0191
81 (8)

EL PROBLEMA DE LAS ECUACIONES

ALGEBRAICAMENTE RESUELTO

POR

MANUEL VAZQUEZ PRADA, ABOGADO.

CUADERNO NOVENO Y ÚLTIMO.

Nueva solución de cuarto grado con resolvente de tercero.

Se resuelve por la misma la numérica, para dividir el círculo en quince partes iguales.

La ecuación de coeficientes racionales sólo puede contener en sus raices radicales de segundo grado.

Ecuación con incógnita sometida á radicales, y las de coficientes irracionales, modo de resolverlas.

La eliminación de incógnitas, convertida en resolver sistemas de ecuaciones.

Se preparan para el método de las series, hasta el séptimo grado.

A-1184560

OVIEDO:

IMPRENTA DE PARDO, GUSANO Y COMPAÑÍA

Calle de San José, núm. 6.

1890

Esta obra es propiedad del autor.

PRÓLOGO.

Habiendo ofrecido presentar algebráicamente resuelta la ecuación de que depende la división del círculo en quince partes iguales, era ya forzoso hacerlo, y al efecto elegir el procedimiento que había de aplicarse, entre los muchos descubiertos para la de cuarto grado.

La ecuación, como luego se verá, es de coeficientes racionales, y de cuatro raices irracionales, puesto que no dió ninguna racional, tratándola por el método de las series. Por otra parte, las raices irracionales de la misma no podían ser sino del segundo grado, según que así se demuestra en el apéndice de este cuaderno, y además conjugadas dos á dos.

Esto así, y debiendo las cuatro raices estar contenidas en cada una de las cuatro fórmulas de un procedimiento dado, no fué difícil comprender que cada una de las fórmulas, á medio de los signos, debía poderse convertirla en las cuatro conjugadas.

El método que por estas razones se siguió, en el supuesto, al principio, de que solo serviría para ecuaciones de esta clase, resultó después, no solo general, sinó acaso el más fácil de aplicar á todas las de cuarto grado.

Que la tal ecuación era preciso resolverla algebráicamente, no había duda, pues de no hacerlo, pudiera alguien pensar, y decir acaso, que el Algebra era impotente para ello.

Con este cuaderno, incluso el apéndice con que acaba, se dá fin á la investigación científica sobre el problema de las ecuaciones. Empezóse inconscientemente por 1+1, y acabóse resolviendo algebráicamente el problema del *infinito absoluto numérico.*

El que quiera enterarse de todas las novedades que al andar ese camino se encontraron, tendrá que leer todos los cuadernos página á página; pero el que solo desee, ó solo necesite conocer *el modo de resolver algebráicamente todas las ecuaciones, y los sistemas de ecuaciones*, le bastará con leer dos soluciones de tercer grado, una con, y otra sin radical cúbico, la sistemática de cuarto, con la expuesta en este libro, y las sistemáticas de quinto, sexto y séptimo grado, con las cuales basta para comprender la del grado enésimo. Entendidas estas soluciones, queda entendida también la del sistema de n incógnitas y ecuaciones del grado n.

Como consecuencia de esto, la cuestión de eliminar incógnitas desaparece en absoluto del Algebra, puesto que se convierte en lo de resolver sistemas de ecuaciones. Y asímismo, la cuestión de resolver una ecuación cuya incógnita se presente sometida á radicales de diferente grado, se convierte también en la de resolver un sistema de tantas incógnitas y ecuaciones más una, como radicales tenía la propuesta.

Para llegar á conocer todo esto, el que sepa el Algebra elemental uo necesita mas allá de dos ó tres dias de trabajo.

Para la de tercer grado deberá estudiarse la solución con radical cúbico, fundada en la relación $c^2=3bn$, y la que solo lleva radicales de segundo grado, demostrada en el cuaderno cuarto, páginas 33 y siguientes.

En el apéndice adjunto, bajo la forma de *notas*, se aclaran ó demuestran ciertos conceptos generales, que por la premura con que se trabajó la obra, ó no se mencionaron en ella con la debida claridad, ó no se les dió la importancia que en sí tienen para hacer que sea completo y acabado *el conocimiento del problema de las ecuaciones.*

La manera de resolver un ecuación, cuya incógnita se encuentre sometida á diferentes radicales; el modo de resolver las ecuaciones de coeficientes irracionales; la demostración de que las de coeficientes racionales sólo pueden contener en sus raices el radical de segundo grado, y la indicación de que, en la de tercer grado, si se determina *una segunda raíz cúbica* se presenta á resolver una ecuación en todo idéntica á la propuesta; todo esto, y otras cuestiones de no menos importancia relativa, se encuentra compendiadamente expuesto en las indicadas notas.

En la obra, por lo demás, se advertirán sin duda, erratas de imprenta, excesiva concisión en algunas demostraciones, y falta de verdadero orden en la exposición y colocación de las materias; pero todo esto no quita, sin embargo, un ápice de importancia á la verdad que inconcusamente resulta demostrada y ganada para la ciencia: *la resolución algebráica de todas las ecuaciones, y de los sistemas de n incógnitas y ecuaciones del grado n.*

Y por fin, en la ejecución de la obra no hubo, ni era posible que le hubiese, un plan preconcebido, puesto que siempre se iba en busca de algo que no se conocía: la tarea de cada dia era como la consecuencia necesaria de lo que quedaba hecho hasta en el dia anterior.

ECUACIÓN DE CUARTO GRADO.

SÉPTIMO PROCEDIMIENTO NO SISTEMÁTICO.

Solución por el mismo de la ecuación numérica para dividir el círculo en quince partes iguales.

§ 1.º

Exposición del método.

Sea la ecuación general $x^4+bx^3+cx^2+dx+n=0$. (A)

Sus cuatro raices pueden considerarse comprendidas en esta general.

$$x+p\pm\sqrt{q}\pm\sqrt{r\pm s\sqrt{q}}. \qquad (A_1)$$

Las letras p, q, r, s, representan las cuatro condiciones de la ecuación, contenidas en los coeficientes de la misma.

Pasando el doble radical al segundo miembro, elevando los dos al cuadrado, pasando al segundo los términos que contengan $\sqrt{q}$, que se separará como factor común, y elevando al cuadrado otra vez, se ordena para x, y se obtiene:

$$\begin{array}{r|l|l}
x^4+4px^3+6p^2 & x^2+4p^3 & x+p^4 \quad -qs^2=0 \\
-2q & -4pq & -2p^2q+4pqs \\
-2r & -4pr & -2p^2r \\
 & +4qs & -2qr \\
 & & +q^2 \\
 & & +r^2
\end{array} \qquad (A_2)$$

Igualando entre sí los coeficientes respectivos de ésta con los de (A), se tiene primero $4p=b$, y por lo tanto, $p=\frac{b}{4}$.

Siendo ya conocido p en el coeficiente de x^2, resulta

$$-2r-2q+6p^2=c \qquad (k)$$

ó bien para

$$r=\frac{6p^2-2q-c}{2}. \qquad (A_3)$$

En los términos de x, igualando resulta:

$$4qs-4pr-4pq+4p^3=d \qquad (k_1)$$

Sustituyendo el valor de r, se tiene para s:

$$s=\frac{d+8p^3-2cp}{4q}. \qquad (A_4)$$

Igualando toda la última cantidad de (A_2) con el n de (A), sustituyendo los valores de s y r, y ordenando para q, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 64q^3-192p^2 \\ +32c \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} q^2+192p^4 \\ -64cp^2 \\ +16dp \\ +4c^2 \\ -16n \\ \\ \end{array}\right| \begin{array}{l} q-64p^6=0 \\ +32cp^4 \\ -16dp^3 \\ -4c^2p^2 \\ +4cdp \\ -d^2 \end{array} \qquad (A_5)$$

La cual, como se vé, es de tercer grado, y es también la resolvente general, en este método, para todas las de cuarto grado, no solo las de raices indeterminadas, sinó las de raices de cualquiera forma.

Este procedimiento tiene la ventaja de que, una vez resuelta la ecuación de q, los valores de p, r, s, quedan determinados en las igualdades respectivas (A_4), (A_3) y $p=\frac{b}{4}$, todas de primer grado.

Poniendo luego los valores de p, q, r, s en (A_1), se tendrán las cuatro raices de la ecuación dada en esta forma:

$$\begin{array}{l} x+p+\sqrt{q}+\sqrt{r+s\sqrt{q}} \\ x+p+\sqrt{q}-\sqrt{r+s\sqrt{q}} \\ x+p-\sqrt{q}+\sqrt{r-s\sqrt{q}} \\ x+p-\sqrt{q}-\sqrt{r-s\sqrt{q}} \end{array} \qquad (A_6)$$

La ecuación (A_5), de tercer grado para q, podrá resolverse por cualquiera de los procedimientos de su grado; pero como al tratarse de las numéricas, lo que importa en cada caso es conocer un valor de q, entero ó fraccionario, si es que le tiene, el primer método aplicable es sin duda, como luego se verá, el fundado en la relación de las potencias con las series de los números. Y si por tal método no se obtiene ningún valor entero ni fraccionario para q, entonces ya se puede aplicar cualquiera de los otros para determinar sus valores irracionales.

Vamos, pues, á resolver por el procedimiento general que precede, una numérica especial, que ya queda mencionada, y á la cual los algebristas no encontraron *algebráicamente* solución, aunque sí llegaron por modos no algebráicos á determinarle un sistema de raices que la reproducen. A fuerza de tanteos llegaron á ver que entre las cantidades conocidas debía encontrarse la expresión $\sqrt{5}$.

Sin esta ocurrencia casual, ni aun por tanteos hubieran podido llegar á resolverla.

La ecuación, pues, de que se trata, es la siguiente:

§ 2.º

Ejemplo numérico.

$$x^4+x^3-4x^2-4x+1=0. \qquad (A_7)$$

De esta ecuación dependía la división del círculo en quince partes iguales, y por eso al parecer se ocuparon de ella, no sólo los algebristas, sinó también los geómetras.

Bien mirado no tiene nada de extraño que no pudieran resolverla algebráicamente, puesto que teniendo como resolvente *una dc tercero*, y no habiéndose llegado á resolver una numérica de este grado, á causa de la cantidad $(A\pm b\sqrt{-3})$, muy mal se podría resolver aquella ni otra cualquiera del cuarto grado, con tal que no tuviese condiciones que la hicieran *susceptible de rebaja*. (Véase J. A. Serret. Tomo 2.º, pág.ª 637 y siguientes).

Una raíz de (A_7), hallada por los algebristas, y por los medios ya indicados, es:

$$x+\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4} \qquad (A_8)$$

Las otras tres salen de ésta conjugando los signos como están en (A_6).

Veamos cómo estas raices se manifiestan por el procedimiento algebráico que precede.

En la ecuación de q, (A_5), las letras c, d, n, p, representan los coeficientes de la (A_7); así, $p=\frac{1}{4}$ según ya se hizo, $c=-4$, $d=-4$, $n=1$.

Sustituyendo estos números en (A_5), y multiplicando por el denominador 64 que queda en el término de p^6, resulta la ecuación

$$4096q^3-35\times256q^2+16\times195q-225=0 \qquad (A_9)$$

Haciendo en ésta $16q=z$, y sustituyendo, se obtiene:

$$z^3-35z^2+195z-225=0 \qquad (A_{10})$$

De ésta depende la solución de (A_7). Las soluciones de la misma, *algebráicamente*, ya se ha visto que son muchas, ora con radical cúbico, ora sin este radical.

Cada solución de (A_{10}), suponiendo desiguales sus tres raices, nos dará tres soluciones en (A_7). Pero la solución más fácil y más breve de (A_{10}), es la que vamos á aplicar, y es la fundada en *la relación de las potencias con las cuatro primeras series de los números.*

Esta relación está demostrada en el cuaderno primero.

§ 3.°

Método de las series.

Según dichas relaciones para (A_{10}) se tiene:

$$\begin{aligned} z&=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.....)\\ z^2&=z+2(0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15.....) \qquad (A_{11})\\ z^3&=z+6(0,\ 1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35.....)\end{aligned}$$

Poniendo en lugar de z^3 su igual del segundo miembro en la tercera, y en vez de $-35z^2$, el segundo miembro en la segunda, multiplicado por -35, será:

$$\begin{aligned} &195z\\ &-35z-70(0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15.....)\\ &+z+6(0,\ 1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35.....)=-225\end{aligned}$$

Sumando, y reponiendo la serie que representa los valores que puede tomar z, tendremos:

$$\begin{aligned} &+161(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.....)\\ &-70(0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15.....) \qquad (A_{12})\\ &-6(0,\ 1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35.....)=225\end{aligned}$$

Ahora, multiplicando el 161 sucesivamente por los números de la primera serie horizontal, y el —70, y el +6, por el número respectivo que forme columna con cada uno de los de arriba; sumando y restando los productos obtenidos según el signo, la operación que dé el +225 del segundo miembro, nos demuestra un valor de z, que será el número tomado en la serie superior horizontal.

Ante todo conviene advertir que, si z tiene un valor entero, nos dará éste uno entero ó fraccionario para q. Y al contrario, si z no tiene ningún valor entero, tampoco le tendrá q, ni fraccionario. Pero observando que en la raiz general (A_1), q, r, y s son las cantidades subradicales, es lógico suponer que una de las tres, al menos, tenga un valor entero ó fraccionario, el cual nos le dará necesariamente la igualdad (A_{12}). Y si en ella ahora q no tuviese un tal valor, en vez de despejar r en (k), y s en (k_1), se despejaría q en la primera, deduciendo para r ó s la de tercer grado (A_5).

Veamos, pues, si z tiene ó no un valor entero. Multiplicando en (A_{12}) el 161 por el 1, por el 2, por el 3 y por el 4 sucesivamente, y los —70 y +6 por los inferiores respectivos, no se obtiene el +225; y con el 5 se tiene:

$$\begin{aligned} 161\times5&=805\\ 6\times20&=120\\ \hline &=+925\\ -70\times10&=-700\\ &=+225 \end{aligned}$$

Y por to tanto, $z=5$. Con los números siguientes al 5, no se obtiene ya más el mismo resultado.

Dividiendo la (A_{10}) por la raiz $(z-5)$ se obtiene de cociente exacto

$$z^2-30z+45=0 \qquad (A_{13})$$

La cual nos dá $z=15\pm6\sqrt{5}$ (A_{14})

Ahora, como hemos hecho $z=16q$, se tendrá:

$$q=\frac{z}{16}=\frac{5}{16}$$

Poniendo este valor de q en las fórmulas de r y s, (A_3), (A_4), se obtiene:

$$r=\frac{30}{16}, \qquad s=\frac{-6}{4};$$

y poniendo los valores de p, q, r, s, en la raiz general (A_1), resulta:

$$x+\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{30\pm6\sqrt{5}}}{4},$$

la cual, conjugada como en (A_6), dá las cuatro raices de (A_7), idénticas á las que hallaron los algebristas por los medios de tanteo y aproximación.

El procedimiento que precede es general y se aplica á todas las de cuarto grado, cualquiera que sea la forma de las raices, y aun la de los coeficientes.

El resolver la ecuación numérica (A_7) por este procedimiento, y no por uno de los otros, fué debido á que, habiendo de poner en este libro uno de los no sistemáticos, y estando sin publicarse sólo el que precede, era muy lógico el preferirle, ya por esto, ya por la facilidad con que por el mismo se resuelven todas las ecuaciones numéricas.

Para x^4 está demostrada en el cuaderno primero esta relación:

$$x^4=x+2\,.\,s.^{2.a}-12\,.\,s.^{3.a}+24\,.\,s.^{4.a}$$

La s representa *serie*, y las sumas de las series son, como ya se ha visto, hasta x términos empezando desde el *cero*.

De modo que con esta relación y las de x^3, x^2, y x, que ya quedan indicadas, se tiene lo necesario para determinar por tal método las raices enteras ó fraccionarias que pueda tener la ecuación numérica de cuarto grado.

APÉNDICE.

NOTAS GENERALES, EN LAS QUE SE ACLARA Y COMPLETA EL CONOCIMIENTO DEL PROBLEMA DE LAS ECUACIONES, ALGEBRÁICAMENTE RESUELTO.

Primera.

En toda ecuación que represente, ó pueda representar las condiciones de un problema numérico dado, las raices de la misma para ser ciertas, han de reproducirla cuando se las multiplica todas entre sí. Mas este carácter de las raices no autoriza para decir que la ecuación es el producto de las mismas, puesto que de suponerlo así, para formar los coeficientes sería preciso conocer antes los valores especiales de las raices; pero entonces la ecuación, y el problema que representase, serían inútiles. La ecuación nace de las condiciones del problema, y el fin de todo el procedimiento hasta la solución definitiva, es precisamente el descubrir las raices, ó valores de las incógnitas.

Segunda.

Toda ecuación dada, además del problema que le haya dado origen, puede ser enunciada en forma de otro problema, de condiciones diferentes, pero cuyas soluciones sean idénticas á las del primero. Así, si se propone *hallar* dos números cuya suma sea b, y cuyo producto sea n, la ecuación resultante $x^2+bx+n=0$, nos enuncia otro problema en esta forma: *hallar* dos números tales que, el cuadrado de uno de ellos, más la suma de los dos multiplicada por el mismo, más el producto de los dos, sea igual á *cero*. Cada ecuación en los grados sucesivos contiene un enunciado de forma análoga al que precede.

Tercera.

Al suponer que una ecuación se forma con la multiplicación de sus raices, coincidimos al construirla, con el segundo enunciado de que habla la nota precedente. En efecto: si multiplicamos las dos raices $(x-p)=0$ y $(x-q)=0$, no podemos decir $x \times x = x^2$, sin admitir que $x=x$, pues á nadie se le ha ocurrido llamar *cuadrado* al producto de dos cantidades desiguales. La misma dificultad se presenta al formar el segundo término de la ecuación. Y sin embargo de esto, decimos que $x \times x = x^2$; pero al decirlo así, no ponemos x^2 como el producto de dos x desiguales en valor, sinó como el cuadrado preciso de una de las dos. Y al hacer en el segundo término $-px$, $-qx = -(p+q)x$, no consideramos las dos x desiguales, sinó la x sola que pusimos en el primer término. De este modo, queda como evidente el enunciado de la segunda nota.

Cuarta.

La ecuación del grado n, si n es par, es el producto de $\frac{n}{2}$ ecuaciones de segundo grado; y si n es impar, es el producto de $\frac{n-1}{2}$ ecuaciones de segundo grado, multiplicado por una de primero.

De aquí resulta demostrada á priori la posibilidad de que todas las ecuaciones se resuelvan con solo radicales de segundo grado. Entiéndase que nos referimos siempre á la ecuación de coeficientes racionales.

La de tercer grado, con tres raices irracionales del mismo grado, es también el producto de una de segundo por una de primero: en ésta está en primer grado la raíz irracional, y en aquella entra con los coeficientes de los términos segundo y tercero, á formar las dos raices irracionales conjugadas.

Quinta.

La ecuación de segundo grado, por su sencillez, se la puede convertir directamente en la igualdad de *dos segundas potencias*, en tal modo que al tomarse las raices, resulte la incógnita despejada.

La de tercer grado, que tiene ya tres coeficientes, se la puede transformar en la igualdad *dos terceras potencias*, en condiciones tales que, al tomarse las raices cúbicas, quede la incógnita despejada. De aquí, como consecuencia, el que en las fórmulas de solución, así preparadas, se presente el radical de tercer grado.

La de cuarto grado, en la que ya se tendrían que preparar cuatro coeficientes, no se la puede transformar en la igualdad de *dos cuartas potencias*, en tal forma que al tomarse las raices quede la incógnita despejada.

Es esto tan palmario, que cualquiera puede comprobarlo por sí mismo. Y si en la de cuarto no se puede, en las siguientes no es dudoso que con mayor razón no se podrá tampoco, á causa de ir siendo mayor el número de coeficientes que habría que preparar.

Sexta.

Por el contrario: las ecuaciones de coeficientes racionales, desde el cuarto grado inclusive en adelante, no pueden formarse por la multiplicación *de raices irracionales del mismo grado* que tenga la ecuación.

Vamos á ver esto brevemente en un ejemplo de cuarto grado, para lo que suponemos que los coeficientes son b, c, d, n.

Pongamos las siguientes cuatro raices, con la ventaja ya de llevar formado el coeficiente b.

$$\frac{b}{4}+\frac{\sqrt[4]{p}}{4}+\frac{\sqrt{b+\sqrt[4]{p}-16q}}{4}$$

$$\frac{b}{4}+\frac{\sqrt[4]{p}}{4}-\sqrt{\frac{b+\sqrt[4]{p}-16q}{4}}$$

$$\frac{b}{4}-\frac{\sqrt[4]{p}}{4}+\sqrt{\frac{b-\sqrt[4]{p}-16r}{4}}$$

$$\frac{b}{4}-\frac{\sqrt[4]{p}}{4}-\sqrt{\frac{b-\sqrt[4]{p}-16r}{4}}$$

La primera relación de estas cuatro raices ha de ser, que su suma sea igual á b; lo cual se realiza.

La cuarta relación ha de ser, que el producto de las cuatro sea igual á n: el producto es qr; y entonces será:

$$qr=n \tag{A}$$

La segunda relación será, que la suma de los productos binarios iguale á c: la suma de estos producto es:

$$q+r+\frac{b^2}{4}-\frac{\sqrt[4]{p^2}}{4}=c;$$

O bien expresando $\sqrt[4]{p}$ por z:

$$q+r+\frac{b^2}{4}-\frac{z^2}{4}=c. \tag{A_1}$$

Y la tercera relación ha de ser, que la suma de los productos ternarios iguale á d; lo cual dá: después de sustituir $q=\frac{n}{r}$

$$z^3-bz^2-b^2z-\frac{16nz}{r}+\frac{16bn}{r}+b=32d. \tag{A_2}$$

Sustituyendo $q=\frac{n}{r}$ en (A_1), se tiene:

$$\frac{n}{r}+r+\frac{b^2}{4}-\frac{z^2}{4}=c. \tag{A_3}$$

Despejando r en (A_2) y sustituyendo en (A_3) vése desde luego que sale para z una ecuación de sexto grado.

Supongámosla resuelta con radicales de segundo grado, *puesto que no se la puede suponer con otros:* y entones, como hemos hecho $\sqrt[4]{p}=z$, tendremos $p=z^4$. Es decir, que el radical de cuarto grado puesto en las raices, tiene que desaparecer de ellas para que sea posible producir la ecuación de coeficientes racionales.

Lo que sucede en la de cuarto no es dudoso que con igual ó mayor razón ha de suceder en las siguientes. Y si con raices de igual grado no se pueden producir las ecuaciones, con mayor razón no se podrá, multiplicando raices de grado diferente.

La de cuarto grado puede producirse con raices de tercero; pero no tomándolas á priori, sinó precisamente con las del procedimiento empleado para resolverla, cuando sea de los no sistemáticos. En éstos el radical cúbico, viene al procedimiento, traido por la resolvente de tercer grado, que sólo se presenta en la de cuarto.

Séptima.

Según lo expuesto en las dos notas precedentes, la ecuación de coeficientes racionales, con excepción de las de tercero y cuarto, no puede contener en las raices que la resuelvan, otros radicales que el de segundo grado.

Con lo cual, estándolo ya á priori, se demuestra á posteriori, que es lógico y de todo punto racional *el procedimiento sistemático* que resuelve todas las ecuaciones con sólo radicales de segundo grado.

Octava.

Coeficientes irracionales.

La ecuación de coeficientes irracionales, si se ha formado *ad libitum*, ó si fuera posible que fuese la expresión de un problema dado, tendría sus raices directamente en las fórmulas generales de cada grado.

Pero si se hubiese formado por la multiplicación directa de raices irracionales, entonces estas raices, ó se descubren directamente por el análisis, que es sumamente fácil, ó bien para facilitar luego éste, se forma y se resuelve aparte *la ecuación cuyas raices serán* los términos racionales que entren en las de la propuesta.

En los coeficientes de ésta, desde el segundo término, habrá en cada uno un *sumando racional*, los cuales serán: *el primero*, la suma de los términos racionales de sus raices; *el segundo*, la suma de sus productos binarios; y así siguiendo hasta el último, que será el producto de todos los términos racionales.

Resuelta la tal ecuación, lo demás no ofrece ya dificultades de ninguna especie. Si en las raices hubiese radicales iguales, el análisis resultaría más difícil.

Como ejemplo de la segunda clase, puede resolverse la siguiente:

$$\begin{array}{rr|rr|rr}
x^3 & +6 & x^2 & +11 & x & +6 \; =0 \\
 & +\sqrt{3} & & +4\sqrt{3} & & +3\sqrt{3} \\
 & -\sqrt{5} & & -5\sqrt{5} & & -6\sqrt{5} \\
 & & & -\sqrt{5}\sqrt{3} & & -3\sqrt{5}\sqrt{3}
\end{array} \qquad (A)$$

Desde luego se vé que, la suma de los términos racionales de las raices es 6; la de los productos binarios 11; y el producto de las tres 6. Formando, pues, la ecuación:

$$Y^3+6Y^2+11Y+6=0 \qquad (A_1)$$

tendrá ésta sus raices racionales, y resuelta por cualquier método nos dará, sin dificultad, las raices $(Y+1)$, $(Y+2)$, $(Y+3)$. Y por lo tanto, 1, 2, 3, son los términos racionales de las raices de (A).

En los sumandos que forman el último término de la propuesta, tienen que aparecer los productos ternarios que se puedan formar con los elementos distintos de las raices: el producto $-3\sqrt{5}\sqrt{3}$, nos dá los dos radicales, uno de cada raiz, y el factor 3 de la tercera que por lo tanto será racional. El signo de los radicales está indicado en el segundo término: $+\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$.

Ahora, si de la suma 6 se quita el 3 que forma la raiz racional, queda 3 como suma de los términos racionales de las otras dos raices: y como son enteros, serán 1 y 2. Solo falta, pues, saber cuál de éstos vá con $\sqrt{3}$ y cuál con $-\sqrt{5}$.

Para esto tenemos en el penúltimo término de (A) el sumando $4\sqrt{3}$, el cual es la suma de dos productos binarios, ó sea $\sqrt{3}$ multiplicado por la suma de los dos términos racionales de las otras dos raices, uno de éstos ya sabemos que es 3; luego el otro es 1. Es decir, que una raiz será $(1-\sqrt{5})$; y la otra, por lo mismo, será $(2+\sqrt{3})$.

Si nos fijásemos en el sumando $-5\sqrt{5}$ del penúltimo término, ó en los del último, $3\sqrt{3}$ y $-6\sqrt{5}$, llegaríamos al mismo resultado.

Sin necesidad de formar la ecuacion (A_1), se puede resolver la dada con muy poco aumento de las dificultades en el análisis.

Con este ejemplo basta para hacer ver, que las ecuaciones de coeficientes irracionales tienen solucion tan fácil, ó más si cabe, que las otras.

Novena.

Los n valores que corresponden á la incógnita en la ecuación del grado n, están representados por las n fórmulas finales que nos dá el procedimiento sistemático; y en cada fórmula, por las (n—1) ecuaciones auxiliares que se resuelven, para rebajar una unidad en cada grado, dando siempre la última resuelta dos valores, por ser la del segundo.

Décima.

El procedimiento más breve, fácil y seguro para determinar ó separar las raices enteras ó fraccionarias en todas las ecuaciones, especialmente desde el quinto grado, es el fundado en la relación de las potencias con las series numéricas. Separadas así las raices racionales, serán irracionales todas las de la ecuación que quede, las cuales estarán determinadas en las fórmulas generales de cada grado.

Undécima.

Referente al tercer grado.

Cuando la ecuación de tercero con tres raices irracionales del mismo grado, se la resuelve con solo radicales de segundo, las fórmulas que se obtienen de cada valor que se dé á la disponible s, contienen valores aproximados de las indeterminadas de tercer grado, con la eliminación del radical cúbico.

Duodécima.

También se refiere al tercer grado.

Cuando en la misma de tercer grado con tres raices irracionales del mismo grado, se determinan los valores de x y z en la expresion $x \pm z\sqrt{-3}$, que representa las tres raices cúbicas de $A \pm B\sqrt{-3}$, los valores de x y z son también irracionales de tercer grado: y expresando la cantidad subradical cúbica por $A' \pm B'\sqrt{-3}$, y las raices cúbicas de ésta por $x' \pm z'\sqrt{-3}$, las ecuaciones de x' z' son en todo idénticas á la propuesta. Esto indica bien claro que, si se trata de hallar valores aproximados por este método, las primeras fórmulas son más sencillas que las segundas, puesto que en éstas hay dos radicales cúbicos y en aquellas uno solo.

Décimatercia.

La ecuación cuya incógnita se presente sometida á diferentes radicales de grado desigual, igualando cada radical á una incógnita diferente, haciendo desaparecer los radicales y sustituyendo en la ecuacion propuesta, se presenta á resolver en la forma de un sistema de tantas incógnitas y ecuaciones más una, como radicales hubo que eliminar.

Décimacuarta.

La eliminación de incógnitas, puesto que la de cada ecuación se la puede despejar en función de los coeficientes, queda reducida á la solución del sistema de ecuaciones de que se trate.

Décimaquinta.

Método de las series.

La de quinto grado, para determinar las raices enteras y fraccionarias que contenga, se la transforma así:

Sea: $Y^5+bY^4+cY^3+dY^2+eY+n=0$

$$\left.\begin{array}{l} eY \\ +dY+2d(\text{serie } 3.^a) \\ +cY+6c(\text{serie } 4.^a) \\ +bY+2b(\text{serie } 3.^a)-12b(\text{serie } 4.^a)+24b(\text{serie } 5.^a) \\ +Y^2\times Y^3=Y^2(Y+6(\text{serie } 4.^a)=Y^3+6Y^2(\text{serie } 4.^a) \\ \quad =Y+6(\text{serie } 4.^a)+6Y^2(\text{serie } 4.^a) \end{array}\right\} =-n.$$

O bien:

$$\begin{array}{r} 6(\text{serie } 4.^a)Y^2 \\ +(1+b+c+d+e)\ (\text{serie } 2.^a) \\ +2(b+d)\ (\text{serie } 3.^a) \\ +6(1-2d+c)\ (\text{serie } 4.^a) \\ +24b\ (\text{serie } 5.^a)=-n. \end{array}$$

Poniendo las series y en vez de Y^2 los cuadrados numéricos de los valores que puede representar Y, serán:

$$\begin{array}{lr} & 6(0,\ 1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35.....)\ (1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25.....) \\ (k) & +(1+b+c+d+e)\ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.....) \\ & +2(b+d)\ (0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10.....) \\ & +6(1-2b+c)\ (0,\ 1,\ 4,\ 10,\ 20.....) \\ & +24b\ (0,\ 1,\ 5,\ 15,\ 35.....)=-n. \end{array}$$

El modo de operar en ésta para resolver las numéricas, es idéntico al empleado en la de tercer grado, con solo tener en cuenta, que el 6 del primer sumando, se multiplicará por el término del primer paréntesis que corresponda en orden al número que se tome como supuesto valor de Y en la serie (k); y luego el producto se multiplicará por el cuadrado que en el segundo paréntesis esté sobre el valor atribuido á Y.

Sexto grado.

$$x^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+n=0.$$

Se transforma así:

$fx=fx$

$ex^2=ex+2es^{3.^a}$

$dx^3 = dx + 6ds^{4.a}$
$cx^4 = cx + 2cs^{3.a} - 12cs^{4.a} + 24cs^{5.a}$
$bx^5 = bx + 6bs^{4.a} + 6bx^2s^{4.a}$
$x^6 = x^3x^3 = x^3(x + 6s^{4.a}) = x^4 + 6x^3s^{4.a} = x + 2s^{3.a} - 12s^{4.a} + 24s^{5.a} + 6x^3s^{4.a}.$

De donde sale:

$$
\begin{array}{r}
6(0,\ 1,\ 4.....)\ (1,\ 8,\ 27.....) \\
6b(0,\ 1,\ 4.....)\ (1,\ 4,\ 9.....) \\
\hline
(1+b+c+d+e+f)\ (1,\ 2,\ 3.....) \\
2(1+c+e)\ (0,\ 1,\ 3.....) \\
-6(2-b+2c-d)\ (0,\ 1,\ 4.....) \\
24(1+c)\ (0,\ 1,\ 5.....) = -n.
\end{array}
$$

Téngase presente lo dicho al final de la anterior.

Séptimo grado.

$$x^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + n = 0.$$

Se transforma así:

$gx = gx$
$fx^2 = fx + 2fs^{3.a}$
$ex^3 = ex + 6es^{4.a}$
$dx^4 = dx + 2ds^{3.a} - 12ds^{4.a} + 24ds^{5.a}$
$cx^5 = cx + 6cs^4 + 6cx^2s^{4.a}$
$bx^6 = bx + 2bs^{3.a} - 12bs^{4.a} + 24bs^{5.a} + 6bx^3s^{4.a}$
$x^7 = x^4x^3 = x^4(x + 6s^{4.a}) = x^5 + 6x^4s^{4.a} = x + 6s^{4.a} + 6x^2s^{4.a} + 6x^4s^{4.a}$

De donde sale:

$$
\begin{array}{r}
6(0,\ 1,\ 4.....)\ (1,\ 16,\ 81.....) \\
6b(0,\ 1,\ 4.....)\ (1,\ 8,\ 27.....) \\
6(1+c)\,(0,\ 1,\ 4.....)\ (1,\ 4,\ 9.....) \\
\hline
(1+b+c+d+e+f+g)\ (1,\ 2,\ 3.....) \\
2(b+d+f)\ (0,\ 1,\ 3.....) \\
6(1-2b+c-2d+e)\ (0,\ 1,\ 4.....) \\
24(b+d)\ (0,\ 1,\ 5.....) = -n.
\end{array}
$$

Téngase presente lo dicho en las dos anteriores, y que con éstas ya basta para saber cómo se preparan todas.