LUCUBRACIONES ALGEBRÁICAS.

CUADERNO PRIMERO.

CUESTIONES: SÈRIES ELEMENTALES.

a^2, TEOREMA.

CONSECUENCIAS:

Ultima consecuencia: „hallar á la vez todas las cifras de la raiz cuadrada de un número dado.“

OVIEDO:
IMPRENTA DE E. URIA.
1886.

ADVERTENCIA.

El cuaderno 2.° contendrá:

LO REFERENTE Á LA RAIZ CÚBICA.

Y el cuaderno 3.° contendrá:

LO REFERENTE Á LA RAIZ CUARTA Y Á LA RAIZ «ENESIMA.»

PRÓLOGO

Aficionado á las matemáticas, y solo por esto, propúseme hace años *buscar un modo nuevo de hallar la raiz cuadrada de los números*. Larga fué la tarea y por demas penosa, para el que no viviendo de esta ciencia, tenía que invertir al dia muchas horas en otra ocupacion, completamente ajena á las cuestiones algebráicas.

Muy lejos estaba yo sin embargo, en el principio, de sospechar siquiera, que el éxito habia de corresponder á mis deseos de tal suerte, que no solo me diera *el modo nuevo de hallar la raiz cuadrada de los números*, sino tambien *la cúbica y la cuarta*, y en fin, *la del grado n:* y lo que es más aun, *determinándose á la vez todas las cifras de cada raiz*.

El descubrimiento, pues, constituye, como se verá, *el sistema completo de las raizes numéricas*.

Fundado en la relacion respectiva de las potencias con las séries elementales, fué preciso, para llegar á su determinacion, determinar primero aquellas relaciones, pasando de una á otra, hasta que casi expontáneamente se ofreció á la vista el sistema de las raices.

Durante el trabajo de investigacion, y forzado por la necesidad de agotar las consecuencias de una relacion dada, hube de ocuparme en ocasiones de la ecuacion de segundo grado, de la de tercero, y aun de la de cuarto, pero sin otra intencion en un principio, que la de ver si aquellas primeras relaciones arrojaban alguna luz sobre el problema de las ecuaciones algebráicas.

Acabado aquel trabajo de las raices, y excitada ya la curiosidad, púseme poco á poco á pensar, y á investigar á la vez, si no sería posible encontrar, para la ecuacion de tercer grado, y aun para las siguientes, fórmulas de solucion análogas á las del segundo grado.

El resultado de esta segunda empresa fué por de pronto, *el haber llegado á descubrir muchos y muy variados modos de despejar la incógnita, en funcion de los coeficientes*, para las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado.

Pensar *en el sistema de las ecuaciones*, sin resolver antes los tres primeros grados, está á mi parecer bien demostrado que es empeño inútil, pues el tal sistema, si es que existe, tiene que resolver ante todo dichas ecuaciones, y en ellas es por lo tanto donde primero debe comprobarse.

El sistema de las raices parece como que supone el de las ecuaciones; pero entiéndase que tan solo me refiero *á un sistema general de solucion*, aplicable á todas las ecuaciones; pues en cuanto á la estructura interna de las mismas, es evidente que el sistema existe, siendo como es cada ecuacion el compendio sintético de todas las que en grado le sean inferiores.

¿Existe el sistema general de solucion aplicable á todas las ecuaciones?

¿Será posible cuando menos, resolver todas las ecuaciones, aplicando á cada una un método propio y exclusivo en cada grado?

La contestacion á estas preguntas la encontrará el lector en la segunda parte de esta obra, pues es precisamente el objeto de la misma,

Aquí, para concluir, tan solo añadiré, que si aseguro haber durado largo tiempo este trabajo de investigacion, debido es ante todo á las dificultades del asunto y á las pocas horas que de ordinario podía dedicarle.

Téngase por lo demás presente, que en lo que digo acerca de las séries, no es que yo pretenda darlo como novedades, sino solo en lo que pudiera serlo; pues bien se echará de ver que las tales séries de que me valgo en este trabajo de las raices, fueron el medio ó el camino por donde fuí paso á paso andando, hasta determinar *el sistema de los raices; ó un sistema de las raices*, como mas agrade.

¿Habrá quien tenga por atrevido lo que dejo indicado acerca de las ecuaciones? Pues en esto por ahora nada puedo hacer, sino remitirme al tiempo y á lo que sobre el particular se irá diciendo, y podrá leer el que á bien tuviere.

Pero sea de ello lo que fuere, no habrá de ser dudoso para nadie, *que cada ciencia*, y la ciencia en general, debe resolver los problemas que la constituyen, los que forman su contenido, puesto que todos ellos existen científimente: ó la ciencia dejaría de ser ciencia.

Pola de Siero y Setiembre de 1886.

LUCUBRACIONES ALGEBRÁICAS.

ARTÍCULO PRIMERO.

Séries.

La unidad repetida en esta forma 1, 1, 1,..... nos dá lo que llamaremos primera série natural, cuya diferencia entre cada dos términos es cero, y cuya suma hasta n términos es n.

Hallando sucesivamente los valores de n en la primera série, resultarán los números 1, 2, 3, 4,..... que constituyen la segunda série, cuya diferencia es siempre la unidad, y cuya suma hasta n términos es $\frac{n(n+1)}{2}$

Si formamos las sumas sucesivas de los términos de esta segunda série, empezando siempre desde el primero, y poniendo en cada una un término más, resultarán los números 1, 3, 6, 10,..... que constituyen la tercera série, cuyas diferencias son evidentemente los términos de la segunda, empezando desde el 1, si á la tercera se le antepone el *cero*. Del modo de hallar la suma de sus términos, hablaremos más adelante, lo mismo que de la cuarta, que se forma con las sumas sucesivas de los términos de la tercera.

De la misma manera se forman las séries siguientes hasta donde se quiera.

Debe advertirse desde luego que la diferencia entre dos términos consecutivos de una série, es el término de la precedente que corresponde en órden al último de los dos:

y que un término de una série, es la suma de los de la precedente; desde el primero hasta aquel de que se trata.

Pero, la propiedad más especial de dichas séries, además de las que luego se dirán, es la siguiente:

Si las escribimos verticalmente de derecha á izquierda, y de modo que el término primero de cada una corresponda en sentido horizontal con el segundo de la precedente, se tendrá que (siendo n las unidades de la primera vertical):

1.° Cada línea horizontal de términos serán los coeficientes dol binomio $(x+r)$ elevado á $(n-1)$.

2.° Las líneas verticales constituyen los factores numéricos de los coeficientes, cuando á la incógnita de una ecuación se sustituye la suma ó diferencia de otras dos, $(x+r)$ ó $(x-r)$.

3.° Como consecuencia de las dos precedentes, para formar los coeficientes de $(x+r)^n$ no hay necesidad de hacer multiplicación alguna, puesto que resultan de la suma consecutiva de las séries, como se ve en el siguiente cuadro:

. . . .

. . . .

. . . .

1	6	15	20	15	6	1
	1	5	10	10	5	1
		1	4	6	4	1
			1	3	3	1
				1	2	1
					1	1
						1

Artículo II.

Cuadrado.

Teorema.—«El cuadrado de un número entero cualquiera, es igual al mismo número, más dos veces la suma »de los términos de la segunda série 1, 2, 3, ..., hasta »tantos como unidades tiene el número menos una.»

Es decir que $a^2=a+2\left(1+2+3+\ldots\ldots(a-1)\right)$ (k). En efecto, $1+2+3+\ldots\ldots(a-1)=\frac{a(a-1)}{2}=\frac{a^2-a}{2}$

Luego $2\left(1+2+3+\ldots\ldots(a-1)\right)=2\,\frac{a^2-a}{2}=a^2-a$

Luego el segundo miembro de la supuesta igualdad (k) será $a+a^2-a=a^2$.

Lo cual demuestra que la igualdad es cierta.

Artículo III.

Consecuencias.

1.ª Siendo $a^2=a+2\left(1+2+3+\ldots\ldots(a-1)\right)$

Será $a^2-a=2\left(1+2+3+\ldots\ldots(a-1)\right)$

Y tambien $\frac{a^2-a}{2}=\left(1+2+3+\ldots\ldots(a-1)\right)$ De donde se tiene que:

«El cuadrado de un número entero, menos el mismo »número, partido por 2, es igual á la suma de los núme-

»ros 1, 2, 3, ... ó sea los términos de la segunda série, »hasta tantos como unidades tiene el número menos una.»

2.ª Si en la igualdad $a^2-a=2\left(1+2+3+\ldots\ldots(a-1)\right)$ ejecutamos la multiplicacion indicada en el segundo miembro, será $a^2-a=2+4+6+\ldots\ldots 2(a-1)$; luego: «el cuadrado »de un número entero, menos el mismo número, es igual »á la suma de tantos números pares consecutivos, empe»zando desde el 2, como unidades menos una tenga el nú»mero.»

3.ª Siendo $a^2-a=2+4+6+\ldots\ldots 2(a-1)$ tambien será

$$a^2=a+2+4+6+\ldots\ldots 2(a-1)$$

Pero como a vale tantas unidades más una, como términos pares hay en el segundo miembro, será evidentemente $a^2=1+2+4+6+\ldots\ldots 2(a-1)$

$$+1+1+1+\ldots\ldots 1$$

ó bien $a^2=1+3+5+7+\ldots\ldots(2a-1)$

Luego: «El cuadrado de un número entero es igual á la »suma de tantos números impares consecutivos, empezan»do desde el 1, como unidades tiene el número.»

4.ª Siendo cierto que $1^2=1$

$$2^2=1+3$$

$$3^2=1+3+5$$

$4^2=1+3+5+7$ y así sucesivamente, resulta que «todo número impar es la diferencia en»tre los cuadrados de dos números enteros consecutivos, »que serán, el impar menos 1 partido por 2, y el impar »más 1 partido por 2.»

5.ª Como consecuencia de la anterior: «Si se dan dos »cuadrados enteros consecutivos, es evidente que sus rai»ces serán la diferencia aumentada y disminuida en 1, di»vidida por 2.»

Y del mismo modo, «dado un número impar, se halla-

»rán por el mismo procedimiento las raices cuadradas de »los cuadrados de que aquel es la diferencia.»

6.ª Como consecuencia de la 2.ª y 3.ª: «el cuadrado de »un número entero se puede formar sumando tantos im»pares consecutivos desde el 1, como unidades tiene el nú»mero; ó tantos pares desde el 2 como unidades tiene me»nos una, y añadiendo el mismo número.»

Y por igual razon: «podremos hallar la raiz cuadrada »entera de un número, restando de él todos los impares que »contenga desde el 1; ó bien los pares desde el 2; siendo en »el primer caso la *raiz* el número de los restados; y en el »segundo el número de los restados más una unidad.»

7.ª La suma de números impares consecutivos cualesquiera, es la diferencia entre los cuadrados del menor menos 1 partido por 2, y del mayor más 1 partido por 2.

8.ª Dados dos cuadrados y la diferencia de sus raices, podemos hallar estas por medio de los números impares.

En efecto, sabemos que $\frac{a^2—b^2}{a—b}=a+b$; es decir que, dividiendo la diferencia de los cuadrados por la diferencia de las raices, obtenemos la suma de estas; y por lo tanto las dos raices serán: $\frac{(a+b)+(a—b)}{2}$ y $\frac{(a+b)—(a—b)}{2}$

Pero, por otra parte, como la diferencia de las raices es el número de impares á que equivale la diferencia de los cuadrados, cuyos impares forman una progresion aritmética, será la suma de las raices el término medio de la progresion, si fuese impar; y si fuese par, se le añadirá y quitará 1, para formar los dos términos medios equidistantes de los estremos.

En efecto: si 500 es la diferencia de dos cuadrados, y 10 la de sus raices; 500 dividido por 10, igual 50, será la suma de estas: y entonces 50+1=51, y 50—1=49, serán los medios consecutivos en la progresion de los impares á que equivale la diferencia 500; pero como los términos han de ser diez, nos faltan cuatro mayores que 51 y cuatro menores que 49: luego el mayor será $51+4\times2=59$, y el menor será, $49-4\times2=41$; la raiz mayor será pues $\frac{59+1}{2}=30$, y la menor será $\frac{41-1}{2}=20$.

Articulo IV.

Fundados en lo que precede, se puede resolver el siguiente *problema*:

Hallar la raiz cuadrada de un número por medio de los impares, (ó bien) *hallar juntas todas las cifras de la raiz cuadrada entera ó exacta de un número dado.*

NOTA.—El enunciado del problema tal como está, es todo lo general que puede ser, por más que en su aplicacion práctica y haciendo más fácil el hallazgo de cada raiz, se puede y aun conviene enunciarlo de este otro modo:

«Determinada la cifra de órden superior de una raiz, por el »método ordinario, determinar á la vez todas las restantes.»

En este caso, la potencia superior que sirve de base al procedimiento, se formará con la cifra de órden superior de la raiz, aumentada en una unidad. Esta explicacion es aplicable á todas las raices.

Sea el número 68,936.

Tomemos un cuadrado mayor y el más aproximado posible, sin necesidad de escribir operacion alguna; por ejemplo 90,000 cuadrado de 300.

El impar correspondiente á la raiz 300 es

$$300\times2-1=599.$$

La diferencia entre 90,000 y el número 68,936 es 21,064.

Conocemos, pues, el impar mayor contenido en esta diferencia; y si llegamos á conocer el menor, el problema estará resuelto, puesto que, el menor menos 1 partido por 2, nos dará la raiz del número propuesto, ó la del mayor cuadrado contenido en él, si no fuese cuadrado perfecto.

Divídase la diferencia 21,064 por 599, impar mayor contenido en ella, y se tendrá el cociente entero 35, y de resíduo 99.

$$\begin{array}{r|l} 21,064 & 599 \\ \cline{2-2} 3,094 & 35 \\ 99 & \end{array}$$

lo cual nos dice que, por debajo del 599 hay otros 34 impares consecutivos al mismo, cuya suma está contenida en la diferencia 21,064, sobrando aun *directamente* 99 unidades.

Pero es indudable que del primer impar inferior al 599 sobran dos unidades, del siguiente 4, del otro 6, y del inferior á todos $34\times2=68$. Luego de todos los impares quedará de sobrante la suma $2+4+6+\ldots\ldots 68$, que es igual á $\frac{(68+2)34}{2}=35\times34=1190$; y sumado esto con el 99, del resíduo directo, será el sobrante total, 1289.

El inferior de los impares deducidos será

$$599-34\times2=531.$$

Tenemos, pues, que de la diferencia 21064 hemos sacado 34 impares inferiores y consecutivos á 599, siendo el menor 531, y habiendo un sobrante de 1289

Réstanos por lo tanto averiguar cuántos impares inferiores y consecutivos á 531, hay contenidos en el sobrante 1289, para lo que procederemos del mismo modo que antes, dividiendo el 1289 por el impar inmediato al 531 que es 529, como primero y superior contenido en el sobrante:

$$\begin{array}{r|l} 1289 & 529 \\ \cline{2-2} 231 & 2 \end{array}$$

El cociente entero 2 indica que solo hay un impar inferior al 529, que es 527, contenido con aquel en el dividendo 1289, quedando de resíduo 231: pero del impar 527 sobran dos unidades que dan con el resíduo 233.

Y como este sobrante total es menor que 525, impar que sigue al 527, nos dice esto que el impar menor contenido en la diferencia 21.064 es el 527, sobrando 233 unidades.

De donde resulta que $527-2=525$: y $\frac{525-1}{2}=262$:

y 262=raiz cuadrada entera de 68,936.

Y que el resíduo de la raiz será el impar 525 disminuido en el sobrante de la última operacion ó sea

$$525-323=292;$$

puesto que el 525 es la diferencia entre los cuadrados de 262 y 263.

Debe observarse que la raiz 262 es tambien igual *al último impar* 525 *tomado como divisor, disminuido en una unidad y partido por* 2.

Con este ejemplo á la vista cualquiera puede ya deducir la regla práctica para encontrar por tal procedimiento la raiz cuadrada de un número, por medio de los impares: ó para hallar juntas todas las cifras de la raiz.

Espondremos, sin embargo, dicha regla del siguiente modo:

«Para hallar la raiz cuadrada de un número entero, se »toma el cuadrado superior más inmediato posible, sin ne»cesidad de escribir número alguno: de dicho cuadrado se »resta el número dado, y la diferencia D_1 será el *primer di»videndo.*

»El primer divisor será la raiz r del cuadrado que se to»mó, multiplicada por 2 y restando 1, es decir: $2r-1=d_1$

$$1.^{a}\text{ division}\quad \begin{array}{l|l} D_1 & d_1 \\ \hline R_1 & C_1 \end{array}$$

»El dividendo de la 2.ª division será $C_1(C_1-1)+R_1=D_2$

»Y el divisor de la 2.ª division será $2(r-C_1)-1=d_2$

2.ª division $D_2 | d_2$

$R_2 \; C_2$

»El dividendo de la 3.ª será $C_2(C_2-1)+R_2=D_3$

»Y el divisor de la 3.ª será $2(r-c_1-C_2)-1=d_3$

3.ª division $D_3 | d_3$

$R_3 \; C_3$

»Y así se continúa hasta que el dividendo último obte-»nido sea igual ó menor que el divisor; en cuyo caso la raiz »buscada será: $r-(C_1+C_2+C_3+ \dots 1)$ que corresponde del »último cociente aunque sea cero.

»Y el resíduo será la diferencia entre el último divi-»dendo y el último divisor.

Para que con toda claridad se comprenda el modo de aplicar en la práctica este procedimiento, y cuán fácil es la ejecucion, sobre todo, si se procede conforme á la nota que subsigue al enunciado del problema, hallaremos la raiz cuadrada del número 326439.

Por el método ordinario vemos que la cifra superior de la raiz es 5 ; agregándole 1, y juntándole despues dos ceros, será 600 la raiz cuadrada de 360000, cuadrado superior que tomamos para empezar el cálculo.

360000
—326439 número dado
= 33561 primer dividendo.

El primer divisor será: $600 \times 2=1200-1=1199$

1.ª division....... 33561 | 1199
9581 27 1.r cociente
resíduo directo......... 1188
+ 702
1890

Al residuo directo 1188 se agrega $27 \times 26 = 702$; y la suma 1890 será el 2.° dividendo.

El segundo divisor será el *primero*, restándole dos veces el cociente, ó sea: $1199 - 27 \times 2 = 1145$

2.ª division..	1890	1145	
2.° residuo completo:	745	1	2.° cociente
3.ª division.........	745	1143	
		0	

La raiz buscada, es, pues:

$$600 - (27 + 1 + 1) = 571 = \frac{1143 - 1}{2}$$

y el resíduo será, el último divisor 1143—745 (último residuo)=398.

Hállese por igual modo la raiz cuadrada de 45326823, y se verá que, como en el caso anterior, queda determinada con solo ejecutar dos divisiones.

La novedad y ventajas del procedimiento, quedan, pues, bien demostradas en cuanto á la raiz cuadrada; y en cuanto á las de mayor grado, luego se verá que las ventajas y facilidad son inmensamente mayores.

FIN DEL PRIMER CUADERNO.