CORTAZAR

IGONOME

Y

OPOGRAFI

TRATADO

DE

TRIGONOMETRÍA

Y

TOPOGRAFÍA,

POR

D. J. CORTÁZAR.

CATEDRÁTICO QUE FUÉ DE COMPLEMENTO DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL.

DÉCIMASETIMA EDICION

CORREGIDA Y ARREGLADA

POR

D. DE CORTÁZAR,

Ingeniero Jefe del Cuerpo de Minas.

MADRID.

LIBRERÍA DE HERNANDO,

Arenal, 11.

1880.

OBRAS DE DON JUAN CORTÁZAR.

Memoria sobre el cálculo del interés......	4 rs.	
Tratado de Aritmética, *31.ª edicion*........	14	
Tratado de Álgebra elemental, *26.ª edicion*....	14	
Tratado de Geometría elemental, *23.ª edicion*. .	16	
Tratado de Trigonometría, *17.ª edicion*.....	14	En rústica.
Complemento de Álgebra, *6.ª edicion*......	16	
Tratado de Geometría analítica, *4.ª edicion*....	30	
Aritmética práctica para las Escuelas primarias, *7.ª edicion*....................	3	

Habiéndose impreso subrepticiamente en París las obras de D. Juan Cortázar, se hace presente que todos los ejemplares de dicha procedencia están plagados de errores tan perjudiciales para los que se propongan estudiar en ellos, como lo ha sido la falsificacion para los intereses del legítimo propietario, que hace la publicacion solamente en Madrid.

IMPRENTA Y FUNDICION DE MANUEL TELLO,
Isabel la Católica, 23.

Luis de Hoyos Sainz

Hoyos.

NOTA.

Aunque el estudio de la Topografía está colocado en este libro despues del de la Trigonometría, puede hacerse antes omitiendo aquellas pocas materias que dependen de la Trigonometría; y de este modo se tiene un tratado de Agrimensura que puede darse á continuacion de la Geometría elemental.

ESTE libro es de

Luis Hoyos Sainz

Madrid 30/82 Octubre

TRIGONOMETRÍA.

LIBRO PRIMERO.

TEORÍA DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

CAPÍTULO I.

Definiciones de las líneas trigonométricas.

1. Fig. 1 *sin las rectas interiores.* Sea $ABCDA$ una circunferencia cuyo radio valga 1. Llamaremos *arco* á un camino cualquiera contado sobre esta circunferencia desde un punto A en el sentido $ABCD$ ó en su opuesto $ADCB$, pero precedido dicho camino del signo —, si se cuenta en uno de los dos sentidos.

Convendremos en que el sentido negativo sea el $ADCB$, y por lo tanto serán arcos los caminos AE, AEF, $ABCDAE$, etc., y tambien serán arcos los caminos negativos $-AH$, $-AHF$, y $-ADCBAH$, etc.

Llamaremos *origen* de un arco el punto desde el cual se cuenta este, y *extremo* al punto en que termina.

2. *Si á un arco cualquiera se añaden una ó más circunferencias positivas ó negativas, el extremo del arco no variará.*

Esta proposicion es evidente cuando á un arco positivo se añaden una ó más circunferencias positivas, y cuando á un arco negativo se añaden una ó más circunferencias negativas: sólo tenemos, pues, que demostrarla en el caso en que á un arco negativo se añadan una ó más circunferencias positivas, y en aquel en que á un arco positivo se añadan una ó más circunferencias negativas.

Fig. 1 *sin las rectas interiores.* Sea $-ADG$, por ejemplo, el arco negativo cuyo *módulo* ó valor absoluto sea en primer lugar menor que una circunferencia, y llamemos k al número positivo de circunferencias que se le añadan. Añadámosle primeramente una circunferencia positiva $ABCA$, y la suma será $ABCA - ADG = ABG$, cuyo extremo G es el mismo que el del arco propuesto $-ADG$. Añadiendo ahora al arco positivo ABG las otras $k-1$ circunferencias positivas, es claro que el extremo G permanecerá el mismo.

Supongamos en segundo lugar que el módulo del arco negativo sea mayor que una circunferencia, y que sea G, por ejemplo, su extremo, y n el número de circunferencias negativas que contiene: dicho arco será $-n \times 2\pi - ADG$ (*). Añadámosle un número k de circunferencias posivas, y la suma será

$$-n \times 2\pi - ADG + k \times 2\pi = (k-n)\,2\pi - ADG.$$

Si $k > n$, $(k-n)\,2\pi$ será un número positivo de circunferencias, y por lo tanto, segun se acaba de demostrar, el extremo de dicho arco $(k-n)\,2\pi - ADG$ será el punto G; y si $k < n$, $(k-n)\,2\pi$ será un número negativo de circunferencias, y es evidente que en este caso el extremo de la suma $(k-n)\,2\pi - ADG$ será el mismo que el del arco negativo $-ADG$.

De un modo semejante se demuestra la proposicion, cuando á un arco positivo se añaden una ó más circunferencias negativas.

Nota. Segun esta proposicion, si a es un arco positivo ó negativo, cuyo módulo sea menor que 360° ó 2π, los infinitos arcos que tengan el mismo orígen y el mismo extremo que el arco a estarán comprendidos en la expresion general $2k\pi + a$, siendo k un número entero cualquiera, positivo, negativo ó cero.

3. Se llama *seno* de un arco positivo ó negativo la perpendicular bajada desde el extremo del arco al diámetro que pasa por el orígen, pero precedida del signo — si el extremo del arco está en la primera semi-circunferencia negativa (**).

Fig. 1. Segun esta definicion, los senos de los arcos positivos ó negativos, cuyo orígen sea el punto A, y cuyos extremos sean los puntos E, F, G, H, serán respectivamente las perpendiculares EI, FK, $-GL$, $-HM$.

Se llama *tangente* de un arco positivo ó negativo la parte de la tangente á la circunferencia en el orígen comprendida entre

---

(*) Siendo $2\pi r$ la longitud de una circunferencia cuyo radio es r, será 2π la de una circunferencia cuyo radio es 1, como ahora lo suponemos; luego la semi-circunferencia valdrá π, el cuadrante $\frac{\pi}{2}$, el arco de 45° $\frac{\pi}{4}$, etc.

(**) No se olvide la condicion de que el radio vale 1.

este punto y la prolongacion del radio que pasa por el extremo del arco; precedida dicha parte del signo — si tiene el mismo sentido que los senos negativos.

Fig. 2. Por lo tanto las tangentes de los arcos positivos ó negativos cuyos extremos sean E, F, G, H serán respectivamente AI, $-AK$, AL, $-AM'$.

4. Se llama *complemento* de un arco cualquiera positivo ó negativo la diferencia entre el minuendo $90°$ ó $\frac{\pi}{2}$ y dicho arco.

Fig. 1. Se puede tomar por orígen de los complementos de los arcos que principian en A este mismo punto; pero es más cómodo el tomar por orígen de dichos complementos el extremo B del primer cuadrante positivo AB. Conviniendo en esto, llamaremos *arcos* á los caminos contados desde el punto B, pero precedidos del signo — si se toman en el sentido BCD.

Segun esto, y atendiendo á la definicion del seno y tangente de un arco, los senos de los arcos positivos ó negativos, cuyos módulos tengan un valor cualquiera, cuyo orígen sea el punto B, y cuyos extremos sean los puntos E, F, G, H, serán respectivamente EN, $-FP$, $-GQ$, HR; y las tangentes (*Fig.* 2) de los mismos arcos serán BM, $-BQ$, BP, $-BN$.

5. Supuesto el convenio sobre el orígen de los arcos y de sus complementos, y sobre los signos que á estos arcos acompañan, *dos arcos, complemento uno de otro, tienen el mismo extremo.*

Fig. 1. Sea, por ejemplo, E el extremo del arco cuyo orígen es A: este arco, cualquiera que sea, estará incluido en la expresion $2k\pi + AE$, segun lo hemos visto en (2, *Nota*), y su complemento será $AB - 2k\pi - AE$: el extremo de este complemento será el mismo que el del arco $AB - AE = BE$ (2), el cual extremo es el punto E, el mismo que el del arco propuesto.

Si el extremo del arco propuesto es el punto F, este arco estará incluido en la expresion $2k\pi + ABF$, y su complemento $BA - 2k\pi - ABF$ tendrá el mismo extremo que el arco $AB - ABF = -BF$, es decir, que el extremo será F, el mismo que el del arco propuesto.

Del mismo modo se ve la verdad de la proposicion, si el extremo del arco es un punto tal como el G ó el H.

6. Se llama *coseno* y *contangente* de un arco el seno y tangente de su complemento.

Fig. 1. Así, los cosenos de los arcos cuyo orígen es el punto A y cuyos extremos son los puntos E, F, G, H, ó sean los senos de los complementos de estos arcos, serán EN, $-FP$, $-GQ$, HR.

Obsérvese que el coseno de un arco cualquiera positivo ó negativo es igual á la parte del radio comprendida entre el pié del seno y el centro, precedida del signo — si el coseno es negativo.

Fig. 2. Las cotangentes de los arcos cuyo orígen es el punto A y cuyos extremos son los puntos E, F, G, H, ó sean las tangentes de los complementos de estos arcos, serán BM, — BQ, BP, — BN.

7. Las cuatro líneas seno, tangente, coseno y cotangente que acabamos de definir (ó más bien sus valores que, por ser el radio la unidad abstracta, son números abstractos) se llaman *líneas trigonométricas.*

Si representamos por a el arco, dichas líneas trigonométricas se escribirán abreviadamente sen a, cos a, tg a, cot a.

8. Ademas de las cuatro líneas trigonométricas que acabamos de definir, existen otras cuatro, que son la *secante*, el *seno-verso*, la *cosecante* y el *coseno-verso.*

La *secante* de un arco es el radio prolongado hasta el extremo de la tangente. Así (*Fig.* 2), OI es la secante del arco AE.

El *seno-verso* de un arco es la parte del diámetro, que pasa por el orígen del arco, comprendida entre este orígen y el pié del seno. Así (*Fig.* 1), AI es el seno-verso del arco AE.

La *cosecante* es la secante del complemento del arco, y el *coseno-verso* es el seno-verso del complemento del arco. Por lo tanto OM (*Fig.* 2) es la cosecante del arco AE, y BN (*Fig.* 1) es el coseno-verso del mismo arco AE.

Como actualmente no se hace uso ninguno de estas cuatro líneas trigonométricas, nosotros prescindiremos de ellas.

9. Se llaman *líneas trigonométricas* de un arco, cuyo radio sea mayor ó menor que 1, las líneas trigonométricas del arco de la misma graduacion, cuyo radio sea 1.

Fig. 3. Por ejemplo, las líneas trigonométricas del arco CD, cuyo radio OC sea mayor ó menor que 1, serán las líneas trigonométricas del arco AB de la misma graduacion, y cuyo radio OA valga 1.

Por tanto la perpendicular DF no será el seno del arco CD, y lo será la perpendicular BE; la recta CH no será la tangente del arco CD, y lo será la AG; etc.

10. Se llaman *líneas trigonométricas* de un ángulo las líneas trigonométricas de cualquiera de sus arcos correspondientes.

11. *Hallar las líneas trigonométricas de un arco negativo en funcion de las del mismo arco tomado positivamente.*

Fig. 4. Sea — a el arco negativo, y supongamos en primer lugar que este arco tenga un módulo menor que una circunferencia, y que sea por ejemplo — AE' dicho arco — a: señalemos las líneas trigonométricas de este arco, prolonguemos la recta $E'I$ hasta E, y señalemos tambien las líneas trigonométricas del arco

$AE = AE' = a$; y tendremos, por la igualdad de los triángulos que se ven en la figura,

$$E'I = EI,\ AG' = AG,\ BH' = BH,\ OI = OI,$$

ó bien

$$-E'I = -EI,\ -AG' = -AG,\ -BH' = -BH,\ OI = OI;$$

luego

$$\text{sen}\,(-a) = -\text{sen}\,a,\ \text{tg}\,(-a) = -\text{tg}\,a,\ \cot\,(-a) = -\cot\,a,\ \cos\,(-a) = \cos\,a. \quad [1].$$

Ahora, si el arco negativo, al que llamaremos $-\alpha$, tiene un módulo mayor que una circunferencia, y su extremo es por ejemplo E', será $-\alpha = -2k\pi - a$, y por consiguiente $\alpha = 2k\pi + a$. Las líneas trigonométricas de $-\alpha$ son las mismas que las del arco $-a$, por tener ambos el mismo orígen y el mismo extremo (2); é igualmente las líneas trigonométricas del arco α son las mismas que las del arco a; luego, reemplazando en las igualdades [1] sen $(-a)$ por sen $(-\alpha)$, son a por sen α, tg $(-a)$ por tg $(-\alpha)$, etc., tendremos

$$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha,\quad \text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha,$$
$$\cot\,(-\alpha) = -\cot\,\alpha,\quad \cos\,(-\alpha) = \cos\,\alpha.$$

12. Las definiciones del coseno y la cotangente de un arco nos dan; siendo a un arco cualquiera positivo ó negativo,

$$\begin{aligned}
\text{sen}\,(90^\circ - a) &= \cos a,\\
\text{tg}\,(90^\circ - a) &= \cot a,\\
\cos\,(90^\circ - a) &= \text{sen}\,a,\\
\cot\,(90^\circ - a) &= \text{tg}\,a,\\
\text{sen}\,(90^\circ + a) &= \cos\,(-a) = \cos a,\\
\text{tg}\,(90^\circ + a) &= \cot\,(-a) = -\cot a,\\
\cos\,(90^\circ + a) &= \text{sen}\,(-a) = -\text{sen}\,a,\\
\cot\,(90^\circ + a) &= \text{tg}\,(-a) = -\text{tg}\,a.
\end{aligned}$$

13. Dos arcos positivos ó uno positivo y otro negativo se llaman *suplementarios* entre sí ó *suplemento* uno de otro cuando su suma es igual á 180°.

Los senos de dos arcos suplementarios son iguales, y los cosenos, las tangentes y las cotangentes son respectivamente iguales y de signo contrario.

En efecto, si a es un arco cualquiera positivo ó negativo, su suplemento será $180^\circ - a = 90^\circ + (90^\circ - a)$.

Esto supuesto tenemos

$$\operatorname{sen}\Big(90^\circ+(90^\circ-a)\Big)=\cos\Big(-(90^\circ-a)\Big)=\ \cos(90^\circ-a)=\ \operatorname{sen} a,$$

$$\operatorname{tg}\Big(90^\circ+(90^\circ-a)\Big)=\cot\Big(-(90^\circ-a)\Big)=-\cot(90^\circ-a)=-\operatorname{tg}\ a,$$

$$\cos\Big(90^\circ+(90^\circ-a)\Big)=\operatorname{sen}\Big(-(90^\circ-a)\Big)=-\operatorname{sen}(90^\circ-a)=-\cos\ a,$$

$$\cot\Big(90^\circ+(90^\circ-a)\Big)=\operatorname{tg}\Big(-(90^\circ-a)\Big)=-\operatorname{tg}\ (90^\circ-a)=-\cot\ a.$$

14. Obsérvese que un arco dado no tiene más que un solo seno, una sola tangente, un solo coseno y una sola cotangente; pero una cualquiera de las líneas trigonométricas corresponde á todos los infinitos arcos que tienen el mismo orígen y el mismo extremo, y tambien corresponde como lo harémos ver en el capítulo siguiente, á otra infinidad de arcos tales, que, teniendo el mismo orígen que los anteriores, su extremo comun es diferente del de estos.

Si el arco positivo es menor que media circunferencia, como lo es el arco correspondiente á todo ángulo positivo (*), el seno corresponde á dos arcos suplementarios (13); pero el coseno, la tangente y la cotangente no corresponden más que á un solo arco; el cual sera menor que 90°, si estas líneas trigonométricas son positivas; y será mayor que 90°, si dichas líneas trigonométricas son negativas.

Resulta, pues, que el seno de un ángulo no determina enteramente el ángulo, y que cualquiera de las otras tres líneas trigonométricas lo determinan.

15. Hemos llamado arcos á los caminos contados desde el orígen en cualquiera de los dos sentidos en que pueden contarse, pero anteponiendo el signo — á los contados en uno de los dos sentidos; y hemos antepuesto tambien el signo — á las líneas trigonométricas, cuya posicion es contraria á las de un arco cuyo orígen sea el punto A y cuyo extremo esté entre A y B. Así se consigue el poder aplicar el teorema de Descartes que enunciamos en el número (108) del *Algebra elemental*, y que ahora repetiremos en los términos siguientes.

Si en una cuestion entran una ó varias cantidades, cada una de las cuales puede tomarse en dos sentidos enteramente opuestos, y los

(*) Un ángulo será positivo ó negativo segun que su arco correspondiente sea positivo ó negativo. Por la palabra *ángulo* sin calificacion alguna se entenderá en adelante ángulo positivo.

nombres que tienen dichas cantidades cuando se consideran como positivas se dan tambien á las mismas cantidades precedidas del signo — cuando tienen sentido contrario al positivo, las ecuaciones halladas entre dichas cantidades en el caso más fácil, es decir, en el en que estas sean positivas, se conservarán sin alteracion, áun cuando algunas ó todas las referidas cantidades cambien de sentido.

CAPÍTULO II.

Expresiones generales de los arcos que corresponden á una misma línea trigonométrica.

16. Problema 1.° *Hallar las expresiones generales que comprenden á todos los arcos que tienen un mismo seno.*

Tenemos que considerar dos casos: 1.° que el seno dado sea positivo, 2.° que sea negativo.

Fig. 5. 1.^{er} *caso*. Tomemos ON igual al seno que se dé, y por el punto N dirijamos la EF paralela al diámetro AC: todos los arcos positivos ó negativos, cuyo orígen sea el punto A y cuyos extremos sean los puntos E y F, tendrán evidentemente el mismo seno ON; y los arcos mayores ó menores que estos no tendrán tal seno: luego si llamamos a al arco positivo AE, que es el menor arco positivo correspondiente á dicho seno, tendremos (2, *Nota*) que todos los arcos positivos ó negativos, cuyo extremo sea el punto E, estarán comprendidos en la expresion $2k\pi + a$, y los arcos cuyo extremo sea el punto F estarán comprendidos en la expresion $2k\pi + ABF = 2k\pi + \pi - a$. Luego las dos expresiones $2k\pi + a$, $2k\pi + \pi - a$ comprenden á todos los arcos positivos y negativos que tienen el mismo seno positivo.

2.° *caso*. Supongamos que se dé un seno negativo: tomemos OQ igual á su valor absoluto, y por el punto Q dirijamos la GH paralela al diámetro AC. Todos los arcos cuyo orígen sea el punto A y cuyos extremos sean G y H tendrán el mismo seno $-OQ$, y ningun arco diferente de estos tendrá tal seno. Llamando, como antes, a al menor arco positivo AFG correspondiente á dicho seno, la expresion $2k\pi + a$ comprenderá todos los arcos cuyo extremo comun sea el punto G; y la expresion $2k\pi - AH$ (2, *Nota*) comprenderá todos los arcos cuyo extremo comun sea el punto H: mas $AH = CG = a - \pi$; luego la última expresion será

$$2k\pi - (a - \pi) = 2k\pi + \pi - a.$$

Resultan, pues, para los arcos que tienen un mismo seno negativo, las mismas expresiones que para los arcos que tienen un mismo seno positivo.

Problema 2.° *Hallar la expresion general de todos los arcos que tienen la misma tangente.*

Supongamos en primer lugar que se dé la tangente positiva AK: dirijamos por el punto K y por el centro la recta KG, y tendremos que solamente los arcos cuyo orígen sea A y cuyos extremos sean E ó G tendrán por tangente la recta AK; los primeros, siendo $AE = a$ el menor arco positivo correspondiente á la tangente dada, están comprendidos en la expresion $2k\pi + a$, y los segundos en la $2k\pi + ABG = 2k\pi + \pi + a = (2k + 1)\pi + a$. Como $2k\pi$ es un número par de semi-circunferencias, y $(2k + 1)\pi$ es un número impar de las mismas, se infiere que todo arco correspondiente á la tangente dada consta de un número entero positivo, negativo ó cero de semi-circunferencias sumado con el arco a: luego estará comprendido en la expresion $k\pi + a$, siendo k entero positivo, negativo ó cero.

La misma fórmula se hallará, y del mismo modo, si la tangente dada es negativa.

Problema 3.° *Hallar las expresiones generales de todos los arcos que tienen un mismo coseno.*

Supongamos en primer lugar que se dé un coseno positivo OI: por el punto I dirijamos la recta EH paralela al diámetro BD, y tendremos evidentemente que todos los arcos que principian en A y terminan en E ó H tendrán el mismo coseno OI, y no tendrán tal coseno los arcos diferentes de estos. Llamemos a al menor arco positivo AE correspondiente al coseno dado OI: los arcos, cuyo extremo comun es E, están comprendidos en la expresion $2k\pi + a$ y los arcos cuyo extremo es H están comprendidos en la expresion $2k\pi - AH = 2k\pi - AE = 2k\pi - a$. Luego todos los arcos comprendidos en las dos expresiones $2k\pi \pm a$, siendo k un número entero positivo, negativo ó cero, tienen el mismo coseno.

Las mismas expresiones se hallarán, y del mismo modo, si el coseno dado es negativo.

Problema 4.° *Hallar la expresion general de todos los arcos que tienen una misma tangente.*

Del mismo modo que en el problema segundo, se hallará la expresion $k\pi + a$ para todos los arcos que tienen la misma cotangente.

Nota. Queda resuelta la cuestion propuesta en este capítulo. En el número 34 daremos nosotros una nueva solucion muy elegante de la misma cuestion.

CAPITULO III.

Valores de las líneas trigonométricas de varios arcos particulares.

17. *El seno de un arco positivo y menor que media circunferencia es mitad de la cuerda del arco duplo* (*).

FIG. 4. Sea AE el arco y EI su seno: prolongando la EI hasta que encuentre en E' á la circunferencia, será EI mitad de EE', y el arco AE mitad del arco EAE'; luego el seno EI es mitad de la cuerda EE' del arco duplo.

18. Si el arco $AE < 90°$ va disminuyendo, su seno EI y su tangente AG irán disminuyendo, hasta que, si el arco se reduce á cero, tambien dichas dos líneas trigonométricas serán iguales á cero; el coseno será entonces igual á 1, y la cotangente igual al ∞. Tenemos, pues,

$$\text{sen } 0 = 0, \quad \text{tg } 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \cot 0 = \infty.$$

Si el arco va aumentando desde cero hasta 90°, aumentarán evidentemente el seno y la tangente, y disminuirán el coseno y la cotangente.

Si el arco AE es de 30°, será EE' la cuerda del arco EAE' de 60°, y por tanto (*Geom.*, *teor.* 82) $EE' = 1$; luego

$$\text{sen } 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

El coseno de 30° será el seno de 60°, que es la mitad de la cuerda de 120°, la cual es el lado del triángulo equilátero inscripto, y por tanto (*Geom.*, *teor.* 83) vale $\sqrt{3}$; luego

$$\cos 30° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La tangente AG se hallará por medio de los triángulos semejantes IEO y AGO, los cuales nos dan la proporcion

$$AG : EI :: AO : IO,$$

ó bien
$$\text{tg } 30° : \text{sen } 30° :: 1 : \cos 30°.$$

(*) Si el arco fuese mayor que media circunferencia y menor que una, su seno sería negativo, y por tanto no sería mitad de la cuerda del arco duplo, la cual tiene un valor positivo.

Reemplazando ahora sen 30° y cos 30° por sus valores, y despejando tg 30°, se tendrá

$$\mathrm{tg}\ 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{ó} \quad \mathrm{tg}\ 30° = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Para hallar la cotangente del arco de 30°, nos valdremos de los triángulos semejantes OBH y OEI, los cuales nos dan la proporcion

$$BH : OI :: BO : EI,$$

ó bien

$$\cot 30° : \cos 30° :: 1 : \mathrm{sen}\ 30°;$$

y poniendo en lugar de cos 30° y sen 30° sus valores, y despejando cot 30°, resulta

$$\cot 30° = \mathrm{tg}\ 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Si el arco es de 45°, el seno y el coseno son iguales, como tambien la tangente y la cotangente. El seno del arco de 45° es la mitad de la cuerda del arco de 90° ó del lado del cuadrado inscripto, el cual vale $\sqrt{2}$ (*Geom.*, *teor*. 81); luego

$$\mathrm{sen}\ 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Siendo el ángulo AOG de 45°, tambien el ángulo AGO es de 45°; luego $AG = OA$: luego

$$\mathrm{tg}\ 45° = \cot 45° = 1.$$

Si el arco es de 90°, es evidente que

$$\mathrm{sen}\ 90° = 1, \quad \mathrm{tg}\ 90° = \infty, \quad \cos 90° = 0, \quad \cot 90° = 0.$$

Aumentando el arco desde 90° hasta 180°, disminuyen los valores absolutos del seno y tangente, y aumentan los del coseno y cotangente.

Si el arco es de 120°, 135°, 150°, se hallarán fácilmente sus líneas trigonométricas por las de sus suplementos 60°, 45°, 30°, en virtud del teorema (13).

Así, $\quad \operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3},$$

$$\cot 120^\circ = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Igualmente $\quad \operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1,$$

$$\cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1.$$

Finalmente $\quad \operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2},$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot 150^\circ = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}.$$

Si el arco es de 180°, serán evidentemente

$$\operatorname{sen} 180^\circ = 0, \qquad \operatorname{tg} 180^\circ = 0,$$
$$\cos 180^\circ = -1, \qquad \cot 180^\circ = -\infty.$$

Aumentando el arco desde 180° hasta 270°, aumentan los valores absolutos del seno y tangente, y disminuyen los del coseno y cotangente.

Si el arco es de tres cuadrantes ó 270°, serán

$$\operatorname{sen} 270^\circ = -1, \qquad \operatorname{tg} 270^\circ = \infty,$$
$$\cos 270^\circ = 0, \qquad \cot 270^\circ = 0.$$

Aumentando el arco desde 270° hasta 360°, vuelven á disminuir los valores absolutos del seno y tangente, y á aumentar los del coseno y cotangente.

Si el arco es de cuatro cuadrantes ó una circunferencia entera, es claro que

$$\operatorname{sen} 360^\circ = 0, \qquad \operatorname{tg} 360^\circ = 0,$$
$$\cos 360^\circ = 1, \qquad \cot 360^\circ = -\infty.$$

Nota. Obsérvese que el mayor módulo del seno ó del coseno es 1, y el menor cero; que si se da una cantidad positiva menor que 1, existen dos ángulos, suplemento uno de otro, que tienen por seno á dicha cantidad, y un ángulo agudo que tiene por coseno á la misma; y que si se da una cantidad negativa, cuyo valor absoluto sea menor que 1, existe un ángulo obtuso que tiene por coseno á dicha cantidad. Obsérvese tambien que el mayor valor absoluto de la tangente ó cotangente es ∞, y el menor es cero; y que, dada una cantidad positiva ó negativa cualquiera, existe un ángulo agudo en el primer caso y obtuso en el segundo que tiene por tangente á dicha cantidad, y otro que tiene por cotangente á la misma.

CAPÍTULO IV.

Relaciones entre las líneas trigonométricas de un arco.

19. Fig. 4. Sea $AE = a$ un arco positivo y menor que 90°. En el triángulo rectángulo OIE tenemos

$$EI^2 + OI^2 = OE^2,$$

ó bien

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1. \qquad [1].$$

Los triángulos semejantes AGO é IEO nos dan la proporcion

$$\frac{AG}{AO} = \frac{EI}{OI},$$

ó reemplazando estas líneas por sus valores,

$$\frac{\text{tg}\, a}{1} = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a}, \text{ ó } \text{tg}\, a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a}. \qquad [2].$$

Los triángulos semejantes BOH y EOI nos dan tambien

$$\frac{BH}{OB} = \frac{OI}{EI},$$

ó bien $$\frac{\cot a}{1} = \frac{\cos a}{\text{sen}\, a}, \text{ ó } \cot a = \frac{\cos a}{\text{sen}\, a}. \qquad [3]\ (*).$$

(*) Las relaciones entre la secante y el coseno, y entre la cosecante y el seno se hallan fácilmente por medio de los triángulos semejantes AGO é IEO, OBH é IEO, los cuales nos dan las proporciones

$$\frac{OG}{OE} = \frac{OA}{OI}, \text{ ó bien } \sec a = \frac{1}{\cos a};$$

$$\frac{OH}{OB} = \frac{OE}{EI}, \text{ ó } \quad \text{cosec}\, a = \frac{1}{\text{sen}\, a};$$

es decir que la secante es cantidad recíproca del coseno, y la cosecante lo es del seno.

Las ecuaciones [1], [2] y [3] son las relaciones pedidas, las cuales, aunque halladas en la suposicion de que el arco es positivo y menor que un cuadrante, son generales, segun el teorema de Descartes (15); lo que por otra parte es muy fácil comprobar directamente, cualquiera que sea el arco positivo ó negativo.

20. Las ecuaciones

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad [1],$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \qquad [2],$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \qquad [3],$$

son distintas y compatibles (*Alg.* 93); y como en ellas entran cuatro cantidades sirven para hallar tres de estas cantidades, dada una cualquiera de las cuatro.

Ejemplos. 1.° *Dado el seno de un arco, hallar las otras tres líneas trigonométricas.*

De la ecuacion [1] resulta $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ estrayendo raiz

$$\cos a = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}.$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones [2] y [3], tendremos

poniendo el cos invertido

$$\operatorname{tg} a = \pm\frac{\operatorname{sen} a}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}, \quad \cot a = \pm\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}{\operatorname{sen} a}.$$

De estos dobles signos se tomará el conveniente, segun el valor que tenga el arco a. Por ejemplo, si $a \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 90^\circ \end{smallmatrix}$, sus líneas trigonométricas serán positivas, y por tanto deberemos tomar el signo $+$. Si $a \begin{smallmatrix} > 90^\circ \\ < 180^\circ \end{smallmatrix}$, el seno será positivo y las otras tres líneas trigonométricas serán negativas, luego en las fórmulas anteriores debemos tomar el signo —, etc. (*).

2.° *Dado el coseno de un arco, hallar las otras tres líneas trigonométricas.*

(*) Por medio de estas fórmulas se determina fácilmente, conociendo el sentido de la variacion en magnitud del seno, el sentido de la variacion en magnitud de las otras líneas trigonométricas; y tambien pueden hallarse muy sencillamente, dado el seno de cada uno de los arcos particulares que hemos considerado en el capítulo anterior, los valores de las otras líneas trigonométricas.

De la ecuacion [1] resulta

$$\text{sen } a = \pm\sqrt{1 - \cos^2 a}.$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones [2] y [3], resultan

$$\text{tg } a = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}, \qquad \cot a = \pm\frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}.$$

De estos dobles signos se tomarán los que correspondan á las líneas trigonométricas del arco dado.

3.° *Dada la tangente de un arco, hallar las otras tres líneas trigonométricas.*

Las dos ecuaciones [1] y [2] contienen á las dos incógnitas sen a y cos a. Para deducir de dichas dos ecuaciones los valores de estas dos incógnitas, se pudiera seguir cualquiera de los métodos enseñados en el Algebra; pero preferimos el siguiente.

Elevemos la ecuacion [2] al cuadrado y tendremos

$$\frac{\text{tg}^2 a}{1} = \frac{\text{sen}^2 a}{\cos^2 a}.$$

Esta proporcion tiene dos términos incógnitos, el uno medio y el otro extremo, y como conocemos por la ecuacion [1] la suma de estos dos términos incógnitos, podremos modificar dicha proporcion y deducir de ella estos dos términos (*Aritm.*, 175, *Nota*), como lo vamos á ver:

$$\frac{\text{tg}^2 a}{1+\text{tg}^2 a} = \frac{\text{sen}^2 a}{\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1},$$

y

$$\frac{1+\text{tg}^2 a}{1} = \frac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1}{\cos^2 a};$$

de donde resultan

$$\text{sen}^2 a = \frac{\text{tg}^2 a}{1+\text{tg}^2 a}, \qquad \cos^2 a = \frac{1}{1+\text{tg}^2 a};$$

y por consiguiente

$$\text{sen } a = \frac{\text{tg } a}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}, \qquad \cos^2 a = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}.$$

De estos dobles signos se tomarán los convenientes segun la magnitud del arco.

Así, si el arco es positivo y menor que 90°, como entonces todas sus líneas trigonométricas son positivas, se tomarán los signos positivos.

Si el arco es mayor que 90° y menor que 180°, en cuyo caso el seno es positivo y las otras tres líneas trigonométricas son negativas, se tomarán los signos negativos; pues así se verificará que el seno sea positivo y el coseno negativo.

En todo caso deben corresponderse los signos de estas dos fórmulas, es decir, que si en la primera se toma el signo $+$, en la segunda deberá tomarse el signo $+$; y si en la primera se toma el signo $-$, en la segunda se tomará tambien el signo $-$: pues si los valores de sen a y cos a fuesen de signo contrario, esto es, si fuesen

$$\text{sen}\, a = \frac{\text{tg}\, a}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}} \quad \text{y} \quad \cos a = \frac{1}{-\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}},$$

ó al contrario

$$\text{sen}\, a = \frac{\text{tg}\, a}{-\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}} \quad \text{y} \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}},$$

dividiendo la primera fórmula por la segunda, resultaria

$$\frac{\text{sen}\, a}{\cos a} = -\text{tg}\, a,$$

resultando absurdo; pues hemos visto que siempre es

$$\text{tg}\, a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a}.$$

CAPÍTULO V.

Relaciones entre las líneas trigonométricas de tres arcos a, b y a ± b.

21. *Dados los senos y cosenos de dos arcos, hallar los senos y cosenos de la suma y diferencia de dichos arcos.*

Fig. 6. Sean los dos arcos $AB = a$, $BC = b$ positivos, y cuya suma $AC = a + b$ sea en primer lugar menor que 90°: serán $BD = \text{sen}\, a$, $OD = \cos a$, $CI = \text{sen}\, b$, $OI = \cos b$.

Conociendo sen a, cos a, sen b y cos b, queremos hallar $CE = \text{sen}\,(a + b)$ y $OE = \cos\,(a + b)$.

Para esto, dirijamos la perpendicular IF al radio OA, y la paralela IG al mismo, y tendremos

$$\left.\begin{array}{l} CE = IF + CG \\ OE = OF - GI \end{array}\right\} \quad [1].$$

Hallemos ahora los valores de estas cuatro líneas IF, CG, OF y GI.

Es evidente que los triángulos OIF y OBD son semejantes, y tambien lo son los triángulos CIG y QBD, por tener sus lados perpendiculares: tendremos, pues,

$$\frac{IF}{\text{sen } a} = \frac{\cos b}{1}, \quad \frac{OF}{\cos a} = \frac{\cos b}{1};$$

$$\frac{CG}{\cos a} = \frac{\text{sen } b}{1}, \quad \frac{GI}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } b}{1};$$

de estas cuatro proporciones resultan

$$IF = \text{sen } a \cos b, \qquad OF = \cos a \cos b,$$
$$CG = \cos a \text{ sen } b, \qquad GI = \text{sen } a \text{ sen } b.$$

Sustituyendo ahora estos valores en las ecuaciones [1], tendremos las dos fórmulas siguientes:

$$\text{sen }(a + b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b \quad [p],$$
$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b \quad [q].$$

Hemos supuesto en la figura que los dos arcos a y b son positivos y que la suma de los dos es menor que 90°: segun el teorema de Descartes (15), estas fórmulas deben ser ciertas para cualesquiera valores de dichos arcos, ya positivos, ya negativos. Podemos por lo tanto cambiar el signo del arco b, y las fórmulas serán

$$\text{sen }(a - b) = \text{sen } a \cos (-b) + \cos a \text{ sen } (-b),$$
$$\cos (a - b) = \cos a \cos (-b) - \text{sen } a \text{ sen } (-b),$$

ó bien por ser $\cos (-b) = \cos b$ y $\text{sen }(-b) = -\text{sen } b$,

$$\text{sen }(a - b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b,$$
$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b.$$

Demostremos directamente que las fórmulas [p] y [q] son siempre ciertas.

Primeramente demostraremos que las fórmulas [p] y [q] son ciertas, si los arcos a y b son positivos y menores que 90°, y su suma $a + b$ mayor que 90°.

Sean a' y b' los complementos de a y b: serán

$$\text{sen } a' = \cos a, \ \cos a' = \text{sen } a, \ \text{sen } b' = \cos b, \ \cos b' = \text{sen } b;$$

$a' + b'$ será el suplemento de $a + b$, y por tanto

$$\text{sen }(a' + b') = \text{sen }(a + b), \ \cos (a' + b') = -\cos (a + b).$$

Siendo $a' + b' < 90°$, es

$$\text{sen }(a' + b') = \text{sen } a' \cos b' + \cos a' \text{ sen } b',$$
$$\cos (a' + b') = \cos a' \cos b' - \text{sen } a' \text{ sen } b':$$

sustituyendo aquí en vez de sen $(a' + b')$, $\cos(a' + b')$, sen a', $\cos b'$, $\cos a'$ y sen b' sus valores, resultan

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cos b, \\ \cos(a+b) &= -\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b; \end{aligned}$$

es decir, que las fórmulas [p] y [q] son ciertas para el caso en que siendo a y b positivos y menores que 90°, su suma es mayor que 90°.

Admitamos ahora que las fórmulas [p] y [q] sean ciertas para dos arcos dados a y b, y hagamos ver que dichas fórmulas serán ciertas añadiendo 90° á cualquiera de estos arcos.

Tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90^\circ + a) &= \cos(-a) = \cos a, \\ \cos(90^\circ + a) &= \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a: \end{aligned}$$

y por la misma razon

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90^\circ + a + b) &= \cos(a+b), \\ \cos(90^\circ + a + b) &= -\operatorname{sen}(a+b). \end{aligned}$$

Por suposicion

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b, \\ \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b. \end{aligned}$$

Sustituyendo en estas ecuaciones en lugar de $\cos(a+b)$, sen $(a+b)$, $\cos a$ y sen a sus valores anteriores, tendremos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90^\circ + a + b) &= \operatorname{sen}(90^\circ + a) \cos b + \cos(90^\circ + a) \operatorname{sen} b, \\ \cos(90^\circ + a + b) &= \cos(90^\circ + a) \cos b - \operatorname{sen}(90^\circ + a) \operatorname{sen} b. \end{aligned}$$

Queda, pues, demostrado, que si las fórmulas [p] y [q] son ciertas para dos arcos a y b, tambien serán ciertas añadiendo á uno de dichos arcos 90°.

Ahora bien, las fórmulas [p] y [q] son ciertas para cualesquiera valores positivos de a y de b, menor cada uno que 90°; luego dichas fórmulas serán ciertas para cualquier valor positivo de a menor que 180° y de b menor que 90°; por consiguiente serán ciertas para cualquier valor positivo de a menor que 270° y de b menor que 90°, y así sucesivamente; luego dichas fórmulas serán ciertas para cualquier valor positivo de a y para cualquier valor positivo de b menor que 90°.

Como lo que acabamos de decir del arco a puede aplicarse ahora al arco b, se infiere que las fórmulas [p] y [q] son ciertas para cualesquiera valores positivos de a y de b.

Demostremos, por último, que las fórmulas [p] y [q] son ciertas cuando uno de los arcos a ó los dos a y b tienen valores negativos cualesquiera.

Siendo por lo ménos uno de los dos arcos negativo, añadiendo á los dos un arco kC (compuesto de k circunferencias positivas) mayor que el mayor módulo de dichos arcos, las sumas $kC + a$ y $kC + b$ serán arcos positivos; y por tanto

$$\operatorname{sen}(\overline{kC + a} + \overline{kC + b}) = \operatorname{sen}(kC + a)\cos(kC + b) + \cos(kC + a)\operatorname{sen}(kC + b),$$

$$\cos(\overline{kC + a} + \overline{kC + b}) = \cos(kC + a)\cos(kC + b) - \operatorname{sen}(kC + a)\operatorname{sen}(kC + b).$$

Ahora, los arcos $2kC + a + b$, $kC + a$, $kC + b$ tienen los mismos extremos que los arcos $a + b$, a, b (2), y por tanto

$$\operatorname{sen}(2kC + a + b) = \operatorname{sen}(a + b),$$
$$\cos(2kC + a + b) = \cos(a + b),$$

$$\operatorname{sen}(kC + a) = \operatorname{sen} a,\quad \cos(kC + a) = \cos a,$$
$$\operatorname{sen}(kC + b) = \operatorname{sen} b,\quad \cos(kC + b) = \cos b;$$

luego, sustituyendo estos valores en las fórmulas anteriores, tendremos

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Queda demostrado, sin apoyarse en el teorema de Descartes, que las fórmulas [p] y [q] son ciertas para cualesquiera valores positivos ó negativos de los arcos a y b.

22. *Dadas las tangentes de dos arcos, hallar las tangentes de la suma y diferencia de dichos arcos.*

Tenemos

sustituyendo

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{sen}(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Partiendo el numerador y el denominador de este quebrado por $\cos a \cos b$, tendremos y poniendo el 2º el 1º que no variara

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos b} + \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}};$$

ó

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Del mismo modo se hallará

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b};$$

pero tambien puede deducirse esta fórmula de la anterior; pues

$$\operatorname{tg}(a-b)=\operatorname{tg}\Big(a+(-b)\Big)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg}(-b)}{1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(-b)},$$

ó bien por ser $\operatorname{tg}(-b)=-\operatorname{tg} b$,

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Si en las dos fórmulas que acabamos de hallar suponemos $a=45°$, como $\operatorname{tg} 45°=1$ (18), será

$$\operatorname{tg}(45°+b)=\frac{1+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} b}, \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}(45°-b)=\frac{1-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} b}.$$

Consecuencias de las fórmulas halladas hasta ahora.

23. *Dados el seno, el coseno y la tangente de un arco, hallar el seno, el coseno y la tangente del duplo de dicho arco.*

Si en las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b)&=\operatorname{sen} a \cos b+\cos a \operatorname{sen} b,\\ \cos(a+b)&=\cos a \cos b-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,\\ \operatorname{tg}(a+b)&=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}\end{aligned}\right\} \quad [1]$$

hacemos $b=a$, lo que es posible, por ser a y b arcos cualesquiera, tendremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+a)&=\operatorname{sen} a \cos a+\cos a \operatorname{sen} a,\\ \cos(a+a)&=\cos a \cos a-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} a,\\ \operatorname{tg}(a+a)&=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} a};\end{aligned}$$

ó bien

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2a&=2 \operatorname{sen} a \cos a,\\ \cos 2a&=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a,\\ \operatorname{tg} 2a&=\frac{2 \operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} \ (*).\end{aligned}$$

(*) Si en las fórmulas [1] diéramos á b el valor $2a$ hallaríamos sen $3a$, cos $3a$, tg $3a$ en funcion de sen a, cos a, tg a; haciendo en seguida $b=3a$, hallaríamos sen $4a$, cos $4a$, tg $4a$ en funcion de sen a, cos a y tg a; etc.: pero más adelante resolveremos de un modo fácil este problema general: *hallar el seno y coseno de un múltiplo cualquiera de un arco en funcion del seno y coseno de este arco, y hallar la tangente de un múltiplo de un arco en funcion de la tangente del arco simple.*

Enúnciense los teoremas correspondientes á estas fórmulas, considerando á $2a$ como un arco y á a como su mitad.

Segun estos teoremas, tendremos, siendo a un arco cualquiera,

$$\operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}a,$$
$$\cos a = \cos^2 \tfrac{1}{2}a - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}a,$$
$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}a}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a}.$$

24. *Dado el coseno de un arco, hallar el seno, el coseno y la tangente de su mitad.*

En las ecuaciones

$$\cos a = \cos^2 \tfrac{1}{2}a - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}a,$$
$$1 = \cos^2 \tfrac{1}{2}a + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}a$$

tenemos las dos incógnitas $\cos^2 \frac{1}{2}a$ y $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}a$, de las cuales conocemos la suma 1 y la diferencia $\cos a$; luego (*Alg.* 106)

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{2},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{1 + \cos a}{2};$$

por consiguiente

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}:$$

ó bien

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}},$$

$\pm\sqrt{1+\cos a}$ $$\cos \tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$ $\pm\sqrt{1-\cos a}$

De estos dobles signos se tomará el conveniente segun la magnitud del arco a.

Por ejemplo, si $a \gtrless \begin{smallmatrix} 0 \\ 180^\circ \end{smallmatrix}$, ó $\frac{1}{2}a \gtrless \begin{smallmatrix} 0 \\ 90^\circ \end{smallmatrix}$, las líneas trigonométricas de $\frac{1}{2}a$ tendrán el signo $+$.

Si $a \gtrless \begin{smallmatrix} 180^\circ \\ 360^\circ \end{smallmatrix}$, y por consiguiente $\frac{1}{2}a \gtrless \begin{smallmatrix} 90^\circ \\ 180^\circ \end{smallmatrix}$, $\operatorname{sen} \frac{1}{2}a$ tendrá el signo $+$, pero $\cos \frac{1}{2}a$ y $\operatorname{tg} \frac{1}{2}a$ tendrán el signo $-$; etc.

25. *Conociendo el seno de un arco, hallar el seno y coseno de su mitad.*

Sustituyendo en las fórmulas del problema anterior $\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}$ en vez de $\cos a$, y trasformando en seguida los dobles radicales que resultan en la suma y diferencia de dos radicales simples (*Alg.* 165), se obtendrian las fórmulas que vamos á hallar por un método más sencillo.

Tenemos las fórmulas

$$\text{sen}\, a = 2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a,$$
$$1 = \text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}a + \cos^2\tfrac{1}{2}a,$$

que contienen la cantidad conocida sen a y las dos incógnitas sen $\frac{1}{2}a$ y cos $\frac{1}{2}a$.

Sumemos primeramente estas dos ecuaciones, restando despues la primera de la segunda, y observando que $\text{sen}^2\,\frac{1}{2}a \pm 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a + \cos^2\frac{1}{2}a$ es el cuadrado del binomio $\text{sen}\,\frac{1}{2}a \pm \cos\frac{1}{2}a$, tendremos estas otras dos ecuaciones:

$$1 + \text{sen}\, a = (\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a + \cos\tfrac{1}{2}a)^2,$$
$$1 - \text{sen}\, a = (\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a - \cos\tfrac{1}{2}a)^2,$$

de las cuales resultan

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a + \cos\tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{1+\text{sen}\, a},$$
$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a - \cos\tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{1-\text{sen}\, a}:$$

por consiguiente (*Alg.* 106)

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen}\, a} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen}\, a},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}a = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen}\, a} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen}\, a}.$$

Separando los cuatro valores de sen $\frac{1}{2}a$ y cos $\frac{1}{2}a$, tendremos:

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen}\, a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen}\, a},$$
$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen}\, a} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen}\, a},$$
$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen}\, a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen}\, a},$$
$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen}\, a} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen}\, a};$$
$$\cos\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen}\, a} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen}\, a},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen}\, a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen}\, a},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}a = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen}\, a} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen}\, a},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}a = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen}\, a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen}\, a}.$$

Los valores de sen $\frac{1}{2}a$ y cos $\frac{1}{2}a$, que ocupan el mismo lugar en estos dos grupos de fórmulas, son valores correspondientes, puesto que su producto es, como debe ser, $\frac{\text{sen } a}{2}$, segun lo indica la fórmula sen $a = 2$ sen $\frac{1}{2}a$ cos $\frac{1}{2}a$; y no se corresponden los valores que ocupan distinto lugar en ambos grupos, porque su producto no es $\frac{\text{sen } a}{2}$.

Ahora, como suponemos que a es un arco dado, y por lo tanto tambien $\frac{1}{2}a$, sen $\frac{1}{2}a$ tendrá un solo valor, é igualmente cos $\frac{1}{2}a$.

Veamos cómo en tal caso deben elegirse estos valores.

Supongamos, por ejemplo, que a sea un arco del primer cuadrante positivo, y por tanto $\frac{1}{2}a \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 45^\circ \end{smallmatrix}$; sen a, sen $\frac{1}{2}a$ y cos $\frac{1}{2}a$ son positivos; pero como sen $\frac{1}{2}a <$ cos $\frac{1}{2}a$, deberemos tomar los valores que ocupan el segundo lugar.

Supóngase que el arco $a \begin{smallmatrix} > 90^\circ \\ < 2.90^\circ \end{smallmatrix}$, y por consiguiente $\frac{1}{2}a \begin{smallmatrix} > 45^\circ \\ < 90^\circ \end{smallmatrix}$: sen a, sen $\frac{1}{2}a$ y cos $\frac{1}{2}a$ son positivos; pero como sen $\frac{1}{2}a >$ cos $\frac{1}{2}a$, deberemos tomar los valores que ocupan el primer lugar.

26. *Conociendo la tangente de un arco, hallar la tangente de su mitad.*

Tenemos

$$\text{tg } a = \frac{2 \text{ tg } \frac{1}{2}a}{1 - \text{tg}^2 \frac{1}{2}a},$$

ecuacion en que entra la cantidad conocida tg a y la incógnita tg $\frac{1}{2}a$. Esta ecuacion se trasforma en la

$$\text{tg } a \text{ tg}^2 \tfrac{1}{2}a + 2 \text{ tg } \tfrac{1}{2}a - \text{tg } a = 0,$$

cuyas raíces dan por producto -1 (*Alg. elem.* 183), es decir, que son recíprocas y de signo contrario. [illegible]

Resolviendo dicha ecuacion, tendremos

$$\text{tg } \tfrac{1}{2}a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \text{tg}^2 a}}{\text{tg } a}.$$

Como se supone que el arco a es un arco dado, y por lo tanto tambien el arco $\frac{1}{2}a$, tg $\frac{1}{2}a$ no tendrá más que un solo valor, fácil de escoger entre los dos que nos da la fórmula.

27. *Convertir la suma y diferencia de dos senos ó de dos cosenos en productos.*

Sumando y restando las fórmulas

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b,$$

resultan

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b \qquad [1],$$
$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2 \cos a \operatorname{sen} b \qquad [2].$$

Sumando y restando las fórmulas

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

resultan

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = \quad 2 \cos a \cos b \qquad [3],$$
$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad [4].$$

Las cuatro fórmulas [1], [2], [3] y [4] resuelven el problema propuesto.

Hagamos $a + b = p$, $a - b = q$, y por consiguiente $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$; y tendremos, sustituyendo estos valores en las cuatro últimas fórmulas, las cuatro siguientes equivalentes á aquellas:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = \quad 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = \quad 2 \cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p + \cos q = \quad 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}.$$

Obsérvese con cuidado que el arco p es el minuendo en la diferencia $\frac{p-q}{2}$, tanto en la segunda fórmula como en la cuarta: en las otras dos puede tomarse por minuendo indiferentemente p ó q, pues $\cos \frac{p-q}{2} = \cos \frac{q-p}{2}$.

Conviene enunciar estas fórmulas en lenguaje vulgar.

La primera enunciada en castellano nos da el teorema siguiente: *la suma de los senos de dos arcos es igual al duplo del seno de la semisuma, de los arcos, por el coseno de la semidiferencia de los mismos.*

De un modo semejante se enunciarán los tres teoremas correspondientes á las otras tres fórmulas.

Ejemplos. 1.° *Convertir en un producto la diferencia* cos (b — c) — *cos* a.

Segun el último de estos cuatro teoremas, tendremos

$$\cos(b-c)-\cos a=-2\,\mathrm{sen}\,\frac{a+b-c}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{b-c-a}{2};$$

pero $$\mathrm{sen}\,\frac{b-c-a}{2}=-\mathrm{sen}\,\frac{a+c-b}{2};$$

luego

$$\cos(b-c)-\cos a=2\,\mathrm{sen}\,\frac{a+b-c}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{a+c-b}{2}.$$

2.° *Convertir en producto la suma sen* a + *cos* b.

Tenemos

$$\mathrm{sen}\,a+\cos b=\mathrm{sen}\,a+\mathrm{sen}\,(90^\circ-b);$$

luego en virtud del primero de estos cuatro teoremas, tendremos

$$\mathrm{sen}\,a+\mathrm{sen}\,(90^\circ-b)=2\,\mathrm{sen}\,\frac{a+90^\circ-b}{2}\cos\frac{a+b-90^\circ}{2};$$

ó

$$\mathrm{sen}\,a+\cos b=2\,\mathrm{sen}\left(45^\circ+\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{a+b}{2}\right).$$

Nota. Las cuatro fórmulas que acabamos de hallar sirven para trasformar la suma ó diferencia de dos senos ó de dos cosenos en expresiones equivalentes, á las cuales puede aplicarse directamente el cálculo logarítmico.

28. Tambien se trasforma fácilmente la suma ó diferencia de dos tangentes en una expresion bien dispuesta para el cálculo logarítmico; pues

$$\mathrm{tg}\,a\pm\mathrm{tg}\,b=\frac{\mathrm{sen}\,a}{\cos a}\pm\frac{\mathrm{sen}\,b}{\cos b}=\frac{\mathrm{sen}\,a\cos b\pm\cos a\,\mathrm{sen}\,b}{\cos a\cos b}=\frac{\mathrm{sen}\,(a\pm b)}{\cos a\cos b}.$$

29. *Trasformar en un producto la suma ó diferencia de los senos de tres arcos cualesquiera que sumen* 180°.

Sean a, b y c los tres arcos: la suma $a+b$ será suplemento de c, y $\frac{a+b}{2}$ complemento de $\frac{c}{2}$.

Tenemos

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + \operatorname{sen}(a+b),$$

ó

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$$

ó

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \right),$$

ó, segun el teorema tercero del número 27,

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 2 \cos \frac{c}{2} \,.\, 2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2},$$

ó en fin

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}.$$

Del mismo modo se halla la fórmula

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} c = 4 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}.$$

Hagamos $a = 90° - a'$, $b = 90° - b'$, $c = 90° - c'$, y será por consiguiente

$$a + b + c = 3.90° - (a' + b' + c');$$

luego $a' + b' + c' = 90°$. Tambien $\operatorname{sen} a = \cos a'$, $\operatorname{sen} b = \cos b'$, $\operatorname{sen} c = \cos c'$: sustituyendo estos valores en las dos fórmulas anteriores, resultan

$$\cos a' + \cos b' + \cos c' = 4 \cos\left(45° - \frac{a'}{2}\right) \cos\left(45° - \frac{b'}{2}\right) \cos\left(45° - \frac{c'}{2}\right),$$

$$\cos a' + \cos b' + \cos c' = 4 \operatorname{sen}\left(45° - \frac{a'}{2}\right) \operatorname{sen}\left(45° - \frac{b'}{2}\right) \cos\left(45° - \frac{c'}{2}\right).$$

Estas dos fórmulas nos dicen que pueden trasformarse en productos la suma y diferencia de los cosenos de tres arcos que sumen ~~90°~~. 180°

30. *Trasformar en un producto la suma de las tangentes de tres arcos cualquiera* a, b, c *que sumen* 180°.

Siendo $\qquad a + b = 180° - c,$

será $\qquad \operatorname{tg} a\,(a + b) = -\operatorname{tg} c,$

ó $\qquad \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = -\operatorname{tg} c,$

ó bien $\qquad \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = -\operatorname{tg} c + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c,$

ó en fin $\qquad \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$

Hagamos $a = 90° - a'$, $b = 90° - b'$, $c = 90° - c'$, y por consiguiente

$$a + b + c = 180° = 3.90° - (a' + b' + c'),$$

de donde $a' + b' + c' = 90°$. Tenemos ahora

$$\operatorname{tg} a = \cot a', \ \operatorname{tg} b = \cot b', \ \operatorname{tg} c = \cot c';$$

luego, sustituyendo estos valores en la fórmula última, será

$$\cot a' + \cot b' + \cot c' = \cot a' \cot b' \cot c';$$

es decir, que la suma de las cotangentes de tres arcos que suman 90° se puede trasformar en producto.

31. *Trasformar en producto la suma de los senos y la de los cosenos* n *de arcos, que forman progresion aritmética.*

Fundándonos en el teorema correspondiente á la fórmula (4.ª *del número* 27), escribamos las igualdades siguientes:

$$\cos(\alpha + b) - \cos\alpha = -2\,\mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{b}{2}\right)\mathrm{sen}\,\frac{b}{2},$$

$$\cos(\alpha + 2b) - \cos(\alpha + b) = -2\,\mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{3b}{2}\right)\mathrm{sen}\,\frac{b}{2},$$

$$\cos(\alpha + 3b) - \cos(\alpha + 2b) = -2\,\mathrm{sen}\left(\alpha - \frac{5b}{2}\right)\mathrm{sen}\,\frac{b}{2},$$

$$\vdots$$

hasta

$$\cos(\alpha + nb) - \cos\big(\alpha + (n-1)b\big) = -2\,\mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}b\right)\mathrm{sen}\,\frac{b}{2}.$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, tendremos

$$\cos(\alpha + nb) - \cos\alpha = -2\,\mathrm{sen}\frac{b}{2}\left(\mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{b}{2}\right) + \mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{5b}{2}\right) + \right.$$

$$\left. \mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{5b}{2}\right) + \ldots + \mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}b\right)\right).$$

Trasformando en producto el primer miembro, y despejando la cantidad interior al gran paréntesis, será

$$\mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{b}{2}\right) + \mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{3b}{2}\right) + \mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{5b}{2}\right) + \ldots +$$

$$\mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}b\right) = \frac{\mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{nb}{2}\right)\mathrm{sen}\,\frac{nb}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{b}{2}}.$$

Hagamos ahora $\alpha + \frac{b}{2} = a$, ó $\alpha = a - \frac{b}{2}$, y tendremos

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a+2b) + \ldots + \operatorname{sen}\left(a+(n-1)\,b\right) =$$

$$\operatorname{sen}\left(a + \frac{n-1}{2}\,b\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{nb}{2}}{\operatorname{sen}\frac{b}{2}} \qquad [P],$$

y así queda resuelto el primer problema.

Para resolver el segundo, cambiemos en la fórmula [P] a en $90^\circ + a$, y resultará

$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \ldots + \cos\left(a+\overline{n-1}\,b\right) =$$

$$\cos\left(a + \frac{n-1}{2}\,b\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{nb}{2}}{\operatorname{sen}\frac{b}{2}} \qquad [Q],$$

que tambien puede hallarse del mismo modo que la anterior, en virtud del teorema que da la fórmula 2.ª del núm. 27.

32. *Trasformar la expresion* $m \operatorname{sen} a + n \cos a$, *cuyo primer término contiene el seno de un ángulo, y cuyo segundo término contiene al coseno del mismo ángulo, en otra bien dispuesta para el cálculo logarítmico, por medio de un ángulo auxiliar.*

Separemos el coeficiente de sen a (ó el de cos a) como si fuese un factor comun á los dos términos, ó lo que es igual, dividamos la expresion propuesta por m y multipliquemos el cociente por m, lo que no alterará á dicha expresion, y tendremos

$$m \operatorname{sen} a + n \cos a = m\left(\operatorname{sen} a + \frac{n}{m}\cos a\right).$$

Sabemos (18, *Nota*) que, cualquiera que sea la cantidad $\frac{n}{m}$ existe un solo ángulo que tiene por tangente á dicha cantidad; si, pues, llamamos φ á este ángulo, tendremos

$$\frac{n}{m} = \operatorname{tg}\varphi \text{ (*)};$$

y por consiguiente

$$m \operatorname{sen} a + n \cos a = m(\operatorname{sen} a + \operatorname{tg}\varphi \cos a) =$$

$$\frac{m}{\cos\varphi}(\operatorname{sen} a \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi \cos a),$$

(*) Tambien puede igualarse $\frac{n}{m}$ á cot φ, y no habrá más diferencia que ser este ángulo complemento del ángulo del texto.

ó en fin

$$m \operatorname{sen} a + n \cos a = \frac{m}{\cos \varphi} \operatorname{sen} (a + \varphi);$$

expresion bien dispuesta por el cálculo logarítmico.

Para calcularla, hallaremos por la ecuacion $\frac{n}{m} = \operatorname{tg} \varphi$ el ángulo auxiliar φ (*); y en seguida tendremos
$\log (m \operatorname{sen} a + n \cos a) = \log m + \log \operatorname{sen} (a + \varphi) - \log \cos \varphi$.

33. Dividiendo cada una de las cuatro fórmulas del número 27 por cada una de las siguientes, resultarán estas otras seis fórmulas:

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{\operatorname{tg} \frac{p+q}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}},$$

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q} = \operatorname{tg} \frac{p+q}{2},$$

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos p - \cos q} = -\cot \frac{p-q}{2},$$

$$\frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q} = \operatorname{tg} \frac{p-q}{2},$$

$$\frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}{\cos p - \cos q} = -\cot \frac{p+q}{2},$$

$$\frac{\cos p + \cos q}{\cos p - \cos q} = -\cot \frac{p+q}{2} \cdot \cot \frac{p-q}{2}.$$

La primera de estas seis fórmulas, única importante entre ellas, traducida al lenguaje vulgar nos da este teorema: *la suma de los senos de dos arcos es á su diferencia, como la tangente de la semi-suma de dichos arcos es á la tangente de la semi-diferencia de los mismos.*

34. Resolvamos nuevamente la cuestion propuesta y resuelta en el capítulo segundo, es decir, la de *hallar las expresiones que comprenden á todos los arcos correspondientes á una misma linea trigonométrica.*

(*) Pronto veremos cómo se halla el valor de un ángulo, conociendo una de sus líneas trigonométricas.

1.° *Hallar las expresiones que comprenden á todos los arcos que tienen un mismo seno.*

Sea a el menor arco positivo, cuyo seno sea un número dado, x uno cualquiera de los infinitos arcos que tengan el mismo seno; tendremos

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 0.$$

Para hallar los valores de x que verifiquen esta ecuacion, la escribiremos así:

$$2 \cos \tfrac{1}{2}(x + a) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x - a) - 0,$$

ecuacion que quedará satisfecha por los valores de x que anulen á $\cos \frac{1}{2}(x + a)$ y $\cos \frac{1}{2}(x - a)$, y no por ningun otro valor de x. Siendo $\cos \frac{1}{2}(x + a) = 0$, el arco $\frac{1}{2}(x + a)$ constará evidentemente de un número impar $2k + 1$, positivo ó negativo, de cuadrantes; luego

$$\tfrac{1}{2}(x + a) = (2k + 1)\frac{\pi}{2},$$

de donde resulta

$$x = 2k\pi + \pi - a.$$

Siendo el otro factor $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - a) = 0$, el arco $\frac{1}{2}(x - a)$ constará de un número k positivo ó negativo de semi-circunferencias; luego

$$\tfrac{1}{2}(x + a) = k\pi,$$

de donde

$$x = 2k\pi + a.$$

Vemos, pues, que las dos expresiones $2k\pi + \pi - a$ y $2k\pi + a$ comprenden á todos los arcos que tienen el mismo seno, siendo k un número entero positivo, negativo ó cero, y a el menor arco positivo correspondiente al seno dado.

2.° *Hallar las expresiones que comprenden á todos los arcos que tienen un mismo coseno.*

Tendremos, como en el problema anterior,

$$\cos x = \cos a, \quad \text{ó} \quad \cos x - \cos a = 0,$$

ó bien

$$-2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x + a) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x - a) = 0,$$

ecuacion que se verificará solamente por los valores de x que anulen á $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x + a)$ y $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - a)$. Siendo $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x + a) = 0$, será

$$\tfrac{1}{2}(x + a) = k\pi,$$

de donde

$$x = 2k\pi - a;$$

y siendo $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - a) = 0$, será

$$\tfrac{1}{2}(x - a) = k\pi,$$

de donde

$$x = 2k\pi + a.$$

Luego las dos expresiones $2k\pi \pm a$ comprenden á todos los arcos que tienen un mismo coseno.

3.° *Hallar la expresion que comprenda todos los arcos que tienen la misma tangente.*

Tendremos

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a = 0,$$

ó

$$\operatorname{sen} x \cos a - \cos x \operatorname{sen} a = 0,$$

ó bien

$$\operatorname{sen}(x - a) = 0;$$

luego

$$x - a = k\pi, \quad \text{y} \quad x = k\pi + a.$$

35. En los problemas (20) fijábamos una línea trigonométrica de un arco determinado, y hallamos en funcion de la misma las otras líneas trigonométricas del mismo arco; y en los problemas (24, 25 y 26) hallamos en funcion de una línea trigonométrica de un arco determinado las de la mitad de dicho arco. Por consiguiente las líneas trigonométricas incógnitas pertenecian tambien á un arco determinado, por lo que cada una de ellas no tenia más que un solo valor, fácil de escoger entre los que daban las fórmulas.

Supongamos ahora que el arco, del que se dé una línea trigonométrica, sea indeterminado, es decir, tenga los infinitos valores de los arcos correspondientes á dicha línea trigonométrica: vamos á demostrar que en tal caso cada una de las incógnitas de los referidos problemas tiene todos los valores indicados por las fórmulas.

Para esto, recorreremos sucesivamente los referidos problemas; pero antes debemos observar que, ya sea el arco correspondiente á la línea dada determinado, ya sea indeterminado, su extremo (se supone que el origen de todos es el punto A, *Fig.* 5) será el mismo, y por tanto todas las fórmulas halladas en la resolucion de dichos problemas se conservarán sin alteracion, cambiando en ellas el arco determinado a en el indeterminado, al cual llamaremos A.

Problema 1.° *Dado el seno de un arco indeterminado* A, *hallar los valores del coseno y tangente de dicho arco.*

Segun vimos en (20), y en atencion á la observacion que acabamos de hacer, tendremos

$$\cos A = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}}.$$

Vamos á demostrar que cos A y tg A tienen los dos valores que presentan estas fórmulas.

Hemos visto (34, 1.º) que

$$A = 2k\pi + a \quad \text{y} \quad A = 2k\pi + \pi - a;$$

y pues $2k\pi$ es un número exacto de circunferencias, el arco $2k\pi + a$ tiene el mismo extremo que el arco a, y el arco $2k\pi + \pi - a$ tiene el mismo extremo que el arco $\pi - a$; luego

$$\cos A = \cos a, \quad \text{y} \quad \cos A = \cos(\pi - a) = -\cos a;$$

y como a es un arco determinado, cos a tendrá uno solo de los dos valores dados por la fórmula

$$\cos a = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A} = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}.$$

Admitamos que el valor de cos a, sea el primero de los dos que acabamos de escribir, es decir, que sea

$$\cos a = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}:$$

como

$$\cos A = \cos a,$$

será

$$\cos A = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}.$$

Tenemos tambien

$$\cos A = -\cos a = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A};$$

luego queda demostrado que cos A tiene los dos valores dados por la fórmula

$$\cos A = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}.$$

Por consiguiente en

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}},$$

se ve que tambien tg A tiene los dos valores dados por la fórmula (*).

Problema 2.º *Dado el coseno de un arco indeterminado* A, *hallar los valores del seno y tangente de dicho arco.*

Tenemos las fórmulas

$$\operatorname{sen} A = \pm\sqrt{1 - \cos^2 A}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A}.$$

(*) No nos ocupamos de la cotangente, porque, siendo esta cantidad recíproca de la tangente, es fácil deducir lo que á ella se refiere por medio de los valores de la tangente, y aun evitarla cuando se quiera.

Vamos á demostrar que sen A y tg A tienen los dos valores dados por estas fórmulas.

Hemos visto (34, 2.°) que $A = 2k\pi \pm a;$

luego $$\text{sen}\, A = \text{sen}\,(\pm a) = \pm\, \text{sen}\, a.$$

Siendo a un arco determinado, sen a tendrá uno solo de los dos valores dados por la fórmula

$$\text{sen}\, a = \pm\sqrt{1 - \cos^2 a} = \pm\sqrt{1 - \cos^2 A}.$$

Supongamos, por ejemplo, que sen a tenga el primero de estos dos valores, es decir, que sea

$$\text{sen}\, a = \sqrt{1 - \cos^2 A}:$$

tendremos por consiguiente y por igual razonamiento que antes

$$\text{sen}\, A = \pm\sqrt{1 - \cos^2 A},$$

y por tanto

$$\text{tg}\, A = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A};$$

y así queda demostrada la proposición.

Problema 3.° *Dada la tangente de un arco indeterminado* A, *hallar los valores del seno y coseno de dicho arco.*

Hallemos primeramente los valores de sen A.

Tenemos la fórmula

$$\text{sen}\, A = \frac{\text{tg}\, A}{\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2 A}},$$

y vamos á demostrar que éstos dos valores convienen á sen A.

Sabemos (34, 3.°) que $A = k\pi + a;$ luego si damos á k un valor par, el arco $k\pi + a$ tendrá el mismo extremo que el arco a, y por tanto sen $A =$ sen a. Siendo a un arco determinado, sen a tendrá uno solo de los dos valores dados por la fórmula

$$\text{sen}\, a = \frac{\text{tg}\, A}{\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}} = \frac{\text{tg}\, A}{\pm\sqrt{1 \pm \text{tg}^2 A}}.$$

Admitamos que su valor sea el primero de estos dos: será

$$\text{sen}\, a = \text{sen}\, A = \frac{\text{tg}\, A +}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 A}}.$$

Dando ahora á k un valor impar $2n + 1$, será

$$A = (2n + 1)\,\pi + a = 2n\pi + \pi + \pi + a,$$

arco que tiene el mismo extremo que $\pi + a;$ luego

$$\text{sen}\, A = \text{sen}\,(\pi + a) = -\,\text{sen}\, a = \frac{\text{tg}\, A}{-\sqrt{1 + \text{tg}^2 A}}.$$

y así queda demostrado que sen A tiene los dos valores dados por la fórmula.

Del mismo modo se demuestra que cos A tiene tambien los dos valores dados por la fórmula

$$\cos A = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}.$$

Problema 4.° *Dado el coseno de un arco indeterminado A, hallar los valores del seno y coseno de la mitad de dicho arco.*

Hallemos en primer lugar los valores de sen $\frac{1}{2}A$.

Tenemos

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},$$

y se trata de demostrar que estos dos valores convienen á sen $\frac{1}{2}A$.

Sabemos (34, 2.°) que $A = 2k\pi \pm a$, y por tanto

$$\tfrac{1}{2}A = k\pi \pm \tfrac{1}{2}a.$$

Si damos á k un valor par, $k\pi$ será un número exacto de circunferencias, y por tanto

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \pm \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a.$$

Como el arco a tiene un valor determinado, y por consiguiente tambien el arco $\frac{1}{2}a$, sen $\frac{1}{2}a$ tendrá uno solo de los dos valores dados por la fórmula

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.$$

Si, por ejemplo, sen $\frac{1}{2}a$ tiene el primero de estos dos valores, es decir, si

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},$$

será

$$-\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a = -\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}};$$

luego

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.$$

Vemos que si se da á k un valor par, sen $\frac{1}{2}A$ tiene ya los dos valores dados por la fórmula.

Demos á k un valor impar $2n+1$, y será

$$\tfrac{1}{2}A = (2n+1)\pi \pm \tfrac{1}{2}a = 2n\pi + \pi \pm \tfrac{1}{2}a,$$

arco que tiene el mismo extremo que el $\pi \pm \frac{1}{2}a$: luego

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \operatorname{sen}(\pi \pm \tfrac{1}{2}a) = \mp \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a = \mp \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}.$$

Resultan, pues, para sen $\frac{1}{2}A$ dos valores idénticos á los que tiene en el caso en que k es par.

Hallemos ahora los valores de cos $\frac{1}{2}A$.

Tenemos la fórmula

$$\cos \tfrac{1}{2}A = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}},$$

y vamos á demostrar que cos $\frac{1}{2}A$ tiene estos dos valores.

Dando á k un valor par, el arco $\frac{1}{2}A$ ó $k\pi \pm \frac{1}{2}a$ tendrá el mismo extremo que el arco $\frac{1}{2}a$; luego

$$\cos \tfrac{1}{2}A = \cos(\pm \tfrac{1}{2}a) = \cos \tfrac{1}{2}a:$$

como $\frac{1}{2}a$ es un arco determinado, cos $\frac{1}{2}a$ tendrá uno solo de los dos valores dados por la fórmula

$$\cos \tfrac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}.$$

Admitamos que su valor sea el primero, es decir, que sea

$$\cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}};$$

será por consiguiente

$$\cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}.$$

Dando, pues, á k un valor par, ha resultado para cos $\frac{1}{2}A$ uno solo de los dos valores que da la fórmula.

Demos ahora á k un valor impar $2n + 1$, y será

$$\tfrac{1}{2}A = k\pi \pm \tfrac{1}{2}a = (2n + 1)\pi \pm \tfrac{1}{2}a = 2n\pi + \pi \pm \tfrac{1}{2}a,$$

arco que tiene el mismo extremo que el $\pi \pm \frac{1}{2}a$; luego

$$\cos \tfrac{1}{2}A = \cos(\pi \pm \tfrac{1}{2}a) = -\cos \tfrac{1}{2}a = -\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}};$$

y así se ve que resulta para cos $\frac{1}{2}A$ el otro valor dado por la fórmula.

Problema 5.° *Dado el seno de un arco indeterminado* A, *hallar los valores de sen* $\frac{1}{2}$A *y cos* $\frac{1}{2}$A.

Tenemos para sen $\frac{1}{2}A$ (25) las fórmulas

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A &= \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \operatorname{sen} A} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \operatorname{sen} A},\\
\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A &= \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \operatorname{sen} A} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \operatorname{sen} A},\\
\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \operatorname{sen} A} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \operatorname{sen} A},\\
\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \operatorname{sen} A} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \operatorname{sen} A},
\end{aligned}\right\} [G]$$

y para $\cos \frac{1}{2}A$ los valores siguientes que corresponden respectivamente á los anteriores:

$$\left.\begin{aligned}\cos \tfrac{1}{2}A &= \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen} A} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen} A},\\ \cos \tfrac{1}{2}A &= \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen} A} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen} A},\\ \cos \tfrac{1}{2}A &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen} A} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen} A},\\ \cos \tfrac{1}{2}A &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen} A} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen} A};\end{aligned}\right\} [G']$$

es decir, que son valores correspondientes, en estos dos grupos de fórmulas, aquellos que sólo se diferencian en el signo del segundo término.

Vamos á demostrar que sen $A\frac{1}{2}$ tiene los cuatro valores dados por las fórmulas del primer grupo, y que $\cos \frac{1}{2}A$ tiene tambien los cuatro valores dados por las fórmulas del segundo grupo.

Hallemos en primer lugar los valores de sen $\frac{1}{2}A$.

Sabemos que

$$A = 2k\pi + a, \quad A = 2k\pi + \pi - a;$$

luego $$\tfrac{1}{2}A = k\pi + \tfrac{1}{2}a, \quad \tfrac{1}{2}A = k\pi + \frac{\pi - a}{2}.$$

Si damos á k un valor par, $k\pi$ será un número exacto de circunferencias; luego

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a, \quad \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a = \operatorname{sen} \frac{\pi - a}{2} \cos \tfrac{1}{2}a.$$

Siendo a, y por consiguiente $\frac{1}{2}a$, un arco determinado, sen $\frac{1}{2}a$, tendrá uno solo de los cuatro valores (25), y como sen a = sen A, sen $\frac{1}{2}a$ tendrá uno solo de los cuatro valores del primer grupo [G]. Admitamos, por ejemplo, que su valor sea el primero de este grupo: $\cos \frac{1}{2}a$ tendrá por valor el que corresponda en el grupo [G'] al valor de sen $\frac{1}{2}a$, es decir, que el valor de $\cos \frac{1}{2}a$ será el primero del grupo [G'] ó sea el segundo del grupo [G], tendremos, segun esto, dando á k un valor par,

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen} A} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen} A}.$$

Demos ahora á k un valor impar $2n+1$; será

$$\tfrac{1}{2}A = (2n+1)\pi + \tfrac{1}{2}a = 2n\pi + \pi + \tfrac{1}{2}a,$$

y tambien

$$\tfrac{1}{2}A = (2n+1)\pi + \frac{\pi - a}{2} = 2n\pi + \pi + \frac{\pi - a}{2};$$

luego

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \operatorname{sen}(\pi + \tfrac{1}{2}a) = -\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a,$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi - a}{2}\right) = -\operatorname{sen} \frac{\pi - a}{2} = -\cos \tfrac{1}{2}a;$$

y por tanto

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen} A} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen} A},$$

que son los otros dos valores del primer grupo; y así queda demostrado lo que enunciamos respecto de los valores de sen $\frac{1}{2}A$.

Del mismo modo puede demostrarse que cos $\frac{1}{2}A$ tiene los cuatro valores que dan las fórmulas del segundo grupo; pero no hay necesidad de detenernos en esto, porque ya se sabe que á cada valor que tiene sen $\frac{1}{2}A$ en el primer grupo corresponde uno para cos $\frac{1}{2}A$ en el segundo grupo.

Problema 6.° *Dada la tangente de un arco indeterminado A, hallar los valores de la tangente de su mitad.*

Tenemos (26)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A}.$$

Vamos á demostrar que tg $\frac{1}{2}A$ tiene los dos valores dados por esta fórmula.

Hemos visto (34, 3.°) que $A = k\pi + a$, y por tanto

$$\tfrac{1}{2}A = \frac{k}{2}\pi + \tfrac{1}{2}a.$$

Si damos á k un valor par $2n$, será

$$\tfrac{1}{2}A = n\pi + \tfrac{1}{2}a;$$

y por consiguiente

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \frac{\operatorname{tg} n\pi + \operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{1 - \operatorname{tg} n\pi \operatorname{tg}\frac{1}{2}a} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a.$$

Siendo a un arco determinado, y por lo tanto tambien $\frac{1}{2}a$, tg $\frac{1}{2}a$ no tendrá más que uno solo de los dos valores dados por la fórmula

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A}.$$

Admitamos que dicho valor sea el primero de estos dos: tendremos

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a \quad \text{ó} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \frac{-1 + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A}.$$

Demos ahora á k un valor impar $2n+1$; será

$$\tfrac{1}{2}A = \frac{2n+1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}a = n\pi + \frac{\pi + a}{2};$$

luego

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A = \frac{\operatorname{tg} n\pi + \operatorname{tg} \frac{\pi + a}{2}}{1 - \operatorname{tg} n\pi \operatorname{tg} \frac{\pi + a}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\pi + a}{2} = -\cot \tfrac{1}{2}a =$$

$$\frac{-1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A};$$

porque $-\cot \frac{1}{2}a$ es cantidad recíproca de $\operatorname{tg} \frac{1}{2}a$ y de signo contrario al de esta, y ya se ha dicho, y ademas es evidente, que $\frac{-1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A}$ es cantidad recíproca y de signo contrario de la $\frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A}$.

Queda, pues, demostrado que $\operatorname{tg} \frac{1}{2}A$ tiene los dos valores dados por la fórmula.

CAPÍTULO VI.

Construccion de las tablas trigonométricas.

36. Si al lado de cada uno de los arcos que crecen de minuto en minuto, ó de 10″ en 10″, ó de 1″ en 1″, etc., están colocados los valores de las líneas trigonométricas correspondientes, ó más bien los logaritmos de estos valores, tendremos unas *tablas trigonométricas*.

Nosotros supondremos que los arcos crecen de minuto en minuto, y por tanto tratamos de hacer ver cómo se pueden hallar las líneas trigonométricas de los arcos 1′, 2′, 3′, 4′..... 90°. No hay necesidad de pasar más adelante; porque los valores absolutos de las líneas trigonométricas de un arco cualquiera son iguales á los de las líneas trigonométricas de un arco del primer cuadrante.

Principiaremos por hallar el seno del arco menor de las tablas, que en nuestra suposicion es el arco 1′: para esto, antepondremos los dos teoremas siguientes:

1.° Fig. 7. *Todo arco* AB *positivo y menor que un cuadrante es mayor que su seno* BD *y menor que su tangente* AE.

En efecto: 1.° tracemos la cuerda AB, y tendremos arc. $AB > AB$; y como $AB > BD$, será con mayor razon arc. $AB > BD$.

2.° Tiremos la tangente BH, y tendremos arc. $AB < AH + BH$ (*Geom., teor.* 87, *Corol.* 3.°); y como $BH < HE$, será arc. $AB < AH + HE$, ó arc. $AB < AE$.

2.° *El seno de un arco positivo y menor que un cuadrante es mayor que la diferencia entre el arco y la cuarta parte del cubo del arco;* es decir que sen $a > a - \frac{1}{4}a^3$.

En efecto, acabamos de demostrar que

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a > \tfrac{1}{2}a, \text{ ó } \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}a} > \tfrac{1}{2}a,$$

de donde

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a > \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}a;$$

multiplicando ambos miembros de esta desigualdad por 2 cos $\frac{1}{2}a$, será

$$2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}a > a \cos^2 \tfrac{1}{2}a,$$

ó

$$\operatorname{sen} a > a - a \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}a.$$

Ahora, $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}a < (\frac{1}{2}a)^2$ ó $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}a < \frac{1}{4}a^2$; luego

$$\operatorname{sen} a > a - \tfrac{1}{4}a^3.$$

37. Esto supuesto, hallemos el seno del arco menor de las tablas, es decir, el seno del arco 1'.

Tenemos $\frac{C}{2r} = \pi$; y pues $r = 1$, será $\frac{C}{2} = \pi$;

ó

$$\text{arc. } 180° = 3{,}14159\ 26535\ 89.....;$$

y por consiguiente

$$\text{arc. } 1' = \frac{\pi}{180 \times 60} = 0{,}00029\ 08882\ 08..... < 0{,}0003,$$

y

$$\frac{(\text{arc. } 1')^3}{4} = 0{,}00000\ 00000\ 07\text{: luego}$$

$$\operatorname{sen} 1' > 0{,}00029\ 08882\ 08..... - 0{,}00000\ 00000\ 07.$$

ó bien

$$\operatorname{sen} 1' > 0{,}00029\ 08882\ 01.....$$

Como el seno es menor que el arco, será con mayor razon

$$\operatorname{sen} 1' < 0{,}00029\ 08882\ 1;$$

y al mismo tiempo

$$\operatorname{sen} 1' > 0{,}00029\ 08882\ 0.$$

Vemos que sen 1' está comprendido entre dos cantidades que se diferencian en una unidad del undécimo órden decimal; luego cualquiera de ellas es el valor de sen 1′ con un error menor que dicha unidad: tendremos, pues,

$$\text{sen } 1' = 0{,}00029\ 08882\ 0.....$$

con un error por defecto menor que una unidad del undécimo órden decimal.

El coseno del arco 1′ se hallará ahora por la fórmula $\cos 1' = \sqrt{1 - \text{sen}^2 1'}$, sustituyendo en vez de $\text{sen}^2 1'$ su valor y efectuando en seguida las operaciones indicadas. Resulta

$$\cos 1' = 0{,}99999\ 99576\ 9.....$$

38. Conociendo el seno y el coseno del arco 1′, las fórmulas (21) nos darán los senos y cosenos de los demas arcos; pues haciendo en ellas $a = 1'$, $b = 1'$, será

$$\text{sen } 2' = 2 \text{ sen } 1' \cos 1',$$
$$\cos 2' = \cos^2 1' - \text{sen}^2 1';$$

haciendo $a = 2'$ $b = 1'$, será sustituendo sen(a+b) = sen a cos b + cos a sen b

$$\text{sen } 3' = \text{sen } 2' \cos 1' + \cos 2' \text{ sen } 1',$$
$$\cos 3' = \cos 2' \cos 1' - \text{sen } 2' \text{ sen } 1';$$

haciendo $a = 3'$ $b = 1'$, será

$$\text{sen } 4' = \text{sen } 3' \cos 1' + \cos 3' \text{ sen } 1',$$
$$\cos 4' = \cos 3' \cos 1' - \text{sen } 3' \text{ sen } 1';$$

y así sucesivamente.

Habiendo hallado los senos y cosenos de todos los arcos hasta 45°, se tienen los senos y cosenos de todos los arcos hasta 90°: pues el seno ó coseno de un arco mayor que 45° es igual al coseno ó seno de su complemento (que es menor que 45°), hallados ya.

39. Despues de hallar el seno y el coseno del arco 1′, los senos y cosenos de los demas arcos de las tablas se hallarán con más brevedad (que por el método que acabamos de indicar) por otro método debido al geómetra inglés Simpson, que ahora vamos á exponer: pero antes resolveremos el problema siguiente.

Hallar los senos y cosenos de los arcos múltiplos de 9°, *comprendidos entre* 0 *y* 90°.

El lado del decágono regular inscripto en un círculo, ó lo que es igual, la cuerda del arco de 36°, es la parte mayor del radio dividido en media y extrema razon. Sea x esta parte mayor: tendremos la proporcion

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1 - x},$$

ó

$$x^2 + x - 1 = 0;$$

y desechando el valor negativo que actualmente es inadmisible,

será $$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Por consiguiente

$$\text{sen } 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4};$$

luego $$\cos 18^\circ = \text{sen } 72^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Tenemos ahora la fórmula

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2\, a;$$

y en atencion á que sen 18° tiene un valor más sencillo que cos 18°, reemplazaremos en esta fórmula $\cos^2 a$ por su igual $1 - \text{sen}^2\, a$, y entonces será

$$\cos 2a = 1 - 2\,\text{sen}^2\, a.$$

Por consiguiente

$$\cos 36^\circ = \text{sen } 54^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

y $$\text{sen } 36^\circ = \cos 54^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Conociendo el seno y coseno de 54°, podemos hallar ahora el seno y coseno de su mitad 27°: y preferiremos las fórmulas (25) que dan estas dos incógnitas en funcion del seno á las que las dan en funcion del coseno, porque la expresion del seno de 54° es más sencilla que la del coseno de 54°.

Como el arco 54° corresponde al primer cuadrante positivo, y $\frac{1}{2}a$ está comprendido entre 0 y 45°, sen a, sen $\frac{1}{2}a$ y cos $\frac{1}{2}a$ son positivos, y sen $\frac{1}{2}a <$ cos $\frac{1}{2}a$; luego deberemos tomar en dichas fórmulas los segundos valores de sen $\frac{1}{2}a$ y cos $\frac{1}{2}a$; y tendremos

$$\text{sen } 27^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen } 54^\circ} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen } 54^\circ},$$

$$\cos 27^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{sen } 54^\circ} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen } 54^\circ};$$

y reemplazando sen 54° por su valor $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, será

$$\text{sen } 27^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{4}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}},$$

$$\cos 27^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{4}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}.$$

ó en fin

$$\text{sen}\,27^\circ = \cos 63^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\cos 27^\circ = \text{sen}\,63^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Conociendo el seno y coseno del arco de 18°, podemos hallar el seno y coseno del arco de 9°, y preferiremos tambien las fórmulas de que acabamos de servirnos, porque el seno de 18° tiene un valor más sencillo que el coseno de 18°: tendremos, pues,

$$\text{sen}\,9^\circ = \cos 81^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\cos 8^\circ = \text{sen}\,81^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

Tenemos ademas

$$\text{sen}\,45^\circ = \cos 45^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Hemos hallado los senos y cosenos de todos los arcos múltiplos de 9° comprendidos entre 0 y 90°; y para obtenerlos con cuanta aproximacion se quiera, no hay más que extraer las ocho raíces

cuadradas $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{3-\sqrt{5}}, \sqrt{3+\sqrt{5}}, \sqrt{5-\sqrt{5}}, \sqrt{5+\sqrt{5}},$

$$\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Efectuando estas extracciones de raíces, resultan

sen 9°	= cos 81°	= 0,15643 44650 40231...
sen 18°	= cos 72°	= 0,30901 69943 74947...
sen 27°	= cos 63°	= 0,45399 04997 39547...
sen 36°	= cos 54°	= 0,58778 52522 92473...
sen 45°	= cos 45°	= 0,70710 67811 86548...
sen 54°	= cos 36°	= 0,80901 69943 74947...
sen 63°	= cos 27°	= 0,89100 65241 88368...
sen 72°	= cos 18°	= 0,95105 65162 95154...
sen 81°	= cos 9°	= 0,98768 83405 95138...

40. Pasemos ya á exponer el método de Simpson.

Tenemos (27, 1.er teor.)

$$\text{sen}\,(a+1') + \text{sen}\,(a-1') = 2\,\text{sen}\,a\cos 1',$$

ó $$\text{sen}\,(a+1') = \text{sen}\,a \times 2\cos 1' - \text{sen}\,(a-1') \qquad [A].$$

Traduciendo esta fórmula al lenguaje vulgar, tendremos la siguiente regla: *conociendo los senos de dos arcos consecutivos* a — 1′ *y* a, *se hallará el del arco siguiente* a + 1′ *multiplicando el seno del* *mediano por la cantidad constante y conocida* $2 \cos 1'$, *y restando del producto el seno del menor*.

Segun esta regla, como ya conocemos el seno de 0 y el del arco $1'$, se podrá hallar el del arco $2'$; conociendo el seno del arco $1'$ y el del arco $2'$, se podrá hallar el del arco $3'$; y así sucesivamente hasta llegar al seno del arco de 60°.

Los senos de los arcos comprendidos entre 60° y 90° pueden hallarse fácilmente por medio de los senos de los arcos menores que 60°.

En efecto, tenemos (27, 2.° teor.)

$$\operatorname{sen}(60^\circ + a) - \operatorname{sen}(60^\circ - a) = 2 \cos 60^\circ \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} a,$$

y por consiguiente

$$\operatorname{sen}(60^\circ + a) = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen}(60^\circ - a),$$

fórmula que nos da el seno del arco $60^\circ + a$, mayor que 60°, por medio de los senos de los arcos a y $60^\circ - a$, menores que 60°.

Habiendo hallado los senos de todos los arcos de las tablas hasta 90°, se tendrán al mismo tiempo los cosenos de todos estos arcos, puesto que el coseno de un arco es el seno de su complemento que se ha hallado ya.

Tal es el método de Simpson: pero los autores modernos han modificado la fórmula [A], y hallado otra que abrevia considerablemente este cálculo.

Observando que $\cos 1'$ es una cantidad poco diferente de 1, y por consiguiente $2 \cos 1'$ poco diferente de 2, llamando k al pequeño exceso de 2 sobre $2 \cos 1'$, que, es fácil hallar, vale 0,00000 00846 2, y siendo por consiguiente $2 \cos 1' = 2 - k$ sustituyendo este valor en la fórmula [A], será

$$\operatorname{sen}(a + 1') = \operatorname{sen} a \,.\, (2 - k) - \operatorname{sen}(a - 1'),$$

ó

$$\operatorname{sen}(a + 1') - \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} a - \operatorname{sen}(a - 1') - k \operatorname{sen} a \; [B].$$

Traduciendo esta fórmula al lenguaje vulgar, tendremos la regla siguiente: *siendo* $a - 1'$, a *y* $a + 1'$ *tres arcos consecutivos de las tablas, se hallará la diferencia de los senos del mayor y mediano, restando de la diferencia de los senos del mediano y menor el producto del seno del mediano por la cantidad constante* k. *Conocida dicha diferencia, añadiéndola el seno del mediano, se tendrá el del mayor.*

Segun esto, como conocemos el seno de 0 y el de $1'$, tendremos sucesivamente:

$\operatorname{sen} 2' - \operatorname{sen} 1' = \operatorname{sen} 1' - \operatorname{sen} 0 - k \operatorname{sen} 1'$	$\operatorname{sen} 2' = \operatorname{sen} 1' + (\operatorname{sen} 1' - \operatorname{sen} 0) - k \operatorname{sen} 1'$,
$\operatorname{sen} 3' - \operatorname{sen} 2' = \operatorname{sen} 2' - \operatorname{sen} 1' - k \operatorname{sen} 2'$	$\operatorname{sen} 3' = \operatorname{sen} 2' + (\operatorname{sen} 2' - \operatorname{sen} 1) - k \operatorname{sen} 2'$,
$\operatorname{sen} 4' - \operatorname{sen} 3' = \operatorname{sen} 3' - \operatorname{sen} 2' - k \operatorname{sen} 3'$	$\operatorname{sen} 4' = \operatorname{sen} 3' + (\operatorname{sen} 3' - \operatorname{sen} 2) - k \operatorname{sen} 3'$,
etc.	

El cálculo que exige la fórmula [B] es más sencillo que el que exige la fórmula [A]; pues en la fórmula [A] hay que multiplicar sen a por $2 \cos 1' = 1,\ 99999\ 99153\ 7$ en cada operacion, miéntras que en la fórmula [B] sólo hay que multiplicar sen a por $k = 0,00000\ 00846\ 2$.

Como hemos obtenido los valores de los senos de las tablas hasta el arco de 60°, partiendo de los valores de sen 1′ y de cos 1′ aproximados en ménos de una unidad del undécimo órden decimal, no sabremos, despues de las 3600 operaciones que hay que hacer, cuál es la aproximacion que hayamos obtenido: más, comparando los valores de los senos de los arcos 9°, 18°, 27° 30°, 36°, 45°, 54°, 60°, que hallemos por este método, con los valores obtenidos (39) con quince cifras decimales, podremos juzgar, por las cifras comunes que nos den ambos métodos, con cuántas de las obtenidas por el último podremos contar al fin. Al mismo tiempo será conveniente hacer estas comparaciones cuanto más antes y cuanto más á menudo se pueda, para ver si en los cálculos efectuados se ha cometido algun error.

Hallados los senos y cosenos de todos los arcos de las tablas hasta 90°, las tangentes pueden hallarse por la fórmula

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}.$$

Teniendo construidas las tangentes de los arcos de las tablas hasta 90°, tambien se tienen las cotangentes ó tangentes de los complementos.

Así se pueden construir unas tablas de líneas trigonométricas naturales.

41. Las tablas no contienen ordinariamente más que los logaritmos de las líneas trigonométricas, que son los que se emplean en la práctica. Para construir estas tablas, se hallan por las tablas de logaritmos de los números los logaritmos de los senos y cosenos naturales, conocidos ya; y los logaritmos de las tangentes y cotangentes se hallan, sin necesidad de conocer los valores naturales de estas dos líneas trigonométricas, por las ecuaciones

$$\log \operatorname{tg} a = \log \operatorname{sen} a - \log \cos a,$$
$$\log \cot a = \log \cos a - \log \operatorname{sen} a,$$

que resultan evidentemente de las fórmulas

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}.$$

CAPÍTULO VII.

Disposicion y uso de las tablas trigonométricas.

42. Los senos y cosenos, las tangentes de los arcos comprendidos entre 0 y 45°, y las cotangentes de los comprendidos entre 45° y 90° son números positivos menores que 1, y por tanto sus logaritmos son negativos. En las tablas trigonométricas ordinarias, los logaritmos de las líneas trigonométricas tienen 10 de más que los logaritmos de las líneas trigonométricas verdaderas (*). Por consiguiente, si dado un logaritmo de una línea trigonométrica verdadera, se quiere obtener el logaritmo tabular de dicha línea trigonométrica, se añadirán 10 á la característica del primer logaritmo; y al contrario, se quitarán 10 de la característica de un logaritmo tabular para obtener el logaritmo de la línea trigonométrica verdadera.

Si tenemos una ecuacion (con una incógnita) en que entren líneas trigonométricas, y éstas son verdaderas, como es lo corriente, y la incógnita está despejada, será fácil indicar en primer lugar el cálculo logarítmico, y efectuarlo en seguida por medio de los logaritmos de dichas líneas trigonométricas verdaderas.

Ya se ve que este método es muy sencillo; pero como á veces hay que sumar ó restar varios logaritmos de característica negativa y mantisa positiva, se necesita entonces, al efectuar el cálculo bastante cuidado para evitar confusion.

El método que ahora vamos á presentar, aunque más pesado, por la preparacion que exige la ecuacion á que se va aplicar el cálculo logaritmico, es sumamente fácil.

Sea por ejemplo sen A un seno verdadero, sen' A el seno tabular del mismo arco A: tendremos, segun lo hemos visto,

$$\log \operatorname{sen}' A = \log \operatorname{sen} A + 10 = \log \operatorname{sen} A + \log 10^{10} = \log (\operatorname{sen} A \times 10^{10});$$

luego

$$\operatorname{sen}' A = \operatorname{sen} A \times 10^{10}, \text{ y } \operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen}' A}{10^{10}};$$

es decir, que toda línea trigonométrica tabular es 10 veces ma-

(*) En las tablas de Callet y en las de Calbet los logaritmos de las tangentes de los arcos mayores que 45° y los de las cotangentes de las menores que 45° no tienen esta decena de más; es decir, que dichos logaritmos son los de las tangentes y cotangentes verdaderas.

yor que la respectiva verdadera, y que por el contrario toda línea trigonométrica verdadera es 10^{10} veces menor que la tabular respectiva. Luego, reemplazando en la ecuacion que se dé, y cuyo cálculo logarítmico quiera indicarse, cada línea trigonométrica por su razon á 10^{10}, las nuevas líneas trigonométricas que entren en la ecuacion serán tabulares. Despues de esto, la indicacion del cálculo logarítmico será muy fácil, y el cálculo no dará lugar á confusion alguna.

Ejemplo 1.° Sea

$$x = a \text{ sen } B,$$

siendo a un número dado, B un ángulo conocido y x un número incógnito.

Indicacion del cálculo logarítmico.

1.^{er} *método*. $\log x = \log a + \log \text{sen } B.$

2.° *método*. Pasando primeramente á las líneas trigonométricas tabulares, la ecuacion será

$$x = \frac{a \text{ sen } B}{10^{10}};$$

luego

$$\log x = \log a + \log \text{sen } B - 10,$$

y en esta ecuacion y en la inmediata anterior sen B es un seno tabular.

Ejemplo 2.° Sea

$$\text{sen } x = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B},$$

siendo b y B dos ángulos conocidos y x un ángulo incógnito.

Indicacion del cálculo logarítmico.

1.^{er} *método*. $\log \text{sen } x = \log \text{sen } b - \log \text{sen } B.$

2.° *método*. Pasando á las líneas trigonométricas tabulares, la ecuacion será

$$\frac{\text{sen } x}{10^{10}} = \frac{\dfrac{\text{sen } b}{10^{10}}}{\dfrac{\text{sen } B}{10^{10}}}, \quad \text{ó} \quad \text{sen } x = \frac{\text{sen } b \times 10^{10}}{\text{sen } B};$$

luego

$$\log \text{sen } x = \log \text{sen } b + 10 - \log \text{sen } B$$
$$= \log \text{sen } b + \text{C.}^{10} \log \text{sen } B,$$

y en esta ecuacion y en la inmediata anterior sen x, sen b y sen B son senos tabulares.

Ejemplo 3.° Sea

$$\text{sen}\, x = \sqrt{\frac{\text{sen}\, A \;\text{sen}\, B}{\text{sen}\, C \;\text{sen}\, D}},$$

siendo A, B, C y D ángulos conocidos y x un ángulo incógnito.

Indicacion del cálculo logarítmico.

1.er *método*.

$\log \text{sen}\, x = \frac{1}{2} (\log \text{sen}\, A + \log \text{sen}\, B - \log \text{sen}\, C - \log \text{sen}\, D)$.

2.° *método*. Pasando á las líneas trigonométricas tabulares, la ecuacion será

$$\frac{\text{sen}\, x}{10^{10}} = \sqrt{\frac{\text{sen}\, A \;\text{sen}\, B}{\text{sen}\, C \;\text{sen}\, D}}$$

ó bien

$$\text{sen}\, x = \sqrt{\frac{\text{sen}\, A \;\text{sen}\, B \; 10^{20}}{\text{sen}\, C \;\text{sen}\, D}};$$

luego

$$\log \text{sen}\, x = \tfrac{1}{2} (\log \text{sen}\, A + \log \text{sen}\, B + 10 + 10 - \log \text{sen}\, C - \log \text{sen}\, D),$$

ó

$$\log \text{sen}\, x = \tfrac{1}{2} (\log \text{sen}\, A + \log \text{sen}\, B + \text{C.}^{\text{to}} \log \text{sen}\, C + \text{C.}^{\text{to}} \log \text{sen}\, D),$$

y en esta ecuacion y en la inmediata anterior todas las líneas trigonométricas son tabulares.

NOTA. Nosotros seguiremos el primer método cuando no haya que restar logaritmos de líneas trigonométricas, y el segundo en el caso contrario; pero los dos métodos pueden seguirse en todos los casos.

43. En lo que vamos á decir acerca de la disposicion y uso de las tablas trigonométricas, nos referimos á las tablas de Lalande extendidas á siete decimales por Mr. Marie.

Estas tablas contienen los logaritmos de los senos, tangentes, cotangentes y cosenos para todos los arcos menores que 90°, que crecen de minuto en minuto. Para todos los arcos menores que 45° los grados están en la parte superior de cada página, y los minutos en la primera columna de la izquierda. Para todos los arcos mayores que 45° los grados están en la parte inferior de cada página, y los minutos en la primera columna de la derecha.

La columna que señala las diferencias de los logaritmos de las tangentes de dos arcos consecutivos, señala tambien las diferencias de los logaritmos de las cotangentes de los mismos arcos, y por eso dicha columna tiene por título *diferencia comun* (*).

44. *Dado un arco, hallar por medio de las tablas el logaritmo de cualquiera de sus líneas trigonométricas.*

1.° Si el arco no tiene segundos, la cuestion no tiene dificultad.

2.° Si el arco tiene segundos, y la línea trigonométrica cuyo logaritmo se quiere hallar es un seno ó una tangente, se halla el logaritmo-seno ó el logaritmo-tangente de los grados y minutos, y se procede en seguida como en los ejemplos siguientes.

Hallar el logaritmo-seno de 48° 54′ 33″.

Tenemos

$$\log \text{sen}\,(48^\circ\,54') = \bar{1},8771198.$$

Como el arco dado es mayor que el arco 48° 54′ su seno será mayor que el seno de este, y por consiguiente su logaritmo-seno será tambien mayor que el logaritmo-seno del arco 48° 54′. Para hallar la cantidad x, que hay que añadir al logaritmo hallado para tener el logaritmo pedido, se admite que *las diferencias de los logaritmos de las líneas trigonométricas son proporcionales á las diferencias de sus arcos;* proporcion inexacta, pero que da en general una aproximacion suficiente, cuando, como aquí sucede, las diferencias son muy pequeñas.

En el ejemplo propuesto la diferencia de los logaritmos de los senos de los arcos 48° 54′ y 48° 55′, que comprenden al arco dado, es 1102 diezmillonésimas: esta diferencia está calculada en las tablas. Tendremos, pues,

$$60 : 33 :: 1102 : x = 606 \text{ diezmillonésimas;}$$

luego $\quad \log \text{sen}\,(48^\circ\,54'\,33'') = \bar{1},8771804.$

Hallar el logaritmo-tangente tabular de 36° 32′ 17″.

$$\begin{array}{rr} \log \text{tg}\,(36^\circ\,32') = & 9,8697372 \\ \ldots & 748 \\ \hline \ldots & 9,8698120 \end{array}$$

$$60 : 17 :: 1641 : x = 748.$$

(*) Es fácil demostrar que *la diferencia de los logaritmos de las tangentes de los arcos es igual á la diferencia de los logaritmos de las cotangentes de los mismos arcos*: pues si a y a' son los arcos, tendremos

$$\text{tg}\,a = \frac{1}{\cot a}, \quad \text{tg}\,a' = \frac{1}{\cot a'};$$

luego $\quad \dfrac{\text{tg}\,a}{\text{tg}\,a'} = \dfrac{\cot a'}{\cot a};$

y por consiguiente $\quad \log \text{tg}\,a - \log \text{tg}\,a' = \log \cot a' - \log \cot a.$

Luego

$$\log \operatorname{tg} (36^\circ\, 32'\, 17'') = 9{,}8698120.$$

Si la línea trigonométrica, cuyo logaritmo se quiere hallar, es un coseno ó una cotangente, se halla primeramente el logaritmo-coseno ó el logaritmo-cotangente del arco inmediato mayor de las tablas (*), y se continúa como en los ejemplos siguientes.

Hallar el logaritmo-coseno de $73^\circ\, 27'\, 56''$.

Tenemos

$$\log \cos (73^\circ\, 28') = \bar{1}{,}4541939.$$

Cuanto mayor es el arco, menor es su coseno; luego al logaritmo hallado deberá añadirse la cantidad que resulte de la proporcion

$$60 : 4 : : 4253 : x = 284.$$

Luego

$$\log \cos (73^\circ\, 27'\, 56'') = \bar{1}{,}4542223.$$

Hallar el logaritmo-cotangente tabular de $25^\circ\, 32'\, 24''$.

$$\begin{array}{rl} \log \cot (25^\circ\, 33') = & 10{,}3205292 \\ & 1949 \\ \hline \log \cot (25^\circ\, 32'\, 24'') = & 10{,}3207241 \end{array}$$

$$60 : 36 : : 3248 : x = 1948{,}8.$$

45. *Dado el logaritmo de una línea trigonométrica, hallar por medio de las tablas el arco correspondiente.*

1.° Si el logaritmo dado se halla exactamente en las tablas, la cuestion no tiene dificultad.

2.° Si el logaritmo dado no se halla exactamente en las tablas, y es un logaritmo-seno ó un logaritmo-tangente, se hallará el arco correspondiente al logaritmo-seno ó logaritmo-tangente inmediato menor, y se procederá en seguida como en los ejemplos siguientes.

Hallar el arco cuyo logaritmo-seno es $\bar{1}{,}8543246$.

El logaritmo-seno inmediato inferior es $\bar{1}{,}8542329$, que corresponde al arco $45^\circ\, 38'$.

Como este logaritmo-seno es menor que el dado, el arco $45^\circ\, 38'$ será tambien menor que el arco pedido. Para hallar el número x de segundos que debemos añadir al arco hallado para tener el arco pedido, hallamos la diferencia entre logaritmo dado y el

(*) Puede hallarse, si se quiere, el log-cos ó log-cot correspondiente al arco inmediato menor de las tablas; y haciéndolo así, se restan de este logaritmo, que es demasiado grande, las diezmillonésimas que resultan de la proporcion.

logaritmo-seno tomado en las tablas, la cual es 917 diezmillonésimas, y formamos la proporcion

$$1235 : 917 :: 60 : x = 44'', 5.$$

Luego el arco, cuyo logaritmo-seno es $\bar{1},8543246$, es 45° 58' 44'', 45.

Sea log tg A $= 9,5843212$, *siendo tg* A *una tangente tabular, y tratemos de hallar el valor del ángulo* A.

$$\begin{array}{r} 9,5843212 \\ 9,5841774 \ldots\ldots 21^\circ\ 0' \\ \hline 1438 \end{array}$$

$$3775 : 1438 :: 60 : x = 22'', 8.$$

Luego

$$A = 21^\circ\ 0'\ 22'', 8.$$

Si el logaritmo dado es el de un coseno ó el de una cotangente, se hallará en primer lugar el arco correspondiente al logaritmo-coseno ó al logaritmo-cotangente inmediato mayor de las tablas (*), y se continuará como en los ejemplos siguientes.

Sea log cos A $= 9,4697523$, *siendo cos* A *un coseno tabular*.

$$\begin{array}{r} 9,4700461 \ldots\ldots 72^\circ\ 50' \\ 9,4697523 \\ \hline 2938 \end{array}$$

Cuanto mayor es el logaritmo-coseno, mayor es el coseno, y menor el arco correspondiente; luego al arco 72° 50' ha y que añadir los segundos que nos da la proporcion

$$4092 : 2938 :: 60 : x = 43''.$$

Luego

$$A = 72^\circ\ 50'\ 43''.$$

Sea log cot A $= \bar{1},7543212$.

$$\begin{array}{r} \bar{1},7544088 \ldots\ldots 60^\circ\ 24 \\ \bar{1},7543212 \\ \hline 876 \end{array}$$

$$2942 : 876 :: 60 : x = 17'', 8.$$

Luego

$$A = 60^\circ\ 24'\ 17'', 8.$$

(*) Tambien puede hallarse, si se quiere, el arco correspondiente al *log-cos* ó *log-cot* inmediato menor de las tablas, y entonces se restan del arco hallado, que es demasiado grande, los segundos que resultan de la proporcion.

46. Sabemos que el seno de un ángulo cualquiera es positivo, y que el coseno, la tangente y la cotangente de un ángulo obtuso son números negativos: por consiguiente, si el ángulo está determinado por su coseno negativo, su tangente negativa ó su cotangente negativa, como las cantidades negativas no tienen logaritmos, parece que no es posible el determinar por medio de las tablas de logaritmos de las líneas trigonométricas el valor de dicho ángulo obtuso. Pero esta dificultad se evitará de cualquiera de los dos modos siguientes.

1.° Sea $\cos A = -n$, siendo n un número absoluto.

Puesto que el ángulo A es obtuso, hagamos $A = 90° + A'$, y tendremos

$$\cos(90° + A') = -n, \quad \text{ó} \quad -\text{sen}\, A' = -n, \quad \text{sen}\, A' = n, \text{ y}$$
$$\log \text{sen}\, A' = \log n.$$

Hallado el ángulo A', tendremos en seguida

$$A = 90° + A'.$$

2.° Sea $\cos A = -n$, siendo n un número absoluto.

Puesto que el ángulo A es obtuso, hagamos $A = 180° - A'$ y tendremos

$$\cos(180° - A') = -n, \quad \text{ó} \quad -\cos A' = -n, \quad \cos A' = n, \text{ y}$$
$$\log \cos A' = \log n.$$

Hallado el ángulo A', tendremos $A = 180° - A'$.

Este segundo modo de hallar el ángulo obtuso A equivale á decir que se prescinda del signo — de la línea trigonométrica, en cuyo caso el valor absoluto de esta corresponde al suplemento del ángulo A: hallado el valor de este suplemento, se tendrá en seguida el ángulo A.

Del mismo modo se hallará el valor del ángulo obtuso A, cuando está determinado por una tangente ó cotangente negativa.

Ejemplo. *¿Cuál es el ángulo cuyo seno es* $-\frac{2}{3}$?

1.^{er} *método*. Sea x este ángulo: siendo negativo su coseno, será obtuso dicho ángulo. Hagamos, pues, $x = 90° + x'$, y tendremos

$$\cos(90° + x') = -\tfrac{2}{3},$$

ó
$$\text{sen}(-x') = -\tfrac{2}{3},$$

y por tanto
$$\text{sen}\, x' = \tfrac{2}{3}.$$

Tomando logaritmos será

$$\log \text{sen}\, x' = \log 2 - \log 3,$$

ó bien (*Alg.* 218) $\log \text{sen}\, x' = \log 2 + \text{C.}^{\text{to}} \log 3 - 10.$

Cálculo.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \text{C.}^{\text{to}} \log 3 &= 9{,}5228787 \\ \hline \log \operatorname{sen} x' &= \bar{1}{,}8239087 \\ x' &= 41^\circ\, 48'\, 37'', \end{aligned}$$

y $$x = 131^\circ\, 48'\, 37''.$$

2.° *método.* Llamemos, prescindiendo del signo, x' al ángulo cuyo coseno sea $\frac{2}{3}$. Tendremos, tomando logaritmos en la ecuacion

$$\cos x' = \tfrac{2}{3},$$

$$\log \cos x' = \log 2 + \text{C.}^{\text{to}} \log 3 - 10,$$

y efectuando este cálculo, resulta

$$x' = 48^\circ\, 11'\, 23'',$$

y por lo tanto el ángulo pedido x será el suplemento de este.

Di un cuaderno
de D. José Negui
sobre las tablas
de Callet que son
las que rodan en
la escuela de
agricultura

LIBRO SEGUNDO.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

INTRODUCCION.

47. Se sabe por la Geometría que cuando se dan tres de las seis partes de un triángulo, entre las cuales hay por lo ménos un lado, es fácil construir el triángulo, y hallar por consiguiente las tres partes incógnitas; que cuando solo se dan los tres ángulos, el problema es indeterminado, pues hay una infinidad de triángulos que tienen los mismos ángulos, y que por tanto satisfacen á la cuestion.

Mas si las tres partes se dan en números, y se quieren hallar en números tambien las tres partes incógnitas, las construcciones geométricas, de que aún se pudiera hacer uso (*), darian resultados muy inexactos, á causa de la imperfeccion de los instrumentos y demas medios necesarios.

Es, pues, preciso recurrir al cálculo para resolver este problema con la exactitud suficiente.

Trigonometría rectilínea es la ciencia que trata de la resolucion de los triángulos rectilíneos por medio del cálculo.

Para resolver este problema, es necesario hallar las relaciones que hay entre los lados y los ángulos de un triángulo. Pero como los ángulos no pueden ligarse directamente con los lados, sino por medio de ecuaciones muy complicadas (**), ha sido ne-

---

(*) Véase el número 71.

(**) Veremos que siendo a un lado de un triángulo, A su ángulo opuesto y r el radio del círculo circunscrito al triángulo, es $a=2r$ sen A: mas (*Série* [S] *del complemento*)

$$\text{sen } A = A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

siendo la unidad á que se refiere el ángulo A el ángulo cuyo arco correspondiente es igual á 1; luego

$$a = 2r\left(A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}\right).$$

Tal es la ecuacion que liga á un lado cualquiera de un triángulo y á su ángulo opuesto.

cesario introducir en lugar de los ángulos las líneas trigonométricas, cuyos valores dependen, segun lo hemos visto, del que tenga el ángulo, y al contrario, y cuyas relaciones con los lados del triángulo son muy sencillas, como lo vamos á ver en los teoremas siguientes: quedando así ligados de una manera indirecta los lados de los triángulos con los ángulos.

CAPÍTULO I.

Teorema de los triángulos.

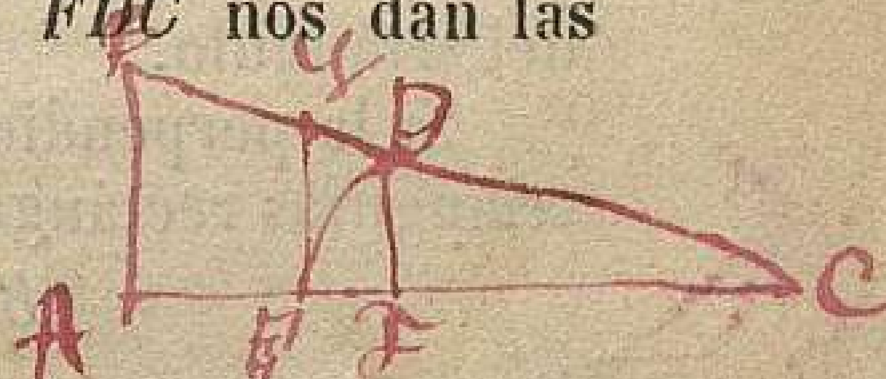
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

48. 1.° *En todo triángulo rectángulo un cateto cualquiera es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto al cateto, ó por el coseno del ángulo comprendido.*

Fig. 8. Sea el triángulo rectángulo ABC: llamemos, para la brevedad, a, b y c á los lados BC, AC y AB (*).

Describamos con un radio cualquiera, que tomemos por unidad, el arco DE correspondiente al ángulo C, y señalemos el seno DF de este arco. Los triángulos semejantes ABC y FDC nos dan las proporciones

$$\frac{AB}{DF}=\frac{BC}{DC}=\frac{AC}{CF},$$



ó bien

$$\frac{c}{\text{sen } C}=\frac{a}{1}=\frac{b}{\cos C};$$

$c = a \text{ sen } C$
$c = a \cos B$

de las cuales resultan

$$c = a \text{ sen } C,\quad b = a \cos C,$$

que es lo que queríamos demostrar.

2.° *En todo triángulo rectángulo un cateto cualquiera es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero.*

En efecto, segun el teorema anterior, tenemos

$$c = \cancel{a} \text{ sen } C,\quad b = \cancel{a} \cos C:$$

eliminando la a entre estas dos ecuaciones, lo que en este caso se consigue con facilidad dividiendo ordenadamente una por otra, tendremos

$$\frac{c}{b}=\frac{\text{sen } C}{\cos C};$$

(*) Seguiremos esta anotacion en adelante.

y pues $$\frac{\text{sen } C}{\cos C} = \text{tg } C,$$

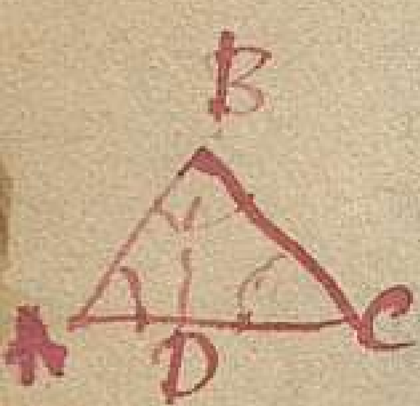
será $$\frac{c}{b} = \text{tg } C,$$

de donde resulta $$c = b \text{ tg } C,$$

que es el enunciado del teorema.

Este teorema se demuestra directamente con mucha sencillez comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes ABC y CEG.

TRIÁNGULOS GENERALES Ú OBLICUÁNGULOS.



49. 1.º *En todo triángulo los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

Figs. 9 y 10. Sea el triángulo ABC: desde uno de sus vértices B bajemos la perpendicular al lado opuesto AC. Si los dos ángulos A y C son agudos, esta perpendicular caerá dentro del triángulo; y si uno es agudo y otro obtuso, dicha perpendicular caerá fuera del triángulo.

Si la perpendicular cae dentro del triángulo (*Fig*, 9), en los dos triángulos rectángulos ABD y CBD tendremos

$$BD = c \text{ sen } A, \quad BD = a \text{ sen } C;$$

luego

$$c \text{ sen } A = a \text{ sen } C,$$

de donde resulta la proporcion

$$c : a : : \text{sen } C : \text{sen } A,$$

conforme al teorema.

Si la perpendicular cae fuera del triángulo (*Fig*. 10), en el triángulo rectángulo BAD será

$$BD = c \text{ sen } BAD;$$

pero siendo el ángulo BAD suplemento del ángulo BAC, es (13) sen $BAD =$ sen BAC; luego $BD = c$ sen BAC. Ahora se continúa la demostracion como en el caso anterior.

Corolario. *En todo triángulo la suma de dos lados es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de los ángulos opuestos á dichos lados es á la tangente de la mitad de la diferencia de los mismos ángulos.*

De la proporcion

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$$

resulta (*Aritm.*, 173) sumando y restando

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{sen } A+\text{sen } B}{\text{sen } A-\text{sen } B};$$

$$\frac{\text{sen } p+\text{sen } q}{\text{sen } p-\text{sen } q}=\frac{\text{tg}\frac{p+q}{2}}{\text{tg}\frac{p-q}{2}}$$

mas (33)

$$\frac{\text{sen } A+\text{sen } B}{\text{sen } A-\text{sen } B}=\frac{\text{tg}\,\dfrac{A+B}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{A-B}{2}};$$

luego

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{tg}\,\dfrac{A+B}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{A-B}{2}},$$

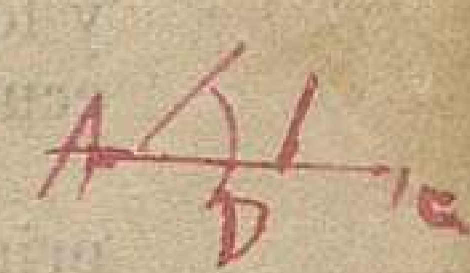
que es el enunciado del teorema.

2.° *En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados, ménos el duplo del producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido*: es decir,

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$ BC = AB + AC − 2AC AD

Si el ángulo A es agudo (*Figs.* 9 y 11), tenemos (*Geom.*, *teor.* 72)

$$a^2=b^2+c^2-2b\times AD:$$



en el triángulo rectángulo ABD es

$$AD=c\cos A;$$

sustituyendo este valor en la ecuacion anterior, resulta

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

Si el ángulo A es obtuso (*Fig.* 10), el teorema debe ser el mismo, segun el principio de Descartes (15); y en efecto, tenemos (*Geom.*, *teor.* 73) $a^2=b^2+c^2+2b\times AD$:

en el triángulo rectángulo ABD es

$$AD=c\cos BAD=c\times-\cos BAC=-c\cos A;$$

luego

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\ (*).$$

(*) Algunos autores escriben esta ecuacion bajo la forma

$$2bc\cos A=b^2+c^2-a^2,$$

ó bajo la

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

y enuncian el teorema correspondiente á cada una de estas formas.

No será inútil advertir á los principiantes que un mismo teorema puede enunciarse de tantos modos como formas diferentes puede tener la ecuacion correspondiente.

50. Aplicado este segundo teorema á los tres lados del triángulo, nos da las tres ecuaciones distintas:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 2bc \cos A \qquad [m],$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \qquad [n],$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \qquad [o],$$

que contienen á las seis partes del triángulo; y por consiguiente ellas solas pueden servir para resolver el problema general de la Trigonometría rectilínea. Este último teorema debe, pues, comprender todos los teoremas de los triángulos rectilíneos: y no se piense que en esto hay un círculo vicioso; pues aunque para demostrar este teorema nos hemos valido del teorema (48, 1.º), sería muy fácil hallar el valor de AD, haciendo en el triángulo ABD la misma construccion que se hizo para demostrar dicho teorema (48, 1.º).

Si del teorema segundo de los triángulos generales deducimos el primero, quedará demostrado que el teorema segundo es el general; pues los teoremas de los triángulos rectángulos no son más que casos particulares de estos, como lo veremos más adelante.

Para demostrar el teorema (49, 1.º) por medio del teorema (49, 2.º), es decir, para hallar la relacion entre los ángulos A y B, y los lados opuestos a y b, no hay más que eliminar la c entre las ecuaciones [m] y [n].

Para hacer esta eliminacion de un modo fácil, eliminaremos en primer lugar el cuadrado c^2 (*Alg.* 188, 2.º *caso*), y tendremos

$$a^2 - b^2 = b^2 - a^2 + 2c\,(a \cos B - b \cos A),$$

ó
$$a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b \cos A).$$

Sumando ahora las dos ecuaciones [m] y [n], resulta

$$c = a \cos B - b \cos A.$$

Multiplicando las dos ecuaciones últimas para eliminar la c, tendremos

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A,$$

ó
$$a^2 - b^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 B - b^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 A,$$

ó
$$a^2 \operatorname{sen}^2 B = b^2 \operatorname{sen}^2 A:$$

extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, y observando que siendo $a \operatorname{sen} B$ y $b \operatorname{sen} A$ cantidades positivas, el signo — en uno de los miembros es inadmisible, tendremos

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A,$$

de donde se deduce la proporcion

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}.$$

Para demostrar directamente este teorema, demostraremos antes este otro: *un lado cualquiera de un triángulo es igual al diámetro del círculo circunscrito multiplicado por el seno del ángulo opuesto á dicho lado.*

Fig. 12. Sea ABC un triángulo cualquiera: circunscribamos un círculo á este triángulo, dirijamos un diámetro BD que pase por uno de los vértices del triángulo, y la cuerda DC que será perpendicular al lado BC; haciendo centro en D, describimos con un radio arbitrario, que tomaremos por unidad, el arco MN correspondiente al ángulo BDC, y tracemos por último el seno MP de dicho arco. Tenemos en los triángulos semejantes BDC y MDP la proporcion

$$BC : BD : : MP : MD;$$

reemplazando estas líneas por sus valores, y teniendo en cuenta que el ángulo D es igual al ángulo A, será

$$a : 2r : : \text{sen } A : 1,$$

de donde

$$a = 2r \text{ sen } A,$$

que es lo que queríamos demostrar (*).

Segun este teorema, tenemos

$$a = 2r \text{ sen } A, \quad b = 2r \text{ sen } B;$$

y por consiguiente

$$a : b : : \text{sen } A : \text{sen } B.$$

De este teorema resultan, como casos particulares, los dos teoremas [48] de los triángulos rectángulos.

En efecto, sea ABC un triángulo rectángulo en A: tendremos

$$a : b : : \text{sen } A : \text{sen } B;$$

y pues, siendo A un ángulo recto, es sen $A = 1$, será

$$a : b : : 1 : \text{sen } B,$$

de donde resulta

$$b = a \text{ sen } B;$$

y como, por ser el ángulo B complemento del ángulo C, es

$$\text{sen } B = \cos C,$$

será

$$b = a \cos C.$$

(*) Si se supone conocido el primer teorema de los triángulos rectángulos, será inútil la construccion hecha para suplir dicho teorema, y se tendrá inmediatamente

$$a = 2r \text{ sen } D = 2r \text{ sen } A.$$

Tenemos tambien

$$b : c :: \text{sen } B : \text{sen } C = \cos B;$$

luego

$$b = c \operatorname{tg} B.$$

El teorema (49, 1.°) nos da las tres ecuaciones

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } C}.$$

Una cualquiera de estas tres ecuaciones es consecuencia de las otras dos (*Alg.* 93), y por tanto no son en realidad más que dos ecuaciones distintas.

Si observamos que entre los tres ángulos A, B y C existe la relacion

$$A + B + C = 2R,$$

tendremos tres ecuaciones distintas con tres incógnitas; y así, de ellas podrá deducirse el teorema (49, 2.°).

Tratemos, por ejemplo, de hallar la relacion entre los tres lados a, b, c y el ángulo A.

Tenemos que eliminar entre las tres ecuaciones

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B},$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } C},$$

$$A + B + C = 2R$$

las dos cantidades B y C.

De la ecuacion $A + B + C = 2R$ sale

$$B = 2R - (A + C),$$

y sustituyendo este valor en la primera ecuacion, que la tomaremos invertida para abreviar un poco el cálculo, tendremos (13)

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{sen } (A + C)}{\text{sen } A}.$$

La cuestion estará ahora reducida á eliminar la C entre esta ecuacion y la

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } C}.$$

Para esto, desenvolvamos (21) sen $(A + C)$, y la ecuacion primera será

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{sen } A \cos C + \cos A \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \cos C + \cot A \text{ sen } C \; [1].$$

De la segunda ecuacion sale

$$\operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} A}{a};$$

por consiguiente

$$\cos C = \pm\sqrt{1 - \frac{c^2 \operatorname{sen}^2 A}{a^2}} = \frac{\pm\sqrt{a^2 - c^2 \operatorname{sen}^2 A}}{a};$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion [1], será

$$\frac{b}{a} = \frac{\pm\sqrt{a^2 - c^2 \operatorname{sen}^2 A} + c \cos A}{a},$$

ó

$$b = \pm\sqrt{a^2 - c^2 \operatorname{sen}^2 A} + c \cos A,$$

que es la relacion pedida. Para simplificarla, pasaremos $c \cos A$ al primer miembro, y elevando en seguida al cuadrado y simplificando, resulta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

CAPÍTULO II.

Resolucion de los triángulos rectángulos.

51. En un triángulo rectángulo se conoce el ángulo recto, y por tanto bastará conocer dos de las otras cinco partes del triángulo, entre ellas por lo ménos un lado, para que el problema de la resolucion de los triángulos rectángulos sea determinado.

Por consiguiente, en la resolucion de estos triángulos pueden ocurrir los cuatro casos siguientes:

1.° Dados los dos catetos, resolver el triángulo.
2.° Dados la hipotenusa y un cateto.
3.° Dados un cateto y un ángulo agudo.
4.° Dados la hipotenusa y un ángulo agudo.

1.er caso. *Dados los dos catetos* b *y* c, *hallar la hipotenusa* a *y los ángulos* B *y* C.

La regla general para hallar cualquiera de las incógnitas en la resolucion de un triángulo cualquiera, consiste en escribir la ecuacion que contenga los datos y la incógnita, y en despejar en seguida esta incógnita.

Esto supuesto, la hipotenusa a se hallará por el teorema de Pitágoras, el cual nos da la ecuacion $a^2 = b^2 + c^2$ que contiene los datos b, c y la incógnita a. De esta ecuacion resulta

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

El ángulo B se hallará por el teorema (48, 2.°) que nos da la ecuacion $b = c \operatorname{tg} B$ que contiene los datos y la incógnita: de ella resulta

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}.$$

El ángulo $$C = 90^\circ - B.$$

Nota. Se ha hallado el valor de a por la fórmula $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; pero como esta fórmula tiene dos términos bajo el radical, y por tanto no está bien dispuesta para el cálculo logarítmico, es preferible hallar primeramente el ángulo B, y en seguida el lado a por la ecuacion $b = a \operatorname{sen} B$, de donde resulta

$$a = \frac{B}{\operatorname{sen} B}.$$

2.° caso. *Dados la hipotenusa y un cateto* b, *hallar el cateto* c *y los ángulos* B *y* C.

El cateto c se hallará por el teorema de Pitágoras que nos da la ecuacion $c^2 = a^2 - b^2$, de donde sale

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Este valor de c puede calcularse fácilmente por logaritmos, trasformando esta fórmula en la

$$c = \sqrt{(a + b)(a - b)}.$$

El ángulo B se hallará por el teorema (48, 1.°) que nos da la ecuacion $b = a \operatorname{sen} B$, de donde resulta

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}.$$

El ángulo $$C = 90^\circ - B.$$

Nota. El ángulo B está dado en este caso por medio del seno; y ya se sabe (14) que el seno no determina enteramente al ángulo, pues con un mismo seno puede ser agudo ú obtuso. Esta ambigüedad desaparece en los problemas determinados, teniendo en consideracion alguna condicion á la cual deba satisfacer el ángulo; en el caso actual, por ejemplo, el ángulo B es agudo, puesto que $B + C = 90^\circ$.

3.er caso. *Dados un cateto* b *y un ángulo agudo* B, *hallar el cateto* c, *la hipotenusa* a *y el ángulo* C.

El ángulo $$C = 90^\circ - B.$$

El cateto c se hallará por la ecuacion

$$c = b \operatorname{tg} C.$$

La hipotenusa a se hallará por la ecuacion $b = a \text{ sen } B$, de la cual resulta

$$a = \frac{b}{\text{sen } B}.$$

4.° caso. *Dados la hipotenusa y un ángulo agudo* B, *hallar los catetos* b, c *y el ángulo* C.

El ángulo $C = 90° - B$.

El cateto b se hallará por la ecuacion

$$b = a \text{ sen } B,$$

y el cateto c por la ecuacion

$$c = a \text{ sen } C.$$

Ejemplos.

1.° *Dados los dos catetos* b = 85'5, c = 114, *resolver el triángulo.*

Principiaremos por hallar un ángulo, B, por ejemplo, para lo cual tenemos la ecuacion

$$\text{tg } B = \frac{b}{c},$$

de la cual resulta

$$\log \text{tg } B = \log b - \log c,$$

ó bien

$$\log \text{tg } B = \log b + \text{C.}^{\text{to}} \log c - 10,$$

porque b es menor que c (*Alg.* 218).

Cálculo.

$$\begin{array}{r} \log b = 1,9319661 \\ \text{C.}^{\text{to}} \log c = 7,9430951 \\ \hline \log \text{tg } B = \bar{1},8750612, \\ B = 36° \; 52' \; 11'', \; 62; \end{array}$$

y por consiguiente

$$C = 90° - B = 53° \; 7' \; 48'', \; 38.$$

Para hallar la hipotenusa, nos valdremos de la ecuacion

$$a = \frac{b}{\text{sen } B};$$

y como hay que restar un logaritmo de característica negativa, pasaremos, segun lo digimos en (42, *Nota*), á las líneas trigonométricas tabulares; y dicha ecuacion será

$$a = \frac{b \cdot 10^{10}}{\text{sen } B}.$$

Tomando ahora logaritmos, tendremos

$$\log a = \log b + 10 - \log \operatorname{sen} B = \log b + \mathrm{C.^{to}} \log \operatorname{sen} B,$$

ecuacion en que sen B es un seno tabular.

Cálculo.

$$\begin{aligned} \log b &= 1{,}9319661 \\ \mathrm{C.^{to}} \log \operatorname{sen} B &= 0{,}2218488 \\ \hline \log a &= 2{,}1538149 \\ a &= 142'5. \end{aligned}$$

2.° *Dados la hipotenusa* a = 142'5 *y el cateto* b = 85'5, *resolver el triángulo.*

Para hallar el cateto c, tenemos

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)},$$
$$\log c = \tfrac{1}{2}\big(\log(a+b) + \log(a-b)\big).$$

Cálculo.

$$\begin{aligned} \log(a+b) &= \log 228 = 2{,}3579349 \\ \log(a-b) &= \log\ \ 57 = 1{,}7558749 \\ \hline & \qquad\qquad\ \ 4{,}1138098 \\ \log c &= 2{,}0569049, \\ c &= 114. \end{aligned}$$

Para hallar el ángulo B, tenemos la ecuacion

$$b = a \operatorname{sen} B, \quad \operatorname{sen} B = \frac{b}{a},$$

ó $\log \operatorname{sen} B = \log b + \mathrm{C.^{to}} \log a - 10$ (*Alg. elem.*, 218).

Cálculo.

$$\begin{aligned} \log b &= 1{,}9319661 \\ \mathrm{C.^{to}} \log a &= 7{,}8461851 \\ \hline \log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}7781512 \\ B &= 36^\circ\ 52'\ 11'',\ 6; \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$C = 53^\circ\ 7'\ 48'',\ 4.$$

3.° *Dados la hipotenusa* a = 5487'62 *y el ángulo* B = 54° 28' 17'', 2, *resolver el triángulo.*

El ángulo $C = 90° - B = 35° 31' 42'', 8$.
El cateto b se hallará por la ecuacion

$$b = a \text{ sen } B,$$

ó $$\log b = \log a + \log \text{sen } B.$$

Cálculo.

$$\begin{array}{r} \log a = 3,7393840 \\ \log \text{sen } B = \bar{1},9105316 \\ \hline \log b = 3,6499156 \\ b = 4465'96. \end{array}$$

Para hallar el cateto c, tenemos la ecuacion

$$c = a \text{ sen } C,$$

ó $$\log c = \log a + \log \text{sen } C.$$

Cálculo.

$$\begin{array}{r} \log a = 3,7393840 \\ \log \text{sen } C = \bar{1},7642573 \\ \hline \log c = 3,5036413, \\ c = 3188'90. \end{array}$$

4.° *Dados un cateto* b $= 4465'96$ *y un ángulo* B $= 54° 28' 17'', 2$, *resolver el triángulo.*

El ángulo $C = 90° - B = 35° 51' 42', 8$.
El cateto c se hallará por la ecuacion

$$c = b \text{ tg } C.$$

$$\log c = \log b + \log \text{tg } C.$$

Cálculo.

ó $$\begin{array}{r} \log b = 3,6499139 \\ \log \text{tg } C = \bar{1},8537255 \\ \hline \log c = 3,5036394, \\ c = 3188'89. \end{array}$$

Para hallar la hipotenusa, tenemos la ecuacion $b = a \text{ sen } B$, de la cual resulta

$$a = \frac{b}{\text{sen } B},$$

Pasando á las líneas trigonométricas tabulares, esta ecuacion será

$$a = \frac{b \cdot 10^{10}}{\text{sen } B};$$

y tomando ahora logaritmos, tendremos

$$\log a = \log b + 10 - \log \text{sen } B = \log b + \text{C.}^{\text{to}} \log \text{sen B},$$

ecuacion en que sen B es un seno tabular.

Cálculo.

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}6499139 \\ \text{C.}^{\text{to}} \log \text{sen } B &= 0{,}0894684 \\ \hline \log a &= 3{,}7393823, \\ a &= 5487'60. \end{aligned}$$

CAPÍTULO III.

Resolucion de los triángulos oblicuángulos ó generales.

52. En la resolucion de los triángulos oblicuángulos pueden ocurrir los cuatro casos siguientes:

1.° Dados dos lados y el ángulo comprendido, resolver el triángulo.

2.° Dados un lado y dos ángulos.

3.° Dados los tres lados.

4.° Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

53. Primer caso. *Dados dos lados* a, b *y el ángulo comprendido* C, *hallar el tercer lado* c *y los otros dos ángulos* A *y* B.

1.ª *solucion*, siguiendo el método general que hemos indicado al principio de la resolucion de los triángulos rectángulos.

Es indiferente principiar por hallar una cualquiera de las incógnitas.

Principiemos por hallar el lado c.

La ecuacion que contiene los datos y la incógnita es

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \quad (49\ 2^\circ)$$

y por consiguiente la incógnita estrayendo raiz

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} \qquad [1].$$

y Haciendo

$$2ab \cos C = m^2, \text{ tenemos}$$

y tomando logaritmos, será $c = \sqrt{a^2 + b^2 - m^2}$

$$\log m = \tfrac{1}{2} (\log 2 + \log a + \log b + \log \cos C).$$

Conociendo el número m, se tendrá

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - m^2}.$$

Se calcularán a^2, b^2 y m^2, cuyos logaritmos son conocidos, y hallando en seguida el valor del número $a^2 + b^2 - m^2$, se extraerá su raíz cuadrada por logaritmos ó sin ellos. $\sqrt{(a+b)^2 - m}$

Se puede dar á la fórmula [1] otra disposicion mejor para el cálculo de c.

Entre los diferentes medios que pueden seguirse para esto, el siguiente es, á nuestro entender, el más sencillo.

Tenemos (24, ó *Teor. 3.° del núm.* 27)

$$1 + \cos C = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}C,$$

ó pasando 1 al 2º miembro

$$\cos C = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}C - 1:$$

sustituyendo este valor en la fórmula [1], resulta

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,(2 \cos^2 \tfrac{1}{2}C - 1)} = \text{estrayendo raíz}$$

$$(X)\ \sqrt{(a+b)^2 - 4ab \cos^2 \tfrac{1}{2}C}.$$

Llamemos α^2 á la cantidad $4ab \cos^2 \tfrac{1}{2}C$, ó $\alpha^2 = 4ab\cos^2 \tfrac{1}{2}C$ y

estrayendo raíz $\alpha = 2 \cos \tfrac{1}{2}C \sqrt{ab}$ [2],

y tendremos sustituyendo en (X)

$$\sqrt{(a+b)^2 - \alpha^2} = \sqrt{(a + b + \alpha)(a + b - \alpha)}.$$

Para hallar el valor de α, tomando logaritmos en la ecuacion auxiliar [2], tendremos

$$\log \alpha = \log 2 + \log \cos \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(\log a + \log b).$$

Hallado el valor de α, será el valor del lado $c =$

$$= \log c = \tfrac{1}{2}\left(\log (a + b + \alpha) + \log (a + b - \alpha)\right). \ \frac{(\log(a+b-\alpha)}{2}$$

Para hallar el ángulo A, tenemos la ecuacion

$$\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}, \ (49)$$

ó bien, por ser B suplemento de $A + C$, y por tanto $\operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A + C)$, sustituyendo sen B = sen (A+B)

$$\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen}(A + C)}{\operatorname{sen} A},$$

ecuacion que contiene los datos a, b, C y la incógnita A.

Para deducir de dicha ecuacion el valor de la incógnita, desarrollaremos sen $(A + C)$, y tendremos por la formula (r)

sen (a + b) = sen a cos b + cos a sen b

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{sen } A \cos C + \cos A \text{ sen } C}{\text{sen } A},$$

ó bien ~~quitando~~ dividiendo el 2º miembro

$$\frac{b}{a} = \cos C + \cot A \text{ sen } C,$$

de donde

invirtiendo

$$\cot A = \frac{b - a \cos C}{a \text{ sen } C}, \quad \text{ó} \quad \operatorname{tg} A = \frac{a \text{ sen } C}{b - a \cos C}.$$

Del mismo modo, ó mejor permutando, A y B, a y b, se tendrá

$$\operatorname{tg} B = \frac{b \text{ sen } C}{a - b \cos C}.$$

Consideremos una cualquiera de estas dos ecuaciones, por ejemplo la

C < 90º ó > 90º

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \text{ sen } C}{b - a \cos C}.$$

El ángulo dado C puede ser agudo ú obtuso. Supongamos primeramente que el ángulo C sea agudo. Hagamos $m = a \cos C$, y por consiguiente

a cos C

$$\log m = \log a + \log \cos C,$$

ecuacion que nos dará el valor de m. Por tanto

tg A = a sen C / b cos C

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \text{ sen } C}{b - m}.$$

Si $b > m$, tomando logaritmos, se tendrá

$$\log \operatorname{tg} A = \log a + \log \text{sen } C - \log (b - m),$$

ecuacion que nos dará el ángulo A.

Si $b < m$, el ángulo A será obtuso, y se procederá de cualquiera de los dos modos que explicamos en (46).

Si $b = m$, el ángulo A será recto.

Supongamos ahora que el ángulo C sea obtuso. Haremos (46) $C = 90 + C'$ y por consiguiente será

b = m : log

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \text{ sen } (90^\circ + C')}{b - a \cos (90^\circ + C')} = \frac{a \cos C'}{b + a \text{ sen } C'}.$$

log tg A = log a + log cos C' + log falta sen C'

Se calculará en primer lugar la cantidad a sen C', y se continuará como en el caso anterior.

Nota. Sucede ordinariamente en la práctica que cuando se dan tres elementos que determinan un triángulo, sólo hace falta el conocer uno de los elementos incógnitos. Para esto conviene casi siempre seguir el método general, como lo hemos seguido en esta solucion. Pero cuando se quieren hallar los tres elementos incógnitos, se facilita á veces el cálculo de alguno de estos, considerando (como lo hemos hecho en 51, 1.er caso, Nota) el valor de alguna de las incógnitas, conocida ya, como uno de los datos. En el caso presente, por ejemplo, despues que se haya hallado uno de los ángulos incógnitos, supongamos el A, puede hallarse el lado c por la proporcion

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A}.$$

2.ª *solucion.*

Tenemos desde luego $A + B = 180^\circ - C$; es decir, que conocemos la suma de los dos ángulos A y B.

Podemos ahora hallar su diferencia por la proporcion (49, 1.º *Corolario*)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} (*). = \frac{\operatorname{tg} \frac{(A+B)}{2}}{\operatorname{tg} \frac{(A-B)}{2}}$$

Como los tres primeros términos de esta ecuacion son conocidos, será, indicando el cálculo logarítmico,

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - b) = \log (a - b) + \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B) - \log (a + b),$$

ecuacion que nos da la mitad de la diferencia de los ángulos A y B. Conociendo la suma y la diferencia de los ángulos A y B, el mayor, que será el que se oponga al mayor lado, será igual á la mitad de la suma más la mitad de la diferencia, y el menor será igual á la mitad de la suma ménos la mitad de la diferencia.

Para hallar el lado c, tenemos la proporcion

$$c : a :: \operatorname{sen} C : \operatorname{sen} A. \quad \text{ó} \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

NOTA 1.ª Para hallar el lado c, hay, segun la última fórmula, que tomar tres nuevos logaritmos. Se puede hallar una ecuacion que no exija para el cálculo de c más que dos nuevos logaritmos.

En efecto, siendo

$$\frac{a}{c} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C},$$

(*) Para que los dos miembros de esta ecuacion sean positivos, el minuendo ha de ser el lado mayor; es decir, que si el lado b fuese mayor que el a, se escribiria la proporcion así:

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+A)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-A)}.$$

será

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\text{sen } A+\text{sen } B}{\text{sen } C}.$$

Mas (27 1.°) $\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{ sen } \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$,
y (22) $\text{sen } C = 2 \text{ sen } \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C$;

luego Dart: $$\frac{a+b}{c}=\frac{\text{sen } \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen } \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}.$$

Siendo $A+B=180°-C$, ó $\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{1}{2}C$, y por consiguiente $\text{sen } \frac{1}{2}(A+B)=\cos \frac{1}{2} C$, la fórmula anterior se reduce á

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen } \frac{1}{2} C} \text{ (*)}. = \frac{a+b}{c} = \text{tg} \frac{1}{4} \frac{A-B}{c}$$

Tomando logaritmos, será

$$\log c=\log(a+b)+\log \text{sen } \tfrac{1}{2} C-\log \cos \tfrac{1}{2}(A-B).$$

Como el logaritmo de $a+b$ está hallado para el cálculo de los ángulos A y B, se ve que esta fórmula no exige más que los dos nuevos logaritmos de $\text{sen } \frac{1}{2} C$ y de $\cos \frac{1}{2}(A-B)$.

Nota 2.ª Puede suceder que los lados a y b no se conozcan sino por sus logaritmos: entonces, sin necesidad de hallar los valores de a y b, se puede obtener el valor de $\frac{1}{2}(A-B)$ del modo siguiente.

La fórmula

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{tg } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tg } \frac{1}{2}(A-B)}$$

se puede escribir así:

$$\frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}=\frac{\text{tg } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tg } \frac{1}{2}(A-B)}.$$

Llamemos φ fi al ángulo cuya tangente sea $\frac{b}{a}$ (18, *Nota*), esto es,

$\text{tg } \varphi=\frac{b}{a}$; será

$$\frac{1+\text{tg } \varphi}{1-\text{tg } \varphi}=\frac{\text{tg } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tg } \frac{1}{2}(A-B)},$$

(*) Si se hubiesen restado las dos proporciones, se hubiera hallado del mismo modo la fórmula $\frac{a-b}{c}=\frac{\text{sen } \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2} C}$, que tiene la misma ventaja que la del texto.

y pues $\dfrac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi)$, si es agudo

tendremos

$$\operatorname{tg} (45^\circ + \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B)}.$$

Por consiguiente

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (A - B) = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (A + B) - \log \operatorname{tg} (45 + \varphi);$$

pero, antes de hacer uso de esta fórmula, se hallará el valor del ángulo auxiliar φ por la ecuacion $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{b}{a}$, que nos da

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log b - \log a,$$

ó $$\log \operatorname{tg} \varphi = \log b + \text{C.}^{\text{to}} \log a - 10.$$

SEGUNDO CASO. *Dados el lado* a *y los ángulos* B *y* C, *hallar los lados* b, c *y el ángulo* A.

a B C | b c A

Tenemos desde luego

$$A = 180^\circ - (B + C).$$

El lado b se hallará por la ecuacion

$$\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}. \quad b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

El lado c se hallará igualmente por la ecuacion

$$\frac{c}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}. \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

TERCER CASO. *Dados los tres lados* a, b *y* c *hallar los tres ángulos* A, B *y* C.

a b c | A B C

El ángulo A se hallará por la ecuacion

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

que contiene los datos y la incógnita A. De ella resulta

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad [e].$$

Por medio de esta fórmula puede hallarse otra mejor dispuesta para el cálculo logarítmico.

Restemos de la unidad los dos miembros de la ecuacion [e] y tendremos

$$1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} =$$

$$\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}.$$

Introduzcamos en esta ecuacion el perímetro $a + b + c = 2p$.

Restando $2c$ de ambos miembros, es $a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c)$, é igualmente $a - b + c = 2(p - b)$; luego

$$1 - \cos A = \frac{2(p - b) \cdot 2(p - c)}{2bc} = \frac{2(p - b)(p - c)}{bc}.$$

Tenemos ahora (24)

$$1 - \cos A = 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}A;$$

luego, sustituyendo y suprimiendo el factor comun 2, será

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{(p - b)(p - c)}{bc}.$$

Extrayendo la raiz cuadrada, y observando que el signo — del radical es inadmisible, porque siendo $\frac{1}{2}A < 90^\circ$, todas sus líneas trigonométricas son positivas, será

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}} \qquad [a].$$

Aplicando á los ángulos B y C el teorema que da esta fórmula, ó permutando convenientemente las letras, resultarán estas otras dos fórmulas:

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{ac}} \qquad [b].$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{ab}} \qquad [c].$$

Añadiendo una unidad á los dos miembros de la ecuacion [e], hallaremos de un modo semejante al que acabamos de seguir:

$$\cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}} \qquad [a'],$$

y por consiguiente

$$\cos \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{p(p - b)}{ac}} \qquad [b'].$$

$$\cos \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{p(p - c)}{ab}} \qquad [c'].$$

Dividiendo cada una de las primeras fórmulas por su correspondiente de las segundas, resultan estas otras tres:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}} \qquad [a''].$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{p(p - b)}} \qquad [b''].$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{p(p - c)}} \qquad [c''].$$

Hallados los tres ángulos se tendrá una comprobacion, en que la suma de los tres debe ser 180°.

Nota. Si solo se quiere hallar un ángulo, cualquiera de estas fórmulas exige cuatro logaritmos; pero si se quieren hallar los tres ángulos, las fórmulas [a], [b], [c] exigen los seis logaritmos de $p - a$, $p - b$, $p - c$, a, b y c las fórmulas [a'], [b'], [c'] exigen los siete logaritmos de p, $p - a$, $p - b$, $p - c$, a, b y c; y las fórmulas [a''], [b''], [c''] no exigen más que los cuatro logaritmos de p, $p - a$, $p - b$ y $p - c$: son, pues, en tal caso preferibles estas últimas.

Cuarto caso. *Dados los lados* a, b *y el ángulo* A *opuesto á uno de ellos, hallar el tercer lado* c *y los otros dos ángulos* B *y* C.

El ángulo B se hallará por la proporcion

a | c
b | B
A | C

$$\text{sen } B : \text{sen } A : : b : a;$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} \qquad [h].$$

El ángulo $C = 180° - (A + B)$.

El lado c se halla en seguida por la proporcion

$$c : a : : \text{sen } C : \text{sen } A,$$

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}.$$

Nota 1.ª El ángulo B se halla en este caso por medio de su seno, y por tanto (14) la fórmula $\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a}$ no determina la especie del ángulo B, que puede ser agudo ú obtuso.

Examinemos los diferentes casos que pueden ocurrir en este problema.

Fig. 13. 1.° Si $a > b$, será $A > B$, y por consiguiente el ángulo B será agudo: luego en este caso no hay más que una sola solucion, ó lo que es igual, el problema es determinado.

2.° Si $a = b$, será $A = B$; luego tambien en este caso el problema es determinado; y para resolver el triángulo pueden emplearse, si se quiere, estas otras fórmulas:

$$C = 180° - 2A, \quad c = \frac{a \text{ sen } (180° - 2A)}{\text{sen } A} = \frac{a \text{ sen } 2A}{\text{sen } A} =$$

$$\frac{2a \cancel{\text{sen } A} \cos A}{\cancel{\text{sen } A}} = 2a \cos A;$$

fáciles de hallar directamente.

3.° Si $a < b$, será $A < B$. En este caso nada se opone á que el ángulo B tenga dos valores, el uno el ángulo agudo β dado por las tablas, y el otro su suplemento $180^\circ - \beta$. Y en efecto, bajando desde el vértice C la perpendicular CD al lado opuesto, como el ángulo A debe ser agudo, caerá dicha perpendicular dentro de este ángulo: tomando $DB' = BD$, y tirando la CB', esta oblícua será igual á la CB; y por tanto los datos a, b y A corresponden tanto al triángulo ACB en que el ángulo B es agudo, como al triángulo ACB' en que el ángulo B' es obtuso, como suplemento del $CB'D$ ó del igual á este B.

Siendo β y $180^\circ - \beta$ los dos valores de B, los correspondientes de C serán $180^\circ - A - \beta$, y $180^\circ - A - 180^\circ + \beta = \beta - A$. Los valores correspondientes de c, serán

$$c = \frac{a \operatorname{sen} (A + \beta)}{\operatorname{sen} A}, \quad c = \frac{a \operatorname{sen} (\beta - A)}{\operatorname{sen} A}.$$

4.° Si $a = CD$, será (48, 1.°) $a = b \operatorname{sen} A$: sustituyendo este valor en la ecuacion [h], será

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{b \operatorname{sen} A} = 1;$$

luego el ángulo B es recto: y el problema no tiene más que una solucion, que es el triángulo ACB rectángulo en B.

Si en este caso tomásemos logaritmos en la fórmula [h], hallariamos $\log \operatorname{sen} B = \log 1 = 0$; y este resultado nos advertiria que el ángulo B es recto.

5.° Si $a < CD$, será $a < b \operatorname{sen} A$, y por consiguiente

$$\operatorname{sen} B > \frac{b \operatorname{sen} A}{b \operatorname{sen} A}, \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} B > 1;$$

y si tomásemos logaritmos en la ecuacion [h], hallaríamos $\log \operatorname{sen} B > 0$, resultado absurdo, porque ningun seno ni coseno puede ser mayor que 1, y por tanto su logaritmo no puede ser mayor que 0; y este resultado nos advertiria que los datos son incompatibles, ó que el triángulo es imposible.

Todo lo que acabamos de hallar en esta discusion está acorde con lo que se vió en la Geometría, al resolver el problema 12.

Nota. 2.ª El lado c puede hallarse directamente por medio de la ecuacion

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

que contiene los datos y la incógnita, y que es una ecuacion completa de segundo grado con respecto á la incógnita c.

Resolviéndola, es

$$c = b \cos A \pm \sqrt{b^2 (\cos^2 A - 1) + a^2},$$

ó $$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A}.$$

En primer lugar, para que estos valores de c sean reales y el triángulo sea posible, es menester que $b \operatorname{sen} A < a$, es decir, que $a > CD$; y para que sean positivos los dos, y el problema tenga dos soluciones, es menester que $b^2 \cos^2 A > a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A$, ó $b^2 > a^2$, ó $a < b$ como lo hemos visto en la discusion anterior.

Vamos á trasformar esta fórmula en otra mejor dispuesta para el cálculo.

Tenemos evidentemente

$$c = b \cos A \pm a\sqrt{1 - \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 A}{a^2}}.$$

Como esta cantidad radical debe ser real, será

$$\frac{b^2 \operatorname{sen}^2 A}{a^2} < 1, \quad \text{ó} \quad \frac{b \operatorname{sen} A}{a} < 1:$$

luego si llamamos 6 al ángulo agudo cuyo seno es $\frac{b \operatorname{sen} A}{a}$, será (observando que de la ecuacion

$$\frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \operatorname{sen} 6, \text{ de donde}$$

resulta $b = \left(\frac{a \operatorname{sen} 6}{\operatorname{sen} A}\right)$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} 6 \cos A}{\operatorname{sen} A} \pm a \cos 6,$$ [illegible] comparando este extremo al quebrado

ó bien $$c = \frac{a \operatorname{sen} 6 \cos A \pm a \cos 6 \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A},$$

[illegible]

ó (21) $$c = \frac{a \operatorname{sen} (6 \pm A)}{\operatorname{sen} A};$$

y separando estos dos valores, tendremos

$$c = \frac{a \operatorname{sen} (6 + A)}{\operatorname{sen} A}, \quad c = \frac{a \operatorname{sen} (6 - A)}{\operatorname{sen} A},$$

los mismos que resultan por el primer método, porque el ángulo agudo 6 de esta fórmula, y el ángulo 6 de la solucion anterior tienen el mismo seno $\frac{b \operatorname{sen} A}{a}$, y son por tanto iguales. Así, pues, nada hemos adelantado con las trasformaciones que acabamos de hacer para hallar el lado c.

Ejemplos.

1.° *Dados los lados* a $= 342$, b $= 314'97$ *y el ángulo comprendido* C $= 73° \, 19' \, 20''$, *resolver el triángulo.*

Vamos á seguir la primera solucion.

El ángulo A se hallará por la ecuacion

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \operatorname{sen} C}{b - a \cos C}.$$

Calculemos en primer lugar la cantidad $a \cos C$.

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2,5340261 \\ \log \cos C = & \bar{1},4578653 \\ \hline \log (a \cos C) = & \bar{1},9918914 \\ a \cos C = & 98'15. \end{array}$$

Por consiguiente $\quad b - a \cos C = 216'82.$

Tenemos ahora

$$\log \operatorname{tg} A = \log a + \log \operatorname{sen} C - \log (b - a \cos C).$$

Cálculo.

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2,5340261 \\ \log \operatorname{sen} C = & \bar{1},9813355 \\ \hline & 2,5153616 \\ \log (b - a \cos C) = & 2,3360993 \\ \hline \log \operatorname{tg} A = & 0,1792623, \\ A = & 56° \, 30' \, 10'', \\ B = 180° - (A + C) = & 50° \, 10' \, 30''. \end{array}$$

Para hallar el lado c, tenemos la ecuacion

106 40 40
73 19 20
179 59,60 = 180°

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

El paso (42, *Nota*) á las líneas trigonométricas tabulares no altera en nada á esta ecuacion.

Cálculo.

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2,5340261 \; + \\ \log \operatorname{sen} C = & 9,9813355 \\ \hline & 12,5153616 \\ \log \operatorname{sen} A = & 9,9211205 \\ \hline \log c = & 2,5942411, \\ c = & 392'863. \end{array}$$

Supongamos que en este mismo ejemplo solo se quisiera hallar el valor del lado c.

Puede determinarse esta incógnita, como lo acabamos de hacer, valiéndonos del ángulo A que se determina primero; pero ahora vamos á hallarla directamente por la ecuacion

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

Hemos visto que esta ecuacion puede trasformarse en la

$$c = \sqrt{(a + b + \alpha)(a + b - \alpha)},$$

estando determinada α por la ecuacion

$$\alpha = 2\cos \tfrac{1}{2} C \sqrt{ab}.$$

Tenemos $\quad \tfrac{1}{2} C = 36° \, 39' \, 40''$,

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \log \cos \tfrac{1}{2} C &= \bar{1}{,}9042724 \\ \tfrac{1}{2}(\log a + \log b) &= 2{,}5161477 \\ \hline \log \alpha &= 2{,}7214501 \\ \alpha &= 526'563. \end{aligned}$$

Conociendo α, tendremos $a + b + \alpha = 1183'533$ y $a + b - \alpha = 130{,}407$.

131,407

Cálculo.

$$\begin{aligned} \log (a + b + \alpha) &= 3{,}0731805 \\ \log (a + b - \alpha) &= 2{,}1153009 \\ \hline & 5{,}1884814 \\ \log c &= 2{,}5942407, \\ c &= 392'863. \end{aligned}$$

2.° *Dados los tres lados* a $= 69'7$; b $= 78'45$; c $= 123'53$, *resolver el triángulo.*

Vamos á hallar el ángulo A por la fórmula

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}.$$

Tenemos

$2p = 271'68$; $p = 135'84$; $p - b = 57'39$; $p - c = 12'31$.

$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \left(\log (p - b) + \log (p - c) - \log b - \log c\right)$.

Como hay que hacer dos adiciones y una sustraccion, convertiremos estas tres operaciones en una suma por medio de los complementos. Tendremos, pues,

$$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2}\Big(\log (p - b) + \log (p - c) + \text{C.}^{\text{to}} \log b + \text{C.}^{\text{to}} \log c\Big) - 10.$$

Cálculo.

$$\begin{aligned}
\log (p - b) &= 1{,}7588362\\
\log (p - c) &= 1{,}0902581\\
\text{C.}^{\text{to}} \log b &= 8{,}1054071\\
\text{C.}^{\text{to}} \log c &= \underline{7{,}9082276}\\
& 18{,}8627290\\
\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A &= \bar{1}{,}4313645\\
\tfrac{1}{2} A &= 15^\circ\, 39'\, 51'', 46,\\
A &= 31^\circ\, 19'\, 42'', 92.
\end{aligned}$$

Calculando los otros dos ángulos por la misma fórmula, resultan

$$\begin{aligned}
B &= 35^\circ\, 49'\, 6'', 28,\\
C &= 112^\circ\, 51'\, 10'', 86.
\end{aligned}$$

Comprobacion $A + B + C = 180^\circ\ 0'\ 0'', 06$.

Calculando los tres ángulos por las fórmulas [a''], [b''] y [c'] (52, 3.$^{\text{er}}$ caso), resultan

$$\begin{aligned}
A &= 31^\circ\, 19'\, 42'', 88\\
B &= 35^\circ\, 49'\, 6'', 28\\
C &= \underline{112^\circ\, 51'\, 10'', 80}\\
\textit{Suma}\ldots\ldots & 179^\circ\, 59\ \ 59'', 96
\end{aligned}$$

LIBRO TERCERO.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

CAPÍTULO I.

Fórmulas generales.

53. TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA es la ciencia que enseña á resolver los triángulos esféricos por medio del cálculo (*).

Para resolver los triángulos esféricos deberemos hallar las relaciones que ligan á los lados y ángulos de estos triángulos. Estas relaciones están comprendidas en los cuatro teoremas siguientes:

TEOREMA FUNDAMENTAL.

54. *En todo triángulo esférico el coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos lados, más el producto de los senos de los mismos lados por el coseno del ángulo comprendido*; es decir, que si llamamos a, b y c á los tres lados de un triángulo esférico cualquiera, A, B y C á los ángulos del mismo, respectivamente opuestos á dichos lados, tendremos

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

FIG. 14. Para demostrar este teorema, supondremos en primer lugar que los lados b y c del triángulo ABC son menores que 90°, teniendo al lado a un valor cualquiera menor que 180° (*Geom.* 87).

Construyamos el ángulo triedro $OABC$ correspondiente al triángulo esférico ABC, tomemos $OM = 1$, y levantemos en el punto M las MN, MP perpendiculares al radio OA, la primera en el plano AOB, y la segunda en el AOC: estas perpendiculares encontrarán á los radios OB y OC dentro de los ángulos AOB y AOC, por ser estos agudos por hipótesi. El ángulo NMP será el ángulo plano correspondiente al diedro $BAOC$, y por tanto es la medida de este ángulo diedro ó del esférico A.

(*) La resolucion de los triángulos esféricos, ó sea la de los ángulos triedros por medio de construcciones geométricas, es asunto que se suele tratar en la *Geometría descriptiva*.

Los triángulos MNP y NOP nos dan, segun el teorema general de la Trigonometría rectilínea,

$$NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN \, . \, MP \cos A,$$
$$NP^2 = ON^2 + OP^2 - 2ON \, . \, OP \cos a.$$

Restando de esta segunda ecuacion la primera, y observando que, segun el teorema de Pitágoras, es $\cancel{ON^2 - MN^2 = OM^2 = 1}$; $\cancel{OP^2 - MP^2 = 1}$, será

$$0 = 1 + 1 + 2MN \, . \, MP \cos A - 2ON \, . \, OP \cos a,$$

ó

$$0 = 1 + MN \, . \, MP \cos A - ON \, . \, OP \cos a \quad [1].$$

Ahora, en los triángulos rectángulos OMN y OMP, tendremos

$$MN = \operatorname{tg} c, \quad MP = \operatorname{tg} b, \quad ON = \frac{1}{\cos c}, \quad OP = \frac{1}{\cos b}.$$

Reemplazando en la ecuacion [1] las líneas MN, MP, ON y OP por sus valores, será

$$0 = 1 + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A - \frac{1}{\cos b \cos c} \cos a;$$

y multiplicando por $\cos b \cos c$, resulta

$$0 = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A - \cos a,$$

ó en fin

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

Hemos demostrado el teorema, suponiendo que los lados b y c son menores que 90°: mas segun el teorema de Descartes (15), dicho teorema debe ser general, como lo vamos á demostrar.

Observemos que los lados b y c pueden ser uno agudo y otro recto, uno agudo y otro obtuso, los dos rectos, uno recto y otro obtuso, ó los dos obtusos: la demostracion siguiente comprende todos estos casos.

Fig. 15. Sea ABC un triángulo esférico cualquiera; tiremos las cuerdas AB, AC y BC, y construyamos el triedro $OABC$ correspondiente al triángulo esférico. El ángulo triedro $AOBC$ (*Geom.* 69) tiene agudos los dos ángulos planos OAB y OAC, porque son isósceles los triángulos AOB y AOC, y ya se sabe que los ángulos de las bases de los triángulos isósceles son agudos. Sea $A'B'C'$ el triángulo esférico correspondiente al triedro $AOBC$, triángulo construido en una esfera cuyo centro es el punto A, y su radio cualquiera: el ángulo A' de este triángulo y el ángulo A del triángulo esférico ABC son iguales, porque los dos son correspondientes al diedro $BAOC$. Esto supuesto, siendo menores que 90°

los lados b' y c' del triángulo esférico $A'B'C'$, tendremos, segun se ha demostrado en el primer caso,

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A.$$

Ahora por ser el ángulo b' complemento de la mitad del ángulo $AOC = b$, é igualmente, por ser el ángulo c' complemento de $\frac{1}{2}c$, será $\cos b' = \operatorname{sen} \frac{1}{2}b$, $\operatorname{sen} b' = \cos \frac{1}{2}b$, $\cos c' = \operatorname{sen} \frac{1}{2}c$, $\operatorname{sen} c' = \cos \frac{1}{2}c$; luego

$$\cos a' = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}b \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}c + \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c \cos A \qquad [l].$$

Tenemos ahora en el triángulo rectilíneo ABC

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \,.\, AB \cos BAC,$$

ó puesto que, llamando r al radio de la esfera en que está el triángulo esférico ABC, es

$$BC = 2r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a, \quad AC = 2r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}b \quad \text{y} \quad AB = 2r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}c,$$

será sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior y suprimiendo el factor comun $2r^2$,

$$2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}a = 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}b + 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}c - 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}b \,.\, 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}c \cos a'.$$

Eliminando $\cos a'$ entre esta ecuacion y la $[l]$, resulta

$$2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}a = 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}b + 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}c - 4 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}b \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}c - 4 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}b \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}c \cos \tfrac{1}{2}c \cos A,$$

que es la relacion pedida, y que solo falta simplificar.

Sustituyamos, con este objeto, en vez de $2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}a$, $2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}b$, $2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}c$ sus valores respectivos $1 - \cos a$, $1 - \cos b$, $1 - \cos c$ (24), y en lugar de $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}b$, $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c$ sus valores $\operatorname{sen} b$, $\operatorname{sen} c$ (23), y tendremos

$$1 - \cos a = 1 - \cos b + 1 - \cos c - (1 - \cos b)(1 - \cos c) - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

y efectuando la multiplicacion y simplificacion, resulta por último

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \qquad [1].$$

Aplicando este teorema á los lados b y c, tendremos estas otras dos ecuaciones;

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B \qquad [2],$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C \qquad [3].$$

Nota. Estas tres ecuaciones distintas comprenden á los tres lados y á los tres ángulos del triángulo esférico: por consiguiente por medio de ellas podrán hallarse tres de estas seis cantidades, conociendo las otras tres: ó más bien, cuando se den tres de las seis partes de un triángulo esférico y se pidan las otras tres, el problema es en general determinado.

Para resolver este problema en todos los casos, conviene hallar las relaciones ó ecuaciones que ligan á las seis partes del triángulo esférico tomadas cuatro á cuatro; pues obtenidas estas ecuaciones, no habrá más que despejar cada incógnita en la ecuacion en que se halle mezclada con los datos. Las combinaciones de las seis partes de un triángulo, tomadas cuatro á cuatro, son las cuatro siguientes:

Tres lados y un ángulo; dos lados y los dos ángulos opuestos; dos lados, el ángulo comprendido y el ángulo opuesto á uno de dichos lados: tres ángulos y un lado.

Por consiguiente, conforme á lo que hemos dicho en el número 53, cuatro deben ser los teoremas que nos den las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos esféricos.

El teorema fundamental nos da la relacion entre los tres lados y un ángulo.

55. El teorema siguiente corresponde á la relacion entre dos lados y sus dos ángulos opuestos.

En todo triángulo esférico los senos de los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos, esto es

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}.$$

Eliminando la c entre las ecuaciones [1] y [2], se tendrá una relacion entre las cuatro cantidades a, b, A y B, que será el teorema enunciado.

Para efectuar esta eliminacion, seguiremos un método análogo al que seguimos en el caso respectivo de la trigonometría rectilínea (50), es decir, que principiaremos por sumar y restar las ecuaciones [1] y [2].

Sumándolas, será

$$\cos a + \cos b = \cos c(\cos a + \cos b) + \operatorname{sen} c\,(\operatorname{sen} b \cos A + \operatorname{sen} a \cos B),$$

ó bien

$$(\cos a + \cos b)\,(1 - \cos c) = \operatorname{sen} c\,(\operatorname{sen} b \cos A + \operatorname{sen} a \cos B) \qquad [m].$$

Restándolas, será

$$\cos a - \cos b = \cos c(\cos b - \cos a) + \operatorname{sen} c\,(\operatorname{sen} b \cos A - \operatorname{sen} a \cos B),$$

ó bien

$$(\cos a - \cos b)\,(1 + \cos c) = \operatorname{sen} c\,(\operatorname{sen} b \cos A - \operatorname{sen} a \cos B) \qquad [n].$$

Ahora, puesto que $(1 + \cos c)\,(1 - \cos c) = 1 - \cos^2 c = \operatorname{sen}^2 c$, es evidente que si multiplicamos ordenadamente las ecuaciones [m] y [n], existirá en ambos miembros el factor comun, $\operatorname{sen}^2 c$: suprimiendo este factor comun, quedará eliminada la c.

Resulta

$$\cos^2 a - \cos^2 b = \operatorname{sen}^2 b \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 a \cos^2 B,$$

que es la relacion pedida, y que ahora se trata de simplificar.

Para esto pongamos los valores de los cosenos en funcion de los senos, y tendremos

$$1 - \text{sen}^2 a - 1 + \text{sen}^2 b = \text{sen}^2 b - \text{sen}^2 b \,\text{sen}^2 A - \text{sen}^2 a + \text{sen}^2 a \,\text{sen}^2 B,$$

ó $$\text{sen}^2 b \,\text{sen}^2 A = \text{sen}^2 a \,\text{sen}^2 B,$$

ó $$\text{sen}\, b \,\text{sen}\, A = \text{sen}\, a \,\text{sen}\, B,$$

de donde resulta la proporcion

$$\frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, b} = \frac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, B} \qquad [4].$$

Segun este teorema, tendremos estas otras dos ecuaciones:

$$\frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, c} = \frac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, C} \qquad [5],$$

$$\frac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, c} = \frac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\, C} \qquad [6].$$

Cualquiera de las ecuaciones [4], [5] y [6] es consecuencia de las otras dos.

56. El teorema correspondiente á la relacion entre dos lados, el ángulo comprendido y el ángulo opuesto á uno de ellos, es el siguiente:

En todo triángulo esférico la cotangente de un lado por el seno de otro es igual al coseno de éste por el coseno del ángulo comprendido, más el seno de este ángulo por la cotangente del ángulo opuesto al primer lado; esto es,

$$\cot a \,\text{sen}\, b = \cos b \cos C + \text{sen}\, C \cot A.$$

Para demostrar esta teorema, observemos que las ecuaciones [1], [3] y [5] no contienen la B; y por tanto, eliminando entre ellas sen c y cos c, tendremos la ecuacion pedida.

Para hacer esta eliminacion, sustituyendo en la ecuacion [1] los valores de sen c y cos c sacados de las ecuaciones [3] y [5], tendremos

$$\cos a = \cos b\,(\cos a \cos b + \text{sen}\, a \,\text{sen}\, b \cos C) + \frac{\text{sen}\, a \,\text{sen}\, C}{\text{sen}\, A} \text{sen}\, b \cos A;$$

que es la relacion pedida, y que ahora vamos á simplificar.

Tenemos, efectuando la multiplicacion indicada, y reemplazando $\frac{\cos A}{\text{sen}\, A}$ por su igual cot A,

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \text{sen}\, a \,\text{sen}\, b \cos b \cos C + \text{sen}\, a \,\text{sen}\, C \,\text{sen}\, b \cot A:$$

pasando cos a cos^2 b al primer miembro, separando el factor comun cos a, poniendo en vez de $1 - \cos^2 b$ su valor sen^2 b, y partiendo en seguida por sen a sen b los dos miembros de la ecuacion, resulta

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \cot A \qquad [7].$$

Segun este teorema, tendremos las otras cinco ecuaciones siguientes:

$$\cot a \operatorname{sen} c = \cos c \cos B + \operatorname{sen} B \cot A \qquad [8],$$
$$\cot b \operatorname{sen} a = \cos a \cos C + \operatorname{sen} C \cot B \qquad [9],$$
$$\cot b \operatorname{sen} c = \cos c \cos A + \operatorname{sen} A \cot B \qquad [10],$$
$$\cot c \operatorname{sen} a = \cos a \cos B + \operatorname{sen} B \cot C \qquad [11],$$
$$\cot c \operatorname{sen} b = \cos b \cos A + \operatorname{sen} A \cot C \qquad [12].$$

57. Demostremos por último el teorema que nos da la relacion entre los tres ángulos y un lado, á saber:

En todo triángulo esférico el coseno de un ángulo es igual á ménos el producto de los cosenos de los otros dos ángulos, más el producto de los senos de los mismos ángulos por el coseno del lado adyacente á ambos; esto es,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a.$$

Observando que las ecuaciones [4], [7] y [9] contienen las letras A, B, C, a y b, se podrian eliminar entre ellas sen b, cos b y $\cot b = \frac{\cos b}{\operatorname{sen} b}$, y así se obtendria la relacion enunciada; pero es más sencillo demostrar este teorema del modo siguiente.

Llamando a', b' y c' á los tres lados del triángulo suplementario del propuesto, suplementos respectivos de los angulos A, B y C de éste (*Geom.*, *teor.* 175), y A', B' y C' (*) á los tres ángulos opuestos á dichos lados a', b' c', los cuales serán suplementos de los lados a, b y c, tendremos, en virtud del teorema fundamental,

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A'.$$

Reemplazando ahora las cantidades a', b' y c' y A' por sus valores $2R - A$ $2R - B$, $2R - C$, $2R - a$, tendremos

$$-\cos A = -\cos B \times -\cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \times -\cos a,$$

ó mudando los signos á ambos miembros,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a \quad [13].$$

Aplicando este teorema á los ángulos B y C, tendremos estas otras dos ecuaciones:

$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b \quad [14],$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c \quad [15].$$

(*) En adelante seguiremos esta notacion.

CAPÍTULO II.

Resolucion de los triángulos esféricos rectángulos.

58. Sabemos (*Geom.* 89) que se llama triángulo *esférico rectángulo* el triángulo esférico que tiene un solo ángulo recto, triángulo esférico *bi-rectángulo* el triángulo esférico que tiene dos ángulos rectos, y *tri-rectángulo* el que tiene sus tres ángulos rectos. El lado opuesto al ángulo recto de un triángulo esférico rectángulo se llama *hipotenusa* de dicho triángulo, y los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos*. En cualquier triángulo esférico se llaman ángulos *oblicuos* los ángulos que no son rectos. Sabemos tambien que en el triángulo bi-rectángulo cada uno de los lados opuestos á los ángulos rectos vale 90°, y que el angulo en el polo y su lado opuesto tienen el mismo número de grados (*Geom.*, *teor.* 177); y es fácil demostrar que los tres lados del triángulo tri-rectángulo son cuadrantes.

Segun esto, los triángulos bi-rectángulos y tri-rectángulos no pueden dar lugar á ningun problema sobre resolucion de los mismos.

59. Antes de entrar en la resolucion de los triángulos esféricos rectángulos, conviene que demostremos algunos teoremas útiles en dicha resolucion.

En todo triángulo esférico rectángulo:

1.° *Los tres lados son menores que* 90°, *ó el uno es menor y los otros dos mayores que* 90°.

2.° *Cada cateto y su ángulo opuesto son ambos menores ó ambos mayores que* 90°. *En el primer caso el cateto es menor que el ángulo opuesto, y en el segundo el cateto es mayor que el ángulo opuesto.*

3.° *Ninguno de los lados puede valer* 90°.

4.° *Si un cateto es menor que* 90°, *la hipotenusa será mayor que dicho cateto, y menor que el suplemento del mismo; y si un cateto es mayor que* 90°, *la hipotenusa será menor que el cateto y mayor que el suplemento de este cateto.*

5.° *La suma de los dos ángulos oblicuos es mayor que* 90° *y menor que* $3 \times 90°$, *y su diferencia es menor que* 90°.

1.er *teorema.* Sea A el angulo recto: tenemos por el teorema fundamental la ecuacion

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A;$$

como, por ser $A = 90°$, es

$$\cos A = 0,$$

dicha ecuacion se reduce á

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Si b y c son ambos menores ó ambos mayores que 90°, $\cos b$ y $\cos c$ tendrán el mismo signo, y por tanto $\cos a$ será positivo y a menor que 90°. Si a y un cateto b son ambos mayores ó ambos menores que 90°, $\cos a$ y $\cos b$ tendrán el mismo signo, y como $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$, será $\cos c$ positivo, y por consiguiente c menor que 90°. Si dos lados, por ejemplo a y b, son uno menor y otro mayor que 90°, la última igualdad nos manifiesta que $c > 90°$.

2.° *teorema.* La ecuacion

$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b$$

se reduce, por ser $A = 90°$, á

$$\cos B = \operatorname{sen} C \cos b.$$

Segun esta fórmula, como $\operatorname{sen} C$ es siempre positivo, $\cos B$ y $\cos b$ tendrán el mismo signo, y por tanto B y b serán ambos menores ó ambos mayores que 90°; y así queda demostrada la primera parte de este teorema.

Para demostrar la segunda, vemos que si B y b son menores que 90°, como C no es ángulo recto, porque el triángulo es rectángulo y no bi-rectángulo ni tri-rectángulo, será $\cos B$ menor que $\cos b$, luego $B > b$; y si B y b son mayores que 90°, será, haciendo $B = 90° + B'$ y $b = 90° + b'$,

$$\cos(90° + B') = \operatorname{sen} C \times \cos(90° + b'),$$

ó

$$-\operatorname{sen} B' = \operatorname{sen} C \times -\operatorname{sen} b';$$

y cambiando los signos de ambos miembros,

$$\operatorname{sen} B' = \operatorname{sen} C \times \operatorname{sen} b';$$

y pues $\operatorname{sen} C \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}$, será $\operatorname{sen} C \operatorname{sen} b' < \operatorname{sen} b'$, luego $\operatorname{sen} B' < \operatorname{sen} b$;

y como B' y b' son menores que 90°, será $B' < b'$, y por consiguiente $B < b$.

Nota. Esta segunda parte puede demostrarse más fácilmente por el teorema $\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$, que por ser $A = 90°$,

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B.$$

3.er *teorema.* La ecuacion

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

en que $\cos A = 0$, nos da

$$\cos a = \cot B \cot C;$$

luego, como ni B ni C son rectos, $\cot B$ y $\cot C$ serán cantidades diferentes de cero; luego $\cos a$ no es cero, y por tanto a no es igual á $90°$.

La ecuacion

$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b$$

se reduce, por ser $\cos A = 0$ y $\operatorname{sen} A = 1$, á

$$\cos B = \operatorname{sen} C \cos b;$$

y como B no es igual á $90°$, $\cos B$ no será cero, luego $\cos b$ tampoco lo es; luego b no es igual á $90°$.

4.° *teorema.* Sea b el cateto, y supongamos en primer lugar que sea menor que $90°$.

La hipotenusa a podrá ser menor ó mayor que $90°$. Sea la hipotenusa a menor que $90°$; la ecuacion

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A}$$

nos da, por ser $\operatorname{sen} A = 1$,

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B.$$

Siendo $\operatorname{sen} B < 1$, será

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B < \operatorname{sen} a, \text{ luego } \operatorname{sen} b < \operatorname{sen} a;$$

y como b y a son menores que $90°$, será

$$a > b;$$

y es evidente que en este caso es

$$a < 180° - b.$$

Sea la hipotenusa $a > 90°$: será evidentemente

$$a > b;$$

y si escribimos la ecuacion [1] de este otro modo

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} (180° - a) \operatorname{sen} B,$$

tendremos $\operatorname{sen} b < \operatorname{sen} (180° - a)$, y por tanto, puesto que b y $180° - a$ son menores que $90°$, será

$$180° - a > b,$$

ó $$a < 180° - b.$$

Supongamos ahora que el cateto $b > 90°$.

Si $a < 90°$, se tendrá evidentemente

$$a < b;$$

y si escrimos la fórmula [1] de este otro modo

$$\operatorname{sen} (180° - b) = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B,$$

será sen $a >$ sen $(180^\circ - b)$, y como a y $180^\circ - b$ son menores que 90°, será

$$a > 180^\circ - b.$$

Si $a > 90^\circ$, será evidentemente

$$a > 180^\circ - b;$$

y si escribimos la fórmula [1] de este otro modo

$$\text{sen}\,(180^\circ - b) = \text{sen}\,(180^\circ - a)\,\text{sen}\,B,$$

tendremos sen $(180^\circ - b) <$ sen $(180^\circ - a)$; y pues $180^\circ - b$ y $180^\circ - a$ son menores que 90°, será

$$180^\circ - b < 180^\circ - a,$$

ó

$$a < b.$$

Nota. Prolongando los dos catetos b y c hasta su nuevo encuentro, se demuestra muy fácil y brevemente este teorema en virtud del teorema 2.° de los que estamos demostrando y del (*Geom.*, *teor.* 178).

5.° *teorema.* Supongamos que el ángulo B sea el mayor de los dos ángulos oblicuos: como (*Geom.*, *teor.* 176)

$$A + B + C > 180^\circ,$$

será

$$B + C > 90^\circ;$$

y como (*Geom.*, *teor.* 176, *Corol.*)

$$B + C - A < 180^\circ,$$

será

$$B + C < 270^\circ \text{ (*)}.$$

Por último, como $A + B - C < 180^\circ$, será $B - C < 90^\circ$.

60. Pasemos ya á la resolucion de los triángulos esféricos rectángulos.

Hemos visto (54, *Nota*) que, conociendo tres de las seis partes de un triángulo esférico, el hallar las tres partes incógnitas es, en general, un problema determinado. Como en los triángulos esféricos rectángulos se conoce el ángulo recto, el problema de resolucion de estos triángulos será en general determinado, cuando se conozca dos cualesquiera de las otras cinco partes.

Segun esto, en la resolucion de los triángulos esféricos rectángulos pueden ocurrir seis casos:

1.° Dados los dos catetos, hallar las otras tres partes.

2.° Dados la hipotenusa y un cateto.

3.° Dados la hipotenusa y un ángulo oblicuo.

4.° Dados un cateto y el ángulo oblicuo adyacente.

(*) Si añadimos $A = 90^\circ$ á los dos miembros de esta desigualdad, será $A + B + C < 360^\circ$, es decir, que *la suma de los tres ángulos de un triángulo esférico rectángulo es menor que cuatro rectos.*

5.° Dados un cateto y el ángulo opuesto.

6.° Dados los dos ángulos oblícuos.

Para resolver cualquiera de estos casos, no hay más que valerse del teorema que contenga los datos (contando entre ellos el ángulo recto, que supondremos sea el ángulo A) y la incógnita, simplificar la ecuacion que dé dicho teorema, en virtud de que sen $A = 1$, cos $A = 0$, cot $A = 0$, y despejar en seguida la incógnita. Sabiendo, pues, los cuatro teoremas generales, 54, 53 56 y 57, se resolverán fácilmente los triángulos esféricos rectángulos.

Primer caso. *Dados los dos catetos* b *y* c, *hallar la hipotenusa* a *y los dos ángulos oblícuos* B y C.

Para hallar la hipotenusa a, tenemos por el teorema fundamental

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Para hallar el ángulo B, tenemos por el teorema (56) la ecuacion

$$\cot b \operatorname{sen} c = \cot B.$$

El ángulo C se hallará igualmente por la ecuacion

$$\cot C = \cot c \operatorname{sen} b.$$

Segundo caso. *Dados la hipotenusa* a *y el cateto* b, *hallar el cateto* c *y los ángulos* B *y* C.

Para hallar el cateto c, tenemos por el teorema fundamental la ecuacion

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

de la cual resulta

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} \qquad [1].$$

El ángulo B se obtendrá por el teorema (55), que nos da la ecuacion

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} \qquad [2].$$

El ángulo C se hallará por el teorema (56), que nos da la ecuacion

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C,$$

de donde

$$\cos C = \cot a \operatorname{tg} b \qquad [3].$$

Nota 1.ª Obsérvese que en este caso el ángulo B está dado por su seno, y por lo tanto la fórmula sen $B = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}$ no determina la especie del ángulo B (14). Mas como el ángulo B y su cateto opuesto b son los dos agudos ó los dos obtusos (59, 2.º), queda, por esta propiedad, determinada la especie del ángulo B.

Nota 2.ª El problema será imposible si el valor de a no está comprendido entre los de b y $180^\circ - b$ (59, *teor.* 4.º). Mas si en un caso en que a no satisfaga á esta condicion se procede al cálculo, las fórmulas [1], [2] y [3] manifestarán la incompatibilidad de los datos, dando para los senos y cosenos de las incógnitas valores mayores que 1, y para sus logaritmos valores mayores que 0; lo que se demuestra fácilmente por las mismas fórmulas.

Tercer caso. *Dados la hipotenusa* a *y un ángulo oblicuo* B *hallar los dos catetos* b *y* c, *y el otro ángulo oblicuo* C.

Para hallar el cateto b, tenemos por el teorema (55) la ecuacion

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B.$$

Para hallar el cateto c, el teorema (56) nos da la ecuacion

$$\cot a \operatorname{sen} c = \cos c \cos B,$$

de donde

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B.$$

El ángulo C se obtiene por el teorema (57), que nos da la ecuacion

$$0 = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a,$$

de donde

$$\cot C = \operatorname{tg} B \cos a.$$

Nota. El cateto b está dado por su seno; pero en este caso su especie queda determinada, porque debe de ser de la misma que su ángulo opuesto B.

Cuarto caso. *Dados el cateto* b *y el ángulo oblicuo adyacente* C, *hallar la hipotenusa* a, *el cateto* c *y el otro ángulo oblicuo* B.

Para hallar la hipotenusa a, el teorema (56) nos da la ecuacion

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C,$$

de donde

$$\cot a = \cot b \cos C.$$

Para hallar el cateto c, tenemos por el mismo teorema

$$\cot c \operatorname{sen} b = \cot C,$$

de donde

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C.$$

Para hallar el ángulo B, el teorema (57) nos da la ecuacion

$$\cos B = \operatorname{sen} C \cos b.$$

Quinto caso. *Dados el cateto* b *y su ángulo opuesto* B, *hallar la hipotenusa* a, *el otro cateto* c *y el otro ángulo oblicuo* C.

Para hallar la hipotenusa a, el teorema (55) nos da la ecuacion

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}. \qquad [1].$$

Para hallar el cateto c, el teorema (56) nos da la ecuacion

$$\cot b \operatorname{sen} c = \cot B,$$

de donde

$$\operatorname{sen} c = \cot B \operatorname{tg} b.$$

El ángulo C se obtendrá por el teorema (57), que nos da la ecuacion

$$\cos B = \operatorname{sen} C \cos b,$$

de donde

$$\operatorname{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

Nota 1.ª Fig. 16. Cada una de las incógnitas de este problema está dada por su seno; y por tanto cada uno tiene dos valores, el uno el ángulo agudo dado por las tablas, y el otro el suplemento de dicho ángulo agudo. El problema tiene en este caso dos soluciones: pues los datos convienen igualmente al triángulo ABC y al $AB'C$, porque el ángulo B y el B' son iguales por corresponder á un mismo ángulo diedro formado por los planos de las dos semicircunferencias BAB' y BCB'.

En este caso, para distribuir los valores de las incógnitas, se tendrá presente que cada cateto es de la misma especie que su ángulo opuesto, y que los tres lados son menores que 90°, ó dos mayores y el tercero menor. (59, 2.°)

Ejemplo. Sea $b = 34° 40'$, $B = 41° 47' 54''$.

Resolviendo el triángulo, se hallarán los valores siguientes:

$$\begin{array}{ll} a = 58°35' & a = 121° 25', \\ c = 50°40' 18'', & c = 129° 19' 42'', \\ C = 65° 0' 47'', & C = 114° 59' 13''. \end{array}$$

Ahora las seis partes de uno de los triángulos serán

$b = 34° 40'$, $B = 41° 47' 54''$, $a = 58° 35'$, $c = 50° 40' 18''$, $C = 65° 0' 47''$.

Las del otro, llamando a', c' y C' á las tres incógnitas del problema, serán

$b = 34° 40'$, $B = 41° 47' 54''$, $a' = 121° 25'$, $c' = 129° 19' 42''$, $C' = 114° 59' 13''$.

Nota 2.ª Los datos b y B serán incompatibles en cualquiera de los cuatro casos siguientes: 1.º Si $b < 90°$ y $B > 90°$; 2.º Si $b > 90°$ y $B < 90°$; 3.º Si, siendo b y B menores que 90°, es $b > B$; 4.º Si, siendo b y B mayores que 90°, es $b < B$ (59, *teor.* 2.º)

Los dos primeros casos de imposibilidad se conocerán, si no por la fórmula [1], por cualquiera de las otras dos, que dan en estos dos casos para sen c y sen C valores negativos.

Los otros dos casos de incompatibilidad los manifestarán las fórmulas, dando para cualquiera de los senos un valor mayor que 1. Todo esto es fácil de demostrar por las referidas fórmulas.

Sexto caso. *Dados los dos ángulos oblicuos* B *y* C, *hallar los tres lados* a, *y* c.

El lado a se hallará por el teorema (57), que nos da la ecuacion

$$0 = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a,$$

de donde

$$\cos a = \cot B \cot C.$$

El lado b se hallará por el mismo teorema, que nos da la ecuacion

$$\cos B = \operatorname{sen} C \cos b,$$

de lo cual resulta

$$\cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}.$$

El otro lado c se hallará igualmente por la ecuacion

$$\cos c = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}.$$

Nota. El problema será imposible si los datos B y C no verifican las condiciones demostradas en el teorema (59,5.º). El cálculo lo manifestará tambien dando para los cosenos de las incógnitas valores mayores que 1; lo que puede demostrarse sin dificultad por las mismas fórmulas.

CAPÍTULO III.

Resolucion de los triángulos rectiláteros.

61. Se llama triángulo *rectilátero* el triángulo esférico que tiene un solo lado de 90°.

La resolucion de los triángulos rectiláteros se reduce á la de los triángulos rectángulos: pues el triángulo suplementario de un triángulo rectilátero es evidentemente rectángulo.

Por ejemplo, si se nos da el lado $a = 90°$ y los dos ángulos adyacentes B y C, y queremos resolver este triángulo rectilátero, tendremos en el triángulo suplementario

$$A' = 90° \quad b' = 180° - B, \quad c' = 180° - C,$$

es decir, que conoceremos los dos catetos del triángulo $A'\ B'\ C'$, rectángulo en A'.

Resuelto este triángulo esférico rectángulo, ó lo que es igual, hallados sus tres elementos incógnitos a', B' y C', tendremos conocidas las tres incógnitas del propuesto, las cuales serán

$$A = 180° - a', \ b = 180° - B', \ c = 180° - C'.$$

Tambien pueden resolverse los triángulos rectiláteros del mismo modo que los triángulos rectángulos, esto es, haciendo $a = 90°$ en las fórmulas generales (siendo a el lado de 90°), y despejando sucesivamente las incógnitas en las fórmulas que resulten.

CAPÍTULO IV.

Resolucion de los triángulos oblicuángulos ó generales.

62. En la resolucion de los triángulos esféricos generales pueden ocurrir seis casos:

1.° Dados dos lados y el ángulo comprendido, hallar las otras tres partes.

2.° Dados dos ángulos y su lado adyacente.

3.° Dados los tres lados.

4.° Dados los tres ángulos.

5.° Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

6.° Dados dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos.

PRIMER CASO. *Dados dos lados* a, b, *y ángulo comprendido* C, *hallar el tercer lado* c *y los otros dos ángulos* A *y* B.

Para hallar el lado c tenemos por el teorema fundamental la ecuacion

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C,$$

que contiene los datos y la incógnita, y en la cual ésta se halla despejada.

Para dar á esta fórmula una disposicion más conveniente para el cálculo, observaremos que el segundo miembro es un binomio, cuyo primer término contiene al coseno del ángulo a ó del ángulo b, y cuyo segundo término contiene al seno del mismo ángulo: luego, segun hemos visto (32), principiaremos por separar, como si fuese un factor comun á los dos términos del segundo miembro, el coeficiente de cos b, ó el de cos a, ó el de sen b, ó el de sen a. Separemos cos a, y tendremos

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \operatorname{sen} b \operatorname{tg} a \cos C).$$

Hallaremos ahora un ángulo auxiliar φ por la ecuacion

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} a \cos C \qquad [p];$$

y tendremos por consiguiente

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \operatorname{sen} b \operatorname{tg} \varphi),$$

ó

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos \varphi}(\cos b \cos \varphi + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \varphi),$$

ó en fin

$$\cos c = \frac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi} \qquad [q].$$

Hallando el ángulo auxiliar φ por la ecuacion [p], se hallará en seguida el lado c por la ecuacion [q].

Para hallar el ángulo A, tenemos por el teorema (56) la ecuacion

$$\cot a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \cot A,$$

que contiene los datos y la incógnita: de ella resulta

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} b - \cos b \cos C}{\operatorname{sen} C} \qquad [r].$$

Para dar á esta ecuacion otra forma más adecuada al cálculo logarítmico, separemos cot a como si fuese factor comun á los dos términos del numerador (32), y tendremos

$$\cot A = \frac{\cot a \left(\operatorname{sen} b - \cos b \dfrac{\cos C}{\cot a}\right)}{\operatorname{sen} C}.$$

Haciendo ahora

$$\cos C \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \varphi \qquad [s]$$

será

$$\cot A = \frac{\cot a\,(\operatorname{sen} b - \cos b \operatorname{tg} \varphi)}{\operatorname{sen} C},$$

$$ó \qquad \cot A = \frac{\cot a}{\operatorname{sen} C \cos \varphi} (\operatorname{sen} b \cos \varphi - \cos b \operatorname{sen} \varphi);$$

$$ó \text{ en fin} \qquad \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} C \cos \varphi \operatorname{tg} a}{\operatorname{sen} (b - \varphi)} \qquad [t].$$

Hallando el ángulo auxiliar φ (*) por la ecuacion [s], se hallará en seguida el ángulo A por la ecuacion [t].

Nota. En todas estas trasformaciones se puede llegar á un segundo miembro que no contenga más que tres factores, contando los del numerador y denominador; y cuando, como ha sucedido ahora, nos encontramos con una expresion de cuatro factores, esto quiere decir que la cantidad que hemos separado, considerándola como factor comun, no es la más conveniente: y efectivamente, si en el caso actual se hubiese separado $\cos C$ como si fuese factor comun, se hubiera hallado una ecuacion en cuyo segundo miembro no hnbieran entrado más que tres factores.

Pero no hay necesidad, para obtener esta ecuacion más sencilla, de abandonar lo hecho: pues la ecuacion auxiliar [s], nos da $\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos C}$, y sustituyendo este valor en la fórmula [t], resulta

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} C \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} (b - \varphi)} \qquad [u],$$

ecuacion cuyo segundo miembro no contiene más que tres factores en numerador y denominador.

Todavía haremos una observacion respecto de estas trasformaciones.

En la fórmula [r] separemos $\cos C$ como si fuese factor comun á los dos términos del numerador, y tendremos

$$\cot A = \frac{\cos C \left(\frac{\cot a}{\cos C} \operatorname{sen} b - \cos b \right)}{\operatorname{sen} C};$$

y haciendo

$$\frac{\cot a}{\cot C} = \operatorname{tg} \varphi,$$

será

$$\cot A = \cot C (\operatorname{tg} \varphi' \operatorname{sen} b - \cos b),$$

$$ó \qquad \cot A = \frac{\cot C}{\cos \varphi'} (\operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} b - \cos \varphi' \cos b),$$

(*) Este ángulo φ es el mismo que da la fórmula [p].

ó en fin

$$\cot A = -\frac{\cot C \cos(b + \varphi')}{\cos \varphi'} \qquad [u'].$$

Veamos cómo puede conciliarse esta ecuacion con la [u].

Para esto, observaremos que siendo $\operatorname{tg} \varphi = \cos C \operatorname{tg} a$, y $\operatorname{tg} \varphi' = \dfrac{1}{\cos C \operatorname{tg} a}$, será $\operatorname{tg} \varphi = \cot \varphi'$, es decir que $\varphi' = 90° - \varphi$: sustituyendo este valor de φ', en la ecuacion [u'], se tendrá

$$\cot A = -\frac{\cot C \cos(b + 90° - \varphi)}{\cos(90° - \varphi)} = -\frac{\cot C \operatorname{sen}(\varphi - b)}{\operatorname{sen} \varphi},$$

ó
$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} C \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}(b - \varphi)}.$$

Si, pues, en vez de igualar $\dfrac{\cot a}{\cos C}$ á $\operatorname{tg} \varphi'$, se hubiese igualado á $\cot \varphi$ (en cuyo caso φ sería complemento de φ', puesto que la tangente del uno es cotangente del otro), se hubiera hallado la misma fórmula primitiva.

No nos falta ya, para que el triángulo quede completamente resuelto, más que hallar el ángulo B.

Este ángulo se halla por la ecuacion

$$\cot b \operatorname{sen} a = \cos a \cos C + \operatorname{sen} C \cot B,$$

de la cual sale

$$\cot B = \frac{\cot b \operatorname{sen} a - \cos a \cos C}{\operatorname{sen} C}.$$

Separando ahora $\cos C$ como si fuese un factor comun á los dos términos del numerador, y haciendo

$$\frac{\cot b}{\cos C} = \cot \varphi_1, \quad \text{ó} \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} b \cos C,$$

se hallará la fórmula

$$\cot B = \frac{\cot C \operatorname{sen}(a - \varphi_1)}{\operatorname{sen} \varphi_1}, \quad \text{ó} \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{tg} C}{\operatorname{sen}(a - \varphi_1)}$$

bien dispuesta para el cálculo.

Segundo caso. *Dados dos ángulos* A, B *y el lado adyacente* c, *hallar el tercer ángulo* C *y los otros dos lados* a *y* b.

Por las fórmulas

$$a' = 2R - A, \quad b' = 2R - B, \quad C' = 2R - c$$

se conocerán los lados a', b' y el ángulo comprendido C' del triángulo suplementario del propuesto: por consiguiente, segun el caso anterior podremos hallar las otras tres partes c', A' y B', y por tanto tendremos en seguida

$$C = 2R - c', \quad a = 2R - A', \quad b = 2R - B'.$$

La solucion que acabamos de dar, reduciendo este caso al anterior por medio del triángulo suplementario, exige seis sustracciones, que se pueden evitar resolviendo el triángulo directamente, como sigue:

Para hallar el ángulo C, tenemos por el teorema (57)

$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c \qquad [x].$$

Para dar á esta fórmula mejor disposicion para el cálculo, separemos $\cos A$ como si fuese un factor comun, y tendremos

$$\cos C = \cos A\,(-\cos B + \operatorname{tg} A \cos c \operatorname{sen} B);$$

hagamos $\qquad \operatorname{tg} A \cos C = \cot \varphi;$

y será por consiguiente

$$\cos C = \cos A\,(-\cos B + \operatorname{sen} B \cot \varphi),$$

ó $$\cos C = \frac{\cos A}{\cos \varphi}(\operatorname{sen} B \cos \varphi - \cos B \operatorname{sen} \varphi),$$

ó $$\cos C = \frac{\cos A \operatorname{sen}(B - \varphi)}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Para hallar el lado a, el teorema (56) nos da la ecuacion

$$\cot a \operatorname{sen} c = \cos c \cos B + \operatorname{sen} B \cot A \qquad [y],$$

de la cual resulta

$$\cot a = \frac{\cos c \cos B + \operatorname{sen} B \cot A}{\operatorname{sen} c}.$$

Ahora para dar á este segundo miembro una forma más adecuada al cálculo logarítmico, separemos $\cos c$ como si fuese un factor comun á los dos términos del numerador, y tendremos

$$\cot a = \frac{\cos c \left(\cos B + \operatorname{sen} B \,.\, \frac{\cot A}{\cos c}\right)}{\operatorname{sen} c};$$

hagamos $\qquad \frac{\cot A}{\cos c} = \operatorname{tg} \varphi,$

y por consiguiente será

$$\cot a = \cot c\,(\cos B + \operatorname{sen} B \operatorname{tg} \varphi),$$

ó
$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos\varphi \operatorname{tg} c}{\cos(B-\varphi)}.$$

Nota. Obsérvese que el ángulo auxiliar φ es el mismo, tanto para hallar el ángulo C como para hallar el lado a.

El lado b se halla igualmente por la ecuacion

$$\cot b \operatorname{sen} c = \cos c \cos A + \operatorname{sen} A \cot B,$$

de la cual resulta

$$\cot b = \frac{\cos c \cos A + \operatorname{sen} A \cot B}{\operatorname{sen} c}.$$

Separando ahora cos c como si fuese factor comun será

$$\cot b = \cot c \left(\cos A + \operatorname{sen} A \frac{\cot B}{\cos c}\right);$$

haciendo $\dfrac{\cot B}{\cos c} = \operatorname{tg} \varphi_1$, sustituyendo y simplificando, resulta

$$\operatorname{tg} b = \frac{\cos\varphi_1 \operatorname{tg} c}{\cos(A-\varphi_1)}.$$

Tercer caso. *Dados los tres lados* a, b *y* c, *hallar los tres ángulos* A, B *y* C.

Por el teorema fundamental tenemos

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

de donde

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \qquad [\alpha].$$

Hallemos por medio de esta fórmula otra mejor dispuesta para el cálculo.

Restemos de la unidad los dos miembros de la ecuacion [α], y tendremos

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

ó

$$1 - \cos A = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c + \cos b \cos c - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Convirtiendo este numerador en un producto (27, *teor.* 4.º), será

$$1 \cos A = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+c-b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Introduzcamos en esta ecuacion el perímetro $a+b+c=2p$: tendremos

$$a+c-b=2(p-b),$$
$$a+b-c=2(p-c);$$

ademas (24 ó 27, *teor.* 4.°)

$$1-\cos A=2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A;$$

luego sustituyendo y suprimiendo factores comunes, resultará

$$\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\text{sen}(p-b)\,\text{sen}(p-c)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c};$$

y por consiguiente

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen}(p-b)\,\text{sen}(p-c)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}} \qquad [a.]$$

Aplicando á los ángulos B y C el teorema que da esta fórmula, ó permutando convenientemente las letras, tendremos:

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\text{sen}(p-a)\,\text{sen}(p-c)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c}} \qquad [b],$$

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\text{sen}(p-a)\,\text{sen}(p-b)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}} \qquad [c.]$$

Añadiendo 1 á los dos miembros de la ecuacion $[\alpha]$, se halla por un cálculo muy semejante

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen}\,p\,\text{sen}(p-a)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}} \qquad [a'],$$

y por consiguiente

$$\cos\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\text{sen}\,p\,\text{sen}(p-b)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c}} \qquad [b'],$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\text{sen}\,p\,\text{sen}(p-c)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}} \qquad [c'].$$

Dividiendo cada una de las tres primeras fórmulas por su correspondiente de las otras tres, tendremos:

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen}(p-b)\,\text{sen}(p-c)}{\text{sen}\,p\,\text{sen}(p-a)}} \qquad [a''],$$

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\text{sen}(p-a)\,\text{sen}(p-c)}{\text{sen}\,p\,\text{sen}(p-b)}} \qquad [b''],$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}} \qquad [c''].$$

NOTA 1.ª Para que el triángulo sea posible, es menester que cada lado sea menor que la suma de los otros dos, y que la suma de los tres lados sea menor que 360° (*Geom.*, *teors.* 173 y 174.)

NOTA 2.ª Por la misma razon que en el caso análogo de la Trigonometría rectilínea las fórmulas $[a'']$, $[b'']$ y $[c'']$ son preferibles á las otras, cuando se quieren hallar los tres ángulos del triángulo esférico.

CUARTO CASO. *Dados los tres ángulos* A, B *y* C *hallar los tres lados* a, b *y* c.

Las fórmulas $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, $c' = 180° - C$, nos darán los tres lados del triángulo suplementario del propuesto; y por las fórmulas del caso anterior se hallarán A', B' y C'. Conocidos estos tres ángulos, tendremos

$$a = 180° - A', \quad b = 180° - B', \quad c = 180° - C'.$$

Pueden evitarse las seis sustracciones que exige este método, resolviendo el triángulo directamente, como sigue.

Para hallar el lado a, tenemos por el teorema (57)

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a,$$

de donde resulta

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}.$$

Ahora, por medio de un cálculo análogo al del caso anterior, y haciendo $A + B + C = 180° + 2E$, siendo $2E$ el *exceso esférico*, es decir, el exceso de la suma de los tres ángulos á dos rectos (*Geom.*, *teor.* 176), se hallarán las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \operatorname{sen}(A-E)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-E)\operatorname{sen}(C-E)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}},$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \operatorname{sen}(A-E)}{\operatorname{sen}(B-E)\operatorname{sen}(C-E)}}.$$

NOTA. Para que el triángulo sea posible, es suficiente y necesario que la suma de los ángulos sea mayor que 180° y menor que $3 \times 180°$; y ademas que la diferencia entre la suma de dos ángulos y el tercer ángulo sea menor que 180° (*Geom.*, *teor.* 176).

Estas fórmulas pueden tambien hallarse aplicando al triángulo suplementario las fórmulas del caso anterior.

En efecto, llamando $2p'$ á la suma de los tres lados del triángulo suplementario, tendremos

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}A' = \frac{\operatorname{sen}(p'-b')\operatorname{sen}(p'-c')}{\operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c'} \qquad [g]$$

Tenemos ahora

$$A' = 180° - a,$$
$$a' = 180° - A,$$
$$b' = 180° - B,$$
$$c' = 180° - C,$$
$$2p' = 3 \times 180° - (A + B + C),$$

ó bien, puesto que $A + B + C = 180° + 2E$,

$$2p' = 3 \times 180° - 180° - 2E = 2 \times 180° - 2E;$$

luego

$$\tfrac{1}{2}A' = 90° - \tfrac{1}{2}a,$$
$$p' = 180° - E,$$
$$p' - b' = B - E,$$
$$p' - c' = C - E.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion [g], resulta

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\operatorname{sen}(B-E)\operatorname{sen}(C-E)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}.$$

Del mismo modo pueden hallarse las otras fórmulas.

QUINTO CASO. *Dados dos lados* a, b *y el ángulo* A *opuesto á uno de ellos, resolver el triángulo.*

Antes de entrar en la resolucion de este triángulo, demostraremos los dos teoremas siguientes.

63. FIG. 17. *Si desde un punto* B *de la superficie de la esfera se trazan un arco* (*) BA *perpendicular á otro arco* CD *y dos arcos oblícuos* BC *y* BC' *que se aparten igualmente del arco perpendicular, estos dos arcos oblícuos serán iguales.*

En efecto, en los triángulos rectángulos BAC y BAC' tenemos por el teorema fundamental

$$\cos BC = \cos AB \cos AC, \qquad \cos BC' = \cos AB \cos AC';$$

como por suposicion $AC = AC'$, y por consiguiente $\cos AC' = \cos AC'$, será $\cos BC = \cos BC'$, y por tanto $BC = BC'$.

Si desde un punto B *de la superficie de la esfera se dirigen un arco* BA *perpendicular á otro* CD, *y dos arcos oblícuos* BC' *y* BD *que se aparten desigualmente del perpendicular: si el arco* BA $< 90°$, *este arco será menor que todos los oblícuos; y el arco oblícuo* BD, *que se aparte del perpendicular más que el* BC *será mayor que éste. Lo contrario se verifica si el arco perpendicular* BA $> 90°$.

(*) Por la palabra *arco* entiéndase arco de círculo máximo.

Supongamos en primer lugar que el arco perpendicular $BA < 90^\circ$. En el triángulo rectángulo BAC', en que el cateto $AB < 90^\circ$, el ángulo $BC'A$ será menor que 90° (59, *teor*, 2.°); luego el ángulo $BAC' > BC'A$, y por consecuencia (*Geom.*, *teor*. 178) $BC' > BA$.

El ángulo $BC'D$, suplemento del agudo $BC'A$, será obtuso; y como el BDA es agudo, será $BC'D > BDC'$, luego $BD > BC'$.

Supongamos ahora que el arco perpendicular $BA > 90^\circ$. En el triángulo rectángulo BAC' será el ángulo $BC'A > 90^\circ$ (59, *teor*. 2.°), y por consiguiente el ángulo $BC'A > BAC'$; luego $BD' < BA$.

El ángulo BDA es tambien mayor que 90°, el $BC'D$ suplemento del obtuso $BC'A$, es menor que 90°; luego $BC < BC'$.

Esto supuesto, consideraremos los cuatro casos siguientes:

1.° $b < 90^\circ$, $A < 90^\circ$; 2.° $b > 90^\circ$, $A < 90^\circ$;
3.° $b < 90^\circ$, $A > 90^\circ$; 4.° $b > 90^\circ$, $A > 90^\circ$ (*).

Fig. 18. 1.er caso. $b < 90^\circ$, $A < 90^\circ$.

Si por el punto C hacemos pasar una semi-circunferencia máxima perpendicular á la ADA' no podrá coincidir con la ACA', porque esta es oblícua á la ADA'; luego dicha semi-circunferencia perpendicular á la ADA' cortará á la circunferencia, cuya mitad es la ADA' en dos puntos diametralmente opuestos (*Geometría*, *teor*. 168), uno de los cuales D estará entre los extremos A y A', de la semi-circunferencia ADA', es decir, que el arco perpendicular á esta semi-circunferencia bajado desde el punto C tendrá una posicion tal como CD. Siendo por hipótesi agudo el ángulo A, el cateto CD del triángulo rectángulo ACD será (59, 2.°) menor que 90°, y menor que todos los arcos comprendidos entre el punto C y la circunferencia cuya mitad es la ADA'. Por consiguiente, si el triángulo existe con los datos a, b y A, el lado a será mayor que el CD, ó por lo ménos igual á éste. Ademas, el lado a será menor que el $CA' = 180^\circ - b$: pues si fuese igual ó mayor que el CA', es claro que el triángulo sería imposible. Vemos, segun esto, que si existe el triángulo ACB, el lado a no será menor que el arco CD, y sí que el CA' ó $180^\circ - b$.

Decimos ahora que por el contrario, si $a \begin{array}{l} > CD \\ < 180^\circ - b, \end{array}$ existirá el triángulo. En efecto, tomemos desde el punto D un arco DB determinado por la ecuacion $\cos DB = \dfrac{\cos a}{\cos CD}$, y tracemos el

(*) Prescindimos del caso $A = 90^\circ$, porque el triángulo sería rectángulo, y sabemos ya resolverlo; y prescindimos tambien del caso $b = 90^\circ$, porque el triángulo sería rectilátero, y su resolucion es conocida.

arco BC: tendremos en el triángulo DCB, por el teorema fundamental,

$$\cos BC = \cos CD \cdot \cos DB = \cos CD \cdot \frac{\cos a}{\cos CD} = \cos a;$$

luego el arco $BC = a$.

Por consiguiente existirá el triángulo ACB con los datos

$$b < 90^\circ,\ A < 90^\circ \text{ y } a \begin{smallmatrix} > CD \\ < 180^\circ - b. \end{smallmatrix}$$

Supongamos, pues, que $a \begin{smallmatrix} > CD \\ < 180^\circ - b \end{smallmatrix}$: podrá ser $a < b$, $a = b$, ó $a > b$.

Sea $a < b$: será $DB < DA$; luego tomando $DB_1 = DB$, y trazando el arco B_1C, éste será igual al arco $BC = a$, y por consiguiente los datos a, b y A convienen tanto al triángulo ACB en que el ángulo B es agudo, como al triángulo ACB_1 en que el ángulo AB_1C suplemento del B, es obtuso. Existen, pues, dos triángulos que satisfacen á la cuestion.

Resolvamos estos dos triángulos, principiando por el ACB.

El ángulo B se hallará por la ecuacion

$$\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}, \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} \qquad [1];$$

y de los dos valores suplementarios que segun esta fórmula tiene B se tomará el menor que 90°, ó sea el que dan las tablas.

Para hallar el lado $AB = c$, hallaremos los dos segmentos AD, al que llamaremos φ, y BD que será $c - \varphi$.

El lado φ pertenece al triángulo ACD rectángulo en D, en el cual conocemos la hipotenusa b y el ángulo oblicuo A. Por el teorema (56) tendremos, puesto que el ángulo $D = 90^\circ$, la ecuacion

$$\cot b \operatorname{sen} \varphi = \cos \varphi \cos A,$$

la cual contiene los datos y la incógnita; y de ella se deduce

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} b \cos A \qquad [1],$$

ecuacion que nos dará el valor de φ.

Para hallar el segmento $c - \varphi$, los triángulos rectángulos ACD y BCD nos dan, segun el teorema fundamental,

$$\cos b = \cos CD \cos \varphi,$$
$$\cos a = \cos CD \cos (c - \varphi):$$

eliminando entre estas ecuaciones la incógnita auxiliar $\cos CD$, y despejando $\cos (c - \varphi)$, resulta

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b} \qquad [3],$$

ecuacion que nos dará el valor de $c - \varphi$; y como φ está ya conocida quedará tambien conocido el lado c.

Hallemos por último el ángulo C por medio de sus dos segmentos ACD, al cual llamaremos Φ, y BCD que será $C - \Phi$.

El segmento Φ pertenece al triángulo ACD rectángulo en D, y por lo tanto el teorema (57) nos dará

$$0 = -\cos A \cos \Phi + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} \Phi \cos b,$$

de donde

$$\cot \Phi = \operatorname{tg} A \cos b \qquad [4],$$

ecuacion que nos da el valor de Φ.

Para hallar el segmento $C - \Phi$, en los triángulos rectángulos ACD y BCD tendremos (56) las dos ecuaciones

$$\cot b \operatorname{sen} CD = \cos CD \cos \Phi,$$
$$\cot a \operatorname{sen} CD = \cos CD \cos (C - \Phi):$$

dividiendo ordenadamente una por otra, y despejando $\cos (C - \Phi)$, resulta

$$\cos (C - \Phi) = \operatorname{tg} b \cot a \cos \Phi \qquad [5],$$

ecuacion que nos da el valor de $C - \Phi$; y como Φ está ya conocida, tambien quedará conocido el ángulo C.

Queda resuelto el triángulo ACB.

Llamando B_1, c_1 y C_1 á las incógnitas del triángulo ACB_1, tendremos

$$B_1 = 180^\circ - B, \quad c_1 = \varphi - (c - \varphi), \quad C_1 = \Phi - (C - \Phi);$$

y por tanto queda tambien resuelto el triángulo ACB_1 (*).

Continuando en la hipótesi $a \begin{matrix} > CD \\ < 180^\circ - b, \end{matrix}$ sen $a = CB_2 = b$: será $DA = DB_2$, y por lo tanto no existirá más que un triángulo ACB_2 isósceles; fácil de resolver, porque el arco perpendicular CD le divide en dos triángulos rectángulos simétricos, cuyos elementos son (*Geom.* 90) respectivamente iguales.

(*) Hemos hallado las dos incógnitas c y C por la division del triángulo ABC en otros dos rectángulos. Sin necesidad de esta division pueden hallarse estas dos incógnitas, como lo vamos á ver.

Para hallar el lado c, tenemos la ecuacion

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

que contiene los datos y la incógnita, ó bien

$$\cos a = \cos b\,(\cos c + \operatorname{tg} b \cos A \operatorname{sen} c):$$

y haciendo
$$\operatorname{tg} b \cos A = \operatorname{tg} \varphi \qquad [2]$$

será
$$\cos a = \frac{\cos b \cos (c - \varphi)}{\cos \varphi}$$

de donde
$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b} \qquad [3].$$

Sea por último $CB_3 = a > b$: existirá un solo triángulo ACB_3 que se resolverá por las fórmulas [1], [2], [3], [4] y [5].

Nota. En el caso en que $a < b$, se principia por hallar el valor del ángulo B por la fórmula

$$\text{sen } B = \frac{\text{sen } b \text{ sen } A}{\text{sen } a}.$$

Si resulta $\log \text{sen } B < 0$, será $\text{sen } B < 1$, y por tanto $\text{sen } a > \text{sen } b \text{ sen } A$; y como $\text{sen } b \text{ sen } A = \text{sen } CD$, será $\text{sen } a > \text{sen } CD$, y $a > CD$, porque a y CD son menores que 90°. Existirán, pues, los dos triángulos ACB y ACB_1 que sabemos resolver.

Si resulta $\log \text{sen } B = 0$, ó $\text{sen } B = 1$, el triángulo será rectángulo en B, y no hay dificultad en resolverlo. En este caso, como

$$\text{sen } a = \text{sen } b \text{ sen } A = \text{sen } CD,$$

será $a = CD$.

Si resulta $\log \text{sen } B > 0$, ó $\text{sen } B > 1$, el triángulo será imposible; y es fácil ver que en tal caso es $a < CD$.

2.° caso. $b > 90°$, $A < 90°$.

Fig. 19. Prolongando los lados b y c hasta su nuevo encuentro en A', conoceremos en el triángulo $A'CB$, conjugado del ACB (*), el lado a, el lado $b' = 180° - b < 90°$, y el ángulo $A' = A$. Por lo tanto el problema de la resolucion del triángulo conjugado del propuesto está en el caso anterior. Si este problema tiene una sola solucion $A'CB$, á cuyas incógnitas $A'BC$, $A'B$ y $A'CB$ llamaremos B', c' y C', el problema propuesto tendrá tambien una sola solucion ABC, cuyas incógnitas tendrán los valores siguientes:

$$B = 180° - B', \quad c = 180° - c', \quad C = 180° - C'.$$

Para hallar el ángulo C, tenemos la ecuacion

$$\cot a \text{ sen } b = \cos b \cos C + \text{sen } C \cot A,$$

ó bien $$\cot a \text{ sen } b = \cos b \left(\cos C + \frac{\cot A}{\cos b} \text{ sen } C\right);$$

y haciendo $$\frac{\cot A}{\cos b} = \text{tg } \Phi, \quad \text{ó} \quad \cot \Phi = \text{tg } A \cos b \qquad [4],$$

será $$\cot a \text{ sen } b = \frac{\cos b}{\cos \Phi} \cos (C - \Phi),$$

de donde $$\cos (C - \Phi) = \cot a \text{ tg } b \cos \Phi \qquad [5].$$

Obsérvese que los ángulos auxiliares φ y Φ están determinados por las mismas fórmulas que el arco AD y el ángulo ACD; es decir, que $\varphi = AD$ y $\Phi = ACD$; y por lo tanto pueden obtenerse ahora las incógnitas de la segunda solucion como se ha visto en el texto.

(*) Llamamos triángulos *conjugados* á los dos que componen un huso esférico.

Si el problema de la resolucion del triángulo conjugado del propuesto tiene las dos soluciones $A'CB$ y $A'CB_1$, el problema propuesto tendrá tambien las dos soluciones ACB y ACB_1; y los valores de las incógnitas de estos dos triángulos se deducen, como acabamos de ver, de los valores de las incógnitas de sus triángulos conjugados $A'CB$ y $A'CB_1$. Si el triángulo conjugado del propuesto es imposible, tambien lo será el propuesto; pues si éste tuviese alguna solucion, es evidente que su conjugado sería tambien posible.

3.^{er} caso. $b < 90^\circ$, $A > 90^\circ$.

Fig. 20. Prolongando los lados a y c hasta su nuevo encuentro en B' conoceremos en el triángulo ACB', el lado $a' = 180^\circ - a$, el lado b y el ángulo $CAB' = 180^\circ - A < 90^\circ$; luego el problema de la resolucion del triángulo ACB' está en el caso primero; y por lo tanto tendrá, si es posible, una solucion ACB' ó las dos ACB' y ACB'_1; y cuado se hayan obtenido los valores de sus incógnitas, se obtendrán fácilmente, como es visible por la figura, los valores de las incógnitas de la solucion ACB ó de las dos soluciones ACB y ACB_2 del triángulo propuesto. Si el triángulo conjugado del propuesto es imposible, tambien lo será éste.

4.º caso. $b > 90^\circ$, $A > 90^\circ$.

Fig. 21. Prolongando los lados a y b hasta su nuevo encuentro en C', en el triángulo $AC'B$, conjugado del propuesto, conoceremos l lado $a' = 180^\circ - a$, el lado $b' = 180^\circ - b$ y el ángulo $C'AB = 180^\circ - A < 90^\circ$; luego el problema de la resolucion del triángulo $AC'B$ está en el caso primero. Resuelto este problema, por cada una de sus soluciones tendremos una del triángulo propuesto; y los valores de las incógnitas de este triángulo se deducirán fácilmente de los valores de las de su conjugado. Si el triángulo $AC'B$ es imposible, tambien lo será el propuesto (*).

(*) Las fórmulas [1], [2], [3], [4] y [5] son ciertas no sólo para el caso primero, sino tambien para cualquiera de los otros tres casos. Pero si aplicáramos dichas fórmulas directamente á uno de estos tres casos, sería necesario discutir si el problema es posible ó imposible, si siendo posible tiene una ó dos soluciones, y saber qué valores de los calculados corresponden á las incógnitas del triángulo ó de los dos triángulos, segun que exista una sola solucion ó existan dos. Todo esto queda evitado por nuestro método, y reducido á discutir el caso primero, lo que, segun se ha visto, es sumamente fácil. Nuestro método exige, al resolver uno cualquiera de los casos 2.º, 3.º ó 4.º, algunas sustracciones de 180º, pero ni áun en esto tiene desventaja: pues si se aplicasen las fórmulas á la resolucion directa de cualquiera de estos casos, como en ellas entran entonces cosenos negativos y tangentes negativas, habria que modificarlas segun se explicó en (46); lo que en resumidas cuentas es más pesado que el efectuar las expresadas sustracciones.

Sexto caso. *Dados dos ángulos* A, B *y el lado* a *opuesto á uno de ellos, resolver el triángulo.*

En el triángulo suplementario $A'B'C'$ del ABC tendremos

$$a' = 180^\circ - A,\ b' = 180^\circ - B,\ A' = 180^\circ - a:$$

conoceremos, pues, en este triángulo dos lados a', b' y el ángulo A' opuesto al primero, y por tanto el triángulo $A'B'C'$ está en el caso anterior. Si el triángulo $A'B'C'$ tiene una solucion, dos soluciones ó es imposible, el triángulo propuesto tendrá tambien una solucion, dos soluciones ó será imposible. Es evidente que, despues que se hallen el valor ó los dos valores de cada una de las incógnitas B', c' y C' del triángulo suplementario, se tendrán los valores correspondientes de las incógnitas b, C y c del triángulo propuesto por medio de las ecuaciones

$$b = 180^\circ - B',\quad C = 180^\circ - c',\quad c = 180^\circ - C'.$$

CAPÍTULO V.

Resolucion de los triángulos esféricos en los dos casos 1.° y 2.° por las analogías de Neper y las de Delambre.

64. Las analogías ó proporciones de Neper son las cuatro siguientes:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Demostracion de la primera.

Tenemos (62, 3.^{er} *caso*)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)}} \qquad [o],$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-b)}} \qquad [o']:$$

multiplicando estas ecuaciones ordenadamente, resulta, hechas las reducciones fáciles que se presentan,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B = \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p},$$

ó bien
$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}A \operatorname{sen} \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B} = \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p},$$

de donde resulta esa otra proporcion (*Aritm.* 174)

$$\frac{\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B + \operatorname{sen} \frac{1}{2}A \operatorname{sen} \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B - \operatorname{sen} \frac{1}{2}A \operatorname{sen} \frac{1}{2}B} = \frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen}(p-c)}:$$

el primer miembro de esta ecuacion equivale á

$\dfrac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}$, y el segundo (33) á $\dfrac{\operatorname{tg}(p-\frac{1}{2}c)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}$;

luego
$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c}.$$

Demostracion de la segunda.

Dividiendo las dos ecuaciones [o] y [o'], tendremos

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}A}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}B} = \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}(p-a)};$$

ó bien
$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}A \operatorname{sen} \frac{1}{2}B} = \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}(p-a)};$$

de donde deducimos esta otra proporcion

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B + \cos \frac{1}{2}A \operatorname{sen} \frac{1}{2}B}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B - \cos \frac{1}{2}A \operatorname{sen} \frac{1}{2}B} = \frac{\operatorname{sen}(p-b) + \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}(p-b) - \operatorname{sen}(p-a)},$$

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)};$$

é invirtiéndola, se tiene la segunda analogía.

Demostradas las dos primeras analogías, las otras dos resultan aplicando las primeras al triángulo suplementario.

En efecto, en el triángulo suplementario tendremos

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a'+b')}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c'} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A'-B')}{\cos \frac{1}{2}(A'+B')}.$$

Ahora,

$a' = 2R - A$, $b' = 2R - B$, $c' = 2R - C$, $A' = 2R - a$, $B' = 2R - b$;

luego, sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior, será

$$\frac{\operatorname{tg}\left(2R - \dfrac{A+B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(R - \dfrac{C}{2}\right)} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos\left(2R - \dfrac{a+b}{2}\right)},$$

ó bien $$\frac{-\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{-\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

ó en fin $$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Aplicando la segunda analogía al triángulo suplementario, tendremos

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a'-b')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c'}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A'-B')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A'+B')};$$

y reemplazando ahora a', b', c', A' y B' por sus valores en funcion de a, b, c, A y B, resulta la cuarta analogía

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Al contrario, aplicando las dos últimas analogías al triángulo suplementario, resultan las dos analogías primeras.

La analogía segunda puede deducirse de la primera, y al contrario.

En efecto, siendo

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}=\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B},$$

será $$\frac{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b}=\frac{\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B},$$

ó (33) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)};$$

multiplicando ordenadamente esta proporcion por la primera analogía

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

resulta evidentemente

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}.$$

65. Las analogías de Delambre son las cuatro siguientes

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}\ (*).$$

Estas dos primeras fórmulas son las correspondientes á las

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}\ (**)$$

de la Trigonometría rectilínea (53, *Primer caso, Nota* 1.ª). Las dos últimas corresponden á la ecuacion $\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{1}{2}C$, ó á las

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=1,\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}=1$$

de los triángulos rectilíneos.

Demostracion de la primera.

Tenemos

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)=\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B+\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}B:$$

poniendo en lugar de $\cos\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}B$, $\operatorname{sen}\frac{1}{2}A$ y $\operatorname{sen}\frac{1}{2}B$ sus valores en funcion de los tres lados (62, 3.er *caso*), resulta

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}c}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C+\frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C,$$

de donde

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(2p-c)\cos\frac{1}{2}c}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c},$$

ó

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}.$$

Del mismo modo se demuestran las otras tres.

(*) Dividiendo la primera de estas fórmulas por la cuarta y la segunda por la tercera, resultan las dos primeras analogías de Neper; y dividiendo la tercera por la cuarta y la segunda por la primera, resultan las otras dos.

(**) Obsérvese que toda fórmula de la Trigonometría rectilínea contiene á los ángulos del mismo modo que la fórmula correspondiente de la Trigonometría esférica. Esta observacion, cuya demostracion daremos más adelante, es útil para recordar en parte las fórmulas de la Trigonometría esférica.

66. Pasemos ya á la resolucion de los triángulos esféricos en los casos 1.° y 2.°

Dadas dos lados a, b *y ángulo comprendido* C, *resolver el triángulo.*

Las analogías tercera y cuarta de Neper

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}$$

nos dan la semi-suma y la semi-diferencia $\frac{1}{2}(A+B)$ y $\frac{1}{2}(B-B)$, y por consiguiente A y B.

El c se hallará en seguida por cualquiera de las dos analogías

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)};$$

y tambien puede hallarse con dos nuevos logaritmos por una de las analogías de Delambre; por la primera, por ejemplo,

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}.$$

67. *Dados los ángulos* A, B *y el lado adyacente* c, *resolver el triángulo.*

Las analogías de Neper primera y segunda

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$$
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}$$

nos dan los lados a y b.

El ángulo C se hallará en seguida por cualquiera de las dos analogías siguientes:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)};$$

ó bien con dos nuevos logaritmos por cualquiera de las analogías de Delambre.

Ejemplos de resolucion de triángulos esféricos.

1.° *Reducir un ángulo á su proyeccion horizontal.*

Fig. 22. Sea $AOB=c$ el ángulo dado: mídanse los ángulos

a y b que sus dos lados forman con la vertical que pasa por el punto O. Este punto O será el vértice de un ángulo triedro, cuyos tres ángulos planos c, a y b conocemos y queremos hallar el ángulo BCA medida del diedro $AOCB$, y proyeccion horizontal del ángulo AOB. Luego en el triángulo esférico correspondiente al ángulo triedro O se conocen los tres lados a, b y c, y se quiere hallar el ángulo C.

Para resolver este problema, podemos valernos de cualquiera de las fórmulas del tercer caso de la resolucion de los triángulos esféricos oblicuángulos.

Ejemplo. Sea $c = 33° \, 25' \, 50''$, $b = 70° \, 19' \, 20''$, $a = 80° \, 14' \, 50''$.

Vamos á servirnos de la fórmula

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{sen } (p - a) \text{ sen } (p - b)}{\text{sen } a \text{ sen } b}}.$$

Pasando á las líneas trigonométricas tabulares, dicha fórmula será

$$\frac{\text{sen } \tfrac{1}{2} C}{10^{10}} = \sqrt{\frac{\text{sen } (p - a) \text{ sen } (p - b)}{\text{sen } a \text{ sen } b}},$$

ó indicando el cálculo logarítmico tendremos

$$\log \text{sen } \tfrac{1}{2} C = \tfrac{1}{2} \Big(\log \text{sen } (p - a) + \log \text{sen } (p - b)$$
$$+ \text{C.}^{\text{to}} \log \text{sen } a + \text{C.}^{\text{to}} \log \text{sen}\Big).$$

Cálculo.

$$\begin{array}{rl}
\log \text{sen } (p - a) = & 9{,}5688555 \\
\log \text{sen } (p - b) = & 9{,}7202423 \\
\text{C.}^{\text{to}} \log \ \text{sen } a = & 0{,}0063223 \\
\text{C.}^{\text{to}} \log \ \text{sen } b = & 0{,}0261330 \\
\hline
& 19{,}3215531 \\
\log \text{sen } \tfrac{1}{2} C = & 9{,}6607766, \ \tfrac{1}{2} C = 27° \, 13' \ \ 7'', 6, \\
& \qquad\qquad C = 54° \, 30' \, 15'', 2.
\end{array}$$

2.° *Dadas las latitudes de dos puntos de la tierra y su diferencia en longitud, hallar su más corta distancia, es decir, el arco círculo máximo que los separa.*

Fig. 23. Sean A *y* B los dos puntos, C el polo Norte de la tierra, EQ el Ecuador, el arco CB de meridiano será el complemento de la latitud del punto B, y el arco CA de meridiano será el complemento de la latitud del punto A: el ángulo C, cuya medida es el arco del Ecuador EQ (*Geom.*, *teor.* 177), será la diferencia en longitud.

Por consiguiente en el triángulo esférico BAC se conocen dos lados a, b y el ángulo comprendido C, y la incógnita es el lado c (62, 1.^{er} caso).

Las fórmulas para hallar el tercer lado c, son

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} a \cos C,$$

$$\cos = \frac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi} = \frac{\cos a \cos (\varphi - b)}{\cos \varphi}.$$

Ejemplo.

Latitud del punto A.	$57^\circ\ 18'\ 30''$ N.
Latitud del punto B.	$21^\circ\ 14'\ 15''$ N.
Diferencia en longitud de ambos puntos A y B.	$23^\circ\ 19'\ 10''$.

Tendremos
$$b = 32^\circ\ 41'\ 30'',$$
$$a = 68^\circ\ 45'\ 45'',$$
$$C = 23^\circ\ 19'\ 10''.$$

Cálculo del ángulo φ.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} a &= 0,4104664 \\ \log \cos C &= \bar{1},9629903 \\ \hline \log \operatorname{tg} \varphi &= 0,3734567 \\ \varphi &= 67^\circ 3' 43'',3; \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\varphi - b = 34^\circ\ 22'\ 7'',\ 1.$$

Para calcular el lado c, pasaremos en primer lugar á las líneas trigonométricas tabulares, lo que en nada altera á la fórmula

$$\cos c = \frac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi};$$

podemos, pues, considerar todos estos cosenos como tabulares.

Efectuemos ahora el cálculo logarítmico.

$$\begin{aligned} \log \cos a &= 9,5589900 \\ \log \cos (\varphi - b) &= 9,9166674 \\ \hline & 19,4756574 \\ \log \cos \varphi &= 9,5907687 \\ \hline \log \cos c &= 9,8848887 \\ c &= 39^\circ 54'. \end{aligned}$$

Ejemplos del 5.° caso de los triángulos generales esféricos.

1.° Sean $a = 36^\circ\ 50'\ 20''$, $b = 40^\circ\ 17'\ 30''$, $A = 60^\circ\ 55'\ 40''$.

Fig. 18. Siendo $b < 90^\circ$ y $A < 90^\circ$, estos datos corresponden al primero de los cuatro casos que hemos considerado.

Como $a < b$, el triángulo será posible, y tendrá dos soluciones si a $> CD$.

Para decidirlo, calcularemos el ángulo B.

Tenemos

$$\text{sen } B = \frac{\text{sen } b \text{ sen } A}{\text{sen } a},$$

y pasando á las líneas trigonométricas tabulares, resulta la misma ecuacion.

Cálculo.

$$\begin{array}{rl}
\log \text{sen } b = & 9,8106887 \\
\log \text{sen } A = & 9,9413748 \\
\hline
 & 19,7520635 \\
\log \text{sen } a = & 9,7778377 \\
\hline
\log \text{sen } B = & 9,9742258 \\
B = & 70^{\circ}\,27'\,18'',\,37.
\end{array}$$

El triángulo tiene, pues, dos soluciones.

Hallemos c.

Tenemos las dos fórmulas $\text{tg } \varphi = \text{tg } b \cos A$,

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b}.$$

Cálculo de φ.

$$\begin{array}{rl}
\log \text{tg } b = & \overline{1},9282994 \\
\log \cos A = & \overline{1},6876115 \\
\hline
\log \text{tg } \varphi = & \overline{1},6159109 \\
\varphi = & 22^{\circ}\,24'\,39'',2.
\end{array}$$

Cálculo de $- \varphi$.

Pasando en primer lugar á las líneas trigonométricas tabulares, la ecuacion no se altera.

$$\begin{array}{rl}
\log \cos a = & 9,9032662 \\
\log \cos \varphi = & 9,9658938 \\
\hline
 & 19,8691600 \\
\log \cos b = & 9,8823893 \\
\hline
\log \cos (c - \varphi) = & 9,9867707 \\
c - \varphi = & 14^{\circ}\;\;4'\;13'',47,
\end{array}$$

y por consiguiente $c = 36^{\circ}\,28'\,52'',67.$

Para hallar el ángulo C, tenemos las dos fórmulas

$$\cot \Phi = \cos b \text{ tg } A,$$

$$\cos (C - \Phi) = \cot a \text{ tg } b \cos \Phi,$$

Cálculo de Φ.

$$\begin{aligned} \log\cos b &= \bar{1},8823893 \\ \log \operatorname{tg} A &= 0,2543633 \\ \hline \log\cot\Phi &= 0,1367526, \\ \Phi &= 36^\circ\ 7'\ 28'',94. \end{aligned}$$

Cálculo de C — Φ.

$$\begin{aligned} \log\cot a &= 0,1254285 \\ \log \operatorname{tg} b &= \bar{1},9282994 \\ \log\cos\Phi &= \bar{1},9072693 \\ \hline \log\cos(C-\Phi) &= \bar{1},9609972 \\ C-\Phi &= 23^\circ\ 55'\ 14'',62, \end{aligned}$$

y por consiguiente $C = 60^\circ\ 2'\ 43'',56.$

Ahora las tres incógnitas B_1, c_1, C_1 del segundo triángulo ACB_1, serán

$$\begin{aligned} B_1 &= 180^\circ - B = 109^\circ\ 32'\ 41'',\ 63, \\ c_1 &= \varphi - (c-\varphi) = 8^\circ\ 20'\ 25'',\ 73, \\ C_1 &= \Phi - (C-\Phi) = 12^\circ\ 12'\ 14'',\ 32. \end{aligned}$$

2.° Sean $a = 36^\circ 50' 20''$, $b = 139^\circ 42' 30''$, $A = 60^\circ 53' 40''$.

Estos datos corresponden al segundo caso, en que $b > 90^\circ$, $A < 90^\circ$.

Fig. 19. Sea ABC el triángulo: su conjugado será $A'BC$, cuyos datos son

$$a = 36^\circ\ 50'\ 20'',\quad b' = 40^\circ\ 17'\ 30'',\quad A' = 60^\circ\ 53'\ 40''.$$

Resuelto este triángulo (ejemplo anterior), resultan

$$\begin{array}{l|l|l} B' = 70^\circ 27' 18'',\ 37 & c' = 36^\circ 28' 52'',\ 67 & C' = 60^\circ\ 2' 43'',\ 56 \\ B'_1 = 109^\circ 32' 41'',\ 63 & c'_1 = 8^\circ 20' 25'',\ 73 & C'_1 = 12^\circ 12' 14'',\ 32; \end{array}$$

y por tanto las incógnitas del triángulo ACB tendrán los valores

$B = 109^\circ\ 32' 41'',\ 63$; $c = 143^\circ\ 31' 7'',\ 33$; $C = 119^\circ\ 57'\ 16'',44$;

y las del segundo triángulo ACB_1

$B_1 = 70^\circ\ 27' 18'',\ 37$; $c_1 = 171^\circ 39' 34'',\ 20$; $C_1 = 167^\circ\ 47'\ 45'',58.$

TOPOGRAFÍA.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

68. Se llama *Topografía* la ciencia que enseña á hallar la magnitud y figura de un terreno de corta extension.

69. Se llama *escala* una recta pequeña dividida en partes iguales, de las que cada una representa una unidad lineal; como un pié, un metro, un kilómetro, etc.

Se construirá, pues, una escala, dividiendo una recta del papel en partes iguales.

Puede suceder que las partes de la escala que representan unidades sean tan pequeñas, que la division de la recta en estas partes sea imposible por los métodos ordinarios (*Geom.*, *Problema* 24).

Supongamos, por ejemplo, que una recta de seis pulgadas represente 432 unidades lineales, en cuyo caso una pulgada de la escala representará 72 unidades, y por consiguiente una línea ($\frac{1}{12}$ de pulgada) representará 6 unidades: es claro que la division de esta recta ($\frac{1}{12}$ de pulgada) en seis partes iguales es imposible por los métodos enseñados en la Geometría elemental; pues los puntos de division se confundirian unos con otros.

Hé aquí cómo en este caso se construye la escala.

Fig. 24. Sea $AG = 6$ pulgadas: la dividimos en las seis partes iguales AB, BC, CD, DE, EF, FG, que cada una será una pulgada; dividimos la primera pulgada AB en doce partes iguales, de las que cada una representará 6 unidades lineales; en los puntos A, B, C, D, E, F y G levantamos perpendiculares á la AG, tomamos sobre la primera Aa seis partes iguales de magnitud arbitraria, y otras seis iguales á las anteriores en la última perpendicular Gg; y juntamos los puntos correspondientes por medio de seis rectas

que serán paralelas á la *AG*; dividimos ahora la *ab* en doce partes iguales, y trazamos las trasversales que unan los puntos de la *ab* á los de la *AB*, como lo indica la figura, y quedará construida la escala.

En esta escala la parte 1 de la paralela á la *AG* comprendida entre la perpendicular *Bb* y la primera trasversal de la derecha será $\frac{1}{6}$ de cada division de la *AB*, y por consiguiente representará una unidad lineal; la parte 2 representará dos unidades, la parte 3 representará tres unidades, etc.; lo que se demuestra fácilmente por medio de los triángulos semejantes de que forman parte estas rectas.

Esto supuesto, veamos cómo se hará uso de esta escala para tomar sobre ella un cierto número de partes.

Supongamos que sobre dicha escala se quieran tomar 320 partes.

Restando de 320 el número inmediato menor 288 señalado en la escala, quedan 32 de resto; restando de 32 el número inmediato menor 30, que señalan las divisiones de la recta *AB*, quedan 2 de resto. Fijemos ahora una punta del compas en el punto de interseccion de la paralela 2 y perpendicular 288, y abramos el compas hasta que la otra punta llegue á la trasversal 30, y tendremos en la abertura del compas las 320 partes; lo que es fácil comprobar.

Supongamos ahora que se quieran tomar sobre la escala 208 partes.

Restamos 144 de 208, y quedan 64; restemos 60 de 64 y quedan 4. Fijemos, pues, una punta del compas en el punto de interseccion de la paralela 4 y perpendicular 144, llevemos la otra punta á la trasversal 60, y tendremos en la abertura del compas las 208 partes.

Si la escala hubiese de contener 1000 partes, teniendo que apelar á este método de construccion, se dividiria la recta dada, para que contuviese las 1000 partes, en 10 partes iguales, la primera de éstas en otras 10 partes iguales, y cada una de éstas en 10 por el método artificial de las trasversales.

70. Sabido es (*Geom.* 37) que con el trasportador se puede construir en el papel un ángulo de un cierto número de grados, y que, al contrario, se puede hallar el número de grados que tiene un ángulo dado en el papel.

Estos dos problemas pueden resolverse, sin el trasportador, por medio del compas, la escala y las tablas de logaritmos.

Fig. 25. Sea α el número de grados, minutos, etc. del ángulo *AOB*, y por consiguiente de su arco correspondiente *AB*, *r* el radio, con que se ha trazado este arco, expresado en unidades de la escala: bajando la perpendicular *OC* á la cuerda *AB*, y llamando *c* á esta cuerda, será (48, 1.º)

$$\frac{c}{2} = r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \text{ó} \quad c = 2r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\alpha;$$

y tomando logaritmos, se tendrá

$$\log c = \log 2r + \log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Supongamos que el radio r del arco AB sea de 500 partes de escala: será $2r = 1000$, y por consiguiente

$$\log c = 3 + \log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\alpha \qquad [1],$$

fórmula que nos dará la longitud de la cuerda c, conociendo la graduacion α de un ángulo, y al contrario; y que por tanto servirá para resolver el problema propuesto.

Tratemos, por ejemplo, de construir sobre la recta OA, siendo O el vértice, un ángulo de 50° y $28'$.

Para hallar la cuerda AB, tenemos la ecuacion

$$\log c = 3 + \log \operatorname{sen}(25^\circ\ 14') = 2{,}6297211,$$

y por consiguiente $c = 426'3$.

Describamos, pues, con el radio de 500 partes de escala un arco indefinido AB desde el centro O, y desde el punto A con un radio igual á la cuerda 426 partes de escala, describamos un arco que cortará el indefinido en B, tracemos la BO, y tendremos el ángulo AOB de 50° y $28'$.

Al contrario, para hallar los grados y minutos del ángulo AOB, describimos el arco correspondiente al ángulo dado con un radio de 500 partes de escala, llevamos la cuerda AB sobre la escala y supongamos tenga 824 partes: despejamos en la fórmula [1] log sen $\frac{1}{2}\alpha$, y será

$$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\alpha = \log c - 3;$$

y actualmente

$$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\alpha = \log 824 - 3 = \overline{1},9159272.$$

Luego $\qquad \frac{1}{2}\alpha = 55^\circ\ 29'$, y $\alpha = 110^\circ\ 58'$.

Por este método se puede construir un ángulo que tenga grados y minutos; y al contrario, hallar el número de grados y minutos que tiene un ángulo dado en el papel, mientras que con el trasportador no se pueden tener en consideracion los minutos. Pero es menester, para que este método sea preferible al ordinario, que la construccion sea muy exacta, y que el radio con que se describe el arco sea el mayor posible con respecto al papel en que se opera.

Resolucion de los triángulos rectilíneos por medio de la Geometría.

71. Sabemos que en la resolucion de los triángulos rectilíneos pueden ocurrir cuatro casos:

1.er caso. *Resolver un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido.*

Constrúyase en el papel un triángulo, valiéndose para la construccion de dos lados que tengan tantas partes de escala como unidades tienen los dos lados conocidos, y del ángulo comprendido, igual al ángulo dado. Este triángulo será semejante al propuesto; pues si a y b son los números de unidades lineales de los dos lados conocidos del triángulo que se trata de resolver, a y b son, segun la construccion, los números de partes de escala de los dos lados del triángulo construido que forman el ángulo igual al dado; y como la razon de dos cantidades concretas es la de los números que las representan, $\frac{a}{b}$ será la razon de los dos lados conocidos del triángulo propuesto, y tambien $\frac{a}{b}$ será la razon de los dos lados ya dichos del triángulo construido; luego el triángulo construido y el propuesto, que tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo comprendido, son semejantes, y por tanto el tercer lado del triángulo construido ha de tener tantas partes de escala como unidades tenga el tercer lado del triángulo propuesto (*), y los ángulos del construido serán respectivamente iguales á los del propuesto.

Hallado, pues, el número de partes de escala que tiene el tercer lado del triángulo construido, otras tantas unidades tendrá el ter-

(*) Siempre que dos triángulos sean semejantes y uno de los lados de un triángulo tenga tantas partes de escala como unidades tiene su homólogo en el otro triángulo, los otros dos lados del primer triángulo tendrán tambien tantas partes de escala como unidades tienen sus lados homólogos del segundo triángulo.

Sean a, b y c los números de unidades que tengan los tres lados del triángulo mayor, a, b' y c' los números de partes de escala de los lados homólogos del triángulo menor: decimos que $b'=b$, y $c'=c$.

En efecto, la razon de los dos lados del triángulo mayor, cuyos valores son a y b, es $\frac{a}{b}$, y la razon de sus lados homólogos en el otro triángulo es $\frac{a}{b'}$; y como, por ser semejantes los triángulos, estas dos razones son iguales, será $b'=b$. Del mismo modo se demuestra que $c'=c$.

cer lado incógnito del triángulo propuesto; y midiendo uno de los ángulos incógnitos del triángulo construido, y restando la suma de dicho ángulo y del ángulo dado de 180°, se tendrán los valores de los ángulos incógnitos del triángulo propuesto.

2.° caso. *Resolver un triángulo, dados un lado y dos ángulos.*

Constrúyase en el papel un triángulo que tenga un lado de tantas partes de escala como unidades tiene el lado conocido, y cuyos ángulos adyacentes sean respectivamente iguales á los dos ángulos adyacentes al lado conocido; y el triángulo que resulte será semejante al triángulo que se trata de resolver. Por consiguiente, hallando los números de partes de escala que tengan los otros dos lados del triángulo construido, se tendrán los valores de los dos lados incógnitos del triángulo propuesto (71, 1.er *caso, Nota*).

El tercer ángulo se hallará restando de 180° la suma de los dos ángulos conocidos.

3.er caso. *Resolver un triángulo, dados sus tres lados.*

Constrúyase un triángulo cuyos tres lados tengan tantas partes de escala como unidades tienen los tres lados del propuesto: dicho triángulo será semejante al propuesto: pues si a, b y c son los valores de los tres lados del triángulo propuesto, a, b y c serán las partes de escala de los tres lados del construido; luego los lados de ambos triángulos son proporcionales, y por tanto dichos triángulos son semejantes. Midiendo, pues, dos ángulos del triángulo construido, y restando su suma de 180°, se tendrán los tres ángulos del propuesto.

No nos detendremos en la resolucion del 4.° caso, en que se dan dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, porque este caso no ocurre nunca, si el ángulo dado es agudo ú obtuso; pero sí resolveremos el siguiente caso particular suyo.

4.° caso. *Resolver un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa y un cateto.*

Constrúyase un triángulo rectángulo cuya hipotenusa y uno de los catetos tengan tantas partes de escala como unidades tienen la hipotenusa y cateto dados; el triángulo construido será semejante al propuesto: pues si a y b son las unidades de la hipotenusa y cateto, a y b serán los números de partes de escala de la hipotenusa y cateto del triángulo construido; luego dichas hipotenusas y catetos son proporcionales y por tanto los dos triángulos son semejantes. Midiendo, pues, uno de los dos ángulos agudos del triángulo construido, y restándolo de 90°, conoceremos los dos ángulos agudos. El cateto desconocido se hallará por el teorema de Pitágoras.

72. Dijimos (*Geom.* 112) que se llama *plomada* un hilo atado, por un extremo á un cuerpo de pequeño volúmen y mucho peso, que ordinariamente suele ser un cono de metal fijo por el centro de su base al extremo del hilo. Cuando el otro extremo del hilo se fija á un punto, y queda la plomada en reposo, la direccion del hilo de la plomada se llama línea *vertical*. La vertical de un punto de la tierra es la prolongacion del radio de la esfera terrestre que pasa por dicho punto.

Dos verticales correspondientes á dos puntos de la tierra no muy distantes entre sí, pueden considerarse como paralelas, sin error sensible, á causa de la gran distancia de la superficie al centro de la tierra, punto en que se encuentran dichas verticales.

Se llama *plano vertical* todo plano que pasa por una línea vertical.

Línea *horizontal* es la perpendicular á la línea vertical.

Plano *horizontal* es el plano perpendicular á la línea vertical.

El plano que no es horizontal ni vertical se llama plano *inclinado*.

73. El *nivel* de aire es un tubo cilíndrico de cristal, algo encorvado hácia el medio, cerrado y cubierto de laton por sus extremos y adherido á una regla rectangular del mismo metal. Está lleno de espíritu de vino, excepto un pequeño espacio ocupado por una burbuja de aire, que como más ligero que el líquido, ocupa siempre la parte superior. Cuando la burbuja de aire ocupa la parte media del tubo, el eje de este es horizontal, como tambien la regla rectangular sobre que descansa.

El nivel de *albañil* está compuesto por dos reglas iguales, que forman un ángulo, generalmente recto, y ligadas por otra regla paralela á la línea que pasa por los extremos de los lados del ángulo. Desde el vértice de este ángulo está pendiente una plomada; y cuando esta pasa por el punto medio del travesaño, es perpendicular al travesaño, y por consiguiente á la línea que pasa por los extremos de las dos reglas; luego entonces esta línea será horizontal.

Con cualquiera de estos dos niveles se puede poner horizontal un plano, moviéndolo hasta que sean horizontales dos de sus líneas que formen un ángulo recto, poco más ó ménos; pues siendo entonces estas dos líneas perpendiculares á la vertical que pasa por el vértice del ángulo, la vertical es perpendicular al plano (*Geom.*, *teor.* 112, *núm.* 54), y por consiguiente este es horizontal.

74. Linea *de mayor pendiente* de un punto de un plano es la recta que pasa por dicho punto en el plano, y tiene mayor pendiente que otra cualquiera recta que pasa en el plano por el mismo punto.

FIG. 26. *Si desde un punto cualquiera* B *de un plano inclinado* FEH *se baja una perpendicular* BA *á una horizontal* EF *del mismo*

plano, dicha perpendicular es la linea de mayor pendiente del punto B *del plano.*

Sea BC una oblícua cualquiera á la horizontal EF, BD la perpendicular bajada desde el punto B al plano horizontal FEI, que pasa por la EF; juntando el pie D de esta perpendicular con los puntos A y C, las rectas DA y DC serán perpendiculares á la BD, y por tanto serán horizontales. La pendiente de la recta BA es (*Geom.* 113) $\frac{BD}{DA}$, la de la recta BC es $\frac{BD}{DC}$: por ser $BA < BC$, es (*Geom., teor.* 119) $DA < DC$; luego la pendiente $\frac{BD}{DA}$ es mayor que la $\frac{BD}{CD}$: es decir, que la pendiente de la BA es mayor que la de otra cualquiera recta que pasa en el plano por el punto B.

Segun este teorema, para hallar en un plano inclinado la línea de mayor pendiente que pase por un punto dado, se bajará una perpendicular desde dicho punto á una horizontal trazada en el plano. La horizontal en un plano inclinado se traza por medio del nivel de aire ó de albañil.

La línea de mayor pendiente es la que describe en su caida un cuerpo abandonado sobre un plano inclinado. Se puede hallar dicha línea prácticamente sin necesidad de señalar la línea horizontal, fijando el extremo del hilo de una plomada en el punto dado en el plano, y la direccion del hilo de la plomada en reposo es la línea de mayor pendiente de dicho punto.

Fig. 26*. Si el travesaño del nivel de albañil es el arco correspondiente al ángulo que forman los dos brazos, y este arco está graduado, teniendo el 0 en su punto medio, se podrá medir con este nivel el ángulo que forma un plano ACE con el horizonte, es decir, con un plano horizontal. Para esto, se señala en el plano dado una línea AC de mayor pendiente, y colocando despues el nivel de albañil de modo que sus lados tengan sus extremos en dicha línea, y que el plano del nivel sea vertical, lo que se conocerá en que el hilo de la plomada coincide con dicho plano, entonces el número de grados del arco *mo* será el valor del ángulo que forma el plano dado con el horizonte.

En efecto, sea B la proyeccion horizontal de un punto A de la línea de mayor pendiente AC, la BC será la proyeccion horizontal de la AC, y ademas será perpendicular á la interseccion CE de los dos planos (*Recip. del teor.* 120 *de la Geom.*); luego (*Geom.* 67) el ángulo ACB será la medida del diedro $ACEB$: y pues la recta *co* es perpendicular á la AC, y la plomada lo es á la CB, será el ángulo *mco* igual al ACB (*Geom., teor.* 12).

Por grande que sea el ángulo agudo que forme el plano dado con el horizontal, se podrá medir este ángulo por el método que acabamos de explicar, siempre que el arco *ac* esté prolongado hasta que *od* sea igual á 90°.

CAPÍTULO II.

Operaciones fundamentales.

75. Se llaman *jalones* ó *piquetes* unas varas derechas de madera con una punta de hierro para clavarlas en tierra y una señal en la cabeza para verlas con claridad á largas distancias. Tienen de tres á cuatro centímetros de grueso, y de uno á dos metros de largo.

Plantar un jalon es clavarle en tierra de modo que quede en posicion vertical, lo que se conocerá arrimando al jalon el hilo de una plomada.

76. La *cadenilla* es una cadena compuesta de eslabones de alambre grueso: cada eslabon tiene uno ó dos decímetros de largo, y la cadena tiene comunmente 10 metros. Termina en dos argollas ó grandes anillos; y para compensar en la medicion de las líneas la falta de tension exacta, se la da un centímetro más de largo. A la cadena acompañan unas grandes agujas de hierro de medio metro de largo para clavarlas en tierra.

Siendo el objeto de la cadena, como lo veremos pronto, la medicion directa de las distancias en el terreno, podrá hacerse uso en su lugar de una cinta ó de una cuerda impregnada de aceite secante, ó de un barniz que la haga inalterable á la humedad.

77. El *cartabon* ó la *escuadra de agrimensor* es un prisma octogonal metálico de un decímetro de altura, y de cuatro á cinco centímetros de diámetro. Cada cara del prisma tiene una rendija en el sentido longitudinal, y por cada dos rendijas opuestas se dirigen *visuales*, es decir, se mira á los objetos. En la base del prisma hay un pequeño cilindro hueco en que se introduce la espiga de su pié, el cual es un baston graduado con una punta de hierro.

En vez de prisma puede ser el cartabon un círculo con dos diámetros perpendiculares entre sí, en cuyos extremos hay cuatro *pínulas*, es decir, cuatro piececitas rectangulares cuyos planos son perpendiculares al del círculo, y cada una de las cuales tiene dos aberturas en sentido vertical. En una de estas dos aberturas hay una seda ó cerda á lo largo y en el eje de la abertura. Estas pínulas sirven para dirigir visuales.

78. *Levantar una perpendicular en un punto dado de una recta del terreno.*

Una recta se señala en el terreno por medio de dos de sus puntos, en cada uno de los cuales se fija un piquete ó una aguja.

Resolvamos en primer lugar este problema por medio de una cuerda.

Fig. 27. Sea *AB* la recta dada y *C* el punto dado: clávese una aguja en este punto, y á uno y otro lado de él tómense sobre la recta dada las partes iguales *CA* y *CB*. Fíjense los extremos de una cuerda mayor que la recta *AB* en las agujas que se clavarán en *A* y *B*; cójase la cuerda por su punto medio, extiéndasela hasta que esté perfectamente tirante, y se tendrá el punto *D*, en el cual se clavará una aguja: la recta determinada por los dos puntos *D* y *C* será la perpendicular pedida.

Resolvamos el mismo problema por medio del cartabon.

Fíjese en el punto dado el pié del cartabon verticalmente, lo que se conocerá arrimando á él una plomada; muévase el cartabon, sin tocar á su pié, hasta que la visual que pasa por dos rendijas opuestas coincida con uno de los jalones, ó mejor con los dos que señalan la recta dada; plántese una aguja en un punto de la visual que pasa por las dos rendijas correspondientes al diámetro perpendicular al que coincide con la recta; y la recta determinada por el punto dado y por el que señale la aguja será la perpendicular pedida.

79. *Desde un punto dado en el terreno fuera de una recta, bajar una perpendicular á la recta.*

Por medio de una cuerda.

Fig. 27. Sea *D* el punto dado y *AB* la recta dada: fíjese en *D* el punto medio de una cuerda, extiéndanse las dos mitades de la cuerda hasta que estén bien tirantes, y llévense sus extremos sobre la recta dada: divídase la distancia *AB* de dichos extremos en dos partes iguales en *C*, y *DC* será la perpendicular.

Por medio del cartabon.

Colóquese el cartabon en la recta dada; córrase éste á lo largo de la recta, hasta que se encuentre un punto en que, coincidiendo uno de sus diámetros con la recta dada, la visual correspondiente al diámetro perpendicular al primero pase por el punto dado: esta visual será la perpendicular pedida.

80. *Por un punto dado en el terreno dirigir una paralela á una recta dada en él.*

Por medio de la cuerda.

Fig. 27*. Sea *A* el punto dado y *BC* la recta dada. Fíjense en las dos estacas *A* y *B*, siendo *B* un punto cualquiera de la recta dada, los extremos de una cuerda; y poniéndola tirante, llévese uno de sus puntos *C* sobre la recta dada: quedará la cuerda en la posicion *ACB*. Colóquese ahora el extremo *B* de la cuerda en *A*, y el

extremo A en B, y cogiéndola por el punto C, llévese á la parte opuesta; y poniéndola tirante, la recta AC' será la paralela pedida.

Para resolver este problema por medio del cartabon, se baja una perpendicular á la recta desde el punto dado; en este punto se levanta una perpendicular á la primera perpendicular, y esta segunda perpendicular será la paralela á la recta dada.

Dados en el terreno un ángulo, una recta y un punto en ella, dirigir por este punto otra recta que forme con la recta dada un ángulo igual al dado.

1.er *método*. Fig. 28. Sea ABC el ángulo dado, $A'C'$ la recta dada, y A' el punto dado, vértice del ángulo pedido. Levántese en un punto cualquiera C del lado AC una perpendicular CB al mismo lado AC, tómese sobre la recta dada la parte $A'C' = AC$, y por el punto C' levántese la perpendicular $C'B' = CB$ al lado $A'C'$: clávese una aguja en el punto B', y el ángulo $B'A'C'$ será igual al BAC.

2.° *método*. Clávense dos agujas en dos puntos cualesquiera B y C de los lados del ángulo dado, circunscríbase una cuerda tirante al triángulo ABC, y señálense los puntos A, B, C de esta correspondientes á las tres agujas; colóquese en seguida la cuerda tirante en la posicion $A'B'C'$, es decir, de modo que el punto A caiga en A' y el C en C' sobre la recta $A'C'$, y clávese una aguja en el punto B'; el ángulo $B'A'C'$ será igual al ángulo dado.

Nota. Las demostraciones de las soluciones de estos problemas son sumamente fáciles (*).

81. *Grafómetro*.

El grafómetro es un semi-círculo, graduado, de metal; en los extremos del diámetro 0..... 180° hay dos pínulas que forman con dicho diámetro una alidada fija (**); tiene ademas otra alidada movible, que puede girar alrededor del centro. Los grafómetros más perfectos en lugar de las alidadas tienen dos anteojos, uno fijo, que coincide con el diámetro 0..... 180°, y otro movible alrededor del centro, teniendo éste ademas del movimiento horizontal, el movimiento vertical alrededor de su punto medio, para poder dirigir visuales á los puntos elevados ó deprimidos con respecto al horizonte. Este instrumento se coloca sobre un trípode, y su plano puede fijarse en una posicion cualquiera. La alidada ó anteojo movible lleva en cada uno de sus extremos un arco pequeño llamado *Nonio* ó *Vernier*.

(*) Estos problemas se pueden resolver tambien por medio de la plancheta, brújula ó grafómetro.

(**) La alidada es una regla en cuyos extremos hay dos pínulas: los planos de las pínulas son perpendiculares al de la regla. Cuando las visuales deben ser muy largas, se usan anteojos en lugar de alidadas.

82. Fig. 29. Sea AB una línea recta (ó un arco de círculo) dividida en partes iguales. *CD* otra línea de la misma naturaleza, dividida en un cierto número de partes iguales, por ejemplo en 6, que comprendan la misma distancia que 5 partes de la primera línea. Es evidente que, tomando por unidad cada division de la *AB*, cada division de la *CD*, es decir del *nonio* ó *vernier*, valdrá $\frac{5}{6}$, y por consiguiente la diferencia entre cada division de la línea *AB* y cada division del nonio *CD* será $\frac{1}{6}$.

Esto supuesto, tratemos de medir la distancia *Ab*.

Ya vemos que vale 10, y ademas la fraccion 10*b*, que es preciso valuar. Para esto se coloca el nonio de modo que su línea divisoria 0, llamada *línea de fé*, coindida con *b* y se ve cual de las líneas divisorias del nonio coincide entonces con una de la línea *AB*. Supongamos que sea la línea divisoria 4 del nonio la que coincida con la 14 de la línea *AB*: la línea divisoria 3 del nonio estará $\frac{1}{6}$ más á la derecha que la 13 de la línea *AB*; la línea divisoria 2 del nonio estará $\frac{2}{6}$ más á la derecha que la 12 de la *AB*, la 1 del nonio estará $\frac{3}{6}$ más á la derecha que la 11 de la *AB*, y en fin la 0 del nonio ó línea de fé estará $\frac{4}{6}$ más á la derecha que la 10 de la *AB*; luego $10b = \frac{4}{6}$; y por consiguiente $AB = 10\frac{4}{6}$.

Si en vez de coincidir la línea divisoria 4 del nonio con una de la línea *AB*, coincidiese la 5, se veria con la misma facilidad que la línea de fé estaria $\frac{5}{6}$ más á la derecha que la línea 10 de la *AB*. Generalizando estos resultados, vemos que la fraccion cuyo valor se quiere hallar por medio del nonio, tiene por numerador el número que indica la línea coincidente del nonio y por denominador el número de partes en que éste está dividido: siendo unidad cada division de la línea dada.

Sea ahora *AB* un arco del círculo, como el del grafómetro, ú otro instrumento para medir ángulos, siendo medios grados, como en los grafómetros modernos, las divisiones del *limbo* ó circunferencia; y admitamos que el nonio de la alidada movible esté dividido en 30 partes iguales que comprendan 29 divisiones del limbo; si al dirigir una visual, el número de grados que señala el arco es $73\frac{1}{2}$, y ademas una fraccion de medio grado, se hallará el valor de esta fraccion, viendo cuál de las líneas divisorias del nonio coincide con una del limbo. Supongamos que la línea 25 del nonio coincida con una del limbo; la fraccion valdrá $\frac{25}{30}$ de medio grado, ó 25′; pues el instrumento está construido de modo que la línea de fé coincide con la visual. Luego el ángulo valdrá 73° 55′.

83. *Brújula.*

La brújula consiste principalmente en una planchita metálica imanada, de forma de rombo muy puntiagudo, llamada *aguja*, la cual está colocada sobre un estilo, y forma con la meridiana del punto en que se halla un ángulo llamado *declinacion* de la aguja. Este ángulo no varía sensiblemente en un mismo terreno y en tiempos poco diferentes. Se coloca la aguja dentro de una caja ahuecada en forma de cilindro, dentro de la cual hay un círculo dividido en medios grados, cuyo centro ocupa el estilo que sostiene á la aguja. Un cristal tapa al cilindro hueco y á la aguja para evitar que esta se separe de su estilo, que el viento la haga oscilar, y se introduzca el polvo en el interior. A un lado de la caja hay, paralelamente al diámetro 0..... 180° del círculo, una alidada ó anteojo, que puede moverse en sentido vertical; y sirve por lo tanto para dirigir visuales á puntos elevados ó deprimidos con respecto al plano de la brújula, que siempre debe ser horizontal, para que la aguja se mueva libremente. La brújula se sostiene sobre un trípode y puede moverse horizontalmente alrededor de su centro.

84. *Meridiana.*

Se sabe que la meridiana de un punto de la tierra es la interseccion del meridiano del punto con el plano horizontal del mismo.

La meridiana de un punto es la sombra que á medio dia proyecta un jalon vertical. Como no es fácil saber á punto fijo el instante en que es medio dia, podrá hallarse la meridiana de un punto dirigiendo un anteojo, que tenga movimiento vertical, de cualquiera de los instrumentos, á la estrella polar; y dirigiendo en seguida con dicho anteojo una visual á un punto del terreno, se tendrá la meridiana aproximadamente, porque la estrella polar no está exactamente en el mismo polo.

El método siguiente debe preferirse, cuando la meridiana ha de estar construida con suficiente exactitud.

Fig. 30. Colóquese un plano bien liso y horizontal en el sitio en que se quiere construir la meridiana, fíjese al plano un estilo vertical AB terminado por la parte superior en una planchuela con un agujerito a. Desde el punto a', proyeccion del agujero a, descríbanse varias circunferencias mpm', nqn', oro', etc.; señálense antes y despues del medio dia los puntos m, n, o, o', n', m', en que toca á los arcos el rayo de luz que pasa por el agujero a; trácese despues una recta $a'p$ que divida á uno de estos arcos en dos partes iguales, y esta recta $a'p$ será la meridiana.

Se ve, segun esto, que una sola circunferencia es suficiente para la construccion de la meridiana; y si se trazan varias circunferencias, es para comprobar la operacion; pues la meridiana debe dividir en dos partes iguales á cada uno de los arcos mm', nn, oo', etc. (*).

(*) Si la declinacion del sol no variase en el tiempo empleado en la

Hallar la declinacion de la aguja magnética por medio de la meridiana.

Colóquese la brújula de manera que la visual que pasa por su alidada ó anteojo coincida con la meridiana, véase el ángulo que la aguja forma entonces con el diametro 0..... 180°, y este ángulo será la declinacion; pues dicho ángulo es igual al que forma la aguja con la meridiana, á la cual es paralela la recta 0..... 180°.

Hallar la meridiana por medio de la declinacion de la aguja.

Colóquese la brújula en el punto en que se quiere construir la meridiana, y muévase la brújula horizontalmente hasta que la aguja forme con el diámetro 0..... 180° un ángulo igual á la declinacion de la aguja, entonces este diámetro, ó la paralela á él, que pasa por la alidada, señalará la meridiana.

35. *Plancheta.*.

La plancheta es una tabla cuadrada bien lisa, en la cual se pega un pliego de papel. La acompaña una alidada y se coloca sobre un trípode. El plano de la plancheta puede fijarse en una posicion cualquiera con respecto al horizonte.

86. *Medicion del ángulo que forman dos rectas que unen tres puntos del terreno.*

1.° *Con el grafómetro.*

Colóquese el grafómetro de modo que su centro corresponda exactamente, ó poco más ó ménos, al vértice del ángulo; fíjese su plano de manera que su prolongacion pase, ó con corta diferencia, por los otros dos puntos del terreno; diríjase la alidada fija á uno de estos puntos y la movible al otro, y el número de grados y minutos que entonces señale esta alidada será el valor del ángulo.

Generalmente el ángulo que se tiene que medir en el terreno es horizontal: y para esto, se coloca el plano del grafómetro horizontalmente, aunque no es necesaria una horizontalidad perfecta.

2.° *Con la brújula.*

Fig. 31. Sea O el punto de estacion (*), sean A y B los otros dos puntos: se trata de hallar el valor del ángulo AOB.

Dirijamos una visual CA al punto A, y en seguida otra BD al

---

construccion de la meridiana, la altura del sol en tiempos equidiferentes del medio dia sería la misma; y por consiguiente las longitudes de las sombras del estilo serían iguales en dichos tiempos, y la construccion explicada daria exactamente la meridiana. Pero como la declinacion del sol varía continuamente, será menester ejecutar la operacion principiando poco antes y terminando poco despues de medio dia; pues en tan corto tiempo la variacion de declinacion del sol es casi nula; con más motivo si la operacion se hace hácia los solsticios, época en que dicha variacion, que va á mudar de sentido, es nula sin error sensible.

(*) Así se llama el punto en que se coloca el instrumento.

punto B; el arco oo' corrido por el punto o del diámetro 0..... 180° será el valor del ángulo AOB.

En efecto, la diferencia entre los arcos oo' y mm' es la misma que entre los arcos mo y $m'o'$, ó entre los ángulos oOm y $o'Om'$, iguales á los ángulos A y B, por ser las visuales paralelas siempre al diámetro 0..... 180°. Mas cada uno de los ángulos A y B es despreciable por su pequeñez, y la diferencia entre ambos lo es con mayor razon; luego la diferencia entre los arcos oo' y mm' es nula, sin error sensible; luego el arco oo' es la medida del ángulo AOB.

Esto supuesto, podrá suceder que una de las puntas de la aguja quede dentro del ángulo oOo' ó que sus dos puntas queden fuera de dicho ángulo: lo primero se conocerá en que el punto o está, al dirigir una visual, á la derecha de una punta de la aguja, y al dirigir la otra, á la izquierda de la misma punta; y lo segundo se conocerá en que el punto o se halla en las dos operaciones á un mismo lado de la punta. En el primer caso es evidente que el arco oo', ó el valor del ángulo AOB, será la suma de los dos arcos comprendidos entre la punta de la aguja y el punto o; y en el segundo caso, que dicho ángulo será la diferencia de los mismos arcos.

Como el plano de la brújula debe ser horizontal, ó poco diferente del horizontal, para que la aguja se mueva libremente, se ve que con la brújula sólo pueden medirse ángulos horizontales.

3.° *Con la plancheta.*

Colóquese la plancheta en el vértice del ángulo y señálese hácia el lado más conveniente del pliego un punto, y no importa que este punto no corresponda exactamente al vértice del ángulo: fíjese el plano de la plancheta de modo que su prolongacion pase exacta ó aproximadamente por los otros dos puntos; diríjase entonces una visual á uno de estos puntos, y márquese en el papel con un lápiz la direccion de esta visual; diríjase en seguida otra visual al otro punto, y márquese tambien su direccion en el papel: las dos rectas trazadas en el papel formarán el ángulo pedido.

Si el ángulo que se quiere medir es horizontal, se coloca el plano de la plancheta horizontalmente, ó al poco más ó ménos, y entonces las dos rectas señaladas en el papel serán las proyecciones horizontales de las dos visuales dirigidas á los dos puntos.

4.° *Con la cuerda en terreno llano.*

Fig. 32. Sea el ángulo BAC: tomemos sobre sus lados dos partes iguales AB y AC, y midamos ademas el lado BC. Construyamos en el papel un triángulo abc semejante al ABC (71. 3.^{er} *caso*), y el ángulo a será igual al ángulo A.

ALINEACIONES.

87. Se llama *alineacion* la interseccion, con la superficie del terreno, del plano vertical que pasa por dos puntos dados en esta superficie.

88. *Dados dos puntos en el terreno, prolongar la alineacion determinada por ellos.*

Fig. 33. Sean A y B los dos puntos dados: plántese un jalon C de modo que la visual dirijida desde él al jalon B pase por un punto del jalon A. Este jalon C se hallará en el plano vertical de los dos galones A y B; pues si la visual que hemos dirigido para determinar la posicion del jalon C es la GEF, los dos planos $ABEG$ y $BEFG$ tendrán comunes las dos rectas BE y GF: luego dichos dos planos formarán uno solo; es decir, que el jalon C estará en el plano vertical de los otros dos.

Del mismo modo se continuará la alineacion plantando siempre cada jalon de modo que se halle en el plano vertical de dos jalones plantados ya.

Por medio de una alidada ó anteojo que tenga movimiento vertical, como por ejemplo la alidada ó anteojo que comunmente tiene la brújula, se puede prolongar fácilmente una alineacion: pues colocando el anteojo en la alineacion dada, no hay más que ir plantando jalones, de modo que se hallen en la alineacion indicada por el anteojo.

Fig. 34. Si se encontrase algun obstáculo para la prolongacion de la alineacion AB, como sucederia si el terreno $MNPQ$ fuese un bosque, un edificio, etc., se prolongará la alineacion AB del modo siguiente.

Se levantará á la línea AB una perpendicular BC suficientemente grande, en el punto C se levantará á ésta la perpendicular CD que se prolongará más allá del obstáculo, en un punto D de esta perpendicular se levantará la perpendicular $DE = BC$, y finalmente en el punto E se levantará á la ED la perpendicular EF, que será la prolongacion de la AB.

En efecto, las dos líneas AB y EF son paralelas á la DC, y por consiguiente son paralelas entre sí; y como las dos distancias ED y BC de estas paralelas á la DC son iguales, dichas paralelas coinciden.

Fig. 35. Supongamos, como aplicacion de este problema, que AC sea la línea formada por la fachada de una casa, que $CDEFN$ sea una manzana de casas, y que $OPQR$ sea el frente de otra manzana, quedando entre ambas manzanas la calle irregular que se ve en la figura: supongamos tambien que á la derecha

de N se quiera construir una casa cuya fachada esté en línea con la AC: se trata de señalar la NM prolongacion de la AB.

Levantamos en B la perpendicular BG; desde el punto saliente E bajemos una perpendicular GEH á la BG, y la prolongamos hasta que encuentren en H á la manzana $OPQR$; levantamos en H la HI perpendicular á la GH, y la prolongamos hasta que encuentre en I á la otra manzana; levantamos en I la perpendicular IK á la IH; en K levantamos á la IK la perpendicular $LK = BG - IH$, finalmente levantamos la LM perpendicular á la LK, y la LM será la prolongacion de la AB. Se demuestra como en el problema anterior.

A veces convendrá resolver este problema del modo siguiente:

Fig. 36. Diríjase desde un punto A de la línea AB una recta AH, mídanse el ángulo A y la recta AH, desde H diríjase una visual HG que vaya más allá del obstáculo, y mídase el ángulo H. Resolviendo el triángulo AHG, en que se conocen un lado AH y los dos ángulos A y H adyacentes á este lado, se calcularán el lado HG y el ángulo G; con cuyos datos queda determinada la GI, prolongacion de la AB.

Si el ángulo A es de 45° y la HG es perpendicular á la AH, se tendrá $HGA = 45°$, y $HG + AH$; y de este modo se evitará el tener que resolver el triángulo.

89. *Dados dos puntos en el terreno, señalar otros puntos intermedios que estén en la alineacion de los dos puntos dados.*

Fig. 37. 1.° Sean A y B los dos puntos dados, visibles uno de otro: colóquese un jalon C de modo que la visual dirigida desde uno de los jalones dados al otro pase por el punto del jalon C. Los otros jalones D y E se colocarán del mismo modo, ó como en el problema anterior.

Fig. 38. Si el terreno fuese una hondonada, se plantará un jalon C bastante alto y próximo á uno de los dos puntos dados, al B por ejemplo, para que la visual AB pase por un jalon C; el jalon D se colocará en seguida como en (88), é igualmente el jalon E y cuantos se necesiten.

Tambien se pueden hallar los puntos intermedios en este caso, plantando en M un jalon como en (88), y en seguida los jalones C, D, etc. del mismo modo.

Por medio de un anteojo que tenga movimiento vertical se puede resolver el problema (89) con mucha facilidad: pues colocando dicho anteojo en uno de los puntos dados y en la alineacion que estos dos puntos determinan, no habrá más que ir plantando los jalones intermedios en el plano vertical en que se mueva el anteojo.

Fig. 39. 2.° Si el punto A no es visible desde el B, por su mucha distancia, ó por la desigualdad del terreno, se plantarán dos

jalones intermedios D y C (desde los cuales se vean los puntos A y B), de modo que los tres D, C y B se hallen en la misma alineacion, como tambien los tres C, D y A, lo que se consigue fácilmente por tanteo: con lo que el problema queda reducido á uno de los casos anteriores.

Si no existen estos dos puntos intermedios desde los cuales se descubran los dos puntos extremos, se plantarán por tanteo mayor número de jalones intermedios; siempre teniendo en cuenta que todos los jalones estarán bien plantados, cuando cada uno se halle en la alineacion de otros dos (88).

A veces se puede resolver este segundo caso, sin tanteo, del modo siguiente:

FIG. 40. Diríjase una línea AC, en el terreno adyacente; prolónguese esta línea hasta que se descubra el punto B; mídanse las líneas AC, CB y el ángulo comprendido C; y resolviendo el triángulo ACB, se conocerán los ángulos A y B. Se dirigirá en seguida una alineacion desde el punto A, que forme con la AC un ángulo igual al valor del ángulo B, y esta alineacion pasará por el punto B.

MEDICION DIRECTA DE LAS LÍNEAS ACCESIBLES.

90. Señalada la alineacion entre dos puntos, se medirá su distancia, si el terreno es llano por medio de la cadena ó de la cuerda.

FIG. 41. Si se quiere hallar la distancia horizontal entre dos puntos A y B de un terreno fácil de recorrer, se colocará horizontalmente en la alineacion dada un reglon MN cuyo extremo M esté en línea vertical con el punto A; lo que se conseguirá evidentemente por medio del nivel de aire ó de albañil y la plomada: llévese entonces la plomada al extremo N, y colóquese, como en el caso anterior, el reglon en $M'N'$; llévese la plomada al extremo N', y colóquese como queda dicho el reglon en $M''N''$; y así sucesivamente hasta llegar al punto B. Si se ha llegado á un punto B' cuya distancia horizontal al punto B sea menor que la longitud del reglon, se hallará la distancia horizontal entre los puntos A y B' multiplicando la longitud del reglon por el número de veces que se haya colocado; y añadiendo á este producto la distancia horizontal entre los puntos B' y B se tendrá la distancia horizontal entre los puntos dados A y B.

NOTA. Las operaciones topográficas se empiezan generalmente por la medicion directa de una recta llamada *base*; y así, cuanto más delicada sea la operacion que se quiere ejecutar, con tanto más cuidado se debe medir la base. Conviene medir la base dos ó tres veces, y tomar un medio entre estas medidas (*Aritmética* 211, 3.er *ejemplo, Nota*).

CAPÍTULO III.

Medicion de distancias inaccesibles.

91. *Medir una distancia accesible por un extremo é inaccesible por el otro.*

1.° *Con los jalones en terreno llano*, aunque este no sea horizontal.

Fig. 42. Sean A y B los dos puntos, cuya distancia AB se quiere medir, accesible el primero é inaccesible el segundo.

Por el extremo A dirijamos una recta AC, por un punto C de esta recta dirijamos la CH, paralela á la AB, y por el punto medio O de la AC dirijamos la alineacion BO, que la prolongamos hasta que encuentre á la CH en un punto H: la CH, que se puede medir directamente, será igual á la AB (*Geom.*, *teor.* 15).

Si la BH no pudiese ser tan larga, se toma CO' igual al tercio, cuarto, etc., de AC, y dirigiendo la alineacion $BO'H'$, la CH' será respecto de la AB lo que la CO' es de la AO': pues siendo semejantes los triángulos ABO', $CO'H'$ tendremos

$$\frac{CO'}{AO'} = \frac{CH'}{AB}.$$

Si por ejemplo la CO' es el cuarto de la AC, ó lo que es igual, la CO' el tercio de la AO', tambien la CH' será el tercio de la AB, y por tanto $AB = 3CH'$.

2.° *Con el cartabon en terreno horizontal ó de poca pendiente.*

Fig. 43. Levántese en el punto A una perpendicular á la AB, córrase el cartabon sobre la AC hasta que, coincidiendo uno de los diámetros con la CA, la visual que pasa por las dos rendijas inmediatas pase por el punto B; y entonces, como el ángulo C es de 45°, y por consiguiente tambien el ángulo B es de 45°, será $AB = AC$.

3.° *Con la plancheta.*

Fig. 44. Sea BD la distancia accesible por B (*) é inaccesible por D: mídase una base BC, colóquese la plancheta en uno de los extremos B, de modo que su plano prolongado pase poco más ó

(*) En todas las operaciones en que se haga uso de la plancheta, señalaremos por medio de las letras mayúsculas los puntos del terreno, y por letras minúsculas, pero de igual denominacion, los puntos correspondientes de la plancheta.

ménos por el otro extremo y por el punto inaccesible D. Desde el punto b de la plancheta diríjanse las dos visuales bC y bD, y señálense en el papel las dos líneas bc' y bd'; tómense sobre la bc', tantas partes de escala como unidades tiene la base; trasládese la plancheta al otro extremo, y colóquese de modo que el punto c' caiga al poco más ó ménos sobre el punto C, que la cb' coincida con la base, y que el plano prolongado de la plancheta pase por D. Diríjase la visual cD, y señálese en el papel la cd. Los triángulos $cb'd$ y cbD son semejantes, y por tanto

$$\frac{cb'}{cb}=\frac{b'd}{bD};$$

y puesto que la cb' tiene tantas partes de escala como unidades tiene la cb, tambien la $b'd$ tendrá tantas partes de escala como unidades tiene la bD. Llevando, pues, la $b'd$ sobre la escala, se tendrá el número de unidades de la distancia BD.

Nota. Si en vez de la distancia verdadera BD se pide la distancia horizontal que hay entre los puntos B y D, no habrá más que medir la distancia horizontal entre los extremos de la base, y colocar la plancheta horizontalmente. Para esta operacion será menester, si el terreno es muy desigual, que la alidada de la plancheta tenga pínulas bastante largas; ó mejor, que conste de una regla y de un anteojo adherido á ella, que tenga movimiento perpendicular al plano de la regla.

4.° *Con el grafómetro.*

Fig. 45. Mídase una base AC, y en sus extremos A y C mídanse los dos ángulos A y C: en el triángulo ABC se conocerán un lado y dos ángulos, y por consiguiente se podrá hallar el lado AB.

Nota. Si se pide la distancia horizontal entre los dos puntos A y B, se medirá la distancia horizontal de los extremos de la base y los dos ángulos horizontales A y C, y se hallará en seguida, resolviendo el triángulo, la distancia horizontal entre los puntos A y B.

5.° *Con la brújula.*

Fig. 45. Con la brújula sólo se puede hallar la distancia horizontal; y para esto se miden los ángulos horizontales A y C; y entonces en el triángulo BCA se conocerán un lado y dos ángulos; y por consiguiente (71, 2.° *caso*) se podrá hallar el lado AB.

Nota. Si el terreno es llano, pueden medirse con la cuerda los dos ángulos de los extremos de la base (84. 4.°), y por consiguiente se puede medir la distancia inaccesible sin otro instrumento.

92. *Medir una distancia inaccesible por ambos extremos.*

1.° *Con los jalones en terreno llano.*

Fig. 46. Sea AB la distancia de los puntos inaccesibles A y B: tomemos tres puntos C, D y E en el terreno accesible, y dirijamos las alineaciones CA, DA, DB y EB; sobre las rectas DC y DE tomemos DF y DH partes alícuotas iguales de las DC y DE, por los puntos F y H dirijamos las FG y HI paralelas á las AC y BE, midamos GI, y ésta será respecto de la AB lo que la DF es de la DC.

En efecto, los triángulos semejantes DGF y DAC nos dan

$$DF : DC :: DG : DA,$$

y los triángulos semejantes DHI y DBE nos dan

$$DH : DE :: DI : DB.$$

Siendo iguales las primeras razones de estas proporciones, tendremos esta otra proporcion

$$DG : DA :: DI : DB;$$

luego (*Geom.*, *teor.* 55, *Recip.*) la GI es paralela á la AB, y por tanto

$$DG : DA :: GI : AB,$$

ó bien

$$DF : DC :: GI : AB.$$

Si, por ejemplo, $DF = \frac{1}{3} DC$, será $GI = \frac{1}{3} AB$, y $AB = 3\,GI$.

2.° *Con la plancheta en terreno llano.*

Fig. 47. Sea AB la distancia inaccesible: mídase una base CD, colóquese la plancheta en C de manera que su plano sea poco más ó ménos paralelo al plano $ABCD$, dirijanse las visuales cD, cB, cA, y señálense en el papel las rectas correspondientes cd, cb, ca; tómense sobre la cd del papel tantas partes de escala como unidades tiene la base: trasládese la plancheta al otro extremo D de la base, y colóquese de modo que el punto d caiga sobre el D, que la dc coincida con la base, y que su plano sea paralelo al plano $ABCD$: diríjanse las visuales $d'A$ y $d'B$; señálense en el papel las rectas correspondientes, las cuales cortarán á las $c'a'$, $c'b'$, trazadas en la primera operacion, en los puntos a' y b'; llévese la $a'b'$ sobre la escala; véase cuántas partes de escala contiene, y otras tantas unidades tendrá la AB.

En efecto, los triángulos $d'a'c'$ y $d'Ac$ son semejantes, por tener comun el ángulo $a'd'c'$, y ademas el ángulo $Acd = a'c'd'$, por ser un mismo ángulo: luego

$$\frac{d'c'}{d'c} = \frac{d'a}{d'A}.$$

Los triángulos $d'c'b'$ y $d'cB$ son semejantes por la misma razon, luego $$\frac{d'c'}{d'c} = \frac{d'b'}{d'B}.$$

De estas dos proporciones resulta esta otra

$$\frac{d'a}{d'A} = \frac{d'b'}{d'B};$$

luego los triángulos $d'a'b'$ y $d'AB$ son semejantes (*Geom.*, *teor.* 60), y por consiguiente (71, 1.^{er} *caso, nota*) la $a'b'$ tendrán tantas partes de escala como unidades tiene la AB.

Si la distancia AB y la base CD no están en un mismo plano, se medirán las dos distancias CA y CB que hay desde uno de los extremos de la base á los extremos de la recta AB (91, 3.°); colocando en seguida el plano de la plancheta de modo que su prolongacion pase por los puntos A y B, se medirá el ángulo ACB; y entonces se construirá en la plancheta, ó fuera, un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido (71, 1.^{er} *caso*); y midiendo el número de partes de escala que tenga el tercer lado de dicho triángulo, se tendrá el valor de la distancia AB (71, 1.^{er} *caso, nota*).

Nota. Si solo se pide la distancia horizontal de los puntos A y B, se medirá la distancia horizontal CD en terreno accesible (90) la cual se tomará por base; y se procederá como en el primer caso, teniendo cuidado de colocar horizontalmente la plancheta en los extremos de la base.

3.° *Con el grafómetro.*

Fig. 48. Mídanse las dos distancias que hay desde el punto de estacion C á los dos puntos inaccesibles A y B, mídase tambien el ángulo C, y se conocerán en el triángulo ABC dos lados y el ángulo comprendido.

Nota. Para medir las dos distancias CA y CB, basta una sola base, de la que el punto C sea un extremo.

4.° *Con la brújula.*

Se procede del mismo modo, y se halla la distancia horizontal de los puntos inaccesibles.

Nota. Con la cuerda, si el terreno es llano, se mide la distancia AB del mismo modo.

CAPÍTULO IV.

Medicion de alturas inaccesibles.

93. *Medir una altura cuyo pié sea accesible, siendo horizontal el terreno.*

1.° *Con los jalones.*

Fig. 49. Sea AB la altura: plantemos dos jalones CE y DG de manera que su distancia CD sea poco más ó ménos igual á su diferencia FG, y que la visual que pasa por sus cabezas, pase tambien por el punto B superior de la altura: midamos la base AC que se diferenciará poco de la altura HB (*); y entonces los triángulos semejantes HBE y FEG nos darán

$$HE : GE :: HB : GF,$$

proporcion en la cual los términos HE, GE y FG son conocidos.

De ella resulta $$HB = \frac{HE \times GF}{GE}.$$

Añadiendo ahora la $HA = CE$, se tendrá la altura total AB.

Si la GF fuese igual á la GE, seria $BH = HE = AC$.

2.° *Con la plancheta.*

Fig. 50. Colóquese la plancheta verticalmente en el extremo D de la base, la cual debe ser poco diferente de la altura AB (**), y de modo, ademas, que el lado inferior de la plancheta sea horizontal. Desde el punto d de la plancheta correspondiente al D del terreno, diríjase la horizontal dH, y trácese en el papel la dh; diríjase la visual dB, y señálese en el papel la db; tómense sobre la dh tantas partes de escala como unidades tiene la base, levántese en su extremo h la perpendicular hb hasta que encuentre á la

---

(*) Esto prueba el valor $BH = HE \times \frac{GF}{GE}$, pues si GF y GE son poco diferentes, el quebrado $\frac{GF}{GE}$ se diferenciará poco de 1, y por consiguiente HB y HE serán tambien poco diferentes entre sí.

La exactitud de esta operacion, en igualdad de circunstancias, es tanto mayor, cuanto ménos se diferencian BH y HE.

(**) Esto se conocerá en que las líneas hb y hd sean poco diferentes entre sí.

db, y la *HB* tendrá tantas unidades como partes de escala tiene la *hb;* pues siendo semejantes los triángulos *dBH* y *dbh*, tendremos la proporcion

$$dH : dh : : HB : hb;$$

y teniendo el antecedente *dH* tantas unidades como partes de escala tiene la *dh*, tambien la *HB* tendrá tantas unidades como partes de escala tiene la *hb* (71, 1.er *caso, nota*).

Añadiendo la $HA = dD$, se tendrá la altura total.

3.° *Con el grafómetro.*

Fig. 51. Colóquese el grafómetro verticalmente, y de modo, ademas, que la alidada fija sea horizontal, á una distancia del pié de la altura poco diferente de esta, lo que se conocerá en que el ángulo *BdH* sea poco diferente de 45°. Mídase este ángulo *BdH*, y entonces en el triángulo rectángulo *BHd* se conocerán el cateto $Hd = AD$, y el ángulo *d;* y por consiguiente se podrá hallar el cateto *BH* (51, 3.° y 71, 2.°). Añadiendo en seguida la *HA* ó su igual la *Dd*, se tendrá la altura total *AB*.

Si el ángulo $d = 45°$ será $HB = Hd = DA$.

4.° *Por medio de la sombra.*

Fig. 52. Mídanse las sombras *AE* y *FC* de la altura *AB* y de un jalon vertical *DC:* como los rayos de luz *BE* y *DF* pueden considerarse como paralelos, por encontrarse en el sol, cuya distancia á la tierra es muy grande, los triángulos *ABE* y *DCF* serán semejantes, y por tanto se tendrá la proporcion

$$AB : DC : : AE : CF,$$

de donde resulta $$AB = \frac{AE \times DC}{CF}.$$

5.° *Por reflexion.*

Fig. 53. Colóquese en *C* un espejo exactamente horizontal; plántese un jalon *DE* en un punto *D*, tal que arrimando el ojo á su cabeza y dirigiendo la visual *EC*, se vea la imágen *B'* del punto superior de la altura. Como, segun se prueba en la Física, los dos ángulos de incidencia y reflexion *ECD* y *BCA* son iguales, los triángulos *ACB* y *DCE* serán semejantes; luego

$$AB : ED : : AC : DC,$$

de donde resulta $$AB = \frac{AC \times ED}{DC}.$$

Midiendo, pues, las distancias *AC* y *DC*, y la altura *DE* del jalon, se tendrá la altura *AB*.

94. Nota. Estos dos últimos métodos son muy erróneos en la práctica, el tercer método es el más exacto, y para esto, conviene hacer uso de la Trigonometría en la resolucion del triángulo.

95. *Medir una altura accesible por su pié, no siendo horizontal el terreno.*

Fig. 54. Mídanse las dos distancias, horizontal CD y verdadera CA, que hay entre el pié A de la altura y el punto C de estacion, y se tendrá

$$AD = \sqrt{CA^2 - CD^2}.$$

Hállese en seguida, como en el caso anterior, la altura BD; y restando de ella la AD, se tendrá la altura BA (*).

Fig. 55. Si el pié de la altura está más bajo que el punto de estacion C, se medirán las distancias horizontal CD y verdadera AC; y por consiguiente

$$DA = \sqrt{CA^2 - CD^2}.$$

Midiendo en seguida la BD, como en el problema anterior, y sumando BD y AD, se tendrá la altura total AC (**).

96. *Medir con los jalones una altura enteramente inaccesible, siendo poco más ó ménos horizontal el terreno en que se opera.*

(*) Como la medicion directa de la distancia verdadera CA es poco exacta, sobre todo si el terreno es desigual, será preferible, para resolver este problema, hallar la altura AD por medio de la nivelacion, ó si es el ángulo ACD bastante considerable, por medio de este ángulo y por la distancia horizontal CD; entonces tendriamos

$$BD = DC \operatorname{tg} BCD, \quad AD = DC \operatorname{tg} ACD:$$

luego $$AB = DC (\operatorname{tg} BCD - \operatorname{tg} ACD);$$

y poniendo en lugar de tg BCD y tg ACD sus iguales $\frac{\text{sen } BCD}{\cos BCD}$ y $\frac{\text{sen } ACD}{\cos ACD}$,

será $$AB = DC\left(\frac{\text{sen } BCD}{\cos BCD} - \frac{\text{sen } ACD}{\cos ACD}\right),$$

ó $$AB = DC \frac{\text{sen } (BCD - ACD)}{\cos BCD \cos ACD}.$$

Tomando ahora los logaritmos se hallará fácilmente la AB.

(**) Se puede hallar la altura AD que tiene el punto C sobre el A por medio de la nivelacion; ó si el ángulo DCA es considerable, por medio de este ángulo y la distancia horizontal CD: así tendremos

$$BD = CD \operatorname{tg} BCD, \quad AD = CD \operatorname{tg} ACD;$$

luego $$AB = CD (\operatorname{tg} BCD + \operatorname{tg} ACD) = CD \frac{\text{sen } (BCD + ACD)}{\cos BCD \cos ACD}.$$

Tomando logaritmos, se hallará sin dificultad la AB.

Fig. 56. Sea AB la altura inaccesible del punto A sobre el punto C de estacion; plantemos dos jalones CD y EF, cuyas cabezas F y D estén en línea recta con el punto A superior de la altura; plantemos en seguida en la alineacion EC los mismos jalones, de modo tambien que la visual $F'D'$ pase por el punto A, y midamos las dos distancias CC' de los jalones mayores y EE' de los menores; con cuyos datos y las longitudes de los jalones podremos calcular la altura AB.

En efecto, imaginemos las horizontales $D'DG$ y $F'FH$, y tendremos (*Geom.*, *teor.* 67)

$$FF' : DD' : : AH : AG.$$

Como el término medio AH y el extremo AG de esta proporcion son incógnitos, pero se conoce su diferencia GH, que es igual á la diferencia de los jalones, podremos deducir la AG de dicha proporcion, modificándola del modo siguiente (*Aritm.* 175):

$$FF' - DD' : DD' : : AH - AG : AG = \frac{DD' \times (AH - AG)}{FF' - DD'},$$

ó bien
$$AG = \frac{CC' \times (DC - FE)}{EE' - CC'}.$$

Añadiendo á la AG la altura del jalon mayor, tendremos la altura AB.

97. *Medir con la plancheta ó con el grafómetro una altura enteramente inaccesible* (figs. 57 y 58).

Sea AB la altura que se quiere medir, cuyo pié B sea inaccesible: puede suceder que el pié B sea visible ó invisible desde el punto de estacion C.

Fig. 57. Si el pié de la altura es visible desde el punto de estacion C, se medirá la distancia CB (91); y si el terreno es horizontal, ó si la distancia CB es horizontal, quedará el problema reducido al caso (93). Si la distancia CB no es horizontal, se medirá ademas la distancia CA del punto C de estacion al punto A superior de la altura (91), y el ángulo ACB: se conocerán en el triángulo ACB dos lados y el ángulo comprendido, y se podrá hallar por consiguiente el lado AB (41, 71, 1.er *caso*).

Fig. 58. Si el pié de la altura es invisible, entonces el problema consiste en hallar la altura AB del punto A con respecto al punto C de estacion.

Mídanse la distancia CA y el ángulo ACB que esta distancia forma con el horizonte, y se tendrá un triángulo rectángulo ABC, en que se conocerán la hipotenusa AC y un ángulo ACB, y por tanto se podrá hallar el lado AB por la ecuacion

$$AB = AC \text{ sen } C;$$

y si no se quiere emplear la Trigonometría, aunque es muy conveniente para la exactitud del resultado, se resolverá geométricamente el triángulo ABC (71, 2.° *caso*).

CAPÍTULO V.

Nivelacion.

98. Acabamos de ver cómo se puede medir lo que un punto está más alto que otro en el terreno. Mas cuando estas diferencias de altura son pequeñas, los métodos explicados en la medicion de alturas serian en la práctica más largos y erróneos que el que vamos á explicar, fundado en los instrumentos llamados niveles. La operacion que enseña á hallar por medio de los niveles la diferencia de altura vertical de dos puntos del terreno se llama *nivelacion.*

99. El *nivel de agua*, del que nosotros nos serviremos para resolver este problema, es un tubo metálico doblado en sus extremos, en los cuales están metidos dos pequeños tubos de cristal: se llena de agua hasta que llegue como á los dos tercios de la altura de estos, y entonces segun se prueba en la Física, la línea rasante á la superficie del líquido en los dos tubos es una línea horizontal. El instrumento se sostiene sobre un trípode, y puede moverse horizontalmente alrededor de su punto medio.

Acompaña al nivel la *mira*, que es un jalon de dos metros de largo, dividido en decímetros y centímetros, el cual tiene una plancha cuadrada dividida en cuatro partes iguales, las dos opuestas pintadas de negro ó rojo y las otras dos de blanco: esta plancha puede subir y bajar á lo largo del jalon, y fijarse por medio de un tornillo en un punto cualquiera del jalon.

100. La tierra tiene la forma de una esfera algo aplanada por los polos. Las montañas son asperezas muy pequeñas en comparacion con la gran magnitud de la tierra, y por consiguiente no influyen en la forma de la totalidad de nuestro planeta. Existiendo estas asperezas, unos puntos de la superficie de la tierra están más altos que otros, ó lo que es igual, unos distan más que otros del centro de la misma. Por lo tanto las circunferencias, cuyos radios sean estas distancias, serán desiguales; á todas ellas, sin embargo, llamaremos circunferencias *máximas* de la tierra.

Se dice que dos puntos de la tierra *están de nivel*, cuando los dos corresponden á una misma circunferencia máxima, ó lo que es igual, cuando se hallan á igual distancia del centro de la tierra.

Todos los puntos de la superficie de un líquido en reposo forman una porcion de superficie esférica, y por tanto distan igualmente del centro de la tierra, ó están de nivel.

Fig. 59. Si en un punto cualquiera A de una circunferencia máxima de la tierra se traza una tangente ó línea horizontal, dicha tangente se llama *línea de nivel aparente*: la línea de nivel *verdadero* es la circunferencia máxima.

Todos los puntos de la línea de nivel aparente tomados hácia un mismo lado del punto de contacto, distan desigualmente del centro de la tierra; pero los puntos B y B' tomados en la misma línea á igual distancia del punto de contacto A están de nivel, puesto que sus distancias BC y $B'C$ al centro de la tierra son iguales.

Cuando dos puntos A y H de la superficie de la tierra están de nivel, la altura BH del punto B de la línea de nivel aparente sobre el punto correspondiente H del nivel verdadero se llama *diferencia del nivel aparente al verdadero*.

101. Es fácil hallar esta diferencia, conociendo la distancia AB. Sea $AB = d$, $BH = x$, $AC = R$ radio de la tierra, que vale 6'375673 metros: en el triángulo rectángulo ABC tenemos por el teorema de Pitágoras

$$(R + x)^2 = R^2 + d^2,$$

y por consiguiente

$$R + x = \sqrt{R^2 + d^2};$$

y

$$x = -R + \sqrt{R^2 + d^2}.$$

102. *Nivelacion simple.*

Fig. 60. Sean A y B los dos puntos cuya diferencia de nivel se quiere hallar, y supongamos que su distancia horizontal no pase de 500 metros. Colóquese el nivel hácia el medio C (no es indispensable que este punto se halle exactamente en la alineacion AB) y la mira en A, fíjese la plancha de la mira de modo que la visual na pase por su centro, y mídase la altura ó *acotacion* Aa. Pásese la mira al otro punto B, y mídase, como se acaba de decir, la acotacion Bb. Réstense las dos acotaciones, Aa y Bb, y su diferencia Bc, será lo que el punto B, cuya acotacion es la menor, está más alto que el punto A.

Valiéndose de otro nivel de mayor alcance, la distancia AB podrá ser mayor que 500 metros.

Fig. 61. Si algun obstáculo impidiese colocar el nivel hácia el medio y la distancia AB no pasa de 250 metros, se colocará el nivel en el punto más elevado A: se medirá la acotacion Bb, y restando la altura del nivel de esta acotacion, se tendrá la altura del punto A sobre el punto B.

En este caso, si la distancia AB es mayor que 250 metros, valiéndose de otro nivel de mayor alcance, habrá (antes de restar la altura del nivel de la acotacion) que disminuir ésta en la diferencia bm del nivel aparente al verdadero. Cuando la distancia no pasa de 250 metros, esta diferencia es despreciable.

103. *Nivelacion compuesta.*

Fig. 62. Si la distancia de los dos puntos A y B es mayor que 500 metros, ó aunque sea menor, si el terreno es muy desigual, se dividirá la operacion en varias parciales.

Hállense primeramente las acotaciones de los puntos A y C, despues la de los puntos C y D....., y por último las acotaciones de los puntos G y B. Sean d, d', d'', d''', d^{IV}, d^{V} las acotaciones de adelante en estas operaciones parciales, a, a', a'', a''', a^{IV}, a^{V} las acotaciones respectivas de atras: tendremos que el punto C estará más alto que el A en $a-d$; el punto D está más bajo que el C en $d'-a'$; luego el punto D está más alto que el A en $a-d-(d'-a')$. El punto E está más alto que el D en $a''-d''$, el punto F más alto que el E en $a'''-d'''$, el punto G está más alto que el F en $a^{\text{IV}}-d^{\text{IV}}$; luego el punto G está más alto que el A en

$$a-d-(d'-a')+a''-d''+a'''-d'''+a^{\text{IV}}-d^{\text{IV}}.$$

Finalmente, el punto B está más bajo que el G en $d^{\text{V}}-a^{\text{V}}$: luego el punto B está más alto que el A en

$$a-d-(d-a')+a''-d''+a'''-d'''+a^{\text{IV}}-d^{\text{IV}}-(d^{\text{V}}-a^{\text{V}})=$$

$$a+a'+a''+a'''+a^{\text{IV}}+a^{\text{V}}-(d+d'+d''+d'''+d^{\text{IV}}+d^{\text{V}}).$$

Luego para hallar en la nivelacion compuesta, lo que un punto está más alto que otro, ó su diferencia de nivel, se suman las acotaciones de atras y las acotaciones de adelante, y la diferencia de las dos sumas será la diferencia de nivel de los dos puntos. Si la suma de las acotaciones de atras es mayor que la de las acotaciones de adelante, el punto de delante será el más alto; en el caso contrario el punto de detras será el más alto.

Conviene volver á ejecutar la operacion en sentido contrario, y tomar un medio entre los resultados obtenidos (*Aritmética* 211, *ejemplo* 3.°, *nota*).

CAPÍTULO VI.

Levantamiento de planos.

104. Sabemos ya (*Geom.* 58) que la proyeccion de un punto sobre un plano es el pié de la perpendicular bajada desde dicho punto al plano, y que la proyeccion de una recta es la recta que pasa por las proyecciones de dos puntos de la recta dada. La *proyeccion* de un ángulo sobre un plano es el ángulo formado por las proyecciones de sus dos lados. La *proyeccion* de un polígono es el polígono formado por las proyecciones de sus lados.

105. Para levantar el plano de un terreno, es necesario resolver antes el problema siguiente.

Fijar la posicion de un punto del terreno con respecto á dos puntos dados.

1.º *Midiendo dos rectas perpendiculares.*

Fig. 63. Sean A y B los dos puntos dados: bájese desde el punto C, cuya posicion se quiere determinar, una perpendicular CD á la AB que une dichos dos puntos; mídanse las dos rectas AD y CD (ó las BD y CD), y el punto C quedará determinado, si ademas se sabe hácia qué lado de la recta AB se halla dicho punto C (*).

En efecto, todo punto que esté en la parte superior de la AB á una distancia CD de la AB, corresponde á la paralela EF dirigida por el punto C; y todo punto á la derecha del punto A, en que el pié de la perpendicular bajada desde él á la AB diste del A la cantidad AD, corresponde á la perpendicular DG: luego no hay otro punto más que el C que satisfaga á las dos condiciones.

Así, si A y B son dos puntos del terreno y queremos hallar un punto que diste por la parte superior 60 metros de la recta AB, y el pié de esta distancia diste de A hácia la derecha 40 metros, tomaremos $AD = 40$ metros, y levantaremos en D una perpendicular DG á la AB, tomaremos sobre ella una parte $DC = 60$ metros, y el punto C será el punto pedido.

2.º *Midiendo un ángulo y una recta.*

Fig. 64. Mídase la distancia CA, entre el punto cuya posicion

---

(*) Esto se sabe por medio del croquis ó bosquejo del terreno, de modo que el croquis en la Topografía suple la falta de los signos que se emplean en la Geometría analítica para la fijacion de puntos.

se quiere determinar, y uno de los puntos dados A; mídase tambien el ángulo CAB que la recta CA forma con la AB; y el punto C quedará determinado, si ademas se sabe hácia qué lado de la AB se halla dicho punto C.

En efecto, todo punto cuya distancia al punto A sea igual á la CA corresponde á la circunferencia trazada desde A con el radio AC; y todo punto superior de la derecha, cuya distancia al punto A forme con la AB, siendo A el vértice, un ángulo igual al CAB, corresponde á la recta AC: luego el punto C es el único que satisface á las dos condiciones.

Así, si A y B son dos puntos del terreno, y queremos hallar un punto cuya distancia al punto A por la parte superior de la AB sea de 60 metros, y el ángulo que esta distancia forme con la AB sea de 45°, dirigiremos la recta AC que forme con la AB un ángulo de 45°, sobre esta recta indefinida tomaremos una parte $AB = 60$ metros, y el punto C será el punto pedido.

3.° *Midiendo dos ángulos.*

Fig. 65. Mídanse los dos ángulos CAB y CBA, que forman con la recta AB las dos rectas CA y CB, y el punto C quedará determinado, sabiendo ademas hácia qué lado de la AB se halla dicho punto C.

En efecto, si el punto se halla, como el C, en la parte superior de la AB, y las dos rectas tiradas desde él á los A y B forman con la AB dos ángulos iguales á los dos ángulos dados A y B, dicho punto corresponde á las dos rectas CA y CB; y por tanto, C es el único punto que satisface á las dos condiciones.

Supongamos, por ejemplo, que siendo A y B dos puntos del terreno, se quiera hallar un punto cuya distancia al punto A forme con la AB un ángulo de 35°, y cuya distancia al punto A forme con la BA un ángulo de 50°. Dirigiremos por los puntos A y B dos rectas ó alineaciones AC y BC que formen con la recta AB y con la BA los ángulos de 35° y 50°, y el punto C de interseccion de estas dos rectas será el punto pedido.

4.° *Midiendo dos rectas.*

Fig. 63. Mídanse las dos rectas CA y CB que unan el punto C á los dos puntos dados A y B; y el punto C quedará determinado, sabiendo ademas hácia qué lado de la AB se halla dicho punto C.

En efecto, todo punto distante del A la cantidad CA corresponde á la circunferencia trazada desde el punto B con el radio AC, y todo punto que diste del B la cantidad CB corresponde á la circunferencia trazada desde el punto B con el radio BC; y como las dos circunferencias no pueden cortarse, por la parte superior de la AB, más que en un punto, se infiere que el punto C es el único que satisface á las dos condiciones.

Supongamos, por ejemplo, que se quiera hallar en el terreno un punto cuyas distancias á los puntos dados *A* y *B* sean de 60 metros y 40 metros, sabiendo ademas que dicho punto se halla en la parte superior de la recta *AB*.

Fijaremos en el punto *A* el extremo de una cuerda cuya longitud sea 60 metros, y en el punto *B* el extremo de otra cuerda cuya longitud sea de 40 metros: se juntarán los otros dos extremos de las cuerdas tirantes en un punto *C* de la parte superior de la recta *AB*, y este punto *C* será el pedido.

Nota. Los ángulos que se midan para la determinacion de los puntos no deben de ser menores que 30°, pues cuanto más se acerque el triángulo, formado por las rectas que unen los puntos dados y el que se quiere determinar, á equilátero; tanto menor será el error de la posicion del punto, originado de la incertidumbre que siempre existe en la medicion directa de los ángulos y de las rectas.

El problema siguiente puede tambien ser útil en el levantamiento de planos.

Fijar la posicion de un punto en un plano con respecto á tres puntos dados en él.

Fig. 66. Sean *A*, *B* y *C* los tres puntos dados, y *D* el punto (cuya posicion se quiere determinar) interior al ángulo *ACB*.

Mídanse los dos ángulos *ADC* y *BDC*, y quedará determinado el punto *D*.

En efecto, tracemos las dos rectas *AC* y *BC*, y construyamos sobre ellas dos arcos capaces de los ángulos *ADC* y *BDC* (*Geom.*, *prob.* 19): todo punto interior al ángulo *ACB*, cuyas dos distancias á los puntos *A* y *C* formen un ángulo igual al *ADC*, corresponde al arco *ADC*; y todo punto interior al ángulo *ACB*, cuyas dos distancias á los puntos *B* y *C* formen un ángulo igual al *BDC*, corresponde al arco *BDC*; luego, como estos dos arcos no pueden cortarse más que en los puntos *C* y *D*, el punto *D* es el único que satisface á las dos condiciones.

Caso excepcional. Puede suceder que el punto que se quiera determinar con respecto á los tres puntos dados *A*, *B* y *C* corresponda á la circunferencia que pase por estos tres puntos: entonces no bastan los dos ángulos que forman las tres rectas dirigidas desde el referido punto á los tres *A*, *B* y *C* para determinar dicho punto, pues si desde dos ó más puntos del arco comprendido entre las rectas *CA* y *CB* se dirigen rectas á los tres puntos *A*, *C* y *B*, dichas rectas formarán ángulos iguales respectivamente (*Geom.*, *teor.* 50, *corol.* 1.°), luego el conocimiento de estos ángulos no es suficiente en este caso para la determinacion del punto.

Fig. 67. 1.ª Si los tres puntos dados *A*, *B* y *C* corresponden al terreno, y se quiere hallar la posicion de un cuarto punto, conoci-

dos los ángulos ADC y BDC; como en el terreno seria casi siempre imposible la construccion de las dos circunferencias dichas, hallaremos la posicion del punto D, obteniendo por medio del cálculo los valores de los ángulos CAD y CBD: entonces dirigiendo por A y B dos alineaciones, que formen con las rectas AC y BC dos ángulos iguales á los que dé el cálculo, se tendrá el punto D en la interseccion de estas dos alineaciones.

Sean x é y los ángulos CAD y CBD, α y β los dos ángulos dados ADC y BDC: en el triángulo ACD es

$$x + \alpha + ACD = 180°,$$

y en el triángulo BCD

$$y + \beta + BCD = 180°;$$

luego $$x + y + \alpha + \beta + C = 360°,$$

de donde $$x + y = 360° - (\alpha + \beta + C);$$

es decir, que conocemos la suma de los dos ángulos x é y.

Para hallar la diferencia de estos ángulos, tenemos

$$\frac{\text{sen } x}{CD} = \frac{\text{sen } \alpha}{b},$$

$$\frac{\text{sen } y}{CD} = \frac{\text{sen } \beta}{a};$$

luego partiendo ordenadamente estas dos ecuaciones, será

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \frac{a \text{ sen } \alpha}{b \text{ sen } \beta}.$$

Hagamos

$$\frac{a \text{ sen } \alpha}{b \text{ sen } \beta} = \text{tg } \varphi \qquad [1],$$

y tendremos

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \text{tg } \varphi = \frac{\text{tg } \varphi}{1};$$

y de esta proporcion resulta esta otra

$$\frac{\text{sen } y + \text{sen } x}{\text{sen } y - \text{sen } x} = \frac{1 + \text{tg } \varphi}{1 - \text{tg } \varphi}:$$

mas (33)

$$\frac{\text{sen } y + \text{sen } x}{\text{sen } y - \text{sen } x} = \frac{\text{tg } \frac{1}{2}(y + x)}{\text{tg } \frac{1}{2}(y - x)}$$

y (22)

$$\frac{1 + \text{tg } \varphi}{1 - \text{tg } \varphi} = \text{tg } (45° + \varphi);$$

luego

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (y + x)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (y - x)} = \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi),$$

de donde

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (y - x) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (y + x)}{\operatorname{tg} (45^\circ + \varphi)}.$$

Tenemos ahora

$$\tfrac{1}{2} (x + y) = 180^\circ - \tfrac{1}{2} (\alpha + 6 + C);$$

luego

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (y - x) = -\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + 6 + C)}{\operatorname{tg} (45^\circ + \varphi)},$$

ó

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (x - y) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + 6 + C)}{\operatorname{tg} (45^\circ + \varphi)} \qquad [p],$$

ecuacion que nos da $\frac{1}{2} (x - y)$, hallando antes φ por la fórmula [1]. Conociendo $x + y$ y $x - y$, se conocerán x é y (*Algebra* 105). El ángulo x será el mayor de los dos, si el segundo miembro de la ecuacion [p] es positivo; pero si el segundo miembro de la ecuacion [p] es negativo, lo que sucederá cuando $\frac{1}{2} (\alpha + 6 + C) > 90^\circ$ y $45^\circ + \varphi < 90^\circ$ ó al contrario, será y el ángulo mayor; y entonces, antes de proceder al cálculo logarítmico, se mudarán los signos á los dos miembros de la ecuacion [p].

Caso excepcional. Si el punto D se hallase en la circunferencia que pasa por los tres puntos A, B y C, tendríamos

$$\alpha + 6 + C = 180^\circ$$

y como (*pág.* 57)

$$b = 2r \operatorname{sen} \alpha, \quad a = 2r \operatorname{sen} 6,$$

sería

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{b \operatorname{sen} 6} = 1,$$

y por tanto $\varphi = 45^\circ$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula [p], será

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (x - y) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0} \; (Alg.\ 67,\ Nota),$$

es decir, que $\frac{1}{2} (x - y)$ tiene infinidad de valores, y que por lo tanto el punto D no está determinado.

Ejemplo. Sean $a = 184$ metros,
$b = 121$ metros,
$C = 70^\circ\ 10'$, $\alpha = 32^\circ\ 17'$, $6 = 40^\circ\ 30'$.

Tenemos $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a \operatorname{sen}\alpha}{b \operatorname{sen}\beta};$$

luego, sustituyendo en esta fórmula los valores de a, b, α y β, será

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{184 \operatorname{sen}(32^\circ\, 17')}{121 \operatorname{sen}(40^\circ\, 30')}.$$

Vamos á indicar el cálculo logarítmico. Reemplazando primeramente estas líneas trigonométricas por sus respectivas tabulares, tendremos

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{184 \operatorname{sen}(32^\circ\, 17') \,.\, 10^{10}}{121 \operatorname{sen}(40^\circ\, 30')};$$

y por consiguiente

$$\log \operatorname{tg}\varphi = \log 184 + \log \operatorname{sen}(32^\circ\, 17') + \text{C.}^{\text{to}} \log 121 \\ - \log \operatorname{sen}(40^\circ\, 30').$$

Cálculo.

$$\begin{aligned} \log 184 &= 2{,}2648178 \\ \log \operatorname{sen}(32^\circ\, 17') &= 9{,}7276278 \\ \text{C.}^{\text{to}} \log 121 &= \underline{7{,}9172146} \\ & \ 19{,}9096602 \\ \log \operatorname{sen}(40^\circ\, 30') &= \underline{9{,}8125444} \\ \log \operatorname{tg}\varphi &= 10{,}0971158, \\ \varphi &= 51^\circ\, 21'\, 12'',4. \end{aligned}$$

Tenemos ahora

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta+C)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\varphi)}.$$

Sustituyendo en lugar de α, β, C y φ sus valores, será

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{\operatorname{tg}(71^\circ\, 28'\, 30'')}{\operatorname{tg}(96^\circ\, 21'\, 12'',4)}.$$

Siendo $\operatorname{tg}(96^\circ\, 21'\, 12'',4)$ una cantidad negativa, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-y)$ será tambien cantidad negativa: mudando los signos á ambos miembros, tendremos

$$-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{\operatorname{tg}(71^\circ\, 28'\, 30'')}{-\operatorname{tg}(96^\circ\, 21'\, 12'',4)},$$

ó

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(y-x) = \frac{\operatorname{tg}(71^\circ\, 28'\, 30'')}{\cot(6^\circ\, 21'\, 12'',4)} =$$

$$\operatorname{tg}(71^\circ\, 28'\, 30'')\operatorname{tg}(6^\circ\, 21'\, 12'',4);$$

$$\log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(y-x) = \log \operatorname{tg}(71^\circ\, 28'\, 30'') + \log \operatorname{tg}(6^\circ\, 21'\, 12'',4).$$

Cálculo.

$$\log \operatorname{tg} (71^\circ\ 28'\ 30'') = 0{,}4746411$$
$$2097 \text{ que se añaden por los } 30''.$$
$$0{,}4748508$$
$$\log \operatorname{tg} (6^\circ\ 21'\ 12'',\ 4) = \bar{1}{,}0466715$$
$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(y-x) = \bar{1}{,}5215223$$
$$\tfrac{1}{2}(y-x) = 18^\circ\ 22'\ 52'',\ 8.$$

Como $\quad y + x = 360^\circ - (\alpha + \beta + C),$

será $\quad y + x = 217^\circ\ 3',$

$$\tfrac{1}{2}(y+x) = 108^\circ\ 31'\ 30''.$$

Luego $\quad y = 126^\circ\ 54'\ 22'',\ 8,$

$$x = 90^\circ\ 8'\ 37'',\ 2.$$

Resolvamos este mismo problema por medio de una construccion geométrica.

FIG. 67. Sean A, B y C los tres puntos dados en el terreno; se trata de hallar un cuarto punto D en el plano de los otros tres, tal que los ángulos ADC y BDC que formen las tres rectas DA, DB y DC, dirigidas desde dicho punto incógnito á los tres puntos dados A, B y C, sean iguales á dos ángulos dados α y β.

Constrúyase en el papel un triángulo acb semejante al ACB, valiéndose de dos lados ac y cb que tengan tantas partes de escala como unidades tienen los dos CA y CB, y siendo el ángulo $c = C$; sobre las rectas ac y cb constrúyanse dos arcos capaces de los ángulos α y β, los cuales se cortarán en un punto d, y mídanse los dos ángulos cad y cbd. Diríjanse ahora en el terreno dos rectas AD y BD que formen con las AC y BC dos ángulos $CAD = cad$ y $CBD = cbd$, y el punto D en que se encuentren dichas dos rectas será el punto pedido en el terreno.

Para demostrarlo, trazamos la recta DC: siendo el triángulo acb semejante al ACB, serán iguales los ángulos CAB y cab, CBA y cba; y como, segun la construccion, los ángulos CAD y CBD son iguales á los cad y cbd, los ángulos DAB y DBA serán iguales á los ángulos dab y dba; y por tanto los triángulos ABD y abd son semejantes. Siendo semejantes estos triángulos, tendremos

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AD}{ad};$$

pero, por ser semejantes los triángulos ACB y acb, es

$$\frac{AC}{ac} = \frac{AB}{ab};$$

luego $$\frac{AC}{ac} = \frac{AD}{ad}.$$

Luego los triángulos ACD y acd son semejantes, y por consiguiente el ángulo $ADC = adc = \alpha$. Del mismo modo se demuestra que el ángulo $BDC = bdc = 6$; luego el punto D es el punto pedido.

106. Pasemos ya á exponer el método general (que no se halla en ninguna otra obra) para el levantamiento de planos topográficos.

Se llama *plano* de un terreno una figura formada en el papel semejante á la del terreno, si este es horizontal; ó en todo caso, una figura semejante á la proyeccion horizontal del terreno.

Para levantar el plano de un terreno, se recorre éste plantando jalones en los puntos que se quieren trasladar al plano, si en ellos no hay señales naturales, como árboles, casas, etc.; y se forma un cróquis ó bosquejo del plano, es decir, se forma á ojo en el papel una figura en que estén colocados al poco más ó ménos los puntos cuya posicion respectiva exacta se quiere fijar en el plano. Se eligen luego dos puntos de los dichos, ú otros dos si convienen mejor, y se mide su distancia horizontal, que será la *base* de la operacion. Se van fijando los demas puntos con respecto á los elegidos, segun se ha explicado en el problema (105); debiendo ser horizontales tanto las distancias como los ángulos que para esto se midan.

Si alguno ó algunos puntos del terreno no pudieran fijarse con respecto á los dos puntos elegidos, por no ser visibles desde éstos, ó porque los ángulos que habrian de medirse al efecto fueren demasiado agudos, se fijarán con respecto á otros dos puntos determinados ya. Mas, si el instrumento no pudiera colocarse en estos nuevos puntos, con respecto á los cuales se van á fijar otros, se colocará lo más cerca que pueda; resultando por esta inexacta colocacion errores que pueden calcularse, pero que generalmente no pasan de algunos segundos en la medicion de los ángulos, y que por lo tanto son enteramente despreciables en la Topografía.

Cuando el terreno es de grande extension se determinan primeramente con respecto á dos puntos convenientemente elegidos los puntos principales por el método de la medicion de dos ángulos, que es el que se debe emplear con preferencia, siempre que se pueda, y los puntos secundarios se determinan despues con respecto á los principales.

Todas las medidas se apuntan en los lugares correspondientes del cróquis.

Para construir en seguida el plano, se traza en el papel una recta, á la que se dan tantas partes de escala como unidades tiene la base y se construyen triángulos semejantes á los que forman los puntos del terreno, tomando, si son líneas rectas las que se han medido para la determinacion de los puntos, tantas partes de escala como unidades tienen sus homólogas del terreno; y si son ángulos, construyendo (70) en el papel ángulos iguales á los medidos. De este modo cada tres puntos del plano están ligados por triángulos semejantes á los que forman sus homólogos del terreno, y por tanto resulta en el papel una figura semejante á la del terreno.

Ejemplos.

FIG. 63. 1.° *Levantar el plano de un terreno* ABCDEF, *es decir, colocar en el papel los puntos* a, b, c, d, e *y* f, *de manera que tomados tres á tres formen triángulos semejantes á los que forman los puntos* A, B, C....., *del terreno.*

Recorrido el terreno, y habiendo colocado jalones en los puntos A, B, C....., F, y formado el cróquis, se elegirán dos puntos F y D, se medirá su distancia horizontal, que será la base de la operacion, y se apuntará esta distancia en el cróquis. Supongamos que los demas puntos se fijen con respecto á los F y D por el método de la medicion de dos perpendiculares. Se bajarán, pues, las perpendiculares AA', BB', CC', EE', se medirán, como tambien las distancias FA', FB', FC', FE', y se apuntarán todas estas distancias en el cróquis.

Para formar ahora el plano, trazamos en el papel una recta fd que tenga tantas partes de escala como unidades tiene la base, y la prolongamos á derecha é izquierda; tomamos fa' que tenga tantas partes de escala como unidades tiene la FA', y levantamos la perpendicular $a'a$ que tambien tenga tantas partes de escala como unidades tiene la $A'A$, y tendremos el punto a homólogo del A. Del mismo modo se determinarán los puntos b, c y e, homólogos de los B, C y E. Ahora, si se toman tres puntos cualesquiera, por ejemplo a, b y e, el triángulo abe será semejante al ABE.

En efecto, tracemos las rectas $A'B$, $A'E$, $a'b$ y $a'e$: los triángulos $A'BB'$ y $a'bb'$ son semejantes (*Geom.*, *teor.* 60); luego el ángulo $BA'B' = ba'b'$, y la recta $a'b$ tendrá tantas partes de escala como unidades tiene la $A'B$. Los dos triángulos $AA'B$ y $aa'b$ son semejantes; luego la ab tiene tantas partes de escala como unidades tienen la AB. Los triángulos $A'EE'$ y $a'ee'$ son semejantes; luego la $a'e$ tiene tantas partes de escala como unidades tiene la $A'E$, y el ángulo $EA'E' = ea'e'$. Los triángulos $AA'E'$ y $aa'e'$ son semejantes: luego la ae tiene tantas partes de escala como unidades tiene la AE. Los triángulos $BA'E$ y $ba'e$ son semejantes; luego la be tiene tantas partes de escala como unidades tiene la BE. Hemos demostrado que los tres lados del triángulo abe tienen tantas partes de escala como unidades tienen los lados del triángulo ABE; luego estos dos triángulos, que tienen sus lados proporcionales, son semejantes.

FIG. 69. 2.° *Levantar el plano de un terreno* ABCDEFG *en el cual no se puede penetrar, como un terreno cercado, un bosque, la planta de una manzana de casas, etc.*

Formado el croquis se medirá uno de los lados del terreno, por ejemplo el AB, que se tomará por base. Para determinar el punto C, se prolongará la AB, si no hay obstáculo, y se determinará dicho punto C por el método de la medicion de dos perpendiculares; mas si la AB no pudiera prolongarse lo suficiente para emplear este método, se determinará el punto C, midiendo la CB y el ángulo ABC. El punto D se determinará con respecto á los puntos B y C por cualquiera de estos dos métodos, é igualmente el punto E con respecto á los puntos C y D. El punto F puede fijarse con respecto á los C y D, midiendo dos perpendiculares, ó con respecto á los E y D, midiendo el ángulo E y la distancia FE. Finalmente, el punto G se determinará, sea con respecto á los C y D por el método primero 105, sea con respecto á los E y G por cualquiera de los dos métodos primeros.

Para comprobacion, se fijará el punto G con respecto á los A y B; y al formar el plano, lo que ya no puede ofrecer ninguna dificultad, el punto homólogo del G, que resulte por la determinacion de este punto con respecto á los puntos E y F, deberá coincidir con el punto homólogo del mismo punto G determinado con respecto á los puntos A y B.

3.° *Levantar el plano de un camino ó del curso de un rio.*

Plántense jalones en los recodos y puntos notables. Tómese una base, y fíjense los puntos señalados por cualquiera de los métodos, y fórmese en seguida el plano.

4,° *Levantar el plano de un terreno qne termine en una ó varias curvas.*

Se dividen las curvas en partes bastante pequeñas para que estas partes puedan considerarse sin error notable como líneas rectas, y se aplica el método general.

107. Cuando en el levantamiento de un plano se emplea la plancheta se obtiene el plano en el papel de la plancheta, al mismo tiempo que se van determinando los puntos. Para esto se procede del mismo modo que en la medicion de la distancia horizontal de dos puntos inaccesibles (91, 3.°, *Nota*); solo que, si en aquella operacion se fijan dos puntos, ó se levanta el plano del cuadrilátero $ABCD$ (*fig.* 47), en el levantamiento de un plano habrá que fijar ordinariamente más que dos puntos, con respecto á los dos elegidos como extremo de la base.

108. Nota. No basta el plano del terreno para tener una idea de su forma, cuando no es horizontal: es menester ademas conocer las alturas ó depresiones de los puntos, que se trasladan al plano, con respecto á un plano horizontal llamado *plano de comparacion*, que se imagina pasa á cierta distancia más alto ó más bajo que uno de dichos puntos. Las alturas ó depresiones de los referidos puntos se conocerán hallando la diferencia de nivel de los mismos puntos.

Supongamos, por ejemplo, que en un terreno, cuyo plano se haya levantado, existan los puntos M, N, P, Q, etc., y que habiendo hallado sus diferencias de nivel, resulte que el punto M está un metro más bajo que el N, $\frac{1}{2}$ metro más alto que el P, $1\frac{1}{2}$ metro más alto que el Q, etc. Supongamos tambien que el plano de comparacion se tome á 10 metros más alto que el punto M: es evidente que las depresiones de los puntos M, N, P, Q, etc., con relacion á dicho plano, serán respectivamente 10 metros, 9 metros, $10\frac{1}{2}$ metros, $11\frac{1}{2}$ metros, etc. Estas depresiones, que serian alturas si el plano de comparacion se tomase más bajo que dichos puntos, se llaman *acotaciones*. Colocando, pues, al lado de cada punto del plano, homólogo del punto del terreno, la acotacion de este punto, se tendrá una idea bastante exacta de la forma de la superficie del terreno.

Conviene casi siempre que el plano de comparacion pase por el punto más bajo del terreno; y entonces la acotacion de este punto será 0.

ORIENTACION.

109. *Orientar* un plano es trazar en él una recta que represente á la meridiana del terreno,

Para orientar un plano, se traza una recta que forme con una de las líneas del plano un ángulo igual al que forma la meridiana con la línea homóloga en el terreno; y dicha recta representará á la meridiana.

Despues que esté trazada esta recta, se puede levantar una perpendicular á ella, y se tendrá la línea que representa á la Este-Oeste del terreno; y si se quiere, se puede formar una Rosa de los vientos.

CAPÍTULO VII.

Medicion de superficies.

110. 1.° *Hallar el área de un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido.*

Figs. 9 y 10. Sea S el área del triángulo ABC, en el cual se conocen los lados $AB = c$, $AC = b$ y el ángulo comprendido A.

Sabemos que

$$S = \frac{b \times BD}{2}.$$

En el triángulo rectángulo ABD es $BD = c \operatorname{sen} A$; luego

$$S = \frac{bc \operatorname{sen} A}{2} \qquad [1].$$

Luego *el área de un triángulo es igual á la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido.*

2.° *Hallar el área de un triángulo, dados un lado y los ángulos.*

Sea $AC = b$ el lado conocido: acabamos de hallar

$$S = \frac{bc \operatorname{sen} A}{2}.$$

En el triángulo ACB tenemos, para hallar la incógnita c, la proporcion

$$c : b :: \operatorname{sen} C : \operatorname{sen} B,$$

de donde
$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B};$$

luego
$$S = \frac{b^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} B}.$$

3.° *Hallar el área de un triángulo, dados sus tres lados.*

Hemos hallado $S = \dfrac{bc \operatorname{sen} A}{2} = bc \operatorname{sen} \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A$ (23).

Ahora (52, *Tercer caso*)

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

luego
$$S = bc\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 c^2}},$$

ó
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

4.° *Hallar el área de un triángulo, dados dos lados y el ángulo opuesto al uno,*

Véase si el triángulo tiene una ó dos soluciones (52, *Cuarto caso*); hállense los dos ángulos incógnitos, y quedará reducido este caso al segundo. Si son dos los triángulos correspondientes á los datos, tendrán dos áreas diferentes.

5.° *Hallar el área de un paralelógramo, dados dos lados y el ángulo comprendido.*

Fig. 70. Sea el paralelógramo $ABDC$, en el cual se conocen sus dos lados adyacentes $AC = b$, $AB = c$ y el ángulo comprendido A: sea S su área. Trazada la diagonal BC, quedará el paralelógramo dividido en los triángulos iguales ABC y BDC: el área del triángulo ABC es $\frac{bc \operatorname{sen} A}{2}$ (110, 1.°); luego el área del paralelógramo $ABCD$ será

$$S = bc \operatorname{sen} A.$$

Luego *el área de un paralelógramo es igual al producto de dos lados adyacentes por el seno del ángulo comprendido.*

6.° *Hallar el área de un cuadrilátero, dadas sus diagonales y el ángulo que forman.*

Fig. 71. Sea el cuadrilátero $ABCD$, en que se conocen sus dos diagonales AC, BD y el ángulo O que ellas forman: sea S el área del cuadrilátero. Las dos diagonales dividen al cuadrilátero en los cuatro triángulos AOB, BOC, COD y DOA, cuyas áreas respectivas son

$$\frac{ab \operatorname{sen} O}{2}, \quad \frac{bc \operatorname{sen} O}{2}, \quad \frac{cd \operatorname{sen} O}{2}, \quad \frac{da \operatorname{sen} O}{2}:$$

luego

$$S = \frac{\operatorname{sen} O}{2}(ab + bc + cd + ad) = \frac{\operatorname{sen} O}{2}\Big(b(a+c) + d(a+c)\Big),$$

$$S = \frac{\operatorname{sen} O}{2}(a+c)(b+d) = \frac{AC \,.\, BD \operatorname{sen} O}{2}.$$

Luego *el área de un cuadrilátero es igual á la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo comprendido.*

Fig. 72. 7.° *Hallar el área de un polígono regular, dados el número de sus lados y la longitud de uno de ellos.*

Sea S el área del polígono regular, l la longitud de su lado y n el número de lados: el área del polígono es $S = \frac{nl \,.\, OI}{2}$ (*Geom.*, *teor.* 96). En el triángulo rectángulo OIA es $AI = OI \operatorname{tg} \frac{AOB}{2}$, y como el ángulo $AOB = \frac{360°}{n}$ (*Geom.*, 46), será $AI = OI \operatorname{tg} \frac{360°}{n}$, de donde

$$OI = AI \cot \frac{180°}{n} = \frac{l \cot \frac{180°}{n}}{2};$$

luego $$S = \frac{nl^2 \cot \frac{180^\circ}{n}}{4}.$$

8.° *Hallar el área de un segmento de círculo, dado el radio del círculo y el número de grados del arco del segmento.*

Será r el radio del círculo y α el número de grados del arco: el número de unidades lineales de este arco se hallará por la proporcion

$$360 : \alpha :: 2\pi r : \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360} = \frac{\pi r \alpha}{180}.$$

Ahora, el área del sector correspondiente será

$$\frac{r}{2} \cdot \frac{\pi r \alpha}{180} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360}.$$

El área del triángulo correspondiente será (110, 1.°) $\frac{1}{2}r^2$ sen α; luego, si llamamos S al área del segmento, tendremos

$$S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360} - \frac{1}{2}r^2 \text{ sen } \alpha.$$

Esta fórmula, hallada en la suposicion de que el arco es menor que 180°, es general; pues si el arco $\alpha > 180°$, su seno es negativo, lo que hace que el segundo término $-\frac{1}{2}r^2$ sen α mude de signo, como debe ser en el caso en que $\alpha > 180°$; y en este cambio de signo consiste precisamente la generalidad de la fórmula que acabamos de hallar (*Trig.* 15).

Supongamos que $\alpha = 90°$: será sen $\alpha = 1$; y por consiguiente

$$S = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{r^2}{2},$$

resultado fácil de hallar directamente.

Si $\alpha = 180°$, será sen $\alpha = 0$, y por consiguiente

$$S = \frac{1}{2}\pi r^2,$$

lo que así debe ser, pues en este caso el segmento es el semicírculo.

Si $\alpha = 270°$, será sen $\alpha = -1$, y por consiguiente

$$S = \frac{3}{4}\pi r^2 + \frac{1}{2}r^2,$$

resultado fácil de hallar directamente.

Si $\alpha = 360°$, será sen $\alpha = 0$; y por consiguiente

$$S = \pi r^2,$$

como debe ser.

9.° *Hallar el área de un terreno irregular.*

Se divide en porciones, cuyas áreas se sepan hallar, como en triángulos, trapecios, etc.; se halla el área de cada una de estas porciones, y sumando se tendrá el área de todo el terreno.

Fig. 73. Sea el terreno $ABCDEF$: trácense las diagonales AC, AD y AE; tómese por base para medir los dos triángulos consecutivos ABC y ACD, la diagonal comun AC; mídanse las alturas de ambos triángulos, y se hallará en seguida por la regla ordinaria el área de cada uno de dichos dos triángulos. Para medir los dos triángulos consecutivos ADE y AEF, se medirá la diagonal comun AE que se tomará por base, y bajando y midiendo las dos alturas, se hallará en seguida el área de cada uno de estos dos triángulos.

Nota. Obsérvese que en la resolucion de este problema se han medido dos diagonales y cuatro alturas, y ha habido que bajar estas perpendiculares. Puede medirse con más exactitud este terreno, no midiendo directamente más que una recta, por ejemplo el lado FE.

Para esto, se medirán con toda exactitud los dos ángulos AFE y AEF; se calculará en el triángulo AFE el lado AE, y se medirán en seguida los dos ángulos AED y DAE; se calculará el lado AD, y se medirán los ángulos CAD y CDA; se calculará el lado AC, y se medirán los ángulos BAC y BCA. De este modo conoceremos en cada uno de los triángulos que componen el polígono un lado y dos ángulos, y por consiguiente podremos hallar el área de cada uno de los triángulos.

Fig. 74. En lugar de dividir el terreno en triángulos, se puede seguir esta otra division. Señálese la diagonal más larga AD, y desde los vértices B, C, E y F de los demas ángulos bájense las perpendiculares BG, CK, EI y FH á dicha diagonal: quedará la figura dividida en triángulos y trapecios, cuyas áreas son fáciles de hallar.

10.° Fig. 75. *Hallar el área de un terreno terminado por dos curvas* AEFGHD, BMLKIC *y dos paralelas* AB *y* DC.

Trácese una recta NS, interior ó exterior al terreno, perpendicular á las dos paralelas, divídase dicha perpendicular NS en partes iguales bastante pequeñas, para que levantando las perpendiculares HI, GK....., por los puntos de division, las partes en que queden divididas las dos curvas, sean bastante pequeñas para poderlas considerar sin error sensible como líneas rectas. De este modo queda dividido el terreno en trapecios de igual altura, y cuyas áreas, llamando a á la altura comun, serán

$$a\times\frac{AB+EM}{2},\ a\times\frac{EM+FL}{2},\ a\times\frac{FL+GK}{2},\ a\times\frac{GK+HI}{2},\ a\times\frac{HI+DC}{2}$$

luego sumando todas estas áreas, y separando el factor comun a, será el área del terreno

$$a\left(\frac{AB + DC}{2} + EM + FL + GK + HI\right).$$

Luego, *para hallar el área de una figura terminada por dos paralelas y dos curvas, se traza una perpendicular á las dos paralelas, se divide esta perpendicular en partes iguales bastante pequeñas, para que las porciones en que queden divididas las dos curvas por las perpendiculares levantadas á la primera en los puntos de division, puedan considerarse sin error sensible como líneas rectas, y se miden todas las perpendiculares: el área de la figura será igual al producto de la semisuma de las dos paralelas extremas, más la suma de las paralelas medias por la altura comun á los trapecios.*

Esta misma regla se seguirá cuando no exista una de las paralelas extremas, ó ninguna de las dos, haciendo en la regla anterior, en el primer caso dicha paralela extrema igual á cero, y en el segundo caso las dos paralelas extremas iguales á cero.

Si en lugar de las dos curvas fuesen dos líneas quebradas las que terminasen el terreno, se podria hallar su área del mismo modo.

11.° *Hallar el área de un terreno en el cual no se puede penetrar.*

Circunscríbase al terreno un rectángulo ú otra figura fácil de medir, hállense las áreas de la figura circunscrita y de las porciones exteriores al terreno; y restando del área de dicha figura la suma de las áreas de las porciones exteriores, se tendrá el área del terreno.

Fig. 76. Supongamos, por ejemplo, que se trate de hallar el área del terreno impenetrable $ABCDE$.

Circunscríbase el rectángulo $GFHI$, y hállese su área. Para hallar el área de las porciones exteriores, observaremos que la del terreno, comprendido entre las rectas CD y ED, y las EI y CI, puede hallarse bajando desde el punto D una perpendicular DK al lado IC, la cual dividirá á dicho terreno en un triángulo DKC y un trapecio $KIED$, cuyas áreas se pueden medir. Las porciones exteriores mixtilíneas AFE, ABG y CHB se medirán por la regla (110, 10.°). Sumando en seguida todas las áreas de las porciones exteriores al terreno impenetrable, y restando esta suma del área del rectángulo, se tendrá el área del terreno propuesto.

111. Es menester observar que en la medicion de la superficie de un terreno no debe atenderse sino á su proyeccion horizontal;

pues un terreno inclinado, aunque es mayor que su proyeccion horizontal, contiene la misma cantidad de plantas que dicha proyeccion, y que en un terreno inclinado no puede construirse un edificio de mayores dimensiones que en su proyeccion horizontal. Esto en cuanto á la magnitud que debe considerarse tiene el terreno, pues en cuanto á su valor (en lo que nosotros no nos detendremos, porque poco puede decirse de fijo sobre ello), es evidente que un terreno inclinado vale ménos en igualdad de circunstancias que un terreno horizontal, que sea igual á la proyeccion horizontal del terreno inclinado; ya porque, si se trata de sembrar en un terreno inclinado, las aguas llovedizas arrastran en su curso la tierra vegetal y esterilizan el suelo, ya porque, si se trata de edificar en él, falta la simetría de la parte inferior del edificio, lo que le da un aspecto desagradable.

Segun esto, siempre que se trate de medir la superficie de un terreno, se ha de suponer esta superficie reducida á su proyeccion horizontal; y por lo tanto las líneas y ángulos que se midan, para poder hallar el área del terreno, deberán corresponder á dicha proyeccion.

Si por ejemplo, dado un triángulo en un terreno que no sea horizontal, queremos hallar su área por medio de su base y altura, se medirán las proyecciones horizontales de la base y altura de dicho triángulo, y la mitad de su producto será el área de la proyeccion horizontal del triángulo. Si quisiéramos hallar el área de un cuadrilátero, cuya superficie no fuese horizontal, por medio de sus diagonales y del ángulo que forman, se medirian las proyecciones horizontales de dichos diagonales y del ángulo, y se aplicaria en seguida la regla (110, 6.°).

Ya se ve que la medicion de las proyecciones horizontales de dos terrenos no ofrece ninguna dificultad; pero sería por el contrario, en general, muy difícil medir con alguna exactitud la superficie total de un terreno, por causa de sus varias inclinaciones.

Si el terreno fuese llano, aunque inclinado al horizonte, pudiera hallarse su proyeccion horizontal hallando primeramente su área total, lo que en el caso supuesto sería fácil, y deduciendo su proyeccion horizontal en virtud del teorema siguiente.

La proyeccion de una área plana sobre un plano es igual al producto de dicha área por el coseno del ángulo agudo que forman los dos planos.

Fig. 77. Llamemos S al área $ABCD$, S' á su proyeccion $abcd$, y α al ángulo agudo de los dos planos. Sea $A'B'C'D'$ una seccion del prisma troncado aC paralela al plano $ABCD$, y $C'M$ la altura del prisma oblícuo $A'C$. El volúmen de este prisma es (*Geo-*

metría, teor. 212) $S' \times CC'$, y tambien (*Geom., teor.* 213) $S \times C'M$, luego

$$S' \times CC' = S \times C'M.$$

Ahora, en el triángulo rectángulo $C'MC$ es

$$C'M = CC' \times \cos CC'M;$$

y como el ángulo $CC'M$ es suplemento del $cC'M$ y este es suplemento del ángulo α (*Geom., teor.* 147) será el ángulo $CC'M = \alpha$: luego

$$C'M = CC' \cos \alpha:$$

y por consiguiente

$$S' = S \cos \alpha,$$

conforme al enunciado del teorema.

Casos particulares.

1.° Si el ángulo que forman los dos planos es recto, será $\cos \alpha = 0$, y por consiguiente $S' = 0$.

2.° Si dicho ángulo es de $60°$, será $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, y por consiguiente $S' = \frac{1}{2} S$.

3.° Si los dos planos son paralelos, será $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, y por tanto $S' = S$.

CAPÍTULO VIII.

Division de terrenos.

112. 1.° *Dividir un triángulo en un cierto número de partes equivalentes por medio de rectas dirigidas desde uno de los vértices al lado opuesto.*

Divídase el lado opuesto en tantas partes iguales cuantos sean aquellas en que se ha de dividir el triángulo, y trácense las rectas que unan el vértice del ángulo á los puntos de division de dicho lado. Estas rectas dividirán al triángulo en las partes equivalentes que se piden; pues los triángulos de igual base é igual altura son equivalentes.

2.° *Dividir un triángulo en dos partes que estén en la razon de* m *á* n *por medio de una recta dirigida desde uno de los vértices al lado opuesto.*

Divídase el lado opuesto en dos partes que estén en la razon de m á n, y dirigiendo desde el vértice opuesto una recta al punto de division, quedará el triángulo dividido en las partes pedidas: pues los triángulos de igual altura son proporcionales á sus bases.

3.° Fig. 78. *Dividir un triángulo* ABC *en dos partes que estén en la razon de* m *á* n *por medio de una paralela á uno de los lados* AB.

Supongamos que el problema esté resuelto (*Geom.*, *nota I*) y que DE sea la paralela pedida: será

$$\frac{CDE}{ADEB}=\frac{m}{n}, \quad \text{ó} \quad \frac{CDE}{ACB}=\frac{m}{m+n}.$$

Sea $CD=x$ la incógnita del problema (*): tendremos (*Geometria, teor.* 100)

$$\frac{CDE}{ABC}=\frac{x^2}{b^2};$$

luego

$$\frac{x^2}{b^2}=\frac{m}{m+n}, \quad x=b\sqrt{\frac{m}{m+n}}.$$

Tomando ahora en el triángulo que se dé una parte CD igual al valor de x, y dirigiendo la paralela DE á la AB, quedará el triángulo dividido en las dos partes pedidas.

Un caso particular de este problema es este otro:

Dividir un triángulo en un cierto número de partes equivalentes por medio de paralelas á uno de sus lados.

Supongamos, por ejemplo, que se quiera dividir el triángulo ABC en cuatro partes equivalentes por medio de paralelas al lado AB.

Para hallar la primera parte CDE, tenemos $\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$, y por consiguiente $\frac{m}{m+n}=\frac{1}{4}$; luego $x=b\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{b}{2}$.

Para hallar la segunda parte $DD'E'E$, tenemos $\frac{CD'E'}{AD'E'B}=1$; luego $\frac{m}{n}=1$, $\frac{m}{m+n}=\frac{1}{2}$; y $x=\frac{b\sqrt{2}}{2}$.

La tercera parte $D'D''E''E'$ se obtendrá haciendo $\frac{m}{n}=\frac{3}{1}$, ó $\frac{m}{m+n}=\frac{3}{4}$; luego $x=\frac{b\sqrt{3}}{2}$.

(*) En vez de tomar por incógnita del problema la CD, se pudiera tomar la CE, la DE, la AD, ó la BE, es decir, cualquiera de las líneas cuyo valor depende de la posicion de la línea paralela pedida DE. Véase la *Introduccion al estudio de la Geometría analítica.*

NOTA. El problema 3.º puede enunciarse de este otro modo: *Dado un triángulo, dirigir paralelamente á uno de sus lados una recta que forme con los otros dos lados un triángulo parcial que tenga una área dada:* pues si S es el área del triángulo dado y s la del triángulo parcial, se tendrá conocida la razon $\frac{s}{S}$, que es la $\frac{m}{m+n}$.

4.º *Dividir un triángulo* ABC *en dos partes que estén en la razon* m : n *por medio de una recta cuya direccion sea dada;* ó lo que es igual, *por medio de una recta paralela á una recta dada* DE.

FIG. 79. Dirijamos la paralela BH á la DE, llamemos d á la distancia conocida AH, y tendremos

$$ABC : ABH :: b : d.$$

Sea FG la paralela á la DE que ha de dividir al triángulo en dos partes que estén en la razon $m : n$, y sea $AG = x$; será

$$AFG : ABC :: m : m + n.$$

Multiplicando estas dos proporciones ordenadamente y simplificando, resulta

$$AFG : ABH :: mb : (m + n)\, d.$$

Se conoce, pues, la razon $AFG : ABH$; y por consiguiente reemplazando en la fórmula $x = b\sqrt{\frac{m}{m+n}}$ del problema anterior la razon $\frac{m}{m+n}$ por su valor actual $\frac{mb}{(m+n)\,d}$, y la b de dicha fórmula por su valor actual d, se tendrá $x = \sqrt{\frac{m}{m+n}\,bd}$: fórmula que se puede, y conviene, hallar directamente, fundándose en el teorema 99 de la Geometría.

NOTA. Si la razon $m : m + n$ fuese mayor que la $d : b$, sería la parte de la izquierda mayor que BAH. En este caso se hallaria la razon $CML : ABC$, y quedaria el problema reducido al anterior, siendo la incógnita del problema la parte CM.

Un caso particular de este problema es el siguiente: *dividir un triángulo en cierto número de partes equivalentes por medio de rectas paralelas á una recta dada.*

NOTA. Tambien se puede enunciar el problema propuesto de este otro modo: *dados un triángulo* ABC *y una recta* DE, *dirigir paralelamente á esta recta otra que con dos lados del triángulo forme un triángulo parcial que tenga una área dada:* pues si S es el área del triángulo ABC, y s la del triángulo parcial AFG, será conocida la razon $\frac{s}{S} = \frac{m}{m+n}$.

5.° *Dividir un triángulo en dos partes que estén en una razon dada por medio de una perpendicular á uno de sus lados* AC.

Bajada la perpendicular BH á la AC, la cuestion se reduce á dividir el triángulo ABC en dos partes que estén en la razon $m : n$ por medio de una paralela á la BH; que es el problema anterior.

6.° *Dividir un trapecio en dos partes que estén en una razon dada* m : n *por medio de una paralela á las bases.*

Fig. 80. Sea $ABCD$ el trapecio, cuyas bases son $AD = B$, $BC = b$, y su altura $BL = a$; sea EF la recta divisoria paralela á las bases, y hallaremos su valor, al cual llamaremos x.

El área del trapecio $EBCF$ será $\frac{(b + x)\, BH}{2}$. Para que en esta expresion no entre más incógnita que la x, hallaremos otra ecuacion entre las dos incógnitas x y BH (*). Para esto, dirigiendo la paralela BI á la CD, los triángulos semejantes BEK y BAI nos darán la proporcion $EK = x - b : BH : : B - b : a$;

de donde resulta $BH = \frac{a\,(x - b)}{B - b}$.

Sustituyendo este valor en la expresion del área del trapecio $EBCF$, dicha área será $\frac{a\,(x^2 - b^2)}{2\,(B - b)}$. El área del trapecio $ABCD$ es $\frac{(B + b)\, a}{2}$; luego la ecuacion del problema será

$$\frac{a\,(x^2 - b^2)}{2\,(B - b)} : \frac{(B + b)\, a}{2} : : m : m + n.$$

Resolviendo esta ecuacion se hallará

$$x = \sqrt{b^2 - (B^2 - b^2)\frac{m}{m + n}} \qquad [1],$$

ó

$$x = \sqrt{\frac{m\,B^2 + nb^2}{m + n}}$$

(*) Introduccion al estudio de la *Geometría analítica*.

Habiendo hallado la x se tomará DG igual á su valor, se dirigirá la paralela GE á la DC, y la paralela EF á la AD, y quedará resuelto el problema.

Si se quiere evitar la paralela GE, se podrá hallar la $BE = y$ del modo siguiente.

Los dos triángulos semejantes BEK, BAI nos dan

$$BE : BA :: EK : AI;$$

ó llamando l al lado BA,

$$y : l :: x - b : B - b:$$

eliminando la x entre esta ecuacion y la

$$x = \sqrt{\frac{mB^2 + nb^2}{m + n}},$$

y despejando en seguida la y, será

$$y = l \, . \frac{-b + \sqrt{\dfrac{mB^2 + nb^2}{m + n}}}{B - b},$$

Nota. El problema 6.° se puede enunciar tambien de este otro modo: *dado un trapecio, determinar una paralela á las bases, tal que el trapecio parcial que forme con la base menor y los dos lados no paralelos del trapecio tenga una área dada:* pues si S es el área del trapecio dado y s la del trapecio parcial, se conocerá la razon

$$\frac{s}{S} = \frac{m}{m + n}.$$

Introduzcamos el valor s en la expresion de la incógnita x, porque así resulta la fórmula algo más sencilla: tendremos

$$\frac{s}{\dfrac{A\,(B + b)}{2}} = \frac{m}{m + n},$$

ó bien

$$\frac{m}{m + n} = \frac{2s}{a\,(B + b)},$$

y por consiguiente, sustituyendo este valor en la ecuacion [1], resulta

$$x = \sqrt{b^2 + \frac{B - b}{a} \, . \, 2s.}$$

7.° *Dividir un polígono cualquiera en varias partes equivalentes por medio de paralelas á una recta dada.*

Fig. 81. Sea $ABCDE$ el polígono que se quiere dividir, por ejemplo, en cuatro partes equivalentes, por medio de paralelas á la recta MN. Hállese el área P del polígono, y dividiéndola por 4, se tendrá el área de cada una de las cuatro partes. Dirijamos las paralelas AE, CR, y EV á la recta MN, y hallaremos el área del triángulo BAE: si el área de este triángulo es mayor que $\frac{P}{4}$, se tendrá que determinar dentro de él una paralela al lado AE, que separe en dicho triángulo otro que tenga una área dada (112, 3.°, *Nota*). Si el triángulo ABE es menor que $\frac{P}{4}$, será menester añadir á dicho triángulo un trapecio $AEQP$, tomado dentro del trapecio $ABCE$, que tenga una área dada (112, 6.° *Nota*).

Para hallar la segunda parte $PQTS$, que supongamos sea menor que $PQCR$, se dirigirá paralelamente á las bases PQ y RC una recta ST, que separe el trapecio $PQTS$ que tenga de área $\frac{P}{4}$ (112, 6.°, *Nota*).

Para hallar la tercera porcion, que supongamos sea mayor que el trapecio $STCR$, se hallará el área de este trapecio, y en seguida se añadirá otro trapecio $LRCH$ (112, 6.°, *Nota*), cuya área sea la que falta al trapecio $RSTC$ para valer $\frac{P}{4}$.

Para comprobacion se calculará el área del cuadrilátero $LHDE$, que deberá ser igual á $\frac{P}{4}$.

8.° *Dado un ángulo y un punto en uno de sus lados, dirigir desde dicho punto una recta, que con las dos del ángulo forme un triángulo que tenga una área dada.*

Fig. 82. Sea A el ángulo y B el punto dado en uno de sus lados, S el área que ha de tener el triángulo ABC, $AC = x$ la incógnita del problema.

Para hallar la x, bajemos la perpendicular BP al otro lado AC y tendremos $S = \frac{BP.x}{2}$, de donde $x = \frac{2S}{BP}$; es decir, que, dividiendo el doble del área del triángulo por su altura, se tiene la base.

Nota. Tambien se puede hallar la x de este otro modo: tenemos (110, 1.°) $S = \frac{AB.x \operatorname{sen} A}{2}$; y por consiguiente $x = \frac{2.S}{AB.\operatorname{sen} A}$.

9.° *Dividir un polígono en cualquier número de partes equivalentes, que todas tengan un punto comun.*

Fig. 83. Hállese el área P del polígono $ABCD$. El punto comun puede estar en uno de sus lados ó dentro del polígono.

1.° Si el punto comun O está en uno de los lados CD del polígono $ABCD$ que se quiere dividir, por ejemplo, en tres partes equivalentes; considerando al punto O como el vértice de un triángulo, y al ángulo D como uno de los ángulos de este triángulo, hallaremos la magnitud de la base (112, 8.°, *Nota*): si ésta no es mayor que la DA, tirando desde su extremo al punto O una recta, se tendrá un triángulo cuya área será $\frac{P}{3}$. Admitamos que la magnitud de dicha base sea mayor que AD, DQ por ejemplo: trazando la QO, el triángulo ODQ tendrá $\frac{P}{3}$ de área; pero como este triángulo tiene la parte AQE fuera del polígono, se trazarán la AO y la paralela QR á la AO, y finalmente la RO; y el cuadrilátero $ODAR$ será una de las partes que se piden. En efecto, los dos triángulos AOR y AOQ son equivalentes, y por lo tanto el cuadrilátero $ODAR$ es equivalente al triángulo ODQ, cuya área es $\frac{P}{3}$.

Para hallar la otra parte, que tenga con la separada ya la linde OR comun, tomamos $QF = QD$, y trazamos la FO: el triángulo OQF es equivalente al QOD (*Geom.*, *teor.* 94, *Corol.* 3.°) y por consiguiente, como este es el tercio del polígono, tambien el triángulo OQF es el tercio del polígono. Para construir ahora dentro del polígono dado una figura equivalente al triángulo OQF, dirijamos la paralela FS á la OA hasta que encuentre al lado AB, prolongado si es preciso: si el punto de encuentro fuere S', trazando la $S'O$, se tendria el triángulo ROS' que seria un tercio de polígono; porque siendo equivalentes los dos triángulos OAF y OAS' como tambien los OAQ y OAR, resulta que el $S'OR$ sería equivalente al OQF, que es un tercio de polígono. Mas como el punto de interseccion de la FS con la AB está (en la figura propuesta) en la prolongacion de la AB; tirando la SO, el triángulo ASO será equivalente al AOF, y por consiguiente el triángulo ORS es equivalente al OQF. Para tener dentro del polígono una figura equivalente al triángulo ORS, trazamos la OB, y la paralela ST á la OB, y finalmente la TO: el cuadrilátero $OTBR$ será un tercio de polígono, como es fácil demostrar. Para comprobacion se medirá el triángulo OTC, que debe ser un tercio de polígono.

Si la disposicion del terreno no permite que las líneas auxiliares salgan fuera de él, se resolverá el problema del modo siguiente:

En primer lugar se calculará el área del triángulo *OAD* por cualquiera de los métodos conocidos (110), se restará dicha área de $\frac{P}{3}$, y el resto será el área del triángulo *OAR*, que hay que añadir al *OAD* para que el cuadrilátero *ODAR* tenga de área $\frac{P}{3}$. Conociendo el área del triángulo *OAR* se determinará su base *AR* (112, 8.º), y dirigiendo en seguida la *RO*, el cuadrilátero *ODAR* será un tercio del polígono.

Para hallar la otra parte *RBTO*, hallamos el área del triángulo *ORB*, la restamos de $\frac{P}{3}$, y tendremos la del triángulo *ORT*, cuya base *BT* se hallará fácilmente como en el caso anterior.

Fig. 84. 2.º Supongamos ahora que el punto comun *O* esté dentro del polígono *ABCGD*, que se ha de dividir, por ejemplo, en cuatro partes equivalentes. Se bajará una perpendicular *OP* á uno de los lados *AB*, y se tomará esta perpendicular por linde comun á dos de las cuatro partes (pudiera tomarse otra línea, por ejemplo la *OB*, por linde comun á dos de las cuatro partes); y considerando el punto *O* como el vértice del triángulo, cuya área sea un cuarto de la del polígono, y á la *OP* como uno de sus lados, determinamos la base *PR* que suponemos sea mayor que *PA* (112, 8.º), y trazando la *RO*, el triángulo *OPR* será un cuarto del polígono. Para obtener esta parte dentro del terreno dado, trazamos la *OA*, por el punto *B* la paralela *BQ* á la *OA*, y finalmente la *QO*: el cuadrilátero *OPAQ* será un cuarto del polígono, como es fácil demostrar.

Para hallar la segunda porcion, tomamos $PS = PR$, tiramos la *OB*, por el punto *S* la paralela *SH* á la *OB*, y finalmente la *OH*: el cuadrilátero *OPBH* será otra de las partes en que se quiere dividir el polígono: lo que se demostrará del mismo modo que se haya demostrado que el cuadrilátero *OPAQ* es un cuarto del terreno.

Para hallar la tercera porcion, consideraremos al punto *O* como el vértice de un triángulo, del que *OQ* es un lado, y hallaremos la magnitud de la base *QE* (112, 8.º). Ahora para tener en el polígono una porcion equivalente al triángulo *OQE*, dirijamos la *OD*, por el punto *E* la paralela *EF* á la *OD*, hasta que encuentre al lado adyacente *DG*, prolongado si es preciso, en *F*; tracemos la *OG*, la paralela *FB'* á la *OG*, y finalmente la *OB'*, y tendremos el pentágono *OQDGB'*, que será un cuarto del polígono; como es fácil demostrar.

Para comprobacion, se mide el cuadrilátero $OHCA'$, que debe ser igual á un cuarto del área del terreno.

Si el terreno no permitiese que las líneas auxiliares saliesen fuera de él, se mediria el triángulo AOP, y restando su área de $\frac{P}{4}$, se tendria el área del triángulo OAQ, que sería menester añadir al AOP. Se hallaria la AQ (112, 8.°), y dirigiendo la QO, el cuadrilátero $AQOP$ sería un cuarto de área del terreno. Del mismo modo se determinaria la línea OH.

Para hallar la otra proporcion adyacente á la $OPAQ$, hallaremos el área del triángulo ODQ, restaremos esta área $\frac{P}{4}$, y tendremos lo que falta al triángulo OQD para que la porcion pedida tenga de área $\frac{P}{4}$; hallaremos el área del triángulo ODG, y restándola, porque suponemos es demasiado pequeña, de la cantidad que falta al triángulo OQD, tendremos lo que falta al cuadrilátero $OQDG$; determinemos, por consiguiente, la base GB' del triángulo deficiente OGB', y tracemos por fin la OB'.

COMPLEMENTO DE LA TRIGONOMETRÍA.

CAPÍTULO I.

Fórmula de Moivre.

113. *Para multiplicar dos expresiones que tengan la forma* $\cos a + \sqrt{-1} \operatorname{sen} a$, *se suman los dos arcos; para partir se resta el arco del divisor del arco del dividendo; para elevar una expresion de dicha forma á una potencia, se multiplica el arco por el exponente, y para extraer una raiz de una expresion de la misma forma, se divide el arco por el indice de la raiz* (*); es decir que

$$\left(\cos a + \sqrt{-1} \operatorname{sen} a\right)\left(\cos b + \sqrt{-1} \operatorname{sen} b\right) =$$

Multi

$$\cos(a+b) + \sqrt{-1} \operatorname{sen}(a+b),$$

Divi

$$\frac{\cos a + \sqrt{-1} \operatorname{sen} a}{\cos b + \sqrt{-1} \operatorname{sen} b} = \cos(a-b) + \sqrt{-1} \operatorname{sen}(a-b),$$

Elevar

$$\left(\cos a + \sqrt{-1} \operatorname{sen} a\right)^m = \cos ma + \sqrt{-1} \operatorname{sen} ma,$$

Extraer

$$\left(\cos a + \sqrt{-1} \operatorname{sen} a\right)^{\frac{1}{m}} = \cos \frac{a}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{a}{m}.$$

1.° Multipliquemos $\cos a + \sqrt{-1} \operatorname{sen} a$ por $\cos b + \sqrt{-1} \operatorname{sen} b$, y resulta

$$\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \sqrt{-1} \cos a \operatorname{sen} b + \sqrt{-1} \operatorname{sen} a \cos b =$$

sacando factor comun y [illegible]

$$\cos(a+b) + \sqrt{-1} \operatorname{sen}(a+b).$$

(*) Estos teoremas son análogos á los teoremas de las potencias, demostrados en los números 22, 36, 114 y 122 del *Algebra;* y así como aquellos, están enunciados de un modo abreviado, con objeto de retenerlos con facilidad.

2.° Multiplicando $\cos(a-b)+\sqrt{-1}\operatorname{sen}(a-b)$ por $\cos b+\sqrt{-1}\operatorname{sen} b$, resulta, segun el primer teorema, $\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a$; luego

$$\frac{\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a}{\cos b+\sqrt{-1}\operatorname{sen} b}=\cos(a-b)+\sqrt{-1}\operatorname{sen}(a-b).$$

3.° Segun el teorema primero, es

$$\left(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a\right)\left(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a\right)=$$
$$\cos(a+a)+\sqrt{-1}\operatorname{sen}(a+a),$$

ó $$\left(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a\right)^2=\cos 2a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} 2a.$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a$, tendremos, segun el teorema primero,

$$\left(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a\right)^3=\cos 3a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} 3a;$$

y generalizando

$$\left(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a\right)^m=\cos ma+\sqrt{-1}\operatorname{sen} ma.$$

4.° Segun el teorema tercero, es

$$\left(\cos\frac{a}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{a}{m}\right)^m=\cos a-\sqrt{-1}\operatorname{sen} a;$$

luego

$$\cos\frac{a}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{a}{m}=\left(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Corolario. Fórmula de Moivre. Tenemos:

1.° $$\left(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a\right)^p}=$$
$$\sqrt[q]{\cos pa+\sqrt{-1}\operatorname{sen} pa}=\cos\frac{p}{q}a+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{p}{q}a.$$

2.° $$\left(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a\right)^m}=$$

$$\frac{1}{\cos ma + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,ma},$$

ó multiplicando los dos términos de este quebrado por

$$\cos ma - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,ma,$$

será

$$\left(\cos a + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a\right)^{-m} = \frac{\cos ma - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,ma}{\cos^2 ma + \mathrm{sen}^2\,ma};$$

ó $$\left(\cos a + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a\right)^{-m} = \cos ma\,\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,ma,$$

ó $$\left(\cos a + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a\right)^{-m} = \cos(-ma) + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(-ma).$$

Vemos, pues, que la fórmula

$$\left(\cos a + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a\right)^{m} = \cos ma + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,ma \qquad [M]$$

es cierta, cualquiera que sea el valor de m, entero, fraccionario ó negativo.

La igualdad $[M]$ es conocida con el nombre de *fórmula de Moivre*.

Como en la fórmula de Moivre el arco a es cualquiera, la fórmula será cierta mudando el signo al arco, y por tanto

$$\left(\cos(-a) + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(-a)\right)^{m} = \cos(-ma) + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(-ma),$$

ó $$\left(\cos a - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a\right)^{m} = \cos ma - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,ma.$$

NOTA. Obsérvese que cuando m es un número fraccionario $\frac{p}{q}$ el primer miembro de la fórmula de Moivre tiene q valores diferentes (*Alg.*, 197), mientras que el segundo no tiene más que un solo valor. Nosotros hemos demostrado que en este caso el segundo miembro es uno de los valores del primero. A este valor de la raíz que da la fórmula de Moivre llamaremos *raiz principal*. Más adelante veremos la modificacion que debe recibir el segundo miembro para que tenga los mismos valores que el primero.

CAPÍTULO II.

Cálculo de las cantidades imaginarias.

114. *Toda cantidad imaginaria de la forma* a $\pm$ b$\sqrt{-1}$ (*) *puede trasformarse en otra equivalente de la forma.*

$$M\left(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\ \operatorname{sen}\varphi\right).$$

En efecto,

$$a \pm b\sqrt{-1} = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}\right).$$

Como el valor absoluto de la cantidad $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (la cual puede ser positiva ó negativa segun el signo de a) es < 1, podemos igualar dicha cantidad al coseno de un ángulo φ: siendo

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi,\ \text{será}\ \frac{a^2}{a^2+b^2} = \cos^2\varphi,\ 1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} = \operatorname{sen}^2\varphi,$$

ó $\frac{b^2}{a^2+b^2} = \operatorname{sen}^2\varphi$; luego extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, y observando que, por ser φ un ángulo, y por tanto menor que dos rectos, sen φ es positivo, será

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{sen}\varphi;$$

luego $a \pm b\sqrt{-1} = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\ \operatorname{sen}\varphi\right)$,

siendo φ un ángulo cuyo coseno es $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, cuyo seno es $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, y por tanto su tangente $\frac{b}{a}$.

Nota. La cantidad positiva $\sqrt{a^2+b^2}$ se llama el *módulo* de la cantidad imaginaria $a \pm b\sqrt{-1}$.

(*) Obsérvese que a puede ser positiva ó negativa, y que b es positiva, puesto que los dos signos que podria tener, si solo se considerase la expresion $a+b\sqrt{-1}$, están de manifiesto; así como serian positivas a y b, si considerásemos la expresion $\pm a \pm b\sqrt{-1}$.

Ejemplos. 1.° Trasformar la expresion $1 + \sqrt{3} . \sqrt{-1}$ en otra equivalente de la forma $M (\cos \varphi + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \varphi)$

Tenemos $a = -1$, $b = \sqrt{3}$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$; $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$, y por tanto $\varphi = 120°$. Luego

$$-1 + \sqrt{3} . \sqrt{-1} = 2 \left(\cos 120° + \sqrt{-1} \operatorname{sen} 120°\right).$$

2.° Trasformar la expresion $\sqrt{2} - 2\sqrt{2} . \sqrt{-1}$ en otra equivalente de la forma $M \left(\cos \varphi - \sqrt{-1} \operatorname{sen} \varphi\right)$.

Tenemos $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$; luego

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}}, \quad \operatorname{sen} \varphi = 2\sqrt{\frac{1}{5}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2.$$

Las tablas trigonométricas nos dan para valor del ángulo cuya tangente es 2, ó cuyo logaritmo tangente es 0,3010300, 63° 26′ 5″; luego

$$\sqrt{2} - 2\sqrt{2} . \sqrt{-1} = \sqrt{10}\left(\cos (63°26'5'') - \sqrt{-1} \operatorname{sen} (63°26'5'')\right).$$

115. En virtud de esta trasformacion y de los teoremas (113) demostraremos fácilmente los teoremas de los números 170, 172 y 173 del *Algebra elemental.*

1.° Tenemos

$$\left(a + b\sqrt{-1}\right)\left(a' + b'\sqrt{-1}\right) =$$
$$M\left(\cos \varphi + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \varphi\right) \times M'\left(\cos \varphi' + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \varphi'\right),$$

representando los módulos de estas dos cantidades imaginarias por M y M'; luego

$$\left(a + b\sqrt{-1}\right)\left(a' + b'\sqrt{-1}\right) =$$
$$MM'\left(\cos (\varphi + \varphi') + \sqrt{-1} \operatorname{sen} (\varphi + \varphi')\right) =$$
$$MM' \cos (\varphi + \varphi') + MM' \operatorname{sen} (\varphi + \varphi') . \sqrt{-1},$$

expresion que en general tiene la forma $a + b\sqrt{-1}$; que será un monomio imaginario, si $\cos (\varphi + \varphi') = 0$, es decir, si $\varphi + \varphi' = 90°$, ó $\varphi + \varphi' = 270°$; y que será real, si sen $(\varphi + \varphi') = 0$, ó $\varphi + \varphi' = 180°$; puesto que siendo φ y φ' dos ángulos positivos, su suma no puede ser 0 ni 360°.

2.° $$\frac{a + b\sqrt{-1}}{a' + b'\sqrt{-1}} = \frac{M\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi)}{M'\,(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi')} =$$
$$\frac{M}{M'}\Big(\cos(\varphi - \varphi') + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,(\varphi - \varphi')\Big) =$$
$$\frac{M}{M'}\cos(\varphi - \varphi') + \frac{M}{M'}\,\text{sen}\,(\varphi - \varphi') \,.\, \sqrt{-1},$$

expresion que tiene en general la forma $a + b\sqrt{-1}$; que será un monomio imaginario, si $\cos(\varphi - \varphi') = 0$, es decir, si $\varphi - \varphi' = \pm 90°$; y que será una cantidad real, si $\text{sen}\,(\varphi - \varphi') = 0$, ó $\varphi = \varphi'$.

3.° $$\left(a + b\sqrt{-1}\right)^m = M^m\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi\right)^m =$$
$$M^m\left(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,m\varphi\right) = M^m \cos m\varphi + M^m\,\text{sen}\,m\varphi \,.\, \sqrt{-1},$$

expresion de la misma forma; que será un monomio imaginario, si $\cos m\varphi = 0$, ó $m\varphi$ un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$; y que será una cantidad real, cuando sea $m\varphi = 0$, es decir, cuando $m\varphi$ sea un múltiplo de π.

4.° $$\sqrt[m]{a + b\sqrt{-1}} = \sqrt[m]{M}\sqrt[m]{\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi} =$$
$$\sqrt[m]{M}\left(\cos\frac{\varphi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{m}\right) = \sqrt[m]{M}\cos\frac{\varphi}{m} + \sqrt[m]{M}\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{m} \,.\, \sqrt{-1},$$

expresion de la misma forma, y que siempre es imaginaria; y ahora queda demostrado generalmente el teorema del número 173 del Algebra, que allí no pudimos demostrar sino para los casos en que m era una potencia de 2.

116. De este último teorema sacaremos esta consecuencia sumamente importante: *Las cantidades imaginarias, cuyo índice sea* 4, 6, 8....., *pueden trasformarse en cantidades imaginarias de* 2.° *grado;* por lo que el cálculo de todas las cantidades imaginarias se reduce al cálculo de las imaginarias de 2.° grado.

En efecto, sea $\sqrt[2m]{-A}$ una cantidad imaginaria cualquiera: tenemos

$$\sqrt[2m]{-A} = \sqrt[2m]{A} \times \sqrt[2m]{-1},$$
$$\sqrt[2m]{-A} = \sqrt[2m]{A} \times \sqrt[m]{\sqrt{-1}}.$$

Ahora la expresion

$$\sqrt{-1} = 0 + 1\sqrt{-1} = M\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi\right),$$

siendo $M = \sqrt{0+1} = 1$, $\text{tg}\,\varphi = \frac{1}{0}$, y por consiguiente $\varphi = \frac{\pi}{2}$: será, pues,

$$\sqrt{-1} = \cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2};$$

y $$\sqrt[2m]{-A} = \sqrt[2m]{A}\sqrt[m]{\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}} =$$

$$\sqrt[2m]{A}\left(\cos\frac{\pi}{2m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2m}\right),$$

expresion imaginaria de 2.° grado.

NOTA. *Las raíces del mismo grado de dos cantidades imaginarias conjugadas, son tambien imaginarias conjugadas.*

En efecto, acabamos de hallar la igualdad

$$\sqrt[m]{a + b\sqrt{-1}} = \sqrt[m]{M}\left(\cos\frac{\varphi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{m}\right);$$

$$\sqrt[m]{a - b\sqrt{-1}} = \sqrt[m]{M}\left(\cos\frac{\varphi}{m} - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{m}\right),$$

teniendo el ángulo φ en ambas igualdades el mismo valor, pues en las dos está determinado por la ecuacion $\text{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}$; luego dichas dos raíces son cantidades imaginarias conjugadas.

CAPÍTULO III.

Resolucion trigonométrica de las ecuaciones binomias.

117. Sabemos ya (*Alg. elem.*, 197) que toda ecuacion binomia puede reducirse á la forma

$$x^m = A,$$

A = A
A = −A
A = +A

en la cual A puede ser una cantidad real, positiva ó negativa, y tambien puede ser una cantidad imaginaria.

Supongamos en primer lugar que A sea una cantidad real positiva: sea α una cualquiera de sus raíces de índice m, por ejemplo su raíz aritmética que sabemos hallar: será por consiguiente $\alpha^m = A$; luego

$$x^m = \alpha^m.$$

Haciendo ahora $x = \alpha y$, será $\alpha^m y^m = \alpha^m$, y por consiguiente

$$y^m = 1.$$

Hallados los valores de y en esta ecuacion, ó lo que es igual, halladas las raíces del grado m de 1, si se multiplican dichos valores por α, se tendrán todos los valores que tiene la x en la ecuacion propuesta $x^m = A$, es decir, todas las raíces del grado m de A.

Vamos, pues, á resolver la ecuacion $y^m = 1$.

Siendo $2k\pi$ un número exacto de circunferencias positivas ó negativas, segun el valor positivo ó negativo que se dé á la cantidad entera arbitraria k, es evidente que

$$\cos 2k\pi = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 2k\pi = 0;$$

luego

$$\cos 2k\pi + \sqrt{-1} \operatorname{sen} 2k\pi = 1;$$

y por consiguiente

$$y^m = \cos 2k\pi + \sqrt{-1} \operatorname{sen} 2k\pi,$$

de donde

$$y = \cos \frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{m}. \qquad [1].$$

Si en esta fórmula damos á km valores enteros sucesivos cualesquiera, resultarán para ym valores desiguales; y si despues damos á k otros valores enteros diferentes de los anteriores, no resultará para y ningun valor diferente de los m hallados; y por tanto la ecuacion $y^m = 1$ tendrá justamente m raíces, todas desiguales.

En efecto, demos á k los m valores enteros sucesivos, negativos, unos negativos y otros positivos, incluso el 0, ó todos positivos,

$$a,\ a+1,\ a+2,\ a+3 \ldots\ldots,\ a+m-1 \qquad [A],$$

y los valores correspondientes de y serán:

$$\begin{array}{ll}
k=a, & y=\cos \dfrac{2a\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \dfrac{2a\pi}{m}, \\[2ex]
k=a+1, & y=\cos \dfrac{2(a+1)\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \dfrac{2(a+1)\pi}{m}, \\[2ex]
k=a+2, & y=\cos \dfrac{2(a+2)\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \dfrac{2(a+2)\pi}{m}, \\
\vdots & \\
k=a+m-1, & y=\cos \dfrac{2(a+m-1)\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \dfrac{2(a+m-1)\pi}{m}.
\end{array}$$

X

Tenemos ya m valores de y; y ahora vamos á demostrar que todos ellos son desiguales.

Observemos que los arcos que entran en estos m valores forman una progresion aritmética cuya diferencia es $\frac{2\pi}{m}$; y como el mayor de estos arcos $\frac{2(a-m-1)\pi}{m}$ excede al menor $\frac{2a\pi}{m}$ en $\frac{m-1}{m}2\pi$, cantidad menor que 2π, se infiere que cada uno de los referidos arcos excede á uno cualquiera de los anteriores en ménos que una circunferencia; luego todos estos arcos desiguales, que supondremos tienen el mismo orígen A (*Fig.* 1), tendrán extremos diferentes, y por tanto no pueden tener á la vez igual seno é igual coseno (*); luego los m valores hallados para y son todos desiguales.

Demostremos ahora que si damos á k valores diferentes de los $[A]$, no resultará para y ningun otro valor diferente de los m hallados. Imaginemos dividida la série natural de los números enteros negativos y positivos en secciones de á m números, siendo una de estas secciones la $[A]$; es evidente que todo número de cualquiera de las secciones excede á su respectivo de la seccion inmediata anterior (es decir, al número que en la seccion anterior ocupa el mismo lugar que el número de que hablamos ocupa en la suya) en m; y por consiguiente que todo número de una seccion excede á su respectivo de una seccion anterior cualquiera en un múltiplo mp de m; luego si llamamos h á un número de una de las secciones de la derecha de la seccion $[A]$, $h-pm$ será su respectivo en esta seccion; y si h es un número de una seccion de la izquierda de la $[A]$, $h+pm$ será su respectivo en esta seccion.

(*) En efecto, sean b y b' dos arcos que tengan igual seno é igual coseno: se tendrá

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} b', \quad \cos b = \cos b';$$

y tambien

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} b' = \operatorname{sen}^2 b', \quad \cos b \cos b' = \cos^2 b';$$

luego

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} b' + \cos b \cos b' = 1,$$

ó bien

$$\cos(b-b') = 1;$$

y por consiguiente

$$b - b' = 2k\pi, \quad \text{ó} \quad b = b' + 2k\pi,$$

es decir, que los dos arcos b y b' tienen el mismo extremo. Luego, si dos arcos del mismo orígen tienen extremos diferentes, no pueden tener á la vez igual seno é igual coseno.

Esto supuesto, demos á k en la fórmula [1] los dos valores h y $h \pm pm$, y tendremos

$$k = h \quad \ldots\ldots y = \cos \frac{2h\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2h\pi}{m},$$

$$k = h \pm pm \ldots\ldots y = \cos \frac{2(h \pm pm)\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2(h \pm pm)\pi}{m} =$$

$$\cos\left(\frac{2h\pi}{m} \pm 2p\pi\right) + \sqrt{-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2h\pi}{m} \pm 2p\pi\right);$$

y como los arcos $\frac{2h\pi}{m}$ y $\frac{2h\pi}{m} + 2p\pi$ se diferencian en p circunferencias, tendrán el mismo extremo, y por tanto iguales líneas trigonométricas; luego, cuando $k = h \pm pm$, resulta

$$y = \cos \frac{2h\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2h\pi}{m},$$

valor idéntico al que tiene y cuando $k = h$.

Queda, pues, demostrado que la ecuacion $y^m = 1$ tiene justamente m raíces, todas desiguales; ó bien, que la unidad tiene m raíces de índice m, todas desiguales.

118. Los m valores que conviene dar á k en la fórmula [1] para obtener, del modo más fácil, los m valores de y son

$$0, 1, 2, 3 \ldots\ldots, m - 1;$$

y los valores de y serán:

$$k = 0 \quad \ldots\ldots y = \cos 0 + \sqrt{-1} \operatorname{sen} 0 = 1,$$

$$k = 1 \quad \ldots\ldots y = \cos \frac{2\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{m},$$

$$k = 2 \quad \ldots\ldots y = \cos \frac{4\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{m},$$

$$k = 3 \quad \ldots\ldots y = \cos \frac{6\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{6\pi}{m},$$

$$\vdots$$

$$k = m - 1 \ldots y = \cos \frac{2(m-1)\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2(m-1)\pi}{m}.$$

Solo el primero de estos valores aparece real: veamos si existe entre los otros alguno que tambien sea real.

Sea $\cos \frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{m}$ uno cualquiera de los m valores de y que acabamos de hallar: para que este valor sea real, es suficiente y necesario que sen $\frac{2k\pi}{m} = 0$. Veamos qué valores de los $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots, m - 1$ debe tener k para que esta ecuacion se verifique. Desde luego vemos que el valor 0 de k la satisface; y tambien quedará satisfecha dicha ecuacion si el número $\frac{2k}{m}$ es entero; pues entonces el arco $\frac{2k}{m}\pi$ será un número exacto de semicircunferencias, cuyo seno es cero. Ahora bien, como actualmente k es un número entero, positivo y menor que m, será $2k < 2m$, y $\frac{2k}{m} < 2$; luego el número entero y positivo $\frac{2k}{m} = 1$, y por consiguiente $k = \frac{m}{2}$.

De suerte que, si m es par, y tendrá dos valores reales correspondientes á los valores 0 y $\frac{m}{2}$ dados á k, los cuales valores de y son:

$$y = \cos 0 + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, 0 = 1,$$

$$y = \cos\frac{m\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{m\pi}{m} = \cos\pi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\pi = -1;$$

como se ve por la misma ecuacion $y^m = 1$.

Si m es impar, como k es entero, no puede ser igual á $\frac{m}{2}$; y por consiguiente la ecuacion $y^m = 1$ no tiene en este caso más raíz real que la correspondiente al valor 0 de k, la cual es 1; como tambien es evidente por la misma ecuacion $y^m = 1$.

119. Siendo imaginarias $m - 2$ raíces de la ecuacion $y^m = 1$ cuando m es par, y $m - 1$ raíces cuando m es impar, es fácil demostrar que cada dos de estas raíces, correspondientes á dos valores de k cuya suma sea m, son conjugadas.

En efecto, sea a un valor dado á k; el otro será $m - a$, puesto que la suma de los dos es m: tendremos por lo tanto

$$y = \cos\frac{2a\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2a\pi}{m}$$

$$y = \cos\frac{2(m-a)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{(2m-a)\pi}{m} =$$

$$\cos\left(2\pi - \frac{2a\pi}{m}\right) + \sqrt{-1}\,\text{sen}\left(2\pi - \frac{2a\pi}{m}\right) =$$

$$\cos\frac{2a\pi}{m} - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2a\pi}{m},$$

que es la conjugada de la raíz correspondiente al valor a de k (*).

En consecuencia de esto, cuando m sea par, serán raíces conjugadas los valores de y correspondientes á los 1 y $m-1$, 2 y $m-2$, 3 y $m-3$....., $\frac{m-2}{2}$ y $\frac{m+2}{2}$ de k; luego, para obtener las $m-2$ raíces imaginarias de la ecuacion $y^m=1$, se darán á k en la fórmula [1] los valores 1, 2....., hasta $\frac{m-2}{2}$ inclusive, y se unirán á las raíces que así resulten sus conjugadas.

Cuando m sea impar, serán raíces conjugadas los valores de y correspondientes á los 1 y $m-1$, 2 y $m-2$....., $\frac{m-1}{2}$ y $\frac{m+1}{2}$ que se den á k; y por lo tanto, dando á k en la fórmula [1] los valores 1, 2....., hasta $\frac{m-1}{2}$ inclusive, y uniendo á las raíces que así resulten sus conjugadas, se tendrán todas las raíces imaginarias de la ecuacion $y^m=1$.

Ejemplos del primer caso.

1.° Sea la ecuacion $y^4=1$.

Tiene desde luego esta ecuacion las dos raíces reales 1 y -1. Para obtener las dos imaginarias, como $\frac{m-2}{2}=1$, daremos á k el valor 1, y tendremos, uniendo á la raíz que resulte su conjugada,

$$y=\cos\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}=\pm\sqrt{-1}.$$

2.° Sea la ecuacion $y^6=1$.

Será $\frac{m-2}{2}=2$: daremos, pues, á k los dos valores 1 y 2, y tendremos, uniendo al mismo tiempo á las raíces imaginarias que resulten sus conjugadas,

$$y=\cos\frac{\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},$$

$$y=\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}.$$

(*) Dos cualesquiera de estas raíces imaginarias conjugadas son cantidades recíprocas; pues multiplicándolas, resulta 1 de producto.

La ecuacion tiene, ademas de estas cuatro raíces imaginarias, las dos reales 1 y — 1.

Ejemplos del segundo caso.

1.° Sea la ecuacion $y^5 = 1$.

Siendo $m = 5$, será $\frac{m-1}{2} = 2$: daremos, pues, á k los valores 1 y 2. Dando á k el valor 1, será

$$y = \cos\frac{2\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,72^\circ;$$

y dando á k el valor 2, será

$$y = \cos\frac{4\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{5} = -\cos 36^\circ \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,36^\circ.$$

Como los arcos 72° y 36° son múltiplos de 9°, podrán expresarse estos cuatro valores de y exactamente por medio de radicales cuyo índice sea 2. En efecto, sustituyendo, en los valores de y, en vez de cos 72°, sen 72°, cos 36° y sen 36° sus valores respectivos (39)

$$\cos 72^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\quad \text{sen}\,72^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$-\cos 36^\circ = \frac{-1-\sqrt{5}}{4},\quad \text{sen}\,36^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

resultan $$y = \frac{-1+\sqrt{5} \pm \sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.\sqrt{-1}}{4},$$

$$y = \frac{-1-\sqrt{5} \pm \sqrt{10-2\sqrt{5}}\,.\sqrt{-1}}{4}.$$

La ecuacion tiene ademas la raíz real 1.

2.° Sea la ecuacion $y^7 = 1$.

Daremos á k los tres valores 1, 2, 3, y tendremos

$$y = \cos\frac{2\pi}{7} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{7},$$

$$y = \cos\frac{4\pi}{7} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{7},$$

$$y = \cos\frac{6\pi}{7} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{6\pi}{7},$$

y ademas $y = 1$.

El seno y coseno de un arco cualquiera pueden calcularse siempre por medio de las tablas, hallando primeramente sus logaritmos, y en seguida los números correspondientes á estos.

120. Puesto que

$$\cos\frac{2k\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{m}=\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{m}\right)^k;$$

y como, dando á k en el primer miembro de esta identidad los m valores sucesivos $0, 1, 2, 3\ldots.., m-1$, resultan las m raices de la ecuacion $y^m=1$, se ve que estas raices son las m primeras potencias sucesivas de la raiz $\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{m}$ correspondiente al valor 1 de k. Luego, si representamos esta raiz por α, las m raices de la ecuacion $y^m=1$ serán

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3\ldots..,\ \alpha^{m-1}.$$

Así, las raices de la ecuacion de tercer grado $y^3=1$ serán

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)^0,\quad \left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)^1,$$

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)^2,$$

y llamando α á la raiz $\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$, dichas raices serán

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \text{ó}\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2.$$

Nota. Siendo $\cos 2k\pi=1$ y $\text{sen}\,2k\pi=0$, es

$$\cos 2k\pi-\sqrt{-1}\,\text{sen}\,2k\pi=1;$$

y por consiguiente

$$y=\cos\frac{2k\pi}{m}-\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{m}\qquad[2],$$

fórmula que sólo se diferencia de la [1] en el signo de k; luego si en las fórmulas [1] y [2] damos á k valores iguales, pero de signo contrario, resultarán para y valores respectivamente iguales. Demos, pues, á k en la fórmula [2] los m valores sucesivos, negativos, unos negativos y otros positivos (entre ellos el cero) ó todos positivos,

$$a,\ a+1,\ a+2\ldots..,\ a+m-1,$$

y resultarán para y las mismas raices que si en la fórmula [1] diéramos á k los m valores

$$-a,\ -(a+1),\ -(a+2)\ldots..,\ -(a+m-1)\quad[A]:$$

mas las m raices que resultan para y dando á k en la fórmula [1] los valores [A] son las m raices de la ecuacion $y^m=1$ (117); luego dando á k en la fórmula [2] m valores sucesivos cualesquiera, resultan las m raíces de la ecuacion $y^m = 1$.

121. Pasemos ahora á la resolucion de la ecuacion binomia $x^m = -A$, en la cual A es un número absoluto.

Si m es impar, haciendo $x = -x'$, la ecuacion será

$$(-x')^m = -A,$$

ó por ser m impar,

$$-x'^m = -A, \text{ ó } x'^m = A;$$

ecuacion que se halla en el caso anterior. Resuelta, pues, esta ecuacion, es decir, halladas sus m raíces $1, \alpha, 6, \gamma \ldots$ ó sean los m valores de x', los m de x serán

$$-1, -\alpha, -6, -\gamma \ldots$$

Sólo tenemos, pues, que ocuparnos del caso en que m es par.

Sea α una raíz cualquiera de la cantidad A, por ejemplo su raíz aritmética: tendremos $\alpha^m = A$, y por consiguiente la ecuacion propuesta será

$$x^m = -\alpha^m;$$

y haciendo $x = \alpha y$, será

$$\alpha^m y^m = -\alpha^m, \text{ ó } y^m = -1.$$

Para resolver esta ecuacion, tenemos evidentemente

$$\cos (2k + 1)\pi = -1, \quad \text{sen } (2k + 1)\pi = 0;$$

luego

$$\cos (2k + 1)\pi + \sqrt{-1} \text{ sen } (2k + 1)\pi = -1,$$

y por tanto

$$y^m = \cos (2k + 1)\pi + \sqrt{-1} \text{ sen } (2k + 1)\pi,$$

de donde

$$y = \cos \frac{(2k + 1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \text{ sen } \frac{(2k + 1)\pi}{m} \quad [3].$$

Ahora se demuestra, como en el caso en que la ecuacion es $y^m = 1$, que si damos á k los m valores enteros sucesivos

$$a, a + 1, a + 2 \ldots, a + m - 1,$$

para y resultarán m valores, todos desiguales; y que si se dan á k valores diferentes de los anteriores, no resultará para y ningun valor diferente de los m hallados.

Para la facilidad del cálculo se darán á k los m valores

$$0, 1, 2, 3 \ldots, m - 1.$$

Tambien se verá fácilmente que la ecuacion propuesta no tiene ninguna raíz real, y que son conjugadas las raíces correspondientes á dos valores de k cuya suma sea $m - 1$; y por consiguiente, para obtener las m raíces, todas imaginarias, de la ecuacion de grado par $y^m = -1$, no hay más que hallar por la fórmula [3] los valores de y correspondientes á los $\frac{m}{2}$ valores 0, 1, 2, 3....., dados á k, y unir á las raices que así resulten sus conjugadas.

Ejemplos. 1.° Sea la ecuacion $y^6 = -1$.

Daremos á k los tres valores 0, 1, 2, y tendremos

$$y = \cos\frac{\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2},$$

$$y = \cos\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \pm\sqrt{-1},$$

$$y = \cos\frac{5\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} =$$

$$-\cos\frac{\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2}.$$

2.° Sea la ecuacion $y^8 = -1$.

Daremos á k en la fórmula [3] los cuatro valores 0, 1, 2, 3, y tendremos

$$y = \cos\frac{\pi}{8} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8},$$

$$y = \cos\frac{3\pi}{8} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{8},$$

$$y = \cos\frac{5\pi}{8} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{8},$$

$$y = \cos\frac{7\pi}{8} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{8}.$$

122. Tenemos

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{(2k+1)\pi}{m} = \left(\cos\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{\pi}{m}\right)^{2k+1}.$$

Dando á k los m valores 0, 1, 2....., $m-1$, los valores de y serán

$$y = \left(\cos\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{m}\right)^1,$$

$$y = \left(\cos\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{m}\right)^3,$$

$$y = \left(\cos\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{m}\right)^5,$$

$$\vdots$$

$$y = \left(\cos\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{m}\right)^{2m-1};$$

es decir, que las raíces de la ecuacion $y^m = -1$, en que m es par, son las m primeras potencias sucesivas de grado impar de la raíz correspondiente al valor $k = 0$; y por lo tanto, representado por α la primera raíz, las m raíces serán

$$\alpha,\ \alpha^3,\ \alpha^5 \ldots\ldots,\ \alpha^{2m-1}$$

NOTA. En vez de valernos, para resolver la ecuacion $y^m = -1$ cuando m es par, de la fórmula

$$y = \cos\frac{(2k+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{(2k+1)\pi}{m},$$

podriamos valernos de su conjugada

$$y = \cos\frac{(2k+1)\pi}{m} - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{(2k+1)\pi}{m};$$

y del mismo modo que en la Nota del número 120, veríamos que los m valores que da esta fórmula son tambien las m raíces de la ecuacion $y^m = -1$.

Resolucion de las ecuaciones binomias en el caso en que el segundo miembro es imaginario.

123. Ya hemos visto (116) que toda cantidad imaginaria puede reducirse á una de las dos formas $a + b\sqrt{-1}$ y $a - b\sqrt{-1}$, siendo a cantidad positiva ó negativa: tenemos, pues, que resolver las dos ecuaciones

$$x^m = a + b\sqrt{-1},\quad x^m = a - b\sqrt{-1}.$$

Resoluciones de la primera.

Para resolver las ecuaciones $x^m = \pm A$, en que A es una cantidad real, hemos principiado por trasformar estas ecuaciones en las $y^m = \pm 1$; lo que, segun hemos visto, exige que se conozca de antemano una cualquiera de las raíces del grado m de A: allí conocíamos la raíz aritmética; aquí podemos llegar á conocer, por medio de la fórmula de Moivre, una raíz del grado m de $a + b\sqrt{-1}$, á la cual hemos llamado (113, *Nota*) la raíz principal.

Tenemos, para esto,

$$a + b\sqrt{-1} = M(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi);$$

y por consiguiente

$$\sqrt[m]{a + b\sqrt{-1}} = \sqrt[m]{M}\left(\cos\frac{\varphi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{m}\right).$$

Queda hallada la raíz principal.

Esto supuesto, siguiendo el mismo método que en la resolucion de las ecuaciones $x^m = \pm A$, llamaremos α á la raíz principal de la ecuacion propuesta y tendremos

$$\alpha^m = a + b\sqrt{-1},$$

y por tanto la ecuacion propuesta será

$$x^m = \alpha^m.$$

Haciendo ahora $x = \alpha y$, será

$$\alpha^m y^m = \alpha^m,$$

y simplificando $$y^m = 1.$$

Resolviendo, pues, esta ecuacion, ó, lo que es igual, hallando las m raíces del grado m de 1, tendremos por la relacion $x = \alpha y$ los m valores de x.

Si se quiere reemplazar en la ecuacion $x = \alpha y$ la raíz principal α por su valor

$$\sqrt[m]{M}\left(\cos\frac{\varphi}{m} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{m}\right),$$

la incógnita y por el suyo

$$\cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{m},$$

se podrá escribir la fórmula, que dará los m valores de x, de este modo:

$$x = \sqrt[m]{M}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\varphi + 2k\pi}{m}\right).$$

Del mismo modo se resolverá la ecuacion

$$x^m = a - b\sqrt{-1},$$

y se tendrá, si se quiere, la fórmula

$$x = \sqrt[m]{M}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{m} - \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\varphi + 2k\pi}{m}\right) \quad (*).$$

Ejemplo. Resolver la ecuacion $x^3 = 1 + \sqrt{-1}$.

Aunque para resolver esta ecuacion binomia pudiéramos servirnos de las fórmulas halladas ya, es preferible, para no tener que recordar dichas fórmulas, resolverla directamente.

(*) Hemos visto que la fórmula de Moivre, en el caso en que el exponente es fraccionario, á saber

$$\left(\cos a \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} a\right)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}a \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{p}{q}a,$$

Tenemos

$$1+\sqrt{-1}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

La raíz cúbica principal de esta cantidad imaginaria es

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right),$$

y como las raíces cúbicas imaginarias de la unidad son

$$\cos\frac{2\pi}{3}=\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\ \text{ y }\ \cos\frac{2\pi}{3}-\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3},$$

se infiere que las otras dos raíces cúbicas de la cantidad imaginaria $1+\sqrt{-1}$ son

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right),$$

ó bien

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right),\ \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}-\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\right).$$

---

no es completamente exacta, puesto que su segundo miembro es uno solo de los q valores diferentes del primero. Veamos ahora qué modificacion debe recibir esta fórmula, para que su segundo miembro tenga los mismos valores que el primero.

Segun la relacion $x=ay$ las raíces de un cierto grado de una cantidad real ó imaginaria se hallan multiplicando una de estas raíces por las raíces del mismo grado de la unidad; por consiguiente, multiplicando $\cos\frac{p}{q}a\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{p}{q}a$, que es una de las raíces imaginarias del grado q de la cantidad imaginaria $\cos pa\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}pa$ ó de su igual $(\cos a\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}a)^p$, por $\cos\frac{2k\pi}{q}\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{q}$, el producto nos dará todas las raíces del grado q de la cantidad $(\cos a\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}a)^p$, es decir, que tendremos con toda exactitud

$$\left(\cos a\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}a\right)^{\frac{p}{q}}=\left(\cos\frac{p}{q}a\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{p}{q}a\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{q}\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{q}\right)$$

ó $$\left(\cos a\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}a\right)^{\frac{p}{q}}=\cos\frac{pa+2k\pi}{q}\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{pa+2k\pi}{q}.$$

CAPÍTULO IV.

Ecuaciones trinomias.

124. Llamamos ecuacion *trinomia* á la ecuacion que despues de las operaciones comunes tiene la forma

$$Ax^{2m} + Bx^m + C = 0 \ (*).$$

Para resolverla, haremos $x^m = z$, y entonces dicha ecuacion será

sustituyendo $$Az^2 + Bz + C = 0 \qquad [1].$$

Supongamos en primer lugar que las dos raíces de esta ecuacion son reales, positivas ó negativas, y llamémoslas α y β: sustituyendo estos valores en vez de z en la ecuacion $x^m = z$, tendremos las ecuaciones binomias

$$x^m = \alpha, \quad x^m = \beta,$$

que ya sabemos resolver, reduciéndolas préviamente á la forma

$$y^m = \pm 1.$$

Supongamos ahora que las raíces de la ecuacion [1] sean imaginarias: tendrán la forma $a + b\sqrt{-1}$ y $a - b\sqrt{-1}$; luego tendremos que resolver las dos ecuaciones binomias, cuyo segundo miembro es imaginario,

$$x^m = a + b\sqrt{-1}, \quad x^m = a - b\sqrt{-1}$$

que tambien sabemos resolver (123). por la formula moavre

CAPÍTULO V.

Valores de sen ma y cos ma en funcion de sen a y cos a, y de tg ma en funcion de tg a.

125. Hemos hallado (113, 3.°)

$$(\cos a + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ a)^m = \cos ma + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ ma.$$

(*) La ecuacion bicuadrada (*Alg.* 187) es un caso particular de la ecuacion trinomia.

Desenvolviendo el primer miembro por la fórmula del binomio, suponiendo que m sea entero y positivo, será

$$(\cos a + \sqrt{-1} \operatorname{sen} a)^m = (\cos a)^m + m (\cos a)^{m-1} \operatorname{sen} a . \sqrt{-1} -$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2} (\cos a)^{m-2} \operatorname{sen}^2 a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} (\cos a)^{-m3} \operatorname{sen}^3 a \times$$
$$\sqrt{-1} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} (\cos a)^{m-4} \operatorname{sen}^4 a +$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} (\cos a)^{m-5} \operatorname{sen}^5 a \sqrt{-1} - \ldots [K].$$

Por consiguiente $\cos ma + \sqrt{-1} \operatorname{sen} ma$ es igual á este desarrollo.

Ahora bien, si tenemos la igualdad

$$\alpha + 6\sqrt{-1} = \alpha' + 6'\sqrt{-1}$$

será necesariamente $\alpha = \alpha'$ y $6 = 6'$ (*Alg.* 175, *Corol.*). Tendremos, pues,

$$\operatorname{sen} ma = m (\cos a)^{m-1} \operatorname{sen} a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} (\cos a)^{m-3} \operatorname{sen}^3 a$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} (\cos a)^{m-5} \operatorname{sen}^5 a - \ldots [A],$$

$$\cos ma = (\cos a)^m - \frac{m(m-1)}{1.2} (\cos a)^{m-2} \operatorname{sen}^2 a +$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} (\cos a)^{m-4} \operatorname{sen}^4 a - \ldots\ldots \qquad [B].$$

Las fórmulas [A] y [B] nos dan los valores de $\operatorname{sen} ma$ y $\cos ma$ en funcion de $\operatorname{sen} a$ y $\cos a$.

Ejemplos. 1.° $m = 2$: tendremos las fórmulas halladas ya (23)

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a,$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a.$$

2.° $m = 3$: tendremos

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a \cos^2 a - \operatorname{sen}^3 a,$$
$$\cos 3a = \cos^3 a - 3 \cos a \operatorname{sen}^2 a.$$

Puede hallarse $\operatorname{sen} 3a$ en funcion racional de $\operatorname{sen} a$, y $\cos 3a$ en funcion racional de $\cos a$. Para esto, sustituiremos en la primera fórmula, en lugar de $\cos^2 a$ su valor $1 - \operatorname{sen}^2 a$, y en la segunda en lugar de $\operatorname{sen}^2 a$ su igual $1 - \cos^2 a$, y resultarán estas dos fórmulas:

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a,$$
$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$$

3.° $m = 4$: tendremos

$$\operatorname{sen} 4a = 4 \operatorname{sen} a \cos^3 a - 4 \cos a \operatorname{sen}^3 a,$$
$$\cos 4a = \cos^4 a - 6 \cos^2 a \operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^4 a.$$

126. Para hallar $\operatorname{tg} ma$ en funcion de $\operatorname{tg} a$, dividamos ordenadamente la fórmula (A) por la (B), y tendremos

$$\operatorname{tg} ma = \frac{m(\cos a)^{m-1} \operatorname{sen} a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(\cos a)^{m-3} \operatorname{sen}^3 a + \ldots\ldots}{(\cos a)^m - \frac{m(m-1)}{1.2}(\cos a)^{m-2} \operatorname{sen}^2 a + \ldots\ldots},$$

y dividiendo los dos términos de este quebrado por $(\cos a)^m$, será

$$\operatorname{tg} ma = \frac{m \operatorname{tg} a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \operatorname{tg}^3 a + \ldots\ldots}{1 - \frac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{tg}^2 a + \ldots\ldots} \qquad [C].$$

Ejemplos. 1.° $m = 2$: tendremos la fórmula hallada ya (23)

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

2.° $m = 3$: será $\operatorname{tg} 3a = \dfrac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}$.

3.° $m = 4$: será $\operatorname{tg} 4a = \dfrac{4 \operatorname{tg} a - 4 \operatorname{tg}^3 a}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^4 a}$.

CAPÍTULO VI.

Hallar los valores de sen x y cos x en funcion del arco x.

127. Hallemos primeramente el límite de la razon del seno al arco, y de la tangente al arco, disminuyendo éste indefinidamente.

Tenemos $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$, y pues $\operatorname{tg} a > a$, será $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} > a$, de donde $\dfrac{\operatorname{sen} a}{a} > \cos a$: tambien $\dfrac{\operatorname{sen} a}{a} > 1$; luego la razon $\dfrac{\operatorname{sen} a}{a}$ está comprendida entre cos a y 1. Pero siendo a suficientemente pequeña, cos a y 1 pueden diferenciarse en tan poco como se quiera; luego con mayor razon la diferencia entre $\frac{\text{sen } a}{a}$ y 1 puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad asignable, ó lo que es igual el límite de $\frac{\text{sen } a}{a}$ es 1; ó bien $\frac{\text{sen } a}{a} = 1$, cuando $a = 0$.

Ahora

$$\frac{\text{tg } a}{a} = \frac{\frac{\text{sen } a}{\cos a}}{a} = \frac{\text{sen } a}{a \cos a} = \frac{\text{sen } a}{a} \cdot \frac{1}{\cos a};$$

en el caso del límite es $\frac{\text{sen } a}{a} = 1$, y $\frac{1}{\cos a} = 1$; luego el límite de $\frac{\text{tg } a}{a}$ es 1, ó bien $\frac{\text{tg } a}{a} = 1$, cuando $a = 0$.

128. Pasemos á la resolucion del problema enunciado.

Las fórmulas [A] y [B] del número 125 pueden escribirse, separando en las dos $(\cos a)^m$ como si fuese un factor comun, del modo siguiente:

$$\text{sen } ma = (\cos a)^m \left(m \text{ tg } a - m \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3} \text{tg}^3 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} \text{tg}^5 a - \ldots\right).$$

$$\cos ma = (\cos a)^m \left(1 - \frac{m(m-1)}{1.2} \text{tg}^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \text{tg}^4 a - \ldots\right).$$

Hagamos ahora $ma = x$, siendo x un número fijo: será $m = \frac{x}{a}$; y sustituyendo en las fórmulas anteriores el valor de m, tendremos

$$\text{sen } x = (\cos a)^{\frac{x}{a}} \left(\frac{x}{a} \cdot \text{tg } a - \frac{\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{a}-2\right)}{1.2.3} \text{tg}^3 a + \frac{\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{a}-2\right)\left(\frac{x}{a}-3\right)\left(\frac{x}{a}-4\right)}{1.2.3.4.5} \text{tg}^5 a - \ldots\right).$$

$$\cos x = (\cos a)^{\frac{x}{a}} \left(1 - \frac{\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right)}{1 \,.\, 1} \operatorname{tg}^2 a + \right.$$

$$\left. \frac{\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right)\left(\frac{x}{a} - 2\right)\left(\frac{x}{a} - 3\right)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \operatorname{tg}^4 a - \ldots\ldots \right),$$

ó bien

$$\operatorname{sen} x = (\cos a)^{\frac{x}{a}} \left(x \,.\, \frac{\operatorname{tg} a}{a} - \frac{x\,(x - a)\,(x - 2a)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \left(\frac{\operatorname{tg} a}{a}\right)^3 + \right.$$

$$\left. \frac{x\,(x - a)\,(x - 2a)\,(x - 3a)\,(x - 4a)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \left(\frac{\operatorname{tg} a}{a}\right)^5 - \ldots\ldots \right) \quad [p],$$

$$\cos x = (\cos a)^{\frac{x}{a}} \left(1 - \frac{x\,(x - a)}{1 \,.\, 2} \left(\frac{\operatorname{tg} a}{a}\right)^2 + \right.$$

$$\left. \frac{x\,(x - a)\,(x - 2a)\,(x - 3a)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \left(\frac{\operatorname{tg} a}{a}\right)^4 - \ldots\ldots \right) \quad [q].$$

Fin

Supongamos ahora que el arco a vaya disminuyendo y aproximándose á cero cuanto se quiera: como el arco x tiene un valor fijo, el número entero y positivo $m = \frac{x}{a}$ crecerá indefinidamente; y en el caso del límite, es decir, cuando $a = 0$, será $\frac{\operatorname{tg} a}{a} = 1$, y las fórmulas [$p$] y [$q$] se convertirán en las siguientes:

$$\operatorname{sen} x = (\cos 0)^{\infty} \left(x - \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} - \ldots\ldots\right) [p'],$$

$$\cos x = (\cos 0)^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} - \ldots\ldots\right) [q'].$$

Hallemos el valor de $(\cos 0)^{\infty}$, para sustituirlo en estas fórmulas.

Tenemos

$$\cos a = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}a, \text{ y como } \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}a < (\tfrac{1}{2}a)^2,$$

será $\cos a > 1 - \frac{a^2}{2}$, y por consiguiente

$$(\cos a)^{\frac{x}{a}} > \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{x}{a}}.$$

Siendo $\frac{x}{a} = m$ un número entero mayor que 1, es

$$\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{x}{a}} > 1 - \frac{x}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \; (*), \text{ ó } \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{x}{a}} > 1 - \frac{ax}{2}$$

luego á fortiori

$$(\cos a)^{\frac{x}{a}} > 1 - \frac{ax}{2}.$$

Sabemos que $\cos a < 1$, y tambien $(\cos a)^{\frac{x}{a}} < 1$; luego $(\cos a)^{\frac{x}{a}}$ es-

---

(*) Tenemos

$$(1 - \alpha)^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 > 1 - 2\alpha.$$

Multiplicando los dos miembros de esta desigualdad por $1 - \alpha$, se tendrá

$$(1 - \alpha)^3 > 1 - 3\alpha + 2\alpha^2 > 1 - 3\alpha;$$

multiplicando los dos miembros de esta nueva desigualdad por $1 - \alpha$, resultará

$$(1 - \alpha)^4 > 1 - 4\alpha.$$

Para demostrar de un modo general la desigualdad

$$(1 - \alpha)^p > 1 - p\alpha,$$

siendo p un número entero positivo, admitiremos, (Nota al pié de la pág. 31 del *Alg. elem.*) que siendo m un número dado entero y positivo, se tenga

$$(1 - \alpha)^m > 1 - m\alpha:$$

multiplicando los dos miembros de esta desigualdad por $1 - \alpha$, será

$$(1 - \alpha)^{m+1} > 1 - (m + 1)\alpha + m\alpha^2,$$

y con mayor razon

$$(1 - \alpha)^{m+1} > 1 - (m + 1)\alpha;$$

desigualdad que nos dice que si por algun valor entero y positivo de m es

$$(1 - \alpha)^m > 1 - m\alpha,$$

será cierta esta desigualdad para el valor de m superior en una unidad al anterior. Ahora bien, hemos demostrado ya que

$$(1 - \alpha)^2 > 1 - 2\alpha, \quad (1 - \alpha)^3 > 1 - 3\alpha, \quad (1 - \alpha)^4 > 1 - 4\alpha;$$

luego, segun la conclusion última, será

$$(1 - \alpha)^5 > 1 - 5\alpha,$$

y por consiguiente, segun la misma conclusion,

$$(1 - \alpha)^6 > 1 - 6\alpha;$$

y así sucesivamente. Luego queda demostrado que, cualquiera que sea el número entero y positivo p es

$$(1 - \alpha)^p > 1 - p\alpha,$$

tá comprendido entre $1 - \frac{ax}{2}$ y 1: la diferencia $\frac{ax}{2}$ entre estas dos cantidades puede aproximarse á cero cuanto se quiera, disminuyendo suficientemente el arco a; luego la diferencia entre $(\cos a)^{\frac{x}{a}}$ y 1 puede, con mayor razon, ser menor que cualquiera cantidad asignable; es decir, que 1 es el límite de $(\cos a)^{\frac{x}{a}}$, disminuyendo a indefinidamente; ó lo que es igual $(\cos 0)^{\infty} = 1$.

Segun esto, las fórmulas $[p']$ y $[q']$ se reducen por último á las siguientes:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.. \quad [S],$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots.. \quad [T].$$

Estas séries son convergentes para todo valor del arco.

En efecto, hallemos el término que en la primera série ocupa el lugar n.

Observemos que los exponentes de x forman una progresion aritmética, en que el primer término es 1 y la diferencia 2, y por tanto el término que ocupa el lugar n en dicha progresion será

$$1 + 2(n - 1) = 2n - 1;$$

luego el término que ocupa el lugar n en la série será

$$\pm \frac{x^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}.$$

El término siguiente es

$$\mp \frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n-1)\,2n\,(2n+1)},$$

y la razon de este término al inmediato anterior es $-\frac{x^2}{2n(2n+1)}$.

Como x tiene un valor cualquiera, pero fijo, la cantidad $\frac{x^2}{2n(2n+1)}$ es menor que 1, siendo n suficientemente grande, y áun puede ser dicha cantidad tan pequeña como se quiera; luego los términos de la série $[S]$ irán disminuyendo en valor absoluto y aproximándose indefinidamente á cero, desde que n tenga un valor suficientemente grande; y como los signos de los términos de la série [S] van alternando, ó no forman ninguna permanencia, dicha série será convergente, contando sus términos desde el que tenga un valor absoluto menor que el inmediato anterior, y por lo tanto la série total será convergente (*Compl. del Alg.*, 144 *y* 145).

Del mismo modo se demuestra que la série [T] es tambien convergente.

129. Las séries [S] y [T] sirven para hallar el seno y coseno de un arco cualquiera, y por tanto sirven para construir unas tablas de senos y cosenos.

Por ejemplo, si por medio de estas séries queremos hallar el seno y el coseno del arco 1′, tendremos que expresar primeramente el arco 1′ en partes del radio 1. Tenemos, para esto, que $180 \times 60'$ ó sea media circunferencia expresada en minutos, vale π radios; luego el arco 1′ valdrá en partes del radio 1 el número $\frac{\pi}{180 \times 60} = \pi \times \frac{1}{10800}$. Sustituyendo este valor en las séries en lugar del arco x, y efectuando las operaciones indicadas, suponiendo que la aproximacion sea de 12 cifras decimales, se hallará

$$\text{sen } 1' = 0{,}00029\ 08882\ 05\ldots\ldots,$$
$$\cos 1' = 0{,}99999\ 99576\ 92\ldots\ldots$$

NOTA. Obsérvese que en las séries [S] y [T] el arco puede expresarse *en el primer miembro* indiferentemente en grados ó en partes del radio; es decir, por ejemplo, que lo mismo es sen 30° que sen $\frac{\pi}{6}$. En el segundo miembro el arco x está expresado en partes del radio 1.

CAPÍTULO VII.

Deduccion de las fórmulas de los triángulos rectilíneos de sus correspondientes en los triángulos esféricos.

130. Sean ABC un triángulo esférico, a, b, c los valores de los lados BC, AC, AB en partes del radio, es decir, siendo unidad de arcos el arco igual en longitud al radio, a_1, b_1, c_1, R los valores de los mismos lados y del radio de la esfera, siendo unidad una recta cualquiera diferente del radio: como la primera unidad tiene R unidades segundas, y es por lo tanto R veces mayor que ésta, el número a será R veces menor que el a_1; tendremos, pues,

$$a = \frac{a_1}{R}, \text{ é igualmente } b = \frac{b_1}{R}, \quad c = \frac{c_1}{R};$$

y de estas igualdades resultan fácilmente:

$$m(a \pm b) = \frac{m(a_1 \pm b_1)}{R},$$

$$m(a \pm b \pm c) = \frac{m(a_1 \pm b_1 \pm c_1)}{R};$$

de suerte que la igualdad $a = \frac{a_1}{R}$ se verifica no solo cuando a es un lado del triángulo ABC, sino tambien cuando a sea la suma ó diferencia de dos ó de los tres lados multiplicada por un número cualquiera.

Imaginemos ahora que el radio R de la esfera crezca indefinidamente, y que en las sucesivas esferas se construyan triángulos esféricos cuyos lados tengan constantemente las longitudes a_1, b_1, c_1: el valor a, en partes del radio, de un lado cualquiera ó de la suma ó diferencia de dos ó de los tres lados multiplicada por un número m, disminuirá indefinidamente; lo que se ve por la ecuacion $a = \frac{a_1}{R}$ (*); y en el caso del límite, ó bien, cuando $R = \infty$, serán sen $a = 0$, cos $a = 1$. A medida que crece R, la esfera va siendo ménos curva, y en el caso del límite se cambia en un plano; el triángulo esférico se convierte entonces en un triángulo rectilíneo $A_1\ B_1\ C_1$, cuyos lados tendrán las longitudes a_1, b_1, c_1, que son constantes en todos los triángulos, y los ángulos A_1, B_1, C_1 serán los límites de los A, B, C.

Dada, pues, una ecuacion esférica, y tratándose de hallar la ecuacion rectilínea correspondiente, es decir, la ecuacion en que se convierte la esférica dada en el caso del límite, se harán en ésta sen $a = 0$, cos $a = 1$, y se sustituirán á los ángulos A, B, C sus límites A_1, B_1, C_1.

La ecuacion que resulte, si no es la insignificante $0 = 0$ ó $1 = 1$, será la rectilínea correspondiente á la esférica dada. Pero si haciendo sen $a = 0$, resulta $0 = 0$ ó $1 = 1$, se evitará este resúltado en virtud del lema siguiente.

Siendo a un lado del triángulo esférico ó la suma ó diferencia

(*) Luego disminuirán indefinidamente los ángulos planos de los triedros correspondientes á los sucesivos triángulos esféricos.

de dos ó de los tres lados multiplicada por un número cualquiera, será $\lim R \operatorname{sen} a = a_1$.

En efecto.

$$R \operatorname{sen} a = Ra \cdot \frac{\operatorname{sen} a}{a} = a_1 \frac{\operatorname{sen} a}{a},$$

puesto que, siendo $a = \frac{a_1}{R}$, es $Ra = a_1$; luego

$$\lim R \operatorname{sen} a = a_1 \lim \frac{\operatorname{sen} a}{a}:$$

mas, creciendo R indefinidamente y disminuyendo por consiguiente a indefinidamente, $\lim \frac{\operatorname{sen} a}{a} = 1$ (127); luego

$$\lim R \operatorname{sen} a = a_1 \times 1 = a_1.$$

Si por la condicion $\cos a = 1$ resulta una identidad numérica, se evitará este resultado, reemplazando, en primer lugar, en la ecuacion esférica propuesta $\cos a$ por su igual $1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}a$, y recurriendo despues al lema anterior.

Ejemplos. Hallar la fórmula de los triángulos rectilíneos, correspondiente á la de los triángnlos esféricos.

1.° $\quad \cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$

Si desde luego pasamos al límite, haciendo en esta ecuacion $\cos a = 1$, $\cos b = 1$, $\cos c = 1$, $\operatorname{sen} b = 0$, $\operatorname{sen} c = 0$, y sustituyendo A_1 en vez de A, resulta la identidad $1 = 1$ que no nos dice nada. Para evitar este resultado, reemplacemos $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, por sus iguales $1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}a$, $1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}b$, $1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}c$, y la ecuacion dada será

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}a = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}b + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}c - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}b \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

la cual, haciendo $\operatorname{sen} \frac{1}{2}a = 0$, $\operatorname{sen} \frac{1}{2}b = 0$, $\operatorname{sen} \frac{1}{2}c = 0$, $\operatorname{sen} b = 0$, $\operatorname{sen} c = 0$ y reemplazando A por A_1, se trasforma todavía en $0 = 0$. Pero si multiplicamos dicha ecuacion por R^2, la misma será

$$(R \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a)^2 = (R \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}b)^2 + (R \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}C)^2 -$$

$$\frac{2}{R^2} (R \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}b)^2 (R \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}c)^2 - \tfrac{1}{2} R \operatorname{sen} b\, R \operatorname{sen} c \cos A;$$

y ésta en el caso del límite, será

$$\tfrac{1}{4}a_1^2 = \tfrac{1}{4}b_1^2 + \tfrac{1}{4}c_1^2 - \tfrac{1}{2}b_1 c_1 \cos A_1,$$

ó (suprimiendo los índices inútiles ya, pues es indiferente en último resultado, que á los lados del triángulo se les llame a_1, b_1, c_1, ó a, b, c, y á los ángulos del mismo triángulo se les llame A_1, B_1, C_1 ó A, B, C)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

2.° $$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}.$$

Pasando desde luego al límite, resulta $0 = 0$; pero si multiplicamos ántes los dos términos del primer quebrado por R, dicha ecuacion será

$$\frac{R \text{ sen } a}{R \text{ sen } b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B'}$$

y en el límite será, suprimiendo los índices,

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}.$$

3.° $$\cot a \text{ sen } b = \cos b \cos C + \text{sen } C \cot A.$$

Escribiremos esta ecuacion, en atencion á que en ella entra la cotangente de un lado, de este otro modo:

$$\cos a \text{ sen } b = \text{sen } a \cos b \cos C + \text{sen } a \text{ sen } C \cot A;$$

y pasando al límite, resulta $0 = 0$. Mas si multiplicamos por R los dos miembros de la ecuacion dada, ésta será

$$\cos a \,.\, R \text{ sen } b = R \text{ sen } a \,.\, \cos b \cos C + R \text{ sen } a \text{ sen } C \cot A;$$

y pasando ahora al límite, resulta

$$1 \,.\, b_1 = a_1 \,.\, 1 \,.\, \cos C_1 + a_1 \text{ sen } C_1 \cot A_1,$$

que suprimiendo los índices se trasforma en

$$b = a \frac{\text{sen } (A + C)}{\text{sen } A}.$$

4.° $$\cos A = -\cos B \cos C + \text{sen } B \text{ sen } C \cos a.$$

Pasando al límite, es decir, haciendo $\cos a = 1$, se tendrá, suprimiendo los índices de los ángulos,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \text{sen } B \text{ sen } C,$$

ó $$\cos A = -\cos (B + C).$$

5.° $$\frac{\text{sen } \frac{1}{2}(a + b)}{\text{sen } \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\text{sen } \frac{1}{2} C}.$$

En el límite $\text{sen } \frac{1}{2}(a + b) = 0$, $\text{sen } \frac{1}{2} c = 0$, y por consiguiente resulta $0 = 0$; pero si multiplicamos los dos términos del primer quebrado por R, la ecuacion propuesta será

$$\frac{R \text{ sen } \frac{1}{2}(a + b)}{R \text{ sen } \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\text{sen } \frac{1}{2} C};$$

y en el límite, suprimiendo los índices

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\text{sen } \frac{1}{2} C}.$$

6.° $$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Pasando al límite desde luego, resulta $0 = 0$; pero si escribimos la ecuacion de este otro modo

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{R \operatorname{sen}(p-b) \,.\, R \operatorname{sen}(p-c)}{R \operatorname{sen} b \,.\, R \operatorname{sen} c},$$

será en el límite, suprimiendo los índices

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}.$$

Nota. Obsérvese que, al pasar de una fórmula esférica á su correspondiente rectilínea, los ángulos entran en las fórmulas rectilíneas del mismo modo que en sus correspondientes esféricas; y así queda demostrado lo que prometimos en la nota (**) de la página 108.

CAPÍTULO VIII.

Resolucion de los triángulos rectilíneos y esféricos, cuando en vez de uno, dos ó tres elementos del triángulo se dan una, dos ó tres combinaciones de dichos elementos.

131. En la Trigonometría rectilínea dedujimos de las tres ecuaciones

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad [1],$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \qquad [2],$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \qquad [3],$$

las

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} \qquad [4],$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} \qquad [5],$$

y ahora vamos á deducir de las mismas ecuaciones [1], [2] y [3] la que liga á los tres ángulos de un triángulo rectilíneo.

Un triángulo puede tener sus tres ángulos desiguales, dos iguales ó los tres iguales: en todo caso existen por lo ménos, en un triángulo, dos ángulos, cada uno de los cuales es menor que la suma de los otros dos. Sea C un ángulo menor que la suma

$A + B$ de los otros dos. Sumando las dos ecuaciones [1] y [2], resulta

$$c = a \cos B + b \cos A;$$

y reemplazando a y b por sus valores $\frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$, $\frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$, tendremos

$$c = \frac{c \operatorname{sen} A \cos B}{\operatorname{sen} C} + \frac{c \operatorname{sen} B \cos A}{\operatorname{sen} C},$$

ó bien

$$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} (A + B).$$

Siendo todo ángulo menor que 2 rectos, la suma $A + B$ será menor que 4 rectos; y como sen $(A + B)$ es positivo, por ser igual á sen C, será $A + B < 2$ rectos. Teniendo senos iguales el ángulo C y el ángulo $A + B$, serán estos dos ángulos iguales ó suplementarios; más, por hipótesi, $C < A + B$; luego

$$A + B + C = 2 \text{ rectos} \qquad [6].$$

Al contrario, de las ecuaciones [4], [5] y [6] dedujimos (*Página* 58) las [1], [2] y [3]; y de unas y otras, dedujimos despues varias ecuaciones. Por consiguiente, tomando tres cualesquiera de las ecuaciones halladas en la Trigonometría rectilínea, que sean distintas (*Alg.*, 39), podremos deducir de ella todas las demas; siendo estas por lo tanto consecuencias de las tres primeras.

Igualmente, si tomamos tres ecuaciones esféricas que sean distintas, podrán deducirse de ellas todas las demas de la Trigonometría esférica.

132. Si en vez de conocer tres elementos de un triángulo rectilíneo ó esférico (entre los cuales hay por lo ménos un lado si el triángulo es rectilíneo), se conocen dos elementos y una combinacion entre dos ó más elementos incógnitos, la cual dé una ecuacion diferente de las trigonométricas, esta ecuacion y tres trigonométricas distintas, rectilíneas ó esféricas, segun que el triángulo sea rectilíneo ó esférico, compondrán cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, y por lo tanto el problema de resolucion del triángulo será algébricamente determinado (*).

Si se conocen un elemento y dos combinaciones entre tres

(*) Decimos que un problema es *algébricamente determinado* cuando, planteado dicho problema, resultan tantas ecuaciones como incógnitas. Si estas ecuaciones tienen una sola solucion, es decir, si cada una de las incógnitas tienen un solo valor real y finito, el problema será determinado; pero no lo será si dichas ecuaciones tienen dos ó más soluciones, ó si no tienen ninguna.

ó más elementos incógnitos (*), las cuales den dos ecuaciones distintas entre sí y diferentes de las trigonométricas, estas dos ecuaciones y tres trigonométricas distintas, de la misma naturaleza que el triángulo, compondrán cinco ecuaciones con cinco incógnitas, y el problema será algébricamente determinado.

Por último, si sólo se dan tres combinaciones ó tres ecuaciones distintas entre sí y diferentes de las trigonométricas, estas tres ecuaciones y tres trigonométricas distintas, de la misma naturaleza que el triángulo, compondrán seis ecuaciones con seis incógnitas, y el problema será tambien algébricamente determinado.

Vamos á explanar la resolucion de estas tres especies de problemas.

1.ª Se dan dos elementos y una combinacion entre los elementos incógnitos, ó sea una ecuacion diferente de las trigonométricas.

La combinacion dada puede contener dos, tres ó los cuatro elementos incógnitos.

Si contiene dos elementos incógnitos, la ecuacion correspondiente á dicha combinacion y la trigonométrica que contenga los dos elementos conocidos y los dos incógnitos nos darán estos dos elementos: los otros dos podrán deducirse de las otras dos ecuaciones trigonométricas, que con la empleada ya forman el sistema de las tres trigonométricas distintas.

Si la combinacion dada contiene tres elementos incógnitos, la ecuacion que da esta combinacion y dos trigonométricas en que entren los dos elementos conocidos y los tres incógnitos, nos darán estos tres elementos.

Si la combinacion dada contiene los cuatro elementos incógnitos, la ecuacion correspondiente á esta combinacion y un sistema de tres ecuaciones trigonométricas, rectilíneas ó esféricas, segun que el triángulo sea rectilíneo ó esférico, nos darán las cuatro incógnitas.

2.ª Se dan un elemento y dos combinaciones entre los elementos incógnitos.

Estas dos combinaciones pueden contener tres, cuatro ó los cinco elementos incógnitos.

Si contienen tres elementos incógnitos, las dos ecuaciones correspondientes á las dos combinaciones y la trigonométrica que contenga al elemento conocido y á los tres incógnitos, nos darán estos tres elementos.

(*) Si en las dos combinaciones no entraran más que dos elementos incógnitos, de las dos ecuaciones correspondientes á estas combinaciones podrian deducirse los dos elementos incógnitos; y entonces conoceriamos tres elementos; y el problema de resolucion del triángulo sería el ordinario.

Si las dos combinaciones dadas contienen cuatro elementos incógnitos, las dos ecuaciones correspondientes á dichas dos combinaciones y dos trigonométricas en que entren el elemento conocido y los cuatro incógnitos, nos darán estos cuatro elementos.

Si las dos combinaciones dadas contienen los cinco elementos incógnitos, las dos ecuaciones correspondientes á dichas dos combinaciones y tres trigonométricas distintas nos darán las cinco incógnitas.

3.ª Se dan tres combinaciones entre los elementos del triángulo.

Las tres ecuaciones correspondientes á estas combinaciones y un sistema de tres ecuaciones distintas, de la misma naturaleza que el triángulo, nos darán las seis incógnitas.

Tal es el método general, fijado por nosotros, de resolucion del género de problemas que consideramos en este capítulo.

Observaremos ahora que en los problemas de la primera especie basta el conocimiento de uno de los elementos incógnitos para que se conozcan tres elementos, y el resto de la resolucion se reduzca por lo tanto al caso ordinario; que en los problemas de la segunda especie basta para lo mismo conocer dos de los elementos incógnitos, y tres en los de la tercera especie, no hay, pues, necesidad de escribir las cuatro ecuaciones en los problemas de la primera especie, las cinco en los de la segunda, ni las seis en los de la tercera, sino el menor número que sea suficiente para hallar un elemento en los problemas de la primera especie, dos en los de la segunda y tres en los de la tercera.

Como las combinaciones que ordinariamente se dan son la suma, la diferencia, el producto, etc., de algunos elementos incógnitos, y como hay varias ecuaciones trigonométricas en que entran dichas combinaciones (*), estas serán las ecuaciones que muchas veces convendrá preferir, especialmente en los problemas esféricos, por causa de la gran dificultad de la eliminacion.

Problemas.

1.° *Conociendo un ángulo* A, *su lado opuesto* a *y la suma* $b + c = s$ *de los otros dos lados, resolver el triángulo rectilíneo ó esférico.*

En este problema se dan dos elementos A y a y una combinacion entre los dos elementos incógnitos b y c.

(*) Tales son: el (Corolario 49), las fórmulas de la nota 1.ª (53, 1.er *caso*), la (53, 3.er *caso*), y sus correspondientes en la *Trigonometría esférica*.

Triángulo rectilíneo. La ecuacion

$$b+c=s$$

y la

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

que liga los dos elementos conocidos y los dos incógnitos, nos darán estos dos elementos.

Pudiéramos eliminar entre estas dos ecuaciones una de las dos incógnitas b ó c; pero preferimos la marcha siguiente.

Advertiremos, ante todas cosas, que como b y c entran simétricamente en estas dos ecuaciones, supondremos $b>c$, y por consiguiente $B>C$.

Reemplazando en la última ecuacion $\cos A$ por su igual $1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A$, y en seguida $4bc$ por su igual $(b+c)^2-(b-c)^2$, dicha ecuacion será

$$a^2=(b-c)^2\cos^2\tfrac{1}{2}A+(b+c)^2\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}A,$$

ó bien

$$a^2=(b-c)^2\cos^2\tfrac{1}{2}A+s^2\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}A,$$

de donde

$$b-c=\frac{\sqrt{a^2-s^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A}}{\cos\frac{1}{2}A}.$$

Vamos á trasformar esta expresion con otra mejor dispuesta para el cálculo. Varios son los medios de que podemos valernos para esto: el siguiente es quizá el más ventajoso.

Escribamos el binomio $a^2-s^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A$ de este otro modo:

$$a^2\left(1-\frac{s^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A}{a^2}\right).$$

Como dicho binomio es positivo, puesto que el radical es real, será $\dfrac{s\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}{a}<1$: podemos, pues, establecer la ecuacion

$$\frac{s\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}{a}=\cos\varphi \qquad [1];$$

y será por consiguiente

$$b-c=\frac{a\operatorname{sen}\varphi}{\cos\frac{1}{2}A}.$$

Hallando el valor del ángulo φ por la ecuacion [1], se calculará en seguida fácilmente el valor de $b-c$.

Conocemos, pues, la suma y la diferencia de los dos lados b y c, y por tanto quedan conocidos estos dos lados.

Tenemos ya conocidos cuatro elementos del triángulo; los otros dos pueden hallarse por el método ordinario.

Otra resolucion. Tenemos (*Pág.* 67)

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A},$$

de donde

$$\cos\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{s\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}{a}.$$

Esta ecuacion nos da la diferencia $B-C$; y como se conoce la suma $B+C$, quedan conocidos estos dos ángulos.

Triángulo esférico. Tenemos que deducir de las dos ecuaciones

$$b+c=s,$$

$$\cos a=\cos b\cos c+\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\cos A,$$

las dos incógnitas b y c. Para esto, pongamos en la última ecuacion en vez de $\cos A$ su igual $1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A$, y en seguida en vez de $-2\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c$ su igual $\cos(b+c)-\cos(b-c)$, y dicha ecuacion será

$$\cos a=\cos(b-c)\cos^2\tfrac{1}{2}A+\cos(b+c)\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}A,$$

ó bien

$$\cos a=\cos(b-c)\cos^2\tfrac{1}{2}A+\cos s\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}A,$$

de donde

$$\cos(b-c)=\frac{\cos a+\cos s\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A}{\cos^2\frac{1}{2}A}\qquad [K].$$

Puede trasformarse este numerador en producto de varios modos. El siguiente es notable.

Llamemos N á dicho numerador, y tendremos evidentemente

$$N=\frac{\cos a}{\operatorname{sen} s}\operatorname{sen} s-\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}A\,.\cos s,$$

y estaremos en el caso (32). Por lo tanto

$$N=\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}A\left(\frac{\cos a}{\operatorname{sen} s\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A}\operatorname{sen} s-\cos s\right);$$

y haciendo

$$\frac{\cos a}{\operatorname{sen} s\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A}=\cot\varphi,\quad \text{ó}\quad \frac{\operatorname{sen} s\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A}{\cos a}=\operatorname{tg}\varphi\qquad [1],$$

será

$$N=\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A\operatorname{sen}(s-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi};$$

luego

$$\cos(b-c)=\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A\,.\,\frac{\operatorname{sen}(s-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}\qquad [2].$$

Si se examina con cuidado el trabajo que exige el cálculo de $b - c$ por las dos fórmulas [1] y [2], se verá que no es menor que el que exige la fórmula [K], y esto es lo que sucede ordinariamente con las trasformaciones en que hay que introducir un ángulo auxiliar. Ni áun la trasformacion del ejemplo anterior presenta ventaja importante sobre la fórmula no trasformada. Ademas el cálculo por las fórmulas no trasformadas tiene la ventaja de no tener que recordar ó que hallar las fórmulas trasformadas.

Conociendo $b + c$ y $b - c$, quedan conocidos estos dos lados.

Otra resolucion. Las analogías 1.ª y 4.ª de Delambre,

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A},$$

ó bien

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}s}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}s}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A},$$

nos dan $\frac{1}{2}(B - C)$ y $\frac{1}{2}(B + C)$, y por tanto quedan conocidos los dos ángulos B y C.

Nota 1.ª Si el ángulo dado A es recto, el problema será *conociendo la hipotenusa y la suma de los catetos, resolver el triángulo.*

Las fórmulas correspondientes se obtendrán haciendo en las fórmulas halladas $A = 90°$; y podrán obtenerse directamente, si se quiere, y con mayor facilidad que en el caso general.

Nota 2.ª Si en vez de la suma $b + c$ se diera la diferencia $b - c$, se resolveria el problema por medios semejantes á los que acabamos de emplear.

2.º *Dados un ángulo* A, *un lado* b *adyacente á este ángulo y la suma* a + c = s *de los otros dos lados, resolver el triángulo rectilíneo ó esférico.*

Se dan dos elementos A y b y una combinacion entre los dos incógnitos a y c.

Triángulo rectilíneo. Las ecuaciones

$$a + c = s,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

de las que la segunda contiene los dos elementos conocidos A y b y los dos incógnitos a y c, nos darán estos dos elementos.

Eliminando la a, resulta

$$s^2 - 2cs = b^2 - 2bc \cos A,$$

de donde

$$c = \frac{s^2 - b^2}{2(s - b\cos A)} = \frac{(s+b)(s-b)}{2(s - b\cos a)}.$$

Conociendo el lado c, conoceremos ya tres elementos del triángulo, y por tanto podrá continuarse su resolucion por el método ordinario.

Otra resolucion. Tenemos

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)},$$

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}C = \frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)},$$

luego

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C = \frac{p-b}{p} \ (*),$$

de donde

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C = \frac{p-b}{p \operatorname{tg} \frac{1}{2}A} = \frac{2p - 2b}{2p \operatorname{tg} \frac{1}{2}A} = \frac{s-b}{(s+b)\operatorname{tg} \frac{1}{2}A}.$$

Conociendo el ángulo C, conoceremos ya tres elementos.

Triángulo esférico. Eliminando la a entre las ecuaciones

$$a + c = s,$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

resulta

$$\operatorname{tg} c = \frac{\cos b - \cos s}{\operatorname{sen} s - \operatorname{sen} b \cos A} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s+b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-b)}{\operatorname{sen} s - \operatorname{sen} b \cos A}.$$

La trasformacion de este denominador en producto hace más pesado el cálculo del lado c.

Otra resolucion. Tenemos

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)},$$

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}C = \frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)};$$

luego

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C = \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p},$$

(*) Obsérvese que en esta fórmula el lado b es el adyacente á los ángulos A y C.

de donde

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C = \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p \operatorname{tg} \frac{1}{2}A} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(s+b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}A}.$$

NOTA 1.ª Si el ángulo dado A fuese recto, el problema sería: *dados un cateto y la suma de la hipotenusa y el otro cateto, resolver el triángulo.*

Las fórmulas correspondientes se deducirán de las que acabamos de hallar, haciendo en éstas $A = 90°$; y podrán hallarse directamente.

NOTA 2.ª Si en lugar de la suma $a + c$ se diera la diferencia $a - c$, se resolveria el problema por medios semejantes á los que acabamos de emplear.

3.° *Dados los lados* a *y* b *y la diferencia* A — B = D *de los ángulos opuestos á estos lados, resolver el triángulo rectilíneo ó esférico.*

Se dan dos elementos y una combinacion entre dos elementos incógnitos.

Triángulo rectilíneo. Las dos ecuaciones

$$A - B = D,$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B},$$

de las que la 2.ª contiene los dos elementos dados a y b y los dos incógnitos A y B, nos darán estos dos elementos.

Eliminando la incógnita A, será

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(B+D)} = \frac{b}{\operatorname{sen} B},$$

de donde

$$\operatorname{tg} B = \frac{b \operatorname{sen} D}{a - b \cos D}.$$

Otra resolucion. Tenemos

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} D},$$

ecuacion que nos dará $A + B$; y como conocemos $A - B$, quedarán conocidos estos dos ángulos.

Triángulo esférico. Tenemos

$$A - B = D,$$

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B},$$

y eliminando la incógnita A, será

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen}(B+D)}{\operatorname{sen} B},$$

de donde

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b \cos D}.$$

Nada se adelanta trasformando este denominador en producto.

Otra resolucion. Tenemos

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)},$$

ecuacion que nos dará $A + B$ conociendo $A - B$, y al contrario.

4.° *Conociendo un ángulo* A, *su lado opuesto* a *y la suma* B + C = S *de los otros dos ángulos, resolver el triángulo.*

Se dan dos elementos A y a, y una combinacion entre los dos incógnitos B y C; y como estos entran simétricamente en la combinacion dada, supondremos que el mayor de los dos es B.

Triángulo rectilíneo. La ecuacion

$$B + C = S,$$

ó

$$B + C = 180° - A$$

es trigonométrica; luego, en este problema sólo conocemos un ángulo y su lado opuesto, y por tanto dicho problema es indeterminado.

Triángulo esférico. La ecuacion

$$B + C = S$$

no es trigonométrica, pues en los triángulos esféricos no es constante la suma de sus tres ángulos.

Esta ecuacion y la

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a,$$

que contiene los datos A y a y las incógnitas B y C, nos darán los valores de estas dos incógnitas.

Pudiéramos con este objeto, seguir la eliminacion natural; pero preferimos la marcha siguiente.

Reemplacemos en la última ecuacion $\cos a$ por su igual $1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a$, y $2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$ por su igual $\cos(B - C) - \cos(B + C)$; y dicha ecuacion será

$$\cos A = -\cos(B + C) \cos^2 \tfrac{1}{2} a - \cos(B - C) \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a,$$

de donde

$$\cos(B - C) = -\frac{\cos A + \cos S \cos^2 \frac{1}{2} a}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a}.$$

Fácil es trasformar este numerador en producto por medio de un ángulo auxiliar; pero esta trasformacion no abrevia el cálculo.

Conociendo $B - C$ y $B + C$, quedan conocidos B y C.

Otra resolucion. Las analogías 3.ª y 4.ª de Delambre

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}A}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}S}{\cos\frac{1}{2}A},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a}=\frac{\cos\frac{1}{2}S}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}$$

nos dan $\frac{1}{2}(b-c)$ y $\frac{1}{2}(b+c)$, y por consiguiente quedan conocidos los lados b y c.

NOTA 1.ª Si el ángulo $A=90°$, el problema será: *conociendo la hipotenusa y la suma de los ángulos oblicuos, resolver el triángulo.*

Las fórmulas correspondientes á este caso podrán hallarse directamente.

NOTA 2.ª Si en vez de la suma $B+C$ se diera la diferencia $B-C$, se resolveria el problema por el mismo estilo.

5.° *Conociendo dos ángulos* A *y* B *y el perímetro* a + b + c = 2p, *resolver el triángulo.*

Se dan dos elementos y una combinacion que contiene tres elementos incógnitos.

Triángulo rectilíneo. Conociendo los ángulos A y B, se conoce tambien el C.

Las ecuaciones

$$a+b+c=2p,$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B},$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

(de las que las dos últimas contienen los elementos conocidos A, B y C y los incógnitos a, b y c) nos darán estos tres elementos: pues eliminando entre las tres ecuaciones las incógnitas b y c, resulta la ecuacion

$$a+\frac{a\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A}+\frac{a\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A}=2p,$$

de donde

$$a=\frac{2p\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C};$$

y como (29)

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C=4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C,$$

será

$$a=\frac{p\operatorname{sen}A}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}=\frac{p\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C},$$

y por consiguiente

$$b = \frac{p \operatorname{sen} \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} C},$$

$$c = \frac{p \operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}.$$

Pueden hallarse estas mismas fórmulas de este otro modo. Tenemos, segun lo hemos visto en el problema 2.°,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \frac{p - c}{p},$$

de donde

$$c = p \frac{\cos \frac{1}{2}(A + B)}{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B} = \frac{p \operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}.$$

Del mismo modo se hallan las otras dos fórmulas.

Triángulo esférico. Siendo

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \frac{\operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} p},$$

será

$$\operatorname{sen}(p - c) = \operatorname{sen} p \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B,$$

ecuacion que nos dará $p - c$, y por consiguiente c; y se conocerán ya tres elementos del triángulo.

Discusion de esta fórmula.

Ya se sabe que el valor absoluto de un seno ó coseno no puede ser mayor que 1; y que si en algun caso sucede lo contrario, los datos son incompatibles, y el problema imposible. Admitiendo, pues, que la cantidad $\operatorname{sen} p \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B$, evidentemente positiva (por ser p, A y B menores que 180°), no sea mayor que 1, el arco $p - c$, cuyo seno conocemos, tendrá dos valores, el uno dado por las tablas, menor que 90°, y al cual llamaremos α, y el otro el suplemento $180° - \alpha$; y por consiguiente c tendrá los dos valores $p - \alpha$ y $p - (180° - \alpha) = p + \alpha - 180°$. Si estos dos valores de c son positivos, existirán dos triángulos que satisfarán á la cuestion; si uno solo de los valores de c es positivo, existirá un solo triángulo; y si ninguno de los dos valores de c es positivo, el problema será imposible.

6.° *Conociendo un ángulo* A, *el perímetro* a + b + c = 2p *y el área* T *del triángulo, resolver este triángulo.*

Triángulo rectilíneo. Como $T = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$, se dan en este problema un elemento A y dos combinaciones que contienen los tres elementos incógnitos a, b y c.

Las ecuaciones

$$a + b + c = 2p,$$

$$bc = \frac{2T}{\text{sen } A}$$

y la

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

(que contienen al elemento conocido A y á los tres incógnitos) nos darán estos tres elementos.

Como b y c entran simétricamente en las tres ecuaciones, supondremos que $b > c$.

Eliminando la a entre la 1.ª y 3.ª, resulta

$$p^2 - p(b + c) + bc \cos^2 \tfrac{1}{2} A = 0,$$

y reemplazando en esta ecuacion bc por su valor $\dfrac{2T}{\text{sen } A}$ que nos da la 2.ª ecuacion, tendremos

$$p^2 - p(b + c) + T \cot \tfrac{1}{2} A = 0,$$

de donde

$$b + c = p + \frac{T \cot \frac{1}{2} A}{p}.$$

Conocemos ya la suma $b + c$ y el producto bc, y por tanto estas cantidades son las raíces de la ecuacion

$$x^2 - \left(p + \frac{T \cot \frac{1}{2} A}{p}\right) x + \frac{2T}{\text{sen } A} = 0.$$

Otra resolucion. Tenemos

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{p(p-a)}{bc} = \frac{p(p-a) \text{ sen } A}{2T},$$

de donde

$$p - a = \frac{T \cot \frac{1}{2} A}{p},$$

ecuacion que nos da $p - a$, y como p es conocida, quedará conocida la a. Ahora la fórmula

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B - C)}{\text{sen } \frac{1}{2} A},$$

ó

$$\frac{2(p-a)}{a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B - C)}{\text{sen } \frac{1}{2} A}$$

nos dará $B - C$; y pues conocemos $B + C$, quedarán conocidos B y C. Conociendo el lado a y los tres ángulos, es fácil hallar b y c.

Triángulo esférico. Tenemos (*Geom.*, *teor.* 202)

$$\frac{T}{4\pi r^2}=\frac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ},$$

siendo r el radio de la esfera; ó bien

$$\frac{T}{\pi r^2}=\frac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ} \qquad [S],$$

y por tanto los datos de este problema son un ángulo A, y dos combinaciones entre los cinco elementos incógnitos a, b, c, B y C.

La ecuacion [S] nos da

$$B+C=\left(\frac{T}{\pi r^2}+1\right)180^\circ-A.$$

Conociendo el número de grados de la suma $B+C$, la 4.ª analogía de Delambre

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a}=\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A},$$

ó

$$\frac{\cos(p-\frac{1}{2}a)}{\cos\frac{1}{2}a}=\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}$$

nos da

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a=\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}-\cot p;$$

y así queda conocido el lado a.

Podemos hallar sin introducir ángulo auxiliar, otra fórmula (que nos dé el lado a) mejor dispuesta para el cálculo logarítmico. Para lo cual, invirtiendo dicha analogía, sustituyendo en vez de los cosenos los senos de los complementos, tendremos

$$\frac{\operatorname{sen}\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(90^\circ-p+\frac{a}{2}\right)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\operatorname{sen}\left(90^\circ-\frac{B+C}{2}\right)},$$

de donde sale (*Aritm.* 173 y *Trig.* 33, 1.ª)

$$\frac{\cot\frac{p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A-B-C}{4}+45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{A+B+C}{4}-45^\circ\right)},$$

ecuacion que nos dará $\frac{p-a}{2}$; y como p es conocida quedará conocido el lado a, y por consiguiente tambien la suma $b + c$. Ahora la analogía de Neper

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B + C)}{\cot \frac{1}{2} A} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\cos \frac{1}{2}(b + c)} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\cos\left(p - \frac{a}{2}\right)}$$

nos dará $\frac{1}{2}(b - c)$. Conociendo $b + c$ y $b - c$, quedan conocidos estos dos lados.

Si el triángulo es rectángulo en A, las fórmulas serán más sencillas, y podrán hallarse, si se quiere, directamente.

7.° *Dados un lado* a, *la suma* b + c = s *de los otros dos lados y la diferencia* B — C = D *de los dos ángulos opuestos á estos últimos lados, resolver el triángulo.*

Se dan un elemento a y dos combinaciones en que entran los cuatro elementos incógnitos b, c, B, y C.

Triángulo rectilíneo. Las ecuaciones

$$b + c = s,$$
$$B - C = D$$

y las dos

$$\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(B + C)},$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B + C)},$$

que contienen los cuatro elementos incógnitos, nos darán estos elementos

Eliminando entre dichas ecuaciones las tres incógnitas a, b y c, resulta

$$\cos \tfrac{1}{2}(B + C) = \frac{a \cos \frac{1}{2} D}{s},$$

fórmula que puede hallarse desde luego por la ecuacion

$$\frac{b + c}{a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B - C)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} A}, \quad \text{ó} \quad \frac{s}{a} = \frac{\cos \frac{1}{2} D}{\cos \frac{1}{2}(B + C)}.$$

Conociendo $B - C$ y $B + C$, conocemos ya tres elementos del triángulo.

Triángulo esférico. La analogía de Neper

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b + c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B - C)}{\cos \frac{1}{2}(B + C)},$$

ó

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} s}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a} = \frac{\cos \frac{1}{2} D}{\cos \frac{1}{2}(B + C)}$$

nos da

$$\cos \tfrac{1}{2}(B+C)=\frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}D}{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}s}.$$

Conocemos ya $B+C$ y $B-C$, y por consiguiente quedan conocidos estos dos ángulos.

8.° *Dados un ángulo* A *y las dos sumas* b + c = s, B + C = S, *resolver el triángulo.*

Se dan un elemento y dos combinaciones entre cuatro elementos incógnitos. Supondremos que $b > c$, y por consiguiente $B > C$.

Triángulo rectilíneo. La ecuacion

$$B+C=S \quad \text{ó} \quad B+C=180^\circ - A$$

es trigonométrica; luego sólo se dan en este problema un elemento A y una combinacion entre los dos incógnitos b y c, y por tanto el problema es indeterminado.

Triángulo esférico. El problema es determinado, porque la ecuacion $B+C=S$ no es trigonométrica.

Puesto que conocemos la suma $b+c$, vamos á hallar la diferencia $b-c$.

De la analogía de Neper

$$\frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C)}{\cot\tfrac{1}{2}A}=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(b-c)}{\cos\tfrac{1}{2}(b+c)}$$

ó

$$\frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}S}{\cot\tfrac{1}{2}A}=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(b-c)}{\cos\tfrac{1}{2}s}$$

resulta

$$\cos\tfrac{1}{2}(b-c)=\frac{\operatorname{tg}S\cos\tfrac{1}{2}s}{\cot\tfrac{1}{2}A}=\operatorname{tg}S\cos\tfrac{1}{2}s\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A,$$

ecuacion que nos da $b-c$.

Conociendo $b+c$ y $b-c$, quedan conocidos estos dos lados.

NOTA 1.ª Si $A=90^\circ$, el problema será: *dados en un triángulo rectángulo esférico la suma de los dos catetos y la de los dos ángulos oblicuos, resolver el triángulo.* Las fórmulas correspondientes se deducirán de las que acabamos de hallar, haciendo en estas $A=90^\circ$; y si se quiere, podrán obtenerse directamente.

NOTA 2.ª Si en vez de las dos sumas, se dieran $b+c$ y $B-C$ ó $b-c$ y $B+C$, se resolveria el triángulo esférico de un modo semejante.

9.° *Dados un ángulo* A *y las dos diferencias* B — C = D, b — c = d, *resolver el triángulo.*

Se dan en este problema un elemento y dos combinaciones entre cuatro incógnitas.

Triángulo rectilíneo. Las ecuaciones

$$B - C = D; \quad b - c = d; \quad B + C = 180^\circ - A; \quad \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$$

nos darán las cuatro incógnitas.

De la última resulta

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-C)},$$

ó

$$\frac{b+c}{d} = \frac{\cot \frac{1}{2} A}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} D},$$

ecuacion que nos da $b + c$; y quedan por lo tanto conocidos los dos lados b y c.

Triángulo esférico. De la analogía de Neper

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-C)}{\cot \frac{1}{2} A} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b+c)},$$

ó

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} D}{\cot \frac{1}{2} A} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} d}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b+c)}$$

resulta

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(b+c) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} d \cot \frac{1}{2} A}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} D},$$

ecuacion que nos dará $b + c$.

Como el arco $\frac{1}{2}(b+c)$ está dado por su seno, tendrá dos valores, el uno α que dan las tablas, y el otro $180^\circ - \alpha$. Tomando el primero de estos dos valores, serán $b = \alpha + \frac{d}{2}$, $c = \alpha - \frac{d}{2}$. Tomando el segundo valor $180^\circ - \alpha$, serán $b = 180^\circ - \alpha + \frac{d}{2}$, $c = 180^\circ - \alpha - \frac{d}{2}$. El problema tiene, pues, dos soluciones; y como conocemos tres elementos de cada una, podrá continuarse la resolucion por el método ordinario.

NOTA. Está dicho, y lo repetimos, que en todo caso el módulo del seno ó coseno no puede ser mayor que 1, y que, cuando sucede lo contrario, el problema es imposible.

FIN.

ÍNDICE.

TRIGONOMETRÍA.

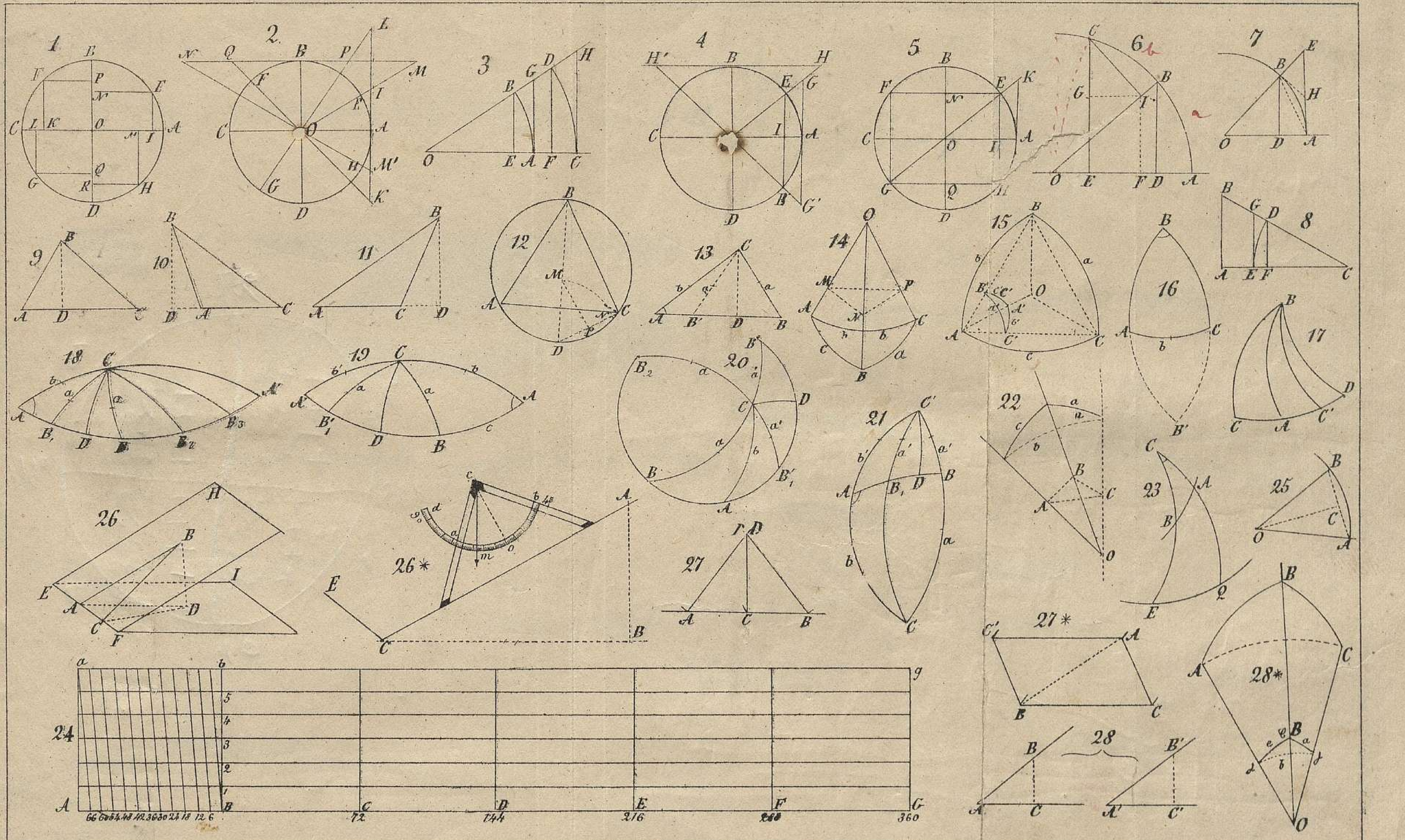
LIBRO I.—TEORÍA DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

LIBRO II.—TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

LIBRO III.—TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

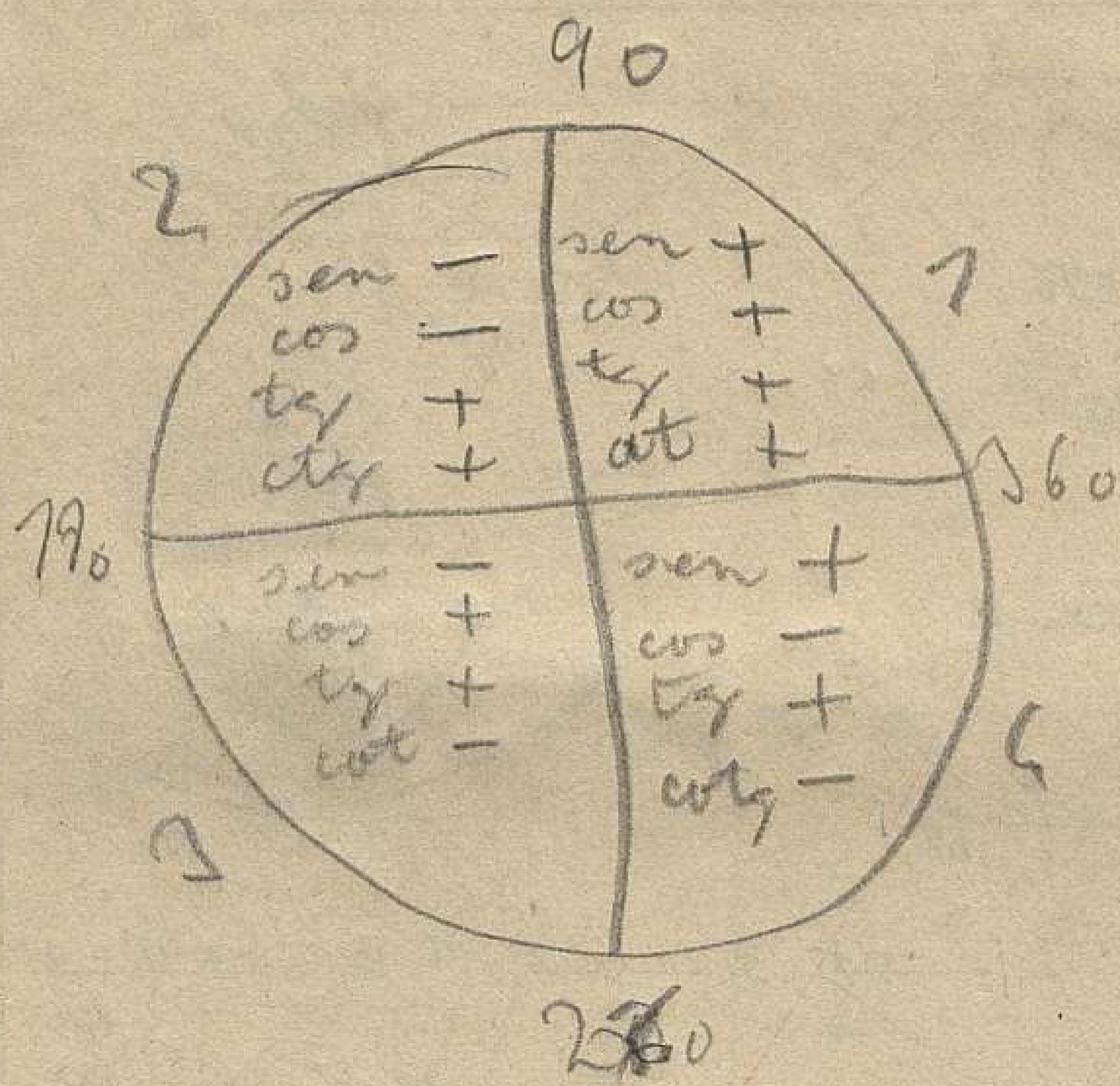
TOPOGRAFÍA.

COMPLEMENTO DE LA TRIGONOMETRÍA.

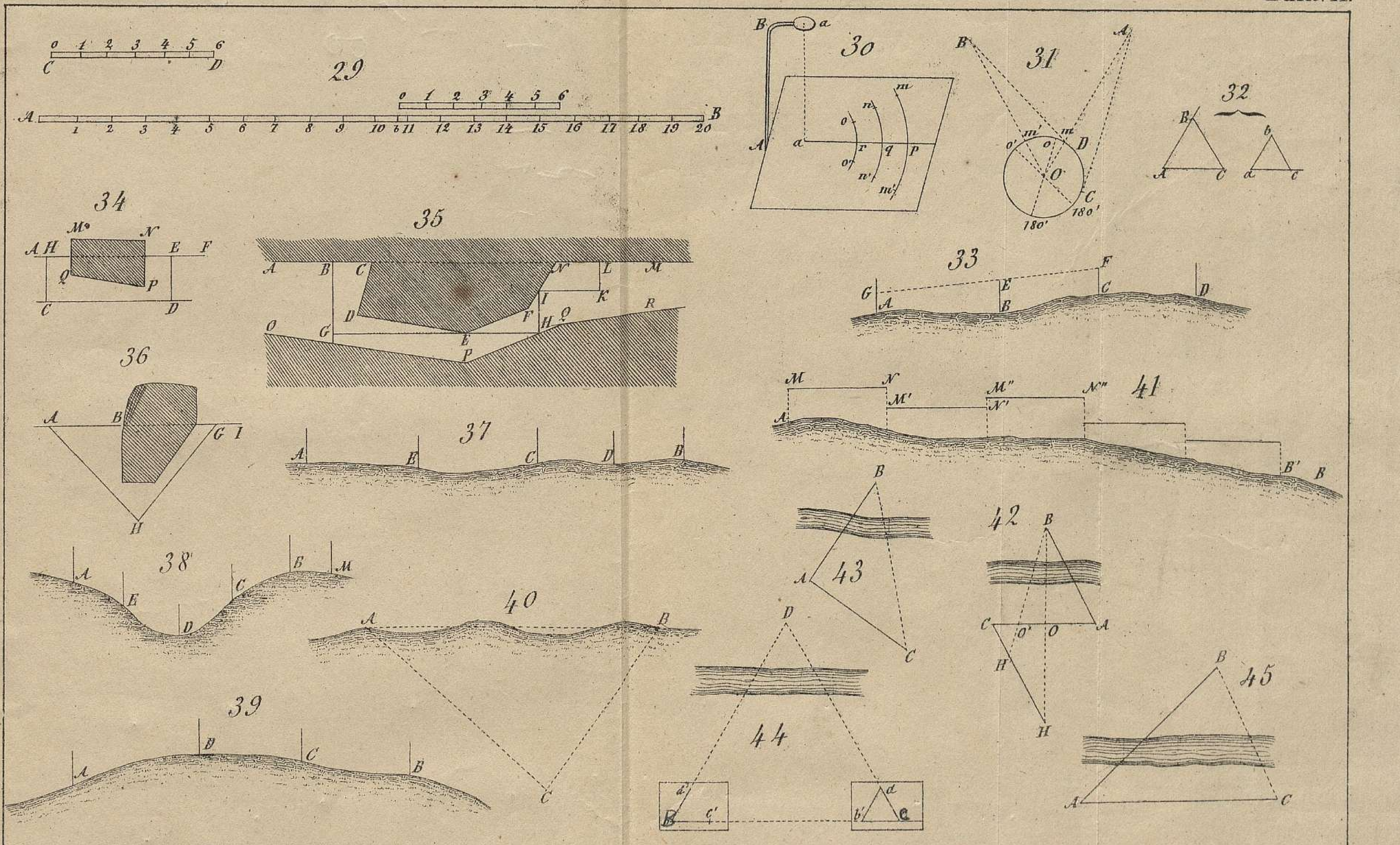


Centro litografico.

Donados, 2.


90
1
sen +
cos +
tg +
ct +
360
4
sen +
cos −
tg +
ctg −
270
3
sen −
cos +
tg +
cot −
180
2
sen −
cos −
tg +
ctg +

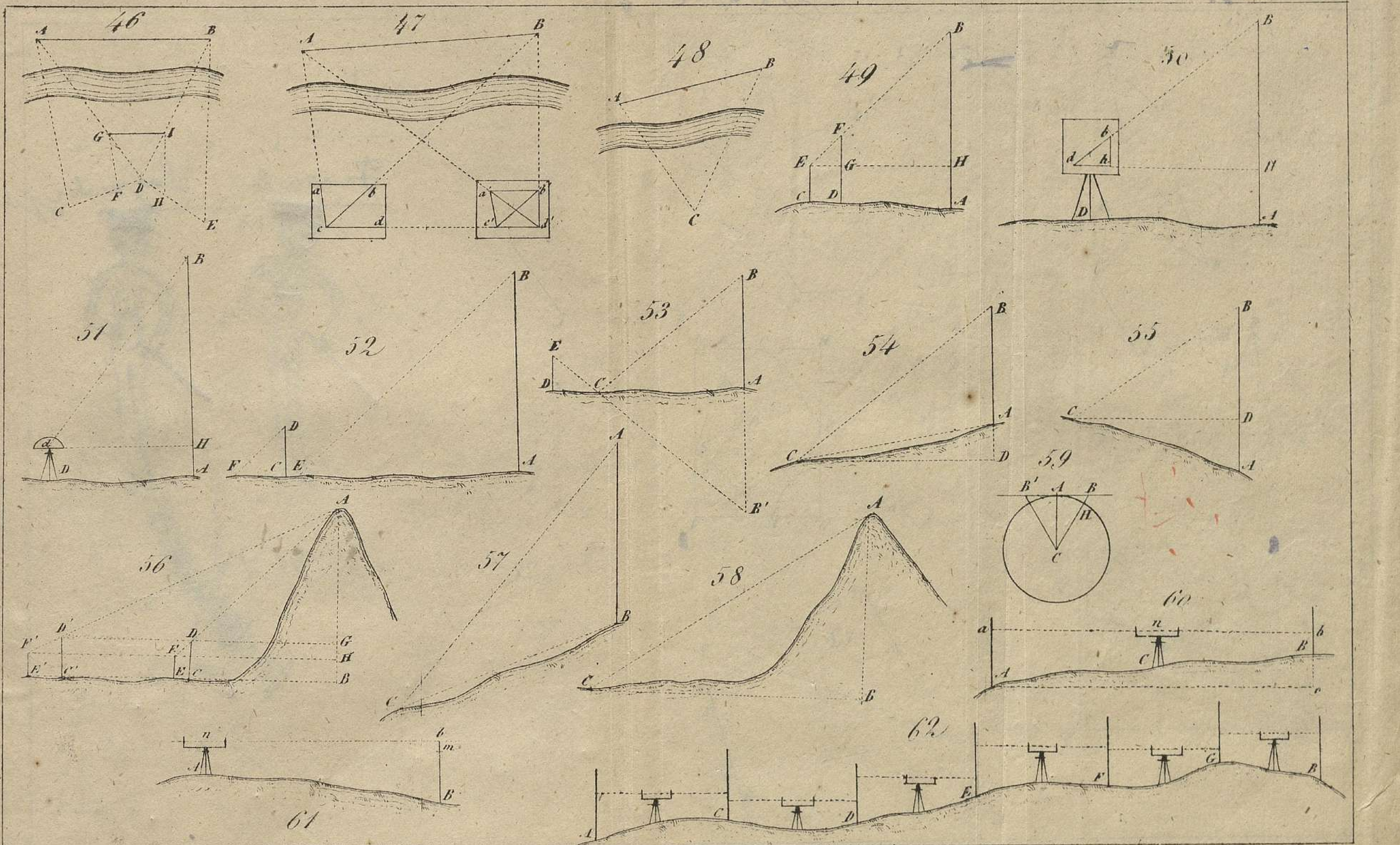
Lám. II.

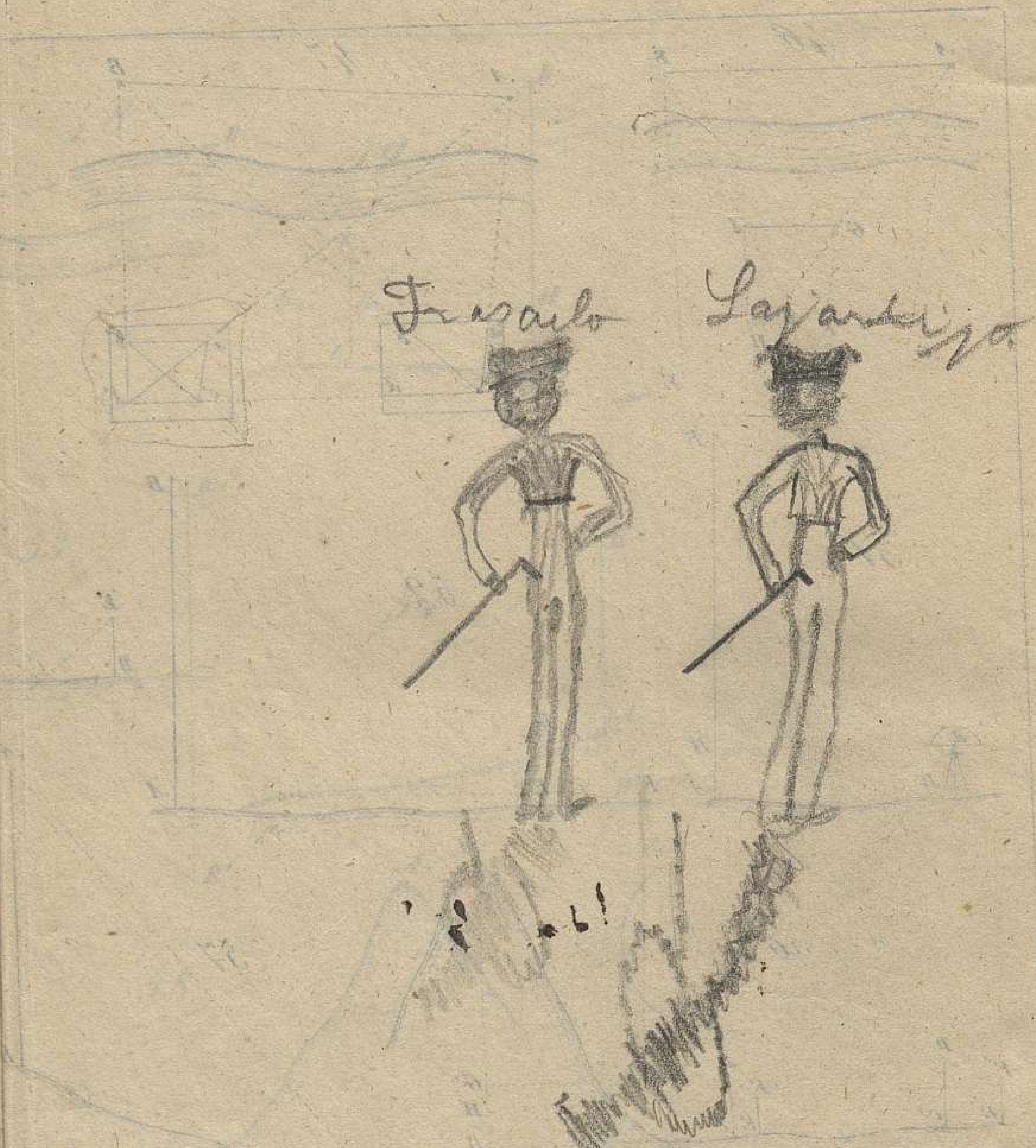


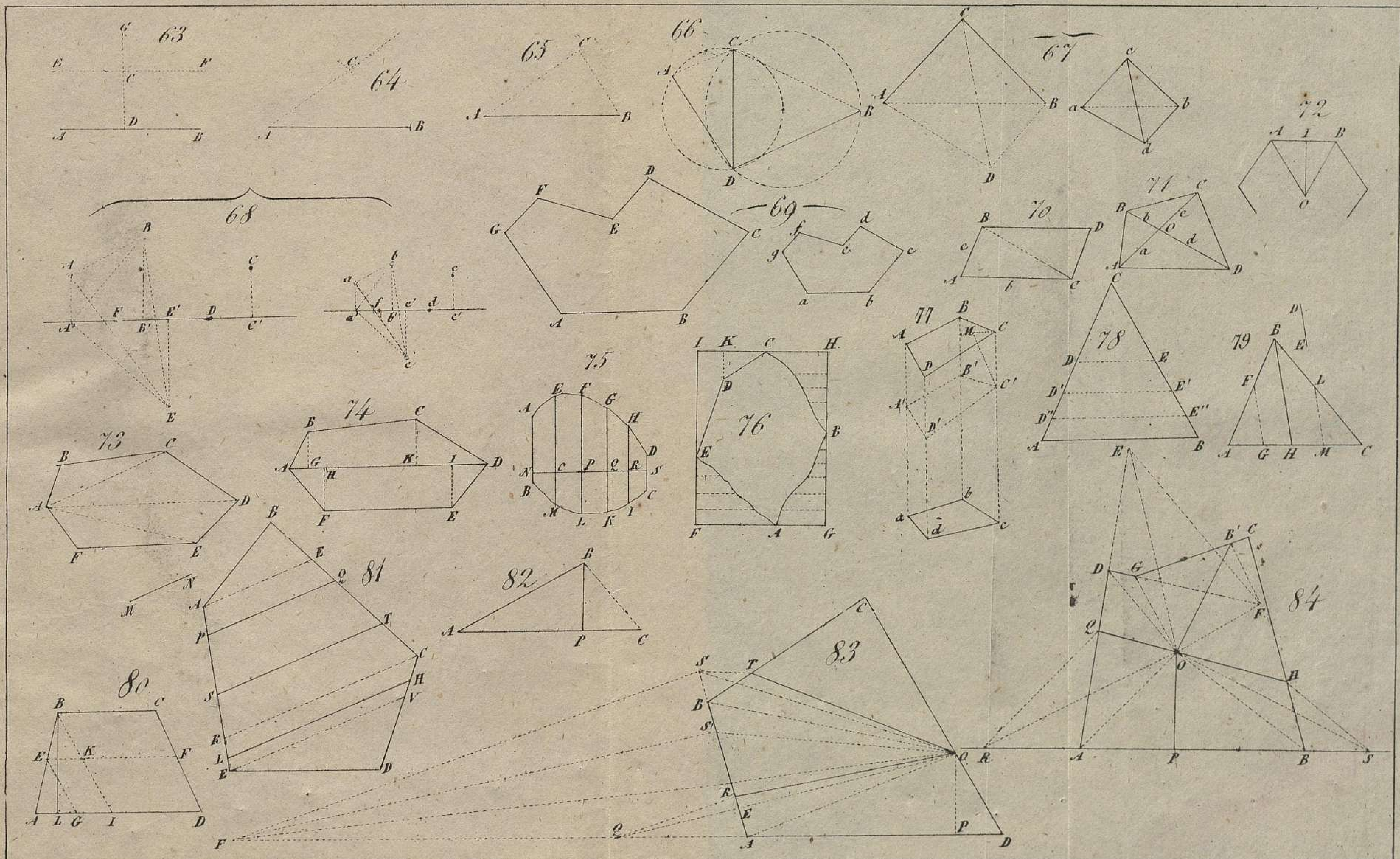
Centro litográfico

Donados 2.

Lam. 3.

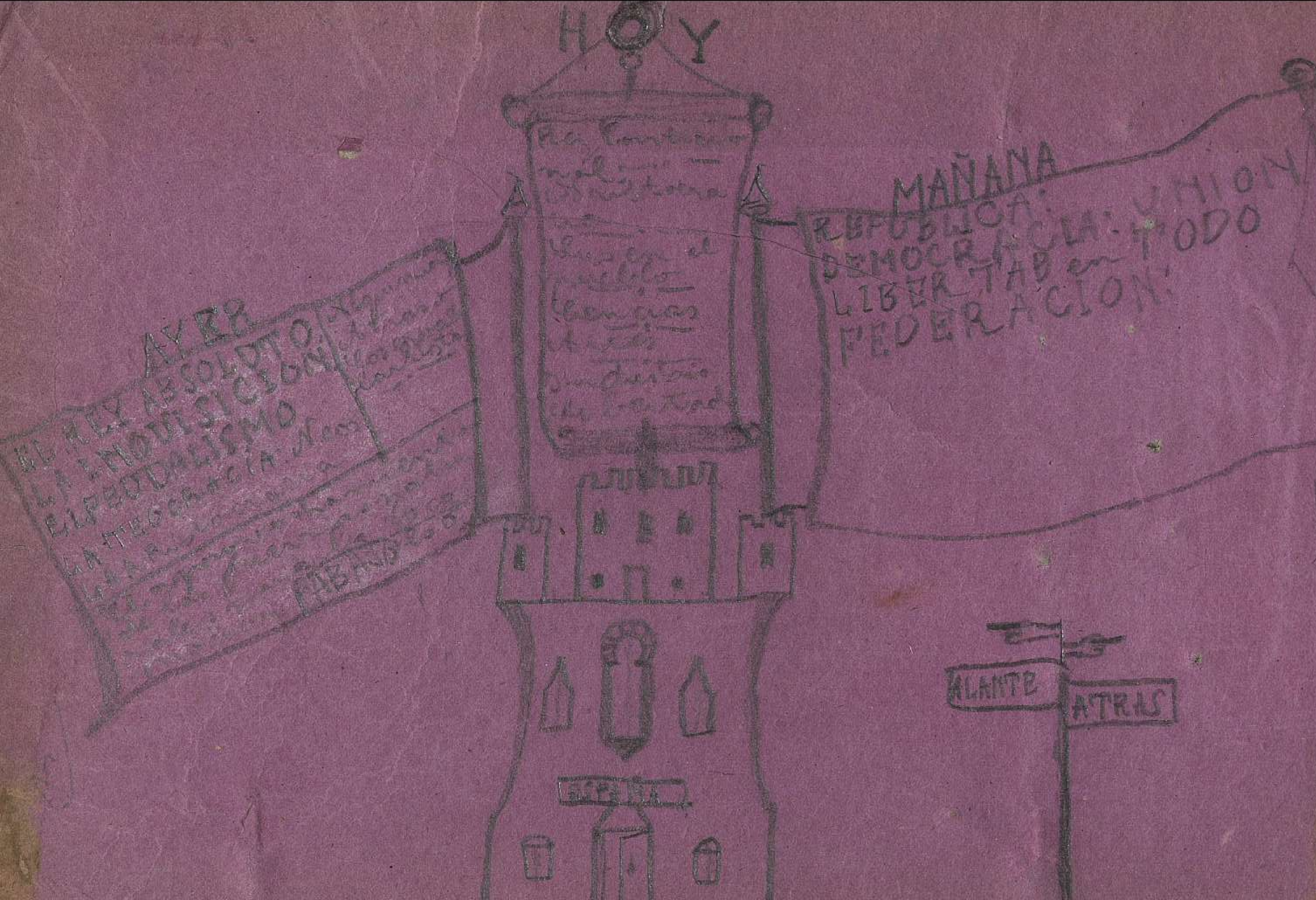






Centro Litografico

Pª Donados 2.


HOY
AYER
EL REY ABSOLUTO
LA INQUISICION
EL FEUDALISMO
LA TEOCRACIA
MAÑANA
REPUBLICA: UNION
DEMOCRACIA:
LIBERTAD en TODO
FEDERACION!
ESPAÑA
ALANTE
ATRAS