FÓRMULA GENERAL DE LAS SERIES NUMÉRICAS

para determinar analíticamente las raices racionales de la ecuación del grado *n*, y resolver después, por su medio, la de las irracionales.

SUPLEMENTO

AL CUADERNO DÉCIMO DE LUCUBRACIONES ALGEBRÁICAS.

Sea la ecuación $Y^n+b_1 Y^{(n-1)}+b_2 Y^{(n-2)}+\ldots\ldots b_{(n-1)} Y=b_n$

Siendo *n* número par, la fórmula es:

$$
\begin{array}{ll}
 & +6(1)(0,1,4\ldots)(1,2^{n-3},3^{n-3},\ldots\ldots) \\
 & +6(b)(\ldots\ldots\ldots\ldots)(1,2^{n-4},3^{n-4},\ldots\ldots) \\
 & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k_1 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{l} +6(1+b_2+b_4+\ldots\ldots\ldots\ldots b_{(n-6)})(\ldots\ldots\ldots\ldots)(1^3,2^3,3^3,\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ +6(b_1+b_3+b_5+\ldots\ldots\ldots\ldots b_{(n-5)})(\ldots\ldots\ldots\ldots)(1^2,2^2,3^2,\ldots\ldots\ldots\ldots) \end{array} \\
\hline
k & +(1+b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots b_{(n-1)})(1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots) \\
k_2 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{l} +2(1+b_2+b_4+b_6+\ldots\ldots b_{(n-2)})(0,1,3,\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ -6(2-b_1+2b_2-b_3+\ldots\ldots b_{(n-3)})(0,1,4,\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ +24(1+b_2+b_4+b_6+\ldots\ldots b_{(n-4)})(0,1,5,\ldots\ldots\ldots\ldots)=b_n \end{array}
\end{array}
$$

ACLARACIONES.

1.ª Los dos primeros paréntesis k_1, con el factor 6, continúan hácia arriba alternando como están, pero disminuyendo en cada uno una unidad el subíndice de b, de modo que en el siguiente, el último término será $b_{(n-7)}$, y en el otro $b_{(n-8)}$, y así continuando hasta que en el último superior, quede solo la unidad, como así se ve en la fórmula.

2.ª Cuando n sea impar los dos primeros paréntesis k_1 se cambian en esta forma:

$$6(b_1+b_3+b_5+.....b_{(n-6)})$$
$$6(1+b_2+b_4+.....b_{(n-5)})$$

Y luego continuarán alternando hácia arriba por modo análogo al que se indica en la aclaración precedente.

3.ª Cuando n sea impar, los tres paréntesis k_2 se cambian también de esta manera:

$$+2(b_1+b_3+b_5+.....b_{(n-2)})$$
$$-6(-1+2b_1-b_2+2b_3-....b_{(n-3)})$$
$$+24(b_1+b_3+b_5+.....b_{(n-4)})$$

4.ª Todo lo demás de la fórmula permanece igual, ya n sea par, ya impar.

5.ª En los paréntesis que hacen de segundo factor, sin el 6, de todos los productos encima de la horizontal, está para todos como se indica en el superior, la serie 4.ª numérica continuada al infinito, en la cual, el factor para cada caso que se dé, será el término *que corresponda en orden* con el número de unidades que tenga el valor entero, que se suponga para Y.

6.ª En el segundo paréntesis del producto k, está la incógnita Y representada por la *serie* de los números racionales enteros desde el 1 hasta el infinito; siendo por lo tanto en esta serie donde se da principio á toda operación.

Si se quiere por ejemplo saber, si el 5 es raíz de la ecuación propuesta, se continuará dicha serie hasta el 5, y lo mismo los tres que están debajo, hasta el quinto término en cada una; y en las series que corresponden encima de la raya, se pondrá el 5 elevado á 2 en la primera, á 3 en la segunda y así hasta la superior que será 5^{n-3}. Los términos que resulten en la columna desde arriba abajo, serán los factores respectivos que se tomen en todos los últimos paréntesis.

El término *quinto*, de la série 0, 1, 4..... debajo de la raya, será en el caso propuesto, el factor que se tomará también en todos los paréntesis *del medio*, encima de la raya.

En los paréntesis de la izquierda están, como se ve á simple vista, sumas de coeficientes, las cuales quedarán determinadas, desde el momento en que se da conocido el valor de n.

La suma indicada antes del signo $=$, ó sea en el primer miembro, si 5 es raíz de la ecuación, resultará idéntica en signo y magnitud al segundo miembro b_n.

Cuando dicho primer miembro resulte mayor con el mismo signo, aún se comprobará el número siguiente, y si persiste en crecer en igual modo el primer miembro, es que ya no tiene la ecuación raíz alguna superior á los números comprobados.

7.ª Para que en la fórmula del grado de la ecuación se pueda encontrar todas las raices racionales que tenga, primero se construye *la fórmula literal*, lo que se hace fácilmente con sólo dar valor á n en la general; y después, en la numérica se cambia Y en —Y, escribiéndola como resulte, sin cambiar de signos; y luégo también cambiando éstos. Hecho lo cual, se pondrán en la literal los coeficientes de las tres numéricas resultantes, por su orden; y se tendrán tres fórmulas numéricas con el primer miembro en diferente forma, y el segundo con el signo cambiado en una. En las tres fórmulas encontraránse sucesivamente varias raices de la ecuación, siempre más de tres, si es que las tiene racionales.

Si no resultan n raices, multiplícanse entre sí las ya determinadas, y por el producto se divide la numérica propuesta. En el cociente se tendrá una ecuación rebajada, y en ella estarán las raices que falten, racionales ó irracionales. Para buscar las que pueda haber de aquellas, se procederá como con la primera.

8.ª La unidad como raíz, se la buscará sumando todos los coeficientes de la ecuación, pues ya se sabe que si la suma es *cero*, la *unidad* será una de las raices. Y dividida por ella en su caso la ecuación, se verá si la resultante la contiene también; y así se continuará hasta llegar á una que ya no la contenga.

9.ª Para comprobar las demás que pueda tener, se empezará siempre por los números menores, 2, 3, 4, etc , que sean divisores de b_n, condición indispensable para que puedan ser raices racionales de la ecuación. Procediendo así, en muy poco tiempo, y con trabajo muy fácil, se determinan y separan todas las raices racionales, quedando luégo á resolver la de las irracionales, de grado menor en tantas unidades, como racionales se hayan separado.

10. El modo de resolver, por la *fórmula de las series*, las ecuaciones de sólo raices irracionales; la razón de la misma fórmula; y las fórmulas elementales, hechas, desde el tercer grado al noveno; puede verse todo en el cuaderno décimo de *Lucubraciones Algebráicas*, donde hay también resueltas ecuaciones numéricas hasta del séptimo grado. Este trabajo de ahora no es más que un suplemento á dicho cuaderno, con el fin directo de que por nadie se eche de menos *la fórmula general*, que allí se indica como muy fácil de construir.

11. Lo más característico de esta fórmula, es que sólo y

exclusivamente, se encuentran en ella todas las raices racionales de cada ecuación que se proponga, haciendo por lo tanto, que el método sea puramente analítico.

12. A medio de esta fórmula se llega siempre, con paso seguro, y precisión absoluta, sin que haya lugar á dudas previas, ni posteriores, á determinar primero en muy poco tiempo, y sin cálculos difíciles, todas las raices racionales que tenga una ecuación, ó á saber en su caso, que ya no tiene ninguna: y después también, á determinar las raices irracionales, como sean en sí mismas, en su propia realidad absoluta, sin depender en nada de la forma sintética de la ecuación.

13. Si en el producto k ponemos en vez del segundo factor la incógnita Y, y de seguida expresamos por S la cantidad total superior á la raya, por S^1 la suma de los tres productos inferiores al k, y por C el primer factor del mismo producto k; despejando Y, se tendrá:

$$Y = \frac{b_n - (S + S^1)}{C}$$

En cuya fórmula general están todos los valores racionales de Y, para la ecuación numérica, en función de sus coeficientes, de las series numéricas segunda, tercera y cuarta, y de las potencias de cada raíz, desde la segunda hasta la (n—3).

14. Para las raices irracionales, después de separada la ecuación de las mismas; y para las irracionales juntamente con las racionales, no hay más fórmula general que la *sintética*, demostrada en el cuaderno tercero de *Lucubraciones Algebráicas*.

En el compendio que se publicará para el estudio de la *solución sintética*, explicaráse convenientemente, y con ejemplos numéricos, la relación entre las raices sintéticas y las analíticas; así como se hará ver también, que *las soluciones no sistemáticas* de cuarto grado, no comprenden el caso en que las raices de la ecuación, sean *una racional, con tres irracionales cúbicas*, teniéndose que acudir, para resolverlas, á la separación de raices, ya por el modo *sistemático*, ya por el *analítico*.