LUCUBRACIONES ALGEBRAICAS

PARTE SEGUNDA.—ECUACIONES

Libro segundo.—Cuaderno primero.

CINCO SOLUCIONES NO SISTEMÁTICAS DE CUARTO GRADO

LUCUBRACIONES ALGEBRAICAS

POR

DON MANUEL VÁZQUEZ PRADA

PARTE SEGUNDA.—ECUACIONES

LIBRO SEGUNDO

Ecuaciones desde cuarto grado inclusive en adelante.

Cuaderno primero.—Cinco soluciones no sistemáticas á la de cuarto grado.

Cuaderno segundo.—Cinco soluciones sistemáticas de cuarto grado.—Una de tercero, también sistemática.—Otra de tercero, en parte sistemática, y en parte no.

Cuaderno tercero. — Una solución especial de quinto grando.—Soluciones sistemáticas de quinto grado y siguientes, con una incógnita, hasta la del grado *enésimo*.

Solución sistemática del sistema de n ecuaciones, con n incógnitas, del *enésimo* grado.

MADRID
IMPRENTA DE ENRIQUE RUBIÑOS
Plaza de la Paja, 7 bis.

1888

PROLOGO

Las soluciones de tercer grado con su propio radical, y los de cuarto *no sistemáticas*, menos la última, fueron todas descubiertas antes de haber pensado seriamente en resolver la de quinto grado.

Un amigo, peritísimo en la materia, hízome entonces entender, que el problema á resolver estaba precisamente en la de quinto grado, y que todo lo hecho valía muy poco en comparación con lo que estaba por hacer.

Yo tenía fe en que para cada ecuación debía haber por lo menos un modo de resolverla. Animado por esta fe, púseme desde luego á la de quinto grado. En las primeras tentativas, hechas casi sin rumbo fijo, empecé á comprender que sería imposible su resolución por ninguno de los procedimientos individuales, hasta entonces ensayados con éxito en las ecuaciones precedentes. Fué, pues, preciso dirigirse á los procedimientos de aplicación general, y luego de ir descubriéndolos, ensayarlos uno tras otro hasta ver todo lo que cada uno podía dar de sí.

Encontrado, por fin, uno, que es el que se expone en este libro, y una vez comprobado en la ecuación del grado *enésimo*, renuncié á seguir en busca de otros, que no es dudoso que los hay, pues para mi objeto, con uno solo me bastaba.

En la solución del sistema de n ecuaciones, con n incógnitas, del grado n, podrá verse el motivo que allí se presentó para tener que buscar las soluciones de tercer grado, sin radicales de grado impar. Está en tan íntima relación uno con otro, que, en rigor, no parece sino que no hay más que la ecuación de segundo grado.

ARTÍCULO PRIMERO

ECUACIÓN DE CUARTO GRADO

SU RESOLUCIÓN ALGEBRAICA

Primera solución.

Sea la ecuación general:

$$Y^4 + b_1 y^3 + c_1 y^2 + d_1 y + n_1 = 0. \qquad (A)$$

Haciendo $Y = z - \frac{b_1}{4}$ se sustituye y desaparece el segundo término: expresando los demás coeficientes por c, d, n, resulta:

$$z^4 + c z^2 + d z + n = 0. \qquad (A_1)$$

Hacemos en esta $z = \frac{x}{q}$; se sustituye, y multiplicando por q^4, después de multiplicar y partir por 2 el penúltimo término, se tiene:

$$x^4 + c q^2 x^2 + 2 \frac{d q^3}{2} x + n q^4 = 0. \qquad (A_2)$$

Sumando y restando la cantidad

$$\left(\frac{d q^3}{2} + c q^2\right) x^2 + \left(\frac{d q^3}{2} + n q^4\right)$$

resulta: $x^4 + 2\left(\frac{d q^3}{4} + \frac{c q^2}{2}\right) x^2 + \left(\frac{d q^3}{2} + n q^4\right) = \frac{d q^3}{2}\left(x+1\right)^2 \quad (A_3)$

Ahora daremos á q el valor necesario para que *el paréntesis* que multiplica á x^2 en el primer miembro, sin el factor 2, *elevado al cuadrado*, sea igual al último paréntesis de dicho primer miembro.

Expresando dicha igualdad y ejecutando operaciones se obtiene para q la siguiente de tercer grado:

$$d^2 q^3 + 4\,c\,d\,q^2 + (4\,c^2 - 16\,n)\,q - 8\,d = 0. \qquad (k)$$

Cuya ecuación ya sabemos resolver.

Con esto es evidente que el primer miembro de (A_3) es un cuadrado perfecto; y expresando el paréntesis de x^2 por P, y el factor que multiplica al paréntesis del segundo miembro por Q, tomaremos la raíz cuadrada en ambos, y será:

$$x^2 + P = \pm\, x\sqrt{Q} \qquad \pm \sqrt{Q}$$

ó bien

$$x^2 \mp x\sqrt{Q} + P \mp \sqrt{Q} = 0. \qquad (A_4)$$

La cual, como de segundo grado, ya está resuelta, y por lo tanto la ecuación dada.

ARTÍCULO II

ECUACIÓN DE CUARTO GRADO

Segunda solución.

Sea la ecuación (A_1) del procedimiento anterior:

$$z^4 + c\,z^2 + d\,z + n = 0. \qquad (A_1)$$

Se hace $z = \frac{x}{q}$; se sustituye, y multiplicando por q^4, será:

$$x^4 + c\,q^2 x^2 + d\,q^3 x + n\,q^4 = 0. \qquad (A_2)$$

En ésta daremos á q el valor necesario para que sea:

Cuadrado del coeficiente del término x, *más cuadrado* del coeficiente de x^2, *menos* el último término multiplicado por 4, *menos* el coeficiente de x^2 multiplicado por 2, *más* la unidad; igual á *cero*. Es decir:

$$d^2 q^6 + (c^2 - 4\,n)\,q^4 - 2\,c\,q^2 + 1 = 0. \qquad (a)$$

Haciendo $q^2 = Y_1$, y sustituyendo, resulta para Y_1 una de tercer grado que ya sabemos resolver.

Expresaremos ahora los coeficientes de (A_2) por C, D, N, y será:

$$x^4 + C\,x^2 + D\,x + N = 0. \qquad (A_3)$$

en la cual los coeficientes C, D, N, tienen entre sí la relación (a).

Dividiendo y multiplicando por 2 el penúltimo término; sumando y restando á la vez las cantidades x^2 y $\frac{D^2}{4}$, se tendrá:

$$x^4 + (C-1)\,x^2 + \left(N - \frac{D^2}{4}\right) + \left(x^2 + 2\,\frac{D}{2}\,x + \frac{D^2}{4}\right) = 0. \quad (A_4)$$

En ésta se tiene que *la cantidad del último paréntesis* es el cuadrado de $\left(x + \frac{D}{2}\right)$, la cual pasa el segundo miembro, así:

$$x^4 + (C-1)\,x^2 + \left(N - \frac{D^2}{4}\right) = -1 \times \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 \quad (A_5)$$

Y ahora digo que: *el cuadrado* del coeficiente de x^2 en el primer miembro, *es igual* á cuatro veces el último paréntesis de dicho miembro. Es decir:

$$C^2 - 2\,C + 1 \;= 4\,N - D^2$$

ó bien $\qquad D^2 + C^2 - 4\,N - 2\,C + 1 = 0.$

Cuya igualdad es cierta, por ser la misma que se ha realizado en (a) con la disponible q.

Tenemos, pues, que el primer miembro de (A_5) es el cuadrado de $\left(x^2+\frac{C-1}{2}\right)$; y tomando la raíz cuadrada de ambos miembros, será:

$$x^2+\frac{C-1}{2}=\pm x\sqrt{-1}\pm\frac{D\sqrt{-1}}{2}$$

De donde, transponiendo y ordenando con relación á x, resulta:

$$x=\frac{\pm\sqrt{-1}\pm\sqrt{1-2C\pm2D\sqrt{-1}}}{2}$$

Resuelta así (A_5), quedan resueltas todas las anteriores hasta la ecuación dada.

ARTÍCULO III

ECUACIÓN DE CUARTO GRADO

Tercera solución.

Sea la ecuación:

$$Y^4+b_1Y^3+c_1Y^2+d_1Y+n_1=0. \qquad (A)$$

Haciendo $Y=(z+s)$, se sustituye y se da á s el valor necesario para que se reduzca á *cero el penúltimo término* de la resultante, lo que nos dará á resolver una de tercer grado. Expresando luego los demas coeficientes por b, c, n, se tendrá:

$$z^4+b\,z^3+c\,z^2+n=0. \qquad (A_1)$$

Hagamos $z=\frac{x}{q}$: sustituyendo y multiplicando por q^4, será:

$$x^4+b\,q\,x^3+c\,q^2x^2+n\,q^4=0. \qquad (A_2)$$

En ésta daremos á q el valor necesario para que: *ocho veces* el segundo coeficiente multiplicado por el último término; *más cuatro veces* el cuadrado del tercer coeficiente; *menos dieciséis veces* el último término; *menos cuatro veces* el segundo por el tercero; *más* el cuadrado del segundo, sea todo igual á *cero*. Es decir, después de dividir por q^2.

$$8\,b\,n\,q^3 + 4\,c^2 q^2 - 16\,n\,q^2 - 4\,b\,c\,q + b^2 = 0. \qquad (a)$$

Esta es de tercer grado y la daremos como resuelta. Expresando los coeficientes de (A_2) por B, C, N, tendremos:

$$x^4 + B\,x^3 + C\,x^2 + N = 0. \qquad (A_3)$$

En la cual los coeficientes B, C, N, tienen entre sí la relación (a).

Multiplicando y dividiendo por 2 el segundo término; sumando y restando á la vez las cantidades $\frac{B}{2}\,x^4$ y $\frac{B}{2}\,x^2$; separando factores comunes, y dividiendo por $\frac{B-2}{2}$, se obtiene:

$$\frac{B}{B-2}\,x^2\,(x+1)^2 = x^4 + \frac{B-2\,C}{B-2}\,x^2 - \frac{2\,N}{B-2} = 0.$$

Multiplicando y partiendo por 2 el segundo término del segundo miembro, será:

$$\frac{B}{B-2}\,x^2\,(x+1)^2 = x^4 + 2\,\frac{B-2\,C}{2\,B-4}\,x^2 - \frac{2\,N}{B-2} = 0. \qquad (A_4)$$

Pero en ésta se tiene que: el quebrado que multiplica á x^2 en el segundo miembro (sin el factor 2 que le precede) elevado al cuadrado, es igual al último quebrado.

Practicando la operación, se verá que resulta para ser *cero* la misma cantidad que ya se hizo *cero* en (a) á medio de la disponible q.

Tomando, pues, la raíz cuadrada de ambos miembros y ordenando para x, resulta:

$$\left(-1 \pm \sqrt{\frac{B}{B-2}}\right) x^2 \pm \left(\sqrt{\frac{B}{B-2}}\right) x - \frac{B-2C}{2(B-2)} = 0.$$

Cuya ecuación, como de segundo grado, está resuelta, y con ella las precedentes hasta la que se dió.

ARTÍCULO IV

ECUACIÓN DE CUARTO GRADO

Cuarta solución.

Establecida como en la segunda, la ecuación (A_2), daremos á sus coeficientes b, c, n, la misma relación que en aquella (a), pero con el cambio de signos que se expresa:

$$d^2 q^6 - (c^2 - 4n) q^4 - 2cq^2 - 1 = 0. \qquad (k)$$

En la cual, haciendo $q^2 = Y_1$ se sustituye, resultando una de tercer grado.

Expresando los coeficientes de la (A_2) por C, D, N, tendremos:

$$z^4 + Cz^2 + Dz + N = 0. \qquad (A_3)$$

Cuyos coeficientes tienen entre sí la relación (k).

Esto así, si divimos (A_3) por la cantidad de segundo grado $(z^2 + z + r)$, nos dará como cociente esta otra, también de segundo grado:

$$z^2 - z + C - r + 1 \qquad (h)$$

y como residuo, que debe ser *cero* para que sea exacta la división:

$$(2r + D - C - 1)\, z + (r^2 - r - Cr + N) \qquad (h_1)$$

Despejando r en el primer paréntesis para hacerle *cero*, nos da:

$$r = \frac{1 + C - D}{2} \qquad (a)$$

Y despejando r en el segundo, es:

$$r=\frac{1+C\pm\sqrt{1+2C+C^2-4N}}{2} \qquad (a_1)$$

Si los dos valores de r son iguales, el residuo (h_1) queda reducido á *cero* con cualquiera de estos valores.

Igualemos entre sí los valores de r, y destruyendo en ambos $(1+C)$, queda:

$$-D=\pm\sqrt{1+2C+C^2-4N}$$

Elevando al cuadrado, pasando $+D^2$ al segundo miembro, y cambiando signos, resulta:

$$D^2+4N-C^2-2C-1=0.$$

Cuya igualdad es cierta, por ser la misma que se hizo *cero* en (k) con el valor de q.

Esto así, es evidente que el polinomio de (A_3) es igual al producto:

$$(z^2+z+r)(z^2-z+C-r+1);$$

y, por lo tanto, la ecuación (A_3) está resuelta en las funciones de segundo grado que representan los dos paréntesis de este producto; y estando resuelta (A_3), lo están los anteriores hasta la que se dió.

ARTÍCULO V

ECUACIÓN DE CUARTO GRADO

Quinta solución.

Tomemos la ecuación (A_1) con el segundo término ya eliminado (segunda solución):

$$z^4+cz^2+dz+n=0. \qquad (A_1)$$

Hagamos $z^2=x$, y nos dará:

$$x^2+cx+d\sqrt{x}+n=0. \qquad (A_2)$$

Haciendo $x=(p+r)$ se sustituye y nos da, después de añadir y quitar $2r^2$ y dividir por $-(2r+c)$.

$$\frac{-p^2}{2r+c}=(p+r)+2\frac{d}{2(2r+c)}\sqrt{p+r}+\frac{n-r^2}{2r+c} \qquad (A_3)$$

En ésta daremos á r el valor necesario para que: *el cuadrado* del quebrado que multiplica á $\sqrt{p+r}$ en el segundo miembro, sin el factor 2 que le precede, *sea igual* al último quebrado del segundo miembro, ó sea:

$$\frac{d^2}{4(2r+c)^2}=\frac{n-r^2}{2r+c}$$

De cuya igualdad sale para r, la de tercer grado:

$$8r^3+4cr^2-8nr-4cn+d^2=0. \qquad (k)$$

Resuelta esta ecuación de r, el segundo miembro de (A_3) se convierte en el cuadrado de $\left(\sqrt{p+r}+\frac{d}{4r+2c}\right)$; y tomando la raíz cuadrada de ambos miembros, será después de quitar denominadores:

$$2p\sqrt{-(2r+c)}-d=2(2r+c)\sqrt{p+r}$$

y elevando ahora al cuadrado, se obtiene para p la de segundo grado:

$$4(2r+c)p^2\pm 4d\sqrt{-(2r+c)}\left|\begin{array}{l} p+4r(2r+c)^2-d^2=0. \\ \end{array}\right. \qquad (A_4)$$
$$+4(2r+c)^2$$

Con la cual queda resuelta la ecuación dada.

NOTA. En las cinco soluciones que preceden de cuarto grado, entra como auxiliar en todas las de tercero, con su propio radical; pero quedando ésta ya resuelta en el libro anterior sin radicales de grado impar, es evidente, por lo mismo, que la de cuarto está también resuelta con sólo radicales de grado par. Para poder apreciar, siquiera en parte, las ventajas de este modo de proceder—sin radicales de grado impar—será preciso hacer aplicación del mismo, á la vez que del opuesto, á la resolución de una ecuación numérica.

LUCUBRACIONES ALGEBRAICAS

PARTE SEGUNDA.—ECUACIONES

Libro segundo.—Cuaderno segundo.

Cinco soluciones sistemáticas de quinto grado.
Una de tercero también sistemática.
Otra de tercero en parte sistemática y en parte no.

EXPLICACIÓN PRELIMINAR

A las cinco soluciones que siguen de cuarto grado, dóiles el nombre de *sistemáticas*, porque, á diferencia de las cinco precedentes, que no sirven cada una más que para resolver la del grado cuarto, éstas otras son, por el contrario, de aplicación universal; es decir, que cada una implica el mismo *método general de solución*, aplicable á todas las ecuaciones, con sólo exclusión de la de segundo grado.

En las soluciones sistemáticas hay también de notable el que todas se desenvuelven, hasta la última deducida, con sólo ecuaciones de segundo grado, y demuestran, cada cual á su manera, el mismo modo de proceder.

ARTÍCULO PRIMERO

PRIMERA SOLUCIÓN SISTEMÁTICA DE CUARTO GRADO

$$Y^4 + b_1 Y^3 + c_1 Y^2 + d_1 Y + n_2 = 0. \qquad (A)$$

Separamos Y^2 en los tres primeros términos, y dividimos por d_1, aunque expresando, para abreviar, por n_1 el término final $\frac{n_2}{d_1}$, así:

$$\frac{Y^2}{d_1}(y^2 + b_1 Y + c_1) + Y + n_1 = 0. \qquad (A_1)$$

En ésta se hace $Y = (x + r)$, se sustituye, y se tiene:

$$\frac{(x+r)^2}{d_1}\left(\begin{array}{l|l} x^2 + 2r & x + \quad r^2 \\ + \quad b_1 & + b_1 r \\ & + c_1 \end{array}\right) + x + (r + n_1) = 0. \qquad (A_2)$$

Para facilitar las expresiones, representaremos el coeficiente de x en el segundo paréntesis, y la última cantidad del mismo, por las letras b, c, y por n la cantidad del último paréntesis, con lo que será:

$$\frac{(x+r)^2}{d_1}(x^2 + b\,x + c) + x + n = 0. \qquad (A_3)$$

Ahora daremos á r el valor necesario para que se realice la igualdad siguiente:

$$3b(bn - c - n^2) \pm (b^2 - bn + n^2)\sqrt{3(4c - b^2)} \mp (b^2 - c)\sqrt{3(4bn - b^2 - 4n^2)} = 0. \quad (a)$$

Para determinar el valor de r hay que sustituir en este polinomio las cantidades que representan las letras b, c, n, ó sea:

$$b=(2r+b_1), \quad c=(r^2+b_1 r+c_1), \quad n=(r+n_1).$$

Obsérvese que, sustituyendo debajo de los radicales, desaparecen en ellos los términos de r, quedando, en consecuencia, las mismas expresiones, con sólo poner á las letras el subíndice 1: esto mismo se verifica en la cantidad que comprende el primer paréntesis.

Para simplificar la fórmula de r, expresaremos, después de hacer la sustitución, las cantidades que quedan en la misma, con sólo recibir las letras el subíndice 1, á saber: la cantidad del primer paréntesis por m, el coeficiente del primer radical, y el del segundo, los cuales tampoco cambian de forma por (m_1) y (m_2); y la cantidad del primer radical por k; la de segundo por k_1.

Ordenando, pues, con respecto á r se obtiene la de segundo grado:

$$3(\pm\sqrt{k}\mp\sqrt{k_1})r^2+3\big(b_1(\pm\sqrt{k}\mp\sqrt{k_1})+2m\big)r\pm(m_1)\sqrt{k}$$
$$\mp(m_2)\sqrt{k_1}+3b_1 m=0. \qquad (h)$$

Téngase presente que:

$$\begin{aligned} m &= (b_1 n_1 - n_1^2 - c_1) \\ (m_1) &= (b_1^2 - b_1 n_1 + n_1^2) \\ (m_2) &= (b_1^2 - c_1) \\ k &= 3(4c_1 - b_1^2) \\ k_1 &= 3(4b_1 n_1 - b_1^2 - 4n_1^2) \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de r, deducida de (h), se tendrá determinado su valor en función de los coeficientes de la ecuación dada.

Con el valor (h) de r queda en (A_3) establecida entre sus coeficientes b, c, n, la relación (a).

Volvamos, pues, á (A_3).

$$\frac{(x+r)^2}{d_1}(x^2+bx+c)+x+n=0. \qquad (A_3)$$

Hagamos $x=\frac{zs+1}{s}$; sustitúyase y dará:

$$\frac{(sz+sr+1)^2}{d_1 s^2}\left(\begin{array}{l|l} z^2+\frac{2}{s} & z+\frac{1}{s^2} \\ +b & +\frac{b}{s} \\ & +c \end{array}\right)+\left(z+\frac{1}{s}+n\right)=0. \qquad (A_4)$$

La cual se multiplica por $(z+p)$, efectuando la operación en el último paréntesis, é indicándola con lo demás.

$$\frac{(z+p)(sz+sr+1)^2}{d_1 s^2}\left(\begin{array}{l|l} z^2+\frac{2}{s} & z+\frac{1}{s^2} \\ +b & +\frac{b}{s} \\ & +c \end{array}\right)+\left(\begin{array}{l|l} z^2+n & z+pn \\ +p & +\frac{p}{s} \\ +\frac{1}{s} & \end{array}\right)=0. \qquad (A_5)$$

Si en ésta igualamos entre sí los coeficientes de los términos z en los dos últimos paréntesis, nos dan:

$$\left(\frac{2}{s}+b\right)=\left(n+p+\frac{1}{s}\right) \qquad (a_1)$$

De donde $$p=\frac{bs-ns+1}{s} \qquad (h_1)$$

Si en (A_5) hacemos también que: *el cuadrado del coeficiente de z en el penúltimo paréntesis* sea igual á toda la última cantidad del mismo, será:

$$\left(\frac{4}{s^2}+\frac{4b}{s}+b^2\right)=\left(\frac{1}{s^2}+\frac{b}{s}+c\right) \qquad (a_2)$$

De donde $$s=\frac{-3b\pm\sqrt{3(4c-b^2)}}{2(b^2-c)} \qquad (h_2)$$

Si, por último, en (A_5) hacemos que: *el cuadrado* del coeficiente de z en el último paréntesis sea igual á toda la última cantidad del mismo, será, después de multiplicar por s^2 y reducir:

$$1+ps+2ns+p^2s^2+n^2s^2+pns^2=0. \qquad (a_3)$$

Sustituyendo en ésta el valor (h_1) de p, destruyendo y ordenando para s, resulta:

$$(b^2-bn+n^2)\,s^2+3bs+3=0$$

De donde $$s=\frac{-3b\pm\sqrt{3(4bn-b^2-4n^2)}}{2(b^2-bn+n^2)} \qquad (h_3)$$

Pero ahora tenemos, que los valores de s, (h_2) y (h_3) son iguales entre sí.

Para demostrarlo no hay más que igualar dichos valores, y se verá que resulta la misma cantidad que ya se hizo *cero* en (a) con el valor de r, resultante de la ecuación de segundo grado (h).

Tendremos, pues, en (A_5): 1.º, que los coeficientes de los términos z en los dos últimos paréntesis, son iguales entre sí; 2.º, que el último término de cada paréntesis es el *cuadrado* del coeficiente de z; 3.º, que dichos dos cuadrados son, por necesidad, iguales entre sí, puesto que lo son sus raíces y con el mismo signo.

Expresando, según esto, por B un coeficiente de z en la expresada ecuación será, después de multiplicar por $d_1\,s^2$ y separar el factor común.

$$\left((z+p)(zs+rs+1)^2+d_1s^2\right)(z^2+Bz+B^2)=0. \qquad (A_6)$$

De ésta salen para z dos ecuaciones, una de tercer grado y otra de segundo; con las cuales queda ésta resuelta, y las precedentes hasta la que se dió.

ARTICULO II

SEGUNDA SOLUCIÓN SISTEMÁTICA DE CUARTO GRADO Ó SEA OTRO MODO DE PROCEDER EN LA PRIMERA DESDE LA (A_5) Y SIN HABER DADO AÚN VALOR Á r.

Tomemos la (A_5) de la solución que precede, y en ella igualaremos á *cero*, cada uno de por sí, los términos últimos de los dos últimos paréntesis:

El último da: $$pn + \frac{p}{s} = 0. \qquad (h)$$

De donde $$s = \frac{-1}{n} \qquad (h_1)$$

El otro da: $$cs^2 + bs + 1 = 0. \qquad (h_2)$$

De donde $$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2c} \qquad (h_3)$$

Igualando los dos valores de s, (h_1) y (h_3) y reponiendo las cantidades que representan b, c, n, pero sin quitar el radical de (h_3), resulta para valor de r, que es la que realiza la igualdad:

$$r = \frac{2c_1 - b_1 n_1 \pm n_1 \sqrt{b_1^2 - 4c_1}}{2n_1 - b_1 \mp \sqrt{b_1^2 - 4c_1}} \qquad (h_4)$$

Ahora en (A_5) igualaremos entre sí los coeficientes de los términos z, en los dos últimos paréntesis, ó sea:

$$\frac{2}{s} + b = n + p + \frac{1}{s}. \qquad (h_5)$$

De donde $$p = b - n + \frac{1}{s} \qquad (h_6)$$

Tenemos, pues, que (A_5) se hizo divisible por z, y también por $\left(z + \frac{2}{s} + b\right)$, ó su igual $\left(z + n + p + \frac{1}{s}\right)$; y en consecuencia podemos escribirla así, después de multiplicar por $d_1 s^2$.

$$\left((z+p)(sz+sr+1)^2+d_1 s^2\right)\left(z+p+n+\frac{1}{s}\right)=0. \quad (A_6)$$

La cual da para z una de primer grado, y otra de tercero.

ARTÍCULO III

TERCERA SOLUCIÓN SISTEMÁTICA DE CUARTO GRADO Ó SEA OTRO MODO DE PROCEDER EN LA PRIMERA DESDE LA ECUACIÓN (A_4).

Tomamos la (A_4) de la primera sistemática, ó sea:

$$\frac{(sz+sr+1)^2}{d_1 s^2}\left(\begin{array}{l|l} z^2+\frac{2}{s} & z+\frac{1}{s^2} \\ \quad +b & \quad +\frac{b}{s} \\ & \quad +c \end{array}\right)+\left(z+\left(\frac{1}{s}+n\right)\right)=0 \quad (A_4)$$

Igualemos á la unidad la cantidad del último paréntesis interior, es decir:

$$\frac{1}{s}+n=1 \qquad (h)$$

De donde

$$s=\frac{1}{1-n} \qquad (h_1)$$

Dividiendo ahora la cantidad del segundo paréntesis por $(z+1)$ nos dará de cociente $\left(z+b-1+\frac{2}{s}\right)$; y como residuo, que debe ser *cero*, para que la división sea exacta, nos da:

$$\frac{1}{s^2}+\frac{b}{s}+c-\frac{2}{s}-b+1=0$$

ó bien

$$(c-b+1)\,s^2+(b-2)\,s+1=0. \qquad (h^2)$$

De donde

$$s=\frac{2-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2(c-b+1)} \qquad (h_3)$$

Igualando los dos valores de s, (h_1) y (h_3); quitando denominadores, pero sin quitar el radical, nos da:

$$2c - bn + 2n - b \pm n\sqrt{b^2 - 4c} \mp \sqrt{b^2 - 4c} = 0.$$

Sustituyendo en ésta las cantidades que representan b, c, n, y teniendo en cuenta que debajo del radical desaparecen los términos de r, quedando los mismos sin r, con sólo ponerles el subíndice 1, resulta para r el valor:

$$r = \frac{2c_1 - b_1 n_1 + 2n_1 - b_1 \pm (n_1 - 1)\sqrt{b_1^2 - 4c_1}}{2n_1 - b_1 \mp \sqrt{b_1^2 - 4c_1}} \qquad (h_4)$$

Con los valores de r y s, la ecuación (A_4) se hizo divisible por $(z+1)$; y hecha la división, nos queda, multiplicando por $d_1 s^2$:

$$(sz + sr + 1)^2\left(z + b - 1 + \frac{2}{s}\right) + d_1 s^2 = 0. \qquad (A_5)$$

La cual es, como se ve, de tercer grado para z.

ARTÍCULO IV

CUARTA SOLUCIÓN SISTEMÁTICA DE CUARTO GRADO

Sea la ecuación $\quad Y_1^4 + b_1 Y^3 + c_1 Y_1^2 + d_1 Y_1 + n = 0. \qquad (A_1)$

Separando Y_1^2 en los tres primeros términos, dividiendo por d_1, y expresando $\frac{n_2}{d_1}$ por n_1, será:

$$\frac{Y_1^2}{d_1}(Y_1^2 + b_1 Y_1 + c_1) + (Y_1 + n_1) = 0. \qquad (A_2)$$

En ésta se hace $Y_1 = (Y + r)$, se sustituye y se tiene:

$$\frac{(Y+r)^2}{d_1}\left(Y^2 \begin{array}{l|l} +2r & Y + r^2 \\ +b_1 & +b_1 r \\ & +c_1 \end{array}\right) + Y + (r + n_1) = 0. \qquad (A_3)$$

Ahora expresaremos el coeficiente de Y en el segundo paréntesis por b, el último del mismo por c, y la cantidad del último paréntesis por n, con lo que tendremos:

$$\frac{(Y+r)^2}{d_1}(Y^2+bY+c)+Y+n=0. \qquad (A_4)$$

Haciendo en esta $Y=\frac{x}{q}$, se sustituye, se multiplica por el q^2 del segundo paréntesis y se separa q como factor común de los dos últimos términos, así:

$$\frac{(x+rq)^2}{d_1 q^2}(x^2+bqx+cq^2)+q(x+nq)=0. \qquad (A_5)$$

Y por fin, haciendo $x=(z+1)$, se sustituye y nos da:

$$\frac{(z+rq+1)^2}{d_1 q^2}\left(z^2 + \begin{array}{c|c} 2 & z+1 \\ +bq & +bq \\ & +cq^2 \end{array}\right)+q\bigl(z+(nq+1)\bigr)=0 \qquad (A_6)$$

Hagamos en ésta que *el coeficiente del término* z *en el segundo paréntesis*, sea igual á la cantidad del paréntesis último interior, ó sea:

$$bq+2=nq+1 \qquad (h)$$

De donde
$$q=\frac{1}{n-b} \qquad (h_1)$$

Hagamos también en (A_6) que toda la última cantidad, libre de z en el segundo paréntesis, sea igual á *cero*.

$$cq^2+bq+1=0 \qquad (h_2)$$

De donde
$$q=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2c} \qquad (h_3)$$

Igualando los dos valores de q, se tiene:

$$2c+bn-b^2=\pm n\sqrt{b^2-4c}\mp b\sqrt{b^2-4c} \qquad (h_4)$$

Para realizar esta igualdad pondremos, en lugar de las letras b, c, n, los valores que representan tomados en (A_3), es decir: $b = 2r + b_1$; $c = r^2 + b_1 r + c_1$; $n = r + n_1$; pero teniendo en cuenta que no se quitan los radicales, puesto que al sustituir debajo de él, desaparecen los términos de r, y queda la misma cantidad con el subíndice 1 en ambas letras.

Haciendo, pues, la sustitución fuera del radical será:

$$2(r^2 + b_1 r + c_1) + (2r + b_1)(r + n_1) - (2r + b_1)^2 =$$

$$\pm (r + n_1)\sqrt{b_1^2 - 4c_1} \mp (2r + b_1)\sqrt{b_1^2 - 4c_1} \qquad (h_5)$$

Ejecutando operaciones hasta despejar r, resulta:

$$r = \frac{b_1^2 - b_1 n_1 - 2c_1 \pm (n_1 - b_1)\sqrt{b_1^2 - 4c_1}}{-b_1 + 2n_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4c_1}} \qquad (h_6)$$

Con este valor de r es evidente que se realiza la igualdad (h_4) para los dos valores de q; y por lo tanto, con cualquiera de los valores de q quedan realizadas las dos igualdades (h) y (h_2).

Según esto, en la ecuación (A_6) suprimiremos desde luego la última cantidad del segundo paréntesis, puesto que se redujo á *cero* en (h_2): separando después el factor común z, que queda en el segundo paréntesis, y observando que $(bq + 2) = (nq + 1)$; y multiplicando por $d_1 q^2$, se tendrá dicha ecuación en esta forma, después de separar como factor común $(z + bq + 2)$ ó $(z + nq + 1)$:

$$\left((z + rq + 1)^2 z + d_1 q^3\right)(z + bq + 2) = 0. \qquad (A_7)$$

De donde salen para z las dos ecuaciones, una de primer grado y otra de tercero, con las cuales queda resuelta, y lo mismo las precedentes hasta la propuesta.

ARTÍCULO V

QUINTA SOLUCIÓN SISTEMÁTICA DE CUARTO GRADO Ó SEA OTRO MODO DE PROCEDER EN LA CUARTA DESDE LA ECUACIÓN (A_6).

Hagamos en dicha ecuación que el coeficiente del término z, en el segundo paréntesis, se reduzca á *cero*.

$$bq+2=0 \qquad (h)$$

De donde
$$q=\frac{-2}{b} \qquad (h_1)$$

Ahora se hace que: *menos el cuadrado* de la cantidad del último paréntesis interior *sea igual* á toda la última cantidad del segundo paréntesis:

$$-(nq+1)^2=cq^2+bq+1 \qquad (h_2)$$

ó bien
$$(c+n^2)q^2+(b+2n)q+2=0$$

De donde
$$q=\frac{-b-2n\pm\sqrt{b^2+4b_1n-8c-4n^2}}{2c+2n^2} \qquad (h_3)$$

Igualando los dos valores (h_1) y (h_3), pero sin quitar el radical del segundo, será:

$$-b^2-2bn+4c+4n^2\pm b\sqrt{b^2+4bn-8c-4n^2}=0. \qquad (h_4)$$

Para realizar esta igualdad se ponen, en lugar de las letras b, c, n, los valores que representan en (A_3), pero teniendo en cuenta que en la cantidad subradical desaparecen los términos de r, quedando los mismos que ahora están con sólo poner á cada letra el subíndice 1.

Ejecutando operaciones fuera del radical y despejando r, nos da:

$$r=\frac{b_1^2+2b_1n_1-4c_1-4n_1^2\mp b_1\sqrt{b_1^2+4b_1n_1-8c_1-4n_1^2}}{4n_1-2b_1\pm 2\sqrt{b_1^2+4b_1n_1-8c_1-4n_1^2}} \qquad (k)$$

Con este valor de r se igualaron los dos valores de q; y si en (A_6) expresamos la última cantidad del segundo paréntesis por C, y la del último paréntesis interior por N, es evidente que, según la relación actual (h_2), será: $-N^2=C$, con lo que sustituyendo en (A_6), dará:

$$\frac{(z+rq+1)^2}{d_1q^2}(z^2-N^2)+q(z+N)=0. \qquad (A_7)$$

Cuya ecuación no hay duda de que es divisible por $(z+N)$ puesto que $(z^2-N^2)=(z-N)(z+N)$; y en su virtud, separando el factor común y multiplicando por d_1q^2, tendremos:

$$\left((z+rq+1)^2(z-N)+d_1q^3\right)(z+N)=0. \qquad (A_8)$$

La cual está resuelta con una de tercero y otra de primero para z.

Nota. Referente á las dos soluciones que siguen de tercer grado. Pónense aquí estas soluciones, aunque de tercer grado, porque la primera está en todo dentro del sistema general de solución, como se verá, y la otra lo está asimismo, menos en una sola condición. Por lo demás, las dos se desarrollan con sólo radicales de segundo grado, como las sistemáticas de cuarto.

ARTÍCULO VI

UNA SOLUCIÓN SISTEMÁTICA DE TERCER GRADO

$$Y_2^3+b_2Y_2^2+c_2Y_2+n_2=0. \qquad (A)$$

Multiplicando por (Y_2+1) nos da:

$$\begin{array}{l|l|l|l} Y_2^4+b_2 & Y_2^3+b_2 & Y_2^2+n_2 & Y_2+n_2=0. \\ +1 & +c_2 & +c_2 & \end{array} \qquad (A_1)$$

Haciendo $Y_2^2 = Y_1$, ordenaremos así:

$$\left(\begin{array}{c|c} Y_1^2 + b_2 & Y_1 + n_2 \\ + c_2 & \end{array}\right) \pm \sqrt{Y_1}(b_2+1)\left(Y_1 + \frac{n_2+c_2}{b_2+1}\right) = 0. \quad (A_2)$$

En ésta expresaremos el coeficiente de Y_1 y el último término del primer paréntesis por b_1, c_1, y el quebrado del último paréntesis por n_1, con lo que se tendrá:

$$(Y_1^2 + b_1 Y_1 + c_1) \pm \sqrt{Y_1}(b_2+1)(Y_1 + n_1) = 0. \quad (A_3)$$

Esta ecuación tiene el primero y último paréntesis idénticos en la forma á los de (A_2) en la cuarta solución sistemática de cuarto grado, y es evidente que, tratada como aquélla, nos dará las deducidas finales de segundo grado.

También se la puede tratar como la (A_1) de la primera solución, siendo igualmente de segundo las deducidas finales.

ARTÍCULO VII

OTRA SOLUCIÓN DE TERCER GRADO COMO LA PRECEDENTE

$$Y_2^3 + b_2 Y_2^2 + c_2 Y_2 + n_2 = 0. \quad (A)$$

Haciendo $Y_2 = (Y_1 + r_1)$ se sustituye, y luego se dará á r_1 el valor necesario para que se reduzca á *cero* el penúltimo término, ó sea:

$$3 r_1^2 + 2 b_2 r_1 + c_2 = 0. \quad (h)$$

Expresando los coeficientes del segundo y último por b_1, n_1, se tendrá:

$$Y_1^3 + b_1 Y_1^2 + n_1 = 0. \quad (A_1)$$

Haciendo $Y_1 = \frac{Y}{p}$, se sustituye, y multiplicando por p^3, tendremos:

$$Y^3 + b_1 p Y^2 + n_1 p^3 = 0. \quad (A_2)$$

En ésta daremos á p el valor necesario para que: *dos veces el último término, menos* el cuadrado del coeficiente del segundo, *menos* este mismo coeficiente, *sea igual á cero*, ó bien:

$$2\,n_1p^3 - b_1^2p^2 - b_1p = 0. \qquad (h_1)$$

De donde:

$$p = \frac{b_1^2 \pm \sqrt{b_1^4 + 8\,b_1n_1}}{4\,n_1} \qquad (k)$$

Representando en (A_2) por b el coeficiente del segundo término, y por n el último será:

$$Y^3 + b\,Y^2 + n = 0. \qquad (A_3)$$

Multiplicándola por $(Y+1)$, nos da:

$$\left.\begin{array}{r} Y^4 + b \\ +1 \end{array}\right| Y^3 + b\,Y^2 + n\,Y + n = 0. \qquad (A_4)$$

Haciendo $Y^2 = x$, la ordenaremos así:

$$(x^2 + b\,x + n) + (b+1)\sqrt{x}\left(x + \frac{n}{b+1}\right) = 0. \qquad (A_5)$$

Haciendo $x = (z_1 + r)$, se sustituye y tendremos:

$$\left(\begin{array}{r|l} z_1^2 + 2r & z_1 + r^2 \\ +\;b & +br \\ & +n \end{array}\right) + (b+1)\sqrt{z_1 + r}\left(z_1 + r + \frac{n}{b+1}\right) = 0. \qquad (A_6)$$

Expresando por B el coeficiente de z en el 1.er paréntesis, por C la última cantidad toda del mismo, y por N la cantidad del último libre de z_1, será:

$$(z_1^2 + B z_1 + C) + (b+r)\sqrt{z_1 + r}\,(z_1 + N) = 0. \qquad (A_7)$$

Haciendo $z_1 = \frac{z}{q}$, se sustituye, y multiplicando por q^2, dará:

$$(z^2 + Bqz + Cq^2) + (b+1)\sqrt{z_1q + rq^2}\,(z + Nq) = 0. \qquad (A_8)$$

En ésta se iguala á la unidad el último término del último paréntesis, ó sea:

$$Nq = 1 \qquad (h_3)$$

De donde $$q = \frac{1}{N} \qquad (h_4)$$

Ahora, dividiendo por $(z+1)$ la cantidad del primer paréntesis nos dará de cociente.

$$z + Bq - 1. \qquad (h_5)$$

Y como residuo, que debe ser *cero* para que la división sea exacta:

$$Cq^2 - Bq + 1 = 0 \qquad (h_6)$$

De donde $$q = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2C} \qquad (h_7)$$

Igualando los dos valores de q, (h_4) y (h_7), será:

$$\frac{1}{N} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2C} \qquad (h_8)$$

De donde $$2C - BN = + N\sqrt{B^2 - 4C} \qquad (h_9)$$

Para realizar esta igualdad pondremos, en vez de las letras B, C, N, las cantidades que representan tomadas en (A_6), ó sea:

$$\left.\begin{aligned} B &= 2r + b \\ C &= r^2 + br + n \\ N &= r + \frac{n}{b+1} \end{aligned}\right\} \qquad (h_{10})$$

Haciendo la sustitución y ordenando para r, después de quitar el denominador $(b+1)$, y teniendo en cuenta que la cantidad subradical $(B^2 - 4C)$ es igual á $(b^2 - 4n)$, resulta:

$$-(2n - b^2 - b)r \pm r(b+1)\sqrt{b^2 - 4n} = bn + 2n \mp n\sqrt{b^2 - 4n} \quad (h_{11})$$

La cantidad del primer paréntesis es la que se hizo *cero* en (h_1), y por lo tanto tendremos para r:

$$r = \frac{bn + 2n \mp n\sqrt{b^2 - 4n}}{\pm(b+1)\sqrt{b^2 - 4n}} \qquad (h_{12})$$

Con los valores de r y q, la ecuación (A_8) hízose divisible por $(z+1)$, pudiendo, por lo tanto, escribirla de este modo:

$$(z + Bq - 1)(z+1) + (b+1)(z+1)\sqrt{zq + rq^2} = 0. \qquad (A_9)$$

Dividiendo por el factor común $(z+1)$, y elevando lo que queda al cuadrado, después de pasar al segundo miembro el radical, será:

$$(z + Bq - 1)^2 = (b+1)^2 (zq + rq^2)$$

ó bien $(z + Bq - 1)^2 - (b+1)^2 qz - (b+1)^2 rq = 0. \qquad (A_{10})$

La cual es de segundo grado, y con ésta y la $(z+1)=0$, se tienen las soluciones de (A_9), y por lo tanto todas las anteriores hasta la propuesta.

LUCUBRACIONES ALGEBRAICAS

PARTE SEGUNDA.—ECUACIONES

Libro segundo.—Cuaderno tercero.

(Una solución especial de quinto grado.)

Soluciones sistemáticas á la de quinto grado y siguientes, con una incógnita, hasta la del grado enésimo.

Solución sistematica del sistema de n *ecuaciones, con* n *incógnitas, del* enésimo *grado.*

NOTA

La solución que sigue de quinto grado fué descubierta cuando ya estaba impresa la portada de este libro, y no se hizo, por lo tanto, indicación acerca de la misma en el prólogo de aquel.

Esta solución no es por lo demás sistemática; y este es el motivo de ponerla antes que las otras.

El procedimiento seguido en ella es, como se verá, estrictamente lógico; y en tal sentido no puede menos de verse en su fondo la realidad que corresponde á las ecuaciones numéricas.

UNA SOLUCIÓN ESPECIAL DE QUINTO GRADO

Sea: $Y_1^5 + b_1 Y_1^4 + c_1 Y_1^3 + d_1 Y_1^2 + e_1 Y_1 + n_1 = 0. \qquad (A_1)$

Haciendo $Y_1 = Y + s$, se sustituye, y en la resultante para Y daremos á s el valor necesario para que desaparezca el penúltimo término, lo que nos da á resolver la siguiente de cuarto grado:

$$5\,s^4 + 4\,b_1 s^3 + 3\,c_1 s^2 + 2\,d_1 s + e_1 = 0. \qquad (k)$$

Resuelta ésta, puesto que ya se sabe hacerlo, expresaremos los coeficientes de Y^4, Y^3, Y^2, y el último término todo sin Y, por las letras b, c, d, n, con lo que tendremos:

$$Y^5 + bY^4 + cY^3 + dY^2 + n = 0. \qquad (A_2)$$

Hagamos $Y = \frac{x_1}{p_1}$, se sustituye, y multiplicando por p_1^5, nos da:

$$x_1^5 + b\,p_1 x_1^4 + c\,p_1^2 x_1^3 + d\,p_1^3 x_1^2 + n\,p_1^5 = 0. \qquad (A_3)$$

Esta la ordenaremos del siguiente modo:

$$b\,p_1 x_1^4 + d\,p_1^3 x_1^2 + n\,p_1^5 + x_1^3\,(x_1^2 + c\,p_1^2) = 0. \qquad (A_4)$$

Ahora se separa en los tres primeros términos bp_1, se hace $p_1^2 = p$, y $x_1^2 = x$; con lo que sustituyendo, se tendrá:

$$b\sqrt{p}\left(x^2 + \frac{dp}{b}\,x + \frac{np^2}{b}\right) + x\sqrt{x}\,(x + cp) = 0. \qquad (A_5)$$

Para simplificar las expresiones omitiremos el denominador b del segundo paréntesis, pero á su tiempo recordaremos que d y n están divididas por la expresada letra.

$$b\sqrt{p}\,(x^2+d\,p\,x+n\,p^2)+x\sqrt{x}\,(x+cp)=0. \qquad (A_6)$$

En esta se hace $x=z_1+1$, y sustituyendo nos da:

$$b\sqrt{p}\left(\begin{array}{l|l} z_1^2+\ 2 & z_1+\ 1 \\ \quad +dp & \ +dp \\ & \ +np^2 \end{array}\right)+(z_1+1)\sqrt{z_1+1}\,(z_1+1+cp)=0 \quad (A_7)$$

Haciendo, por fin, $z_1=\frac{z}{q}$, sustituyendo y multiplicando por el q^2 que resulta en el primer paréntesis, tendremos:

$$b\sqrt{p}\left(\begin{array}{l|l|l} z^2+2q & z+\ 1 & q^2 \\ \ +dpq & +dp & \\ & +np^2 & \end{array}\right)+\frac{(z+q)\sqrt{zq+q^2}}{q}\big(z+(1+cp)q\big)=0 \quad (A_8)$$

Si ahora dividimos en ésta la cantidad del primer paréntesis por $(z+1)$, el cociente será:

$$z+2\,q+dpq-1. \qquad (h)$$

Y el residuo, que debe ser *cero* para que la división sea exacta:

$$(1+dp+np^2)\,q^2-(2+dp)\,q+1=0. \qquad (h_1)$$

De donde: $$q=\frac{2+dp\pm p\sqrt{d^2-4n}}{2+2dp+2np^2} \qquad (h_2)$$

Igualando también á la unidad en (A_8) el último paréntesis interior con el factor q, se tendrá:

$$(1+cp)\,q=1. \qquad (h_3)$$

Sustituyendo en esta igualdad el valor de q expresado en (h_2) se obtiene, después de quitar el denominador:

$$(1+cp)(2+dp\pm p\sqrt{d^2-4n})=2+2dp+2np^2 \quad (h_4)$$

Ejecutando operaciones hasta despejar p, resulta:

$$p=\frac{d-2c\mp\sqrt{d^2-4n}}{cd-2n\pm c\sqrt{d^2-4n}} \quad (h_5)$$

Con esto tenemos, que la ecuación (A_8) se hizo divisible por $(z+1)$, y separando en ella este factor común, á la vez que se quite el denominador q, será:

$$\left(bq\sqrt{p}\,(z+2q+dpq)+(z+q)\sqrt{zq+q^2}\right)(z+1)=0. \quad (A_9)$$

De la cual salen:

$$\left.\begin{array}{l} z+1=0 \\ bq\sqrt{p}\,(z+2q+dpq)+(z+q)\sqrt{zq+q^2}=0. \end{array}\right\} \quad (A_{10})$$

Pasando en esta última al segundo miembro el término del radical de z, elevado al cuadrado, y pasando todo al primer miembro, se tiene:

$$b^2q^2p\,(z+2q+dpq)^2-(z+q)^2(zq+q^2)=0. \quad (A_{11})$$

La cual es de tercer grado, y con la primera de (A_{10}), que es de primero, resuelve la (A_8) dándonos todos los valores de z.

Resuelta así la (A_8), es indudable que lo está la que se dió (A_1), con auxiliares del primero al cuarto grado.

Y como las de tercero y cuarto grado pueden ser resueltas con sólo radicales de grado par, esto mismo sucede también con la de quinto.

Reponiendo b en la fórmula de q, (h_2) será:

$$q = \frac{2b + dp \pm p\sqrt{d^2 - 4bn}}{2b + 2dp + 2np^2} \qquad (h_7)$$

Reponiendo en la de p, (h_5) será:

$$p = \frac{d - 2bc \mp \sqrt{d^2 - 4bn}}{cd - 2n \pm c\sqrt{d^2 - 4bn}} \qquad (h_8)$$

Y reponiendo en la ecuación (A_{11}), será:

$$pq^2(bz + 2bq + dpq)^2 - (z + q)^2(qz + q^2) = 0. \quad (A_{12})$$

También conviene recordar que, en (A_2) las letras b, c, d, n, representan:

$$\begin{aligned}
b &= 5s + b_1 \\
c &= 10s^2 + 4b_1 s + c_1 \\
d &= 10s^3 + 6b_1 s^2 + 3c_1 s + d_1 \\
n &= s^5 + b_1 s^4 + c_1 s^3 + d_1 s^2 + n_1
\end{aligned}$$

Los valores de s, en función de los coeficientes, nos los dará la ecuación primera á resolver (k).

ADVERTENCIA PRELIMINAR

Después de lo ya dicho en el prólogo de este libro, referente á la solución de quinto grado, aquí, al llegar á ella, sólo añadiré breves palabras para explicar mejor el método seguido en la investigación.

Las soluciones sistemáticas, por el orden de aparición ya demostradas en la de *cuarto*, no fueron en rigor halladas trabajando sobre ésta, sino sobre la de *quinto*; pero como la forma que se daba á la ecuación para llegar á tales soluciones era la que directamente ofrece la de *cuarto*, con sólo separar en ella el factor común de los tres primeros términos, á ella hubo que volver, y determinar sobre la misma aquellos modos de solución que ya estaban bosquejados en la del grado quinto. Más tarde se descubrieron también las dos de tercer grado sistemáticas, que ya quedan explicadas á continuación de las de cuarto.

ARTÍCULO PRIMERO

SOLUCIÓN SISTEMÁTICA DE QUINTO GRADO

Sea la ecuación: $Y_2^5+b_2Y_2^4+c_2Y_2^3+d_2Y_2^2+e_2Y_2+n_2=0$ (A)

Haciendo $Y_2=(Y_1+r_1)$, se sustituye, y en la resultante para Y_1, daremos á r_1 el valor necesario para que se reduzca á *cero* el coeficiente de Y_1^2 ó sea el antepenúltimo término; lo cual nos dará á resolver la de tercer grado:

$$10\,r_1^3+6\,b_2r_1^2+3\,c_2r_1+d_2=0. \qquad (h)$$

Resuelta esta ecuación y eliminado así el término de Y_1^2, expresaremos respectivamente los demás coeficientes y último término, por las letras b_1, c_1, e_1, n_1; y dividiendo á la vez por e_1, la ecuación será:

$$\frac{Y_1^3}{e_1}\left(Y_1^2+b_1Y_1+c_1\right)+\left(Y_1+\frac{n_1}{e_1}\right)=0. \qquad (A_1)$$

Esta ecuación, como se ve, tiene las cantidades de los paréntesis, idénticas en la forma á los de (A_2) en la cuarta sistemática de cuarto grado; y tratada como aquélla, se le dará el divisor de primer grado, y se obtendrá la deducida final de cuarto.

También se la puede tratar como la (A_1) de la primera, y dará los mismos resultados, tomando el divisor de primer grado, y dándonos de cuarto la deducida final.

Pero ésta de cuarto, deducida con sólo auxiliares de segundo, hemos visto ya que se resuelve, ó bien sólo con auxiliares de segundo (procedimiento sistemático), ó bien con auxiliares de *segundo* y de *tercero* (procedimiento no sistemático). Mas la de tercero á su vez, podemos también resolverla con sólo radicales de segundo, ó con las de segundo y tercero; y por lo tanto, es bien palmario que la de quinto se la puede resolver del mismo modo, con sólo radicales de segundo grado, ó con los de tercero y de segundo.

ARTÍCULO II

SOLUCIÓN SISTEMÁTICA DE SEXTO GRADO

Sea la ecuación:

$$Y_3^6+b_3Y_3^5+c_3Y_3^4+d_3Y_3^3+e_3Y_3^2+f_3Y_3+n_3=0. \qquad (A)$$

Haciendo $Y_3=(Y_2+r_2)$, se sustituye, y se da á r_2 el valor necesario para reducir á *cero* el coeficiente de Y_2^2, ó sea el antepenúltimo término; lo cual nos dará á resolver la siguiente de cuarto grado:

$$15\,r_2^4+10\,b_3r_2^3+6\,c_3r_2^2+3\,d_3r_2+e_3=0. \qquad (h)$$

Resuelta ésta, y eliminado así el expresado término, separaremos Y_2^3 en los cuatro primeros términos de la resultante para Y_2; expresaremos los demás coeficientes y último término, respectivamente por b_2, c_2, d_2, f_2, n_2; y partiendo por f_2, será:

$$\frac{Y_2^3}{f_2}\left(Y_2^3+b_2Y_2^2+c_2Y_2+d_2\right)+\left(Y_2+\frac{n_2}{f_2}\right)=0. \qquad (A_1)$$

Haciendo en ésta $Y_2=(Y_1+r_1)$, se sustituye, y en la resultante de Y_1, se dará á r_1 el valor necesario para reducir á *cero* toda la última cantidad que aparece libre de Y_1 en el segundo paréntesis, lo cual nos dará á resolver la de tercer grado:

$$r_1^3+b_2r_1^2+c_2r_1+d_2=0. \qquad (h_1)$$

Eliminado así dicho término en la resultante, se separa el factor común Y_1 que queda en el segundo paréntesis; y expresando los demás coeficientes, por b_1, c_1, n_1, se tendrá:

$$\frac{Y_1(Y_1+r_1)^3}{f_2}\left(Y_1^2+b_1Y_1+c_1\right)+\left(Y_1+n_1\right)=0. \qquad (A_2)$$

Esta ecuación tiene, como se ve, los dos últimos paréntesis idénticos en la forma á los de (A_2) en la cuarta sistemática de cuarto grado, y tratada como aquélla, se le dará el divisor de primer grado, obteniéndose la deducida final de quinto.

Al mismo resultado se llegará si se la trata como la (A_1) de la primera.

Lo que se ha dicho en la solución de quinto grado, con referencia á que se la puede resolver con sólo radicales de segundo grado, ó bien con los de segundo y de tercero, es evidentemente aplicable á la de sexto grado, puesto que á la deducida de quinto se llega también con el auxiliar de segundo solo, ó con los de segundo y de tercero.

ARTÍCULO III

SOLUCIÓN DE SÉPTIMO GRADO SISTEMÁTICA

$$Y_3^7+b_3Y_3^6+c_3Y_3^5+d_3Y_3^4+e_3Y_3^3+f_3Y_3^2+g_3Y_3+n_3=0. \quad (A)$$

Haciendo $Y_3=(Y_2+r_2)$, se sustituye, y á medio de r_2 eliminaremos el término de Y_2^2 en la resultante, con la ecuación de quinto grado.

$$21\,r_2^5+15\,b_3r_2^4+10\,c_3r_2^3+6\,d_3r_2^2+3\,e_3r_2+f_3=0.$$

Eliminado dicho término, sepárase Y_2^3 en los cinco primeros términos, y expresando los demás coeficientes y último término, por b_2, c_2, d_2, e_2, g_2, n_2, se divide por g_2, y se tendrá:

$$\frac{Y_2^3}{g_2}\left(Y_2^4+b_2Y_2^3+c_2Y_2^2+d_2Y_2+e_2\right)+\left(Y_2+\frac{n_2}{g_2}\right)=0. \quad (A_1)$$

Hagamos $Y_2=(Y_1+r_1)$, y sustituyendo, eliminaremos en la resultante el último término libre de Y_2, que aparece el primer paréntesis, á medio de la de cuarto grado:

$$r_1^4+b_2r_1^3+c_2r_1^2+d_2r_1+e_2=0.$$

Eliminado así dicho término, y expresando los coeficientes restantes, y última cantidad sin Y_1 del último paréntesis, b_1, c_1, d_1, n_1, tendremos, después de separar Y_1 como factor común del penúltimo paréntesis:

$$\frac{Y_1(Y_1+r_1)^3}{g_1}(Y_1^3+b_1Y_1^2+c_1Y_1+d_1)+(Y_1+n_1)=0. \quad (A_2)$$

Haciendo en ésta $Y_1=(Y+r)$, se sustituye, y á medio de r se elimina en la resultante el último término sin Y del segundo paréntesis, á medio de la de tercer grado.

$$r^3+b_1r^2+c_1r+d_1=0.$$

Eliminado dicho término, expresando los coeficientes y última cantidad sin Y del penúltimo y último paréntesis, por b, c, n, se tendrá, después de separar el factor común Y que aparece en el penúltimo paréntesis:

$$Y(Y+r)(Y+r+r_1)^3(Y^2+bY+c)+(Y+n)=0. \quad (A_3)$$

Esta última ecuación tiene los dos últimos paréntesis idénticos en la forma á los de (A_2) en la cuarta solución de cuarto grado, y tratada como aquélla, se le dará el divisor de primer grado, deduciendo de sexto la resultante final.

Obsérvese que tanto importa decir que se dará *un divisor de primer grado*, como que se dará de *segundo*, puesto que éste lleva consigo el auxiliar de primero que se agregó. El mismo resultado nos dará tratándola como la (A_1) de la primera de cuarto grado.

Respecto á los radicales, téngase por reproducido en ésta lo que se ha dicho en las de quinto y sexto.

ARTÍCULO IV

ECUACIÓN DEL GRADO n.

Sabido ya cómo se resuelven las ecuaciones de una incógnita hasta la del grado séptimo, no puede quedar duda, ni dificultad de ningún género, acerca del modo de resolver las del octavo, noveno y siguientes, hasta la del grado *enésimo.*

En cuanto á los radicales que intervengan en esta solución, es indudable, por lo dicho en las precedentes, que sólo serán el de segundo grado si se quiere, ó á lo más éste con el de tercero.

ARTÍCULO V

SISTEMA DE n ECUACIONES CON n INCÓGNITAS DEL *enésimo* GRADO

Su resolución sistemática.

Para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas del *enésimo* grado, se resolverá primero una de sus ecuaciones, con relación á una de las incógnitas que contenga, y sustituído el valor de ésta en las demás, nos quedará para resolver un sistema de $(n - 1)$ ecuaciones con $(n - 1)$ incógnitas y de cualquier grado.

Procediendo con éste como con el anterior, se obtendrá otro de $(n - 2)$ ecuaciones con $(n - 2)$ incógnitas y de cualquier grado.

Continuando así con éste y los siguientes se llegará *á una sola* ecuación, con una incógnita y de cualquier grado.

Resuelta ésta, y hallado el valor de la incógnita en función de los coeficientes *numéricos* ó literales, se retrocede sustituyendo hasta quedar resueltas todas las ecuaciones en función de los coeficientes dados en el sistema propuesto.

Pero ahora debe observarse que al resolver una ecuación del sistema $(n - 1)$, y después la del siguiente, y así hasta la última, puede suceder, y sucede de seguro, que la incógnita que vamos á despejar se halla sometida á los radicales con que se resolvió la ecuación ó ecuaciones anteriores, y, en tal caso, lo primero que hay que hacer, es *eliminar* los radicales hasta que la incógnita quede libre de ellos ó fuera de todos ellos.

Esta operación, si no hay más que radicales de segundo y cuarto grado, es de muy fácil ejecución; y por esto, cuando se trate de resolver un tal sistema de ecuaciones, será preciso resolver desde el principio las de tercer grado por el método que sólo admite los radicales de segundo y cuarto, ó por el que sólo tiene radicales de segundo.

La dificultad, que á mí me pareció insuperable, de eliminar de un polinomio los radicales de tercero y superiores grados, no reducibles al segundo, siendo más de dos ó tres, fué lo que principalmente me obligó á buscar las soluciones de tercer grado sin radical de grado impar.