8 D
286

1 2 3 4 5 6 7 8 9

~~2 4 6 8 10 12 14 16 18~~

3 6 12 16 20 24 28 32 36

4 8

15

1 4 3 6 9 8 7 2 1 6 8 7 9 5 1 5 2 5 4 12 4 5

2 5 4 0 6 2 4 3 1 6 7 8 6 4 8 0 1 3 4 12 3 5 1

3 9 8 6 6 4 1 2 3 7 0 6 8 9 9 9 3 8 8 2 4 6 9 9

[illegible] 130 [illegible] 1691

178800

1872902

72 45 160 288 448

72 45 150 288 3030

7 2
7 2
7 2
7 2
7 2

16 0000 200

440

28800
15000

18800

160 288 3040

40 40 40 40 40 20 20 160 288 448

222000

200 440 15800 28800 3030

15400 8800 10300

1626

05 5 6 7 8 9 1 2 3 4 4 3 1.

135

864

999

743

253

996

18311722

130

139

999
999
20208

124 140

51122

432

3 4 5

999

484

8

mar 5 6 7 8 9

maria 3 4

madr 1 8 0 2 3

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2 3 4 5 4 3 2 1

1 1 1 0

8 9 0 0 0 d e

maria madr

tionales multiplicanti-

t 4, facti erunt 6 & 8 pro-
atis 3 & 4. Item 3 & 4 mul
6 & 8 erunt itidem pro-
ntibus, 3 & 4, quia utro-
nt minoribus,
d cognomines & propor-
ltiplicationis theoremate
portionales ipsi addantur,
ur necessaria. Proportio-
t eædem quãtumlibet ter-
$\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$.

luctio ad cognomines
artes, est multiplica-
eri per alterũ nomen.

ca 2 & 3 per 4, item 3 &
nes & proportionales par
ales quidem, quia nume-
cavit: cognomines veró
, quia sunt é duobus nu-
atis.

uctione eadem facta,
attinent.

s partes $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ad $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$,
subduci nihilo plus est
. Itaque nominum inter

ARITHMETICA.

PARISIIS,

Apud Andream Wechelum.

1562.

Cum privilegio Regis.

A. Chiffard. 1626.

LIBER PRIMUS ARITHMETICÆ.

Cap. 1. quid arithmetica, numerus, unitas, & quæ partes arithmeticæ.

1. ARITHMETICA *eſt doctrina bene numerandi.*

2. *Numerus eſt ex unitatibus collecta multitudo.* 2.d.7.

Ut binarius numerus eſt collectus ex uno & uno, ternarius ex uno & uno & uno, quaternarius ex uno & uno & uno & uno, & quilibet deinde numerus eſt ex unitatibus collecta multitudo.

3. *Unitas eſt ſecundum quam unumquodque unum dicitur.* 1.d.7.

Ut unus Deus, unus mundus, unus Rex. Unitas numerus non eſt: nec enim eſt ex unitatibus collecta multitudo: Attamen ut unitas definitur, ſecundum quam unumquodque unum dicitur, ſic numerus definiri poteſt, ſecundum quem unumquodque numeratur: ut unum, duo, tria: & ſic unitas in multis arithmeticæ partibus pro numero uſurpatur. Proprié igitur unitas numerus nõ eſt, ſed initium numeri, é quo primúm numerus fit, & in quod ultimum reſolvitur, eſtq; in numero aliquid minimũ, nempé unitas, quãvis nihil eſſe poſſit maximum. Arithmeticæ partes duæ ſunt.

4. *Arithmeticæ prima pars eſt, quæ interpretatur ſimplices qualitates numerorum.*

Et quidem in generali numeratione primúm: deinde in ſpecialibus differentiis numerorũ. Generalis autem numeratio eſt prima aut conjũcta: Prima, ut additio & ſubductio

Cap. 2. de additione, ubi de arithmeticis notis.

5. *Additio eſt numeratio prima, qua numerus cum numero ſemel additur, & habetur totus.*

Hic ſunt decem unitates, 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. quibus addendis, numeramus unum, duo, tria, quatuor, quinque, ſex, ſeptem, octo, novem, decem, ubi ad numerum antecedentem unitas additur: Addãtur duo cum duobus, totus erit quatuor, quinque cum tribus, totus erit octo: Cujuſvis

vis autem numeri addendi & colligendi decem ſunt notæ, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 8. 9. 0: quarum prima unum ſignificat, ſecũda duo, tertia tria, quarta quatuor, quinta quinque, ſexta ſex, ſeptima ſeptem, octava octo, nona novem: Circulus, quæ nota eſt ultima, nil per ſe ſignificat: valet tamen ad alias notas amplificandum. Amplificationis veró gradus ſunt quatuor, deincepſq; perpetuó ſimiliter iterantur. Nam de primis novem, quælibet ſola aut ultimo univerſi numeri loco ſuum numerum ſemel exprimit, penultimo decies, tertio deincẽties, quarto millies, quinto decies millena, ſexto centies millena, ſeptimo millies millena'& ſic deinceps. Numeros igitur ita notabis, unum 1, undecim 11, centum undecim 111, mille centum undecim 1111. Duo 2. viginti duo 22, ducenta viginti duo 222, duo millia ducenta viginti duo 2222. mille ducẽta triginta quatuor 1234, Ergo in hac amplificatione circulus amplificabit notam ſibi præpoſitam. Notabis enim his notis 10, viginti 20, triginta 30, quadraginta 40, centum 100, ducenta 200, trecenta 300, quadringenta 400. Duo millia viginti 2020, quater millena millia, triginta millia ducenta unum 4030201. Atqui ſi numeri pluribus notis collecti periodus longior fuerit, ut eam numerare condiſcas, millenarii loci, tanquã in membris orationis ſenſus abſoluti, punctis diſtinguantur, ultimum punctum erit millium, penultimum millenorum millium, tertium millies millenorum millium, quartũ millies millies millenorum millium; Tum singula pũcta deinceps, si plura sint, millies amplificabunt. Numerum igitur decem notis sic additum & interpunctum 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0, tanquam mẽbris quatuor distinctam periodum numerabis. Primum membrum millies millena millia, secundum ducenties tricies quater millena millia, tertium quingẽta sexaginta septem millia, quartum octingenta nonaginta. Atque hæc interpunctio tantisper adhibenda, dum te exerceas in notis arithmeticis. Si numeri diversi pluribus notis constent, nec totus simul cum toto addi possit, sinistrorsum singulares cum singularibus, denarii cum denariis, & sic deinceps addendi, ut excrescentes summa locis excrescentibus ordine faciliús notentur, & ex iis additus & collectus numerus, interjecta lineola subnotetur. Quæratur igitur quis numerus sit totus é 56789, & 1234, ordine dispositis numeris, ut homogeneri respondeant, sic

5 6 7 8 9
1 2 3 4

Incipies ab ultimo loco, 9 & 4, sunt 13: subnotabis 3, reservabis 10, pro 1, sequentis loci: Ergo dices sequenti loco, 1 & 8 & 3, sunt 12, subnotabis 2, & reservabis, ut anteá, 10 pro 1, sequẽtis loci: Tum 1 & 7 & 2, sunt 10; subnotabis 0, reservabis similiter 10, pro 1, sequentis loci: Tandem 1 & 6 & 1, sunt 8, quæ subnotabis: Postremó 5 sola reperies, adnotabis denique 5, & invenies

nies his duobus numeris additis totum esse 58023. Inductionis summa sic erit,

5	6	7	8	9
	1	2	3	4
5	8	0	2	3

Cap. 3. de subductione.

6. *Subductio est numeratio prima, qua numerus á numero semel subducitur, & habetur qui sit reliquus.*

Subducito 2 de 5, reliquus erit 3, subducito 4 de 9, reliquus erit 5. Subducenda sint 234 de 345, dispositis ordine numeris, ut respondeant homogenei inter se hoc modo,

3	4	5
2	3	4

Subducendo infrá, suprá autem á quo subductio facienda: Incipies á sinistra dextrorsum, cõtraquám in additione, ut 2 subductis é 3, supernotabis 1, deletis 3 & 2: deinde subduces 3 de 4, & supernotabis 1, deletis 4 & 3. Denique subductis 4 é 5, supernotabis 1, deletis 5 & 4, unde invenies reliquum esse 111, cúm subduxeris 234 á 345. Inductio tota sic erit,

1	1	1
$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$
$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$

Sed in hac ſubductionis via, cúm ſequẽs ſubducẽda nota major eſt quám ſupraposita, ne notarum litura moleſta ſit, commodiús é reliquo præcedente 1 mente reſervabis, quod notam ſequentem denario augeat, ut ſi ſubducenda ſint 345 de 432, cúm ſubduces 3 de 4, non ſupernotabis 1, quia 4 ſequens ſubducenda nota, major eſt ſupraposito 3, ſed illud mente reſervabis: & 4 ſubductis á 13, manerent 9, ſed 8 tantúm ſupernotabis, & 1 mente reſervabis: quia 5 ſequens ſubducenda nota major eſt. Itaque 5 ſubductis á 12, reliqua 7 ſupernotabis, unde invenies ſubductis 345 de 432, relinqui 87. Tota inductio ſic erit.

	8	7
~~4~~	~~3~~	~~2~~
~~3~~	~~4~~	~~5~~

Hæc ſubducendi vera via eſt, nec omnino priús antecedens nota eſt ſubducẽda, quám provideris, unde reliquæ ſubduci poſſint. Sic diviſio, id eſt, multiplex ſubductio poſteá progredietur, & ſic de ſequentibus providebit. Itaque meditãda priús eſt ſimplex iſta ſubductio, unde multiplex illa poſteá formãda ſit. In majoribus autem exemplis idem eſt, ut ſubductis 48765293 de 57295490, ſupererunt 8530197.

Cap. 4. de multiplicatione.

Numeratio ſimplicis numeri prima ejuſmodi eſt, di eſt, conjuncta deinceps erit in multiplicatione & diviſione.

7. *Multiplicatio eſt numeratio conjuncta, qua multiplicandus toties additur, quoties unitas in multiplicante continetur, & habetur factus. 15.d.7.*

Unitas nil multiplicat; ſemel 1, ſemel 2, ſemel 3, eſt 1, 2, 3, quamvis plus ſit addita. Nam 1 & 1, ſunt 2, item 1 & 2, ſunt 3: At 2 ſibi additus eſt 4, quot item efficit ſui multiplicatione. Nam bis bina ſunt item 4. Id in illis eſt proprium: At 2 cæteros numeros multiplicans, auget, ut bis 3, ſunt 6. Sic addis 3 bis quoties nempe unitas in 2 multiplicante continetur: bis 4, ſunt 8: addis enim 4 bis quoties unitas in 2 multiplicante continetur. Et hæc prima multiplicationis ſpecies, duplicatio dicitur: cujus tamen ars eadem, quæ reliquarum multiplicationum: bis quina ſunt 10, ſic notabis,

$$\begin{array}{r} 5 \\ 2 \\ \hline 10 \end{array}$$

8. *Si duo numeri fuerint facti á duob⁹ inter ſe multiplicatis, erũt æquales. 16.p.7.*

Ut quater quina, ſunt 20, & quinquies quaterna, ſunt item 20.

9. *Si numerus fuerit factus á duobus*

totis, erit æqualis factis ex altero toto & segmentis reliqui. 1.p.2.

Ut septies octona, sunt 56. hic factus est numerus é duobus totis 7 & 8. Seca 8 in 4 & 4. & utrumque segmentum multiplica per 7, facies 28 & 28, é quibus additis, restitues 56. Ergo major multiplicatio hujusmodi proponatur, & quæratur, quis numerus efficiatur 456 per 4 multiplicatis. Sinistrorsum ut in additione procedes, & multiplicãtem duces per tres multiplicandi notas sigillatim, & tribus trium segmentorum multiplicationibus singularibus multiplicationem totius cum toto absolves, numeris ita dispositis sic incipies,

$$\begin{array}{r} 456 \\ 4 \end{array}$$

Quater 6 sunt 24: notabis igitur 4, & 20 reservabis pro 2 loci sequentis: quater 5 sunt 20, & 2 reservata sunt 22, notabis 2, reservabis iterum 2 in locum proximum: quater 4 sunt 16 & 2 reservata sunt 18, quæ notabis integra. Inductionis summa sic erit.

$$\begin{array}{r} 456 \\ 4 \\ \hline 1824 \end{array}$$

Unde invenies 456 per 4 multiplicatis fieri 1824. Hic multiplicasti per 4 totum multiplicatorem, tria segmenta multiplicandi, tanquam separatim multiplicasses 6 per 4, & fecisses 24:

Deinde

Deinde 50 per 4, & fecisses 200. Denique 400 per 4, & fecisses 1600, postremó tres factos singulares addidisses, hoc modo,

1600
200
24
1824

tantumque fecisti, ac si totum hoc 456, per totum 4 uná multiplicasses.

10. *Si numerus fuerit factus á duobus totis, erit æqualis factis é segmentis utriusque.* 1.*p*.7.

Ut 72 est factus é totis 8 & 9, frangatur uterque in quotlibet segmenta, ut 8 in 3 & 5, 9 in 2 & 7, & singula per singula multiplica, facies 35. 10. 21. 6. é quibus additis restitues 72. Sed proponatur exemplum pauló plenius, & per ista segmenta tum multiplicandi, tum multiplicantis multiplicatio inducatur: ut 2070 per 204 multiplicentur, singularis inductio segmentorum, componet tandem 422280. Inductionis summa sic erit.

2070
204
8280
0000
4140
422280

Quo in exẽplo, ſicut in cæteris omnibus circulus per circulum, aut circulus per numerũ nihil efficit. Circulus itaque pro inventione talis multiplicationis, notabitur ad ſequentes notas augendum.

Numeros in circulum deſinẽtes multiplicare compendio poſſumus, detractis ultimis circulis: Deinde iiſdem facto poſtpoſitis: ut ſi multiplicentur 7 2 0 0 per 4 5 0, omiſſis circulis illic duobus, hic uno multiplicabis 7 2 per 4 5, & facto 3 2 4, poſtpones tres circulos, hoc modo, 324000.

Cap. 5. de diviſione.

11. *Diviſio eſt numeratio conjuncta, qua diviſor ſubducitur á dividendo quoties poteſt, & habetur quotus.*

Sic diviſio 1 2 in 3 eſt ſubductio 3 quater iterata, & habetur 4, pro quoto. Dividendus igitur numerus, eſt tanquam hæreditas dividenda: diviſor eſt numerus partium, velut hæredum, quibus ex æquo dividatur, quotus eſt pars quota hæredis cujuſque.

12. *Numerus minor eſt pars majoris aut partes.* 4. *p.* 7.

13. *Pars quæ dividit majorem.* 3. *d* 7.

Ut 3 eſt pars 1 2, nempe quarta.

14. Par-

14. *Partes quando nō dividit majorē.*
4. d. 7. Ut 8 non dividit totum 12. Nam cúm semel subduxeris, manent 4. Itaque 8 sunt duæ quartæ duodenarii. Pars illa quota, hæc quanta vulgó dicitur.

15. *Si numerus in numerū fuerit divisus, quot⁹ erit pars cognominis divisori.* 39. *p.* 7

Ut 12 dividitur in 3, & quotus 4 est tertia pars divisi.

16. *Et si numerus habuerit partē quā-libet, dividetur in numerum parti cognominem.* 40. *p.* 7.

Ut 12 habet tertiam partem, & ideó dividitur in 3. Quotus autem ille divisori cognominis adnotatur ad latus. Sic 18 divisis in 2, quotus erit 9, hoc modo,

18 (9
2

Et hæc prima in 2 divisio dicitur dimidiatio, cujus tamen ars eadem est quæ divisionis in 3 4, & quemlibet alium numerum. Si divisio tota simul expediri non possit, inductione est utendū, & quidem dextrorsúm, ut in subductione. Exēplum sit primum de divisóre simplici. Dividantur 7476 per 6. Notabis primúm dividendum & divisorem sic,

7476
6

E 7 potes ſubducere 6 ſemel, & manet 1. notabis igitur 1 pro quoto, & deletis 7 dividendo & 6 diviſore, ſuperſcribes 1. Prima inductio ſic erit,

$$\begin{array}{llll l}
1 & & & & \\
\cancel{7} & 4 & 7 & 6 & (1 \\
\cancel{6} & & & &
\end{array}$$

Secūdó produces 6 diviſorem in proximum locum. Jam 6 potes ſubducere bis á 14, & manent 2. Adnotabis igitur quotum 2, & deletis 6 & 14, ſuperſcribes 2 reliquum. Secunda inductio ſic erit,

$$\begin{array}{llll l}
\cancel{1} & 2 & & & \\
\cancel{7} & \cancel{4} & 7 & 6 & (12 \\
\cancel{6} & \cancel{6} & & &
\end{array}$$

Tertió produces 6 diviſorem in proximum locum 27. unde potes ſubducere quater, & manēt 3. Adnotabis igitur quotum 4, & deletis 27 & 6, ſuperſcribes 3. Tertia inductio ſic erit,

$$\begin{array}{llll l}
\cancel{1} & \cancel{2} & 3 & & \\
\cancel{7} & \cancel{4} & \cancel{7} & 6 & (124 \\
\cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} & &
\end{array}$$

Poſtremó produces in reliquum locum 36, vnde potes ſubducere ſexies, & nihil manet. Adnotabis igitur 6 quotum, deletis 36 & 6. Tota inductio ſic erit,

$$\begin{array}{llll l}
\cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & & \\
\cancel{7} & \cancel{4} & \cancel{7} & \cancel{6} & (1246 \\
\cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} &
\end{array}$$

Hic invenis 7476 in 6 diviſis quotum eſſe 12346

1246: Exemplum deinde ſit de diviſore multiplici, qui per partes ſuas æqualiter ſubducendus ſit á ſuprapoſitis diuidendi notis, quoties nempe quotus continetur. Et hic ſubductio vera, de qua dixi, plané cernitur, cúm ſubducere incipias dextrorſum ſingulas ſubducendi notas anté meditando, quám quidquã de parte quota ſtatuas. Dividantur igitur 144 per 12: Notabis primúm dividendum & diviſorem ſic,

1 4 4
1 2

Ac videbis 1 ab 1 ſemel ſubduci, & toties 2 á 4, & 2 reſtabunt: adnotabis igitur 1 pro quoto, & deletis 14 & 12, ſuperſcribes 2. Inductio prima ſic erit,

  2
~~1~~ ~~4~~ 4 (1
~~1~~ ~~2~~

Secundó produces diviſorem in proximum locum 24, ac videbis á 2 bis ſubduci poſſe: & 2 á 4 toties, neque quicquam reſtare. Inductio tota ſic erit,

  ~~2~~
~~1~~ ~~4~~ ~~4~~ (12
~~1~~ ~~2~~ ~~2~~
  ~~1~~

In prima inductione hujus exempli, ſecunda diviſoris nota ſæpiús ſubduci poterit, quám prima. Sit exemplum ubi prima ſæpiús ſubduci poſſit quám ſecũda, & quidem diviſor ſit majorum notarum, ubi etiam multiplices iſtæ ſubductiones multiplicatione quoti per diuiſorem totum, præſidio memoriæ tutiús recolligentur, quám expedirentur ſeparatim ſingulæ. Dividãtur 8 4 1, per 2 9. Notabis primó dividendum & diviſorem ſic,

8 4 1
2 9

Ac videbis 2 ab 8 quater quidem ſubduci poſſe. At toties 9 á 4 ſubduci non poſſe. Potes etiam 2 ter ſubducere ab 8, ſed á reliquis 2 4 non potes toties ſubducere 9. Subduces igitur, ut æqualitas ſubductionis in partibus diviſoris obſeruetur, 2 ab 8 tantúm bis, & à reliquis 4 4 1 toties ſubduces 9, & manebunt 2 6. Adnotabis igitur 2 pro quoto, & per eum multiplicato diviſore, recolliges in vnũ, quod iſta multiplicis ſubductionis æquatione comprehendiſti, & facies 5 8, quæ deleto diviſore, ſubſcribes dividendo, & ab eo ſubduces, manebunt 2 6, quæ ſubducendo 5 8, & ſuprapoſito 8 4. deletis, ſuperſcribẽtur. Inductio prima ſic erit,

2 6
~~8~~ ~~4~~ 1 (2
~~2~~ ~~9~~
~~5~~ ~~8~~

Secundó produces diviſorem in reliquum dividendi locum. Sic potes 2 ſubducere tredecies á ſuprapoſito dividendo 2 6. Verúm ab uno

reli-

reliquo non potes ſubducere 9 toties. Nec omnino fieri poteſt, ut nota diviſoris ulla, in ulla diviſione pluſquã novies hac inductionis via ſubducatur: quia major numerus quã 9 unica nota & unico loco comprehendi non poteſt. Cúm veró 2 á 26 novies ſubduxeris, á reliquis 81 poteris ſubducere 9 toties. Adnotabis igitur 9 pro quoto, & per eum multiplicato diviſore, facies 261, quæ deleto diviſore, ſubſcribes dividendo, ab eoque ſubduces, deletis infrá ſupraq; numeris, tum ſubductis, tum inde facta ſubductio eſt, nihil reſtabit. Tota inductio ſic erit,

~~2~~ ~~6~~ ~~1~~
~~8~~ ~~4~~ ~~1~~ (29
~~2~~ ~~9~~ ~~9~~
~~8~~ ~~8~~ ~~1~~
~~2~~ ~~9~~
~~2~~ ~~6~~ ~~1~~

Si contingat diviſorem aliquo poſt primum loco majorem eſſe dividendo, circulus in quoto adnotetur: ſic diviſis 60800 per 304, quotus eſt 200, & primo tantúm loco diviſor ſubducitur. Quód ſi in relictis medio ſpacio vacuus locus offendatur, circulus videlicet aſcribendus erit, quod accidet, ſi dividas 364 in 26, ubi quotus erit 14. ſic,

~~1~~ ~~0~~
~~3~~ ~~6~~ ~~4~~ (14
~~2~~ ~~6~~ ~~6~~
~~2~~

Cap. 6. de numeratione partium.

Si peracta tota divisionis inductione aliquid é dividendo relinquatur, propositus numerus nō est propriè divisus, sed numerus, qui divisione est omninò subductus, reliquorū autem est sua quædam numeratio.

17 *Dividendus minor divisori majori interjecta linea superponitur, illeque numerus, hic nomen appellatur.*

Ut si 5 diviseris in 2, quotus erit 2, & reliquum unum nominabitur una secunda, & ita notabitur $\frac{1}{2}$: item divisis 11 in 3, quotus erit 3, & reliquum duæ tertiæ, sic $\frac{2}{3}$, atque ita reliquarum partium numerus erit ipsum reliquum, nomen verò divisor.

18. *Quantum numerus partium abest á nomine, tot unius integri partes dividēdo desunt, ut semel ab eo divisor subducatur.*

Ut in $\frac{4}{12}$ desunt $\frac{8}{12}$.

19. *Si numerus sit æqualis nomini, totus est, si major, plus toto, si minor, minus.*

Ut $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$.

20. *Pars autem major est, cujus nomen*

est

est minus, minor, cujus nomen est majus:

Ut $\frac{1}{2}$ major quám $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$, & sic in cœteris. Est etiam in particulis & partibus partium sua quædam distincta notatio, & earum minima notatur, ut partes reliquæ nulla interjecta linea. Ergo tres quartæ duarum tertiarum unius secũdæ, ita notabuntur $\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}$.

21. *Partium cognominum numeratio, spectat solos numeros.*

Sic igitur adde $\frac{4}{2}$ ad $\frac{6}{2}$, totæ erunt $\frac{10}{2}$. A $\frac{10}{2}$ subducito $\frac{4}{2}$, manebũt $\frac{6}{2}$. Sic in $\frac{3}{2}$ divisis $\frac{12}{2}$, quotus est 4. Item in $\frac{8}{2}$ divisis $\frac{32}{2}$, quotus est 4, unde intelligis partientem partem in partita quater integré contineri.

Multiplicatio autem multiplicat numeros simul & nomina, sive eadem sive diversa: quia multiplicandæ partes toties addẽdæ sunt, quot partes in multiplicantibus continẽtur. Sic $\frac{3}{5}$ multiplicent $\frac{5}{9}$, facient $\frac{15}{45}$. Sic $\frac{2}{7}$ multiplicent $\frac{5}{9}$, facient $\frac{10}{63}$.

Sed aliquandó integri & partium permista numeratio est, ut integer per partes, vel integer cum partibus per integrum solum, vel per integrum cum partibus expediri debeat.

Additio nihil mutat: 2 & $\frac{2}{3}$ sunt $2\frac{2}{3}$, 2 & $\frac{2}{3}$ cũ 2, sunt $4\frac{2}{3}$, $2\frac{2}{3}$, & $4\frac{2}{3}$, sunt $7\frac{1}{3}$.

Subductio ex integris capit unũ pro tot partibus, quantum est nomen: ut á duobus subducito $\frac{2}{3}$ é 2 sumes 1 pro $\frac{3}{3}$, á $\frac{3}{3}$ subduces $\frac{2}{3}$, tum é 2 manebit 1 $\frac{1}{3}$, á $\frac{9}{3}$ tolle 2 $\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. A 2 $\frac{1}{3}$ tolle 1 $\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$.

Multiplicatio integrum per partes multiplicat, ſubjiciendo integro tanquam numero 1 pro nomine ſic $\frac{3}{1}$ per $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{6}{3}$, id eſt 2.

Integer veró cum partibus per integrum ſolúm, vel cum partibus multiplicari poteſt ſeparatim. ſic 7 $\frac{1}{6}$ per 2, facit 14 $\frac{2}{6}$. Sic 7 $\frac{1}{2}$ per 2 $\frac{1}{3}$, faciunt primó 14 $\frac{2}{2}$, id eſt 15: deinde $\frac{7}{3}$ & $\frac{1}{6}$, id eſt 2 $\frac{1}{2}$, quibus additis totus eſt 17 $\frac{1}{2}$.

In diviſione idem fieri poteſt, ut ſi dividas 5 $\frac{1}{3}$ in 2 $\frac{2}{3}$, ſubducere potes 2 á 5 bis: item ab 1 reliquo & $\frac{1}{3}$, id eſt á $\frac{4}{3}$, potes ſubducere toties $\frac{2}{3}$. Sed ejuſmodí exempla in multiplicatione & diviſione rara erunt, in quibus partes expediri poſſunt abſque reductione, de qua poſteá, ſicuti de reliqua partium inventione in nominibus diverſis.

Cap. 7. de primis & factis numeris.

Atque hæc numeratio communis eſt, unde differentia numeri triplex oritur, prima numerus dicitur primus aut factus.

22. *Primus eſt numerus individuus ab alio numero.* 11.*d*.7.

Ut 2, 3, 5, 7. Si enim numeri á nullo alio numero dividi poſſunt, nec ideo facti ſunt ab alio numero.

23. *Factus eſt numerus dividuus ab a-*

lio

lio numero. 13. *d.* 7.

Ut 4 dividitur á 2, 6 á 3, 8 á 4. Itaque factus numerus fit multiplicatione veri numeri per verum numerum.

24. *Si numerus fuerit factus, erit dividuus ab aliquo primo.* 33. *p.* 7.

Ut 6 factus, est dividuus á 3 primo.

25. *Si factus á duobus datis sit dividuus á primo, alter datorum erit dividuus ab eodem.* 32. *p.* 7.

Ut 48 factus ab 8 & 6, est dividuus á 3, á quo & 6 etiam dividuus est. Primus & factus numerus ejusmodi sunt, sed alia ex his partitio cõponitur primorum inter se & factorum inter se.

26. *Primi inter se sunt numeri ab unitate sola dividui cõmuni divisore.* 12. *d.* 7.

Ut 2 & 3. Utrum autem numeri dati primi sint inter se, cognoscitur subductione & divisione.

26 *Si duobus numeris inæqualibus datis, vicissim subducto semper minore á majore quoties poterit, sola unitas reliqua diviserit antecedentem, dati erunt primi inter se.* 1. *p.* 7.

Ut 2 & 3 sunt primi inter se: quia subducto minore 2 á majore 3, sola est unitas, quæ præcedentem dividat. Sic in 8 & 9. Sed in majore numerorum differentia idem subductione multiplici & divisione multó promptiús expedietur, ut in 27 & 8. Nam prima divisio 27 in 8, relinquet tantúm 3: secunda divisio 8 in 3. relinquet 2. tertia 3 in 2, relinquet unitatem solam, & rem conficiet. Si de tribus aut compluribus quæstio sit, primi sint inter se, necne, cúm de duobus exploratum fuerit, constat hos duos ad quoscunq; alios fore primos, quia eorum præter unitaté divisor communis nullus erit.

28. *Si numerus primus non diviserit datum numerum, erit primus ad eum.* 31.p.7.

Sic 3 est primus ad 5.

29. *Si numerus diviserit alterum duorum inter se primorum, erit primus ad reliquum.* 25.p.7.

Ut 6 & 5 sunt primi inter se, & 3 dividens ipsum 6 est primus ad reliquum 5. Atque ita dati primi inter se numeri cognoscuntur subductione & divisione Inueniuntur autem & procreantur additione & multiplicatione, additione primúm.

30. *Si duo dati numeri fuerint primi inter se, & totus é datis erit primus ad utrumque:*

trumque: Et si totus é datis fuerit primus ad alterū, dati erunt inter se primi.30.p.7.

Ut 8 & 9 sunt inter se primi, & totus ex iis 17 est primus ad 8 & primus ad 9: & contrá, quia totus 17 est primus ad 8, vel ad 9: ideó dati 8 & 9 sunt primi inter se: Multiplicationis inventio copiosior est.

31. *Si duo numeri sigillatim fuerint primi ad aliquem factus ab iis erit primus ad eundem.26.p.7.*

Ut 4 & 5 sunt primi sigillatim ad 9, & 20 factus ab iis est primus ad 9.

32. *Si duo numeri fuerint primi inter se, factus ab altero erit primus ad reliquum.27.p.7.*

Ut 2 & 3 sunt primi inter se, & 4 factus á 2 est primus ad 3.

33. *Si duo numeri ad duos numeros sigillatim fuerint primi, facti ab iis erunt primi inter se.28.p.7.*

Ut 8 & 9 sunt sigillatim primi ad 7 & 5, nempe 8 ad 7 & 5: item 9 ad 7 & 5. Itaque 72 & 35 ab iis facti, sunt primi inter se.

34 *Si duo numeri fuerint primi inter*

se, facti ab iis erunt primi inter se, & facti á datis per postremos factos deinceps perpetuó primi erunt,

Ut in hoc ordine,	2	4	8	16	32
	3	9	27	81	243

35. *Facti inter se sunt numeri dividui ab aliquo numero comuni divisore.* 14.d.7

Ut 4 & 6 facti sunt inter se, quia 2 est illis communis divisor. Duo autem hic quæruntur, maximus divisor & minimus divisus.

36. *Si duobus numeris datis inæqualibus factis inter se, minor subducatur vicissim á majore quoties poterit, primus reliquus dividens antecedentem, erit maximus communis divisor datorum.* 2.p.7.

Ut in 4 & 6, subducatur 4 minor á majore 6, reliquus 2 dividet antecedentem 4. Itaque 2 est maximus communis datorum divisor. Sic in 21 & 15, subducto vicissim 15 á 21, & 6 reliquo á 15, tandem relinquetur 3 communis mensura.

37. *Qua via duorum maximus communis divisor inventus est, eadem trium & quamlibet multorum invenietur.* 3p.7.

Nam cum præcedentium duorum maximus

com-

communis diviſor repertus fuerit, ipſius & ſequentis numeri diviſor ſimiliter inquirendus eſt, ut in 8, 6, 4, maximus cõmunis diviſor 8 & 6 eſt 2, tum maximus cõmunis diviſor 2 & 4 eſt iterũ 2. Ergo 2 eſt maximus cõmunis diviſor in 8, 6, 4: ſic in 12, 8, 6, maximus cõmunis diviſor eſt itẽ 2. Sic in 6, 12, 18, 24, maximus communis diviſor eſt 6. Hic compendium eſt.

38 *Si numerus minor diviſerit majorẽ, erit maximus communis diviſor utriuſq;.*

Ut 4 dividit 12, & eſt maximus diviſor & ſui et 12. E doctrina maximi diviſoris ſequitur per oppoſitum doctrina diviſi minimi.

29. *Si numerus fuerit factus ab altero datorum per alterius diviſorem cognominem maximo communi diviſori, erit minimus diviſus á datis. 36. p. 7.*

Sic minimus diviſus á 12 et 8 eſt 24. Nam ſi diviſeris 12 et 8 per 4 maximum diviſorem, habebis cognominem partem in altero 3, in altero 2. Jam multiplica alterné vel 12 per 2, vel 8 per 3, habebis 24. Exemplum ſic eſt,

$$\underbrace{24}$$

$$\begin{array}{ccc} & 12 & & 8 \\ 4) & 3 & \times & 2 \end{array}$$

40. *Si duo numeri diviſerint aliquẽ, mi*

minus ab illis diviſus, dividet eundem.

37. p. 7.

Ut 6 & 4 dividunt 24 & 12 minimus diviſus á 6 & 4, dividit eundem. Ex illa generali inveniẽdi minimi diviſi propoſitione, compendium duplex oritur.

41 *Si numerus fuerit factus á duobus inter ſe primis, erit minim⁹ diviſus á datis.*

Sic minimus diviſus á 3 & 2, eſt 6, quia 1 maximo communi diviſori cognominis in 3, diviſor eſt 3, qui multiplicans 2, facit 6: contrá in 2 diviſore cognominis maximo diviſori eſt 2, qui multiplicans 3, facit etiam 6. Itaque cúm unum maximus diviſor nihil dividat, multiplicatio ſola hic erit, diviſio fruſtrá adhiberetur, ut hic,

6

3 X 2

1) 3 2

42. *Si numerus major fuerit diviſus â minore, erit minimus diviſus ab utroque.*

Sic ab 8 & 4 minimus diviſus eſt 8, quia maximo corũ diviſori 4 cognominis diviſor in 8 eſt 2, qui multiplicans 4, reliquum facit 8: ſic idem maximo diviſori cognominis in 8 diviſor eſt 1 qui multiplicans 8, facit etiam 8. Atque hoc compendium ſuperiore majus eſt, & hic tum diviſio, tum multiplicatio fruſtrá eſſet, ut vides in ſubjecto exemplo.

8
4 ⨉ 8
4) 1 ⨉ 2

Ergo hoc duplex compendium est é prima propositione inveniendi minimi divisi. Eadem via minimus á tribus aut quatuor aut quotlibet divisis invenietur.

38.p.7.

Quia repertus jam minimus divisus conferendus est cum proximo. Nam factus ab altero per alterius divisorem maximo communi divisori cognominem, est minimus ab iis divisus, sic minimus ab 8, 6, 4 divisus, est 24. Nam 24 est minimus divisus ab 8 & 6: rursum item minimus divisus est á 24 & á 4, ut é secundo consectario patet. Sic á 3, 4, 8 minimus divisus est 24, quia minimus divisus á 3 & 4 est 12, tum minimus divisus á 12 & 8, est 24. Sic minimus divisus á 2, 3, 4, 5 est 60. hinc sequitur,

43 *Si numerus fuerit minimus divisus á nominibus datarum partium, erit minimus qui habeat datas partes.* 41.*p*.7.

Ut minimus divisus qui habeat $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ est 12 nẽpe minimus divisus á 2, 3, 4, quique minimus bifariam, trifariã quadrifariam dividi possit. Sic minimus qui habeat $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ est 60. nempe minimus divisus á 2, 3, 4, 5, quiq; in has partes minimus dividi possit.

Cap.8, de numeris paribus & imparibus.

Atque hæc de primis & factis numeris, secũda absoluti & simplicis numeri distributio est in numerum parem & imparem.

44. *Par est numerus dividuus á binario.6.d.7.*

Sic 2 ipse par, quia dividitur á seipso semel, sic 4 est par, quia dividitur á 2 bis.

45. *Impar est numerus individuus á binario.7.d.7.*

Ut 3. itaque.

46. *Impar unitate differt á pari.*

Sic 5, sic 7, & similes sunt impares numeri, quibus unitate subducta, pares erunt 4, 6.

Par est pariter par tantúm, pariter impar tantúm, pariter par simul, & pariter impar.

47. *Pariter par est numerus tantúm dividuus á pari per parem.8.d.7.*

Ut 8 pariter par est, quem 2 par dividit per 4 parem.

48. *Si numeri fuerint ab unitate continué duplicati, quilibet erit pariter par. 32.p.9.*

Ut

Ut 1, 2, 4, 8, 16, 33, 64.

49. *Pariter impar eſt numerus tantũ dividuus á pari per imparem.* 9.d.7.

Ut 6, quem 2 par dividit per 3 imparem.

50. *Si numerus habuerit dimidium imparem, erit pariter impar tantúm.* 33.p.9.

Ut 6, 10, 18, quia horum dimidia pars eſt impar, nempe 3, 5, 9.

51. *Pariter par ſimul & pariter impar, eſt numerus neque ab unitate duplicatus, neque dimidium habẽs imparem.* 34.p.9.

Ut ſunt 12, 20, 28: quia neque duplicati ſunt ab unitate, ut 2, 4, 8, 16, neque dimidium habent imparem, cúm dimidii ipſorum 6, 10, 14, ſint etiam pares. Impar eſt impar ſimpliciter vel impariter.

52. *Impar ſimpliciter, eſt numerus dividuus tantúm ab unitate per ſeipſum.*

Ut 3, 5, 7, & quilibet primus.

53. *Impariter autem impar eſt numerus dividus ab impari per imparẽ.* 10.d.7.

Ut 15 impar dividitur in 3 imparem, ſecundum 5 imparem.

Itaque omnis impar impariter, eſt factus numerus.

Cap. 9. de numero perfecto & imperfecto.

Additur ad duas ſimplices numeri diſtributiones tertia diſtributio in numerum perfectum & imperfectum.

54. *Perfectus numerus, eſt numerus partium toti æqualium. 22. d. 7.*

Ut ſenarii partes ſunt 1, 2, 3, quæ additæ ſunt æquales toti 6. Et hic unitas numerus eſt. Nam ſi pars, eſt etiam numerus numeri.

55. *Si é numeris continué duplicatis ab unitate totus ſit primus, & ab eo totidem continué duplicentur, quot anté fuerant, ultimus erit perfectus, reliqui partes perfecti. 36. p. 9.*

Ut hic,

1 2 | 3 6.

Adde 1 & 2, totus 3 eſt primus, & ſecundus ab eo continué duplicatus eſt 6 perfectus, cujus omnes partes ſunt, 1, 2, 3, & ſolus eſt perfectus intra 10. Secundó, ut hic,

1 2 4 | 7 14 28.

Adde 1, 2, 4, ſunt 7, & tertius ab eo continué duplicatus 28 eſt perfectus, eiuſque partes omnes 1, 2, 4, 7, 14, & ſolus hic eſt perfectus á 10 ad 110. Tertió, ut hic,

1, 2, 4, 8, 16. | 31, 62, 124, 248, 496.

Adde

Adde 1, 2, 4, 8, totus est 15 compositus, prætereatur igitur. At 1, 2, 4, 8, 16 additis, totus est 31, primus, & quintus ab eo duplicatus 496 perfectus, eiusque partes omnes sunt 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496, solus hic perfectus est á 100 ad 1000, & sic deinceps. Itaque ut perfectus solus neglectis partibus habeatur, hinc factũ est ab Euclide theorema in hanc sententiam:

56. *Si é numeris continué duplicatis ab unitate totus sit primus, factus ab eo per ultimum erit perfectus.*

Sic deinceps á 1000 ad 10000 perfectus est 8128, rarique admodum sunt hi numeri, imó nonnullis gradibus nulli sunt, ut sexto, undecimo, decimoseptimo, & plerisque aliis. Sic igitur perfectus efficitur é pariter paribus & ex imparibus primis, id est, ex maximé dividuis & minimé dividuis.

57. *Imperfectus numerus, est numerus partium toti inæqualium.*

Estque redundans aut diminutus.

58. *Redundans, est numerus imperfectus partium toto majorum.*

Ut 12, cujus partes 1, 2, 3, 4, 6 collectæ, sunt 16 majores toto 12.

59. *Diminutus, est numerus imperfe-*

ctus partium toto minorum.

Ut 4, 8, & quilibet pariter par.

ARITHMETICÆ LIBER II.

Cap. 1. de primis differentiis comparationis.

PRIMA pars Arithmeticæ adhuc fuit, secũda sequitur.

1. *Arithmeticæ pars secunda est, quæ interpretatur numerorum comparationes, comparationumque genera & proprietates.*

2 *Comparatio numerorum est habitudo quædam ipsorum inter se.*

Comparatio est ratio vel proportio.

3. *Ratio est comparatio quantitatis.* 3.d.5.

Rationis termini duo sunt, primus antecedens & dux, secundus consequens & comes appellatur. Quantitas autem æqualis est vel inæqualis, unde sunt axiomata sequentia.

4. *Si duo numeri fuerint æquales eidem,*

dem erunt æquales inter ſe.

Ut 2 & 2 ſunt æquales eidem 2. Itaque ſunt æquales inter ſe.

5. *Si numeri æquales addantur æqualibus, toti erunt æquales.2.axio.*

Ut 2 & 2 ſunt æquales numeri, adde utrique 3, toti erunt 5 & 5: item æquales inter ſe.

6 *Si æquales ſubducantur ab æqualibus, reliqui erunt æquales. 3.axio.*

Ut 5 & 5 ſunt æquales numeri: ab utroque tolle 3, manebunt 2 & 2: item æquales inter ſe.

7. *Totus numerus major eſt ſua parte. 9.ax.1.*

8. *Si æquales addantur inæqualibus, toti erunt inæquales.4.axio.*

Ut 4 & 3 ſunt inæquales numeri, adde utrique 2, toti 5 & 6 ſunt item inæquales.

9. *Si æquales ſubducantur ab inæqualibus, reliqui erunt inæquales. 5.ax.*

Ut 6 & 5 ſunt inæquales numeri, tolle ab utroq; 2 & 2 æquales numeros, reliqui quatuor & 3 erunt item inæquales. Ratio eſt arithmetica vel geometrica.

10. *Ratio arithmetica, eſt comparatio*

in quantitate, qua numerus differt á numero.

Ut ratio arithmetica 2 cum 2 est æqualitatis, 2 cum 3 est differentia. 1, 2 cum 5 est differentia 3. Ideoque hæc ratio differentia dicitur.

Cap. 2. de numeratione rationum.

11 *Ratio geometrica est comparatio in quantitate, qua numerus est divisus in numerum.*

Hic præcipué ratio dicitur: dum veró rationis termini scribũtur, dux superné, comes inferné notatur sic,

2	3	1
2	2	

12 *Datis rationis terminis, genus divisione, datoque genere rationis, termini multiplicatione inveniuntur.*

Sic datis terminis 1 ad 1, 2 ad 2, ratio erit æqualitatis, quia æqualis æqualem semel dividit. Datis 4 ad 2, 6 ad 4, ratio erit inæqualitatis, illic dupla, hic sexquialtera, quia comes illic ducem bis, hic semel dividit, & dimidium superest. Dederis contra genus rationis, nempe ex illis quotis (1 (2 (1 $\frac{1}{2}$. Si numerus sit integer, habebis

ducem,

ducem, cui 1 pro comite subjicies, sin fractus sit, multiplicabis integrum per nomen, factoque numerum partium simul addes, constitues ducem: comes autem ipse in numero permanet, ut in postremo exemplo: multiplica 1 per 2, & facto 2 adde 1, constitues 3 pro duce, rationisque termini erunt $\frac{3}{2}$.

13. *Rationum communis numeratio est tanquam terminorum, ideoque eadem est quæ partium, atque ideó si comites sint iidem, soli duces spectantur, excepta multiplicatione, quæ tum duces, tum comites multiplicat.*

Sic é ratione dupla 4 ad 2 addita ad rationē triplam 6 ad 2, tota ratio est quintupla 10 ad 2. Sic ratione dupla 4 ad 2 subducta á ratione quintupla 10 ad 2, reliqua est ratio tripla 6 ad 2, exempla ita sunt,

4	6	10		4	10	6
			item			
2	2	2		2	2	2

Sic ratio dupla 4 ad 2 multiplicans rationem triplam 6 ad 2, faciet rationē sextuplam 24 ad 4. Sic ratio tripla 9 ad 3 multiplicata per rationem quadruplam 8 ad 2, faciet rationem duodecuplam 72 ad 6. Exempla ita sunt.

4	6	24	item	9	8	72
2	2	4		3	2	6

Divide rationem duodecuplam 12 ad 1, in rationem triplam 3 ad 1, quotus erit 4, qui significat dividentem rationem quater in dividenda contineri, aut rationem quadruplam 4 ad 1 pro quota ratione inveniri: sic ratio sedecupla 32 ad 2 divisa in rationem quadruplam 8 ad 2, relinquit quotam rationem quadruplam. Denique quotus hic est nomen quotæ rationis. Exempla ita sunt,

3	12	4	item	8	12	4
1	1	1		2	2	1

14 *Si comites sint diversi, opus erit reductione, de qua suo loco.*

Ergo hæc numeratio communis est in additione, subductione, multiplicatione, divisione.

15 *Ratio inæqualitais reducitur ad rationem æqualitatis multiplicatione suæ conversæ.*

Ut ratio $\frac{2}{3}$ multiplicetur per rationem $\frac{3}{2}$, fiet ratio $\frac{6}{6}$, quæ est æqualitatis.

Cap. 3. de generibus rationis.

Ratio prima est aut conjuncta, prima multiplex

plex aut ſuperparticularis aut ſuperpartiens.

16 *Multiplex eſt, quando terminus major dividitur á minore.5.d.7.*

Sic omnis numerus multiplex eſt ad unitatē, ut 2 duplus,3 triplus,4 quadruplus, & ſic in infinitum. Sunt enim generis hujus reliquorumque ſpecies infinitæ. Atque hic antecedens eſt multiplex,ut duplus,triplus,quadruplus, quintuplus,ſextuplus. Cōſequens autem ſubmultiplex, ut ſubduplus,ſubtriplus,ſubquadrupl⁹,ſubquintuplus,ſubſextuplus. Hic etiam unitas numerus eſt, ſicuti ſæpe in tota comparationum doctrina. Species veró ſic notātur,

2	3	4	5	6
1	1	1	1	1
dupla,	tripla,	quadrupla,	quintupla,	ſextupla.

Si ſubmultiplex multiplici contra comparetur, minoris inæqualitatis erit ratio, & ſubmultiplex dicetur,& antecedens minor erit,cōſequens major,ut in cœteris deinceps.Nomen ſiquidem rationis in minore qualibet inæqualitate,ſemper á majore termino capitur, addito, ſub: ſic igitur ſubmultiplicis ſpecies notantur,

1	1	1	1
2	3	4	5
Subdupla,	ſubtripla,	ſubquadrupla,	ſubquintupla

1

6

ſubſextupla.

Hæc prima inæqualitatis ratio, vera & propria divisione percipitur, reliquæ autem species imperfecta divisione cognoscũtur, perpetuoque pars aut partes relinquuntur.

17. *Superparticularis est, quando major dividitur semel á minore, & pars ejus superest.*

Si altera, sesquialtera dicitur, si tertia, sesquitertia, si quarta, sesquiquarta, si quinta, sexquiquinta, si sexta, sexquisexta, ut in subiectis exẽplis patet.

3	4	5	6
2	3	4	5

Sexquialtera, sesquitertia sesquiquarta, sesquiquinta.

7
6

Sesquisexta.

Ac si majores minoribus dividas, quoti speciem rationis & nomen subtiliús explicabunt, ut hic vides,

$1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{1}{6}$.

Si minor majori in hac specie comparetur, ratio subsuperparticularis dicetur: res sic erit,

2	3
3	4
Subsesquialtera,	Subsesquitertia.
4	5
5	6
Subsesquiquarta,	Subsesquiquinta.

6
7

Subsesquisexta.

Ubi

Ubi quoti ſunt prioribus ſimiles.

18. *Superpartiens eſt, quando major dividitur ſemel á minore, & ejus partes aliquot ſuperſunt.*

Si duæ, ſuperbipartiens, ſi tres, ſupertripartiẽs, ſi quatuor, ſuperquadripartiẽs, ſi quinque, ſuperquintupartiens, ſi ſex, ſuperſextupartiens, & addimus præterea nomen partis á comite, tertias, quartas, quintas, ſextas, ſeptimas, ſi comes ſit 3, 4, 5, 6, 7. Itaque nomen ſpeciale duplex hic erit, alterum é numero, alterum é nomine partium, ut,

5	7	9
3	4	5
Superbipart. tert.	Supertripart. quart.	Superquadripar. quint.

11	13
6	7
Superquintupart. ſext.	Superſextupart. ſept.

Quorum quoti ſpeciem indicantes ſunt,

$1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{4}{5}$, $1\frac{5}{6}$, $1\frac{6}{7}$. Si cõparetur in hoc tertio genere minor majori, ſuperbipartiens dicitur, & contrario modo notatur, ut,

3	4
5	7
Subſuperbipart. tert.	Subſupertripart. quart.

5	6
9	11
Subſuperquadripart. quint.	Subperquintupart. ſext.

7
13
Subſuperſeptupart.
ſeptimas.

Conjuncta ratio eſt multiplex ſuperparticularis, aut multiplex ſuperpartiens.

19 *Multiplex ſuperparticularis eſt, quādo major ſæpiús dividitur á minore, & ejus pars ſupereſt.*

Ut,

5	7
2	3
Dupla ſeſquialtera.	Duplaſeſquitertia.

9
4
Duplaſeſquiquarta.

Et ſic deinceps, ut, 11 ad 5, duplaſeſquiquinta, 13 ad 6, dupla ſeſquiſexta, quarum quoti ſunt,

$2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{5}$, $2\frac{1}{6}$

Sic tripla ſuperparticularis.

7	10	13	16	19	22	25
2	3	4	5	6	7	8

Rationum quoti ſunt.

$3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{5}$, $3\frac{1}{6}$, $3\frac{1}{7}$, $3\frac{1}{8}$.

At

At si contrá minor majori comparetur (sub) utrique speciali nomini præponendum: ut ratio $\frac{2}{5}$ est subdupla, subsesquialtera, ratio $\frac{3}{7}$ est subdupla, subsesquitertia, &c.

20. *Multiplex superpartiens est, quãdo major sæpiús dividitur á minore, & ejus partes supersunt.*

Ut,

8 3 Duplasuperbipart. tert.	12 5 Duplasuperbipar. quint.
16 7 Duplasuperbipart. sept.	20 9 Duplasuperbipart. non.

24
11
Duplasuperbipart.
undec.

Quoti rationum.

$2\frac{2}{3}$, $2\frac{2}{5}$, $2\frac{2}{7}$, $2\frac{2}{9}$, $2\frac{2}{11}$.

Cap. 4. de primis differentiis proportionis.

Ratio adhuc fuit, sequitur proportio.

21 *Portio est similitudo rationum.*

Ejuſque perinde valet inverſio & alternatio.

22. *Proportionis inverſio, eſt aſſumptio conſequentis, velut antecedentis ad antecedentem velut conſequẽtem.* 13.*d*.5.

Ut ſi dixeris, ut ſunt 2 ad 4, ſic 3 ad 6: Ergo, inquam, ut 3 ad 6, ſic 2 ad 4: item ut 6 ad 3, ſic 4 ad 2. Denique ut 4 ad 2. ſic 6 ad 3, id ἀνάπαλιν eſt Euclidi.

23. *Proportionis alternatio eſt aſſumptio antecedentis ad antecedentem, & cõſequentis ad conſequentem.* 11.*&* 12.*d*.5.

Ut ſi dixeris, ut 5 ad 10, ſic 4 ad 8: ergo, inquam, ut 5 ad 4, ſic 10 ad 8. Id ἐναλλὰξ eſt Euclidi.

Proportio eſt diſjuncta vel continua.

24 *Proportio diſjuncta, eſt proportio terminorum diſjunctorum.*

Ut 6 ad 12, ſic 7 ad 14. hic termini quatuor ſunt diverſi.

25. *Proportio continua, eſt proportio ejuſdem termini ſecundi & tertii.*

Ut 2 ad 4, ſic 4 ad 8: hic duæ rationes uno termino continuantur.

Cap. 5. de proportione arithmetica diſjuncta.

Proportio eſt arithmetica aut geometrica.

Propor-

26. *Proportio arithmetica, est similitudo differentiarum.*

Ut in 8, 6, 12, 10, utrobique enim est 2, pro differentia etiam inverso modo: ut enim 10 ad 12, sic 6 ad 8, vel ut 12 ad 10, sic 8 ad 6: una enim differentia 2 est. Item alterno modo, ut 8 ad 6, sic 12 ad 10. Ergo ut 8 ad 12, sic 6 ad 10. Proportionis arithmeticæ inventio varia est, prima est additionis.

27. *Si quatuor numeri sint arithmeticé proportionales, extremus simul uterque erit æqualis medio simul utrique.*

Ut in 2, 3, 4, 5: utrobique enim est 7. Sic in 12, 10, 6, 4: utrobique enim est 16. Secunda est multiplicationis.

28. *Si sint quatuor numeri arithmeticé proportionales, factus á mediis superabit factum ab extremis, facto á differentia maximi á medio, per differentiam ejusdem medii á minimo.*

Ut in 12, 10, 8, 6, factus ab extremis est 72, quem 80 factus á medio, superat 8, facto á 2, differentia primi supra medium, per 4 differentiam eiusdem medii á minimo. Sic in 12, 10, 4, 2, factus ab extremis est 24, quem 40, factus á mediis superat 16, facto á 2 differentia primi á medio, per 8 differētiam eiusdem medii á minimo. Termini tamen recté constituēdi, ut medii sint medii quantitate. Neque hîc dices ut 12 ad 8, sic 16 ad 12, sed vt 8 ad 12, sic 12 ad 16.

Cap. 6. de proportione arithmetica continua, ejusque progressione.

E disjuncta proportione Arithmetica, affectio continué deducitur.

28. *Si sint tres numeri arithmeticé proportionales, medius erit dimidius extremi simul utriusque.*

Ut in 3, 5, 7. Nam 3 & 7 sunt 10, quorum dimidius est 5. Hinc patet inventio medii arithmetici.

30. *Si sint tres numeri arithmeticé proportionales, factus á medio, superabit factum ab extremis facto á differentiis.*

Ut in 3, 6, 9, factus ab extremis est 27, quem 36 factus á medio, superat 9 facto á differentiis 3 & 3.

31. *Proportionis arithmeticæ continuæ termini quantumlibet continuari possunt, & progreßio arithmetica vulgó dicitur.*

In ea quæri solet terminorum differentia, numerus,

merus, primus, ultimus & summa, quæ datis tribus inveniuntur.

32. *Si primus fuerit subductus ab ultimo, reliquusque divisus in numerū terminorum unitate minutum, quotus erit differentia.*

Ut progressionis quinque terminos habentis sunto primus & ultimus terminus 2 & 10, numerus autem terminorum 5, tolle igitur 2 primum á 10 ultimo, restant 8, quibus in quatuor numerum terminorum unitate minutum divisis, quotus erit 2 pro differentia, per quam á 2 primo termino invenies reliquos terminos 4, 6, 8, usque ad 10 ultimum, totaque progressio erit 2, 4, 6, 8, 10.

33. *Si primus fuerit subductus ab ultimo, reliquusque divisus in differentiam, quotus unitate auctus, erit numerus terminorum.*

Ut in eodem exemplo, tolle 2 á 10, manent 8, quibus divisis in 2 differentiam, quotus est 4, cui adde 1, habes 5 numerum terminorum.

34. *Si unitas fuerit subducta á numero terminorum, factusque á reliquo per differētiam subductus ab ultimo, reliquus erit primus.*

Ut in eodem exemplo, tolle 1 á 5 numero terminorum, & 4 reliquum multiplica per 2 differentiam, & factum 8 tolle á 10 ultimo, reliquus 2 est primus.

35. *Si unitas fuerit subducta á numero terminorum, factusque á reliquo per differentiã additus primo, totus erit ultimus.*

Ut in progressione, 2, 4, 6, 8.10, numerus terminorum est 5, á quo tollatur 1, & per 4 numerũ terminorum unitate minutum, multiplica per 2 differentiam, & 8 facto adde 2 primum terminũ, totus erit 10 ultimus terminus progressionis.

36. *Si numerus fuerit factus ex additis extremis per dimidium numeri terminorum, vel á numero terminorum per dimidium additorum extremorum, erit summa progressionis.*

Ut in 2, 4, 6, 8, 10, 12, extremis additis 2 & 12, totus 14 per 3 dimidium multiplicatus, facit 42 summam quæsitam. Fac numerum terminorum imparem, ut in 2, 4, 6, 8, 10, extremis additis totus est 12, cujus dimidius 6 per 5 numerum terminorum multiplicatus, facit 30 summam.

Cap. 7. de proportione geometrica, deque invẽtione proportionalium & inæqualiũ.

Ad-

Adhuc proportio arithmetica fuit, geometrica ſequitur.

37. *Proportio geometrica eſt ſimilitudo rationum. 4. d. 5.*

Hic propriè proportio dicitur.

38. *Proportionales ſunt, qui habent eandem rationem. 7. d. 5.*

Veluti 9 ad 3, ſicuti 12 ad 4, ratio utrobique eſt tripla, ideoque 9, 3, 12, 4, ſunt proportionales.

39. *Si numeri fuerint æquales, erunt proportionales ad eundem, & idem erit proportionalis ad æquales. 7. p. 5.*

40. *Et ſi numeri fuerint proportionales ad eundem, erunt æquales, & ad quos idem fuerit proportionalis, & illi erunt æquales. 9. p. 5.*

Ut 2 & 2 ſunt proportionales ad 3: ut enim 2 ad 3, ſic 2 ad 3. itemque 3 ad 2, & 2 eſt proportionalis: ut enim 3 ad 2, ſic 3 ad 2, contraque 2 & 2 cúm ſint proportionales ad 3, ſunt æquales. Itē 2 & 2 æquales, ad quos 3 eſt proportionalis.

41. *Si duo numeri fuerint inæquales, major habebit ad eundem majorem rationem, quám minor, & idem ad minorem*

habebit majorem rationem quám ad majorem.8.p.5.

42. *Et si duo numeri habuerint ad eũdem rationem inæqualem, qui habuerit majorem, erit major, ad quẽ autem idem habuerit majorem rationem, erit minor. 20.p.5.*

Ut 3 & 4 sunt inæquales, & 4 ad 2 majorem rationem habet, nempe duplam, quám 3 ad eundem, nempe sesquialteram: item 2 ad 3 majorem habet rationem, nempe sesquialteram, quám ad 4 subduplam. Conuersum patet in eodem exemplo.

Cap. 8. de inventione proportionalium per multiplicationem, deq; reductione partium ad cognomines & proportionales.

43. *Minores æqué majoribus sunt proportionales. 15. p.5.*

Ut 2 ad 4, sic 3 ad 6. Antecedentes enim dimidii sunt consequentium: datis autem minoribus, majores proportionales inveniuntur multiplicatione.

44. *Si numerus numeros multiplicet,*

facti

facti erunt proportionales multiplicantibus.18.p.7.

Ut 2 multiplicet 3 & 4, facti erunt 6 & 8 proportionales multiplicatis 3 & 4. Item 3 & 4 multiplicent 2, facti iidem 6 & 8 erunt itidem proportionales multiplicantibus, 3 & 4, quia utrobique æqué majores sunt minoribus,

Reductio partium ad cognomines & proportionales é proximo multiplicationis theoremate deducitur, atq; ut proportionales ipsi addantur, subducantur, dividantur necessaria. Proportionales enim partes sunt eædem quãtumlibet terminis dissimiles, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$.

46. *Partium reductio ad cognomines & proportionales partes, est multiplicatio nominis & numeri per alterũ nomen.*

Ut in $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, multiplica 2 & 3 per 4, item 3 & 4 per 3, facies cognomines & proportionales partes $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ proportionales quidem, quia numerus idem duos multiplicavit: cognomines veró & æqualium nominum, quia sunt é duobus numeris inter se multiplicatis.

47. *Nomina reductione eadem facta, ad divisionem nihil attinent.*

Nam cúm reduxeris partes $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ad $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, dicere $\frac{8}{12}$ toties é $\frac{9}{12}$ subduci nihilo plus est quám dicere 8 toties á 9. Itaque nominum inter ſe multiplicatio hic in diviſione omittitur. At ſi ſeries reducendarũ partium longior fuerit, binæ reducẽdæ ſunt, ut in $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$, prima reductione atque hinc additione facta, habebis $\frac{17}{12}$: deinde cum $\frac{4}{5}$ reductæ ſunt $\frac{85}{60}$, $\frac{48}{60}$.

48. *Eadem via reductionis, cognoſcetur é binis partibus utræ ſint majores.*

Ut $\frac{5}{6}$ ſunt majores quám $\frac{3}{4}$, quia facta reductione habebis $\frac{20}{24}$ pro $\frac{5}{6}$: At habebis tantúm $\frac{18}{24}$ pro $\frac{3}{4}$.

49. *Eadem via termini rationum fracti ad integros proportionales redeunt, ſi numeri multiplicẽtur per nomen unarum partium.*

Sic $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ multiplicatæ per 4, redeunt ad $\frac{8}{4}$, $\frac{12}{6}$, id eſt ad 2 & 2 integros, & eãdem rationem habentes quam habent $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{6}$. Si majores terminos proportionales requiras, multiplica rurſus $\frac{8}{4}$ & $\frac{12}{6}$ per nomen 4, facies $\frac{32}{4}$ & $\frac{48}{6}$, id eſt, 8 & 8, vel multiplica per 6, facies $\frac{48}{4}$ $\frac{72}{6}$, id eſt 12 & 12 integros proportionales datis fractis $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$.

Idem erit, ſi cum integris fracti miſceantur, ut ſi pro 3 $\frac{1}{3}$ & 4 $\frac{1}{3}$ quærantur integri proportionales, multiplicabis 3 $\frac{1}{2}$ per 2, facies 7: deinde multiplicabis 4 $\frac{1}{3}$ per idem nomen, facies 8 $\frac{2}{3}$, neque dum habes ambos integros, ſed alterum tantúm, Eadem itaque via quæratur alter: igitur

per

per reliquum nomen 3, multiplica 8 $\frac{2}{3}$, facies 24 & $\frac{6}{3}$, unde colliges 26, tandemque habebis 21 & 26 integros proportionales 3 $\frac{1}{2}$ 4 $\frac{1}{3}$.

Cap. 9. de inventione proportionalium per divisionem, deque reductione ad minimos.

Datis veró majoribus numeris, minores inveniũtur regula divisionis per contrariam é lege multiplicationis deducta.

50. *Si numerus diviserit numeros, quoti erunt proportionales divisis.*

Ut 2 dividat 8 & 6, quoti 4 & 3, erunt proportionales divisis 8 & 6: At 4 & 3 dividant 24, quoti 6 & 8, erunt proportionales divisis, sed contrario genere inæqualitatis. Non enim ut 4 ad 3, sic 6 ad 8, illic enim est ratio sesquitertia, hic sesquialtera, sed ut 4 ad 3, sic 8 ad 6. proportionales fiunt divisione non solúm minores divisis, sed minimi proportionalium.

51. *Si numeri fuerint minimi proportionalium, erunt primi inter se.23.p.7.*

52. *Et si fuerint primi inter se, erunt minimi proportionalium.24.p.7.*

Ut 3 & 2 sunt primi & minimi sesquialterorum, & quia sunt minimi proportionalium, iecircó ſunt primi.

53. *Si maximus communis diviſor diviſerit datos, quoti erunt minimi proportionales datis.* 35.p.7.

Ut hic,

	8	12
4)		
	2	3

4 maximus diviſor cúm diviſerit 8 & 12, quoti 2 & 3 erũt proportionales minimi, unde etiam ſequitur.

54. *Si duo numeri fuerint minimi proportionalium, divident ſibi proportionales æqualiter, major majorem, & minor minorem.* 21.p.7.

Ut patet in eodem exemplo: 3 dividit ipſum 12 quater, & 2 dividit ipſum 8 toties. Habet autem iſta ad minimos reductio uſum tam neceſſarium, quám eſt facile pares numeros præ magnis numerare. Itaque providendum ſemper eſt, ut primi numeri & minimi perpetuó proponantur, aut ſi compoſiti dati ſint, protinús reducantur ad minimos per maximum communem diviſorem. Serviet etiam ſuperiori proportionalium reductioni reductio ad minimos terminos, ut poſtea reductorum terminorũ alia reductio prolixior evitetur. Sed reductio iſta per ſpecies numerationis eſt etia quædam ſpecialis

55. *In additione & ſubductione minimus á nominibus diviſus eſt aſſumendus pro communi nomine & numeri multiplicandi alterné per partes cognomines.*

Ut hic vides,

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\;6\;} & & \overbrace{\;4\;} \\ \frac{2}{3} & \times & \frac{4}{9} \\ 1 & & 3 \\ & \underbrace{\;}_{9} & \end{array}$$

ubi pro $\frac{2}{3}$, & $\frac{4}{9}$ habes $\frac{6}{9}$, & $\frac{4}{9}$.

56 *In multiplicatione numerus & nomen alterius reducuntur.*

Quia ſunt multiplicatores, idemque eſt multiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{6}$, & $\frac{2}{6}$ per $\frac{5}{3}$. Itaque tanquam $\frac{2}{6}$ rediges ad $\frac{1}{3}$, & pro $\frac{10}{18}$, facies $\frac{5}{9}$.

57. *Si numerus nomini alterno fuerit æqualis, reliquus numerus reliquo nomini ſuperpoſitus multiplicationem abſolvit.*

Ut in $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ omiſſis 3 & 3, habes $\frac{2}{4}$, id eſt, $\frac{1}{2}$. Quin ſi longa hic ſeries fuerit, æqualibus omnibus omiſſis, reliquus numerus cum reliquo nomine multiplicationem abſolvet, ut hic,

$\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, eſt $\frac{1}{9}$.

58. *In diviſione numeri inter ſe, vel nomina inter ſe, vel utraque ſeparatim re-*

ducuntur.

Ut ſi $\frac{4}{5}$ dividantur per $\frac{2}{3}$, pro 2 & 4, ſumes 1 & 2, & quota pars erit $\frac{6}{5}$, vel $1\frac{1}{5}$. Item ſi dividas $\frac{5}{6}$ per $\frac{4}{9}$, ſumes 2 & 3 pro 9 & 6, & facies $\frac{15}{8}$, vel $1\frac{7}{8}$. Item ſi $\frac{8}{27}$ per $\frac{4}{9}$, ſumes & 2 pro 4, & 8 pro 9 & 27, 1 & 3, & quota pars erit $\frac{2}{3}$.

Cap. 10. de regula aurea proportionis diſjunctæ, & inde quarti proportionalis inventione.

Proportio eſt prima aut conjuncta.

59. *Proportio prima, eſt proportio diſjuncta tantúm, aut continua tantúm.*

60. *Proportio diſjuncta eſt, quando quæ ratio eſt primi termini ad ſecundum, eadem eſt tertii ad quartum.*

Ad proportionem diſjunctam prima erit inventio quarti proportionalis per multiplicationem ſimul & diviſionem, quæ inventio propter ſingularem excellentiam vulgó aurea regula nominatur.

61. *Si quatuor numeri ſint proportionales, factus ab extremis erit æqualis facto á mediis: & ſi factus ab extremis ſit æqualis facto á mediis, quatuor numeri e-*

runt

runt proportionales. 19.p.7.

Ut in 4, 2, 6, 3, factus 12 ab extremis 4 & 3, est æqualis 12 facto á mediis 2 & 6. Ideoque etiam numeri quatuor positi sunt proportionales. Hinc sequitur.

62. *Si datis tribus numeris primus diviserit factum á secundo & tertio, quotus erit quartus proportionalis.* 19.p.9.

Ut in 2, 4, 6, quartus proportionalis est 12.

63. *In hujus regulæ quæstionibus præcipué spectandus est ordo terminorum.*

Ut nempe primus primo loco sit, & cœteri suo. Itaque si confusiús, ut solet, quæratur, redigantur tamen in ordinem termini: Ut, quot horæ sunt in 6 diebus, cúm in 3 sint 72? Hic quæstio est tertii termini, quæstionisque proportio sic expedietur 3, 72, 6, 144.

64. *Si confundantur res heterogeneæ, reducendæ sunt priús ad idem genus.*

Ut si quæratur, hebdomada horas habet 168, dies 4 quot horas habent? Pro hebdomada ponantur 7 dies, & tum dic, 7 dies dant horas 168, 4 dies, quot horas dabunt? reperies 96.

65. *Si termini rationis comprehendantur dato nomine rationis, anté sunt explicandi.*

Ut ad quem numerum 12 est quintuplus? Pone pro primo & secundo termino terminos minimos quæsitæ rationis 5 & 1, & dicito, ut 5 ad 1, sic 12 ad $2\frac{2}{5}$. Atque hoc modo cuilibet termino terminus rationalis, qua voles rationis specie reperietur. Sic enim idem 12 sesquiquartus erit ad $9\frac{3}{5}$ superbipartiens tertias, ad $7\frac{1}{5}$ duplus sesquiquartus, ad $5\frac{3}{9}$, id est, $\frac{1}{3}$, duplus supertripartiens quintas ad $4\frac{8}{13}$. Exempla sunt cum specie rationum terminos includente: sic,

$\frac{5}{1}$, .	5,	1,	12,	$2\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{4}$,	5,	4,	12,	$9\frac{3}{5}$
$1\frac{2}{3}$,	5,	3,	12,	$7\frac{1}{5}$
$2\frac{1}{4}$,	9,	4,	12,	$5\frac{3}{9}$, id est $\frac{1}{3}$
$2\frac{3}{5}$,	13,	5,	12,	$4\frac{8}{13}$.

66. *Si quid antecesserit quæstionem, anté explicandum est.*

Centum libras emi 10 aureis, vendidi 12, quãtum lucri fuisset ex aureis 100? Primó videbis lucrum 10 aureorum esse aureos 2. Tum igitur per auream regulam dicito: 10 dant 2, ergo 100 dabunt 20. Item si libra 3 aureis empta, venderetur tantum 2, quanta esset jactura ex aureis 100? Hic cúm videris jacturam in 3 esse 1, tum dices 3 perdunt 1: ergo 100 perdunt $33\frac{1}{3}$. Sic sæpe multarum rerum additio facienda, priusquam proportio concludatur: ut, piperis pondo 1000 in Lusitania empta sunt nummis 10000, proque

his

his vectigal pensitatū nummis 1000, naulum per Rhotomagum usque fuerit 300. Ibi deinde vectigal 500, vectura 200: accesserit ministrorum impensa 2000, vis in singulas libras lucrari 4, id est, pro tota summa 4000? Adde illa omnia, summa erit 18000. Iam dicito, 1000 pondo dant impensas 18000: ergo 1 dat 18.

Putearius quidam puteum brachiorum 34 redemit effodiendum libris 60 cum victu geminarum operarum. Effossis autem brachiis 20, ægrotare cœpit, patremque familias mercedē debitam rogavit, quanta igitur ea est? Hic victus nihil variat, sed arithmeticæ progressionis usus hic est anté proportionis geometricæ conclusionem. Nam secundum brachium, laborem primi continet & tertium utriusque, & sic deinceps arithmetica gradatione labor crescit. Itaque summa integræ progressionis brachiorum est 595. At summa progressionis 34, 20 brachiorū est 210. Jam ad proportionem conclude, ut 595 ad 60, sic 210 ad 21 $\frac{105}{595}$, vel $\frac{3}{17}$.

Cap. 11. de reductione quadruplici ex inventione quarti proportionalis.

Ex aureæ regulæ consectario quadruplex reductio oritur partium ad datum nomē, integrorum ad partes, partium ad integros, particularium ad partes.

67. *Reductio partium ad datum nomen, eſt multiplicatio reducendi numeri per datum nomen, & facti diviſio per reducendum nomen.*

Atque hic integra proportio eſt: ut ſi quæratur $\frac{3}{4}$ quot ſunt $\frac{\ }{12}$? Hic enim terminos tres habes 4, 3, 12, unde quarto proportionali invẽto, reſpondebis $\frac{3}{4}$ eſſe $\frac{9}{12}$. Idem veró eſt dicere, $\frac{3}{4}$ reductæ ad $\frac{\ }{12}$, ſunt $\frac{9}{12}$, item quærere, quot ſunt $\frac{\ }{12}$ in $\frac{3}{4}$? Reliquæ reductiones compẽdium proportionis habent. In his enim proportionis terminis aliquis deeſt. Itaque multiplicatio vel diviſio omittitur.

68. *Reductio integrorum ad partes, eſt multiplicatio integrorum per nomen partium unius integri.*

Ut ſi reducere velis 12 ſigna ad gradus, ſcis gradum eſſe triceſimam partem ſigni, multiplicabis igitur 12 per 30, & facies 360. Multiplicatio hic tantúm eſt, quia primus terminus eſt 1, quo nihil dividitur. Quæſtio autem ſic eſſet é ſuis terminis: 1 ſignum continet 30 gradus, 12 ſigna, quot gradus continent? totaque proportio ſic eſſet 1, 30, 12, 360.

69. *Reductio partium ad integros, eſt diviſio partium per ipſarum nomen.*

Ut

Ut 360 gradus, quot valent ſigna? Scis gradum eſſe $\frac{1}{30}$ ſigni. Itaque divides 360 per 30, & habebis 12. Quæſtio etiam ſic eſſet: 30 gradus valent 1 ſignum, 360 quot valent? tumque proportio concluderetur: 30 gradus valent 1 ſignũ, ergo 360 gradus valent 12 ſigna. Atque hic quia ſecundus terminus eſt 1, quo nihil multiplicatur, diviſio tantúm eſt neceſſaria. Proportio tota ſic eſt 30, 1, 360, 12. Hac igitur utraque reductione, via patet reducẽdi aureos ad aſſes, aſſes ad uncias: contraque uncias ad aſſes, & aſſes ad aureos, & monetæ cujuſcunque genus in partes frangẽdi, parteſque ad totum reducendi.

70. *Reductio particularum ad partes, eſt multiplicatio numerorum inter ſe, & nominum inter ſe.*

Sic $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ redeunt ad $\frac{6}{12}$, id eſt $\frac{1}{2}$, & diviſio hic, ut in reductione integrorum ad partes negligitur, quia 1 eſt primus terminus proportionis, & proportio hic duplex eſt, altera in numeris, altera in nominibus. Tota proportio ſic eſt, 1 $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{6}{12}$: ut enim 1 ad 3, ſic 2 ad 6, item ut 1 ad 4, ſic 3 ad 12. Conſtitutis autem proportionalibus, conſtat factum ab extremis æqualem eſſe facto á mediis, atque ob eandem proportionis cauſſam videri poſſit multiplicatio partium & rationũ nomen & comitem ſimul cum nomine & duce cõplecti: Si ſeries longior fuerit, binæ partes ſunt expediendæ, ut in $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$, primó facies $\frac{6}{12}$, id eſt

$\frac{1}{2}$. Deinde ex $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ facies $\frac{1}{4}$. Idem autem fuerit dicere, $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$, vel $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ quia idem numeri inter ſe multiplicati creant eoſdem, & per hanc particularem reductionem, cognoſcis quid ſint particulæ, cúm vides quales ſint partes totius. Eodem compendio partes integrorum cognoſcentur, ut $\frac{2}{7}$ trigintaquinque aureorum ſunt $\frac{70}{7}$, id eſt 10 aurei, tanquam quæreretur $\frac{2}{7}$ $\frac{35}{1}$.

Cap. 12. de variis quæſtionibus proportionis.

Inſtructis & paratis fractorum numerorum præceptis, proportionis uſus multó expeditior erit, qualem compluribus & clarioribus exemplis lubet illuſtrare.

Perſolveris æris alieni $\frac{1}{3}$: deinde $\frac{1}{4}$, & reſtēt 10 aurei, quantum erat totum æs alienum? additæ partes ſunt $\frac{7}{12}$: reliquum igitur eſt $\frac{5}{12}$, unde quæſtionis proportio concluditur.

5 valent 10 aureos: ergo 12 valent 24.

Turris $\frac{1}{3}$ in terra latet, $\frac{1}{4}$ demergitur ſub aqua, reliqua pars 60 cubitis ſupra aquam eminet, quot igitur cubiti in terra? quot in aqua? Partes additæ ſunt $\frac{7}{12}$, reliquum igitur $\frac{5}{12}$ valēt 60: unde concludes,

5 valent 60: Ergo $\begin{cases} 4 & \quad 48 \\ 3 & \quad 36 \end{cases}$

Talis

Talis est quæstio duplex græcorum epigrámatum de statua Palladis.

Pallas ego sum malleata, sed aurum
Juvenum est, donum poëtarum.
Dimidiũ quidẽ auri Charisius, octavam autẽ
Tespis, & decimam partem posuit Solon.
Sed vicesimã Themison, reliqua veró talenta
Novem, & ars, donum Aristodici.

Adde partes, habebis $\frac{31}{40}$. Itaque reliqua 9 ad cõplendum totum, valent 9 proposita. Hic accidit eundem esse numerum propositum & reliquum, ut aliud quærendum non sit. In proximo res alia est.

Augeam interrogavit magna virtus Alchide
Multitudinem armentorum quærens, ipse veró respondit:
Circa quidem Alphei fluvium, amice, dimidium quidem horum,
Pars autem octava, collem Saturni circũpascuntur.
Duodecima autem secessit Taraxippi ad montem:
Circa veró Elidẽ divinã, vicesima pascũtur.
Verúm in Archadia tricesimam reliqui.
Reliquos autem videto greges, hic quinquaginta.

Additæ partes sunt $\frac{95}{120}$. Itaque reliqua 25 ad explendum totum valent 50: Ergo 120 valent 240. Pauló dissimiliter solvitur græci item epigrammatis illa quæstio fratrum Zethi & Amphionis matriſque Antiopes.

Ambo quidem nos viginti mnas trahimus
Zethuſq; & germanus: at ſi de meo ſumpſeris
Tertiam & quartam Amphionis.
Sex omnia invenies, matris invenies pōdus.

Primúm ſimul utriuſq; quæſiti numeri, id eſt 20, cape $\frac{1}{4}$, quæ nempe ſit unius & alterius quæſiti $\frac{1}{4}$ communis ea erit 5: 6 autem matris numerus continet hanc communem $\frac{1}{4}$, & prætereа unū, id eſt $\frac{1}{12}$ primi quæſiti numeri, ut perſpicies tollendo $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$, unde proportio de primo numero quæſito concludetur.

$\frac{1}{12}$ valet 1: ergo $\frac{12}{12}$, id eſt totus, valet 12.

Hic numerus Zethi, quo de 20 ſublato, manet 8, numerus Amphionis. Nam $\frac{1}{3}$ de 12, item $\frac{1}{4}$ de 8, ſunt 4 & 2, & ſimul uterque 6 numerus Antiopes. Idem veró concludi poteſt, ſumendo primum $\frac{1}{3}$ ejuſdem totius 20, id eſt 6 & $\frac{2}{3}$: 6 enim ſuperatur ab eo $\frac{2}{3}$, id eſt $\frac{1}{12}$ ſecundi quæſiti, cujus $\frac{1}{4}$ quæritur, unde concludetur.

$\frac{1}{12}$ valet $\frac{2}{3}$: ergo 1 valet $\frac{24}{3}$, id eſt 8.

Hic numerus eſt Amphionis, quo de 20 ſublato, reſtat 12 numerus Zethi.

Emiſti dolium vini aureis 8, lucrari vis duos, quanti pintam vendes? Dolium continet pintas 288, aurei octo denariolos 4800, tum proportionem concludito.

288 pinctæ valent 4800 denariolos, ergo 1 pinta valet $16\frac{192}{288}$, id eſt $\frac{2}{3}$.

Commuta 3 aureos in aſſes, quales 1 aureus valet

let 50, item in semisses, quadrantes, æquali singulorum generum numero, quot asses, quot semisses, quot quadrantes dabis? commuta 3 aureos in asses 50: deinde asses in minimam propositarum monetam, ut in quadrātes, habebis 600, quales assis valet 4, semissis 2, quadrans 1. Hi valores 4, 2, 1, additi sunt 7, unde proportio concludetur.

7 continent semel singula quæsita genera, ergo 600 continēt octogies quinquagies cū $\frac{5}{7}$.

Eme 4 aureis æquali numero libras piperis, Zingiberis, amygdalarum, saccari, quot é singulis generibus libras habebis? Sume pretiū unius libræ in singulis generibus, ut libra piperis 16 assibus væneat, Zingiberis 18, amygdalarū 2, saccari 4, prætiis his additis, totus est 40, tū sume pro 4 aureis 184 asses, & proportionem conclude.

40 asses dant 1 libram singulorū generum, ergo 184 asses dant 4 libras & $\frac{3}{5}$ unius libræ.

Hic si multiplices libris singulorū generum inventum pretium, restitues 184 asses. In sequentibus proportio alia quæsitam antecedit.

Cursor Lutetia Lugdunum 5 diebus pervenit, cursor alius velocior, Lugduno Lutetiam idem iter triduo conficit, quando & ubi inter se occurrent? Præpone proportiones antecedētes.

Primus 5 diebus totum iter conficit:

Ergo 1 die conficit $\frac{1}{5}$ itineris.

Secundus 3 diebus conficit iter:

Ergo 1 die conficit $\frac{1}{3}$ itineris. Hæ partes additæ sunt $\frac{8}{15}$ itineris, unde tota proportio concluditur.

$\frac{8}{15}$ itineris conficiuntur 1 die, ergo totum iter conficitur $\frac{15}{8}$ diei, id est 1 die, & sequentis $\frac{7}{8}$. hoc tempus est concursus, jam dicito,

Primus 5 diebus conficit totum: ergo $\frac{15}{8}$ diei conficiet $\frac{15}{40}$ itineris, id est $\frac{3}{8}$.

Secundus conficit 3 diebus totum: Ergo $\frac{15}{8}$ conficit $\frac{15}{24}$, id est, $\frac{5}{8}$. Locus igitur concursus erit ad $\frac{3}{8}$ itineris á primo confecti, & ad $\frac{5}{8}$ á secũdo confecti.

Cursores 2 Lutetia Romam contendunt, sed primus 20 millia passuum quotidie conficit, secundus 33, primus 6 diebus præcesserit, quando secundus assequetur? Imprimis collige per multiplicationem jam confectum iter, habebis 120 millia, tum sume 13 exuperantiam secũdi, & dic. Secundus cõficit 13 millia uno die supra primũ, idem 120 millia, quot diebus supra eundem conficiet? quæstio sic est,

13, 1, 120, $9\frac{3}{13}$.

Potator quidam solus exhaurit cadum vini 20 diebus: at cúm uná potat uxor, 14 diebus exhaurit: quot igitur diebus uxor sola cadum exhauriet? Maritus 20 diebus exhaurit totum, ergo 14 diebus exhaurit $\frac{14}{20}$ vel $\frac{7}{10}$. Itaque uxor 14 diebus potat reliquũ, id est, $\frac{3}{10}$. Jam dicito, uxor exhaurit 14 diebus $\frac{3}{10}$. Ergo $\frac{10}{10}$, id est totũ: exhaurit 46 diebus & $\frac{2}{3}$ unius diei.

E 4 architectis ædificium totum absolveret omnes primus anno 1, ſecundus 2, tertius 3, quartus 4. Si omnes ſimul adhibeantur, quanto tempore abſolvent? Secundus 2 annis abſolvit totũ opus: ergo 1 anno abſolvet $\frac{1}{2}$ operis, tertius $\frac{1}{3}$, quartus $\frac{1}{4}$. Adde jam ſingulorũ opus $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, habebis $\frac{25}{12}$, unde concludes: Quatuor architecti abſolvunt $\frac{25}{12}$ ædificii 1 anno, ergo iidem abſolvent $\frac{12}{12}$ vel totum $\frac{12}{25}$ unius anni, id eſt 5 menſibus, & $\frac{19}{25}$ unius menſis.

E duobus architectis primus abſolveret 30 diebus, ſecundus 40, tertio autẽ addito 15 diebus abſolvunt, quot diebus tertius ſolus effeciſſet? Primus 30 diebus abſolveret totum: ergo 15 diebus abſolvet $\frac{15}{30}$ ædificii, id eſt $\frac{1}{2}$, ſecundus $\frac{15}{40}$, id eſt $\frac{3}{8}$, quæ additæ ſunt $\frac{7}{8}$. Itaque tertius effeciſſet $\frac{1}{8}$ illis 15 diebus. Jam denique dicito: $\frac{1}{8}$ conficitur 15 diebus: ergo $\frac{8}{8}$, id eſt totum, efficitur 120 diebus.

Item, Unius moletrinæ tres molæ molunt 12 horis modios, prima 18, ſecunda 13, tertia 8, quot horis univerſæ molent modios 24? & quantum ſingulæ? Adde primúm 18, 13, 8, facies 39, prima quæſtio ſic erit 39, 12, 24.

Dices igitur 39 modii moluntur 12 horis: ergo 24 moluntur horis $7\frac{5}{13}$. Tum de tribus molis triplex erit quæſtio: prima ſic. Prima mola molit 12 horis 18 modios: Ergo prima mola horis $7\frac{5}{13}$, quot modios molet? dicito: 12 dant 18: ergo $7\frac{5}{13}$ dabunt $11\frac{1}{3}$.
In ſecunda & tertia dicito,

12 dant 13: ergo $7\frac{5}{13}$ dabunt 8. item

12 dant 8: ergo $7\frac{5}{13}$ dabunt $4\frac{12}{13}$.

Fons duas fiſtulas habet, prima implet lacum horis 4, ſi ſola fluat, ſecunda vacuat horis 11, ſi illa obſtructa ſit: Si uná fluant, quot horis implebitur lacus? Diſtinguito proportiones antecedentes, & dicito,

4 horæ implent lacum: ergo 1 hora implet $\frac{1}{4}$ lacus. deinde

11 horæ vacuant lacum, ergo 1 hora vacuat $\frac{1}{11}$ lacus. Jam ut ſola impletio maneat, tolle $\frac{1}{11}$ ab $\frac{1}{4}$, reſtabunt $\frac{7}{44}$ lacus, quæ implentur 1 hora, inde quæſtionis proportio concludetur.

$\frac{7}{44}$ lacus implétur 1 hora: ergo $\frac{44}{44}$ implentur $\frac{44}{7}$ horæ, id eſt 6 horis & $\frac{2}{7}$ unius horæ. Sed quia nominum in diviſione nulla eſt ratio iis rejectis, & in hoc & in cœteris omnibus exemplis, expeditiús concludes. Statues igitur proportionis hujus terminos hoc modo,

7, 1, 44, $\frac{44}{7}$, id eſt $6\frac{2}{7}$.

Lacus fontis tres fiſtulas habet, quarum prima uacuat lacum $\frac{1}{4}$ horæ, ſecunda $\frac{1}{2}$, tertia hora integra, quanto tempore fluẽtes ſimul omnes vacuant lacum? Dices hic ut anteá.

$\frac{1}{4}$ horæ vacuat ſemel, ergo 1 hora vacuat quater. Itaque $\frac{1}{2}$ vacuat bis, 1 hora ſemel, adde has vices, habes 7, & dicito,

Lacus vacuatur ſepties 1 hora, ergo vacuatur ſemel $\frac{1}{7}$ horæ, termini ita ſunt,

7 1 1 $\frac{1}{7}$.

Leo fontis 4 fiſtulas habet, quarum prima imple plet ſubiectum lacum 24 horis, ſecunda 36, tertia 48, quarta 6: Si ſimul fluant, quot horis implebunt? facito proportiones antecedentes,

24 horæ implent totum, ergo 1 implet $\frac{1}{24}$ lacus.

36 horæ implent totum: ergo 1 implet $\frac{1}{36}$ lacus: 48 horæ implent totum: ergo 1 implet $\frac{1}{48}$ lacus.

6 horæ implent totum: ergo 1 implet $\frac{1}{6}$ lacus. Adde jam partes impleti lacus 1 hora, habebis $\frac{37}{144}$, quales 144 totum faciunt, rejectis itaq; iiſdem nominibus, dices,

37 partes lacus implentur 1 hora: ergo 144, id eſt totus, impletur 3 horis & $\frac{33}{36}$ unius horæ.

Cap. 13. de proportione diſjuncta, inverſa.

Proportio diſjuncta directa adhuc fuit, qua inverſa utendum eſt, quoties rerum comparatarum proportio ejuſmodi eſt, ut quantó magis aliæ creſcant, tantó magis aliæ minuantur. Itaque primus terminus hic pro quarto quærendus eſt.

Amphora ſufficit 3 dies 30 convivis, 6 dies, quot convivis ſufficiet? termini quæſtionis ita ſunt, 3, 30, 6. Factus autem á primo & ſecūdo eſt 90, quo diviſo in 6, quotus erit 15 pro primo inverſo, tota proportio ſic eſt, 15, 3, 30, 6.

Commeatus ſuppetit 7 menſes 3000 obſeſſis militibus: 12 menſes, quot obſeſſis ſuppetet? termini proportionis ita ſunt, 1750, 7, 3000, 12.

Cúm modius tritici vænit 5 aureis, tum panis quadrantis est 4 unciarum: ergo cúm vænit 3, panis erit unciarum 6 & $\frac{2}{3}$, & hic primus terminus directæ proportionis est quartus.

Pannus latus 6 ulnas, longus 7, vestiendus est æquali panno lato 3 ulnas, longitudo igitur erit 14 ulnarum.

15 boves arant decem jugera 8 diebus, quare 20 boves 10 jugera arabunt diebus 6. In iis quæstionibus res eadem iterata proportionis terminum nullum facit, tanquam de agro aliquo ageretur, & ita concluderetur,

15 boves arant 8 diebus, quare 20 arabunt 6.

Tale est Aristotelis exemplum 1 cap. 1. de cœlo, cúm ait, Proportionem quam habent pondera, tempora, ἀνάπαλιν, id est inverso modo habebunt, ut si dimidium pondus in tali, duplum in dimidio hujus. Esto igitur Aristotelea proportio. Pondus 20 librarum descendit certum spatium horis 2, pondus igitur 40 librarum, idem spatium descendet hora 1. Proportionis termini ita sunt, 1, 20, 2, 40.

Trium mercatorum primus contulit aureos 60 per 6 menses, secundus autem per 7 menses, tertius per 5 sortem nescio quam contulerint, lucrum autem fuerit singulis aureorum 30: quanta est sors secundi, quanta tertii? Dicito: 6 menses lucrantur 30 ex 60, ergo lucrantur tantundem 7 menses ex 51 $\frac{3}{7}$, & 5 menses ex 72.

Caput

Caput 14. de additione proportionis.

Hactenus proportionis disjunctæ doctrina fuit tum directæ tum inversæ, propria differentia sequitur ex additione & duplicatione terminorum.

71. *Additio proportionis est additio terminorum.*

Estque duplex.

72. *Additio proportionis prima est assumptio antecedentis & consequentis ad consequentem.* 14.d.5.

Ut 2 ad 4, sicut 3 ad 6: ergo 2 & 4, id est 6 ad 4, ut 3 & 6, id est 9 ad 6.

73. *Additio proportionis secunda, est assumptio omnium antecedentium ad omnes consequentes.* 12.p.7.

Ut 2 ad 4, sic 3 ad 6: ergo 2 & 3, id est 5 ad 4 & 6, id est 10, ut 2 ad 4.

Hæc secunda proportionis additio propter quotidianum usum in cõsortio & societate mercatorum vulgó regula societatis appellata est. Quare ejus utilitas pluribus exemplis est illustranda.

Duorum sociorum primus contulit aureos 8, secundus 6, unde lucrati sunt aureos 7, quantum ſingulis accedit? Quæſtio additis antecedentibus ita ſolvetur:

$$14 \text{ dant } 7 : \text{ergo} \begin{matrix} 8 & 4, \\ 6 & 3. \end{matrix}$$

& contra ſors concluditur.

$$7 \text{ dant } 14 : \text{Ergo} \begin{matrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$

Tres mercatores contulerunt aureos, primus 90, ſecundus 60, tertius 50, lucratique ſunt aureos 100, quantum ſingulis accedit? Adde antecedentes, ut anteá, & conclude,

$$200 \text{ dant } 100 : \text{ergo} \begin{matrix} 90 & 45 \\ 60 & 30 \\ 50 & 25 \end{matrix}$$

Contrá ſingulares ſortes ex additis conſequentibus concludentur:

$$100 \text{ dant } 200 : \text{ergo} \begin{matrix} 45 & 90 \\ 30 & 60 \\ 25 & 50 \end{matrix}$$

Octo creditoribus debentur aurei, primo 15, ſecundo 24, tertio 32, quarto 54, quinto 60, ſexto 75, ſeptimo 86, octavo 100: Sed bona debitoris tantummodo valent aureos 150. Itaque omnibus omnino ſatisfieri non poteſt. Ad proportionis igitur æquitatem recurretur: quantum ſingulis pro rata bonorum portione perſolvetur? Ex additis antecedentibus ita concludes,

	15	5 $\frac{20}{446}$
	24	8 $\frac{32}{446}$
	32	10 $\frac{340}{446}$
	54	18 $\frac{72}{446}$
446 dant 150 : ergo	60	20 $\frac{80}{446}$
	75	25 $\frac{100}{446}$
	86	28 $\frac{412}{446}$
	100	35 $\frac{282}{446}$

Aurei 200 tribus ea conditione partiendi, ut primus triplo plus habeat quám ſecundus, & ſecundus quadruplo quám tertius. Hic ab extremo incipe. Si tertius habeat 1, ſecundus habebit 4, & primus 12, quibus additis, conclude,

	12	141 $\frac{3}{17}$
17 dant 200 : ergo	4	47 $\frac{1}{17}$
	1	11 $\frac{13}{17}$

Hæreditas 3000 legata quinque fratribus ea cõditione, ut obveniat primo $\frac{1}{2}$, ſecundo $\frac{1}{3}$, tertio $\frac{1}{4}$, quarto $\frac{1}{5}$, quinto $\frac{1}{6}$. Id, uti proponitur, fieri nõ poteſt, quia datæ partes ſuperant totum. recurratur igitur ad æquitatis proportionem, & numerus inveniatur, qui minimus habeat datas partes. Hic enim eſt uſus talis numeri, quoties datæ partes totum ſuperant, & inventi partes inveniantur datis illis cognomines, quæ æqualiter quinque fratribus aſſem partiantur. Minimus veró diviſus á datis partibus eſt 60, cujus partes, partibus illis datis cognomines ſunt. 30, 20 15, 12, 10. Has igitur partes adde, & dic per auream regulam,

	30	1034	$\frac{42}{87}$
	20	687	$\frac{57}{87}$
87 dant 3000 : ergo	15	517	$\frac{21}{87}$
	12	413	$\frac{69}{87}$
	10	344	$\frac{72}{87}$

Tres partiuntur 100 ea conditione, ut primus capiat $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, ſecundus $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, tertius $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$. Id item, ſicuti proponitur, fieri non poteſt, quia partes totum ſuperant. Æquitas ergo proportionis adhibeatur. Itaque ſumes primó minimum diviſum 60, cujus diviſores datis partibus cognomines ſunt 20 & 15 pro primo, 15 & 12 pro ſecundo, 12 & 10 pro tertio, quibus primúm ſeparatim additis, ſunt 35, 27, 22. Deinde ſimul ſunt 84: conclude igitur,

	35	41	$\frac{2}{3}$
84 dant 100 : ergo	27	32	$\frac{1}{7}$
	22	26	$\frac{4}{21}$

Quatuor ſic partiuntur 600 aureos, ut primus habeat $\frac{2}{3}$ & 9 aureos, ſecundus $\frac{3}{5}$ & 8, tertius $\frac{5}{6}$ & 7, quartus $\frac{7}{8}$ & 6. Hic item partes majores ſunt toto. Ad illud igitur proportionalis æquitatis judicium refugiamus, & quatuor in hoc exemplo ſuperiorum diſſimilia diſtinguamus, primó nominum propoſitorum, præteritis numeris

meris & integris: aſſumendus minimus diviſus eſt, hic erit 120, ſecundó partes cognomines inventæ per ſuos numeros multiplicandæ. Itaque $\frac{2}{3}$ erunt 80 $\frac{1}{5}$, 72 $\frac{5}{6}$, 100 $\frac{7}{8}$. 105. tertió é 600 ſumma dividenda, tollantur integri numeri 9, 8, 7, 6, id eſt 30, manebunt 570 pro additis conſequentibus: quartó denique inventis quartis proportionalibus, addes primo 9, ſecundo 8, tertio 7, quarto 6. Totum exemplum ſic erit.

	80	136 $\frac{261}{357}$
357 dant 570: ergo	72	122 $\frac{342}{357}$ vel $\frac{114}{119}$
	100	166 $\frac{237}{357}$
	105	173 $\frac{231}{357}$ vel $\frac{11}{17}$

Cap. 15. de alligatione.

Alligationis regula quæ dicitur, hac proportionis additione multúm utitur: tametſi ipſa per ſe nulla eſt proportio.

74. *Alligatio eſt æquatio medii cum extremis inæqualibus per alternam ab eo differentiam.*

Ut ſi é duobus vini generibus, quorum primum valeat 6, ſecundum 12, miſcēdum ſit quod valeat 10, alternæ differentiæ extremorum 6 & 12 à medio 100 erūt 2 & 4 quæ ſignificabūt, ſi 2 ſumantur primi generis, 4 assumenda secundi. Itaque si sextarii 6 miscendi sint, alligatio perfecta erit, ut hic vides,

	6	2
10		
	12	4

Hujus æquationis caussa est é communibus regulis multiplicationis. Nam si multiplices 10 per 6, compones 60, item si multiplices 10 per 2 & 4 segmenta alterius multiplicati, compones duos compositos 20 & 40 æquales primo composito, tum si multiplices eadem segmenta 2 & 4 per totum 10 alterno segmento, nunc auctum, nunc minutum, id est per 12 & 6, compones duos cōpositos 48 & 12, primo composito æquales, ut hic vides,

10	10	10	6	12
6	2	4	2	4
60	20	40	12	48

Hinc igitur patet alligationis regula, neque medius alligationis terminus est proportionis, sed medius inæqualium extremorum: Estque minor majore extremo, major minore. Sed alligationis quæstio rara est sine proportionis additione, ut in exemplo. Si unus sextarius temperādus esset é duobus illis generibus, tum alligatio facta esset, diceretur nō peti 6, sed 1. Itaque proportionis additio id explicaret hoc modo: 6 redeunt

deunt ad 1 : ergo 2 redibunt ad $\frac{2}{6}$, 4 ad $\frac{4}{6}$, totaque quæstio sic erit,

	6	2			2	$\frac{2}{6}$ vel $\frac{1}{3}$
10			6	1		
	12	4			4	$\frac{4}{6}$ vel $\frac{2}{3}$.

Tale est Archimedeum problema illud apud Victruvium lib. 9.cap.3.de aurea Hieronis regis corona ad deprehendendum aurificis furtum. Duas,inquit Victruvius,massas ejusdem ponderis cum aurea corona Archimedes fecit,alteram auream,argẽteam alteram,quibus vicissim in vas aqua plenum demissis, é differentia effusæ aquæ ad auream massam & argenteam,item ad ipsam coronam , deprehendit argenti in aurea corona mistionem . Esto igitur inæqualis effusio aquæ ex aurea massa 20,ex argentea 36,ex ipsa regis corona 24. Sumptis differẽtiis, vides auri triplum, argenti subtriplum in corona permistum esse: Et si corona 16 pondo esset,essent auri 12,argenti 4, & hæc alligatio est. At si alterius põderis ea fuerit,similem rationẽ proportionis additione concludes, ut si fuerit 100 pondo, quæstionis explicatio tota sic erit,

	20	12			12	75
24			16	100		
	36	4			4	25

Talis est in permiscendis metallis quotidiana ratio , ut si aurifex habeat 100 pondo argenti,quorum unum valeat 17. Item alteram habeat massam,cujus pōdo valeat 24, quantū argenti é secunda massa addet primæ,ut pondo valeat 22, & quantum denique omnino futurum est? Alligatio alternarum differentiarum sic erit,

	17	2
22		
	24	5

Unde concludes 2 pondo primi argenti, 5 pondo secundi requirunt: Ergo 100 requirunt 250: quibus adde 100,é prima massa habebis 350 pondo misti argenti.

Alligationis caussa eadem fuerit, ubi termini non tantúm tres,sed quotlibet proponentur: Bini siquidem extremi ad unum medium perpetuó conferendi: ut vini genera quatuor sunto, primique amphora valeat 7 aureos,secundi 9, tertii 10,quarti 12, & miscendæ sint amphoræ 300, quæ singnlæ valeant 11 aureos, dispositis terminis,differentiisque alterné alligatis, tota quæstio sic erit,

	7		1		1	30
	9		1		1	30
	10		1		1	30
11				10	300	
	12	4	21		7	210

Nihil veró interest,utrum majores termini sint plures:ut 400 pondo ficuum,amygdalarum,zingiberis,piperis, moschocaryorum, croci,emuntur 200 libellis: Libra autem ficuū emitur 6 solidis,

lidis, amygdalarum 7, zingiberis 9, piperis 11, moschocaryorum 12, croci 16. Quot igitur sunt pondo singulorum generum? Hic preciorum permistio & alligatio est. Sume itaque precium unius libræ pro medio quantitatis, sic,

400 pondo emuntur 200 libellis:
Ergo 1 emitur $\frac{200}{400}$ vel $\frac{1}{2}$ libellæ,
id est 80 solidis.

Tum singulorum generum pretia ipsi subscribe in eadem moneta, quæstio tota sic erit,

	6 ficu.	1	2	6		9	70	$\frac{10}{17}$
	7 amyg.	1	2	6		9	70	$\frac{10}{17}$
	9 zingib.	1	2	6		9	70	$\frac{10}{17}$
10					51. 400			
	11 pip.	1	3	4		8	62	$\frac{38}{51}$
	12 mosch.	1	3	4		8	62	$\frac{38}{51}$
	16 croc.	1	3	4		8	62	$\frac{38}{51}$

Adhuc additio proportionis fuit, cui subductio proportionis est in elementis opposita.

75. *Subductio proportionis, est assumptio reliqui termini.*

Estque duplex.

76. *Subductio proportionis prima, est assumptio reliqui termini ad subductam.*

Ut 6 ad 4, sicuti 9 ad 6: ergo 2 ad 4, ut 3 ad 6. itaq;

77. *Si fuerit ut totus ad ſubductum, ſic totus ad ſubductum, reliquus erit ad ſubductum, ut reliquus ad ſubductum.*

78. *Subductio proportionis ſecunda, eſt aſſumptio reliqui ad reliquum.*

Ut 5 ad 10, ut 2 ad 4: ergo ut 5 ad 10, ſic 3 ad 6. itaque

79. *Si fuerit ut totus ad totum, ita ſubductus ad ſubductum, reliquus erit ad reliquum, ut totus ad totum,* 19. *p.* 5.

Cap. 16. de duplicatione proportionis.

Jam de duplicatione proportionis dicendum eſt.

80. *Duplicatio proportionis, eſt aſſumptio facti á primo & ſecundo pro primo, & facti á quarto & quinto pro tertio, unde ſextus pro quarto concluditur.*

Ut ſi quæratur, 10 boves 7 diebus arant 35 jugera, 20 boves 24 diebus quot jugera arabunt? termini quæſtionis 5 ita erũt, 10, 7, 35, 20, 24. Factus veró é 10 & 7 erit 70 pro primo termino, factus é 24 & 20, erit 480 pro tertio, unde concludes

cludes pro quarto 240, terminique proportionis duplicis ſic erunt,

10	7	35	20	24
70		35	480	240

Hic veró duplex proportio permiſcetur, prima ſimplex & directa eſt boum & jugerum. 10 boves arant 7 diebus 35 iugera: ergo 20 boves eodem tempore arabunt 70. Hic tempus idem nullum proportionis terminum facit, tanquam diceretur, cúm 10 boves arant 35 jugera, 20 boves arant 70. Secunda proportio ſimplex eſt, 20 boves arant 7 diebus 70 jugera: ergo idem 20 diebus arabunt 24 jugera. Hic tempora diverſa faciunt terminos proportionis, idem 20 boum numerus nullum terminum facit. Cauſſa autem cur illi duo facti pro quatuor ſimplicibus aſſumantur, eſt, quod ratio tertii 35 ad ſextum 240 fit é ratione 10 primi ad 20, quartum & ratione 7 ſecũdi ad 24 quintum, quæ ratio eſt duorum factorum 70, 480: 3 aurei 2 menſibus lucrantur aureos 6, aurei 4 menſibus tribus quot lucrabuntur? Hic ſi facias 6 é 3 & 2: item 12 & 4 & 3, & concludas 6 dant 6, ergo 12 dant 12, nihilo plus facies, quám ſi dixiſſes, 2 dant 6, ergo 4 dant 12, quia multiplicati per eundem 3 fiunt. Itaque factorum & facientium eſt eadem ratio. Quare quoties in tali duplicatione æquales termini ſic occurrent, æqualibus terminis omiſſis, proportio concludenda eſt. Sed ubertas regulæ eſt uberiús explicanda.

Trium mercatorum primus contulit 44 per per 8 menses, secundus 32 per 6 mẽses, tertius 24 per 4 menses, unde lucrati sunt aureos 80, quantum singulis ex hoc lucro cedet? Multiplica sortem quamque cum suo tempore, primi factus est 352, secundi 192, tertii 96, & singulis jam additis, dicito per auream regulam,

	352	44
640 dant 80 : ergo	192	24
	96	12.

Legio habet pedites 6100, equites 726, & peditis stipendiũ est 4 aurei, equitis 9, præda aureorum 2000 his dividenda, quantum singulis dabitur? Multiplica numeros personarum, stipendiorum: primus factus erit 24400, secundus 6534, tum facti addantur, erunt 30934, & dic per auream regulam,

	24400		$1577\frac{17088}{30934}$
30934 dant 2000: ergo		dant	
	6534		$422\frac{13852}{30934}$

Canonici 12, & sacellani 20, partiuntur quotannis aureos 3000, sed ea lege ut canonicus 5 capiat, quoties sacellanus 4, quantum igitur eorum stipendium est annuum? Multiplica numeros personarum & stipendiorum, primus erit 60, secundus 80, qui additi sunt 104. dic igitur.

	60	$1285\frac{5}{7}$
140 dant 3000: ergo		
	80	$1714\frac{2}{3}$.

Inter-

81. *Interdum faciendi termini complures é variis generibus ſortium, temporum, perſonarum, aliarumve rerum, in unumque tandem omnes addendi.*

Quatuor mercatorum biennii ſocietate inita, primus 30 aureos cōtulit, ſed octavo poſt mēſe 10 ſubduxit, iterumq; viceſimo mēſe ineunte 12 cōtulit, ſecūdus initio 24 cōtulit, ac ſexto poſt exacto menſe ſubduxit 8. Denuoq; ſexti decimi menſis initio 14 retulit, tertius initio contulit 20. & ſeptimo poſt mēſe exacto omnes ſubduxit, ſed decimoſeptimo poſt exacto mēſe 16 retulit, quartus ſeptimo mēſe ineunte, 18 aureos contulit, ſed quarto poſt exacto mēſe 9 ſubduxit, iterūq; decimoſeptimo menſe incipiēte 15 addidit, lucrū ex omnibus his ſummis factū eſt 100 aureorū. Singulorū igitur pecunias & tēpora in ſuum numerū rediges: primi 30 aurei & 8 menſes faciunt 240: deinde reliqui 20 aurei & 11 mēſes faciunt 220, poſtea 20 aurei & 12, id eſt 32 & mēſes 5 faciunt 160. Deniq; facti tres additi ſūt 620. Secūdi mercatoris 24 aurei & 6 menſes faciunt 144: Deinde reliqui 16 & 9 menſes faciunt 144, tum additi aurei 14 & 16, id eſt 30 cum 9 mēſibus, faciunt 270. Hi tres facti additi ſunt 558. Tertii 20 aurei & 7 menſes faciunt 140: Deinde 16 aurei & menſes 7 faciunt 112. Hic factus additus priori, conſtituit 252, quarti 18 aurei & 4 menſes faciunt 72, tum 9 aurei & menſes 6, faciunt 54. Denique 9 & 15, id eſt 24 aurei & 8 menſes, faciunt 192. Hi quatuor facti additi, ſunt 318. Colligamus tandem hos quatuor factos, & dicamus per aureā regulā.

	620	$35\frac{205}{437}$
	558	$31\frac{463}{437}$
1748 dant 100: ergo		
	252	$14\frac{182}{437}$
	318	$18\frac{84}{437}$

Cap. 17. de duplicatione proportionis inverſæ.

Proportionis duplicatio aliquando invertitur.

82. *Duplicatio proportionis inverſæ, eſt aſſumptio facti á primo & quinto pro primo, & facti á tertio & quarto, pro tertio, unde ſextus pro quarto inverſé concluditur.*

Ut hic: 2 meſſores 4 diebus demetunt 6 jugera, 8 meſſores 12 jugera, quot diebus demetent? invenies 2, quæſtioque tota ſic erit,

2,	4	6,	8,	12
2,	24	4	48	

Hic etiam ut in directa, proportio duplex permiſcetur, quam potes ita ſeparatim concludere, primó inverſé: duo demetunt 6 jugera 4 diebus, ergo 8 demetent jugera eadem 1 die. Hæc proportio eſt inverſa hoc modo, 1, 2, 4, 8.

Secun-

Secunda directa est, sic: 8 messores demetunt 6 jugera 1 die: ergo iidem demetent 12 jugera 2. Caussa est hic superioris similis, quia ratio 4 secundi termini ad 2 quartum, est facta é rationibus 8 quarti ad 2 primum, 6 tertii termini ad 12 quintum, quæ duæ rationes faciunt terminos primum 24, & tertium 48.

Cap. 18. de proportione continua.

Proportio disjuncta generatim descripta est, jam tempus est de continua dicendi.

83. *Proportio continua est, quãdo quæ ratio est primi termini ad secundum, eadem est secundi ad tertium.*

Ut in 2, 4, 8. Continuæ proportionis proprietas ex aurea regula sic est,

84. *Si tres numeri fuerint cõtinué proportionales, factus ab extremis erit æqualis facto á medio: & si factus ab extremis fuerit æqualis facto á medio, tres numeri erunt cõtinué proportionales. 20.p.7.*

Ut in 2, 4, 8 facto ab extremis 16 est æqualis 16 facto á medio. Hinc sequitur inventio tertii proportionalis,

85. *Si datis duobus numeris primus di-*

viſerit factum á ſecundo, quotus erit tertius proportionalis. 18.*p*.9.

Ut in datis 2 & 4, multiplica 4 per ſeſe, facies 16, quem 2 primus dividit in 8. Itaq; 8 eſt tertius proportionalis: ut in 2, 4, 8. Itaque

86. *Si duo numeri habuerint tertium proportionalem, erunt facti inter ſe.* 16.*p*.9

Quatuor amicorum primus accipiat aureos tres, ſecundus 6, tertius tantó plures ſecundo, quantó plures ſecundus habet primo, & quartus item tantó plures capiat tertio, quãtó plures tertius capit ſecundo, quot habebit igitur tertius? quot quartus? Inveni duobus datis tertium continué proportionalem, & iterum duobus ultimis tertium continué proportionalem, quæſtio ſoluta eſt, erunt enim termini continui 3, 6, 12, 24.

87. *Si continuorum primus diviſerit ſecundum & antecedens quiſque dividet conſequẽtem alium: & ſi antecedens quiſque diviſerit ullum conſequẽtem, primus etiam dividet ſecũdum.* 6. & 7.*p*.8.

Ut in 1, 2, 4, 8, 32. 64. Itaque

88. *Si ab unitate numeri fuerint continui, minor dividet majorem per aliquẽ datorum continuorum.* 11.*p*.9.

Ut

Ut in proximo exemplo.

89. *Si fuerint numeri continuè proportionales, ratio primi ad secundum duplicabitur in tertio, triplicabitur in quarto: & sic deinceps ratio primi ad extremum fiet ex omnibus intermediis rationibus.* 10.d.5.

Ut in 3, 9, 27, 81: ratio 27 ad 3 est duplicata ratio 9 ad 3: ut hic vides in contractis terminis,

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & \left(\frac{9}{1}\right. \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Sic ratio 81 ad 3, est ratio triplicata 9 ad 3, ut hic constat in contractis terminis

$$\begin{array}{cccc} 3 & 3 & 3 & \left(\frac{27}{1}\right. \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Denique ratio extremorum fit ex omnibus rationibus intermediis: imò verò

90. *Si fuerint quotlibet rationes terminis quomodocunque continuæ, ratio extremorum fiet ex omnibus intermediis rationibus.*

Ut in 1, 2, 3, 4, 5: ratio 5 ad 1 fit è rationibus.

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & \left(\frac{120}{24}\right. & \left(\frac{5}{1}\right. \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & \end{array}$$

E continuationis autem geometricæ natura inventa est hæc regula.

91. *Libræ terminis duplæ & triplæ continuationis comprehensæ, totidem cognominibus ponderibus appenduntur.*

Sic libræ uſque ad 7 appenduntur tribus põderibus, quorum primum unius libræ, ſecundum binarium, id eſt duarum librarum, tertium quaternarium, quia progreſſionis 1, 2, 4 termini tãtum comprehendunt: ſic libræ uſque ad 15 appẽduntur 4 ponderibus hac progreſſione ſignificatis 1, 2, 4, 8: Sic libræ 31 ponderibus hujus continuationis 1, 2, 4, 8, 16: Sic in tripla ratione, libræ uſque ad 40, appenduntur ponderibus hac progreſſione ſignificatis, 1, 3, 9, 27. Sic libræ uſque ad 121 appenduntur his ponderibus, 1, 3, 9, 27, 81, & ſic deinceps libræ terminis triplæ progreſſionis comprehẽſæ, totidem cognominibus ponderibus appendentur.

Julianus juriſcõſultus de liberis & poſthumis hæredibus inſtituendis generis hujus quæſtionẽ proponit Digeſt. lib. 28. Si ita ſcriptum ſit: Si mihi filius natus fuerit, ex beſſo hæres eſto, ex reliqua parte uxor mea hæres eſto. Si veró filia mihi nata fuerit, ex triẽte hæres eſto, ex reliqua parte uxor mea hæres eſto: & ſi filius & filia nati eſſent, dicendum eſt aſſem diſtribuendum eſſe in 7 partes, ut ex his filius 4, uxor duas filias unam partem habeat. Ita enim ſecundum voluntatem teſtãtis filius altero tanto amplius habebit quám uxor,

uxor, item uxor altero, tantó amplius habebit quám filia. Licet enim ſubtili juris regulæ conveniat ruptum fieri teſtamentum: Attamen cúm & utroque nato teſtator voluerit uxorem aliquid habere, ideo ad eiuſmodi ſententiam humanitate ſuggerente decurſum eſt, quod etiam inventio Celſo apertiſſimé placuit. Hæc juriſconſultus: unde intelligimus ex volũtate teſtatoris tres numeros continué proportionales in dupla ratione inveniendos eſſe. Sumes itaque minimos 4, 2, 1, ac ſi hæreditas fuerit 70 coronatorum, ex additis illis terminis quæſtio hæriſcundæ familiæ ita ſolvetur.

	4		40
7 dant 70: ergo	2	dant	20
	1		10

Quód ſi uxor tres filios & duas filias pepererit, tres quaternarii pro tribus filiis, & duo binarii pro duabus filiabus aſſumendi. Adde igitur omnes & conclude,

	4		$17\frac{1}{2}$
	4		$17\frac{1}{2}$
	4		$17\frac{1}{2}$
16 dant 72: ergo		dant	
	2		$9\frac{3}{8}$
	1		$4\frac{3}{8}$
	1		$4\frac{3}{8}$

92. *Si duo numeri multiplicentur uterque per utrunque, fient tres continué proportionales datis, tum si facti omnes multiplicentur per datum ducem, rursumque ultimus per datum comitem, quatuor fient continué proportionales datis, & sic deinceps invenientur quotlibet continui in data ratione.* é 2.p.8.

Ut hic vides

	2		4	
	4	8	16	
8	16	32	64	
16,	32,	64,	128,	256.

93. *Si duo numeri habuerint continué medios, duo proportionales datis habebũt totidem per datam rationem.* 8.p.8.

Ut in exemplo

8	12	18	27
32	48	72	108

inter 8 & 27 sunt duo medii 12 & 18, inter 32 & 108 rationis eiusdem nempe $3\frac{3}{8}$ sunt etiam duo 48 & 72, qui medii inveniũtur per datam rationem 8 ad 12, sic dices 32 ad 48.

94. *Si duo numeri & unitas habuerint totidem continué medios, dati inter*

se

ſe etiam totidem habebunt.10.p.8.

Ut hic,

1   1
2 4   2 3
4 8 16   4 6 9
8, 16 32 64.   8 12 18 27.

Deducitur é 2.p.8: ſed generaliter accepta.

95. *Si continué proportionalium quilibet ſeipſum multiplicaverit, facti erunt continué proportionales: & ſi dati factos multiplicaverint, facti rurſus erunt continué proportionales, idq; ſemper circa extremos accidet.13.p.8.*

Ut hic,

2 4 8
4 16 64
8 64 512

Caput 19. de inventione optati termini.

96. *Si arithmeticé ab unitate cõtinui, geometricé á numero cõtinuis reſpondeãt, arithmetici geometricorũ indices erunt, et factus á duobus geometricis, tãtus erit ſuæ progreßionis terminus, quantus eſt ſimul-*

uterque arithmeticorum multiplicatis respondentium.

Ut in hac progreſſione dupla,

1	2	3	4	5	6
2	4	8	16	32	64

Arithmetici enim 1, 2, 3, &c indicant 2, 4, 8, eſſe progreſſionis primum, ſecundum, tertium terminum. Itaq; ſi quæras terminum quempiã, ut ſeptimum, adde indices eum conſtituentium numerum, ut 3 & 4, & multiplica geometricos iis reſpondẽtes 8 & 16, facies 128 ſeptimũ terminũ progreſſionis. Sic erit in hac progreſſione tripla,

1	2	3	4	5
3	9	27	81	243

Si quæras nonum, multiplica 243 per 81 reſpondentes arithmeticis indicibus 4 & 5, conſtituentibus 9, facies 9,683 nonum terminũ. Hæc termini optati eſt inventio.

Caput 20 de continué minimis,

Proportio continua nõ ſolũ recipit communem ad minimos contractionem, ſed de iis propriam inſtitutionem habet.

97. *Si duo minimi datæ rationis numeri multiplicentur uterque per utrunque, tres fient minimi continué proportionales datis, tum ſi facti omnes multiplicentur*

per

per datum ducem, rursumque ultimus per datum comitem, quatuor fient minimi cõtinué proportionales datis, & sic deinceps invenientur quotlibet minimi continui in data ratione. 2.p.8.

Ut hic vides,

			2		3			
		4		6		9		
	8		12		18		27	
16		24		36		54		81.

98. *Si duo inter se primi habuerint cõtinué medios, uterque & unitas habebũt totidem. 9.p.8.*

Ut patet in proximo exemplo.

99. *Si fuerint quotlibet continué proportionales extremorum inter se primorũ, erunt minimi proportionalium: & si fuerint minimi proportionalium, erunt extremorum inter se priomrum. 1. & .3.p.8.*

Ut in 8,12,18,27. Nam cúm sint extremi inter se primi, omnes uná & medii & extremi, primi inter se erunt, itaque minimi.

100. *Si continuatio fuerit extremorum inter se primorum, erit maxima. 17.p.9.*

Ut in 8, 12, 18, 27. Atque hæc de proportione ſimplici.

Cap.21.de æquatione.

101. *Proportio conjuncta eſt, quæ conjungitur é proportione diſjuncta & continua:*

eaque triplex in elemẽtis inſignis eſt æquatio, exuperati ultimi ad præcedentes. Inventio continué minimorum in datis rationibus.

102. *Æquatio eſt, quando poſitis in uno ordine quotlibet numeris, aliiſque totidem in altero, binis ſumptis in eadem ratione, fuerit ut primi ordinis primus ad ultimũ, ſic ſecundi ordinis primus ad ultimum.*

Itaq; in continuanda æquatione, termini proportionis utrinque extremi duntaxat aſſumendi ſunt, mediis intermiſſis: eſtque directa vel inverſa.

103. *Æquatio directa eſt, quando fuerit ut primi ordinis primus ad ſecundum, ſic ſecundi primus ad ſecundum: itemque ut primi ordinis ſecundus ad tertium, ſic ſecundi ſecundus ad tertium.*

Ut hic vides in tribus exemplis quæ continuari in unum possunt.

9,	6,	3,	9,	6,	9,	3,	6,	9,
12	8	4	12	8	12	4	8	12.

quo genere proportionis plurimæ in elementis demonstrationes á Theone conclusæ sunt.

104. *Æquatio inversa est, quãdo fuerit ut primi ordinis primus ad secundum, sic secundi secundus ad tertium: utque primi secundus ad tertium, sic secũdi primus ad secundum.*

Ut vides in tribus exemplis,

9,	8,	6,	9,	8,	9,	32,	16,	8,
24	18,	16,	16,	18,	16,	8,	4,	3,

Hic enim ut 9 ad 8, sic 18 ad 16: item ut 8 ad 6, sic 24 ad 18, & similiter inverso ordine in reliquis exemplis. Difficile autem sit in numeris integris terminos proportionis inversé æquatos cõtinuare: continuari tamen possunt ordine non solúm inverso, sed in contrarias partes tendente, ut hic vides,

6, 3, 2, 1, 3, 4, 3, 1, 2,
12, 24, 6, 8, 24, 12, 8, 4.

Hic enim æquatio est, cúm sit extremorũ eadem ratio in utroque ordine, tum inversa, ut res ipsa ostendit. Hoc proportionis genus minus usitatum eſt, eo tamen Archimedes utitur quarto theoremate ſecundi de ſphæra.

Cap. 22. de exuperantia ultimi ad præcedentes.

105 *Si fuerint quotlibet numeri continué proportionales, ſubducantur autem á ſecundo & ultimo æqualis primo, erit ut ſecundi exuperantia ad primum, ſic ultimi exuperantia ad ſeipſum præcedentes omnes. 13.p.9.*

Ut hic	2	4	8
		2	6

Tolle 2 á 4, & ab 8 item tolle 2, ut 2 exuperantia ſecundi ad primum 2, ſic 6 exuperantia ultimi ad 2 & 4 antecedentes, par enim utrobique ratio eſt, ſic in

eſt, ſic in	2	8	32
		6	30

Ab 8 tolle 2, & totidem á 32, manent 6 & 30, atque ut 6 ad 2, ſic 30 ad 8 & 2, id eſt ad 10. Fac periculum in majori ſerie, ut in

2,	4,	8,	16	32,	64
	2				62

A 4 ſecũdo tolle 2: item á 64 ultimo tolle 2, jam erit 62, ſic ad omnes antecedentes, ut 2 exuperãtia ſecundi ad 2 primum, utrobique enim æqualitas. Ex hac regula invẽitur ſumma progreſſio-

tia

pis geometricæ,quæ est cõpendiaria additio numerorum continua geometricæ proportionis serie continuatorũ. Nam facta subductione primi termini á secũdo & ultimo,habes terminos tres, unde quartus similis inveniendus est æqualis omnibus ultimum præcedẽtibus,ut additus ultimo, summam compleat,sicut vides in

2	8	32
6		30

Nam ut 6 reliquus secundi se habet ad 2 primum, sic 30 reliquus ultimi ad præcedẽtes omnes 10,id est ad quartum proportionalem , ideoque hic quartus proportionalis additus ultimo, summam complet omnium,nempe 42.

Agricola promisit filio pro xeniis primo anni die in triginta continuos dies grana tritici primo unum,secundo duo,tertio quatuor, & sic deinceps duplicãdo,quæritur tricesimo die quot grana futura sint . Quæratur tricesimus terminus,id est ultimus progrossionis hujus, ut antea demõstratum est : primo sextus 64 per sese faciet 4096 pro duodecimo termino , & hic rursus ex sese faciet 16777216 pro vicesimo quarto termino , quem multiplica per 32 quintum terminũ,facies pro vicesimo nono termino 536870 32 qui tricesimus erit,si unitas pro primo numeretur. Tollatur igitur unitas á secundo & ultimo,exuperantia secũdi erit æqualis primo,Itaque inventus ultimus uno dempto erit æqualis omnibus antecedentibus:addatur uterque summa tota erit 1073741863. Id veró brevius fiet, ſi progreſſio uno termino augeatur, & æqualibus ſublatis reliquus ultimus dividatur pro exuperantia ſecundi ſupra primum.

Cap. 23. de inventione minimorum in datis rationibus.

105. *Si datis rationibus quotlibet in minimis terminis proportionales ad ſecũdum & tertium minimi multiplicent obliqué terminos duarum primarum rationum, facti erunt continué minimi in datis rationibus: deinde ſi proportionales ad poſtremó inventum & ducem ſequentis rationis minimi multiplicent obliqué alter inventos, alter ſequentes omnes, facti erunt continué minimi in datis rationibus. 4.p.8.*

Ut hic vides,

5	6	4	3
10	12		9

Nam ſi ſumas minimos ad 6 & 4, habebis 3 & 2, tum ſi multiplices obliqué 6 & 5 per 2, fa-

cies

cies 12 & 10. Item si per 3 multiplices obliquè 4 & 3, facies 12 & 9 continuè minimos in datis rationibus: ut enim 5 ad 6, ita 10 ad 12, & ut 4 ad 3, sic 12 ad 9. Hic autem continuatio terminorũ est in datis rationibus, ut regula præcipit, non autem cõtinuatio rationum, & hæc proportio disjuncta est rationibus, continua tantúm terminis minimis in datis rationibus, esto & aliud exemplum,

2	3	4	5	6	7
8	12		15		
16	24		30		35

In hoc exemplo ptoportionales ad 15 postremó inventum, & 6 ducem sequentis rationis minimi sunt 2 & 5, qui multiplicatione obliqua fecerunt 16, 24, 30, 35. Denique hac regula continuabis quotlibet minimos in datis rationibus minimorum numerorum. Habet veró & hæc continuatio usum valdé singularem, ut 100 aurei tribus dividantur ea conditione, ut quoties primus 5 capit, toties secundus 6 capiat, & quoties secundus capit 7, toties tertius capiat 9: quot aureos singuli capient? Hic duæ sunt rationes in minimis terminis, 5 ad 6, 7 ad 9, in quibus rationibus proportionales minimi continui sunt 35, 42, 54. Hoc modo

5	6	7	9
35	42		54

Adde igitur tres continuos repertos, totus erit 131, & jam dicito

	35		$26\frac{94}{131}$
131 dant 100 ergo	42	dant	$32\frac{8}{131}$
	54		$41\frac{29}{131}$

Partire quatuor amicis 100 aureos, sic, ut quoties primus capit 3, secundus capiat 4, & quoties secundus capit 5, toties tertius capiat 6. Denique quoties tertius capit 7, toties quartus capiat 8: quot aurei singulis cedent? hic sunt tres rationes in minimis terminis dissimiles 3 ad 4, 5 ad 6, 7 ad 8, in quibus continui termini sunt 105, 168, 192. Adde continuos, totus erit 605, & dicito

	105	$17\frac{43}{121}$
	140	$23\frac{17}{121}$
605 dant 100: ergo		dant
	168	$27\frac{95}{121}$
	192	$31\frac{89}{121}$

FINIS.