LUCUBRACIONES ALGEBRAICAS

POR

DON MANUEL VÁZQUEZ PRADA

PARTE SEGUNDA.—ECUACIONES

Libro primero.—Ecuaciones de segundo y tercer grado.

Cuaderno primero.—Cuatro soluciones á la de segundo grado.

Cuaderno segundo.—1.º Catorce soluciones directas de la de tercer grado.—2.º Diecinueve soluciones de la misma por transformación, y con radical de tercer grado.—3.º Determinación de las raíces literales de las cantidades subradicales de segundo y tercer grado, que entran en la solución fundada en $c^2=3\,bn$.—4.º Solución de tercer grado, preparada de dos modos, y sólo con radicales de segundo y cuarto grado.—5.º Otras dos soluciones de tercer grado, con sólo radicales de segundo.

MADRID
IMPRENTA DE F. RUBIÑOS
PLAZA DE LA PAJA, 7 BIS
1888

PRÓLOGO

Voy á comprobar con hechos la palabra dada en mi anterior librito sobre *las raíces numéricas*, referente á tener determinadas muchas soluciones para la ecuación de tercer grado, la de cuarto, y aun algunas para la de segundo.

En este cuaderno se comprenden sólo las de segundo y tercer grado. De las de segundo, aunque había más, únicamente se publican cuatro: las dos primeras, porque se fundan en la relación de las raíces con los coeficientes de la ecuación; la tercera, porque implica la posibilidad de poder igualar á *cero* la suma de los coeficientes; y la cuarta, porque, al menos en la forma, nos da una fórmula final diferente de la que dan todas las otras.

Cuando empecé á ocuparme de la ecuación de tercer grado, conocía someramente la solución que se le daba en el Algebra superior de Cortázar, que por curiosidad compré en aquellos días en un baratillo, así como la antiquísima de M. Clairaut quien también la resuelve del mismo modo. Pero á mí, por la falta de práctica, parecióme entonces ineficaz aquella solución, y esto fué como un incentivo más para que me aferrase á mi propósito de buscar otros modos de resolverla.

Con paciencia y poco á poco, como la gota de agua, fuí descubriendo hasta dieciocho soluciones de tercer grado, todas con este radical, y deducidas todas de sólo cuatro relaciones útiles que pude hallar entre los coeficientes. Cierto es que algunas de estas soluciones parece no son más que modificaciones de otra anterior; pero en todo caso representan, cada una, una de las formas externas que pudiera tener la ecuación dada, para estar directamente resuelta.

Hay, por lo demás, soluciones que se fundan en la relación de las raíces con los coeficientes, y otras también en divisores muy variados, que se preparan á una de las ecuaciones deducidas.

En un tratado de Álgebra, impreso en francés, y de autor francés, cuyo nombre no recuerdo, vi hacia el año 78 enunciada la siguiente idea: «Si en la ecuación de tercer grado el »cuadrado del coeficiente del segundo término fuese igual á »tres veces el coeficiente del tercero, la ecuación estaría direc»tamente resuelta.»

Esta proposición, que es exactísima, á fuerza de tenerla presente, hízome después pensar en si no habría más formas externas que nos diesen la ecuación directamente resuelta. La observación que sobre esto fué recayendo dióme á conocer hasta catorce formas, bajo cada una de las cuales se presenta la ecuación resuelta, directamente y sin necesidad de preparación de ninguna clase.

La sucinta exposición de aquellas formas precede en este libro á la de las soluciones preparadas, con el fin de que así se pueda ver mejor la correlación que entre unas y otras existe; muchas de las preparadas consisten sólo en dar á la ecuación una de aquellas formas.

Por uno de los modos de resolver (preparación fundada en $c^2=3bn$), se han resuelto muchas ecuaciones numéricas, con diferencia en todas, ó de raíces, ó de signos y raíces, y en todas ellas se observó que la cantidad sometida al radical de tercer grado, es constantemente *un cubo perfecto;* así como la sometida al radical de segundo grado, que entra en la fórmula de s, es constantemente *un cuadrado perfecto*, multiplicado por $\pm\sqrt{-3}$. Esta coincidencia fué en realidad la primera razón que tuve, pues otras más poderosas se presentaron después, para proponerme ésta, entonces, para mí al menos, utópica cuestión: *resolver la ecuación de tercer grado sin radicales de grado impar.*

El entrar el radical de tercer grado en todas las soluciones hasta entonces descubiertas, no podía menos de hacer aparecer como quimérica aquella pretensión; pero el hecho de que en todas las soluciones practicadas desaparecía el radical, porque la cantidad á él sometida era un cubo perfecto, daba también motivo para que al menos se pudiese sospechar, si su intervención en las soluciones sería ó no esencialmente necesaria.

La empresa, aunque larga y á veces desesperada, terminó por fin satisfactoriamente, dándome á conocer un modo de resolver dicha ecuación con sólo radicales de segundo y cuarto grado, y otros dos con sólo el radical de segundo.

Con motivo de estas soluciones, presentóse otra con radical de tercer grado, de muy distinto método que las otras, por lo que también se pone á continuación de aquéllas.

La coincidencia de ser cuadrados y cubos las cantidades subradicales en el primer método fundado en $c^2=3bn$, coincidencia que sólo se hacía visible después de sustituir los valores numéricos de los coeficientes, era preciso comprobarla con los coeficientes literales de la ecuación dada, y así se consiguió por fin, como puede verse á continuación de las soluciones con radical de tercer grado.

¿Y á qué tantas soluciones para una sola ecuación? me preguntará cualquiera. Pues muy sencillo: en un principio iba tras una solución que fuese mejor que todas las otras; pero ya más tarde juntóse á esto la idea de poder pasar sistemáticamente de la de tercer grado á la de cuarto, y, si fuese posible después, de la de cuarto á las siguientes.

Convengo en que esta empresa parecerá, sin duda, el colmo del atrevimiento ó de la insensatez; pero tampoco nadie negará que la otra empresa, *de resolver la de tercer grado sin radicales de grado impar*, no era, ni menos insensata, ni menos atrevida que la segunda. Es cosa bien probada que las utopias más absurdas suelen á veces convertirse en realidades.

CUADERNO PRIMERO

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

CUATRO MODOS DE RESOLVERLA

LUCUBRACIONES ALGEBRAICAS

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

ARTÍCULO PRIMERO

TEOREMA.—*El producto de dos números, multiplicado por 4, es igual al cuadrado de la suma, menos el cuadrado de la diferencia de dichos números.*

En efecto, si $n = p\,q$ será $4\,n = 4\,p\,q$,

pero $4\,p\,q = (p+q)^2 - (p-q)^2$

Esta igualdad última queda demostrada con sólo ejecutar las operaciones indicadas en el segundo miembro.

Y partiendo por 4 dicha igualdad, resulta:

$$p\,q = \frac{(p+q)^2 - (p-q)^2}{4}$$

NOTA. La anterior propiedad de los factores de un producto no sólo es aplicable, como vamos á ver, á la resolución de la ecuación de segundo grado, sino que además nos facilita el modo de hallar el producto de dos números por medio de los cuadrados; pues es evidente que si sumamos y restamos entre sí los factores de un producto $p\,q$, y tomamos en la tabla de cuadrados los correspondientes á la suma y diferencia, el producto será sin duda la cuarta parte de la diferencia de los cuadrados.

Las tablas, en vez de ser de los cuadrados, podrían ser con ventaja de las cuartas partes de éstos, pues de este modo los productos se hallarían con sólo sumar y restar entre sí los factores, y luego restar los números correspondientes de las tablas.

Por vía de ensayo se construyeron las tablas de cuartas partes hasta el número 20.000.

ARTÍCULO II

APLICACIÓN DEL TEOREMA PRECEDENTE Á LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Sea la ecuación $x^2+b\,x+n=0.$

Sean p, q, los dos valores de x.

Tendremos: $p+q=-b$

$$p\,q=n$$

Y también $4\,p\,q=4\,n=(p+q)^2-(p-q)^2$

Pero $(p+q)^2=b^2$

Luego $4\,n=b^2-(p-q)^2$

y $(p-q)=\pm\sqrt{b^2-4\,n}$

Conocemos, pues, la suma $-b$, y la diferencia $\pm\sqrt{b^2-4n}$, de los dos valores de x; luego el mayor será, la mitad de la suma, mas la mitad de la diferencia; y el menor, la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia. Lo cual nos da la misma fórmula común, y nos comprueba que el valor del radical en la ecuación de segundo grado representa la diferencia de sus raíces.

ARTÍCULO III

SEGUNDO MODO DE RESOLVER LA DE SEGUNDO GRADO

Sea $x^2+bx+n=0.$

Sean p, q, los valores de x; y se tendrá:

$$p+q=-b$$

$$pq=n.$$

Hagamos $p-s=q$; con lo que, sustituyendo, nos dará:

$$2p-s=-b$$

$$p^2-ps=n$$

Despejando p en la primera y sustituyendo en la segunda, será:

$$\frac{(s-b)^2}{4}+\frac{-s^2+bs}{2}-n=0$$

De donde $$s^2-b^2+4n=0$$

ó bien $$s=\pm\sqrt{b^2-4n}$$

Conocemos, pues, como antes la suma y la diferencia de los dos valores de x.

NOTA. Obsérvese que este método y el precedente se fundan en *la relación de las raíces de la ecuación con los coeficientes de la misma:* sobre lo cual puede verse el teorema núm. 526, pág. 322 del Álgebra de Cirode, edición décimatercera, en cuyo teorema se niega la posibilidad de determinar las raíces á medio de sus relaciones con los coeficientes.

En la de tercer grado veránse también soluciones que se fundan en dichas relaciones.

ARTÍCULO IV

OTRA SOLUCIÓN DE SEGUNDO GRADO

Sea $$y^2+by+n=0 \qquad (A)$$

Hacemos $y=\frac{x}{q}$; se sustituye, y multiplicando por q^2, será:

$$x^2+bqx+nq^2=0 \qquad (A_1)$$

Haciendo el coeficiente de x, $bq = -2$, será $q = \frac{-2}{b}$: sustituyendo, nos da:

$$x^2 - 2x + \frac{4n}{b^2} = 0 \qquad (A_2)$$

Haciendo en esta $x = (z + r)$, y sustituyendo, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} z^2 + 2r \\ \quad - 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} z + r^2 = 0 \\ \quad - 2r \\ \quad + \frac{4n}{b^2} \end{array} \qquad (A_3)$$

Ahora daremos á r el valor necesario para que *la suma de los coeficientes de toda la ecuación sea igual á cero*, esto es:

$$\begin{array}{ll} r^2 + 2r & + \frac{4n}{b^2} = 0 \\ \quad - 2r & - 1 \end{array}$$

De donde resulta: $r = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4n}}{b}$

Con este valor de r es en (A_3) la suma de los coeficientes igual á *cero*, y por lo tanto un valor de z es la unidad. El otro valor será el cociente de dividir (A_3) por $(z - 1)$; con lo cual queda también resuelta la ecuación dada (A).

Observaráse que esta solución está fundada en la posibilidad de igualar á *cero* la suma de los coeficientes de una ecuación dada.

ARTÍCULO V

OTRO PROCEDIMIENTO

Sea la ecuación: $$x^2+2\frac{b}{2}x+n=0 \qquad (A)$$

Multiplicándola por p, será: $$p\,x^2+\frac{2bp}{2}x+n\,p=0 \qquad (A_1)$$

Añadiendo y quitando x^2, y pasando al segundo miembro el término de $(p-1)$, será:

$$x^2+2\frac{bp}{2}x+np=(1-p)x^2 \qquad (A_2)$$

Haciendo ahora que el quebrado del coeficiente de x, elevado al cuadrado, sea igual al término $n\,p$, nos da:

$$\frac{b^2p^2}{4}=n\,p$$

De donde $$p=\frac{4n}{b^2}$$

Con este valor de p, es evidente que el primer miembro de (A_2) es el cuadrado de $\left(x+\frac{bp}{2}\right)$, y tomando en ella las raíces cuadradas, será:

$$x+\frac{bp}{2}=x\sqrt{1-p}$$

Sustituyendo en ésta el valor de p, y ejecutando operaciones, se obtiene:

$$x=\frac{n}{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4n}}{2}}$$

En esta fórmula, las raíces de la ecuación están representadas por un cociente, cuyo dividendo es el producto de las raíces, y el divisor, la suma ó la diferencia de las mismas.

CUADERNO SEGUNDO

ECUACIÓN DE TERCER GRADO

Puede tener catorce soluciones directas.
Se exponen diecinueve preparadas con radical de tercer grado.
Demostración de las raíces
cuadrada y cúbica de los radicales en la primera solución,
fundada en $c^2=3\ bn$.
Una solución con sólo radicales de segundo y cuarto grado.
Dos soluciones con sólo radicales de segundo grado.

ECUACIÓN DE TERCER GRADO

CAPÍTULO PRIMERO

SOLUCIONES DIRECTAS Y TRANSFORMACIÓN GENERAL PARA LAS PREPARADAS

ARTÍCULO PRIMERO

SOLUCIONES DIRECTAS

Sea la ecuación $y^3 + b\,y^2 + c\,y + n = 0$ $\qquad (A)$

Los coeficientes de esta ecuación, b, c, n, pudieran tener entre sí, de dos en dos, ó los tres á la vez, una de las relaciones siguientes, sin necesidad de preparación, y entonces con cualquiera de ellas vendría la ecuación *directamente* resuelta.

Primera solución.

Si fuese: $b = 3$, $c = 3$, $n = 1$, la ecuación sería el cubo de $(y + 1)$ con las tres raíces iguales.

Segunda solución.

Si fuese: $b = 3$, $c = 3$, $n \gtrless 1$, con añadir y quitar 1, sería:

$$y = -1 + \sqrt[3]{1 - n}$$

Dividiendo la ecuación por la raíz conocida $\left(y + 1 - \sqrt[3]{1 - n}\right)$ nos daría los otros dos valores de y, el polinomio de segundo grado que resulta en el cociente, igualándole á *cero*.

Tercera solución.

Si fuese: $\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{c}{3}$ y $\left(\frac{b}{3}\right)^3 = n$, la ecuación sería el cubo de $\left(y + \frac{b}{3}\right)$ con las tres raíces iguales.

Cuarta solución.

Si fuese: $\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{c}{3}$ y $\left(\frac{b}{3}\right)^3 \gtrless n$, con añadir y quitar $\left(\frac{b}{3}\right)^3$ se tendría:

$$y = -\frac{b}{3} + \sqrt[3]{\frac{b^3}{27} - n}$$

Los otros dos valores se hallarían como en el segundo caso.

Quinta solución.

Si $bc = n$, la ecuación sería divisible por la raíz $(y + b)$; los otros dos valores como en el segundo caso.

Sexta solución.

Si fuese: $b = c$, y $\frac{b}{3} = n$, sería: $y^3 + 3\frac{b}{3}y^2 + 3\frac{b}{3}y + \frac{b}{3} = 0$.

Sumando y restando $\frac{b}{3}y^3$, nos dará la igualdad:

$$\frac{b}{3}(y+1)^3 = y^3\left(\frac{b}{3} - 1\right)$$

De donde sale $y = \dfrac{1}{-1 + \sqrt[3]{1 - \frac{3}{b}}}$

Los otros dos valores como en el segundo caso.

Séptima solución.

Si fuese: $b^2 = c$, $b^3 = n$, sería la ecuación divisible como en el quinto caso por $(y + b)$, y los otros dos valores como en el segundo caso.

Octava solución.

Si fuese: $b = c$, $b^2 = n$, se tendría lo mismo que en la precedente.

Novena solución.

Si fuese: $(b + c + n) = -1$, sería $y = 1$; los otros dos valores como en el segundo caso.

Décima solución.

Si fuese: $b = 1$ y $c = n$, sería la ecuación divisible por $(y + 1)$; los otros dos valores como en el segundo caso.

Undécima solución.

Si $b=3$ y $\left(\frac{c}{3}\right)^2 = n$, poniendo en vez de n su igual $\left(\frac{c}{3}\right)^2$ sería:

$$y^3 + 3\,y^2 + 3\,\frac{c}{3}\,y + \frac{c^2}{9} = 0.$$

Multiplicando por $\frac{c}{3}$ y sumando y restando y^3, dará:

$$\left(y + \frac{c}{3}\right)^3 = y^3\left(\frac{3-c}{3}\right)$$

De donde
$$y = \frac{c}{-3 + 3\sqrt[3]{\frac{3-c}{3}}}$$

Los otros dos valores, como en el segundo caso.

Duodécima solución.

Si $c^2 = 3\,b\,n$; poniendo en vez de n su igual $\frac{c^2}{3\,b}$; multiplicando por 3 y partiendo por b, será:

$$\frac{3}{b}\,y^3 + 3\,y^2 + 3\,\frac{c}{b}\,y + \frac{c^2}{b^2} = 0.$$

Multiplicando ahora por $\frac{c}{b}$, y añadiendo y quitando y^3, nos dará:

$$\left(y + \frac{c}{b}\right)^3 = y^3\left(\frac{b^2 - 3\,c}{b^2}\right).$$

De donde sale $$y = \frac{c}{-b + \sqrt[3]{b\,(b^2 - 3\,c)}}$$

Los otros dos valores como en el segundo caso.

Nota. Obsérvese que la undécima es como una consecuencia de la duodécima, después de multiplicar ésta por 3 y partirla por b.

Décimatercera solución.

La cual sólo se diferencia de la anterior en el modo de proceder. En efecto; si se tiene $c^2 = 3\,b\,n$, partiremos por y^3, y luego por n, y se tendrá:

$$\frac{1}{y^3} + \frac{c}{n} \times \frac{1}{y^2} + \frac{b}{n} \times \frac{1}{y} + \frac{1}{n} = 0.$$

En esta ecuación, el coeficiente del segundo término $\frac{c}{n}$ elevado al cuadrado, es igual á tres veces el coeficiente de tercer término, puesto que se tiene $c^2 = 3\,b\,n$. Procediendo, pues, en este caso como en su análogo el cuarto, y poniendo en vez de $\frac{b}{n}$, su igual $\frac{c^2}{3n^2}$, se obtiene para y el mismo valor que en la precedente.

Este último modo de proceder fúndase, según se ha visto, en la condición general $b^2 = 3c$, la cual se realiza como una consecuencia de la otra $c^2 = 3\,b\,n$: y por lo tanto, puede decirse que la condición cuarta es una consecuencia de la duodécima.

Décimacuarta solución.

Por último; si se diese $y^3 + y^2 + y + 1 = 0$, es evidente que un valor de y es -1; los otros dos valores como en el segundo caso.

Quedan, pues, á mi modo de ver, determinadas todas las condiciones externas, con cada una de las cuales se resuelve directamente la ecuación, sin necesidad de transformarla.

Sin embargo, con el conocimiento de estas formas exteriores por sí solo, nada habremos adelantado, puesto que cada una de ellas, en relación con las formas que no dan solución alguna por sí mismas. es como la unidad considerada en el número infinito.

Preciso es, pues, recurrir á las *transformaciones;* pero debiendo ser esto en tal manera, que la transformada, si ha de poderse resolver, se nos presente bajo una de las formas externas que quedan expresadas.

ARTÍCULO II

TRANSFORMACIONES

De todas las formas que podemos dar á la ecuación de tercer grado, modificando sus coeficientes, sólo cuatro de ellas reunen la condición de prepararla para que pueda ser resuelta. Hay además otra que, diferente á la vista, es idéntica en el fondo y en los resultados á una de las primeras.

Veamos, pues, cuáles son estas formas, ó *relaciones de los coeficientes*, y el modo de establecerlas.

Sea la ecuación: $$y^3 + b_1 y^2 + c_1 y + n_1 = 0 \qquad (A)$$

Nótese que si usamos el subíndice 1, es para evitar luego el uso de las mayúsculas.

Haciendo $y = (x + s)$, se sustituye, y se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3s \\ \quad + b_1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x^2 + 3s^2 \\ \quad + 2b_1 s \\ \quad + c_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} x + s^3 \\ \quad + b_1 s^2 \\ \quad + c_1 s \\ \quad + n_1 \end{array} = 0. \qquad (A_1)$$

Para abreviar, representaremos los coeficientes de ésta por las letras respectivas b, c, n, las que, puestas en la ecuación, nos darán:

$$x^3 + b x^2 + c x + n = 0. \qquad (A_2)$$

A la disponible s podemos darle en (A_1) cuatro valores sucesivos, con los cuales obtendremos para los coeficientes de (A_2) estas cuatro relaciones:

$$\begin{array}{lrl} \text{Relación 1.}^{a} & c^2 = & 3bn \\ 2.^{a} & 4b^2c = & b^4 + c^2 + 6bn \\ 3.^{a} & 5b^2c = & b^4 + 4c^2 + 6bn \\ 4.^{a} & b^4 + c^2 = & 2b^2c + 12bn \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} (m)$$

Hay, por fin, una quinta relación que es idéntica en los resultados á la primera, y sólo se diferencia en que, al establecerla, se separa el factor 3 en los dos términos medios de (A_1), y se expresa de este modo:

$$5.^a \quad c^2 = b\,n \qquad (m)$$

Para realizar estas cinco igualdades no hay más que poner en ellas, en lugar de cada letra, el coeficiente que representa de (A_1), ó sea:

$$\begin{aligned} b &= 3\,s + b_1 \\ c &= 3\,s^2 + 2\,b_1\,s + c_1 \\ n &= s^3 + b_1\,s^2 + c_1\,s + n_1 \end{aligned}$$

Y ejecutando las operaciones indicadas, resultará en todas para s una ecuación de segundo grado.

La de la primera y quinta, que son idénticas, es la siguiente:

$$(b_1^2 - 3\,c_1)\,s^2 + (b_1\,c_1 - 9\,n_1)\,s + (c_1^2 - 3\,b_1\,n_1) = 0. \qquad (h)$$

De donde

$$s = \frac{-(b_1c_1 - 9n_1) \pm \sqrt{(b_1c_1 - 9n_1)^2 - 4(b_1^2 - 3c_1)(c_1^2 - 3b_1n_1)}}{2(b_1^2 - 3c_1)} = 0. \quad (h_1)$$

Del mismo modo se obtienen la ecuación y fórmula de s en las otras igualdades (m), siendo todas diferentes entre sí, y también de la establecida en (h).

Siendo esto de fácil ejecución, omitiremos el hacerlo en obsequio á la brevedad.

El uso de las minúsculas b, c, n, en (A_2), es, como se ve, para evitar los inconvenientes del uso de las mayúsculas en las ecuaciones y fórmulas de muchos términos.

CAPÍTULO II

SOLUCIONES DE TERCER GRADO FUNDADAS EN LAS CINCO RELACIONES (m).

ARTÍCULO PRIMERO

SOLUCIONES QUE SE FUNDAN EN LA PRIMERA RELACIÓN

$$c^2 = 3\,b\,n$$

Ante todo, conviene observar que las relaciones (m) segunda, tercera y cuarta, no se pusieron entre *las soluciones directas*, porque las tales formas no dan solución directa, sino que sirven de medios para pasar á otras que la dan, como luego se verá al tratar de ellas.

También observaremos, para evitar repeticiones, que la ecuación (A_2) á que aludiremos con frecuencia, es la que precede á las relaciones (m), entre cuyos coeficientes se verifican estas mismas relaciones.

Primera y segunda solución.

En los números 12 y 13 de las soluciones directas hemos visto ya que la ecuación (A_2), por ser en ella $c^2 = 3\,b\,n$, se puede resolver de los dos modos, diferentes en la forma, que allí se explican, coincidiendo ambos en que la fórmula de x es:

$$x = \frac{c}{-b + \sqrt[3]{b(b^2 - 3c)}}$$

Y por lo tanto, la fórmula de y en la ecuación dada, será:

$$y = s + \frac{c}{-b + \sqrt[3]{b(b^2 - 3c)}}$$

Tercera solución, fundada en

$$c^2 = 3\,b\,n.$$

Si en (A_2) hacemos $x = \frac{z}{q}$ y se sustituye, multiplicando por q^3, dará:

$$r^3 + b\,q\,r^2 + c\,q^2\,r + n\,q^3 = 0. \qquad (L)$$

Igualando á *cero* los coeficientes de ésta y dividiendo á la la vez por n, será:

$$q^3 + \frac{c}{n}\,q^2 + \frac{b}{n}\,q + \frac{1}{n} = 0. \qquad (L_1)$$

En ésta se tiene que: el *coeficiente de* q^2, elevado al cuadrado, *es igual* á tres veces el coeficiente de q, puesto que ya tenemos $c^2 = 3\,b\,n$: luego esta ecuación está resuelta por el modo de la cuarta solución directa.

Resuelta (L_1) queda resuelta (L), puesto que un valor de z es la *unidad*, según se ha visto en la novena solución directa.

Resuelta (L) lo está también (A_2), y por lo tanto la ecuación dada.

Cuarta solución, fundada en

$$c^2 = 3\,b\,n.$$

Si en la ecuación (L) que precede, hacemos $r = (u + s_1)$, sustituyendo, se tendrá:

$$\begin{array}{r|l|l} u^3 + 3\,s_1 & u^2 + 3\,s_1^2 & u + s_1^3 \\ + b\,q & + 2\,b\,q\,s_1 & + b\,q\,s_1^2 \\ & + \;\; c\,q^2 & + c\,q^2\,s_1 \\ & & + n\,q^3 \end{array} = 0. \qquad (L_2)$$

Si en ésta hacemos $s_1=1$, la última cantidad, libre de u, queda en esta forma, después de dividirla por n.

$$q^3+\frac{c}{n}q^2+\frac{b}{n}q+\frac{1}{n} \qquad (L_3)$$

Cuya cantidad, igualada á *cero*, es una ecuación idéntica á la (L_1) del caso anterior, y se resolverá del mismo modo.

Resuelta, pues, la (L_3) tendremos la (L_2) con el último término reducido á *cero*, y, por lo tanto, convertida en una de segundo grado para u.

Resuelta (L_2), queda lo demás como en el caso precedente.

Quinta solución, fundada en

$$c^2=3\,b\,n.$$

Si en la (L_2) que precede, en vez de hacer $s_1=1$, hacemos $s_1=c\,q^2$, sustituyendo en el último término libre de u, y dividiéndole por $c^3\,q^3$, nos dará, igualándole á *cero*:

$$q^3+\frac{b}{c}q^2+\frac{1}{c}q+\frac{n}{c^3}=0 \qquad (L_4)$$

En la cual el coeficiente de q, elevado al cuadrado, es igual á tres veces el de q^2, multiplicado por el último término.

Luego esta ecuación puede resolverse directamente como en la primera solución fundada en $c^2=3\,b\,n$.

Sexta solución, fundada en

$$c^2=3\,b\,n.$$

Esta solución, y las dos que siguen, consisten en preparar divisores á la ecuación (A_2).

Dividiendo la ecuación (A_2) por el trinomio de segundo grado $(x^2+s_1\,x+q)$, hasta que desaparezca x^2 en el residuo, el cociente que resulta es $(x + b - s)$; y el residuo, que debe ser *cero* para que la división sea exacta, es:

$$(s_1^2 - b\,s_1 - q + c)\,x + (s_1\,q - b\,q + n) = 0 \qquad (h)$$

Igualando á *cero* el segundo paréntesis y despejando s_1, nos da:

$$s_1 = \frac{b\,q - n}{q} \qquad (h_1)$$

Cuyo valor, sustituído en el primer paréntesis, nos da para q la ecuación:

$$q^3 - c\,q^2 + b\,n\,q - n^2 = 0.$$

Pero en ésta, el coeficiente de q^2, elevado al cuadrado, es evidentemente igual á tres veces el coeficiente de q, ó sea $c^2 = 3\,b\,n$; luego esta ecuación de q está resuelta por el método de la cuarta solución directa.

Tenemos, pues, resuelta la igualdad (h); con lo que el residuo de la división se redujo á *cero*, y, por lo tanto, la división se hizo exacta.

Siendo exacta la división, es evidente que el polinomio de (A_2) se hizo igual á este producto.

$$(x^2 + s\,x + q)\,(x + b - s_1) = 0.$$

El cual nos da la (A_2) resuelta en funciones de primero y de segundo grado.

Séptima solución, fundada en

$$c^2 = 3\,b\,n.$$

OTRO DIVISOR

El polinomio de (A_2), que es igual á *cero*, es evidentemente igual á este otro:

$$x\,(x^2 + b\,x + s_1) + \big((c - s_1)\,x + n\big) = 0. \qquad (h)$$

Dividiendo el primer paréntesis por el último total, se verá que el residuo sin x, que debe ser igual á *cero*, es:

$$\left.\begin{array}{r} s_1^3 - 2\,c\,s_1^2 + c^2 \\ +b\,n \end{array}\right| s_1 + n^2 - b\,c\,n = 0. \qquad (h_1)$$

En esta ecuación el coeficiente de s_1^2 elevado al cuadrado, es igual á tres veces al coeficiente de s_1, es decir:

$$4\,c^2 = 3\,c^2 + 3\,b\,n$$

ó bien $\qquad c^2 = 3bn$, que es la relación supuesta.

Luego la igualdad (h_1) está resuelta por el método de la cuarta solución directa, y, por lo tanto, la (A_2) se hizo divisible por la cantidad de primer grado $\big((c - s_1)\,x + n\big)$.

Octava solución, fundada en

$$c^2 = 3\,b\,n.$$

OTRO DIVISOR

Si el polinomio de (A_2) le dividimos por la cantidad de primer grado $\left(x + \frac{s_1}{b}\right)$, veráse que el cociente es la de segundo grado:

$$x^2 + \left(b - \frac{s_1}{b}\right)x + \left(c - s_1 + \frac{s_1^2}{b^2}\right).$$

y el residuo, que debe ser *cero* para que la división sea exacta, es, después de multiplicarle por b^3, y cambiar los signos:

$$s_1^3 - b^2\,s_1^2 + b^2\,c\,s_1 - b^3\,n = 0.$$

Pero en ésta se tiene que el cuadrado del coeficiente del penúltimo término es igual á tres veces el producto del segundo por el último, es decir:

$$b^4\,c^2 = 3\,b^5\,n$$

ó bien $\qquad c^2 = 3\,b\,n.$

Resuelta, pues, la de s_1, la división será exacta, quedando, por lo tanto, resuelta la de (A_2), en función del divisor y del cociente que son exactos.

Novena y última solución, fundada en

$$c^2 = 3\,b\,n.$$

RELACIÓN DE LAS RAÍCES CON LOS COEFICIENTES

Representando las tres raíces ó valores de x en (A_2) por p, q, r, se tendrá:

$$\begin{aligned} p + q + r &= b \\ pq + pr + qr &= c \\ pqr &= n \end{aligned}$$

Haciendo $p\,q = z$, y sustituyendo, dará:

$$z\,r = n, \qquad \text{ó bien } r = \frac{n}{z}$$

$$z + r\,(p+q) = c$$

$$(p+q) = b - r$$

Poniendo el valor de r en la segunda y la tercera, será:

$$z + \frac{n}{z}(p+q) - c = 0$$

$$(p+q) = b - \frac{n}{z}$$

Y poniendo en la primera el de $(p+q)$, tomado en la segunda, será, después de multiplicar por z^2:

$$z^3 - c\,z^2 + b\,n\,z - n^2 = 0.$$

En ésta, el cuadrado del coeficiente de z^2 es igual al coeficiente de z multiplicado por tres; luego está resuelta por el modo cuarto de soluciones directas.

Conocido el valor de $p\,q = z$, conocemos también el de $(p+q)$, y, por lo tanto, las tres raíces de (A_2).

ARTÍCULO II

SOLUCIONES FUNDADAS EN LA SEGUNDA RELACIÓN

$$b^4+c^2+6\,b\,n-4\,b^2\,c=0.$$

PRIMER MODO—UN DIVISOR

Tomando la ecuación (A_2) con esta relación entre sus coeficientes, hacemos $x=\frac{z}{q}$; se sustituye, y multiplicando por q^3, tendremos:

$$z^3+b\,q\,z^2+c\,q^2\,z+n\,q^3=0. \qquad (A_3)$$

En ésta daremos á q el valor necesario para que: *último término, menos el segundo coeficiente multiplicado por el tercero, más el segundo cuadrado sumado con el tercero, menos dos veces el segundo, más la unidad, sea igual á cero.*

Es decir:

$$(n-b\,c)\,q^3+(b^2+c)\,q^2-2\,b\,q+1=0. \qquad (a)$$

Dividiendo por $(n-b\,c)$, y multiplicando y dividiendo á la vez por 3, los coeficientes de los dos términos medios de esta ecuación (a), tendremos:

$$q^3+3\,\frac{b^2+c}{3\,(n-b\,c)}\,q^2+3\,\frac{-2\,b}{3\,(n-b\,c)}\,q+\frac{1}{n-b\,c}=0. \qquad (A_4)$$

En la cual, el quebrado del segundo término, elevado al cuadrado, es igual al quebrado del tercer término, ó sea:

$$\left(\frac{b^2+c}{3\,(n-b\,c)}\right)^2=\frac{-2\,b}{3\,(n-b\,c)}$$

Lo cual nos da: $b^4+c^2+6\,b\,n-4\,b\,c=0$, que es la igualdad ya establecida como cierta en (A_2).

Luego la ecuación (A_4) está resuelta por el modo de la cuarta solución directa.

Hallados el valor ó valores de q en (A_4), y expresando los coeficientes de (A_3), por B, C, N, tendremos:

$$z^3+Bz^2+Cz+N=0. \qquad (A_5)$$

En la que los coeficientes tienen entre sí la relación (a).

Esto así, se tiene que el polimonio (A_5), que es igual á *cero*, es también *igual* al siguiente producto de dos factores:

$$(z^2+z+s_1)(z+B-1). \qquad (A_6)$$

Esta igualdad quedará demostrada si dividiendo (A_5) por el primer paréntesis, y obteniendo el segundo como cociente, viniese el residuo reducido á *cero*, sólo á medio de la disponible s_1.

En efecto; haciendo la indicada división por el primer paréntesis, el cociente es el segundo paréntesis, y el residuo es:

$$(C-s_1-B+1)z+(N-Bs_1+s_1) \qquad (R)$$

Despejando s_1 en estos dos paréntesis, para reducirlos á *cero*, é igualando luego los dos valores, resulta:

$$\frac{N}{B-1}=C-B+1. \qquad (R_1)$$

De donde sale:

$$N-BC+B^2+C-2B+1 \qquad (a_1)$$

Cuya cantidad es evidentemente *cero*, por ser la misma reducida á *cero* en (a).

Siendo, pues, *cero* la cantidad (a_1), es indudable que con cualquiera de los valores s_1, igualados en (R_1), el residuo R se reduce á *cero*, y por lo tanto la división se hizo exacta.

Pero siendo exacta la división, el polinomio de (A_5) es igual al producto (A_8), y queda, en consecuencia, resuelta la ecuación de (A_5) en funciones de primero y segundo grado, y á la vez también la (A_3), igual á la (A_5).

Segunda solución, fundada en

$$b^4 + c^2 + 6\,b\,n - 4\,b^2\,c = 0.$$

OTRO DIVISOR

La ecuación (A_2), con la relación dicha entre sus coeficientes, siendo igual á *cero* su polinomio, este es también igual al polinomio.

$$(x^2 - s_1)\,(x + b) + \big((c + s_1)\,x + n + b\,s_1\big) \qquad (A_2)$$

Dividiendo (A_2) por el factor $(x^2 - s_1)$ nos da de cociente $(x + b)$ y de residuo $x\,(c + s_1) + (b\,s_1 + n)$: y dividiendo el divisor $(x^2 - s_1)$ por este residuo, resulta como cociente entero la cantidad

$$\frac{x}{c + s_1} - \frac{b\,s_1 + n}{(c + s_1)^2}$$

y como segundo residuo sin x, la cantidad:

$$\frac{(b\,s_1 + n)^2 - s_1\,(c + s_1)^2}{(c + s_1)^2} \qquad (a)$$

la cual debiendo ser *cero*, da para s, la ecuación:

$$s_1^3 - (b^2 - 2\,c)\,s_1^2 + (c^2 - 2\,b\,n)\,s_1 - n^2 = 0 \qquad (A_4)$$

Pero en ésta se tiene que el coeficiente de s_1^2 elevado al cuadrado, es igual al coeficiente de s_1 multiplicado por 3, ó sea $(b^2 - 2\,c)^2 = 3\,(c^2 - 2\,b\,n)$. Esta igualdad es cierta, pues es la misma que nos sirve de supuesto.

Según esto, la ecuación (A_4) está resuelta por el modo cuarto de las soluciones directas; y, por lo tanto, siendo *cero* el segundo residuo (a), tendremos que la cantidad $\left((c+s_1)\,x+(b\,s_1+n)\right)$ del último paréntesis total (A_3), es divisor común de sí mismo, y del factor (x^2-s_1), por cuya razón lo es también de (A_2), la cual queda así resuelta en funciones de primero y segundo grado, pero que ya llevan, como en los casos anteriores, el radical de tercer grado.

Tercera solución, fundada en

$$b^4+c^2+6\,b\,n-4\,b^2c=0.$$

OTRO DIVISOR

Si la ecuación (A_2) la dividimos directamente por $(x+s_1+b)$, nos dará de cociente $(x^2-s_1x+s_1{}^2+bs_1+c)$, y de residuo:

$$s_1{}^3+2\,b\,s_1{}^2+(b^2+c)\,s_1+(b\,c-n) \qquad (A_3)$$

Pero esta cantidad, aunque de tercer grado, está reducida á *cero* directamente, puesto que el cuadrado del coeficiente de s_1 es igual á tres veces el producto del coeficiente de $s_1{}^2$ por todo el último término, es decir:

$$(b^2+c)^2=3.2\,b\,(b\,c-n)$$

ó bien $\quad b^4+c^2+6\,b\,n-4\,b^2c=0$, que es lo supuesto.

Reducido á *cero* así el residuo, la división es exacta, y por lo tanto está resuelta (A_2).

Cuarta solución, fundada en

$$b^4+c^2+6\,b\,n-4\,b^2c=0.$$

OTRO DIVISOR, Ó SEA LA QUINTA SOLUCIÓN DIRECTA

Si en (A_2) hacemos $x=(z+s_1)$ y sustituimos, nos da:

$$\left.\begin{array}{l} z^3+3\,s_1 \\ \quad +\;\;b \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} z^2+3\,s_1{}^2 \\ \quad +2\,b\,s_1 \\ \quad +\;\;c \end{array}\right| \begin{array}{l} z+s_1{}^3 \\ \;\;+b\,s_1{}^2 \\ \;\;+c\,s_1 \\ \;\;+n \end{array} = 0 \qquad (A_3)$$

En ésta daremos el valor necesario para que: *el coeficiente de* z^2, *multiplicado por el de* z, *sea igual á todo el último término*, es decir:

$$(3\,s_1+b)\,(3\,s_1^2+2\,b\,s_1+c)=s_1^3+b\,s_1^2+c\,s_1+n.$$

Ejecutando operaciones y ordenando para s_1 después de dividir por 8, resulta:

$$s_1^3+b\,s_1^2+\frac{b^2+c}{4}\,s_1+\frac{bc-n}{8}=0.$$

Cuya ecuación está desde luego resuelta por ser en ella: el cuadrado del coeficiente de s_1, igual á tres veces el coeficiente de s_1^2 por el último término, ó bien:

$$\left(\frac{b^2+c}{4}\right)^2=\frac{3\,b\,(bc-n)}{8}$$

ó bien ejecutando operaciones $b^4+c^2+6\,b\,n-4\,b^2\,c=0$.

Resuelta así la de s_1, lo está también (A_3), puesto que se hizo divisible por $(z+3\,s_1+b)$.

Quinta solución, fundada en

$$b^4+c^2+6\,b\,n-4\,b^2c=0.$$

RELACIÓN DE LAS RAÍCES CON LOS COEFICIENTES

Expresando las raíces de (A_2) por p, q, r, tendremos:

$$\left.\begin{array}{r} p+q+r=b \\ pq+pr+qr=c \\ pqr=n \end{array}\right\}\qquad (h)$$

Hagamos $(p+q)=s_1$ sustituyendo y haciendo operaciones hasta que desaparezcan p, q y r, resulta para s_1 la ecuación:

$$s_1^3-2\,b\,s_1^2+(b^2+c)\,s_1+(n-b\,c)=0. \qquad (A_3)$$

En la cual es, según ya se ha visto: *el cuadro del coeficiente de* s_1, *igual á tres veces el de* s_1^2 *por el último término.*

Resuelta así la ecuación de s_1, conocemos el valor de la suma $(p+q)$ y por lo tanto conocemos r, en la primera de las igualdades (h).

Y conociendo r, conocemos el valor pq en la última de dichas igualdades.

Y conociendo los valores de la suma y del producto, conocemos también los respectivos de p y de q.

ARTÍCULO III

SOLUCIONES QUE SE FUNDAN EN LA TERCERA RELACIÓN

$$b^4+4c^2+6bn-5b^2c=0$$

Primera solución. — Un divisor.

Tomando la ecuación (A_2), con la relación expresada, hacemos $x=(z+s_1)$, y sustituyendo daremos á s_1 el valor necesario para que en la ecuación de z se tenga:

el coeficiente del segundo término elevado al cubo, menos cuatro veces el del segundo por el tercero, más ocho veces todo el último término, igual á cero, es decir:

$$(3s_1+b)^3-4(3s_1+b)(3s_1^2+2bs_1+c)+8(s_1^3+bs_1^2+cs_1+n)=0 \quad (a)$$

Ejecutando operaciones y ordenando para s_1, resulta:

$$s_1^3+bs_1^2+(4c-b^2)s_1+4bc-b^3-8n=0 \quad (a_1)$$

En la cual, el cuadrado del coeficiente de s_1 es igual á tres veces el coeficiente de s_1^2 multiplicado por toda la última cantidad, puesto que, ejecutada la operación, resulta, para ser *cero*, la cantidad que ya lo es por suposición, ó sea:

$$b^4 + 4\,c^2 + 6\,b\,n - 5\,b^2c = 0.$$

Según esto, la ecuación de s_1 está resuelta por cualquiera de los modos que se fundan en $c^2 = 3\,b\,n$.

Sustituyendo en la de z, expresaremos sus coeficientes por B, C, N, y se tendrá:

$$z^3 + Bz^2 + Cz + N = 0. \qquad (A_3)$$

En la que se verifica la relación (a).

Ahora en (A_3), se multiplica y parte por 2 el segundo término, se pasan al segundo miembro los dos últimos términos, y se añade en ambos miembros $\frac{B^2}{4}z$, con lo cual se tendrá:

$$z\left(z + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{B^2}{4} - C\right)z - N. \qquad (A_4)$$

Y en ésta se tiene que el segundo miembro es divisible, como el primero, por la cantidad $\left(z + \frac{B}{2}\right)$.

Hágase la división y se verá que siendo el cociente $\left(\frac{B^2}{4} - C\right)$, el residuo, que debe ser igual á *cero*, después de cambiarle los signos y multiplicar por 8, es:

$$B^3 - 4\,B\,C + 8\,N.$$

Cuya cantidad es la que se redujo á *cero*, en (a) á medio del valor de s_1.

Luego los dos miembros de (A_4) son divisibles por $\left(z + \frac{B}{2}\right)$ y, por lo tanto, está resuelta (A_4), y con ella (A_3) y (A_2).

Segunda solución, fundada en

$$b^4+4c^2+6bn-5b^2c=0.$$

RELACIÓN DE LAS RAÍCES CON LOS COEFICIENTES

Tomemos (A_2) con dicha relación, y expresando sus raíces por p, q, r, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{r} p+q+r=b \\ pq+pr+qr=c \\ pqr=n \end{array}\right\} \qquad (h)$$

Haciendo $p+q-r=s_1$, se sustituye hasta que se eliminen p, q, r, y entonces queda para s_1 la ecuación:

$$s_1^3-b\,s_1^2+(4c-b^2)\,s_1+(b^3-4bc+8n)=0 \qquad (a)$$

En la cual, el cuadrado del coeficiente de s_1 es igual á tres veces el coeficiente de s_1^2 por el último paréntesis: puesto que hecha la operación queda para ser *cero*, la misma cantidad que ya lo es por supuesto.

Está, pues, resuelta la de s_1 por cualquiera de los modos que se fundan en $c^2=3bn$.

Conocido el valor s_1, en la primera de las igualdades (h), tendremos:

$$(p+q)=\frac{b+s_1}{2} \qquad (a_1)$$

Poniendo el valor de $(p+q)$ en la segunda de las igualdades (h), y poniendo luego el valor de r tomado de la tercera, resulta:

$$pq=\frac{c\pm\sqrt{c^2-2n(b+s_1)}}{2}$$

Conocemos, pues, el valor de la suma y del producto de las raíces p y q; luego conocemos el de cada una de ellas, y por lo tanto, también el de r.

ARTÍCULO IV

SOLUCIONES FUNDADAS EN LA CUARTA RELACIÓN

$$b^4 + c^2 - 2b^2c - 12bn = 0.$$

Primera solución. — Un divisor.

Tomando (A_2) con esta relación, si la dividimos por la cantidad $(x + s_1 - b)$, nos dará de cociente la de segundo grado:

$$x^2 + (2b - s_1)x + s_1^2 - 3bs_1 + 2b^2 + c$$

y como residuo sin x, que debe ser igual á *cero* la de tercer grado para s_1:

$$s_1^3 - 4bs_1^2 + \left.\begin{matrix} 5b^2 \\ +\ c \end{matrix}\right| s_1 - (2b^3 + bc + n) = 0 \qquad (A_3)$$

En cuya ecuación, *el cuadrado* del coeficiente de s_1 *es igual* á tres veces el producto del coeficiente de s_1^2 por todo el último término; puesto que, haciendo la operación, nos queda para ser *cero* la misma cantidad que ya lo es por el supuesto.

Luego (A_3) está resuelta por cualquiera de los modos que se fundan en $c^2 = 3bn$.

Reducido así á *cero* el residuo (A_3), es indudable que (A_2) lo está también, pues que es igual al producto:

$$(x + s_1 - b)(x^2 + (2b - s_1)x + s_1^2 - 3bs_1 + 2b^2 + c).$$

NOTA. Si en el divisor se pone $+b$ en lugar de $-b$, resultaría la tercera solución fundada en $(b^4 + c^2 + 6bn - 4b^2c)$.

Segunda y última solución, fundada en

$$b^4 + c^2 - 2b^2c - 12bn.$$

Si en (A_2) hacemos $x = (z + b)$, sustituyendo, se tiene:

$$z^3 + 4bz^2 + \left.\begin{matrix} 5b^2 \\ + c \end{matrix}\right| z + (2b^3 + bc + n) = 0 \qquad (A_3)$$

En ésta los coeficientes están en la misma relación que en la del caso precedente, y, por lo tanto, se resuelve del mismo modo.

ARTÍCULO V

Si en la ecuación dada $Y^3 + b_1 Y^2 + c_1 Y + n_1$ hacemos $Y = (x + s)$, y sustituyendo damos á s el valor necesario para que desaparezca el segundo término, tendremos:

$$x^3 + cx + n = 0.$$

Esta ecuación presenta dos modos de solución idénticos en el fondo y forma á dos de los ya explicados, por cuyo motivo, y en obsequio á la brevedad, omitiremos la exposición de los mismos.

ARTÍCULO VI

La siguiente solución, con el radical de tercer grado, se diferencia de las precedentes en que la relación $c^2 = 3bn$, no se establece en la ecuación dada, sino en una deducida: y en que dicha relación no se realiza con la sustitución $Y = (x + r)$, sino con esta otra general $Y_1 = \frac{Y}{q}$, hecha de antemano en la ecuación dada, y estableciendo con q la relación que se verá.

Sea: $$Y^3 + b_1 Y^2 + c_1 Y + n_1 = 0. \qquad (A)$$

Separando Y en los tres primeros términos, y haciendo $Y=(x+r)$, se sustituye: y expresando los coeficientes del segundo paréntesis que resulta por b y c, se tendrá:

$$(x+r)\,(x^2+b\,x+c) \qquad +n=0 \qquad (A_1)$$

Poniendo $-s$ en el segundo paréntesis, le sumaremos fuera multiplicando por $(x+r)$; y separando s como factor común, la escribiremos así:

$$\left(x+r\right)\left(x^2+b\,x+(c-s)\right)+s\left(x+\frac{r\,s+n}{s}\right)=0 \quad (A_2)$$

Igualando á la unidad el quebrado del último paréntesis, nos da para s:

$$s=\frac{n}{1-r} \qquad (h)$$

Dividiendo el segundo paréntesis de (A_2) por $(x+1)$, nos da de residuo, que debe ser *cero*, para que sea exacta la división:

$$c-s-b+1=0. \qquad (h_1)$$

Sustituyendo los valores de s y de c y b, tomando estos de (A_1) ó sea $b=(2\,r+b_1)$, $c=(r^2+b_1 r+c_1)$; y operando hasta ordenar con respecto á r, resulta:

$$r^3 \begin{array}{l|l|l} +b_1 & r^2 + c_1 & r + n_1 = 0 \\ -3 & \quad\;\, -b_1 & \quad -c_1 \\ & \quad\;\, +3 & \quad +b_1 \\ & & \quad -1 \end{array} \qquad (h_2)$$

Si en ésta elevamos al cuadrado el coeficiente de r, igualando al producto de *tres veces* el coeficiente de r^2 por toda la última cantidad, se obtiene, para ser *cero*, esta expresión:

$$(c_1^2-3\,b_1 n_1)+(9\,n_1-b_1 c_1)+(b_1^2-3\,c_1)=0 \qquad (h_3)$$

Esta igualdad puede venir, siendo cierta, desde la ecuación (A). En efecto, supongamos que la propuesta fué:

$$Y_1^3+b_2Y_1^2+c_2Y_1+n_2=0 \qquad (A_3)$$

Y que en esta hicimos $Y_1=\frac{Y}{q}$; con lo que sustituyendo y multiplicando por q^3, será:

$$Y^3+b_2qY_1^2+c_2q^2Y+n_2q^3=0. \qquad (A_4)$$

Si en ésta establecemos entre los coeficientes la relación (h_3), no habrá más que multiplicar cada paréntesis por la potencia correspondiente de q, y será:

$$(c_1^2-3\,b_1n_1)\,q^4+(9\,n_1-b_1c_1)\,q^3+(b_1^2-3\,c_1)\,q^2=0.$$

Dividiendo por q^2, y despejando q, nos da:

$$q=\frac{-(9n_1-b_1c_1)\pm\sqrt{(9n_1-b_1c_1)^2-4(b_1^2-3c_1)(c_1^2-3b_1n_1)}}{2(c_1^2-3b_1n_1)} \qquad (h_4)$$

Expresando los coeficientes de (A_4) por b_1, c_1, n_1, tendremos la ecuación (A), con los coeficientes relacionados según (h_3).

Expresando también en (h_2) los coeficientes de r por B, C, N, será:

$$r^3+Br^2+Cr+N=0 \qquad (h_5)$$

En la cual es $C^2=3\,B\,N$; y puede, por lo tanto, resolverse como las fundadas en esta relación.

Resuelta la ecuación de r, hízose la (A_2) divisible por $(x+1)$, y está, por lo tanto, resuelta.

ARTÍCULO VII

DEMOSTRACIÓN FINAL SOBRE EL PRIMER MODO DE RESOLVER CON EL RADICAL DE TERCER GRADO, FUNDADO EN

$$c^2 = 3\,b\,n.$$

En el prólogo de este libro se hizo ya ligera indicación de que el radical de tercer grado, que entra en el método fundado en $c^2 = 3\,b\,n$, cubre siempre una cantidad que es *un cubo perfecto*; y que esta circunstancia se observó al hacer en las fórmulas la sustitución de los números representados por los coeficientes de la ecuación.

Pues bien; observado esto más detenidamente, se comprobó con las letras su certeza.

El radical, según se ve en la primera solución fundada en $c^2 = 3\,b\,n$, se presenta así: $\sqrt[3]{b\,(b^2 - 3\,c)}$.

Sustituyendo valores, aparece debajo el valor s con su radical de segundo grado $\pm\sqrt{(b_1 c_1 - 9\,n_1)^2 - 4\,(b_1^2 - 3\,c_1)\,(c_1^2 - 3\,b_1 n_1)}$; cuyo radical á su vez cubre una cantidad que es *un cuadrado perfecto*, multiplicado por $(\pm\sqrt{-3})$.

Si en ambos radicales se continúan las sustituciones hasta poner las *raíces* ó valores de la incógnita dada, los que expresaremos en general por p^1, q^1, r^1, tendremos:

$$\pm\sqrt{(b_1 c_1 - 9 n_1)^2 - 4(b_1^2 - 3c_1)(c_1^2 - 3b_1 n_1)} = \pm\sqrt{-3}\,(p^1 - q^1)(p^1 - r^1)(q^1 - r^1)$$

$$\text{y} \quad \sqrt[3]{b\,(b^2 - 3\,c)} = p^1 - \frac{q^1(1 \mp \sqrt{-3}) + r^1(1 \pm \sqrt{-3})}{2}$$

Si el polinomio que resulta debajo del radical de tercer grado después de hacer las sustituciones, se le ordenase con relación á q ó r, en vez de p, como se hizo para determinar su raíz, ésta sería la misma, con sólo cambiar de lugar p con q, ó con r respectivamente, en la fórmula que precede.

CUADERNO TERCERO

SOLUCIONES DE TERCER GRADO

Sin radical de grado impar.

NOTACIÓN PRELIMINAR

En la primera solución que sigue, con sólo radicales de segundo y cuarto grado, no debe, en rigor, buscarse un procedimiento que por su mayor sencillez pueda sustituir con ventaja á los que admiten el radical de tercer grado; pues, como desde luego se verá, es en ésta mayor la complicación de cantidades, sin duda porque la fórmula final está tomada directamente de una de cuarto grado.

Las otras dos soluciones, con sólo radicales de segundo grado, ofrecen fórmulas, al menos en la apariencia, más sencillas; por más que en una y otra estén tomadas sobre una de cuarto grado como en la primera: en éstas la de cuarto grado se presenta como un producto de dos factores de *segundo*, tomándose de cada uno una ecuación de segundo grado.

Las tres formas que aquí se dan á la ecuación, pueden admitir algunas modificaciones en el modo de desarrollarlas, pero sin que por ninguna de ellas se pueda llegar á una solución que se diferencie en el fondo de las tres ya mencionadas.

No será dudoso, sin embargo, que por cualquiera de estos modos, si se tratase de resolver una ecuación numérica, las dificultades de ejecución serán sumamente mayores que por los que admitan el radical de tercer grado. Pero aquí ya no se trata de lo que sea más ó menos fácil, sino solamente de lo que puede ser ó no científicamente posible. Bajo este aspecto, y siendo cierto que la lógica de los números no puede engañarnos, creo que la demostración hecha habrá de parecer á todos irreprochable.

ECUACIÓN DE TERCER GRADO

SU RESOLUCIÓN SIN RADICAL DE GRADO IMPAR

ARTÍCULO PRIMERO

PRIMERA SOLUCIÓN CON SÓLO RADICALES DE SEGUNDO Y CUARTO GRADO

Sea la ecuación: $y^3 + b\,y^2 + c\,y + n = 0$ $\qquad (A)$

Multiplicándola por $(y + s)$, nos da:

$$y^4 \left.\begin{array}{l} +b \\ +s \end{array}\right| y^3 \left.\begin{array}{l} +c \\ +bs \end{array}\right| y^2 \left.\begin{array}{l} +n \\ +cs \end{array}\right| y + ns = 0 \qquad (A_1)$$

Ahora se hace $y = (x + r)$ y se sustituye; pero á la vez se separa 4 como factor común en los términos segundo y cuarto, y 6 en el tercero, así:

$$x^4 + 4\left|\begin{array}{l} +r \\ +\frac{b+s}{4} \end{array}\right| x^3 + 6\left|\begin{array}{l} +r^2 \\ +\frac{(b+s)r}{2} \\ +\frac{(c+bs)}{6} \end{array}\right| x^2 + 4\left|\begin{array}{l} +r^3 \\ +\frac{3(b+s)r^2}{4} \\ +\frac{2(c+bs)r}{4} \\ +\frac{(n+cs)}{4} \end{array}\right| x + \begin{array}{l} r^4 = 0 \\ +(b+s)r^3 \\ +(c+bs)r^2 \\ +(n+cs)r \\ +ns \end{array} \qquad (A_2)$$

En ésta haremos que: *el cuadrado* del paréntesis vertical que tiene el segundo término *sea igual* al paréntesis vertical del tercero, ó bien:

$$\left(r + \frac{b+s}{4}\right)^2 = r^2 + \frac{(b+s)\,r}{2} + \frac{(c+b\,s)}{6} \qquad (h)$$

Ejecutando operaciones, desaparecen los términos de r, y queda para s la de segundo grado.

$$3s^2 - 2bs + 3b^2 - 8c = 0.$$

De donde $$s = \frac{b \pm 2\sqrt{2(3c - b^2)}}{3} \qquad (h_1)$$

Esto así, hagamos que en (A_2) sea: *cuadrado* del paréntesis vertical del tercer término *igual* al producto de los paréntesis verticales del segundo y del cuarto, ó bien:

$$\left(r^2 + \frac{(b+s)}{2} r + \frac{c+bs}{6}\right)^2 = \left(r + \frac{b+s}{4}\right)\left(r^3 + \frac{3(b+s)r}{4} + \frac{2(c+bs)r}{4} + \frac{n+cs}{4}\right) (h_2)$$

Ejecutando operaciones desaparecen desde luego los términos de r^4 y r^3: y el término de r^2 desaparece también, porque su coeficiente, separándole el factor 3, resulta ser igual á la cantidad que se hizo *cero* al determinar el valor de s. Y en consecuencia, nos queda para r la de primer grado.

$$\left(36(n+cs) - 6(b+s)(c+bs)\right) r + 9(b+s)(n+cs) - 4(c+bs)^2 = 0 \quad (h_3)$$

De donde $$r = \frac{4(c+bs)^2 - 9(b+s)(n+cs)}{36(n+cs) - 6(b+s)(c+bs)} \qquad (h_4)$$

En esta fórmula de r no es *cero* ni el numerador ni el denominador, ni el primero es divisible por el segundo.

Determinados así los valores de s y r, expresaremos los paréntesis de (A_2), los verticales, y la última cantidad toda, por las letras respectivas B, C, D, N, y se tendrá:

$$x^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 3Dx + N = 0 \qquad (A_3)$$

En ésta, según las relaciones establecidas en (h) y (h_2), tenemos $B^2 = C$, y por lo tanto $B^4 = C^2$; pero $C^2 = BD$, ó bien $B^4 = BD$; luego $B^3 = D$.

Poniendo, pues, en (A_3), en vez de C, su igual B^2, y en vez de D su igual B^3, será:

$$x^4 + 4Bx^3 + 6B^2x^2 + 4B^3x + N = 0 \qquad (A_4)$$

Pasando N al segundo miembro, y añadiendo en ambos B^4, es evidente que el primer miembro es la cuarta potencia de $(x + B)$; y tomando la raíz cuarta de ambos miembros, se tendrá:

$$x + B = \pm \sqrt[4]{B^4 - N}$$

ó bien $$x = -B \pm \sqrt[4]{B^4 - N} \qquad (h_5)$$

Y por lo tanto $$y = r - B \pm \sqrt[4]{B^4 - N}$$

Poniendo fuera del radical el valor de B, tomado en (A_2), nos da:

$$y = -\frac{b+s}{4} \pm \sqrt[4]{B^4 - N}$$

Y si debajo del radical ponemos los valores de B y N, tomados en (A_2), cuidando de igualar los denominadores á 256, cuarta potencia de 4, será:

$$y = \frac{-(b+s) \pm \sqrt[4]{(b+s)^4 - 256ns + 16r(b+s)^3 - 256r(n+cs)}}{4} \qquad (h_6)$$

Queda, pues, determinado el valor ó valores de y en función de sus coeficientes en la ecuación dada, sin que intervenga el radical de *tercer grado*, ni otro alguno de grado impar.

El procedimiento está, como se habrá notado, estrictamente ajustado á las leyes de la lógica de los números.

ECUACIÓN DE TERCER GRADO

ARTÍCULO II

OTRO MODO DE PREPARAR LA SOLUCIÓN QUE PRECEDE

Tomando la ecuación (A_2) del caso anterior, haremos, como allí, que *el cuadrado* del paréntesis del segundo término *sea igual* al paréntesis vertical del término tercero: lo cual sabemos da para s el valor:

$$s = \frac{b \pm 2\sqrt{3(3c - b^2}}{3}$$

Después, en vez de hacer, como allí se hizo, que: *el cuadrado* del paréntesis vertical del tercer término *sea igual* al producto de los paréntesis verticales del segundo y cuarto términos, se hará: *que el producto* de los paréntesis verticales del segundo y tercer término *sea igual* al paréntesis vertical del cuarto término. Es decir:

$$\left(r + \frac{b+s}{4}\right)\left(r^2 + \frac{(b+s)r}{2} + \frac{(c+bs)}{6}\right) = r^3 + \frac{3(b+s)r^2}{4} + \frac{2(c+bs)r}{4} + \frac{(n+cs)}{4}.$$

Ejecutando operaciones, sale para r la de primer grado:

$$r = \frac{(b+s)(c+bs) - 6(n+cs)}{8(c+bs) - 3(b+s)^2}$$

Cuya fórmula es, como se ve, mucho más sencilla que la precedente.

En todo lo demás se procede como en el modo anterior, teniendo presente que si $B^2 = C$ y $BC = D$, es evidente que $B^3 = D$.

ARTÍCULO III

SOLUCIÓN PRIMERA DE TERCER GRADO, CON SÓLO RADICALES DE SEGUNDO

$$Y^3 + b_1 Y^2 + c_1 Y + n_1 = 0 \qquad (A)$$

Haremos $Y = (x + r_1)$; se sustituye y nos da:

$$\begin{array}{l|l|l} x^3 + 3\,r_1 & x^2 + 3\,r_1^2 & x + \ \ r_1^3 = 0 \\ + \ \ b_1 & + 2\,b_1 r_1 & + b_1 r_1^2 \\ & + \ \ c_1 & + c_1 r_1 \\ & & + n_1 \end{array} \qquad (A_1)$$

En ésta damos á r_1 el valor necesario para reducir á *cero* el coeficiente del penúltimo término, ó sea:

$$3\,r_1^2 + 2\,b_1 r_1 + c_1 = 0 \qquad (h)$$

De donde $$r_1 = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 3\,c_1}}{3} \qquad (h_1)$$

Eliminado así el penúltimo término, expresaremos por b el coeficiente del segundo, y por n todo el último término de (A_1):

$$x^3 + b\,x^2 \qquad\qquad + n = 0 \qquad (A_1)$$

Multiplicando ésta por $(x + s)$, nos da:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + b & x^3 + b\,s\,x^2 + n\,x + n\,s = 0 \\ \ \ \ + s & \end{array} \qquad (A^3)$$

Separando x^2 en los tres primeros términos, y haciendo luego $x = (z + r)$, se sustituye y dará:

$$(z+r)^2 \left(\begin{array}{l|l} z^2 + 2\,r & z + \ \ r^2 \\ + \ \ b & + b\,r \\ + \ \ s & + s\,r \\ & + b\,s \end{array} \right) + n z + n r + n s = 0 \quad (A_4)$$

Ahora en el segundo paréntesis se añade $b\,s$; y esta cantidad, multiplicada por el primer paréntesis, la restaremos fuera, pero separando á la vez, como factor común de todo lo exterior á los dos paréntesis primeros, el $-\,b\,s$, así:

$$(z+r)^2\left(z^2 + \begin{array}{c|l} 2\,r & z + r^2 \\ +\,b & +\,b\,r \\ +\,s & +\,s\,r \\ & +2\,b\,s \end{array}\right) - b\,s\left(z^2 + \begin{array}{c|l} 2\,r & z + r^2 \\ -\dfrac{n}{b\,s} & -\dfrac{n\,r}{b\,s} \\ & -\dfrac{n\,s}{b\,s} \end{array}\right) = 0 \qquad (A_5)$$

Esto así, igualaremos entre sí los coeficientes de los términos z, en los dos últimos paréntesis:

$$b+s=-\frac{n}{b\,s} \qquad (h_2)$$

De donde $$s=\frac{-b^2 \pm \sqrt{b^4-4\,b\,n}}{2\,b} \qquad (h_3)$$

Igualaremos también entre sí las dos últimas cantidades libres de z que hay en dichos últimos paréntesis, ó sea:

$$b\,r+s\,r+2\,b\,s=-\frac{n\,r}{b\,s}-\frac{n\,s}{b\,s} \qquad (h_4)$$

Quitando el denominador, ordenando para r, y despejando, resulta:

$$r=\frac{-\,s\,(n+2\,b^2\,s)}{s\,(b^2+b\,s)+n} \qquad (h_5)$$

Si en esta fórmula de r sustituímos, como está, el valor de s, nos da:

$$r=\frac{2\,(b^2 \mp \sqrt{b^4-4\,bn})\,(n-b^3 \pm b\sqrt{b^4-4\,bn})}{4\,bn+(-b^2 \pm \sqrt{b^4-4\,bn})\,(b^2 \pm \sqrt{b^4-4\,bn})} \qquad (h_6)$$

Cuya fórmula dará para r, aparentemente, hasta dieciséis valores, que luego se reducen á ocho iguales, de dos en dos, pero con signo contrario.

Con los valores de s y r se realizan las dos igualdades (h_2) y (h_4), y, por lo tanto, las cantidades de los dos últimos paréntesis de (A_5) son idénticas, ó más bien una misma cantidad, pudiéndose, en consecuencia, escribir así dicha ecuación:

$$\left((z+r)^2 - b\,s\right)\left(z^2 + \begin{array}{l|l} 2r & z + r^2 \\ +\ b & +\ b r \\ +\ s & +\ s r \\ & +2 b s \end{array}\right) = 0 \qquad (A_6)$$

De la cual salen para z dos de segundo grado, que la resuelven, ó sean:

$$z = -r \pm \sqrt{b s}$$

$$z = \frac{-(2r+b+s) \pm \sqrt{(b-s)^2 - 4bs}}{2}$$

Resueltas así las (A_6) y (A_5), lo están las anteriores hasta la propuesta, con sólo ecuaciones y radicales de segundo grado.

Debe advertirse que si en la fórmula directa de r, despejada en (h_4), y antes de separar s como factor común, según está en (h_5), se sustituyen uno á uno los dos valores de s, se obtendrán para r los mismos ocho valores ya indicados.

También conviene tener presente que si en la ecuación dada no eliminamos el término de c, las fórmulas quedarán las mismas con sólo aumentar los términos que contengan c; pero en cambio desaparecerá el radical con que la habíamos eliminado.

ARTÍCULO IV

SEGUNDA SOLUCIÓN DE TERCER GRADO, CON SÓLO RADICALES DE SEGUNDO

$$Y_1^3 + b_1 Y^2 + c_1 Y + n_1 = 0 \qquad (A)$$

Haciendo $Y_1 = (Y + r_1)$, se sustituye y daremos á r_1 el valor necesario para que en la resultante se reduzca á *cero* el penúltimo término, ó sea:

$$(3\,r_1^2 + 2\,b_1 r_1 + c_1)\,Y = 0 \qquad (h)$$

Eliminado así dicho término, y expresando el segundo coeficiente y última cantidad respectivamente por b y n será:

$$Y^3 + b\,Y^2 \qquad + n = 0 \qquad (A_1)$$

Haremos $Y=\dfrac{x}{q}$ sustituyendo y multiplicando por q^3, tendremos:

$$x^3+b\,q\,x^2 \qquad +n\,q^2=0 \qquad (A_2)$$

Separando x^2 en los primeros términos y multiplicando después por el binomio$(x+s)$, nos dará:

$$x^2\left(x^2\begin{array}{l|l} +s & x+b\,q\,s)+n\,q^3x+n\,q^3s=0 \\ +b\,q & \end{array}\right. \qquad (A_3)$$

Haciendo $x=(z+r)$, y sustituyendo, será:

$$(z+r)^2\left(z^2\begin{array}{l|l} +2r & z+r^2 \\ +s & +sr \\ +bq & +bqr \\ & +bqs \end{array}\right)+nq^3z+nq^3r+nq^3s=0 \qquad (A_4)$$

P oniendo en el último término del segundo paréntesis la cantidad negativa $-s\,q^3$, la pondremos tambien fuera con el signo positivo, y multiplicada como está la negativa por $(z+r)^2$, así:

$$(z+r)^2\left(z^2\begin{array}{l|l} +2r & z+r^2 \\ +s & +sr \\ +bq & +bqr \\ & +bqs \\ & -sq^3 \end{array}\right)+sq^3\left(z^2\begin{array}{l|l} +2r & z+r^2 \\ +\frac{n}{s} & +\frac{nr}{s} \\ & \\ & +\frac{ns}{s} \end{array}\right)=0 \qquad (A_5)$$

Obsérvese que en el último paréntesis hemos separado como factor común $s\,q^3$.

En esta igualaremos entre sí los coeficientes de los términos z en los dos últimos paréntesis, así.

$$2\,r+s+b\,q=2\,r+\frac{n}{s} \qquad (h_1)$$

De donde sale $s=\dfrac{-b\,q\pm\sqrt{b^2q^2+4n}}{2}$ $\qquad (h_2)$

Ahora, en (A_5), igualaremos también entre sí las dos últimas cantidades de los últimos paréntesis, suprimiendo desde luego en ambas la cantidad igual r^2, y quitando el denominador s:

$$r\,s^2+b\,q\,s^2-q^3s^2+b\,q\,r\,s-n\,s-n\,r=0 \qquad (h_3)$$

Obsérvese que por abreviar se pasó todo al primer miembro:

Despejando s en (h_3), igualaremos su valor con el de s en (h_2), ó sea:

$$\frac{n-bqr\pm\sqrt{n^2+2bnqr+b^2q^2r^2+4nr^2-4nrq^3}}{2(r+bq-q^3)}=\frac{-bq\pm\sqrt{b^2q^2+4n}}{2}$$

Quitando denominadores, con supresion desde luego del factor común 2; reduciendo á *cero* la cantidad que resulta libre de radicales,

$$(b\,q^4-b^2q^2-n)=0$$

de donde

$$q^2=\frac{b^2\pm\sqrt{b^4+4\,b\,n}}{2\,b} \qquad (h_4)$$

dejando un radical en cada miembro, y elevando al cuadrado, nos dará para r el valor:

$$r=\frac{q^2(b-q^2)^2(b^2q^2+4\,n)-n^2}{2b^2q^3(q^2-b)+2nq(2q^2-3b)} \qquad (h_5)$$

Con los valores de r, q, s se realizan las igualdades (h_3) y (h_2), con las cuales las cantidades de los dos últimos paréntesis de (A_5) se hicieron iguales término á término y, por lo tanto, podemos escribirla así:

$$\left((z+r)^2+sq^3\right)\left(\begin{array}{l|l} z^2+2r & z+r^2 \\ +\dfrac{n}{s} & +\dfrac{nr}{s} \\ & +n \end{array}\right)=0 \qquad (A_6)$$

Lo que da para z dos ecuaciones de segundo grado, quedando con ellas resueltas todas las precedentes hasta la propuesta.