gira sobre otro, siendo debidos á las asperezas existentes en las superficies en contacto que nunca son planos perfectos, como puede observarse viendo con una lente de aumento algunos cuerpos que á simple vista parecen pulimentados. El rozamiento puede ser de dos clases: de *resbale* y de *giro*; el segundo es menor que el primero, pues cuando un cuerpo gira sobre otro, las asperezas salientes del uno penetran engranándose en las partes entrantes del otro, y si los cuerpos resbalan el que se mueve tiene que salvar las asperezas del otro rompiéndolas ó ascendiendo por ellas, experimentando cierta resistencia que dificulta el movimiento.

Coulomb ha estudiado el rozamiento haciendo resbalar una caja prismática del cuerpo sometido al ensayo sobre un tablero horizontal, atándole un hilo que pasando por una polea termina en un platillo; en este se van colocando pesos conocidos hasta que vencido el rozamiento se inicia el movimiento de la caja.

También se estudía el rozamiento colocando la caja prismática sobre un plano inclinado (fig. 47) aumentando la inclinación de este hasta que el cuerpo comience

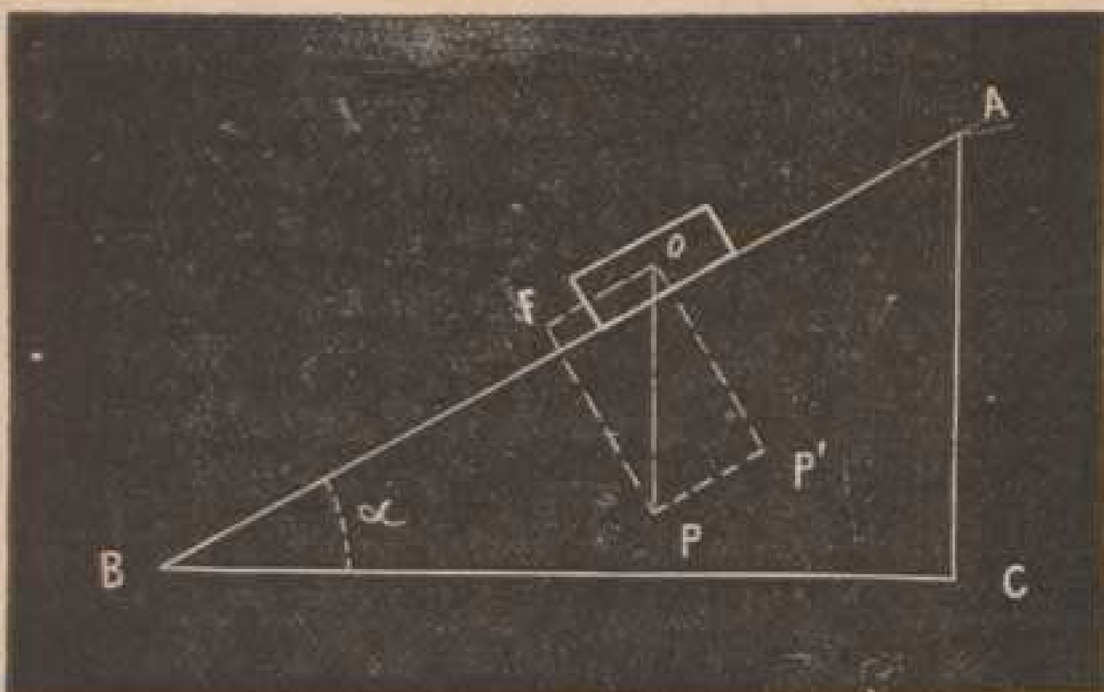

Figura 47.

á resbalar. Descomponiendo el peso P del cuerpo en las dos componentes F y P' tendremos $\frac{F}{P'} = \frac{AC}{BC}$ á cuya relación independiente del ángulo α se llama *coeficiente de frotamiento*; este representa el número por el cual se ha de multiplicar la presión normal para obtener el valor de la fuerza equivalente al rozamiento.

Las leyes que la experiencia demuestra son:

1.ª El rozamiento es proporcional á la presión.

2.ª Es independiente de la extensión de las superficies en contacto y de la velocidad del movimiento.

3.ª Es mayor entre cuerpos homogéneos.

4.ª Disminuye despues de iniciado el movimiento.

Muchas son las aplicaciones prácticas de estos hechos y diferentes según convenga aumentar ó disminuir el rozamiento. En el primer caso se utiliza el roce como fuerza para neutralizar otras que se intenta vencer en todo ó en parte, esto se verifica con los frenos ó planchas aplicadas á las ruedas de los carruajes para disminuir su velocidad, sustituyendo el frotamiento de giro por el de resbale. Las alfombras en los salones de baile, la paja ó tierra para cubrir el hielo de las calles, los zapatos y bastones herrados de los montañeses, las asperezas de los mangos y empuñaduras en las armas y herramientas, etc., son otros tantos ejemplos.

Cuando se quiere disminuir el roce se cubren los ejes con aceites, grasas y polvos untuosos, ó se pulimentan las superficies en contacto con barnices especiales que llenan los intersticios ó rompiendo las asperezas con el frote de cuerpos duros.

92. Resistencia de los medios.—Los cuerpos se mueven generalmente dentro del agua ó del aire, hendiendo la capa fluida que se opone al movimiento, y por lo tanto pierden una parte de la fuerza motriz al separar el fluido; la resistencia de este crece con la densidad del medio, con la velocidad del cuerpo y con la sección fluida normal á la trayectoria. Esta resistencia sirve de apoyo de las manos y de los remos en la natación y en la navegación y de las alas de las aves en el vuelo.

93. Conmoción de los soportes.—El movimiento de la máquina ocasionado por la fuerza motriz se pierde en parte por las vibraciones que comunica á los postes sólidos que sostienen las piezas del artefacto; esto se traduce por pérdidas en la potencia, pues los ruidos ó vibraciones sonoras y el calor ó vibraciones caloríficas, se trasmiten á los medios que rodean la máquina difundiéndose en el espacio. De aquí la conveniencia de ajustar bien las piezas evitando en lo posible ruidos y choques orígen siempre de disminución de fuerza viva tratándose de sólidos que nunca son perfectamente elásticos.

Otro tanto sucede con los cambios bruscos de movimiento.

94. Trabajo útil.—Puesto que forzosamente en toda máquina el trabajo motor tiene que vencer al trabajo resistente, y este se divide en dos partes: trabajo útil representado por las resistencias activas que deseamos vencer y trabajo inútil representado por las resistencias pasivas que acabamos de estudiar que siempre originan una pérdida de fuerza motriz, podemos enunciar que: *el trabajo motor es igual al trabajo útil más el trabajo perdido* y por lo tanto *el trabajo útil es menor que el trabajo motor.*

La relación entre el trabajo útil y el trabajo motor expresada de este modo: $\frac{\text{trabajo útil}}{\text{trabajo motor}} < 1$ se llama *rendimiento* de la máquina; este cociente siempre menor que la unidad, y que en nuestra mano está acercarle á este valor límite disminuyendo las resistencias pasivas y perfeccionando el artefacto, representa su valor industrial. En las máquinas compuestas de piezas sólidas bien enlazadas, alcanza un valor máximo de 0,80 á 0,95; en las ruedas hidráulicas varía entre 0,60 y 0,80.

Si el rendimiento fuese igual á uno tendríamos el *movimiento perpétuo*, ideal de los soñadores mecánicos, á donde el hombre no puede llegar por impedirlo las leyes de la Naturaleza y los principios fundamentales de la Mecánica. Si fuese posible suprimir las resistencias pasivas no habría trabajo perdido y la máquina entonces daría un trabajo útil igual al trabajo motor, es decir, sería motora de sí misma, rindiendo *perpétuamente* el mismo trabajo sin gasto alguno. Así en un salto de agua, 100 kilógramos de este líquido cayendo de una altura dada podrían elevar igual cantidad de agua á la misma altura y esta actuando sobre la misma rueda la haría mover eternamente.

Todavía es mayor el absurdo que otros pretenden con la *multiplicación* del trabajo, ó sea con la obtención de un rendimiento mayor que la unidad, lo cual supone que la rueda hidráulica del ejemplo anterior no solo podría moverse á sí misma sino con el exceso de trabajo motor poner en movimiento otros artefactos.

ÍNDICE

Dinámica

ERRATAS NOTABLES

PÁG.	LÍNEA	DICE	LÉASE
10	11	lineas	limas
11	26	anunciar	enunciar
14	1	27,84	27,6
14	3	$v \frac{e}{t}$	$v = \frac{e}{t}$
15	29	$r = wt$	$v = wt$
17	1	(1)	(7)
29	22	ahijfkmnb	ahijftmnb
29	32	paralela, *db*	paralela á *db*
32	15	*oad* y *adc*;	*oad*, *odc* y *adc*;
34	16 y 17	descomponiéndolos	descomponiéndolas.
35	7	$(ab = ac)\ Q$	$(ab - ac)\ Q$
35	10	$ac \times = P$	$ac \times P =$
38	11	$R = P$	$R - P$
42	9	0'248	0'296
42	15	*rd*	*vd*
44	10	paralelas á	paralelas proporcionales á
46	12	punto	punto,
72	6	$\frac{AC^2}{2r}$	$\frac{\overline{AC}^2}{2r}$
72	9	m'	$m,$
74	18	$F = n' F_1,$	$F = n F_1,$
80	11	$(V - v'$	$(V - v')$
80	12	como)	como
85	10	$+ m' (v' \pm V)^1$	$+ m' (v' \mp V)^2$
85	11	uno los	uno de los
89	13	$t_2 \times$	$t_3 +$

PUNTOS DE VENTA

Véndese esta obra al precio de tres pesetas, en Barcelona en la Administración de la CRÓNICA CIENTÍFICA, calle de las Córtes, 311, y dirigiéndose al Autor en el Instituto Provincial de Lugo.

En pedidos que pasen de 10 ejemplares se hará la rebaja de 10 por 100 enviando su importe por medio de libranza del Giro-mútuo ó en sellos de franqueo.

El TRATADO ELEMENTAL DE FÍSICA se publicará á la mayor brevedad.

Barcelona.—Imp. J. Miret, calle de Córtes, 289 y 291, Ensanche.