M.E.C.D. 2017

Observatorio de San Fernando
BIBLIOTECA
Núm. del Invent. 1462
Secci
Carp
Estar

Observatorio de Marina
BIBLIOTECA
Núm. 1498

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE LA ISLA

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D.2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS I.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

BIBLIOTECA
DEL
OSSERVATORIO DI S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

MECHANICA
SIVE
MOTUS
SCIENTIA ANALYTICE
EXPOSITA
AUCTORE
LEONHARDO EULERO

ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARUM MEDIOLANI ET
MATHESEOS SUBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMUS I.

BIBLIOTECA
DEL
REAL OBSERVATORIO

M.E.C.D. 2017

VIRO ILLVSTRI
ATQVE
EXCELLENTISSIMO
JOANNI ALBERTO
DE KORFF
DOMINO HAEREDITARIO PRAE-
DIORVM
RENGENHOFFIENSIVM
SERENISSIMAE
ATQVE
POTENTISSIMAE RVSSORVM
IMPERATRICIS
CAMERARIO ORDINARIO
ATQVE
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPER.
PRAEFECTO.

M.E.C.D. 2017



VIR ILLVSTRIS

Cum, quae his praeteritis annis de motu corporum partim collegi et in ordinem digessi, partim ipse sum meditatus, mandauisses Vir Illustris, *vt typis excuderentur, ea Tibi potissimum offerre atque dedicare non vereor. Tanta enim sunt*

Tua

M.E.C.D. 2017

Tua tam ad excolendas et augendas omnis generis ſcientias et artes, quam ad academiam ad ſummum felicitatis faſtigium euehendam, ſtudia et curae, vt Tibi omnes harum rerum cultores multum, academici autem plurimum deuincti eſſe debeant. Maximum propterea in posterum et felicisſimum ſucceſſum certo ſperare poſſumus, quod Augustae, Imperatrici nostrae Clementisſimae pro ſumma Eius in ſtudia propenſione placuerit Tibi potisſimum academiae ſcientiarum curam committere, Teque laborum nostrorum arbitrum atque iudicem constituere. Hoc igitur munere ita defungi decreuisti, vt ante omnia ſtatum Academiae ad inſtitutum fundationis reformares, atque in ordinem conuenientem redigeres, tum vero vt academicorum quisque tam in docendis quam excolendis ſcientiis omne ſtudium operamque impenderet, ad quae officia exequenda non ſolum Ipſe Tuo exemplo et auctoritate quemque excitas, ſed etiam ex Augustae ſumma munificentia, quicquid opus est, largiter ſuppeditas. Equidem in hoc tractatu de motu vtrique horum

M.E.C.D. 2017

officiorum, quae requiris satisfecisse mihi videor; primo enim omnia ordine ad docendum maxime idoneo disposui, atque in iis explicandis perpetuo vsus sum methodo analytica, quae synthesi in instruendo merito longe praeferri solet. Deinde vero non pauca omnino noua passim adieci, quibus hanc de motu scientiam pro viribus adauxi atque locupletaui. Hunc ergo laborem meum, quem tam docentibus quam discentibus non inutilem fore confido, vt benigne excipere digneris enixe rogo atque obsecro, meque Tuo fauori atque beneuolentiae submisse commendo

VIR ILLVSTRIS

ATQVE

EXCELLENTISSIME

Dabam Petropoli
die 1. Aug. A. 1736.

Tui obseruantissimus

Leonhardus Euler.

M.E.C.D. 2017

PRAEFATIO.

Mechanicae vox longo ab hinc temporis interuallo duplicem obtinuit ſignificationem, et hoc quidem tempore eo nomine appellantur duae ſcientiae tam ratione principiorum, quam ratione materiae inter ſe prorſus diuerſae. Mechanicae enim nomen tum ei ſcientiae tribui ſolet, quae de aequilibrio potentiarum tractat, earumque inter ſe comparatione; tum etiam ei, in qua ipſa motus natura, generatio et alteratio explicatur. Quanquam enim in hac poſteriore disciplina potentiae quoque praecipue conſiderantur, cum iis motus et generetur et immutetur; tamen tractationis ratio multum discrepat a priore ſcientia. Ad vitandam igitur omnem ambiguitatem iuuabit illam ſcientiam, quae de potentiarum aequilibrio et comparatione agit, Staticam appellaſſe, alteri vero motus ſcientiae ſoli Mechanicae nomen re-

liquis-

M.E.C.D. 2017

liquisse, quo quidem sensu hae voces iam passim sunt vsurpari solitae. Temporis praeterea ingens intercedit discrimen inter has disciplinas: Statica enim iam ante Archimedis tempora excoli coepit, Mechanicae vero prima demum iecit fundamenta Galilaeus, dum grauium descensum inuestigauit. His vero posterioribus temporibus post inuentam Analysin infinitorum tanta vtraque scientia cepit incrementa, vt quae ante tam longo temporis interuallo erant eruta, prae his propemodum euanescant. Ista vero tam multa inuenta, quibus hae scientiae ad hoc vsque tempus sunt adauctae et promotae, per tot diaria et opera sunt sparsa, vt harum rerum studioso sit difficillimum ea conquirere et peruoluere. Praeterea, quod maximam parit molestiam, alia sine omni analysi et demonstratione sunt proposita, alia nimis perplexis et more veterum concinnatis demonstrationibus sunt munita, alia vero ex alienis et minus genuinis principiis deriuata, vt nisi cum summo labore maximoque temporis dispendio cognosci et digeri nequeant. Quod quidem ad Staticam attinet, completum fere et omnibus numeris absolutum opus prodit Varignonii *duobus constans voluminibus, Gallico idiomate conscriptum. Quod etiamsi Mechanicae titulum prae se ferat, tamen totum est occupatum in*

defi-

M.E.C.D. 2017

definiendo aequilibrio potentiarum cuiusque modi corporibus applicatarum; neque ibi vix quicquam continetur, quod ad motum, eamque scientiam, quam hic Mechanicae nomine indicamus, pertineat. Celeb. Wolfius *etiam in suis Matheseos Elementis praesertim nouissimae editionis multa praeclara cum ad Staticam tum ad Mechanicam spectantia in Elementis Mechanicis exposuit, coniunctim quidem neque vllo discrimine inter has scientias facto. Praestituti autem limites, ipsaque operis ratio ipsi non permisisse videntur tum has scientias a se inuicem discernere, tum vtramque satis ampliter explicare. Quamobrem nescio an praeter* Hermanni *Phoronomiam vnquam aliud in publicum prodierit opus, in quo haec de motu scientia seorsim et tot tantisque eximiis inuentis locuplecata esset pertractata. Etenim* Hermannus *cum ipse hanc scientiam plurimis adauxit accessionibus, tum quae illo tempore aliorum industria erant detecta, simul adiecit. At cum in illo non satis magno opere praeter Mechanicam constituisset reliquas quoque affines scientias, Staticam scilicet, et Hydrostaticam vna cum Hydraulica complecti, nimis exiguum spatium pertractandae Mechanicae restabat; quo factum est, vt omnia quae ad hanc scientiam pertinent, nimis breuiter et concise proferre co-*

gere-

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

geretur. Praeterea, quod lectorem maxime distinet, omnia more veterum synthetice geometricis demonstrationibus est persecutus, atque analysin, qua ad completam harum rerum cognitionem peruenitur, celauit. Non multum dissimili quoque modo conscripta sunt Newtoni *Principia Mathematica Philosophiae, quibus haec motus scientia maxima est adepta incrementa. Sed quod omnibus scriptis, quae sine analysi sunt composita, id potissimum Mechanicis obtingit, vt Lector, etiamsi de veritate eorum, quae proferuntur, conuincatur, tamen non satis claram et distinctam eorum cognitionem assequatur, ita vt easdem quaestiones, si tantillum immutentur, proprio marte vix resoluere valeat, nisi ipse in analysin inquirat, easdemque propositiones analytica methodo euoluat. Idem omnino mihi cum* Newtoni *Principia et* Hermanni *Phoronomiam perlustrare coepissem, vsu venit, vt quamuis plurium problematum solutiones satis percepisse mihi viderer, tamen parum tantum discrepantia problemata resoluere* [illegible] *non potuerim. Illo igitur iam tempore, quantum potui, conatus sum analysin ex synthetica illa methodo elicere, easdemque propositiones ad meam vtilitatem analytice pertractare, quo negotio insigne cognitionis meae augmentum percepi. Simili*

M.E.C.D. 2017

mili deinde modo alia quoque passim dispersa ad hanc scientiam spectantia scripta sum persecutus, quae omnia ad meum vsum methodo plana et aequabili exposui, atque in ordinem idoneum digessi. Hoc in negotio occupatus non solum in plurimas antea nondum tractatas incidi quaestiones, quas feliciter solutas dedi: sed etiam complures peculiares methodos sum adeptus, quibus tam mechanica quam ipsa analysis non parum augmenti accepisse videantur. Hinc igitur natus est iste de motu tractatus, in quo cum ea, quae in aliorum scriptis de motu corporum inueni, tum quae ipse sum meditatus, methodo analytica et commodo ordine exposui. Operis autem partitionem tum ab ipso corporum, quae mouentur, discrimine, tum ab eorum statu vel libero vel non libero petii. Ipsa corporum indoles mihi hanc suppeditauit diuisionem, vt primo corporum infinite paruorum et quasi punctorum motum inuestigarem, tum vero ad corpora finitae magnitudinis eaque vel rigida vel flexibilia vel ex partibus a se inuicem omnino dissolutis progrederer. Quemadmodum enim in Geometria, in qua dimensio corporum traditur, tractatio a punctis ordiri solet, ita etiam corporum finitae magnitudinis motus explicari non potest, nisi prius punctorum, ex quibus corpora composita concipienda

 sunt,

M.E.C.D. 2017

ſunt, motus ſit diligenter examinatus. Namque corporis finitam habentis magnitudinem motus aliter conſiderari et determinari non poteſt, niſi vt definiatur, qualem quaeque eius particula ſeu punctum habeat motum. Quocirca haec de motu punctorum tractatio eſt fundamentum et praecipua pars totius Mechanicae, cui reliquae partes omnes innituntur. Huic igitur disquiſitioni de motu punctorum duos hos priores Tomos deſtinaui, in quorum altero puncta libera in altero vero non libera ſum contemplatus. Latius autem pleraque, quae in his libris tradidi, patent quam ſola puncta, ex iisque ſaepenumero corporum finitorum motus poteſt determinari, totalis ſcilicet non vero is, quo partes ſingulae inter ſe mouentur. Ex eo enim, quod punctum in vacuo proiectum parabolam deſcribat, quoque intelligitur quaeque corpora finita ſi proiiciantur, in parabolis moueri debere, motus vero ſingularum partium lexinde non conſtat, ſed haec inquiſitio propria eſt ſequentium Librorum, in quibus corporum finitorum motus definietur. Simili quoque modo, quae Newtonus *de motu corporum a viribus centripetis ſollicitatorum demonſtrauit, de punctis tantum valent, interim vero tamen ea ad motum planetarum recte transtulit. In hoc itaque primo Tomo puncta libera examini*

ſub-

M.E.C.D. 2017

ſubiicio, atque quamnam motus alterationem quaeque potentiae ſollicitantes iis inferant, inueſtigo: liberum autem mihi eſt corpus, quando nihil impedit, quo minus corpus ea celeritate et ſecundum eam directionem, quas tum ratione motus iam inſiti, tum ratione potentiarum ſollicitantium habere debet, progrediatur. Ita planetae et in terra corpora vel delabentia vel proiecta libere moueri dicuntur, quia in motu et vim inſitam et effectum potentiae ſollicitantis ſequuntur; at corpus ſuper plano inclinato descendens, aut pendulum oscillationes peragens no libere mouetur, planum enim ſubiectum, vel pendulum altern termino fixum impedit, quominus corpus directe descendat, vto vis grauitatis poſtulat. Expono igitur Capite primo generales motus proprietates, et quae de celeritate, ſpatio et tempore tradi ſolent: atque demonſtro leges naturae vniuerſales, quas corpus liberum a nullis potentiis ſollicitatum obſeruat. Quod ſcilicet huiusmodi corpus ſi ſemel quieuerit, perpetuo in quiete perſeuerare debeat; at ſi motum habuerit, perpetuo eadem celeritate in directum progredi debeat, quarum vtraque lex ſub nomine conſeruationis ſtatus commodiſſime comprehendi poteſt. Ex quo ſequitur conſeruationem ſtatus eſſe corporum omnium proprietatem eſſentialem, atque

 omnia

M.E.C.D. 2017

omnia corpora, quatenus sunt talia, habere vim seu facultatem in statu suo perpetuo permanendi, quae nil aliud est nisi ipsa vis inertiae. Minus quidem apte vis nomen huius conseruationis causae tribuitur, quia non est homogenea cum aliis viribus proprie sic dictis, cuiusmodi est vis grauitatis, neque cum iis comparari potest; in quo errore plures et imprimis Methaphysici versari solent, vocis ambiguitate decepti. Cum ergo omne corpus natura sua in statu eodem siue quietis siue motus perseueret, externis viribus tribuendum est, si corpus hanc legem non sequatur, sed vel motu inaequabili, vel secundum lineam curuam progrediatur. Huiusmodi vero externae vires sunt potentiae, de quarum aequilibrio et comparatione in Statica est tractandum, quae, quando in corpus agunt, eius statum perturbant, id vel mouendo vel accelerando, vel retardando vel directionem mutando. In secundo igitur Capite persequor, cuiusmodi effectum quaeque potentia in punctum liberum siue quiescens siue motum exercere debeat. Hinc conficiuntur vera Mechanicae principia, ex quibus, quicquid ad motus alterationem pertinet, explicari debet; quae, cum adhuc nimis leuiter essent confirmata, ita demonstraui, vt non solum certa sed etiam necessario vera esse intelligantur. Expositis principiis, ex quibus

in-

M.E.C.D. 2017

intelligi poteſt, quemadmodum motus tum conſeruetur, tum a potentiis vel generetur vel alteretur, progredior ad ipſum motum corporum a potentiis vtcunque ſollicitatorum determinandum et examinandum. Atque primo quidem motum conſidero rectilineum tanquam determinatu facillimum, qui oritur, ſi punctum liberum ab vnica potentia vel quiescens ad motum ſollicitatur, vel iam motum in ipſa potentiae directione ſiue acceleratur, ſiue retardatur, cui disquiſitioni Capita tertium et quartum dicaui, in quorum priore motum rectilineum in vacuo, in poſteriore vero motum rectilineum in medio quomodocunque reſiſtente pertracto. Quamuis enim reſiſtentia ad potentias proprie ſic dictas reduci queat, tamen in hac tractatione conſultum viſum eſt alterationem motus a reſiſtentia ſeorſim tradere; cum vt alios, qui hac de re ſcripſerunt, ſequerer, tum etiam propter eſſentialem, quae inter potentias abſolutas et reſiſtentiam intercedit differentiam. Potentia enim abſoluta ſeu proprie ſic dicta determinatam et a motu corporis non pendentem habet directionem, atque inſuper in corpus motum aeque agit, ac in quiescens; cum contra reſiſtentiae directio ſit ſemper in ipſa corporis moti directione ſita, eiusque quantitas a celeritate corporis pendeat. Etſi vero in natura praeter reſiſtentiam, quae quadratis celeritatum eſt proportionalis, alia non obſeruetur, tamen alias etiam quasque reſiſtentias pertractaui, cum vt plurium circa motum in medio reſiſtente agitatorum problematum ſolutiones ſimul exponerem, tum vero imprimis vt plurima egregia cal-

M.E.C.D. 2017

calculi ſpecimina afferendi eſſet occaſio. In duobus denique poſtremis capitibus motus corporum curuilineos ſum contemplatus, qui oriuntur, quando potentiarum ſollicitantium directio cum corporis proiecti directione non congruit. Hoc enim caſu corpus perpetuo a recto tramite retrahitur et in linea curua moueri cogitur. In quinto quidem capite motum huiusmodi curuilineum in vacuo expoſui, in ſexto vero capite medii reſiſtentiam ſimul conſideraui. Primaria ergo problemata, quae in his capitibus continentur, in hoc verſantur, vt corporis vtcunque proiecti et a quibuscunque potentiis ſollicitati curua, in qua moueatur, determinetur, atque ſimul corporis celeritas in ſingulis curuae punctis indicetur, hocque tam in vacuo, quam in medio reſiſtente. Ex his vero primariis propoſitionibus tunc aliae ſunt natae, in quibus vel ex data curua a corpore deſcripta, vel ex data motus quadam indole tum potentiae ſollicitantes tum reſiſtentia quaeruntur. In quo negotio in id imprimis incubui, vt omnia tam a Newtono *quam ab aliis tractata hucque ſpectantia problemata complecterer, atque ſolutiones genuinas methodo analytica traderem. His igitur Tomus iſte primus abſoluitur, quem pariter ac ſequentem ita conſcripſi, vt qui in analyſi tam finitorum quam infinitorum ſatis fuerit exercitatus, is mira facilitate omnia intelligere, atque ſine vlla manuductione integrum hoc opus perlegere queat.*

CAPUT

M.E.C.D. 2017

CAPUT PRMUM

DE MOTU IN GENERE.

DEFINITIO 1.

1.

Motus est translatio corporis ex loco, quem occupabat, in alium. Quies vero est permansio corporis in eodem loco.

Corollarium 1.

2. Motus igitur et quietis ideae in alias res cadere non possunt, nisi quae locum occupant. Quare cum hoc sit corporum proprium, locum occupare, de solo corpore dici potest, quod moueatur vel quiescat.

Corollarium 2.

3. Atque haec motus quietisque idea ita est propria corpori, vt ad omnia prorsus corpora pertineat. Nullum enim existere potest corpus, quod non vel moueatur vel quiescat.

DEFINITIO 2.

4. Locus est pars spatii immensi seu infiniti, in quo vniuersus mundus consistit. Vocari hoc sen-

M.E.C.D. 2017

ſu acceptus locus ſolet abſolutus, vt diſtinguatur a loco relatiuo, cuius mox fiet mentio.

Corollarium I.

5. Quando igitur corpus ſucceſſiue áliam atque aliam huius immenſi ſpatii partem occupat, mouetur: at ſi perpetuo in eadem ſede perſeuerat, tum quieſcit.

Corollarium 2.

6. Concipi autem animo ſolent huius ſpatii termini fixi ad quos corpora referuntur. Atque iſta relatio eſt id, quod ſitus appellatur. Quae igitur corpora eundem ſeruant ſitum reſpectu horum terminorum ea quieſcere dicuntur. Contra vero, quae ſitum ſuum mutant, moueri dicuntur.

Scholion I.

7. Si hac ſignificatione expoſitae voces accipiantur, vocari ſolent motus abſolutus, quiesque abſoluta. Atque hae ſunt verae et genuinae iſtarum vocum definitiones, ſunt enim accommodatae ad leges motus, quae in ſequentibus explicabuntur. Quoniam autem immenſi illius ſpatii eiusque terminorum, quorum in datis definitionibus mentio eſt facta, nullam nobis certam formare poſſumus ideam; loco huius immenſi ſpatii eiusque terminorum conſiderare ſolemus ſpatium finitum, limitesque corporeos, ex quibus de corporum motu et quiete iudicamus. Sic dicere ſolemus, corpus, quod reſpe-

M.E.C.D. 2017

ſpectu horum limitum ſitum eundem conſeruat, quiescere, id vero, quod ſitum eodem reſpectu mutat, moueri.

Scholion 2.

8. Quae hic de immenſo et infinito ſpatio eiusque terminis dicta ſunt, conſiderari debent vt conceptus pure mathematici. Qui, quanquam metaphyſicis ſpeculationibus videntur contrarii, nihilo tamen minus ad inſtitutum noſtrum recte adhibentur. Namque non afferimus, dare huiusmodi ſpatium infinitum, quod habeat limites fixos et immobiles; ſed ſiue ſit, ſiue non ſit, non curantes, poſtulamus tantum, vt motum abſolutum et abſolutam quietem contemplaturus ſibi tale ſpatium repraeſentet, ex eoque de corporum ſtatu vel quietis vel motus iudicet. Ratiocinium enim commodiſſime hoc modo inſtituetur, vt animum a mundo abſtrahentes imaginemur nobis ſpatium infinitum atque vacuum, et in eo corpora collocata eſſe concipiamus, quae ſi in hoc ſpatio ſitum ſuum retinent, abſolute quieſcere, ſin autem ex alia huius ſpatii parte in aliam tranſeunt, abſolute moueri iudicanda ſunt.

DEFINITIO 3.

9. Motus relatiuus eſt ſitus mutatio reſpectu cuiusdam ſpatii pro lubitu aſſumti. Atque quies relatiua eſt permanſio in eodem ſitu reſpectu eiusdem ſpatii. *Ita terram pro hoc ſpatio accipientes, ea quiescere dicimus, quae in terra ſitum ſuum immutatum tenent; ea vero moueri, quae ex alio ſitu reſpectu ter-*

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

rae in alium progrediuntur, hocque ſenſu ſolem moueri dicimus. Simili modo in naui propulſa relatiue quiescunt, quae eundem in naui tenent locum, et relatiue mouentur, quae in naui locum ſuum mutant.

Corollarium 1.

10. Conueniunt motus relatiuus et quies relatiua cum abſolutis, quando ſpatium corpusue, cuius reſpectu motus et quies iudicantur, reuera quiescit reſpectu ſpatii illius immenſi et infiniti. Si enim terra reuera quieſcit, quae huius reſpectu mouentur et quieſcunt, etiam abſolute mouentur et quiescunt.

Corollarium 2.

11. Diſcrepant autem relatiuus motus et quies ab abſolutis, ſi ſpatium illud mouetur. Nam ſi terra reſpectu ſpatii infiniti non quiescit, neque quae eius reſpectu quieſcunt, abſolute quiescunt; atque etiam motus abſolutus differet a relatiuo. Quin imo fieri poteſt, vt corpus, quod relatiue mouetur, idem abſolute quieſcat.

Scholion.

12. Perſpicuum eſt ſtatum hunc corporum relatiuum vel motus vel quietis innumerabilibus modis poſſe eſſe diuerſum: prout enim aliud atque aliud aſſumitur ſpatium, cuius reſpectu motus et quies diiudicantur, alii prodibunt motus relatiui aliaque quies. Sic ſtellae fixae reſpectu telluris mouentur, quaelibet vero reſpectu reliquarum quiescit. Atque pla-

M.E.C.D. 2017

planetae tam reſpectu terrae, quam ſtellarum fixarum mouentur. In ſequentibus autem ſemper et motum et quietem abſolutam intelligi volo, niſi expreſſe monuero etiam ad relatiua pertinere, quae afferentur.

PROPOSITIO 1.

Theorema.

13. *Omne corpus, quod ſiue motu abſoluto ſiue relatiuo in alium locum transfertur, per omnia loca media tranſit, neque ſubito ex primo in vltimum poteſt peruenire.*

Demonſtratio.

Pro motu abſoluto ſi corpus ſubito ex loco primo in extremum perueniret, neceſſe eſſet, vt in primo fuiſſet annihilatum, ſtatimque in vltimo de nouo productum, id quod per leges naturae, niſi accedat miraculum, fieri non poteſt. Procedet igitur ex primo in proximum quendam, ex hocque in ſequentem, donec tandem in extremum perueniat. *Pro motu relatiuo* ſi corpus, quod in locum ſpatii infiniti ſubſtituitur, re vera quiescit, ſuperius valet ratiocinium (10). At ſi moueatur, ipſum quoque per ſingula loca media tranſire debet, et propterea etiam motus relatiuus erit ſucceſſiuus, fietque per ſingula media loca. Q. E. D.

Corollarium 1.

14. Sequitur ex his etiam motum non poſſe fieri in inſtanti, ſed tempore opus eſſe, quo ex

M.E.C.D. 2017

alio loco in alium perueniat corpus. Quia enim per ſingula loca media debet tranſire, hoc cum motu inſtantaneo conſiſtere non poteſt.

Corollarium 2.

15. Poterit igitur etiam via aſſignari, per quam corpus tranſiit, atque ea cognita, nullum in ea erit punctum, quod corpus ex primo loco in vltimum progreſſum non attigerit. Vocari autem ſolet haec via ſpatium percurſum.

Scholion.

16. Facile quoque eſt haec ad corpora circa axem rotata accommodare. Quoniam enim ipſum corpus ſitum ſuum non mutat: tamen motus ineſt in eius partibus, qui cognoſcetur, ſi ſingulae partes vt totidem diuerſa corpora ſeorſim conſiderantur. Singulae enim reſpectu ſpatii infiniti ſitum ſuum mutare deprehendentur, neque vllae quieſcent niſi quae in ipſo axe ſunt poſitae. Atque ſimili modo omnia corpora contemplari oportet, vt non ſolum ipſius totius, ſed ſingularum etiam partium ſitus eiusque mutatio inſpiciatur.

DEFINITIO 4.

17. Corpus aequabiliter vel vniformiter moueri dicitur, quod aequalibus temporibus per aequalia ſpatia currit. Motus vero inaequabilis eſt, qui aequalibus temporibus fit per ſpatia inaequalia, ſeu qui aequalia ſpatia inaequalibus temporis interuallis abſoluit.

Corol-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

18. Corpus igitur motu aequabili latum duplo tempore abſoluit ſpatium duplum, triplo triplum, atque in genere ſpatia percurſa ſunt temporibus proportionalia, temporaque ſpatiis viciſſim. Vt nauis ſuper mari aequabili motu incedens, ſi vna hora duo percurrit milliaria, eadem duabus horis quatuor abſoluet milliaria, tribus ſex, et n horis $2n$ milliaria.

Corollarium 2.

19. Quamobrem ſi datur motus aequabilis, habebitur ex eo accurata temporis menſura, quae niſi exmotu cognoſci non poteſt. Metiendis enim ſpatiis, quae corpus aequabiliter motum percurrit, innoteſcet ſimul temporum, quibus ea erant percurſa, ratio.

Scholion.

20. Neque vero aliunde habemus temporis in annos, dies, et horas diuiſionem, niſi ex motu, quem tanquam aequabilem ſpectamus. Poſita enim terra quiescente crediderunt veteres ſolem motu aequabili ferri, tempusque, quo circa terram reuoluitur, diem appellauerunt. Porro ſumſerunt ſtellarum fixarum circa terram motum quoque eſſe aequabilem, atque tempus, quo ſol in eundem reſpectu ſtellarum fixarum locum, reuertitur, annum poſuerunt. Denique haec tempora in partes aequales diuiſerunt, hocque modo horas, et minuta ſunt

ade-

M.E.C.D. 2017

adepti. Facile autem patet, ſi motus iſti non ſint, vt creduntur, aequabiles, hanc quoque temporum menſuram eſſe erroneam. Atque re ipſa recentiores aſtronomi in his motibus inaequalitatem detexerunt, et inuenerunt dies omnes non eſſe aequales inter ſe, quamobrem correctionem etiam adhibere ſolent ex aliis magis aequabilibus motibus; quam temporis aequationem vocant, ex qua inaequalitas dierum cognoſcitur.

DEFINITIO 5.

21. Omne corpus, quod mouetur, celeritatem ſeu velocitatem habere dicitur, eaque menſuratur ſpatio, quod id corpus aequabiliter motum dato tempore percurrit. *Scilicet quando corpus* B *eodem tempore duplum ſpatium motu aequabili abſoluit, quo corpus* A *etiam aequabiliter motum ſimplum percurrit, corpus* B *duplo maiorem habere dicitur celeritatem, quam corpus* A.

Corollarium 1.

22. Quia igitur in motu aequabili corpus aequabilibus temporibus aequalia percurrit ſpatia (17.), habebit corpus aequabiliter motum perpetuo eandem celeritatem, ſeu velocitatem. In motu vero inaequabili corpus ſucceſſiue aliam atque aliam induit celeritatem.

Corollarium 2.

23. Celeritas autem, quam corpus inaequabiliter motum in quouis ſpatii percurſi puncto habet,

M.E.C.D. 2017

bet, menſuranda eſt ex ſpatio, quod ea celeritate aequabiliter motum dato tempore percurrere poſſet.

Corollarium 3.

23. Celeritas porro corporis aequabiliter moti abſolute menſurari poteſt ſpatio, quod dato tempore verbi gratia vno minuto ſecundo percurritur. Atque is celeritatem corporis cuiuspiam perfecte cognoſcere cenſendus eſt, qui ſpatium definire valet, quod corpus ea celeritate motum tempore minuti ſecundi percurrit.

Scholion.

24. Maxime etiam eſt in vſu haec celeritatis metiendae ratio. Nautas enim nauis celeritatem exploraturos videmus ſpatium menſurare, quod nauis dato tempore percurrit. Vulgo autem accipiunt interuallum quatuor horarum, et inueſtigant, quot milliaria nauis hoc tempore abſoluat. Ex quo ſimul intelligitur, quot pedes nauis tempore minuti ſecundi percurrat, ſiquidem motu aequabili progrediatur.

PROPOSITIO 2.

Theorema.

25. *Duorum corporum aequabili motu progredientium celeritates ſunt directe vt ſpatia quaecunque percurſa et inuerſe vt tempora, quibus ea ſpatia erant percurſa.*

M.E.C.D. 2017

Demonſtratio.

Sint duo corpora A et *a*, eorumque celeritates C et *c*; percurrat illud A ſpatium S tempore T, hoc vero *a* ſpatium *s* tempore *t*. Iam quia in motu aequabili ſpatia ſunt temporibus proportionalia (18.), determinabitur ſpatium, quod corpus *a* tempore T abſoluit, ex hac proportione $t:T=s:\frac{sT}{t}$: mouebitur ergo corpus *a* tempore T per ſpatium $\frac{sT}{t}$. At corpus A mouetur eodem tempore T per ſpatium S. Celeritates vero corporum menſurari debent ſpatiis eodem tempore percurſis (18). Quocirca erit $C:c=S:\frac{sT}{t}$ ſeu $C:c=\frac{S}{T}:\frac{s}{t}$. Ex quo ſequitur celeritates eſſe directe vt ſpatia et inuerſe vt tempora, quibus ea ſunt percurſa. Q. E. D.

Corollarium 1.

26. Ex vltima analogia prodit haec aequatio $\frac{CT}{S}=\frac{ct}{s}$. In quouis igitur motu aequabili factum ex celeritate in tempus, ſi diuidatur per ſpatium eo tempore percurſum, dabit ſemper eundem quotum.

Corollarium 2.

27. Erit etiam $T:t=\frac{S}{C}:\frac{s}{c}$. Ex quo ſequitur tempora eſſe in ratione compoſita ex directa ſpatiorum et inuerſa celeritatum, ſeu eſſe vt ſpatia per celeritates diuiſa.

Corollarium 3.

28. Deinde inuenta proportio transmutatur etiam in hanc $S:s=CT:ct$. Ex qua colligitur ſpatia motu aequabili percurſa eſſe in ratione compoſita ex ratione celeritatum et ratione temporum.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

29. Data igitur celeritate corporis aequabiliter moti vna cum ſpatio quouis deſcripto, innotescet tempus, quo hoc ſpatium eſt percurſum; diuidendo ſcilicet ſpatium per celeritatem. Cum enim hunc quotum tempori ſemper proportionalem eſſe oſtenderimus, poterimus eundem pro temporis menſura vſurpare.

Corollarium 5.

30. Similiter celeritas poterit exprimi per ſpatium percurſum diuiſum per tempus, atque ſpatium etiam ipſum per factum ex tempore in celeritatem.

Scholion 1.

31. Si enim celeritas tanta ſit, vt corpus ea motum tempore minuti ſecundi abſoluat ſpatium trium pedum, et propterea celeritatem exponamus numero 3; poterimus inuenire tempus, quo 60 pedes v. gr. eodem motu abſoluuntur. Diuidatur enim 60 per 3 quotus 20 indicabit hos 60 pedes 20 minutis ſecundis percurri. Et ſi quaeratur ſpatium tempore 12 minutis ſecundis percurſum, prodibit id 36 pedum. Atque etiam corporis 6 minutis ſecundis 48 ped. percurrentis proueniet celeritas 8, quae indicat hoc corpus minuto ſecundo 8 ped. percurrere.

Scholion 2.

32. Atque hanc tempora, ſpatia et celeritates menſurandi rationem in ſequentibus ſemper adhibe-

M.E.C.D. 2017

bimus. Tempora nempe in minutis ſecundis perpetuo exprimemus, et ſpatia pedibus, iisque Rhenanis. Celeritates vero, vt iam eſt factum, denotabimus numero pedum, qui minuto ſecundo percurrunt. Infra quidem commodior celeritates determinandi ratio occurret, qua deinceps ſumus vſuri, ſed ea tamen ex hac naſcitur, ad eamque facile reuocatur.

PROPOSITIO 3.

Theorema.

33. *In motu quantum vis inaequabili, minima ſpatii elementa motu aequabili percurri concipi poſſunt.*

Demonſtratio.

Quemadmodum enim in geometria curuarum linearum elementa vt lineolae rectae conſiderantur, ita etiam ſimili modo in mechanica motus inaequabilis in infinitos aequabiles reſoluitur. Vel enim reuera elementa aequabili motu percurruntur, vel mutatio celeritatis per huiusmodi elementa eſt tantilla, vt incrementum aut decrementum ſine errore negligi poſſit. In vtroque caſu ergo apparet propoſitionis veritas. Q. E. D.

Corollarium 1.

34. Omnis ergo celeritatis mutatio in motu inaequabili in ſingulorum elementorum initiis fieri concipienda eſt, quia integra elementa aequabili motu percurri ponuntur.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

35. Quare ſecundum notandi modum analyſeos infinite paruorum, ſi celeritas in primo elemento fuerit c, erit celeritas in ſecundo $c+dc$, in tertio $c+2dc+ddc$, et ita porro.

Scholion.

36. Demonſtrationis datae vis hoc nititur fundamento, quod celeritatis mutatio, quae fieri poteſt, dum elementum infinite paruum percurritur, debeat eſſe infinite exigua et euaneſcere prae celeritate, quam corpus iam habet, hoc enim niſi eſſet, generaretur motus finitus in inſtanti, quod eſſet abſurdum. Interim tamen videtur haec propoſitio admitti non poſſe, ſi ipſe motus et celeritas eſt infinite parua, quo caſu incrementum vel decrementum momentaneum habere poteſt rationem finitam ad illam. Sed de hoc infra videbimus, vbi motus generatio conſiderabitur.

PROPOSITIO 4.

Theorema.

37. *Moueatur corpus motu vtcunque inaequabili per lineam* AM, *data vero ſit celeritas corporis in quouis loco: oportet determinare tempus, quo arcus* AM *abſoluitur.* Tab. I. Fig. I.

Solutio.

Sit ſpatium AM, ſiue ſit linea recta ſiue curua, $=s$, et celeritas, quam corpus habet in M ſit c, quae erit functio quaedam ipſius s. Ab M accipiatur elementum Mm, quod igitur motu aequabili idque celeri-

M.E.C.D. 2017

leritate c percurri concipiendum eſt. Vocato elemento Mm, ds; erit tempus, quo hoc elementum pecurritur $=\frac{ds}{c}$ (29.). Integrando ergo habebitur tempus, quo totus arcus AM abſoluitur $=\int\frac{ds}{c}$. Ad integrale vero talis adiici debebit conſtans, quae reddat hoc tempus $=0$, ſi ponitur $s=0$, ſecundum notas integrationis regulas. Q. E. J.

Exemplum 1.

38. Sit celeritas in M vt poteſtas quaecunque ſpatii iam deſcripti AM, ſcilicet $c=s^n$; erit $\int\frac{ds}{c}=\frac{s^{1-n}}{1-n}$. Ad quod conſtantem non opus eſt adiicere ſi $n<1$, vel negatiuum habeat valorem: dabit enim ipſum $\frac{s^{1-n}}{1-n}$ tempus, quo arcus AM percurritur. At ſi fuerit $1-n$ numerus negatiuus habebitur $\int\frac{ds}{c}=\frac{-1}{(n-1)s^{n-1}}$. Ad quod conſtans $\frac{1}{(n-1)0^{n-1}}$ i. e. infinita quantitas debet addi, quo totum habeatur tempus per AM. Tempore ergo in his caſibus opus eſt infinito, quo corpus ex A in alium quemuis locum M perueniat. Quamobrem perpetuo in A perſiſtet, neque vnquam inde egredietur. Fit hoc vero, quoties eſt n numerus poſitiuus vnitate maior. Si vero eſt $n=1$, tempus nequidem algebraice poteſt exhiberi, prouenit enim $\int\frac{ds}{s}=ls$, ad quod etiam quantitatem infinitam addi oporteret, quo tempus per AM haberetur.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

39. In mundo ergo alii casus subsistere nequeunt, nisi in quibus celeritates motus saltem principio sint vt spatiorum percursorum potestates exponentis minoris, quam est vnitas.

Corollarium 2.

40. Progrediatur corpus in recta AM, sitque in quouis loco celeritas eius vt applicata MN curuae AN, quae cum recta AM in A concurrat, ita vt celeritas corporis in principio A sit nulla. Perspicuum est ex praecedentibus, quo tempus per AM fiat finitum, oportere tangentem AB in A esse ad AM perpendicularem. Coincidente enim M in A debet MN fieri $=AM^n$, et n numerus vnitate minor scilicet fractio ex quo normalitas tangentis sequitur. Sin vero tangens AB angulum constituat acutum vel infinite paruum cum AM, tempus per AM fiet infinitum. Tab. I. Fig. 2.

Exemplum 2.

41. Moueatur corpus per rectam AB ita, vt descripto super ea semicirculo ANB celeritas in quouis puncto M sit vt applicata circuli in eo loco MN. Id quod ita potest intelligi, celeritatem in M tantam esse, qua corpus minuto secundo possit percurrere spatium $=m$. MN. Ponatur huius semicirculi radius $AC=a$, spatium iam percursum $AM=s$; erit $MN=\sqrt{(2as-ss)}$. Celeritas ergo in M, quam posuimus c, erit hoc casu $=m\sqrt{2as-ss}$. Tab. I. Fig. 3.

Id

M.E.C.D. 2017

Idcirco tempus, quo ſpatium AM percurritur, erit $= \int \frac{ds}{m\sqrt{(2as - ss)}} = \frac{1}{ma} \int \frac{ads}{\sqrt{(2as - ss)}}$. At $\int \frac{ads}{\sqrt{2as - ss)}}$ denotat ipſum circuli arcum AN. Quamobrem tempus, quo ſpatium AM percurritur erit $= \frac{AN}{m.AC}$ minut. ſecundis. Atque tempus, quo corpus ab A ad B moueturerit $= \frac{ANB}{m.AC}$ min. ſec. Eſt vero quam proxime $\frac{ANB}{AC} = \frac{22}{7}$. Ergo tempus hoc erit $= \frac{22}{7.m}$ minutis ſecundis. Ex quo iutelligitur quantacunque ſit linea AB, eam perpetuo eodem tempore percurri.

Corollarium 3.

Tab. I. Fig. 1. 42. Ex ſolutione problematis apparet etiam eodem tempore, quo corpus ex A in M peruenit, idem motu retrogrado ex M in A peruenturum, ſi modo in vtroque motu in iisdem locis aequales habeat celeritates.

Corollarium 4.

Tab. I. Fig. 4. 43. Repraeſentent curuae AN applicatae MN celeritates, quas corpus in recta AN motum habet in ſingulis punctis M, conſtituat autem curua in A cum recta AM angulum recto minorem. His poſitis iam eſt oſtenſum, tempus, quo corpus ex A in M perueniet, fore infinite magnum. Quare etiam motu retrogrado corpus ex M verſus A latum poſt tempus demum infinitum i. e. nunquam in A pertingit, quamuis vbique, niſi in A habeat celeritatem finitam.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 5.

Theorema.

44. *Moueantur duo corpora in rectis* AM *et* am *exprimanturque eorum celeritates applicatis curuarum* AN *et* an *similium. Dico haec corpora percurſura ſpatia homologa* AM *et* am *eodem tempore.* Tab. I. Fig. 5.

Demonſtratio.

Sint igitur AM et *am* ſpatia homologa, habebunt ea eandem rationem, quam applicatae MN et *mn*, ſit iſta ratio $m:n$; erit, poſitis $AM = s$, et $MN = c$, $am = \frac{ns}{m}$ et $mn = \frac{nc}{m}$. Eſt vero tempus per AM $= \int \frac{ds}{c}$ (37.), tempus autem per *am* habebitur ponendo $\frac{nds}{m}$ loco ds, et $\frac{nc}{m}$ loco c, in $\int \frac{ds}{c}$. Hoc vero facto iterum prodit $\int \frac{ds}{c}$: quare vtrumque tempus per AM et *am* erit $\int \frac{ds}{c}$, ſunt igitur ea aequalia. Q. E. D.

Corollarium 1.

45. Intelligitur hinc quoque ratio eius, quod §. 41. eſt dictum, ſunt enim circuli omnes curuae ſimiles et diametri ſpatia homologa.

Corollarium 2.

46. Sit curuae AN parameter a, quae ſiue maior ſiue minor accipiatur, curua AN mutetur in aliam ſui ſimilem. Hoc vero vt eueniat, huiusmodi debet eſſe aequatio pro curua AN, vt applicata c aequetur functioni ipſarum a et s vnius tantum dimenſionis. Pro variis autem valoribus ipſius a, s exprimet ſpatia homologa, ſi accipiatur $= a$ vel

M.E.C.D. 2017

na. Quoties igitur *c* huiusmodi definitur aequatione, ſpatia *na*, ſiue magnum ſiue paruum ponatur *a*, aequalibus percurruntur temporibus.

Scholion.

47. Quemadmodum, ſi *c* aequatur functioni ipſarum *a* et *s* vnius dimenſionis, tempora per *a* vel *na* ſunt omnia aequalia, quicquid ſit *a*: Ita etiam ſi fuerit *c* aequale functioni ipſarum *a* et *s*, quae habeat *m* dimenſiones, tempora per *a* vel *na*, quicquid ſit *a*, tenebunt rationem a^{1-m}. Nam $\frac{c}{a^{m-1}}$, erit functio vnius dimenſionis ipſarum *a* et *s*, quae ponatur *k*. Erit ergo $c = a^{m-1}k$, et $\int\frac{ds}{c} = a^{1-m}\int\frac{ds}{k}$. At $\int\frac{ds}{k}$ dabit, poſito $s = a$ vel *na*, quantitatem conſtantem, vtcunque varietur *a* (46.). Quamobrem $a^{1-m}\int\frac{ds}{k}$, dabit multiplum quoddam poteſtatis a^{1-m}. Erit conſequenter tempus per *na* vt a^{1-m}.

DEFINITIO 6.

48. Scala celeritatum eſt curua, cuius applicatae repraeſentant celeritates, quas corpus motum habet in locis reſpondentibus ſpatii, quod percurrit.

Tab. I. Fig. 6. *Ita corporis in recta* AM *moti ſcala celeritatum eſt curua* AN, *cuius applicatae* MN *exponunt celeritatem corporis in ſingulis punctis* M.

DEFINITIO 7.

49. Scala temporum eſt curua, cuius applicatae repraeſentant tempora, quibus partes ſpatii percurſi reſpondentes abſoluuntur. *Ita ſi curua* AT

M.E.C.D. 2017

fuerit eiusmodi, vt eius applicata quaeuis MT *exhibeat tempus, quo ſpatium* AM *percurritur, curua* AT *erit ſcala temporum.*

Corollarium.

50. Quemadmodum ex data ſcala celeritatum AN inueniri debeat ſcala temporum, iam ex praecedente problemate (37.) apparet. Scilicet ſi dicatur ſpatium AM$=s$, celeritas in M i. e. MN$=c$, et tempus, quo AM percurritur i. e. MT$=t$, erit $t=\int\frac{ds}{c}$. Ex data igitur curua AN conceſſis quadraturis conſtrui poteſt curua AT.

PROPOSITIO 6.

Problema.

51. *Data ſcala temporum* AT *inuenire et conſtruere ſcalam celeritatum* AN.

Solutio.

Ponantur vt ante AM$=s$, MN$=c$, et MT$=t$ oportebit ex data aequatione inter s et t inueniri aequationem inter s et c. Facile vero hoc efficietur ex ſupra inuento canone $t=\int\frac{ds}{c}$. Fit enim differentiando $dt=\frac{ds}{c}$, atque $c=\frac{ds}{dt}$. Ducatur ergo ad curuam AT in T normalis TO erit $\frac{ds}{dt}=\frac{MT}{MO}$. Fiat ergo vt MO ad MT, ita linea quaedam vnitate expreſſa, qua minunutum ſecundum indicatur, ad quartam proportionalem, quae erit $=$MN. Sumatur igitur ab M interuallum MQ$=1$, et ducatur QN parallela normali TO, erit punctum N in ſcala celeritatum quaeſita. Q. E. I.

M.E.C.D. 2017

Exemplum 1.

52. Sit ſcala temporum linea recta ad AM vtcunque inclinata; erit $t = ms$, et $dt = mds$. Prodibit igitur $c = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{m}$. Scala celeritatum ergo erit linea recta ipſi AN parallela, atque corpus motu feretur aequabili.

Exemplum 2.

53. Sint tempora vt poteſtates quaecunque ſpatiorum deſcriptorum, ſeu $t = s^m$, ideoque $dt = ms^{m-1}ds$. Ex quo erit $c = \frac{1}{ms^{m-1}} = \frac{1}{m}s^{1-m}$. Quare ſi curua AT fuerit parabola Appolloniana i. e. $t = s^{\frac{1}{2}}$; erit $m = \frac{1}{2}$, atque $c = 2s^{\frac{1}{2}}$. Ex quo apparet hoc caſu ſcalam celeritatum quoque eſſe huiusmodi parabolam.

Corollarium.

54. Intelligitur etiam, ſi detur aequatio inter c et t, quomodo inueniendum ſit ſpatium percurſum s, atque vtraque ſcala celeritatum et temporum. Quia enim eſt $c = \frac{ds}{dt}$; erit $ds = cdt$, et $s = \int cdt$.

Scholion.

55. Monendum hic eſt, iſta, quae hactenus de ſcalis celeritatum et temporum ſunt tradita, non ſolum ad motum abſolutum ſpectare, ſed etiam ad relatiuum pertinere. Nondum enim ipſa motus natura eſt conſiderata, neque quicquam eſt aſſumtum, quod motui abſoluto eſſet proprium. Nunc vero afferemus quasdam propoſitiones, quae motui ab-

M.E.C.D. 2017

absoluto sunt peculiares, ex quibusque quodammodo interna inter motus absolutos et relatiuos differentia poterit perspici.

PROPOSITIO 7.

Theorema.

56. *Corpus absolute quiescens perpetuo in quiete perseuerare debet, nisi a causa externa ad motum sollicitetur.*

Demonstratio.

Concipiamus corpus hoc existere in spatio infinito atque vacuo, perspicuum est nullam esse rationem, quare potius in hanc vel illam plagam moueatur. Consequenter ob defectum sufficientis rationis, cur moueatur, perpetuo quiescere debebit. Neque vero haec ratio in mundo cessat; quamuis obiici posset esse in mundo sufficientem rationem, quare in hanc potius, quam illam plagam, cedat. Etenim non est credendum in spatio infinito illo et vacuo defectum sufficientis rationis ad motum vnicam esse causam permansionis in quiete; sed nullum est dubium, quin in ipsa corporis natura sita sit causa huius phaenomeni. Defectus scilicet sufficientis rationis non potest pro vera et essentiali cuiusquam euentus causa haberi, sed tantum veritatem idque rigide demonstrat. Quin et simul indicat in ipsa rei natura occultam esse causam veram essentialem, quae non cessat, cessante illo sufficientis rationis defectu. Ita Archimedis demonstratio de aequilibrio bilancis vtrinque sibi similis, non solum in vacuo, sed etiam in mundo rei veritatem euincit. Alia autem eaque ge-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

genuina datur huius aequilibrii ratio, quae etiam in mundo locum habet. Cum igitur in vacuo ſpatio verum ſit corpus quieſcens in quiete permanere debere; erit in ipſa corporis natura etiam huius rei ratio poſita, propter quam in mundo quoque corpus, quod ſemel quieſcit, niſi ab alia cauſa vrgeatur, in quiete perſiſtere cogatur. Q. E. D.

Corollarium 1.

57. Eſt igitur lex in ipſa rerum natura fundata, quod omne corpus quieſcens, niſi ab alia cauſa externa ad motum ſollicitetur, in quiete debeat perſeuerare.

Corollarium 2.

58. Quemadmodum fundamentum huius demonſtrationis ex ipſa quietis abſolutae natura eſt petitum, perperam iſta lex ad quietem relatiuam extenditur.

Scholion.

59. Experientia autem ipſa edocemur hanc legem in quiete relatiua non valere. Videmus enim corpora in naui relatiue quiescentia, ſi nauis ſubito concutiatur, in quiete non permanere, ſed ſimul concuti et de loco ſuo moueri; etiamſi ante quieuiſſent, nullaque acceſſiſſet cauſa ea commoueus.

Corollarium 3.

60. Simili modo, quo euicimus corpus ſemel quiescens perpetuo quiescere debere, niſi a cauſa externa afficiatur, poteſt oſtendi, corpus, quod nunc

M.E.C.D. 2017

nunc quiescit absolute, ante hac semper quoque quieuisse, siquidem sibi ipsi fuerit relictum. Vti enim nulla est ratio, quare potius ex hac, quam illa plaga, in eum, quo nunc stat, locum peruenerit, ita concludendum est etiam in eo loco antea semper constitisse.

Corollarium 4.

61. Corpus igitur, quod semel quiescit, si vlla causa externa in id neque agat, neque egerit, id non solum in posterum quiescet semper, sed etiam ante perpetuo quieuisse statuendum est.

Corollarium 5.

62. Sequitur ex hoc corpus semel absolute motum in quietem peruenire nunquam posse sibi relictum. Nam si tandem quiesceret, idem oporteret antea quoque semper quieuisse, quod est contra hypothesin.

PROPOSITIO 8.

Theorema.

63. *Corpus absolutum habens motum, aequabiliter perpetuo mouebitur, et eadem celeritate iam antea quouis tempore fuit motum; nisi causa externa in id agat aut egerit.*

Demonstratio.

Si enim corpus motum celeritatem non conseruaret semper eandem, tum vel augeri deberet vel diminui eius celeritas. Hoc autem casu ad quietem inclinaret quod, quia nunquam quietem con-

se-

M.E.C.D. 2017

ſequi poteſt (62.) accidere nequit. Illo caſu vero ex quiete proueniſſe cenſendum eſſet, quod aeque foret abſurdum. Praeterea ſi hoc corpus in ſpatio infinito et vacuo poſitum concipiatur, eiusque via, qua eſt ingreſſum et ingredietur, conſideretur; nulla eſt ratio, quare potius in hoc maiorem minoremue habeat celeritatem, quam in illo loco, quocirca perpetuo eadem inoueri debebit celeritate. Q. E. D.

Corollarium.

64. Quoties igitur corpus motum vel celerius vel tardius ingredi videmus, cauſae externae hanc mutationem adſcribere debemus.

PROPOSITIO 9.

Theorema.

65. *Corpus abſoluto motu praeditum progredietur in linea recta, ſeu ſpatium, quod deſcribit, erit linea recta.*

Demonſtratio.

Nulla eſt enim ratio, ſi corpus hoc in ſpatio infinito et vacuo poſitum concipiatur, quare in hanc potius quam aliam regionem a linea recta declinaret. Ex quo concludendum eſt, hoc ab ipſa corporis natura pendere, vt motum in linea recta progrediatur. Quamobrem in mundo etiam, vbi quidem hoc ſufficientis rationis principium ceſſat, nihilominus ſtatuendum eſt, omne corpus motum in directum progredi debere, niſi ſcilicet impediatur. Q. E. D.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

66. Ex his duabus propoſitionibus conficitur iſta lex vniuerſalis: omne corpus motu praeditum aequabiliter in linea recta progredi.

Corollarium 2.

67. Corpus ergo quod a cauſis externis coactum fuit in linea curua AM progredi, ſi cum in M peruenerit, cauſae hae externae ſubito ceſſent, tum ea celeritate, quam habebat in M aequabiliter ſecundum directionem, quam ipſo tempore liberationis habuit, in recta progredietur. Eſt vero tangens MT nil aliud, niſi curuae elementum in M in directum productum, quamobrem, corpus in M ſibi relictum in tangente MT aequabiliter ea celeritate, quam in M habuit, progredietur. Tab. I. Fig. 7.

Scholion 1.

68. Has de abſoluta quiete et motu leges auctores in vna ſunt complexi. Hancque *Neutonus* in Principiis Phil. ita proponit, vt dicat: Omne corpus perſeuerare in ſtatu ſuo quieſcendi vel mouendi vniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Corollarium 3.

69. Pertinent autem hae leges de motus continuatione ad motus tantum abſolutos, neque eae in motibus relatiuis vim ſuam retinent. Quemadmodum enim fieri poteſt, vt corpus relatiue quiescens non perſeueret in quiete, etiamſi a nullis cau-

M.E.C.D. 2017

fis externis agitetur (59.), ita etiam corpora motum habentia relatiuum non ſemper aequabiliter in directum relatiue mouebuntur.

Corollarium 4.

70. Quando igitur corpus a nullis cauſis externis eſt ſollicitatum, id, quomodocunque inaequabiliter relatiue moueatur, tamen vel abſolute quiescere vel vniformiter in directum moueri cenſendum eſt. Ex hocque quodammodo poteſt intelligi, quantum ſtatus relatiuus ab abſoluto differat.

Scholion 2.

71. In Aſtronomiae principiis mechanicis, prout a *Neutono* ſunt tradita, ſtatuuntur ſol et ſtellae fixae a cauſis externis vel omnino non affici, vel tam parum, vt effectus ſit inſenſibilis. Quanquam igitur ſolem neque aequabiliter neque in directum progredi videmus reſpectu terrae, tamen eum abſolute vel quiescere vel vniformiter in directum moueri certum erit. Difformitates ergo illae in motu ſolis obſeruatae in ipſa terra poſitae ſint neceſſe eſt.

DEFINITIO 8.

72. Motus directio ſiue determinatio eſt linea recta in qua corpus motum vniformiter progredi conatur, et re ipſa progreditur, niſi a cauſis externis impediatur.

Corollarium.

73. Corpus igitur habens motum abſolutum, niſi ab aliis cauſis afficiatur, perpetuo eandem motus directionem eandemque celeritatem conſeruabit.

DE-

M.E.C.D. 2017

DEFINITIO 9.

74. Vis inertiae eſt illa in omnibus corporibus inſita facultas vel in quiete permanendi, vel motum vniformiter in directum continuandi.

Corollarium 1.

75. Quanquam enim permanſionem in quiete, motusque vniformem continuationem in directum ex principio ſufficientis rationis demonſtrauimus, tamen iam notauimus hanc non eſſe cauſam phaenomeni efficientem, ſed eam in ipſa corporis natura eſſe ſitam. Haec igitur ex corporum natura pendens cauſa ſtatus ſui conſeruationis eſt id, quod vis inertiae appellatur.

Scholion.

76. *Keplerus*, qui primus hanc vocem formauit, tribuit eam ei vi, quam omnia habent corpora, reſiſtendi omni illi, quod ea de ſtatu ſuo deturbare conatur; atque haec vox inertiae melius cum hac reſiſtentiae ideae congruit, quam illa perſeuerantiae, cum qua nos coniunximus. Sed facile intelligitur has definitiones re a ſe inuicem non differre, eadem enim eſt vis motum vel quietem continuans, et quae impedimentis reſiſtit. Malui vero hac vti definitione, quam Kepleriana, quia nondum conſtat, quomodo corpora viribus ſollicitantibus reſiſtant. Praeterea vero haec ipſa reſiſtendi vis originem habet ſuam ab hac quietem motumue continuandi facultate; ideoque ex hac debet explicari.

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 10.

Theorema.

77. *Quando ſpatium, ex quo motus relatiuus determinatur, abſolute vel quiescit vel mouetur vniformiter in directum; tum leges datae de motu et quiete etiam in ſtatu corporum relatiuo valebunt.*

Demonſtratio.

Si ſpatium ex quo motus relatiuus diiudicatur abſolute quiescit, propoſitum per ſe eſt clarum; Nam hoc caſu quies et motus relatiui cum abſolutis congruunt, adeoque omne corpus etiam relatiue vel perpetuo quiescet vel vniformiter mouebitur in directum (10.). Sin vero illud ſpatium ipſum moueatur vniformiter in directum, tum ea corpora, quae relatiue quiescunt, eundem habebunt motum abſolutum, quem habet ipſum ſpatium. Quare ea quoque vniformiter indirectum progrediuntur, huncque motum ex ſua natura poterunt continuare: vt igitur et hoc caſu lex (66.) obſeruetur. Corpus vero quod relatiue mouetur vniformiter in directum, id etiam, ſi ipſum ſpatium vniformem habet motum rectilineum, aequabiliter in recta progredietur abſolute, quemadmodum tum ex ſequente apparebit propoſitione, tum per ſe perſpicuum eſt. Motus ergo hic relatiuus quoque legi eſt conſentaneus et propterea ſine vi externa continuari poterit.

Q. E. D.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

78. Corpus igitur a nulla cauſa externa affectum, quod relatiue vel quiescit vel vniformiter mouetur in directum, indicio erit ipſum ſpatium ad quod eius motus iudicatur, abſolute vel quiescere, vel in directum aequabiliter moueri.

Corollarium 2.

79. Talis quoque motus relatiuus in ſuo ſtatu per ſe ipſum perpetuo conſeruabitur. Non ſolum enim ipſum, quod mouetur, corpus abſolute mouetur vniformiter in directum; ſed etiam ſpatium illud, quo relatio aeſtimatur, iuxta eandem legem progreditur. Quamobrem vterque motus per ſe continuabitur, atque motus relatiuus iſte in hoc ſtatu nulla accedente cauſa externa perſeuerabit.

Corollarium 3.

80. Quia omnis idea, quam de motu habemus eſt relatiua (7.), hae quoque leges non ſufficiunt ad cognoſcendum, qualis ſit cuiuspiam corporis motus abſolutus. Quando enim corpus a nulla cauſa externa affectum aequabiliter in recta progredi videmus, plus inde concludere non poſſumus, quam hoc corpus etiam abſolute vel vniformiter in directum moueri vel quiescere. Quantus vero ſit eius motus abſolutus definire non licet, neque quam habeat directionem.

Corollarium 4.

81. Quae igitur ex hac corporum natura, quod in ſtatu ſuo vel quietis vel motus vniformis in

M.E.C.D. 2017

rectum permaneant, deducentur, non ſolum ad motum et quietem abſolutam pertinebunt, ſed etiam ad eum ſtatum relatiuum, quo ſpatium corpusue, ex quo motus aeſtimatur, vniformiter in directum progreditur.

Scholion.

82. Atque etiam non admodum erimus ſolliciti de motu abſoluto, cum iſte relatiuus iisdem contineatur legibus. Et propterea motum hunc relatiuum ipſum ſaepius mutabimus in alios huiusmodi: ita tamen vt traditae leges obſeruentur; ſi ſcilicet eum, relatione ad aliud corpus vniformiter in directum quoque progrediens facta, contemplabimur. Qua ratione non ceſſabit aequabiliter in recta progredi, idque innumerabilibus modis fieri poteſt, ex quibus, qui commodiſſimus erit, ſeligi poterit.

PROPOSITIO II.

Problema.

Tab. I. Fig. 8. 83. *Moueatur corpus abſolute aequabiliter in recta* AL, *aliudque corpus aequabiliter quoque in recta* AM. *Quaeritur corporis in* AL *abſoluto motu lati motus relatiuus reſpectu corporis alterius in* AM *progredientis.*

Solutio.

Sit celeritas corporis in AL progredientis, *a*; et celeritas alterius in AM moti, *b*: ſimulque egrediantur haec corpora ex puncto A. Perſpicuum eſt ſi ſumantur duo ſpatia AL, AM in ratione celeri-

ta-

M.E.C.D. 2017

tatum *a* et *b*, ambo corpora eodem momento in L et M peruenire. Ducta igitur recta ML cum recta AM angulum faciente AML, cuius sinus est ad sinum anguli ALM, quem cum AL efficiet, vt AL ad AM i. e. vt *a* ad *b*, designabit L locum, in quo reperietur corpus in AL progrediens eodem momento, quo alterum in M existit. Quia vero corporis illius motus relatiuus respectu huius desideratur, hoc, quod in AM reuera mouetur, vt quiescens in A debet considerari. Puncto igitur M cogitatione in A translato, perueniet L in N ducta AN parallela et aequali ipsi ML ex A. Simili modo quando corpus in AM motum peruenit in locum proximum *m*, alterum in *l* reperietur, eritque *ml* parallela ipsi ML, quia $Mm : Ll = b : a = AM : AL$. Puncto vero *m* simili modo in A translato sumendo $An = ml$ perueniet *l* in *n*, eritque *n* in eadem recta AN. Ex quo sequitur corpus absolute in AL motum relatiue in recta AN moueri. Celeritas autem relatiua erit ad absolutam vt N*n* ad L*l*, seu vt ML ad AL. Quae ratio cum sit constans ob triangulum ALM specie datum corpus absolute in AL aequabiliter motum, relatiue quoque aequabiliter in recta AN progredietur. Positio vero rectae AN inuenietur sumendo angulo LAN tanto, vt eius sinus sit ad sinum anguli NAM, vt *b* ad *a*. Celeritas denique absoluta per AL erit ad celeritatem relatiuam per AN, vt sinus anguli MAN ad sinum anguli LAM. Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

84. Corpus igitur abſolute aequabiliter in directum progrediens, quoque relatiue aequabiliter in directum promouebitur, ſi modo corpus, ex quo relatio iudicatur, quoque aequabiliter in directum progrediatur. Atque hoc eſt quod in praecedente demonſtratione (77) aſſumſimus.

Corollarium 2.

85. Conſtructio ceterum lineae AN et celeritatis relatiuae inuentio facillime hoc modo inſtitui poteſt. Sumtis, vt iam fecimus, AL et AM in ratione *a* ad *b* ductaque ML, ducatur huic ML parallela AN ex A, erit haec via motu relatiuo deſcripta. Celeritas vero relatiua erit ad abſolutam, vt ML ad AL.

Corollarium 3.

86. Idem ratiocinium valet, ſi AL non motu abſoluto, ſed relatiuo percurratur, et AM eadem relatione. Tum vero prodibit corporis per AL moti alius motus relatiuus reſpectu corporis AM lati.

Corollarium 4.

87. Patet igitur, quomodo motus abſolutus in infinitos relatiuos poſſit transmutari, qui ſemper erunt aequabiles et in directum fient, ſi modo motus abſolutus fuerit huiusmodi, et motus eorum corporum, ex quibus relatiui oriuntur.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion.

88. Assumsimus in solutione ambo corpora ex eodem loco A egredi: sed solutio non minus succedit, si ambo corpora in principio in diuersis punctis A et B fuerint posita. Nam progrediatur corpus A motu absoluto aequabiliter in recta AL, alterum vero B similiter in recta BM, ita vt celeritates sint vt *a* ad *b*. Sumantur AL et BM in eadem ratione *a* ad *b*, peruenient ambo corpora simul in L et M. At quia corporis A motus relatiuus respectu corporis B requiritur, corpus B vt quiescens in B debet considerari. Transferatur ergo cogitatione corpus B ex M in B, perueniet corpus A ex L in N, ducendo BN parallelam et aequalem ipsi ML: dico punctum N fore in recta per A transeunte, ita vt corpus A relatiue moueatur in recta AN, idque aequabiliter. Ducta enim NL aequalis erit et parallela ipsi BM. His factis specie datur triangulum ANL: quare NL ad AL habebit rationem datam, ergo ob NL=BM, erit ratio AL ad BM data, quae ergo si semel sumta fuerit in ratione *a* ad *b*, semper erit eadem. Ex quo apparet punctum N esse in recta AN et celeritatem relatiuam per AN esse ad absolutam per AL, vt AN ad AL i. e. in ratione data. Motus igitur relatiuus per AN fiet in recta, eritque aequabilis. Tab. I. Fig. 9.

Corollarium 5.

89. Si igitur detur corporis A motus absolutus per rectam AL, eiusque relatiuus aequabilis per

M.E.C.D. 2017

AN quacunque celeritate, poterit inueniri motus corporis B, cuius reſpectu motus relatiuus corporis A oritur. Sumtis enim duobus ſpatiis AL et AN eodem tempore percurſis, ducatur per punctum quoduis arbitrarium B recta BM parallela ipſi NL, determinabit haec viam a corpore B percurſam, eiusque celeritas erit ad celeritatem corporis A abſolutam per AL vt eſt NL ad AL. Erit vero corpus B in B eodem tempore, quo eſt A in A.

Corollarium 6.

90. Dantur ergo innumerabiles motus corporis B, quia punctum B pro lubitu poteſt aſſumi, ex quibus motus relatiuus corporis A idem prouenit. At corporis B celeritas ſemper erit eadem, eiusque directio ſecundum parallelam ipſi NL.

Corollarium 7.

91. Intelligitur etiam motum abſolutum aequabilem in directum tendentem transmutari poſſe in relatiuum quemcunque itidem aequabilem et in recta factum. Poteſt enim recta AN pro arbitrio duci, et celeritas per eam poni quaecunque. Semper enim datur motus aequabilis quoque et recta progrediens corporis B, ex quo hic motus relatiuus exiſtit.

Corollarium 8.

92. Motus deinde iſte relatiuus per ſe ſine vlla vi externa poterit continuari. Motus enim abſoluti per AL et per BM, quia fiunt aequabiliter in

M.E.C.D. 2017

in lineis rectis, per se continuantur. Quamdiu vero isti motus durant, tamdiu etiam relatiuus per AN continuare debet.

PROPOSITIO 12.

Problema.

93. *Moueatur corpus* A *absolute quomodocunque in linea* AL, *et corpus* B *in linea* BM. *Requiritur motus relatiuus corporis* A *respectu corporis* B. Tab. I. Fig. 10.

Solutio.

Abscindantur in curuis AL et BM arcus, qui aequalibus temporibus percurruntur, AL et BM. Reperietur ergo corpus A in L, quando B in M pertingit. Sed quia corporis A motus relatiuus respectu B desideratur, corpus B vt quiescens in B debet considerari. Quare transferatur id cogitatione ex M per rectam MB in B, peruenietque corpus L in N, ducta LN parallela et aequali ipsi MB. Curua igitur in qua est punctum N hoc modo inuentum, erit via a corpore A motu relatiuo descripta. Atque hoc motu relatiuo arcus AN eodem tempore percurretur, quo arcus AL et BM absoluuntur. Ex quo celeritas relatiua in N quoque innotescit. Q. E. I.

Corollarium 1.

94. Determinari igitur hoc modo poterit motus relatiuus corporis quocunque motu lati respectu corporis quomodocunque etiam moti.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

95. Intelligitur etiam ex solutione, quomodo datis curuis AN et AL vna cum motibus per eas inueniri possit curua BM et motus per eam. Nec non definietur curua AL ex curuis BM et AN.

Corollarium 3.

96. Perspicuum quoque est curuam BM ob punctum B arbitrarium infinitis modis posse aliter esse positam. Quia tamen arcus BM, qui eodem tempore, quo AL et AN, describitur, subtensa BM semper est aequalis et parallela lineae LN, ea semper erit sibi similis et aequalis et parallela, atque motus per eam perpetuo idem.

Scholion.

97. Et haec sunt, quae de comparatione motuum absolutorum et relatiuorum afferenda iudicaui. Motus autem relatiuus alias hoc modo solet describi, vt motus per AN dicatur motus corporis A, quod reuera in linea AL mouetur, qualis ex corpore B in BM moto spectatur. Spectator vero in corpore B relatiue quiescens ponitur, et ipsum B vt quiescens considerans. Ita motus stellarum relatiuus respectu telluris, congruit cum eo motu, quem nos in terra degentes eamque tanquam quiescentem considerantes intuemur. Terra enim ex B in M promota et stella ex A in L, videmus eam ex M secundum plagam ML et in distantia ML. Quia vero nos de loco B motos esse non apprehendimus, sed etiam nunc in B consistere putamus, videbimus stellam

M.E.C.D. 2017

Iam ex B non in L, ſed in N, eadem ſcilicet plaga eademque diſtantia. Propterea recta BN aequalis erit et parallela rectae ML, vt noſtro conſiderandi modo inuenimus.

SCHOLION GENERALE.

98. Iſtae motus leges, quas corpus ſibi relictum vel quietem vel motum continuando obſeruat, ſpectant proprie ad corpora infinite parua, quae vt puncta poſſunt conſiderari. In corporibus enim finitae magnitudinis quorum ſingulae partes alios habent motus inſitos, quaelibet pars quidem has leges obſeruare conabitur, quod autem non ſemper propter corporis ſtatum fieri poteſt. Corpus igitur ipſum eum ſequetur motum, qui ex ſingularum partium conatibus componitur, isque adhuc ob inſufficientiam principiorum non poteſt definiri, ſed haec tractatio ad ſequentia eſt differenda. Diuerſitas igitur corporum ſuppeditabit nobis operis diuiſionem primariam. Primo enim contemplabimur corpora infinite parua ſeu quae tanquam puncta ſpectari poſſunt. Deinde corpora finitae magnitudinis aggrediemur ea, quae ſunt rigida neque figuram ſuam mutari patiuntur. Tertio agemus de corporibus flexibilibus. Quarto de iis quae extenſionem et contractionem admittunt. Quinto plurium corporum ſolutorum motus examini ſubiiciemus, quorum alia impediunt, quin motus ſuos poſſint, vt conantur, abſoluere. Sexto vero de motu fluidorum erit agendum. De his vero corporibus non ſolum videbimus, quomodo ſibi re-

M.E.C.D. 2017

relicta motus continuent; ſed praeterea inquiremus, quomodo ea a cauſis externis ſcilicet potentiis afficiantur. Denique in his omnibus disquiſitionibus magnam inferet varietatem ſtatus corporum vel liber vel non liber. Per ſtatum non liberum hic intelligo, quando corpora impediuntur, quo minus in ea directione progrediantur, qua conantur; cuiusmodi eſt motus corporum pendulorum, quae, quia non poſſunt directe, vti conantur, deſcendere, oscillationes efficiunt. Ex quo intelligitur ſtatum liberum eſſe, quando corpora nullum inueniunt impedimentum in quamuis plagam progrediendi, in quam tum ex propria vi tum a potentiis ſollicitata tendunt. Apparet igitur, quibus de rebus in Mechanica ſit agendum, et quam ſint multa, quae etiam nunc nequidem ſunt libata. Nam praeter motum punctorum, quae adhuc ſunt tractata, tam pauca ſunt, vt fere omnia demum inuenire et ex principiis deriuare neceſſe ſit. Incipio igitur a motu punctorum liberorum a potentiis quibuscunque ſollicitatorum, quia, quos ſibi ipſa relicta ſequantur motus, hoc capite iam eſt oſtenſum. Hanc ob rem primum iſtum Tomum motui punctorum libero deſtinaui, in ſequente vero punctorum motum non liberum pertractare conſtitui; in quorum vtroque, quae occurrent, cum ex his iam traditis, tum ex ſequentibus principiis methodo analytica ſum deriuaturus.

CAPUT

M.E.C.D. 2017

CAPUT SECUNDUM
DE EFFECTU POTENTIARUM IN PUNCTUM LIBERUM AGENTIUM.

DEFINITIO 10.

99.

Potentia eſt vis corpus vel ex quiete in motum perducens, vel motum eius alterans. *Huiusmodi vis, ideoque et potentia eſt grauitas, per eam enim corpora, remotis impedimentis, ex quiete deorſum delabuntur, motusque ipſe deſcenſus ab ea continuo acceleratur.*

Corollarium 1.

100. Omne corpus ſibi relictum vel in quiete perſeuerat, vel motu aequabili in directum progreditur. Quoties igitur euenit, vt corpus liberum, quod quiescebat, moueri incipiat, aut motum vel non aequabiliter vel non in directum progrediatur, cauſa eſt potentiae cuidam adſcribenda: quicquid enim corpus de ſtatu ſuo deturbare valet, potentiam appellamus.

Scholion 1.

101. Doctrina de potentiis, quatenus plures corpori applicatae in aequilibrio conſiſtunt, corpusque in quiete conſeruant, iam in ſtatica eſt expoſita. Ibique potentia ita quoque eſt definita, vt denotet omne id, quod corpora mouere valet. Motus

M.E.C.D. 2017

tus vero ipſe in ſtatica non conſideratur, ſed ii tantum caſus inueſtigantur, quibus plures potentiae ſeſe deſtruunt, corpusque, in quod agunt, in quiete permanet. Nunc autem in Mechanica explicandum eſt, quomodo potentiae in corpus agentes, quae inter ſe non ſunt contrariae, re ipſa motum producant in corpore quiescente, in moto vero motum immutent.

Scholion 2.

102. Vtrum huiusmodi potentiae ex ipſis corporibus originem ſuam habeant, an vero per ſe tales dentur in mundo, hic non definio. Sufficit enim hoc loco potentias in mundo reuera exiſtere, id quod vel ſola vis grauitatis, qua omnia corpora terreſtria deorſum delabi conantur, docet. Praeterea vero huiusmodi vires corpora ſollicitantes conſpicuuntur in motibus planetarum, qui niſi a quadam potentia eſſent affecti, vniformiter in lineis rectis progredi deberent. Similes etiam potentiae deprehenduntur in corporibus magneticis et electricis ineſſe, quae certa tantum corpora attrahunt. Quas omnes a motu materiae cuiusdam ſubtilis oriri alii putant, alii ipſis corporibus vim attrahendi et repellendi tribuunt. Quicquid autem ſit, videmus certe ex corporibus elaſticis et vorticibus huiusmodi potentias originem ducere poſſe, ſuoque loco inquiremus, num ex inde phaenomena haec potentiarum explicari poſſint. Interim vero potentiarum quarumuis in corpora effectus determinare co-

M.E.C.D. 2017

conabimur, quo deinceps, cum ad eorum pleniorem cognitionem peruentum fuerit, ſtatim, quae eruta ſunt, ad eas accommodari queant.

DEFINITIO II.

103. Directio potentiae eſt linea recta, ſecundum quam ea corpus mouere conatur. *Ita grauitatis directio eſt linea recta verticalis, corpora enim grauia ſecundum eam delabi conatur.*

Scholion I.

104. In ſtatica, vbi omnia in quiete permanere ponuntur, omnes potentiae ſuas directiones perpetuo easdem ſeruare ſtatuuntur. At in mechanica, cum corpus perpetuo in alium perueniat locum, potentiae in id agentis directio continuo mutabitur: Pro diuerſis enim corporis locis vel potentiae directiones erunt inter ſe parallelae, vel ad ſixum punctum conuergentes, vel aliam tenebunt legem, ex quo tam multiplex potentiarum in mechanica tractatio oritur.

Scholion 2.

105. Potentiarum diuerſarum comparatio et menſura ex ſtatica quoque eſt repetenda. In qua traditum eſt potentiam aliquam a ſe habere ad aliam b vt m ad n, quando potentia a puncto A, n vicibus ſecundum directionem AB applicata, et potentia b, m vicibus ſecundum directionem contrariam AC, punctum A perſeuerat in aequilibrio. Tum enim potentia a, n vicibus ſumta aequiualet potentiae b, m vicibus ſumtae, eritque $na = mb$ ſeu $a : b = m : n$. Tab. I. Fig. 11.

M.E.C.D. 2017

Scholion 3.

106. In hoc vero differt menſura potentiarum mechanica a ſtatica, quod in hac omnes magnitudinem eandem retinere ponuntur, in mechanica vero, vt perueniente corpore in alium locum earum directiones mutabiles ponuntur; ita earum quantitas ſecundum certam legem variabilis eſſe poteſt.

PROPOSITIO 13.

Theorema.

107. *Quando punctum a pluribus potentiis eſt ſollicitatum, eundem ab iis adipiscetur motum, ac ſi ab vnica iis omnibus aequiualente fuiſſet ſollicitatum.*

Demonſtratio.

Tab. I. Fig. 12. Sit punctum A ſollicitatum a potentiis AB, AC, AD, AE, quibus aequiualeat potentia AM. Sumatur huic aequalis et contrarie poſita AN, haec, vt ex ſtatica notum eſt deſtruet actionem potentiarum AB, AC, AD, AE. Primo igitur momento potentia AN tantum imprimeret puncto A motum ſecundum, AN quantum potentiae AB, AC, AD, AE ſimul agentes ei imprimerent ſecundum earum mediam directionem, quae eſt AM. Potentia vero AM ſola, quia aequalis eſt potentiae AN, tantum quoque promouebit punctum A verſus AM, quantum AN verſus AN. Quare potentia AM tantum etiam puncto A imprimet motum ſecundum AM, quantum potentiae AB, AC, AD, AE ſimul agen-

tes

M.E.C.D. 2017

tes ſecundum eandem directionem AM. In vtroque igitur caſu effectus erit idem. Q. E. D.

Corollarium 1.

108. Si igitur punctum a pluribus potentiis ſollicitetur, poterit id tanquam ab vnica ſollicitatum conſiderari, quae iis omnibus eſt aequiualens.

Corollarium 2.

109. Atque viciſſim loco vnius potentiae in punctum agentis, poſſunt plures in id agentes conſiderari, quibus illa aequiualeat: id quod, vt ex ſtatica manifeſtum eſt, infinitis modis fieri poteſt.

Scholion.

110. Quia vero, quam primum corpus de loco ſuo eſt motum, potentiae in id agentes directiones ſuas et magnitudines mutant vel mutare ponuntur, potentia quoque aequiualens quouis momento erit alia. Hanc ob rem quouis momento potentiarum punctum ſollicitantium aequiualens debet inueſtigari, neque id diutius ab eadem potentia affici ponendum eſt quam per temporis elementum infinite paruum.

DEFINITIO 12.

111. Potentia abſoluta eſt potentia, quae in corpus ſiue motum ſiue quieſcens aequaliter agit. *Huiusmodi potentia abſoluta eſt vis grauitatis, quae corpora ſiue moueantur ſiue quieſcant aequaliter deorſum trahit.*

M.E.C.D. 2017

Corollarium.

112. Si igitur cognitus fuerit potentiae abſolutae effectus in corpus quiescens, innotescet quoque eius effectus in corpus vtcunque motum.

DEFINITIO 13.

113. Potentia relatiua eſt, quae aliter agit in corpus quiescens, aliter in motum. *Huiusmodi potentia eſt vis fluuii corpus ſecum abripientis, quo enim celerius corpus mouetur, eo vis fluuii in id fit minor: eaque prorſus euanescit, quando corpus iam eandem, quam habet fluuius, celeritatem eſt adeptum.*

Corollarium 1.

114. Si igitur data ſit corporis celeritas vna cum lege potentiae relatiuae, inueniri poterit vis, quantum potentia in corpus agit. Haecque deinde vt potentia abſoluta poterit conſiderari, quamdiu corpus eandem habet celeritatem, eiusque effectus ex potentiarum abſolutarum actione determinari. Vim enim potentiae relatiuae in corpus data celeritate motum determinare, nil aliud eſt, niſi potentiam abſolutam hoc caſu aequiualentem aſſignare.

Corollarium 2.

115. Hoc igitur differunt a ſe inuicem potentiae abſolutae et relatiuae, quod potentiae abſolutae quantitas et directio a ſolo corporis, in quod agit, loco pendeat; relatiuae vero quantitas et directio inſuper a corporis, in quod agit, celeritate.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

116. Reſpiciunt potiſſimum potentiae relatiuae ad motum corporum in fluidis, horum enim actio in corpora a celeritate eorum pendet relatiua; quae, quo eſt maior, eo quoque maiorem vim corpus a fluido patitur. Praeter alios autem caſus motuum in fluidis, qui maiorem cognitionem fluidorum requirunt, duo ſunt tractatu faciliores; alter quando fluidum quiescit, alter quando mouetur vniformiter in directum. Poterit vero iſte ad illum ſubſtituendo motum relatiuum loco abſoluti ſemper reduci; fluidum ſcilicet vt quiescens conſiderandùm eſt, in quo ſtatu quoque vi propria permanebit. Quae igitur in ſequentibus de potentiis relatiuis proferentur, ea ad motum corporum in fluidis quiescentibus potiſſimum pertinebunt. Actio vero fluidorum in corpora mota conſiſtit tota in motu eorum diminuendo, et propterea reſiſtentia appellatur, quae, quo celerius corpora mouentur, maior eſt quoque, et euanescit omnino, quando corpora quiescunt. Hanc ob rem in poſterum loco potentiarum relatiuarum media reſiſtentia ſubſtituemus; motus vero, qui a ſolis potentiis abſolutis afficiuntur, in vacuo fieri ponemus.

Scholion 2.

117. Motus quidem in mediis reſiſtentibus, ſi maxime ordinem ſequi vellemus, ad vltimam partem, quae fluidis eſt deſtinata, eſſet referenda, cum etiam nunc non conſtet, qua lege fluida cor-

M.E.C.D. 2017

poribus in iis motis reſiſtant. Verum quia haec materia a plerisque ita tractari eſt ſolita, vt prorſus a fluidorum natura ſit reuocata, et vti hypotheſis pure mathematica conſiderata: hanc methodum retinere malui, quam plurima elegantia problemata praeterire, quae in tractatiooe de fluidis etiam locum non inueniunt. Attamen hanc medii reſiſtentiam non niſi punctorum motui accommodabo, pro corporibus enim finitae magnitudinis calculus fieret inſuperabilis. Quando autem corpora inſtar punctorum conſiderari poſſunt, hoc inde nascitur commodum, quod directio vis reſiſtentis congruat cum motus directione, ſi quidem ea a fluido quiescente oriatur. Hanc ob rem in hac de motu punctorum tractatione potentiis relatiuis eandem ſemper directionem tribuemus, quam habet ipſum punctum, eamque ſemper vt motum diminuentem conſiderabimus.

PROPOSITIO 14.

Problema.

118. *Dato effectu potentiae abſolutae in punctum quiescens, inuenire effectum eiusdem potentiae in punctum idem quomodocunque motum.*

Solutio.

Tab. II. Fig. 1. Sit punctum in A poſitum, vnde moueatur celeritate *c* ſecundum directionem AB, potentiae vero in id agentis directio ſit AC. Aſſumatur temporis aliquod elementum *dt*, hocque tempusculo protrahatur punctum A, ſi quiesceret in A, per ſpatiolum

M.E.C.D. 2017

olum AC, quod vocetur *dz*, ita vt poſt tempus *dt* non amplius ſit in A, ſed in C. Hic motus igitur per AC erit effectus potentiae in punctum quiescens. Effectus vero eiusdem potentiae, quia ponitur abſoluta in idem punctum motum aequalis eſſe debet effectui in quiescens (111.). Abſcindatur nunc in puncti A directione, quam habet ſecundum AB, ſpatium AB, quod celeritate ſua *c* tempusculo *dt* percurret, ſi a nulla potentia ſollicitaretur, erit AB $=cdt$ (30.). Agente vero potentia poſt temporis elementum *dt* punctum non reperietur in B, ſed alibi in D, ita vt effectus, qui menſurandus eſt deuiatione a puncto B, quae eſt ſpatium BD, aequalis ſit effectui eiusdem potentiae in punctum quiescens (111.) i. e. AC. Erit ergo BD=AC. Praeterea vero erit BD ipſi AC parallela, quia BD eſt effectus potentiae, ideoque in eius directionem incidere debet, quae durante tempusculo infinite paruo *dt* non mutatur. Quamobrem punctum A celeritatem *c* habens ſecundum directionem AB, et ſollicitatum a potentia abſoluta, elapſo tempusculo *dt*, non in B, ſed D reperietur, ducta BD aequali et parallela ipſi AC. Spatia vero infinite paruo tempusculo percurſa, vt lineolae rectae poſſunt conſiderari; propterea punctum tempusculo *dt* ſpatium AD percurriſſe cenſendum eſt. Q. E. I.

Corollarium I.

119. Quia etiam motus per ſpatiola infinite parua pro aequabilibus haberi poſſunt, (33.) erit celeritas, qua elementum AD percurritur $=\frac{AD}{dt}$ (30.)

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

120. Ponatur celeritas per AD$=c+dc$, quia praecedens erat c (35.), erit $c+dc=\frac{AD}{dt}$, at ante erat AB$=cdt$, ex quo fit $c=\frac{AB}{dt}$. Prodit ergo $dc=\frac{AD-AB}{dt}$. Abſcindatur igitur in AD portio Ab=AB, erit $dc=\frac{Db}{dt}$.

Scholion 1.

121. Notandum autem eſt AC vel BD infinities eſſe minorem, quam AB, nam AB eſt ſpatium celeritate finita tempore dt percurſum, at AC ſpatiolum celeritate infinite parua eodem tempore abſolutum, corpori enim quiescenti nulla potentia finitam celeritatem tempusculo infinite paruo poteſt inferre.

Corollarium 3.

122. Hanc ob rem angulus BAD erit infinite paruus, et iunctis punctis B et b, lineola Bb erit in AD perpendicularis. Vocetur ſinus anguli BAC, quippe qui datur k, poſito ſinu toto 1, erit ſinus ang. BDb etiam k, quia illi eſt aequalis, ſinus vero ang. DBb erit $\sqrt{(1-kk)}$. Ex his, quoniam eſt BD$=$AC$=dz$, erit D$b=dz\sqrt{(1-kk)}$ et B$b=kdz$.

Corollarium 4.

123. Incrementum igitur celeritatis dc, quod ante inueneramus $=\frac{Db}{dt}$, erit $\frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{ds}$. Intelligitur vero dz eſſe infinities minus quam dt, eſt enim dz infinite paruum reſpectu AB i. e. cdt, ideoque etiam reſpectu ipſius dt, quia c ponitur finitae magnitudinis.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

124. Inuento celeritatis incremento *dc* a potentia illato, considerandus quoque est angulus BAD declinationem puncti ab insita directione AB repraesentans, quae itidem a potentia producitur. Est vero eius sinus $=\frac{Bb}{AB}=\frac{kdz}{cdt}$.

Corollarium 6.

125. Duplex igitur est effectus potentiae punctum motum sollicitantis. Alter in celeritate immutanda consistit, alter in eius directione. Ille dat incrementum celeritatis $dc=\frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{dt}$, hic vero anguli declinationis sinum $=\frac{kdz}{cdt}$.

Corollarium 7.

126. Si angulus BAC fuerit rectus, ideoque $k=1$; erit $dc=0$. Hoc igitur casu celeritas a potentia manet immutata. Anguli vero declinationis BAD sinus fit $=\frac{dz}{cdt}$.

Corollarium 8.

127. Si angulus BAC fit obtusus seu recto maior erit eius cosinus $\sqrt{(1-kk)}$ negatiuus, et propterea celeritatis incrementum *dc* prodibit negatiuum $=\frac{-dz\sqrt{(1-kk)}}{dz}$. Id quod indicat, celeritatem a potentia diminui. Declinatio vero $\frac{kdz}{cdt}$ eadem manet, quae ante.

Corollarium 9.

128. Si potentiae directio AC cum motus puncti A directione AB congruit, fit $k=0$. Hoc igi-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

igitur casu motus directio a potentia non immutatur. Celeritatis vero incrementum dc fiet $=\frac{dz}{dt}$, si potentiae directio consspirat cum directione motus. Sin autem ei fuerit contraria, fit $dc=\frac{-dz}{dt}$.

Scholion 2.

129. Apparet itaque ex huius propositionis solutione, quomodo potentiae absolutae effectus in punctum quomodocunque motum inueniri debeat, si cognitus fuerit effectus eiusdem potentiae in idem punctum quiescens. Hanc ob rem in sequentibus huius capitis propositionibus sufficiet punctum a potentiis sollicitatum quiescens ponere, vel motum in eadem, quam habet potentia, directione. Nam si punctum A habeat celeritatem c, eaque moueatur secundum directionem AB; interea vero sollicitetur a potentia eandem habente directionem AB, ita vt elapso tempusculo dt non in B, quo sola celeritate c latum perueniret, sed in b reperiatur, erit potentiae effectus spatiolum Ab. Atque per tantumdem spatiolum ao punctum A, si in a quiesceret, fuisset eodem tempusculo dt pertractatum. Innotescit ergo ex motu puncti A a potentia sollicitati effectus eiusdem potentiae in idem punctum quiescens, porroque hinc effectus potentiae in punctum vtcunque motum.

Tab. II. Fig. 2.

PROPOSITIO 15.

Problema.

130. *Dato celeritatis incremento, quod quaedam potentia in puncto* A *tempusculo* dt *producit, inuenire*

M.E.C.D. 2017

nire incrementum celeritatis, quod eadem potentia in eodem puncto tempusculo dτ *producit.*

Solutio.

Habeat punctum A celeritatem *c* eandemque directionem AB, quam habet potentia id sollicitans, sitque *ao* spatiolum, per quod haec potentia punctum A, si quiesceret, tempusculo *dt* traheret. Sit porro AB spatium, quod punctum A celeritate *c* tempusculo *dt* percurrit, percurret idem insuper a potentia sollicitatum spatium A*b*, sumto B*b*$=$*ao*: hocque spatium quia est infinite paruum aequabili motu descripsisse aestimandum est. Sequente igitur tempusculo *dt* hac celeritate percurreret spatium *b*C$=$A*b*, nisi a potentia sollicitetur; at agente iterum potentia, quae immutata manere ponitur saltem per tempus infinite paruum, perueniet id vltra C in *c*, sumto C*c*$=$*ao*. Simili modo tertio tempusculo *dt*, percurret spatium *cd*$=$*c*D$+$D*d*, vbi *c*D$=$*bc* et D*d*$=$*ao*. Et quarto tempusculo *dt* percurret spatium *de*$=$*d*E$=$F*e*, vbi rursus est *d*F$=$*cd* et F*e*$=$*ao*. Est vero A*b*$=$AB$+$*ao*; *bc*$=$AB$+$2*ao*; *cd*$=$AB$+$3*ao*; *dc*$=$AB$+$4*ao*. Erit ergo $\frac{ao}{dt}$ incrementum celeritatis tempusculo *dt* productum a potentia; $\frac{2ao}{dt}$ erit celeritatis incrementum tempusculo 2*dt* acquisitum; similiter $\frac{3ao}{dt}$ incrementum tempusculi 3*dt*: et generaliter tempusculo *ndt* crescet celeritas puncti *c* elemento $\frac{nao}{dt}$. Ponatur *ndt*$=$*d*τ, erit *n*$=$$\frac{d\tau}{dt}$. Celeritatis igitur incrementum tempus-

Tab. II. Fig. 2.

M.E.C.D. 2017

culo $d\tau$ acquisitum erit $\frac{\alpha o . d\tau}{dt^2}$. Quia vero pro tempusculo dt incrementum celeritatis est $\frac{\alpha o}{dt}$, prodibit ista analogia; Celeritatis incrementum temp. dt est ad celeritatis incrementum temp. $d\tau$ acquisitum vt dt ad $d\tau$. Consequenter celeritatis incrementa sunt temporibus, quibus producuntur, proportionalia. Q. E. I.

Corollarium 1.

131. Apparet haec incrementa celeritatis non pendere ab ipsa celeritate c, sed eundem habitura esse valorem, quantumuis magna aut parua ponatur c. Hocque natura potentiarum absolutarum melius intelligitur, quod aequaliter agant in corpora mota et quiescentia.

Corollarium 2.

132. Si ergo fuerit $c = o$, punctumque A quiescens a potentia ad motum sollicitetur, erunt ipso motus initio celeritates acquisitae, vt tempora: scilicet duplo tempore duplam, triplo triplam adipiscetur celeritatem.

Corollarium 3.

133. Si igitur ipso motus initio celeritas tempusculo t acquisita, dicatur c, et spatium percursum sit s; erit $t = nc$. Sed est etiam $t = \int \frac{ds}{c}$ (37). Ergo prodit $nc = \int \frac{ds}{c}$, seu $ncdc = ds$ hincque $s = \frac{nc^2}{2} = \frac{t^2}{2n}$. Spatia igitur primo motus initio descripta sunt in duplicata ratione temporum, siue celeritatum, per ea spatia acquisita. Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

134. Veritas huius propoſitionis, quod celeritatis incrementa temporibus, quibus generantur, ſint proportionalia etiam in quantitatibus finitis conſtat, ſi modo potentia punctum ſollicitans manet eadem, et eandem perpetuo retinet directionem, quam habet ipſe puncti motus. In infinite paruis hac reſtrictione non eſt opus, potentia enim vtcunque variabilis per tempusculum quam minimum nullius mutationis capax eſt conſideranda. Quomodo autem ſe habeant diuerſarum potentiarum effectus mox ſumus expoſituri, atque etiam in punctis, quae a potentiis ſollicitantur diuerſitatem ponemus, vt aliud in data ratione maius minusue eſſe poſſit. Neque vero haec inaequalitas aduerſatur extremae punctorum paruitati, non enim puncta mathematica intelligimus, ſed phyſica ex quorum compoſitione corpora oriuntur. Poſſunt enim duo pluraue in vnum coalescere concipi, quod, quanquam ſimplicibus eſt maius, infinite tamen exiguae manet magnitudinis.

Scholion 2.

135. Theoremate hoc ex ſolutione problematis inuento primus eſt vſus Galilaeus ad motum grauium delabentium inueſtigandum. Eius quidem demonſtrationem non dedit, ſed tamen propter inſignem eius cum phaenomenis congruentiam de eo amplius dubitari noluit. Refutauit vero etiam alias hac de re opiniones, quo ſuam ſententiam non

M.E.C.D. 2017

parum confirmauit. Alii enim ſtatuebant celeritatis incrementa non temporibus, ſed ſpatiis percurſis eſſe proportionalia, huius vero abſurditas a Galilaeo iam tunc plerisque Philoſophis erat perſuaſa. Apparet autem, ſi potentiarum actiones hanc ſequerentur legem nulla corpora ad motum perduci vnquam poſſe. Foret enim $dc = nds$ et $c = ns$, tempus vero t, quod eſt $\int \frac{ds}{c}$ euaderet $= \frac{1}{n}\int \frac{dc}{c} = \frac{1}{n} lc = \frac{1}{n} lns$ conſt. quae conſtans eſſe debet $= -\frac{1}{n} lon$. Tempus ſcilicet logarithmo ſpatii deſcripti per o diuiſi eſſet proportionale et propterea infinitum. Nullum igitur corpus ex quiete vnquam ad motum poſſet perduci. Recte itaque Galilaeus aduerſariis reſpondit, quod in inſtanti motus finitus hoc poſito generari deberet, alioquin motum produci prorſus non poſſe. Etſi enim in initio infinite parua in puncto ponatur celeritas, ea tamen ab huiusmodi potentia imaginaria nunquam effici poterit finita. Ex data vero problematis ſolutione intelligitur legem inuentam neceſſariam eſſe, neque vllam aliam vi principii contradictionis exiſtere poſſe.

PROPOSITIO 16.

Theorema.

136. *Potentia* q *in punctum* b *eundem habet effectum, quem potentia* p *in punctum* a; *ſi ſuerit* $q : p = b : a$.

Demonſtratio.

Ponatur $q = np$, erit $b = na$. Concipiatur iam punctum na in n partes aequales diuiſum, quarum quae-

M.E.C.D. 2017

quaelibet erit $=a$; harum partium vnaquaeque ſollicitata ſit a parte *n* ſima ipſius potentiae *np* id eſt a potentia *p*. His poſitis quaeuis pars eodem modo trahetur a ſua potentia, quo punctum ipſum *a* a potentia *p*. Neque vero hae puncti *na* partes a ſuis potentiis ſollicitatae a ſe inuicem ſegregabunt; ſed perpetuo vnitae manebunt, ſi quidem initio fuerint coniunctae. Peſpicuum autem eſt hos duos caſus eodem redire, nec a ſe inuicem discrepare, ſiue punctum *na* a potentia *np* trahatur, ſiue quaeuis puncti *na* pars *a* a ſimili parte *p* potentiae *np* trahatur, dummodo partes non a ſe inuicem diuellantur. Quapropter conſtat propoſitum *na* aeque a potentia *np* vrgeri ac punctum *a* a potentia *p*. Q. E. D.

Corollarium 1.

137. Punctum igitur *na* a potentia *np* easdem adipiscetur accelerationes, quas punctum *a* a potentia *p*.

Corollarium 2.

138. Ad eandem ergo maiori puncto celeritatem inducendam, quam minori, opus eſt maiori potentia, idque tanto maiori, quanto illud punctum maius eſt quam hoc.

Scholion 1.

139. Propoſitio iſta fundamentum complectitur ad vim inertiae metiendam, hac enim nititur omnis ratio, quare corporum materia ſeu maſſa in Mechanicis conſiderari debeat. Attendi enim oportet ad punctorum numerum, ex quibus corpus mo-

M.E.C.D. 2017

mouendumeſt conflatum, eique maſſa corporispro-portionalis eſt ponenda. Puncta vero eainter ſe aequalia cenſeri debent, non quae aeque ſunt parua, ſed in quae eadem potentia aequales exerit effectus. Si igitur vniuerſam materiam in huiusmodi aequalia puncta ſeu elementa concipiamus diuiſam, quanti-tatem materiae cuiusque corporis ex numero pun-rum ex quibus eſt compoſitum, aeſtimari neceſſe eſt. Vim autem inertiae proportionalem eſſe huic punctorum numero ſeu quantitati materiae in ſe-quenti propoſitione demonſtrabimus.

Corollarium 3.

140. Aequalia ergo ſunt, quod ad quantita-tem materiae attinet, duo corpora, quae ex aequa-li punctorum numero ſunt compoſita. Atque duo corpora ſunt in ratione m ad n, ſi punctorum, ex quibus conſtant, numeri teneant rationem hanc m ad n.

Scholion 2.

141. Oſtendetur vero in ſequentibus hanc ipſam quantitatis materiae menſurandae rationem re ipſa adhiberi, et apud omnes eſſe receptam. Ex pondere enim cuiusque corporis materia ſolet inue-ſtigari, ponderique materiae quantitas proportionalis cenſetur. Corpora autem omnia aequaliter in ſpa-tio vacuo descendere per experimenta conſtat, et propterea omnia a vi grauitatis aequaliter acceleran-tur. Quo circa neceſſe eſt, vt vis grauitatis in ſin-gula corpora agens eorum quantitati materiae ſit pro-

M.E.C.D. 2017

proportionalis. Pondus vero corporis indicat vim grauitatis, qua illud ſollicitatur. Quare cum illa ſit proportionalis materiae quantitati, ponderatione ſimul quantitas materiae innotescit, eo ipſo ſenſu, quem hic materiae tribuimus.

PROPOSITIO 17.

Theorema.

142. *Vis inertiae cuiuscunque corporis proportionalis eſt quantitati materiae, ex qua conſtat.*

Demonſtratio.

Vis inertiae eſt vis in quouis corpore inſita in ſtatu ſuo quietis vel motus aequabilis in directum permanendi (74.). Ea igitur aeſtimanda eſt ex vi, vel potentia, qua opus eſt ad corpus ex ſtatu ſuo deturbandum. Diuerſa vero corpora aequaliter in ſtatu ſuo perturbantur a potentiis, quae ſunt vt quantitates materiae in illis contentae. Eorum igitur vires inertiae proportionales ſunt his potentiis. Conſequenter etiam materiae quantitatibus ſunt proportionales. Q. E. D.

Corollarium 1.

143. Perſpicitur ſimul ex demonſtratione idem corpus ſiue quiescat ſiue moueatur eandem habere ſemper vim inertiae. Nam ſiue quiescat ſiue moueatur aequaliter ab eadem potentia afficitur ſcilicet abſoluta.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

144. Neque vero vis inertiae homogenea eſt cum vlla potentia: fieri enim non poteſt, vt corpus quantumuis magnum a minima potentia non afficiatur, vt in ſequentibus demonſtrabitur.

Scholion.

145. Apparet hinc origo vocis vis inertiae, quam ſupra (76.) innuimus, ex eo, quod vis inertiae actioni potentiarum quodammodo reſiſtit. *Neutonus* quoque in Princ. Phil. Nat. Definitione III, cum vi inertiae et hac vi reſiſtendi eandem ideam coniungit, et vtramque quantitati materiae proportionalem ſtatuit.

PROPOSITIO 14.

Problema.

146. *Dato effectu vnius potentiae in punctum aliquod, inuenire effectum cuiusuis alius potentiae in idem punctum.*

Solutio.

Tab. II. Fig. 3.

Quiescat punctum in A et conſiſtat potentiae datae AB in id effectus in hoc, quod ab ea tempusculo *dt* per ſpatiolum A*b* deducatur. Quaeritur iam per quantum ſpatium idem hoc punctum tempusculo *dt* ab alia potentia AC protrahatur. Ducantur lineae AB et AC, ita vt iuncta BC ſit in AC normalis, id quod ſemper fieri poteſt, ſi AC$\lessgtr$AB. At ſi AC$\gtrless$AB ſolutio ex illa facile deducetur. Ex altera parte ducatur recta AD ita vt BAD ſit triangu-

M.E.C.D. 2017

gulum iſosceles. Biſecentur AB et AD in E et F, et per AE repraeſentetur dimidium potentiae AB, et per AF tantadem potentia. Manifeſtum eſt potentiam AC idem praeſtare in punctum A, quod duae potentiae AE et AF coniunctim (107.) quia AC aequiualet ob parallelogrammum AECF ambabus AE et AF. Loco igitur potentiae AC ponamus punctum A ſollicitari a potentiis AE et AF. Hoc vero modo rem concipiamus, quaſi quaelibet potentia AE et AF dimidium puncti A afficiat. Medietates vero iſtae ſint ad tempusculum *dt* ſaltem a ſe inuicem ſolutae, hocque finito eas ſubito ad ſe inuicem rurſus accedere ponemus. Quia nunc potentia AB punctum A tempusculo *dt* per ſpatium A*b* protrahit, protrahet dimidia potentia AE puncti dimidium eodem tempusculo *dt* per idem ſpatium A*b* (136.). Similiter tempusculo *dt* altera medietas puncti A a potentia AF protrahetur per ſpatium A*d*=A*b*. Finito igitur tempusculo *dt*, altera medietas puncti A erit in *b* altera in *d*. Coeant nunc rurſus ſubito ad ſe mutuo, ſeu contrahantur vi cohaeſionis infinita, conuenient in puncto medio *c* lineolae *bd*: nulla enim eſt ratio, quare propius ad *b* quam *d* conueniant. A potentiis ergo AE et AF coniunctim agentibus punctum A tempusculo *dt* per ſpatiolum A*c* protrahetur. Quamobrem etiam potentia AC aequiualens potentiis AE et AF tempusculo *dt* protrahet per ſpatiolum A*c*. Eſt vero *bd* parallela ipſi BD et propterea A*b*: A*c*=AB : AC. Dato igitur ſpatiolo A*b*, per quod punctum A a po-

M.E.C.D. 2017

tentia AB protrahitur, dabitur ſpatiolum Ac, per quod idem punctum A ab alia potentia AC protrahitur eodem tempusculo. Atque ſimul patet, ſi effectus Ac minoris potentiae AC fuerit datus, quantus ſit maioris AB effectus Ab. Q. E. I.

Corollarium 1.

147. Spatia igitur, per quae aequalia puncta a quibuscunque potentiis protrahuntur aequalibus temporibus, ſunt vt ipſae potentiae.

Corollarium 2.

148. Quia ſpatia motus initio deſcripta inaequalibus temporibus ſunt in duplicata ratione temporum (133.); erunt ſpatia per quae aequalia puncta a quibuscunque potentiis inaequalibus temporibus protrahuntur in ratione compoſita ex ratione ſimplici potentiarum et duplicata temporum.

Scholion.

149. Principium, quo in huius problematis ſolutione ſumus vſi, in hoc conſiſtit, vt corpus a pluribus potentiis ſollicitatum in totidem partes concipiatur diuiſum, quarum quaelibet ab vna tantum potentia trahatur. Deinde cum ſingulae a potentiis ſuis momento temporis fuerint protractae, ſubito ad ſe mutuo compelli in vnumque congredi intelligantur, quo facto locus, in quo conuenerunt, erit is, ad quem integrum corpus ab omnibus potentiis ſimul agentibus eodem tempore fuiſſet pertractum. Veritas huius principii ex hoc poteſt perſpici, quod corporis partes elaſtris fortiſſimis coniun-

M.E.C.D. 2017

iunctae poſſint concipi, quae quanquam indeſinenter agunt, tamen per interualla cedere moxque ſe ſubito contrahere vi infinita poni poſſunt, ita vt tempus, quo partes ſolutae ad ſe inuicem reducuntur, ſit nullum. Eodem vero hoc principio iam alii in pluribus mechanicis problematibus ſoluendis ſunt vſi. Atque plerique adoptauerunt iſtud re non diuerſum, quod potentias non indeſinenter, ſed per ſaltus effectum ſuum exercere poſuerunt. Hoc autem principio admiſſo manifeſtum eſt duas partes aequales recta ad ſe mutuo accedere et interualli ſui medio congredi debere.

PROPOSITIO 19.

Theorema.

150. *Moueatur punctum in directione* AM *et ſollicitetur, dum per ſpatiolum* Mm *percurrit a potentio* p *ſecundum eandem directionem trahente, erit incrementum celeritatis, quod interea punctum acquirit vt potentia ſollicitans ducta in tempusculum, quo elementum* Mm *percurritur.* Tab. II. Fig. 4.

Demonſtratio.

Sit tempusculum *dt*, et abſoluat punctum hoc tempore ſpatium Mμ, ſi a potentia non ſollicitaretur; ſed celeritate, quam in M habuit, vniformiter progredi pergeret. Effectus vero potentiae in hoc conſiſtit, vt punctum ab ea vlterius per μ*m* protrahatur, quod ſpatiolum aequale eſt illi, per quod idem punctum, ſi quiesceret ab eadem potentia eodem tempusculo *dt* protraheretur, quia potentia po-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

nitur abſoluta (111.). Huic ſpatiolo dato tempore proportionale eſt celeritatis incrementum. At ſi potentia eſt eadem, celeritatis incrementum eſt vt tempusculum *dt* (130.). Quare cum ſpatiolum $m\mu$ ſeu incrementum celeritatis ſit dato tempusculo vt potentia *p*, erit celeritatis incrementum pro quocunque tempusculo et quibuscunque potentiis vt *pdt*. i. e. vt potentia ducta in tempusculum. Q. E. D.

Corollarium 1.

151. Sit puncti in M celeritas *c*, et ſpatiolum $M m = ds$, erit $dt = \frac{ds}{c}$, quia ad tempus determinandum, elementum Mm motu aequabili deſcribi ponendum eſt. Cum autem ſit *dc* vt *pdt*, erit quoque *dc* vt $\frac{pds}{c}$, ſeu *cdc* vt *pds*. Incrementum ergo quadrati celeritatis eſt vt potentia ducta in ſpatii elementum percurſum.

Corollarium 2.

152. Apparet igitur non ſolum verum eſſe hoc theorema, ſed etiam neceſſario verum, ita vt contradictionem inuolueret ponere $dc = p^2 dt$ vel $p^3 dt$ aliamue functionem loco *p*. Quae omnes cum Clar. *Dan. Bernoullio* in Comment. Tom. I. aeque probabiles videantur, de rigidis harum propoſitionum demonſtrationibus maxime eram ſollicitus.

Scholion.

153. Propoſitionis huius demonſtratio facilius ſequitur ex 148. vnde prodit ſpatiolum $m\mu$ propor-

M.E.C.D. 2017

portionale potentiae p ductae in quadratum tempusculi dt, ita vt sit $m\mu$ vt pdt^2. At $m\mu$ diuisum per tempus dt dat incrementum celeritatis; quare celeritatis incrementum erit vt pdt, quemadmodum in propositione erat enunciatum.

PROPOSITIO 20.

Theorema.

154. *Congruente puncti directione motus cum potentiae directione, erit incrementum celeritatis, vt potentia ducta in tempusculum et diuisa per materiam seu quantitatem puncti.*

Demonstratio.

Sint duo puncta seu corpuscula inaequalia A et B mota in rectis AM, BN. Sollicitentur ea a potentiis p et π respectiue, dum percurrunt spatiola Mm, Nn, et sint tempora, quibus ea percurruntur dt, $d\tau$. Manifestum est punctum B a potentia π eodem modo affici ac punctum A a potentia $\frac{A\pi}{B}$ (136.). Quare substituto loco B puncto ipsi A aequali, pro potentia π substitui debet potentia $\frac{A\pi}{B}$, hocque modo obtinemus casum propositionis praecedentis, quo puncta ponuntur aequalia. Hanc ob rem incrementum celeritatis per Mm est ad incrementum celeritatis per Nn vt pdt ad $\frac{A\pi}{B}d\tau$, seu vt $\frac{pdt}{A}$ ad $\frac{\pi d\tau}{B}$ (150.). Ex quo constat propositum, quod celeritatis incrementum, sit vt factum ex potentia et tempusculo diuisum per puncti materiam seu quantitatem. Q. E. D.

Tab. II. Fig. 5.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

155. Si igitur celeritas puncti A fuerit c, erit $dc = \frac{npdt}{A}$, vbi n in omnibus casibus eundem denotat numerum, neque enim a potentia neque a tempusculo neque a puncti quantitate pendet.

Corollarium 2.

156. Quantitas materiae A hic in considerationem venit quatenus potentiae sollicitanti reluctatur, i. e. quatenus congruit cum vi inertiae. Hanc ob rem est celeritatis incrementum vt potentia sollicitans et tempusculum directe, atque inuerse vt vis corporis inertiae.

Corollarium 3.

157. Posito spatio $Mm = ds$, erit $dt = \frac{ds}{c}$. Hinc fiet $dc = \frac{npds}{Ac}$, seu $cdc = \frac{npds}{A}$. Quare incrementum quadrati celeritatis proportionale est facto ex potentia in spatiolum percursum diuiso per massam seu vim inertiae corpusculi.

Scholion.

157. Propositio ista complectitur omnia principia hactenus tradita motus naturam definientia, omnesque leges motus, si quidem potentiae directio cum motus directione congruit. Quamobrem si haec propositio cum decima quarta coniungitur, qua effectus potentiarum oblique agentium determinatur, omnia habebuntur principia, ex quibus punctorum a quibuscunque potentiis sollicitatorum motus possunt inueniri.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

159. Quia est $dc = \frac{npdt}{A}$, erit spatiolum per quod punctum A a potentia p tempusculo dt perducitur $= \frac{npdt^2}{A}$. Est enim hoc spatiolum factum ex dc in dt. Nam dicto hoc spatiolo dz est $dc = \frac{dz}{dt}$ (128.), adeoque $dz = dc\,dt = \frac{npdt^2}{A}$.

PROPOSITIO 21.

Problema.

160. *Potentiae cuiuscunque in punctum motum oblique agentis effectum determinare.* Tab. II. Fig. 1.

Solutio.

Habeat punctum A celeritatem c directionemque AB. Sollicitetur vero a potentia p, cuius directio AC cum AB faciat angulum, cuius sinus est k. Perspicuum est punctum A sibi relictum neque a potentia sollicitatum in recta AB esse progressurum, tempusculoque dt percursurum spatium $AB = cdt$ (30.). Agente vero potentia p declinabit punctum A a recta AB, percurretque interea spatiolum AD, vt in prop. 14 est ostensum. Posuimus autem ibi AC seu $BD = dz$, quod est spatiolum per quod punctum A, si quiesceret, a potentia p tempore dt pertraheretur. Est ergo $dz = \frac{npdt^2}{A}$ (159.). Anguli igitur BAD sinus, qui inuentus est $= \frac{kdz}{cdt}$ (124.) erit $= \frac{nkpdt}{Ac}$. Atque celeritatis incrementum dc, quod erat $= \frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{dt}$ (123), fit $= \frac{npdt\sqrt{(1-kk)}}{A}$. Q. E. I.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

161. Vocetur ſpatium AD$=ds$, erit $dt=\frac{ds}{c}$ adeoque poſito $\frac{ds}{c}$ loco dt, prodibit $dc=\frac{npds\sqrt{(1-kk)}}{Ac}$. Ducatur ex D in directionem potentiae AE perpendicularis DE, ſitque AF$=dy$, et DF$=dx$, erit $ds^2=dx^2+dy^2$, et $k=\frac{dx}{ds}$, et $\sqrt{(1-kk)}=\frac{dy}{ds}$. Proueniet ergo $dc=\frac{npdy}{Ac}$ ſeu $Acdc=npdy$.

Tab. II. Fig. 6.

Corollarium 2.

162. Ducatur ad curuam, quam corpusculum hoc modo deſcribit, in A radius osculi AO, erit Bb:AB$=$AD:AO. Quare erit AO$=\frac{AB.AD}{Bb}$. Eſt vero $\frac{Bb}{AB}$ ſinus anguli BAD, qui inuentus eſt $=\frac{nkpdt}{Ac}$. Erit ergo $\frac{Bb}{AB}=\frac{npdxdt}{Acds}$, atque ob AD$=ds$, prodibit AO$=\frac{Acds^2}{npdxdt}$.

Corollarium 3.

163. Quia vero eſt $dt=\frac{ds}{c}$, erit AO$=\frac{Ac^2ds}{npdx}$. Vocetur radius osculi AO$=r$, habebitur $nprdx=Ac^2ds$.

Corollarium 4.

164. Si potentiae p directio AE incidat in normalem AO, fiet AF$=dy=o$, et DF$=dx=$AD$=ds$. Quamobrem erit $cdc=o$, atque idcirco haec potentia celeritatem non immutabit.

Corollarium 5.

165. Hoc porro caſu erit $npr=Ac^2$ ob $dx=ds$, atque ideo $r=\frac{Ac^2}{np}$. Haec igitur potentia, cuius di-

M.E.C.D. 2017

directio eſt normalis in corporis directionem efficit, vt corpus non in recta motum ſuum abſoluat, ſed in arcu curuae.

Corollarium 6.

166. Si potentiae p directio incidat in tangentem AB; fiet $dx=o$ et $dy=ds$. Habebitur ergo $Acdc=npds$. In hac igitur directione potentia p celeritatem corporis maxime augebit.

Corollarium 7.

167. Si potentiae p directio in oppoſitam ipſi AB directionem incidat, ita vt motui corporis ſit contraria; fiet p quantitas negatiua, habebiturque $Acdc=-npds$. Tantum igitur hoc caſu minuetur celeritas, quantum ante augebatur.

Corollarium 8.

168. In vtroque autem caſu, quo directio potentiae p in tangentem incidit, erit $r=\frac{Ac^2\,ds}{np.o}$ ob $dx=o$. Tum igitur directio corporis non mutabitur, ſed id in recta moueri perget.

Corollarium 9.

169. Determinato ergo in vnico caſu ex experimento valore litterae n, inſeruiet is pro omnibus caſibus. Tum igitur omnium, quae in motibus poſſunt deſiderari, poterunt aſſignari valores abſoluti.

Corollarium 10.

170. Ex corollario primo prodit $A=\frac{npdy}{cdc}$. Quo valore in tertio ſubſtituto habebitur $nprdx$

M.E.C.D. 2017

$= \frac{npcdyds}{dc}$, seu $rdxdc = cdyds$. In qua aequatione neque n neque A neque p ineſt, haec igitur valet pro motu puncti cuiuscunque a quacunque potentia ſollicitati.

Corollarium II.

171. Quanquam autem in iſta aequatione ipſa potentia p non ineſt, tamen eius directio a qua relatio elementorum dx et dy pendet, adhuc ſuper eſt. Data igitur directione potentiae punctum in quouis loco ſollicitantis, et ipſa curua in qua punctum mouetur, poterit ex his ſolis datis determinari puncti celeritas in quouis loco. Erit enim $\frac{dc}{c} = \frac{dyds}{rdx}$ ſeu $c = e^{\int \frac{dyds}{rdx}}$ vbi e denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt 1.

Corollarium 12.

172. Quia porro eſt $dt = \frac{ds}{c}$, erit $t = \int e^{-\int \frac{dyds}{rdx}} ds$. Hinc igitur ſimul innotescit tempus, quo quaeuis curuae portio deſcribitur, neque ad hoc pluribus opus eſt datis, quam ipſa curua, et directione potentiae.

Corollarium 13.

173. Si ex O in potentiae directionem AE demittatur perpendicularis OE, quae a quibusdam coradius appellatur, erit $ds : dx = AO : AE$. Poſito ergo coradio $AE = q$, erit $\frac{rdx}{ds} = q$. Fiet igitur $c = e^{\int \frac{dy}{q}}$, et $t = \int e^{-\int \frac{dy}{q}} ds$.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion.

174. Ex solutione huius problematis apparet, posse eius beneficio puncti a quibuscunque potentiis sollicitati motum determinari. Ex duabus enim aequationibus, definitur et puncti celeritas in loco quouis, et curuatura seu radius osculi ipsius curuae percursae. His vero cognitis simul reperietur tempus, quo quaeuis curuae portio absoluitur, quae abunde sufficiunt ad motum determinandum.

DEFINITIO 14.

175. Vis restituens est vis illa imaginaria et infinita, quae partes corporis separatas momento rursus congregat, et in statum pristinum restituit. *Huiusmodi vim in solutione Prop.* 18. *adesse concepimus, qua duae puncti partes, quae ad momentum solutae concipiebam, rursus contrahebantur.*

Corollarium 1.

176. Si punctum in duas partes aequales concipiatur diuisum, eaeque a potentiis fuerint separatae, vis restituens eas contrahet in medio rectae illas iungentis, vt §. 146 ex principio sufficientis rationis est ostensum.

Corollarium 2.

177. Quia effectus vis restituentis in instanti debet produci, poterit vis restituens considerari vt elastrum vi infinita praeditum, quo partes separatae iterum coniunguntur.

M.E.C.D. 2017

Scholion.

178. Vſus huius vis reſtituentis iam elucet quodammodo ex propoſitione 18, vſus vero eius adhuc erit ampliſſimus in ſequentibus, quando motus corporum finitae magnitudinis ſumus inueſtigaturi. Hic vero effectum eius indagabimus in coniungendis pluribus puncti partibus ſeparatis, quae inquiſitio in ſequentibus magnam habebit vtilitatem. Complectitur ergo vis reſtituens principium aliquod, cuius ope plurimae quaeſtiones facile reſolui poterunt, idque principium reſtitutionis vocabimus.

PROPOSITIO 22.

Theorema.

Tab. II. Fig. 7. 179. *Sint duae puncti partes in* b *et* d *ſeparatae, dico eas a vi reſtituente coniunctum iri in puncto* c *centro grauitatis particularum* b *et* d.

Demonſtratio.

Fuerint hae partes primo coniunctae in A, ſintque eae a potentiis AB, AD pertractae in *b* et *d* eodem tempusculo *dt*. Harum potentiarum vero aequiualens fit potentia AC, quae eodem tempusculo integrum punctum ex A pertrahere valeat in *c*. Manifeſtum igitur eſt partes *b* et *d* a vi reſiſtente in *c* contrahi debere, quia potentia AC eundem in punctum integrum A edit effectum, ac ambae AB et AD in duas eius partes (149). Hinc igitur innotescit punctum concurſus *c*, in quod particulae *b* et *d* a vi reſtituente compellentur. Quo autem particula

M.E.C.D. 2017

cula b a potentia AB tempusculo dt per ſpatiolum AB protrahatur debet eſſe $Ab = \frac{n.AB.dt^2}{b}$ (159.) ſeu $AB = \frac{Ab.b.}{ndt^2}$. Similem ob rationem erit $AD = \frac{Ad.d}{ndt^2}$, et $AC = \frac{Ac(b+d)}{ndt^2}$. Eſt vero AC diagonalis parallelo grammi, quod a potentiis AB et AD conſtituitur, quia his aequiualet. Ex illis autem aequationibus deducitur $\frac{AB}{Ab} + \frac{AD}{Ad} = \frac{AC}{Ac}$, ſunt vero AB, AD et AC inter ſe vt ſinus angulorum DAC, BAC et BAD. Quamobrem erit $\frac{\int DAC}{Ab} + \frac{\int BAC}{Ad} = \frac{\int BAD}{Ac}$, ex qua proprietate ſequitur puncta b, c, et d eſſe in directum poſita. Hoc cum ſit, erit $bc:cd = \int BAC.Ab:\int DAC.Ad = AD.Ab:AB.Ad$. At eſt $AD:AB = Ad.d:Ab.b$. Coaſequenter prodibit $bc:cd = d:b$ ſeu $b.bc = d.dc$. Ex quo intelligitur punctum c eſſe centrum grauitatis particularum b *et* d. Q. E. D.

Corollarium I.

180. Vbicunque ergo accipiatur punctum A, ſemper in eundem incidit locum punctum concurſus c, ex quo apparet vim reſtituentem conſtantem habere effectum, neque a loco puncti A nec a potentiis particulas b et d ſollicitantibus pendere.

Scholion.

181. Egregie conuenit hic vis reſtituentis effectus cum effectu vis elaſticae, quam eius loco ſubſtituere licet. Iungat enim particulas b et d filum elaſticum bd, quod ſeſe contrahendo b et d congreget in c. Vis autem haec contrahens aequaliter aget

in

M.E.C.D. 2017

in particulas *b* et *d*, cum vtrinque se aequaliter contrahere conetur. Spatia vero, per quae *b* et *d* eodem tempore protrahuntur, sunt reciproce vt ipsae particulae (159), quia ab eadem potentia afficiuntur. Quare si punctum concursus est *c*, erit *bc* ad *dc* reciproce vt *b* ad *d*, seu $b.bc = d.cd$. Ex quo etiam intelligitur punctum *c* esse centrum grauitatis particularum *b* et *d*.

Corollarium 2.

182. Quamuis igitur vis restituens sit imaginaria et in sola cogitatione formata, tamen eius effectus sequitur motus leges reales. Hocque magis erimus certi, ope principii restitutionis semper ad veritatem perueniri.

PROPOSITIO 23.

Theorema.

Tab. II. Fig. 8. 183. *Sint* a, b, c, d *partes puncti a se inuicem separatae, quae a vi restituente rursus congregentur: conuenient eae in communi centro grauitatis* g.

Demonstratio.

Ponamus initio integrum punctum fuisse in puncto quocunque O, ex quo singulae hae partes *a*, *b*, *c*, *d* tempusculo *dt* a potentiis OA, OB, OL, OD pertractae sint in *a*, *b*, *c*, *d*. Accipiatur harum potentiarum aequiualens AG, quae eodem tempusculo integrum punctum, quod est $a+b+c+d$, ex O pertraxisset in *g*; erit *g* punctum, in quod partes *a*, *b*, *c*, *d* a vi restituente congregabuntur (149.).

Per

M.E.C.D. 2017

Per punctum O ducatur recta quaeuis KN, in eamque ex punctis A, *a*, B, *b*, C, *c*, D, *d*, G, *g*, demittantur perpendicula. Erunt autem $OA=\frac{Oa.a}{ndt^2}$, $OB=\frac{Ob.b}{ndt^2}$, $OC=\frac{Oc.c}{ndt^2}$, $OD=\frac{Od.d}{ndt^2}$, et $OG=\frac{Og(a+b+c+d)}{ndt^2}$ (159). At ob triangula similia OAK, O*ak*; OBL, O*bl*; etc. erit $AK=\frac{OA.ak}{Oa}=\frac{ak.a}{ndt^2}$, $BL=\frac{OB.bl}{Ob}=\frac{bl.b}{ndt^2}$, $CM=\frac{OC.cm}{Oc}=\frac{cm.c}{ndt^2}$, $DN=\frac{OC.dn}{Od}=\frac{dn.d}{ndt^2}$, et $GS=\frac{OG.gs}{Og}=\frac{gs(a+b+c+d)}{ndt^2}$: atque $OK=\frac{OA\,Ok}{Oa}=\frac{Ok.a}{ndt^2}$, $OL=\frac{OB.Ol}{Ob}=\frac{Ol.b}{ndt^2}$, $OM=\frac{OC.Om}{Oc}=\frac{Om.c}{ndt^2}$, $ON=\frac{OD.On}{Od}=\frac{On.d}{ndt^2}$ et $OS=\frac{OG.Os}{Og}=\frac{Os(a+b+c+d)}{ndt^2}$. Sed quoniam AG est potentia aequiualens potentiis OA, OB, OC, OD constat ex statica esse AK+BL+CM+DN=GS, et OK+OL−OM−ON=OS. Fiet ergo *ak.a*+*bl.b*+*cm.c*+*dn.d*=*gs*(*a*+*b*+*c*+*d*), et O*k*. *a*+O*l*.*b*−O*m*. *c*−O*n*. *d*=O*s*(*a*+*b*+*c*+*d*). Ex quibus proprietatibus intelligitur punctum *g* esse centrum grauitatis particularum *a*, *b*, *c*, *d*. Vis ergo restituens has particulas in centro communi grauitatis *g* congregat. Q. E. D.

Corollarium I.

184. In hoc igitur vis restituentis effectus consistit, quod corpusculi quotcunque partes separatas in ipsarum communi centro grauitatis congreget.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

185. Hoc igitur modo puncti a pluribus potentiis sollicitati motus poterit determinari sine potentiae aequiualentis consideratione, dum a singulis potentiis partes quaecunque affici ponuntur, quolibetque tempusculo iterum a vi restituente congregari.

Scholion.

Tab. II. Fig. 9. 186. Demonstratio huius theorematis ope filorum elasticorum sese contrahentium eodem modo potest perfici, quo ante fecimus (181.). Sint enim particulae separatae in a, b, c, d, et ponamus primo filum particulas a et b tantum contrahere, coibunt eae in centrum grauitatis e. Nunc concipiamus particulas a et b in e locatas cum particula c coniungi erit punctum concursus in f, quod est centrum grauitatis trium particularum a, b et c. Iam hae tres in f positae cum quarta d coniungantur, erit punctum concursus in g centro grauitatis omnium quatuor a, b, c et d. Quare a vi restituente omnes particulae in commune centrum grauitatis congregantur.

Corollarium 3.

187. Denuo igitur constat, vim restituentem recte per contractionem filorum elasticorum binas quasque particulas iungentium repraesentari.

SCHO-

M.E.C.D. 2017

SCHOLION GENERALE.

188. His igitur positis principiis, ex quibus puncti liberi a quibuscunque potentiis sollicitati motus determinari poterit, progrediemur ad punctorum liberorum motus inuestigandos. Hanc vero tractationem in duas partes dispesci conueniet, in quarum prima motus tantum rectilinei examinabuntur in altera vero curuilinei quicunque. Illi rectilinei, vt ex dictis intelligitur, oriuntur, quando motus directio cum potentiae directione conuenit; hi vero quando hae directiones discrepant. Vtramque vero partem duplici modo tractabimus, pro duplici potentiarum natura: primum scilicet puncta a solis potentiis absolutis sollicitari ponemus; deinde vero ab absolutis et relatiuis coniunctim. Loco relatiuarum quidem substituemus media resistentia, quia vt iam monuimus potentiae relatiuae ad motus corporum in fluidis determinandos considerantur (116.), quamobrem eos potissimum casus, qui in rerum natura existunt, euoluemus, neque multum iis, qui non nisi in imaginatione reperiuntur, immorabimur. Primum ergo de motu rectilineo puncti liberi a potentiis absolutis sollicitati tractabimus. Deinde inuestigabimus motus rectilineos puncti liberi in medio resistente. Tertio motus curuilineos puncti liberi a potentiis absolutis vtcunque sollicitati euoluemus. Quarto denique motus curuilineos puncti liberi in medio resistente exponemus.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

CAPUT TERTIUM
DE
MOTU RECTILINEO PUNCTI LIBERI A POTENTIIS ABSOLUTIS SOLLICITATI.

PROPOSITIO 24.
Theorema.

189.

Quando potentiae et motus directiones in eadem ſitae ſunt recta, motus erit rectilineus.

Demonſtratio.

Omne corpus vi inſita conatur motum ſuum in directum continuare, id quod ſemper praeſtat, niſi impediatur (65). Potentiae vero in corpus motum duplicem eſſe oſtendimus effectum, alterum quo eius directio immutatur, alterum quo celeritas eius. At diratio manet immutata, ſi potentiae directio cum ea in directum iacet (128.). Hoc igitur caſu punctum in linea recta progredi perget. Q. E. D.

Corollarium 1.

190. In hoc igitur capite alios non conſiderabimus caſus, niſi in quibus motus et potentiae directiones in eadem recta ſunt poſitae.

Corollarium 2.

191. Vidimus autem duobus modis hanc congruentiam euenire poſſe, prout ſcilicet ambae hae di-

M.E.C.D. 2017

directiones vel in eandem plagam vel in oppoſitas tendunt. In quorum illo puncti celeritas augetur, in hoc vero diminuitur (128.).

Scholion.

192. In motu hoc rectilineo duo ſunt conſideranda, quorum primum eſt potentia, a qua punctum vbiuis ſollicitatur, alterum vero celeritas, quam habet in quolibet ſpatii loco. His praeterea adiungimus tertium, quod eſt tempus, quo quaeuis ſpatii portio percurritur. Tria vero iſta ita ſunt comparata, vt dato vno reliqua duo ſemper poſſint determinari. Primo igitur potentiam tanquam datam conſiderabimus: deinde vero eam ex data vel celeritatum vel temporum ratione inueſtigabimus.

PROPOSITIO 25.

Problema.

193. *Protrahatur punctum in* A *quiescens in recta* AP, *a potentia vniformi ſeu quae vbique punctum eadem vi ſollicitat, determinare celeritatem puncti in quouis loco* P. Tab. II. Fig. 10.

Solutio.

Exponatur maſſa ſeu vis inertiae puncti litera A et potentia litera g, quae erit conſtans ſeu vbique eiusdem quantitatis. Sit ſpatium $AP = x$, et celeritas in P, quae quaeritur, ponatur $= c$. Sumatur elementum ſpatii Pp, quod erit $= dx$; atque incrementum celeritatis, quod punctum, dum elementum Pp abſoluitur, a potentia g accepit, erit dc.

M.E.C.D. 2017

His positis erit $cdc = \frac{ngdx}{A}$ (157.), quia potentiam perpetuo deorsum trahere, et propterea motum accelerare ponimus. Ex hac aequatione, si integretur, oritur $cc = \frac{2ngx}{A} +$ Const., quae constans ex eo debet determinari, quod celeritas in A euanescat. Factis igitur $c = 0$, et $x = 0$, prodibit Const. $= 0$, quamobrem habebitur $cc = \frac{2ngx}{A}$, seu $c = \sqrt{\frac{2ngx}{A}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

194. Punctum A igitur perpetuo in recta AP descendet, et celeritas in quouis loco erit vt radix quadrata ex spatio iam percurso.

Corollarium 2.

195. Ex his etiam plurium punctorum a potentiis vniformibus seu constantibus descensus poterunt comparari, erunt enim celeritates in ratione subduplicata composita ex directis potentiarum et spatiorum percursorum et inuersa massarum.

Scholion 1.

196. Casus hic apprime conuenit cum lapsu corporum super terra: grauitas enim, quae potentiae vices sustinet, est vniformis in non nimis magnis a terrae superficie distantiis. Namque idem pondus cuiusuis corporis reperitur in altissimis montibus et profundissimis vallibus; ex pondere autem grauitas innotescit. In descensu igitur grauium libero celeritates sunt vt radices quadratae ex altitudinibus percursis. Haecque est ipsa Galilaei propo-

si-

M.E.C.D. 2017

fitio, quam primus tum ex experimentis tum ex ratione detexit. Descenſus autem in ſpatio ab aere vacuo fieri debet, quia aer motui reſiſtit, hancque regulam euertit.

Scholion 2.

197. In ſpatio ab aere vacuo, quod ope antliae pneumaticae efficitur, plurimis experimentis eſt demonſtratum, corpora quaecunque aequaliter descendere. Ex quo conſequitur, ſi nullus eſſet aer, omnia corpora ex aequalibus altitudinibus delapſa aequales adipisci celeritates. Hanc ob rem ſi g deſignet vim grauitatis, qua quoduis corpus A cietur, erit $\frac{g}{A}$ quantitas ſemper conſtans. Vis igitur grauitatis proportionalis eſt quantitati materiae corporis, in quod agit. Illa autem vis nil aliud eſt niſi pondus corporis; quare pondera corporum ſunt quantitati materiae proportionalia. *Neutonus* hanc propoſitionem in Princ. Phil. quoque affirmat, eamque praeterea ex experimentis pendulorum probat.

Corollarium 3.

198. Corpus igitur quodcunque in ſuperficie terrae ex data altitudine delapſum datum acquiret celeritatis gradum. Cognita ergo altitudine ex qua corpus descendit, innotescet ſimul celeritas eius hoc descenſu acquiſita.

Scholion 3.

199. Ad celeritates igitur menſurandas poterimus has altitudines adhibere, ex quibus graue

in

M.E.C.D. 2017

in terrae ſuperficie descendens aequalem acquirit celeritatem. Haec quidem altitudo non poteſt loco ipſius celeritatis ſubſtitui, quia celeritates ſunt in altitudinum ratione ſubduplicata. Verum tamen altitudine commode quadratum celeritatis denotari poterit.

DEINITIO 15.

200. Altitudinem celeritati cuidam debitam vocabimus poſthac eam altitudinem, ex qua graue in ſuperficie terrae deſcendens eandem illam acquirit celeritatem.

Corollarium 1.

201. Haec igitur altitudo debita eſt vt quadratum celeritatis ad quam refertur. Celeritate ergo exiſtente c et ipſi debita altitudine v, erit v vt c^2.

Scholion 1.

202. Hactenus celeritatem expreſſimus linea recta, quae dato tempore ea celeritate percurri poteſt. In poſterum autem commodius erit altitudinem debitam eius loco introducere. Hanc ob rem ponemus $v = cc$ et $c = \sqrt{v}$. Habebimus ergo in problemate praecedente hanc aequationem $v = \frac{2ngx}{A}$.

Corollarium 2.

203. In poſterum igitur ſemper loco celeritatis c ponere licebit $\sqrt{v}$, ſeu radicem quadratam ex altitudine celeritati debita.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

204. Si potentia g denotet ipſam vim grauitatis, erit x ipſa altitudo celeritati c debita, adeoque $v = x$. Eſt vero $v = \frac{2ngx}{A}$, ex quo igitur erit $n = \frac{A}{2g}$. Hoc igitur iam aſſecuti ſumus commodum, vt literam n determinauerimus, quae in omnibus caſibus tenet eundem valorem (155.).

Scholion 2.

205. Quia hic g vim grauitatis ſignificat erit $\frac{g}{A}$ quantitas conſtans (197.). Hanc ergo ponemus 1, id quod licebit, cum potentiae ad corpora definitam rationem habere nequeant. Atque hinc facile erit in aliis caſibus valorem ipſius $\frac{g}{A}$ ſeu potentiae applicatae ad corpus exhibere. Erit nempe $\frac{g}{A}$ ad 1, ſeu g: A vt vis g, qua corpus A ſollicitatur, ad pondus, quod idem corpus haberet in noſtris regionibus. Litera igitur A non amplius materiae quantitatem denotabit, ſed ipſum corporis A pondus, ſi ſuper terra eſſet poſitum. Hoc igitur modo omnes potentias cum ponderibus comparabimus, id quod in potentiis menſurandis ingentem lucem foenerabitur.

Corollarium 4.

206. Cum in $n = \frac{A}{2g}$, g denotet vim grauitatis, poſitumque ſit $\frac{g}{A} = 1$, erit $n = \frac{1}{2}$. Quem valorem ſemper retinebit, ſi modo celeritates per radices quadratas altitudinum ipſis debitarum exprimantur. Ideoque erit in noſtro caſu $dv = \frac{gdx}{A}$ et $v = \frac{gx}{a}$.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

207. Propterea in hac lege generali $cdc = \frac{npds}{A}$ (157.), si sit altitudo celeritati c debita v, erit $cdc = \frac{dv}{2}$, adeoque ob $n = \frac{1}{2}$, habebitur haec lex $dv = \frac{pds}{A}$, vbi gp est ad A, vt vis p ad pondus corporis A.

Corollarium 6.

208. Simili modo, quae in §. §. 161, et 163 tradita sunt, nempe aequationes $Acdc = npdy$ et $nprdx = Ac^2ds$, substituendo v loco c^2 et $\frac{1}{2}$ loco n, transmutantur in has $Adv = pdy$ et $prdx = 2Avds$, vbi p ad A habet rationem modo dictam.

Corollarium 7.

209. Atque in §. 165. habebitur $r = \frac{2Av}{p}$ seu $pr = 2Av$. Item in §. 166. habebitur $Adv = pds$, et in casu §. 167. habebitur $Adv = -pds$. Hocque modo ante vsitatas quantitates vagas n et c ad determinatos valores reduximus.

PROPOSITIO 26.

Theorema.

210. *In diuersis potentiarum vniformium hypothesibus altitudines, ex quibus aequalia corpuscula descendentia aequales acquirunt celeritates, sunt reciproce vt potentiae.*

Demonstratio.

Sit vniuscuiusque corpusculi massa, seu pondus in superficie terrae A, potentia quaevis vniformis g, et altitudo celeritati acquisitae debita v. Altitu-

M.E.C.D. 2017

tudo vero, ex qua corpusculum A a potentia g ſollicitatum aequalem acquirit descendendo celeritatem, ſit x, erit $v = \frac{2ngx}{A}$ (202.). At eſt $n = \frac{1}{2}$ (206.). Ergo fit $v = \frac{gx}{A}$ ſeu $Av = gx$. Quare cum celeritates a diuerſis potentiis productae et corpuscula ponantur aequalia, erit Av quantitas conſtans, ideoque etiam gx. Propterea erit x reciproce vt g, i. e. altitudo, ex qua corpusculum A a potentia g ſollicitatum acquirit celeritatem v, erit reciproce vt potentia g. Q. E. D.

Corollarium 1.

211. Oſtendit *Neutonus* eiusdem corporis in ſuperficiebus Solis, Iouis, Saturni et terrae poſiti niſum ſeu potentiam, qua ad eorum centra ſollicitatur eſſe vt 10000, 835, 525, et 410. Altitudines igitur, ex quibus corpus in ſuperficiebus Solis, Iouis, Saturni et terrae descendens aequales acquirit celeritates ſunt inter ſe vt $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{835}$, $\frac{1}{525}$ et $\frac{1}{410}$.

Corollarium 2.

212. Statuit autem idem *Neutonus* omnia corpora in his ſuperficiebus aequaliter descendere, pariter vt in ſuperficie terrae. Non igitur opus eſt hanc adiicere conditionem, quod corpora ſint aequalia, ſed ex altitudinibus, quae ſunt vt $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{835}$, $\frac{1}{525}$ et $\frac{1}{410}$, in ſuperficiebus Solis, Iouis, Saturni et Terrae, quaecunque corpora delabentia eundem acquirunt celeritatis gradum.

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

213. Intelligitur ex his duplicem cuiusuis potentiae esse effectum in corpora, alterum quo certum nisum seu conatum corporibus imprimit, alterum quo ea reipsa mouet. Ille in statica potissimum consideratur, et mensurandus est pondere, quod aequalem habet conatum deorsum, poteritque vocari vis potentiae absoluta. Posterior vero effectus mensurari debet acceleratione, seu celeritatis incremento, quod corpori dato tempore imprimit: proportionalis igitur est illi conatui diuiso per corporis massam (159.). Vocatur hic effectus a *Neutono* vis accelerans, et propterea vis potentiae accelerans proportionalis est vi eius absolutae ad massam corporis seu pondus applicatae. Quapropter cum sit $dv = \frac{pdx}{A}$ (207) et $\frac{p}{A}$ denotet vim accelerantem, erit dv aequale facto ex vi accelerante in elementum spatii percursi. Ita vis grauitatis absoluta est massae corporum, in quae agit, proportionalis, nisum enim eorum deorsum causatur, seu pondus, quod massae proportionale esse ostendimus. Vis autem accelerans grauitatis in omnibus corporibus est aequalis, cum omnia aequaliter descendant, aequalibusque temporibus aequales adipiscantur celeritates.

Corollarium 3.

214. Vires ergo potentiarum acceleratrices sunt inter se vt vires absolutae, si corpora sint aequalia. Quare cum vis acceleratrix grauitatis sit

M.E.C.D. 2017

1 vt ante poſuimus (205), erit vis acceleratrix grauitatis ſolaris $=24, 390$; vis acceleratrix gra uitatis in ſuperficie Iouis $=2, 036$; Vis acceleratrix grauitatis, quae eſt in ſuperficie Saturni $=1, 280$. Atque grauitatis vim acceleratricem in ſuperficie lunae ſtatuit *Neutonus* $=\frac{1}{3}$.

Corollarium 4.

215. Quare ſi Propoſitio 25. ad lapſum corporum in ſuperficie terrae accommodari debeat, erit $\frac{g}{A}=1$, quemadmodum fecimus §. 205. Sin vero ad lapſum corporum in ſuperficie ſolis, erit $\frac{g}{A}=24, 390$; ſin ad lapſum corporum in ſuperficie Iouis, erit $\frac{g}{A}=2, 036$; ſin ad lapſum corporum in ſuperficie Saturni, erit $\frac{g}{A}=1, 280$, ſin denique ad lapſum corporum in ſuperficie Lunae erit $\frac{g}{A}=\frac{1}{3}$.

Scholion 2.

216. Aſſumimus hic cum *Neutono* omnia corpora coeleſtia terrae noſtrae eſſe ſimilia, atque corpora in eorum ſuperficiebus poſita vim habere ad eorum centra tendentem, quae ſimilis ſit grauitati corporum terreſtrium. Ex traditis igitur *Neutonianis* apparet, corpus, cuius hic pondus ſit 1 libra, in ſuperficie Solis poſitum ponderare 24, 39 libras; in ſuperficie Iouis vero 2, 036 libras; in ſuperficie Saturni 1, 280 libras, et in ſuperficie lunae tertiam librae partem.

M.E.C.D. 2017

Scholion 3.

217. Quo autem facilius grauitatis similiumque potentiarum in corporibus coeleſtibus natura perſpiciatur, ſingula corporum elementa aequalia aequaliter a grauitate affici concipienda ſunt. Ex quo ſequitur, quod iam experientia conſtat, vires grauitatis, quibus quaeque corpora ſollicitantur, eſſe ipſorum maſſis ſeu quantitatibus materiae proportionales. Ante vero iam eſt demonſtratum, ſi potentiae ſint maſſis corporum, quae ſollicitant, proportionales, effectus earum in corporibus mouendis eſſe aequales (136). Quamobrem ex his manifeſtum eſt omnia corpora in ſuperficie terrae aequaliter descendere debere, atque etiam pariter in omnibus corporibus coeleſtibus.

PROPOSITIO 27.

Problema.

Tab. II. Fig. 10. 118. *Puncto* A *a potentia vniformi per ſpatium* AP *promoto, definire tempus, quo ſpatium* AP *abſoluitur.*

Solutio.

Sit vt ante potentia ſollicitans g, ſpatium $AP = x$, et altitudo celeritati, quam in P habet debita v; erit ob $n = \frac{1}{2}$, $v = \frac{gx}{A}$. Ipſa igitur celeritas in P erit $= \sqrt{v} = \sqrt{\frac{gx}{A}}$. Habebitur ergo tempus, quo elementum $Pp = dx$, percurritur, vt $\frac{dx\sqrt{A}}{\sqrt{gx}}$. Sit tempus, quo ſpatium AP abſoluitur $= t$, ponaturque $dt = \frac{mdx\sqrt{A}}{\sqrt{g \cdot x}}$ oportebit ex vnico experimento determinare li-

M.E.C.D. 2017

literam m, quo tempus in data menſura puta in minutis ſecundis reperiatur. Ex illa vero aequatione prodit integrando $t = 2m\sqrt{\frac{Ax}{g}}$, ad quod conſtantem quantitatem adiicere non eſt opus, quia poſito $x = 0$ etiam t euanescit, prout debet. Determinato igitur m ex experimento, habebitur $t = 2m\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ minut. ſec. Quo autem huiusmodi menſura temporis abſoluta reſultet, oportet vt x quoque ſecundum conſtantem menſuram exhibeatur: determinabimus igitur ſemper ſpatium x in ſcrupulis i. e. partibus milleſimis pedis Rhenani; fractio enim $\frac{A}{g}$ in numeris abſolutis exprimetur, ita vt non opus ſit ad eam certam menſuram adhibere. Definita ergo litera m, id quod mox faciemus, habebitur plena problematis ſolutio. Q. E. I.

Corollarium 1.

219. Si g deſignet grauitatem, erit $\frac{A}{g} = 1$, (205), hanc ob rem tempus, quo corpus terreſtre ex altitudine x ſcrup. pedis rhenani delabitur, erit $2m\sqrt{x}$ minutorum ſecundorum.

Corollarium 2.

220. Experimentis autem compertum eſt corpus minuto ſecundo altitudinem 15625 ſcrup. pedis Rhenani descendendo abſoluere. Quam ob rem, ſi ponatur $x = 15625$, debet prodire $t = 1$. Cum autem ſit $t = 2m\sqrt{x}$, erit $1 = 2m\sqrt{15625}$ i. e. $= 250m$. Reperitur ergo valor literae $m = \frac{1}{250}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

221. Quoniam vero litera m in omnibus casibus eundem retinet valorem, erit in casu problematis $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ minut. sec. Expresso igitur spatio percurso x in scrupulis pedis Rhenani dabit $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ numerum minutorum secundorum, quibus hoc spatium percurritur.

Corollarium 4.

222. Atque ad omnes prorsus casus hic valor ipsius m inuentus accommodari potest. Sit enim elementum spatii descripti dt, altitudo celeritati, qua hoc percurritur, debita v, erit temporis elementum $dt = \frac{mds}{\sqrt{v}}$ et $t = m\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$. Ex qua aequatione, si v et s in scrup. pedis Rhenani exprimantur et ponatur $m = \frac{1}{250}$, prodibit tempus t in minutis secundis, $t = \frac{1}{250}\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$ min. sec.

Scholion 1.

223. Ex hoc igitur, quod celeritates per radices quadratas altitudinum debitarum denotamus, istud porro assecuti sumus commodum, quod temporum absolutam mensuram semper inueniamus. Vsi vero sumus experimento, quo definitur altitudo, ex qua graue minuto secundo delabitur, quam *Hugenius* per experimenta pendulorum inuenit 15 ped. Paris. 1 dig. $2\frac{1}{18}$ lineas, i. e. in fractionibus decimalibus 15, 0976 ped. Parisinos. Rationem autem pedis Rhenani ad Parisinum adhibemus 1000 ad 1035, ex qua altitudo minuto secundo cadendo per-

M.E.C.D. 2017

percurſa prouenit 15, 625 ped. Rhenanos, ſeu 15625 ſcrupula eiusdem pedis; Hancque menſuram malumus adhibere quam Pariſinam, quia hic numerus eſt quadratus, eoque euitamus frequentes radicis extractiones. Numerus praeterea, per quem $\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$ (s et v in ſcrupulis pedis Rhenani expreſſis) diuidi debet, vt tempus in minutis ſec. reperiatur, eſt 250, qui facillime memoria teneri poteſt.

Corollarium 5.

224. Cum $\frac{g}{A}$ denotet potentiae vim acceleratem (213) erunt tempora, quibus ſpatia quaecunque a potentiis vniformibus percurruntur, in ratione ſubduplicata compoſita ex directa ſpatiorum et reciproca virium accelerantium.

Corollarium 6.

225. Poſita celeritate, quam punctum A ex altitudine x a potentia g ſollicitatum acquirit, c, eſt c vt $\sqrt{\frac{gx}{A}}$ (193). Ergo ct erit vt x, quia t eſt vt $\sqrt{\frac{Ax}{g}}$. Conſequenter ſpatia percurſa ſunt in ratione compoſita temporum quibus deſcribuntur, et celeritatum, quas deſcenſu adipiscuntur, quaecunque ſint potentiae ſollicitantes, modo ſint vniformes.

Corollarium 7.

226. Atque ſpatia, quae aequalibus temporibus percurruntur, ſunt vt vires potentiarum ſollicitantium accelerantes.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 8.

227. Spatia igitur, per quae corpora aequalibus temporibus in ſuperficiebus Solis, Iouis, Saturni, Lunae et Terrae delabuntur, ſunt inter ſe vt 24390, 2036, 1280, 333, 1000 (214).

Corollarium 9.

228. In eadem vis accelerantis hypotheſi tempora, quibus ſpatia quaecunque percurruntur, ſunt vt celeritates acquiſitae, atque tam tempora quam celeritates ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum deſcriptorum.

Scholion 2.

229. Hic ſemper ponimus corpora descendentia descenſum a quiete inchoare, ſeu eorum celeritatem in initio descenſus eſſe nullam. In ſequentibus vero inueſtigabimus eos motus, qui oriuntur, quando corpora in ipſo motus initio iam habent quandam celeritatem. In his autem tempora et ſpatia ea debent intelligi, quae initium ſuum habent in ipſo celeritatis euanescentis puncto, et aequationes inuentae omnes ita ſunt comparatae, vt euanescente c vel v, ſimul x et t euanescant.

PROPOSITIO 28.

Theorema.

Tab. II. Fig. 10.

230. *Corporis per* AP *descendentis vt hactenus poſuimus, celeritas in* P *tanta erit, vt ea aequaliter progrediens eodem tempore, quo per* AP *eſt delapſum, ſpatium duplo maius quam* AP *abſoluere poſſit.*

De-

M.E.C.D. 2017

Demonſtratio.

Manentibus, quae in praecedentibus poſuimus, corpore A, potentia g, ſpatio deſcripto x, celeritate in P acquiſita $\sqrt{v}$, et tempore descenſus t, erit $t = {}_{1}\frac{1}{25}\sqrt{\frac{A\,x}{g}}$ (221), et $v = \frac{gx}{A}$ (204). Hanc ob rem habetur $\frac{g}{A} = \frac{v}{x}$, ideoque $t = \frac{x}{125\sqrt{v}} = \frac{2x}{250\sqrt{v}}$. At haec expreſſio dat tempus quoque, quo ſpatium $2x$ celeritate vniformi $\sqrt{v}$ percurritur, quia $\frac{2x}{\sqrt{v}}$ eſt diuiſum per 250, quem numerum inuenimus ad tempus in minutis ſec. exprimendum (220). Conſequenter ſpatium $2x$ eodem tempore celeritate $\sqrt{v}$ percurritur, quo ſpatium x descenſu vniformiter accelerato. Q. E. D.

Corollarium 1.

231. Corpus igitur a potentia vniformi ſollicitatum descendens tempore t per ſpatium x tantam acquirit celeritatem, qua aequabiliter progrediens idem ſpatium x dimidio tempore t percurrere poterit.

Corollarium 2.

232. Quia in ſuperficie terrae corpora tempore minuti ſecundi per ſpatium 15625 ſcrup. pedis Rhenani delabuntur, tanta erit eorum celeritas hoc lapſu acquiſita, qua vniformi motu ſpatium 31250 ſcrup. minuto ſecundo, ſeu 15625 ſcrup. ſemi minuto ſecundo percurrent.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

233. Cum celeritas per radices quadratas ex altitudinibus, ex quibus lapſu acquiruntur, exprimere inſtituerimus, erit celeritas $\sqrt{15625}$ ſeu 125 tanta, qua minuto ſecundo ſpatium 31250 ſcrup. abſolui poteſt.

Corollarium 4.

234. Facile igitur erit ſpatium aſſignare, quod celeritate hoc modo expreſſa $\sqrt{v}$ minuto ſec. percurritur. Fiat enim, quia ſpatia eodem tempore deſcripta ſunt vt celeritates, vt 125 ad $\sqrt{v}$ ita 31250 ſcrup. ad $250\sqrt{v}$. Quo facto erit $250\sqrt{v}$ ſpatium in ſcrupulis expreſſum, ſiquidem altitudo v in talibus exhibeatur, quod celeritate $\sqrt{v}$ minuto ſecundo abſolui poteſt, motu ſcilicet aequabili.

Exemplum 1.

235. Delapſum ſit corpus ex altitudine 1000 ped. erit in ſcrupulis $v=1000000$, quare ex hoc deſcenſu tantam acquirit celeritatem, qua minuto ſecundo ſpatium 250000 ſcrup. i. e. 250 pedes abſoluere poſſet.

Corollarium 5.

236. Et reciproce ſi celeritas per ſpatium, quod ea minuto ſecundo percurritur, exprimatur vt initio fecimus, reduci hinc ea poterit ad receptum noſtrum modum per radices ex debitis altitudinibus. Sit enim ſpatium illud a ſcrup. et altitudo huic celeritati debita v ſcrup. erit $250\sqrt{v}=a$ atque $v=\frac{a^2}{62500}$ ſcrup.

Exem-

BIBLIOTECA
DEL
REAL TRIBUNAL DE CUENTAS

M.E.C.D. 2017

Exemplum 2.

237. Habeat corpus tantam celeritatem qua minuto ſecundo ſpatium 1000 ped. ſeu 1000000 percurrere poteſt, erit altitudo huic celeritati debita $= \frac{1000000000000}{62500}$ ſcrup. ſeu 16000 pedes.

Scholion.

238. Perſpicitur igitur, quomodo vtrumque celeritates exprimendi modum inuicem comparari, alterumque ad alterum reduci oporteat. Initio enim celeritates per ſpatia exprimebamus, quae minuto ſecundo ſeu alio dato tempore percurruntur. Poſtmodum vero celeritates per altitudines debitas exhibere magis congruum viſum erat. Nunc vero monſtratum, quomodo vterque exprimendi modus ad celeritates menſurandas accommodandus ſit.

PROPOSITIO 29.

Problema.

239. *Potentia exiſtente vniformi ſecundum rectam* BP *trahente habeat corpus in initio* B *iam celeritatem datam ſecundum eandem directionem* BP, *requiritur eius celeritas in quouis puncto* P *rectae* BP. Tab. II. Fig. II.

Solutio.

Sit vt ante potentia g, et corpus A. Celeritas vero, quam habet in initio B ponatur debita altitudini c. Vocetur $BP = x$, et celeritas in P, quam quaerimus, debita ſit altitudini v. Erit vt ante (207) ob potentiam conſtantem g per elementum $Pp = dx$ ſollicitantem $dv = \frac{gdx}{A}$. Integrando igi-

M.E.C.D. 2017

tur fit $v = \frac{gx}{A} +$ Conſt. quae quantitas conſtans ex eo eſt determinanda, quod facto $x = o$, fiat $v = c$ (per hyp.) erit ergo Conſt. $= c$. Conſequenter habebimus $v = c + \frac{gx}{A}$, et ipſam celeritatem $\sqrt{v} = \sqrt{(c + \frac{gx}{A})}$. Q. E. I.

Corollarium I.

240. Ponatur vt fit in caſu grauitatis ordinariae $\frac{g}{A} = 1$, erit $v = c + x$. Altitudo igitur celeritati in P debita eſt aggregatum altitudinis celeritati initiali in B debitae et ſpatii percurſi.

Scholion.

241. Alia hic occurrit ſolutio problematis, poſſumus enim motum per BP cum celeritate initiali $\sqrt{c}$ in B conſiderari vt partem motus per lineam AP ex quiete, vt ante poſuimus factum, in quo corpus, cum ex A in B peruenerit, habeat celeritatem propoſitam $\sqrt{c}$. Sit igitur hoc ſpatium AB $= k$, erit $c = \frac{gk}{A}$ (206), et $v = \frac{g(k+x)}{A} = c + \frac{gx}{A}$, vt iam eſt inuentum. Spatium autem AB erit $\frac{Ac}{g}$.

PROPOSITIO 30.

Problema.

242. *Iisdem quibus in praecedente propoſitione poſitis, determinare tempus, quo ſpatium* BP *percurritur.*

Solutio.

Sit tempus per ſpatium BP $= t$, erit $dt = \frac{mdx}{\sqrt{(c + \frac{gx}{A})}}$ (218); eſt enim celeritas, qua elementum Pp percur-

M.E.C.D. 2017

currit $\sqrt{(c+\frac{gx}{A})}$ vt in praecedente propoſitione reperimus. Integrando igitur fiet $t=\frac{2mA}{g}\sqrt{(c+\frac{gx}{A})}$ +Conſt. Conſtans haec vero quantitas addenda ex hoc definietur, quod poſito $x=o$, fieri debeat $t=o$. Prodibit igitur Conſt. $=-\frac{2mA}{g}\sqrt{c}$. Conſequenter habetur $t=\frac{2mA}{g}\sqrt{(c+\frac{gx}{A})}-\frac{2mA}{g}\sqrt{c}$. Expreſſis c et x in ſcrupulis ped. Rhen. poſitoque $m=\frac{1}{250}$ (220), proueniet tempus in minutis ſecundis expreſſum. Q. E. I.

Corollarium.

243. Quia in noſtris terreſtribus regionibus eſt $\frac{g}{A}=1$, erit tempus quo ſpatium BP cum celeritate in B initiali $\sqrt{c}$ abſoluitur $=\frac{1}{125}\sqrt{(c+x)}-\frac{1}{125}\sqrt{c}$ minut. ſecund. ſiquidem c et x in ſcrupulis pedis Rhenani exprimantur.

Scholion.

244. Simili modo aliam huius problematis afferimus ſolutionem, quo praecedentis in ſcholio annexo. Poſita enim recta $AB=k$, ex qua corpus A delabens in B adipiscitur celeritatem altitudini c debitam, erit tempus, quo hoc ſpatium AB abſoluitur $=\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ak}{g}}$ et tempus, quo ſpatium AP percurritur erit $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{A(k+x)}{g}}$ (221). Tempus, quo hoc deſcenſu ſpatium BP abſoluitur erit $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{A(k+x)}{g}}-\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ak}{g}}$. Eſt vero $k=\frac{Ac}{g}$ (241). Conſequenter hoc tempus quaeſitum per BP fiet $=\frac{A}{125g}\sqrt{(c+\frac{gx}{A})}-\frac{1}{125g}\sqrt{c}$, vt ante inuenimus, ſi quidem ibi loco m ponatur $\frac{1}{250}$. Atque haec ſunt, quae de punctorum deſcenſu rectilineo

M.E.C.D. 2017

neo in hypotheſi potentiae vniformis exponenda erant. Pergo igitur ad aſcenſus rectilineos, in quibus celeritatis directio eſt directe contraria directioni potentiae, quam etiam nunc vniformem ſeu conſtantem ponam.

PROPOSITIO 31.

Problema.

Tab. II. Fig. 12. **245.** *Potentia vniformi tendente deorſum, habeat corpus in* B *celeritatem datam ſurſus directam; requiritur eius celeritas in quouis puncto ſpatii* BA, *quod aſcenſu percurrit.*

Solutio.

Perſpicuum eſt hoc caſu corpus in linea recta eſſe progreſſurum motu retardato (191), quia eius directio motus directe eſt contraria potentiae ſollicitantis directioni. Sit itaque celeritas in B debita altitudini c, et ponatur corpus iam peruenisſe in P. Vocetur altitudo, cui celeritas hoc loco debetur, v, ſpatiumque ipſum iam percurſum BP, x. Capiatur $Pp = dx$, erit in p altitudo celeritati debita $v + dv$. Quia autem potentia, quam pono $= g$, motui eſt contraria; tota in diminuendo motu conſumitur. Quam ob rem dv aequale poni oportet ipſi $\frac{-g dx}{A}$ denotante A corporis maſſam. Cum itaque ſit $-dv = \frac{g dx}{A}$; erit integrando $C - v = \frac{gx}{A}$. Ad conſtantem C definiendam ponatur $x = o$, quo caſu v in c transmutari debebit; eritque ideo $C = c$. Ex quo prodibit iſta aequatio $c - v = \frac{gx}{A}$ ſeu $v = c - \frac{gx}{A}$, quae determinat cc-

M.E.C.D. 2017

celeritatem corporis in quouis puncto ſpatii aſcenſu deſcripti. Q. E. I.

Corollarium 1.

246. Celeritas igitur corporis euanescet, quando fit $c = \frac{gx}{A}$, i. e. quando peruenit ad altitudinem $x = \frac{Ac}{g}$. Sit BA iſta altitudo ideoque aequalis $\frac{Ac}{g}$, inde $c = \frac{BA.g}{A}$, ex quo intelligitur BA eam ipſam eſſe altitudinem, ex qua corpus A a potentia g ſollicitatum descendendo acquirit celeritatem c (206). Corpus igitur ea celeritate, quam ex data altitudine delapſum eſt adeptum, ſurſum progrediens ad eam ipſam pertinget altitudinem, antequam motum ſuum amittit.

Corollarium 2.

247. Praeterea corpus ascendens per ſpatium BA in ſingulis punctis eas ipſas habet celeritates quas ibidem haberet, ſi ex A deſcendiſſet. Poſita enim $AP = y$, erit celeritas in P descenſu ex A nata $= \sqrt{\frac{gy}{A}}$; at eſt celeritas in eodem loco P ascenſu ex B relicta $\sqrt{(c - \frac{gx}{A})}$. Quia autem eſt $x + y = BA = \frac{Ac}{g}$, patet has expreſſiones celeritatum eſſe aequales nempe $\frac{gy}{A} = c - \frac{gx}{A}$.

Corollarium 3.

248. Congruit igitur motus corporis aſcendentis cum motu descendentis, atque vtriusque celeritates in iisdem locis, i. e. in iisdem a puncto ſupremo, quo celeritas euanescit, diſtantiis, erunt aequales.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

249. Ex his perſpicitur, tempus quoque aſcenſus per ſpatium BA aequale eſſe tempori deſcenſus per idem ſpatium; Quare cum dicto BA$=a$, tempus deſcenſus ſit $=\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Aa}{g}}$ min. ſec. (221); eidem valori aequale eſſe debebit tempus aſcenſus per BA; ſeu poſito loco a eius valore $\frac{Ac}{g}$, erit tempus integri aſcenſus $=\frac{A}{125g}\sqrt{c}$.

Corollarium 5.

250. Simili modo tempus aſcenſus per quamvis portionem BP definietur, manente enim AP$=y$ erit tempus ſiue aſcenſus ſive deſcenſus per AP $=\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ay}{g}}$, quod ablatum ab integro tempore aſcenſus $\frac{A}{125}\sqrt{c}$ relinquet tempus per portionem BP. Eſt vero $y=\frac{Ac}{g}-x$, quare tempus aſcenſus per BP habebitur $=\frac{A}{125g}\sqrt{c}-\frac{A}{125g}\sqrt{(c-\frac{gx}{A})}$.

Scholion 1.

251. Euidenter vero haec aequalitas aſcenſuum a priori oſtendi poteſt ex ipſa potentiarum actione. Cum enim in aſcenſu potentia tantum de celeritate auferat, quantum in deſcenſu ad eam addit, perſpicuum eſt perfectam aequalitatem inter vtrumque motum verſari debere, neque aliud eſſe diſcrimen, niſi temporis ordinem, qui cogitatione duntaxat inuerſus alterum caſum in alterum transformat. Similis vero eſt ratio etiam omnium motuum a potentiis abſolutis productorum: iisdem enim celeritatibus per eandem viam reuerti poterit cor-

M.E.C.D. 2017

corpus, ſi quidem in reditu impreſſiones easdem, quas in itu, ſed contrarias patitur. Sic planetae in plagas contrarias circa ſolem eodem modo, quo nunc, in ellipſibus mouerentur, ſi initio motus ipſis fuiſſent his contrarii. Nam per idem ſpatii elementum effectus potentiae ad celeritatem immutandam idem eſt ſemper, atque ſit ratione corporis negatiuus, quando reuertitur. Effectus autem, qui ad directionem corporis immutandam impenditur, vtroque caſu manet, quo fit vt corpus in itu et reditu eandem percurrat ſemitam. Sed haec infra clarius patebunt, vbi de huius modi motibus ex inſtituto agetur. At vero, ſi adeſt reſiſtentia, haec inter aſcenſus et deſcenſus ſimilitudo euanescit: nam in vtroque caſu reſiſtentia motum corporis minuit, neque effectus eius in altero alterius eſt oppoſitus, quemadmodum vſu venit, ſi potentia ſollicitans eſt abſoluta.

Scholion 2.

252. Satis igitur expoſito motu rectilineo, qui a potentiis vniformibus oritur, pergendum eſt ad potentias difformes, quae aliis in locis alias exercent in corpora vires, atque exponendum, quomodo motus corporum, quatenus fiunt in linea recta, ab iis varientur. Huiusmodi enim difformitati omnes potentiae, quas in mundo obſeruamus, ſunt obnoxiae, neque vlla potentia poteſt aſſignari, quae corpus, in quocunque loco ſit poſitum, aequaliter afficiat. Sic planetae, quo ſoli ſunt propiores, ve-

M.E.C.D. 2017

hementius ad ſolem attrahuntur, et quo magis etiam corpus a ſuperficie terrae remouetur, minor in eo fit grauitas ſeu niſus deorſum. Simili haec fere accidunt modo, quo magnetem obſeruamus idem ferri fruſtum in minore diſtantia fortius, in maiore vero debilius attrahere. Quamcunque igitur potentiae diſtantiarum ſeu poſitionum corporis teneant rationem, leges eruemus, ſecundum quas motus corporis ſollicitati immutatur. Et primo quidem potentias poteſtati cuidam diſtantiarum corporis a puncto fixo proportionales contemplabimur.

DEFINITIO 16.

253. Centrum virium vocatur punctum illud fixum, ad quod corpora attrahuntur vi, quae pendet a diſtantia ab hoc puncto, ſeu quae eſt vt functio diſtantiae quaecunque.

Corollarium 1.

254. Datur igitur diſtantia ab hoc centro virium, in qua corpus poſitum tanta vi ad centrum trahitur quanta foret vis eius grauitatis, ſi in ſuperficie terrae verſaretur.

Corollarium 2.

255. Cognita ergo hac diſtantia, et lege attractionis ſcilicet functione diſtantiae, cui attractio eſt proportionalis; innoteſcet ratio, quem habet corporis vbicunque poſiti conatus accedendi ad centrum virium, ad eiusdem corporis vim grauitatis, ſi eſſet in terrae ſuperficie.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

256. Cum itaque hoc modo vires vtcunque variabiles cum vi grauitatis comparare liceat, quia huius in corpora effectus eſt cognitus; cuiuscunque etiam vis in corpora effectus poterit determinari.

Scholion I.

257. Pono hic attractionem centrorum virium ſimilem vi grauitatis, ita vt quoque diuerſorum corporum in eadem diſtantia poſitorum conatus ad centrum ſint vt maſſae ipſorum, ideoque vires acceleratrices omnium aequales (212). In his igitur pertractandis maſſam corporis moti non opus eſt in computum vocare, ſed vim acceleratricem duntaxat, quae conatui accedendi ad centrum diuiſo per maſſam eſt proportionalis. Comparabitur ea autem cum vi grauitatis acceleratrice, quam ponimus $=1$, atque ad hanc vnitatem reuocabimus omnes vires potentiarum acceleratrices, quippe quantitates homogeneas.

Corollarium 4.

258. Quando itaque dicemus vires eſſe diſtantiis a centro virium ſeu cuidam functioni earum proportionales, id non de ſolis niſibus, quos corpora habent ad centrum, ſed de viribus acceleratricibus, i. e. de niſibus ad maſſas corporum applicatis intelligi debebit.

Corollarium 5.

259. Quoniam igitur potentiae directio, qua corpus vrgetur, ſemper tendit ad centrum virium;

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

ſpicuum eſt, ſi corpus vel quiescit, vel motum habet, cuius directio per centrum virium tranſit, tum corpus in hac linea recta per centrum virium tranſcunte perpetuo moueri debere. (189).

DEFINITIO 17.

260. Potentia, quae corpora ad huiusmodi virium centrum vrget, vocatur vis centripeta. Haecque, ſi fit negatiua, vt corpora ab hoc centro repellat, vocatur vis centrifuga.

Corollarium 1.

261. Cum hic de motu ſit quaeſtio, vis centripeta nobis erit vis acceleratrix ſeu conatus corporis ad centrum tendentis diuiſus per corporis maſſam.

Corollarium 2.

262. Conatus igitur ſeu niſus, quem habet corpus ad centrum virium, exprimitur vi centripeta in corporis maſſam ducta. Quamobrem erit ad pondus eiusdem corporis, ſi in ſuperficie terrae eſſet poſitum, vt vis centripeta ſeu vis acceleratrix ad vnitatem. (257.)

Scholion.

263. *Neutonus*, qui voce vis centripetae potiſſimum vtitur, triplici modo eandem menſurari poſſe animaduertit. Primo quantitate eius abſoluta, qua efficaciam ipſius centri virium metitur, ſine reſpectu habito ad corpora attracta; ſic dicit in maiore magnete maiorem ineſſe vis centripetae quantitatem

BIBLIOTECA DEL SEMINARIO M. E. CALASANZ

M.E.C.D. 2017

tem abſolutam, in minore minorem. Et ſimili modo ſecundum eius theoriam in ſole quantitas abſoluta maior eſt quam in terra. Haec comparatio autem intelligenda eſt de centris virium ſimiliter i. e. ſecundum eandem diſtantiae functionem attrahentibus, in diſſimilibus enim huiusmodi comparatio locum non habet. Haec ergo quantitas abſoluta menſuranda eſt ex conatu, quem datum corpus in data diſtantia habet verſus virium centrum. Loco huius autem conſiderationis hic adhibeo diſtantiam in qua corpus poſitum vi aequali ponderi eius nititur ad centrum (254). Secundo habet vis centripetae quantitatem accelerantem, quae apud ipſum eodem accipitur ſenſu, quo hic ipſa vis centripeta (261), menſuratur enim conatu ad maſſam applicato. Tertio inducit vis centripetae quantitatem motricem qua nihil aliud denotat niſi ipſum conatum, quem corpora habent ad centrum virium accedendi; quantitas motus enim, quam menſurare ſoliti ſunt celeritate ducta in maſſam, quaeque dato tempore generatur, proportionalis eſt ipſi conatui. Poſito namque conatu hoc p, maſſa A, eſt celeritatis incrementum dato tempusculo vt $\frac{p}{A}$ (154), quod ductum in maſſam A dat incrementum quantitatis motus, quod itaque ipſi p erit proportionale.

PROPOSITIO 32.
Problema.

264. *Sit centrum virium* C, *quod attrahat ad ſe in ratione quacunque multiplicata diſtantiarum; ad hoc-* Tab. II. Fig. 13.

M.E.C.D. 2017

hocque trahatur corpus in A *quiescens: quaeritur eius celeritas in quouis puncto ſpatii* AC.

Solutio.

Sit AC$=a$; AP$=x$; et celeritas quam in P habebit ſit debita altitudini v. Fiat attractio in ratione n cuplicata diſtantiarum, et deſignet f eam diſtantiam a C, in qua corporis conatus ad C aequalis eſt ponderi corporis, ſi eſſet in terrae ſuperficie poſitum. Vis igitur acceleratrix, qua corpus in P vrgetur ad C erit ad vim grauitatis, quam pono $=1$, vt CP^n i. e. vt $(a-x)^n$ ad f^n; quamobrem ea exprimetur per $\frac{(a-x)^n}{f^n}$. Sumto ergo P$p=dx$, erit $dv = \frac{(a-x)^n dx}{f^n}$. Eſt enim dv aequale dx multiplicato per vim acceleratricem (213). Integrata hac aequatione prodibit $v=C-\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ad conſtantem C definiendam ponatur $x=o$, quo caſu fieri debet per hypotheſin $v=o$, fiet ergo $C=\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Habebitur ergo $v=\frac{a^{n+1}-(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Seu poſito $a-x$ $=$BP$=y$; erit $v=\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ex qua aequatione celeritas corporis in quouis loco ſpatii AC cognoscitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

265. Si $n+1$ eſt numerus poſitiuus, euanescet y^{n+1} facto $y=o$. Hoc igitur caſu altitudo celerita-

M.E.C.D. 2017

ritati, quam corpus in C perueniens habebit debita erit $= \frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. At si $n+1$ est numerus negatiuus, fiet y^{n+1}, facto $y=0$, infinite magnum: hoc ergo casu corporis in C peruenientis celeritas erit infinite magna.

Corollarium 2.

266. Sed si est $n+1=0$ seu $n=-1$, ex inuenta aequatione valor ipsius v non cognoscitur ob numeratorem et denominatorem euanescentes. Quamobrem hunc casum ex ipsa aequatione differentiali oportebit repetere. Erit autem $dv=\frac{f\,dx}{a-x}$, cuius integralis est $v=C-fl(a-x)$. Debebit autem esse $C=fla$, quocirca prodibit $v=fl\frac{a}{a-x}=fl\frac{a}{y}$. Qui est verus valor ipsius v quando habetur $n=-1$, i. e. quando vis centripeta est reciproce vt distantia a centro virium.

Corollarium 3.

267. Hoc igitur casu, quo $n=-1$, cum corpus peruenerit in centrum C, celeritas eius erit infinite magna; fit enim $v=fl\infty$. Qui infinitorum gradus est infimus et quasi proximus finito; quantumuis enim parum $n+1$ cyphram excedat, subito celeritas in C fit finita.

Corollarium 4.

268. Cum autem fuerit $n+1$ numerus affirmatiuus, quia tum altitudo celeritatis in c debita est $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$, erunt ipsae celeritates plurium corporum

M.E.C.D. 2017

ad centrum C delabentium, quas in C habebunt, vt $a^{\frac{n+1}{2}}$ i. e. in ratione $\frac{n+1}{2}$ plicata distantiarum ex quibus lapsum inchoauerunt.

Scholion I.

269. Postquam autem corpus ex A in C peruenit, quo tum promoueatur, non tam facile potest definiri. Videtur quidem, si in expressione inuenta y ponatur negatiuum, proditura esse altitudo celeritati in Q debita, quae si est affirmatiua, corpus reuera in Q perueniet; sin vero sit negatiua, indicio hoc est corpus nunquam vltra C in plagam CQ esse peruenturum. Verum hic motum prosequendi modus non semper adhiberi potest; saepe enim ipsi hypothesi, qua ponitur vis attractiua cis et vltra C versus centrum eadem, est contrarius. Namque corpus in P existens, quia trahitur deorsum, cum in Q peruenerit, sursum vrgebitur aequali vi, si est CQ=CP. Hanc ob rem vis, qua corpus in Q sollicitatur, fit negatiua ratione prioris, atque idcirco quantitate negatiua est exprimenda. Vis igitur in P per $\frac{(a-x)^n}{f^n}$ seu $\frac{y^n}{f^n}$ expressa sui fieri debet negatiua, cum $-y$ ponitur loco y, id quod nunquam euenit, nisi sit n vel numerus impar vel fractio, cuius numerator et denominator sunt numeri impares. His igitur in casibus prodibit verus valor ipsius v, cum corpus in Q peruenerit; in reliquis semper, quia in calculo vis sollicitans corpus in Q cum vero eius valore non congruit, veritati non consentanea lit-

M.E.C.D. 2017

litterae v quantitas elicitur. Si enim eſt n numerus par vis attrahens in Q facto n negatiuo aequalis erit vi in P et tendet in eandem plagam deorſum ſcilicet; Ex quo fit, vt corpus transgreſſum centrum C in recta CQ in infinitum deberet descendere, id quod etiam calculus declarat. Quod cum pugnet cum hypotheſi perſpicuum eſt his caſibus motum corporis, poſtquam in C peruenit, ex inuenta formula definiri non poſſe. Abſurdum autem magis elucet quando eſt $n=\frac{1}{2}$ vel alia huiusmodi fractio, quae y^n transmutat in quantitatem imaginariam, poſito $-y$ loco y; id quod indicaret corpus vltra C progreſſum nonſolum non ad C attrahi, ſed vim attrahentem etiam fieri imaginariam, quod quid ſit nequidem intelligi poteſt.

Corollarium 5.

270. Si igitur n eſt numerus impar, valor ipſius v, qui eſt $\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$ non mutatur poſito $-y$ loco $+y$, quia $n+1$ exponens ipſius y euadit numerus par. Ex quo apparet celeritatem corporis in Q aequalem fore ei, quam habet in P, ſi quidem eſt CQ=CP. Pari ergo modo corpus in directione CQ recedit, qua ante per AC acceſſerat; pertingetque in B vsque, ita vt ſit AB=AC, vbi celeritatem ſuam perdet omnem. Reuertetur itaque ſimili modo ad C, et tum rurſus in A perueniet. Quos motus reciprocos, niſi adeſt reſiſtentia, perpetuo perficiet.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 6.

271. Excipiendus est tamen casus, quo $n = -1$, quanquam -1 est numerus impar. Facto enim y negatiuo fit $v = \sqrt{l - \frac{a}{y}}$, quae est quantitas imaginaria. Ex quo perspicitur corpus nunquam vltra C esse transgressurum. Aliud ergo iudicium ferendum esse videtur, quando n est numerus negatiuus, etiamsi impar. Huiusmodi enim simile exemplum infra occurret si $n = -3$. (335).

Scholion 2.

272. Hoc quidem veritati minus videtur consentaneum; vix enim apparet ratio, cur corpus celeritate sua infinite magna, quam in C acquisiuit, in aliam potius plagam, quam in CB, sit progressurum; praesertim cum huius celeritatis infinitae directio sit secundum hanc plagam. Quicquid autem sit hic calculo potius, quam nostro iudicio est fidendum, atque statuendum, nos saltum, si fit ex infinito in finitum, penitus non comprehendere. Eo autem magis in hac sententia confirmamur simili exemplo, quod infra plene explanatum occurret, (655) si est $n = -2$; hoc enim casu corporis in C peruenientis celeritas quoque est infinita, et secundum CB directa, nihilo vero minus corpus non vltra C progreditur, sed subito ex C versus A reuertitur pariter ac accesserat. Ex quo perspicitur, quoties celeritas in C existat infinita, iudicium de vlteriori corporis motu esse suspendendum. Tam diu autem hoc tantum fiat, quoad ad motus curuili-

M.E.C.D. 2017

lineos perueniamus; ex iisque enim qui sint rectilinei, euidentius colligetur (762). Neque enim calculus, qui tum instituetur, obnoxius est huic incommodo, vt a hypothesi dissentiat; sed quaqua versus vis centripeta aequalis ponetur non refragante calculo.

Scholion 3.

273. Semper autem, quando celeritas in C non est infinite magna, id quod accidit, quoties est $n+1$ numerus affirmatiuus, motum corporis integrum iudicio nostro poterimus cognoscere, etiamsi calculus sit insufficiens. Si enim celeritas in C est finita, habensque directionem secundum CB, quam necessario habere debebit; fieri non potest, vt non in CB motum continuet. Simili autem modo hunc motum continuans a C recedet, quo ante in AC accesserat, atque in puncto quocunque Q eandem habebit celeritatem, quam ante in P puncto aeque dissito a C habebat; sicut ex (251) intelligi potest. Perpetuo igitur motus reciprocos ex A in B et vicissim rediens corpus perficiet.

PROPOSITIO 33.

Problema.

274. *Centro* C *attrahente in ratione quacunque multiplicata distantiarum, habeat corpus in* D *iam celeritatem datam; Requiritur punctum* A *in recta* CD *producta, ex quo corpus descensum ad* C *inchoans cum in* D *peruenerit, hanc ipsam acquirat celeritatem.* Tab. II. Fig. 14.

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Denotante vt ſupra n exponentem rationis multiplicatae in qua fit vis centripeta, et f diſtantiam in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis; ſit $CD=b$, celeritas in D debita altitudini b, et quaeſita diſtantia CA ponatur $=q$. Cum igitur hic q idem denotet quod ſupra a, et b idem quod y, et h idem quod ibi v, habebitur iſta aequatio $h=\frac{q^{n+1}-b^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ex qua fit $q^{n+1}=b^{n+1}+(n+1)hf^n$, atque $q=(b^{n+1}+(n+1)hf^n)^{\frac{1}{n+1}}$. Particulari autem caſu quo $n=-1$ habebitur $h=fl\frac{q}{b}$, hincque $q=e^{\frac{h}{f}}b$, vbi e eſt numerus cuius logarithmus eſt vnitas. Q. E. I.

Corollarium 1.

275. Si vis centripeta eſt directe vt diſtantia fit $n=1$, eritque $q=\sqrt{(b^2+2fh)}$. Quae quantitas ſemper eſt finita, ſi modo b, f et h ſunt tales. Simile euenit ſemper dummodo $n+1$ eſt numerus affirmatiuus. Atque etiam in caſu $n=-1$, diſtantia q nunquam fit infinita.

Corollarium 2.

276. Sit autem $n+1$ numerus negatiuus puta $-m$, vt ſit $n=-m-1$, erit $q=b\sqrt[m]{\frac{f^{m+1}}{f^{m+1}-mb^mh}}$ quae altitudo toties eſt infinita, quoties eſt $h=\frac{f^{m+1}}{mb^m}$, et, ſi h eſt quantitas adhuc maior, fit q ne-

ga-

M.E.C.D. 2017

gatiua, ſeu potius infinito maior, vel etiam imaginaria. Ex quo intelligitur his caſibus, ne ex infinita quidem diſtantia corpus delapſum tantam in D acquirere poſſe celeritatem.

Corollarium 3.

277. Manente $n+1$ numero negatiuo $-m$, et diſtante puncto A in infinitum; erit $h=\frac{f^{m+1}}{mb^m}$. Atque diſtantia a centro C, in qua corpus, ex ſpatio infinito delapſum, celeritatem habet $\sqrt{h}$, erit $=f\sqrt[m]{\frac{f}{mh}}$.

Corollarium 4.

278. Si vis centripeta reciproce proportionalis eſt diſtantiarum quadratis, erit $m=1$. Quapropter fit $q=\frac{bf^2}{f^2-bh}$. Quando ergo eſt $h=\frac{f^2}{b}$, diſtantia AC i. e. q fit infinite magna.

Corollarium 5.

279. Si hoc problema cum praecedente coniungatur, facile determinabitur motus corporis, quod ex D deſcenſum ad C inchoat celeritate $\sqrt{h}$: Ex praecedente enim innotescit deſcenſus corporis ex A factus, cuius cum ſit deſcenſus ex D celeritate $\sqrt{h}$ inceptus pars, vocetur $CP=y$, et celeritas quam corpus in P habet, debita ſit altitudini v, erit $v=\frac{q^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$ (266). Eſt autem $q^{n+1}=b^{n+1}+\frac{}{(n+1)}$.

M.E.C.D. 2017

$(n+1)hf^n$. Vnde fit $v=\frac{b^{n+1}+(n+1\ hf^n-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$
$=\frac{b^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}+h.$

Corollarium 6.

280. Expreſſio haec ipſius v, quando deſcenſus ex D incipitur celeritate altitudini h debita, non differt ab ea, quae prodit, ſi deſcenſus ex quiete fieret, niſi hoc, quod ſit hac ipſa quantitate h vbique maior.

Scholion.

Tab. II. Fig. 13.

281. Quod ad tempora attinet quibus in quauis hypotheſi vis centripetae ſpatium AC eiusque partes abſoluuntur, ea facile ex cognitis celeritatibus cognoſcentur. Pro generali quidem valore litteraen tempus non poteſt in terminis finitis exhiberi, quippe tempus per AP inuenitur $=\int\frac{dx\sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{(a^{n+1}-(a-x)^{n+1})}}$ quae quantitas vniuerſaliter neque integrari neque ad cognitarum curuarum quadraturas poteſt reduci. Attamen in variis ipſius n caſibus ſatis concinne exprimi poteſt, quamobrem miſſis generalibus praecipuos caſus ſpeciales ſequentibus propoſitionibus ſumus complexuri.

PROPOSITIO 34.
Problema.

Tab. II. Fig. 15.

282. *Si fuerit vis centripeta diſtantiis a centro* C *proportionalis, et corpus ex* A *in* C *vsque delabatur;*

M.E.C.D. 2017

tur; determinari oporteat tempus, quo corpus quamque huius ſpatii partem abſoluat.

Solutio.

Poſitis AC$=a$, et diſtantia a centro C in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis $=f$, ſit ſpatii quaeuis portio CP$=y$, et celeritas in P debita altitudini v. Erit ergo tempus, quo ſpatium CP abſoluitur $\int\frac{dy}{\sqrt{v}}$, negligo hic fractionem $\frac{1}{250}$, quia haec tempori in minutis ſecundis cognoscendo inſeruit, et cum libuerit, poteſt adiungi. Eſt vero ex prop. 32 facto $n=1$, $v=\frac{a^2-y^2}{2f}$, ergo $\sqrt{v}=\frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{\sqrt{2f}}$. Ex quo fit tempus per PC$=\int\frac{dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(a^2-y^2)}}=\frac{\sqrt{2f}}{a}\int\frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Super AC conſtruatur circuli quadrans AME, in eoque ducantur applicatae CE, PM. Quo facto erit, vt conſtat, arcus EM$=\int\frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Quamobrem tempus per PC fiet $=\frac{EM.\sqrt{2f}}{a}$. Tempus igitur totius descenſus per AC erit $=\frac{AME.\sqrt{2f}}{a}$. Hinc erit tempus descenſus per AP$=\frac{AM.\sqrt{2f}}{a}$. Ex his igitur tempus descenſus per quamuis ſpatii percurſi portionem innotescit, idque in minutis ſecundis, ſi hae expreſſiones per 250 diuidantur, et longitudo f in partibus milleſimis pedis Rhenani exhibeatur. Q. E. I.

Corollarium 1.

283. Denotet $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $2AME:a=\pi:1$, et $\frac{AME}{a}=\frac{\pi}{2}$. Hanc ob rem erit tempus descenſus per AC$=\frac{\pi}{2}\sqrt{2f}$.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Id quod non pendet ab altitudine lapſu percurſa *a*, ſed quantacunque haec ſit, eundem valorem retinet. Omnia igitur corpora, quae ad hoc centrum delabuntur aequalibus temporibus eo peruenient.

Scholion.

284. Sequitur haec temporum aequalitas ex ipſa celeritatis expreſſione $\frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{\sqrt{2f}}$ in qua a et y vnam dimenſionem habere cenſenda ſunt. Quoties enim hoc euenit tempora, quibus quaecunque ſpatia a percurruntur, debebunt inter ſe eſſe aequalia. (46.)

Corollarium 2.

285. Si praeterea aliud ſit huiusmodi centrum virium, ſed diuerſa praeditum efficacia, ita vt diſtantia, in qua centripeta vis aequalis eſt grauitati, ſit F, erunt tempora deſcenſum ad vtrumque centrum inter ſe vt $\sqrt{f}$ ad $\sqrt{F}$. Sed efficaciae ipſae hoc caſu tenent inuerſam rationem diſtantiarum f: F, ſunt enim vt vires, quas haec centra exercent in aequalibus diſtantiis. Quapropter tempora deſcenſuum ad diuerſa huiusmodi virium centra ſunt in ratione reciproca ſubduplicata efficaciarum. Quae quidem ratio in omnibus ſimilibus centris virium locum tenet, ſi ſpatia percurſa ſunt inter ſe aequalia, vt in ſequenti docebitur.

PROPOSITIO 35.

Problema.

Tab. III. Fig. 1.

286. *Si fuerit vis centripeta quadratis diſtantiarum a centro* C *reciproce proportionalis, et cor-*

BIBLIOTECA DEL [illegible]

M.E.C.D. 2017

corpus ex A *in* C *vsque delabatur: inueniendum eſt tempus, quo corpus quamuis huius ſpatii* AC *portionem percurrat.*

Solutio.

Manente AC$=a$, et diſtantia in qua vis centripeta grauitati aequalis eſt f; ſit CP$=y$, et celeritas in P debita altitudini v. Erit ergo ob $n=-2$, ex prop. 32, $v=f^2(\frac{a-y}{ay})$ et $\sqrt{v}=f\sqrt{\frac{a-y}{ay}}$. Elementum igitur temporis $\frac{dy}{\sqrt{v}}$ fit $=\frac{dy\sqrt{ay}}{f\sqrt{(a-y)}}=\frac{\sqrt{a}}{f}.\frac{ydy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Conſequenter tempus per PC eſt $\frac{\sqrt{a}}{f}\int\frac{ydy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Eſt vero $\int\frac{ydy}{\sqrt{(ay-y^2)}}=-\sqrt{(ay-y^2)}+\int\frac{\frac{1}{2}ady}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Quare deſcripto ſuper AC ſemicirculo AMC ductaque ordinata PM erit CM$=\int\frac{\frac{1}{2}ady}{\sqrt{(ay-y^2)}}$ et PM$=\sqrt{(ay-y^2)}$. Propterea prodibit tempus per CP$=\frac{\sqrt{a}}{f}$(CM$-$PM), atque ex hoc tempus totius deſcenſus per AC$=\frac{\text{AMC}.\sqrt{a}}{f}$. Tempus ergo, quo portio AP abſoluitur, eſt $\frac{\sqrt{a}}{f}$(AM$+$PM). Q. E. I.

Corollarium 1.

287. Denotante igitur $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit AMC$=\frac{1}{2}a\pi$. Ideoque erit tempus deſcenſus per AC$=\frac{\pi a\sqrt{a}}{2f}$. Ex quo intelligitur plurium corporum ad C delabentium tempora deſcenſuum eſſe in ſesquiplicata ratione diſtantiarum.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

288. Atque ad diuerſa huiusmodi centra virium corpora accedent temporibus, quae ſint in ratione compoſita ex directa ſesquiplicata diſtantiarum et inuerſa ſubduplicata efficaciarum. Eſt enim efficacia directe vt diſtantiae f quadratum.

Scholion.

289. Si ſit vis centripeta reciproce vt cubus diſtantiae, prodit $n=-3$ et $v=\frac{f3}{2}(\frac{a^2-y^2}{a^2y^2})$. Eſt igitur $\sqrt{v}=\frac{f}{ay}\sqrt{f\frac{(a^2-y^2)}{2}}$, et tempus per CP$=\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}\int\frac{ydy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}=\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$ $(a-\sqrt{(a^2-y^2)})$. In circuli autem quadrante eſt PM$=\sqrt{(a^2-y^2)}$; tempus ergo, quo CP abſoluitur et $=\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$(AC$-$PM), et tempus, quo totum ſpatium AC percurritur eſt $\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$ AC ſeu $\frac{a^2\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$. Conſequenter tempus, quo portio AP percurritur erit $=\frac{AC.PM\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$. In hoc igitur caſu tempus algebraice poteſt exhiberi, id quod etiam fit in hisce caſibus quibus n eſt terminus huius ſeriei $-\frac{5}{3}$, $-\frac{7}{5}$, $-\frac{9}{7}$, $-\frac{11}{9}$, etc. Quae autem ſint ipſa tempora ſaltem integra deſcenſuum per AC ſumus inueſtigaturi.

PROPOSITIO 36.

Problema.

290. *Determinare tempus deſcenſus per* AC *ad centrum virium* C, *ſi vis centripeta proportionalis*

M.E.C.D. 2017

lis eſt reciproce huic diſtantiarum dignitati cuius exponens eſt $\frac{2m+1}{2m-1}$ *denotante* m *numerum integrum affirmatiuum.*

Solutio.

Retinentibus a, f, y et v eosdem, quos ſupra, valores erit $n=\frac{-2m-1}{2m-1}$. Quo circa fit $v=\frac{2m-1}{2}\int\frac{2m+1}{2m-1}\left(\frac{a^{\frac{2}{2m-1}}-y^{\frac{2}{2m-1}}}{a^{\frac{2}{2m-1}}y^{\frac{2}{2m-1}}}\right)$, adeoque $\int\frac{dy}{\sqrt{v}}=$

$$\sqrt{\frac{2a^{\frac{2}{2m-1}}}{(2m-1)f^{\frac{2m+1}{2m-1}}}}\int\frac{y^{\frac{1}{2m-1}}dy}{\sqrt{(a^{\frac{2}{2m-1}}-y^{\frac{2}{2m-1}})}},$$

quod integrale ita debet accipi, vt euanescat poſito $y=0$. Quo facto ſi ponatur $y=a$, prodibit tempus totius descenſus per AC quaeſitum. Ponatur $y^{\frac{2}{2m-1}}=z$, et $a^{\frac{2}{2m-1}}=b$, erit $y^{\frac{1}{2m-1}}=\sqrt{z}$ et $dy=\frac{2m-1}{2}z^{\frac{2m-3}{2}}dz$, quibus ſubſtitutis fiet $\int\frac{dy}{\sqrt{v}}=\sqrt{\frac{(2m-1)a^{\frac{2}{2m-1}}}{2f^{\frac{2m+1}{2m-1}}}}\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(v-z)}}$.

Ad $\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(b-z)}}$, inueniendum pono $b-z=u^2$, erit $z=b-u^2$ et $dz=-2udu$, ideoque $\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(b-z)}}=-2du(b-u^2)^{m-1}=-2du(b^{m-1}-\frac{(m-1)}{1}b^{m-2}u^2+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}b^{m-3}u^4-$ etc.) cuius integrale eſt $C-2u(b^{m-1}-\frac{(m-1)}{1.3}b^{m-2}u^2+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}b^{m-3}u^4-$ etc.), quae quan-

M.E.C.D. 2017

titas cum debeat euanescere facto y seu $z=o$, i.e. $u^2=b$, erit $C=2b^{m-\frac{1}{2}}(1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-$ etc.) Quia autem integrum tempus prouenit facto $y=a$ seu $z=b$, i. e. $u=o$, remanebit pro integrali ipsius $\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(b-z)}}$ sola quantitas C, quae loco $b^{m-\frac{1}{2}}$ restituto a est $=2a(1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7}+$ etc.). Totum ergo descensus tempus per AC aequabitur facto ex $\frac{a^{\frac{2m}{2m-1}}}{f^{\frac{2m}{2m-1}}}\sqrt{2(2m-1)f}$ in hanc seriem $1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7}+$ etc. quae toties abrumpitur, quoties m est numerus integer affirmatiuus. His igitur in casibus tempus algebraice potest exhiberi. Q. E. I.

Corollarium 1.

291. Sit $m=1$, quo casu est $n=-3$, erit series $=1$; tempus ergo descensus per AC prodibit $=\frac{a^2}{f^2}\sqrt{2f}=\frac{a^2\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$ vt supra (289) est inuentum.

Corollarium 2.

292. Si sit $m=2$, quo casu fit $n=\frac{-5}{3}$, erit seriei valor $=\frac{2}{3}$, atque tempus totius descensus $=\frac{2}{3}\cdot\frac{a^3}{f^{\frac{4}{3}}}\sqrt{6f}$. Sin est $m=3$, erit $n=\frac{-7}{5}$, et series $=\frac{2.4}{3.5}$

tem-

M.E.C.D. 2017

tempusque $\frac{2.4\,a^{\frac{6}{5}}}{3.5.f^{\frac{6}{5}}}\sqrt{10f}$. Simili modo si est $m=4$,

fit $n=\frac{-9}{7}$, atque tempus prodibit $=\frac{2.4.6.a^{\frac{8}{7}}}{3.5.7.f^{\frac{8}{7}}}\sqrt{14f}$.

Corollarium 3.

293. Colligitur ex his seriei valor generalis $=\frac{2.4.6.\ldots\ldots(2m-2)}{3.5.7.\ldots\ldots(2m-1)}$. Generatim igitur tempus descensus erit $=\frac{2.4.6.\ldots\ldots(2m-2).a^{\frac{2m}{2m-1}}}{3.5.7.\ldots\ldots(2m-1).f^{\frac{2m}{2m-1}}}\sqrt{2(2m-1)f}$. Si quidem est $n=\frac{-2m-1}{2m-1}$ seu $m=\frac{n-1}{2n+2}$.

Corollarium 4.

294. Successiue ergo loco m positis valoribus 1, 2, 3, 4, etc. seriei valores sequentem constituent progressionem 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{2.4}{3.5}$, $\frac{2.4.6}{3.5.7}$, etc. in qua concessa circuli quadratura, termini intermedii possunt exhiberi. Si enim est $m=\frac{1}{2}$ terminus respondens inuenitur $\frac{\pi}{2}$ denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam; si $m=\frac{3}{2}$, erit respondens terminus $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, et ita porro si m denotet $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$ etc. prouenient hi termini $\frac{1.3.\pi}{2.4.2}$, $\frac{1.3.5.\pi}{2.4.6.2}$, $\frac{1.3.5.7.\pi}{2.4.6.8.2}$, etc.

Corollarium 5.

295. Innotescit ergo etiam in his casibus tempus descensus per AC. Nam si est $m=\frac{1}{2}$ fit $n=-\infty$, quo casu tempus semper est infinite paruum.

Sit

M.E.C.D. 2017

Sit ergo $m = \frac{3}{2}$, fiet $n = -2$, et tempus descensus $= \frac{1.\pi}{2.2} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{f^{\frac{2}{3}}} \sqrt{4f} = \frac{\pi . a\sqrt{a}}{2.f}$ prorsus vt iam inuenimus (287). Sit $m = \frac{5}{2}$, erit $n = \frac{-3}{2}$ et tempus descensus $= \frac{1.3\pi a^{\frac{5}{4}}}{2.4 f^{\frac{5}{4}}} \sqrt{2f}$. Atque si $m = \frac{7}{2}$, fit $n = \frac{-4}{3}$ et tempus descensus $= \frac{1.3.5\,\pi a^{\frac{7}{6}}}{2.4.6\; f^{\frac{7}{6}}} \sqrt{3f}$.

Corollarium 6.

296. Generaliter igitur si fuerit $m = \frac{2k+1}{2}$, quo casu fit $n = \frac{-k-1}{k}$, erit tempus descensus $= \frac{1.3.5.\ldots\ldots(2k-1)}{2.4.6.\ldots\ldots 2k} \cdot \frac{\pi a^{\frac{2k+1}{2k}}}{f^{\frac{2k+1}{2k}}} \sqrt{kf}$.

PROPOSITIO 37.

Problema.

297. *Determinare tempus descensus per* AC *ad virium centrum* C, *si vis centripeta proportionalis est reciproce huic distantiarum dignitati, cuius exponens est* $\frac{m-1}{m}$, *denotante* m *numerum quemcunque integrum affirmatiuum.*

So-

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Eſt itaque $n = \frac{1-m}{m}$, et propterea $v = \frac{a^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m} f^{\frac{1-m}{m}}}$

$= m f^{\frac{m-1}{m}} (a^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}})$. Elementum igitur temporis, quod eſt $\frac{dy}{\sqrt{v}}$, erit $= dy : \sqrt{m f^{\frac{m-1}{m}} (a^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}})}$, et tempus ipſum per PC $= \frac{1}{\sqrt{m f^{\frac{m-1}{m}}}} \int \frac{dy}{\sqrt{(a^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}})}}$. Ponatur $a^{\frac{1}{m}} = b$ et $y^{\frac{1}{m}} = z$; erit $dy = m z^{m-1} dz$, fit igitur tempus per PC $= \sqrt{m} f^{\frac{1-m}{m}} \int \frac{z^{m-1} dz}{\sqrt{(b-z)}}$. At integrale ipſius $\frac{z^{m-1} dz}{\sqrt{(b-z)}}$ eodem modo, quo in praecedente prop. ſumtum, eſt $2 b^{\frac{2m-1}{2}} (1 - \frac{(m-1)}{1.3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7} +$ etc.). Quamobrem integrum tempus deſcenſus per AC poſito $a^{\frac{2m-1}{2m}}$ loco $b^{\frac{2m-1}{2}}$ erit $= 2\sqrt{m} a^{\frac{2m-1}{2m}} f^{\frac{1-m}{m}}$ ducto in hanc ſeriem $1 - \frac{(m-1)}{1.3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5} - \frac{(m-1)}{1} \frac{(m-2)(m-3)}{2.3.7} +$ etc. Quoties igitur m eſt numerus integer affirmatiuus, toties ſeries abrumpitur, ita vt tempus quaeſitum algebraice exprimatur. Q. E. I.

Corollarium 1.

298. Sit $m = 1$, quo caſu fit $n = 0$, et vis centripeta propterea vniformis ac grauitati aequalis; Series ergo erit $= 1$, et tempus deſcenſus per AC $= 2\sqrt{a}$ omnino vt iam §. 219 eſt inuentum modo neglecta littera m.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

299. Sit $m=2$, vt sit $n=\frac{-1}{2}$; erit tempus totius descensus $=\frac{2}{3}.2a^{\frac{3}{4}}f^{\frac{-1}{4}}\sqrt{2}$. Sit $m=3$, erit $n=\frac{-2}{3}$; totumque tempus descensus $\frac{2.4}{3.5}2a^{\frac{5}{6}}f^{\frac{-1}{3}}\sqrt{3}$. Simili modo si $m=4$, et propterea $n=\frac{-3}{4}$ prodit tempus descensus $=\frac{2.4.6}{3.5.7}2a^{\frac{7}{8}}f^{\frac{-3}{8}}\sqrt{4}$ etc.

Corollarium 3.

300. Generaliter igitur quicquid sit m, ideoque $n=\frac{1-m}{m}$, erit tempus descensus totius per $AC=\frac{2.4.6\ldots\ldots(2m-2)}{3.5.7\ldots\ldots(2m-1)}2a^{\frac{2m-1}{2m}}f^{\frac{1-m}{2m}}\sqrt{m}$.

Corollarium 4.

301. Iisdem quibus supra (294) interpolationibus adhibitis, poterunt tempora descensuum assignari, si m est numerus quicunque integer affirmatiuus $+\frac{1}{2}$. Sit nimirum $m=\frac{1}{2}$, quo casu fit $n=1$, erit tempus descensus $=\frac{\pi}{2}\sqrt{2f}$, prorsus vt §. 253, vbi idem casus, quo $n=1$ seu vis centripeta distantiis proportionalis, est pertractatus.

Corollarium 5.

302. Si $m=\frac{3}{4}$ seu $n=\frac{-1}{3}$ fit tempus descensus $=\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}\sqrt{6}a^{\frac{4}{3}}f^{\frac{-1}{3}}$, si $m=\frac{5}{2}$ seu $n=\frac{-3}{5}$ prodit tempus descensus $=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{\pi}{2}\sqrt{10}a^{\frac{8}{5}}f^{\frac{-3}{5}}$. Atque generaliter casu quo $n=\frac{1-m}{m}$ reperitur tempus descensus $=\frac{1.3\ldots\ldots(2m-2)}{2.4\ldots\ldots(2m-1)}\frac{\pi}{2}\sqrt{4m}a^{\frac{2m-1}{m}}f^{\frac{1-m}{m}}$.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion.

303. Intelligitur ex hisce, quibus casibus tempora descensuum algebraice possint exprimi, videlicet, quando est $n = \frac{-2m-1}{2m-1}$ vel $n = \frac{1-m}{m}$ et m significat numerum affirmatiuum integrum quemcunque. Atque praeter hos casus, dubito, an quisquam alius detur. Deinde etiam apparent casus, quibus temporis definitio a circuli quadratura pendet, hique habentur si fuerit vel $n = \frac{-m-1}{m}$, vel $n = \frac{1-2m}{1+2m}$, denotante m vt supra numerum quemcunque integrum affirmatiuum. Neque vero hi sunt omnes casus, qui ad circuli quadraturam deducuntur; namque singularis casus si $n = -1$ quoque a circuli quadratura pendet, vt sequenti propositione demonstrabimus. At vero hoc differt iste casus ab illis, quod hic in temporis expressione non π, sed $\sqrt{\pi}$ occurrat; et praeterea etiam totum duntaxat descensus tempus $\sqrt{\pi}$ inuoluat, dum tempus per quoduis spatium indefinitum nonnisi quadraturis transcendentium curuarum potest exhiberi.

PROPOSITIO 38.

Theorema.

304. *Existente vi centripeta reciproce distantiis a centro virium* C *proportionali, erit tempus descensus integri per* $AC = \frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}$, *denotantibus* a *spatium* AC, f *distantiam in qua vis centripeta est grauitati aequalis, et* $\pi : 1$ *rationem peripheriae ad diametrum.*

M.E.C.D. 2017

Demonſtratio.

Quia in quouis puncto P altitudo celeritati debita eſt $fl\frac{a}{y}$, (266); erit ipſa celeritas $=\sqrt{fl\frac{a}{y}}$ et tempus per ſpatium PC$=\frac{1}{\sqrt{f}}\int\frac{dy}{\sqrt{l\frac{a}{y}}}$. Huius ergo integrale ita acceptum vt euanescat facto $y=0$, dabit verum tempus per PC. Quare ſi in hac expreſſione tum ponatur $y=a$, prodibit totum descenſus tempus per AC. Ponatur autem $y=az$; et habebitur $\frac{a}{\sqrt{f}}\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$. Demonſtraui vero in Commentariis Academiae Scientiarum Petropol. Anno 1730. hanc quantitatem $\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$, ſi ponatur $z=1$, ſeu $y=a$, definire in hac progreſſione 1, 2, 6, 24 etc., eum terminum, cuius index ſit $-\frac{1}{2}$, quem alia methodo ibidem oſtendi eſſe $=\sqrt{\pi}$. Ex quo intelligitur tempus totius descenſus per AC eſſe $\frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}$. Q. E. D.

Corollarium.

305. Si ergo plura corpora ad idem centrum C ex diuerſis diſtantiis delabantur, erunt eorum tempora descenſuum ipſis diſtantiis proportionalia.

Scholion 1.

306. Neglexi in hac propoſitione fractionem $\frac{1}{250}$, quae in temporis expreſſionem, integratione ſpatii elementi per radicem quadratam altitudinis celeritati debitae diuiſi erutam, eſt multiplicanda (221), quippe quae ad tempus in minutis ſecundis inueniendum inſeruit, ſi longitudines in ſcrupulis pedis rhenani exponuntur. Simili modo etiam in ſequen-

M.E.C.D. 2017

quentibus tempora, nisi in minutis secundis desiderentur, sum definiturus, ad ambages vitandas. Facile enim apparet ad numerum minutorum secundorum inueniendum nil aliud esse faciendum, nisi vt huiusmodi temporis expressiones per 250 diuidantur, atque longitudines in scrupulis pedis Rhenani exhibeantur, vti iam saepius est inculcatum.

Scholion 2.

307. Omnino paradoxon hoc videbitur, quod integrale ipsius $\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$ posito $z=1$, fiat $=\sqrt{\pi}$. Nullo enim modo quisquam hoc directe poterit demonstrare; neque ego hanc aequalitatem nisi a posteriori cognoui, quemadmodum ex citata dissertatione videre licet. Eosdem igitur reddunt valores haec duo integralia $\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$ et $2\sqrt{\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}}$, si post integrationem ponatur $z=1$, neque tamen ipsa sunt inter se aequalia; immo nequidem inter se possunt comparari.

PROPOSITIO 39.

Theorema.

308. *Si vis centripeta fuerit vt potestas exponentis* n *distantiarum, et plura corpora ex diuersis distantiis ad idem centrum delabantur, erunt descensuum tempora potestatibus distantiarum, quarum exponens est* $\frac{1-n}{2}$, *proportionalia.*

Demonstratio.

Sit corporis cuiusuis a centro C distantia AC $=a$, et f distantia, in qua vis centripeta grauitati

M.E.C.D. 2017

aequalis est. Deinde cum peruenerit corpus in P, ponatur CP$=y$, et altitudo celeritati in hoc loco debita $=v$, erit $v=\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Tempus ergo, quo CP absoluitur est $=\sqrt{(n+1)}f^n\int\frac{dy}{\sqrt{(a^{n+1}-y^{n+1})}}$. Quod integrale quanquam exhiberi non potest, tamen ita erit comparatum, vt a et y in singulis terminis $\frac{1-n}{2}$ dimensiones constituant, quia in differentiali eundem dimensionum numerum efficiunt, considerato dy tanquam vna dimensione. Quamobrem si post integrationem ponatur $y=a$, quo casu tempus totius descensus prouenit, habebit solum a totidem videlicet $\frac{1-n}{2}$ dimensiones, seu erit multiplum ipsius $a^{\frac{1-n}{2}}$. Quare, cum alter factor non complectatur nisi f et numeros, ideoque eundem valorem retineat, vtcunque a varietur, erunt diuersorum descensuum tempora vt $a^{\frac{1-n}{2}}$ i. e. vt potestates distantiarum, quarum exponens est $\frac{1-n}{2}$. Q. E. D.

Corollarium 1.

309. Quo igitur omnia descensuum tempora sint inter se aequalia, oportet vt $a^{\frac{1-n}{2}}$ sit quantitas constans, vtcunque a mutetur, id quod accidit si $n=1$, seu vis centripeta distantiis directe proportionalis, vti iam obseruauimus (283).

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

310. Simili modo ex his ſtatim apparet, ſi vis centripeta eſt reciproce vt quadratum diſtantiae, ſeu $n=-2$, tempora deſcenſuum ad hoc centrum eſſe inter ſe vt diſtantiae eleuatae ad exponentem $\frac{3}{2}$, ſeu in ſesquiplicata diſtantiarum ratione (287).

Corollarium 3.

311. Si fuerint plura ſimiliter attrahentia virium centra, ſed efficacia differentia, et ad ea corpora ex aequalibus diſtantiis delabantur, erunt tempora inter ſe vt $f^{\frac{n}{2}}$ quia a vt conſtans, f vero vt variabilis conſideratur. Eſt vero efficacia vt vis centripeta in data diſtantia puta 1, erit ergo f^n reciproce vt efficacia, atque tempora illa inter ſe in reciproca ſubduplicata efficaciarum ratione (285).

Corollarium 4.

312. Et, ſi ad diuerſa huiusmodi virium centra corpora ex quibuscunque diſtantiis delabantur, erunt eorum tempora deſcenſuum in ratione compoſita ex directa $\frac{1-n}{2}$ plicata diſtantiarum, et reciproca ſubduplicata efficaciarum.

Scholion.

313. Ex his, quae de viribus centripetis dicta ſunt, abunde perſpicitur, quomodo motus corporum inueniri oporteat, ſi loco vis centripetae vis centrifuga ſeu pellens corpus de centro ſubſtituatur. Omnia enim manent, vt in praecedentibus, niſi quod loco formulae vim centripetam exprimentis,

M.E.C.D. 2017

tis, quae erat $\frac{y^n}{f^n}$ (264), eius negatiua debeat adhiberi. Neque tamen ſuperfluum iudico de his caſibus quaedam afferre; cognoſcentur enim ex his generales quaedam regulae ad motus generationem a potentiis pertinentes, quae ex ſolo calculo non poſſunt deduci. Reſpiciunt ea autem actionem potentiarum in corpora quiescentia, ad quae calculus noſter, quippe quo ponitur celeritatis incrementum reſpectu prioris infinite paruum, minus recte accommodatur, et reipſa abſurdi quid praebet, niſi primum ſpatii elementum tempusculo infinite paruo percurritur. Ad hoc autem dilucidandum hoc vtor axiomate, quod corpus in ipſo centro virium repellente poſitum perpetuo ibi ſit permanſurum, ſi vis centrifuga in ipſo illo puncto fuerit infinite parua ſeu nulla; id quod euenit, quando exponens dignitatis diſtantiarum, cui vis centrifuga eſt proportionalis, eſt numerus nihilo maior ſeu poſitiuus.

PROPOSITIO 40.

Problema.

Tab. III. Fig. 2. 314. *E centro virium* C *a ſe repellente in ratione* n plicata *diſtantiarum, egrediatur corpus in recta* CP, *requiritur eius celeritas in loco quouis* P *et tempus, quo ſpatium* CP *percurritur.*

Solutio.

Sit f diſtantia, in qua vis centrifuga aequalis eſt grauitati, et vocetur CP, y, atque altitudo ce-

le-

M.E.C.D. 2017

leritati in P debita v. Erit ergo vis, qua corpus in P vrgetur $=\frac{y^n}{f^n}$, et propterea $dv=\frac{y^n dy}{f^n}$ (213), quia corpus motu accelerato propellitur. Quare, cum corpus in C celeritatem nullam habere ponatur, erit $v=\frac{y^{n+1}}{(n+1)f^n}$, si fuerit $n+1$ numerus positiuus, sin autem negatiuus, fiet v infinitum. Ex hoc prodit tempus, quo spatium CP percurritur, $=\sqrt{(n+1)f^n}\int dy : y^{\frac{n+1}{2}}=\frac{2}{1-n}\sqrt{(n+1)f^n y^{1-n}}$ si quidem y^{1-n} fit $=0$, posito $y=0$. Nam si fuerit infinitum, tempus quoque prodiret infinitum, ob addendam constantem infinite magnam; id quod indicio esset corpus nunquam ex C egressurum. Tempus igitur erit $=\frac{2}{1-n}\sqrt{(n+1)f^n y^{1-n}}$, quoties et $1-n$ et $n+1$ fuerint numeri positiui. Q. E. I.

Corollarium 1.

315. Sunt vero hi ambo numeri $1-n$, et $1+n$ affirmatiui, si n contineatur intra hos limites -1 et $+1$. Atque si n illum terminum -1 transcendit celeritas vbique erit infinita; et si hunc $+1$ transgreditur, tempus erit infinitum.

Corollarium 2.

316. Constat autem ex ipsa rei natura, si n fuerit numerus nihilo maior, corpus nunquam ex C esse egressurum (313). Hanc ob rem necesse est, etsi n contineatur intra 0 et $+1$, calculum hic adhibitum, quippe qui tempus indicat finitum, fallere.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

317. Tempora haec autem sequuntur ex celeritatibus, ergo et in his ipsis absurdum inesse debebit, quoties n comprehenditur intra 0 et $+1$. Neque enim hae celeritates generari poterunt, cum corpus nunquam ex C egrediatur.

Scholion 1.

318. Sit curua AM talis, vt denotantibus abscissis AP$=y$, applicata PM sit $=v$. Haec curua contento n intra hos limites 0 et $+1$, hanc habebit proprietatem, vt ipsa in A cum axe confundatur, hocque loco curuedinem habeat infiniter magnam nempe radium osculi euanescentem.

Corollarium 4.

319. Quoties igitur accidit, vt scala celeritatum, seu potius altitudinum celeritatibus debitarum huiusmodi habeat formam, toties iudicandum est, eam a nulla potentia generari potuisse, etiamsi calculus aliter ostendat, sed esse casum penitus imaginarium ac in rerum natura non existentem.

Scholion 2.

320. Ratio huius aberrationis calculi a natura in ipso principio motus sine dubio est sita, atque hoc loco lex alias vniuersalis de celeritatis incremento a potentiis producto perperam adhibetur. Quoniam enim, vt iam animaduertimus (313) haec lex locum habet tantum, quando corpus finitam iam habet celeritatem, semper in principio motus

M.E.C.D. 2017

tus temere vſurpatur. Cum autem iſte error in ipſo primo tantum elemento inſit, plerumque eſt infinite paruus et hanc ob rem non eſt reſpiciendus. Eſt vero infinite paruus, quoties primum elementum ſpatii tempusculo infinite paruo percurritur, tum enim neque in celeritatibus neque in temporibus conſiderabile discrimen poterit producere. Euenit hoc, ſi potentia, qua corpus in ipſo principio motus ſollicitatur eſt finitae magnitudinis vel etiam infinitae magnae; perſpicuum enim eſt hoc caſu, primum elementum temporis puncto percurri. At ſi potentia, vt in noſtro caſu vſu venit, in principio eſt infinite parua ſeu potius nulla, ad primum tantum elementum abſoluendum non modo finito, ſed etiam infinito opus eſt tempore, quia corpus quiescens a nulla potentia pulſum de loco ſuo nunquam excedet. In reliquis quidem caſibus, quibus *n* eſt nonſolum nihilo, ſed etiam vnitate maior, tantus eſt error, vt etiam calculus infinitum tempus per primum elementum oſtendat. Verum, ſi *n* intra *o* et 1 comprehenditur, vitium calculi animaduertitur; hocque ideo, vti videtur, quia his caſibus ſcala potentiarum formam habet curuae AM, quae axi AP in A ad angulos rectos occurrit. Statim enim in proximo ipſi A puncto *a* linea *ab* potentiam exprimens infinite maior eſt ſagitta A*a*; perinde autem eſt in motus computatione, ſiue corpus elementum percurrens conſideretur a potentia, quae initio agit, ſollicitatum ſiue ea, qua in fine elementi vrgetur. In hoc autem caſu euidens eſt, errorem

Tab. III. Fig. 4.

M.E.C.D. 2017

nasci oportere, si corpus per totum elementum Aa a potentia *ab* sollicitatum considereretur.

PROPOSITIO 41.
Problema.

Tab. III. Fig. 5.

321. *Si fuerit vis centripeta functioni cuicunque distantiarum a centro* C *proportionalis, corpusque ex* A *ad id delabatur; requiritur celeritas eius in puncto quocunque* P *atque tempus, quo spatium* AP *percurritur.*

Solutio.

Repraesentet curua BMD scalam potentiarum seu legem vis centripetae, ita vt corpus in P trahatur ad C a potentia PM, quae sit ad vim grauitatis vt haec PM ad rectam constantem AE, qua vis grauitatis exprimitur. Sit nunc AP$=x$; PM$=p$; AE$=1$, et altitudo celeritati in P debita $=v$. Vis igitur accelerans est p, et propterea sumto elemento P$p=dx$, erit $dv=pdx$ (213). Ex qua prodit integrando $v=\int pdx$. At $\int pdx$ exprimit aream ABMP, hanc ob rem habebitur $v=\frac{\text{ABMP}}{\text{AE}}$, completa homogeneitate recta AE$=1$. Cognita nunc altitudine v erit tempus, quo spatium AP percurritur $=\int \frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$, quod, quia p per x dari ponitur, per quadraturas innotescit. Q. E. I.

Corollarium 1.

322. Perspicitur ex his, si corpus ea celeritate, quam in C acquisiuit, retro moueatur sursum, motum eius ascensus similem fore descensui, atque

in

in puncto P eandem habiturum esse celeritatem, quam habuit ante, et proinde tempus quoque ascensus per CP aequale esse debere, tempori descensus per idem spatium.

Corollarium 2.

323. Posuimus hic corpus in A celeritatem habere nullam, atque ex quiete motum inchoare. Sed non difficilior euadit calculus, si ei in A celeritas quaecunqne tribuatur; hoc enim casu differentiale pdx ita debet integrari, vt facto $x=o$, ipsum $\int pdx$ praebeat altitudinem celeritati initiali debitam. Tempus vero ex $\int pdx$ hac ratione accepto inuenietur similiter vt supra.

Scholion 1.

324. Assumsimus quidem p esse functionem ipsius x, et propterea non respicere centrum virium C, sed tantum motus initium A. Nihilo tamen minus casus propositionis in solutione continetur; si enim p est functio ipsius distantiae CP a centro virium C, quam vocemus y, erit $y=a-x$, posito toto spatio $AC=a$, et hanc ob rem p denotabit functionem ipsius $a-x$, i. e. functionem ipsius x et constantium vt assumsimus. Nostra vero solutio latius patet, determinat enim motum corporis a quacunque potentia sollicitati, nullo respectu ad certum aliquod punctum fixum habito, dummodo hae potentiae vbiuis eandem directionem teneant. Nisi enim hoc fiat, corpus cessabit in linea recta moueri, sed in curua incedet, de quo motu in sequentibus tractabimus.

M.E.C.D. 2017

Scholion 2.

325. Determinauimus hactenus motus corporis rectilineos ex data potentia, nunc vero pertractanda reſtat altera huius capitis pars, qua ex data motus conditione potentiarum legem definiri oportet. Sit vero hoc vel ex datis celeritatibus vel temporibus, vtrumque autem duplici modo eſt pertractandum. Vel enim reſpicitur ad vnicum descenſum ſeu ascenſum, in cuius ſingulis punctis datae ponuntur vel celeritates vel tempora, quibus quaeque ſpatii portiones percurruntur. Vel conſiderantur infiniti descenſus ad punctum fixum ex diuerſis altitudinibus facti, in quibus dantur vel celeritates vltimae, vel tempora, quibus ſinguli descenſus integri abſoluuntur. Ex his igitur quatuor oriuntur problemata primaria, quorum ſolutiones hic exhiberi oportet. Praeter haec vero aliae afferuntur quaeſtiones, in quibus neque ſolae celeritates neque ſola tempora dantur, ſed aliud quiddam, quod ex vtrisque ſit compoſitum, cuiusmodi vero quaeſtiones, cum innumerabiles poſſent excogitari, aliquas tantum magis inſignes, et ex quarum ſolutionibus ſimul reliquorum ſolutiones poſſint intelligi, in medium proferemus.

PROPOSITIO 42.
Problema.

Tab. II. Fig. 10.

326 *Data corporis rectam* AP *percurrentis in ſingulis punctis celeritate, requiritur potentiae lex, quae hunc motum corpus ſollicitando efficere valet.*

So-

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Percurſo quouis ſpatio AP, quod ponimus $=x$, ſit altitudo celeritati, quam corpus in P habet, debita $=v$, quae proinde data et ipſius x et conſtantium functio quaedam eſſe ponitur. Potentia vero in P agens, quam quaerimus, ſit $=p$, quae ergo ex corporis acceleratione dv, dum elementum $Pp=dx$ percurrit, inueniri poterit. Cum enim ſit $dv=pdx$ (213), erit $p=\frac{dv}{dx}$ ſeu iſta potentia quaeſita ſe habebit ad vim grauitatis, vt incrementum altitudinis celeritati debitae, ad ſpatii elementum, quod interea percurritur. Q. E. I.

Corollarium 1.

327. Si fuerit $v=x$, ſeu ſpatium deſcriptum ea ipſa altitudo celeritati debita; fiet $dv=dx$ et $p=1$, id quod indicat potentiam hunc motum producentem eſſe vniformen, et ipſi grauitati aequalem.

Corollarium 2.

328. Si ipſae celeritates ponantur ſpatiis percurſis proportionales; erit $v=\frac{x^2}{f}$, denotante f conſtantem requiſitam, fit ergo $dv=\frac{2xdx}{f}$ et $p=\frac{2x}{f}$. Quamobrem potentia erit ſpatiis percurſis proportionalis.

Scholion 1.

329. Conſtat autem ex ſuperioribus, hunc caſum exiſtere non poſſe; nam quia potentia in ipſo motus initio A eſt nulla, corpus ex hoc puncto nun-

M.E.C.D. 2017

nunquam egreditur, ſed ibi perpetuo quiescet. Idem commonſtrat temporis per AP computatio, quod erit $=\int \frac{dx}{x}\sqrt{f}$, quae quantitas eſt infinita, ſi quidem integrale ita accipitur, vt euanescat poſito $x=0$.

Corollarium 3.

330. Quo igitur hoc non eueniat, oportet vt $\frac{dv}{dx}$ ſit eiusmodi quantitas, quae facto $v=0$ non euanescat, ſed quae vel fiat finita vel infinita. Ex quo perſpicitur ſcalam altitudinum celeritatibus debitarum AM, in qua ſumtis $AP=v$, applicatae PM repraeſentent has altitudines v, non debere in A in axem incidere, ſed angulum cum eo finitum conſtituere oportere.

Tab. III. Fig. 2.

Scholion 2.

331. Haec intelligenda ſunt tantum de iis caſibus, quibus corporis celeritas in A euanescens ponitur, et ſcala AM cum axe in A concurrit. Aliter enim ſe res habet, ſi corpus in A celeritatem iam habet, qua, etiamſi potentia ſit nulla, tamen ex A progredi, potentiaeque actionem ſubire poteſt, ita vt non opus ſit tempore infinito ad ſpatium AP abſoluendum.

PROPOSITIO 43.
Problema.

Tab. III. Fig. 5.

332. *Dato tempore, quo corpus in recta* AC *progrediens, percurrit ſingula ſpatia* AP; *oportet definire legem potentiarum, qua efficitur, vt corpus hoc motu feratur.*

So-

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Dicto ſpatio AP, x; et tempore, quo percurritur $=Vt$, quia expreſſionis temporis quadratum vnicam habet dimenſionem; ſit potentia quaeſita $=p$, et altitudo celeritati in P debita $=v$, hac enim opus eſt ad inueniendum p, quamuis ex calculo exire debeat. His poſitis erit vt ante $dv=pdx$, et $v=\int pdx$. Tempus igitur $Vt=\int \frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$, ex qua aequatione ſumtis differentialibus prodit $\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$ et $\int pdx=\frac{4tdx^2}{dt^2}$, cuius ſi denuo ſumatur differentialis poſito dx conſtante, habebitur $p=\frac{4dx}{dt}-\frac{4tdxddt}{dt^3}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

333. Si ponatur tempus ipſum $=T$ neglecta homogeneitate, erit $t=T^2$; atque prodibit $p=\frac{-2dxddT}{dT^3}$. Quae expreſſio ſimplicior eſt ſuperiore, et facilius ad caſus ſpeciales accommodatur.

Corollarium 2.

334. Si tempora ponantur ſpatiis deſcriptis proportionalia, erit $T=x$ et $ddT=o$, ob dx conſtans. Conſequenter potentia erit nulla, qua indicatur corpus vi inſita hunc motum aequabilem continuare.

Scholion.

335. Notandum hic eſt pro T eiusmodi accipi debere functionem ipſius x, quae cum fiat $=o$, poſito $x=o$, tum crescentibus x crescat quoque.

M.E.C.D. 2017

Fieri enim omnino non potest, vt corpusmoueri pergat, tempus vero diminuatur. Ponamus v. g. $T=\sqrt{(2ax-x^2)}$ quae quantitas ad certum tantum terminum crescit, crescente x, tum vero decrescit.

Erit ergo $dT=\frac{adx-xdx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$ et $ddT=\frac{-a^2dx^2}{(2ax-x^2)^{3:2}}$. Ex his fit $p=\frac{2a^2}{(a-x)^2}$, seu posita $AC=a$, sollicitabitur corpus in P ad C vi cubo distantiae a C reciproce proportionali. Tempus vero $\sqrt{(2ax-x^2)}$ vlterius non valet, quam vsque ad C quo $x=a$. Sed de hoc casu iam est actum (289). Quare ex hoc concludi videtur corpus cum in C peruenerit ex eo nunquam esse egressurum, quod autem quomodo fieri possit, cum celeritas eius in C sit infinite magna, nullo modo concipi potest. Accedit quod, cum sit $\sqrt{v}=\frac{dx}{dT}=\frac{\sqrt{(2ax-x^2)}}{a-x}$, celeritas corporis cum vltra C progrediatur, deberet esse negatiua, ideoque corpus a C non recederet, sed ad C accederet, quae ita pugnant, vt etiam nunc conciliari nequeant.

Corollarium 3.

336. Cum sit elementum temporis $dT=\frac{dx}{\sqrt{v}}$ erit celeritas corporis in quouis loco $\sqrt{v}=\frac{dx}{dT}$, ex data ergo temporum lege, simul celeritas corporis in singulis locis innotescit; quod quidem ex ipso nexu inter celeritates et tempore consequitur, nullo respectu habito ad potentiam (37).

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 44.

Problema.

337. *Si corpus in recta* AP *ita descendat, vt ea celeritate, quam in* P *habet, eodem tempore, quo ſpatium* AP *percurrit, progredi poſſit motu vniformi per ſpatium* PM, *applicatam curuae* AM *datae: determinari oportet legem potentiae ſollicitantis, qua talis motus generatur.* Tab. III. Fig. 6.

Solutio.

Poſito AP$=x$ et PM$=s$, erit s ob datam curuam AM functio ipſius x. Sit porro potentia in P corpus ſollicitans $=p$, altitudo celeritati in P debita $=v$, et tempus, quo ſpatium AP abſoluitur $=$T, Quia iam ſpatium s tempore T celeritate $\sqrt{v}$ abſoluitur motu aequabili, erit $T=\frac{s}{\sqrt{v}}$ (30). Eſt vero $v=\int p dx$ et $T=\int\frac{dx}{\sqrt{\int p dx}}$, quocirca habebitur $\int\frac{dx}{\sqrt{\int p dx}}=\frac{s}{\sqrt{\int p dx}}$, vel relicto v loco $\int p dx$, quo calculus concinnior reddatur, erit $\int\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{s}{\sqrt{v}}$. Quae differentiata dat $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{ds}{\sqrt{v}}-\frac{sdv}{2v\sqrt{v}}$, ex qua deducitur haec aequatio $\frac{dv}{v}=\frac{2ds}{s}-\frac{2dx}{s}$; cuius integralis eſt $lv=2ls-2\int\frac{dx}{s}$, ſeu $v=e^{-2\int\frac{dx}{s}}s^2$ denotante e numerum, cuius logarithmus eſt 1. Sumantur iterum differentialia, prodibit $dv=pdx=2e^{-2\int\frac{dx}{s}}(sds-sdx)$. Ex qua tandem elicitur $p=2se^{-2\int\frac{dx}{s}}(\frac{ds-dx}{dx})$. Innotescet igitur potentia quaeſita p ex iſta aequatione, quia s in x dari ponitur. Q. E. I.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

338. Quia est $v = e^{-2\int \frac{dx}{s}} s^2$, habebitur hinc ipsa corporis, quam in P habet, celeritas $\sqrt{v} = e^{-\int \frac{dx}{s}} s$. Quam autem constantem in integratione ipsius $\frac{dx}{s}$ addi oporteat, mox docebitur.

Corollarium 2.

339. Tempus quoque T, quo spatium AP percurritur, facile ex hisce deducitur. Nam cum sit $T = \frac{s}{\sqrt{v}}$, habebitur $T = e^{\int \frac{dx}{s}}$. Cum igitur debeat T euanescere facto $x = 0$, oportet ipsum $\frac{dx}{s}$ ita integrari, vt $e^{\int \frac{dx}{s}}$ euanescat, facto $x = 0$. Quamobrem necesse est vt fiat $\int \frac{dx}{s} = -\infty$, si ponatur $x = 0$.

Corollarium 3.

340. Sit $s = nx$, erit $\int \frac{dx}{s} = \frac{1}{n} lx + lc$. Quicquid igitur c denotet, semper $\int \frac{dx}{s}$ fit $= -\infty$ posito $x = 0$. Quare erit $e^{\int \frac{dx}{s}} = cx^{\frac{1}{n}} = T$. Consequenter prodibit $p = \frac{2n(n-1)}{c^2} x^{\frac{n-2}{n}}$, atque $\sqrt{v} = \frac{n}{c} x^{\frac{n-1}{n}}$.

Corollarium 4.

341. Si ponatur $s = x$, perspicuum est motum in AP vniformem esse debere, id quod etiam calculus ostendit. Fit enim $n = 1$, adeoque $p = 0$ et $\sqrt{v} = \frac{n}{c}$ seu constanti.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

342. Si n eſt vnitate minor, celeritas in ipſo puncto A fit infinite magna, atque etiam potentia p, erit enim reciproce vt poteſtas exponentis $\frac{2-n}{n}$ ſpatiorum percurſorum.

Corollarium 6.

343. Si n eſt vnitate maior, attamen binario minor, fit quidem celeritas in $A=o$, ſed potentia manet in A infinite magna, decrescitque in ratione quadam multiplicata ſpatiorum percurſorum.

Corollarium 7.

344. Si $n=2$, habemus caſum potentiae vniformis. Fit enim $p=\frac{4}{c^2}$, et $\sqrt{v}=\frac{2}{c}\sqrt{x}$. Hancque proprietatem iam demonſtrauimus propoſitione 28, (230) vbi oſtendimus corpus in hac potentiae vniformis hypotheſi ex quiete descendens tantam quouis ſpatio percurſo acquirere celeritatem, qua eodem tempore vniformiter poſſet duplum ſpatium percurrere.

Corollarium 8.

345. Sin vero n binarium excedat, prodeunt ii caſus, quos diximus (316) in rerum natura locum obtinere non poſſe, quamuis calculus aliter oſtendat. Fit enim celeritas in A nulla, ibidemque potentia ſollicitans euanescit, quamobrem corpus nunquam ex A exire poterit, non obſtante calculo, qui tempus T per ſpatium quoduis AP, exhibet finitum.

M.E.C.D. 2017

Scholion.

346. Huius propositionis casus est ergo eiusmodi, vt data motus conditio sit ex celeritate et tempore permixta, ex qua legem potentiarum erui oporteat. Plura vero huiusmodi exempla afferre superuacaneum foret, cum ex hoc vno omnium reliquorum soluendorum modus perspiciatur.

PROPOSITIO 45.

Problema.

Tab. III. Fig. 7. 347. *Datis celeritatibus, quas corpus ex quibuscunque distantiis ad centrum virium* C *accedens in ipso centro* C *acquirit, definire legem vis centripetae huiusmodi descensus producentis, posito quod corpus singulos descensus ex quiete incipiat.*

Solutio.

Repraesentet CM scalam altitudinum celeritatibus, quas corpus in puncto C acquirit, debitarum, ita vt PM sit ipsa altitudo debita celeritati, quam corpus ex P descensum inchoans in C adipiscitur. Curua vero DN sit scala potentiarum qraesita, cuius scilicet applicatae PN exhibeant vim centripetam corpus in punctis P sollicitantem; linea vero CB designet vim centripetam vi grauitatis aequalem. His positis atque corpore ex P in C descendente erit altitudo celeritati eius in C debita aequalis areae CDNP applicatae ad BC (321). Quamobrem erit $PM = \frac{CDNP}{BC}$. Vocentur nunc CP, y; PM, v; et PN, p;

M.E.C.D. 2017

p; positoque BC$=$1; erit $v=\int p\,dy$, et differentiando $dv=p\,dy$. Quare cum detur v in y erit $p=\frac{dv}{dy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

348. Sint celeritates in C acquisitae, vt spatia percursa erit $\sqrt{v}$ vt y, et consequenter p vt y. Vis centripeta igitur proportionalis est distantiis a centro C.

Corollarium 2.

349. Si celeritates in C acquisitae dignitati exponentis n distantiarum a centro C proportionales ponantur, erit v vt y^{2n}; ergo p vt y^{2n-1}. Potentia igitur seu vis centripeta distantiarum dignitati $2n-1$ est proportionalis.

Corollarium 3.

350. Quia celeritas in C acquisita, cum fuerit $y=0$, debet esse quoque $=0$, et praeterea maiori distantiae y maior celeritas respondere debeat; non poterit non n numerum affirmatiuum significare.

Corollarium 4.

351. Potentia autem p erit constans, cum sit $n=\frac{1}{2}$; quo numero si n fuerit minor, erit vis centripeta reciproce vt dignitas quaedam distantiarum a centro C. Sin n fuerit $>\frac{1}{2}$ erit p directe vt huiusmodi dignitas quaedam. In illo casu ergo vis centripeta in C erit infinite magna, et decrescet crescentibus distantiis; hoc vero casu erit in C$=0$, crescetque crescentibus distantiis.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

352. Cum sit $PM = \frac{CDNP}{CB}$, perspicuum est curuam CM esse etiam scalam altitudinum celeritatibus debitarum, cum corpus ex C egrediatur in recta CP, vi centripeta in centrifugam mutata, atque motum a quiete incipiat (321).

Scholion.

353. Quanquam autem hoc modo problema reductum sit ad prop. 42 (326) transmutata vi centripeta in centrifugam; tempus tamen ascensus per CP in casu vis centrifugae non erit aequale tempori descensus per PC in casu vis centripetae. Neque enim aequalitas celeritatum, quae in vtroque casu per aequalia spatia generantur, temporum aequalitatem inducit; sed ex ipso etiam intuitu contrarium apparet. Nam quoties vis centripeta in C est $= 0$, etiam vis centrifuga in C euanescit; quamobrem tempus ascensus per CP erit infinitum (313), cum tamen descensus absoluatur tempore finito. Nullum igitur adminiculum ex ista similitudine celeritatum ad solutionem sequentis problematis suppeditatur. In sequenti autem propositione dari ponuntur tempora, quibus singuli descensus absoluuntur, eaque nonsolum est difficillima solutu, sed ex scala temporum nequidem scala potentiarum vllo modo potest constrvi. Quocirca non nisi casus particulares in hac propositione complectemur, quorum solutio vires nostras non superat.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 46.
Problema.

354. *Si fuerint tempora, quibus corpus ex quibuscunque distantiis* PC *ad centrum virium* C *peruenit, in ratione quacunque multiplicata distantiarum; definire legem vis centripetae.* Tab. III. Fig. 8.

Solutio.

Sint ista tempora vt potestates distantiarum exponentis n, sitque curua DN scala vis centripetae quaesita, ita vt applicata $\pi\nu$ exponat potentiam, qua corpus in π existens ad C vrgetur, repraesentante CB vim grauitatis. His positis descendat corpus ex puncto quocunque P et ponatur distantia $PC = a$, erit ergo tempus descensus per PC vt a^n, quamobrem id ponamus $= Ca^n$, denotante C quantitatem constantem, in qua a non insit, quia a ob punctum P variabile reipsa est quantitas variabilis. Peruenerit nunc corpus in locum quemcunque π et vocetur $C\pi = x$, erit altitudo celeritati eius in hoc loco debita $= \frac{PN\nu\pi}{BC} = \frac{CPND - C\pi\nu D}{BC}$ (321). Ponatur autem area $CPND = A$, et area $C\pi\nu D = X$, atque $BC = 1$; erit ergo altitudo celeritatis in π debita $= A - X$, et ipsa celeritas $= V(A-X)$. Notandum hic autem est, X esse functionem quandam ipsius x et constantium in qua non sit a, area enim $C\pi\nu D$ non pendet a puncto P, sed retinet eundem valorem vbicunque accipiatur punctum P, dummodo distantia $C\pi$ maneat eadem. Qualis autem X est functio ipsius x, talis etiam esse debebit A functio ipsius a, abeunte

M.E.C.D. 2017

enim x in a, functio X transmutabitur in A. Iam tempus, quo hoc descensu spatium $C\pi$ percurritur erit $=\int\frac{dx}{\sqrt{(A-X)}}$, quod integrale ita debet esse sumtum vt facto $x=0$, ipsum euanescat. Ex hac igitur expressione habebitur integrum tempus descensus per PC si ponatur $x=a$, quo casu X quoque transmutatur in A. Quia autem haec resultans quantitas ita debet esse comparata, vt in ea a habeat n dimensiones; (oportet enim eam aequalem esse ipsi Ca^n), in indefinito integrali $\int\frac{dx}{\sqrt{(A-X)}}$ a et x simul habeant necesse est vbique n dimensiones. Quamobrem etiam formula differentialis $\frac{dx}{\sqrt{(A-X)}}$ n habebit dimensiones, dimensionemque vnam constituere existimanda sunt tam a et x quam dx. Perspicuum igitur est in $\sqrt{(A-X)}$ $1-n$ inesse debere dimensiones, atque in $A-X$, $2-2n$ dimensiones ipsarum a et x. Sed quia in X non inest a, debebit X functio esse $2-2n$ dimensionum solius x, aliud ergo X esse non poterit nisi bx^{2-2n}, et propterea erit $A=ba^{2-2n}$. Constans quidem quantitas ad bx^{2-2n} adiici potest, cum ea, quia ad ba^{2-2n} pariter est addenda, ex $A-X$ iterum excedat. Nam si ponatur $X=bx^{2-2n}+bc^{2-2n}$, erit $A=ba^{2-2n}+bc^{2-2n}$ et idcirco $A-X=b(a^{2-2n}-x^{2-2n})$. Sed quia X denotat aream $C\pi vD$, euanescere debet facto $x=0$, quamobrem, si est $2-2n$ numerus positiuus, semper debet esse $bc^{2-2n}=0$, at si $2-2n$ euadet numerus negatiuus quantitas bc^{2-2n} designabit quantitatem infinitam negatiuam. Quicquid igitur sit bc^{2-2n} debet esse $-bo^{2-2n}$, hoc enim si $2-2n$ seu $1-n$ est numerus affir-

M.E.C.D. 2017

firmatiuus ſponte euanescit, et ſi $1-n$ eſt negatiuum praebet infinitum requiſitum. Sed cum ſit propoſitum legem vis centripetae inuenire, nihil refert ſiue haec quantitas conſtans ſit $=o$ ſiue infinita. Namque poſita vi centripeta in $\pi=p=\pi\nu$, erit area $C\pi\nu D=\int p dx$. Quamobrem habebitur $bx^{2-2n}+bc^{2-2n}=\int p dx$, et ſumtis differentialibus prodibit $p=(2-2n\, bx^{1-2n}$. Conſequenter vis centripeta debet eſſe in $1-2n$ *plicata* ratione diſtantiarum. Q. E. I.

Corollarium 1.

355. Quo igitur omnes descenſus ad centrum C ſint iſochroni, ſeu abſoluantur aequalibus temporibus, poni debet $n=o$, quo facto prouenit vis centripeta diſtantiis directe proportionalis. Iam quidem animaduertimus hoc caſu omnes descenſus ad centrum eſſe iſochronos (283).

Corollarium 2.

356. Si ponatur $n=1$, vt tempora descenſuum ſint ſpatiis percurſis proportionalia; inuenitur vis centripeta diſtantiis reciproce proportionalis.

Corollarium 3.

357. Si $n=\frac{1}{2}$ ſeu tempora in ratione ſubduplicata diſtantiarum, vis centripeta habetur conſtans, quam proprietatem iam ſupra eruimus (217). Si ergo $n>\frac{1}{2}$ vis centripeta crescente diſtantia decrescet, ſi $n<\frac{1}{2}$ crescet crescente diſtantia.

M.E.C.D. 2017

Scholion.

358. Hae quidem proprietates omnes conſequuntur ex propoſitione 39, (308), vbi demonſtrauimus, ſi vis centripeta fuerit vt poteſtas exponentis n diſtantiarum, tempora deſcenſuum fore in ratione $\frac{1-n}{2}$ *plicata* diſtantiarum. Quae propoſitio egregie cum hac noſtra conſpirat, poſito enim n loco $\frac{1-n}{2}$ prodibit $1-2n$ loco n. Neque tamen me hac propoſitione acta egiſſe putandum eſt, nam hic a priori modo analytico ex data temporum conditione legem vis centripetae erui, cum ibi inuerſo ordine, ad idem fuerim perductus. Neque praeterea ante certum erat, praeter has inuentas virium centripetarum leges alias non ſatisfacere. Ipſa vero ſolutio incredibilem in poſterum praeſtat vtilitatem. Nam quia mere eſt analytica et peculiarem a nemine adhuc adhibitam methodum complectitur, ad plurima alia problemata ſoluenda deducere poteſt, quae aliis methodis fruſtra tentantur. Ita cum huiusmodi methodus adhuc incognitus eſſet, neque hi iſochroni deſcenſus, neque curua tautochrona a priori ſunt inuenta, ſed examinantes vel vim centripetam diſtantiis proportionalem vel curuam cycloidem inopinato in iſtas proprietates inciderunt Geometrae.

PROPOSITIO 47.

Problema.

Tab. III. Fig. 9. 359. *Data ſcala potentiarum* BND, *quibus corpus per ſpatium* AC *descendens ſollicitatur, inuenire tu-*

M.E.C.D. 2017

innumerabiles alias vt Cvδ, quibus corpus ſollicitatum in C eandem acquirit celeritatem, poſito corpore ſemper in A motum ex quiete inchoante.

Solutio.

Cum pro ſcala potentiarum BND altitudo celeritati, quam corpus in C habebit, aequalis ſit areae $\frac{ABCD}{CE}$ exponente CE vim grauitatis (321) et pro ſcala Cvδ iſta altitudo $=\frac{A\beta\delta C}{CE}$ (cit.); debebit eſſe ABDC $=A\beta\delta C$, quam proprietatem vtique infinitae curuae habere poſſunt. In quocunque quidem ſpatii AC puncto P haec proprietas locum habere nequit, vt eſſet ABNP$=A\beta\nu P$, niſi curua Cvδ incidat in alteram BND. Erit ergo discrimen quoddam inter has areas quod vocemus Z ita vt ſit A$\beta\nu$P$=$ABNP$-$Z, quae differentia Z ita debet eſſe comparata vt euanescat puncto P tam in A incidente quam in C. Hanc ob rem conſtructa ſuper axe AC curua quacunque AMC, quae in punctis A et C cum axe occurrat, poterit eius applicata PM loco huius Z vſurpari; euanescit enim puncto P et in A et C translato. Quo autem ex eadem curua AMC innumerabiles curuae Cvδ deduci queant, expedit functionem quandam ipſius applicatae PM loco D adhibere quam ipſam. Haec vero functio hanc habere debebit proprietatem, vt fiat $=0$, ſi euanescit PM. His iam ita inſtitutis ponatur AC$=a$, AP$=x$, PN$=y$, P$\nu$$=$Y, et PM$=z$, quarum quantitatum a, x, y et z, nec non Z functio ipſius z tanquam datae conſiderari poſſunt, incognita vero quantitas erit Y, quae ex

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

hac aequatione $\int Y dx = \int y dx - Z$ definietur. Sumtis enim differentialibus prodit $Y = y - \frac{dZ}{dx}$, ex qua aequatione curua $\mathfrak{EVD}$ conſtrui poterit. Q. E. I.

Corollarium 1.

360. Sit $Z = nz^2$, erit $dZ = 2nzdz$ et $Y = y - \frac{2nzdz}{dx}$. At $\frac{zdz}{dx}$ denotat ſubnormalem in curua AMC ducta normali MR in puncto M. Si itaque accipiatur $N\nu$, quae linea eſt $= y - Y$, aequalis cuicunque multiplo ſubnormalis PR, curua $\mathfrak{EVD}$ quaeſito ſatisfaciet.

Corollarium 2.

361. Poſſumus etiam ponere $dZ = pzdz$ denotante p functionem quamcunque ipſius z. Hic enim non opus habemus ad hoc reſpicere quod Z euanescere debeat, poſito $z = 0$. Nam quaecunque functio loco p accipiatur, integrale ipſius $pzdz$ ſemper ita poteſt accipi vt fiat $= 0$ poſito $z = 0$. Hanc ob rem habebimus $Y = y - \frac{pzdz}{dx} = y - p.PR.$ ſeu $N\nu = p.PR.$ quae conſtructio latiſſime patet.

Scholion.

362. Notandum hic eſt non neceſſe eſſe, vt loco curuarum BND et AMC curuae regulares, quae aequationibus certis contineantur, adhibeantur. Sed ad conſtruendas curuas $\mathfrak{EVD}$ ſufficit curuas etiam vel maxime irregulares nulla aequatione contentas accipere. Pariter enim conſtructio determinandis ſubnormalibus ſuccedit.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 48.

Problema.

363. *Data ſcala potentiarum* BND, *quibus corpus ſpatium* AC *percurrens ſollicitatur, inuenire innumerabiles alias vt* $\mathfrak{Evd}$, *quibus efficiatur vt corpus eodem tempore ſpatium* AC *abſoluat.*

Solutio.

Sumto quocunque ſpatio AP, ſit tempus, quo hoc abſoluitur vrgente ſcala potentiarum BND, $=t$ et tempus, quo idem ſpatium agente ſcala $\mathfrak{Evd}$ abſoluitur, ſit $=$T, ponaturque T$=t+$Z, quae quantitas Z euanescat, puncto P tam in A quam in C translato. Hanc ob rem vt ante facio Z functionem applicatae PM curuae AMC in A et C cum axe AC occurrentis, talem, vt euanescat facto PM$=z=0$. Dicantur nunc AP, x, PN, y et Pν, Y, et erit $t=\int\frac{dx}{\sqrt{\int ydx}}$; atque T$=\int\frac{dx}{\sqrt{\int Ydx}}$, quocirca hanc habebimus aequationem $\int\frac{dx}{\sqrt{\int Ydx}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\int ydx}}+$Z, ex qua Y determinari poterit. Nam differentiando habebitur $\frac{dx}{\sqrt{\int Ydx}}=\frac{dx}{\sqrt{\int ydx}}+d$Z, ex qua prodit $\sqrt{\int Ydx}=\frac{dx\sqrt{\int ydx}}{dx+d\text{Z}\sqrt{\int ydx}}$ atque $\int Ydx=\frac{dx^2\int ydx}{(dx+d\text{Z}\sqrt{\int ydx})^2}$. Quia vero iſta quantitas ob datas x, y et Z conſtrui poteſt, ponatur ea $=$P, eritque $Ydx=d$P conſequenter inuenitur Y$=\frac{dP}{dx}$. Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

364. Sit $dZ = pzdz$ vt ante denotante p functionem quamcunque ipsius z, erit $\frac{zdz}{dx} =$ subnormali PR, quam ponamus $= r$. Quo facto habebitur $P = \frac{\int y dx}{(1+rp\sqrt{\int y dx})^2}$ atque $Y = \frac{dP}{dx}$.

Corollarium 2.

365. Sit curua data BND linea recta parallela axi AC, ita vt potentia sit vniformis, semper enim potentia vniformis datur, quae efficiat vt corpus dato tempore spatium AC absoluat. Ponatur $AB = PN = b$; erit $\int y dx = bx$. Vnde habebitur $P = \frac{bx}{(1+rp\sqrt{bx})^2}$ hacque differentiata obtinetur $Y = \frac{dP}{dx}$.

Scholion.

Duas has posteriores propositiones inter se fere similes ideo innexi, quia peculiarem etiam soluendi modum requirunt, cuius vtilitas in sequentibus reddetur conspicua. Ceterum vero ipsae propositiones non sunt inelegantes et huic capiti, in quo omnes casus motum rectilineum a potentiis productum respicientes exponere constituimus, necessario erant inserendae. Neque vero eas ad casus speciales accommodare idoneum visum est, ob nimis prolixum calculum, ad quem fuisset perueniendum. His igitur relictis pergimus ad motus rectilineos in medio resistente.

CA-

M.E.C.D. 2017

CAPUT QUARTUM
DE
MOTU RECTILINEO PUNCTI LIBERI IN MEDIO RESISTENTE.

DEFINITIO 18.

367.

Lex resistentiae est potestas seu functio celeritatis corporis, cui ipsa resistentia est proportionalis. *Sic si resistentia est celeritatis quadrato proportionalis, lex resistentiae est celeritatis quadratum.*

Corollarium 1.

368. Cognoscitur igitur ex lege resistentiae, si plura puncta aequalia diuersis ferantur celeritatibus, quomodo se habeant motus diminutiones inter se. Atque dato celeritatis decremento vnius puncti, reliquorum quoque celeritatis decrementa inueniuntur.

Corollarium 2.

369. Si ergo pro vno celeritatis gradu datur ratio resistentiae ad vim grauitatis, pro omnibus aliis quoque gradibus ratio inter resistentiam et vim grauitatis ex lege resistentiae innotescet. Atque ex hoc effectus resistentiae in corpus motum inuenietur.

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

370. Pertinet vtique vis reſiſtentiae ad potentias, atque ideo cum vi grauitatis eſt homogenea, quemadmodum, cum de motu corporum in fluidis tractabitur, apparebit. Semper igitur potentia abſoluta poterit aſſignari eundem in corpore effectum, quem reſiſtentia, producens. Haec vero potentia abſoluta pendebit a celeritate corporis, quam ob rem in eius expreſſione celeritas inerit, ſeu altitudo celeritati debita. Hoc igitur modo corporis motus in medio reſiſtente reducetur ad corporis motum a potentiis abſolutis ſollicitatum, cuius, cum ſupra in capite ſecundo leges ſint expoſitae, ex iis omnes quaeſtiones poterunt reſolui.

Scholion 2.

371. Directio vis reſiſtentiae in hac tractatione nobis ſemper erit congruens cum directione motus corporis (117) et contraria. Quamobrem potentia abſoluta ei ſubſtituenda motum ſemper retardabit, directione motus non mutata. Perſpicuum itaque eſt, vim reſiſtentiae, quoties eius expreſſio prodit negatiua, habituram directionem contrariam, motumque corporis eſſe acceleraturam. Hic quidem caſus in fluidis quiescentibus locum habere nequit, ſed tamen in calculo, cum ex dato corporis motu reſiſtentia inueſtigabitur, ſaepe occurret.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

372. Corpus igitur in medio resistente motum, si a nulla alia potentia sollicitetur, in linea recta moueri debet. Quia enim a vi resistentiae directio motus non mutatur, eius motus, quem a natura in linea recta prosequitur, perpetuo in eadem recta fiat necesse est.

Corollarium 4.

373. Si praeterea accedit potentia absoluta cuius directio perpetuo cum directione motus congruit, corpus quoque in medio resistente in linea recta progredietur. Neque enim potentia haec absoluta neque vis resistentiae directionem motus immutabit.

Scholion 3.

374. In hoc igitur capite, in quo motus tantum rectilineos exponere constituimus, alias potentias absolutas cum vi resistentiae non coniungemus, nisi quarum directio cum motus directione conuenit. Hanc ob rem omnes potentias, quas in capite praecedente adhibuimus, etiam in hoc capite cum vi resistentiae coniunctas considerare licebit. Antequam autem potentias absolutas inducemus, conuenit motum corporum a sola resistentiae vi impeditum examini subiicere, quo facilius a simplicioribus ad magis composita progrediamur.

M.E.C.D. 2017

Scholion 4.

375. In legis reſiſtentiae expreſſione ſeu illa celeritatis functione, praeter altitudinem celeritati debitam v ineſſe poſſunt quantitates conſtantes, ſed excludimus omnes quantitates variabiles a loco corporis pendentes. Fieri quidem poteſt, vt reſiſtentia, quam corpus aequali celeritate latum patitur, maior minorue ſit, prout corpus in alium atque alium locum perueniat; quemadmodum euenit, quando fluidum, in quo corpus mouetur in alio loco eſt denſius in alio vero rarius, quo caſu in reſiſtentiae expreſſione loci rationem haberi oportet. Neque tamen in lege reſiſtentiae locum reſpici conuenit, nam per eam reſiſtentiae rationem, quando corpus in eodem loco variis celeritatibus moueri ponitur, exprimere volumus. Discrimen vero quod ex loci varietate oriri poteſt in exponente reſiſtentiae comprehendemus, quo ſimul reſiſtentiae intenſitas indicatur.

DEFINITIO 19.

376. Exponens reſiſtentiae eſt altitudo debita celeritati ei, quam ſi corpus habet, reſiſtentiam patitur aequalem vi grauitatis. *Hac ſcilicet celeritate motum corpus tantum a reſiſtentia retardatur, quantum a vi grauitatis ſurſum proiectum.*

Corollarium 1.

377. Si igitur corpus in medio reſiſtente motum celeritatem habeat altitudini v debitam, atque haec altitudo v ſit ipſi exponenti reſiſtentiae aequa-

M.E.C.D. 2017

aequalis, erit, dum corpus per ſpatiolum dx progreditur, $dv = -dx$; quia potentia reſiſtentiae aequiualens hoc caſu aequalis eſt vi grauitatis, quam ſemper ponimus $= 1$, et motum retardat.

Corollarium 2.

378. Datis ergo lege et exponente reſiſtentiae motus diminutio poteſt definiri. Namque ex exponente intelligitur, quantam corpus habere deberet celeritatem, vt reſiſtentiae vis aequalis eſſet grauitati, et ex lege reſiſtentiae cognoscitur ratio, ſecundum quam diuerſae celeritates a reſiſtentia diminuuntur.

Scholion 1.

379. Exponens reſiſtentiae eſt vel conſtans vel variabilis ſeu a loco, in quo eſt corpus, pendens. Illud accidit in medio ſeu fluido vniformi, quod corporibus vbique eandem reſiſtentiam infert, ſi quidem eadem vbique moueantur celeritate. Huiusmodi medium reſiſtens appellabimus vniforme, quippe quod in omnibus locis ſui eſt ſimile. Exponens autem reſiſtentiae variabilis eſt in medio ſeu fluido difformi, etiamſi in quoque loco ſeorſim reſiſtentia eandem teneat legem. Nam quo denſius eſt fluidum ſeu medium, in quo corpus verſatur, eo quoque maiorem patitur corpus reſiſtentiam aequali etiam motum celeritate. Maior ſcilicet erit celeritas reſiſtentiam grauitati aequalem patiens in fluido rariore, minor vero in denſiore. Quia autem denſitas

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

et raritas medii a loco pendet, perſpicuum eſt reſiſtentiae exponentem, ſi eſt variabilis a loco corporis pendere debere.

DEFINITIO 20.

380. Media reſiſtentia ſimilia hic vocantur, quae eandem habent reſiſtentiae legem. Diſſimilia vero, quae reſiſtentiae lege differunt. *Sic aqua et mercurius ſunt huiusmodi media ſimilia, ſiquidem ambo haec fluida reſiſtunt, vti videntur, in duplicata celeritatum ratione.*

Corollarium 1.

381. Si ergo media reſiſtentia ſimilia inter ſe differunt, tota differentia conſiſtit in exponente reſiſtentiae, ſeu denſitate et raritate. Sic in aqua exponens reſiſtentiae eſt maior quam in argento viuo, quia hoc eſt fluidum denſius illo.

Scholion.

382. Media ſimilia cum corporibus aequaliter celeribus diuerſas facere queant reſiſtentias, prout eorum denſitates inter ſe differunt, has ipſas denſitates ex reſiſtentia, quam corpori data celeritate motu inferunt, metiri conuenit. In fluidis enim, vt, cum de motu corporum in fluido agitur, docetur, reſiſtentiae aequalibus celeritatibus factae ſunt denſitatibus fluidorum proportionales. Hancque proprietatem ad alia media quamcunque reſiſtentiae legem tenentia transferimus: quia aliae reſi-

M.E.C.D. 2017

ſiſtentiae leges praeter duplicatam celeritatam rationem mere ſunt imaginariae, et ad analyſin tantum exercendam adhiberi ſolent.

PROPOSITIO 49.

Problema.

383. *Corporis in recta* AP *moti in medio quocunque reſiſtente, cuius et lex et exponens reſiſtentiae ſunt cognita, data celeritate in puncto* P, *inuenire celeritatis decrementum, dum ſpatii elementum* Pp *percurrit.* Tab. IV Fig. 1.

Solutio.

Poſito elemento $Pp = dx$, ſit altitudo celeritati in P debita $= v$, et exponens reſiſtentiae $= q$. Denotat ergo $\sqrt{q}$ celeritatem, quam ſi corpus in P haberet, vis reſiſtentiae aequalis foret vi grauitatis $= 1$. Quamobrem, ſi eſſet $v = q$, tum haberetur vis reſiſtentiae $= 1$ atque $dv = -dx$ (376, 377). Sit autem V ea celeritatis $\sqrt{v}$ functio, qua reſiſtentiae lex exprimitur, atque deſignet Q ſimilem functionem ipſius $\sqrt{q}$, ſeu Q eſt huiusmodi quantitas, quae prodit, ſi in V loco v ſubſtituitur q. Reſiſtentia ergo, quam patitur corpus celeritate $\sqrt{q}$ motum, quae eſt $= 1$, ſe habebit ad reſiſtentiam corporis celeritate $\sqrt{v}$ moti, vt ſe habet Q ad V (367). Ex hoc elicitur vis reſiſtentiae, quam corpus celeritate $\sqrt{v}$ latum patitur, $= \frac{V}{Q}$. Quae cum motum retardet erit $dv = \frac{-V dx}{Q}$. Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

384. Quia quantitas V est functio ipsius v et constantium, atque q, ideoque et Q vel est constans vel functio quaedam ipsius x (375); aequatio inuenta $dv = \frac{-V dx}{Q}$ sponte separatur. Habetur enim $\frac{dv}{V} = \frac{-dx}{Q}$, ex qua iutegrata vel saltem constructa totus corporis motus per AP cognoscitur.

Corollarium 2.

385. Cum vis resistentiae sit $= \frac{V}{Q}$, poterit ex hac medii densitas cognosci. Quia enim densitatem metimur ex resistentia, quam corpus data celeritate motum patitur, oportebit in $\frac{V}{Q}$ loco v substituere quantitatem constantem, quo facto habebitur resistentia vt $\frac{1}{Q}$. Densitas igitur medii quoque erit vt $\frac{1}{Q}$ seu reciproce vt Q.

Scholion.

386. Denotat hic $\frac{V}{Q}$ non tantum potentiam sollicitantem, sed iam ipsam vim retardatricem resistentiae, et hanc ob rem non opus est massam corporis in calculum inducere. Ceterum hic corporis massam constantem seu plurium corporum massas inter se aequales ponimus. Non enim consultum esse iudico hanc tractationem, quae non nisi in vnico casu in vsum venire potest, praeter necessitatem extendere et magis complicatam reddere.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 50.

Problema.

387. *In medio resistenti uniformi, quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, definire corporis moti celeritatem in singulis locis.*

Solutio.

Moueatur corpus in recta AP, sitque celeritas eius in puncto A debita altitudini c. Ponatur spatium percursum AP$=x$, et altitudo celeritati in P debita $=v$. Exponens resistentiae, qui est constans, vocetur $=k$, et lex resistentiae sit v^m, ita vt resistentia vbique sit vt celeritatis potestas exponentis $2m$. In praecedente igitur formula $dv=-\frac{Vdx}{Q}$ abit hoc casu V in v^m, et Q, quia talis esse debet functio ipsius q seu k, qualis est v^m ipsius v, erit $=k^m$.

Habemus ergo hanc aequationem $dv=-\frac{v^m dx}{k^m}$, seu $\frac{dv}{v^m}=-\frac{dx}{k^m}$. Cuius integralis est $\frac{v^{1-m}}{1-m}=C-\frac{x}{k^m}$. Constans vero C ex hoc determinabitur, quod facto $x=0$ transmutari debeat v in c, quamobrem erit $C=\frac{c^{1-m}}{1-m}$. Hinc itaque resultabit aequatio ista $v^{1-m}=c^{1-m}-\frac{(1-m)x}{k^m}$, seu $v=\sqrt[1-m]{\frac{c^{1-m}k^m-(1-m)x}{k^m}}$, si est $m<1$. At si erit $m>1$, habebitur $v=\frac{ck^{m-1}}{\sqrt[m-1]{(k^m+(m-1)c^{m-1}x)}}$. Vnicus vero casus, quo

M.E.C.D. 2017

eſt $m=1$, in his formulis non comprehenditur, ſed deriuari debet ex aequatione differentiali, quae, facto $m=1$, erit huiusmodi $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{k}$, cuius integralis eſt $lv=C-\frac{x}{k}$. Simili vero modo erit $C=lc$, ideoque $lv=lc-\frac{x}{k}$. Logarithmis ad numeros reductis habebitur ergo $v=ce^{\frac{-x}{k}}$. Quemcunque igitur m habeat valorem, corporis celeritas in quouis loco rectae AP innotescit. Q. E. I.

Corollarium 1.

388. Si reſiſtentia medii eſt quadratis celeritatum proportionalis, erit $m=1$. Quamobrem pro hoc caſu, qui ſolus in rerum natura exiſtere putatur, valet ſingularis ſolutionis caſus $v=ce^{\frac{-x}{k}}$. Ex quo apparet corpus celeritatem ante non amittere totam, quam ſpatium infinitum x percurrerit.

Corollarium 2.

389. Si medium in maiore quam duplicata celeritatum ratione reſiſtit, erit $m>1$, atque

$$v=\frac{ck^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt{(k^m+(m-1)c^{m-1}x)}}.$$

Perſpicitur autem ex hac aequatione celeritatem non euanescere, niſi ponatur $x=\infty$.

Corollarium 3.

390. Hoc vero differt iſte caſus a priore, quo erat $m=1$, quod in illo, ſi fuerit celeritas initialis infinite magna, prodeat vbique ea tanta. Hoc ve-

M.E.C.D. 2017

vero caſu, quo eſt $m > 1$, ſi ponatur $c = \infty$, proue-
nit $v = \sqrt[m-1]{\frac{k^m}{(m-1)x}}$. Erit ergo v ſemper finitae ma-
gnitudinis, niſi ſit $x = o$ vel $= \infty$.

Corollarium 4.

391. Praeterea hoc caſu, quo $m > 1$, corpus an- Tab. IV.
tequam peruenit in punctum A, ſemper alicubi puta Fig. 2.
in C habuit celeritatem infinite magnam. Ad hoc
punctum C inueniendum, fieri debet x negatiuum,
et $k^m + (m-1)c^{m-1}x$ poni aequale nihilo. Vnde in-
uenitur $AC = \frac{k^m}{(m-1)c^{m-1}}$.

Corollarium 5.

392. Si reſiſtentia fit in minore quam dupli- Tab. IV.
cata ratione celeritatum, ideoque eſt $m < 1$, erit Fig. 1.
$v = \sqrt[1-m]{\frac{c^{1-m}k^m - (1-m)x}{k^m}}$. Celeritas corporis ergo
euanescit in puncto C, ſi accipiatur $AC = \frac{c^{1-m}k^m}{1-m}$.
Conſequenter, cum corpus in C peruenerit, ibi
perpetuo quiescet, neque vltra progredietur.

Corollarium 6.

393. Si ponatur $m = o$, erit reſiſtentia con-
ſtans et aequaliter aget in corpus ſiue quiescens ſiue
motum. Abit ergo hoc caſu reſiſtentia in potenti-
am abſolutam et aequalem vi grauitatis. Nam, quo-
niam ſi eſt $v = k$ reſiſtentia aequalis ponitur vi gra-
uitatis, etiam quacunque alia celeritate corpus
moueatur, tantundem reſiſtentiae patietur.

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

394. Expoſuimus in his corollariis primarias motuum differentias, ſi fuerit vel $m = 1$ vel maior vel minor vnitate. Hae vero differentiae breuibus hisce canonibus comprehendi poſſunt: ſi eſt $m = 1$, corpus per totum ſpatium nusquam neque celeritatem infinitam neque nullam habebit. Deinde ſi $m > 1$, corpus alicubi habeat celeritatem infinitam neceſſe eſt, euanescentem vero nusquam. Denique ſi $m < 1$ corpus alicubi celeritatem habebit nullam, infinitam vero nusquam.

Scholion 2.

395. Haec celeritatis diminutio permanet eadem in quamcunque plagam corpus moueatur, quia reſiſtentiam vbique eandem oſtendit. Neque enim hic motus ſimilis eſt ei, qui a potentia abſoluta contra vrgente diminuitur, quo fit, vt corpus in contrariam plagam motum tantumdem acceleretur, quantum ante erat retardatum. Sed ad motum in medio reſiſtente diminutum reſtituendum atque rurſus pariter accelerandum ac ante diminuebatur, oportet vim reſiſtentiae negatiuam ſtatui, atque ita in vim propellentem transmutari. Tum enim fiet $dv = \frac{V dx}{Q}$, ex quo apparet celeritatem tantundem augeri, quantum ante minuebatur. Vi ergo reſiſtente in propellentem transmutata, motus corporis fiet retrogradus, atque ex P in A reuertetur ita, vt in ſingulis punctis ſpatii AP easdem recuperet celeritates, quas ante ibidem habebat.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion 3.

396. In casibus, quibus $m<1$, corpusque tandem ad quietem peruenit, occurrit eadem difficultas, cuius supra (316) mentio est facta, si motum transmutanda vi resistente in propellentem velimus conuertere. Nam si corporis cum in C peruenerit celeritas est nulla, vis propellens $\frac{v^m}{k^m}$ quoque euanescit, si quidem m non est numerus negatiuus, et hanc ob rem nunquam ex loco C corpus poterit depelli. Hoc igitur casu motus diminutionis non poterit in motum augmentationis conuerti. Calculus quidem contrarium ostendit, nam si dicatur $CP=y$, erit altitudo debita celeritati in P, nempe $v=\sqrt[1-m]{\frac{(1-m)y}{k^m}}$. Quod autem ex hac aequatione ipsa absurdum sequatur, hinc apparet quod $\frac{1}{1-m}$ exponens ipsius y est vnitate maior, ideoque scala altitudinum celeritatibus debitarum rectam AC in C tangat. Quoties enim hoc euenit, corpus ex puncto C nunquam egredi potest, etiamsi calculus secus commonstret (319).

PROPOSITIO 51.

Problema.

397. *Moto corpore in medio resistente vniformi, quod resistentiam facit potestati cuicunque celeritatum proportionalem; determinare tempus, quo corpus spatium quodcunque* AP *percurrit.*

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Positis vt in praecedente problemate, celeritate initiali in $A=\sqrt{c}$, $AP=x$, celeritate in $P=\sqrt{v}$, exponente resistentiae $=k$ et lege $=v^m$, ita vt vis resistentiae sit vt celeritatis potestas exponentis $2m$.

Quia iam est $v=\frac{ck^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt[m-1]{(k^m+(m-1)c^{m-1}x)}}$ (387) si quidem $m>1$, erit $\sqrt{v}=\frac{\sqrt{c}k^{\frac{m}{2m-2}}}{(k^m+(m-1)c^{m-1}x)^{\frac{1}{2m-2}}}$. Elementum ergo temporis quo spatiolum dx percurritur est $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{dx(k^m+(m-1)c^{m-1}x)^{\frac{1}{2m-2}}}{\sqrt[m]{ck^{m-1}}}$, cuius integralis est $=\frac{C+2(k^m+(m-1)c^{m-1}x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{(2m-1)c^{m-1}\sqrt[m]{ck^{m-1}}}$, quod exprimit tempus per spatium AP, si modo constans C recte determinatur, id quod fit efficiendo, vt facto $x=0$ totum tempus euanescat. Debebit itaque esse $C=-\frac{2k^{\frac{2m^2-m}{2m-2}}}{(2m-1)c^{m-1}\sqrt[m]{ck^{m-1}}}$; quamobrem totum tempus per spatium $AP=\frac{2(k^m+(m-1)c^{m-1}x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}-2k^{\frac{2mm-m}{2m-2}}}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}k^{\frac{m}{2m-2}}}$.

Quae

M.E.C.D. 2017

Quae expreſſio quoque valet ſi $m<1$. At ſi eſt $m=1$, peculiari operatione opus eſt, nam quia eſt $v=ce^{\frac{x}{k}}$, erit $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{e^{\frac{x}{2k}}dx}{\sqrt{c}}$, cuius integrale eſt $\frac{2ke^{\frac{x}{2k}}-2k}{\sqrt{c}}$, quod exprimit tempus, quo ſpatium AP percurritur. Quemcunque ergo valorem habeat m, tempus ex his formulis per ſpatium quodcunque determinatur. Q. E. I.

Corollarium 1.

398. Si ergo reſiſtentia quadratis celeritatum eſt proportionalis, et conſequenter $m=1$, tempus quo corpus ſpatium infinitum deſcribit, quoad ſcilicet totum ſuum motum amittit, erit quoque infinitum.

Corollarium 2.

399. Si vero eſt $m>1$, erit quoque $2m>1$, et conſequenter formula exprimens tempus per AP inuenta recte eſt diſpoſita. Ex ea autem apparet, tempus, donec corpus totum motum amittat, fore infinitum, id quod facile ex hoc perſpicitur, quod ſpatium quoque ſit infinitum (389).

Corollarium 3.

400. Quia vero hoc caſu corpus, antequam peruenit in A, alicubi in C habuit celeritatem infinitam, tempus etiam, quo ex C in A pertingit innotescet facto $k^m+(m-1)c^{m-1}x=0$ (391). Quo facto reſultat tempus per $CA=\frac{2k^m}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}}$. Tab. IV. Fig. 2.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

401. Si fuerit $m < 1$, duo caſus ſunt a ſe inuicem diſtinguendi, quibus m vel maius eſt quam $\frac{1}{2}$ vel minus. Si enim eſt $m > \frac{1}{2}$, manet $2m-1$ numerus affirmatiuus, et tempus quo ſpatium AP abſoluitur erit $= \frac{2k^{\frac{m}{2-2m}}}{(2m-1)(c^{1-m}k^m-(1-m)x)^{\frac{2m-1}{2-2m}}} - \frac{2k^m}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}}$.

Corollarium 5.

Tab. IV. Fig. 1. 402. Quia corpus hac hypotheſi motum, omnem celeritatem amittit, cum in C peruenit exiſtente $AC = \frac{c^{1-m}k^m}{1-m}$ (392), erit tempus, quo ſpatium hoc AC percurrit, ob denominatorem $(c^{1-m}k^m-(1-m)x)^{\frac{2m-1}{2-2m}}$ euanescentem, infinitum. Hoc igitur euenit, ſi m intra limites 1 et $\frac{1}{2}$ continetur.

Corollarium 6.

403. Sin vero fuerit $m < \frac{1}{2}$ erit tempus, quo ſpatium quodcunque AP percurritur $= \frac{2c^{\frac{1-2m}{2}}k^m}{1-2m} - \frac{2k^{\frac{m}{2-2m}}(c^{1-m}k^m-(1-m)x)^{\frac{1-2m}{2-2m}}}{1-2m}$. Ex quo apparet tempus, quo corpus ex A in C, vbi totum ſuum motum amittit, eſſe finitum et $= \frac{2c^{1-2m}k^m}{1-2m}$. Fit enim hoc caſu $c^{1-m}k^m-(1-m)x = 0$ (392).

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

404. In his autem formulis non continetur casus, quo $m=\frac{1}{2}$. i. e. si resistentia est celeritatibus proportionalis. Hic igitur casus ex formula differentiali temporis est deducendus. Posito autem $m=\frac{1}{2}$ prodit $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{2dx\sqrt{k}}{2\sqrt{ck-x}}$. Cuius integrale a logarithmis pendet atque est $=2\sqrt{k}l\frac{C}{2\sqrt{ck-x}}$. Constans vero C debet esse $2\sqrt{ck}$, quo tempus euanescat facto $x=0$. Consequenter tempus quo spatium AP percurritur erit $2\sqrt{k}l\frac{2\sqrt{ck}}{2\sqrt{ck-x}}$.

Corollarium 7.

405. In hoc itaque casu, quo $m=\frac{1}{2}$, quia spatium AC, quo corpus percurrendo totum motum perdit, est $=2\sqrt{ck}$ (392), tempus quo hoc spatium percurritur est infinitum.

Corollarium 8.

406. Ex his igitur omnibus colligitur tempus, quo corpus totum suum motum amittit esse infinitum, si fuerit $2m$ vel aequalis vnitati, vel ea maior; contra vero si est $2m$ vnitate numerus minor, tempus totius motus esse finitum.

Scholion 2.

467. Si vis resistentiae transmutatur in propellentem, quo casu motus fit retrogradus et simili modo augetur, quo ante minuebatur; tempora eadem esse debebunt, quae hic sunt definita. Nam quia corporis spatium AP percurrentis in singulis locis eadem est velocitas siue ex A in P motu retar-

M.E.C.D. 2017

dato ſiue viciſſim ex P in A motu accelerato feratur, inter vtrumque tempus discrimen eſſe non poteſt. Attamen iis caſibus, quibus ſpatium totum AC tempore finito abſoluitur, haec regula non valet, quia corpus in C quiescens nullam vim propellentem ſentire poteſt (396). Semper vero huic regulae confidere poſſumus, ſi corpori finita celeritas initialis tribuatur.

PROPOSITIO 52.
Problema.

Tab. IV. Fig. 3. 408. *Sollicitetur corpus, quod mouetur in medio quocunque reſiſtente, a potentia quacunque abſoluta, determinare celeritatis incrementum vel decrementum, dum quodvis elementum* Pp *percurrit.*

Solutio.

Sit corporis celeritas in P debita altitudini v, et elementum percurrendum $Pp = dx$. Sit porro potentia abſoluta ſeu potius eius vis accelerans in $P = p$, atque exponens reſiſtentiae $= q$. Deſignet V eam ipſius v functionem, cui reſiſtentia proportionalis eſt, ſitque Q talis functio ipſius q, qualis V eſt ipſius v. His poſitis retardabitur corpus, dum per elementum Pp mouetur, vi reſiſtentiae $\frac{V}{Q}$ (383); interea vero ſimul acceleratur potentia abſoluta p. Quamobrem corpus elementum Pp percurrens accelerabitur a vi $p - \frac{V}{Q}$. Ex quo igitur erit $dv = pdx - \frac{V}{Q}dx$. Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

409. Si igitur eſt $p > \frac{v}{Q}$ celeritas corporis elementum Pp percurrentis augebitur; ſin vero $p < \frac{v}{Q}$, eius celeritas diminuetur. Atque ſi fuerit $p = \frac{v}{Q}$ celeritas neque augebitur, neque minuetur, ſed immutata manebit per elementum Pp.

Corollarium 2.

410. Si potentia abſoluta fuerit motui contraria, eumque retardet; erit $dv = -pdx - \frac{v}{Q}dx$. Hoc igitur caſu corpus ab vtraque vi retardabitur.

Scholion 1.

411. Si potentia abſoluta corpus deorſum trahat, vt in ſolutione problematis poſuimus, atque corpus ſurſum moueatur, habebit et potentiam abſolutam et vim reſiſtentiae contrariam. Tum igitur habebitur iſta aequatio $dv = -pdx - \frac{v}{Q}dx$. Ex quo apparet motum ascendentem non ſimilem fore descendenti, quia vis ſollicitans in ascenſu non eſt negatiua ratione vis ſollicitantis in descenſu. Quo igitur ascenſus ſimilis ſit descenſui atque corpus in vtroque motu in iisdem locis eandem habeat celeritatem, oportet vim reſiſtentiae in ascenſu transmutari in propellentem. Quo facto habebitur $dv = -pdx + \frac{v}{Q}dx$, ex qua aequatione perſpicitur corpus ascendens per Pp tantundem retardari, quantum ante in descenſu accelerabatur.

M.E.C.D. 2017

Scholion 2.

412. Aequatio inuenta $dv = pdx - \frac{V}{Q}dx$ hac ſumma extenſione ob defectum analyſeos neque ſeparari neque conſtrui poteſt: et hanc ob rem celeritas corporis in P non poteſt determinari. Multo minus igitur tempus, quo ſpatium AP abſoluitur poterit aſſignari. Relinqui ergo oportet hanc generalem aequationem, atque descendi ad caſus particulares, quibus aequatio poteſt ſeparari ac celeritas definiri. Triplici vero modo aequatio iſta ſeparationem indeterminatarum x et v admittit. Quorum primus eſt, ſi x plus vna dimenſione non habet. Secundus ſi v vnicam tantum obtinet dimenſionem. Tertius caſus habebitur, ſi x et v ſimul vbique eundem dimenſionum numerum conſtituunt; vel ſi aequatio ad aliam hac proprietate praeditam reduci poterit.

Corollarium 3.

413. Primus caſus ergo habetur, ſi et p et q fuerint conſtantes, tum enim quia et Q conſtans erit, prodit $dx = \frac{Q\,dv}{pQ - V}$, in qua indeterminatae ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Praeterea vero etiam aequatio ſeparari poterit ſi fuerit $p = \frac{A}{Q}$. Tum enim erit $\frac{dv}{A - V} = \frac{dx}{Q}$, quae quia V ab v, et Q ab x pendent, conſtrui poteſt.

Corollarium 4.

414. Quo v vnicam habeat dimenſionem oportet ſit $V = v$, quo caſu quoque erit $Q = q$, et aequa-

M.E.C.D. 2017

aequatio generalis abibit in hanc $dv = pdx - \frac{vdx}{q}$, quae in determinatarum separationem admittit.

Corollarium 5.

415. Quo appareat, quando aequatio homogenea fit futura, sit $V = v^\alpha$, et $q = x^\varepsilon$, erit $Q = x^{\alpha\varepsilon}$. Sit porro $p = x^\gamma$, et computetur v constituere δ dimensiones dum x vnam adimplet. His positis aequatio illa abibit in hanc $dv = x^\gamma dx - \frac{v^\alpha dx}{x^{\alpha\varepsilon}}$ in cuius primo termino censendae sunt δ dimensiones; in secundo $\gamma + 1$ dimensiones, et in tertio $\alpha\delta + 1 - \alpha\varepsilon$. Debet igitur esse $\delta = \gamma + 1$, atque $\gamma + 1 = \alpha\gamma + \alpha + 1 - \alpha\varepsilon$, seu $\gamma(\alpha - 1) = \alpha(\varepsilon - 1)$. Quoties igitur fuerit $\alpha - 1 : \alpha = \varepsilon - 1 : \gamma$ toties aequatio ad homogeneitatem potest reduci, adeoque celeritas ipsa determinari.

Scholion 3.

416. Loco V, q et p aliasfunctiones non assumere licet nisi potestates ipsarum v et x. Nam, quia in V non inesse potest x atque in q et p non ingreditur v, ac insuper numerus dimensionum ipsarum x et v vbique vel debet esse idem, vel ad eundem reducibilis; loco harum quantitatum necessario potestates debent assumi. Hanc ob rem posui $V = v^\alpha$, $q = x^\varepsilon$, et $p = x^\gamma$, atque superiorem analogiam $\alpha - 1 : \alpha = \varepsilon - 1 : \gamma$ elicui. Neglexi quidem coefficientes, qui salua hac reductione possunt adiici: nam homogeneitas hisce perturbari non potest. Itaque potest poni $q = Bx^\varepsilon$ et $p = Cx^\gamma$, manente

M.E.C.D. 2017

eadem analogia. Pro x vero non ſolum ſpatium percurſum AP poteſt ſubſtitui, ſed illud ipſum quacunque conſtante auctum, dummodo eius differentiale ſit dx vel huius aliquod multiplum. Ad v^α coefficientem addere non eſt opus, quia per V ratio tantum reſiſtentiae indicatur.

Corollarium 6.

417. Si medium reſiſtens eſt vniforme ideoque $\mathfrak{g}=0$; erit $\alpha=-1:\gamma$. Vnde fit $\gamma=\frac{\alpha}{1-\alpha}$. Quare ſi fuerit lex reſiſtentiae v^α, potentia abſoluta debebit eſſe $=Bx^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, quo aequatio celeritatem definiens ad homogeneitatem poſſit reduci.

Scholion 4.

418. Hos motus rectilineos in medio reſiſtente ita ſumus pertractaturi, vt primo potentiam abſolutam conſtantem ponamus, tumque ad quasuis vires centripetas progrediamur. Hisque expoſitis quaeſtiones inuerſas contemplabimur, quemadmodum in praecedente capite fecimus, atque ex datis proprietatibus motus cum potentiam abſolutam tum reſiſtentiae vim eruemus.

PROPOSITIO 53.
Problema.

419. *Poſita potentia abſoluta, et medio reſiſtente vniformi; determinare corporis descendentis celeritatem in ſingulis locis, ſi reſiſtentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis.*

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Manentibus vt hactenus AP$=x$, celeritate in P$=\sqrt{v}$, ſit potentia vniformis $=g$, exponens reſiſtentiae $=k$. Quia lex reſiſtentiae eſt v, erit vis reſiſtentiae $=\frac{v}{k}$. Ex quibus prodit $dv=gdx-\frac{vdx}{k}$, ſeu $dx=\frac{kdv}{gk-v}$; cuius integralis eſt $x=kl\frac{c}{gk-v}$. Sit celeritas initialis in A debita altitudini c debebit eſſe $C=gk-c$, atque $x=kl\frac{gk-c}{gk-v}$. Logarithmorum loco ſumantur numeri $e^{\frac{x}{k}}=\frac{gk-c}{gk-v}$; ex qua aequatione prouenit $e^{\frac{x}{k}}v=c+gk(e^{\frac{x}{k}}-1)$ ſeu $v=e^{\frac{-x}{k}}c+gk(1-e^{\frac{-x}{k}})=e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk$. Q. E. I.

Corollarium 1.

420. Si corpus in A motum ex quiete inchoet, erit $c=0$. Hoc igitur in caſu habebitur $v=gk(1-e^{\frac{-x}{k}})$, quae expreſſio, quo maior accipitur x, magis quoque augetur, certum tamen terminum nunquam poteſt transgredi. Nam ſumto $x=\infty$, habebitur $v=gk$. Eſt ergo $\sqrt{gk}$ aſymtotos celeritatum corporis descendentis, quam ante non acquirit, quam ex ſpatio infinito fuerit delapſum.

Corollarium 2.

421. Si celeritas initialis $\sqrt{c}$ fuerit huic aſymtoto $\sqrt{gk}$ aequalis, motus corporis descendentis erit vniformis, fit enim $v=gk=c$. Apparet hoc etiam ex aequatione differentiali, $dv=gdx-\frac{vdx}{k}$.

Nam

M.E.C.D. 2017

Nam si semel fuerit $v = gk$, incrementum celeritatis erit perpetuo euanescens.

Corollarium 3.

422. Si fuerit $c < gk$, corpus descendens mouebitur motu accelerato, nunquam tamen celeritatem $\sqrt{gk}$ acquiret, nisi spatio infinito percurso. Si enim est $c < gk$, quantitas $e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)$ semper est negatiua, et hanc ob rem v perpetuo erit minor quam gk.

Corollarium 4.

423. Si celeritas initialis $\sqrt{c}$ fuerit maior quam $\sqrt{gk}$, erit $e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)$ quantitas positiua, ideoque v vbique maior quam gk. Percurso vero spatio infinito fiet $v = gk$. Ex quo perspicitur corpus hoc casu motu retardato descendere.

Scholion 1.

424. Comprehendi debet in hac aequatione $v = e^{\frac{-x}{k}}(c-gk) + gk$ etiam casus, quo corpus in vacuo a sola potentia absoluta sollicitatum descendit. Hicque habebitur, si resistentia ponatur euanescens, seu exponens k infinitus, tum enim resistentiae vis $\frac{v}{k}$ euanescit. Difficile autem videtur determinatu, quem valorem habitura sit altitudo v, facto $k = \infty$. Ad hunc vero inueniendum plurimum conducit $e^{\frac{-x}{k}}$ in seriem aequiualentem $1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2} - \frac{x^3}{6k^3} +$ etc. trans-

mu-

M.E.C.D. 2017

mutare, cuius si k est ∞ sufficit loco accipere $1-\frac{x}{k}$. Quo valore loco $e^{\frac{-x}{k}}$ substituto habebitur $v=c-\frac{cx}{k}+gx=c+gx$ ob euanescentem terminum $\frac{cx}{k}$. Quae aequatio conuenit cum ea, quam supra (239) inuenimus; nam quod ibi est $\frac{g}{A}$ hic nobis est tantum g. Quoniam g nonsolum potentiam absolutam, sed vim eius accelerantem exhibet.

Scholion 2.

425. Si k non quidem habet valorem infinitum, sed tamen perquam ingentem; prout accidit, quando corpora vehementer grauia in fluido tenui delabuntur; magnam praestabit vtilitatem superior series, sumendis tantum tribus terminis primis $1-\frac{x}{k}+\frac{x^2}{2k^2}$ loco $e^{\frac{-x}{k}}$: error enim erit insensibilis. Hoc igitur casu si corpus ex quiete delabatur, vt sit $c=0$, erit $v=gx-\frac{gx^2}{2k}$. Ex qua aequatione vero proximus ipsius v valor eruitur. At si prorsus nihil negligere velimus, erit $v=gx-\frac{gx^2}{2k}+\frac{gx^3}{6k^2}-\frac{gx^4}{24k^3}+\frac{gx^5}{120k^4}-$ etc. qua serie infinita verus valor ipsius v exprimitur.

PROPOSITIO 54.

Problema.

426. *Determinare tempus, quo corpus in medio resistente vniformi, existente resistentia celeritatum quadratis proportionalis, a potentia absoluta vniformi sollicitatum per spatium* AP *descendit.*

BIBLIOTECA DEL OSSERVATORIO DI S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Positis vt supra AP$=x$, celeritate in A$=\sqrt{c}$, celeritate in P$=\sqrt{v}$, exponente resistentiae $=k$, erit $v=gk+e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)$, (419). Ex quo habebitur elementum temporis $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{dx}{\sqrt{(gk+e^{\frac{-x}{k}}(c-gk))}}$. Ad quod integrandum pono $e^{\frac{-x}{k}}=z$ et $c-gk=b$, breuitatis causa; eritque $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-kdz}{z\sqrt{(gk+bz)}}$. Fiat porro $gk+bz=r^2$, erit $z=\frac{r^2-gk}{b}$, et $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-2kdr}{r^2-gk}=\frac{dr\sqrt{\frac{k}{g}}}{r+\sqrt{gk}}-\frac{dr\sqrt{\frac{k}{g}}}{r-\sqrt{gk}}$. Quocirca erit $\int\frac{dx}{\sqrt{v}}=C+\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{r+\sqrt{gk}}{r-\sqrt{gk}}$. Restituatur loco r suus valor $\sqrt{(gk+e^{\frac{-x}{k}}(c-gk))}$, et habebitur tempus descensus per spatium AP$=C+\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)}+\sqrt{gk}}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)}-\sqrt{gk}}$. Quod quo euanescat facto $x=o$, debebit esse $C=-\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}{\sqrt{c}-\sqrt{gk}}$. Ex his conficitur tempus descensus per AP $=\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)}+\sqrt{gk}}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)}-\sqrt{gk}}-\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}{\sqrt{c}-\sqrt{gk}}$. Quae expressio simplicior reddi potest ita, vt prodeat $\frac{x}{\sqrt{gk}}+2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)}+\sqrt{gk}}{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}$; cui itaque tempus descensus per AP aequale est. Q. E. I.

Co-

BIBLIOTECA DEL

- M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

427. Si celeritas initialis fuerit $=0$, ideoque $c=0$, erit tempus, quo corpus per altitudinem AP descendit $=\frac{x}{\sqrt{gk}}+2\sqrt{\frac{k}{g}}l\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}+1)=\frac{x}{\sqrt{gk}}$
$-2\sqrt{\frac{k}{g}}l\frac{1-\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}}{e^{\frac{-x}{k}}}=2\sqrt{\frac{k}{g}}l\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}-\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)}}=2\sqrt{\frac{k}{g}}$
$l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$.

Scholion 1.

428. Formula etiam generalis temporis per AP cum celeritate initiali $\sqrt{c}$ transmutatur posito $2\sqrt{\frac{k}{g}}le^{\frac{x}{2k}}$ loco $\frac{x}{\sqrt{gk}}$ in hanc $2\sqrt{\frac{k}{g}}l\frac{\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}gk+c-gk)}+\sqrt{e^{\frac{x}{k}}gk}}{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}$
Ex qua ea, quam modo pro casu $c=0$ inuenimus, sponte sequitur, prodit enim $2\sqrt{\frac{k}{g}}l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$.

Corollarium 2.

429. Si ponatur $c=gk$, quo casu motus descensus est aequabilis (421), prodibit tempus descensus per spatium AP ex hac vltima forma $=2\sqrt{\frac{k}{g}}l\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}=\frac{x}{\sqrt{gk}}$, quemadmodum ex natura motu aequabilis quoque reperitur. Tempus enim debet exs primi spatio percurso x diuiso per celeritatem $\sqrt{gk}$.

Scholion 2.

430. Tempora haec autem habebuntur in minutis secundis, si inuentae expressiones per 250

M.E.C.D. 2017

diuidantur, et lineae c, k, x in ſcrupulis pedis Rhenani exhibeantur (222).

Scholion 3.

431. Poſita celeritate initiali $c=o$, ſi detur tempus, quo ſpatium AP descendendo percuritur, poterit ipſum ſpatium AP determinari. Nam ſit tempus t minutorum ſecundorum, denturque k et x in ſcrupulis pedis Rhenani, erit $t=\frac{1}{125}\sqrt{\frac{k}{g}}\, l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$. Conſequenter $e^{125t\sqrt{\frac{g}{k}}}=\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)}$. Hinc inuenitur $e^{\frac{x}{2k}}=\frac{e^{250t\sqrt{\frac{g}{k}}}+1}{2e^{125t\sqrt{\frac{g}{k}}}}$ atque $x=2kl(\frac{e^{250t\sqrt{\frac{g}{k}}}+1}{2})-250t\sqrt{gk}$, vel etiam $x=250t\sqrt{gk}-2kl\frac{2}{e^{-250t\sqrt{\frac{g}{k}}}+1}$. Hocque ſpatium x reperitur in partibus milleſimis pedis Rhenanis.

Scholion 4.

432. Si k fuerit quantitas vehementer magna, et tempus tantum quam proxime deſideretur per AP, exiſtente celeritate initiali $\sqrt{c}=o$; aſſumo hanc formulam $\frac{x}{\sqrt{gk}}+2\sqrt{\frac{k}{g}}\, l(\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}+1)$. In qua, quia $\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}$ fere euanescit ſi k eſt valde magnum, erit $l(1+\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})})=\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}-\frac{1+e^{\frac{-x}{k}}}{2}+(1-e$

M.E.C.D. 2017

$\frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^3}{3} - \frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^2}{4} + \frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^5}{5}$. Est vero etiam quam proxime $\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}} - \frac{\sqrt{xx}}{4k\sqrt{k}} + \frac{5x^2\sqrt{x}}{96k^2\sqrt{k}}$. Ex quo prouenit $l(1+\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}} - \frac{x}{2k} + \frac{x\sqrt{x}}{12k\sqrt{k}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{480k^2\sqrt{k}}$.

Quamobrem habebitur tempus descensus per spatium $AP = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$.

Corollarium 3.

433. Quando itaque resistentia euanescit, ideoque fiat $k = \infty$, prodibit descensus corporis per AP a sola potentia absoluta g sollicitati. Huius vero descensus tempus ex hac postrema formula, ob euanescentes omnes terminos praeter primum, ineni-tur $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}$, quemadmodum iam supra (218) est in-uentum, neglecto numero m et g posito loco $\frac{g}{A}$ vt hic instituimus.

PROPOSITIO 55.

Problema.

434. *Si corpus in medio resistente uniformi, quod resistit in duplicata ratione, ex* B *data celeritate sursum proiiciatur, atque sollicitetur potentia uniformi* g; *determinari oporteat celeritatem corporis in singulis locis.* Tab. IV. Fig. 4.

Solutio.

Sit celeritas in puncto $B = \sqrt{c}$, et celeritas in $P = \sqrt{v}$, ponatur $BP = x$, et resistentiae exponens

M.E.C.D. 2017

$=k$; Quia nunc motus et a potentia absoluta g et a resistentia $\frac{v}{k}$ retardatur erit $dv=-gdx-\frac{vdx}{k}$. Hinc fit $dx=\frac{-kdv}{gk+v}$ et $x=kl\frac{C}{gk+v}$, vbi debet esse $C=gk+c$ quo fiat $v=c$ facto $x=0$. Quamobrem habebimus $x=kl\frac{gk+c}{gk+v}$; ex qua erit $v=e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk$, quae determinat celeritatem in quouis loco P. Q. E. I.

Corollarium 1.

435. Pertingat corpus hoc modo sursum poiectum ad A vsque, et sit celeritas in A$=0$. Quocirca altitudo tota BA reperietur faciendo $v=0$, quo casu fit $e^{\frac{-x}{k}}=\frac{gk}{c+gk}$ seu $x=kl\frac{c+gk}{gk}$, cui quantitati aequalis est altitudo BA.

Corollarium 2.

436. Euanescat resistentia, seu fiat $k=\infty$ vt motus fiat in vacuo, erit $e^{\frac{-x}{k}}=1-\frac{x}{k}$. Hoc igitur casu erit $v=c-gx$. Eademque aequatio reperitur, si corpus a potentia sola absoluta g sollicitatum consideretur.

Corollarium 3.

437. Si medium resistens fuerit valde rarum, ita vt k numerum vehementer magnum significet, poterit loco $e^{\frac{-x}{k}}$ accipi $1-\frac{x}{k}+\frac{x^2}{2k^2}-\frac{x^3}{3k^3}$. Ex quo erit $v=c-\frac{cx}{k}+\frac{cx^2}{2k^2}-gx+\frac{gx^2}{2k}-\frac{gx^3}{3k^2}$ q. p. Quo autem haec quantitas valorem vero proximum ipsius v exhibeat,

M.E.C.D. 2017

at, non ſolum opus eſt vt k ſit numerus valde magnus, ſed inſuper requiritur vt altitudo x multo ſit minor quam k, quo $e^{\frac{-x}{k}}$ non multum ab vnitate differat.

Scholion 1.

438. Iam animaduertimus deſcenſum coporis per AB non ſimilem eſſe aſcenſui, ſi medium in vtroque caſu reſiſtens ponatur. Poteſt tamen deſcenſus per AB cogitatione concipi, qui prorſus ſimilis ſit aſcenſui, ita vt corpus tam in aſcenſu quam deſcenſu in puncto P eandem habeat celeritatem. Ad hoc autem ſtatui oportet in deſcenſu et potentiam abſolutam accelerantem, et medium propellens. Nam quia in aſcenſu ambae motui erant contrariae, neceſſe eſt vt in deſcenſu vtraque ſecunda conſtituatur, quo motus fiat perfecte retrogradus.

Corollarium 4.

439. Poſita igitur altitudine AP$=y$, et celetate hoc deſcenſu $=Vv$, erit $dv=pdy+\frac{vdy}{k}$. Ex qua integrata prodit $v=gk^{\frac{y}{k}}-1$.

Scholion 2.

440. Congruit haec aequatio cum priore quam accenſum contemplantes eruimus. Eſt enim $y=AB-x=k\,l\frac{c+gk}{gk}-x$, ideoque $e^{\frac{y}{k}}=\frac{c+gk}{gk}.e^{\frac{-x}{k}}$. Ex hoc igitur prodit $v=e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk$; quemadmodum

M.E.C.D. 2017

dum ſupra inuenimus in ſolutione problematis. Apparet igitur in hoc deſcenſu corpus in ſingulis punctis P easdem eſſe habiturum celeritates, quas habuit ibidem in aſcenſu. Idem ergo etiam neceſſe eſt reperiatur tempus deſcenſus hoc modo conſiderati, ac ex aſcenſu prouenit.

PROPOSITIO 56.

Problema.

441. *Determinare tempus aſcenſus per* BP *corporis in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum ex* B *data celeritate ſurſum proiecti, et interim ſollicitati a potentia abſoluta* g *deorſum tendente.*

Solutio.

Poſitis celeritate in B$=\sqrt{c}$, eaque in P$=\sqrt{v}$; deinde BP$=x$ et exponente reſiſtentiae $=k$, erit $v=e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk$ (434). Ex quo oritur elementum temporis $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{dx}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk)}}$. Ad quod integrandum pono vt ſupra $e^{\frac{-x}{k}}=z$ et $c+gk=b$, breu. gr. quo facto habebitur $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-kdz}{z\sqrt{(bz-gk)}}$. Sit $bz-gk=r^2$, erit $z=\frac{r^2+gk}{b}$, atque $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-2kdr}{r^2+gk}$, cuius integratio a quadratura circuli pendet. Ad hoc igitur conſtruendum conſtituatur quadrans circuli *abc* cuius radius *ac* ſit $=1$, ſumatur in eo tangens $at=\frac{r}{\sqrt{gk}}$, eritque arcus $am=\int\frac{dr\sqrt{gk}}{r^2+gk}$ qui ſignetur hoc modo A$\frac{r}{\sqrt{gk}}$. Huius-

Tab. IV. Fig. 5.

M.E.C.D. 2017

iusmodi ſcilicet expreſſio A t nobis denotet arcum circuli, cuius tangens eſt t exiſtente radio $=1$. Hanc ob rem erit $\int\frac{-2kdr}{r^2+gk}=-2\sqrt{\frac{k}{g}}\int\frac{dr\sqrt{gk}}{r^2+gk}=C-2\sqrt{\frac{k}{g}}$ A.$\frac{r}{\sqrt{gk}}$. Quia autem eſt $r=\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk)}$, erit $\int\frac{dx}{\sqrt{v}}=C-2\sqrt{\frac{k}{g}}$.A.$\sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk}{gk}}$. Quae quantitas cum debeat euanescere facto $x=0$, dabit $C=2\sqrt{\frac{k}{g}}$A. $\sqrt{\frac{c}{gk}}$. Tempus igitur ascenſus per ſpatium BP inue- Tab. IV. Fig. 4.

nitur $=2\sqrt{\frac{k}{g}}$.A.$\sqrt{\frac{c}{gk}}-2\sqrt{\frac{k}{g}}$.A.$\sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk}{gk}}=2\sqrt{\frac{k}{g}}$

$(A.\sqrt{\frac{c}{gk}}-A.\sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk}{gk}})=2\sqrt{\frac{k}{g}}A.\frac{\sqrt{cgk}-\sqrt{(gke^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-g^2k^2}}{gk+\sqrt{(ce^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-cgk)}}$

Q. E. I.

Corollarium 1.

442. Quia tota altitudo AB ad quam corpus pertingere poteſt habetur faciendo $x=kl\frac{c+gk}{gk}$ quo caſu fit $e^{\frac{-x}{k}}=\frac{gk}{c+gk}$; Inuenietur tempus totius ascenſus $=2\sqrt{\frac{k}{g}}A.\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{gk}}$.

Corollarium 2.

443. Quare ſi fuerit $c=gk$ erit tempus totius ascenſus per BA$=2\sqrt{\frac{k}{g}}$.A. 1. At arcus cuius tangens aequatur radio eſt peripheriae pars octaua. Poſita itaque quarta peripheriae parte $amb=\pi$, erit tempus ascenſus per BA$=\pi\sqrt{\frac{k}{g}}$.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

444. Ex hoc quoque intelligitur, ſi celeritate infinita corpus ex B ſurſum proiiciatur tempus aſcenſus totius nihilo minus fore finitum, ſit enim $=2\sqrt{\frac{k}{g}}.A.\infty$; qui arcus cum ſit quarta peripheriae pars $=\pi$, erit tempus totius aſcenſus $=2\pi\sqrt{\frac{k}{g}}$.

Corollarium 4.

445. Si loco celeritatis initialis $\sqrt{c}$ detur tota altitudo $BA=a$, ad quam corpus pertingit, quia eſt $a=kl\frac{c+gk}{gk}$ et propterea $c=gk(e^{\frac{a}{k}}-1)$; reperietur tempus totius aſcenſus per $BA=2\sqrt{\frac{k}{g}}.A.\sqrt{(e^{\frac{a}{k}}-1)}$.

Scholion 1.

446. Si transmutetur aſcenſus in deſcenſum medio accelerante, vt ſupra aſſumſimus (438) et vocetur $AP=y$, erit tempus deſcenſus per $AP=2\sqrt{\frac{k}{g}}A.\sqrt{(e^{\frac{y}{k}}-1)}$, ſubſtituto y loco a in ſuperiore formula. Ibi enim a denotabat altitudinem aſcenſu percurſam, hic vero eſt y altitudo integra, ad quam corpus celeritate, quam P habet, pertingere poteſt.

Scholion 2.

447. Aequatio fundamentalis pro deſcenſu hoc modo conſiderata eſt $dv=gdy+\frac{vdy}{k}$ (438), quae ex aequatione fundamentali pro vero deſcenſu $dv=gdx-\frac{vdx}{k}$ (419) poteſt formari ponendo y loco x et $-k$ loco k. Quare etiam expreſſio temporis vero pro-

M.E.C.D. 2017

proxima per ſpatium AP ex ea quam ſupra inuenimus (432) pro vero deſcenſu, accommodari poterit ad hunc deſcenſum imaginarium aſcenſus inuerſum; ponendo quoque y loco x et $-k$ loco k. Hoc itaque modo inuenitur tempus deſcenſus per ſpatium AP$=\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{g}}-\frac{y\sqrt{y}}{6k\sqrt{g}}+\frac{y^2\sqrt{y}}{240k^2\sqrt{g}}$ *q. p.* dummodo $\frac{y}{k}$ fuerit numerus vnitate minor.

Corollarium 5.

448. Si medii reſiſtentia prorſus euanescat, vt fiat $k=\infty$, erit tempus totius aſcenſus per ſpatium BA$=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$. Quae expreſſio prouenit ex ſuperiore $\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{g}}-\frac{y\sqrt{y}}{6k\sqrt{g}}+\frac{y^2\sqrt{y}}{240k^2\sqrt{g}}$ poſito a loco y, omnes enim termini praeter primum euanescunt.

Corollarium 6.

449. Poterit hinc etiam ex dato tempore integri aſcenſus t reperiri altitudo percurſa a. Nam quia eſt $t=2\sqrt{\frac{k}{g}}.\mathrm{A}.\sqrt{(e^{\frac{a}{k}}-1)}$, erit tangens arcus $\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}=\sqrt{(e^{\frac{a}{k}}-1)}$. Vocetur illa tangens T, erit $\mathrm{T}^2+1=e^{\frac{a}{k}}$ et $a=kl(\mathrm{T}^2+1)$.

PROPOSITIO 57.

Problema.

450. *Dato tempore quo corpus ex* B *ſurſum proiectum iterum in* B *decidit in medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione, et ſollicitante potentia abſoluta vniformi* g, *determinare altitudinem* BA *ad quam* Tabula IV, Fig. 4.

M.E.C.D. 2017

corpus peruenit, vt et celeritatem initialem in B *et finalem post descensum in eodem loco* B; *nec non tempus ascensus per* BA *et tempus descensus per* AB.

Solutio.

Sit datum tempus $=t$, quod est summa temporum ascensus et descensus per rectam BA, et exponens resistentiae $=k$. Ponatur altitudo BA quaesita $=x$. Erit tempus ascensus par $BA=2\sqrt{\frac{k}{g}}A.\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)}$, (445) atque tempus descensus sequentis ex A in $B=2\sqrt{\frac{k}{g}}l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$, (427). Ex quibus conflatur ista aequatio $\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}=A.\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)}+l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$, ex qua inueniri potest x. Cognita autem altitudine x dabitur simul et tempus ascensus per BA et tempus descensus per AB. Porro data altitudine $BA=x$, erit altitudo generans celeritatem in B, qua ascendit $=gk(e^{\frac{x}{k}}-1)$ (420), et altitudo generans celeritatem, qua decidit in $B=gk(1-e^{\frac{-x}{k}})$ (420). Q. E. I.

Corollarium I.

451. Erit ergo celeritas ascendens in B ad celeritatem descendentem ibidem vt $e^{\frac{2k}{x}}$ ad 1. Ex quo apparet tanto magis de motu amitti quanto corpus altius ascendat.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

452. Si fuerit k numerus valde magnus neque altitudo x admodum magna, vt loco temporum ſupra inuentas expreſſiones algebraicas adhibere liceat; erit tempus aſcenſus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} - \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$ (447), atque tempus deſcenſus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{6k\sqrt{g}}{x\sqrt{x}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$ (432). Quorum temporum ſumma, quia data eſt, habebitur $t\sqrt{g} = 4\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{120k^2}$, quam proxime.

Scholion 2.

453. Accuratius autem definietur haec temporum ſumma magis continuandis ſeriebus tempora aſcenſus et deſcenſus exprimentibus. Fit ſcilicet tempus aſcenſus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} - \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}} + \frac{x^3\sqrt{x}}{1344k^3\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{46080k^4\sqrt{g}}$ etc. et tempus deſcenſus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}} - \frac{x^3\sqrt{x}}{1344k^3\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{46080k^4\sqrt{g}}$ etc. Quamobrem horum temporum ſumma $t = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{120k^2\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{23040k^4\sqrt{g}}$ etc. Vbi notandum ſi tempus detur in minutis ſecundis, et k et x in ſcrupulis pedis Rhenani exprimantur, ſuperiorem ſeriem per 250 eſſe diuidendam. Ita ſi tempus t ſit μ minutorum ſecundorum debebit pro t ſubſtitui 250μ.

Corollarium 2.

454. Ex ſuperiore aequatione poterit ſerie inuertenda elici x per ſeriem. Fiet autem $\sqrt{x} = \frac{t\sqrt{g}}{4} - \frac{g^2t^5\sqrt{g}}{2^{15}.15.k^2} + \frac{g^4t^9\sqrt{g}}{2^{29}.15.k^2}$ etc. et conſequenter $x = \frac{gt^2}{2^4} - \frac{g^3t^6}{2^{16}.15k^2} + \frac{g^5t^{10}}{2^{26}.225k^4}$ etc.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

455. Differentia inter tempus descensus et tempus ascensus erit ergo $\frac{x\sqrt{x}}{2k\sqrt{g}} - \frac{x^3\sqrt{x}}{672k^3\sqrt{g}}$ quam proxime. Inuenta ergo altitudine x simul et tempus ascensus et tempus descensus innotescunt.

Corollarium 4.

456. In serie erit etiam altitudo debita celeritati, qua corpus ascensum inchoat $= gx + \frac{gx^2}{2k} + \frac{gx^3}{6k^2} + \frac{gx^4}{24k^3} +$ etc. et altitudo debita celeritati, qua corpus delabitur $= gx - \frac{gx^2}{2k} + \frac{gx^3}{6k^2} - \frac{gx^4}{24k^3} +$ etc.

Exemplum.

457. Globus ferreus ex tormento bellico sursum explosus recidebat in terram post 34 minuta secunda, eratque $k = 2250000$ scrupulorum pedis Rhenani, et $g = \frac{7499}{7500}$. Habebimus ergo $l = 8500$, et $\frac{t\sqrt{g}}{4\sqrt{k}} = 1, 416572$, adeoque $\frac{g^2 t^5 \sqrt{g}}{2^{15}.15k^2\sqrt{k}} = 0, 01188$. Atque $\frac{g^4 t^9 \sqrt{g}}{2^{29}.15k^4\sqrt{k}} = 0, 0007477$. Fiet igitur $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}} = 1, 405439$, et $\sqrt{x} = 2108, 159$, et tota altitudo x ad quam globus in aere peruenit $= 4443$ ped. Rhen. Sit nunc δ numerus minutorum secundorum, quibus descensus longius durat quam ascensus; erit $\frac{250\delta\sqrt{g}}{\sqrt{k}} = \frac{x\sqrt{x}}{3k\sqrt{k}} - \frac{x^3\sqrt{x}}{672k^3\sqrt{k}}$. Est vero $\sqrt{\frac{x}{k}} = \frac{527}{375}$, ex quo prodit $\frac{x\sqrt{x}}{3k\sqrt{k}} = 0, 9913$, et $\frac{x^3\sqrt{y}}{672k^3\sqrt{k}} = 0, 01893$. Habebimus ergo $\frac{250\delta\sqrt{g}}{\sqrt{k}} = 0, 97237$, et hinc $\delta = 5''$, $50'''$. Ex quo apparet tempus ascensus fuisse $14''$, $5'''$,

M.E.C.D. 2017

$5'''$, et tempus descensus $= 19'', 55'''$. Altitudo autem generans celeritatem, qua corpus ascensum inchoauit reperitur 15542 ped. et altitudo debita celeritati, qua delabitur $= 1969$ ped. Videatur de his Comment. Tom. II. pag. 338.

Corollarium 5.

458. Quia altitudo celeritati, qua corpus sursum proiicitur $= gk(e^{\frac{x}{k}} - 1) = gx(1 + \frac{x}{2k} + \frac{x^2}{6k^2} + \frac{x^3}{24k^3}$ + etc.). Erit tempus ascensus et descensus simul sumtum, si corpus hac celeritate in vacuo sursum proiiceretur sola sollicitante vi grauitatis, $= 4\sqrt{gx} + \frac{x\sqrt{gx}}{2} + \frac{5x^2\sqrt{gx}}{24k^2} + \frac{x^3\sqrt{gx}}{32k^3}$ + etc.

Corollarium 6.

450. Erit ergo summa temporum ascensus et descensus in vacuo ad temporum summam in medio resistente vt $g(1 + \frac{x}{4k} + \frac{5x^2}{96k^2} + \frac{x^3}{124k^3}$ + etc.) ad $1 + \frac{x^2}{480k^2} - \frac{x^4}{921600k^4}$ etc. Si scilicet in vtroque casu corpus eadem celeritate proiiciatur.

Scholion 3.

460. In citato Tomo II. Commentar. pag. 340 est Theorema, quo haec tempora in vacuo et medio resistente in duplicata celeritatum ratione, vt hic quoque statuimus, inter se conferuntur; atque asseritur tempus in vacuo semper esse maius tempore in pleno. At vero ex nostra comparatione apparet, fieri posse, vt tempus in vacuo etiam minus sit tempore in pleno. Nam si fuerit x valde paruum k vero vehementer magnum, ea tempora in-

M.E.C.D. 2017

inter se erunt proxime vt g ad 1. Est vero g in medio resistente ob vim grauitatis densitate medii minutam semper minor vnitate, et hanc ob rem tempus in vacuo minus erit his casibus tempore in pleno. Quando vero g quam minime ab vnitate differt et x non est admodum paruum respectu k, prout in eiaculatione globorum ex tormentis euenit, tempus in vacuo vtique perpetuo erit maius quam in medio resistente. Deinde si fuerit $x > k$ facile perspicitur, dari quoque casus, quibus euentus illi Theoremati futurus sit contrarius. In exemplo autem allato corpus celeritate altitudini 15542 ped. debita in vacuo sursum proiectum recidet in terram post 63 minuta secunda, cum tamen in aere non diutius quam $34''$ moretur.

PROPOSITIO 58.

Problema.

Tabula IV. Fig 6.

461. *Si corpus post quemuis descensum ex* O *reflectatur eaque celeritate, quam in descensu est adeptum iterum recta ascendat, atque hae reflexiones perpetuo, cum in* O *peruenerit repetantur; quaerendae sunt altitudines* OA, OB, OC *etc. quas corpus hoc modo successiue percurrit in medio resistente vniformi iuxta quadrata celeritatum et sollicitatum a potentia vniformi* g.

Solutio.

Posito, vt hactenus est factum, exponente resistentiae $= g$, altitudo prima $AO = a$, eritque celeritati, qua corpus ascensum inchoauit, altitudo de-

M.E.C.D. 2017

debita $=gk(e^{\frac{a}{k}}-1)$ (439). Altitudo vero debita celeritati, qua per AO delapsum punctum O attingit est $=gk(1-e^{\frac{-a}{k}})$ (420). Hac celeritate iam secundum ascensum per OB incipiat, sitque OB$=z$, erit $gk(1-e^{\frac{-a}{k}})=gk(e^{\frac{z}{k}}-1)$. Ex quo prodit OB $=kl(2-e^{\frac{-a}{k}})=z$. Altitudo vero debita celeritati, qua in hoc secundo descensu per BO delabitur, erit $=gk(1-e^{\frac{-z}{k}})=\frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{2-e^{\frac{-a}{k}}}$, hacque celeritate tertium ascensum per OC incipiet. Sit nunc OC$=z$, erit $\frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{2-e^{\frac{-a}{k}}}=gk(e^{\frac{z}{k}}-1)$, consequenter $z=$OC$=kl\frac{3-2e^{\frac{-a}{k}}}{2-e^{\frac{-a}{k}}}$. Celeritas vero, quam in descensu per CO acquirit, debita erit altitudini $gk(1-e^{\frac{-z}{k}})=\frac{gk(-e^{\frac{-a}{k}})}{3-2e^{\frac{-a}{k}}}$. Hac porro celeritate quartum ascensum per OD incipit, quam altitudinem OD denuo vocemus z, erit $gk(e^{\frac{z}{k}}-1)=\frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{3-2e^{\frac{-a}{k}}}$ et consequenter $z=$OD $=kl$

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

$= kl\frac{4-3e^{\frac{-a}{k}}}{3-2e^{\frac{-a}{k}}}$. Simili modo prodibit altitudo quinta $OE = kl\frac{5-4e^{\frac{-a}{k}}}{4-3e^{\frac{-a}{k}}}$, et sexta $OF = kl\frac{6-5e^{\frac{-a}{k}}}{5-4e^{\frac{-a}{k}}}$. Ex quibus concluditur ea altitudo OP, cuius index est n, fore $= kl\frac{n-(n-1)e^{\frac{-a}{k}}}{(n-1)-(n-2)e^{\frac{-a}{k}}} = kl\frac{ne^{\frac{a}{k}}-n+1}{(n-1)e^{\frac{a}{k}}-n+2}$. Manifestum igitur est ad quantam altitudinem corpus in quaque reflexione ex puncto O perueniat. Q. E. I.

Corollarium 1.

462. Ex hac solutione simul perspicitur celeritati, qua in hoc descensu per PO delabitur, debitam altitudinem fore $= \frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{n-(n-1)e^{\frac{-a}{k}}} = \frac{gk(e^{\frac{a}{k}}-1)}{ne^{\frac{a}{k}}-n+1}$

Celeritas vero, qua ascensum per OP est adorsum, debita est altitudini $\frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{n-1-(n-2)e^{\frac{-a}{k}}} = \frac{gk(e^{\frac{a}{k}}-1)}{(n-1)e^{\frac{a}{k}}-n+2}$

Corollarium 2.

463. Quia $OA = a = kle^{\frac{a}{k}}$ et $OB = kl(2-e^{\frac{-a}{k}})$, erit $OA + OB = kl(2e^{\frac{a}{k}}-1)$. Eodemque modo

OA

M.E.C.D. 2017

$OA+OB+OC=kl(3e^{\frac{a}{k}}-2)$, et $OA+OB+OC+OD=kl(4e^{\frac{a}{k}}-3)$ etc.

Corollarium 3.

464. Si k eſt numerus valde magnus, vt $\frac{a}{k}$ fere euanescat, erit quam proxime $OP=a-\frac{(n-1)a^2}{k}+\frac{(n-1)^2a^3}{k^2}-\frac{(n-1)^3a^4}{k^3}+$ etc. Quae ſeries cum ſit geometrica erit $OP=\frac{ak}{k+(n-1)a}$ *q. p.*

Corollarium 4.

465. Si altitudo prima OA fuerit infinite magna reliquae nihilo minus erunt finitae. Prodibit enim $OB=kl2$, $OC=kl\frac{3}{2}$, $OD=kl\frac{4}{3}$, etc. OP $kl\frac{n}{n-1}$.

Corollarium 5.

466. Et, ſi altitudo quaecunque fuerit $=kl$A erit altitudo ſequens, ad quam corpus poſt repercuſſionem e prima pertingere valet $=kl\frac{2A-1}{A}$. Porro altitudo tertia erit $=kl\frac{3A-2}{2A-1}$ et ſimiliter quarta $=kl\frac{4A-1}{3A-1}$ et ea cuius index eſt n erit $=kl\frac{nA-n+1}{(n-1)A-n+2}$.

Scholion 1.

467. Poſſunt etiam loco n numeri negatiui ſubſtitui, tumque inuenientur altitudines praecedentes in quarum ſerie prima exiſtit. Sic altitudo, quam ſequitur prima $OA=a$, poſito $n=0$, erit $=kl\frac{1}{2-e^{\frac{a}{k}}}$. Ex quo apparet, ſi fuerit $e^{\frac{a}{k}}=2$ ſeu

M.E.C.D. 2017

$a = kl2$, altitudinem praecedentem fuisse infinitam.

At si fuerit $e^{\frac{a}{k}} > 2$, altitudo praecedens ob logarithmum quantitatis negatiuae erit imaginaria, id quod indicat, fieri non posse, vt altitudo tanta possit assignari, cuius sequens sit haec assumta a.

Scholion 2.

468. Quod post altitudinem infinitam sequi possit altitudo finita admirabile quidem videtur; sed consideranti, quod corpus in medio resistente ex infinita altitudine delapsum finitam acquirat tantum celeritatem, (420) ratio huius phaenomeni facile patebit. Hac enim finita celeritate ad finitam tantum altitudinem reascendere poterit. Maxima autem celeritas, quam corpus in descensu potest adipisci, est $\sqrt{gk}$. Quare si corpus initio sursum proiiciatur celeritate maiore quam $\sqrt{gk}$ haec celeritas ex nullo quamuis magno descensu antecedente generari potuit; quemadmodum etiam hoc casu calculus altitudinem praecedentem exhibet imaginariae quantitatis.

PROPOSITIO 59.

Problema.

Tabula IV. Fig. 3. et 4.

469. *Resistente medio vniformi in celeritatum ratione simplici, et sollicitante potentia absoluta vniformi deorsum tendente, determinare corporis recta vel ascendentis vel descendentis celeritatem in quouis puncto.*

So-

Solutio.

Descendat primo corpus in recta AP, ſitquə celeritas eius initialis in A debita altitudini c. Ponatur potentia abſoluta $=g$, exponens reſiſtentiae $=k$; atque AP$=x$, ct altitudo debita celeritati in P$=v$. His poſitis erit $dv=gdx-\frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$, eſt enim vis reſiſtentiae $=\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Hinc fit $dx=\frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Fiat $\sqrt{v}=u$, erit $dv=2udu$, atque $dx=\frac{2udu\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-u}=-2du\sqrt{k}+\frac{2gkdu}{g\sqrt{k}-u}$. Integrata hac aequatione prodit $x=C-2u\sqrt{k}-2gkl(g\sqrt{k}-u)=C-2\sqrt{kv}-2gkl(g\sqrt{k}-\sqrt{v})$. Poſito vero $x=o$ fieri debet $v=c$, ex quo fit $C=2\sqrt{kc}+2gkl(g\sqrt{k}-\sqrt{c})$. Habebimus itaque $x=2\sqrt{kc}-2\sqrt{kv}+2gkl\frac{g\sqrt{k}-\sqrt{c}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$, ex qua v ope logarithmicae poteſt deduci Q. E. Alterum. Tabula IV Fig. 3.

Iam pro aſcenſu ſit celeritas initialis in B altitudini c debita, et BP$=x$, et altitudo celeritati in P debita $=v$. Quia in aſcenſu tam potentia abſoluta, quam reſiſtentiae vis retardant, erit $dv=-gdx-\frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Quae aequatio directe ex priore $dv=gdx-\frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ deducitur ponendo $-g$ loco g. Quamobrem etiam hoc modo requiſitam aequationem integralem ex illa deriuare licet. Fit igitur facto g negatiuo $x=2\sqrt{kc}-2\sqrt{kv}-2gkl\frac{g\sqrt{k}+\sqrt{c}}{g\sqrt{k}+\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum. Fig. 4.

Corollarium I.

470. Si celeritas initialis in deſcenſu fuerit $=o$, erit $x=-2\sqrt{kv}+2gkl\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Ex qua aequa- Fig. 3.

M.E.C.D. 2017

tione determinatur celeritas corporis ex quacunque altitudine delapsi.

Corollarium 2.

471. Quia vero est $l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}} = -l(1-\frac{\sqrt{v}}{g\sqrt{k}})$; habebitur in serie $l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{v}}{g\sqrt{k}} + \frac{v}{2g^2k} + \frac{v\sqrt{v}}{3g^3k\sqrt{k}} + \frac{v^2}{4g^4k^2} + \frac{2v^2\sqrt{v}}{5g^4k\sqrt{k}} +$ etc. Qua substituta prodibit $x = \frac{v}{g} + \frac{2v\sqrt{v}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{v^2}{2g^3k} +$ etc. Si nunc fuerit k numerus valde magnus erit $v = gx - \frac{2x\sqrt{gx}}{3\sqrt{k}}$ q. p.

Corollarium 3.

Tabula IV. Fig. 4.

472. Si fit $v = g^2k$, prodit $x = \infty$. Ex quo apparet, corpns ex infinita altitudine delapsum maiorem acquirere non posse celeritatem quam $g\sqrt{k}$. Et si fuerit semel $v = g^2k$, corpus motu aequabili esse progressurum; tum vero motum eius retardari, si sit $v > g^2k$.

Corollarium 4.

473. Si corpus ex B sursum proiiciatur celeritate $\sqrt{c}$, altitudo BA reperietur facto $v = 0$. Prodibit autem $BA = 2\sqrt{kc} - 2gkl(1+\frac{\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}) = \frac{c}{g} - \frac{2c\sqrt{c}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{c^2}{2g^3k}$. Altitudo vero ex qua corpus descendendo hanc celeritatem acquirere potest erit $= -2\sqrt{kc}$ $2gkl(1-\frac{\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}) = \frac{c}{g} + \frac{2c\sqrt{c}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{c^2}{2g^3k} +$ etc.

Corollarium 5.

474. Si corpus sursum proiiciatur celeritate $g\sqrt{k}$, maxima scilicet, quam descensu acquirere potest, erit altitudo ad quam pertingit $= 2gk(2-l2)$.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 60.

Problema.

475. *Resistente medio vniformi in ratione simplici celeritatum et sollicitante potentia absoluta vniformi; determinare tempus, quo corpus vel ascendens vel descendens spatium quoduis percurrit.*

Solutio.

Positis vt ante pro descensu per AP celeritate in $A = \sqrt{c}$, et ea in $P = \sqrt{v}$; exponente resistentiae $= k$ et potentia absoluta $= g$, spatioque $AP = x$, erit $dx = \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{v}} = \frac{2udu\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - u}$ posito u^2 loco v. Iam dicto tempore per $AP = t$ erit $dt = \frac{dx}{u} = \frac{2du\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - u}$. Ex qua prodit $t = 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k} - \sqrt{c}}{g\sqrt{k} - \sqrt{v}}$. Q. E. Alterum. Tabula IV. Fig. 3.

Quia ascensus per $BP = x$, cum celeritate initiali $\sqrt{c}$ prodit ponendo $-g$ loco g, erit tempus ascensus per $BP = 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k} + \sqrt{c}}{g\sqrt{k} + \sqrt{v}}$. Q. E. Alterum. Problemate vero praecedente definitur v ex dato x. Quare et hic tempus, quo spatium quoduis percurritur poterit cognosci. Q. E. I. Fig. 4.

Corollarium 1.

476. Si celeritas initialis, qua corpus descendit fuerit nulla, erit tempus descensus per spatium $AP = 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{v}}$. At v definitur ex hac aequatione $x = -2\sqrt{k}v + 2gk\, l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{v}}$. Fig. 3.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

477. Tota altitudo BA, ad quam corpus ex B ascendens peruenire poteſt, abſoluetur tempore $= 2\sqrt{k}l\frac{g\sqrt{k}+\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$.

Corollarium 3.

478. Si ergo celeritas initialis $\sqrt{c}$ fuerit infinita, erit etiam tempus, quo tota altitudo BA percurritur, infinitum, nempe $= 2\sqrt{k}l\infty$.

Scholion 1.

479. Hoc igitur vehementer differt haec reſiſtentiae hypotheſis a priore, quae quadratis celeritatum poſita erat proportionalis. Nam illo caſu corpus infinita celeritate ſurſum proiectum ad ſummum punctum pertingit tempore finito (444). Hoc vero notandum eſt tempus $2\sqrt{k}l\infty$ eſſe numerum infinitum infimi ordinis: Ex quo concludi poſſe videtur; ſi reſiſtentia fuerit in maiore quam ſimplici ratione celeritatum, tempus ascendens totius ſemper eſſe finitum. Sin autem reſiſtentia ſit in ſimplici vel minore celeritatum ratione, tempus ascenſus totius eſſe infinitum, ſi quidem celeritas initialis eſt infinite magna.

Scholion 2.

490. Has duas reſiſtentiae hypotheſes ideo fuſius pertractandas eſſe cenſui, quod eae a *Neutono*, aliisque, qui eum ſecuti ſunt, praecipue ſint conſideratae. Haec quidem poſterior hypotheſis, qua reſiſtentiam celeritatibus proportionalem poſuimus, me-

M.E.C.D. 2017

mere mathematica eſt, neque vllum in phyſicis habere poteſt vſum. Sed quia initio putarunt, reſiſtentiam fluidorum a tenacitate oriundam celeritatibus eſſe proportionalem, diligentius in huiusmodi motus inquirendum eſſe exiſtimauerunt. Poſtmodum tamen, cum reſiſtentiam tenacitatis longe aliter ſe habere intellexiſſent, hanc tractationem nihilo minus retinuerunt. Prior vero, qua reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis eſt, maxime explorari meretur: certum enim eſt praecipuam fluidorum reſiſtentiam hanc tenere rationem. Praeterea etiam haec hypotheſis in calculo prae reliquis tantam habet praerogatiuam, vt, quod in aliis hypotheſibus minime poteſt praeſtari, in hac tamen ſola calculus non refragetur. Omnia enim fere problemata, quae in vacuo ſolutionem non reſpuunt, in hac reſiſtentiae hypotheſi reſolui poſſunt. Hanc ob rem in ſequentibus iſtam reſiſtentiam potiſſimum examinabimus, reliquas autem, niſi concinno computo qnaeſitum inueniri poteſt, plerumque negligemus.

PROPOSITIO 61.
Problema.

481. *Reſiſtat medium vniforme in ratione quacunque multiplicata celeritatum, ſitque potentia ſollicitans vniformis; determinari oportet motum corporis recta vel ascendentis vel descendentis.*

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Tabula IV. Fig. 3. Conſideremus primo deſcenſum, et ponamus celeritatem in A$=Vc$, ſpatium iam percurſum AP$=x$ et celeritatem in P$=Vv$. Sit reſiſtentiae exponens $=k$ et lex reſiſtentiae $=v^m$, atque potentia abſoluta $=g$. His igitur poſitis erit $dv=gdx-\frac{v^m dx}{k^m}$, et $dx=\frac{k^m dv}{gk^m-v^m}$. Habemus ergo $x=\int\frac{k^m dv}{gk^m-v^m}$ ex qua ope quadraturarum v in x determinari poterit. Ponatur tempus, quo ſpatium AP percurritur $=t$, erit $dt=\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{k^m dv}{gk^m\sqrt{v}-v^m\sqrt{v}}$. Atque $t=\int\frac{k^m dv}{gk^m\sqrt{v}-v^m\sqrt{v}}$ Q E. Alterum.

Iam pro aſcenſu maneat Vc celeritas initialis in B, ſitque BP$=x$, et celeritas in P$=Vv$, atque tempus, quo ſpatium BP percurritur $=t$. His poſitis erit $dv=-gdx-\frac{v^m dx}{k^m}$ quae aequatio ex illa elicitur ponendo $-g$ loco g. Quo facto erit pro aſcenſu $x=-\int\frac{k^m dv}{gk^m+v^m}$ et $t=-\int\frac{k^m dx}{gk^m\sqrt{v}+v^m\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum inueniendorum.

Corollarium I.

482. Si fuerit $c^m=gk^m$, corpus hac celeritate deſcendens motu aequabili feretur. Nam perpetuo potentiae abſolutae, qua corpus acceleratur, aequalis erit vis reſiſtentiae, qua retardatur.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

483. Corpus vero ex quiete delapsum perpetuo accelerabitur, neque tamen vnquam celeritatem acquiret altitudini $g^{\frac{n}{m}}k$ debitam. Sed haec celeritas est quasi assymtotos, quam siue celerius siue tardius corpus moueatur, affectat.

Scholion.

484. Quia hae inuentae aequationes neque integrari possunt, neque v vel t in x definiri, diutius iis immorari non expedit. Ad alia igitur progredior, atque medium resistens variabile contemplabor manente potentia absoluta vniformi. Huiusmodi tamen accipiam hypothesin, qua aequatio dv determinans fiat homogenea, ideoque his difficultatibus non sit obnoxia. Deinde potentiam absolutam non amplius vniformem sed variabilem pono, seu eius loco vim centripetam considero, qua corpus perpetuo ad certum aliquod punctum fixum attrahitur. Cum hac quidem primum aliam resistentiam non coniungam, nisi quae quadratis celeritatum est proportionalis. Deinde vero cum aliis resistentiae hypothesibus eas tantum vires centripetas coniungi conuenit, quae integrationem aequationis differentialis admittunt.

PROPOSITIO 62.

Problema.

485. *Potentia absoluta existente vniformi, et exponente resistentiae distantiis a puncto* C *proportionali,* Tabula IV. Fig 7. *at-*

M.E.C.D. 2017

atque lege reſiſtentiae celeritatum ratione quacunque multiplicata, requiritur corporis in recta AC *ad* C *vel accedentis vel ab eo recedentis celeritas in quouis loco.*

Solutio.

Potentia vniformis ad C vrgens ſit $=g$ altitudo debita celeritati in loco quocunque P$=v$. Ponatur AC quae eſt maxima altitudo ad quam corpus pertingit $=a$ et CP$=x$, erit exponens reſiſtentiae vt x, ſit is $\lambda^{\frac{1}{m}}x$ et lex reſiſtentiae ſit v^m. His poſitis erit vis reſiſtentiae$=\frac{v^m}{\lambda x^m}$, et pro ascenſu per CA, quo et potentia abſoluta et vis reſiſtentiae retardant, habebitur iſta aequatio $dv=-g\,dx-\frac{v^m\,dx}{\lambda x^m}$. Descenſum hic quoque tanquam ascenſum conſideremus, et quia in descenſu vero potentia accelerans, reſiſtentia vero retardans eſt, in hoc ascenſu ſubſtituto contrario modo potentia retardans et reſiſtentia accelerans poni debet (411), ex quo oritur pro descenſu haec aequatio $dv=-g\,dx+\frac{v^m\,dx}{\lambda x^m}$. Quae aequatio ex illa deriuatur faciendo λ negatiuum, et hanc ob rem alteram tantum aequationem integrari opus eſt. Sumamus aequationem pro descenſu, quae erit huiusmodi $\lambda x^m dv+\lambda g x^m dx=v^m dx$, et ponamus $v=xz$. Erit ergo $dv=x\,dz+z\,dv$, ex quo prodibit iſta aequatio, $\lambda x^{m+1}\,dz+\lambda x$

M.E.C.D. 2017

$+\lambda x^m z\,dx+\lambda g\,x^m dx=x^m z^m dx$. Quae diuiſa per $x^{m+1}(z^m-\lambda z-\lambda g)$ abit in hanc $\frac{\lambda dz}{z^m-\lambda z-\lambda g}=\frac{dx}{x}$ in qua indeterminatae iam ſunt ſeparatae. Haec igitur aequatio ita integretur, vt facto $x=a$, celeritas euanescat; quo facto ex aequatione integrali celeritas corporis descendentis in quouis loco innotescet. Eadem vero ipſa aequatio facto λ negatiuo inſeruiet ad celeritates in ascenſu per **CA** definiendas. Q. E. I.

Corollarium 1.

486. Si fuerit $m=1$ ſeu reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis, erit $\frac{\lambda dz}{(1-\lambda)z-\lambda g}=\frac{dx}{x}$, adeoque $\frac{\lambda}{1-\lambda}l((1-\lambda)z-\lambda g)=lx+\mathrm{C}=\frac{\lambda}{1-\lambda}l\frac{(1-\lambda)v-\lambda gx}{x}$ ſubſtituo $\frac{v}{x}$ loco z. Quia autem ſi $x=a$ debet eſſe $v=o$, erit $\mathrm{C}=\frac{\lambda}{1-\lambda}l-\lambda g-la$, ideoque $lx=la+\frac{\lambda}{1-\lambda}l\frac{\lambda gx-(1-\lambda)v}{\lambda gx}$. Ex qua prodit $v=\frac{\lambda gx}{\lambda-1}\left(\frac{a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}-x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}{x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}\right)$

$=\frac{\lambda g}{\lambda-1}(a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}x^{\frac{1}{\lambda}}-x)$.

Corollarium 2.

487. Si fuerit λ vnitate minor, haec aequatio ad aliam formam redigi debet; Prodibit autem

$v=\frac{\lambda g}{1-\lambda}\left(\frac{a^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}x-x^{\frac{1}{\lambda}}}{a^{\frac{1}{\lambda}}}\right)$.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

488. Casus, quo $\lambda = 1$, seu exponens resistentiae ipsi distantiae a puncto C est aequalis, in his formulis non continetur, sed ex differentiali $\frac{-dz}{g} = \frac{dx}{x}$ est deducendus. Prodibit autem $C - \frac{z}{g} = lx$ hincque $v = gx(la - lx)$.

Corollarium 4.

489. Ex his intelligitur casu $m = 1$ corporis descendentis celeritatem tam in A quam in C fore $= 0$. Fit enim $v = 0$ in tribus hisce aequationibus, tam posito $x = 0$ quam $x = a$. Corpus igitur ex A in C delapsum omnem motum amittet atque in C perpetuo quiescet, ob resistentiam in eo loco infinite magnam.

Corollarium 5.

490. Dum igitur corpus rectam AC percurrit, alicubi inter A et C habebit celeritatem maximam, quae inuenitur ex aequatione differentiali faciendo $dv = 0$. Fiet autem tum $v = \lambda g x$, quo valore loco v in integratis aequationibus substituto prodibit $\lambda x^{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} = a^{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}$, atque $x = \frac{a}{\lambda^{\frac{\lambda}{\lambda - 1}}}$, si $\lambda > 1$.

Sin autem $\lambda < 1$ erit $x = \lambda^{\frac{\lambda}{1 - \lambda}} a$. At si $\lambda = 1$; erit $1 = la - lx$ ideoque $x = \frac{la}{e}$, denotante e numerum, cuius logarithmus est vnitas.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

491. Ex his colligere licet etiam in reliquis resistentiae hypothesibus celeritatem corporis, cum ad C peruenerit, esse euanituram. Vis enim resistentiae est $\frac{v^m}{\lambda x^m}$, quae ergo fit infinita si $x=0$. Quare si corpus in C quandam haberet velocitatem, ea a vi resistentiae infinita statim in nihilum redigi deberet. Maximam vero in descensu celeritatem habebit quando est $v^m=\lambda g x^m$. Ex quo apparet maximam celeritatem esse debitam altitudini $x\sqrt[m]{\lambda g}$. Sed quia x ignoratur seu locus, quo corpus celerrime descendit, etiam ipsa celeritas non potest determinari, nisi per quadraturas curuarum, quarum ope aequatio differentialis constructur.

Corollarium 6.

492. Pro ascensu ex C in A si $m=1$ celeritates corporis in singulis locis P determinabuntur ex hac aequatione $v=\frac{\lambda g x}{\lambda+1}\left(\frac{a^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}-x^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}{x^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}\right)$, quae ex illis pro descensu formatur, facto λ negatiuo, vti oportet.

Corollarium 7.

493. In ascensu ergo corporis celeritas in C semper est infinita. Facto enim $x=0$, quia $\frac{\lambda+1}{\lambda}$ est vnitate maius, denominator euanescit.

Scho-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Scholion 2.

494. Perſpicuum etiam eſt ex ſola contemplatione, celeritatem in C eſſe debere infinitam. Nam niſi tanta eſſet, corpus vim reſiſtentiae in C infinitam ſuperare non poſſet, ſed perpetuo in C haerere deberet.

PROPOSITIO 63.

Theorema.

495. *Iisdem poſitis, quae in praecedente propoſitione, ſi plura corpora ex diuerſis diſtantiis ad punctum* C *accedant, erunt tempora, quibus eo perueniunt in ſubduplicata ratione diſtantiarum.*

Demonſtratio.

In ſolutione praecedentis problematis ad celeritatem in P determinandam obtinuimus hanc aequationem, $\lambda x^m dv + \lambda g x^m dx = v^m dx$, (485). In qua aequatione x et v vbique eundem dimenſionum numerum conſtituunt. Eius igitur integralis ita accepta, vt poſito $x = a$ fiat $v = o$, habebit hanc proprietatem, vt x, v et a vbique eundem dimenſionum numerum conſtituant. Ex ea ergo prodibit v aequalis functioni cuidam ipſarum a et x, in qua a et x vnicam vbique dimenſionem conſtituunt; ſeu v erit functio ex a ex x conſtans vnius dimenſionis. Quare in elemento temporis per CP quod eſt $\frac{dx}{\sqrt{v}}$, erit ipſarum x, dx, et a dimidia dimenſio, et hanc ob rem tempus per CP aequabitur functioni ex a et x conſtanti dimidiae dimenſionis. Poſito ergo $x = a$,

quo

M.E.C.D. 2017

quo casu totum tempus descensus per AC inuenitur, habebitur functio ipsius solius *a* dimidiae dimensionis. Quamobrem tempus per AC exprimetur huiusmodi expressione C$\sqrt{a}$ in qua C ex quantitatibus λ, *m* et *g* constat, non vero pendet ab *a*. Quia iam *a* denotat altitudinem AC, perspicuum est plurium descensuum tempora esse inter se in subduplicata ratione altitudinum percursarum. Q. E. D.

Corollarium 1.

496. Simili modo intelligitur plurium ascensuum ex C tempora tenere etiam rationem altitudinum, ad quas peruenitur, subduplicatam.

Corollarium 2.

497. In quacunque igitur multiplicata celeritatum ratione medium resistat, dummodo potentia absoluta est constans et resistentiae exponens distantiis a C proportionalis, tempora vel ascensuum vel descensuum rationem tenent subduplicatam altitudinum.

Scholion 1.

498. Neque vero ascensus cum descensibus comparare licet, neque plures ascensus vel descensus inter se, in quibus litterae λ, *m* et *g* non eosdem tenent valores. Nam in expressione C$\sqrt{a}$, quantitas C in omnibus casibus, qui inter se comparantur, eadem esse debet.

M.E.C.D. 2017

Scholion 2.

499. In hac propoſitione eadem vſi ſumus methodo varia deſcenſuum ad punctum fixum tempora comparandi, quam ſupra in propoſitionibus 39 et 46. Hoc autem caſu eo magis huius methodi praeſtantia cernitur, quia nequidem celeritatem in x determinare licebat. Hoc enim ſolum nobis perſpicere ſufficiebat, cuiusmodi functio ipſarum a et x futura ſit ea expreſſio, cui v eſſet aequalis. In ſequentibus autem plura ſpecimina egregia huius methodi occurrent.

PROPOSITIO 64.

Problema.

Tabula IV. Fig. 7.

500. *Exiſtente vi centripeta cuicunque poteſtati diſtantiarum a centro* C *proportionali, medioque vniformi reſiſtente in duplicata celeritatum ratione; determinare corporis in recta* AC *moti ſiue ſurſum ſiue deorſum in ſingulis locis* P *celeritatem.*

Solutio.

Sit corpus in P, habeatque celeritatem altitudini v debitam. Vocetur AP, x, et ſit vis centripeta vt x^n, atque ea diſtantia, in qua vis centripeta aequalis eſt grauitati $=f$. Deinde ponatur exponens reſiſtentiae k. His praemiſſis erit vis abſoluta, qua corpus in P ſollicitatur $= \frac{x^n}{f^n}$, et vis reſiſtentiae in hoc loco $\frac{v}{k}$, exiſtente vi grauitatis $=1$.

Des-

M.E.C.D. 2017

Descendat iam corpus ad C et habebit, dum per elementum pP mouetur, vim centripetam acceleran-tem, atque vim reſiſtentiae retardantem. Quia hic autem corpus inuerſe ex P in p peruenire ponimus crescente x, contrarias harum virium actiones ſtatui oportet, ſeu quod eodem redit dx negatiuum eſt ponendum, quia descenſu diſtantia PC$=x$ minuitur. Prodibit ergo $dv=-\frac{x^n}{f^n}dx+\frac{vdx}{k}$. In vero autem corporis ascenſu per Pp, vtraque vis erit retardans, ideoque habebitur $dv=-\frac{x^n}{f^n}dx-\frac{vdx}{k}$. Ex quo perſpicitur alteram aequationem ex altera oriri faciendo k negatiuum. Hanc ob rem alterutram tantum aequationem integrari opus eſt. Sumamus eam pro ascenſu $dv=-\frac{x^ndx}{f^n}-\frac{vdx}{k}$, ſeu $dv+\frac{vdx}{k}=\frac{-x^ndx}{f^n}$ haecque multiplicetur per $e^{\frac{x}{k}}$ vt prodeat $e^{\frac{x}{k}}(dv+\frac{vdx}{k})=-\frac{e^{\frac{x}{k}}x^ndx}{f^n}$, cuius integralis eſt $e^{\frac{x}{k}}v=-\int\frac{e^{\frac{x}{k}}x^ndx}{f^n}$. Erit ergo $v=-e^{\frac{-x}{k}}\int\frac{e^{\frac{x}{k}}x^ndx}{f^n}$. Pro descenſu igitur erit $v=-e^{\frac{x}{k}}\int\frac{e^{\frac{-x}{k}}x^ndx}{f^n}$. In vtraque vero integratione quantitas conſtans adiicienda ex eo de-

M.E.C.D. 2017

terminari debet, quod corporis moti alicubi celeritas ſit data: alioquin enim motus non eſſet determinatus. Q. E. I.

Corollarium I.

501. Perſpicitur igitur ſi n fuerit numerus integer affirmatiuus, has formulas fore integrabiles. Eſt enim $\int e^{\frac{x}{k}} x^n dx = k e^{\frac{x}{k}} x^n - nk^2 e^{\frac{x}{k}} x^{n-1} + n(n-1)k^3 e^{\frac{x}{k}} x^{n-2} - n(n-1)(n-2)k^4 e^{\frac{x}{k}} x^{n-3} +$ etc. $+C$. Quae ſeries non fit infinita, quoties n eſt numerus integer affirmatiuus.

Corollarium 2.

502. Sit celeritas in C data et debita altitudini c, erit pro aſcenſu $v = e^{\frac{-x}{k}} c - \frac{k x^n}{f^n} + \frac{n k^2 x^{n-1}}{f^n} - \frac{n(n-1)k^3 x^{n-2}}{f^n} +$ etc. $\pm n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2.1. \frac{k^{n+1} e^{\frac{-x}{k}}}{f^n}$; quorum ſignorum ambiguorum ſuperius valet ſi $n+1$ fuerit numerus impar, inferius vero ſi $n+1$ fuerit numerus par. Pro deſcenſu autem erit $v = e^{\frac{x}{k}} c + \frac{k x^n}{f^n} + \frac{n k^2 x^{n-1}}{f^n} + \frac{n(n-1)k^3 x^{n-2}}{f^n} +$ etc. $-n(n-1)\ldots\ldots 2.1. \frac{k^{n+1} e^{\frac{x}{k}}}{f^n}$. Loco C debita ſubſtituta conſtante.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

503. Integrale ipſius $\frac{e_k^{\frac{x}{k}} x^n dx}{f^n}$ ita acceptum vt fiat $=0$, facto $x=0$, ponatur $=X$. Eritque $v=e^{\frac{-x}{k}}(c-X)$, quia facto $x=0$, fieri debet $v=c$. Inſeruit quidem haec aequatio ascenſui, ſed facto k negatiuo ad descenſum accommodatur.

Corollarium 4.

504. Cognito X apparebit altitudo CA ad quam corpus vel ascendere poteſt, vel ex ea delapſum celeritatem acquirit $=\sqrt{c}$. Ex hac enim aequatione $X=c$ radix x dabit altitudinem CA.

Corollarium 5.

505. Ex differentiali aequatione pro descenſu $dv=-\frac{x^n dx}{f^n}+\frac{v dx}{k}$, apparet alicubi corpus habiturum eſſe celeritatem maximam antequam ad C pertingit, quae ibi erit, vbi eſt $v=\frac{k x^n}{f^n}$, ſi quidem n non eſt numerus negatiuus.

Corollarium 6.

506. Detur altitudo CA$=a$, ex hacque ſi quaeratur c, oportet eam habere quantitatem, quae reſultat in X poſito a loco x. Sit $a=A$ erit pro ascenſu $v=e^{\frac{-x}{k}}(A-X)$, et pro des-

M.E.C.D. 2017

censu $v = e^{\frac{x}{k}}(A-X)$. Facto enim $x = a$ debet euanescere v. Iam facto $x = o$, quo casu etiam fit $X = o$ (503), erit $v = c = A$.

Corollarium 7.

507. Manifestum est ex hisce, quomodo tempus quo spatium CP percurritur, inueniendum sit. Scilicet pro ascensu erit tempus per CP

$$= \int \frac{e^{\frac{x}{2k}} dx}{\sqrt{(A-X)}}$$

atque pro descensu tempus per CP erit

$$= \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2k}} \sqrt{(A-X)}}$$

Exemplum.

508. Sit vis centripeta vt distantia a centro C, quo casu fit $n = 1$; Erit ergo pro ascensu $v = e^{\frac{-x}{k}} c - \frac{kx}{f} + \frac{k^2}{f} - \frac{k^2 e^{\frac{-x}{k}}}{f}$. Pro descensu vero $v = e^{\frac{x}{k}} c + \frac{kx}{f} + \frac{k^2}{f} - \frac{k^2 e^{\frac{x}{k}}}{f}$ (502). In descensu maxima celeritas erit, vbi est $v = \frac{kx}{f}$ (505), qua aequatione cum illa coniuncta habebitur $fe^{\frac{x}{k}} c + k^2 = k^2 e^{\frac{x}{k}}$. Erit ergo $e^{\frac{x}{k}} = \frac{k^2}{k^2 - cf}$ et $x = k l \frac{k^2}{k^2 - cf}$. Haec igitur distantia fit infinita si $cf = k^2$, omnino vero imaginaria si $cf > k^2$. Sit porro in A corporis celeritas $= o$, positaque $AC = a$, erit pro ascensu celeritatis initialis in C altitudo debita $= \frac{c^{\frac{a}{k}} ka - c^{\frac{a}{k}} k^2}{f} + \frac{k^2}{f}$.

In

M.E.C.D. 2017

In descensu vero erit celeritatis finalis in C altitudo debita $= -\frac{c^{\frac{-a}{k}} ka}{f} - \frac{c^{\frac{-a}{k}} k^2}{f} + \frac{k^2}{f}$. Ex qua apparet si fuerit a infinitum fore celeritatis vltimae in C altitudinem debitam $= \frac{k^2}{f}$.

PROPOSITIO 65.

Problema.

509. *Existente vi centripeta ad* C *quacunque et medio resistente secundum quadrata celeritatum vtcunque differmi: determinare motum corporis recta vel accedentis vel recedentis a* C.

Solutio.

Sit corpus in P, et ponatur CP $= x$, et celeritas in P $= \sqrt{v}$. Deinde sit vis centripeta in P $= p$, posita vi grauitatis $= 1$, et exponens resistentiae $= q$, quae litterae p et q denotant functiones quascunque ipsius x. Erit ergo vis resistentiae $= \frac{v}{q}$. Hanc ob rem habebitur pro ascensu $dv = -pdx - \frac{vdx}{q}$. Pro descensu vero haec $dv = -pdx + \frac{vdx}{q}$. Quarum altera in alteram transmutatur facto q negatiuo. Consideremus igitur alterutram tantum ascensui accommodatam, quae induit hanc formam $dv + \frac{vdx}{q} = -pdx$. Multiplicetur haec per $e^{\int \frac{dx}{q}}$ vt fiat integralis. Erit autem aequatio integralis $e^{\int \frac{dx}{q}} v = -\int e^{\int \frac{dx}{q}} pdx$; ergo $v = -e^{-\int \frac{dx}{q}} \int e^{\int \frac{dx}{q}} pdx$. Sit corpo-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

poris in A, posita AC$=a$, celeritas nulla, et scribatur X loco integralis ipsius $e^{\int \frac{dx}{q} p dx}$ ita accepti vt euanescat facto $x=o$. Deinde loco x posito a abeat X in A erit $-\int e^{\int \frac{dx}{q} p dx} = A - X$, atque $v = e^{-\int \frac{dx}{q}} (A-X)$. Tempus igitur quo spatium PC absoluitur est $= \int \frac{e^{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{q} dx}}{\sqrt{(A-X)}}$. Pro descensu erit autem scripto A–X simili modo loco $-\int e^{-\int \frac{dx}{q} p dx}$, altitudo celeritati in P debita $v = e^{\int \frac{dx}{q}} (A-X)$ et tempus quo spatium PC absoluitur erit $= \int \frac{dx}{e^{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{q}} \sqrt{(A-X)}}$

Q. E. I.

Corollarium 1.

510. Celeritas in puncto infimo C reperietur facto $x=o$, quo casu et X euanescit, et $\int \frac{dx}{q}$ euanescere ponamus. Prodibit igitur tam pro ascensu quam pro descensu $v=A$. Notandum autem est A in vtroque casu non eundem habere valorem, sed diuersum. Formatur enim ex X, quod pro ascensu est $= \int e^{\int \frac{dx}{q} p dx}$, pro descensu vero $= \int e^{-\int \frac{dx}{q} p dx}$.

Corollarium 2.

511. In descensu maximam habebit corpus celeritatem quando est $v = pq$, tum enim fit $dv = o$.

Lo-

M.E.C.D. 2017

Locus ergo, in quo celeritas eſt maxima, determinabitur ex iſta aequatione $pq = e^{\int \frac{dx}{q}}$ (A–X).

Scholion.

512. In hypotheſi tam potentiae quam medii vniformis, corpus delapſum ſpatio demum infinito percurſo acquirebat maximam ſuam celeritatem, et ſi principio ea ſtatim promoueatur, eam perpetuo retinebat. Hic vero vbi p et q ſunt quantitates variabiles corpus ex quiete delapſum finito tempore maximam celeritatem acquirere poteſt, neque ſi eam ſemel habuit retinere debet; niſi ſit pq perpetuo quantitas conſtans, ſeu medii denſitas vi centripetae proportionalis (385).

PROPOSITIO 66.

Problema.

513. *Data lege vis centripetae ad centrum* C *trahentis, et medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione; ſi dentur celeritates corporis, quas ex quibuscunque altitudinibus delapſum in* C *acquirit, determinare denſitatem ſeu reſiſtentiae exponentem in ſingulis locis.* Tabula IV. Fig. 8.

Solutio.

Poſita quacunque diſtantia CP $= x$ et vi centripeta in P $= p$; ſit curua CMB huius indolis vt eius applicata quaeuis AB ſit aequalis altitudini debitae celeritati, quam corpus ex A delapſum in C acquirit, quae curua igitur data erit. Exponens vero reſiſtentiae, qui quaeritur, ſit in P $= q$. Sit porro

M.E.C.D. 2017

distantia AC ex qua corpus delabitur $=a$, erit AB certa quaedam functio ipsius a, quam ponamus L. Eiusdem vero curuae applicata PN sit R, eritque R talis functio ipsius x qualis L est ipsius a. Ex praecedente autem propositione apparet, corporis ex distantia $AC=a$ delapsi altitudinem celeritati in C acquisitae debitam fore $=A$ (510). Quamobrem erit $L=A$, atque etiam $R=X$, est enim quoque X talis functio ipsius x, qualis A est ipsius a, R igitur talis esse debet functio ipsius x, vt euanescat facto $x=0$. Quoniam vero est $X=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}p\,dx$ erit $R=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}p\,dx$, et $l\frac{pdx}{dR}=\int\frac{dx}{q}$. Ex qua posito dx constante, elicitur $q=\frac{pdx\,dR}{dp\,dR-p\,ddR}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

514. Si fuerit CMB linea recta, adeoque $R=\alpha x$, erit $ddR=0$ et $q=\frac{pdx}{dp}$. Si fit praeterea $p=\mathfrak{C}x^n$ erit $q=\frac{x}{n}$, seu medii densitas erit distantiis a centro reciproce proportionalis.

Corollarium 2.

515. Si fuerit $n=0$ seu vis centripeta vbique eadem erit $q=\infty$, ideoque medii densitas nulla, et ipsa resistentia euanescens. Hicque est casus corporis invacuo descendentis a potentia absoluta vniformi sollicitati.

Corollarium 3.

516. Si fuerit n numerus negatiuus, habebit q quoque valorem negatiuum. Ex quo cognoscitur

M.E.C.D. 2017

tur resistentiam transmutandam esse in vim propellentem.

Scholion 1.

517. Ex hisce facile quoque resoluitur eadem quaestio ad ascensum accommodata, si nimirum detur altitudo, ad quam corpus ex C quacunque celeritate proiectum pertingit. Posita enim celeritate $=\sqrt{R}$, qua spatium x absoluitur, q tantummodo in sui negatiuum transmutari debebit, quo facto habebitur $q=-\frac{pdxdR}{pddR-dpdR}$.

Scholion 2.

518. Vtraque aequatio definiens q tam pro ascensu quam pro descensu ita est comparata, vt idem valor ipsius q inueniatur, quaecunque multipla loco p et R accipiantur. Neque tamen ex his concludere licet, si determinatae sint q et p, R vagum quendam habere posse valorem: sed necessario debebit esse determinatus. Quo autem ille ipse valor ipsius R, qui est assumtus, prodeat, non vero eius quoddam multiplum, vis centripeta p ad hoc est vel remittenda vel intendenda. Quando autem vis centripetae in singulis locis quantitas ipsa datur, problema erit plus quam determinatum, si quidem celeritates quibusvis distantiis respondentes dentur: sed duntaxat earum ratio proposita esse debet. Ratio vero difficultatis in hoc consistit, quod inuenimus q ex aequatione $R=\int e^{-\int \frac{dx}{q} p dx}$ bis differentiata. Dif-

M.E.C.D. 2017

ferentiata enim aequatio latius patet plusque in se complectitur quam integralis

Scholion 3.

519. Ex solutione problematis sponte sequitur, quomodo, si data fuerit medii densitas in singulis locis seu quantitas q, inueniri oporteat vim centripetam p, reliquis iisdem, quibus ante, manentibus datis. Ex hac enim aequatione $l\frac{pdx}{dR} = \int\frac{dx}{q}$, deducetur $p = \frac{dR}{dx}e^{\int\frac{dx}{q}}$, qui valor est determinatus, quia $\int\frac{dx}{q}$ ita sumtum ponimus, vt euanescat, facto $x = 0$ (510).

PROPOSITIO 67.

Problema.

Tabula IV. Fig. 7.

520. *Resistente medio in duplicata celeritatum ratione, dataque eius densitate, seu exponente resistentiae in singulis locis: determinare vim centripetam, quae faciat, vt corpus, ex quacunque altitudine ad centrum C delabatur, perpetuo tamen eodem tempore eo perueniat.*

Solutio.

Descendat corpus ex puncto quocunque A sitque $AC = a$. Vocetur indeterminata $CP = x$ et ponantur altitudo celeritati in P debita $= v$, exponens resistentiae in $P = q$, et vis centripeta ibidem $= p$, quae est inuenienda. Habebitur igitur $v = e^{\int\frac{dx}{q}}$ (A – X) et tempus, quo spatium PC absoluitur $= \int$

M.E.C.D. 2017

$= \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q\sqrt{(A-X)}}}}$, (509). Vbi eſt $X = \int e^{\frac{-d\pi}{q}}$ pdx ita accepto, vt euanescat poſito $x = o$: et A oritur ex X poſito $x = a$. Totum igitur tempus per AC habebitur ſi in integrali ipſius $\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q\sqrt{(A-X)}}}}$ ponatur $x = a$ vel $X = A$. Expreſſio vero reſultans ita eſſe debebit comparata, vt in ea omnino non inſit a vel A: quod obtinetur, ſi $\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q\sqrt{(A-X)}}}}$ fuerit functio ipſarum a et x vel ipſarum A et X nullius dimenſionis. Quamobrem et differentialis huiusmodi ſit functio neceſſe eſt. Ponatur igitur $\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = \frac{dX}{P}$; habebimus pro differentiali temporis $\frac{dX}{P\sqrt{(A-X)}}$, in quo A et X dimenſionem obtinent dimidiam; P ergo, quo nulla adſit dimenſio, quoque dimidiam dimenſionem habere debebit. Sed in P non ineſſe poteſt a vel A, eius enim quantitas a ſolo puncto P pendere debet, non a puncto A. Hanc ob rem erit $P = \frac{\sqrt{X}}{b}$, et elementum temporis $= \frac{bdX}{\sqrt{(AX-XX)}}$, quod requiſitam habet proprietatem. Erit igitur $\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = \frac{bdX}{\sqrt{X}}$, et integratione peracta $2b\sqrt{X}$ $= \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}}$, quod integrale ita eſſe debet ſumtum, vt

M.E.C.D. 2017

euanescat facto $x=o$. Quia autem est $X=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}p\,dx$, habebitur $4b^2\int e^{-\int\frac{dx}{q}}p\,dx=(\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}})^2$, et hinc differentiando tandem $p=\frac{e^{\int\frac{dx}{2q}}}{2b^2}\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

521. Quia elementum temporis est $\frac{b\,dX}{\sqrt{(AX-XX)}}$ erit tempus, quo spatium PC absoluitur = arcui circuli, cuius sinus versus est X, existente diametro $=A$, ducto in $\frac{2b}{A}$. Et posita ratione peripheriae ad diametrum $\pi:1$, erit tempus totius descensus per $AC=b\pi$, quod est constans, neque ab a pendens.

Corollarium 2.

522. Quia est $\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}=2b\sqrt{X}$ et $e^{\int\frac{dx}{2q}}=\frac{dx\sqrt{X}}{b\,dx}$ erit $p=\frac{X\,dx}{b^2\,dX}$. Estque $X=\frac{1}{4b^2}(\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}})^2$.

Corollarium 3.

523. Sit medium resistens vniforme, et ideo $q=k$; erit $e^{\int\frac{dx}{2q}}=e^{\frac{x}{2k}}$ et $\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}=2k(1-e^{\frac{-x}{2k}})$. Ex quo

M.E.C.D. 2017

quo prodibit $p = \frac{k}{b^2}\left(e^{\frac{x}{2k}} - 1\right)$. Vis igitur centripeta in C erit $= 0$.

Corollarium 4.

524. Si q eſt conſtans et $= k$; erit $2bV\mathrm{X} = 2k\left(1 - e^{\frac{-x}{2k}}\right)$ et $\mathrm{X} = \frac{k^2}{b^2}\left(1 - e^{\frac{-x}{2k}}\right)^2$. Quia vero X abit in A poſito $x = a$, erit $\mathrm{A} = \frac{k^2}{b^2}\left(1 - e^{\frac{-a}{2k}}\right)^2$, atque $v = \frac{k^2}{b^2} e^{\frac{x}{k}}\left(\left(1 - e^{\frac{-a}{2k}}\right)^2 - \left(1 - e^{\frac{-x}{2k}}\right)^2\right)$.

Corollarium 5.

525. In infimo igitur loco C altitudo celeritati debita erit $= \mathrm{A} = \frac{k^2}{b^2}\left(1 - e^{\frac{-a}{2k}}\right)^2$.

Corollarium 6.

526. Maximam habebit corpus celeritatem, vbi eſt $v = pk$. Erit ergo $e^{\frac{-x}{2k}}\left(1 - e^{\frac{-x}{2k}}\right) = \left(1 - e^{\frac{-a}{2k}}\right)^2 - \left(1 - e^{\frac{-x}{2k}}\right)^2$. Ex quo reperitur $e^{\frac{-x}{2k}} = 2e^{\frac{-a}{2k}} - e^{\frac{-a}{k}}$, hincque $x = 2k\,l\left(2e^{\frac{k}{2k}} - 1\right)$.

Scholion.

527. Si q et k accipiantur negatiua inuenitur lex vis centripetae, quae efficit, vt omnes aſcenſus ex C facti abſoluantur aequalibus temporibus.

Hoc

M.E.C.D. 2017

Hoc enim semper locum habet, descensum in ascensum transmutari vi resistentiae negatiua facta. Quo igitur omnes ascensus fiant isochroni erit

$p = \frac{e^{-\int \frac{dx}{2q}}}{2b^2} \int e^{\int \frac{dx}{2q}} dx$. In casuque medii vniformis erit $p = \frac{k}{b^2}\left(1 - e^{\frac{-x}{2k}}\right)$.

PROPOSITIO 68.
Problema.

Tabula IV. Fig. 9.

528. *Si vis centripeta sit distantiis a centro* C *proportionalis, et medium vniforme resistat in simplici celeritatum ratione: oportet determinari motum corporis tam recto accedentis ad centrum* C, *quam recedentis ab eo.*

Solutio.

Sit distantia, in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis $= f$, et exponens resistentiae $= k$. Iam accedat corpus in recta AC ad centrum C et ponatur altitudo celeritati, quam C habebit debita $= c$. Hacque celeritate tum vltra C in recta CB recedat a C. Considerabimus primo ascensum, et ponamus $CP = x$ et celeritatis in P altitudinem debitam $= v$. His positis erit vis centripeta in $P = \frac{x}{f}$, et vis resistentiae $= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$; ex quibus oritur ista aequatio $dv = -\frac{x\,dx}{f} + \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Quo haec aequatio fiat homogenea ponatur $\sqrt{v} = u$ et $\sqrt{k} = h$; erit ergo $dv = 2u\,du$, et

M.E.C.D. 2017

et $2udu = -\frac{xdx}{f} + \frac{udx}{h}$. Fiat $u = rx$; erit $2r^2xdx + 2rx^2dr = -\frac{xdx}{f} + \frac{rxdx}{h}$, ex qua oritur $\frac{dx}{x} = \frac{2fhrdr}{fr-h-2fhr^2}$. Quae integrata cum debita adiecta conſtante, et reſtitutis v et k, abit in hanc $\frac{v}{c} - \frac{x\sqrt{v}}{2c\sqrt{k}} + \frac{x^2}{2fc} = \left(\frac{4\sqrt{fkv} - x\sqrt{f} + x\sqrt{(f-8k)}}{4\sqrt{fkv} - x\sqrt{f} - x\sqrt{(f-8k)}}\right)^{\sqrt{\frac{f}{f-8k}}}$. Si autem $8k > f$ aequatio differentialis ope circuli quadraturae debet conſtrui. Ponatur ſcilicet $h = \frac{1}{4\alpha}$ et $f = \frac{1}{2\mathfrak{C}}$, et habebitur iſta aequatio differentialis $o = \frac{dx}{x} + \frac{rdr}{r^2 - 2\alpha r + \mathfrak{C}} = \frac{dx}{x} + \frac{rdr - \alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \mathfrak{C}} + \frac{\alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \mathfrak{C}}$. Cuius integralis eſt $C = lV(u^2 - 2\alpha ux + \mathfrak{C}x^2) + \int \frac{\alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \mathfrak{C}}$. Eſt vero $\int \frac{\alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \mathfrak{C}} = \frac{\alpha}{\sqrt{(\mathfrak{C} - \alpha^2)}} \cdot am$, arcusque am tangens $at = \frac{r - \alpha}{\sqrt{(\mathfrak{C} - \alpha^2)}}$, exiſtente radio $ac = 1$. Poſito ergo $\frac{u}{x}$ loco r, erit $at = \frac{u - \alpha x}{x\sqrt{(\mathfrak{C} - \alpha^2)}}$. Ad conſtantem C determinandam ponatur $x = o$ et $u = \sqrt{c}$, quo facto loco $\frac{\alpha}{\sqrt{(\mathfrak{C} - \alpha^2)}} \cdot am$ habebitur $\frac{\alpha}{\sqrt{(\mathfrak{C} - \alpha^2)}} \cdot amb$. Erit ergo $lV c + \frac{\alpha}{\sqrt{(\mathfrak{C} - \alpha^2)}} \cdot amb = lV(u^2 - \alpha ux + \mathfrak{C}x^2) + \frac{\alpha}{\sqrt{(\mathfrak{C} - \alpha^2)}} \cdot am$. Vnde fit $bm = \frac{\sqrt{(\mathfrak{C} - \alpha^2)}}{\alpha} lV \frac{u^2 - 2\alpha ux + \mathfrak{C}x^2}{c}$, eſtque bm arcus cuius tangens bs eſt $= \frac{x\sqrt{(\mathfrak{C} - \alpha^2)}}{u - \alpha x}$. Pro receſſu a centro C ſi ponatur, vt ante $CQ = x$, et celeritas in $Q = \sqrt{v}$, retinentibus h, f, k, α, $\mathfrak{C}$, r et u eosdem quos ante valores, habebitur $o = \frac{dx}{x} + \frac{rdr}{r^2 + 2\alpha r + \mathfrak{C}}$. Ex qua obtinebitur $bm = -\frac{\sqrt{(\mathfrak{C} - \alpha^2)}}{\alpha} lV \frac{u^2 + 2\alpha ux + \mathfrak{C}x^2}{c}$, eſtque arcus bm tangens $bs = \frac{x\sqrt{(\mathfrak{C} - \alpha^2)}}{u + \alpha x}$. At ſi fuerit $\alpha^2 > \mathfrak{C}$ ſeu $f > 8k$ poterit integratio algebraice exhiberi, erit

Tabula IV. Fig. 10.

$$\frac{v}{c} + \frac{x\sqrt{v}}{2c\sqrt{k}} + \frac{x^2}{2fc} = \left(\frac{4\sqrt{fkv} + x\sqrt{f} - x\sqrt{(f-8k)}}{4\sqrt{fkv} + x\sqrt{f} + x\sqrt{(f-8k)}}\right)^{\sqrt{\frac{f}{f-8k}}}.$$

M.E.C.D. 2017

ſtat autem caſus quo $\alpha^2 = \mathfrak{C}$, ſeu $f = 8k$ qui ſeorſim pertractari debet. Inuenitur autem pro acceſſu haec aequatio $l\frac{4\sqrt{kv}-x}{4\sqrt{kc}} = \frac{x}{4\sqrt{kv}-x}$. Atque pro receſſu iſta $l\frac{4\sqrt{kv}+x}{4\sqrt{kc}} = \frac{-x}{4\sqrt{kv}+x}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

Tabula IV Fig. 9.

529. In caſu ergo quo $f = 8k$ ſemper pro acceſſu eſſe debet $4\sqrt{kv} > x$, alioquin $\frac{x}{4\sqrt{kv}-x}$ aequaretur quantitati imaginariae. Quare niſi $x = 0$, non poterit eſſe $v = 0$, atque ideo celeritas in C neceſſario debet eſſe $= 0$. Quamobrem ſi ea ponatur finita $\sqrt{c}$ initium deſcenſus erit imaginarium.

Corollarium 2.

530. Hoc autem caſu $f = 8k$ receſſus ex aequatione cognoscitur facto enim $v = 0$ inuenitur $l\frac{x}{4\sqrt{kc}} = -1$, hincque $x = BC = \frac{4\sqrt{kc}}{e}$ denotante e numerum cuius logarithmus eſt vnitas. Ergo diſtantia BC eſt proportionalis celeritati in C.

Corollarium 3.

531. Quia igitur, quando reſiſtentia tanta eſt, vt ſit $8k = f$, corpus in acceſſu ad C omnem amittit celeritatem; multo maiore ratione ſi $8k < f$, ſeu reſiſtentia adhuc maior fuerit, corpus ad C accedens omnem celeritatem amittet.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

532. Quare si vel $8k = f$ vel $8k < f$, corpus post accessum ad C in C perpetuo quiescet, atque his casibus nullus recessus sequi poterit. At si resistentia fuerit minor, seu $8k > f$, tum corpus accedens in C finitam celeritatem habere poterit, qua deinde a C recedet, atque motu oscillatorio mouebitur.

Corollarium 5.

533. Sin autem $8k > f$ pro accessu haec habetur aequatio; arcus cuius tangens est $\frac{x\sqrt{(cc-\alpha^2)}}{u+\alpha x} = \frac{\sqrt{(cc-\alpha^2)}}{\alpha}$ $l\ V\ \frac{u^2-2\alpha ux+cx^2}{c}$. Vnde initium accessus A inuenitur ponendo $u = 0$, prodit autem arcus cuius tangens est $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}}\ l\ \frac{\sqrt{2fc}}{x}$. Pro recessu vero similiter inuenitur arcus cuius tangens est $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}}\ l\ \frac{\sqrt{2fc}}{x}$.

Scholion 1.

534. Hinc sequi videtur distantiam BC semper aequalem esse distantiae AC, quia hae duae aequationes inter se congruunt. At cum, si $8k < f$ nullus omnino detur recessus, fieri non potest, vt, si $8k$ aliquantulum tantum maius fuerit quam f, spatium recessus aequale fiat spatio accessus. Difficultas haec autem tollitur, si attendamus innumerabiles arcus eidem tangenti $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}}$ respondere, quo-

M.E.C.D. 2017

rum alius pro acceſſu alius pro receſſu accipi debet. Ponatur $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}} = \tau$, et minimus arcus tangenti τ reſpondens ſit γ; et ſemiperipheria circuli π, erit τ tangens omnium horum arcuum γ, $\pi+\gamma$, $2\pi+\gamma$, $3\pi+\gamma$ etc. nec non horum $-\pi+\gamma$, $-2\pi+\gamma$ etc. Pro receſſu nunc BC ſumi debet arcus γ, eritque $\frac{\gamma}{\tau} = l\frac{\sqrt{2fc}}{BC}$, atque $BC = e^{\frac{-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Atque pro acceſſu ſumi debet arcus $-\pi+\gamma$ fitque $AC = e^{\frac{\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Reliqui arcus dant puncta, in quibus corpus circa C oscillando ſucceſſiue habet celeritatem $= o$. Cum igitur in prima oscillatione ſit ſpatium acceſſus $= e^{\frac{\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$; erit ſpatium acceſſus ſecundae oscillationis aequale ſpatio receſſus in prima oscillatione atque ideo $= e^{\frac{-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$.. In tertia oscillatione erit ſpatium acceſſus $= e^{\frac{-\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Atque in oscillatione, quae numero n indicatur eſt ſpatium acceſſus $e^{\frac{-(n-2)\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Hacque ratione cuiuscunque oscillationis tam ſpatium acceſſus, quam ſpatium receſſus poterit determinari.

Corollarium 6.

535. Quando igitur corpus oscillationes abſoluit circa centrum C, conſtituent ſpatia acceſſus progreſſionem geometricam, cuius denominator eſt

M.E.C.D. 2017

est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$. Similemque progressionem constituunt spatia recessus, atque etiam integra spatia singulis oscillationibus percursa.

Scholion 3.

536. Quia aequatio differentialis $2udu = \frac{-xdx}{f} + \frac{udx}{b}$ pro descensu, et aequatio $2udu = \frac{-xdx}{f} - \frac{udx}{b}$ pro ascensu est homogenea: erit in vtroque casu u = functioni ipsarum x et a vnius dimensionis, denotante a maximam a centro C elongationem AC aut BC. Quamobrem in temporis expressione $\int \frac{dx}{u}$ nulla inerit dimensio ipsarum a et x, et ideo omnia tempora tam ascensuum, quam descensuum erunt inter se aequalia. Integrale enim ipsius $\frac{dx}{u}$, erit functio ipsarum a et x nullius dimensionis, haecque expressio posito $x = a$ erit aequalis quantitati constanti. Simili modo erunt omnium descensuum tempora vsque ad punctum maximae celeritatis inter se aequalia. Distantia enim puncti, in quo corpus maximam habet celeritatem, proportionalis est ipsi a seu maximae elongationi a centro C (528).

PROPOSITIO 69.
Theorema.

537. *Si fuerit vis centripeta vt potestas distantiae a centro* C, *cuius exponens est* n; *et medi-* Tabula IV. Fig. 7.

M.E.C.D. 2017

um reſiſtat in ratione 2m *multiplicata celeritatum; exponens vero reſiſtentiae ſit proportionalis diſtantiarum a centro* C *poteſtati exponentis* $\frac{mn+m-n}{m}$: *Erunt plurium deſcenſuum vel aſcenſuum tempora in ſpatiorum totorum deſcriptorum ratione* $\frac{1-n}{2}$ *multiplicata.*

Demonſtratio.

Sit AC ſpatium totum vel aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum $=a$, eiusque portio quaecunque $CP=x$, et celeritas corporis in $P=v$. Ponatur diſtantia f, in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis. His poſitis erit vis centripeta in $P=\frac{x^n}{f^n}$, et ſumto pro reſiſtentiae exponente $\frac{1}{m}$ erit $\lambda^{\frac{1}{m}} x^{\frac{mn+m-n}{m}}$ vis reſiſtentiae $\frac{v^m}{\lambda x^{mn+m-n}}$. Hinc pro deſcenſu habebitur iſta aequatio $dv=\frac{-x^n dx}{f^n}+\frac{v^m dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$ pro aſcenſu vero $dv=\frac{-x^n dx}{f^n}-\frac{v^m dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$. Quae aequationes inter ſe prorſus conueniunt niſi quod λ in altera negatiuum habeat valorem. Ponatur nunc $v=u^{n+1}$, et habebitur $(n+1)u^n du=\frac{x^n dx}{f^u}+\frac{u^{mn+m} dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$, in qua aequatione u et x eundem vbique dimenſionum numerum conſtituunt. Haec vero aequatio ita debet integrari, vt, facto $x=a$, euanescat u. Quam ob rem aequatio integralis ita erit comparata vt a, x et u vbi-

M.E.C.D. 2017

vbique eundem conſtituant dimenſionum numerum. Ex ea igitur reperietur u aequalis functioni ipſarum a et x vnius dimenſionis. Conſequenter aequabitur v functioni ipſarum a et x dimenſionum $n+1$. Quocirca tempus, quo ſpatium PC percurritur, nempe $\int \frac{dx}{\sqrt{v}}$ erit functio ipſarum a et x, quae habebit $\frac{1-n}{2}$ dimenſiones. Facto deinde $x=a$, quo totum tempus per AC habeatur, prodibit functio ipſius tantum a dimenſionum $\frac{1-n}{2}$. Totum ergo tempus vel aſcenſus vel deſcenſus erit $= A a^{\frac{1-n}{2}}$, vbi A eſt quantitas conſtans ex literis f et λ, quae immutatae manent, vtcunque a varietur. Perſpicuum igitur eſt omnes tam aſcenſus, quam deſcenſus eſſe inter ſe in totorum ſpatiorum deſcriptorum ratione $\frac{1-n}{2}$ multiplicata. Q. E. D.

Corollarium 1.

538. Si medium reſiſtens ſit vniforme, ideoque $mn+m-n=0$, erit $n=\frac{m}{1-m}$, ſeu vis centripeta vt diſtantia eleuata ad $\frac{m}{1-m}$. Tempora vero vel aſcenſuum vel deſcenſuum erunt in ſpatiorum percurſorum ratione $\frac{1-2m}{2-2m}$ multiplicata.

Corollarium 2.

539. Si fuerit $n=1$, ſeu vis centripeta diſtantiis a centro C proportionalis, erunt omnia tempora tam aſcenſuum quam deſcenſuum inter ſe aequa-

M.E.C.D. 2017

aequalia. Hoc vero casu cum resistentiae lex sit celeritatum potestas exponentis $2m$, erit resistentiae exponens vt distantia a centro C eleuata ad $\frac{2m-1}{m}$.

Corollarium 3.

540. Ex hoc patet, quod ex praecedente propositione inuenimus (536), si resistentia sit celeritatibus proportionalis, et hanc ob rem $m=\frac{1}{2}$, et medium vniforme, omnia tempora tam ascensuum quam descensuum fore inter se aequalia.

Corollarium 4.

541. Si vis centripeta fuerit constans seu $n=0$, erunt tempora vel ascensuum vel descensuum in subduplicata spatiorum percursorum ratione. Exponens vero resistentiae sit distantiis a centro C proportionalis. Eundem hunc casum iam exposuimus supra (495).

Scholion.

542. Hisce concludimus hoc Caput de motu puncti rectilineo in medio resistente; atque iuxta diuisionem factam progredimur ad motus curuilineos in vacuo corporum a quibuscunque potentiis absolutis sollicitatorum.

CA-

M.E.C.D. 2017

CAPUT QUINTUM
DE
MOTU PUNCTI CURVILINEO LIBERO A QUIBUSCUNQUE POTENTIIS ABSOLUTIS SOLLICITATI.

DEFINITIO 21.

543.

Vis tangentialis est potentia corpus, quod lineam curuam AMB *describit, sollicitans, cuius directio incidit in tangentem* TMt *puncti* M, *in quo corpus, cum sollicitatur, est versatur.* Tabula IV. Fig. 11.

Corollarium 1.

544. Vis igitur tangentialis in corpus, dum elementum *Mm* percurrit, alium effectum non exerit, nisi quod motum eius vel acceleret vel retardet, prout scilicet corpus trahit vel secundum directionem MT vel *Mt*.

Corollarium 2.

545. Cum igitur corpus in linea curua mouetur; vis tangentialis directionem suam perpetuo mutat, et secundum aliam plagam effectum suum exerit.

Scholion.

546. Vis quidem tangentialis per se in rerum natura vix vnquam oriri potest; nihilo vero minus

M.E.C.D. 2017

eius vſus latiſſime patet. Quamcunque enim potentia ſollicitans habeat directionem, ea ſemper in duas alias poteſt reſolui, quarum alterius directio in tangente ſit ſita.

DEFINITIO 22.

547. *Vis normalis eſt potentia corpus lineam curuam* AMB *deſcribens ſollicitans, cuius directio* MR *eſt normalis in curuae elementum* Mm *ſeu tangentem* MT.

Corollarium 1.

548. Vis igitur normalis corporis celeritatem neque auget neque minuit, quia eius directio MR neque in ſequentia neque in antecedentia vergit (164).

Corollarium 2.

549. In hoc vero eius effectus conſiſtit, vt in ſequentibus oſtendetur, vt corporis tantum directionem immutet, et efficiat, vt corpus, quod per ſe in recta eſſet progreſſurum, in linea curua promoueatur (165).

Scholion 1.

550. Si corpus in eodem plano moueatur, in eoque etiam poſitae ſint potentiarum ſollicitantium directiones; ſingulae potentiae reſolui poſſunt in binas, quarum altera ſit normalis, altera tangentialis, quemadmodum ex principiis ſtaticis apparet. Quare cum virium tangentialis et normalis effectus in corpus determinauerimus, ſimul quoque cu-

M.E.C.D. 2017

cuiusuis potentiae obliquae effectus innotescet. Vocamus autem potentiam seu vim obliquam omnes potentias corpus sollicitantes, quae neque normales sint neque tangentiales.

Scholion 2.

551. Hinc oritur primaria huius capitis diuisio. Primo enim eos motus considerabimus, quorum semitae sunt in eodem plano, atque simul omnes potentiae sollicitantes in eodem ipso plano constitutae. Deinceps autem de iis motibus explicabimus, quorum semitae non sunt positae in eodem plano; ad quos cognoscendos singulas potentias in binas resoluere non sufficit, sed eas in ternas resolui oportet, propter tres spatii, in quo corpus mouetur, dimensiones.

PROPOSITIO 70.

Problema.

552. *Si corpus, dum elementum* Mm *percurrit, sollicitatur a duabus potentiis altera normali altera tangentiali: determinare vtriusque effectum in motu corporis alterando.* Tabula IV. Fig. II.

Solutio.

Sit corporis elementum M*m* describentis celeritas debita altitudini v, et vis normalis secundum MR trahens $=N$, et vis tangentialis secundum MT trahens $=T$, ponaturque elem. M$m=ds$ et radius osculi in M$=r$. Ad effectum vis N determinandum, quia eius directio est normalis in M*m*, vte-

M.E.C.D. 2017

mur formula §. 165, quae erat $npr = Ac^2$. Haec vero transmutata est in hanc $pr = 2Av$ (209). Quod autem hic nobis est N, id in citatis locis erat $\frac{p}{A}$, intelligimus enim per N non impressionem solum potentiae N in corpus, sed ipsam vim acceleratricem; seu potentiam absolute consideratam diuisam per massam corporis (218). Quare loco $\frac{p}{A}$ hic substitui debet N, quo facto habebitur $Nr = 2v$. *Quod erat alterum.* Deinde ad effectum vis tangentialis T determinandum adhibeo canonem §. 166, hunc $Acdc = npds$, seu huius loco mutatum $Adv = pds$ (209). Atque ob allegatas rationes hic loco $\frac{p}{A}$ substituo T, eritque $dv = Tds$. Q. E. *Alterum.*

Corollarium I.

553. Quia vis grauitatis ponitur 1, erit vis normalis ad vim grauitatis vt altitudo celeritati debita ad dimidium radii osculi curuae; quae analogia sequitur ex aequatione $Nr = 2v$.

Corollarium 2.

554. Ex data igitur vi normali et curua quam corpus describit statim innotescit corporis celeritas. Nam expressa celeritate per Vv erit $Vv = V\frac{Nr}{2}$.

Corollarium 3.

555. Incrementum vero altitudinis celeritatem exponentis semper aequale est facto ex vi tan-

M.E.C.D. 2017

tangentiali et ſpatiolo a corpore percurſo. Seu hoc elementum ipſius v eſt ad ſpatiolum deſcriptum ds vt vis tangentialis ad vim grauitatis.

PROPOSITIO 71.

Problema.

556. *Si corpus, dum elementum* Mm *percurrit, ſollicitetur a potentia quacunque obliqua airectionis* MC; *oportet determinari effectum huius potentiae in corporis motu alterando.* Tabula IV. Fig. II.

Solutio.

Sit potentia haec obliqua ad corporis grauitatem, ſi in ſuperficie terrae eſſet poſitum vt P ad 1, elementum $Mm = ds$, et celeritas in M debita altitudini v. Quia vero obliquitas potentiae MC data eſſe ponitur, angulus CMT datus erit, et propterea triangula CMT, Mmr, quae oriuntur ex C in MT et ex m in MC perpendiculis demiſſis, erunt ſpecie data. Ponamus igitur $Mr = dy$ et $mr = dx$, erit $ds^2 = dx^2 + dy^2$; et ratio inter ds et dx et dy data erit. Conferantur iam cum his, quae ſupra (161, 163) nec non poſtea (203) tradita ſunt. Ea enim prorſus ſimilia ſunt hisce, de quibus hic quaerimus: hoc tantum differunt, quod hic nobis ſit P:1, quod ibi erat p:A. Hanc ob rem habebimus $dv = P dy$, et, poſito radio osculi MR in $M = r$, haec aequatio $Prdx = 2vds$ (208), ſcripto P loco $\frac{p}{A}$. Harum aequationum illa $dv = P dy$ definit celeritatis incrementum, dum corpus elementum Mm per-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

percurrit. Altera vero $Prdx = 2vds$ seu $\frac{2vds}{Pdx}$ exhibet lineae a corpore descriptae curuaturam in M. Innotescit ergo totus potentiae obliquae effectus in corpus motum. Q. E. I.

Corollarium 1.

Tabula IV. Fig. 12.

557. Si potentia obliqua constituit angulum obtusum cum elemento Mm, omnia manent vt ante, nisi nisi quod lineola $mr = dy$ accipi debeat negatiua. Erit ergo $dv = -Pdy$, et altera aequatio $Prdx = 2vds$ vt ante.

Corollarium 2.

558. Si ergo potentiae directio MC intra normalem MR et elementum Mm cadit, vt in fig. 11. motus corporis acceleratur. At si CM extra vtramque cadit, vt in fig. 13. motus retardatur.

Corollarium 3.

Fig. 11. 559. Si directio potentiae MC incidit in tangentem MT, euanescit angulus mMr, et fit $Mr = Mm$ seu $dx = o$ et $dy = ds$. Habebitur itaque $dv = Pds$, et $r = \infty$, id quod indicat corporis directionem ab hac potentia tangentiali non affici.

Corollarium 4.

Fig. 12. 560. Si directio potentiae MC incidit in alteram partem Mt, quo casu fit $Mr = dx = o$, et $dy = ds$, erit $dv = -Pds$ et $r = \infty$ vt ante. Vis igitur tangentialis celeritatem corporis tantum afficit, directionem vero prorsus non immutat (544).

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

561. Incidat potentiae directio MC in normalem MR, quo effectum vis normalis cognoscamus. Hoc ergo casu erit $dy=o$ et $dx=ds$. Et consequenter prodit $dv=o$, et $Pr=2v$. Vis ergo normalis celeritatem non afficit, sed tantum motus directionem (548).

Scholion 1.

562. Hinc igitur tam vis normalis, quam vis tangentialis effectus in corpus motum cognoscuntur. Quamobrem cum omnes potentiae, quotquot corpus sollicitant, modo sint in eodem plano positae cum motus directione, in binas alteram normalem alteram tangentialem possint resolui, etiam quarumcunque potentiarum effectus in corpus motum cognoscitur.

Scholion 2.

563. Hanc ergo priorem partem de motu in eodem plano facto ita subdiuidi maxime conuenit, vt primo directiones potentiae sollicitantis sint inter se parallelae, quemadmodum in nostris regionibus vis grauitatis directiones sibi parallelae obseruantur. Deinde contemplabimur casus, quibus potentiae directiones omnes in vno puncto conuergunt, quo etiam corpora perpetuo attrahuntur, et qui est casus virium centripetarum, qua de re tam egregiae inuentiones a *Neutono* sunt factae in *Princ. Phil. Nat. Parte* I. Tertio vero potentias quas-

M.E.C.D. 2017

quascunque corpus ſollicitantes inducemus et inueſtigabimus, qui motus ſit perpetuo ſecuturus. Ita autem in his ſingulis verſabimur, vt primo quaeſtiones directas proponamus, tum vero etiam quaeſtiones quasque inuerſas, vt hactenus fecimus, ſimus reſoluturi. Perpetuo denique, quantum licet, a caſibus ſimplicioribus ad magis compoſitos et difficiliores progrediemur.

PROPOSITIO 72.

Problema.

Tabula IV. Fig. 13.

564. *Si fuerit potentia conſtans, eiusque directio vbique normalis ad rectam* AB; *atque ex* A *data celeritate ſecundum directionem* AH *proiiciatur corpus: determinari oportet curuam* AMDB, *quam corpus deſcribet, motumque corporis in hac curua.*

Solutio.

Vocetur potentia ſollicitans g, et ſit celeritas, qua corpus in A proiicitur debita altitudini c, atque coſinus anguli HAB$=\lambda$, poſito ſinu toto $=1$. Iam percurrente corpore elementum $Mm=ds$, ſit celeritas in M debita altitudini v, et AP$=x$, atque PM$=y$, itemque radius osculi in M$=r$. Propterea erit $Mr=dx$, et $mr=dy$, ex quo apparet hunc caſum referri ad fig. 12, quo corporis motus retardabatur. Habebimus ergo $dv=-gdy$ et $grdx=2vds$ (557). Ex harum vero aequationum illa oritur $v=C-gy$, in qua conſtans C ex hoc debet determinari, quod poſito $y=0$, fieri debeat $v=c$. Habetur

M.E.C.D. 2017

betur ergo $v=c-gy$. In altera nunc aequatione loco v ſubſtituatur hic valor inuentus, et prodibit $\frac{grdx}{2ds}=c-gy$. Eſt vero $r=\frac{ds^3}{-dxddy}$ poſito dx conſtante, quo ſubſtituto erit $\frac{-gds^2}{2ddy}=c-gy$, ſeu $2cddy=2gyddy-gdx^2-gdy^2$ poſito dx^2+dy^2 loco ds^2. Huius aequationis integralis reperitur $\frac{dx}{ds}=\sqrt{\frac{C}{c-gy}}$. Poſito autem $y=0$, deſignat $\frac{dx}{ds}$ coſinum anguli HAB, qui eſt λ, erit ergo $\lambda^2=\frac{C}{c}$ et $C=\lambda^2 c$. Habebimus igitur $\frac{dx}{ds}=\lambda\sqrt{\frac{c}{c-gy}}$ et hinc $\frac{\lambda dy\sqrt{c}}{\sqrt{(c(1-\lambda^2)-gy)}}=dx$. Cuius integralis eſt $C-2\lambda\sqrt{(c(1-\lambda^2)-gy)}=\frac{x}{\sqrt{c}}=2\lambda\sqrt{c}(1-\lambda^2)-2\lambda\sqrt{(c(1-\lambda^2)-gy)}$, ita determinata conſtante c vt euanescat y poſito $x=0$. Ponatur breuitatis gratia ſinus anguli HAB ſeu $\sqrt{(1-\lambda^2)}=\mu$, erit $gx=2\lambda\mu c-2\lambda\sqrt{(\mu^2c^2-gcy)}$; atque hinc $y=\frac{\mu x}{\lambda}-\frac{gx^2}{4\lambda^2 c}$. Erit ergo etiam $v=c-\frac{\mu gx}{\lambda}+\frac{g^2x^2}{4\lambda^2c}$, et $ds^2=dx^2(1+\frac{\mu^2}{\lambda^2}-\frac{\mu gx}{\lambda^3 c}+\frac{g^2x^2}{4\lambda^4c^4})=\frac{dx^2}{\lambda^2}(1-\frac{\mu gx}{\lambda c}+\frac{g^2x^2}{4\lambda^2c^2})$. Conſequenter erit $\frac{ds^2}{v}=\frac{dx^2}{\lambda^2 c}$ et $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}=\frac{x}{\lambda\sqrt{c}}=$ tempori, quo arcus AM percurritur. Q. E. I.

Corollarium 1.

565. Recidet ergo corpus in puncto B in lineam horizontalem AB ſumta $AB=\frac{4\lambda\mu c}{g}$. Tempus vero, quo corpus ſupra AB verſatur et curuam ADB abſoluit, eſt $=\frac{4\mu\sqrt{c}}{g}$.

Corollarium 2.

566. Denotat autem $2\lambda\mu$ ſinum anguli, qui eſt duplus anguli HAB. Quare, ſi huius dupli an-

M.E.C.D. 2017

guli sinus vocetur $\varkappa$, erit $AB = \frac{2\varkappa c}{g}$. Ex quo apparet distantiam AB fore maximam, si fuerit $\varkappa = 1$, ideoque angulus HAB semirectus, si quidem corpus eadem celeritate $\sqrt{c}$ proiiciatur.

Corollarium 3.

567. Intelligitur etiam motum corporis horizontalem esse aequabilem. Tempora enim quibus quilibet arcus describitur, sunt respondentibus abscissis in recta AB proportionalia.

Corollarium 4.

568. Si corpus perpetuo eadem celeritate $\sqrt{c}$ proiiciatur, sed sub diuersis angulis cum AB, erunt tempora, quibus supra AB versabitur, inter se vt sinus angulorum HAB (565).

Corollarium 5.

569. Maxima altitudo DE ad quam corpus pertinget erit applicata in puncto E, sumto $AE = \frac{2\lambda\mu c}{g}$. Ex quo apparet esse AE subduplam ipsius AB. Ipsa vero maxima altitudo DE erit $= \frac{\mu^2 c}{g}$, quae proinde quadrato sinus anguli HAB est proportionalis.

Corollarium 6.

570. Ex aequatione $y = \frac{\mu x}{\lambda} - \frac{g x^2}{4\lambda^2 c}$ perspicitur curuam ADB esse parabolam, cuius axis sit recta DE, et parameter $= \frac{AE^2}{DE} = \frac{4\lambda^2 c}{g}$. Parameter ergo proportionalis est quadrato cosinus anguli HAB.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 7.

571. Huius ergo parabolae vertex erit punctum D, et distantia DF foci F a vertice D est $= \frac{\lambda^2 c}{g}$. Quare si ducatur recta MF erit haec MF$=$DQ$+$DF ex natura parabolae.

Corollarium 8.

572. Porro autem erit MF$=$DE$-$MP$+$DF $= \frac{c}{g} - y = \frac{c - gy}{g}$. Quia vero est $v = c - gy$, erit altitudo debita celeritati in M$=g$. MF. Patet ergo etiam fore AF$= \frac{c}{g}$.

Corollarium 9.

573. Perspicuum igitur est corpus hanc parabolam describens in loco quouis M tantam habere celeritatem, quantam corpus idem ab eadem potentia vniformi g sollicitatum recta descendens acquirere potest ex altitudine, quae aequalis sit distantiae puncti M a foco F parabolae.

Corollarium 10.

574. Cosinus anguli FAE est $= \frac{AE}{AF} = 2\lambda\mu = \varkappa$. Ex quo manifestum est angulum FAE esse complementum dupli anguli HAE ad rectum, seu potius excessum huius dupli anguli super angulum rectum.

Corollarium 11.

575. Quia angulus AFD est deinceps positus anguli AFE, hicque complementum anguli FAE, erit angulus AFD duplus anguli HAB.

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

576. Facile ergo ex his deducitur conſtructio parabolae, quam corpus data celeritate et in data directione proiectum deſcribet. Ducta enim AG normali ad AB capiatur angulus GAF= duplo angulo HAE, et in hac directione ſumatur AF aequalis altitudini, ex qua idem corpus recta descendens acquirit celeritatem aequalem ei, qua ex A proiicitur, quo facto erit punctum F focus parabolae quaeſitae (573, 575). Normalis porro DE per E in rectam AB ducta erit axis huius parabolae, atque vertex D reperitur, ſumendo $DF=\frac{AF-FE}{2}$. Cum igitur parameter aequalis ſit 4DF, in promtu erit parabolae deſcriptio.

Scholion 2.

577. Si eſt $g=1$, habemus caſum grauitatis terreſtris. Quocirca, ſi nullus adeſſet aer, qui ob reſiſtentiam corpora mota impediret, omnia corpora proiecta mouerentur in parabolis. Hanc veritatem primus elicuit *Galilaeus*, et poſt eum omnes ſcriptores mechanici demonſtrauere. Plerique quidem multo breuiore modo et ſine differentio - differentialibus ad eam peruenerunt, ſed nos hic maluimus vti methodo vniuerſali, quae latiſſime pateret, quam nimis particulari, quae ad hunc ſolum caſum eſſet accommodata.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 73.

Problema.

578. *Si corpus in* A *data celeritate et in data directione proiectum perpetuo attrahatur ad rectam* AB *in ratione quarumcunque functionum distantiarum ab hac recta; determinare curuam* ADB, *quam corpus ita sollicitatum describet et motum totum in hac curua.* Tabula V Fig. 1.

Solutio.

Sit celeritas in A $=Vc$ et sinus anguli HAB $=\mu$, posito sinu toto $=1$, et cosinus $=\lambda$. Ponatur celeritas corporis in M debita altitudini v, et elementum $Mm=ds$, itemque abscissa AP $=x$, applicata PM $=y$ et radius osculi MR $=r$. Dum autem corpus elementum Mm percurrit, trahitur interea a potentia data, quae sit $=$P functioni cuidam ipsius y, in directione MP. His positis erit $dv=-Pdy$, et $Prdx=2vds$ (557). Sit autem $\int Pdy=Y$, atque Y talis functio ipsius y, quae fiat $=0$ posito $y=0$. Hanc ob rem erit $v=c-Y$. Deinde ex priore aequatione valor ipsius P i. e. $\frac{-dv}{dy}$ substituatur in altera $Prdx=2vds$, et habebitur $\frac{-dv}{v}=\frac{2dyds}{rdx}$. Est vero posito ds constante $r=\frac{dsdy}{ddx}$, vnde fit $\frac{-dv}{v}=\frac{2ddx}{dx}$, et integrando $lC-lv=l\frac{dx^2}{ds^2}$. Constans C determinabitur ex hoc, quod in puncto A, in quo fit $v=c$, fiat $\frac{dx}{ds}=\lambda$. Quocirca erit $lC=lc+2l\lambda$, porroque sumendis numeris $\lambda^2 cds^2=vdx^2$. Ex hac aequatio-

M.E.C.D. 2017

ne ſtatim habetur elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{\lambda\sqrt{c}}$, et hinc tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$. Pro ipſa autem curua AMDB habebitur aequatio ex duabus aequationibus inuentis $v = c - Y$ et $\lambda^2 c ds^2 = v dx^2$ eliminando v, orietur enim $\lambda^2 c ds^2 = c dx^2 - Y dx^2 = \lambda^2 c dx^2 + \lambda^2 c dy^2$. Sed quia $1 - \lambda^2 = \mu^2$, prodibit $dx = \frac{\lambda dy \sqrt{c}}{\sqrt{(\mu^2 c - Y)}}$, in qua aequatione, cum ſint indeterminatae x et y a ſe inuicem ſeparatae, conſtrui poterit curua quaeſita ADB. Q. E. I.

Corollarium 1.

579. Tempora igitur, quibus arcus quicunque AM deſcribuntur, ſunt, vt abſciſſae reſpondentes AP. Eſt enim tempus per $AM = \frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$.

Scholion 1.

580. Motus corporis in curua AM in duos alios cogitatione poteſt reſolui, quorum alter fiat ſecundum parallelas rectae AB, alter ſecundum perpendiculares in hanc AB. Illo motu corpus progreditur ſecundum rectam AB, iſto vero vel ascendit vel descendit reſpectu huius rectae AB. Iam vero perſpicuum eſt a potentia, cuius directio perpetuo eſt in perpendiculis ad AB, motum progreſſiuum horizontalem non immutari, et hanc ob rem hic motus perpetuo eſſe debebit aequabilis, et ea celeritate factus, quae oritur ex ſimili motus reſolutione initialis. Cum vero motus initialis directio ſit recta AH, erit eius celeritas $\sqrt{c}$ ad celeritatem progreſſiuam ſecundum AB vt ſinus totus 1 ad coſinum angu-

M.E.C.D. 2017

guli HAB, qui eſt λ. Celeritas ergo progreſſiua ſecundum AB erit $\lambda\sqrt{c}$, ex qua tempus, quo motus horizontalis perficitur per ſpatium $AP=x$, prouenit $=\frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$ vt inuenimus.

Corollarium 2.

581. Si corpus celeritate $\sqrt{c}$ ex A perpendiculariter ascendat in AC, et ſumatur $AL=PM=y$, erit celeritas in L aequalis celeritati in M nempe $=\sqrt{v}$. Eſt enim $dv=-Pdy$, atque $v=c-Y$, quemadmodum pro puncto M inuenimus.

Corollarium 3.

582. Si fuerit AC tota altitudo, ad quam corpus ex A celeritate $\sqrt{c}$ ſurſum proiectum pertingere poteſt; erit CL altitudo, ex quo corpus cadendo eandem acquirit celeritatem quam habet in M.

Corollarium 4.

583. Maxima altitudo DE reperitur, faciendo $dy=0$, quo caſu erit $Y=\mu^2 c$, ex qua aequatione valor ipſius y erutus dabit altitudinem DE, et celeritas in P tanta erit, quantam corpus ex altitudine CI delapſum acquirit.

Corollarium 5.

584. Inuenimus autem quoque $v=\frac{\lambda^2 c ds^2}{dx^2}$. Quare cum in puncto D ſit $dx=ds$ erit celeritas in $D=\lambda\sqrt{c}$, quae eſt aequalis ipſi celeritati horizontali, qua corpus ſecundum AB progreditur.

Scho-

BIBLIOTECA
DEL
[illegible]

M.E.C.D. 2017

Scholion 2.

585. Amplitudo quidem AB ex aequatione quia non potest integrari, non apparet. Nihilo tamen minus perspicuum est, partes AE et EB oportere esse aequales, et ramum DB similem et aequalem ipsi arcui DA. Namque postquam corpus in D peruenit, simili modo rursus accelerabitur, quo ante per AD erat retardatum; quia potentia in iisdem ab AB distantiis est eadem, hocque modo motus iterum perfecte restituitur.

Scholion 3.

586. Facile hinc etiam problema reciprocum, quo ex data curua ADB et celeritate corporis in A, quaeritur potentiarum lex, quae faciat vt corpus in hac curua moueatur, resolui poterit. Ex aequatione enim $dx = \frac{\lambda dy\sqrt{c}}{\sqrt{(\mu^2 c - Y)}}$, habetur $Y = \mu^2 c - \frac{\lambda^2 c dy^2}{dx^2}$, atque $dY = Pdy = \frac{-2\lambda^2 c dy ddy}{dx^2}$, posito dx constante. Quia est vero $r = \frac{ds^3}{-dx ddy}$ eodem dx posito constante, erit $-ddy = \frac{ds^2}{rdx}$. Hoc substituto habebitur $P = \frac{2\lambda^2 c ds^3}{rdx^3} =$ potentiae sollicitanti corpus in M secundum directionem MP.

PROPOSITIO 74.

Problema.

587. *Trahatur corpus in* A *proiectum vbique ad virium centrum* C *a vi centripeta quacunque; oporteatque determinari naturam curuae* AM, *in qua corpus mouebitur, et motum corporis in hac curua.*

Tabula V. Fig. 2.

So-

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Ponatur vis centripeta corpus in M ad C sollicitans $=P$ et celeritas corporis M debita sit altitudini v. Vocentur deinde distantia CM, y; elementum Mn, ds, et perpendiculum CT in tangentem curuae MT, p, necnon elementum Mr, dx, et radius osculi MR, r. Erit ergo ob triangula similia Mmr et CMT, $ds\sqrt{(y^2-p^2)}=ydy$, et $dx\sqrt{(y^2-p^2)}=pdy$. Atque radius osculi r reperitur $=\frac{ydy}{dp}$. His positis habebimus $dv=-Pdy$ et $Prdx=2vds$ (557). His aequationibus coniunctis eliminato P erit $rdvdx=-2vdsdy$ seu $\frac{dv}{v}=\frac{-2dsdy}{rdx}$. Substituantur $\frac{ydy}{dp}$ loco r, et $\frac{y}{p}$ loco $\frac{ds}{dx}$; prodibitque $\frac{dv}{v}=\frac{-2dp}{p}$. Quae integrata dat $v=\frac{C}{p^2}$. Constans haec C definietur ex data celeritate initiali in A, quae sit debita altitudini c, et directione proiectionis, quam ita definiemus vt, posita distantia $CA=a$, perpendiculum CD in tangentem AD sit $=h$. Propterea erit $C=ch^2$ et $v=\frac{ch^2}{p^2}$. Hinc erit $\frac{ds}{\sqrt{v}}=\frac{pds}{h\sqrt{c}}=$ elemento temporis per Mm. Consequenter ob $pds=2MCm$, erit tempus, quo arcus AM percurritur $=\frac{2.ACM}{h\sqrt{c}}$. Ipsa curua vero determinabitur substituendo $\frac{ch^2}{p^2}$ loco v in aequatione $Prdx=2vds$, quo facto prodibit $Pp^2rdx=2ch^2ds$. Haec aequatio loco r et $\frac{ds}{dx}$ substitutis valoribus $\frac{ydy}{dp}$ et $\frac{y}{p}$, transmutabitur in hanc $Pdy=\frac{2ch^2dp}{p^3}$. Quae aequatio, quaecunque P sit functio ipsius y, ob indeterminatas separatas poterit construi. Q. E. I.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

588. Quia tempus, quo arcus AM percurritur, est $\frac{2 \cdot ACm}{b\sqrt{c}}$, erunt tempora, quibus arcus quicunque describuntur, vt areae comprehensae arcu descripto et rectis ad centrum C ductis.

Corollarium 2.

589. Deinde cum sit $v = \frac{cb^2}{p^2}$, erit $\sqrt{v} = \frac{b\sqrt{c}}{p}$. Celeritas igitur corporis in quocunque loco curuae percursae est reciproce vt perpendiculum ex centro C in tangentem in illo puncto demissum.

Scholion 1.

590. Haec arearum aequabilis descriptio constituit apud *Neutonum* primam propositionem, ex qua sequentia fere omnia deducit. Sunt autem hae duae propritates maxime generales, et id tantum requirunt, vt vis centripetae directio sit perpetuo versus centrum. Quacunque enim vis centripeta quantitate siue ipsarum CM functione siue secus exprimatur, aeque tamen vtraque valet. Nam cum in eas incidissemus, ex calculo vis centripeta P exterminabatur, eiusque tantum directio in consideratione relinquebatur.

Corollarium 3.

591. Ad curuam, quam corpus describit, cognoscendam ipsam vim centripetam dari oportet,

M.E.C.D. 2017

tet, ex hacque data aequatio pro curua habebitur. Eſt enim $Pdy = \frac{2ch^2dp}{p^3}$, quae exprimit curuae naturam ſi P fuerit quantitas data.

Corollarium 4.

592. Quia eſt $\frac{ydy}{dp} = r$, erit etiam $P = \frac{2ch^2y}{p^3r}$. Atque hoc eſt Theorema Moyvreanum, illud vero $P = \frac{2ch^2dp}{p^3dy}$ *Keilius* primus ſe inueniſſe contendit.

Scholion 2.

593. Hae aequationes duplicem habent vtilitatem: Primo enim ex data vi centripeta poterit natura curuae, quam corpus proiectum deſcribit, determinari. Deinde etiam viciſſim ope harum aequationum, ſi fuerit data curua, quam corpus circa virium centrum C deſcribit, definiri poteſt in quouis loco vis centripeta efficiens, vt corpus in hac curua libere moueatur.

Corollarium 5.

594. Quia eſt etiam $dv = -Pdy$, perſpicuum eſt, ſi P fuerit functio ipſius y, celeritatem vbique a diſtantia corporis a centro pendere, et in iisdem diſtantiis corpus eandem habere debere celeritatem.

Corollarium 6.

595. Quoties igitur P eſt functio ipſius y toties etiam curua deſcripta, ita erit comparata vt in aequalibus a centro diſtantiis perpendicula ex centro in tangentes demiſſa ſint inter ſe aequalia, quia celeritates ſunt reciproce vt haec perpendicula (589).

M.E.C.D. 2017

Scholion 3.

596. Atque ſemper ſi P fuerit functio ipſius y, poterit aſſignari recta EC, in qua corpus a vi centripeta ſollicitatum descendens in ſingulis punctis N eandem habebit celeritatem, quam habet in curua AM motum in punctis M aequaliter a centro diſtantibus. Sumto enim CN$=$CM$=y$, et N$n=mr=dy$. Si fuerit celeritas in N aequalis celeritati in M ſcilicet debita altitudini v, erit etiam dum corpus per elementum Nn moueatur $dv=-$Pdy. Ex quo intelligitur celeritatem in n aequalem fore celeritati in m. Atque ita in ſingulis punctis rectae EC corpus tantam habebit celeritatem, quantam habet in curua AM in iisdem a centro C diſtantiis. Si ergo fuerit E motus initium in quo celeritas eſt $=o$, ex data linea EC corporis in curua AM moti in ſingulis punctis innotescet celeritas. Hac igitur recta EC in poſterum vtemur ad celeritates corporis in curua moti definiendas, eamque vocabimus diſtantiam celeritates determinantem.

Corollarium 7.

597. Cum igitur data ſit celeritas in A nempe debita altitudini c, ex hoc tota diſtantia EC reperietur. Tantum enim punctum E diſtans a C accipi debet, vt corpus ex E hac vi centripeta ſollicitatum descendens in A aequirat celeritatem $=V c$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 8.

598. Si vocetur angulus MCm=dw, erit $dw=\frac{dx}{y}-\frac{pdy}{y\sqrt{(yy-pp)}}$. Vnde prodit $p=\frac{yydw}{\sqrt{(yydw^2+dy^2)}}$. Tempusculum vero, quo angulus MCm absoluitur est $=\frac{pds}{b\sqrt{c}}=\frac{pydy}{b\sqrt{c(yy-pp)}}$. Hoc igitur tempusculum erit $=\frac{yydw}{b\sqrt{c}}$.

Corollarium 9.

599. Si celeritatem angularem seu eam qua angulus MCm percurritur metiri velimus ipso hoc angulo per tempus diuiso prodibit celeritas angularis in $M=\frac{b\sqrt{c}}{yy}$. Celeritas igitur angularis est reciproce vt quadratum distantiae corporis a centro C.

Scholion 4.

600. Quia autem curua, quam corpus a data vi centripeta sollicitatum describit, aliter non cognoscitur, nisi per aequationem inter corporis distantiam a centro et perpendiculum in tangentem ex centro demissum; difficile plerumque est iudicare qualis sit curua inuenta, cum curuarum naturas consueuerimus aequationibus inter coordinatas orthogonales exponere. Interim tamen huiusmodi aequationes inter distantiam a centro et perpendiculum in tangentem, si modo sint vel algebraicae vel differentiales in quibus indeterminatae sint a se inuicem separatae, sufficiunt ad curuas quaesitas constructendas. Sed quo natura et ordo curuarum harum penitus possit inuestigari, dabimus

M.E.C.D. 2017

hic methodum aequationes inter distantiam et perpendiculum ad consuetas aequationes inter coordinatas reducendi.

PROPOSITIO 75.

Problema.

Tabula V. Fig. 3.

601. *Naturam curuae* AM, *quam corpus a quacunque vi centripeta sollicitatum describit, definire aequatione inter coordinatas orthogonales* CP *et* PM *ad axem fixum* AC *relatas.*

Solutio.

Positis vt ante celeritate initiali in $A=V c$, $AC=a$ et perpendiculo ex C in tangentem in A demisso $=b$. Atque praeterea $CM=y$, $CT=p$, et vi centripeta in $M=P$, quae sit functio quaedam ipsius y. Vocetur deinde $CP=x$, et $PM=z$, erit $CM=V(x^2+z^2)=y$, seu $z=V(y^2-x^2)$, retinebimus enim loco z in calculo y, quia hoc modo calculus fit facilior et breuior, atque post peractam totam operationem in promtu est z loco y introducere. His positis erit $Mm=V(dx^2+dz^2)=\frac{V(y^2dy^2-2yxdydx+y^2dx^2)}{V(y^2-x^2)}$ et $Mr=\frac{-ydx+xdy}{V(y^2-x^2)}$. Fiet igitur $\frac{Mr}{Mm}=\frac{p}{y}=\frac{xdy-ydx}{V(y^2dy^2-2yxdydx+y^2dx^2)}$, et consequenter $p=\frac{yxdy-y^2dx}{V(y^2dy^2-2yxdydx+y^2dx^2)}$. Sed pro curua AM hanc ante elicuimus aequationem $Pdy=\frac{2ch^2dp}{p^3}$. Ponamus autem Y integrale ipsius Pdy ita assumtum vt euanescat posito $y=a$. Quo facto erit $Y=C-\frac{ch^2}{p^2}$, vbi constans C ob $p=b$, si est $y=a$, debet esse $=c$. Erit

er-

M.E.C.D. 2017

ergo $Y = \frac{cp^2 - ch^2}{r^2}$, ex qua prodit $p = \frac{h\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}}$. Quae quantitas cum sit Y functio ipsius y, est quoque functio quaedam ipsius y. Hanc ob rem habebimus hanc aequationem $\frac{h\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}} = \frac{yxdy - y^2dx}{\sqrt{(y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2)}}$. Ponamus $x = uy$ et $\frac{h\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}} = Q$ breuitatis gratia, erit $Q = \frac{-y^2du}{\sqrt{(dy^2 - u^2dy^2 + y^2du^2)}}$, ex qua oritur $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{Qdy}{y\sqrt{(y^2 - Q^2}}$ $= \frac{hdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - ch^2 - y^2Y)}}$ restituto $\frac{h\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}}$ loco Q. Quae igitur aequatio, cum in ea indeterminatae u et y sint separatae, semper poterit construi. Q. E. I.

Corollarium 1.

602. Quia est $u = \frac{x}{y}$, exprimet u cosinum anguli MCA. Et hanc ob rem vltima aequatio separata erit inter distantiam corporis a centro et anguli ACM cosinum. Ex hac vero aequatione sponte oritur aequatio inter x et z.

Corollarium 2.

603. Aequatio vero nunquam esse poterit algebraica, nisi denotet $\int \frac{hdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - ch^2 - y^2Y)}}$ arcum circuli commensurabilem cum arcu $\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$.

Corollarium 3.

604. Quoties ergo $\frac{hdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - ch^2 - y^2Y)}}$ reduci poterit ad formam huiusmodi $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2 - Z^2)}}$ et λ sit numerus rationalis, aequatio algebraica pro curua quaesita poterit exhiberi.

Scho-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

605. Si autem $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$ aequabitur huiusmodi quantitati $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$, habebitur integratione per logarithmos imaginarios peracta haec aequatio $\frac{\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1}} = \left(\frac{\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1}}{\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1}}\right)^{\lambda} \left(\frac{\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1}}{\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1}}\right)^{\lambda}$. Est vero hic C constans quantitas ex eo determinanda, quod, si fit $CM(y) = CA(a)$, simul quoque fieri debeat $x = a$, seu $u = 1$. Ex illa autem aequatione conficitur ista

$$u = \frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})^{\lambda}(\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1})^{\lambda}}{2A^{2\lambda}\sqrt{-1}}$$
$$-\frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})^{\lambda}(\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1})^{\lambda}}{2A^{2\lambda}\sqrt{-1}}$$

Quae quoties λ est numerus rationalis, ab imaginariis $\sqrt{-1}$ affectis libera redditur, et in algebraicam certi ordinis transmutatur.

Corollarium 4.

606. Quia est $x = uy$, habebitur ista aequatio $x =$

$$\frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})^{\lambda}(\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1})^{\lambda}y-(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})^{\lambda}(\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1})^{\lambda}y}{2A^{2\lambda}\sqrt{-1}}$$

quae, cum sit Z functio ipsius y, et $y = \sqrt{(x^2+z^2)}$ facile in aequationm inter x et z mutatur.

Scholion 2.

607. Superior aequatio etiam in hanc potest transmutari $Z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\left(\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right.$
$\left(\sqrt{\right.}$

BIBLIOTECA
DEL
[illegible]

M.E.C.D. 2017

$(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})-(\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\lambda}}(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1}))$, quae commodior est, si $\frac{1}{\lambda}$ fuerit numerus integer affirmatiuus.

Scholion 3.

608. At si fuerit λ numerus negatiuus $=-\mu$, habebitur $\frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})^{\mu}(\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1})^{\mu}}{2A^{2\mu}\sqrt{-1}}$

$-\frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})^{\mu}(\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1})^{\mu}}{2A^{2\mu}\sqrt{-1}}=u.$

Ex quo apparet si λ fuerit negatiuum, ipsius u valorem tantum fieri negatiuum, id quod quidem ex aequatione differentiali intelligitur. Simili vero modo erit etiam $Z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}((\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\mu}}(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})-(\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\mu}}(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1}))$.

Corollarium 5.

609. Si fuerit $\lambda=1$, erit $u=\frac{Z\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{(A^2-Z^2)}}{A^2}$ et $x=\frac{Zy\sqrt{(A^2-C^2)}-Cy\sqrt{(A^2-Z^2)}}{A^2}$. Si fuerit $\lambda=-1$, etiam u vel x sumi debet negatiuum.

Corollarium 6.

610. Si fuerit $\lambda=2$, erit $u=\frac{2Z(A^2-2C^2)\sqrt{(A^2-Z^2)}}{A^4}-\frac{2C(A^2-2Z^2)\sqrt{(A^2-C^2)}}{A^4}$. At si fuerit $\lambda=\frac{1}{2}$ erit $Z=C-2Cu^2+2u\sqrt{(1-u^2)}(A^2-C^2)$.

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 26.

Theorema.

Tabula V. Fig. 4.

611. *Si fuerit vis centripeta vt functio quaecunque distantiarum a centro* C, *et corpus in* A *proiiciatur secundum directionem normalem in* AC *celeritate, cuius altitudo debita se habeat ad dimidiam* AC, *vt vis centripeta in* A *ad vim grauitatis* 1: *hoc corpus in peripheria circuli* AMBA *cuius centrum est* C *mouebitur aequabiliter.*

Demonstratio.

Moueatur enim corpus in hoc circulo; quia eius distantia a centro non variatur, perpetuo ab eadem vi centripeta versus C sollicitabitur, cuicunque functioni distantiarum etiam sit proportionalis vis centripeta. Atque quia ad centrum C sollicitatur, erit directio potentiae sollicitantis normalis semper in curuae portiunculam, in qua corpus mouetur. Quocirca corpus sollicitabitur perpetuo a vi normali nunquam a tangentiali, et hanc ob rem eius celeritas semper manebit eadem (591), ac ideo corpus motu aequabili peripheriam describet. Deinde quia vis centripeta seu normalis vbique est eadem, ponatur ea $=g$, et celeritas itidem constans debita altitudini c, atque radius $AC=a$, quae quantitas a vbique exhibet curuae radium osculi. His igitur positis erit $ag=2c$ (561). Ex quo haec oritur analogia: Vt altitudo celeritati corporis, qua initio in A proiicitur debita c ad dimidiam distantiam

M.E.C.D. 2017

am AC, $\frac{1}{2}a$ ita vis centripeta g ad vim grauitatis 1. Q. E. D.

Corollarium 1.

612. Quando ergo corpus semel arcum circuli describit, cuius centrum est in ipso centro virium C; tum perpetuo in ea circuli peripheria reuoluetur. Si quidem vis centripeta a solis distantiis a centro pendeat, ita vt in aequalibus distantiis vis centripeta sit aequalis.

Corollarium 2.

612. Posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, erit peripheria circuli, in quo corpus mouetur $=2\pi a$. Quia deinde celeritas, qua corpus mouetur, est $=Vc=V\frac{ag}{2}$; erit tempus vnius periodi per totam peripheriam $=\frac{2\pi V2a}{Vg}$.

Corollarium 3.

614. Si ergo plura corpora in diuersis circulis moueantur, erunt tempora reuolutionum in subduplicata ratione composita ex directa radiorum circulorum et inuersa virium centripetarum.

Corollarium 4.

615. Si corpus ex A perpendiculariter ad AC proiiciatur, sed celeritate vel maiore vel minore quam $V\frac{ag}{2}$. Corpus arculum circuli describet, cuius radius erit vel maior vel minor quam AC.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

615. Hoc ergo casu, quo corpus incipit in arcu circulari moueri, cuius centrum non est in C statim ad centrum vel magis accedet vel magis ab eo recedet. Et hanc ob rem statim ab alia sollicitabitur vi centripeta, nisi forte vis centripeta vbique est eadem.

Scholion.

Tabula V. Fig. 5.

617. Quacunque autem corpus in A celeritate proiiciatur, modo sit eius directio in rectam AC per centrum virium C transeuntem perpendicularis, curua BMAND hanc habebit proprietatem, vt eius portiones AMB, AND cis et vltra rectam AC positae sint inter se similes et aequales, atque AC axis et diameter huius curuae. Nam, quia, vt iam innuimus, vis centripeta functioni cuidam distantiarum a centro est proportionalis, corpus siue supra siue infra AC in aequalibus a C distantiis aequaliter sollicitatur, et hanc ob rem eodem modo per DNA ad A accedere debet, quo ab A per AMB recedit, atque in punctis homologis M et N eandem quoque habebit celeritatem.

Corollarium 6.

618. Omnis igitur recta ex centro C ducta, quae in curuam est normalis, erit simul curuae diameter; ita vt curuae partes cis et vltra hanc rectam positae sint inter se similes et aequales.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 77.

Theorema.

619. *Si plura corpora circa centrum virium* C *moueantur, atque deſcribant curuas* AM, am *circa* C *ſimiles: erunt celeritates in punctis ſimilibus* M *et* m, *in ſubduplicata ratione compoſita ex rationibus laterum homologorum et virium centripetarum in locis homologis* M *et* m. Tabula V. Fig. 6.

Demonſtratio.

Quia eſt AC:*a*C=MC:*m*C, erit etiam radius oſculi in M ad radium oſculi in *m* in eadem ratione, nec non etiam perpendiculum CT ad C*t*. Ex propoſitione 74 vero apparet eſſe P*rdx*=2*vds* ſeu loco $\frac{ds}{dx}$ poſito $\frac{y}{p}$, P*pr*=2*vy*. Hinc ergo erit celeritas $V v = V\frac{Ppr}{2y}$ Ex quo prodit haec analogia; celeritas in M eſt ad celeritatem in *m* in ratione ſubduplicata compoſita ex directis virium centripetarum in M et *m*, radiorum oſculi in M et *m*, atque perpendiculorum CT ad *c*T; atque ratione inuerſa diſtantiarum MC ad *m*C. Quia vero eſt CT ad *c*T vt MC ad *m*C, et radius oſculi in M ad radium oſculi in *m* vt MC ad *m*C, erit celeritas in M ad celeritatem in *m* in ratione ſubduplicata compoſita ex rationibus virium centripetarum in M et *m*, et laterum homologorum MC ad *m*C. Q. E. D.

Corollarium 1.

620. Si ergo dicatur A C = A; *a* C = *a*. C D = H et C *d* = *b*, itemque celeritas in A = V C, et in *a* = V *c*; erit cele-

M.E.C.D. 2017

ritas angularis in $M = \frac{H\sqrt{C}}{MC^2}$ et celeritas angularis in $m = \frac{b\sqrt{c}}{mC^2}$ (599). Quia autem eſt $H:b = MC:mC = A:a$; erunt celeritates angulares in M et m vt $\frac{\sqrt{C}}{A}$ ad $\frac{\sqrt{c}}{a}$, i. e. in ratione conſtante.

Corollarium 2.

621. Tempora igitur, quibus aequales anguli ACM, aCm, ſeu ſpatia homologa AM et am abſoluuntur ſunt reciproce vt celeritates angulares in M et m, i. e. directe vt latera homologa et reciproce vt celeritates in punctis homologis.

Scholion 1.

622. Quin etiam celeritates in punctis homologis vbique eandem tenent rationem. Eſt enim celeritas in $M = \frac{H\sqrt{C}}{CT}$ et celeritas in $m = \frac{b\sqrt{c}}{Ct}$ (589). Quamobrem cum ſit $H:b = CT:Ct$, erit celeritas in M ad celeritatem in m vt $\sqrt{C}$ ad $\sqrt{c}$ i. e. vt celeritas in A ad celeritatem in a.

Corollarium 3.

623. Ex ipſa autem propoſitione perſpicitur eſſe celeritatem in A, $\sqrt{C}$ ad celeritatem in a, $\sqrt{c}$ in ratione ſubduplicata compoſita ex rationibus virium centripetarum in A et a, et laterum homologorum A ad a. Quare ſi dicatur vis centripeta in $A = G$ et vis centripeta in $a = g$; erit $\sqrt{C}:\sqrt{c} = \sqrt{AG}:\sqrt{ag}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

624. Consequenter tempus per AM erit ad tempus per *am*, vt $\sqrt{\frac{A}{C}}$ ad $\sqrt{\frac{a}{c}}$ i. e. in ratione subduplicata composita ex directa laterum homologorum et inversa virium centripetarum in punctis A et *a*. Quae ergo ratio est constans, eandemque tenere debent inter se integra reuolutionum tempora.

Scholion 2.

625. Hoc etiam casu, quo plures figurae similes circa centrum C describuntur, vires centripetae in punctis homologis eandem vbique tenere debent rationem. Quia enim est $P = \frac{2ch^2y}{p^3r}$ (592) erit vis centripeta in M ad vim centripetam in *m* directe vt quadratum celeritatis in A ad quadratum celeritatis in *a* et reciproce vt AC ad *a*C quae est ratio constans. Quamobrem quo possint plures figurae similes circa centrum C describi, oportet vt vis centripeta huiusmodi distantiarum functione exprimatur, quae in locis homologis vires centripetas eandem rationem tenentes praebeat. Scilicet posita P vi centripeta in distantia *y* et Q in distantia *my*, debebit P ad Q habere rationem constantem, in qua non insit *y*. Hoc enim nisi fuerit, fieri non potest, vt circa centrum C plures figurae similes describantur.

Corollarium 5.

626. Hoc autem obtineri non potest, nisi sit P potestas quaedam ipsius *y*, vt $\frac{y^n}{f^n}$. Hoc enim ca-

M.E.C.D. 2017

casu fit $Q = \frac{m^n y^n}{f^n}$. et ratio P:Q erit $1 : m^n$, quae est constans.

Corollarium 6.

627. Nisi ergo vis centripeta cuidam dignitati distantiarum a centro C sit proportionalis, ne fieri quidem potest, vt plures figurae similes circa centrum C describantur. Atque in his solis casibus locum habebunt proprietates, quas ex hac propositione eruimus.

Corollarium 7.

628. Si autem fuerit $P = \frac{y^n}{f^n}$, erit $G = \frac{A^n}{f^n}$ et $g = \frac{a_n}{f^n}$. Celeritates ergo in locis homologis tenebunt rationem $A^{\frac{n+1}{2}}$ ad $a^{\frac{n+1}{2}}$.

Corollarium 8.

629. Atque tempora quibus arcus similes AM et *am* absoluuntur erunt in ratione $A^{\frac{1-n}{2}}$ ad $a^{\frac{1-n}{2}}$ seu in ratione multiplicata laterum homologorum cuius exponens est $\frac{1-n}{2}$.

Scholion 3.

630. In praecedente et hac propositione continentur omnia Theoremata, quae *Hugenius* de viribus centrifugis in tractatu suo de Horologio oscil-

M.E.C.D. 2017

cillatorio annexit. Eaque partim re ipsa hic apposui, partim euidentissime ex ipsis propositionibus deduci possunt.

PROPOSITIO 78.

Problema.

631. *Si centrum* C *attrahat in ratione distantiarum directa, et corpus ex* A *secundum directionem ad radium* AC *normalem data cum celeritate proiiciatur: determinare curuam* AMDBH, *quam corpus describet, corporisque celeritatem in singulis locis.*

Tabula VI. Fig. 1.

Solutio.

Ponatur distantia CA$=a$, erit perpendiculum, quod ex centro C in motus directionem demittitur $=a$. Celeritas vero in A debita sit altitudini c. Peruenerit corpus in M, sitque CM$=y$, et perpendiculum ex C in tangentem in M demissum CT ponatur $=p$, atque celeritas in M debita sit altitudini v. Sit porro distantia, in qua vis centripeta aequalis est grauitati, f; erit vis centripeta in M $= \frac{y}{f}$ posita vi grauitatis $= 1$. His cum prop. 75 (601) comparatis, erit P$=\frac{y}{f}$ et Y$=\frac{y^2-a^2}{2f}$. Quamobrem habebitur $p=\frac{a\sqrt{2cf}}{\sqrt{(a^2+2cf-y^2)}}$. Est vero $v=\frac{a^2c}{p^2}$ (587), ex quo erit $v=\frac{a^2+2cf-y^2}{2f}$. Ob elementum curuae autem $=\frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$, erit elementum temporis $\frac{ydy\sqrt{2f}}{\sqrt{(a^2y^2+2cfy^2-y^4-2a^2cf)}}$. Demisso ex M in CA perpendiculo MP, vocetur CP$=x$, po-

M.E.C.D. 2017

naturque $x = uy$. His positis erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{ady\sqrt{2cf}}{y\sqrt{(2cfy^2-2a^2cf-y^4+a^2y^2)}}$ (601). Fiat $y = \frac{1}{\sqrt{(q+\frac{2cf+a^2}{4a^2cf})}}$ et prodibit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{-\frac{1}{2}dq}{\sqrt{(\frac{a^2-2cf}{4a^2cf})^2-q^2)}}$. Quo collato cum formula $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (604), erit $\lambda = \frac{1}{2}$, $Z = -q$ et $A = \frac{a^2-2cf}{4a^2cf}$. Ex his autem inuenitur $Z = -q = C - 2Cu^2 + 2u\sqrt{(A^2-C^2)(1-u^2)} = \frac{a^2+2cf}{4a^2cf} - \frac{1}{y^2}$. Constans quantitas C ex hoc determinabitur, quod facto $u = 1$ fieri debeat $y = a$. Hinc ergo erit $C = \frac{2cf-a^2}{4a^2cf}$ vnde fit $\sqrt{(A^2-C^2)} = o$. His substitutis habebitur $\frac{1}{2cf} - \frac{1}{y^2} = \frac{(a^2-2cf)u^2}{2a^2cf} = \frac{(a^2-2cf)x^2}{2a^2cfy^2}$ ob $u = \frac{x}{y}$. Aequatio igitur resultabit ista $a^2y^2 - 2a^2cf = (a^2-2cf)x^2$. Ponatur applicata $MP = z$, erit $y^2 = x^2 + z^2$. Hinc sequens prodibit pro curua quaesita aequatio inter coordinatas orthogonales, $a^2z^2 + 2cfx^2 = 2a^2cf$. Haec aequatio est ad ellipsin, cuius centrum in C est situm, et $AB = 2a$ est alter eius axis; alter vero $DH = 2\sqrt{2cf}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

632. Altitudo celeritati in M debita v est $= \frac{a^2+2cf-y^2}{2f}$. Quia autem est $a^2 + 2cf = AC^2 + CD^2 = AD^2$, erit $v = \frac{AD^2-CM^2}{2f}$.

Corollarium 2.

633. Simili modo perpendiculum CT in tangentem MT demissum erit $p = \frac{AC.CD}{\sqrt{(AD^2-CM^2)}}$ et ipsa tangens

gens $MT=\frac{\sqrt{(AD^2.CM^2-CM^4-AC^2.CD^2)}}{\sqrt{(AD^2-CM^2)}}=\frac{(AC^2-CD^2)\,CP.PM}{AC.CD\sqrt{(AD^2-CM^2)}}$. Si quidem eſt $AC>CD$.

Corollarium 3.

634. Hoc autem caſu quo $AC>CD$, erit AB ellipſis axis transuerſus, in eoque foci F et G ſiti. Erit autem $CF=CG=\sqrt{(AC^2-CD^2)}$. Adeoque $MT=\frac{CF^2.CP.PM}{AC.CD\sqrt{(AD^2-CM^2)}}$.

Corollarium 4.

635. Anguli ergo TMC, quem corporis in M directio cum radio MC conſtituit, ſinus eſt $=\frac{AC.CD}{CM.\sqrt{(AD^2-CM^2)}}$, et coſinus $=\frac{CF^2.CP.PM.}{CM.AC.CD.\sqrt{(AD^2-CM^2)}}$.

Scholion 1.

636. Diſtantia celeritates determinans CE (596, 597) aequalis eſt ſemper ſubtenſae AD. Nam poſita $CE=k$, descendat corpus ex E verſus C a vi centripeta tractum; habere debebit corpus cum in A peruenerit celeritatem altitudini c debitam. Quamobrem erit $k=\sqrt{(a^2+2cf)}$, (275). Quia autem eſt $AC=a$, et $CD=\sqrt{2cf}$, erit $CE=\sqrt{(AC^2+CD^2)}=AD$.

Corollarium 5.

637. Altitudo debita celeritati, quam corpus in recta EC motum acquiret, cum in C peruenerit, erit $\frac{k^2}{2f}=\frac{a^2+2cf}{2f}=\frac{AD^2}{2f}$.

Corollarium 6.

638. Tempus quo arcus AM abſoluitur $=\frac{2.ACM}{a\sqrt{c}}$ (588) ob $b=a$ hoc caſu. Quamobrem

M.E.C.D. 2017

tempus totius reuolutionis per ellipsis perimetrum ADBHA erit $= \frac{2.\,Areae\ Ellipticae}{a\sqrt{c}}$. Est vero posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, spatium ellipticum $= \pi a\sqrt{2cf}$. Consequenter tempus vnius reuolutionis erit $2\pi\sqrt{2f}$.

Corollarium 7.

639. Si ergo plura corpora circa idem centrum virium attrahens in ratione distantiarum reuoluantur in ellipsibus, erunt singulorum tempora integrarum reuolutionum inter se aequalia.

Scholion 2.

640. Quando corporis directio initialis in puncto A non ponitur normalis ad radium AC, calculus non praebet ellipsin pro curua a corpore descripta; sed aliam curuam ordinis quarti, quae tamen nullo modo satisfacere potest. Causa huius discrepantiae calculi a veritate in hoc consistit, quod expressio sinus anguli, quem curua cum radio constituit, in y et u sumta semper euadat $= 1$, posito $y = a$ et $u = 1$, etiamsi secundum hypothesin alia prodire debeat quantitas. Sinus enim anguli, quem curua cum radio comprehendit est $\frac{ydu}{\sqrt{(dy^2 - u^2dy^2 + y^2du^2)}}$ quae expressio facto $u = 1$ euidenter abit in vnitatem, cum tamen prodire debeat $\frac{b}{a}$. Quamobrem perspicuum est, nisi ponatur $b = a$, calculum hoc modo institutum nunquam cum veritate conspirare posse, si quidem aequatio inter u et y quaeri debeat. Haec ergo regula perpetuo est tenenda, quoties

M.E.C.D. 2017

ties curua descripta secundum praecepta propos. 75 (601) inuestigabitur. Methodus autem hac propositione tradita ad curuas algebraicas tantum inueniendas est accommodata; alia enim methodo, si curuae sint transcendentes, vti oportet. At omnes curuae algebraicae hac gaudent proprietate, vt in eas ex puncto quocunque duci possit perpendicularis. Quocirca, quoties corpus in curua algebraica circa centrum virium reuoluitur, semper in ea vel vnum vel plura poterunt assignari puncta, in quibus radius ad curuam sit perpendicularis. In huiusmodi igitur punctis corpus motum inchoare ponendum est, atque calculus semper veritati erit consentaneus. Ex tali autem solutione facile inuenietur corporis in quouis alio loco celeritas, atque hinc methodo inuersa data corporis celeritate in loco, in quo radius non est ad curuam normalis, reperietur celeritas in loco, vbi radius in curuae normalem incidit. Quomodo autem hoc effici debeat ex propositione sequente perspicietur. Supra memorata curuarum algebraicarum proprietas vero, qua ex quocunque puncto dato in eas perpendicularis potest demitti, non in omnes curuas transcendentes competit. In spirali enim logarithmica nullum radium ex centro ad curuam ductum esse normalem, sed perpetuo cum ea constantem constituere angulum, cuique est notum. Quo tandem ratio intelligatur, quare $\frac{ydu}{\sqrt{(dy^2-u^2dy^2+y^2du^2)}}$ semper facto $u=1$ mutetur in vnitatem, cum tamen quiuis alius quo-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

que angulus praeter rectum ex ea produci deberet; animaduertendum est abeunte u in 1, elementum du euanescere prae dy, nisi sit tangens in A ad radium AC normalis. Hancque ob causam posito $u=1$, elementum $dy^2(1-u^2)$ non est negligendum ratione y^2du^2, cum vtrumque euanescat, vt et numerator ydu. Quo fit, vt cuiusuis arbitrarii anguli sinus illa formula facto $u=1$ possit exprimi. Sed quoniam haec cautela in calculo non potest obseruari, praeter casus $h=a$ calculus nunquam veram curuam exhibet.

PROPOSITIO 79.

Problema.

641. *Attrahente centro virium in ratione distantiarum, et proiiciatur corpus in* M *celeritate quacunque, et secundum quamcunque directionem* MT: *determinari oportet ellipsin in qua corpus mouebitur.*

Solutio.

Solutionem huius problematis esse possibilem ex hoc intelligi potest, quod numerus datorum non sit nimis magnus ad ellipsin determinandam, provt apparebit. Ponantur radius $CM=y$, sinus anguli $CMT=s$, posito sinu toto $=1$, et altitudo celeritati in M debita $=v$, distantia praeterea a centro C, in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis maneat $=f$. Hae igitur quantitates tanquam datae et cognitae erunt considerandae; incognitae vero et inueniendae sunt ellipsis axes, eorumque positio: ho-

M.E.C.D. 2017

horum ponatur AC$=a$ et CD$=b$, eritque $b=V2cf$ (631). His positis habebitur statim $2fv=a^2+b^2-y^2$ (632), vnde fit $a^2+b^2=AD^2=2fv+y^2$, cognoscitur ergo iam subtensa AD, huicque aequalis distantia CE celeritates determinans. Deinde quoque habetur $s=\frac{ab}{y\sqrt{(a^2+b^2-y^2)}}=\frac{ab}{y\sqrt{2fv}}$, ex quo oritur $ab=sy\sqrt{2fv}$. His coniunctis oritur $(a^2-b^2)^2=4f^2v^2+4fvy^2+y^4-8fs^2vy^2=4f^2v^2+y^4+4fvy^2(1-2s^2)$. Est vero $1-2s^2$ cosinus dupli anguli CMT, quem vocemus i. Erit ergo $a^2-b^2=\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}$. Ex his aequationibus prouenit $a^2=fv+\frac{1}{2}y^2+\sqrt{(f^2v^2+\frac{1}{4}y^4+fivy^2)}$ et $b^2=fv+\frac{1}{2}y^2-\sqrt{(f^2v^2+\frac{1}{4}y^4+fivy^2)}$. Inuentis vero axibus positio eorum facile habebitur. Est enim cosinus anguli ACM$=\frac{x}{y}=\frac{1}{y}\sqrt{(\frac{a^2y^2-a^2b^2}{a^2-b^2})}=\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{fiv+\frac{1}{2}y^2}{\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}})}$ seu cosinus dupli anguli ACM$=\frac{2fiv+y^2}{\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}}$, atque sinus huius anguli $2ACM=\frac{2fv\sqrt{(1-i^2)}}{\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

642. Vbicunque igitur corpus proiiciatur, et quacunque celeritate, atque secundum quamvis directionem, corpus circa centrum virium in perimetro ellipsis mouebitur, cuius centrum est in ipso centro virium.

Scholion.

643. Hactenus vis centralis distantiis proportionalis attrahens est posita; simili autem modo reperientur curuae descriptae, si vis corpora a centro

M.E.C.D. 2017

tro in eadem ratione repellat. Praecedentia enim omnia ad hunc casum accommodantur, si modo $-f$ loco f scribatur. Hoc vero facto, curua, quae ante erat ellipsis transmutatur in hyperbolam, axe minore imaginario facto, centrumque virium manet in centro hyperbolae.

PROPOSITIO 80.

Problema.

Tabula VI. Fig. 2.

644. *Si vis centripeta fuerit quadratis distantiarum reciproce proportionalis, corpusque in* A *data celeritate proiiciatur in directione ad radium* AC *normali: oportet determinare curuam* AMDBHA, *quam corpus describet, et motum ipsum per illam.*

Solutio.

Positis vt ante $AC=a$, et celeritate in A debita altitudini c, sit f distantia, in qua vis centripeta aequalis est grauitati. Ponatur tum $CM=y$, perpendiculum, quod in tangentem demittitur, $CT=p$, et altitudo celeritati in M debita $=v$. His cum prop. 75 (601) comparatis erit $h=a$, $P=\frac{f^2}{y^2}$, et $Y=\frac{f^2}{a}-\frac{f^2}{y}$. Demittatur ex M in AC perpendiculum MP, et vocetur $CP=x$, ponaturque $x=uy$. Quo facto erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}=\frac{ady\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-a^2c-\frac{f^2y^2}{a}+f^2y)}}$. Ponatur $y=\frac{1}{\frac{f^2}{2a^2c}-q}$, eritque $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}=\frac{dq}{\sqrt{((\frac{2ac-f^2}{2a^2c})^2-q^2)}}$.

Conferatur haec formula cum $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (604), eritque $\lambda=1$, $A=\frac{2ac-f^2}{2a^2c}$ et $Z=q$. Quamobrem habe-

M.E.C.D. 2017

bebitur ſequens aequatio $u=\frac{q\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{(A^2-q^2)}}{A^2}$ (609). Eſt vero $q=\frac{f^2}{2a^2c}-\frac{1}{y}$, et conſtans quantitas C ex eo debet definiri, quod facto $u=1$ fiat $y=a$. Aequatio vero illa parum mutata in hanc tranſit $C+u\sqrt{(A^2-q^2)}=q\sqrt{(1-u^2)}$. In qua facto $u=1$ et $q=\frac{f^2-2ac}{2a^2c}$, prodit $C=o$. Conſequenter habebitur $(\frac{f^2-2ac}{2a^2c})^2u^2=q^2$, ſeu $(f^2-2ac)u=2a^2cq=f^2-\frac{2a^2c}{y}$. Quia vero eſt $u=\frac{x}{y}$, erit $(f^2-2ac)x=f^2y-2a^2c$, atque $f^4y^2=4a^4c^2-4a^2cx(f^2-2ac)+(f^2-2ac)^2x^2$. Vocetur applicata $PM=z$, erit $f^4z^2=4a^4c^2-4a^2cx(f^2-2ac)-4acf^2x^2+4a^2c^2x^2$. Ponatur $x=t+\frac{2a^2c-af^2}{2f^2-2ac}$, quo facto habebitur $f^4z^2=\frac{a^3cf^4}{f^2-ac}-4act^2(f^2-ac)$. Quae eſt aequatio ad ellipſin abſciſſis in axe transuerſo a centro G ſumtis, cuius axis transuerſus eſt $=\frac{af^2}{f^2-ac}$ et coniugatus $=\frac{2a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)}}$. Centrique virium C a centro ellipſis G diſtantia $CG=\frac{2a^2c-af^2}{2f^2-2ac}$, quae aequalis eſt ſemidiſtantiae focorum. Hanc ob rem centrum virium C in alterutro foco ellipſis eſt poſitum. Apparet igitur corpus in A celeritate $\sqrt{c}$ proiectum circa centrum C deſcripturum eſſe ellipſin AMDBHA, cuius focus alter in C eſt ſitus. Eritque $AC=a$, $AG=\frac{af^2}{2f^2-2ac}$, $AB=\frac{af^2}{f^2-ac}$, $BC=\frac{a^2c}{f^2-ac}$, axisque coniugatus $DH=\frac{2a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)}}$. Latus vero rectum ellipſis eſt $=\frac{4a^2c}{f^2}$. Ad celeritatem in M determinandam vſu erit aequatio $v=\frac{a^2c}{p^2}$. Eſt autem $p=\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}}=\frac{a\sqrt{acy}}{\sqrt{(acy+(a-y)f^2)}}$, ergo $v=\frac{acy+(a-y)f^2}{ay}$. Q. E. I.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

645. Distantia celeritates determinans CE inuenitur $= \frac{af^2}{f^2-ac}$ (274). Ex quo apparet distantiam hanc CE aequalem esse axi transuerso ellipsis AB.

Corollarium 2.

646. Toties autem curua a corpore descripta est re vera ellipsis, quoties est $f^2 > ac$ seu $c < \frac{f^2}{a}$. At si est $c > \frac{f^2}{a}$, tum axis transuersus fit negatiuus, et coniugatus imaginarius, id quod indicio est curuam his casibus abire in hyperbolam.

Corollarium 3.

647. Quando vero est $c = \frac{f^2}{a}$, curua medium tenebit inter hyperbolam et ellipsin axemque transuersum habebit infinitum. Erit itaque tum curua a corpore descripta parabola.

Corollarium 4.

648. Si $c = \frac{f^2}{2a}$, ellipsis abit in circulum, aequales enim euadunt axes, transuersus et coniugatus. Centrum vero virium in ipsum centrum circuli incidet.

Corollarium 5.

649. Ducatur in ellipsi ex altero foco F recta FM ad M, erit $FM = AB - y = \frac{f^2(a-y)+acy}{f^2-ac}$. Ex quo cognoscitur fore $v = \frac{(f^2-ac).FM}{a.CM}$. Est ergo celeritas in puncto quouis M vt $\sqrt{\frac{FM}{CM}}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 6.

650. Sinus anguli, quem radius CM cum tangente MT conſtituit eſt $= \frac{p}{y} = \frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(acy^2+(a-y)f^2y)}}$ poſito ſinu toto $=1$. Sed quia eſt $FM = \frac{f^2(a-y)+acy}{f^2-ac}$, erit ſinus anguli $CMT = \frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)}\,FM.\,CM}$.

Corollarium 7.

651. Quia eſt $GC = \frac{2a^2c-af^2}{2f^2-2ac}$, centrum virium erit in remotiore foco a vertice A, quoties eſt $c > \frac{f^2}{2a}$. In propiorem vero incidet ſi $c < \frac{f^2}{2a}$.

Corollarium 8.

652. Poſito axe maiore $AB = E$, parametro $= L$, erit $E = \frac{af^2}{f^2-ac}$, et $L = \frac{4a^2c}{f^2}$. Hinc reperitur $a = \frac{E \pm \sqrt{(E^2-EL)}}{2}$ atque $\sqrt{c} = \frac{f\sqrt{L}}{E \pm \sqrt{(E^2-EL)}}$.

Corollarium 9.

653. Tempus, quo corpus integram ellipſis circumferentiam percurrit, eſt $= \frac{2.\,Areae\ Ellipt.}{a\sqrt{c}} = \frac{4.\,Areae\ Ellipt.}{f\sqrt{L}}$ (588). Poſita vero ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, eſt area elliptica $= \frac{\pi E\sqrt{EL}}{4}$. Tempus ergo vnius reuolutionis eſt $= \frac{\pi E\sqrt{E}}{f}$.

Corollarium 10.

654. Si ergo plura corpora circa centrum virium C reuoluantur attracta in reciproca duplicata ratione diſtantiarum; erunt tempora periodica inter ſe in ſesquiplicata ratione axium transuerſorum ellipſium.

M.E.C.D. 2017

Corollarium II.

655. Si celeritas initialis in A euanescit, abit ellipſis in lineam rectam AC. In hac igitur recta corpus perpetuo mouebitur ab A ad C, hincque ſubito rurſus ad A reuertetur, ita vt nunquam vltra centrum C pertingat (272).

PROPOSITIO 81.

Problema.

656. *Poſita vi centripeta diſtantiarum quadratis reciproce proportionali, proiiciatur corpus ex* M *celeritate quacunque et iuxta directionem quamuis* MT: *ex quo oporteat determinari ellipſin* MDBHAM, *in qua corpus mouebitur.*

Solutio.

Sit MC$=y$, ſinus anguli CMT$=s$, et celeritas in M debita altitudini v, diſtantia a centro, in qua vis centripeta aequalis eſt vi grauitatis, maneat $=f$. Haeque ſunt quantitates cognitae, ex quibus quaeſitae axis transuerſus AB, eius poſitio, et latus rectum debent definiri. Sit axis transuerſus $=$E, et latus rectum $=$L, reliquaeque litterae a, c, ſeruent ſuas ſignificationes, vt in praecedente propoſitione. Erit iam ex natura ellipſis FM$=$ E$-y$, ex quo fiet $v=\frac{(f^2-ac)(E-y)}{ay}$ (649) $=$ $\frac{f^2(E-y)(2E-L\pm 2\sqrt{(E^2-EL)})}{y(E\pm\sqrt{(E^2-EL)})^2}$ (652) $=\frac{f^2(E-y)}{Ey}$. Hinc reperitur E$=\frac{f^2y}{f^2-vy}$. Deinde eſt ſinus anguli CMT$=$ $s=\frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)y\,(E-y)}}$(650). At eſt $f^2-ac=\frac{f^2(E\pm\sqrt{(E^2-EL)})}{2E}$

et

M.E.C.D. 2017

et $a^3c = \frac{1}{8}f^3 L(E \pm \sqrt{(E^2 - EL)})$ (652), ex quo fit $\frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)}} = \frac{1}{2}\sqrt{EL}$, hincque $s = \frac{\sqrt{EL}}{2\sqrt{(Ey-y^2)}}$. Erit igitur axis coniugatus $DH = \sqrt{EL} = 2s\sqrt{(Ey-y^2)} = \frac{2sy\sqrt{vy}}{\sqrt{(f^2-vy)}}$, et latus rectum $L = \frac{4s^2vy^2}{f^2}$. Ad positionem axis transuersi inueniendum quaeratur cosinus anguli MCP seu $\frac{x}{y} = \frac{f^2y - 2a^2c}{y(f^2-2ac)} = \frac{2Ey-LE}{2y\sqrt{(E^2-EL)}} = \frac{ff-2ssvy}{\sqrt{(f^4-4ffssvy+4s^2v^2y^2)}}$. Ex quo erit tangens ang. $MCP = \frac{2svy\sqrt{(1-ss)}}{ff-2ssvy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

657. Si est $f^2 > vy$ vel $v < \frac{f^2}{y}$ curua descripta semper erit ellipsis. At si $v > \frac{f^2}{y}$ curua erit hyperbola, fit enim axis transuersus negatiuus. Sin autem $v = \frac{f^2}{y}$, curua erit parabola.

Corollarium 2.

658. Quia neque axis transuersus neque latus rectum vllo casu fieri potest imaginarium quomodocunque corpus proiiciatur; ideo semper in sectione conica mouebitur, in cuius alterutro foco positum est centrum virium.

Scholion 1.

659. Postquam *Keplerus* ostendisset planetas in ellipsibus moueri, in quarum alterutro foco sol esset positus; atque tempora esse proportionalia areis, quas rectae ad solem ductae cum arcu descripto compehenderent; *Neutonus* demonstrauit vim planetas in orbitis continentem ad solem ten-

M.E.C.D. 2017

dere, atque esse quadratis distantiarum planetarum a sole reciproce proportionalem. Haec eadem veritas ex hisce duabus propositionibus consequitur; nam centro virium in ratione inuersa duplicata distantiarum attrahente, corpora in ellipsibus vel hyperbolis moueri debebunt, quarum alteruter focus in centrum virium incidit.

Corollarium 3.

666. Secundum *Neutonum* vis attrahens solis est ad vim attrahentem terrae in aequalibus ab vtriusque centris distantiis vt 227512 ad 1. Quare cum vis attrahens terrae in distantia semidiametri suae a centro seu in superficie aequalis sit vi grauitatis 1; corpus a centro solis semidiametrum terrestrem distans, ad id trahetur vi 227512 vicibus maiore quam grauitate. Ex quo concluditur, si corpus a centro solis distet 477 semidiametros terrae, vim, qua ad solem trahetur, fore aequalem vi grauitatis.

Corollarium 4.

667. Si igitur sol locum centri virium in reciproca duplicata ratione distantiarum attrahentis sustineat, pro *f* accipi debebit distantia 447 semidiametris telluris aequalis.

Scholion 2.

668. Quo hae propositiones ad motum planetarum possint accommodari sit sol in C et planeta moueatur in ellipsi ADBHA cuius axis transuersus AB sit $=E$, distantia focorum $CF=D$, et celeritas,

M.E.C.D. 2017

tas, quam planeta habet in ſumma abſide A debita ſit altitudini c. Eritque $c = \frac{22752(E-D)}{(E+D)E}$. Iam pro mercurio eſt $E = 15991$ ſemid. telluris, quam menſuram hic conſtanter ad diſtantias exprimendas adhibebimus, $D = 3367$. Quare erit $c = 7,368$. Pro Venere eſt $E = 29882$ et $D = 206$, vnde reperitur $c = 7,598$. Pro Tellure eſt $E = 41312$ et $D = 743$. Vnde erit $c = 5,323$. Pro Marte eſt $E = 62959$ et $D = 5887$, vnde fit $c = 3,049$. Pro Ioue eſt $E = 214870$ et $D = 10350$, vnde $c = 0,9633$. Pro Saturno eſt $E = 394042$, et $D = 22391$, vnde $c = 0,5173$. Quae ſufficiunt ad cuiusque planetae motum abſolutum determinandum.

Scholion 3.

669. *Neutonus*, prout iam innuimus, ex ellipſi, quam corpus deſcribit, cognita, et centro virium in alterutro foco poſito, deduxit vim centripetam eſſe quadratis diſtantiarum reciproce proportionalem. Poſt modum autem a Cel. *Ioh. Bernoulli* aliisque huius propoſitionis inuerſa fuit agitata, vt ſcilicet quaeratur curua, quam corpus circa centrum virium in ratione reciproca duplicata diſtantiarum attrahens, deſcribet. Negabant enim a *Neutono* ſatis eſſe demonſtratum, praeter ſectiones conicas nullam aliam curuam quaeſito ſatisfacere, quamuis prop. XVII. Lib. I. Princ. Naturalis hoc ſatis clare euincere videatur. Huius igitur quaeſtionis his duabus quaeſtionibus plenam exhibuimus ſolutionem, qua *Neutoni* aſſertio extra dubium ponitur.

M.E.C.D. 2017

tur. Alias huius problematis ſolutiones videre licet in Comm. Acad. Pariſ. et Horis ſubſecivis Francof.

Scholion 4.

670. Tempus vnius reuolutionis planetae circa ſolem eſt $\frac{\pi E\sqrt{E}}{250f}$ minutorum ſecundorum (653) ſi quidem E et f in partibus milleſimis pedis Rhenani exprimantur. Quia autem E et f commodius in ſemidiametris telluris exhibentur, quarum vnus continet 20302353 pedes; loco fractionis $\frac{1}{250}$ per quam $\frac{\pi E\sqrt{E}}{f}$ multiplicandum eſt, adhiberi oportet 569, 945. Hanc ob rem tempus vnius reuolutionis planetae erit $\frac{569945\pi E\sqrt{E}}{1000f}$ minutorum ſecundorum, ſeu ob $\pi = 3,141592653^8$ et $f = 477$ ſemidiam. terrae, (667), erit tempus periodicum planetae $= 3,758. E\sqrt{E}$, minutorum ſecundorum, expreſſo axe transuerſo in ſemidiametris terrae.

PROPOSITIO 82.

Problema.

Tabula VI. Fig. 3.

671. *Si vis centripeta fuerit reciproce vt cubus diſtantiae a centro; requiritur curua, quam corpus vtcunque proiectum deſcribet, corporisque motus in ea.*

Solutio.

Sit centrum in C et proiiciatur corpus ex A celeritate $\sqrt{c}$ et ſecundum directionem cum Ac facientem angulum cuius ſinus ſit $\frac{g}{a}$, poſita AC $= a$.

Per-

M.E.C.D. 2017

Peruenerit corpus in M, vbi sit CM$=y$, et in tangentem MT ex C demissum perpendiculum CT$=p$. Celeritas vero in M debita sit altitudini v. Atque distantia a centro C, in qua vis centripeta aequalis est grauitati, sit $=f$. Hinc ergo erit vis centripeta in M$=\frac{f^3}{y^3}=$P (601); ex quo prodit Y$=\frac{f^3}{2a^2}-\frac{f^3}{2y^2}$. Habebitur igitur pro curua quaesita ista aequatio $\frac{f^3}{2a^2}-\frac{f^3}{2y^2}=c-\frac{cb^2}{p^2}$. Atque cum sit $v=\frac{cb^2}{p^2}$ (587), erit etiam $v=c-\frac{f^3}{2a^2}+\frac{f^3}{2y^2}$. Has aequationes per sequentes casus examinabimus.

I. Si fuerit $c=\frac{f^3}{2a^2}$, erit $\frac{1}{y^2}=\frac{b^2}{a^2p^2}$ seu $p=\frac{by}{a}$. Perspicitur autem ex hoc angulum CMT, cuius sinus est $\frac{p}{y}$, aequalem fore angulo ad A. Quamobrem curua his casibus descripta erit spiralis logarithmica, cuius centrum est in ipso centro virium C. Ita autem corpus mouebitur in hac spirali, vt semper sit $v=\frac{f^3}{2y^2}$ seu celeritas distantiae a centro reciproce proportionalis. Tabula VI. Fig. 6.

Si non fuerit $c=\frac{f^3}{2a^2}$, demittatur ex M in AC perpendicularis MP, et vocetur CP$=x$ atque $x=uy$. Habebitur igitur $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}=\frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-ch^2-\frac{f^3y^2}{2a^2}+\frac{f^3}{2})}}$ (601). Est vero u cosinus anguli ACM sinu toto existente $=1$. Radio igitur 1 si describatur arcus circuli GN, erit GN$=-\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$. Vocetur autem GN$=t$, atque habebitur ista aequatio $dt=-\frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-cb^2-\frac{f^3y^2}{2a^2}+\frac{f^3}{2})}}$.

M.E.C.D. 2017

II. Sit $c = \frac{f^3}{2b^2}$, erit $dt = -\frac{ab dy}{y^2\sqrt{(a^2-b^2)}}$, adeoque $t = C + \frac{ab}{y\sqrt{(a^2-b^2)}}$. Conſtans vero C erit $= -\frac{b}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$, quia euanescente t fit $y = a$. Sit autem tangens anguli ad A $= \theta$, eritque $t = \theta(\frac{a}{y} - 1)$ ſeu $y = \frac{\theta a}{t+\theta}$. Vnde ex dato angulo ACM reperitur recta CM, ideoque punctum M in curua quaeſita. Haec curua autem eſt ſpiralis hyperbolica, quam Cel. *Ioh. Bernoulli* pro eodem caſu ſatisfacientem inuenit in Act. Lipſ. 1713.

Si c neque $= \frac{f^3}{2a^2}$, neque $= \frac{f^3}{2b^2}$; ponatur $c = \frac{\delta f^3}{2a^2}$, erit $dt = \frac{-b dy\sqrt{\delta}}{y\sqrt{((\delta-1)y^2+a^2-\delta b^2)}}$. Ponatur $y = \frac{1}{q}$, erit $dt = \frac{b dq\sqrt{\delta}}{\sqrt{(\delta-1+(a^2-\delta b^2)q^2)}}$. Hinc duo oriuntur caſus primarii.

III. Si $a^2-\delta b^2$ ſit numerus affirmatiuus, pendebit integratio a logarithmis. Erit enim $t = \frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} l \frac{C}{\sqrt{(\delta-1+(a^2-\delta b^2)q^2)}-q\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} = \frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} l \frac{Cy}{\sqrt{((\delta-1)y^2+a^2-\delta b^2)}-\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}$. Atque determinata debito modo conſtante C erit $t = \frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} l \frac{y\sqrt{\delta}(a^2-b^2)-y\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}{a\sqrt{((\delta-1)y^2+a^2-\delta b^2)}-a\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}$; atque $y =$

$$\frac{2ae^{\frac{t\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}{b\sqrt{\delta}}}(\sqrt{\delta}(a^2-b^2)(a^2-\delta b^2)-a^2+\delta b^2).}{e^{\frac{2t\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}{b\sqrt{\delta}}}a^2(\delta-1)-(\sqrt{\delta}(a^2-b^2)-\sqrt{(a^2-\delta b^2)})^2}$$

IV. Si $\delta > \frac{a^2}{b^2}$, erit $dt = \frac{b dq\sqrt{\delta}}{\sqrt{(\delta-1-(\delta b^2-a^2)q^2)}}$. Integrale vero huius membri eſt $\frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(\delta b^2-a^2)}}$ ductum in arcum circuli, cuius ſinus eſt $q\sqrt{\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1}}$ poſito radio $= 1$.

At-

M.E.C.D. 2017

Atque addita idonea conſtante erit $\frac{t\sqrt{(\delta b^2-a^2)}}{b\sqrt{\delta}} =$ Arcui cuius ſinus eſt $\frac{1}{y}\sqrt{(\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1})}$ — Arcui cuius ſinus eſt $\frac{1}{a}\sqrt{(\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1})} =$ Arcui cuius ſinus eſt $\frac{D}{ay}(\sqrt{(a^2-D^2)}-\sqrt{(y^2-D^2)})$ poſito $\sqrt{(\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1})}=D$. Hinc conſtructio curuae facilis fluit: ſumatur enim arcus GL, qui ad GN habeat rationem vt $\sqrt{(\delta b^2-a^2)}$ ad $b\sqrt{\delta}$. Huius arcus ſinus LR ponatur $=R$. Erit ergo $Ray=D\sqrt{(a^2-D^2)}-D\sqrt{(y^2-D^2)}$, atque $y=\frac{aDR\sqrt{(a^2-D^2)}-aD^2\sqrt{(1-R^2)}}{a^2R^2-D^2}$. Vnde et conſtructio et aequatio curuae quaeſitae deducitur. In his autem quatuor caſibus, omnia ad problema pertinentia continentur. Q. E. I.

Corollarium 1.

672. Diſtantia celeritates determinans reperitur $=\frac{a^2f\sqrt{f}}{\sqrt{(f^3-2a^2c)}}$. Quare ſi $c=\frac{f^3}{2a^2}$, quo caſu corpus in ſpirali logarithmica mouetur, diſtantia celeritates determinans eſt infinita.

Corollarium 2.

673. Quia, ſi corpus in ſpirali logarithmica mouetur, eſt $p=\frac{by}{a}$ et $v=\frac{f^3}{2y^2}$, erit tempus, quo arcus AM abſoluitur $=\frac{a^3-ay^2}{f\sqrt{2f(a^2-b^2)}}$. Tabula V. Fig. 5.

Corollarium 3.

674. Si hoc tempus ponatur T, et coſinus anguli $CMT=i$, erit $y=\sqrt{(a^2-fiT\sqrt{2f})}$. Ex qua aequatione poſt quoduis tempus datum reperitur corporis a centro C diſtantia.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

675. Corpus igitur in ipſum centrum C perueniet tempore $T = \frac{a^2}{fi\sqrt{2f}}$, dum interim reuolutiones infinitas circa C perfecerit.

Corollarium 5.

676. Si T capiatur maius quam $\frac{a^2}{fi\sqrt{2f}}$, fit y imaginaria. Ex quo ſequitur, poſtquam corpus in C peruenerit, nusquam amplius reperiri, ſed quaſi annihilari.

Corollarium 6.

Tabula VI. Fig. 4.

677. Si ſit $\delta = \frac{a^2}{b^2}$ ſeu $c = \frac{f^3}{2b^2}$, corpus mouebitur in ſpirali hyperbolica, atque etiam poſt infinitas circa C peractas reuolutiones in ipſum centrum C perueniet tempore quoque finito. Eſt enim tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{2\theta a(a-y)}{f\sqrt{2f}}$, ideoque tempus, quo corpus in C peruenit $= \frac{2\theta a^2}{f\sqrt{2f}}$.

Corollarium 7.

678. Si $\delta < \frac{a^2}{b^2}$ ſeu $c < \frac{f^3}{2b^2}$, qui erat caſus tertius, corpus in lineis ſpiralibus quoque mouebitur atque tandem poſt infinitos percurſos gyros in centrum C perueniet. Apparet hoc ex aequatione; nam facto $t = \infty$ demum fit $y = 0$.

Scholion 1.

679. Quando eſt $c = \frac{f^3}{2b^2}$, ſpiralis hyperbolica quam corpus deſcribit, hanc habet proprietatem,

M.E.C.D. 2017

tem, vt posito $t = -\theta$ fiat $y = \infty$. Iste igitur radius ex centro C ductus videtur esse curuae ex infinito accedentis asymtotos. At potius curua ab eo perpetuo recedit, neque tamen vltra datum interuallum θa. Recta ergo ipsi huic radio parallela ab eoque interuallo θa distans erit vera asymtotos. Huius praeterea curuae insignis est proprietas, quod ex infinitis circulis concentricis arcus abscindat aequales, ex qua natura et forma curuae magis elucet. Similem quoque proprietatem habent curuae, quae describuntur, si $\delta < \frac{a^2}{b^2}$, simul vero $\delta > 1$. Fit enim $y = \infty$, si capiatur $t = -\frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2 - \delta b^2)}} l \frac{a\sqrt{(\delta - 1)}}{\sqrt{\delta}(a^2 - b^2) - \sqrt{(a^2 - \delta b^2)}}$. Ex quo perspicitur, si sit $\delta < 1$, locum, quo fit $y = \infty$ fore imaginarium. At si $\delta = 1$, erit $t = -\infty$: curua enim hoc casu orta est spiralis logarithmica. Ceterum omnes hae curuae ita sunt comparatae, vt sint vbique versus C concauae, neque enim ex motus natura usquam habere possunt punctum flexus vel reversionis.

Corollarium 8.

680. Si est $\delta > \frac{a^2}{b^2}$ seu $c > \frac{f^3}{2b^2}$, curua a corpore descripta non erit amplius spiralis, sed algebraica, si quidem inter algebraicas etiam eae referantur in quarum aequationibus continentur exponentes irrationales.

Scholion 2.

681. Ad has igitur inueniendas oportet poni $b = a$ (640). Quo facto haec habebitur aequatio

M.E.C.D. 2017

$dt = \frac{adq\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\sqrt{(1-a^2q^2)}}$. Seu posito $aq = r$, et loco dt valore $\frac{-du}{\sqrt{(1-u^2)}}$, erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{-dr\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\sqrt{(1-r^2)}}$. Hac forma comparata cum $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (605), erit $Z = -r$, $A = 1$, $\lambda = \frac{\delta}{\delta-1}$. Habebitur propterea ista aequatio $u =$

$$\frac{(\sqrt{(1-C^2)}-C\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}(\sqrt{(1-r^2)}-r\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}(\sqrt{(1-C^2)}+C\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}(\sqrt{(1-r^2)}+r\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}}{2\sqrt{-1}}$$

Seu $2r\sqrt{-1} = (\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}}(\sqrt{(1-C^2)}$

$-C\sqrt{-1})-(\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}}(\sqrt{(1-C^2)}+C\sqrt{-1})$ (605 et 607). Constans vero C ex hoc determinabitur, quod facto $u = 1$ fieri debeat $y = a$, seu $q = \frac{1}{a}$, seu $r = 1$. Determinata igitur C erit $2r = (u+\sqrt{(u^2-1)})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}}+(u-\sqrt{(u^2-1)})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}} = \frac{2a}{y}$, seu $u =$

$$\frac{1}{2y^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}}((a+\sqrt{(a^2-y^2)})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}+(a-\sqrt{(a^2-y^2)})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}) = \frac{x}{y}.$$

Quae est aequatio pro curua quaesita.

Exemplum 1.

682. Sit $\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}} = 2$, seu $\delta = \frac{4}{3}$, atque $c = \frac{2f}{3a^2}$. Erit $2xy = (a+\sqrt{(a^2-y^2)})^2+(a-\sqrt{(a^2-y^2)})^2 = 4a^2-2y^2$. Ponatur applicata PM $= z$, fiet $x\sqrt{(x^2+z^2)} = 2a^2-x^2-z^2$, et sumendis quadratis $0 = 4a^4-4a^2x^2-4a^2z^2+x^2z^2+z^4$, siue $x = \frac{2a^2-z^2}{\sqrt{(4a^2-z^2)}}$.

Haec

M.E.C.D. 2017

Haec curua igitur ad inſtar parabolae progreditur, ſed habet aſymtoton rectae AC parallelam et ab ea interuallo $2a$ diſſitam, quam nunquam attingit.

Exemplum 2.

683. Sit $V\frac{\delta}{\delta-1}=3$, ſeu $\delta=\frac{9}{8}$ et $c=\frac{9f^3}{16a^2}$ Oritur ergo $2xy^2=(a+V(a^2-y^2))^3+(a-V(a^2-y^2))^3=8a^3-6ay^2$. Atque inducta applicata $PM=z$, habebitur $x^3=4a^3-xz^2-3ax^2-3az^2$. Haec curua ordinis tertii pertinet ad ſpeciem 41 in enumeratione a *Neutono* facta.

Scholion 3.

684. Innumerabiles aliae inueniri poſſunt curuae algebraicae, quae a corpore proiecto in hac hypotheſi deſcribuntur, ſi ponatur $\delta=\frac{m^2}{m^2-1}$, denotante m numerum quemcunque rationalem vnitate maiorem ne fiat δ negatiuum. Hae autem tres hypotheſes pertractatae, quibus vis centripeta primo diſtantiis, ſecundo reciproce quadratis diſtantiarum et tertio reciproce cubis diſtantiarum eſt poſita proportionalis, ſunt ſolae, quae deducunt ad curuas vel algebraicas vel a circuli aut hyperbolae quadraturis pendentes; ſi quidem loco P potentia ipſius y ſubſtituatur. Quanquam autem in aliis poteſtatibus ipſius y loco P ſubſtitutis aequatio pro curua deſcripta non poteſt ab irrationalitate liberari, et hanc ob rem neque algebraica neque a quadratura circuli vel hyperbolae pendens eſſe poteſt; tamen dantur caſus ſpeciales, quibus curua quaeſita fit al-

ge-

M.E.C.D. 2017

gebraica. Namque quemadmodum linea recta et circulus in omnibus hypotheſibus ſatisfacere poſſunt ; ita etiam quandoque aliae curuae algebraicae reperiuntur. Has autem quomodo inueniri oporteat in ſequenti propoſitione declarabimus.

PROPOSITIO 83.
Problema.

685. *Exiſtente vi centripeta vt poteſtas diſtantiarum quaecunque, inuenire caſus ſpeciales, quibus corpus certo quodam modo proiectum in linea algebraica moueatur.*

Solutio.

Manentibus omnibus, vt hactenus, pro curua quaeſita inuenta eſt haec aequatio $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{hdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-ch^2-y^2Y)}}$ (601). Noſtro autem caſu eſt $P=\frac{y^n}{f^n}$, denotante f diſtantiam, in qua vis centripeta grauitati aequatur. Hinc erit $Y=\int P dy=\frac{y^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Deinde quia curuas algebraicas requirimus, ponimus $h=a$ (640). His ſubſtitutis erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{ady\sqrt{cf^n(n+1)}}{y\sqrt{((n+1)cf^n(y^2-a^2)-y^2(y^{n+1}-a^{n+1}))}}$. Sit diſtantia celeritates determinans k, erit $c = \frac{k^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Hac igitur loco c introducta erit

$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$

M.E.C.D. 2017

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{a\,dy\,\sqrt{(k^{n+1}-a^{n+1})}}{y\,\sqrt{(a^{n+3}-a^2k^{n+1}+k^{n+1}y^2-y^{n+3})}}.$$

Patet hinc si $k=a$, quo casu fit $c=o$, fore $u=$ const. $=1$, ideoque $x=y$, qui est casus, quo corpus recta descendit ad centrum. Si k est infinita, erit c quoque infinita, quoties $n+1$ est numerus affirmatiuus. Hoc igitur casu corpus etiam in recta progredi debebit, quia vis finita corporis infinita celeritate moti directionem non valet mutare. Ponamus ergo $n+1$ esse numerum negatiuum $=-m$, seu $n=-m-1$, fiet

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{y^{\frac{m-4}{2}}\,dy\,\sqrt{(k^m-a^m)}}{\sqrt{(a^{m-2}k^m+a^my^{m-2}-k^my^{m-2}-a^{m-2}y^m)}}.$$

Fiat k infinite magna, erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{y^{\frac{m-4}{2}}\,dy}{\sqrt{(a^{m-2}-y^{m-2})}}$ euanescentibus reliquis terminis; et ponatur $y^{m-2}=q^2$, erit $y=q^{\frac{2}{m-2}}$. Hacque facta substitutione oritur sequens aequatio $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{2dq}{(m-2)\sqrt{(a^{m-2}-q^2)}}$. Qua formula comparata cum vniuersali $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (604), erit $\lambda=\frac{2}{m-2}$, $A=a^{\frac{m-2}{2}}$ et $Z=q=y^{\frac{m-2}{2}}$. Emerget igitur ista aequatio algebraica pro curua quaesita, $2y^{\frac{m-2}{2}}\sqrt{-1}$

$$=(\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^{\frac{m-2}{2}}(\sqrt{a^{m-2}-C^2})+C\sqrt{-1})-$$

M.E.C.D. 2017

$(\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\frac{m-2}{2}}(\sqrt{(a^{m-2}-C^2)}-C\sqrt{-1})$ (607).
Conſtans C ex hoc determinatur, quod facto $u=1$ fieri debeat $y=a$. Hanc ob rem erit $2y^{\frac{m-2}{2}} = a^{\frac{m-2}{2}}((u-\sqrt{(u^2-1)})^{\frac{m-2}{2}}+(u+\sqrt{(u^2-1)})^{\frac{m-2}{2}})$.
Quoties igitur m eſt numerus rationalis affirmatiuus, inuenitur curua algebraica, quam corpus normaliter proiectum exiſtente diſtantia celeritates determinante infinita, deſcribet. Q. E. I.

Corollarium 1.

686. Sumendis quadratis obtinebitur $4y^{m-2}-2a^{m-2}=a^{m-2}((u+\sqrt{(u^2-1)})^{m-2}+(u-\sqrt{(u^2-1)})^{m-2})$ ſeu ob $m=-n-1$, haec aequatio $4y^{-n-3}-2a^{-n-3}=a^{-n-3}((u+\sqrt{(u^2-1)})^{-n-3}+(u-\sqrt{(u^2-1)})^{-n-3})$.

Corollarium 2.

687. Oportet eſſe m numerum affirmatiuum nihilo maiorem. Nam ſi eſſet m vel $=o$ vel numerus negatiuus, celeritas corporis foret infinita, et curua propterea linea recta.

Corollarium 3.

688. Si ſit $n=-2$, habebitur iſta aequatio $\frac{4a}{y}-2=2u=\frac{2x}{y}$, ſeu $2a=x+y$. Quae poſita applicata PM, $\sqrt{(y^2-x^2)}=z$ abit in hanc aequationem $z^2=4a^2-4ax$, pro parabola centro virium in foco poſito, vt iam inuenimus (647).

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

689. Si $n=-3$ seu $m=2$, qui est casus in praecedente propos. tractatus, erit $2y^{\frac{m-2}{2}}=2a^{\frac{m-2}{2}}$ seu $y=a$. Curua ergo quam corpus describet erit circulus, in cuius centrum ipsum centrum virium incidit.

Scholion 1.

690. Si n est numerus impar, erit m par ideoque $\frac{m-2}{2}$ integer. His igitur casibus formula in solutione problematis inuenta vti conueniet. At si n fuerit par, formula (686) quadratis sumtis producta debet adhiberi. Statim enim vtroque casu ad aequationem rationalem inter x et y peruenitur vt in sequentibus exemplis apparebit.

Exemplum 1.

691. Attrahat centrum in ratione reciproca quadruplicata distantiarum, et corpus normaliter proiiciatur existente distantia celeritates determinante infinita; curua, quam corpus describit erit algebraica sequens. Ob $n=-4$ erit $4y-2a=2au=\frac{2ax}{y}$, seu $2y^2=a(y+x)$. Introducta vero applicata $z=\sqrt{(y^2-x^2)}$ erit $2x^2+2z^2=ax+a\sqrt{(x^2+z^2)}$, quae aequatio est pro curua ordinis quarti.

Exemplum 2.

692. Sit vis centripeta reciproce in quintuplicata distantiarum ratione, seu $n=-5$ et $m=4$.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Habebitur ergo $2y = 2au = \frac{2ax}{y}$, atque $yy = ax = x^2 + z^2$, quae eſt aequatio ad circulum centro virium in eius peripheria poſito. Caſum hunc habet *Neutonus* in Princ. Lib. 1. Prop. VII.

Exemplum 3.

693. Sit $n = -7$, ſeu $m = 6$, erit $2y^2 = 4a^2u^2 - 2a^2$ ſeu $y^4 = 2a^2x^2 - a^2y^2$. Poſita applicata PM $= z$, prodibit iſta aequatio $(x^2 + z^2)^2 = a^2x^2 - a^2z^2$, pro linea ordinis quarti, in qua centrum virium quoque in peripheriam incidit.

Scholion 2.

694. De figuris, quas corpora a datis viribus centripetis ſollicitata deſcribunt, hic plura addere operae non eſſet pretium, cum in Phyſica et Aſtronomia aliae virium centripetarum hypotheſes, niſi quae quadratis diſtantiarum reciproce eſt proportionalis, vſum habeant nullum. Quando tamen in Aſtronomia corpus a pluribus huiusmodi viribus ſollicitatum conſiderari debet, quarum vna prae reliquis maximam vim exercet, haec prout res poſtulat ne reliquas in computum ducere opus ſit, aliquantum vel augetur vel diminuitur, quo ſaltem quam fieri poteſt proxime motus illius corporis cognoscatur. His igitur caſibus curua, quam corpus deſcribit, non multum discrepabit ab ellipſi. Hanc ob rem Aſtronomi hanc curuam ad inſtar ellipſis contemplari ſolent, quae autem non eſt fixa ſed mobilis, ita vt corpus in ellipſi circa focum re-

uol-

M.E.C.D. 2017

uoluente moueri concipiant. Ex hocque oritur mobilitas orbitarum planetarum, qua lineae absidum perpetuo in alium situm transferuntur. Nos vero quo propius ad veritatem accedamus praeter mobilitatem axis ellipsis etiam speciem eius tanquam variabilem considerabimus. Ita igitur hac in re versabimur, vt de quolibet elemento curuae, quam corpus describit, determinemus, cuiusnam ellipsis focum in centro virium habentis sit portio, ex quo tam positio quam species istiusmodi ellipsium innotescet. Omnes autem hae ellipses alterutrum focum in ipso centro virium positum habebunt, quia ad id punctum corpus perpetuo retrahitur.

PROPOSITIO 84.

Problema.

695. *Si vis centripeta non multum discrepat a ratione reciproca duplicata distantiarum; determinare motum ellipsis, eiusque continuam speciei mutationem, atque corporis motum in ista mutabili ellipsi.* Tabula VI. Fig. 5.

Solutio.

Sit centrum virium C, habeatque corpus in M secundum directionem MT celeritatem altitudini v debitam. Ponatur vis centripeta in M agens $=P$, distantia $CM=y$ et sinus anguli $CMT=s$. Iam perspicuum est, quamcunque legem teneat P, semper tamen aequari posse huic formae $\frac{f^2}{y^2}$, dummodo f

M.E.C.D. 2017

non quantitatem constantem vt hactenus, sed variabilem denotet. Erit ergo $f^2 = Py^2$. Quia autem dum corpus elementum Mm percurrit f constans manet, poterit determinari ellipsis, cuius focus est C et elementum Mm, in qua corpus, si f perpetuo maneret constans, moueretur. Sit igitur AC huius ellipsis axis transuersi positio, erit tangens anguli $MCA = \frac{2svy\sqrt{(1-ss)}}{ff-2ssvy}$ (656), quae ergo erit $= \frac{2sv\sqrt{(1-ss)}}{Py-2s^2v}$. At latus rectum erit $= \frac{4s^2v}{P}$ et axis transuersus $\frac{Py^2}{Py-v}$ (cit.). Ex centro C demittatur perpendiculum CT in tangentem MT, quod ponatur $= p$, erit $s = \frac{p}{y}$. Atque vbi perpendiculum in tangentem est $= h$, quod fiat in G posita $CG = a$, sit corporis celeritas debita altitudini c, ex quo erit $v = \frac{ch^2}{p^2}$ (589). Tangens vero $MT = \sqrt{(y^2-p^2)}$ ponatur breuitatis gratia $= t$. His positis erit tang. ang. $MCA = \frac{2ch^2t}{Py^3p-2ch^2p}$ et latus rectum $= \frac{4ch^2}{Py^2}$, transuersum vero $= \frac{Py^2p^2}{Pyp^2-ch^2}$. Praeterea vero est ex natura attractionis $Pdy = \frac{2ch^2dp}{p^3}$ (587). Ex qua aequatione p in y poterit determinari, adeoque tota ellipsis ex solo y, et c et h. Sit iam CE linea fixa, cum qua angulus, quem recta CM constituit, ex natura curuae potest definiri. Ab hoc igitur angulo, si auferatur angulus MCA, habebitur inclinatio lineae absidum AC in rectam fixam CG. Motus autem corporis ex cognita celeritate, $v = \frac{ch^2}{p^2}$ facile innotescet. Q. E. I.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

696. Ellipsis hoc modo determinata merito potest vocari ellipsis curuam osculans ad similitudinem circulorum osculatorum, quibus curuedines linearum mensurantur. Haec vero consideratio non est pure geometrica, sed ad hanc ellipsin osculantem inueniendam praeter curuae naturam nosse oportet celeritatem corporis et vim centripetam.

Corollarium 1.

697. Si t euanescit linea absidum AC seu positio axis ellipsis osculantis incidit in radium CM, ob euanescentem angulum MCA.

Corollarium 2.

698. Si fuerit $P = \frac{2ch^2}{y^3}$, fiet angulus MCA rectus: Hoc igitur casu erit vis centripeta vt cubus distantiae reciproce. Quare posito $P = \frac{f^3}{y^3}$, erit $c = \frac{f^3}{2h^2}$. Curua autem, quae tum a corpore describitur, est spiralis hyperbolica (679). Pro hac igitur curua linea absidum perpetuo est normalis cum radio MC. At latus rectum ellipsis osculantis erit $= 2y = 2MC$.

Corollarium 3.

699. Si fuerit $P = \frac{f^n}{y^n}$, erit $\int P dy = -\frac{f^n}{(n-1)\,y^{n-1}}$ $= C - \frac{ch^2}{p^2}$. Quia vero facto $y = a$ fieri debet $p = b$ erit $C = c - \frac{f^n}{(n-1)\,a^{n-1}}$. Hinc inuenietur

$p^2 =$

M.E.C.D. 2017

$p^2 = \frac{(n-1)\,c\,h^2 a^{n-1} y^{n-1}}{(n-1)\,c\,a^{n-1} y^{n-1} + f^n (a^{n-1} - y^{n-1})}$. Latus rectum ergo ellipsis osculantis erit $\frac{4ch^2 y^{n-2}}{f^n}$. Latus trausuersum et ang. MCA ex his etiam in y determinabuntur.

Corollarium 4.

700. Si fuerit $P = \frac{ch^2}{yp^2}$, ellipsis osculans semper erit parabola. Fiet autem hoc valore loco P in aequatione $P\,dy = \frac{2ch^2 dp}{p^3}$ substituto $p^2 = \frac{h^2 y}{a}$. Et consequenter $P = \frac{ac}{yy}$. Hoc autem casu curua descripta haec ipsa est parabola ob $f^2 = ac$ (647).

Scholion 2.

701. Non confundenda est haec ellipsium osculantium doctrina cum motu corporum in orbibus mobilibus, de quo *Neutonus* aliique post eum tractauerunt. Hoc enim loco determinauimus, cuiusnam ellipsis portio sit quoduis elementum curuae a corpore descriptae. At, quando de orbibus mobilibus sermo erit, inuestigabitur vis centripeta efficiens, vt corpus in data curua circa centrum virium reuoluente moueatur.

PROPOSITIO 85.

Theorema.

Tabula VI. Fig. 6.

702. *Si corpus vtcunque proiectum attrahatur ad quotcunque centra virium* A, B, C, *quorum singulorum vires sint distantiis ab ipsis proportionales:*

M.E.C.D. 2017

les: corpus eodem modo mouebitur ac ſi ad punctorum **A, B, C,** *commune centrum grauitatis* **O** *attraheretur pariter in ratione diſtantiarum ſimplici.*

Demonſtratio.

Poſitis centrorum A, B, C, viribus, quas in diſtantia 1 exercent, α, $\mathfrak{C}$, γ, reſpectiue, ſit *ac* directio motus, quam corpus in M habet, ideoque tangens curuae EMF deſcriptae in M. At ſit **O** centrum grauitatis corporum α, $\mathfrak{C}$, γ, in punctis A, B, C poſitorum, et in O concipiatur vis diſtantiis directe proportionalis, quae in diſtantia 1, attrahat vi $= \alpha + \mathfrak{C} + \gamma$. His poſitis corpus in M attrahetur ad A vi AM.α, ad B vi BM.$\mathfrak{C}$, et ad C vi CM.γ. His autem viribus ſimul agentibus demonſtrandum eſt aequalem eſſe vim OM.$(\alpha + \mathfrak{C} + \gamma)$ corpus ad O trahentem. Ad hoc oſtendendum ex punctis A, B, C et O in tangentem *ac* demittantur perpendicula A*a*, B*b*, C*c* et O*o*. Hoc modo quaelibet vis in normalem et tangentialem reſoluetur, eritque ſumma normalium ex viribus ad A, B, C tendentibus ortarum $= \alpha$. A*a* $+ \mathfrak{C}$. B*b* $+ \gamma$. C*c*, ſumma vero tangentialium erit $= -\alpha$. M*a* $+ \mathfrak{C}$. M*b* $+ \gamma$. M*c*. At quia O eſt centrum grauitatis corporum α, $\mathfrak{C}$, γ in A, B, C ſitorum, liquet ex ſtaticis fore α. A*a* $+ \mathfrak{C}$. B*b* $+ \gamma$ C*c* $= (\alpha + \mathfrak{C} + \gamma)$. O*o* et $-\alpha$. M*a* $+ \mathfrak{C}$. M*b* $+ \gamma$. M*c* $= (\alpha + \mathfrak{C} + \gamma)$ M*o*. Ex quo perſpicitur viribus α AM, $\mathfrak{C}$. BM, γ. CM coniunctis aequiualere vim $(\alpha + \mathfrak{C} + \gamma)$OM. Q. E. D.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

703. Corpus igitur in hac hypotheſi ellipſin deſcribet, cuius centrum in ipſo centro grauitatis O eſt poſitum (631). Omnes enim vires idem efficiunt, quod vnica in O poſita et attrahens in ratione directa diſtantiarum.

Corollarium 2.

704. Manifeſtum quoque eſt, quotcunque etiam ſint huiusmodi virium centra in ratione diſtantiarum attrahentia; ſemper tamen corpus in ellipſi motum iri, omnino ac ſi ad vnicum virium centrum in eorum communi centro grauitatis poſitum attraheretur.

Scholion 1.

705. Demonſtratio porro pari quoque modo ſuccedit, ſi illa quotcunque virium centra non ſint in eodem plano poſita, quemadmodum ex ſtaticis principiis cuique perſpectum eſſe poteſt. Hincque intelligitur, corpus nihilominus perpetuo in eodem plano moueri debere, etiamſi centra virium in diuerſisſimis planis ſint diſperſa.

Scholion 2.

706. Si centra virium in alia ratione quacunque praeter ſimplicem diſtantiarum ad ſe trahant, huiusmodi reductio ad vnicum virium centrum locum prorſus non habet, atque motus corporis calculo vix, re ipſa autem ne vix quidem po-

teſt

M.E.C.D. 2017

teſt determinari. His igitur in caſibus ad approximationes erit confugiendum, quae pro variis conditionibus diuerſimode ſunt inſtituendae. Atque hanc ob rem *Neutonus* verum lunae motum, qui ex duplici attractione oritur, determinare non ſuscepit, ſed vero tantum proxime hoc praeſtare conatus eſt. Ad hoc autem opus eſt peculiaribus conſiderationibus, atque inuerſa methodus eſt adhibenda, qua ex curua, quam corpus deſcribit cognita, ad vires attrahentes receditur. Quamobrem, quae ſubſidia ad hoc inſtitutum afferri poſſunt, ea in ſequentibus, cum inuerſo ordine vim ſollicitantem tanquam incognitam ſumus inueſtigaturi, explicabimus. Ad hanc igitur tractationem progrediemur quae duplici modo inſtitui poteſt. Primo enim praeter curuam deſcriptam vt cognita ſumetur potentiae ſollicitantis directio in ſingulis locis, ex hisque quantitas potentiae ſollicitantis et ipſe corporis motus determinabitur. In altera contemplatione curua et corporis motus in ea pro datis accipientur, ex quibus potentiam ſollicitantem erui oportebit.

PROPOSITIO 86.
Problema.

707. *Inuenire legem vis perpetuo dorſum ſecundum rectas* MP *inter ſe parallelas tendentis, quae faciat, vt corpus in data curua* AM *moueatur; atque determinare corporis in ſingulis locis* M *celeritatem.* Tabula VII. Fig. 1.

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Per rectas MP ducatur normali AP, et vocetur AP, x et PM, y. Ponatur curua AM$=s$, et radius osculi MR in M$=r$, erit $r=\frac{dsdy}{ddx}$ sumto ds pro constante. Porro debita sit corporis in M celeritas altitudini v, et vis corpus in M trahens secundum MP ponatur P. Ex his habebuntur duae istae aequationes $dv=-Pdy$ et $Prdx=2vds$ (547), ex quibus si cognita esset v statim appareret quantitas ipsius P. Eliminetur igitur P ad v inueniendum ex hac aequatione $rdxdv=-2vdsdy$, quae posito loco r eius valore $\frac{dsdy}{ddx}$ abit in hanc $-\frac{dv}{v}=\frac{2ddx}{dx}$, quae integrata dat $lC-lv=l\frac{dx^2}{ds^2}$. Cognita autem sit celeritas in puncto A, eaque debeatur altitudini c, atque sit cosinus anguli MAP seu valor ipsius $\frac{dx}{ds}$ incidente puncto M in A$=\lambda$. Hinc ergo erit $lC=lc+2l\lambda$ et consequenter $v=\frac{\lambda^2 c ds^2}{dx^2}$, vnde corporis in singulis locis M celeritas innotescit. Vis autem sollicitans P reperietur $=\frac{2\lambda^2 c ds^3}{rdx^3}=\frac{2\lambda^2 c ds^2 ddx}{dx^3 dy}$. Siue sumto dx pro constante, quo casu est $r=\frac{ds^3}{-dxddy}$, erit $P=\frac{-2\lambda^2 cddy}{dx^2}$. Tempus denique, quo arcus AM percurritur erit $=\int\frac{ds}{\sqrt{v}}=\frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

708. Quaecunque ergo sit vis sollicitans, corpus perpetuo aequabiliter secundum horizontem progreditur, ob tempus per AM proportionale ipsi AP, vti iam supra est obseruatum (579).

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

709. Si ex R in rectam MP productam demittatur perpendicularis RS, et ex S in MR quoque perpendiculum ST, atque denique tertium perpendiculum TV ex T in MS: erit $MV = \frac{r dx^3}{ds^3}$. Quare vis sollicitans P se habebit ad vim grauitatis vt $2\lambda^2 c$ ad MV, seu P est reciproce vt MV.

Corollarium 3.

710. Si angulus ad A est rectus, fiet $\lambda = 0$. Quo casu corpus directe sursum ascendere debebit. At si tantum sit λ infinite paruum atque c infinite magnum, ita vt $2\lambda^2 c$ finitum habeat valorem, corpus in huiusmodi curua vtique moueri poterit.

Exemplum 1.

711. Sit curua AM circulus, cuius diameter posita sit in axe AP, et radius $= a$. Erit itaque $r = a$, et $ds : dx = a : y$. Hanc ob rem fiet $P = \frac{2\lambda^2 a^2 c}{y^3}$, et $v = \frac{\lambda^2 a^2 c}{y^2}$. Vis ergo corpus in M deorsum trahens est reciproce, vt cubus applicatae MP et celeritas reciproce vt haec ipsa applicata. Altitudo vero generans celeritatem in summo peripheriae puncto, vbi fit $y = a$ est $= \lambda^2 c$.

Exemplum 2.

712. Sit curua AMC parabola, cuius axis CB est verticalis et parameter $= a$. Ducatur horizontalis MQ, et ponatur $CQ = t$ et $MQ = z$, erit $z^2 = at$. Praeterea vero erit $dx = -dz$ et $dy = -dt$, Tabula VII. Fig. 2.

M.E.C.D. 2017

et vt ante $V(dt^2+dz^2)=ds$. Quo circa fiet $v=\frac{\lambda^2 c ds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2\lambda^2 c ddt}{dz^2}$ Debita ſit celeritas in puncto ſummo C altitudini b, eritque ob $ds=dz$ in C, $\lambda^2 c=b$, ideoque $v=\frac{bds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2bddt}{dz^2}$ ſumto dz pro conſtante. Ex aequatione vero $z^2=at$ ſit $dt=\frac{2zdz}{a}$ et $ddt=\frac{2dz^2}{a}$, atque $ds^2=dz^2(1+\frac{4z^2}{a^2})$. Conſequenter inuenitur $v=b(\frac{a^2+4z^2}{a^2})=b(\frac{a+4t}{a})$ et $P=\frac{4b}{a}$. Ex quo apparet potentiam deorſum tendentem, quae efficit, vt corpus in hac parabola progrediatur eſſe conſtantem. Quae igitur, ſi aequalis ſit grauitati $=1$, fiet $b=\frac{a}{4}=$ diſtantiae foci a vertice. Quae conueniunt cum ſupra inuentis (454 et ſqq.).

Exemplum 3.

Tabula VII. Fig. 3.

713. Sit curua MAN hyperbola centro C deſcripta habens axem CP verticalem. Ponatur ſemiaxis transuerſus $AC=a$, et ſemi coniugatus $=e$, atque $CP=t$ ac $PM=z$, ſitque inſuper altitudo celeritati quam corpus in A habet, debita $=b$, erit vt ſupra pro parabola fecimus, $v=\frac{bds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2bddt}{dz^2}$ ſumto dz conſtante. Eſt vero ex natura hyperbola $a^2z^2=-a^2e^2+e^2t^2$, ex qua fit $dt=\frac{a^2zdz}{e^2t}$ et $ddt=\frac{a^2dz^2}{e^2t}-\frac{a^2zdzdt}{e^2t^2}=\frac{a^2e^2t^2dz^2-a^4z^2dz^2}{e^4t^3}=\frac{a^4dz^2}{e^2t^3}$. Conſequenter erit $P=\frac{2a^4b}{e^2t^3}$, ſeu potentia corpus deorſum trahens vbique in M proportionalis eſt reciproce cubo diſtantiae ML puncti M ab horizontali LC per centrum C ducta. Porro erit $\frac{ds^2}{dz^2}=\frac{e^4t^2+a^4z^2}{e^4t^2}=\frac{(a^2+e^2)t^2-a^4}{e^2t^2}$. Atque praeterea habebitur $v=\frac{b(a^2+e^2)t^2-a^4b}{e^2t^2}$.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 87.
Problema.

714. *Data curua* AMB *vna cum centro viri-um* C *inuenire legem vis centripetae, quae faciat, vt corpus in hac curua libere moueatur, vt et celeritatem corporis in loco quouis* M. Tabula VII. Fig. 4.

Solutio.

Quia curua AMB vna cum puncto C est data, quaeratur aequatio inter distantiam MC cuiusque curuae puncti M a centro C et perpendiculum CT, quod ex C in tangentem MT demittitur. Quare posita $CM = y$ et $CT = p$ habebitur inter p et y aequatio. Iam sit corporis in dato loco A celeritas debita altitudini c, atque perpendiculum ex C in tangentem in A demissum $= h$. Eorum vero, quae sunt incognita, vocetur altitudo debita celeritati in $M = v$, et vis centripeta in M = P. His positis erit $v = \frac{ch^2}{p^2}$ (589), atque $P = \frac{2ch^2dp}{p^3dy}$ (592). Vel posito radio osculi in $M = r$ erit $P = \frac{2ch^2y}{p^3r}$ (592). Q. E. I.

Corollarium 1.

715. Tempus etiam, quo corpus quem vis Arcum AM absoluit, erit $= \frac{2\,ACM}{h\sqrt{c}}$ seu erit proportionale areae ACM (588).

Corollarium 2.

716. Quia ch^2 est quantitas constans, erit vis centripeta in puncto quouis M proportionalis huic

va-

M.E.C.D. 2017

valori $\frac{dp}{p^3 dy}$ seu huic $\frac{y}{p^3 r}$. Celeritas vero Vv proportionalis est reciproce perpendiculo CT in tangentem MT demisso (589).

Exemplum 1.

717. Sit curua data ellipsis, et centrum virium C in ipso eius centro positum. Vocetur eius semi axis transuersus, a et semiaxis coniugatus, b erit ex natura ellipsis $p = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2-y^2)}}$. Habebitur ergo $dp = \frac{abydy}{(a^2+b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, ideoque $\frac{dp}{p^3 dy} = \frac{y}{a^2 b^2}$. Quocirca prodibit vis centripeta $P = \frac{2ch^2 y}{a^2 b^2}$, quae igitur proportionalis est distantiae corporis a centro.

Exemplum 2.

718. Sit curua data iterum ellipsis, at centrum virium C in eius alterutro foco positum. Ponatur eius axis transuersus $= A$ et latus rectum $= L$, eritque ex natura ellipsis $4pp = \frac{ALy}{A-y}$. Differentiando ergo fit $8pdp = \frac{A^2 L dy}{(A-y)^2}$. Quia vero est $16p^4 = \frac{A^2 L^2 y^2}{(A-y)^2}$ erit $\frac{dp}{2p^3} = \frac{dy}{Ly^2}$, et consequenter $P = \frac{4ch^2}{Ly^2}$. Vis igitur centripeta reciproce erit proportionalis quadrato distantiae corporis a centro virium C.

Exemplum 3.

719. Sit curua spiralis logarithmica, et centrum virium in eius centro positum; erit $p = ny$ et $\frac{dp}{p^3 dy} = \frac{1}{n^2 y^3}$, ideoque $P = \frac{2ch^2}{n^2 y^3}$. Quare vis centripeta erit reciproce vt cubus distantiae corporis a centro.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 88.

Theorema.

720. *Vis tendens ad centrum* C, *quae facit, vt corpus in data curua* AM *moueatur, se habet ad vim tendentem ad aliud centrum* c, *quae facit, vt corpus in eadem curua et eodem tempore periodico moueatur, vt cubus rectae* cV *ex* c *ad tangentem* TM *parallele rectae* CM *ductae, ad solidum ex recta* cM *in quadratum rectae* CM. Tabula VII. Fig 5.

Demonstratio.

Sit corporis celeritas in dato puncto A, cum corpus circa centrum virium C reuoluitur debita altitudini c, et perpendiculum ex C in tangentem in A demissum $= h$. At cum corpus circa centrum virium c mouetur, sit celeritas in A debita altitudini γ, et perpendiculum ex centro c in tangentem in A demissum $= \theta$. Quia autem tempora periodica circa vtrumque virium centrum sunt aequalia erit $h\sqrt{c} = \theta\sqrt{\gamma}$ seu $ch^2 = \gamma\theta^2$ (715). Ex centro C et c porro in tangentem in M demittantur perpendicula CT et ct, sitque radius osculi in M $= r$. His positis erit vis centripeta in M ad centrum C tendens, quam vocemus $P = \frac{2ch^2 . CM}{r . CT^3}$. Atque vis centripeta in M ad centrum c tendens, quam vocemus $\Pi = \frac{2\gamma\theta^2 . cM}{r . ct^3}$ (714). Quamobrem ob $ch^2 = \gamma\theta^2$ erit $P : \Pi = \frac{CM}{CT^3} : \frac{cM}{ct^3}$. Ducta autem cV parallela rectae CM erit, ob triangula TCM et tcV similia, CT : ct = CM : cV. Hanc ob rem erit $P : \Pi = \frac{1}{CM^2} : \frac{cM}{cV^3}$ = $cV^3 : cM . CM^2$. Q. E. D.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

721. In eodem puncto M erit celeritas corporis, dum ad virium centrum C attrahitur ad celeritatem, dum ad alterum centrum c attrahitur, reciproce vt CT ad ct, siue directe vt cV ad CM. Sequitur hoc ex eo, quod est $ch^2 = \gamma\theta^2$.

Corollarium 2.

722. Si tempora periodica non sint aequalia, sed sint inter se vt T ad t; erit $T:t = \frac{1}{h\sqrt{c}} : \frac{1}{\theta\sqrt{\gamma}}$ seu $ch^2 : \gamma\theta^2 = t^2 : T^2$. Consequenter erit $P : \Pi = t^2 . cV^3 : T^2 . cM . CM^2$. Seu vires P et Π erunt in ratione composita ex ratione in theoremate assignata, et inuersa duplicata temporum periodicorum.

Corollarium 3.

723. Eodem hoc casu, quo tempora periodice sunt inaequalia, erit celeritas in M centro virium in C posito, ad celeritatem in M centro virium in c posito in ratione reciproca composita ex ratione perpendiculorum CT et ct et ratione temporum periodorum $T : t$.

Scholion 1.

724. Propositionem hanc *Neutonus* deduxit ex Lib. I. prop. VII. in coroll. 3. Princ. eaque vtitur ad inueniendam vim centripetam tendentem ad punctum quodcunque ex cognita vi ad aliud quodpiam centrum trahente. Nos hic vsum eius in vnico exemplo sequente ostendemus.

Ex-

M.E.C.D. 2017

Exemplum.

725. Sit curua data circulus AMc, alterumque centrum virium positum sit in ipso circuli centro C. Vis igitur centripeta P ad C tendens vbique erit constans, dicaturque g. Ex hac quaeratur vis ad centrum virium c in peripheria situm tendens Π, faciensque, vt corpus eodem tempore periodico in circulo moueatur. Demittatur ergo ex c in tangentem MV perpendiculum CV, quod ex natura circuli simul parallelum erit rectae CM. Quamobrem erit $g:\Pi = cV^3 : cM.CM^2$, ideoque $\Pi = \frac{g.cM.CM^2}{cV^3}$. Ducatur recta AM erunt triangula cVM, cMA ob ang. $cMV = cAM$, similia; et propterea $cV : cM = cM : cA$. Habetur ergo $cV = \frac{cM^2}{2CM}$, ex quo fit $\Pi = \frac{8g.CM^5}{cM^5}$. Est igitur haec vis Π reciproce vt potestas quinta distantia Mc corporis a centro virium c, vt iam supra (692) est inuentum. Tabula VII, Fig. 6.

Corollarium 4.

726. Sit celeritas corporis in peripheria circuli circa centrum C reuoluentis debita altitudini c, et celeritas corporis in M circa centrum virium c reuoluentis debita altitudini v. Eritque $\sqrt{c} : \sqrt{v} = cV : CM = cM^2 : 2.CM^2$ (721) seu $v = \frac{4c.CM^4}{cM^4}$. Quamobrem celeritas corporis circa centrum c reuoluentis erit vbique reciproce vt quadratum distantiae eius ab c.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

727. Quia centro virium in centro circuli C existente, est $h = y = p = r =$ radio CM; erit $P = g = \frac{2c}{CM}$ (592). Hanc ob rem fiet posito $\Pi = \frac{f^5}{c\,CM^5}$, $g = \frac{f^5}{8.CM^5}$, et $c = \frac{f^5}{16.CM^4}$. Ideoque $v = \frac{f^5}{4.cM^4}$.

Scholion 2.

728. In his propositionibus posuimus curuam, quam corpus describit, absolute esse datam et aequationem pro ea haberi. Sed dantur etiam casus, quibus curua ipsa quam corpus describit non datur, sed ex certis conditionibus ad ipsum motum spectantibus ante debet inueniri, quam lex vis centripetae potest determinari. Hucque pertinent, quae passim tradita sunt de motu corporum in orbibus mobilibus, qua de re igitur in sequenti propositione tractabimus.

PROPOSITIO 89.

Problema.

Tab. VIII. Fig. 1.

729. *Si orbita* (A) (M) (B) *vtcunque reuoluatur circa centrum virium* C, *oportet definiri vim centripetam perpetuo ad* C *tendentem, quae faciat vt corpus in hac orbita mobili moueatur.*

Solutio.

Dum orbita ex situ (A) (M) (B) in situm AMB peruenit, ponatur corpus interea ex (A) in M peruenisse, ita vt corpus interea in orbita angulum (A)C(M) = ACM, reuera autem angulum (A)CM = (A)

M.E.C.D. 2017

$=$(A)C(M)$+$(A)CA deſcripſerit. Exiſtente initio corpore in (A) ſit eius celeritas vera non ea, quam in orbita habet, debita altitudini c, et recta C(A), quae tam in orbitam quam in veram curuam, in qua corpus mouetur, ſit perpendicularis $=a$. Porro ſit celeritas corporis in M, quatenus in orbita mouetur, debita altitudini u, et vera corporis celeritas in M debita altitudini v. At celeritas angularis in orbita ſit ad veram celeritatem angularem circa C, dum corpus in M verſatur, vt 1 ad w. In orbita igitur tanquam immobili ſpectata elementum (M)(m) celeritate $\sqrt{u}$ deſcribetur. Ponatur diſtantia C(M)$=$CM$=y$, et perpendiculum in tangentem orbitae in (M) vel M ex C demiſſum, C(T) $=$CT$=p$, habebiturque ob orbitam datam aequatio inter p et y. Iam dum corpus in orbita elementum Mm deſcribit, progrediatur ipſa orbita motu angulari circa C per angulum $=m$Cμ, et hanc ob rem corpus reipſa non in m, ſed in μ reperietur, ſumto C$\mu=$Cm, atque idcirco interea elementum Mμ deſcripſiſſe cenſendum eſt, id quod fecit celeritate debita altitudini v. Erit itaque Mμ : M$m=\sqrt{v}:\sqrt{u}$, atque centro C deſcripto arculo Mν (ob datam motuum angularium circa C in orbita et reuera rationem 1 : w) erit Mn : M$\nu=$1 : w. Eſt vero poſita tangente MT$=\sqrt{(y^2-p^2)}=q$, M$m=\frac{ydy}{q}$, et M$n=\frac{pdy}{q}$. Quo circa habebitur M$\mu=\frac{ydy\sqrt{v}}{q\sqrt{u}}$, et M$\nu=\frac{wpdy}{q}$. Ex quo ob $\mu\nu=mn=dy$ prodibit $1+\frac{w^2p^2}{q^2}=\frac{vy^2}{uq^2}$ ſeu $vy^2=uq^2+w^2up^2$. Quia Mμ eſt ele-

M.E.C.D. 2017

mentum veraе curuae, quam corpus deſcribit, demittatur in hoc productum ex C perpendiculum CΘ, eritque $M\mu : M\nu = CM : C\Theta$, vnde fit $C\Theta = \frac{wp\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Ex hoc vero perpendiculo cognoscitur vera corporis celeritas, erit enim $v = \frac{a^2cv}{w^2up^2}$ (589) ideoque $u = \frac{a^2c}{w^2p^2}$ et $v = \frac{a^2c(q^2+w^2p^2)}{w^2p^2y^2}$. His loco u et v positis valoribus, erit $C\Theta = \frac{wpy}{\sqrt{(q^2+w^2p^2)}}$, quam breuitatis gratia vocemus π. Ex hac autem π cognita innotescit ipsa vis centripeta P, quae facit vt corpus in hac data orbita, hocque modo mobili moueatur. Namque erit $P = \frac{2a^2cd\pi}{\pi^3 dy}$ (592). At ob $\pi^2 = \frac{w^2p^2y^2}{q^2+w^2p^2}$, erit $\frac{1}{\pi^2} = \frac{q^2}{w^2p^2y^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{w^2y^2} + \frac{1}{w^2p^2}$, ideoque $-\frac{2d\pi}{\pi^3} = -\frac{2dy}{y^3} + \frac{2dw}{w^3y^2} + \frac{2dy}{w^2y^3} - \frac{2dw}{w^3p^2} - \frac{2dp}{w^2p^3}$ seu $\frac{d\pi}{\pi^3} = \frac{dy(w^2-1)}{w^2y^3} + \frac{q^2dw}{w^3y^2q^2} + \frac{dp}{w^2p^3}$. Consequenter habebitur $P = \frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2y^3} + \frac{2a^2cq^2dw}{w^3y^2p^2dy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

730. Posito radio $= 1$, est $\frac{m\mu}{CM} = \frac{(w-1)pdy}{qy}$ elementum anguli (A)CA quem orbita confecit dum corpus arcum (A)(M) percurrit. Hanc ob rem erit ang. (A)CA $= \int \frac{(w-1)pdy}{qy}$. Estque $w-1 : 1$ vt celeritas angularis orbitae, ad celeritatem angularem corporis, dum est in M, in ipsa orbita.

Corollarium 2.

731. Celeritas corporis in orbita, quae est vt $\sqrt{u}$, reciproce proportionalis est ipsi wp. Ergo, nisi w sit constans, fieri non potest, vt corpus hoc mo-

M.E.C.D. 2017

modo in orbita quiescente moueatur, attractum ad centrum C.

Corollarium 3.

732. Posito igitur w constante, i. e. ratione motus angularis corporis ad motum angularem orbitae perpetuo eadem, erit etiam celeritas corporis in orbita γu reciproce proportionalis perpendiculo C(T) in tangentem. Atque vis centripeta ad C tendens, atque efficiens vt corpus hac ratione in orbita quiescente moueatur erit $= \frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy}$. Sit enim celeritas respectu orbitae quam corpus in (A) habet, debita altitudini γ, erit $\sqrt{\gamma} : \sqrt{c} = 1 : w$ (*p. hyp.*) atque $c = w^2\gamma$, ex quo vis centripeta ad C tendens, faciensque vt corpus in orbita quiescente moueatur, erit $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}$, vt etiam ex supra traditis inuenitur (592).

Corollarium 4.

733. Angulus igitur (A)CA in hac hypothesi, qua w ponitur constans, qui ab orbita absoluitur, dum corpus arcum (A)(M) percurrit, erit $= (w-1)\int \frac{pdy}{qy} = (w-1)\,ang.$(A)C(M). Ergo vna tota corporis in orbita reuolutione, ipsa orbita circa C gyrabitur angulo $(w-1)$ 360 graduum.

Corollarium 5.

734. Vis autem, quae efficit, vt corpus in hac orbita mobili proportionaliter motui angulari in ipsa orbita, moueatur erit $= \frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2y^3}$

seu

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

seu $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$. Quare differentia inter vim centripetam pro orbita immobili et vim pro orbita mobili reciproce proportionalis est cubo distantiae corporis a centro virium C.

Corollarium 6.

735. Si sit $w = 1$, erit $w-1 = 0$, motusque orbitae nullus, quo casu etiam vis centripeta fit $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy}$ euanescente altero termino. Idem euenit si $w = +1$ seu $w-1 = -2$, quo casu orbita in antecedentia mouetur duplo velocius, quam ipsum corpus in orbita ingreditur. At vera curua, quae hoc motu a corpore describitur, non differt ab orbita, nisi quod sit inuersa.

Corollarium 7.

736. Si $w > 1$ orbita in consequentia mouetur qui motus, quo sit maior, eo maior etiam erit vis centripeta. At si $w < 1$, orbita in antecedentia tendit, et vis centripeta fit minor, ob w^2-1 negatiuum.

Corollarium 8.

737. Si $w = 0$ fit etiam $c = 0$, corpusque in recta linea mouebitur, quia motus angularis orbitae hoc casu aequalis fit et contrarius motui angulari corporis in orbita.

Corollarium 9.

738. Si w est numerus negatiuus, nempe $= -n$, corpus in eadem mouebitur curua ac si esset $w =$

M.E.C.D. 2017

$w = +n$, hoc tantum discrimine, quod corpus in contrarias plagas progrediatur. Et hanc ob rem vis centripeta eundem retinet valorem, siue w affirmatiue siue negatiue accipiatur. Idem etiam vniuersaliter, si w est quantitas variabilis, obtinet.

Exemplum.

739 Sit curua (A)(M)(B) ellipsis, et centrum virium C eius alteruter focus. Ponatur eius latus rectum $= L$ et axis transuersus $(A)(B) = A$; erit $a = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - AL)}$, et $4pp = \frac{ALy}{A-y}$. Sit praeterea w constans, erit vis, quae facit vt corpus in hac ellipsi mobili moueatur $= \frac{4a^2\gamma}{Ly^2} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$ (734). Angulus vero (A)CA, quem orbita absoluit, dum corpus in ea arcum (A)(M) percurrit, erit $= (w - 1)(A)C(M)$ (733). Aequatio vero pro ipsa curua, quam corpus describit, cuius elementum est $M\mu$, habebitur inuenienda aequatione inter $CM = y$, et $C\Theta = \pi$. Est autem $pp = \frac{ALy}{4A-4y}$, et $qq = \frac{4Ay^2 - 4y^3 - ALy}{4A-4y}$, qui valores in aequatione $\pi = \frac{wpy}{\sqrt{(qq + w^2p^2)}}$ substituti dabunt aequationem pro ipsa curua descripta hanc $\pi\pi = \frac{w^2ALy^2}{4Ay - 4y^2 + (w^2-1)Ay}$.

Scholion 1.

740. Curuae ipsae, quas corpora a huiusmodi viribus centripetis sollicitata describunt, difficillime alias cognoscerentur, earumque forma hac consideratione non adhibita nequaquam posset

M.E.C.D. 2017

determinari. Maximam igitur habent vtilitatem huiusmodi virium centripetarum inueſtigationes pro curuis ex datis vtcunque generatis, quo reciproce ex viribus centripetis datis ipſae curuae earumque proprietates innotescant. Occurrunt enim in motibus corporum coeleſtium tam complexae virium ea ſollicitantium expreſſiones, vt omnino eorum orbitae determinari nequeant, niſi forte illae vires comprehendantur in tali quodam caſu, de quo a poſteriori vis centripeta eſt inuenta.

Scholion 2.

741. Si corpus in huiusmodi orbita mobili moueri deprehenditur, motus eius et diſtantia quouis tempore a centro C poterit determinari. Atque quoties corpus in orbita in puncta (A) et (B) peruenit, tum in minima vel maxima a C erit diſtantia. Quare cum motus gyratorius lineae (A)(B), quae linea abſidum vocatur, ſit datus; definiri poterit, quando corporis a centro C diſtantia ſit maxima vel minima. *Neutonus* hanc rem pertractauit in princ. Libro 1. tota Sect. IX. eaque theoria vtitur ad motum lineae abſidum orbitae lunaris determinandum. Sed minus accurate haec conſideratio ad lunam accommodari poteſt, cum vis lunam ſollicitans non ad punctum quoddam fixum C, vt hic poſuimus, ſed perpetuo variabile tendat. Operam igitur dabimus, vt, poſtquam reliqua huc pertinentia explicauerimus, alias propoſitiones magis idoneas afferamus, quae ad motum lunae transferri queant.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 90.

Problema.

742. *Cognita curua, quam corpus vi quacunque centripeta* V *sollicitatum describit, determinare curuam, quam corpus a vi centripeta* $V+\frac{C}{y^3}$ *(denotante* y *distantiam* MC *corporis a centro virium* C*), sollicitatum describet.*

Solutio.

Agente vi centripeta $V+\frac{C}{y^3}$, sit corporis celeritas, qua in (A) secundum directionem ad radium C(A) normalem proiicitur, debita altitudini c, et ponatur $C(A)=a$. Vrgente autem vi V, sit (A)(M)(B) orbita, in qua corpus mouebitur proiectum in (A) secundum eandem directionem, sed celeritate debita altitudini γ. Iam ex praecedente propositione manifestum est, vi $V+\frac{C}{y^3}$ effici, vt corpus in eadem orbita (A)(M)(B), sed circa centrum C in data ratione ad motum angularem in ipsa orbita mobili, moueatur. Sit igitur $w-1$ ad 1 vt motus angularis orbitae ad motum angularem corporis in ipsa orbita dum est in M, et sit etiam $c=w^2\gamma$ (732), atque vocetur perpendiculum ex C in tangentem orbitae in M demissum $CT=p$. Hinc perspicuum est, vim centripetam facientem, vt corpus in orbita immobili (A)(M)(B) moueatur, fore $=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}$, ideoque $V=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}$, quam aequationem ergo ob datam curuam (A)(M)(B) construibilem ponimus (*p. hyp.*). Vis autem efficiens, vt corpus

M.E.C.D. 2017

in eadem orbita descripto modo mobili moueatur, erit $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$ (734). Quamobrem habebitur $V + \frac{C}{y^3} = \frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$. Ex quo prodit $C = 2a^2\gamma(w^2-1) = \frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2}$ atque $w^2 = \frac{2a^2c}{2a^2c-C}$. Erit ergo $w - 1 : 1 = \frac{\sqrt{2a^2c} - \sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}} : 1$ atque $\gamma = \frac{2a^2c-C}{2a^2}$. Inuenta igitur curua, quam corpus in (A) celeritate altitudinis $\frac{2a^2c-C}{2a^2}$ proiectum describit sollicitatum a vi V, vis $V + \frac{C}{y^3}$ efficiet, vt corpus in (A) celeritate $\sqrt{c}$ proiectum moueatur in eadem orbita mobili ita, vt sit motus angularis orbitae ad motum angularem corporis in hac orbita, quemadmodum est $\frac{\sqrt{2a^2c} - \sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}}$ ad 1. Motus autem corporis in ipsa orbita idem erit, quem habet in orbita immobili a vi tantum V sollicitatum et in (A) celeritate debita altitudini $\frac{2a^2c-C}{2a^2}$ proiectum, qui motus per hypothesin est cognitus. Q. E. I.

Corollarium 1.

743. Dum igitur corpus in orbita ex (A) ad (B) peruenit, seu circa centrum C angulo 180 gr. reuoluitur, ipsa orbita interea angulo $\frac{\sqrt{2a^2c} - \sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}}$. 180 grad. circa C gyrabitur.

Corollarium 2.

764. Si igitur recta (A)(B) est linea absidum, erit punctum (A) ima, punctum (B) vero summa absis, vti in astronomia vocantur; corpus igitur ab absidе ima ad summam perueniet absoluto motu angulari

$$180 \sqrt{\left(1 - \frac{C}{2a^2c}\right)}$$

circa C gradus. Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

745. Tempus, quo corpus in orbita mobili ex (A) in M peruenit, aequatur tempori quo in quiescente ex (A) in (M) pertingit. Angulus vero (A)CM se habet ad ang. (A)C(M) vt w ad 1 i. e. vt $\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{C}{2a^2c})}}$ ad 1.

Exemplum.

746. Sit vis V reciproce proportionalis quadrato distantiae a centro seu $V=\frac{ff}{yy}$, erit curua (A)(M)(B) ellipsis, in cuius foco positum est centrum virium C. Sit eius axis transuersus (A)(B)$=A$, et latus rectum $=L$, erit $a=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-AL)}=(A)C$ et $(B)C=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-AL)}$. Ob $4pp=\frac{ALy}{A-y}$ erit $\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}=\frac{4a^2\gamma}{Ly^2}=\frac{ff}{yy}$. Hinc fit $4a^2\gamma=Lff=4a^2c-2C$, vnde $L=\frac{4a^2c-2C}{ff}$. Atque $c=\frac{Lff+2C}{4a^2}$. Quae est altitudo debita celeritati corporis in (A) pro orbita mobili ex vi centripeta $\frac{ff}{y^2}+\frac{C}{y^3}$. Motus vero angularis orbitae erit ad motum angularem corporis in orbita vt $\frac{\sqrt{(\frac{1}{2}Lff+C)}-\sqrt{\frac{1}{2}Lff}}{\sqrt{\frac{1}{2}Lff}}$ ad 1. Atque corpus ab absside ima ad summam perueniet, postquam motu angulari ang. $\frac{180\sqrt{(\frac{1}{2}Lff+C)}}{\sqrt{\frac{1}{2}Lff}}=180\sqrt{(1+\frac{2C}{Lff})}$ grad. absoluerit.

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 91.
Problema.

747. *Si figura, quam corpus a quacunque vi centripeta deſcribit, non multum differt a circulo, determinare motum abſidum.*

Solutio.

Comparandus eſt huiusmodi motus cum motu corporis in ellipſi mobili parum excentrica cuius focus alteruter poſitus ſit in centro virium. In hac igitur orbita quiescente corpus mouebitur ſollicitatum a vi centripeta quadratis diſtantiarum reciproce proportionali. In eadem vero orbita mobili corpus mouebitur, ſi fuerit vis centripeta $=\frac{ffy+C}{y^3}$ (746). Manentibus praecedentibus denominationibus ponatur $y=a+z$, erit z reſpectu ipſius a valde paruum, quia curua a corpore deſcripta circulo proxima ponitur. Quare vis centripeta illa erit $=\frac{aff+C+ffz}{y^3}$, et $2a$ quam proxime erit aequalis ipſi lateri recto L. Iam ponatur vis centripeta corpus ſollicitans $=\frac{P}{y^3}$ in qua P ſit functio quaecunque ipſius y. Ponatur in P loco y eius valor $a+z$ abeatque P reiectis terminis, in quibus z plus vna habet dimenſionem, ob z tam paruum in $E+Fz$. Hac ergo formula cum $aff+C+ffz$ comparata habebitur $F=ff$, ſeu $f=\sqrt{F}$ et $aF+C=E$, ſeu $C=E-aF$. His ſubſtitutis corpus ab hac vi centripeta $\frac{P}{y^3}$ ſollicitatum ab abſide ima ad ſummam perueniet, abſoluto

M.E.C.D. 2017

to motu angulari angulo $180\sqrt{(1+\frac{2C}{Lff})}$ grad. (746). Seu posito $2a$ loco L, et F loco ff atque E—aF loco C erit iste angulus graduum $180\sqrt{\frac{E}{aF}}$. Si quidem orbita non multum a circulari discrepat. Q. E. I.

Corollarium 1.

748. Linea vero absidum (A)(B), dum corpus circa C reuoluitur angulo 360 gr. mouebitur motu angulari per angulum $\frac{\sqrt{E}-\sqrt{aF}}{\sqrt{E}}$ 360 grad. Motus enim angularis orbitae proportionalis ponitur motui angulari corporis, ob vim centripetam $=\frac{ff}{yy}+\frac{C}{y^3}$ (734).

Corollarium 2.

749. Quia E est functio talis ipsius a, qualis P est ipsius y, erit Fz incrementum ipsius E crescente a elemento z. Quare posito $z=da$ erit Fda $=dE$, ideoque, angulus, quo corpus ab absside ima ad summam peruenit est $=180\sqrt{\frac{Eda}{adE}}$ grad.

Corollarium 3.

750. Quia E talis est functio ipsius a, qualis P ipsius y, poterit in $\frac{Eda}{adE}$ poni y loco a et P loco E. Quamobrem existente vi centripeta $\frac{P}{y^3}$, corpus ab absside ima ad summam perueniet absoluto angulo $180\sqrt{\frac{Pdy}{ydP}}$ graduum. Atque in hac expressione si restet y, poterit eius loco a scribi, quippe parum ab y discrepans.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

757. Si fuerit $\frac{da}{a} \gtrless \frac{dE}{E}$ seu $\frac{dy}{y} \gtrless \frac{dP}{P}$, ellipsis motu suo verum corporis motum exprimens mouebitur in consequentia. Sin vero $\frac{dy}{y} < \frac{dP}{P}$ linea absidum in antecedentia mouebitur. At si $\frac{dy}{y} = \frac{dP}{P}$ seu $P = \alpha y$, quo casu vis centripeta reciproce proportionalis est quadratis distantiarum, linea absidum quiescet, seu corpus, postquam motu angulari angulum 180 gr. absoluerit ab absside ima ad summam et vicissim pertingit.

Corollarium 5.

725. Dato autem angulo, quo corpus ab absside altera ad alteram peruenit qui sit 360μ grad. erit $\mu^2 = \frac{P dy}{y dP}$ ideoque $P^{\mu\mu} = \alpha y$, seu $P = \alpha y^{\frac{1}{\mu\mu}}$. Vis ergo centripeta quae facit, vt lineae absidum tantus sit motus, erit $y^{\frac{1-3\mu^2}{\mu^2}}$.

Corollarium 6.

763. Si accidit vt $\frac{P dy}{y dP}$ seu dP fiat negatiuum, motus absidum erit imaginarius. Ex quo cognoscitur corpus nunquam ad absidem alteram peruenire posse ab altera progressum. Sed perpetuo vel magis recessurum a centro vel ad id accessurum, siue in orbita clausa prorsus non moueri.

Corollarium 7.

754. Si vis centripeta proportionalis sit distantiarum potestati y^n, erit $P = y^{n+3}$. Quare fiet $\frac{P dy}{y dP}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{Pdy}{ydP} = \frac{1}{n+3}$, atque corpus ab abſide ima ad ſummam perueniet abſoluto angulo circa C graduum $\frac{180}{\sqrt{(n+3)}}$; a ſumma vero vel ima abſide ad eandem reuertetur abſoluto angulo $\frac{360}{\sqrt{(n+3)}}$ grad.

Corollarium 8.

755. Si ergo fuerit $\sqrt{(n+3)}$ numerus rationalis, et m minimus numerus integer, quo fiat $\frac{m}{\sqrt{(n+3)}}$ quoque numerus integer; tum corpus poſt $\frac{m}{\sqrt{(n+3)}}$ reuolutiones circa centrum C peractas in idem punctum incidet, totidemque curua a corpore deſcripta abſoluet ſpiras, antequam in ſe ipſam redeat atque claudatur. At ſi $n+3$ non eſt quadratum curua nunquam in ſe redibit, ſed infinitas circa centrum C habebit ſpiras, neque vnquam corpus in eandem viam reuertetur.

Exemplum 1.

756. Attrahat centrum virium in ratione reciproca triplicata diſtantiarum, erit $n+3=0$. Hac ergo hypotheſi corpus ab altera abſide egreſſum, ad alteram niſi infinitis reuolutionibus peractis non perueniet. Atque ſi vis centripeta in maiore ratione quam triplicata diſtantiarum decrescat curua prorſus non habebit duas abſides ſed vel in infinitum abibit, vel in ipſo centro, vt ſpiralis logarithmica terminabitur.

M.E.C.D. 2017

Exemplum 2.

757. Si vis centripeta est quadratis distantiarum reciproce proportionalis erit $n+3=1$. Quare tum corpus motu angulari absolutis 180 gr. ab altera absside ad alteram perueniet, et curua post quamuis reuolutionem in se ipsam redibit. Corpus enim in ellipsi in cuius alterutro foco centrum virium est positum mouebitur, eiusque axis transuersus est ipsa linea absidum.

Exemplum 3.

758. Sit vis centripeta distantiis reciproce proportionalis, est $n+3=2$. Corpus igitur ab absside ima ad summam perueniet absoluto angulo $\frac{180}{\sqrt{2}}$ grad. seu 227 gr. 16′. Orbita vero ob $\sqrt{2}$ irrationale nusquam in se redibit.

Exemplum 4.

759. Si vis centripeta est constans in omni distantia, erit $n=0$. Hoc ergo casu corpus ab altera absside egressum ad alteram perueniet motu angulari percurso angulo $\frac{180}{\sqrt{3}}$ grad. i. e. 103 gr. 55′, quam proxime.

Exemplum 5.

760. Si vis centripeta est directe, vt corporis a centro distantia, quo casu corpus in ellipsi moueri constat, in cuius centro centrum virium est positum (631). Absis igitur ima ab summa distabit angulo 90 grad. Idem vero ex hac regula deducitur; nam ob $n=1$, erit $\frac{180}{\sqrt{n+3}}=90$.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

761. Quoties igitur corpus circa centrum virium tanta velocitate proiicitur, vt fere in circulo deberet reuolui, ope huius propositionis vera curua, quamcorpus describet potest determinari, id quod ex sola vis centripetae consideratione fieri non potest. Ex quibus eo magis huiusmodi contemplationum vsus perspicitur, cum res, quae alias determinatu essent difficillimae ex iis facile definiantur. *Neutonus* eandem hanc propositionem exposuit Sect. IX. prop. 45.

Scholion 2.

762. Iam supra ostendimus corpus in hypothesi vis centripetae cubo distantiae reciproce proportionalis ad centrum descendens ad id tempore finito peruenire, neque deinde ex eo egredi sed quasi subito annihilari (675)(676). Idem etiam valet, si corpus recta ad centrum descendat. Atque simili modo, si vis centripeta in maiore quam triplicata distantiarum ratione decrescat, corpus statim ac in centrum peruenerit, ibi euanescet, neque vltra centrum progredietur, neque reuertetur. Vtrum vis enim eueniat, curua, quam corpus velocitate quadam proiectum describeret, haberet duas absides, quod esset absurdum (756). Quoties autem vis centripeta in minore quam triplicata ratione decrescit, vt in simplici distantiarum ratione vel ea maiore, corpus, postquam in centrum per-

M.E.C.D. 2017

uenerit, in eadem recta, qua ad centrum accessit, recedet; perspicitur hoc enim ex ratione reciproca duplicata (655), et simplici de qua patet (266) corpus non vltra centrum posse progredi. At si $n+1 > 0$ corpus recta ad centrum descendens finitam habebit celeritatem, qua vltra centrum in eadem recta progredietur, quoad motum amiserit (273). Hoc ergo modo satisfecimus desiderato superiori (272), quo motum corporis recta descendentis, cum in centrum perueniisset, definiri oportebat.

PROPOSITIO 92.

Problema.

763. *Inuenire vires centripetas tendentes ad duo virium centra* C *et* D, *quae faciant, vt corpus in data curua* AMB *et data in singulis punctis* M *celeritate moueatur.*

Tab. VIII. Fig. 2.

Solutio.

Moueatur corpus ab A per M ad B, et sit eius celeritas in M debita altitudini v, ponatur $CM = y$ et $DM = z$. Ducta vero tangente TV in eamque ex C et D demissis perpendiculis CT et DV, dicantur $CT = p$ et $DV = q$. Vis centripeta porro, quae ad C tendit sit $= P$, et ea, quae ad D trahit sit $= Q$. Vis igitur normalis ex vtraque orta erit $= \frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z}$, et vis tangentialis accelerans motum corporis erit $= -\frac{P\sqrt{(y^2-p^2)}}{y} - \frac{Q\sqrt{(z^2-q^2)}}{z}$ cadentibus tangentibus in antecedentia. Posito ergo radio osculi in $M = r$, et

M.E.C.D. 2017

et elemento curuae $=ds$ erit $\frac{Pp}{y}+\frac{Qq}{z}=\frac{2v}{r}$ (561), et $dv=-\frac{Pds\sqrt{(y^2-p^2)}}{y}-\frac{Qds\sqrt{(z^2-q^2)}}{z}$ (559). Est vero $ds=\frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}=\frac{zdz}{\sqrt{(z^2-q^2)}}$, ideoque $dv=-Pdy-Qdz$. Ex his duabus aequationibus coniunctis habebitur $P=\frac{2vyzdz+qrydv}{przdz-qrydy}$ et $Q=\frac{2vzydy+przdv}{qrydy-przdz}=-\frac{2vzydy-przdv}{przdz-qrydy}$. Est vero $r=\frac{ydy}{dp}=\frac{zdz}{dq}$; ergo $zdz=\frac{ydy\sqrt{(z^2-q^2)}}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$ atque $dq=\frac{dp\sqrt{(z^2-q^2)}}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Tandem dicta $CD=k$ erit $k^2=y^2+z^2-2pq-2\sqrt{(y^2-p^2)(z^2-q^2)}$, ex quibus P et Q prout libuerit determinari possunt. Q. E. I.

Corollarium 1.

764. Si corpus in curua motu aequabili debeat moueri ita vt sit $v=c$, et $dv=o$; erit $P=\frac{2cyzdz}{przdz-qrydy}$ et $Q=-\frac{2czydy}{przdz-qrydy}$. Atque $P:Q=dz:-dy$.

Corollarium 2.

865. Si fuerit $v=\frac{ch^2}{p^2}$, seu celeritas corporis reciproce vt perpendiculum ex centro C in tangentem demissum; erit $dv=-\frac{2ch^2dp}{p^3}$. His substitutis fit $Q=o$, erit enim $przdv=-\frac{2ch^2rzdp}{pp}=-\frac{2ch^2zydy}{pp}=-2vzydy$. Atque $P=\frac{2ch^2pyzdz-2ch^2qy^2dy}{p^3r(pzdz-qydy)}=\frac{2ch^2y}{p^3r}$ (714). Haec enim vis sola efficiet, vt corpus hoc modo in ista curua moueatur.

Exemplum.

766. Sit curua data AMB ellipsis et centra C et D eius foci. Ponatur eius axis transuersus $AB=A$ et latus rectum $=L$, eritque ex natura el-

M.E.C.D. 2017

lipsis $4pp = \frac{AL y}{A-y}$ et $4qq = \frac{ALz}{A-z}$. At praeterea erit $z = A-y$, et $r = \frac{4(Ay-yy)^{\frac{3}{2}}}{A\sqrt{AL}} = \frac{4(Az-zz)^{\frac{3}{2}}}{A\sqrt{AL}}$. Ex quo prodibit $P = \frac{Avdy-ydv(A-y)}{2ydy(A-y)}$ et $Q = \frac{Avdz-zdv(A-z)}{2zdz(A-z)}$ $= \frac{Avdy+ydv(A-y)}{2ydy(A-y)}$, ideoque $P+Q = \frac{Av}{yz}$ et $Q-P = \frac{dv}{dy}$.

PROPOSITIO 93.
Problema.

Tab. VIII. Fig. 3. 767. *Moueatur corpus data celeritate in curua etiam data* AMB, *et oportet inueniri vim centripetam ad centrum* C *tendentem vna cum vi perpetuo ad rectam* AB *normaliter in directione* MP *corpus trahente, quae duae vires efficiant, vt corpus in hac curua cum praescriptaque celeritate libere moueatur.*

Solutio.

Sit corporis in puncto M existentis celeritas debita altitudini v, et distantia $MC = y$, perpendicularis vero $MP = z$. Ponatur vis corpus ad centrum C trahens $= P$ et vis secundum MP trahens $= Q$. Ducta tangente MV in M demittantur in eam perpendicula CT et PQ, quae dicantur p et q. His factis erit vis normalis ex vtraque orta $= \frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z}$ et vis tangentialis $= \frac{P\sqrt{(yy-pp)}}{y} + \frac{Q\sqrt{(zz-qq)}}{z}$. Posito ergo radio osculi in $M = r$ erit $\frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z} = \frac{2v}{r}$ (561) et $dv = -Pdy - Qdz$ (559). Ex his itaque reperietur $P = \frac{2vyzdz+qrydv}{przdz-qrydy}$ et $Q = -\frac{2vzydy-przdv}{przdz-qrydy}$. Ponatur autem $CP = x$, erit $\sqrt{(dx^2+dz^2)} : dx = z : q$; vnde

$q =$

M.E.C.D. 2017

$q = \frac{zdx}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}$ et posito dx constante est $r = \frac{(dx^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddz}$. Erit autem porro $y = \sqrt{(x^2+z^2)}$, et $p = \frac{zdx-xdz}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}$. His substitutis prodibit $P = \frac{2vydxdzd.dz - ydxdv(dx^2+dz^2)}{x(dx^2+dz^2)^2}$, et $Q = \frac{2vydydxddz+(zdx-xdz)(dx^2+dz^2)dv}{x(dx^2+dz^2)^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

768. Si corpus aequabiliter in curua moueri debeat ita vt sit $v = c$ et $dv = o$, erit $P = \frac{2cydxdzddz}{x(dx^2+dz^2)^2}$ et $Q = -\frac{2cydydxddz}{x(dx^2+dz^2)^2}$.

Corollarium 2.

769. Si curua sit circulus, cuius centrum in C existat, et radius dicatur $= a$. Erit $r = a$, $y = a$ $p = a$, et $q = \frac{z^2}{a}$. Quare prodibit $P = \frac{2v}{a} + \frac{zdv}{adz}$ et $Q = -\frac{dv}{dz}$. Ergo cognita Q erit $P = \frac{2v}{a} - \frac{Qz}{a}$. Atque si est $v = c$ et $dv = o$, erit $Q = o$, et $P = \frac{2c}{a}$.

Scholion.

770. Ex hac propositione in se spectata, qua ipsa curua a corpore descripta datur, parum vtilitatis consequitur ad curuas, quas corpora a compositis viribus sollicitata describunt, determinandas. Ab hac vero ad alias propositiones progredi licet, in quibus curuae a corporibus descriptae non ipsae dantur; sed generantur ex motu vnius pluriumue datarum, quemadmodum in superioribrs propositionibus, in quibus de motu absidum tractauimus, est factum.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 94.

Problema.

771. *Si moueatur corpus vtcunque in curua* Tab. VIII, Fig. 4. AMB *ipsa vero curua interea reuoluatur circa punctum fixum* C; *inueniri oportet duas vires, quarum altera perpetuo ad punctum fixum* C, *altera normaliter ad rectam positione datam* PC *sit directa, quae duae vires efficiant, vt corpus in hac orbita mobili libere moueatur.*

Solutio.

Sit corporis in M existentis celeritas, qua in ipsa curua elementum Mm percurrit, debita altitudini v, atque celeritas angularis corporis in orbita ad veram celeritatem angularem corporis circa C vt 1 ad w, seu celeritas angularis corporis in orbita ad celeritatem angularem ipsius orbitae, dum corpus est in M vt 1 ad $w-1$. Ponatur radius $CM=y$, et perpendiculum CT, ex C in tangentem orbitae in M demissum $=p$, ipsa vero tangens $MT=q$, ita vt sit $q=\sqrt{(y^2-p^2)}$. Ex M in rectam positione datam DP demittatur perpendiculum MP, quod dicatur z, et CP, x, ita vt sit $x=\sqrt{(y^2-z^2)}$. Iam dum corpus elementum Mm percurrit, ponatur orbita interea angulo $=mC\mu$ circumferri; quamobrem motu composito corpus in μ perueniet, sumto $C\mu=Cm$, eritque $M\mu$ elementum verae curuae, in qua corpus mouetur, in quod productum demittatur ex C perpendiculum $C\Theta$. Centro C describatur ar-

M.E.C.D. 2017

arculus M$n\nu$, erit $mn = \mu\nu = dy$, et $Mn : M\nu = 1 : w$. Eſt vero $Mm = \frac{ydy}{q}$, vnde $M\nu = \frac{wpdy}{q}$, ex quo habebitur $M\mu = \frac{dy}{q}\sqrt{(w^2p^2+q^2)}$, atque porro $C\Theta = \frac{wpy}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ et $M\Theta = \frac{qy}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$. Fiat $Mm : M\mu = \sqrt{v} : \frac{\sqrt{v(w^2p^2+q^2)}}{y}$, cuius quadratum $\frac{v(w^2p^2+q^2)}{y^2}$ exhibet altitudinem debitam verae corporis celeritati; huius igitur incrementum eſt $= \frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3} + \frac{2vp^2wdw}{y^2}$. Radius osculi autem veraе curuae, in qua corpus incedit eſt

$$= \frac{ydy}{d.C\Theta} = \frac{ydy(w^2p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{w(w^2-1)p^3dy+wy^3dp+py^3dw-p^3ydw}$$

$$= \frac{ydy(w^2p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{w(w^2-1)p^3dy+wy^3dp+pq^2ydw}.$$

Poſito ſinu toto $= 1$, erit ſinus anguli $CMP = \frac{x}{y}$ et coſinus $= \frac{z}{y}$. At anguli $CM\Theta$ ſinus erit $= \frac{wp}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ eiusque coſinus $= \frac{q}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$. Ex quibus reperitur anguli $PM\Theta$ ſinus $= \frac{wpz-qx}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$, eiusque coſinus $= \frac{wpx+qz}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$. Demiſſo ex P in tangentem $M\Theta$ perpendiculo PQ erit $PQ = \frac{wpz^2-qxz}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ et $MQ = \frac{wpxz+qz^2}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$. Atque percurrente corpore elementum $M\mu$ erit lineae PM incrementum $dz = \frac{wpxdy+qzdy}{qy}$. Ex qua aequatione relatio inter w et x innotescit, et ſimul poſitio lineae abſidum AB reſpectu rectae CP inueniri poteſt. Iam ponatur vis corpus ſollicitans verſus $MC = P$ et vis ſecundum MP trahens $= Q$, ex quibus oritur vis tangentialis

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

motum corporis retardans $= \frac{Pq}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}} + \frac{Qwpx+Qqz}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ quae ergo ducta in $\frac{dy}{q}\sqrt{(w^2p^2+q^2)}$ aequalis poni debet $= -\frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3} - \frac{2vp^2wdw}{y^2}$, ita vt prodeat $Pdy + \frac{Qwpxdy}{qy} + \frac{Qzdy}{y} = -\frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3} - \frac{2vp^2wdw}{y^2}$.

Vis autem normalis ex vtraque orta eſt $\frac{Pwp}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}} + \frac{Qwpz-Qqx}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$, quae aequalis eſſe debet $\frac{2w(w^2-1)vp^3dy+2wvy^3dp+2vpq^2ydw}{y^3dy\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ (561), quare habebitur $Pwpydy + Qwpzdy - Qqxdy = \frac{2w(w^2-1)vp^3dy}{y^2} + 2wvydp + \frac{2vpq^2dw}{y}$. Ex quibus aequationibus coniunctis obtinetur $Q = -\frac{wpqdv}{yxdy} - \frac{2wvqdp}{yxdy} - \frac{2vpqdw}{yxdy}$, atque $P = \frac{qdv(wpz-qx)}{y^2xdy} + \frac{2(w^2-1)vp^2}{y^3} + \frac{2vdp(wqz+px)}{y^2xdy} + \frac{2vpqzdw}{y^2xdy}$. Angulus vero, quem linea abſidum AB facit cum recta CP erit $= \int\frac{(w-1)pdy}{qy}$, vnde eius poſitio quouis tempore innotescit. Q.E.I.

Corollarium 1.

772. Quia eſt $dz = \frac{wpxdy+qzdy}{qy}$ ponatur $z = ty$; eritque $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{wpdy}{qy}$. Ex qua aequatione, ſi detur w in y, in qua etiam ob curuam AMB datam p et q exprimuntur, inuenietur t, ideoque etiam z et x.

Corollarium 2.

773. Si fuerit celeritas corporis in orbita Vv reciproce vt perpendiculum CT ex C in tangentem demiſſum, ſeu $v = \frac{a^2c}{p^2}$ erit $P = \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3} + \frac{2a^2cqzdw}{py^2xdy}$ et $Q = -\frac{2a^2cqdw}{pyxdy}$.

Co-

BIBLIOTECA DEL REAL I.E. DE TARRAGONA

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

774. Si hoc casu est w constans, euanescit vis Q et sola remanet $P = \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(ww-1)}{y^3}$ ad centrum tendens, quae efficiet, vt corpus in orbita AMB circa C mobili progrediatur prorsus vt supra inuentum est (734).

Corollarium 4.

775. Si v non est $= \frac{a^2c}{p^2}$, sed w constans, ita vt motus angularis orbitae proportionalis sit motui angulari corporis in orbita, nempe vt $w-1$ ad 1, erit $Q = -\frac{wpqdv-2wvqdp}{yxdy}$ et $P = \frac{qdv(wpz-qx)}{y^2xdy} + \frac{2(ww-1)vp^2}{y^3} + \frac{2vdp(wqz+px)}{y^2xdy}$.

Exemplum.

776. Posito $v = \frac{a^2c}{p^2}$, sit curua AMB ellipsis alterutrum focum in C habens. Cuius igitur axis transuersus si vocetur A et latus rectum L erit $4pp = \frac{ALy}{A-y}$, seu $p = \frac{\sqrt{ALy}}{2\sqrt{(A-y)}}$ et $q = \frac{\sqrt{(4Ay^2-4y^3-ALy)}}{2\sqrt{(A-y)}}$, atque $\frac{dp}{p^3} = \frac{2dy}{Ly^2}$. Quare habebitur $Q = -\frac{2a^2cdw\sqrt{(4Ay-4y^2-AL)}}{yxdy\sqrt{AL}}$ et $P = \frac{4a^2c}{Ly^2} + \frac{2a^2c(ww-1)}{y^3} - \frac{2a^2czdw\sqrt{(4Ay-4y^2-AL)}}{y^2xdy\sqrt{AL}}$. Atque $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = -\frac{wdy\sqrt{AL}}{y\sqrt{(4Ay-4y^2-AL)}}$.

Scholion 1.

777. Hae formulae existente curua ellipsi variis modis simpliciores effici possunt, si curua in qua corpus mouetur ad circulum proxime accedat. Atque hic casus tum non parum habebit vtilitatis in motu lunae theoretice definiendo. Terra enim vt

M.E.C.D. 2017

in C quiescens ponatur, et Sol in recta ad CP in C perpendiculari pariter tanquam quiescens consideretur, quo facto et his viribus cum viribus solis et terrae comparatis, elicietur motus Lunae synodicus pro quauis lineae absidum positione, et simul ipsius lineae absidum motus, qui a vero lunae motu quam minime differet.

Scholion 2.

778. Multo latius quidem patet ista propositio, quam superior (729), in qua vis omnis ad centrum rotationis orbitae erat directa, haec enim illam in se complectitur, euanescente vi Q. Neque tamen perfecte ad motum lunae explicandum quadrat propter vim reciproce cubo distantiae MC proportionalem in vi P (773). Hanc ob rem alios orbitae motus praeter gyratorium in medium proferemus, qui et latius pateant, et magis cum quaestionibus physicis congruant. Huiusmodi sunt motus orbitarum per quasque curuas manente orbita sibi semper parallela, quae contemplatio aliis ideo anteferri meretur, quod vires sollicitantes et facile inueniri, et simplicioribus formulis possint comprehendi. Ad hoc autem praestandum opus est sequens theorema praemitti.

PROPOSITIO 95.
Theorema.

Tabula IX. Fig. 1.

779. *Moueatur corpus* M *in curua* AM *a vi quacunque sollicitatum circa punctum* C, *atque insuper et*

M.E.C.D. 2017

et corpus M *et punctum* C *ab aequali vi et in eadem directione ſollicitentur: erit motus relatiuus corporis* M *reſpectu puncti* C, *ſeu motus corporis* M *qualis ex* C *pectatur idem, ac ſi haec noua vis non accesſiſſet.*

Demonſtratio.

Puncto C quiescente perueniat puncto temporis *dt* corpus ex M in *m*. Hoc igitur tempusculo finito corpus M diſtabit a C interuallo *m*C, et cum plaga quadam fixa recta AC expreſſa conſtituet angulum *m*CA. Ponatur iam corpore exiſtente in M et corpus M et punctum C ab aequali et in eandem plagam tendente vi vrgeri, ita vt punctum C ab hac vi tempusculo *dt* promoueatur per C*c*. Eodem igitur tempusculo *dt* corpus M, ſi quiesceret, ab hac vi transferretur per M*m* parallelam et aequalem ipſi C*c*. At quia corpus C iam habet motum inſitum, quo tempusculo *dt* elementum M*m* percurrit, vtroque motu coniuncto deſcribet diagonalem Mμ completo parallelogrammo M*m*μ*n*. Quocirca accedente hac noua vi corpus M finito tempusculo *dt* diſtabit a puncto C, quod interea in *c* eſt translatum, interuallo μc, et ducta *ac* parallela ipſi AC cum plaga fixa conſtituet angulum $\mu c\alpha$. At eſt ob *m*C*c*μ parallelogrammum $\mu c = m$C et ang. *m*CA = ang. $\mu c\alpha$. Conſequenter vis vtrumque punctum M et C aequaliter et ſecundum eandem directionem ſollicitans non immutat motum relatiuum corporis M reſpectu puncti C. Q. E. D.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

780. Quaecunque igitur vis punctum C sollicitat, si eadem simul corpus M secundum eandem plagam vrgeat; motus relatiuus corporis M respectu puncti C non mutabitur.

Corollarium 2.

781. Huiusmodi ergo vi M et C aequaliter sollicitante effici potest, vt corpus M in orbita AM quomodocunque mobili moueatur. Orbita autem ipsa motu suo ita sequetur puncti C motum, vt eius positio sibi semper maneat parallela.

Corollarium 3.

782. Perspicitur etiam ex demonstratione propositionis, si et puncto C et corpori M aequalis celeritas imprimatur secundum eandem plagam, motum relatiuum non perturbatum iri.

Corollarium 4.

783. Atque cum talis motus puncto C impressus perpetuo duret aequabilis in directum sine vlla vis continuatione, sequitur corpus M circa punctum C aequabiliter indirectum progrediens aeque moueri posse, ac circa quiescens. Hoc enim obtinebitur, si modo corpori M aequalis celeritas in eandem plagam directa adiiciatur.

Corollarium 5.

784. Corpus ergo circa centrum virium vniformiter in directum progrediens, eandem curuam li-

M.E.C.D. 2017

libere deſcribere poterit, quam circa quiescens deſcriberet, modo ei ſuperaddatur tanta celeritas quantam accepit centrum virium.

Corollarium 6.

785. Quemadmodum autem corpus ſibi ipſum relictum non poteſt in linea curua progredi, neque inaequabiliter in recta; ita corpus circa centrum virium vel in curua motum vel difformiter in directum non poteſt libere circa id eandem curuam deſcribere quam circa quiescens, ſed perpetuo tanta vi inſuper vrgeri debet, quanta ad centrum in ſua via retinendum requiritur.

PROPOSITIO 96.

Problema.

786. *Si corpus* M *circa centrum virium* L *quiescens reuoluatur in curua* BM; *determinare vim, quae efficit, vt corpus in eadem orbita ſecundum curuam* AL *ſibi ipſi ſemper parallele mota ingrediatur.* Tabula IX. Fig. 2.

Solutio.

Quia corpus M in orbita BM libere mouetur circa centrum virium quiescens L, erit, poſita diſtantia LM$=y$ et perpendiculo ex L in tangentem in M demiſſo $=p$, altitudo debita celeritati in M$=\frac{a^2c}{p^2}$ (589) et vis centripeta ad L tendens $=\frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ (592). Iam ponatur centrum L in curua AL moueri attractum ad centrum virium C, ſitque CL$=s$ et perpendiculum ex C in tangentem in L de-

M.E.C.D. 2017

demissum $=w$. Quo posito erit altitudo debita celeritati in L $=\frac{b^2e}{w^2}$ (589) et vis punctum L ad C trahens $=\frac{2b^2edw}{w^3ds}$ (592). Ponatur autem primo puncto L celeritas secundum tangentem imprimi $=\frac{bVe}{w}$, eademque etiam corpori M secundum directionem huic tangenti parallelam; atque perspicuum erit si nulla insuper vis punctum L sollicitet, sed tantum hunc motum impressum conseruet, corpus M libere in eadem curua BM motum puncti L ita sequente, vt axis BL sibi semper maneat parallelus, motum iri (783). At quo corpus M eodem modo circa punctum L in curua AL incedens moueatur, oportet, vt ipsi perpetuo tanta vis imprimatur, quanta requiritur ad punctum L in hac curua AL retinendum (781). Ducta igitur MN parallela ipsi LC, corpus M praeter vim, quae ad L vrgetur, sollicitari debebit vi $=\frac{2b^2edw}{w^3ds}$ secundum directionem MN. Quare haec duplex vis efficiet vt problemati satisfiat. Quo autem appareat, quanam vi corpus M respectu puncti C et rectae fixae AC ipsi BL parallelae sollicitari oporteat, resoluantur vires corpus M secundum MN et ML trahentes in duas alias, quarum altera habeat directionem MC altera MP, quae linea MP ad AC perpendiculariter est ducta. Ad hoc praestandum ipsi MP ducatur parallela KLN rectam MC in O secans, et vocetur LI $=x$, MI $=z$; CK $=r$, KL $=t$; atque CP $=$ X, PM $=$ C et CM $=$ Y. Quocirca erit $y=V(x^2+z^2)$; $s=V(r^2+t^2)$ et $Y=V(X^2+Z^2)$. Atque poro $p=\frac{xdz-zdx}{V(dx^2+dz^2)}$ et

$w =$

M.E.C.D. 2017

$w = \frac{r\,dt - t\,dr}{\sqrt{(dr^2 + dt^2)}}$. Praeterea vero erit $X = r + x$ et $Z = t + z$. Quare cum ob curuas AL et BM datas, z, y et p in x, itemque t, s et w in r dentur, poterunt hae omnes quantitates in X, Z et Y exhiberi. Aequatio vero inter X et Z ex eo deducetur, quod temporis incrementum per BM aequale esse debeat temporis incremento per AL. Hinc ergo erit $\frac{p\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}{a\sqrt{c}} = \frac{w\sqrt{(dr^2 + dt^2)}}{b\sqrt{e}}$ et integralibus sumtis erit area ACL + constante quadem area ad aream BLM vt $b\sqrt{e}$ ad $a\sqrt{c}$. Vis igitur secundum ML trahens resoluatur in binas secundum MO et LO seu MI trahentes, et simili modo vis secundum MN in binas secundum MO et NO trahentes, quarum posterior corpus M secundum directionem ipsi MI contrariam sollicitabit; ad quas resolutiones instituendas angulos nosse oportet. Est vero MLO = LMI, eius-que igitur sinus $= \frac{x}{y}$ et cosinus $= \frac{z}{y}$, sumto 1 pro sinu toto. Similiter est MON = CMP, huius igitur sinus $= \frac{X}{Y}$ et cosinus $= \frac{Z}{Y}$. Anguli ergo LMO, qui horum est differentia sinus erit $= \frac{Xz' - Zx}{Yy}$. Denique est MNQ = CLK, quare eius sinus est $\frac{r}{s}$ et cosinus $= \frac{t}{s}$. Consequenter ob NMO = MNQ – MON, erit eius sinus $= \frac{Zr - Xt}{Ys}$. Est vero $Xz - Zx = Cr - Xt$ ob $V = r + x$ et $Z = t + z$. Ex his fiet MN : MO seu $\frac{X}{Y} : \frac{r}{s}$ ita vis secundum MN tendens $\frac{2b^2 e\,dw}{w^3 ds}$ ad vim secundum MC, quae ergo erit $= \frac{2b^2 eY r\,dw}{Xsw^3 ds}$. Atque MN: NO seu $\frac{X}{Y} : \frac{Zr - Xt}{Ys}$ ita vis secundum MN $\frac{2b^2 e\,dw}{w^3 ds}$ ad vim

M.E.C.D. 2017

secundum ON quae ergo est $= \frac{2b^2edw(Zr-Xt)}{Xsw^3ds}$. Simili modo erit ML : MO $= \frac{X}{Y} : \frac{x}{y}$ ita vis secundum ML, $\frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ ad vim secundum MC quae ergo erit $= \frac{2a^2cYxdp}{Xyp^3dy}$. Atque ML:LO seu $\frac{X}{Y} : \frac{Zr-Xt}{Yy}$ ita vis secundum ML $\frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ ad vim secundum OL seu MP quae ergo est $= \frac{2a^2cdp(Zr-Xt)}{Xyp^3dy}$. Ex quibus colligitur corpus M trahi debere a vi tendente secundum MC $= \frac{Y}{X}\left(\frac{2b^2erdw}{sw^3ds} + \frac{2a^2cxdp}{yp^3dy}\right)$ atque a vi secundum MP $= \frac{(Zr-Xt)}{X}\left(\frac{2a^2cdp}{yp^3dy} - \frac{2b^2edw}{sw^3ds}\right)$. Quae expressiones omnes in X, Z et Y exhiberi poterunt, et praeterea inter has quantitates, quae veram curuam a corpore M descriptam pertinent, aequatio assignari. Q.E.I.

Corollarium 1.

787. Si curua AL sit peripheria circuli, cuius centrum in C et radius AC $= b$, erit $s = w = b$, et $r^2 + t^2 = b^2$. Hoc ergo casu vis secundum MC trahens erit $= \frac{Y}{X}\left(\frac{2er}{b^2} + \frac{2a^2cxdp}{yp^3dy}\right) = \frac{2eY}{b^2} - \frac{2Yx}{X}\left(\frac{e}{b^2} - \frac{a^2cdp}{yp^3dy}\right)$ et vis secundum MP $= \frac{(Zr-X\sqrt{(b^2-r^2)})}{X}\left(\frac{2a^2cdp}{yp^3dy} - \frac{2e}{b^2}\right)$. Atque e erit altitudo debita celeritati quam habet punctum L.

Corollarium 2.

788. Sit curua BM ellipsis centrum habens in L, et BL eius semiaxis transuersus $= a$, ita vt altitudo debita celeritati in B sit $= c$, alter vero semi axis sit $= h$. Eritque $a^2z^2 + h^2x^2 = a^2h^2$ et $\frac{2a^2cdp}{p^3dy} = \frac{2cy}{h^2}$. Quare vis secundum MC fit

=

M.E.C.D. 2017

$= \frac{Y}{X}\left(\frac{2b^2erdw}{sw^3ds} + \frac{2cx}{b^2}\right) = \frac{2b^2eYdw}{sw^3ds} - \frac{2Yx}{X}\left(\frac{b^2edw}{sw^3ds} - \frac{c}{b^2}\right)$. Atque vis secundum $MP = -\frac{(Zr-Xt)}{X}\left(\frac{2c}{b^2} - \frac{2b^2edw}{sw^3ds}\right)$.

Corollarium 3.

789. Si et curua AL fuerit circulus vt coroll. 1. et curua BM ellipsis vt coll. 2. erit vis secundum $MC = \frac{Y}{X}\left(\frac{2er}{b^2} + \frac{2cx}{b^2}\right) = \frac{2eY}{b^2} - \frac{2Yx}{X}\left(\frac{e}{b^2} - \frac{c}{b^2}\right)$ et vis secundum $MP = -\frac{(Zr-Xt)}{X}\left(\frac{2c}{b^2} - \frac{2e}{b^2}\right)$, vbi r et t et x in X, Z et Y poterunt determinari ex his aequationibus $a^2z^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, $r^2 + t^2 = b^2$, $r + x = X$ et $t + z = Z$. Aequatio autem emergens ad quatuor dimensiones ascendit.

Corollarium 4.

790. Si ellipsis BM ponatur infinite parua seu saltem perquam exigua respectu circuli AL ita tamen vt tempus periodicum ellipsis sit finite magnum, erit $x = \frac{a^2X(Y^2-b^2) \mp abZ\sqrt{(4a^2X^2+4b^2Z^2-(Y^2-b^2)^2)}}{2a^2X^2+2b^2Z^2}$ et $z = -\frac{b^2Z(Y^2-b^2) \mp abX\sqrt{(4a^2X^2+4b^2Z^2-(Y^2-b^2)^2)}}{2a^2X^2+2b^2Z^2}$.

Corollarium 5.

791. Si curua BM fuerit quoque circulus in L centrum habens; fiet $b = a$, ideoque $x^2 + z^2 = a^2$, $r^2 + t^2 = b^2$, $r = X - x$ et $t = Z - z$, ex quibus posito $b^2 - a^2 = f^2$ reperietur $2x = \frac{(Y^2-f^2)X \mp Z\sqrt{(4a^2Y^2-(Y^2-f^2)^2)}}{Y^2}$ et $2z = -\frac{(Y^2-f^2)Z \mp X\sqrt{(4a^2Y^2-(Y^2-f^2)^2)}}{Y^2}$. Atque $2Zr - 2Xt = -\sqrt{(4a^2Y^2-(Y^2-f^2)^2)}$.

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

792. Extremum hoc corollarium adiecimus, vt appareat, quales vires requirantur ad corpus in epicyclo circa centrum virium circumagendum, quemadmodum Ptolemaici planetas moueri exiſtimauerunt.

Corollarium 6.

793. Ex hypotheſi coroll. 3. intelligitur ſi fuerit $\frac{e}{b^2} = \frac{c}{h^2}$ ſeu celeritas corporis L ad celeritatem corporis M in B vt diameter circuli AL ad axem coniugatum ellipſis BM; tum veram curuam a corpore M deſcriptam fore ellipſin centrum habentem in C, cum vis ſollicitans ad C tendens ſit $= \frac{2eV}{b^2}$, euanescente vi ſecundum MP. Huius ellipſis ſemiaxis maior erit $b+a$, minor vero $b+h$.

Scholion 2.

794. Propoſitionem hanc ideo praecipue attuli, quod in appendice nouae Principiorum *Neutoni* editionis anglicae Cl. *Machin* aſſeuerat, lunae motum conſiderari poſſe tanquam in ellipſi cuius axis transuerſus ſit ad coniugatum vt 2 : 1 circa centrum factum, dum interea ipſa ellipſis motu ſibi ſemper parallelo ſecundum peripheriam circuli libere progrediatur, quemadmodum in coroll. 3. explicui. Equidem non nego hac ratione motum perquam conformem motui lunae poſſe exhiberi, ſed an exacte congruat vehementer dubito. Sequente autem propoſitione determinare ſtatui, quid

ad

M.E.C.D. 2017

ad lunae motum indicandum requiratur. Etiamsi vero ista propositio ad astronomiam pertineat, tamen eam, vt genuina huiusmodi quaestiones resoluendi methodus perspiciatur, hic afferre e re visum est.

PROPOSITIO 97.

Problema.

795. *Quiescente sole in* S, *et terra* T *circa eum in circulo* TD *vniformiter mota, attrahatur luna* L *tum ad terram* T *tum ad solem* S *in ratione reciproca distantiarum duplicata; quibus positis determinari oporteat motum lunae, qualis ex terra* T *spectatur.* Tabula IX. Fig. 3.

Solutio.

Ponatur distantia terrae a sole $ST = a$, et vis qua terra ad solem trahitur $= \frac{f}{a^2}$. Distantia lunae a terra LT sit $= y$, et distantia lunae a sole LS sit $= z$. Vis qua luna ad terram trahitur sit $= \frac{b}{y^2}$; vis vero qua luna ad solem trahitur secundum LS erit $= \frac{f}{z^2}$. Ab his igitur viribus lunam sollicitantibus, qualis motus producatur, est inuestigandum. At quia lunae motus, qualis a spectatore in terra constituto obseruatur, definiri debet, terra tanquam quiescens est consideranda; id quod fit, dum toti systemati motus ei, quem terra habet, aequalis et contrarius imprimitur, simulque sollicitationes, quas terra a sole recipit, contrario modo in lunam et

M.E.C.D. 2017

lem cogitatione transferuntur. Celeritas autem terrae in circulo TB debita eſt altitudini $\frac{f}{2a}$, vti ex vi $\frac{f}{a^2}$, qua terra ad ſolem vrgetur colligi poteſt. Tanta igitur celeritas et ſoli et lunae ſecundum directionem ad TS normalem imprimi debet. Praeterea, quia terra ad ſolem trahitur vi $\frac{f}{a^2}$, oportet ad huius vis effectum deſtruendum res ita concipi, ac ſi ſol perpetuo tanta vi ad terram traheretur, luna vero eadem vi ſecundum LN ipſi ST parallelam. Hoc facto ſol deſcribet circa terram in T quieſcentem circulum SE eadem celeritate, qua ante terra circa ſolem ferebatur. Luna vero praeter vires ſecundum LT et LS tendentes inſuper vrgebitur verſus LN vi $= \frac{f}{a^2}$. Ducta LM parallela quoque ipſi TS, reſoluatnr vis ſecundum LS agens $\frac{f}{z^2}$ in has duas, quarum alterius directio ſit LT, alterius LM. Ex conſideratione ergo trianguli LTS orietur vis ſecundum LT agens $= \frac{fy}{z^3}$ et vis ſecundum LM trahens $= \frac{af}{z^3}$. Quare omnibus coniunctis luna trahetur verſus LT vi $= \frac{b}{y^2} + \frac{fy}{z^3}$, atque verſus LM vi $= \frac{f}{a^2} - \frac{af}{z^3} = \frac{f(z^3-a^3)}{a^2z^3}$, ex quibus viribus motus lunae debet determinari. Notandum autem directionem LM non eſſe conſtantem ſed variabilem, quippe perpetuo parallelam radio TS, qui ob motum ſolis ſecundum peripheriam SE circumfertur. Producta igitur ST in A, vt AB ſit linea ſyzygiarum, et ex L in eam demiſſo perpendiculo LP erit TP aequalis et parallela ipſi LM. Perueniat tempusculo *dt* luna

ex

M.E.C.D. 2017

ex L in *l*, sol autem ex S in *s*; transferetur ergo interea linea syzygiarum in *ab*, et luna in *l* sollicitabitur partim a vi secundum *l*T, partim a vi secundum parallelam ipsi T*p* trahente, demisso scilicet ex *l* in T*a* perpendiculo *lp*. Ex his autem viribus resoluendis reperiuntur vis normalis et tangentialis, quarum vtraque celeritatem lunae dabit. Hae autem aequationes conunctae eliminata celeritate praebebunt aequationem pro curua ABL in qua luna moueri cernitur. Q. E. I.

Scholion I.

796. Aequationes, quae hinc ad motum lunae deducuntur, tam fiunt complexae, vt ex iis neque celeritas lunae, neque orbita, neque positio lineae absidum eiusque motus exacte possint determinari. Vero autem proxime ex eodem calculo negligendis quantitatibus vehementer exiguis quodammodo conclusiones in usum astronomiae possunt elici, quemadmodum fecit Summus *Neutonus* in Phil. Princ. Libr. III. Etiamsi autem hoc incommodo calculus non laboraret, tamen ista propositio non summo rigore motum lunae esset exhibitura. Posuimus enim solem prorsus quiescere, quod a vero parumper discrepat; deinde terram in circulo motam consideramus, et orbitam lunae in ipso terrae plano positam, quae itidem re ipsa secus se habent. Interim tamen certum est, si huius propositionis solutio posset euolui ex eaque tabula confici,

hoc

M.E.C.D. 2017

hoc in Astronomia maximam habiturum esse vtilitatem.

Corollarium 1.

797. Quia lunae a terra distantia est admodum parua respectu distantiae terrae a sole, sine sensibili errore fere poterit poni $z = a$, quo casu vis secundum LM agens euanescit, et luna tantum ad terram trahetur vi $= \frac{h}{y^2} + \frac{fy}{a^3}$.

Corollarium 2.

798. Cum orbita lunae non multum differat a circulo, poterit ea instar ellipsis mobilis considerari, vt fecimus prop. 90 (747). Quare ad motum absidum cognoscendum, erit ex illius prop. coroll. 3 (750) $P = \frac{a^3 h y + f y^4}{a^3}$, atque luna a perigaeo ad apogaeum perueniet absoluto motu angulari circa terram angulo $= 180 \sqrt{\frac{a^3 h + f y^3}{a^3 h + 4 f y^3}}$ grad. vbi y, quia non multum variatur tanquam constans est considerandum.

Scholion 2.

799. Regrederetur ergo perpetuo linea absidum motus lunaris, quia $\frac{a^3 h + f y^3}{a^3 h + 4 f y^3}$ minor et vnitate, id quod est contra obseruationes. Ratio vero huius erroris est quod z vt constantem quantitatem considerauimus. Nam etsi z non multum neque augeatur neque minuatur ratione sui ipsius, tamen eius incrementa et decrementa respectu incrementorum ipsius y minime negligi possunt. Quare cum ipsius

P dif-

M.E.C.D. 2017

P differentiale ſit accipiendum, in eo perperam z tanquam conſtantem ſumus contemplati, eiusque loco a poſuimus. Quia autem z non poteſt dari per y, motus abſidum non poteſt hoc modo determinari. Interim tamen hoc colligitur, ſi fuerit $ady > ydz$, lineam abſidum in antecedentia, at ſi $ady < ydz$ in conſequentia promoueri, ſi quidem cogitationem abſtrahamus a vi ſecundum LM agente.

Corollarium 3.

800. Poſito $LM = TP = x$, erit proxime $z = a + x$, vbi x eſt admodum paruum reſpectu a. Neglecto ergo x prae a erit vis qua luna ad terram trahitur $= \frac{b}{y^2} + \frac{fy}{a^3}$ et vis qua ſecundum LM trahitur $= \frac{3fx}{a^3}$. Haec igitur euanescit quando luna eſt in quadraturis, maxima vero eſt, quando luna eſt in ſyzygiis.

Scholion 3.

801. Cum autem non ſit huius loci haec ad motum lunae ſpectantia fuſius perſequi, quippe quae ad Aſtronomiam Theoreticam pertinent; ad reliqua inſtituto noſtro accommodata progrediemur. Sufficere enim poſſunt iſta ad intelligendum, quomodo canones motuum traditi, ad quosuis caſus motusque reſpectiuos inueniendos in vſum verti queant. Quae autem in hoc capite reſtant, motum corporum liberum, qui non fit in eodem plano, com-

M.E.C.D. 2017

plectuntur. Ex praecedentibus quidem manifestum est, vnica existente vi centripeta, motum corporis semper fieri in eodem pluno, quomodocunque etiam corpus initio fuerit proiectum; et si plura sint centra virium in eodem plano sita, in eodemque plano corporis fiat proiectio, curua a corpore descripta similiter tota in eodem plano erit posita. Ad sequentia igitur referri debet, quando corpus a pluribus viribus, quarum directiones in diuersis planis existunt, sollicitatur, vel etiam quando directio, secundum quam corpus initio proiicitur, non in eo, in quo sunt virium directiones, sita est plano. His igitur in casibus motus corporis ita debet considerari, quasi fieret in superficie quadam conuexa seu concaua, in eaque lineam quandam describeret. Natura autem superficiei exprimitur aequatione tres indeterminatas inuoluente, et lineae in ea superficie ductae natura continetur eadem illa aequatione coniuncta cum alia aequatione vel tres quoque illas indeterminatas complectente vel duas tantum. Ex his enim deduci poterit curuae lineae proiectio in dato plano, et ex proiectione et superficie simul innotescit ipsa curua a corpore descripta et in superficie posita. Quemadmodum porro in plano quaeuis vires ad duas normalem et tangentialem possunt reduci, ita in hoc negotio .virium reductio ad tres vires fieri debet (545), quae, quales in corpus exerant effectus, primum sumus inuestigaturi.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 98.

Theorema.

802. *Tres principales vires, quae faciunt, vt corpus in curua non in eodem plano existente moueatur, et in quas aliae vires resolui debent, singulae sunt inter se normales: Earum vna est tangentialis, reliquae duae normales ad eam, quarum altera directionem habet in dato plano, alterius vero directio est normalis ad hoc planum. Harumque virium nulla reliquarum actiones immutare valet.*

Demonstratio.

Assumto plano fixo APQ, in eoque axe AP, sit M*m* elementum a corpore descriptum. Ex punctis M et *m* in planum fixum demittantur perpendicula MQ et *mq*, et ex punctis Q et *q* perpendicula in axem, QP, *qp*. Iam si corpus a nulla vi sollicitaretur, in recta M*m* producta progrederetur celeritate quam habuit in M*m*; aequali ergo tempusculo, quo M*m* percurrit, perueniet in *n*, descripto elemento *mn* aequali et in directum posito elemento M*m*. Quare demisso quoque ex *n* in planum APQ perpendiculo *nr*, erunt elementa Q*q* et *qr* inter se quoque aequalia et in directum posita: hanc ob rem perpendiculum *r*π ex *r* in axem AP demissum abscindet elementum *p*π=P*p*. Sit celeritas qua corpus elementum M*m* describit, debita altitudini *v*, et consideretur primo vis tangentialis, quae directionem habet iuxta *mn* et tota in alteranda celeritate absumitur. Ponatur haec vis tangentialis T

Tabula IX. Fig. 4.

M.E.C.D. 2017

existente vi grauitatis $=1$, erit $dv=$T. Mm, et elementum mn absoluitur celeritate debita altitudini $v+dv$. Deinde in plano Mr concipiatur vis directionem habens ms normalem ad corporis directionem Mm. Haec ergo efficiet vt corpus ab mn declinet, et in $m\nu$ elemento in eodem plano Mr posito prograediatur. Sit haec vis $=$N, et cum radius osculi elementorum Mm et $m\nu$, demisso ex ν in mn perpendiculo $\nu\varepsilon$ sit $=\frac{m\nu^2}{\nu\varepsilon}$, erit $\frac{2v.\nu\varepsilon}{m\nu^2}=$N (561). Est vero $\frac{\nu\varepsilon}{m\nu}$ sinus anguli $nm\nu$. Quamobrem erit $2v$. sin. $nm\nu=$N. $m\nu=$N. Mm, ideoque sin. $nm\nu=\frac{\text{N. M}m}{2v}$. Tertia vis sit normalis ad vtramque expositarum mn et ms, ita vt eius directio mt sit normalis in planum Mr. Haec igitur vis neque praecedenti m actiones impediet, neque ab ipsis impedimentum seu immutationem patietur. Tota ergo impendetur ad corpus a plano Mr detrahendum; deducat ea corpus ex ν in μ, ita vt planum $\nu m\mu$ sit normale in planum Mr; eritque eius effectus angulus $\nu m\mu$. Hoc igitur effectu eodem, quo circa praecedentem vim normalem fecimus, modo aestimato, si fuerit haec vis M, erit sin. $\nu m\mu=\frac{\text{M.M}m}{2v}$. Tres ergo hae vires simul efficient, vt corpus, postquam elementum Mm descripsit, prograediatur in elemento $m\mu$, aucta celeritate debita scilicet altitudini $v+$T. Mm. Quaecunque autem aliae vires corpus sollicitent, eae omnes resolui possunt in huiusmodi tres, quarum directiones sunt mn, ms, mt. Quarum effectus in corpus cum determinauerimus, simul

M.E.C.D. 2017

ſimul quarumcunque virium effectus cognoscentur. Q. E. D.

Corollarium 1.

803. Sumta $\nu\mu$ in plano $nr\pi$, et demiſſo ex μ in planum APQ perpendiculo $\mu\varrho$, erit $\mu\varrho$ parallela ipſi rn. Tres igitur coordinatae pro punctis M, m et μ erunt AP, PQ, QM; Ap, pq, qm; et Aπ, $\pi\varsigma$, $\varsigma\mu$.

Corollarium 2.

804. Quare ſi ex μ in $m\nu$ perpendiculum $\mu\eta$ demittatur, erit id in planum Mr normale; ſimilique modo $\varrho\theta$, quae eſt ad qr perpendicularis, in idem planum normalis erit. Quamobrem ob ϱ et μ in recta $\varrho\mu$ huic plano parallela poſita, erit $\varrho\theta = \mu\eta$, et $\theta\eta = \varrho\mu$.

Corollarium 3.

805. Si ad Qq ducatur normalis qT in plano fixo APQ, erit haec qT normalis in planum Mr. Cum igitur mt in idem planum ſit quoque normalis, erit mt parallela ipſi qT; inter hasque diſtantia erit altitudo mq.

Corollarium 4.

806. Trium coordinatarum dicantur AP$=x$, PQ$=y$ et QM$=z$. Eritque P$p = p\pi = dx$; $pq = y + dy$; $qm = z + dz$; atque $\pi\varsigma = y + 2dy + ddy$; et $\varsigma\mu = z + 2dz + ddz = \theta\eta$. At $Qq = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = qr$; $q\varsigma = \sqrt{(dx^2 + (dy + ddy)^2)} = q\theta = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dy\,ddy}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$; ideoque $r\theta = \frac{-dy\,ddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Porro erit

M.E.C.D. 2017

$\pi r = y + 2dy$ et $rn = z + 2dz$. Denique erit $Mm = V(dx^2 + dy^2 + dz^2) = mn$ et $m\mu = V(dx^2 + (dy + ddy)^2 + (dz + ddz)^2) = V(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{dy\,ddy + dz\,ddz}{V(dz^2 + dz^2 + dz^2)}$.

Corollarium 5.

807. Quia mq, $\theta\eta$ et $r\nu$ sunt inter se parallelae, in eodem plano et rectis qr ac $m\nu$ terminatae, erit $\theta\eta - qm : q\theta = r\nu - mq : qr$. Est vero $\theta\eta - qm = dz + ddz$; $q\theta = V(dx^2 + dy^2) + \frac{dy\,ddy}{V(dx^2 + dy^2)}$ et $qr = V(dx^2 + dy^2)$. Quare est $r\nu - mq = \frac{(dz + ddz)(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2 + dy\,ddy}$ hincque $n\nu = rn - r\nu = -ddz + \frac{dy\,dz\,ddy}{dx^2 + dy^2}$. Vnde reperitur sin. $nm\nu = \frac{dy\,dz\,ddy - dx^2\,ddz - dy^2\,ddz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)V(dx^2 + dy^2)}$.

Corollarium 6.

808. Cum deinde sit $r\varrho = -ddy$, et $Qq : Pp = r\varrho : \varrho\theta$ erit $\theta\varrho = -\frac{dx\,ddy}{V(dx^2 + dy^2)} = \mu\eta$. Hanc ob rem habebitur sin. $\nu m\mu = -\frac{dx\,ddy}{V(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

Corollarium 7.

809. Ex datis igitur tribus viribus T, N et M corpus sollicitantibus orientur tres sequentes aequationes: $dv = TV(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, $2v\,dy\,dz\,ddy - 2v\,ddz(dz^2 + dy^2) = N(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} V(dx^2 + dy^2)$ atque $-2v\,dx\,ddy = M(dx^2 + dy^2 + dz^2)V(dx^2 + dy^2)$, ex quibus tum celeritas corporis in singulis locis tum ipsa curua cognoscuntur.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 8.

810. Duae posteriores aequationes coniunctae et eliminata v dant istam aequationem $\frac{ddz(dx^2+dy^2)}{dxddy} - \frac{dy\,dz}{dx} = \frac{N\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{M}$. Quae assumi potest pro aequatione naturam superficiei exprimente, in qua curua descripta extat.

Scholion.

811. Hac igitur propositione primarias dedimus regulas, ex quibus motus corporis ita sollicitati, vt in eodem plano moueri nequeat, deduci poterit. Ostendimus enim omnes potentias in ternas, quarum effectus determinauimus, posse resolui; et idcirco, quaecunque proponantur potentiae sollicitantes ope talis resolutionis, quem motum eae in corpore producant, cognoscitur. Apparet etiam si potentia M desit, corpus motum suum in plano esse absoluturum, qui igitur casus huc non pertinet. At si potentia tangentialis T euanescat manentibus reliquis M et N, corpus quidem orbitam non planam describet, sed tamen motu vniformi feretur. Quo igitur situs orbitae in vniuersum cognoscatur, inclinationem plani, in quo sunt elementa Mm et $m\mu$, ad planum APQ eiusque cum hoc intersectionem inuestigari oportebit.

PROPOSITIO 99.

Problema.

812. *Determinare plani, in quo duo elementa* Mm *et* mμ *a corpore descripta sunt posita, inclina-* Tabula X. Fig. 1.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

nationem ad planum fixum APQ, *eiusque cum hoc intersectionem.*

Solutio.

In plano, cuius inclinationem quaerimus, dantur tria puncta M, *m* et μ; in hoc igitur plano posita erit quaeuis recta per horum punctorum duo transiens. Quare si recta *m*M producatur, donec ipsi *q*Q productae occurrat in S, erit punctum S tum in plano M*m*μ tum in plano fixo APQ; transibit ergo per S recta, qua haec plana se mutuo intersecant. Manentibus igitur vt ante AP$=x$, PQ$=y$ et QM$=z$, et elementis abscissae P*p* et $p\pi$ inter se aequalibus, erit $qm-QM:Qq=QM:QS$, hincqne $QS=\frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz}$. Lineae vero QS positio cognoscitur ex angulo PQS, cuius sinus est $=\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Deinde in plano M*m*$\mu$ quoque situm est punctum *n*; hanc ob rem recta per *n* et μ transiens seu huic parallela per M ducta in eodem extabit plano. Haec autem recta occurret plano APQ in puncto R rectae QP productae, et QR cognoscetur ex hac analogia $rn-\varsigma\mu:r\varsigma=\mu QM:QR$; hinc erit $QR=\frac{zddy}{dddz}$, ideoque $PR=\frac{zddy}{dddz}-y$. Est vero vt $Qq:Pp=QS:PT$ ducta ST perpendiculari in AP. Ex quo oritur $PT=\frac{zdx}{dz}$. Porro est quoque $Pp:pq-PQ=PT:PQ+ST$, ideoque $PQ+ST=\frac{zdy}{dz}$, et $ST=\frac{zdy}{dz}-y$. Occurrat recta RS producta axi AP in O; eritque $PR-ST:PT=PR:PO$, ex quo inuenitur $PO=\frac{zdxddy-ydxddz}{dzddy-dyddz}$; atque AO

M.E.C.D. 2017

$= \frac{xdzddy - xdyddz + ydxddz - zdxddy}{dzddy - dyddz}$. Porro ex his eſt tangens anguli POR $= \frac{PR}{PO} = \frac{dzddy - dyddz}{dxddz}$; vnde poſitio interſectionis RO plani $Mm\mu$ cum plano fixo APQ innotescit. Inclinatio autem horum planorum mutua inuenitur demittendo ex Q in RS perpendiculo QV; tum enim erit anguli inclinationis tangens $= \frac{MQ}{QV}$. Eſt vero $QV = \frac{PO.QR}{RO} = \frac{zdxddy}{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}$ ideoque $\frac{MQ}{QV} = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}$, ex quo angulus inclinationis mutuae planorum $Mm\mu$ et APQ determinatur. Q. E. I.

Corollarium 1.

813. Si angulus POR ſemper maneat idem, erit $\alpha dxddz + dyddz = dzddy$, eſtque huius anguli tangens $= \alpha$. Aequatio haec integrata dat $\alpha dx + dy + \mathfrak{C}dz = 0$, atque $\alpha x + y + \mathfrak{C}z = f$. Ex qua aequatione cognoscitur orbitam a corpore deſcriptam totam fore in eodem plano poſitam.

Corollarium 2.

814. Si enim fuerit $\alpha x + y + \mathfrak{C}z = f$, erit $\alpha dx + dy + \mathfrak{C}dz = 0$, et $ddy + \mathfrak{C}ddz = 0$. Hinc fiet $AO = x + \frac{ydx + \mathfrak{C}zdx}{-dy - \mathfrak{C}dz}$, et cum ſit $-dy - \mathfrak{C}dz = \alpha dx$, erit AO $x + \frac{y}{\alpha} + \frac{\mathfrak{C}z}{\alpha} = \frac{f}{\alpha}$, ideoque et AO conſtans.

Corollarium 3.

815. Deinde manente angulo POR conſtante ſeu $\alpha x + y + \mathfrak{C}z = f$; erit tangens anguli inclinati-

M.E.C.D. 2017

onis planorum $Mm\mu$ et APQ $= \frac{\sqrt{(dx^2+(-dy-\mathfrak{C}dz)^2)}}{-\mathfrak{C}dx} = \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{-\mathfrak{C}}$. Quare et iſte angulus erit conſtans.

Corollarium 4.

816. Neque etiam punctum interſectionis O inuariabile poni poteſt, niſi ſimul orbita a corpore deſcripta fiat plana. Nam ſit $AO = f$, et ponatur $x - f = t$, et $dx = dt$; erit $tdzddy - tdyddz = zdtddy - ydtddz$; hincque $\frac{ddy}{tdy-ydt} = \frac{ddz}{tdz-zdt}$. Multiplicetur per t, quo habeatur $\frac{tddy}{tdy-ydt} = \frac{tddz}{tdz-zdt}$. Quae aequatio ob dt conſtans eſt integrabilis; namque erit $tdy - ydt = \alpha tdz - \alpha zdt$. Haec diuiſa per tt et integrata dabit $\frac{y}{t} = \frac{\alpha z}{t} + \mathfrak{C}$, ſeu $y = \alpha z + \mathfrak{C}x - \mathfrak{C}f$. Quam perſpicuum eſt eſſe ad ſuperficiem planam.

Corollarium 5.

817. At ſi ponatur tangens anguli inclinationis planorum $Mm\mu$ et APQ conſtans, huius modi aequatio $\alpha x + y + \mathfrak{C}z = f$ non prodit; Atque aliunde manifeſtum eſt orbitam a corpore deſcriptam tum non neceſſario eſſe planum.

Corollarium 6.

818. Quare ne curua a corpore deſcripta ſit plana, neque punctum O, neque angulus POR inuariabiles accipi poſſunt. Haec autem ſi ſint variabilia, nihilo tamen minus angulus inclinationis planorum $Mm\mu$ et APQ conſtans eſſe poteſt.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 7.

819. Linea interſectionis RO, quae in Aſtronomia linea nodorum appellatur, ſi non habeat conſtantem poſitionem, conuertitur circa punctum S. Nam recta *m*MS poſita eſt in plano elementorum M*m* et praecedentis. Quare interſectio RO et praecedens ſe in S decuſſabunt.

Corollarium 8.

820. Punctum igitur hoc S eſt in eo loco, vbi eſt $AT = \frac{xdz - zdx}{dz}$ et $ST = \frac{z\,dy - ydz}{dz}$. Ex quibus poſitio puncti S cognoscitur.

Corollarium 9.

821. Si ponatur punctum S inuariabile, erit $xdz - zdx = adz$ et $zdz - ydz = bdz$, vnde reperitur $x - a = \alpha z$ et $y - b = \beta z$. Hoc igitur caſu orbita a corpore deſcripta non ſolum eſt plana, ſed etiam linea recta; quia proiectio eius Q*q*ϱ fit recta, et propter $y - b = \beta z$ etiam M*m*μ.

Scholion.

822. Expoſitis nunc principiis, quae ad motum corporum in ſuperficiebus non planis pertinent, ipſa tractatio vt prior de motu in plano in duas partes poteſt diuidi. In quarum prima docebimus ex datis viribus inuenire curuam a corpore deſcriptam, in altera vero oſtendetur, ſi data fuerit curua, quam corpus deſcribit, quales vires ad hoc requirantur. Hic vel curua ipſa tantum poteſt eſſe

M.E.C.D. 2017

data, vel simul quoque celeritas corporis in singulis locis.

PROPOSITIO 100.
Problema.

Tabula X. Fig. 2.

824. *Si corpus sollicitetur a tribus potentiis quarum directiones* Mf, Mg *et* MQ *sint parallelae tribus coordinatis* AP, PQ *et* QM; *determinare motum corporis et orbitam, in qua mouebitur.*

Solutio.

Quia M*f* et M*g* sunt parallelae ipsis AP et PQ, erit planum *f*Mg parallelum plano APQ. In hoc plano ducatur M*i* parallela elemento Q*q*, erit haec M*i* quoque posita in plano M*q*. In elementum *m*M productum demittatur ex Q perpendiculum Q*d*; atque ex *f* et *g* in M*i* perpendicula *fi* et *gk*. Deinde ex *i* et *k* in M*d* cadant perpendicnla *ib* et *kr*. Erunt autem *fi* et *gk* perpendiculares in planum M*q*, quia planum *f*Mg est normale ad planum M*q*. Manentibus nunc vt ante AP$=x$. PQ$=y$; et QM$=z$: sit vis corpus secundum M*f* trahens $=$P; vis, quae corpus secundum Mg trahit $=$Q et vis secundum MQ trahens $=$R. Hae igitur vires, vt earum effectus cognoscantur, resolui debent in vires tangentialem iuxta M*m* agentem; normalem ad M*m* in plano MQ sitam, et normalem ad planum M*q*. Ob ang. M*fi*$=$Q*qp* erit $\sqrt{(dx^2+dy^2)} : dy =$P: $\frac{Pdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ exprimitque $\frac{Pdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ vim ex P ortam secundum *if* agentem, et si P sola ageret foret per (802)

M=

$M = -\frac{P\,dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Deinde vis secundum *Mi* trahens erit $= \frac{P\,dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Haec porro resoluitur in vim secundum *bi* trahentem $= \frac{P\,dx\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et vim secundum *Mb* trahentem $= \frac{P\,dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Ex P igitur erit $N = -\frac{P\,dx\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et $T = -\frac{P\,dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Simili modo vis Q, cuius directio est *Mq*, resoluitur in vim secundum *kg* agentem $= \frac{Q\,dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ et vim secundum $M\,k = \frac{Q\,dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Haec vlterius resoluitur in vim secundum *c k* $= \frac{Q\,dy\,dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et vim secundum $M\,c = \frac{Q\,dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Quare si haec vis sola ageret; haberetur $T = -\frac{Q\,dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$; $N = -\frac{Q\,dy\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et $M = \frac{Q\,dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Denique vis R directionem MQ habens resoluitur in vim secundum $Md = \frac{R\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et vim secundum $dQ = \frac{R\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Ex vi R igitur foret $T = -\frac{R\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et $N = \frac{R\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Omnibus igitur hisce tribus viribus P, Q et R simul agentibus erit vis tangentialis ex omnibus orta $T = -\frac{P\,dx - Q\,dy - R\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$, vis normalis in plano *Mq*, quae posita est $N = -\frac{P\,dx\,dz - Q\,dy\,dz + R\,dx^2 + R\,dy^2}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Atque altera vis normalis $M = -\frac{P\,dy + Q\,dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. His valoribus loco T, N et M in aequationibus §. 809 substitutis prodibunt tres sequentes aequationes $dv = -P\,dx - Q\,dy - R\,dz$; $\frac{2v\,dy\,dz\,ddy - 2v\,ddz(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2+dz^2} = -P\,dx\,dz - Q\,dy\,dz + R(dx^2+dy^2)$, atque $\frac{2v\,dx\,ddy}{dx^2+dy^2+dz^2} = P\,dy - Q\,dx$.

M.E.C.D. 2017

$-Q\,dx$. Quae aequationes motum corporis determinant. Q. E. I.

Corollarium 1.

824. Duae hae posteriores aequationes dant istam analogiam: $dydzddy-ddz(dx^2+dy^2):dxddy=-Pdxdz-Qdydz+R(dx^2+dy^2):Pdy-Qdx$. Ex qua reperitur $ddy:ddz=Pdy-Qdx:Pdz-Rdx$.

Corollarium 2.

Tabula X, Fig. 1.

825. Planum ergo $M\,m\,\mu$, in quo sunt elementa $M\,m$ et $m\,\mu$ hoc modo definitur. Erit $AO=x-\frac{Pydz+Pzdy-Qzdx+Rydx}{Qdz-Rdy}=-\frac{Pydz+Pzdy+Qxdz-Qzdx+Rydx-Rxdy}{Qdz-Rdy}$; et tang. angulus $POR=-\frac{Qdz+Rdy}{Pdz-Rdx}$. Atque tangens anguli, quem planum $Mm\mu$ facit cum plano $APQ=\frac{\sqrt{((Pdz-Rdx)^2+(Qdz-Rdy)^2)}}{Pdy-Qdx}$.

Corollarium 3.

826. Si potentia P euanescat, reperitur $Q=-\frac{2vddy}{dx^2+dy^2+dz^2}$ et $R=-\frac{dv}{dz}+\frac{2vdy\,ddy}{dz(dx^2+dy^2+dz^2)}$, ex duabus aequationibus inuentarum. Et ex tertia prodibit $\frac{dv}{2v}=-\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}$, cuius integralis est $vdx^2=a(dx^2+dy^2+dz^2)$ seu $dx\sqrt{v}=\sqrt{a}(dx^2+dy^2+dz^2$.

Corollarium 4.

827. Hac igitur hypothesi erit tempus seu $\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{v}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a}}=\frac{x}{\sqrt{a}}$. Ex quo intelligitur

M.E.C.D. 2017

tur motum corporis progreſſiuum ſecundum axi AP parallelas eſſe vniformem.

Corollarium 5.

828. Eadem porro hypotheſi erit $Q = -\frac{2a\,d\,dy}{dx^2}$ et $R = -\frac{2a\,ddz}{dx^2}$, propter $ddy : ddz = Q : R$ (§24). Ex quibus aequationibus ipſa curua a corpore deſcripta determinabitur.

Scholion.

829. Ex reſolutione potentiarum facile perſpicitur ad tres potentias, quas in hac propoſitione conſiderauimus, omnes omnino potentias, quae excogitari poſſunt, reduci poſſe. Quare cum datis his potentiis non difficulter curua a corpore deſcripta inueniatur, etiam pro quibusque caſibus propoſitis iſta propoſitio maximam habebit vtilitatem.

PROPOSITIO 101.

Problema.

830. *Si corpus perpetuo vrgeatur verſus axem* AP *ſecundum perpendicula* MP *a corpore ad axem demiſſa; determinari oportet motum corporis.* Tabula X. Fig. 3.

Solutio.

Ductis coordinatis vt ante AP, x; PQ, y; et QM, z: erit $MP = V(y^2 + z^2)$. Sit vis ſecundum MP agens $= V$, eaque reſoluatur in duas ſecundum MQ et Mg trahentes, vbi Mg eſt parallela ipſi PQ eique

M.E.C.D. 2017

eique aequalis. Erit igitur vis secundum MQ agens $= \frac{Vz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et vis secundum $Mg = \frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. His cum propositione praecedente comparatis erit $P = o$, $Q = \frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et $R = \frac{Vz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. Quare habebitur $ddy : ddz = Q : R = y : z$ (828) atque $yddz = zddy$ seu $yddz - zddy = o$; cuius aequationis integralis est $ydz - zdy = bdx$. Porro erit $\frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}} = -\frac{2addy}{dx^2}$. Quae aequationes coniunctae determinant curuam a corpore descriptam. Corporis autem celeritas dabitur per aequationem $vdx^2 = a(dx^2+dy^2+dz^2)$, seu ipsa celeritas erit $= \frac{\sqrt{a(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dx}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

831. Ponatur $dx = pdy$, erit ob dx constans, $o = pddy + dpdy$ seu $ddy = -\frac{dpdy}{p}$. His substitutis ad cognoscendam curuam descriptam habebuntur istae aequationes $ydz - zdy = bpdy$ et $\frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}} = -\frac{2adp}{p^3dy}$.

Corollarium 2.

832. Si porro ponatur $z = qy$, istae aequationes transibunt in $y^2dq = bpdy$ et $\frac{V}{\sqrt{(1+qq)}} = -\frac{2adp}{p^3dy}$. Quae etiam tres continent variabiles.

Scholion 1.

833. Ad haec clarius exponenda maxime conuenit exempla adhibere. Quamobrem aliquot afferemus in quibus vis V a distantia MP pendere ponitur, eamque potestatibus aliquibus ipsius MP proportionalem ponemus; quo iste motus cum mo-

M.E.C.D. 2017

motu in plano a vi centripeta diſtantiarum poteſtati cuidam proportionali comparari poſſit. Inter hos enim caſus magna eſt ſimilitudo, cum quod eſt in plano centrum virium hoc loco eſt quaſi axis virium, ad quem corpus perpetuo attrahitur. Atque ſi initio corpus ita proiiciatur, vt non habeat motum progreſſiuum ſecundum axem AP, motus eius fiet in plano PQM, et corpus attrahetur perpetuo ad punctum P centrum virium.

Exemplum 1.

834. Sit vis V diſtantiae MP directe proportionalis, ponaturque $V = \frac{\sqrt{(y^2+z^2)}}{f}$. Erit ergo $\frac{y}{f} = \frac{2adp}{p^3dy}$ (831) et integrando $\frac{y^2}{2f} = C - \frac{a}{p^2}$. ſeu $\frac{1}{pp} = \frac{2cf-yy}{2af}$ et $p = \frac{\sqrt{2af}}{\sqrt{(2cf-y^2)}}$. Cum autem ſit $dq = \frac{bp\,dy}{y^2}$ (832) erit $\frac{b\,dy\sqrt{2af}}{y^2\sqrt{(2cf-y^2)}} = dq$. Cuius integralis eſt $q = \alpha - \frac{\mathfrak{C}\sqrt{(2cf-y^2)}}{y}$, denotante $\mathfrak{C} = \frac{b\sqrt{2af}}{2cf}$. Quare habebitur $z = \alpha y - \mathfrak{C}\sqrt{(2cf-y^2)}$, quae aequatio exprimit proiectionem curuae deſcriptae in plano ad axem AP normali, quam igitur perſpicitur eſſe ellipſin, cuius centrum in axe AP eſt poſitum. Deinde cum ſit $dx = pdy$, erit $dx = \frac{dy\sqrt{2af}}{\sqrt{(2cf-y^2)}}$, quae aequatio exprimit proiectionem curuae quaeſitae in plano APQ. Haec itaque eſt linea ſinuum *Leibnitiana*, cum abſciſſa x ſit vt arcus, cuius ſinus eſt applicata y.

Exemplum 2.

835. Si fuerit vis V reciproce vt quadratum diſtantiae MP; ſeu $V = \frac{ff}{y^2+z^2} = \frac{ff}{yy(1+qq)}$, ob $z = qy$.

M.E.C.D. 2017

Quamobrem habebitur $\frac{ff}{y^2(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2adp}{p^3dy}$. Quia autem eſt $dy = \frac{y^2dq}{bp}$ (832), erit $\frac{f^2dq}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2abdp}{p^2}$; cuius integralis eſt $\frac{ffq}{\sqrt{(1+qq)}} = C - \frac{2ab}{p} = C - \frac{2ab^2dy}{y^2dy}$, loco p ipſius valore $\frac{y^2dq}{bdy}$ ſubſtituto. Hinc fit $\frac{f^2qdq}{\sqrt{(1+q^2)}} = Cdq - \frac{2ab^2dy}{y^2}$, et integrando $f^2\sqrt{(1+q^2)} = Cq + \frac{2ab^2}{y} + D$. Quare dum fit $q = \frac{z}{y}$; prodibit $f^2\sqrt{(y^2+z^2)} = Cz + Dy + 2ab^2$. Quae eſt aequatio pro proiectione curuae deſcriptae in plano ad axem AP normali; quam igitur colligi poteſt eſſe ad ſectionem conicam, cuius alteruter focus ſit in axe AP poſitus.

Scholion 2.

836. Ex his intelligitur proiectiones curuarum deſcriptarum in plano ad axem AP normali, congruere cum curuis, quas corpora in hoc plano mota deſcriberent ab eadem vi ſollicitata. Neque autem hoc mirum eſt; nam motus, quem hoc loco conſideramus, reduci poteſt ad motum in plano ad axem AP normali factum a corpore ad axem perpetuo attracto; dummodo huic plano motus vniformis ſecundum axem AP impreſſus concipiatur. Namque iſte motus progreſſiuus, quia fit vniformiter in directum, motum corporis in plano turbare nequit. Haec igitur conuenientia iam deduci potuiſſet ex 827, vbi ſi vis P euanescit, motus corporis

M.E.C.D. 2017

ris ſecundum axem progreſſiuus aequabilis eſt oſtenſus. Quamobrem quoties vis P in nihilum abit; tum ſemper motus quaeſitus ad motum in plano factum poteſt reduci. Hoc ſcilicetfiet ſi plano ad axem AP normali tantus motus retro ſecundum PA imprimatur, quantum habere inuentum eſt ſecundum AP progreſſiuum (827).

Scholion 3.

837. Interim tamen hoc maxime attendi meretur, quod tam facile in exemplis propoſitis aequationes inter coordinatas orthogonales pro curuarum proiectionibus in plano ad axem AP normali atque adeo pro ipſis curuis a corpore deſcriptis ſi motus progreſſiuus euanescat, inuenerimus. In huius capitis enim priore parte qua motus in plano a vi centripeta generales conſiderauimus, multo maiore opus fuit labore et comparatione arcuum circularium vt ad aequationes conſuetas pro curuis deſcriptis peruenerimus. Maior igitur generalitas, quae ſaepiſſime inuentionem quaeſiti difficiliorem reddit, hoc loco non ſolum non eſt impedimento, ſed etiam facillime id determinat, quod in particulariori ſenſu difficile erat inuentu.

Corollarium 3.

838. In caſu huius propoſitionis planum elementorum Mm et $m\mu$ facile determinatur. Nam ob $ddy : ddz = y : z$ erit $PO = o$ et $AO = x$, incidetque O

Tabula X. Fag. 1.

M.E.C.D. 2017

in P. Porro tang. ang. POR $= \frac{ydz-zdy}{zdx} = \frac{b}{z}$ ob $ydz-zdy = bdx$. Cotangens igitur anguli POR est vt QM. Denique tangens anguli inclinationis plani $Mm\mu$ ad planum APQ est $= \frac{\sqrt{(z^2+b^2)}}{y}$.

Scholion 4.

839. Cum casus, quo vis P euanescit, ad motum in plano possit reduci; reduci quoque poterit ad motum in plano si vel Q vel R desit. Nam si axis capiatur in recta ad AP normali in plano APQ, vis Q directionem habebit axi parallelam, et reliquae P et R tractabuntur, vt ante Q et R. At si axis sumatur normalis ad AP et ad planum APQ, vis R locum vis P axi parallelae occupabit. Scilicet quemadmodum coordinatae x, y et z respectu situs inter se possunt commutari, similiter etiam de viribus P, Q et R est iudicandum.

PROPOSITIO 102.

Problema.

Tabula XI. Fig. 1.

840. *Si corpus in singulis punctis* M *duplici vi sollicitetur vna cuius directio est* MA; *et altera cuius directio est* MQ *normalis ex* M *in planum* APQ *demissa: oportet determinari motum corporis* M, *et orbitam eius.*

Solutio.

Ducta MP, quae sit normalis in AP, vis MA resoluatur in vires secundum Mf ipsi AP parallelam, et secundum MP agentes. Haec vero vis iuxta MP re-

M.E.C.D. 2017

resoluitur in vires secundum MQ et Mg agentes. Positis igitur vt ante AP$=x$, PQ$=y$ et QM$=z$; et vi secundum MA trahente $=$V, et vi secundum MQ$=$W, atque resolutione virium instituta et comparatione facta cum prop. 100. reperietur $P=\frac{Vx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$, $Q=\frac{Vy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$ et $R=W+\frac{Vz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$. Atque ex aequationibus eiusdem prop. prodibit $V=\frac{2vdxddy\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{(xdy-ydx)(dx^2+dy^2+dz^2)}$ et $W=\frac{2vddy(xdz-zdx)-2vddz(xdy-ydx)}{(xdy-ydx)(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Ex his inuenitur $\frac{dv}{2v}=\frac{dydddy+dzdddz}{dx^2+dy^2+dz^2}-\frac{xddy}{xdy-ydx}$; hincque integrando $lVv=l\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{xdy-ydx}+laVa$, seu $Vv=\frac{a\sqrt{a}(dx^2+dy^2+dz^2)}{xdy-ydx}$; siue $v=\frac{a^3(dx^2+dy^2+dz^2)}{(xdy-ydx)^2}$. Hic valor loco v substitutus dat has aequationes $V=\frac{2a^3dxddy\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{(xdy-ydx)^3}$ et $W=\frac{2a^3ddy(xdz-zdx)-2a^3ddz(xdy-ydx)}{(xdy-ydx)^3}$. Ex quibus curua descripta determinatur. Q. E. I.

Corollarium 1.

841. Tempus quo corpus in M vsque peruenit, est $\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{v}}$. Cum autem sit $\sqrt{v}=\frac{a\sqrt{a}(dx^2+dy^2+dz^2)}{xdy-ydx}$, erit illud tempus $=\frac{\int xdy-\int ydx}{a\sqrt{a}}$, quod per quadraturam proiectionis curuae descriptae in plano APQ cognoscitur.

Corollarium 2.

842. Si ponatur $y=px$ et $z=qx$; prodibunt sequentes aequationes $V=\frac{2a^3dx(xddp+2dxdp)\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{x^5dp^3}$

M.E.C.D. 2017

et $W=\frac{2a^3dqddp-2a^3dpddq}{x^3dp^3}$, Quae ad curuam cognoscendam inseruiunt.

Exemplum.

843. Si vis V fuerit distantiae MP proportionalis et vis W perpendiculo MQ; ponatur $V=\frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{f}$ et $W=\frac{z}{g}$, vt itaque fit $V=\frac{x\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{f}$ et $W=\frac{qx}{g}$. Quare per aequationes praeced. Coroll. erit $x^6dp^3=2a^3fdx(xddp+2dxdp)$ et $x^4qdp^3=2a^3gdqddp-2a^3gdpddq$. Illius aequationis integralis est $x^2=C-\frac{2a^3fdx^2}{x^4dp^2}$; ex qua oritur $dp=\frac{adx\sqrt{2af}}{x^2\sqrt{(c^2-x^2)}}$; huiusque integralis $p=\frac{y}{x}=C-\frac{a\sqrt{2af(c^2-x^2)}}{c^2x}$, seu $y=nx-\frac{a\sqrt{2af(c^2-x^2)}}{c^2}$, pro aequatione proiectionis curuae descriptae in plano APQ, quae igitur est ellipsis, cuius centrum in A est positum. Ex inuento ipsius dp valore erit porro $ddp=-\frac{adx^2(2c^2-3x^2)\sqrt{2af}}{x^3(c^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

quibus loco dp et ddp valoribus in altera aequatione substitutis orietur $afqxdx^2=-2accgdxdq+3agx^2dxdq-ac^2gxddq+agx^3ddq$. Ponatur $q=e^{\int rdx}$ prodibit $fxdx=-c^2gxdr+gx^3dr-2ccgrdx+3gx^2rdx-c^2gxr^2dx+gx^3r^2dx$. Fiat $r=\frac{u}{x^2\sqrt{(c^2-x^2)}}$, prouenietque $fxdx=-\frac{gdu\sqrt{(cc-x^2)}}{x}-\frac{gu^2dx}{x^3}$ seu $du+\frac{u^2dx}{x^2\sqrt{(c^2-x^2)}}+\frac{fx^2dx}{g\sqrt{(c^2-x^2)}}=0$. Quae posito $t=\frac{\sqrt{(c^2-x^2)}}{x}$ seu $x=\frac{c}{\sqrt{(1+tt)}}$ transibit in hanc; $du-\frac{u^2dt}{cc}=-\frac{ccfdt}{g(1+tt)^2}$; cuius integrale postea exhibebimus. Ad planum cognoscendum, in quo elementa

Tabula X. Fig. 1.

Mm et $m\mu$ sunt sita, ob $ddy:ddz=gxdy-gydx:gxdz$

M.E.C.D. 2017

$gxdz-hzdx$ posito h loco $f+g$ reperietur $AO = \frac{fz(xdy-ydx)}{hzdy-gydz}$; tang. ang. $POR = \frac{hzdy-gydz}{gxdz-hzdx}$. Atque tang. ang. plani $Mm\mu$ cum plano $APQ = \frac{\sqrt{((hzdy-gydz)^2+(gxdz-hzdx)^2)}}{g(xdy-ydx)}$. Denique tempus quo corpus in M peruenit cum sit $= \frac{\int xxdp}{a\sqrt{a}}$, erit $= \int \frac{dx\sqrt{2f}}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$. Erit itaque hoc tempus proportionale angulo cuius sinus est abscissa x, existente sinu toto $= c$, seu cuius sinus est $\frac{x}{c}$, si sinus totus capiatur $= 1$. Ex quo perspicitur motum corporis in proiectione in plano APQ facta angularem circa A esse vniformem, et tempus vnius reuolutionis esse vt $\sqrt{f}$.

Corollarium 3.

844. Proiectio curuae descriptae in plano APQ fit circulus, si est $n = o$ et $-a\sqrt{2af} = cc$; cuius centrum est in A et radius $= c$. Erit igitur $y = \sqrt{(c^2-x^2)}$. Atque z dabitur ex hac aequatione $\frac{gddz}{dx} = \frac{gxdz-hzdx}{cc-xx}$, quae aeque late patet ac casus exempli praecedentis, etiamsi hic casus particularis sit consideratus.

Corollarium 4.

845. Ad inuentum ipsius z valorem ex aequatione $\frac{gddz}{dx} = \frac{gxdz-hzdx}{cc-xx}$, pono $z = e^{\int rdx}$. Quo facto prodibit aequatio differentialis primi gradus haec: $gdr+gr^2dx = \frac{grxdx-hdx}{cc-xx}$. Fiat $r = \frac{u}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ prodibitque $gdu + \frac{gu^2dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} + \frac{hdx}{\sqrt{c^2-x^2}} = 0$. Posito $\frac{h}{g}$ seu $\frac{f+g}{g} = m^2$,

M.E.C.D. 2017

$= m^2$, orietur aequatio ista $\frac{du}{u^2+m^2} + \frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = 0$, in qua indeterminatae iam sunt a se inuicem separatae.

Corollarium 5.

846. Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = +\sqrt{-1}\, l(\sqrt{(cc-xx)} - x\sqrt{-1})$ et $\int \frac{du}{u^2+m^2} = \frac{1}{2m\sqrt{-1}}\, l\, \frac{u-m\sqrt{-1}}{u+m\sqrt{-1}}$. Addita igitur constante et sumtis numeris habebitur $\left(\frac{\sqrt{(cc-xx)} - x\sqrt{-1}}{b}\right)^{2m} = \frac{u-m\sqrt{-1}}{u+m\sqrt{-1}}$ hinc-que $u = \frac{(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\, m\sqrt{-1}}{b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m}}$.

Corollarium 6.

847. Cum vero sit $lz = \int r\, dx$, atque $r = \frac{u}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ erit $lz = \int \frac{m\, dx\, (b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}}$.

Ponatur $\int \frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = s$; erit $s = \sqrt{-1}\, l \frac{\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1}}{b}$

et $e^{\frac{s}{\sqrt{-1}}} b = \sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1}$, atque $lz = \int \frac{m\, ds\, (1 + e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}})\sqrt{-1}}{1 - e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}}}$, seu posito $e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}} = t$

vt fit $ds = \frac{dt\sqrt{-1}}{2mt}$, erit $lz = \int \frac{-dt\,(1+t)}{2t(1-t)} = l \frac{(1-t)k}{\sqrt{t}}$, vnde

fit $z = \frac{(1 - e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}})k}{e^{\frac{ms}{\sqrt{-1}}}} = \frac{(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})k}{b^m (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^m}$

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 7.

848. Inuento nunc valore ipſius z erit $dz = \frac{mzdx(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}}$. Atque

$$\frac{gxdz-bzdx}{z} = \frac{mgdx(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})}{(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}} - \frac{m^2gdx(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}}{x\sqrt{-1}}$$

Porroque poſito $y = \sqrt{(c^2-x^2)}$ erit $\frac{bzdy-gydz}{z} = -\frac{m^2gxdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} - \frac{mgdx(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}}$.

Corollarium 8.

849. Ex his denique inuenietur $AO = \frac{fcc(b^{2m}-(\sqrt{c^2}}{m^2gx(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}+mg(b^{2m}-x^2)-x\sqrt{-1})^{2m})}{+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}\sqrt{-1}(c^2-x^2)}$, et tang.

$$POR = \frac{mx(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})+}{m(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{}}$$

$$\frac{(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}\sqrt{-1}(c^2-x^2)}{(c^2-x^2)-x(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}.$$

Simili modo ex his inuenitur angulus inclinationis plani, in quo corpus mouetur, ad planum APQ.

M.E.C.D. 2017

Scholion.

850. Inuentorum valorum ipsius ϰ et orbitae inclinationis applicatio fit ad modum difficilis ob quantitates imaginarias inuicem permixtas. Hanc ob rem iis longius immorari noluimus ad intersectiones curuae a corpore descriptae cum plano APQ determinandas. Quia autem magni est momenti haec quaestio in Astronomia ad motum nodorum inueniendum, sequens huic negotio destinata est propositio, in quo loco, vbi corpus motu suo in planum APQ perueniat, inuestigabimus. Corpus enim partim supra hoc planum motum suum absoluit partim infra; et siue supra sit siue infra, corpus perpetuo trahitur altera vi W ad hoc planum in ratione directa distantiae ab hoc plano. Punctum vero in plano APQ, per quod corpus ex superiore parte in inferiorem transit vocatur nodus descendens, punctum vero per quod in superiora reuertitur nodus ascendens.

PROPOSITIO 103.

Problema.

851. *Si corpus attrahatur perpetuo partim ad punctum fixum* A *in ratione distantiarum ab eodem, partim normaliter ad planum* APQ *in ratione quoque distantiarum ab hoc plano: determinare nodos seu puncta, in quibus corpus in hoc planum peruenit; et praeter-*

Tabula XI. Fig. 1.

M.E.C.D. 2017

terea etiam puncta, in quibus corpus ab hoc plano maxime distat.

Solutio.

Manentibus vt ante tribus coordinatis x, y et z, atque vi, qua corpus ad A trahitur $= \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{f}$, ac vi, qua corpus ad planum APQ trahitur $= \frac{z}{g}$, positoque $\frac{f+g}{g} = m^2$: manifestum est corpus in ipsum planum APQ incidere, vbi erit $z = 0$. Fit autem $z = 0$, quoties est $b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m} = 0$ (847). Hocque euenit quoties est $u = \infty$ (846). Cum igitur sit $\frac{du}{u^2+m^2} + \frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = 0$ (845), centro A describatur circulus BQC, radio $AB = c$; corpusque iuxta plagam BQC moueatur; et loco illius aequationis sumatur haec aequialens $\frac{\frac{c^3}{m^2}du}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2} + \frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = 0$, seu $\frac{\frac{1}{m}.\,cc.\frac{cdu}{m}}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2} = -\frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$. Cuius integralis est $\frac{1}{m}\int \frac{cc.\frac{cdu}{m}}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2} = C - \int \frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$; in qua $\int \frac{cc.\frac{cdu}{m}}{\frac{ccuu}{m^2}+c^2}$ exprimit arcum cuius tangens est $\frac{cu}{m}$, et $\int \frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ arcum BQ cuius sinus est $AP = x$. Sit C arcus BQC, seu quadrans circuli, et tangens $CS = \frac{cu}{m}$, cui respondeat arcus CR. Transibit ergo illa aequatio in hanc $\frac{1}{m}CQR = CQ$, atque $CR = m.\,CQ$. Ex hoc perspicuum est fore $u = \infty$,

M.E.C.D. 2017

quoties angulus CAR fuerit rectus, vel aequalis tribus aut quinque aut 7 etc. rectis. Sequendo itaque corporis motum, erit u infinitum, si arcus CR successiue fiat aequalis sequentibus graduum numeris; 90; −90; −270; −450; −630; etc. Tunc autem arcus CQ tenebit gradus; $\frac{90}{m}$; $-\frac{90}{m}$; $-\frac{270}{m}$; $\frac{450}{m}$; $-\frac{630}{m}$; etc. atque arcus BQ: $90-\frac{90}{m}$; $90+\frac{90}{m}$; $90+\frac{270}{m}$; $90+\frac{450}{m}$; $90+\frac{630}{m}$; etc. Quare si corpus alicubi fuerit in nodo, ad alios nodos perueniet successiue absolutis motu angulari circa A angulis graduum: $\frac{180}{m}$; $\frac{360}{m}$; $\frac{540}{m}$; $\frac{720}{m}$; etc. Duo igitur nodi proximi a se inuicem distabunt angulo $\frac{180}{m}$ grad. Atque nodus ascendens vel descendens distabit a sequente nodo eiusdem nominis angulo $\frac{360}{m}$ grad. i. e. angulo $\frac{360.\sqrt{g}}{\sqrt{(g+f)}}$ grad. Q. E. Prius.

Maxime deinde corpus a plano APQ distabit, vbi erit $dz=0$; id quod euenit quoties $b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}=0$ (848). His autem in casibus fit $u=0$. Manente ergo priore constructione euadet $u=0$, quoties fit CR$=0$, vel -180, vel -360; etc. grad. Tum autem arcus CQ continebit gradus; 0, $-\frac{180}{m}$, $-\frac{360}{m}$, $-\frac{540}{m}$, etc. ideoque arcus BQ habebit gradus: 90; $90+\frac{180}{m}$; $90+\frac{360}{m}$; $90+\frac{540}{m}$, etc. Maxima igitur corporis a plano APQ distantia aequaliter distat a nodis vtrinque proximis. Q. E. Posterius.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

852. Nodi igitur in idem tandem recident punctum si fuerit m numerus rationalis seu $\frac{(f+g)}{g}$ numerus quadratus. At si $\frac{f+g}{g}$ non fuerit numerus quadratus, corpus nunquam in eodem puncto in planum A P Q incidet, in quo ante aliquando inciderit.

Corollarium 2.

853. Si f est numerus affirmatiuus, seu si corpus perpetuo ad planum attrahatur vi positiua; erit m numerus vnitate maior. Interuallum ergo inter duos nodos proximos minus erit quam ang. 180 grad. Quare nodi retrogrediuntur: et nodus sequens ab oppositione praecedentis nodi distabit angulo $\frac{180(m-1)}{m}$ grad.

Corollarium 3.

854. Si corpus perpetuo a plano APQ repellatur fit g numerus negatiuus, atque $m = \sqrt{\frac{g-f}{g}}$. Quare si $g > f$, est m numerus realis sed vnitate minor; tum igitur nodi in consequentia progrediuntur eo celerius, quo minus f ab g distabit. Atque si $f = g$, tum corpus e nodo egressum nunquam in superficiem A P Q reuertetur. At si $f > g$, corpus perpetuo ab hoc plano discedet.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

855. Quia corpus a plano APQ maxime di-ſtat, quando fit $(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}=-b^{2m}$: ipſa maxima diſtantia habebitur, ſi in valore ipſius z inuento (847), haec fiat ſubſtitutio. Inuenietur autem haec maxima diſtantia $=\frac{2k}{\sqrt{-1}}$, quae igitur vbique eſt eadem.

Corollarium 5.

856. Si hic circulus BQC fuerit proiectio orbitae a corpore deſcriptae in plano APQ, erit anguli inclinationis plani orbitae ad planum APQ tangens $=\frac{2k}{c\sqrt{-1}}$ in locis vbi corpus maxime ab hoc plano diſtat; ſeu $=\frac{2k}{c}$ poſito k loco $\frac{k}{\sqrt{-1}}$, cum conſtans k talem debeat habere valorem ad imaginaria euitanda.

Corollarium 6.

857. Eadem manente hypotheſi, in locis vbi corpus in planum APQ incidit tangens anguli inclinationis erit $=\frac{dz\sqrt{(c^2-x^2)}}{cdx}$, exiſtente $(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}=b^{2m}$. Fiet itaque iſta tangens $=\frac{mz(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})c}$

(et loco z ſuo poſito valore) $=\frac{2mk\sqrt{-1}}{c}$ ſeu ido-

M.E.C.D. 2017

idoneo loco k valore ſubſtituto erit illa tangens $= \frac{2mk}{c}$.

Corollarium 7.

858. Tangens igitur inclinationis orbitae a corpore deſcriptae ad planum APQ, ſi corpus a plano APO maxime diſtat eſt ad eandem tangentem ſi corpus in hoc planum incidit vt 1 ad m. Fiet ergo vt diſtantia duorum nodorum ad 180 gradus, ita inclinatio orbitae, ſi corpus a nodis maxime diſtat, ad inclinationem orbitae a corpore deſcriptae, ſi corpus in ipſis verſatur nodis.

Scholion.

859. Haec quidem propoſitio parum vtilitatis habere videtur in aſtronomia, eo quod vim, qua corpus ad punctum fixum A trahitur, diſtantiae proportionalem faciamus; in corporibus vero coeleſtibus vis reciproce quadratis diſtantiarum proportionalis locum habeat. Vſus tamen eius eximius eſt, ſi orbitae corporum non multum a circulis differant; nam orbita in circulum abeunte, nihil intereſt, quomodocunque vis centripeta a diſtantiis pendeat. Quamobrem cum orbitae planetarum non multum a circulis diſcrepent, haec propoſitio bono cum ſucceſſu

ad 1

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

ad eos motus poteſt accommodari. Hocque tum maxime eſt faciendum, vt linea f inueniatur, quae ſe habeat ad corporis a centro diſtantiam, vt vis grauitatis ad vim centripetam. Altera vis, quae corpus ad planum datum trahit, quodammodo diſtantiae proportionalis effici poteſt; id tamen ſi non accidat, litera g vt variabilis debet conſiderari, ex quo vero proxime motus nodorum poterit colligi, inter omnes ipſius g valores quaſi medium eligendo. In motu lunae nodorum motus maxime attendi meretur, quippe qui iuxta noſtram determinationem fit in antecedentia. Obſeruatur autem nodi ab oppoſitione praecedentis nodi diſtantia fere $43'$, ita vt ſit $\frac{180(m-1)}{m} = \frac{43}{60}$ atque $m = 1 + \frac{43}{10757} = 1\frac{1}{250}$. Ex quo vis lunam ad planum eccliptícae perpetuo trahens a poſteriore poteſt cognosci.

CA-

M.E.C.D. 2017

CAPUT SEXTUM
DE
MOTU PUNCTI CURVILINEO LIBERO IN MEDIO RESISTENTE.

PROPOSITIO 104.
Theorema.

860.

Si corpus moueatur in medio reſiſtente a quotcunque potentiis abſolutis ſollicitatum: vis reſiſtentiae actionem potentiarum abſolutarum aliter non turbat, niſi quod vim tangentialem ex illis ortam minuat.

Demonſtratio.

Ex capite praecedente ſatis intelligitur omnes potentias abſolutas reſolui poſſe in duas vires tangentialem et normalem, ſi quidem motus fit in eodem plano. At ſi corpus non in eodem mouetur plano, tum tres vires aequiualentes aſſignari poſſunt loco quotcunque potentiarum ſollicitantium, quarum vna eſt tangentialis et duae normales. Vis autem, quam reſiſtentia in corpus exerit, directio ſemper congruere ponitur cum directione corporis (117). Quamobrem vis reſiſtentiae ad vim tangentialem eſt referenda, quam

M.E.C.D. 2017

imminuit, quia motum corporis retardat; vires vero normales prorſus non afficit. Manifeſtum igitur eſt reſiſtentiam potentiarum abſolutarum effectum aliter non turbare, niſi quatenus vis tangentialis ex iis orta a reſiſtentia minuitur. Q. E. D.

Corollarium 1.

861. Reſiſtentiae igitur effectus totus in alteranda corporis celeritate conſiſtit, neque eius directionem immutat, niſi quatenus virium normalium actio variatur variata celeritate.

Corollarium 2.

862. Niſi igitur praeter reſiſtentiam adſint potentiae abſolutae, fieri non poteſt, vt corpus in linea curua moueatur, ſed perpetuo in recta moueri perget, quoad motum ſuum perdiderit.

Scholion 1.

863. In hoc igitur capite, quo motus curuilineos tractabimus, neceſſe eſt, vt cum reſiſtentia ſimul potentias abſolutas conſideremus; easque tales, quae reſolutione praebeant vim normalem, ne in eandem rem capite 4. pertractatam incidamus. Hanc ob rem primo potentiam ad punctum infinite diſtans tendentem, ſeu directionem ſibi perpetuo parallelam conſeruantem conſiderabimus. Deinde ad vires centripetas progrediemur, aliasque quouis modo dispoſitas potentias. Denique etiam motus non

M.E.C.D. 2017

non in eodem plano factos, quales oriantur in medio resistente, examini subiiciemus.

Corollarium 3.

864. Si vis tangentialis sit T, et vna seu duae normales N seu N et M, et vis resistentiae R; canones effectum harum virium continentes, quos in praecedente capite dedimus, etiam hic locum habebunt, si modo in iis loco T ponatur T − R.

Scholion 2.

865. Quemadmodum resistentiam, cuius vis a celeritate corporis pendere ponitur, exponi oporteat per legem resistentiae et exponentem in cap. 4. fuse est ostensum. Hoc vero capite varietas resistentiae magnum campum rerum pertractandarum aperiet, quae in capite praecedente locum non inueniebant. Praeterea hanc tractationem ita subdiuidemus, vt primo ex datis potentiis absolutis et resistentia curuam descriptam et motum corporis in ea determinemus. Deinde si curua et potentia absoluta fuerit data, ex his resistentiam deducemus. Tertio ex data curua et resistentia potentia absoluta datam habens directionem erit inuestiganda. Denique ex data curua, et celeritate corporis in singulis eius punctis et resistentia, potentia absoluta eiusque directio poterit inueniri. Primariam

M.E.C.D. 2017

autem huius capitis diuisionem motus in eodem plano et non in eodem plano factus constituet.

PROPOSITIO 105.

Problema.

Tabula XI. Fig. 3.

866. *Si corpus moueatur in medio resistente quocunque sollicitatum a potentiis absolutis quibuscunque ita tamen vt motum suum in eodem plano absoluat; definire canones, quos in motu suo corpus obseruat.*

Solutio.

Describat corpus hac ratione sollicitatum curuam AMB; sit eius celeritas in M debita altitudini v, et curuae elementum $Mm = ds$. Ponatur porro vis normalis ex omnibus potentiis absolutis orta $= N$, cuius ergo directio erit MN normalis in curuam; vis vero tangentialis ex iisdem potentiis absolutis orta $= T$, cuius directio est MT tangens curuae in M. Atque vis resistentiae in M sit $= R$. His positis motus corporis definiri debet ex vi normali N et vi tangentiali $T - R$ (864). Sit iam radius osculi in $M = r$, eritque $N = \frac{2v}{r}$ (552) et $dv = (T - R)\,ds$; (cit.). Ex his duabus aequationibus, si eliminetur v, prodibit aequatio naturam curuae AMB exponens, simulque corporis in singulis locis celeritas ex aequatione $N = \frac{2v}{r}$ innotescit.

Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

867. Erit igitur $v = \frac{Nr}{2}$. Vnde habebitur $dv = \frac{Ndr + rdN}{2}$. Qui valor ſi in aequatione $dv = (T - R)ds$ ſubſtituatur loco dv, et in R ponatur $\frac{Nr}{2}$ loco v; prodibit aequatio pro curua a corpore deſcripta.

Corollarium 2.

868. Si in R, v vnicam habuerit dimenſionem, id quod accidit, ſi reſiſtentia eſt quadratis celeritatum proportionalis; aequatio $dv = (T - R)ds$, poterit ſeparari, ex eaque v determinari. Haecque aequatio cum $v = \frac{Nr}{2}$ coniuncta dabit ſimpliciorem aequationem pro curua deſcripta.

Scholion.

869. Praeter hunc caſum, quo v vnicam habet dimenſionem in R, plurimi dantur alii, quibus aequatio $dv = (T - R)ds$ poteſt integrari; ſed eos euoluere non eſt opus, cum nihilominus v poſſit eliminari. Hunc vero caſum ideo praecipue notauimus, quia reuera ad fluidorum reſiſtentiam pertinet, et quem propterea prae aliis diligentius examinabimus.

PROPOSITIO 106.
Problema.

870. *Tendat vis ſollicitans vbique normaliter ad rectam poſitione datam* AP; *et moueatur corpus* Tabula XI. Fig. 4.

M.E.C.D. 2017

pus in medio quocunque resistente; determinare curuam AMB *in qua corpus mouebitur, et ipsum corporis motum.*

Solutio.

Sit vis quae corpus in M sollicitat $=P$, cuius ergo directio erit MP. Celeritas corporis in M debeatur alt. v, et vis resistentiae ibi sit $=R$. Capiatur elementum Mm, ductaque mp sit $AP=x$, $PM=y$ et $Mm=ds$. Erit $Pp=Mr=dx$ et $mr=dy$. Porro ducatur tangens MT in eamque ex P perpendicularis PT. His factis vis P resoluetur in normalem $\frac{P.PT}{PM}=\frac{Pdx}{ds}$ et tangentialem $\frac{P.MT}{MP}=\frac{Pdy}{ds}$. Quia autem haec vis tangentialis motum corporis retardat eius negatiuum est capiendum. Posito igitur radio osculi in $M=r$, erit $\frac{Pdx}{ds}=\frac{2v}{r}$ et $dv=-Pdy-Rds$ (866). Ex quibus aequationibus tum ipsa curua tum motus corporis poterit inueniri. Q. E. I.

Corollarium 1.

871. Posito dx constante est radius osculi $r=-\frac{ds^3}{dx\,ddy}$. Hanc ob rem habebitur sequens aequatio $P=-\frac{2v\,ddy}{ds^2}$. Qui valor ipsius P in altera aequatione substitutus dabit aequationem $dv=\frac{2v\,dy\,ddy}{ds^2}-Rds$, seu ob $dy\,ddy=ds\,dds$ haec $dv=\frac{2v\,dds}{ds}-Rds$. Quae aequatio locum habet, quaecunque fuerit potentia P, modo eius directio sit MP.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

872. Si resistentiae lex fuerit ratio quaecunque multiplicata celeritatum et exponens resistentiae sit quantitas vtcunque variabilis q ita vt sit $R = \frac{v^m}{q^m}$, tum habebitur ista aequatio $dv = \frac{2vdds}{ds} - \frac{v^m ds}{q^m}$, cuius integralis est $v^{1-m} = \frac{(m-1)\,dx^{2m-2}}{ds^{2m-2}} \int \frac{ds^{2m-1}}{q^m dx^{2m-2}}$.

Corollarium 3.

873. Si in eadem hypothesi fuerit $m = 1$, erit $\frac{dv}{v} = \frac{2\,dds}{ds} - \frac{ds}{q}$, cuius integralis est $lv = 2\,l\frac{ds}{dx} - \int \frac{ds}{q}$, seu $e^{\int \frac{ds}{q}} v = \frac{ads^2}{dx^2}$. Si praeterea resistentia fuerit vniformis seu $q = c$, erit $e^{\frac{s}{c}} v = \frac{ads^2}{dx^2}$ seu $v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}} ds^2}{dx^2}$. Tempus igitur hoc casu quo arcus AM absoluitur erit $= \int \frac{e^{\frac{s}{2c}} dx}{\sqrt{a}}$.

PROPOSITIO 107.

Problema.

874. *Si et potentia et medium resistens sit vniforme, illiusque directio sit* MP *normalis in rectam da-* Tabula XI. Fig. 4. *tam* AP; *medium vero resistat in ratione duplicata celeritatum, determinare motum corporis proiecti.*

Solu-

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Ponatur potentia corpus perpetuo versus AP trahens $=g$ et exponens resistentiae $=c$, reliquae denominationes vero maneant vt ante. Erit igitur $P=g$ et $R=\frac{v}{c}$. Vnde orientur sequentes aequationes $\frac{gdx}{ds}=\frac{2v}{r}$ seu $gds^2+2vddy=o$ posito dx constante; atque $dv=-gdy-\frac{vds}{c}$. Ex his vero aequationibus coniunctis iam inuenimus $e^{\frac{s}{c}}v=\frac{ads^2}{dx^2}$ (873). Quare cum sit $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$ prodit eliminata v ista aequatio $ge^{\frac{s}{c}}dx^2=-addy$, qua natura curuae descriptae continetur. Cum sit $dsdds=dyddy$ erit etiam $ge^{\frac{s}{c}}dx^2dy=-2adsdds$. Ponatur $dx=pds$, erit $dds=-\frac{dpds}{p}$ et $dy=ds\sqrt{(1-pp)}$. His substitutis proueniet ista aequatio $ge^{\frac{s}{c}}ds=\frac{2adp}{p^3\sqrt{(1-pp)}}$, quae ad construendam curuam descriptam sufficit. Aequationis vero huius integralis aequatio est $gce^{\frac{s}{c}}=C-\frac{a\sqrt{(1-pp)}}{p^2}-a.l\frac{1+\sqrt{(1-p^2)}}{p}$. Restituto vero $\frac{dx}{ds}$ loco p habetur $gce^{\frac{s}{c}}=C-\frac{adyds}{dx^2}-al\frac{ds+dy}{dx}$. Quae est aequatio differentialis primi gradus atque simplicior reddi non potest. Q. E. I.

Corollarium 1.

875. Pro curua descripta aequatio statim differentialis tertii gradus prodit: Nam ob $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$, erit

erit $dv = -gdy + \frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$, quibus valoribus in aequatione $dv = -gdy - \frac{vds}{c}$ ſubſtitutis prodibit $dsdd y = c\,d^3y$.

Corollarium 2.

876. Sit ſinus anguli, quem curua in A cum axe AP conſtituit $= \mu$, eiusque coſinus $= \sqrt{(1-\mu^2)} = \nu$ et altitudo celeritati in A debita $= b$. Facto ergo $s = o$ et $ds : dx = 1 : \nu$, fieri debet $v = b$, habebitur ergo ex $e^{\frac{s}{c}} v = \frac{ads^2}{dx^2}$ haec $\nu^2 b = a$, vnde conſtans a cognoscitur.

Corollarium 3.

877. Porro in aequatione curuae vltima facto $s = o$ et $ds : dx = 1 : \nu$ et $ds : dy = 1 : \mu$, inuenietur conſtans $C = gc + \mu b + \nu^2 b l\frac{1+\mu}{\nu}$. Quare pro curua deſcripta haec orietur aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = \frac{\mu dx^2 - \nu^2 dyds}{dx^2} + \nu^2 l\frac{(1+\mu)dx}{\nu(dy+ds)}$. Ad celeritatem vero nueniendam inſeruit aequatio $e^{\frac{s}{c}} v = \frac{\nu^2 b ds^2}{dx^2}$.

Corollarium 4.

878. Si fuerit D punctum ſupremum, erit ibi $dx = ds$ et $dy = o$. Habebitur ergo $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = \mu + \nu^2 l\frac{1+\mu}{\nu}$ ſeu $e^{\frac{s}{c}} = \frac{b\mu + gc + \nu^2 b l\frac{1+\mu}{\nu}}{gc}$. Ex qua aequa-

M.E.C.D. 2017

aequatione reperitur arcus $AMD = \frac{c\,l\,\frac{b\mu + gc + \nu^2 b}{gc}}{}$. Altitudo vero debita celeritati quam corpus habebit in D erit $= \frac{\frac{\nu^2 gbc}{gc + b\mu + \nu^2 b}}{l^{\frac{1+\mu}{\nu}}}$.

Corollarium 5.

879. Si in B curua eandem habere ponatur inclinationem ad axem AP quam habuit in A, erit $ds : dx : dy = 1 : \nu : -\mu$. Hinc ergo emerget ista aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = 2\mu + \nu^2 l\frac{1+\mu}{1-\mu}$ ex qua prodit arcus $ADB = c\,l\frac{2\mu b + gc + \nu^2 b}{gc}$.

Corollarium 6.

880. Constructio curuae etiam facilis deduci potest ex aequatione $dsddy = cd^3y$. Namque ponatur $dy = pdx$, erit $dpdx\sqrt{(1+pp)} = cddp$. Porro fiat $dx = \frac{dp}{q}$, erit ob $ddx = 0$; $ddp = \frac{dpdq}{q}$, vnde prodibit ista aequatio $dp\sqrt{(1+pp)} = cdq$, atque $q = \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}$. Sumta igitur abscissa $x = \int \frac{cdp}{\int dq\sqrt{(1+pp)}}$ erit $y = \int \frac{cpdp}{\int dp\sqrt{(1+pp)}}$. Hisque respondebit $v = -\frac{cg(1+pp)}{2\int dp\sqrt{(1+pp)}}$. Vnde cognoscitur pro p accipiendam esse quantitatem negatiuam.

Corollarium 7.

Tabula XI. Fig. 5.

881. Si corpus in A proiiciatur secundum directionem ipsius AP, et potentia tendat deorsum, tota

tota curua AM a corpore descripta cadet infra AP, fietque y seu PM negatiua; atque cum sit $\mu = o$ et $y = 1$, habebitur pro curua AM ista aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = \frac{dyds}{dx^2} - l\frac{dx}{ds+dy}$ (877).

Corollarium 8.

882. Data igitur tangentis in quocunque puncto M inclinatione ad rectam AP seu ratione inter ds, dy et dx, inueniri potest ex hac aequatione longitudo arcus AM.

Scholion.

883. Experimenta docuere aerem corporibus resistere in duplicata celeritatum ratione. Cum igitur vis grauitatis sit vniformis et aer in non nimis altis distantiis eandem fere densitatém seruet, casus corporum in aere proiectorum apprime ad hanc propositionem refertur. Determinauimus igitur veram curuam, quam globi ex sclopetis vel tormentis vel alio modo proiecti describunt. Sumitur vulgo pro hac curua parabola, quippe quae in vacuo est proiectoria, et aer tam subtile fluidum esse creditur, vt eius resistentia in computum duci non mereatur. Insensibilis quidem vtique est resistentia aeris, si corpus magnum parua celeritate proiiciatur.. Sed longissime a parabola aberrabit proiectoria, si exiguum corpus magna vi proiiciatur. His autem in casibus, tametsi hic vera assignata est proiectoria, maxime dolendum est, aequationem tam

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

esse intricatum, vt vix quicquam ad vsum practicum ex ea possit deduci. *Neutonus* in Phil. hoc problema non attigit, neque post eum quisquam tentauit, donec *Keilius* ad hoc problema *Ioh. Bernoulli* prouocauerit, etsi ipse solutionem exhibere non potuerit. Dedit autem solutionem non solum *Ioh. Bernoullius* in Act. Lipsi. 1719 m. Mai, sed eodem fere tempore *Iac. Hermannus* Phoronomiae suae inseruit. Sequens autem problema, in quo resistentia ipsis celeritatibus proportionalis ponitur, tum a *Neutono* in Princ. tum a *Hugenio* in tract. de causa grauitatis, est solutum.

PROPOSITIO 108.

Problema.

Tabula XI. Fig. 4.

884. *Si medii resistentia fuerit vt ipsa corporis celeritas et potentiae directio* MP; *praetereaque tam potentia sit vniformis quam medium resistens: determinare curuam, quam corpus proiectum describit, atque celeritatem in singulis locis.*

Solutio.

Positis vt in praecedente Prop. potentia vniformi $=g$, exponente medii resistentis $=c$, altitudine celeritati in M debita $=v$; AP$=x$, PM$=y$ et arcu AM$=s$; erit ex vi normali vt ante $gds^2+2vddy=o$, sumto dx pro constante. Ex vi tangentiali vero ob resistentiam hoc casu $=\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$ habebitur ista aequatio $dv=-gdy-\frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$. Ex his aequationibus con-

M.E.C.D. 2017

coniunctis per §. 872 vbi fit $q = c$ et $m = \frac{1}{2}$ obtinetur $Vv = -\frac{ds}{2dx}\int\frac{dx}{\sqrt{c}} = \frac{ds\sqrt{a}}{2dx} - \frac{xds}{2dx\sqrt{c}} = \frac{ds(\sqrt{ac}-x)}{2dx\sqrt{c}}$, eritque ergo $v = \frac{ds^2(\sqrt{ac}-x)^2}{4cdx^2}$. Vnde pro curua descripta prouenit ista aequatio $2gcdx^2 = -ddy(\sqrt{ac}-x)^2$ seu $-\frac{ddy}{dx} = \frac{2gcdx}{(\sqrt{ac}-x)^2}$ cuius integralis est $\frac{dy}{dx} = -\frac{2gc}{\sqrt{ac}-x} + k$. Atque iterum integrando $y = kx - 2gcl\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ac}-x}$. Vnde simul constabit v, ex aequatione $v = \frac{ds^2(\sqrt{ac}-x)^2}{4cdx^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

885. Pro curua descripta statim haec aequatio differentialis tertii gradus prodiisset, si ex aequatione $v = -\frac{gds^2}{2ddy}$, eiusque differentiali $dv = -gdy + \frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$ valores in aequatione $dv = -gdy - \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$ fuissent substituti. Proueniisset enim $d^3y\sqrt{gc} = +ddy\sqrt{-2ddy}$.

Corollarium 2.

886. Si corpus in A proiiciatur celeritate altitudini b debita, et sinus anguli, quem tangens in A cum AP constituit sit $= \mu$ eius cosinus $\sqrt{(1-\mu^2)} = \nu$, erit in puncto A, $b = \frac{a}{4\nu^2}$ seu $a = 4\nu^2 b$, ex quo constans indefinita a determinatur.

Corollarium 3.

887. Aequatio porro $\frac{dy}{dx} = -\frac{2gc}{\sqrt{ac}-x} + k$ ad punctum A translata dabit $\frac{\mu}{\nu} = -\frac{2g\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + k$,

M.E.C.D. 2017

$= -\frac{g\sqrt{c}}{\nu\sqrt{b}} + k$ ob $a = 4\nu^2 b$. Hinc inuenietur indifinita quantitas $k = \frac{\mu\sqrt{b}+g\sqrt{c}}{\nu\sqrt{b}}$.

Corollarium 4.

888. Pro curua igitur descripta inuenietur ista aequatio differentialis $dy = \frac{2\mu\nu b dx\sqrt{c} - \mu x dx\sqrt{b} - gxdx\sqrt{c}}{2\nu^2 b\sqrt{c} - \nu x\sqrt{b}}$ $= \frac{\mu dx}{\nu} - \frac{gxdx\sqrt{c}}{2\nu^2 b\sqrt{c} - \nu x\sqrt{b}}$. Ex qua deducitur $\frac{ds^2}{dx^2} = \frac{(2\nu b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2 - 2\mu gx(2\nu bc - x\sqrt{bc}) + g^2cx^2}{\nu^2(2\nu b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2}$. Quare cum sit $v = \frac{ds^2(2\nu\sqrt{bc} - x)^2}{4cdx^2}$. Reperietur tandem $v = \frac{2\nu b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2 - 2\mu gx(2\nu bc - x\sqrt{bc}) + g^2cx^2}{4\nu^2 bc}$.

Corollarium 5.

889. Aequatio autem integralis pro curua quaesita erit $y = \frac{\mu x\sqrt{b} + gx\sqrt{c}}{\nu\sqrt{b}} - 2gcl\frac{2\nu\sqrt{bc}}{2\nu\sqrt{bc} - x}$. Ex qua constructio curuae per logarithmicam facile perficitur.

Corollarium 6.

890. Tempus etiam, quo arcus AM absoluitur facile definitur. Nam cum sit $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2dx\sqrt{c}}{2\nu\sqrt{bc} - x}$ erit tempus per arcum $AM = 2\sqrt{c}\,l\frac{2\nu\sqrt{bc}}{2\nu\sqrt{bc} - x}$.

Corollarium 7.

891. Apparet etiam ex aequatione pro curua AM eam habere assymtoton: Nam cum x non possit esse maior quam $2\nu\sqrt{bc}$; si capiatur $AE = 2\nu\sqrt{bc}$ erit applicata in $E = -\infty$ ideoque assymtotos curuae AMDB. Intelligitur hoc etiam ex tempore

M.E.C.D. 2017

re quod fit infinitum antequam corpus ad perpendicularem per E ductam peruenit.

Corollarium 8.

892. Punctum ſummum D reperietur ſi fia $dy = o$. Tum autem inuenitur $x = \frac{2\mu v b\sqrt{c}}{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}} = AC$. Deinde cum ſit in D $ds = dx$ et $2v\sqrt{bc} - x = \frac{2vgc\sqrt{b}}{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}}$ erit altitudo debita celeritati in puncto D $= \frac{v^2 g^2 bc}{(\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c})^2}$ et ipſa celeritas in D $= \frac{vg\sqrt{bc}}{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}}$.

Corollarium 9.

893. Applicata vero CD ſeu diſtantia puncti D ab axe AP erit $= 2\mu\sqrt{bc} - 2gc\,l\frac{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}}{g\sqrt{c}}$ et tempus quo corpus ex A in D peruenit erit $= 2\sqrt{c}\,l\frac{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}}{\sqrt{g}\,e}$.

Scholion.

894. Reduci igitur poteſt caſus, quo corpus ex A oblique proiicitur ad caſum, quo ad directionem potentiae normaliter ex D proiicitur. Cognita enim celeritate, qua corpus in A proiicitur, et directione inueniri poterit punctum D in quo tangens ipſi AC eſt parallela, et celeritas corporis in D. Quare ad meliorem huius motus cognitionem expedit motum tanquam in D incipientem conſiderari, quem in finem ſequentem propoſitionem adiecimus.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 109.

Problema.

Tabula XI. Fig. 5.

895. *Si corpus vbique aequaliter deorsum attrahatur, atque in* A *secundum directionem horizontalem* AP *data velocitate proiiciatur in medio vniformi, quod in simplici celeritatum ratione resistat: determinare curuam* AM, *quam corpus describet et motum corporis in hac curua.*

Solutio.

Cum propositio haec sit casus specialis praecedentis, maneant omnes denominationes vt ante. Fiet autem y seu applicata PM negatiua, quia curua AM infra AP cadet, atque erit $\mu = 0$ et $\nu = 1$. Existente ergo g potentia sollicitante, c exponente resistentiae, b altitudine celeritati in A debita, v altitudine coleritati in M debita, et $AP = x$ et $AM = s$; habebitur aequatio pro curua AM haec differentialis $dy = \frac{g x dx \sqrt{c}}{2b\sqrt{c} - x\sqrt{b}}$ (888), atque haec integralis $y = \frac{gx\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + 2gc\,l\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc} - x}$ (889). Porro erit $v = \frac{(2b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2 + g^2cx^2}{4bc}$ (888). Atque tempus quo arcus AM percurritur $= 2\sqrt{c}\,l\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc} - x}$ (890). Quae aequationes tam curuam AM quam motum in hac curua determinant. Q. E. I.

Corollarium 1.

896. Si $l\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc} - x}$ in seriem conuertatur prodibit $\frac{x}{2\sqrt{bc}} + \frac{x^2}{2.4bc} + \frac{x^3}{3.8bc\sqrt{bc}} + \frac{x^4}{4.16b^2c^2} +$ etc. Quamobrem

M.E.C.D. 2017

obrem erit $y=\frac{gx^2}{4b}+\frac{gx^3}{12b\sqrt{bc}}+\frac{gx^4}{32b^2c}+$ etc. et tempus, quo arcus AM percurritur $=\frac{x}{\sqrt{b}}+\frac{x^2}{4b\sqrt{c}}+\frac{x^3}{12bc\sqrt{b}}+\frac{x^4}{32b^2c\sqrt{c}}+$ etc.

Corollarium 2.

897. In vacuo igitur quando c fit infinite magnum erit $y=\frac{gx^2}{4b}$; quo igitur casu curua AM abit in parabolam, cuius parameter est $\frac{4b}{g}$, et tempus quo arcus AM absoluitur est $=\frac{x}{\sqrt{b}}$, atque $v=b+\frac{g^2x^2}{4b}=b+gy$, quemadmodum ex Prop. 72. colligere licet.

Corollarium 3.

898. Sumta $AE=2\sqrt{bc}$ erit verticalis EF curuae AM assymtotos. Quare si ex M in EF demittatur perpendiculum MQ, erit $MQ=PE=2\sqrt{bc}-x$, et $EQ=y$. Ponatur $MQ=z$, erit $y=-2c\,g+\frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{o}}+1gcl\frac{2\sqrt{bc}}{z}$, et tempus quo arcus AM percurritur $=2\sqrt{c}\,cl\frac{2\sqrt{bc}}{z}$.

Corollarium 4.

899. Punctum igitur E per quod transit assymtotos EF tantum distat a puncto A, quousque corpus ex A si nulla adesset potentia sol icitans g, posset pertingere, antequam motum omnem amitteret. Atque simili modo patet tempus per AM aequale esse tempori per AP potentia g euanescente.

M.E.C.D. 2017

te. Intelligitur hoc ex eo, quod g in his expreſſionibus non ineſt.

Corollarium 5.

900. Ducatur ex M tangens MT, erit $QT = -\frac{zdy}{z} = 2gc - \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Per M ducatur MR conſtituens cum EF angulum, cuius tangens eſt $= \frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{c}}$. Quo facto erit $QR = \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$; ideoque $RT = 2gc$.

Corollarium 6.

901. Si igitur MT conſideretur vt applicata curuae AM ad axem EF obliquangula; erit curua AM ob ſubtangentem RT conſtantem logarithmica obliquangula ſubtangentis $= 2gc$, et tangens anguli inclinationis applicatarum MR ad aſymtoton $EF = \frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{c}}$.

Scholion.

902. Proiectoriam in hac reſiſtentiae et vis ſollicitantis hypotheſi non ſolum ope logarithmicae conſtrui poſſe, ſed ipſam eſſe logarithmicam obliquangulam obſeruauit *Ioh. Bernoulli* in Actis Lipſ. 1719. Cuius ſolutio cum hac noſtra egregie conuenit.

PROPOSITIO IIO.

Problema.

Tabula XI. Fig. 4.

903. *Poſita potentiae abſolutae vniformis directione MP verticali et medio, quod etiam vniforme*

M.E.C.D. 2017

me ponitur, resistente in quacunque multiplicata celeritatum ratione: determinare curuam AM, *quam corpus proiectum describit.*

Solutio.

Manente AP$=x$; PM$=y$, M$m=ds$, celeritate in M$=\sqrt{v}$, potentia $=g$, exponente medii resistentis $=c$, resistat medium in ratione $2m$ *cuplicata* celeritatum; eritque R$=\frac{v^m}{c^m}$, et P$=g$ (870). Quare habebuntur istae aequationes $gds^2=-2vddy$ et $dv=-g\,dy-\frac{v^m\,ds}{c^m}$, ex quibus tum curua AM tum motus corporis in curua determinatur. Aequatio autem $v=-\frac{g\,ds^2}{2ddy}$ dat $dv=-g\,dy+\frac{g\,ds^2\,d^3y}{2ddy^2}$, et $v^m=\frac{g^m\,ds^{2m}}{2^m(-ddy)^m}$. Hinc eliminata v peruenitur ad istam aequationem $c^m d^3y=-\frac{g^{m-1}\,ds^{2m-1}}{2^{m-1}(-ddy)^{m-2}}$ pro curuae natura. Ad hanc construendam ponatur $dy=pdx$, eritque $ddy=dxdp$, $d^3y=dx\,ddp$ et $ds=dx\sqrt{(1+p^2)}$. Quibus substitutis habebitur $2^{m-1}c^m(-dp)^{m-2}ddp=-g^{m-1}dx^m(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}$. Ponatur porro $dx=\frac{dp}{q}$, eritque $ddp=\frac{d\,pdq}{q}$. Vnde habebitur $2(-2)^{m-2}c^m q^{m-1}dq=-g^{m-1}dp(1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}$, et inte-

M.E.C.D. 2017

grando $q^m = -\frac{mg^{m-1}}{2(-2)^{m-2}c^m}\int dp(1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}$. Ex qua aequatione datur q in p, quo inuento sumta abscissa $x = \int\frac{dp}{q}$, est respondens applicata $y = \int\frac{pdp}{q}$. Atque celeritati debita altitudo $v = -\frac{g(1+pp)}{2q}$; et tempus quo arcus AM absoluitur i. e. $\int\frac{ds}{\sqrt{v}} = \int\frac{dp\sqrt{2}}{\sqrt{-gq}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

904. Perspicuum est quoties $2m$ fuerit vel numerus affirmatiuus impar vel numerus negatiuus par valorem ipsius q algebraice per p posse exhiberi.

Corollarium 2.

905. Si resistentia est constans seu $m = 0$, et corpus initio in A proiectum sit celeritate $\sqrt{b}$ secundum horizontalem AP, erit applicata PM, y negatiua, ideoque habebuntur hae aequationes $gds^2 = 2vddy$ et $dv = gdy - ds$ seu $v = b + gy - s$. Vnde prodibit haec aequatio $\frac{gds^2}{2ddy} = b + gy - s$.

Corollarium 3.

906. Commodius autem hic casus tractabitur, si in aequatione differentiali tertii gradus ponatur $m = 0$ prodit enim $gd^3y = -\frac{2ddy^2}{ds}$ seu substitutionibus per p et q factis haec $\frac{gdq}{q} = -\frac{2dp}{\sqrt{(1+p^2)}}$, cuius integralis est $glq = 2l\frac{\sqrt{(1+pp)}+p}{a}$, seu obseruata homoge-

M.E.C.D. 2017

geneitate $aq = (\sqrt{(1+p^2)}-p)^{\frac{2}{g}} = \frac{adp}{dx}$. Hinc habebitur $dx = \frac{adp}{(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2}{g}}}$. Quae denuo integrata dat $2x = \frac{ga}{(2+g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2+g}{g}}} + \frac{ga}{(2-g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2-g}{g}}} + k$. Hincque reperitur $y = \int p\,dx$ et absoluta integratione $4y = \frac{ga}{(2+2g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2+2g}{g}}} - \frac{ga}{(2-2g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2-2g}{g}}} + i$. Patet igitur hanc curuam fore algebraicam nisi sit g vel 1 vel 2.

Scholion.

907. Aeque late patet *Ioh. Bernullii* solutio proiectoriarum in medio resistente quam dedit in Act. Lipsi. A. 1719 Mai. ac haec nostra solutio vbi etiam constructionem generalem pro his curuis dedit. Antequam autem hanc potentiae vniformis hypothesin relinquamus, problemata inuersa soluemus, quibus determinabimus resistentiam, quae efficit vt corpus in hac potentiae vniformis et deorsum tendentis hypothesi datam curuam describat. Haec enim materia tum a *Neutono* in Phil. tum a *Ioh. Bernoullio* in Act. Lipsi. A. 1713 pluribus est pertractata; vbi Viri acutissimi multa eximia notauerunt.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO III.
Problema.

Tabula XI. Fig. 6.

908. *Posita potentia absoluta* g *vniformi et deorsum tendente, determinare resistentiam in singulis locis* M, *qua fiat, vt corpus datam curuam* B AM *describat.*

Solutio.

Ponatur vt ante $AP=QM=x$, $PM=AQ=y$, et elementum arcus $AM=ds$. Deinde fit celeritas in $M=Vv$ et resistentia in $M=R$. His igitur comparatis cum Prop. 106. fiet $P=g$, et y negatiue debet accipi; eritque $gds^2=2vddy$, sumto dx constante (871) et $dv=gdy-Rds$ (870). Ex illa aequatione autem est $v=\frac{gds^2}{2ddy}$ ideoque $dv=gdy-\frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$. Coniunctis igitur his aequationibus prodibit $R=\frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$. Quare cum curua sit data, ex eius aequatione reperietur finitus valor ipsius R, ideoque innotescit resistentia Q. E. I.

Corollarium I.

909. Erit igitur vis resistentiae in M ad vim sollicitantem g vt dsd^3y ad $2ddy^2$. Seu posito radio osculi in $M=r$, ob $r=\frac{ds^3}{dxddy}$ erit $\frac{dsd^3y}{2ddy^3}=\frac{3dsdy-dxdr}{2ds^2}$. Quare erit $g:R=2ds^2:3dsdy-dxdr$.

Corollarium 2.

910. Altitudo generans celeritatem in M nempe v ex ipsa curua determinatur est enim $v=$

BIBLIOTECA
DEL
[illegible]

M.E.C.D. 2017

$v = \frac{g\,ds^2}{2\,ddy}$. Seu introducto radio osculi r ob $\frac{ds^2}{ddy} = \frac{r\,dx}{ds}$ erit $v = \frac{g\,r\,dx}{2\,ds}$.

Corollarium 3.

911. Si resistentia ponatur in duplicata celeritatum ratione, exponens vero resistentiae sumatur incognitus q erit $R = \frac{v}{q} = \frac{g\,ds^2}{2\,q\,ddy}$. Cum igitur inuentum sit $R = \frac{g\,ds\,d^3y}{2\,ddy^2}$; inuenietur medii resistentis exponens $q = \frac{ds\,ddy}{d^3y}$. Similique modo pro aliis medii resistentis hypothesibus inueniri potest medii resistentis exponens.

Corollarium 4.

912. Introducto ad q determinandum radio osculi r, erit $\frac{d^3y}{ddy} = \frac{ddy(3\,dsdy - dxdr)}{ds^3} = \frac{3\,dsdy - dxdr}{r\,dx}$. Consequenter fiet $q = \frac{r\,dx\,ds}{3\,dsdy - dxdr}$. Cognito igitur radio osculi r tam R quam q per differentialia primi gradus determinabuntur.

Corollarium 5.

913. Si curua AM fuerit parabola, cuius axis est verticalis AC, quia iu ea est $d^3y = 0$, prodibit quoque resistentia $R = 0$. Ex quo cognoscitur parabolam in vacuo describi posse a corpore vniformiter deorsum tracto, quemadmodum cuique satis constat.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 6.

914. Si curua fuerit parabola quaecunque superioris ordinis ita vt sit $a^{n-1} y = x^n$, erit $dy = \frac{n x^{n-1} dx}{a^{n-1}}$ et $ds = \frac{dx \sqrt{(a^{2n-2} + n^2 x^{2n-2})}}{a^{n-1}}$. Porroque ob dx constans $ddy = \frac{n(n-1) x^{n-2} dx^2}{a^{n-1}}$ et $d^3 y = \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3} dx^3}{a^{n-1}}$. Quare fi- et $R = \frac{(n-2) g \sqrt{(a^{2n-2} + n^2 x^{2n-2})}}{3 n (n-1) x^{n-1}}$. Atque posita resistentia quadratis celeritatum proportionali erit exponens resistentiae $q = \frac{x \sqrt{(a^{2n-2} + n^2 x^{2n-2})}}{(n-2) a^{n-1}}$.

Scholion.

915. Alia exempla curuarum, quae loco A M assumi possunt hic non adiungo; sed iis sequentes propositiones destino, cum diligentius examinari mereantur. Considerabo autem praecipue circulum et hyperbolam cum hae curuae a Viris citatis maxime sint tractatae.

PROPOSITIO 112.

Problema.

Tabula XI. Fig. 6.

616. *Posita vi absoluta g vniformi et perpetuo deorsum trahente; inuenire resistentiam, quae faciat*

M.E.C.D. 2017

ciat vt corpus libere in peripheria circuli B A M D *moueatur.*

Solutio.

Sit radius circuli AC$=a$, erit $x^2=2ay-y^2$, et radius osculi in M$=a=$MC. Quare ob $dr=0$ erit g:R$=2ds:3dy$. Eſt vero $ds:dy=a:x=$AC:QM. Hanc ob rem erit g:R$=2$AC$:3$QM ſeu R$=\frac{3g.QM}{2AC}$. Altituto vero generans celeritatem in M erit $=\frac{gadx}{2ds}=\frac{g.QC}{2}$. At ſi reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis ponatur erit exponens reſiſtentiae $q=\frac{adx}{3dy}=\frac{a.QC}{3QM}$. Q. E. I.

Corollarium I.

917. Dum corpus per arcum BA ascendit ob QM tum exiſtentem negatiuam, erit quoque reſiſtentia per BA negatiua; ſeu motus corporis per CA a medio accelerabitur vi tangentiali $\frac{3g.QM}{2AC}$.

Corollarium 2.

918. Reſiſtentia vero in puncto A, quia QM euanescit, erit nulla; corpus igitur in A tanquam in vacuo mouebitur. In puncto vero D reſiſtentia erit ad potentiam g in ſesqui altera ratione. In B vero tantundem ſurſum a reſiſtentia ſollicitabitur.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

919. Cum igitur in B et D directio vis resistentiae cum directione potentiae g conueniat; Corpus in B sursum vrgebitur vi $\frac{1}{2}g$; in A deorsum trahetur a vi g, et in D sursum iterum a vi $\frac{1}{2}g$.

Corollarium 4.

920. Quia $\frac{QM}{AC}$ exprimit sinum anguli ACM posito radio $=1$, erit resistentia in $M = \frac{3}{2}g$ sin. ACM, seu resistentia vbique est vt sinus anguli ACM, quo corpus ab A declinauit.

Corollarium 5.

921. Porro est $\frac{a.QC}{QM}$ tangens arcus MD. Quare posita resistentia quadratis celeritatum proportionali erit exponens resistentiae q aequalis tertiae parti cotangentis arcus AM.

Corollarium 6.

922. Cum altitudo debita celeritati in M sit $= \frac{g.QC}{2}$; erit celeritas in $A = \sqrt{\frac{g.AC}{2}}$; in B vero et D erit celeritas $= 0$. Quia igitur corpus in B reuera sursum pellitur vi $= \frac{g}{2}$, mirum non est corpus in B sursum moueri incipere.

Corollarium 7.

923. Corpus igitur tam in quadrante BA quam AD in loco aeque distitis a puncto A aequales ha-

M.E.C.D. 2017

habebit celeritates. Infra vero horizontalem BD corpus peruenire non poteſt ob QC negatiuam, quo caſu celeritas fit imaginaria.

Scholion.

924. Quorſum autem corpus, cum in D peruenerit, ſit progreſſurum, facile ex allatis colligi poteſt. Nam cum celeritas in D ſit $=o$ et corpus in D ſurſum vrgeatur vi $\frac{1}{2}g$, perſpicuum eſt corpus iterum ſurſum moueri debere. Eodem autem modo iterum per arcum DMA ascendet, quo initio per BA acsendit, quia tam in D quam in B vi $=\frac{1}{2}g$ ſurſum vrgetur. Hoc vero mirabile in hoc motu occurrit, quod corpus in B quiescens ſurſum pellatur et nihilominus in curua moueatur, etiamſi nulla vis adeſſe videatur, quae corporis directionem quam in E ſurſum accepit, poſſet inflectere. Sed ad hoc reſpondeo vis in B directionem non perfecte ſurſum tendere, ſed infinite parum a vera verticali aberrare, id quod ſufficit ad motum obliquum producendum. Directio enim vis reſiſtentiae in B ſeu potius vis accelerantis eſt elementum peripheriae circuli in B inſiſtens, quod non perfecte eſt recta verticalis, ſed infinite parum inclinata ad BC. Ceterum haec noſtra egregie conueniunt cum iis quae Cel. *Bernoulli* dedit in Act. Lipſ. A. 1713 et quae ſunt in *Neutoni* Princ. Phil. poſterioribus editionibus. In prima enim editione error in ſolutio-

M.E.C.D. 2017

nem irrepſit, quo inductus fuit, vt rationem g ad R ſtatueret aequalem rationi AC ad QM. Monitus autem de hoc a *Bernoullio* in ſequentibus editionibus hunc lapſum emendauit.

PROPOSITIO 113.

Problema.

Tabula XII. Fig. 1.

925. *Poſita vt ante vi abſoluta* g *vniformi et deorſum trahente; inuenire vim reſiſtentiae, qua efficitur vt corpus in hyperbola* NAM *axem* CAQ *verticalem habente libere moueri poſſit.*

Solutio.

Sit C centrum hyperbolae et ſemiaxis tranſuerſus $AC = a$, ſemiaxis vero coniugatus ſit $= c$. Ponatur $CQ = t$ et $QM = AP = x$; eritque ex natura hyperbolae $c^2t^2 = a^2x^2 + a^2c^2$. Sumta autem $PM = AQ = y$ erit $y = t - a$, et $dy = dt$, $d^2y = d^2t$ atque $d^3y = d^3t$. Ex aequatione vero habebitur $t = \frac{a\sqrt{(x^2+c^2)}}{c}$ et $dt = \frac{axdx}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$ ideoque $ds = \frac{dx\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$. Porro fiet $ddt = ddy = \frac{acdx^2}{(x^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$

et $d^3t = d^3y = -\frac{3acxdx^3}{(x^2+c^2)^{\frac{5}{2}}}$. Ex quibus erit $\frac{d^3y}{ddy} = -\frac{3xdx}{x^2+c^2}$ et $\frac{d^3y}{ddy^2} = -\frac{3x\sqrt{(x^2+c^2)}}{acdx}$. Conſequenter pro-

M.E.C.D. 2017

proueniet resistentia $R = -\frac{3gx\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{2ac^2}$ atque $v = \frac{g(c^4+c^2x^2+a^2x^2)\sqrt{(x^2+c^2)}}{2ac^3}$. Resistentia vero quadratis celeritatum proportionali posita erit exponens resistentiae $q = -\frac{\sqrt{(x^2+c^2)(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{3cx}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

926. Ducta tangente MT erit $QT = \frac{ax^2}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$ et $MT = \frac{x\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$. Consequenter prodibit $R = -\frac{3g.MT.\sqrt{(x^2+c^2)}}{2ac} = -\frac{3g.CQ.MT}{2a^2}$ seu $R : g = -3.CQ.MT : 2.AC^2$.

Corollarium 2.

927. Quia resistentia R inuenitur negatiua, indicio id est descensum per AM in hyperbola fieri non posse in medio resistente, sed requiri vt corpus a medio promoueatur. At dum corpus per arcum NA ascendit, quia fit ds negatiuum, resistentia R erit affirmatiua. Hanc ob rem si corpus est in N, erit resistentia $R = \frac{2g.CQ.NT}{2AC^2}$.

Corollarium 3.

928. Ex natura hyperbolae est $CQ : AC = AC : CT$. Itaque erit resistentia in N seu $R = \frac{3g.NT}{2CT}$. Vel erit resistentia R ad potentiam absolutam g vt $3NT$ ad $2CT$. In vertice ergo A resistentia euanescit, crescitque quo magis N ab A distat.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

929. Altitudo debita celeritati corporis in M vel N, est $=\frac{g.CQ^2.MT^2}{2.AC^2.QT}$ vti ex valore ipsius v et natura hyperbolae facile deducitur. Cum autem sit MT$=$NT et CQ. NT$=\frac{2R.AC^2}{3g}$, erit $v=\frac{2R^2.AC^2}{9g.QT}$.

Corollarium 5.

930. Si resistentia ponatur celeritatibus proportionalis et exponens resistentiae sit q, erit $R=\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{q}}$ et $v=R^2q$. Quare inuenietur $q=\frac{2AC^2}{9g.QT}$. Hac igitur hypothesi exponens erit reciproce vt subtangens QT.

Corollarium 6.

931. At si resistentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis sitque exponens resistentiae q erit existente corpore in N hic exponens $q=\frac{NT.CQ}{3.TQ}$. Seu ducta ex C parallela CR tangenti NT occurrens applicatae QM productae in R erit $q=\frac{CR}{3}$.

Scholion.

932. Quod ante in circulo et nunc in hyperbola obseruauimus resistentiam in altero arcu fieri affirmatiuam in altero negatiuam, id in omnibus curuis circa supremum punctum A duos arcus similes et aequales vt AN et AM habentibus locum obti-

M.E.C.D. 2017

tinet. Nam cum generaliter pro arcu AM sit resistentia $R=\frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$, quia in arcu AN sit *ds* negatiuum erit in N resistentia $R=-\frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$, ita vt resistentia in N sit negatiuum resistentiae in M. Quare cum in rerum natura non detur resistentia negatiua, qua motus corporis acceleratur, fieri non potest, vt corpus in medio resistente curuam describat, quae circa summum punctum A habeat duos ramos similes et aequales. Altitudo vero generans celeritatem tam in M quam in N est eadem, eius enim valor $\frac{gds^2}{2ddy}$ non mutatur, etiamsi *ds* fiat negatiuum. Cum igitur istius modi curuae a *Neutono* ideo sint consideratae, vt aliquam erueret, pro qua medii resistentis densitas non multum variaret; seu nostro tractandi modo in qua exponens resistentiae vbique fere sit eiusdem valoris; quo talem curuam pro proiectoria in medio resistenti vniformi habere posset sine sensibili errore: alias curuas non diametro verticali praeditas cum *Neutono* considerabimus, cuius modi sunt hyperbolae assymtoton verticalem habentes, quippe quae propius accedunt ad logarithmicam, quae a corpore in medio resistente in simplici celeritatum ratione eoque vniformi describitur. In alia enim resistentiae hypothesi *Neutonus* proiectorias non determinauit, sed contentus fuit veris proximas assignare. Quod institutum, cum verae proiectoriae a nobis datae tam sint implicatae, vt vix quicquam ex iis ad praxin possit deduci, etiam sequemur.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 114.

Problema.

Tabula XII. Fig. 2.

933. *Sit curua* NM *hyperbola cuiuscunque gradus alteram habéns asymtoton* CP *verticalem, determinare resistentiam, quae efficiat vt corpus perpetuo vi* g *deorsum sollicitatum in hac hyperbola possit moueri.*

Solutio.

Considéretur asymtotos CP tanquam axis, ad eumque ex M normalis ducatur MP. Posita CP $=y$ et MP$=x$, quae supra generaliter tradidimus haec locum habebunt, si modo ibi dx sumatur negatiuum. Sit RC altera assymtotos et C centrum hyperbolae; sinus ang. RCP$=\alpha$, eiusque cosinus $\sqrt{(1-\alpha^2)}=\mathfrak{C}$. Erit ergo producta PM in R, PR$=\frac{\alpha y}{\mathfrak{C}}$ et CR$=\frac{y}{\mathfrak{C}}$. Ex M ducatur MQ parallela asymtoto CR, erit MQ$=\frac{x}{\alpha}$ et PQ$=\frac{\mathfrak{C}x}{\alpha}$; ideoque CQ$=\frac{\alpha y-\mathfrak{C}x}{\alpha}$. At ex natura hyperbolarum erit $a^n=\frac{x^{n-1}(\alpha y-\mathfrak{C}x)}{\alpha^n}$, atque hinc $y=\frac{\mathfrak{C}x}{\alpha}+\frac{\alpha^{n-1}a^n}{x^{n-1}}$ et $dy=\frac{\mathfrak{C}dx}{\alpha}-\frac{(n-1)\alpha^{n-1}a^n dx}{x^n}$. Ducta tangente MT erit PT$=-\frac{xdy}{dx}=-\frac{\mathfrak{C}x}{\alpha}+\frac{(n-1)\alpha^{n-1}a^n}{x^{n-1}}$, MT$=\frac{xds}{dx}$, ita vt sit $ds=\frac{MT.dx}{x}$. Hoc vero casu quo x in altera parte sumitur fit MT ne-

M.E.C.D. 2017

negatiua. Porro ob dx conſtans erit $d^2y = \frac{n(n-1)\alpha^{n-1}a^n dx^2}{x^{n+1}}$ et $d^3y = -\frac{(n+1)(n-1)n\alpha^{n-1}a^n dx^3}{x^{n+2}}$

Ex his oritur $\frac{g\,ds\,d^3y}{2\,dd\,y^2} = -\frac{g(n+1)x^{n-1}.\,MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$ qui valor facto MT negatiuo aequatur reſiſtentiae R. Erit itaque $R = \frac{g(n+1)x^{n-1}.\,MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$ (908). atque altitudo debita celeritati in M ſeu $v = \frac{g x^{n-1}.\,MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$. Si medium reſiſtere ponatur in ratione $2m$ *cuplicata* ratione celeritatum et exponens reſiſtentiae ſit q, erit $R = \frac{v^m}{q^m}$ ideoque $q = \frac{v}{R^{\frac{1}{m}}}$

Ex quo fiet $q = \frac{g^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}} MT^{\frac{2m-1}{m}}}{2^{\frac{m-1}{m}}(n^2-n)^{\frac{m-1}{m}}(n+1)^{\frac{1}{m}}\alpha^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}}a^{\frac{n(m-1)}{m}}}$

ſeu $q^m = \frac{g^{m-1}x^{(m-1)(n-1)}MT^{2m-1}}{2^{m-1}(n^2-n)^{m-1}(n+1)\alpha^{(m-1)(n-1)}a^{n(m-1)}}$.

Q. E. I.

Corollarium I.

934. Quia eſt $x^{n-1} = \frac{\alpha^n a^n}{\alpha y - \mathfrak{C}x}$, erit reſiſtentia $R = \frac{g(n+1)\alpha.MT}{2n(n-1)(\alpha y-\mathfrak{C}x)} = \frac{g(n+1)MT}{2n(n-1)CQ}$. Vnde erit reſiſtentia R ad potentiam g vt $(n+1)MT$ ad $2n(n$

M.E.C.D. 2017

$2n(n-1)CQ$. Simili modo hoc loco x^{n-1} valore ſubſtituto erit $v = \frac{g.MT^2}{2n(n-1)CQ}$ et $q^m = \frac{g^{m-1} MT^{2m-1}}{2^{m-1}(n^2-n)^{m-1}(n+1)CQ^{m-1}}$.

Corollarium 2.

935. Descendente corpore in infinitum fiet $x=0$, et $MT=PT=\frac{(n-1)\alpha^{n-1}a^n}{x^{n-1}}$, euanescente x. In profunditate ergo infinita erit $R=\frac{g(n+1)}{2n}$, ideoque finitae magnitudinis, at erit $v = \frac{g(n-1)\alpha^{n-1}a^n}{2nx^{n-1}}$. Quare cum neceſſario ſit $n > 1$, euanescente x fiet corporis celeritas infinitae magna.

Corollarium 3.

936. Poſita igitur reſiſtentia $R=\frac{v^m}{q^m}$, in profunditate infinita, debebit etiam q eſſe infinite magna; his itaque locis corpus in vacuo mouebitur. Ex quo ſequitur quo magis corpus descendat eo minorem fore reſiſtentiam, ſeu potius medium eo rarius.

Corollarium 4.

937. In hyperbola appolloniana fit $n = 2$. Pro hac igitur curua inuenitur $R = \frac{3gx.MT}{4\alpha a^2}$

M.E.C.D. 2017

$= \frac{3g.MT}{4.CQ}$, et $v = \frac{g.MT^2}{4.CQ}$, atque $q^m = \frac{g^{m-1}.MT^{2m-1}}{3.2^{2m-2}.CQ^{m-1}}$.

Corollarium 5.

938. Si resistentia ponatur celeritatibus proportionalis, erit in omnibus his hyperbolis exponens resistentiae directe vt CQ, ob $m = \frac{1}{2}$ hoc casu. Hac igitur resistentiae hypothesi corpus omnes hyperbolas poterit libere describere.

Corollarium 6.

939. Si resistentia ponatur in duplicata celeritatum ratione vt sit $m = 1$, erit exponens resistentiae in $M = \frac{MT}{n+1}$. Quo magis igitur MT variatur, eo magis quoque medium erit difforme.

Corollarium 7.

940. Tempus praeterea quo elementum Mm describitur seu $\frac{ds}{\sqrt{v}}$ erit $= \frac{\sqrt{2}ddy}{\sqrt{g}}$. Tempus igitur, quo corpus in M vsque peruenit, est vt $\int \frac{dx}{x^{\frac{n+1}{2}}}$ i. e. vt $C - \frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}}$, seu potius vt $\frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}} - C$. Quare tempus, quo corpus ex N in M peruenit, erit vt $\frac{1}{MP^{\frac{n-1}{2}}} - \frac{1}{NP^{\frac{n-1}{2}}}$.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017.

Corollarium 8.

950. In parabola igitur appolloniana in qua $n = 2$ erit tempus, quo corpus ab N ad M peruenit vt $\sqrt{NP} - \sqrt{MP}$ ob NP. MP constans nempe $= \frac{\alpha a^2}{6}$.

Scholion.

951. Ex his manifestum est corpus in medio resistente vniformi huiusmodi hyperbolas describere non posse, cum exponens resistentiae nimium sit variabilis, quippe qui tandem fit infinite magnus. Quamobrem *Neutoni* institutum, quo has hyperbolas loco verarum proiectoriarum in medio resistente vniformi substituere voluit probari non potest. In medio enim secundum quadrata celeritatum resistente, exponens est vt tangens MT, quae tam descendendo, quam ad punctum N regrediendo vehementer variatur. Intelligi etiam haec inconuenientia potest ex celeritate, quae descendendo in infinitum crescit, cum tamen in medio vniformi non vltra datum terminum crescere queat. Praeterea non satis liquet in resistentiae quadratis celeritatum proportionalis hypothesi curuam descriptam habere asymtoton verticalem, quemadmodum in medio resistente in simplici ratione celeritatum. Nam hac resistentia etiam, si corpus a nulla potentia vrgetur, totius motus linea est finita; quae vero si resistentia quadratis celeritatum proportionalis ponitur, fit infinita. Ex quo etiam con-

M.E.C.D. 2017

conſequi videtur proiectoriam in hac reſiſtentia non eſſe habituram aſymtoton. Hoc ſaltem certum eſt non habere hanc curuam aſymtoton hyperbolicam. Interim tamen habet aſymtoton verticalem alius generis, quae ex quadratura curuae, per rectificationem parabolae datae, determinatur. Sed relicta potentiae vniformis hypotheſi, pergamus ad potentiam variabilem, cuius tamen directio vbique ſibi ſit parallela. Ex datis quidem potentia et reſiſtentia curuam deſcriptam non inueſtigabimus cum hoc Prop. 106 iam ſit factum; ſed data curua atque vel potentia vel reſiſtentia vel celeritate reliqua determinabimus.

PROPOSITIO 115.

Problema.

953. *Sit potentia abſoluta vtcunque variabilis et vbique deorſum tendens iuxta* M P, *determinare reſiſtentiam requiſitam ad hoc, vt corpus in data curua* A M *moueatur.* Tabula XII. Fig. 3.

Solutio.

Sit AP $=x$, PM $=y$ et elementum arcus AM $=ds$: tum ſit vis qua corpus in M ſecundum MP ſollicitatur $=$P, et altitudo celeritati in M debita $=v$, atque reſiſtentia in M $=$R. His poſitis erit $dv=-Pdy-Rds$ (870), et $v=-\frac{Pds^2}{2ddy}$ (871), ſum-

M.E.C.D. 2017

to dx constante. Ex hac ergo aequatione erit $dv = -\mathrm{P}\,dy - \frac{d\mathrm{P}ds^2}{2d\,dy} + \frac{\mathrm{P}ds^2d^3y}{2ddy^2}$; vnde prodibit $\mathrm{R} = \frac{d\mathrm{P}ds}{2ddy} - \frac{\mathrm{P}ds\,d^3y}{2ddy^2}$ seu $\frac{2\mathrm{R}}{ds} = d.\frac{\mathrm{P}}{ddy}$. Inueniuntur ergo tam v quam R per datas quantitates P, x et y expressa. Q. E. I.

Corollarium 1.

953. Posito radio osculi in $\mathrm{M} = r$ erit $d\,dy = -\frac{ds^3}{rdx}$, et $d^3y = -\frac{3dsdyddy}{rdx} + \frac{ds^3dr}{r^2dx} = \frac{3ds^4dy}{r^2dx^2} + \frac{ds^3dr}{r^2dx}$. Vnde prodit $v = \frac{\mathrm{P}rdx}{2ds}$ et $\mathrm{R} = -\frac{rd\mathrm{P}dx - \mathrm{P}dxdr - 3\mathrm{P}dsdy}{2ds^2}$.

Corollarium 2.

954. Si lex resistentiae sit celeritatum ratio duplicata et exponens $= q$ erit $\mathrm{R} = \frac{v}{q}$ et $q = \frac{v}{\mathrm{R}}$. Quocirca reperietur $q = \frac{\mathrm{P}dsddy}{\mathrm{P}d^3y - d\mathrm{P}ddy}$, seu $q = -\frac{\mathrm{P}rdxds}{rd\mathrm{P}dx + \mathrm{P}dxdr + 3\mathrm{P}dsdy}$.

Corollarium 3.

955. Sit vis P ad grauitatem 1 vt y ad f erit $\mathrm{P} = \frac{y}{f}$, ideoque $\mathrm{R} = -\frac{rdxdy - ydxdr - 3ydsdy}{2fds^2}$ et $v = \frac{yrdx}{2fds}$, atque $q = -\frac{yrdxds}{rdydx + ydxdr + 3ydsdy}$.

Corollarium 4.

956. Si curua A M fuerit circulus radii $\mathrm{A\,C} = a$, erit $r = a$, $dr = 0$, $dy = \frac{(a-x)dx}{y}$ et $ds =$

M.E.C.D. 2017

$ds = \frac{a\,dx}{y}$. Vnde prodit $v = \frac{Py}{2}$, et resistentia $R = -\frac{y\,dP}{2a\,dx} - \frac{3P(a-x)}{2a}$, atque $q = -\frac{aPy\,dx}{y^2\,dP + 3P(a-x)\,dx}$.

Exemplum 1.

957. Sit curua AM circulus cuius centrum C et radius $AC = a$. Corpus autem perpetuo ad axem AC attrahatur in ratione distantiarum ita vt sit $P = \frac{y}{f}$; erit $v = \frac{y^2}{2f}$, ideoque celeritas in M erit ut applicata MP. Deinde resistentia R fiet $= -\frac{y(a-x)-3y(a-x)}{2af} = -\frac{2y(a-x)}{af} = -\frac{2\,PM.CP}{f.AC}$ et $q = -\frac{PM.AC}{4.CP}$. Celeritas autem in puncto A erit $= 0$, et resistentia, dum corpus in quadrante ascendit negatiua, seu corpus a medio accelerabitur. Tempus vero quo corpus ex A in M peruenit erit infinite magnum, fit enim $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{a\,dx\sqrt{2f}}{2ax-x^2} = -\sqrt{\frac{f}{2}}\,l\,0 + \sqrt{\frac{f}{2}}\,l\,\frac{x}{2a-x}$. Id quod etiam per se intelligitur, nam cum celeritas in A sit $= 0$, et hic tam vis sollicitans $\frac{y}{f}$, quam vis medii euanescat, corpus perpetuo in A debebit perseuerare.

Exemplum 2.

958. Manente curua AM circulo, si vis absoluta fuerit reciproce vt distantia PM seu $P = \frac{f}{y}$, erit $v = \frac{f}{2}$. Quare celeritas corporis vbique erit eadem, seu corpus feretur motu aequabili per circuli peripheriam et tempus, quo arcus quiuis AM absoluitur erit vt ipse arcus AM. At resistentia in M erit $= -\frac{f(a-x)}{ay} = -\frac{f.CP}{AC.PM}$. Resistentia igitur dum corpus

M.E.C.D. 2017

pus per quadrantem ascendit erit negatiua; dum autem per sequentem quadranten descendit, resistentia fiet affirmatiua seu erit vera resistentia. Ex resistentia porro inuenitur $q = -\frac{AC.PM}{2.CP}$. In puncto igitur A resistentiae vis promouens erit infinite magna; vt et potentia sollicitans, quae resistentiae est aequalis.

Exemplum 3.

959. Manente AM circulo sit vis sollicitans vt potestas quaecunque distantiae MP, seu $P = \frac{y^n}{f^n}$; erit $dP = \frac{n y^{n-2}(a-x)dx}{f^n}$. Ex his igitur prodibit $v = \frac{y^{n+1}}{2f^n}$ et resistentia $R = -\frac{(n+3)y^n(a-x)}{2af^n}$ Vnde fit $R:P = -(n+3)CP:2AC$. Quare si fuerit $n = -3$, seu potentia P reciproce vt cubus distantiae MP, euanescet resistentia R, corpusque ab hac potentia sollicitatum in vacuo moueri poterit in circulo AM. Deinde si $n+3$ est numerus affirmatiuus resistentia per quadrantem ascensus erit negatiua. At si $n+3$ est numerus negatiuus resistentia per hunc quadrantem fit affirmatiua.

Exemplum 4.

Tabula XII. Fig. 4.

960. Si curua AMB fuerit talis, vt radius osculi in M sit reciproce, vt applicata PM, id quod omnes

M.E.C.D. 2017

omnes curuas elasticas competit erit $r = \frac{a^2}{y}$ et $dr = -\frac{a^2 dy}{y^2}$. Fiet igitur $v = \frac{a^2 P dx}{2y\,ds}$, et $R = \frac{a^2 P dx dy}{2y^2 ds^2} - \frac{a^2 dP dx}{2y\,ds^2} - \frac{3P dy}{2ds}$. Cum autem sit $-\frac{ds^3}{dx\,ddy} = \frac{a^2}{y}$, atque integrando $2a^2 dx = ds(y^2 + b^2)$, et $dy = \frac{dx\sqrt{(4a^4-(y^2+b^2)^2)}}{y^2+b^2}$. Hinc erit $v = \frac{P(y^2+b^2)}{4y}$. Atque $R = \frac{P(b^2-5y^2)\sqrt{(4a^4-(y^2+b^2)^2)}}{8a^2y^2} - \frac{dP(y^2+b^2)^2}{8a^2 y\,dx}$. Sit nunc $P = \frac{y}{f}$, et $dP = \frac{dx\sqrt{(4a^4-(y^2+b^2)^2)}}{f(b^2+y^2)}$, erit $v = \frac{y^2+b^2}{4f}$ et $R = -\frac{3y\sqrt{(4a^4-(y^2+b^2)^2)}}{4a^2 f} = -\frac{3y\,dy}{2f\,ds}$. Ideoque $R : P = -3\,dy : 2\,ds$. Quam diu igitur corpus ascendit resistentia est negatiua, at quando descendit erit affirmatiua.

PROPOSITIO 116.

Problema.

961. *Si data sit curua* AM *et resistentia per quantitates ad curuam pertinentes; inuenire potentiam absolutam* P *perpetuo normaliter ad axem* AC *tendentem, quae faciat vt corpus in hac curum libere moueri possit.* Tabula XII. Fig. 3.

Solutio.

Sit $AP = x$, $PM = y$ et elementum curuae $= ds$. Deinde sit resistentia in $M = R$, quae ergo per x, y et s dabitur; potentia quaesita sit $= P$ et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit; $P = -\frac{2v\,ddy}{ds^2}$ (871), et $dv = \frac{2v\,dy\,ddy}{ds^2} - R\,ds$ (cit.).

M.E.C.D. 2017

Ex hac aequatione ob dx conſtans reperitur integrando $v = \frac{ads^2}{dx^2} - \frac{ds^2}{dx^2}\int\frac{Rdx^2}{ds}$. Inuenta autem v innotescet P ex aequatione $P = -\frac{2vddy}{ds^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

962. Erit igitur $P = -\frac{2addy}{dx^2} + \frac{2ddy}{dx^2}\int\frac{Rdx^2}{ds}$. Per meras igitur quantitates datas determinatur P.

Corollarium 2.

963. Quia conſtans addita a prolubitu poteſt accipi, ita ea poterit determinari, vt corpus in puncto A vel alio quodam dato puncto datam habeat celeritatem.

Corollarium 3.

964. Si reſiſtentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis et exponens reſiſtentiae q erit $q = \frac{ads^2}{Rdx^2} - \frac{ds^2}{Rdx^2}\int\frac{Rdx^2}{ds}$.

Corollarium 4.

965. Tempus quo arcus A M percurritur eſt $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$, in qua expreſſione ſi valor ipſius v ſubſtituatur proueniet tempus per $AM = \int\frac{dx}{\sqrt{(a-\int\frac{Rdx^2}{ds})}}$

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

966. Si resistentia ponatur ad vim grauitatis 1 vt tangens in M ad subtangentem seu vt ds ad dx, erit $v = \frac{ds^2}{dx^2}(a-x)$ et $P = -\frac{2ddy}{dx^2}(a-x)$ atque tempus per $AM = \int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)}} = 2\sqrt{a} - 2\sqrt{(a-x)}$. At porro erit $q = \frac{ds}{dx}(a-x)$.

Exemplum.

967. Sit curua circulus cuius radius $AC = b$, erit $y = \sqrt{(2bx-xx)}$ et $dy = \frac{dx(b-x)}{y}$ et $ds = \frac{bdx}{y}$, atque $ddy = -\frac{b^2dx^2}{y^3}$. Ex his habebitur $v = \frac{b^2}{y^2}(a - \int \frac{R\,y\,dx}{b})$ atque $P = \frac{2b^2}{y^3}(a - \int \frac{R\,y\,dx}{b}$. Ponatur resistentia $= \frac{ds}{dx}$ seu $R = \frac{b}{y}$, erit $v = \frac{b^2}{y^2}(a-x)$, et $P = \frac{2b^2}{y^3}(a-x)$, atque $q = \frac{b}{y}(a-x)$. Tempus vero quo corpus ex A in M peruenit erit $= 2\sqrt{a} - 2\sqrt{(c-x)}$. Si vlterius sit $b = a$, erit $v = \frac{AC^2.PC}{PM^2}$, et $P = \frac{2AC^2\,PC}{PM^3}$, et $R = \frac{AC}{PM}$. Celeritas igitur corporis in supremo circuli puncto erit $= 0$, et potentia P ibidem euanescit. Corpus autem vltra hoc punctum non poterit progredi, quia alias celeritas fieret imaginaria, inde igitur reuertetur ad punctum A, quia a resistentia quae in recessu fit negatiua acceleratur. Dum autem peruenerit in A, quia hic celeritas est infinite magna, hoc motu suo describet quadrantem infra AC, in quo ob potentiam P negatiuam sursum vrgebitur.

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 117.

Problema.

Tabula XII. Fig. 3.

968. *Si medium fuerit vniforme atque resistat in duplicata ratione celeritatum determinare potentiam absolutam deorsum tendentem, quae faciat vt corpus in hoc medio resistente describat curuam datam* AM.

Solutio.

Posita AP$=x$, PM$=y$, elemento arcus AM $=ds$, celeritate in M$=\sqrt{v}$, exponente medii resistentis $=c$, et potentia absoluta $=$P, erit igitur R$=\frac{v}{c}$. His positis erit P$=-\frac{2vddy}{ds^2}$ et $dv=\frac{2vdyddy}{ds^2}-\frac{vds}{c}$ (871). Quare habebitur $\frac{dv}{v}=\frac{2dyddy}{ds^2}-\frac{ds}{c}$ et integrando $lv=l\frac{ads^2}{dx^2}-\frac{s}{c}$ seu $v=\frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dx^2}$. Valore igitur ipsius v inuento erit P$=-\frac{2ae^{-\frac{s}{c}}ddy}{dx^2}$. Data ergo curua tum v tum P inueniuntur. Q. E. I.

Corollarium 1.

969. Tempus quo corpus arcum AM absoluit seu $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$ erit $=\int\frac{e^{\frac{s}{2c}}dx}{\sqrt{a}}$. Data ergo curua seu aequa-

M.E.C.D. 2017

aequatione inter s et x, habebitur quoque tempus saltem per quadraturas. Eae igitur curuae ad hoc sunt commodissimae, pro quibus datur aequatio inter s et x.

Corollarium 2.

970. Quia a pro lubitu potest accipi, vtpote quantitas integratione adiecta, eius determinatione effici potest, vt vel celeritas in dato curuae loco sit data, vel potentia sollicitans.

Corollarium 3.

971. Si curua AM versus axem AP est concaua, tum est ddy negatiuum, his igitur casibus potentia corpus ad axem AP trahet. At si curua erit conuexa versus AP, quia tum ddy fit affirmatiuum, potentia P fit negatiua, seu corpus ab axe AP repelletur.

Exemplum 1.

972. Sit curua AM parabola axem habens normaliter insistentem rectae AP, qualis in vacuo a corpore ex A oblique proiecto describitur, erit $by = fx - x^2$, ideoque $dy = \frac{f\,dx}{b} - \frac{2x\,dx}{b}$ atque $ddy = -\frac{2\,dx^2}{b}$. His substitutis erit potentia sollicitans $P = \frac{4a}{b\,e^{\frac{s}{c}}}$. Ex quo intelligitur quo diutius motus

M.E.C.D. 2017

continuetur, eo magis decrescere potentiam P. Facto autem c infinite magno id quod fit in vacuo erit $c^{\frac{s}{c}} = 1$ atque potentia $P = \frac{4a}{b}$ et idcirco constans.

Exemplum 2.

973. Sit curua AM talis vt eius aequatio sit $y = \alpha x - \mathfrak{C}x^2 - \gamma x^3$, erit $dy = \alpha dx - 2\mathfrak{C}xdx - 3\gamma x^2 dx$ et $d^2y = -2\mathfrak{C}dx^2 - 6\gamma x dx^2$. Hinc erit $P = \frac{4\mathfrak{C}a + 12\gamma ax}{e^{\frac{s}{c}}}$. In puncto A est $dy = \alpha dx$, et $\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \alpha^2$. Altitudo igitur debita celeritati initiali in A est $a(1+\alpha^2)$ quae si dicatur b erit $a = \frac{g}{1+\alpha^2}$ et α est tangens anguli sub quo corpus ex A proiicitur. Deinde ex ipsius dy valore reperitur $ds = dx\sqrt{(1 + \alpha^2 - 4\alpha\mathfrak{C}x + 4\mathfrak{C}^2x^2 - 6\alpha\gamma x^2 + 12\mathfrak{C}\gamma x^3 + 9\gamma^2x^4)} = dx\sqrt{(1+\alpha^2)} - \frac{2\alpha\mathfrak{C}xdx}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$ etc. Neglectis igitur reliquis terminis foret $s = x\sqrt{(1+\alpha^2)} - \frac{\alpha\mathfrak{C}x^2}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$, atque $e^{\frac{s}{c}} = 1 + \frac{x\sqrt{(1+\alpha^2)}}{c} - \frac{\alpha\mathfrak{C}x^2}{c\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \frac{x^2(1+\alpha^2)}{2c^2}$ etc. qui termini quoque reiici possunt si c fuerit valde magnum. Quare quo P fiat quam proxime constans nempe $= g$, debebit esse $4\mathfrak{C}a = g$, et $\frac{3\gamma}{\mathfrak{C}} = \frac{\sqrt{(1+\alpha^2)}}{c}$. Atque si assumta fuisset haec aequatio $y = \alpha x - \mathfrak{C}x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4$, prodiisset $\frac{6\delta}{\mathfrak{C}} = \frac{(1+\alpha^2)}{2c^2} - \frac{\alpha\mathfrak{C}}{c\sqrt{(1+\alpha^2)}}$. Erit ergo

$$\mathfrak{C} = \frac{g(1+\alpha^2)}{4b}, \quad \gamma = \frac{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{12bc} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{g(1+\alpha^2)^2}{48bc^2} - \frac{\alpha g}{}$$

M.E.C.D. 2017

$-\frac{\alpha g^2(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{96b^2c}-$. Haec igitur curua quarti ordinis erit quam proxime proiectoria in medio valde raro vniformi, quod resistit in duplicata celeritatum ratione, et potentia vniformi g deorsum tendente.

Corollarium 4.

974. Quia aeris resistentia est quadratis celeritatum proportionalis, si in aere valde grauis globus atque magnus ingenti vi proiiciatur, tum b et c erunt quantitates maximae. Quare pro proiectoria huius corporis accipi poterit haec aequatio $y = \alpha x - \frac{g(1+\alpha^2)}{4b}x^2 - \frac{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{12bc}x^3$, quae curua a vera proiectoria quam minime differet.

Corollarium 5.

975. Sit AMDB haec proiectoria; in qua vt inueniatur punctum B, quo corpus proiectum incidit in horizontalem AB pono $y=o$, eritque Tabula XII. Fig. 5.

$$x^2 = -\frac{3cx}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \frac{12\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ hincque } x = -\frac{3c}{2\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \sqrt{\left(\frac{9c^2}{4(1+\alpha^2)} + \frac{12\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}.$$ Erit

ita-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

itaque $AB = V\left(\frac{9c^2}{V(1+\alpha^2)} + \frac{12\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{3c}{2V(1+\alpha^2)}$. Innotescit igitur ex hac aequatione longitudo iactus ex data celeritate initiali, et inclinatione.

Corollarium 6.

976. Punctum iactus summum D reperietur faciendo $dy = o$. Fiet autem $o = \alpha - \frac{g(1+\alpha^2)}{2c}x - \frac{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{4bc}x^2$ seu $x^2 = -\frac{2cx}{V(1+\alpha^2)} + \frac{4\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$

Atque ex hac aequatione $AC = V\left(\frac{c^2}{1+\alpha^2} + \frac{4\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{c}{V(1+\alpha^2)}$.

Corollarium 7.

977. Iactus longissimus, qui eadem celeritate initiali Vb producitur, prodibit si anguli inclinationis tangens α ex ista aequatione determinatur $3\alpha cV(1+\alpha^2) - \frac{8b(1+\alpha^2)}{g} + \frac{24\alpha^2 b}{g} = \alpha V\left(9c^2(1+\alpha^2) + \frac{48\alpha bcV(1+\alpha^2)}{g}\right)$ seu hac $4b(1-2\alpha^2)^2 - 3\alpha gc(1-2\alpha^2)V(1+\alpha^2) = 3\alpha^3 gcV(1+\alpha^2)$ seu ista simplicior $4b(1-2\alpha^2)^2 = 3\alpha gc(1-\alpha^2)V(1+\alpha^2)$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 8.

978. Si sinus anguli quem curua in A cum horizontali AC constituit, sit $=\varepsilon$, posito sinu toto $=1$ erit $9\varepsilon^4-6\varepsilon^2+1=\frac{3gc\varepsilon}{4b}(1-2\varepsilon^2)$. Ex qua aequatione valor ipsius ε erutus, dabit directionem pro iactu longissimo. Ex hac autem aequatione reperitur quam proxime $\varepsilon=\sqrt{\frac{5b+gc\sqrt{2}}{12b+2gc\sqrt{2}}}$.

Corollarium 9.

979. Angulus igitur, qui iactum longissimum producit, aliquantulum est minor quam semirectus, qui in vacuo satis facit. Nam si esset $\varepsilon=\sqrt{\frac{6b+gc\sqrt{2}}{12b+2gc\sqrt{2}}}$ foret $\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{2}}$, ideoque angulus semirectus. At cum hic in numeratore habeamus tantum $5b$, parumper erit minor.

Corollarium 10.

980. Si corpus in A horizontaliter proiiciatur celeritate $\sqrt{a}$, fiet $\alpha=0$, atque y negatiua. Quamobrem positis $AP=x$ et $PM=y$, istius proiectoriae natura hac exprimetur aequatione $y=\frac{gx^2}{4b}+\frac{gx^3}{12bc}+\frac{gx^4}{48bc^2}$. Pro curua autem AN in qua corpus ascendit erit $y=-\frac{gx^2}{4b}-\frac{gx^3}{12bc}+\frac{gx^4}{48bc^2}$.

Corollarium 11.

981. Si adhuc plures termini quam quatuor accipiantur prodiret aequatio pro curua AM haec

M.E.C.D. 2017

$y = \frac{gx^2}{4b} + \frac{gx^3}{12bc} + \frac{gx^4}{48bc^2} + \frac{gx^5}{240bc^3} +$ etc. qui termini cum seriem summabilem constituant, quam minime a vero aberrabitur, si y ponatur aequalis summae huius seriei. Erit autem $2by = c^2g(e^{\frac{x}{c}} - 1) - cgx$. Pro arcu vero ascensus AN erit $2by = cgx - c^2g(1 - e^{-\frac{x}{c}})$.

Corollarium 12.

982. Tempus quo arcus AM percurritur est $= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{\sqrt{2}ddy}{\sqrt{g}}$, cum sit $g = \frac{2vddy}{ds^2}$. Est vero $2bdy = cge^{\frac{x}{c}}dx - cgex$ et $2bddy = ge^{\frac{x}{c}}dx^2$. Prodibit igitur $\int \frac{\sqrt{2}ddy}{\sqrt{g}} = \int \frac{e^{\frac{x}{2c}}dx}{\sqrt{b}} = \frac{2c}{\sqrt{b}}(e^{\frac{x}{2c}} - 1)$. Atque si b et c in scrupulis pedis rhenani exprimuntur erit tempus per $AM = \frac{c}{125\sqrt{b}}(e^{\frac{x}{2c}} - 1)$ minutis secundis (222).

Scholion.

983. Hac igitur ratione vero proxime determinauimus proiectoriam in aere a corporibus proiectis descriptam, quae non difficulter loco parabolae, quae vulgo adhiberi solet, potest substitui. Hanc quidem eandem aequationem deducere potuissemus ex vera aequatione $dsddy = cd^3y$ (875), harum proiectarum supra inuenta. Sed cum ibi haec

M.E.C.D. 2017

haec reductio esset omissa, hic eam afferre maluimus, praecipue quod hoc loco clarius appareat aequationis assumtae terminos posteriores vehementer decrescere. Denique simili quoque modo curuae cum proiectoriis in aliis medii resistentis hypothesibus proxime conuenientes possunt inueniri; sed cum aliae hypotheses in mundo locum non habeant iis inueniendis hic non immorabimur.

PROPOSITIO 118.

Problema.

684. *Inuenire tam resistentiam in singulis locis* M, *quam potentiam absolutam deorsum secundum* MP *tendentem, quae faciant vt corpus in data curua* AM *et data cum celeritate in singulis punctis* M *moueri possit.* Tabula XII. Fig. 3.

Solutio.

Positis vt ante $AP = x$, $PM = y$, elemento arcus $AM = ds$ et altitudine celeritati in M debita $= v$, quae igitur omnia dantur. Deinde sit potentia corpus in M deorsum trahens $= P$ et resistentia $= R$. His positis statim reperitur P ex aequatione $P = -\frac{2v\,ddy}{ds^2}$ (871). At resistentia R inuenietur ex aequatione $dv = \frac{2v\,dy\,ddy}{ds^2} - R\,ds$ (cit.). Quare erit $R = \frac{2v\,dy\,ddy}{ds^3} - \frac{dv}{ds}$. Si resistentiae lex ponatur duplicata celeritatum ratio, eiusque exponens $= q$;

M.E.C.D. 2017

erit $R = \frac{v}{q}$, ex quo prodibit $q = \frac{v\,ds^3}{2v\,dy\,ddy - dv\,ds^2}$ sumto dx pro constante. Q. E. I.

Corollarium 1.

985. Quia dx est constans erit $dy\,ddy = ds\,dds$. Hanc ob rem erit $R = \frac{2v\,dds}{ds^2} - \frac{dv}{ds}$, seu $R = ds\,d.\frac{v}{ds^2}$. Atque hinc erit $q = \frac{v\,ds^2}{2v\,dds - dv\,ds}$ seu $q = \frac{v}{ds\,d.\frac{v}{ds^2}}$.

Corollarium 2.

986. Si corpus debet motu vniformi per curuam AM ferri ita vt sit $v = b$, proueniet $P = -\frac{2b\,ddy}{ds^2}$ et $R = \frac{2b\,dy\,ddy}{ds^3} = \frac{2b\,dds}{ds^2}$, atque $q = \frac{ds^2}{2\,dds}$.

Corollarium 3.

987. In motu igitur vniformi, dum corpus in curua AM ascendit, resistentia R semper est negatiua seu motum corporis accelerat. At qnando corpus iterum descendit, medium reuera resistet.

Corollarium 4.

988. Posito radio osculi in $M = r$, quia est $r = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$ erit $ddy = -\frac{ds^3}{r\,dx}$. Hanc ob rem habebitur $P = \frac{2v\,ds}{r\,dx}$ et $R = -\frac{2v\,dy}{r\,dx} - \frac{dv}{ds}$, atque $q = -\frac{r\,v\,dx\,ds}{2v\,dy\,ds + r\,dx\,dv}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

989. Posito iterum $v = b$ et $dv = 0$, erit $P = \frac{2bds}{rdx}$ et $R = -\frac{2bdy}{rdx}$, atque $q = -\frac{rdx}{2dy}$. In supremo igitur puncto quo fit $dy = 0$ et $ds = dy$ erit $P = \frac{2b}{r}$ atque resistentia ibi euanescit, nisi forte curuatura ibi sit infinite magna seu $r = a$.

Exemplum.

990. Sit curua AM circulus cuius centrum in C, qui motu aequabili seu celeritate $\sqrt{b}$ debeat describi. Posito eius radio $AC = a$, erit $dy = \frac{dx(a-x)}{y}$, $ds = \frac{adx}{y}$ et $r = a$. Ex quibus inuenitur potentia absoluta deorsum tendens $P = \frac{2b}{y}$, seu erit reciproce vt distantia PM. Resistentia vero erit $= -\frac{2b(a-x)}{ay}$. Dum igitur corpus ascendit resistentia erit negatiua atque reciproce proportionalis tangenti arcus AM. Ac si resistentia sit quadratis celtritatum proportionalis, erit eius exponens $q = -\frac{ay}{2(a-x)} = -\frac{AC.PM}{2PC}$. Est itaque q negatiua atque aequalis dimidiae tangenti arcus AM. Quando autem corpus versus horizontem AC accedit, fiet tum resistentia R tum q affirmatiua, seu medium reuera resistet.

PROPOSITIO 119.

Problema.

991. *Si medium sit vniforme atque resistat in quacunque multiplicata celeritatum ratione: detur-* Tabula XIII Fig. 2.

M.E.C.D. 2017

que praeterea motus corporis progressiuus secundum horizontalem AP; *inuenire potentiam deorsum tendentem et curuam quam corpus describet.*

Solutio.

Posita CP$=x$, PM$=y$, arcu AM$=s$, sit celeritas horizontalis corporis, dum est in M, debita altitudini u, erit verae celeritatis in M altitudo debita $=\frac{u\,ds^2}{dx^2}=v$. Sit porro exponens medii resistentis $=c$ et lex ratio $2m$ *plicata* celeritatis, erit resistentia $R=\frac{v^m}{c^m}=\frac{u^m ds^{2m}}{c^m dx^{2m}}$. His positis erit $P=\frac{2vddy}{ds^2}=\frac{2uddy}{dx^2}$ (871), pono enim ddy loco $-ddy$, quia in nostro casu y deorsum cadit. Deinde erit $dv=\frac{2v\,dy\,ddy}{ds^2}-R\,ds$ (cit.). At vero est $dv=\frac{du\,ds^2}{dx^2}+\frac{2u\,ds\,dds}{dx^2}$. Hinc ergo ob $ds\,dds=dy\,ddy$ habebitur $\frac{du\,ds}{dx^2}=-\frac{u^m ds^{2m+1}}{c^m dx^{2m}}$ seu $c^m dx^{2m-2}du+u^m ds^{2m-1}=o$. Datur autem u in x; et hanc ob rem ds ex hac aequatione per x tantum poterit determinari; erit scilicet $ds=\frac{c^{\frac{m}{2m-1}}dx^{\frac{2m-2}{2m-1}}(-du)^{\frac{1}{2m-1}}}{u^{\frac{m}{2m-1}}}$. Vnde inuenire licet aequationem pro curua inuenta. Hac vero inuenta simul innotescit P ex aequatione $P=\frac{2u\,ddy}{dx^2}$.

Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

992. Motus igitur horizontalis non potest esse vniformis, foret enim ob $du=o$, etiam $ds=o$; nisi in vacuo quo $c=\infty$, vbi semper et necessario est aequabilis. Multo minus quoque in medio resistente motus horizontalis poterit esse acceleratus, tum enim ds vel negatiuum vel imaginarium obtineret valorem, quod vtrumque absurdum. Motus ergo horizontalis debebit esse retardatus, quo fiat du negatiuum.

Corollarium 2.

993. Si resistentia fuerit ipsis celeritatibus proportionalis, fiet $m=\frac{1}{2}$ et aequatio pro curua abit in $du\sqrt{c}+dx\sqrt{u}=o$. Quae autem, quia non continet s vel y, ad curuam pertinere non potest. Haec autem aequatio ipsum motum horizontalem determinat. Id quod indicio est in hac resistentiae hypothesi, non quemuis motum horizontalem pro lubitu accipi posse, sed necessario eum esse accipiendum, qui hac aequatione determinatur.

Corollarium 3.

994. Iste autem motus horizontalis congruit cum motu corporis horizontali in AP in eodem medio resistente, sed a nulla potentia sollicitatum. Ex quo cognoscitur, quaecunque fuerit potentia corpus sollicitans, modo eius directio vbique de-

or-

M.E.C.D. 2017

orsum tendat, in medio resistente in simplici celeritatum rationem motum horizontalem perpetuo esse eundem. Qua in re motus in hac resistentiae hypothesi similis est motui in vacuo, in quo motus horizontalis semper est aequabilis, quantum cunque potentia deorsum tendens sit variabilis.

Corollarium 4.

995. Assumto igitur hoc motus horizontalis valore, altera aequatio $P = \frac{2uddy}{dx^2}$ curuam descriptam determinabit, in qua pro P vero quamcunque quantitatem assumere licebit. In hac igitur resistentiae hypothesi, hoc problema generaliter est solutum: vt inueniatur curua, quam corpus vtcunque deorsum sollicitatum describit.

Corollarium 5.

996. Cum autem sit $-\frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u}} = dx$, erit $2\sqrt{bc} - 2\sqrt{cu} = x$, posita celeritate initiali in $A = \sqrt{b}$. Fiet ergo $2\sqrt{cu} = 2\sqrt{bc} - x$ et $u = \frac{(2\sqrt{bc}-x)^2}{4c}$. Pro curua ergo descripta haec habebitur aequatio $2cP\,dx^2 = ddy(2\sqrt{bc}-x)^2$.

Corollarium 6.

997. Hae igitur omnes curuae asymtoton habebunt verticalem in distantia $2\sqrt{bc}$ a vertice A. Namque x maius esse nequit quam $2\sqrt{bc}$ et cum cor-

M.E.C.D. 2017

corpus horizontaliter motum vltra hunc terminum progredi nequeat, etiam corpus in curua latum non vltra pertingere poterit.

Corollarium 7.

998. Si in aliis quoque resistentiae hypothesibus motus horizontalis in curua AM cum motu horizontali in recta AP in eadem resistentiae hypothesi congruens accipiatur, ita vt ponatur $du = -\frac{u^m dx}{c^m}$; prodibit pro curua AM haec aequatio $ds = dx$ et $P = o$. Illa igitur congruentia in aliis resistentiae hypothesibus nequidem locum habet.

Corollarium 8.

999. Sit igitur resistentia vt quadratum celeritatis seu $m = 1$. Quare erit $ds = -\frac{c\,du}{u}$, et integrando posita b altitudine celeritati in A debita, $s = c\,l\,\frac{b}{u}$. In hac igitur resistentiae hypothesi erit arcus A M diuisus per $2c$ aequalis differentiae logarithmorum celeritatum horizontalium in A et M.

Corollarium 9.

1000. In hac ergo resistentiae hypothesi erit $u = e^{-\frac{s}{c}} b$. Ex quo prodibit $P = \frac{2b\,dd\,y}{e^{\frac{s}{c}}\,d\,x^2}$.

M.E.C.D. 2017

Seu cum sit $ds = -\frac{c\,du}{u}$ erit $dds = -\frac{cu\,ddu + cdu^2}{du^2} = \frac{dy\,ddy}{ds}$. At est $dy = \frac{\sqrt{(c^2du^2 - u^2dx^2)}}{u}$. Vnde habebitur $ddy = -\frac{c^2u\,du\,ddu - c^2du^3}{u^2\sqrt{(c^2du^2 - u^2dx^2)}}$. Consequenter erit $P = \frac{2c^2u\,du\,ddu - 2c^2du^3}{u\,dx^2\sqrt{(c^2du^2 - u^2dx^2)}}$.

Corollarium 10.

1001. Si aequatio inter u et x accipiatur ista $du = -\frac{u^n dx}{f^n}$, seu $\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)b^{n-1}} = \frac{x}{f^n}$, erit $dx = -\frac{f^n du}{u^n}$ et $ddu = \frac{n\,du^2}{u}$. His substitutis prodibit in medio resistente in duplicata celeritatum ratione $P = \frac{2(n-1)c^2u^{3n-2}}{f^{2n}\sqrt{(c^2u^{2n-2} - f^{2n})}}$.

Pro curua autem quaesita haec habebitur aequatio $dy = \frac{du\sqrt{(c^2u^{2n-2} - f^{2n})}}{u^n}$.

Corollarium 11.

1002. Hoc igitur casu u^{2n-2} maius esse debet quam $\frac{f^{2n}}{c^2}$ seu u maius quam $\frac{f^{\frac{n}{n-1}}}{c^{\frac{1}{n-1}}}$. Quare si motus horizontalis fieri potest minor quam haec quantitas, motus in curua non toti motui horizontali dato respondebit. Nam si curua vlterius tenderet foret tam dy quam P imaginarium.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 12.

1003. Ad inconueniens hoc euitandum debebit n minus esse vnitate, fiat ergo $n-1=-k$, seu $n=1-k$. Hoc posito erit $u^k=b^k-f^{k-1}kx$. Existente vero AP tangente curuae in A erit vbi $ds=dx$, ibi $u=b$. Hinc erit $b^{n-1}c=f^n$ seu $\frac{c}{b^k}=f^{1-k}$, ideoque $u^k=b^k\left(1-\frac{kx}{c}\right)$. Porro autem fit $P=\frac{2kb^{3k}u^{1-2k}}{c\sqrt{(b^{2k}-u^{2k})}}$ et $dy=\frac{dx}{u^k}\sqrt{\left(b^{2k}-u^{2k}\right)}=\frac{dx\sqrt{(2kcx-k^2x^2)}}{c-kx}$.

Scholion.

1004. Nulla igitur huiusmodi hypothesis motus horizontalis in proiectoriam in fluido potest quadrare. Quicquid enim sit k potentia in A vbi fit $u=b$, est infinite magna; deinde vero perpetuo decrescit. Hae curuae etiam omnes habent tangentem verticalem vbi est $x=\frac{c}{k}$, quae est asymtotos curuae. Ceterum hoc problemate finem imponimus huic primae tractationi, qua directionem potentiae sibi semper parallelam posuimus; atque progredimur ad vires centripetas considerandas, examinaturi, quomodo medium resistens motum corporum ad fixum punctum attractorum turbet.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 120.

Problema.

1005. *Attrahatur corpus in medio quocunque resistente perpetuo ad punctum fixum* C *vi quacunque; determinare curuam* AM, *quam corpus vtcunque proiectum describit.*

Solutio.

Cum corpus est in M ponatur eius distantia a centro $MC = y$, elementum $Mm = ds$; celeritas in M sit debita altitudini v. Ducatur mC et ex M in eam normalis Mr, erit $mr = dy$. Porro ducta tangente MT, sit ex C perpendiculum in eam demissum $CT = p$, et radius osculi in $M = r$, qui erit $= \frac{y\,dy}{dp}$. Iam sit vis qua corpus in M ad C trahitur $= P$ et vis resistentiae in $M = R$. Ex potentia autem P resoluta prodit vis normalis $= \frac{Pp}{y}$ et tangentialis $= -\frac{P\,dy}{ds}$, retardabit enim corporis motum. Ex vi autem normali habebitur haec aequatio $\frac{2v}{r} = \frac{Pp}{y}$ seu $2v\,dp = P\,p\,dy$ (552). Cum praeterea vis tangentialis resistentia minuta sit $-\frac{P\,dy}{ds} - R$ erit $dv = -P\,dy - R\,ds$ (cit.). Ex quibus aequationibus coniunctis tum celeritas corporis in singulis locis, tum ipsa curua AM cognoscitur. Q. E. I.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

1006. Ob ſimilia triangula M*mr*, CMT erit $ds:dy=y:\sqrt{(y^2-p^2)}$ ideoque $ds=\frac{y\,dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Quo ſubſtituto prodibit $dv=-P\,dy-\frac{R\,y\,dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Eliminata igitur v obtinebitur aequatio inter y et p, quae ſufficit ad curuam determinandam.

Corollarium 2.

1007. Quia eſt $P=\frac{2v\,dp}{p\,dy}$; ſubſtituatur hic valor in altera aequatione. Quo facto prodibit $dv+\frac{2v\,dp}{p}=-R\,ds=-\frac{R\,y\,dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Ex qua aequatione ſi R fuerit potentia ipſius v poterit valor ipſius v inueniri.

Corollarium 3.

1008. Sit reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis et medium vniforme, ita vt ſit $R=\frac{v}{c}$. Hinc igitur erit $dv+\frac{2v\,dp}{p}=-\frac{v\,ds}{c}$, quae aequatio integrata dat $v\,p^2=b\,h^2\,e^{-\frac{s}{c}}$, vbi b eſt altitudo debita celeritati in initio A, et h eſt perpendiculum ex C in tangentem in A demiſſum.

Corollarium 4.

1009. Cum igitur in hac reſiſtentiae hypotheſi ſit $v=\frac{b\,h^2}{e^{\frac{s}{c}}\,p^2}$, erit vis $P=\frac{2\,b\,h^2\,dp}{e^{\frac{s}{c}}\,p^3\,dy}$. Quando igitur P in y datur, haec aequatio erit aequatio

M.E.C.D. 2017

quaesita pro curua AM, celeritas autem in quouis loco M est reciproce vt perpendiculum in tangentem et vt numerus cuius logarithmus est via descripta per $2c$ diuisa coniunctim.

Corollarium 5.

1010. In hac igitur resistentiae hypothesi corpus eandem curuam describet sollicitatum a vi centripeta $\frac{V}{e^{\frac{s}{c}}}$, quam describit in vacuo sollicitatum a vi V. In vtroque enim casu aequatio pro curua quaesita erit haec $Vdy = \frac{2bh^2dp}{p^3}$. Quare quo corpus in hoc medio resistente eandem quam in vacuo curuam describat, vis centripeta perpetuo debet decrescere in ratione, cuius logarithmus est spatium descriptum ad c applicatum.

Corollarium 6.

1011. Sit resistentia potestati exponentis $2m$ celeritatum proportionalis et medium vniforme ita vt sit $R = \frac{v^m}{c^m}$. Erit igitur $dv + \frac{2vdp}{p} = -\frac{v^m ds}{c^m}$. Quae integrata dat $v^{1-m} = \frac{(m-1)p^{2m-2}}{c^m}\int\frac{ds}{p^{2m-2}}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 7.

1012. Sit resistentia celeritatibus proportionalis seu $m = \frac{1}{2}$, erit $\sqrt{v} = -\frac{1}{2p\sqrt{c}} \int p\,ds$. Exprimit autem $\int p\,ds$ duplam aream ACM, quae nobis sit S. Et detracta constante erit $\sqrt{v} = \frac{c - 2s}{2p\sqrt{c}} = \frac{b\sqrt{bc} - s}{p\sqrt{c}}$. Habentibus b et h eosdem quos ante Corroll. 3. valores.

Corollarium 8.

1013. In hac igitur resistentiae hypothesi celeritas corporis euanescit, quando corpus sectorem seu aream absoluerit aequalem ipsi $b\sqrt{bc}$. Hoc igitur spatium tantum est, vt corpus nunquam possit aream ipsi aequalem abscindere. Atque celeritas corporis in M est directe vt hoc spatium area iam absoluta minutum et reciproce vt perpendiculum in tangentem.

Corollarium 9.

1014. In eadem resistentiae hypothesi est $v = \frac{(b\sqrt{bc} - s)^2}{cp^2}$. Vis igitur centripeta erit $= \frac{2(b\sqrt{bc} - s)^2 dp}{cp^3 dy} = P$. Deinde vero tempus, quo arcus AM absoluitur est $= \int \frac{p\,ds\sqrt{c}}{b\sqrt{bc} - s} = \int \frac{2\,ds\sqrt{c}}{b\sqrt{bc} - s} = 2\sqrt{c}\, l \frac{b\sqrt{bc}}{b\sqrt{bc} - s}$. Tempore ergo infinito opus est, antequam corpus aream abscindat $= b\sqrt{bc}$, seu antequam omnem motum amittat.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion.

1015. Hae igitur ſunt generales leges, quas corpus in medio reſiſtente a vi centripeta quacunque ſollicitatum obſeruat. Eas autem pro reſiſtentia ipſis celeritatibus et celeritatum quadratis proportionali fuſius deduxi, tum quia licuit, quod in aliis hypotheſibus fieri non potuiſſet, tum quia in ſequentibus has duas reſiſtentias, vt hactenus fecimus, potiſſimum ſumus conſideraturi. Nunc autem datas ſumemus vires centripetas vt quae ſint diſtantiarum poteſtatibus proportionales, et inueſtigabimus, quales differentias reſiſtentia curuis deſcriptis inducat. Deinde iuxta inſtitutum in praecedentibus adhibitum, curuam datam ponemus vna cum vel vi centripeta vel reſiſtentia vel celeritate atque in reliqua inquiremus.

PROPOSITIO 121.

Problema.

Tabula XIII Fig. 2.

1016. *Si vis centripeta fuerit diſtantiarum poteſtati cuicunque a centro proportionalis, corpusque moueatur in medio reſiſtente vniformi, quod reſiſtat in duplicata celeritatum ratione: determinare curuam* A M *quam corpus deſcribet, et motum corporis in ea.*

Solutio.

Manentibus vt ante $AM = y$, $CT = p$, $Mm = ds$, celeritate in M debita altitudini v, erit

$P =$

M.E.C.D. 2017

$P = \frac{y^n}{f^n}$ et $R = \frac{v}{c}$. Hinc habebitur pro curua quaesita haec aequatio $\frac{y^n}{f^n} = \frac{2bh^2dp}{e^{\frac{s}{c}}p^3dy}$ et $v = \frac{bh^2}{e^{\frac{s}{c}}p^2} = \frac{y^n p\,dy}{2f^n dp}$. Ex illa autem aequatione non multum ad curuam cognoscendam proficitur ob $e^{\frac{s}{c}}$ inuolutum; quare sumtis logarithmis erit $\frac{s}{c} = l\,2bf^n h^2 + l\,dp - nly - 3lp - l\,dy$, atque $\frac{ds}{c} = \frac{ddp}{dp} - \frac{n\,dy}{y} - \frac{3dp}{p}$ sumto dy constante. Quia vero est $ds = \frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$ erit $\frac{ydy}{c\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{ddp}{dp} - \frac{n\,dy}{y} - \frac{3dp}{p}$. Quae est aequatio inter y et p pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium 1.

1017. Quaenam proditura sit aequatio, si vis centripeta fuerit vel distantiis vel reciproce quadratis distantiarum proportionalis, ex aequatione inuenta facile apparet, si modo 1 vel -2 loco n substituatur. Huiusmodi autem substitutiones omnes nihil iuuant ad aequationem generalem tractabiliorem efficiendam.

Corollarium 2.

1018. Si medium non positum fuisset vniforme sed eius exponens variabilis q, loco $e^{\frac{s}{c}}$ pro-

M.E.C.D. 2017

diiſſet $e^{\int \frac{ds}{q}}$ (873). Atque pro curua deſcripta haec aequatio $\frac{y\,dy}{q\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{dd\,p}{d\,p} - \frac{n\,dy}{y} - \frac{3\,d\,p}{p}$. Vbi ſi q diſtantiae y fiat proportionalis aequatio ad differentialem primi gradus poterit reduci.

Corollarium 3.

1019. Sit igitur exponens reſiſtentiae $q = \frac{y}{\alpha}$, atque curua deſcripta ſequente aequatione exprimeatur $\frac{\alpha\,dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{d\,dp}{dp} - \frac{n\,dy}{y} - \frac{3\,dp}{p}$. In qua cum in ſingulis terminis dimenſionum numerus euanescat, reductio ad differentialem primi gradus locum habet.

Corollarium 4.

1020. Hoc autem modo reperietur aequatio differentialis primi gradus. Ponatur $y = e^{\int z\,dt}$ et $p = e^{\int z\,dt}\,t$; erit $dy = e^{\int z\,dt}\,z\,dt$, et $ddy = e^{\int z\,dt}(z\,ddt + dz\,dt + z^2\,dt^2) = 0$. Quare erit $ddt = -\frac{dz\,dt}{z} - z\,dt^2$. Porro erit $dp = e^{\int z\,dt}(dt + z\,t\,dt)$ et $ddp = e^{\int z\,dt}(ddt + z\,t\,ddt + t\,dt\,dz + 2\,z\,dt^2 + z^2\,t\,dt^2) = e^{\int z\,dt}(-\frac{dz\,dt}{z} + z\,dt^2)$. Ex quibus reperietur $\frac{\alpha z\,dt}{\sqrt{(1-t^2)}}$

$$= -\frac{dz + z^2\,dt}{z + z^2\,t} - n\,z\,dt - \frac{3\,dt}{t} - 3\,z\,dt \qquad \frac{t\,dz - 3\,z\,dt - (n+5)\,t\,z^2\,dt - (n+3)\,t^2\,z^3\,dt}{t\,z\,(1+t\,z)} = -\frac{t\,dz - z\,dt}{t\,z\,(1+t\,z)}$$

$$= -\frac{2\,dt}{t} - (n+3)\,z\,dt.$$

Corollarium 5.

1021. Si vis centripeta reciproce proportionalis ponatur cubis diſtantiarum, erit $n = -3$.

Cur-

M.E.C.D. 2017

Curua ergo deſcripta continebitur hac aequatione $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = -\frac{t dz - z dt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t}$.

Corollarium 6.

1022. Si vis centripeta fuerit reciproce proportionalis quadratis diſtantiarum erit $n = -2$. Atque curua deſcripta ſequente exprimetur aequatione $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-tt)}} = -\frac{t dz - z dt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t} - z\,dt$. Eodem modo ſi vis centripeta ipſis diſtantiis ſeu $n = 1$ poſita eſſet prodiiſſet $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-tt)}} = -\frac{t dz - z dt}{tz(1+tz)} - \frac{2dt}{t} - 4z dt$.

Corollarium 7.

1023. Omnes hae aequationes curuas in vacuo deſcriptas dabunt; ſi ponatur $\alpha = 0$. Hoc enim caſu fit reſiſtentiae exponens infinite magnus atque ideo reſiſtentia infinite parua. Habebitur autem haec aequatio $\frac{t dz + z dt}{tz(1+tz)} + \frac{2dt}{t} + (n+3) z dt = 0$.

Scholion.

1024. Quando igitur exponens medii reſiſtentis, quod in duplicata celeritatum ratione reſiſtere ponitur, proportionalis eſt diſtantiis a centro, aequatio pro curua deſcripta ad differentialem primi gradus reduci poteſt; id quod in aliis exponentis reſiſtentiae q hypotheſibus vix fieri poteſt. Intelligo autem tales ipſius q valores, qui a ſolis diſtantiis y pendent, quippe quae poſitio ſo-

M.E.C.D. 2017

la admitti poteſt ratione. Incongruum enim eſſet q per p i. e. per ipſam curuam, quae adhuc eſt incognita, dare. Interim tamen aequatio differentio - differentialis ſemper ad differentialem primi gradus poteſt reduci, quoties q fuerit functio vnius dimenſionis ipſarum y et p coniunctim. Sed cum hae aequationes, tametſi ſunt differentiales primi gradus, neque integrari neque ſeparari queant, nihil praeſtant vtilitatis. Hanc ob rem reſiſtentiam, quae celeritatibus ipſis eſt proportionalis, conſiderabimus cum vi centripeta cuicunque diſtantiarum poteſtati proportionali coniunctam.

PROPOSITIO 122.

Problema.

Tabula XIII Fig. 2.

1025. *In medio vniformi, quod reſiſtit in ſimplici celeritatum ratione, moueatur corpus attractum ad centrum* C *vi poteſtati cuicunque diſtantiarum proportionali: determinare curuam* AM *quam corpus deſcribet.*

Solutio.

Poſitis CM$=y$, CT$=p$, M$m$$=ds$, celeritate in M debita altitudini v, et exponente reſiſtentiae $=q$, ſit vis centripeta $=\frac{y^n}{f^n}$, et area ACM$=\frac{1}{2}\int p\,ds=$S. His praemiſſis erit $\sqrt{v}=\frac{b\sqrt{bc-\mathrm{S}}}{p\sqrt{c}}$, et $\frac{y^n}{f^n}=$

M.E.C.D. 2017

$= \frac{2(b\sqrt{bc}-S)^2 dp}{c p^3 dy}$ (1012 et 1014), vbi b eſt altitudo celeritati in A debita, et b perpendiculum ex C in tangentem in A demiſſum. Quo eliminetur S, aequationi inuentae haec induatur forma $b\sqrt{bc}-S = \frac{\sqrt{c p^3 y^n dy}}{\sqrt{2 f^n dp}}$. Ex qua differentiando poſito dp conſtante oritur $-\frac{p^2 ds}{2} = -\frac{y p dy}{2\sqrt{(y^2-p^2)}}$ $= \frac{cp^3 y^n ddy + 3cp^2 y^n dy dp + ncp^3 y^{n-1} dy^2}{2\sqrt{2 f^n c p^3 y^n dy dp}}$ ſeu $0 =$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} + \frac{cp y^{\frac{n-2}{2}} ddy + 3c y^{\frac{n-2}{2}} dy dp + ncp y^{\frac{n-4}{2}} dy^2}{\sqrt{2 f^n c p dy dp}}$$

Quae aequatio naturam curuae deſcriptae AM exprimit. Hac vero cognita ſtatim innotescit celeritas corporis ex area curuae et perdendiculo p. Q. E. I.

Corollarium 1.

1026. Si loco dp aſſumtum fuiſſet elementum dy conſtans, prodiiſſet iſta aequatio $\frac{dp}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{cp y^{\frac{n-2}{2}} ddp - 3c y^{\frac{n-2}{2}} dp^2 - ncp y^{\frac{n-4}{2}} dy dp}{\sqrt{2 f^n c p dy dp}}$. Ex quibus aequationibus autem, quia ad differentiales primi gradus reduci nequeunt, nihil poteſt concludi.

Corollarium 2.

1027. Reductio ſupra (1020) adhibita ſemper locum habet, ſi in aequatione differentio- diffe-

M.E.C.D. 2017

rentiali indeterminatae p et y eundem dimensionum numerum constituunt. Hoc autem accidit si $n=1$, i. e. si vis centripeta fuerit ipsis distantiis a centro proportionalis. Erit tum enim pro curua quaesita $\frac{y\,dp}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{cpy\,ddp-3cy\,dp^2-cp\,dy\,dp}{\sqrt{2fcy\,p^3\,y\,dp}}$. Posito dy const.

Corollarium 3.

1028. Hac igitur hypothesi ponatur $y=e^{\int z\,dt}$ et $p=e^{\int z\,dt}t$; vnde fit $dy=e^{\int z\,dt}z\,dt$; $dp=e^{\int z\,dt}dt(1+zt)$ et $ddp=e^{\int z\,dt}dt(-\frac{dz}{z}+z\,dt)$. His substitutis habebitur $\frac{dt(1+tz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2ftz}}{\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{t\,dz}{z}-3dt-6t\,z\,dt-4t^2z^2dt. = -\frac{t\,dz-z\,dt}{z}-2\,dt(1+tz)(1+2tz)$. Seu posito $tz=u$ prodibit $\frac{dt(1+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2fu}}{\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{t\,du}{u}-2\,dt(1+u)(1+2u)$.

Corollarium 4.

1029. Aequatio haec integrationem admittit si diuidatur per $tt(1+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{u}$, prodibit enim $\frac{dt\sqrt{2f}}{tt\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{du}{tu(1+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{u}}-\frac{2dt(1+2u)}{tt\sqrt{(u+u^2)}}$

Cuius integralis est $C-\frac{\sqrt{2f(1-tt)}}{t\sqrt{c}} = \frac{2(1+2u)}{t\sqrt{(u+u^2)}}$, seu $Ct-\frac{\sqrt{f(1-tt)}}{\sqrt{2c}} = \frac{1+2u}{\sqrt{(u+u^2)}} = \frac{1+2tz}{\sqrt{(tz+t^2z^2)}}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

1030. Est vero vi substitutionum factarum $t = \frac{p}{y}$, $z = \frac{ydy}{ydp-pdy}$ et $u = \frac{pdy}{ydp-pdy}$ ac $1+u = \frac{ydp}{ydp-pdy}$ Quamobrem pro curua quaesita erit $\frac{Cp}{y} - \frac{\sqrt{f(y^2-p^2)}}{y\sqrt{2c}} = \frac{ydp+pdy}{\sqrt{pydpdy}}$.

Corollarium 6.

1031. Quo autem differentialia fiant rationalia est $2u+1 = \frac{Ct\sqrt{2c}-\sqrt{f(1-tt)}}{\sqrt{((Ct\sqrt{2c}-\sqrt{f(1-tt)})^2-8c)}} = \frac{ydp+pdy}{ydp-pdy} = \frac{y^2dt+2ytdy}{y^2dt}$ restituto $p = yt$. Habebitur ergo sequens aequatio in qua indeterminatae y et t sunt a se inuicem separatae $\frac{Ctdt\sqrt{2c}-dt\sqrt{f(1-tt)}}{t\sqrt{((Ct\sqrt{2c}-\sqrt{f(1-tt)})^2-8c)}} - \frac{dt}{t} = \frac{2dy}{y}$. Ex qua aequatione curua construi poterit.

Scholion.

1032. Huic aequationi vlterius reducendae non immoror, etsi suspicor eam denuo posse integrari. Hoc quidem certum si fuerit $C\sqrt{2b} = f$; quo casu integrale tam fit compositum, vt huc transferre noluerim. Ex quo intelligi potest integrale generaliter sumtum maxime fore perplexum, ita vt vix quicquam ad motum cognoscendum inde deduci posset. Quamobrem his missis ad inuersa problemata pergo.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 123.

Problema.

Tabula XIII Fig. 2.

1033. *Si data fuerit curua* AM *quam corpus describit et resistentia in singulis locis* M, *determinare vim centripetam ad centrum* C *perpetuo directam, et celeritatem in singulis locis.*

Solutio.

Ponantur vt ante $CM = y$, $Mm = ds$, $CT = p$, altitudo debita celeritati in $M = v$, resistentia $= R$, et vis centripeta $= P$. His positis habebitur ista aequatio $dv + \frac{2v\,dp}{p} = -R\,ds$ (1007), ex qua cum curua AM et resistentia R dentur, inuenietur v ex aequatione integrali $p^2 v = -\int R p^2\,ds$, nempe $v = -\frac{\int R p^2 ds}{p^2}$. Inuenta autem v reperietur $P = \frac{2v\,dp}{p\,dy} = -\frac{2\,dp \int R p^2 ds}{p^3 dy}$ (1005). Q. E. I.

Corollarium 1.

1034. Si celeritas in initio A ponatur $= V b$ et perpendiculum in tangentem in A ex C demissum $= h$, in casu nullius resistentiae seu in vacuo prodiissent hae aequationes $p^2 v = bh^2$ et $P = \frac{2bh^2\,dp}{p^3\,dy}$.

Corollarium 2.

1035. In medio igitur resistente si $\int R p^2 ds$ ita capiatur, vt euanescat, euanescente arcu AM, erit $v = \frac{bh^2 - \int R p^2 ds}{p^2}$ et $P = \frac{2\,dp\,(bh^2 - \int R p^2 ds)}{p^3 dy}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

1036. Si corpus in vacuo moueretur in curua AM eadem celeritate initiali in A, et si dicatur celeritas, quam in M habiturum esset Vu, et vis centripeta in M$=$V, tum foret $u=\frac{bh^2}{p^2}$ et V$=\frac{2bh^2dp}{p^3dy}$. Quare erit $u:u-v=bh^2:\int Rp^2ds$ et V : V$-$P$=bh^2:\int Rp^2ds$.

Corollarium 4.

1037. Cum igitur hoc problema, quo curua AM et celeritas initialis in A datur, vis centripeta vero quaeritur, iam sit solutum in cap. praec. ex eadem solutione simul hoc problema soluitur. Inuenta enim $\int Rp^2ds$, statim innotescit differentia virium centripetarum in vacuo et medio resistente, atque ideo ipsa vis centripeta in medio resistente.

Exemplum 1.

1039. Si curua AM fuerit circulus radii a, centrum in C habens, et resistentia vbique eadem seu R$=$ constanti λ; erit $y=p=a$ et $h=a$. Quare habebitur $\int Rp^2ds=\lambda a^2s$, ideoque $v=b-\lambda s$ et P$=\frac{2b-2\lambda s}{a}$. Celeritas ergo perpetuo decrescit, et prorsus euanescit descripto arcu $=\frac{b}{\lambda}$, quo loco etiam vis centripeta in nihilum abit. Est autem vis centripeta vbique vt quadratum celeritatis.

M.E.C.D. 2017

Tempus praeterea, quo arcus AM percurritur est $\frac{2\sqrt{b}-2\sqrt{(b-\lambda s)}}{\lambda}$, et tempus quo corpus ad quietem redigitur est $\frac{2\sqrt{b}}{\lambda}$.

Exemplum 2.

Tabula XIII Fig. 2.

1039. Sit curua AMC logarithmica spiralis, cuius centrum in C, et resistentia sit potestas quaecunque distantiae CM, nempe $R = \frac{y^n}{f^n}$. Erit ergo $p = \alpha y$ et posito $\mathfrak{C} = \sqrt{(1-\alpha^2)}$, $ds = -\frac{dy}{\mathfrak{C}}$. Ponatur vero $AC = \alpha$, erit $b = \alpha a$. Fiet igitur $\int R p^2 ds = \frac{\alpha^2 a^{n+3} - \alpha^2 y^{n+3}}{(n+3)\mathfrak{C} f^n}$, hinc-que $v = \frac{(n+3)\mathfrak{C} a^2 b f^n - a^{n+3} + y^{n+3}}{(n+3)\mathfrak{C} f^n y^2}$. Atque $P = \frac{2(n+3)\mathfrak{C} a^2 b f^n - 2a^{n+3} + 2y^{n+3}}{(n+3)\mathfrak{C} f^n y^3}$. In casu vero quo $n = -3$, qui a logarithmis pendet est $\int R p^2 ds = \frac{\alpha^2 f^3}{\mathfrak{C}} l\frac{a}{y}$. Atque $v = \frac{\mathfrak{C} a^2 b - f^3 l\frac{a}{y}}{\mathfrak{C} y^2}$ et $P = \frac{2\mathfrak{C} a^2 b - 2f^3 l\frac{a}{y}}{\mathfrak{C} y^3}$.

Corollarium 5.

1040. Si tanta corpori in A imprimatur celeritas initialis vt sit $b = \frac{a^{n+1}}{(n+3)\mathfrak{C} f^n}$; erit etiam vbi-

M.E.C.D. 2017

vbique $v = \frac{y^{n+1}}{(n+3)\mathfrak{C}f^n}$ et $P = \frac{2y^n}{(n+3)\mathfrak{C}f^n}$

Hoc igitur casu vis centripeta P erit ad resistentiam R vt 2 ad $(n+3)\mathfrak{C}$. i. e. in data ratione.

Corollarium 6.

1041. Eodem hoc casu est $y = (n+3)^{\frac{1}{n+1}} \mathfrak{C}^{\frac{1}{n+1}} f^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{1}{n+1}}$ atque $\frac{y^n}{f^n} = \frac{(n+3)^{\frac{n}{n+1}} \mathfrak{C}^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{n}{n+1}}}{f^{\frac{n}{n+1}}}$

$= R$. Resistentia igitur erit in $\frac{2n}{n+1}$ *plicata* ratione celeritatum medio existente vniformi, quippe cuius exponens est $\frac{f}{(n+3)\mathfrak{C}}$.

Corollarium 7.

1042. Si $n = 1$, erit resistentia in ratione celeritatum, et medii exponens $\frac{f}{4\mathfrak{C}}$. In hoc igitur medio corpus spiralem logarithmicam describere poterit, si vis centripeta fuerit distantiis proportionalis nempe $= \frac{y}{2\mathfrak{C}f}$ et si initio in A proiiciatur celeritate $\frac{a}{2\sqrt{\mathfrak{C}f}}$. In quocunque praeterea medio resistente vniformi spiralis data poterit describi a corpore, excepto casu, quo resistentia est quadratis celeritatum proportionalis.

BIBLIOTECA
DEL
[illegible]

M.E.C.D. 2017

Scholion.

1043. Qualis vis centripeta et qualis reſiſtentia requiratur ad id, vt corpus in ſpirali logarithmica moueatur, Viri iam ſaepius citati *Neutonus* et *Bernoullius* in Princip. Phil. et Act. Lipſ. 1713 expoſuere. In ſequentibus deinde exemplis plura hac de re afferemus.

PROPOSITIO 124.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 2. 1044. *Si reſiſtentia fuerit cuicunque celeritatum poteſtati proportionalis eiusque exponens in ſingulis locis detur: inuenire vim centripetam, quae faciat vt corpus in data curua* AM *moueatur.*

Solutio.

Manentibus vt ante CM$=y$, CT, p, Mm, ds, celeritate in M$=v$, et exponente reſiſtentiae $=q$, ſit reſiſtentia R$=\frac{v^m}{q^m}$ et vis centripeta $=$P. His poſitis erit P$=\frac{2vdp}{pdy}$ (1005), et $dv+\frac{2vdp}{p}=-\frac{v^m ds}{q^m}$ (1007). Haec aequatio integrata dat $v^{1-m}=-\frac{(1-m)}{p^{2(1-m)}}\int\frac{p^{2(1-m)}ds}{q^m}$. Caſu vero quo

M.E.C.D. 2017

quo $m = 1$ est $v = \frac{1}{p^2 e^{\int \frac{ds}{q}}}$. Inuenta autem v simul innotescit P ex aequatione $P = \frac{2vdp}{pdy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

1045. Sit celeritas, qua corpus in A proiicitur, debita altitudini b, et perpendiculum ex C in tangentem in A demissum $= h$. Atque $\int \frac{(m-1)p^{2(1-m)}ds}{q^m}$, ita sumatur vt euanescat facto $s = o$ seu M in A incidente; hocque integrale ponatur $= S$. Addita igitur constante erit $v^{1-m} = \frac{C+S}{p^{2(1-m)}}$. Fiat nunc $S = o$, erit $p = h$ et $v = b$, ideoque $C = b^{1-m} h^{2(1-m)}$. Determinata ergo constante C habebitur $v^{1-m} = \frac{b^{1-m} h^{2(1-m)} + S.}{p^{2(1-m)}}$

Corollarium 2.

1046. In casu $m = 1$, qui peculiarem integrationem requirit, si $\int \frac{ds}{q}$ ita sumatur vt euanescat facto $s = o$; erit $v = \frac{bh^2}{p^2 e^{\int \frac{ds}{q}}}$, ideoque

$P = \frac{2bh^2 dp}{e^{\int \frac{ds}{q}} p^3 dy}$. In vacuo prodiisset $P = \frac{2bh^2 dp}{p^3 dy}$

M.E.C.D. 2017

Erit ergo vis centripeta in vacuo ad vim centripetam in hoc medio resistente vt 1 ad $e^{-\int \frac{ds}{q}}$.

Corollarium 3.

1047. Denotante autem m quemcunque alium numerum praeter 1 est $v = \frac{(b^{1-m}h^{2(1-m)} + S)^{\frac{1}{1-m}}}{p^2}$

Ex quo prodit $P = \frac{2(b^{1-m}h^{2(1-m)} + S)^{\frac{1}{1-m}} dp}{p^3 dy}$. In vacuo vero prodiisset vis centripeta $= \frac{2bh^2 dp}{p^3 dy}$, quae si dicatur $= V$ erit $V : P = bh^2 : (b^{1-m}h^{2(1-m)} + S)^{\frac{1}{1-m}}$. Atque hinc $V^{1-m} : P^{1-m} - V^{1-m} = b^{1-m}h^{2(1-m)} : S$.

Corollarium 4.

1048. Quare si reperta fuerit vis centripeta, quae in vacuo datam curuam AM producit, ex ea ope huius analogiae inuenietur vis centripeta, quae idem in medio quocunque resistente praestabit, si modo determinetur valor ipsius $\int \frac{(m-1)p^{2(1-m)} ds}{q^m}$

Exemplum 1.

1049. Si curua data fuerit circulus centrum in D habens, cuius radius $MC = a$, erit $y = p = a$

et

M.E.C.D. 2017

et $b = a$. Sit praeterea medium vniforme seu $q = c$; erit $\int \frac{(m-1)p^{2(1-m)}ds}{q^m} = \frac{(m-1)a^{2(1-m)}s}{c^m} = S$ et $V = \frac{2b}{a}$. Habebitur igitur $\frac{2b}{a} : P = a^2 b : (a^{2(1-m)} b^{1-m} + \frac{(m-1)a^{2(1-m)}s}{c^m})^{\frac{1}{1-m}}$, seu $P : 1 = (b^{1-m} + (m-1)c^{-m}s)^{\frac{1}{1-m}} : \frac{a}{2}$. Vnde oritur $P = \frac{2(b^{1-m} + (m-1)c^{-m}s)^{\frac{1}{1-m}}}{a}$. Si resistentia fuerit in simplici ratione celeritatum erit $m = \frac{1}{2}$ et $P = \frac{(2\sqrt{bc}-s)^2}{2ac}$, et $v = \frac{(2\sqrt{bc}-s)^2}{4c}$, vnde ipsa celeritas erit $= \frac{2\sqrt{bc}-s}{2\sqrt{c}}$ et tempus, quo arcum AM absoluit $2\sqrt{c}\, l \frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}-s}$. Opus ergo est tempore infinito, antequam corpus arcum absoluat $= 2\sqrt{bc}$, quo, cum peruenerit omnem motum amittit et simul vis centripeta euanescit. Si resistentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis erit $v = be^{-\frac{s}{c}}$ et $P = \frac{2b}{ae^{\frac{s}{c}}}$. Ceterum motus corporis in peripheria circuli prorsus congruit cum motu rectilineo, quo corpus motum impressum a resistentia amittit. Vis enim centripeta quia semper est normalis celeritatem prorsus non afficit, sed tantum motum in circulum inflectit.

Exem-

M.E.C.D. 2017

Exemplum 2.

Tabula XIII Fig. 3.

1050. Descendat corpus ex A versus centrum C in logarithmica spirali AM, sitque exponens resistentiae q vt dignitas quaecunque distantiae MC, y ita vt sit $q = \frac{y^{n+1}}{f^n}$. Ex natura logarithmicae est $p = \alpha y$, atque facta $AC = a$ erit $s = \alpha a$, et posito $\mathfrak{C} = \sqrt{(1-\alpha^2)}$ erit $ds = -\frac{dy}{\mathfrak{C}}$. Hinc erit $\int (m-1)\frac{p^{2(1-m)}ds}{q^m} = \frac{(1-m)\alpha^{2(1-m)}f^{mn}}{(3-3m-mn)\mathfrak{C}}$ $(y^{3-3m-mn} - a^{3-3m-mn}) = S$. Sit praeterea $b^{1-m} = \frac{(1-m)a^{1-m-mn}f^{mn}}{(3-3m-mn)\mathfrak{C}}$ erit $v = \frac{(1-m)^{\frac{1}{1-m}} f^{\frac{mn}{1-m}} y^{1-\frac{mn}{1-m}}}{(3-3m-mn)^{\frac{1}{1-m}} \mathfrak{C}^{\frac{1}{1-m}}}$ atque $P = \frac{2(1-m)^{\frac{1}{1-m}} f^{\frac{mn}{1-m}} y^{-\frac{mn}{1-m}}}{(3-3m-mn)^{\frac{1}{1-m}} \mathfrak{C}^{\frac{1}{1-m}}}$. Vis centripeta igitur erit reciproce vt potestas distantiae cuius exponens est $\frac{mn}{1-m}$.

Corollarium 5.

1051. Si vis centripeta est constans $= \frac{2}{(3\mathfrak{C})^{\frac{1}{1-m}}}$, corpus in spirali logarithmica, cuius anguli intersectionis radiorum cum curua cosinus est $\mathfrak{C}$, moueri poterit, si existente exponente

te

M.E.C.D. 2017

te resistentiae $= y$, et celeritate initiali debita alt. $(3\mathfrak{C})^{\frac{1}{1-m}}$.

Corollarium 6.

1052. Si vis centripeta fuerit vt distantia y eleuata ad k, erit $-\frac{mn}{1-m} = k$ et $n = -\frac{k(1-m)}{m}$; vnde $P = \frac{2y^k}{(3+k)^{\frac{1}{1-m}}\mathfrak{C}^{\frac{1}{1-m}}f^k}$. Resistente ergo exponens debet esse $= \frac{y^{\frac{m+mk-k}{k}}}{f^{\frac{mk-k}{m}}}$, et $v = \frac{y^{k+1}}{(2\mathfrak{C}+\mathfrak{C}k)^{\frac{1}{1-m}}f^k}$ vnde $b = \frac{a^{k+1}}{(3\mathfrak{C}+\mathfrak{C}k)^{\frac{1}{1-m}}f^k}$.

Corollarium 7.

1053. Tempus praeterea, quo arcus AM absoluitur est $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2\mathfrak{C}^{\frac{2m-1}{2-2m}}f^{\frac{k}{2}}}{1-k}(a^{\frac{1-k}{2}} - y^{\frac{1-k}{2}})$. Tempus igitur, quo in centrum C vsque descendit est finitum si $k < 1$, infinitum vero erit si vel $k = 1$ vel $k > 1$.

Corollarium 8.

1054. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis et exponens resistentiae $= \frac{\gamma}{\delta}$ erit

M.E.C.D. 2017

$\int \frac{ds}{q} = \frac{\delta}{\varepsilon} l \frac{a}{y}$ et $e^{\int \frac{ds}{q}} = \frac{a^{\frac{\delta}{\varepsilon}}}{y^{\frac{\delta}{\varepsilon}}} = \frac{a^i}{y^i}$ posito $i = \frac{\delta}{\varepsilon}$

Hinc erit $v = \frac{b y^{i-2}}{a^{i-2}}$ et $P = \frac{2 b y^{i-3}}{a^{i-2}}$. In medio igitur hoc resistente corpus quamcunque logarithmicam spiralem describere poterit, si fuerit vis centripeta $= \frac{2 b y^{i-3}}{a^{i-2}}$ et exponens resistentiae $= \frac{y}{\delta i}$.

Scholion.

1055. In hoc igitur exemplo et corollariis annexis omnes continentur casus, quibus corpus in medio quocunque resistente logarithmicam spiralem describere potest, sollicitatum a vi centripeta potestati cuicunque distantiarum proportionali. Vbi casus quo resistentia proportionalis est quadratis celeritatum et eius exponens distantiis a centro hoc habet peculiare, vt statim det vim centripetam potestati distantiarum proportionalem, quod in aliis resistentiae hypothesibus demum post certo modo determinatam celeritatem initialem obtinebatur. In illa autem resistentiae hypothesi, existente exponente resistentiae $\frac{y}{\delta}$, si corpus in A celeritate quacunque Vb secundum directionem, cuius cum AC inclinationis cosinus est ε proiiciatur, et vis centripeta in A fuerit $= \frac{2b}{a}$, corpus sempcr in logarithmica spirali moucbitur, si praeterea vis centri-

M.E.C.D. 2017

tripeta fuerit vt y^{i-3}, datur autem i quia eſt $i=\frac{\delta}{\epsilon}$. In his igitur ſatis ſunt expoſita, quae motum in ſpirali logarithmica ſpectant.

PROPOSITIO 125.

Problema.

1056. *Si detur curua* AM, *quam corpus deſcribit et vis centripeta ad centrum* C *tendens; inuenire reſiſtentiam requiſitam in ſingulis locis* M *et celeritatem corporis.* Tab. XIII. Fig. 2.

Solutio.

Poſita MC$=y$, CT$=t$, M$m=ds$, ſit vis centripeta in M$=$P. Deinde ponatur reſiſtentia in M$=$R, et altitudo debita celeritati in M$=v$. His poſitis erit P$=\frac{2vdp}{pdy}$ (1005) et $dv+\frac{2vdp}{p}=-Rds$ (1007). Ob datam curuam et vim centripetam ex illa aequatione inuenitur $v=\frac{Ppdy}{2dp}$, et differentiando poſito dy conſtante eſt $dv=\frac{3Pdy}{2}+\frac{pdPdy}{2dp}-\frac{Ppdyddp}{2dp^2}$. Quibus loco v et dv valoribus ſubſtitutis erit $R=\frac{Ppdyddp}{2dsdp^2}-\frac{pdPdy}{2dsdp}-\frac{3Pdy}{2ds}$. Si reſiſtentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis eius exponens ponatur q erit $R=\frac{v}{q}$ et $q=\frac{v}{R}$. Quare habebitur $q=\frac{Ppdsdp}{Ppddp-pdP-3Pdp}$. Ex data ergo curua ſeu aequatione inter y et p, et vi centripeta tam

M.E.C.D. 2017

resistentiam R; quam celeritatem in singulis locis determinauimus. Q. E. I.

Corollarium 1.

1057. Alio exprimendi modo erit resistentia $R = -\frac{1}{p^2 ds} d.\frac{P p^3 dy}{2 dp}$ et $q = -\frac{P p^3 dy ds}{2 dp . d.\frac{P p^3 dy}{2 dp}}$

Ex quo perspicitur si fuerit P vt $\frac{dp}{p^3 dy}$, euanescere resistentiam. Hoc enim casu vis centripeta sola sufficit ad curuam datam producendam.

Corollarium 2.

1058. Posita celeritate initiali in $A = V b$ et perpendiculo ex C in tangentem in A demisso $= b$ sit vis centripeta, quae in vacuo faciat est corpus in hac curua moueatur, $= V$ erit $V = \frac{2bh^2 dp}{p^3 dy}$ (592).

Hanc ob rem $R = -\frac{bh^2}{p^2 ds} d.\frac{P}{V}$, et $q = -\frac{P ds}{V d.\frac{P}{V}}$

Atque $v = \frac{bh^2 P}{V p^2}$.

Corollarium 3.

1059. Si corpus in hac curua in vacuo a vi V sollicitatum moueretur, sit eius celeritas in M debita altitudini u; eritque $u = \frac{bh^2}{p^2}$. Vnde haec habebitur analogia $u : v = V : P$. Atque generalitet hoc theorema obtinet: celeritates corporis in eodem loco M sunt in subduplicata ratione virium centripetarum.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

1060. Si vis centripeta fuerit conſtans ſeu $P = g$, erit $R = \frac{bh^2 g\, dv}{v^2 p^2 ds}$ et $q = \frac{v ds}{dv}$. Atque $v = \frac{bh^2 g}{vp^2}$.

Exemplum.

1061. Descendat corpus in ſpirali hyperbolica AM, cuius natura hac aequatione exprimitur; $p = \frac{ay}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, et ſit vis centripeta vt dignitas quaecunque a centro ſpiralis C; ſcilicet $P = \frac{y^n}{f^n}$. Erit $ds = -\frac{dy\sqrt{(a^2+y^2)}}{y}$, et $\frac{p^3 dy}{dp} = y^3$. Vnde prodit $R = \frac{(n+3)y^{n+1}\sqrt{(a^2+y^2)}}{2a^2 f^n}$ et $v = \frac{y^{n+3}(a^2+y^2)}{2a^2 f^n}$ atque ex his $q = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{n+3}$. Si medium ergo reſiſtit in duplicata celeritatum ratione erit exponens reſiſtentiae $= \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{n+3}$. At ſi medium reſiſtat in ſimplici ratione celeritatum, et exponens reſiſtentiae ſit q erit $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{v}}{R} = \frac{af^{\frac{n}{2}}\sqrt{2}}{(n+3)y^{\frac{n+1}{2}}}$, atque $q = \frac{2a^2 f^n}{(n+3)^2 y^{n+1}}$. In hac igitur reſiſtentiae hypotheſi medium erit vniforme ſi $n = -1$; hoc eſt ſi vis centripeta eſt in reciproca ratione diſtantiarum. Fit enim $q = \frac{a^2}{f}$. At ſi vis centripeta eſt reciproce vt quadratum diſtantiae, fiet reſiſtentiae expo-

M.E.C.D. 2017

nens $= \frac{2a^2y}{f^2}$ seu erit proportionalis ipsis a centro distantiis.

Scholion.

1062. Sequi hic deberet iuxta nostrum institutum problema, quo ex data curua et celeritate in singulis locis quaeruntur tam vis centripeta, quam resistentia; sed cum huius solutio sit facillima et ex ipsis canonibus supra (1007), datis sponte fluat; atque praeterea ex eo nihil notatu digni deduci queat, hic praetermitto. Inuenitur autem $P = \frac{2vdp}{pdy}$ et $R = -\frac{pdv - 2vdp}{pds}$, quae formulae problema soluunt. Adiicio vero loco huius problematis aliud affine, quo praeter curuam motus angularis circa centrum virium datur et tam vis centripeta quam vis resistentiae quaeruntur.

PROPOSITIO 126.

Problema.

Tabula XIII Fig. 4.

1063. *Si detur curua* A M *in qua corpus mouetur et motus angularis circa centrum virium* C, *inuenire tam vim centripetam ad* A *tendentem, quam resistentiam in singulis locis.*

Solutio.

Positis vt hactenus C M $= y$, C T $= p$, M $m =$ ds celeritate in M debita altitudini v, vi centripeta $= P$ et vi resistentiae $= R$, concipiatur centro C radio E C $= 1$ descripta peripheria circuli E L l, in qua

M.E.C.D. 2017

qua corpus eodem motu angulari circa C feratur, quo corpus in curua A M. Elementum ergo Ll eodem tempore absoluitur, quo elementum Mm. Sit nunc celeritas per Ll debita altitudini u; erit u data, quia motus angularis datur. Atque habebitur $\frac{Ll}{\sqrt{u}} = \frac{Mm}{\sqrt{v}}$. Est vero $Ll : mr = 1 : y$ seu $Ll = \frac{mr}{y}$, porro-que est $mr : Mm = p : y$, ideoque $mr = \frac{p.Mm}{y}$, et consequenter $Ll = \frac{p.Mm}{y^2}$. Hanc ob rem habebitur $\frac{p}{y^2\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{v}}$, hincque $v = \frac{y^4 u}{p^2}$. Inuenta iam hac ratione v erit $P = \frac{2y^4 u\,dp}{p^3 dy}$ (1005), et $R = -\frac{y^4 du - 4y^3 u dy}{p^2 ds}$ (1007). Atque si resistentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis et exponens resistentiae $= q$, erit $q = -\frac{y u ds}{y du + 4u dy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

1064. Si vis centripeta P proportionalis est ipsi $\frac{dp}{p^3 dy}$, id quod accidit, quando corpus mouetur in vacuo; erit u reciproce vt y^4. Quare celeritas angularis tum est reciproce vt quadratum distantiae corporis a centro. Facto autem $y^4 u$ constante ex aequatione altera perspicitur euanescere resistentiam R.

Corollarium 2.

1065. Si corpus ad centrum C accedit ita vt y decrescat erit $ds = -\frac{y\,dy}{\sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Quare erit resistentia $R = -\frac{(y^3 du + 4y^2 u dy)\sqrt{(y^2 - p^2)}}{ppdy}$, et $q = -\frac{y^2 u\,dy}{(y\,du + 4u dy)\sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Ex quo intelligitur si $y^4 u$ fuerit potestas ipsius y, cu-

M.E.C.D. 2017

cuius exponens est numerus affirmatiuus, resistentiam fore affirmatiuam. At si exponens illius potestatis ipsius y fuerit negatiuus resistentia quoque erit negatiua.

Corollarium 3.

1066. Si motus angularis debeat esse aequabilis seu u constans, erit $du = o$ ideoque $R = \frac{4y^2u\sqrt{(y^2-p^2)}}{p^2}$ et $q = \frac{y^2}{4\sqrt{(y^2-p^2)}}$.

Corollarium 4.

1067. Sit celeritas angularis vt potestas exponentis n distantiae y seu $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$ erit resistentia $R = \frac{2(n+2)y^{2n+2}\sqrt{(y^2-p^2)}}{f^{2n-1}p^2}$, vis centripeta $P = \frac{2y^{2n+4}dp}{f^2p^3dy}$; et $v = \frac{y^{2n+4}}{f^{2n-1}p^2}$ atque pro medio resistente in duplicata ratione celeritatum erit exponens resistentiae $q = \frac{y^2}{2(n+2)\sqrt{(y^2-p^2)}}$.

Exemplum.

1068. Sit curua AM iterum spiralis hyperbolica aequatione $p = \frac{ay}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$ expressa, et celeritas angularis sit vt y^n seu vt ante $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$. Cum autem sit $\sqrt{(y^2-p^2)} = \frac{y^2}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, erit $R =$

M.E.C.D. 2017

$R = \frac{2(n+2)y^{2n+2}\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2 f^{2n-1}}$; $v = \frac{y^{2n+2}(a^2+y^2)}{a^2 f^{2n-1}}$

et vis centripeta $P = \frac{2y^{2n+1}}{f^{2n-1}}$. Si resistentia ponatur ipsis celeritatibus proportionalis erit, exponens resistentiae $= \frac{a^2 f^{2n-1}}{(2n+4)^2 y^{2n+2}}$. Sin resistentia quadratis celeritatum ponatur proportionalis, et exponens resistentiae sit q, erit $q = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{2n+4}$. Quae prorsus conueniunt, cum iis quae superiore exemplo (1061) sunt tradita.

PROPOSITIO 127.

Problema.

1069. *Si detur resistentia per quamuis celeritatum potestatem simulque exponens resistentiae, praeterea etiam datus sit motus angularis corporis circa centrum* C: *ex his inuenire curuam, quam corpus describet et vim centripetam ad centrum* C *tendentem.* Tabula XIII Fig. 4.

Solutio.

Positis CM $= y$, CT $= p$, M$m = ds$, altitudine celeritati in M debita $= v$, vi centripeta $=$ P, resistentia $=$ R; sit resistentia $R = \frac{v^m}{q^m}$, vbi q detur per y. Deinde motus angularis consideretur vt an-

M.E.C.D. 2017

te tanquam motus puncti factus in peripheria circuli EL*l*, cuius radius CE$=$1. Posita nunc celeritate, qua L*l* describitur, debita altitudini u, erit vt in praec. Prop. elicuimus $v = \frac{y^4 u}{p^2}$, $P = \frac{2y^4 u dp}{p^3 dy}$ et $R = -\frac{y^4 du - 4y^3 u dy}{p^2 ds} = \frac{v^m}{q^m} = \frac{y^{4m} u^m}{p^{2m} q^m}$. Haec posterior aequatio autem, quia u et q sunt quantitates datae, exprimet naturam curuae quaesitae, pro qua ergo habebitur $y du + 4u dy + \frac{y^{4m-3} u^m ds}{p^{2m-2} q^m} = o$ seu $y du + 4u dy = \frac{-y^{4m-2} u^m dy}{p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Cognita vero curuae descriptae natura, seu aequatione inter p et y innotescet statim vis centripeta P quippe est $P = \frac{2y^4 u dp}{p^3 dy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

1070. Si celeritas angularis debeat esse aequabilis, quod in vacuo nisi in circulo fieri nequit, erit $du = o$, haecque prodibit pro curua quaesita aequatio $4p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2 - p^2)} = y^{4m-2} u^{m-1}$. Data ergo q per y, aequatio haec est integralis inter p et y, ex qua curua potest construi.

Corollarium 2.

1071. Si fuerit u per y data vt $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$, erit $(2n + 4) p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2 - p^2)} = \frac{\quad}{y^{2nm}}$.

M.E.C.D. 2017

$\frac{y^{2mn+4m-2n-2}}{f^{(m-1)(2n-1)}}$. Quae quoque eſt integralis inter y et p, ideoque ad curuam conſtruendam eſt idonea.

Corollarium 3.

1072. Si celeritas angularis detur per arcum EL, ſeu du per eius elementum $Ll = \frac{p.Mm}{y^2}$ (1063) $= -\frac{p\,dy}{y\sqrt{(y^2-p^2)}}$, ita vt ſit $du = \frac{u^k p\,dy}{g^k y\sqrt{(y^2-p^2)}}$; erit $\frac{dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{g^k y\,du}{u^k p}$. Hoc valore ſubſtituto habebitur $y\,du + 4u\,dy = \frac{g^k y^{4m-1} u^{m-k} du}{p^{2m-1} q^m}$ atque $p^{2m-1} = \frac{g^k y^{4m-1} u^{m-k} du}{q^m y\,du + 4q^m u\,dy}$. Ex qua aequatione valor ipſius p ſubſtitutus in aequatione $du = \frac{u^k p\,dy}{g^k y\sqrt{(y^2-p^2)}}$, determinabit u in y. Vnde quoque aequatio inter p et y obtinebitur.

Corollarium 4.

1073. Si reſiſtentia fuerit in ſimplici ratione celeritatum ſeu $m = \frac{1}{2}$; aequatio $1 = \frac{g^k y u^{\frac{1}{2}-k} du}{(y\,du + 4u\,dy)\sqrt{q}}$ ſtatim dabit u per y. Qui va-

BIBLIOTECA DEL OSSERVATORIO DI S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

lor in aequatione $du = \frac{u^k p\,dy}{g^k y \sqrt{(y^2 - p^2)}}$ ſubſtitutus dabit aequationem inter y et p.

Exemplum 1.

1074. Reſiſtat medium in duplicata ratione diſtantiarum ſitque medii exponens $q = \frac{y}{\alpha}$. Motus vero angularis ſit aequabilis ſeu $u = b$. Erit $m = 1$, atque $4\sqrt{(y^2 - p^2)} = \alpha y$ (1070). Vnde prodit $p = \frac{y\sqrt{(16 - \alpha^2)}}{4}$. Quare curua deſcripta erit ſpiralis logarithmica, in qua anguli quem radius cum tangente conficit ſinus eſt $\frac{\sqrt{(16 - \alpha^2)}}{4}$ et coſinus $= \frac{\alpha}{4}$. Vis centripeta vero erit $= \frac{32by}{16 - \alpha^2}$. Sin autem medium ponatur vniforme ſeu $q = c$, erit $4c\sqrt{(y^2 - p^2)} = y^2$, et $p = \frac{y\sqrt{(16cc - yy)}}{4c}$.

Exemplum 2.

1075. Reſiſtat medium in ſimplici ratione celeritatum, ſitque id vniforme: ponatur vero etiam motus angularis vniformis, erit $m = \frac{1}{2}$, $q = c$, $u = b$. His ſubſtitutis habebitur pro curua deſcripta haec aequatio $p = 4\sqrt{bc(y^2 - p^2)}$ ſeu $p = \frac{4y\sqrt{bc}}{\sqrt{(1 + 16bc)}}$. Quae curua quoque eſt ſpiralis logarithmica, in qua anguli interſectionis ſinus eſt $\frac{4\sqrt{bc}}{\sqrt{(1 + 16bc)}}$, coſinus $= \frac{1}{\sqrt{(1 + 16bc)}}$ atque tangens $= 4\sqrt{bc}$. Vis centripeta vero erit $= \frac{y(1 + 16bc)}{8c}$. Quod in his formulis vniformitas dimenſionum non obſeruetur ratio eſt, quod radium circuli EC poſuimus $= 1$. Hac igitur vnitate vniformitas dimenſionum eſt reſtituenda.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion.

1076. Plura centra virium in hoc capite non considerabimus, cum in vacuo etiam pro hoc casu vix quicquam ad motum determinandum deduci potuerit Si centra quidem attrahant in simplici ratione distantiarum, quotcunque centra plus non habent difficultatis quam vnum in eadem ratione attrahens, quemadmodum ostendimus supra (702). Haecque conuenientia in medio resistente aeque locum habet ac in vacuo. Quamobrem cum iam vnum centrum in simplici ratione distantiarum attrahens considerauerimus, non opus est vt de pluribus eiusdem naturae verba faciamus. Progrediemur igitur ad casum latissime patentem, in quo omnes motus, qui fiunt in eodem plano, comprehenduntur. Considerabimus scilicet duas vires absolutas, quarum directiones sunt ad se inuicem normales, singulae vero inter se parallelae. Ad huiusmodi enim duas vires quasuis potentias in eodem plano existentes resolui posse constat. Practerea in hac tractatione non solum omnes casus potentiarum absolutarum complectemur, sed etiam quaedam eximia pro vacuo obseruare licebit circa vires centripetas, quae in praecedentibus difficulter patent. Namque hic statim curuam descriptam ad aequationem inter coordinatas orthogonales reducemus, quod ibi inter distantiam a centro et perpendiculum in tangentem est factum.

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 128.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 5.

1077. *Si corpus in* M *a duabus viribus sollicitetur, quarum vna habeat directionem* MP *normalem ad datam* AC, *altera vero directionem* MQ *parallelam ipsi* AC *seu normalem in* BC, *determinare curuam* AM *quam corpus in quocunque medio resistente ab his potentiis sollicitatum describet.*

Solutio.

Vocetur $CM = MQ = x$, $PM = CQ = y$, elementum $Mm = ds$: ductisque mp et mq, erit $Pp = -dx$ et $Qq = dy$; atque $ds\sqrt{} = (dx^2 + dy^2)$. Sit vis qua corpus secundum MP trahitur $= P$ et vis qua corpus secundum MQ trahitur $= Q$, resistentia vero fit $= R$, et celeritas in M debita altitudini v. Resoluantur nunc vires P et Q in normales et tangentiales ope demissorum perpendiculorum ex P et Q in tangentem Tt; erit ergo vis normalis ex P orta $= -\frac{P.PT}{PM} = -\frac{P\,dx}{ds}$, et vis tangentialis $= \frac{P.MT}{MP} = \frac{P\,dy}{ds}$. Ex vi Q vero resoluta oritur vis tangentialis $= \frac{Q.Mt}{MQ} = -\frac{Q\,dx}{ds}$, et vis normalis $= \frac{Q.Qt}{MQ} = \frac{Q.dy}{ds}$. Tota ergo vis normalis erit $= \frac{Q\,dy - P\,dx}{ds}$; et vis tangentialis promouens $= -\frac{Q\,dx - P\,dy}{ds}$, quae vi resistentiae R debet diminui, quo tota vis motum accelerans prodeat. Ex his, ergo posito r radio osculi in M, erit $\frac{Q\,dy - P\,dx}{ds} = \frac{2v}{r}$ et

M.E.C.D. 2017

et $dv = -Q\,dx - P\,u\,y - R\,ds$ (866). Eliminata ergo v ex his aequationibus orietur aequatio naturam curuae descriptae exprimens. Q. E. I.

Corollarium 1.

1078. Si ponatur elementum curua ds constans erit radius osculi $r = -\frac{ds\,dy}{ddx} = \frac{ds\,dx}{ddy}$. Hoc igitur valore substituto erit $\frac{2v\,ddx}{dy} = P\,dx - Q\,dy$.

Corollarium 2.

1079. Ex aequationibus inuentis coniungendis reperietur $P = -\frac{2v\,ddy - dv\,dy - R\,dy\,ds}{ds^2}$ et $Q = -\frac{2v\,ddx - dv\,dx - R\,dx\,ds}{ds^2}$. Ex quibus si relatio inter P et Q datur, statim habetur aequatio, in qua v per solam curuam inuenitur.

Corollarium 3.

1080. Si corpus perpetuo a vi quacunque ad centrum C attrahatur erit $P:Q = y:x$. Tunc igitur habebitur ista aequatio $2v\,x\,ddy + x\,dv\,dy + R\,x\,dy\,ds = 2v\,y\,ddx + y\,dv\,dx + R\,y\,dx\,ds$. Quae posito $y = p\,x$ abit in hanc $2v\,x\,ddp + 4v\,dp\,dx + x\,dv\,dp + R\,x\,dp\,ds = o$, seu $d.v\,x^4\,dp^2 + R\,x^4\,dp^2\,ds = o$.

Corollarium 4.

1081. In vacuo, quo R euanescit et corpus ad centrum C attrahitur, erit $v\,x^4\,dp^2 = A\,ds^2$ seu $v = \frac{A\,ds^2}{x^4\,dp^2}$. Praeterea vero erit $\int P\,dy = \frac{v\,dy^2}{ds^2}$ et

$v =$

M.E.C.D. 2017

$v = -\frac{ds^2 \int P dy}{dy^2}$. Quare habebitur iſta aequatio $-\frac{A dy^2}{x^4 dp^2} = \int P dy$, ſeu aſſumto Q loco P haec aequatio $-\frac{A dx^2}{x^4 dp^2} = \int Q dx$.

Corollarium 5.

1082. Si vis centripeta ad C tendens fuerit $= \frac{MC^n}{f^n} = \frac{x^n (1+pp)^{\frac{n}{2}}}{f^n}$, erit $Q = \frac{x^n (1+pp)^{\frac{n+1}{2}}}{f^n}$ In vacuo igitur pro curua deſcripta habebitur haec aequatio $-\frac{A dx^2}{x^4 dp^2} = \int \frac{x^n dx (1+pp)^{\frac{n-1}{2}}}{f^n}$. Poſito B pro $-Af^n$, et dx conſtante, orietur differenando haec aequatio $2Bx dx ddp + 4B dx^2 dp + x^{n+5} dp^3 (1+pp)^{\frac{n-1}{2}} = o$. Poſito vero dp conſtante prodiiſſet haec aequatio $2Bx ddx - 4B dx^2 = x^{n+5} dp^2 (1+pp)^{\frac{n-1}{2}}$. Fiat $x = \frac{1}{q}$; erit $2B q^{n+2} dd q + dp^2 (1+pp)^{\frac{n-1}{2}} = o$. Harum aequationum quamuis integratio non appareat, tamen integralis eſt $x^{n+5} dp^2 (1+pp)^{\frac{n+1}{2}} = C ds^2$, quae ex cap. praeced. inuenitur.

Corollarium 6.

1083. Quanquam autem haec aequatio $2B q^{n+2} dd q + dp^2 (1+p^2)^{\frac{n-1}{2}} = o$ eſt differentialis ſecundi gradus, tamen commodior eſt quam differen-

M.E.C.D. 2017

rentialis primi gradus ad curuas determinandas, quas corpus proiectum describit attractum vel in simplici distantiarum ratione vel in reciproce duplicata. In simplici enim ratione habebitur $n=1$ atque $2Bq^3\,ddq + dp^2 = o$. Fiat $dp = w\,dq$ ob dp constans erit $ddq = -\frac{dw\,dq}{w}$, vnde $2Bq^3\,dw = w^3\,dq$, et $\frac{B}{w^2} = \frac{1}{q^2} + C$. Erit ergo $w = \frac{q\sqrt{B}}{\sqrt{(1+Cq^2)}}$ atque $p + \alpha = \frac{\sqrt{B(1+Cq^2)}}{C} = \frac{\sqrt{B(x^2+C)}}{Cx}$ $= \frac{y}{x} + \alpha$ seu $\alpha x + \mathfrak{C} y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Quia B est quantitas negatiua.

Corollarium 7.

1084. Si est $n = -2$ seu si corpus in reciproca duplicata ratione distantiarum attrahitur, erit in vacuo curua descripta $2B\,ddq = \frac{dp^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ sumto B negatiuo, vt oportet. Integrando ergo erit $2B\,dq + C\,dp = \frac{p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$, denuoque integrando $2Bq + Cp = D + \sqrt{(1+pp)}$ seu $2B + Cy = D\,x + \sqrt{(x^2+y^2)}$. Quarum curuarum vtraque est sectio conica, illa quidem ellipsis tantum, haec vero omnes complectitur.

Scholion 1.

1085. In Capite praecedente, quo de motu corporum in vacuo egimus, curuas quoque determinauimus, quas corpus a vi centripeta vel ipsis distantiis vel reciproce earum quadratis proportionali describit; easque conuenientes inuenimus cum his in corollariis datis. Modi quidem maxime sunt

M.E.C.D. 2017

diuerſi, nam ibi ex comparatione arcuum circularium aequationes algebraicas ſumus adepti, hic vero ipſa integratio ſponte aequationem algebraicam inter coordinatas dedit. Haec vero methodus, quamuis in praefatis caſibus duobus multo ſit commodior, tamen aliis laborat defectibus. Nam in aliis vis centripetae hypotheſibus nequidem hac methodo aequatio differentialis dari poteſt pro curua deſcripta, quod tamen illa directa methodo ſemper aeque facile fieri poteſt. Hoc tamen ipſius analyſeos defectui potius eſt adſcribendum quam methodo cum aequationis differentio - differentialis $2Bxddx-4Bddx^2=x^{n+5}dp^2(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}$ integralem $x^{n+5}dp^2(1+p^2)^{\frac{n+1}{2}}+Cds^2=o$ eſſe ſciamus ex ipſa methodo cap. praeced. vſitata, hanc vero integralem ex ipſa aequatione differentio-differentiali eruere nequeamus.

Scholion 2.

1086. Problematum reciprocorum, quae circa has potentias proponi poſſunt, hoc iam eſt ſolutum coroll. 2. quo ex data curua, medio reſiſtente et celeritate in ſingulis punctis quoque data, quaeruntur vires ſecundum MP et MQ tendentes, quae hunc motum producant. Vt ſi curua AMB fuerit circulus centrum in C et radium $AC=a$ habens, et reſiſtentia ſit $=\frac{v}{c}$, atque celeritas conſtans nempe $v=b$, erit $x^2+y^2=a^2$ et $P=\frac{2bcy-abx}{a^2c}$ et

Q=

M.E.C.D. 2017

$Q=\frac{2bcx+aby}{a^2c}$. Simili modo cum ſint quinque res, quae in conſideratione veniunt, nempe duae potentiae P et Q, tertio reſiſtentia R, qu rto celeritas in ſingulis locis ſeu v, et quinto natura curuae deſcriptae ſeu aequatio inter x et y; ſemper tria horum tanquam data accipi poſſunt et duo reliqua ex iis inueniri. Hanc ob rem decem formari poſſent problemata pro numero combinationum, quo tria ex quinque accipi poſſunt. Sed ne nimis detineamur in his euoluendis, e quibus non multum ad vſum deduci poterit, vnicum problema quo in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum ex data vi centripeta curua deſcripta quaeritur.

PROPOSITIO 129.

Problema.

1087. *Si corpus moueatur in medio, quod in duplicata ratione celeritatum reſiſtit; et ſi potentia* P *fuerit ad* Q *vt* MP *ad* MQ, *ſeu quod idem eſt, ſi corpus trahatur ad centrum* C *vi quacunque determinare curuam* AMB, *quam corpus deſcribet.*

Tab. XIII. Fig. 5.

Solutio.

Poſitis vt ante CP$=x$, PM$=y$, M$m$$=ds$, et $y=px$, ſit celeritas in M debita altitudini v et exponens reſiſtentiae q, erit $R=\frac{v}{q}$. Et cum ſit P: Q$=y:x$ erit $2vxddp+4vdpdx+xdvdp+\frac{vxdpds}{q}=0$

M.E.C.D. 2017

(1080). Quae aequatio diuisa per $vxdp$ abit in hanc $\frac{2ddp}{dp}+\frac{4dx}{x}+\frac{dv}{v}+\frac{ds}{q}=0$; cuius integralis est $e^{\int\frac{ds}{q}}x^4vdp^2=Ads^2$; seu $v=\frac{Ae^{-\int\frac{ds}{q}}ds^2}{x^4dp^2}$. Haec vero aequatio $Qds^2+2vddx+dvdx+\frac{vdxds}{q}=0$ (1079) per $\frac{e^{\int\frac{ds}{q}}dx}{ds^2}$ multiplicata et integrata dat

$$\int e^{\int\frac{ds}{q}}Qdx+\frac{e^{\int\frac{ds}{q}}vdx^2}{ds^2}=0;$$

in qua ille valor ipsius v inuentus substitutus dat $\int e^{\int\frac{ds}{q}}Qdx+\frac{Adx^2}{x^4dp^2}=0$. Differentietur haec aequatio posito dx constante erit $e^{\int\frac{ds}{q}}Qx^5dp^3=5Adx^2dp+2Axdxddp$. Quae est aequatio pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium 1.

1088. Aequatio haec pro curua descripta non differt ab aequatione in vacuo inuenta (1081) nisi quod hic habeatur $\int e^{\int\frac{ds}{q}}Qdx$, cum ibi ipsi $-\frac{Adx^2}{x^4dp^2}$ aequaretur tantum $\int Qdx$.

Corollarium 2.

1089. Si elementum dp pro constante fuisset assumtum, tum prodiisset haec aequatio $e^{\int\frac{ds}{q}}Qx^5dp^2=4A$

M.E.C.D. 2017

$=4Adx^2-2Axddx$.. In qua si ponatur $x=\frac{1}{z}$, oritur $e^{\int\frac{ds}{q}}Qdp^2=2Az^2ddz$.

Corollarium 3.

1090. Si vis centripeta ad C tendens fuerit $=\frac{MC^n}{f^n}=\frac{x^n(1+p^2)^{\frac{n}{2}}}{f^n}$, erit $Q=\frac{x^n(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}}{f^n}=\frac{(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}}{f^nz^n}$. Quare pro curua descripta habebitur ista aequatio $e^{\int\frac{ds}{q}}dp^2=\frac{2Af^nz^{n+2}ddz}{(1+pp)^{\frac{n-1}{2}}}$. Quae sumtis logarithmis et differentiata dat $\frac{ds}{q}=\frac{(n+2)dz}{z}+\frac{d^3z}{ddz}-\frac{(n-1)pdp}{1+pp}$. Est vero $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{\sqrt{(dz^2+p^2dz^2+z^2dp^2-2pzdpdz)}}{z^2}$.

Corollarium 4.

1091. Iisdem manentibus sit $q=\frac{MC}{\alpha}=\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\alpha z}$, erit $\frac{\alpha\sqrt{(dz^2+p^2dz^2+z^2dp^2-2pzdpdz)}}{z\sqrt{(2+pp)}}=\frac{(n+2)dz}{z}+\frac{d^3z}{ddz}-\frac{(n-1)pdp}{1+pp}$

Ponatur $z=e^{\int udp}$, atque prodibit ista aequatio $\frac{\alpha dp\sqrt{(1-2pu+u^2+p^2u^2)}}{\sqrt{(1+pp)}}=(n+3)udp+\frac{ddu+2ududp}{du+u^2dp}+\frac{(n-1)pdp}{1+pp}$

Scholion.

1092. Hanc aequationem differentialem secundi gradus dubito, an in quoquam casu ad differen-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

tialem primi gradus possit reduci; id quod tamen supra, vbi vires centripetas ex instituto consideravimus, fecimus (1020). In medio igitur resistente haec operandi ratio non tantam vtilitatem afferre videtur, quantam in vacuo attulit, saltem pro pro casibus quibus n est vel 1 vel -2. Quamobrem cum in hac re vix quicquam amplius sperari possit, hic motum in medio resistente, qui in plano fit relinquo atque ad motus non in plano factos considerandos progredior, coniuncta cum potentiis absolutis corpus sollicitantibus vi resistentiae. Quo in negotio, cum facile intelligatur, parum ad euidentem cognitionem perducere licere, contentus ero regulas generales tradidisse, quibus pro quouis problemate proposito ad aequationem peruenire poterimus.

PROPOSITIO 130.
Problema.

Tabula XIII Fig. 6.

1093. *In medio quocunque resistente sollicitetur corpus a tribus potentiis, quarum vna sit tangentialis, reliquae duae normales ad directionem corporis et in duobus planis inter se normalibus ad se inuicem normales, determinare motum corporis et curuam quam describet.*

Solutio.

Ex elementi Mm quod corpus describit, terminis M et m in planum fixum APQ demittantur per-

M.E.C.D. 2017

perpendicula QP et *qp*. Deinde ponatur AP$=x$, PQ$=y$ et QM$=z$, altitudo celeritati in M debita $=v$. Iam ſit vis tangentialis $=$T. Normalium altera cuius directio in plano M*q* eſt ſita, ſit $=$N, et altera cuius directio ad planum M*q* eſt normalis ſit $=$M. Vis reſiſtentiae vero ſit $=$V. Quia autem vis reſiſtentiae V vires normales non afficit, ſed tantum effectum vis tangentialis minuit; effectus virium N et M immutatus manet, ſed in effectu vis tangentialis definiendo loco T poni debet T $-$V. Quare cum harum virium effectus iam ſupra (809) determinauerimus, eaedem aequationes ibi datae et hic valebunt ſi modo T$-$V loco T ponatur. Hanc ob rem pro medio reſiſtente prodibunt hae aequationes $dv=(\mathrm{T}-\mathrm{V})V(dx^2+dy^2+dz^2)$; $2vdy\,dzddy-2vddz(dx^2+dy^2)=\mathrm{N}(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}V(dx^2+dy^2)$; atque $-2vdxddy=\mathrm{M}(dx^2+dy^2+dz^2)V(dx^2+dy^2)$ (809). Ex quibus eliminata v duae habebuntur acquationes tres coordinatas x, y et z inuoluentes, quae naturam curuae quaeſitae expriment. In illis autem aequationibus elementum dx. conſtans eſt aſſumtum. Q. E. I.

Corollarium I.

1094. Duae poſteriores aequationes coniunctae eliminanda v dant aequationem hanc; $\frac{ddz(dx^2+dy^2)}{dxddy}-\frac{dydz}{dx}=\frac{\mathrm{N}V(dx^2+dy^2+dz^2)}{\mathrm{M}}$. Quae pro medio quocunque aeque ac pro vacuo valet (810).

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

1095. Perſpicitur ex hac aequatione, ſi vel N vel M euanescit, qualis ſit motus corporis. Nam poſito $N=0$ erit $\frac{ddz}{dz}=\frac{dyddy}{dx^2+dy^2}$ ſeu $\alpha dz=V(dx^2+dy^2)$. Eſt verò $\frac{dz}{V(dx^2+dy^2)}$ tangens anguli, quo elementum Mm inclinat ad Qq. Quare hic angulus eſt conſtans, propterea QM habet ad proiectionem BQ curuae deſcriptae in plano APQ datam rationem.

Corollarium 3.

1096. Si $M=0$ erit $ddy=0$, ideoque proiectio BQ erit linea recta. Tota igitur curua a corpore deſcripta poſita erit in plano ad planum APQ normali, idque ſecante recta BQ.

Corollarium 4.

1097. Ex aequatione § 1094 erit $ddz\,dx^2+dy^2)=dydzddy+\frac{Ndxdy^2V(dx^2+dy^2+dz^2)}{M}$. Quare cum ſit $-2vdxddy=M(dx^2+dy^2+dz^2)V(dx^2+dy^2)$ erit $-2vdx\,ddz\;dx^2+dy^2)=Mdydz(dx^2+dy^2+dz^2)V(dx^2+dy^2)+Ndx(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}V(dx^2+dy^2)$.

Corollarium 5.

1098. Quare ſi fuerit $\frac{Mdydz}{dx}+NV(dx^2+dy^2+dz^2)=0$, corpus etiam mouebitur in plano, cum tunc ſit $ddy=0$ et $dz=\alpha dx$. Proiectio enim cur-

M.E.C.D. 2017

curuae descriptae in plano ad planum APQ in AP normali erit linea recta.

Corollarium 6.

1099. Planum autem in quo posita sunt duo elementa Mm et $m\mu$, quae corpus describit, simili modo quo in vacuo determinatur, cum eius determinatio tantum a coordinatis x, y et z pendeat. Nempe si hoc planum sit SMR et secet planum APQ recta OR, erit $AO = x - \frac{zdxddy + ydxddz}{dzddy - dyddz}$; tangens ang. $POR = \frac{dzddy - dyddz}{dxddz}$. Atque tangens anguli quem planum RMS cum plano APQ constituit seu $\frac{MQ}{QV} = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxdy}$ (812). Tab. XIV. Fig. 1.

Corollarium 7.

1100. Erit igitur tangens anguli, quem planum RMS cum plano APQ constituit, aequalis secanti anguli POR ductae in $\frac{ddz}{ddy}$.

Corollarium 8.

1101. In casu igitur, quo vis N euanescit cum sit $ddz : ddy = dydz : dx^2 + dy^2$, erit tangens anguli $POR = \frac{dx}{dy}$, seu $POR = RQS$. Tum igitur QV in QS incidet. Tangens vero anguli quem RMS cum RQS constituit est $= \frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Quare hic angulus est constans ob $\alpha dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (1095). Reperitur vero $AO = \frac{xdx + ydy - \alpha^2 zdz}{dx}$.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Corollarium 9.

1102. Cum in coroll. 1 ratio detur inter *ddy* et *ddz*, per vires normales M et N, si eorum proportionalia ipsorum loco substituantur, determinabitur positio plani RMS per differentialia primi gradus. Sed haec omnia non magis ad medium resistens respiciunt, quam ad vacuum. Quare etiam haec prorsus conueniunt cum iis, quae supra Prop. 98 sunt tradita.

PROPOSITIO 131.

Problema.

1103. *Si corpus* M *in medio quocunque resistente trahatur a tribus viribus, quarum vnius directio sit* M*f parallela axi* AR *alterius directio* M*q parallela ipsi* PQ *applicatae in plano* APQ *positae, et tertiae directio sit ipsa* MQ *ex* M *in planum* APQ *normaliter demissa: inuenire motum corporis et lineam quam describet.*

Tab. XIV. Fig. 2.

Solutio.

Positis vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, atque celeritate in M debita altitudini v, sit vis secundum M*f* trahens $= P$, vis secundum M*g* trahens $= Q$ et vis secundum MQ trahens $= R$ atque vis resistentiae in $M = V$. Hae tres vires si resoluantur in tres alias, quarum directiones cum iis in Prop. praec. conueniunt, prodit vis tan-

M.E.C.D. 2017

tangentialis $T = \frac{Pdx+Qdy+Rdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$; $N = \frac{Pdxdz+Qdydz+R(dx^2+dy^2)}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ atque $M = -\frac{Pdy+Qdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ (823). Iisdem enim hic denominationibus vtimur, quibus ibi Prop. 99. His igitur valoribus in formulis praec. Prop. iuuentis ſubſtitutis habebuntur ſequentes tres aequationes $dv = -Pdx-Qdy-Rdz-V\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$; $\frac{2vdydzddy-2vddz(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2+dz^2} = -Pdxdz-Qdydz+R(dx^2+dy^2)$; atque $\frac{2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2} = Pdy-Qdx$. Quae tres aequationes eliminata v dabunt duas aequationes coordinatas x, y et z continentes, quae naturam curuae deſcriptae exprimunt. In his autem formulis elementum dx conſtans eſt aſſumtum. Q. E. I.

Corollarium 1.

1104. Duae poſteriores aequationes cum iis quas pro vacuo inuenimus (823) perfecte conueniunt. Quare quae ex iis ſequuntur tam in vacuo quam medio quocunque reſiſtente locum habent. Discrimen autem totum, quod inter motum in vacuo et medio reſiſtente intereſt, a prima pendet aequatione.

Corollarium 2.

1105. Ex duabus poſterioribus aequationibus autem coniunctis oritur haec analogia $ddy:ddz = Pdy-Qdx:Pdz-Rdx$. Quamobrem loco ſecundae aequationis, quae reliquis magis eſt compoſita ſub-

M.E.C.D. 2017

ſtitui poteſt haec: $\frac{2vdxddz}{dx^2+dy^2+dz^2} = Pdz - Rdx$, vel $Pdyddz - Qdxddz = Pdzddy - Rdxddy$, quae v non inuoluit.

Corollarium 3.

1105. Ope analogiae $ddy : ddz = Pdy - Qdx : Pdz - Rdx$ inuenitur determinatio plani RMS in differentialibus primi gradus vt ſequitur; $AO = x - \frac{Pydz + Pzdy - Qzdx + Rydx}{Qdz - Rdy}$; tangens anguli $POR = \frac{Qdz + Rdy}{Pdz - Rdx}$ atque tangens anguli inclinationis plani RMS ad planum fixum $RQS = \frac{\sqrt{((Pdz - Rdx)^2 + (Qdz - Rdy)^2)}}{Pdy - Qdx}$ (825).

Corollarium 4.

1106. Si virium P, Q, R duae euanescant motum corporis in plano fieri neceſſe eſt. Nam ſi P et Q euanescunt ſit $ddy = 0$, ſi P et R euanescunt ſit $azddy = dyddz$ ſeu $dz = \alpha dy$. Quae omnia indicant motum fieri in plano.

Corollarium 5.

1107. Si P, Q et R ſint proportionales ipſis x, y et z, corpus perpetuo ad punctum A trahetur, ideoque motus eius fiet in plano. Hoc idem indicant formulae, fiet enim $AO = 0$. At ob $ddy : ddz = xdy - ydx : xdz - zdx$, eſt $\frac{xddy}{xdy - ydx} = \frac{xddz}{xdz - zdx}$ et integrando $xdy - ydx = \alpha xdz - \alpha zdx$. Quare eſt $\alpha ddz = ddy$, vnde conſtat propoſitum.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 6.

1108. Si vis P euanescit erit $ddy:ddz=Q:R$, atque $R=-\frac{2vddz}{dx^2+dy^2+dz^2}$ et $Q=-\frac{2vddy}{dx^2+dy^2+dz^2}$. His valoribus loco P, Q et R in aequatione, qua dv definitur, ſubſtitutis oritur $dv=\frac{2vdyddy+2vdzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}-VV(dx^2+dy^2+dz^2)$. Vbi ſi reſiſtentia V fuerit $=\frac{v}{c}$ ponaturque $V(dx^2+dy^2+dz^2)$ ſeu $Mm=ds$, erit

$$lv=l\frac{ads^2}{dx^2}-\frac{s}{e};\ \text{ſeu}\ v=\frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dx^2}.$$

Corollarium 7.

1109. Si vis R euanescit erit $ddy:ddz=Pdy-Qdx:Pdz$, atque $P=\frac{2vdxddz}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz}$ et $Q=\frac{2v(dyddz-dzddy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz}$. Erit igitur $dv=\frac{2vdx^2ddz-2vdy^2ddz+2vdydzddy}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz}-VV(dx^2+dy^2+dz^2)$. Vbi ſi $V=\frac{v}{c}$ erit $lv=l\frac{ads^2}{dz^2}-\frac{s}{c}$ ſeu $v=\frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dz^2}$. Simili modo ſi Q euanescit prodit

$$v=\frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dy^2}.$$

Scholion.

1110. Ad has tres vires P, Q et R omnes potentiae, quaecunque excogitari queant, reduci poſſunt. Quamobrem quodcunque problema pro-

M.E.C.D. 2017

positum fuerit, duae aequationes erui possunt naturam curuae descriptae continentes. Harum vero altera erit differentialis secundi gradus altera differentialis tertii gradus, si quidem valor ipsius v inuentus ex aequatione $\frac{2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2} = Pdy - Qdx$ differentietur; et differentiale loco dv in aequatione $dv = -Pdx - Qdy - Rdz - V\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$ substituatur.

PROPOSITIO 132.

Problema.

Tabula XIV Fig. 2.

1111. *In medio vniformi, quod resistit in simplici ratione celeritatum, trahatur corpus perpetuo normaliter ad rectam* AP; *definire curuam quam corpus vtcunque proiectum describet.*

Solutio.

Ponantur vt hactenus $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, celeritas in $M = \sqrt{v}$, exponens resistentiae $= c$, vis qua corpus in M iuxta MP trahitur $= S$. His positis erit resistentia $V = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$, $P = o$, $Q = \frac{Sy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et $R = \frac{Sz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$, vnde fit $Q:R = y:z$. Quamobrem habebitur $ddy:ddz = y:z$, atque $y\,ddz - z\,ddy = o$. Cuius aequationis integralis est $y\,dz - z\,dy = a\,dx$. Porro quoque ob $P = o$ haec habebitur aequatio $dv = \frac{2vdds}{ds} - V\,ds = \frac{2vdds}{ds} - \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$ (1108), posito $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Cuius integralis est $2\sqrt{c}v = \frac{ds}{dx}(b-x)$, seu $v = \frac{ds^2(b-x)^2}{4cdx^2}$. Hoc valore substituto prodibit $\frac{dy(b-x)^2}{2cdx} = -\frac{S\,y\,dx}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. Ponatur $z = py$; habebuntur se-

M.E.C.D. 2017

sequentes duae aequationes, ex quibus natura curuae descriptae debet determinari, $y^2dp = adx$ et $ddy\,(b-x)^2 = -\frac{2cSdx^2}{\sqrt{(1+pp)}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

1112. Cum sit $2\sqrt{cv} = \frac{ds}{dx}(b-x)$ erit elementum temporis $\int \frac{d\,s}{\sqrt{v}} = \frac{2dx\sqrt{c}}{b-x}$. Integrum ergo tempus, quo corpus motu horizontali secundum AP est promotum erit $= 2\sqrt{c}l\frac{b}{b-x}$. Motus igitur horizontalis conuenit cum motu corporis in eodem medio resistente per rectam AP a nulla potentia sollicitati, celeritate initiali in A debita altitudini $bb:4c$.

Corollarium 2.

1113. Neque vero haec temporis proprietas tantum locum habet, si corpus secundum MP trahitur; seu si fuerit $Q:R = y:z$, sed semper valet si modo est $P = o$. Sequitur enim ex § 1108, quo non nisi $P = o$ ponebatur.

Corollarium 3.

1114. Motus igitur progressiuus corporis secundum AP est retardatus, et non vltra datum terminum qui est $x = b$, fieri potest. Tempus autem est infinite magnum, quo corpus ad hunc terminum pertingere potest.

Exem-

M.E.C.D. 2017

Exemplum.

1115. Ponamus vim, qua corpus ad rectam AP attrahitur esse ipsis distantiis MP proportionalem seu $S = \frac{\sqrt{(y^2+z^2)}}{f} = \frac{y\sqrt{(1+pp)}}{f}$. Ad curuam igitur determinandam habebuntur hae aequationes $f\,ddy(b-x)^2 = -2cy\,dx^2$, et $y^2\,dp = a\,dx$, in illa ponatur $y = e^{\int u\,dx}$, fietque $du + u^2\,dx = -\frac{2c\,dx}{f(b-x)^2}$. Quae aequatio separabilis fit ponendo $u = \frac{q}{b-x}$; prodit enim $\frac{f\,dq}{2c+fq+fq^2} = -\frac{dx}{b-x}$. Dabitur igitur q et propterea etiam u in x. Consequenter etiam y per x cognoscetur, ex quo habebitur proiectio curuae descriptae in plano APQ. Deinde ex dato y per x, dabitur quoque p ob $dp = \frac{a\,dx}{y^2}$ per x, et propterea simul z per x. Quocirca tota curua a corpore descripta poterit construi.

Corollarium 4.

1116. Si b euanescit, simul quoque motus progressiuus corporis secundum AP enanescit, et hanc ob rem corpus in plano in A ad AP normali mouebitur attractum ad A in ratione distantiarum. Curuam autem quam hoc casu corpus describit quoque construere licuit §. 1027 et seqq.

M.E.C.D. 2017

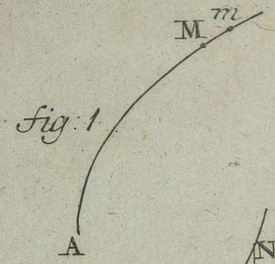


fig: 1

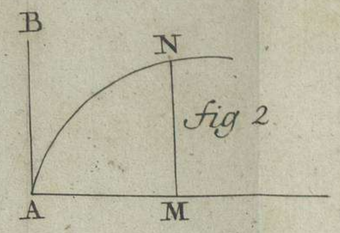


fig 2

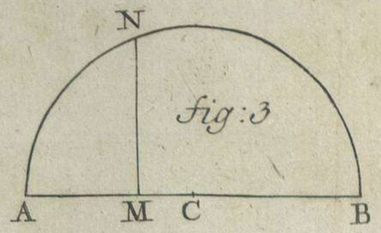


fig: 3

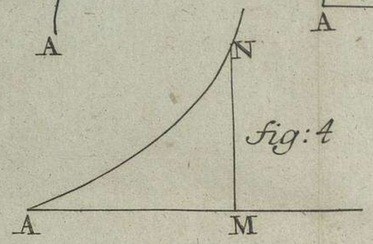


fig: 4

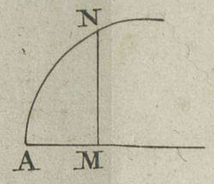
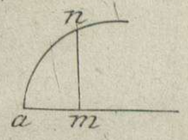


fig: 5



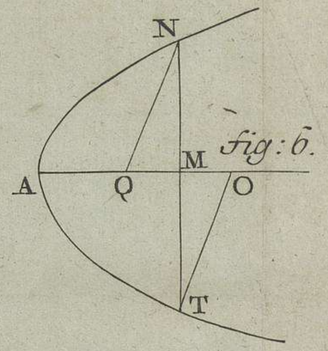


fig: 6.

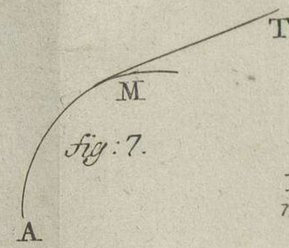


fig: 7.

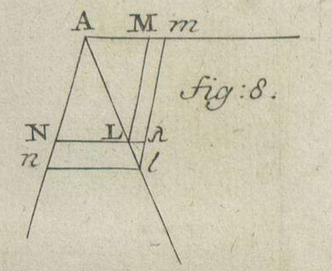


fig: 8.

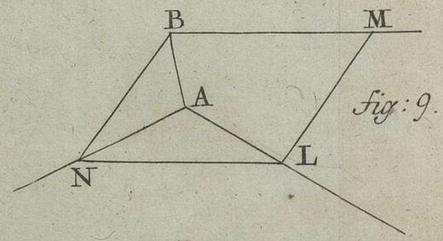


fig: 9.

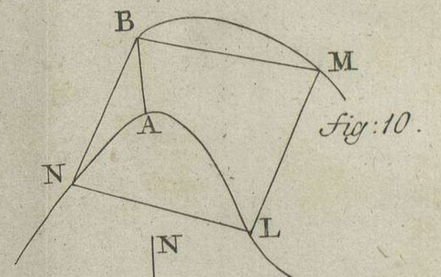


fig: 10.

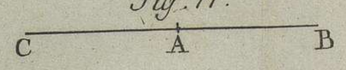


fig: 11.

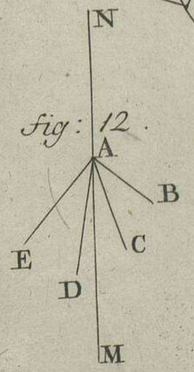


fig: 12.

Tom: I. Tab: I.

M.E.C.D. 2017

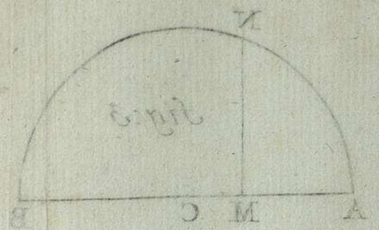


Fig. 3.

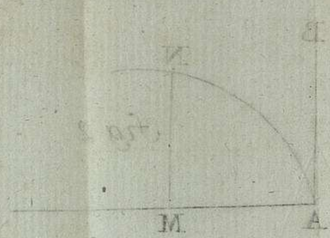


Fig. 1.

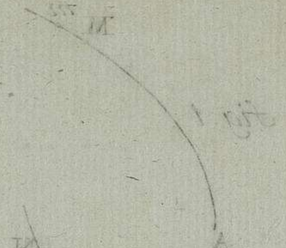


Fig. 4.

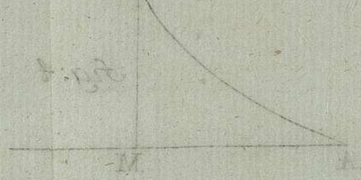


Fig. 2.

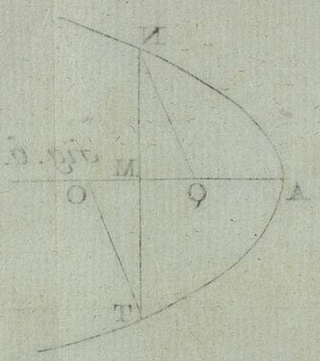


Fig. 7.

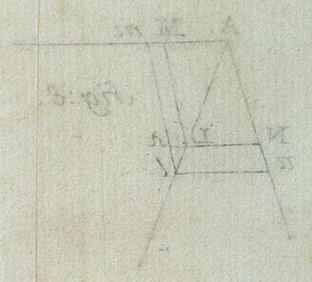


Fig. 8.

Fig. 6.

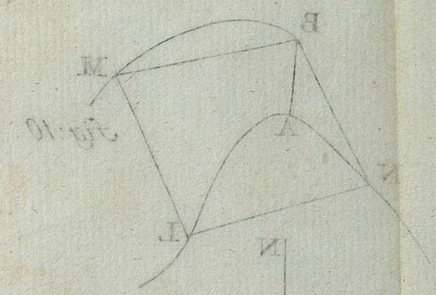


Fig. 10.

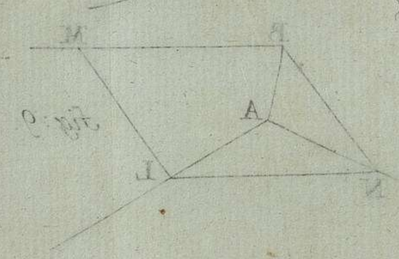


Fig. 9.

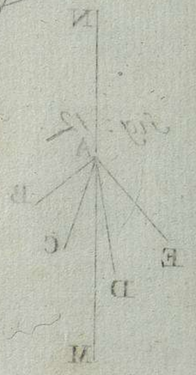


Fig. 12.

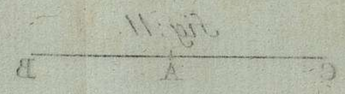


Fig. 11.

M.E.C.D. 2017

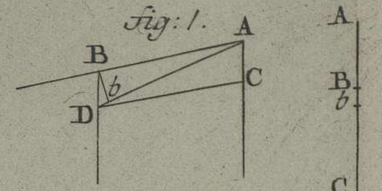


fig: 1.

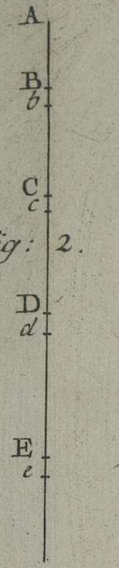


fig: 2.

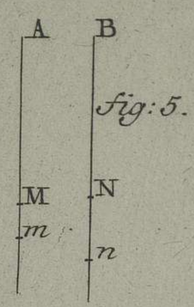


fig: 5.

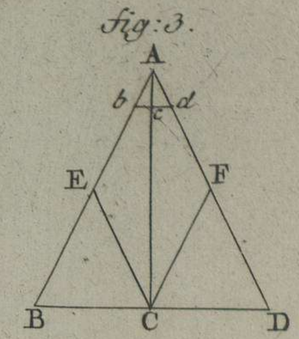


fig: 3.

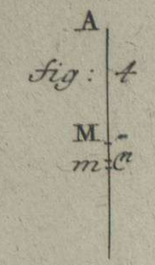


fig: 4.

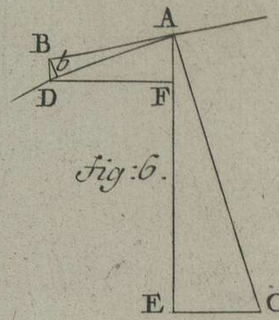


fig: 6.

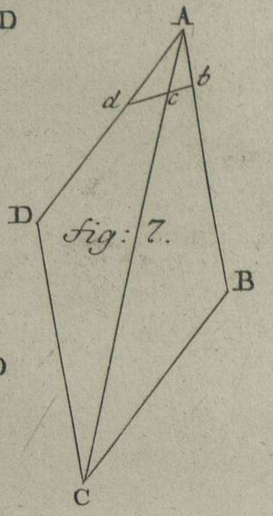


fig: 7.

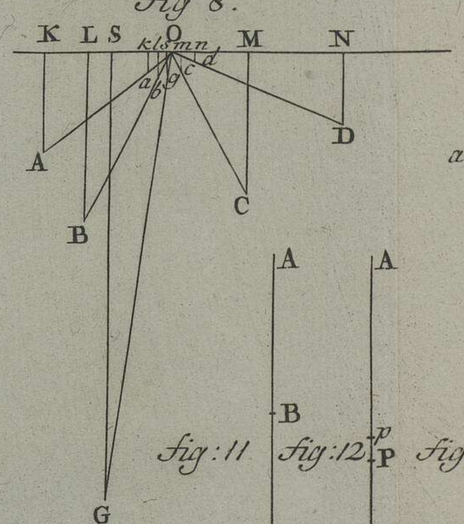


Fig 8.

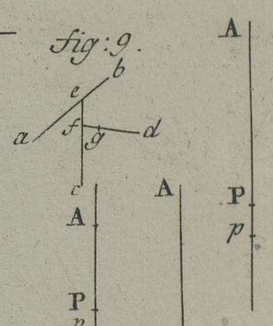


fig: 9.

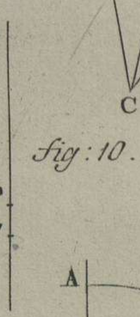


fig: 10.

fig: 11

fig: 12

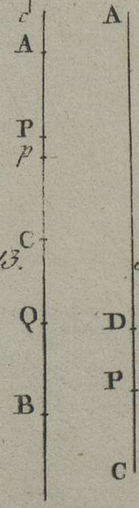


fig: 13.

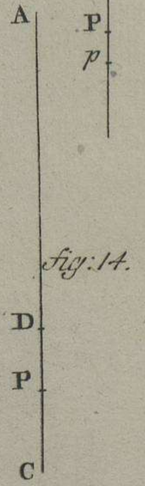


fig: 14.

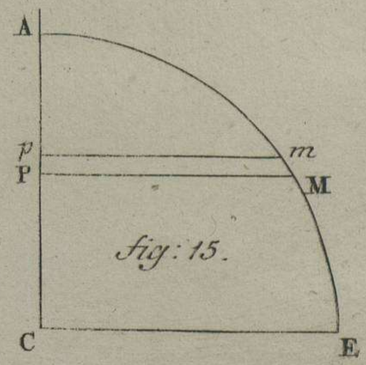
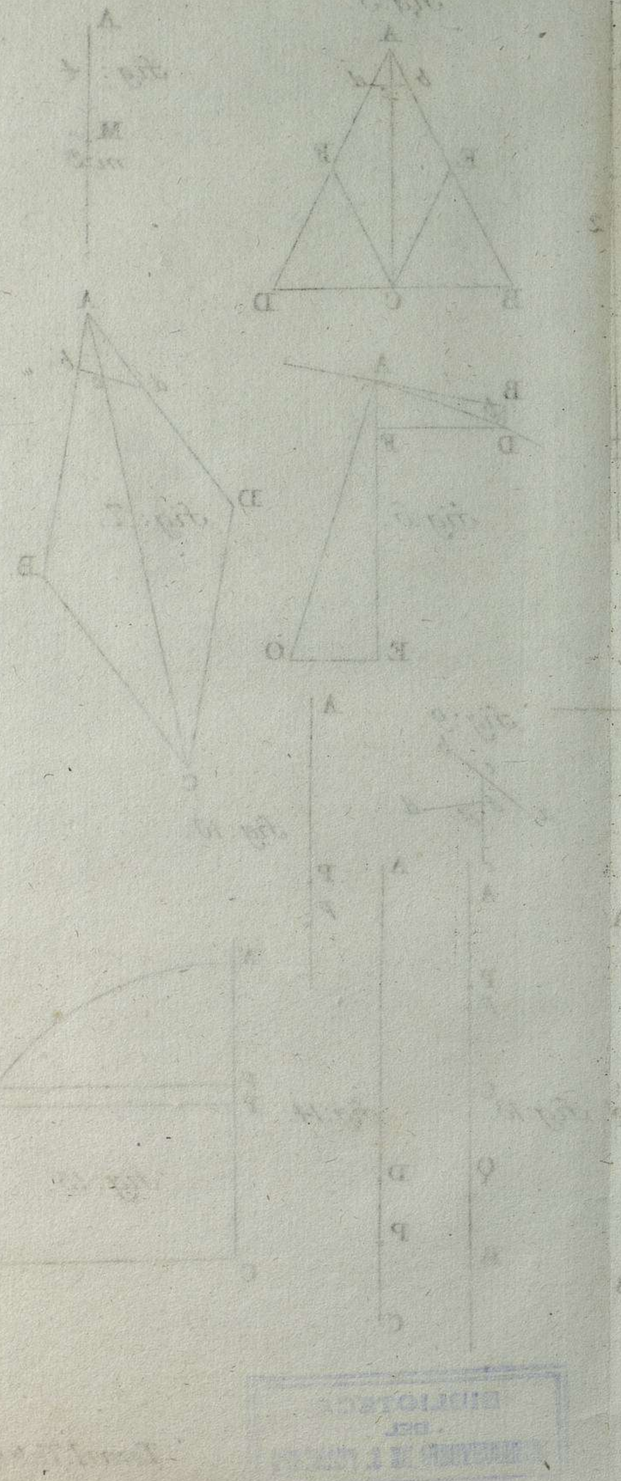


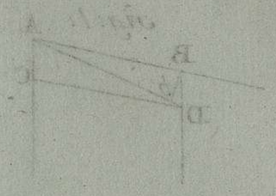
fig: 15.

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

Tom: I. Tab: II.

M.E.C.D. 2017







M.E.C.D. 2017

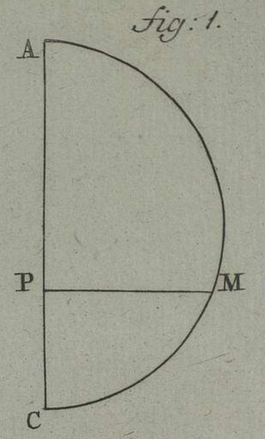


fig: 1.

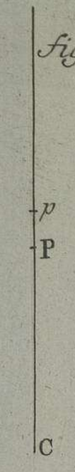


fig: 2.

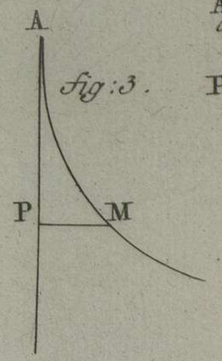


fig: 3.

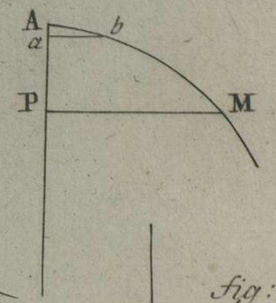


fig: 4.

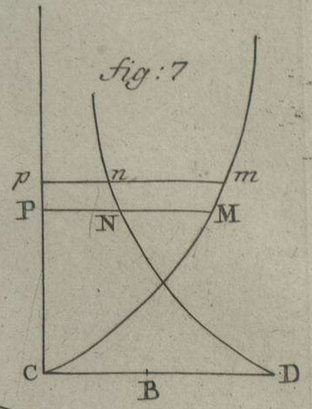


fig: 7

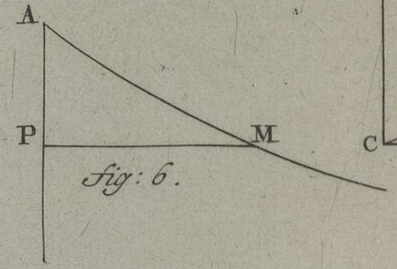


fig: 6.

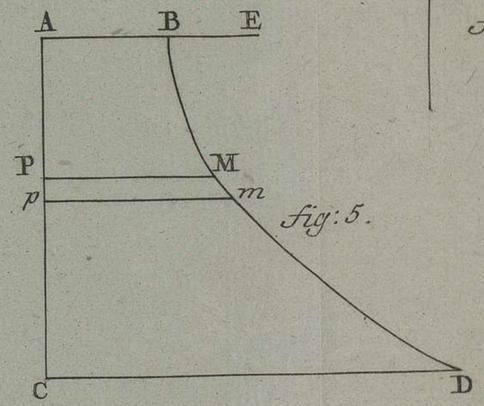


fig: 5.

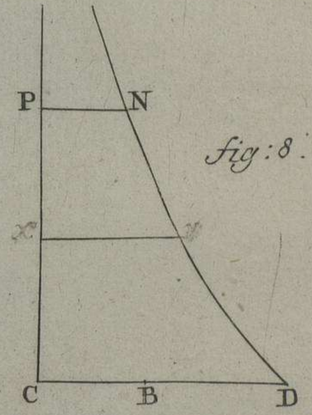


fig: 8.

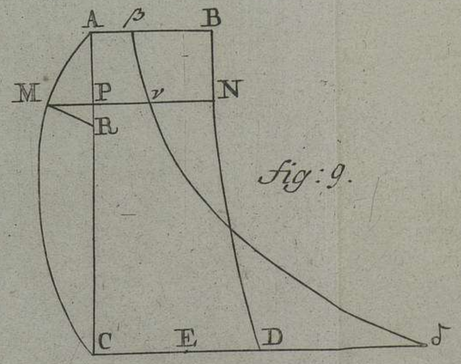
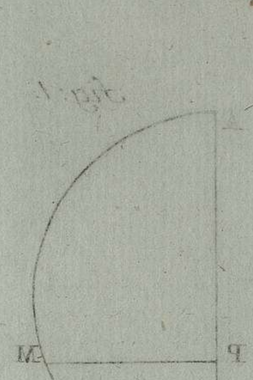
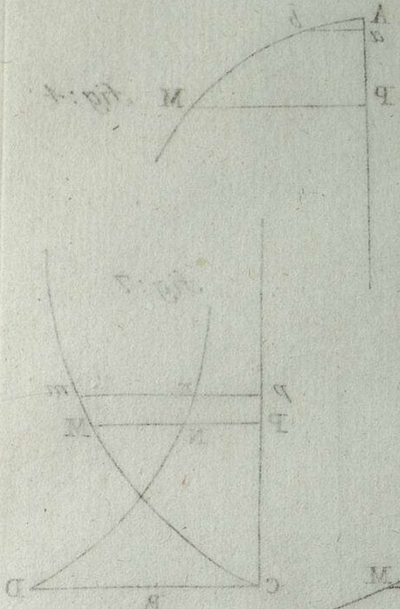
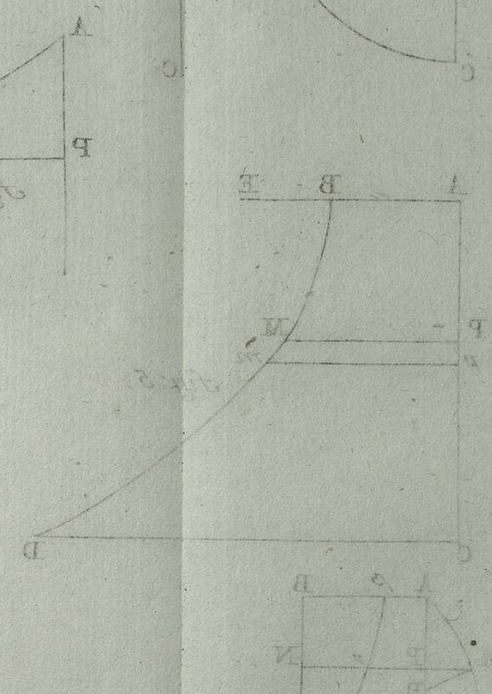
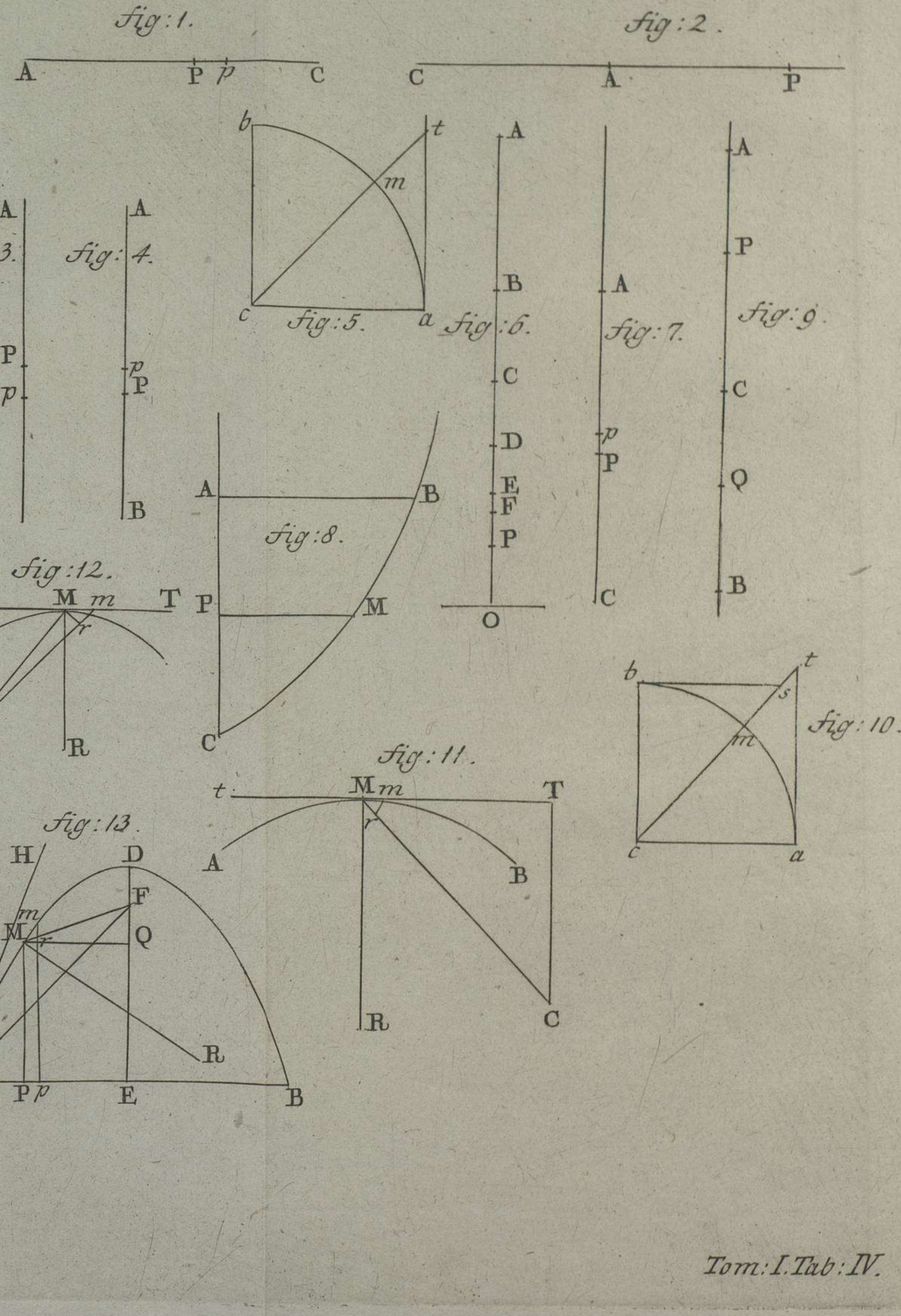


fig: 9.

Tom: I. Tab: III.

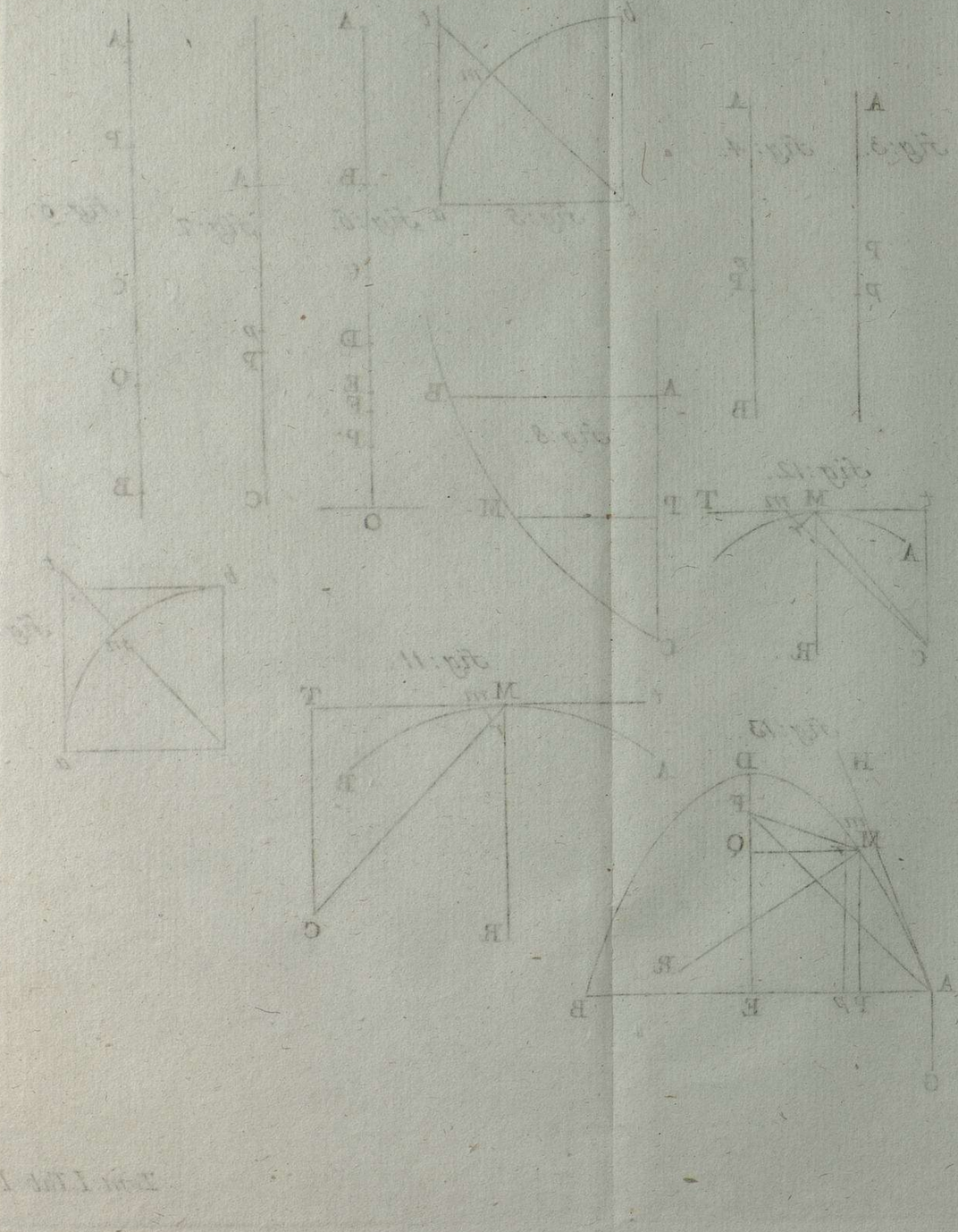
M.E.C.D. 2017



Tom: I. Tab: IV.

M.E.C.D. 2017



M.E.C.D. 2017

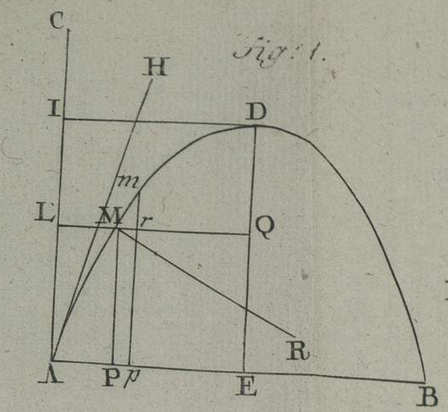


Fig: 1.

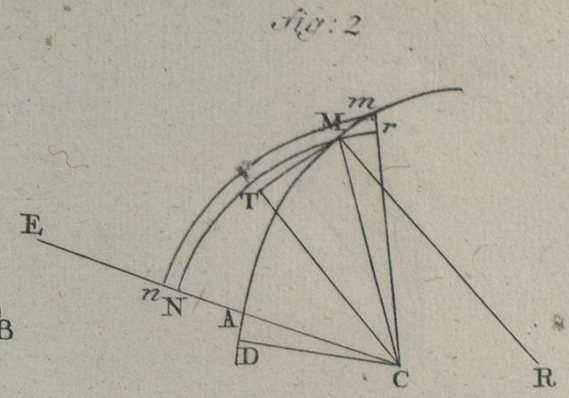


Fig: 2

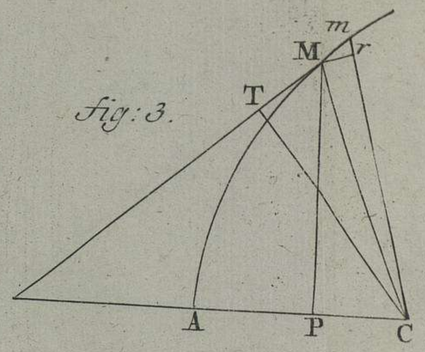


Fig: 3.

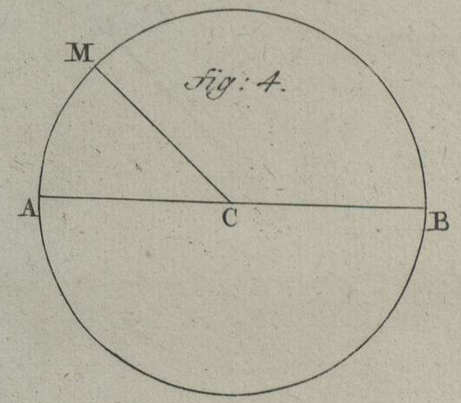


Fig: 4.

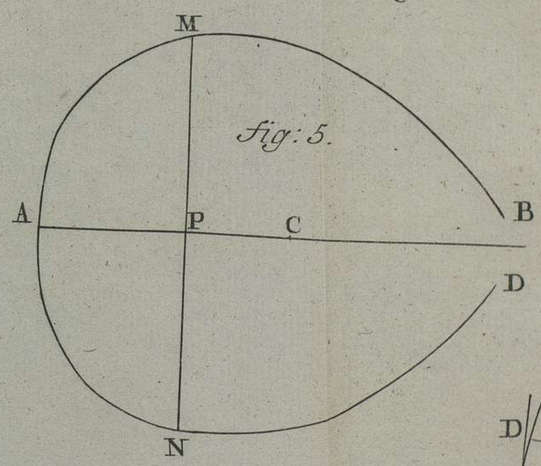


Fig: 5.

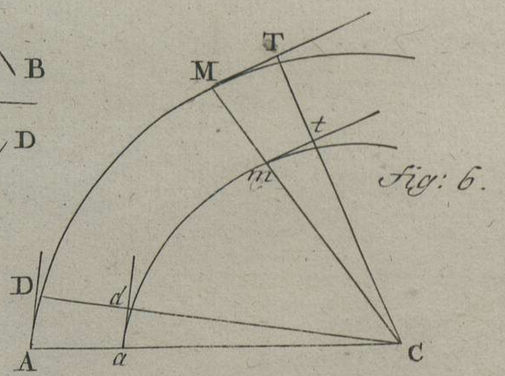
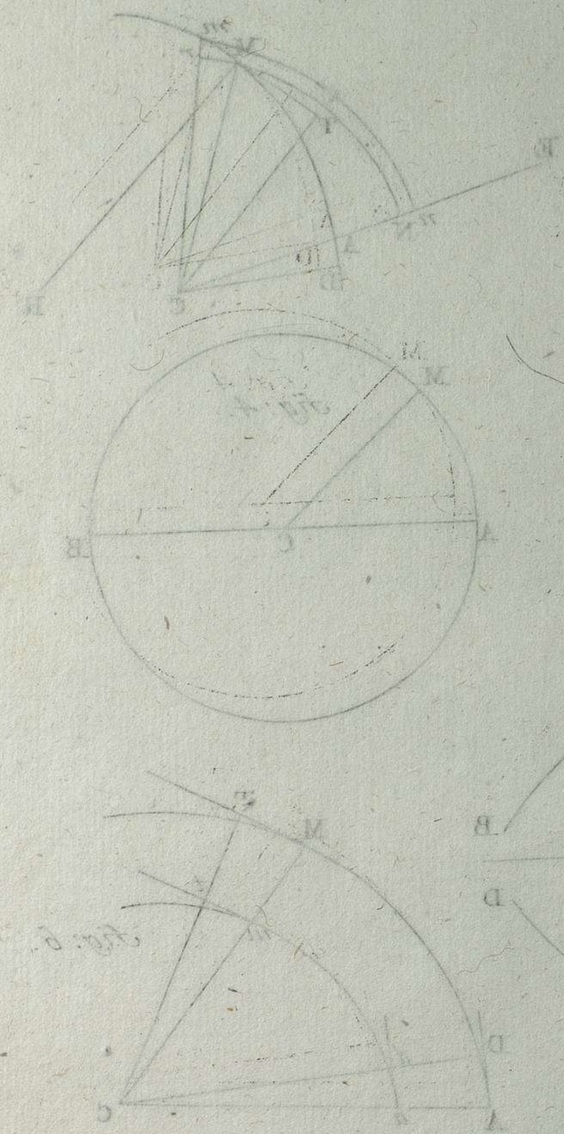
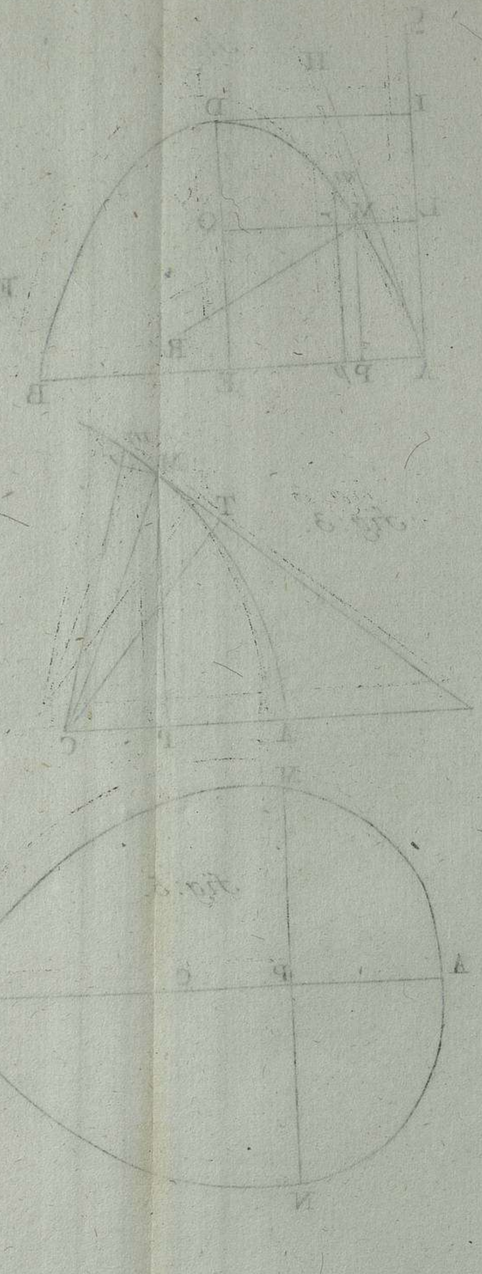


Fig: 6.

Tom: I. Tab: V.

M.E.C.D. 2017





M.E.C.D. 2017

fig: 1.

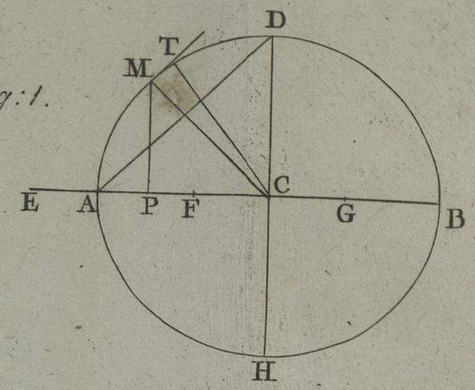
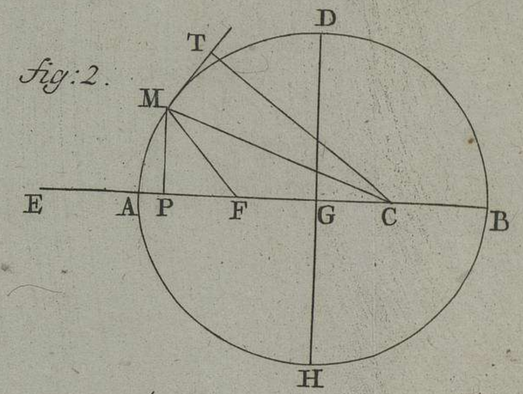


fig: 2.



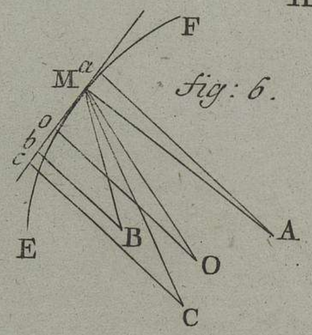


fig: 6.

fig: 3.

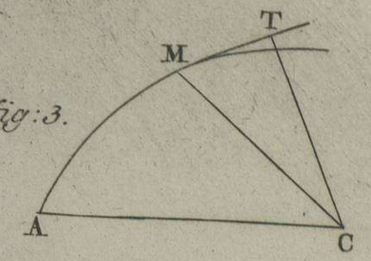


fig: 4.

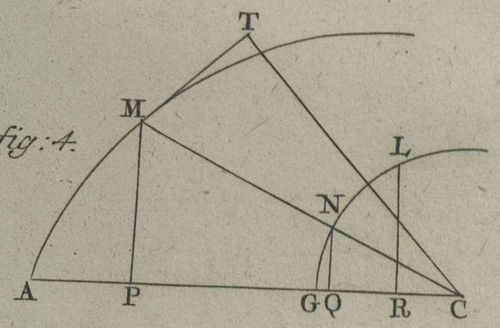
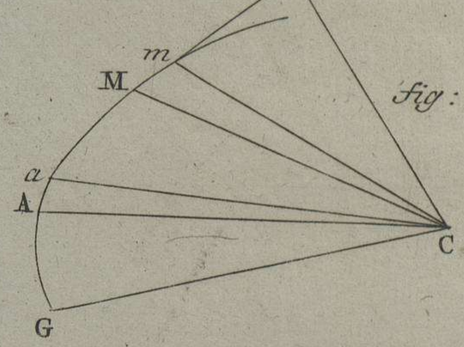
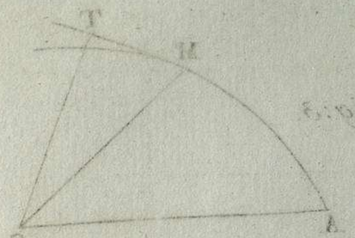


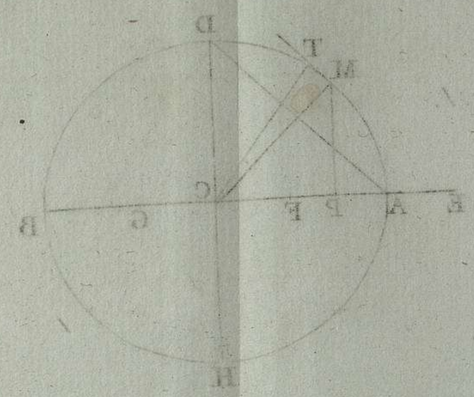
fig: 5.

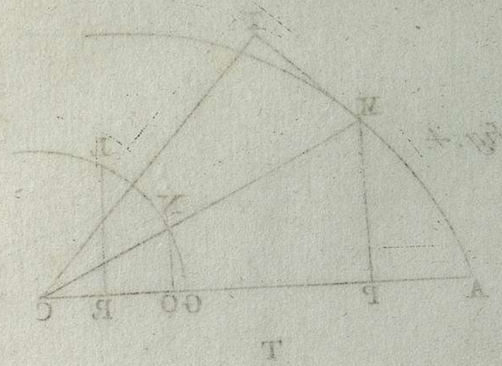


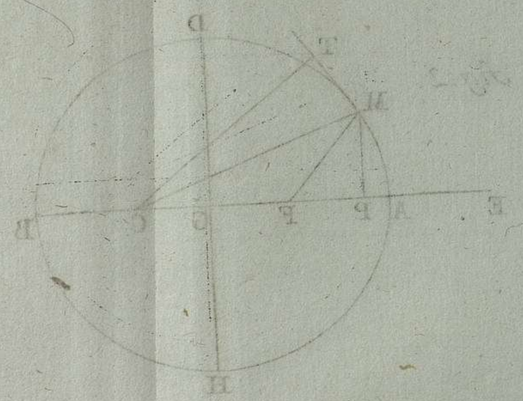
BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

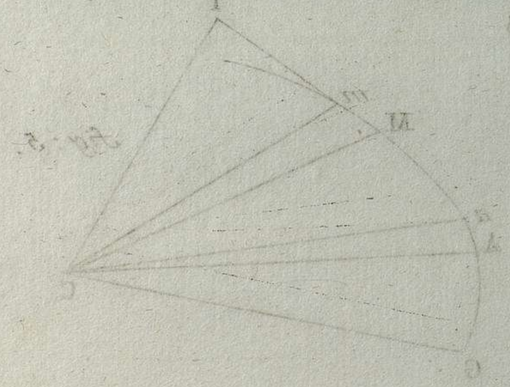
M.E.C.D. 2017

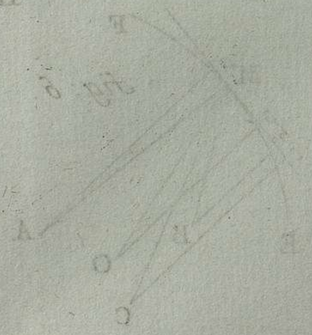












M.E.C.D. 2017

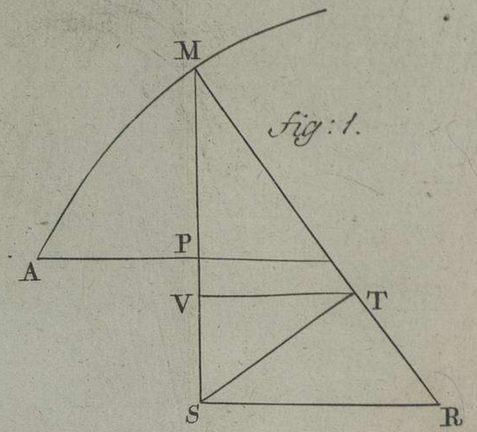


fig: 1.

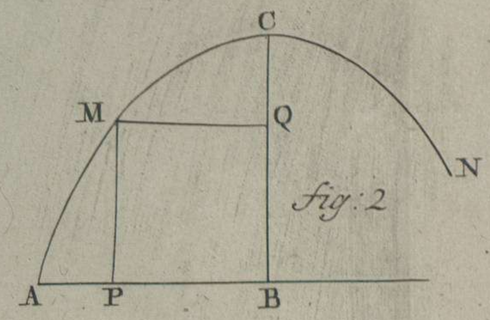


fig: 2

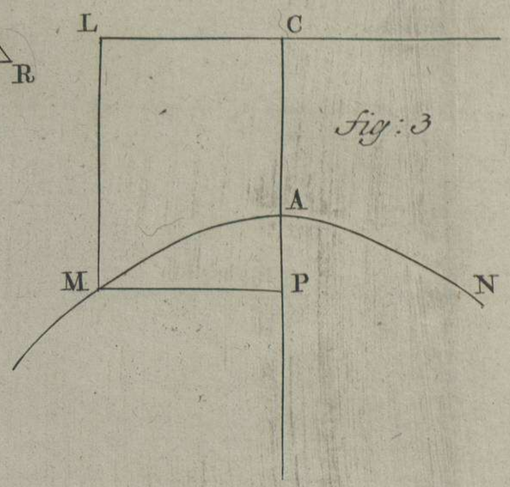


fig: 3

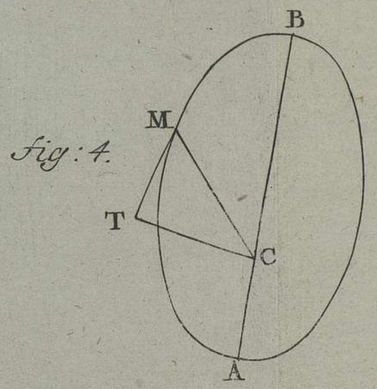


fig: 4.

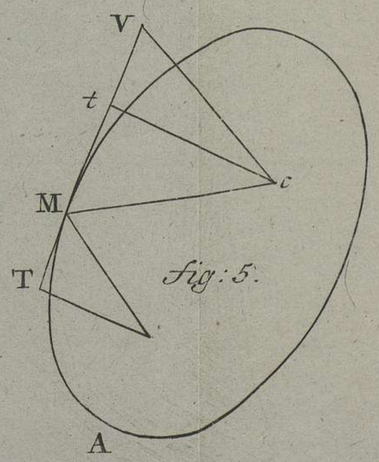


fig: 5.

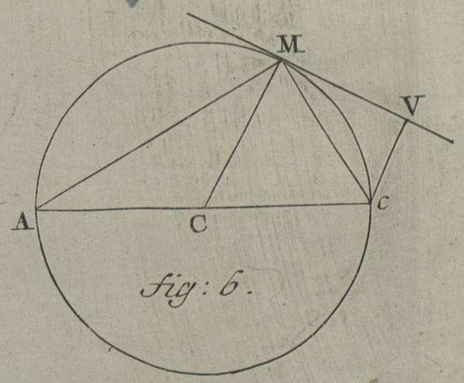
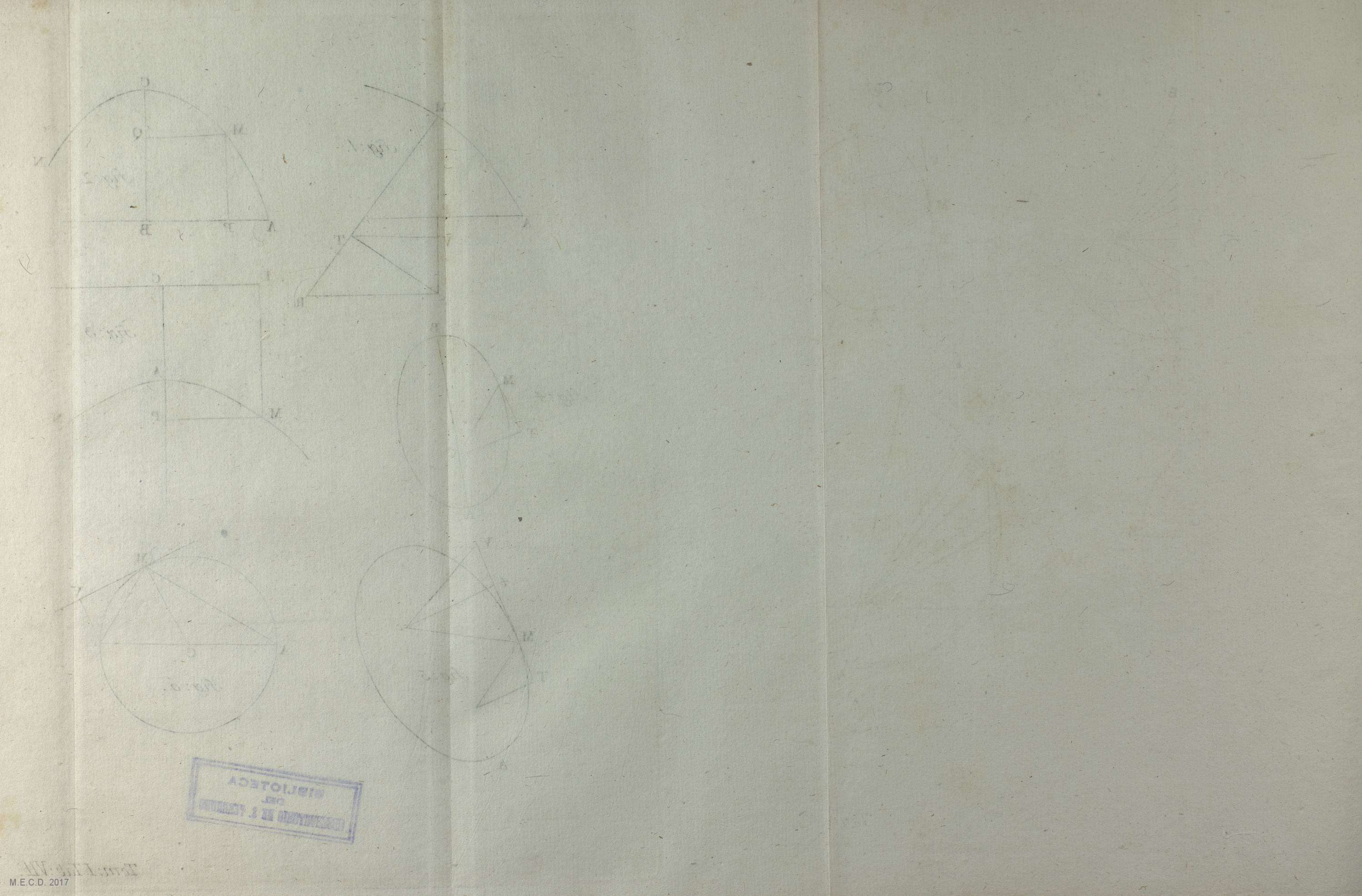


fig: 6.

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

Tom: I Tab: VII.

M.E.C.D. 2017



M.E.C.D. 2017

fig: 1.

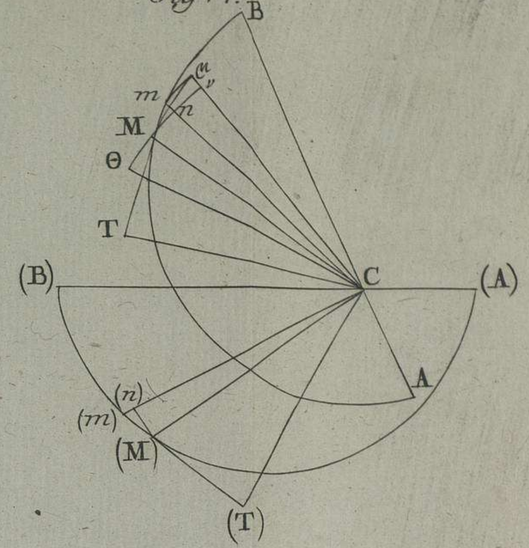


fig: 2.

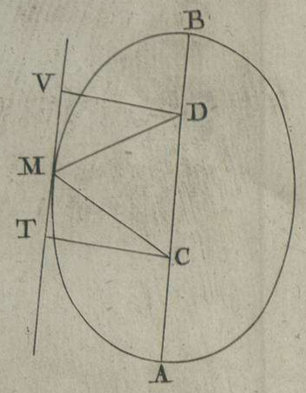


fig: 3.

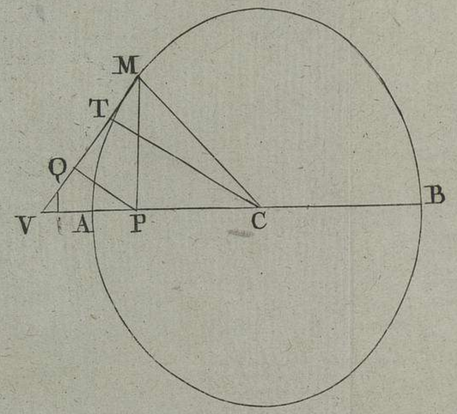
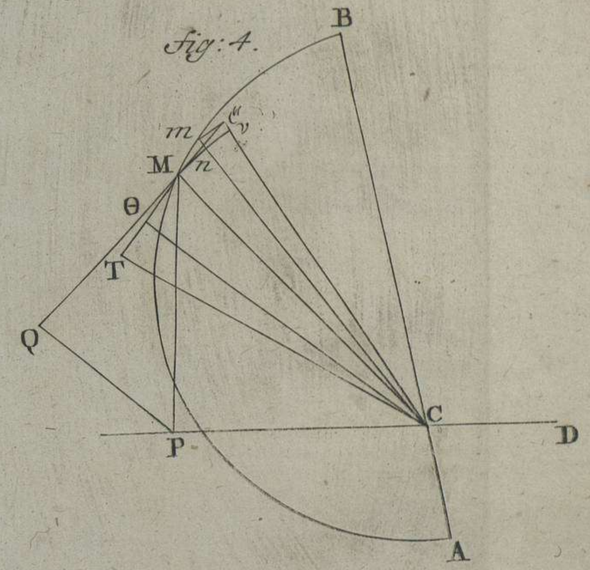


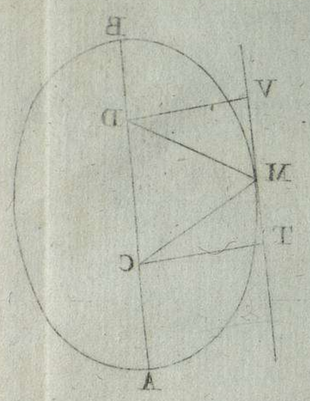
fig: 4.

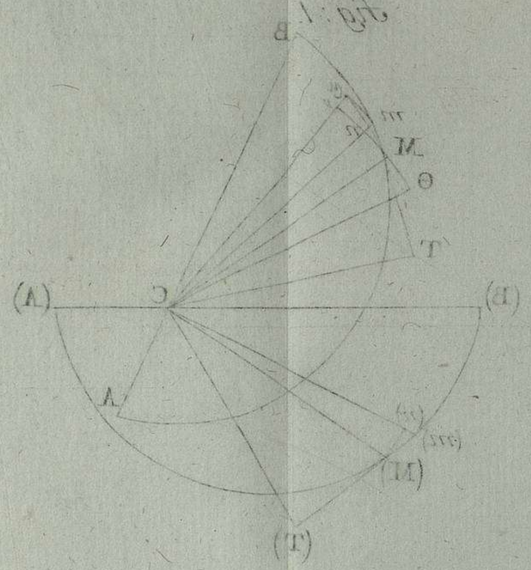


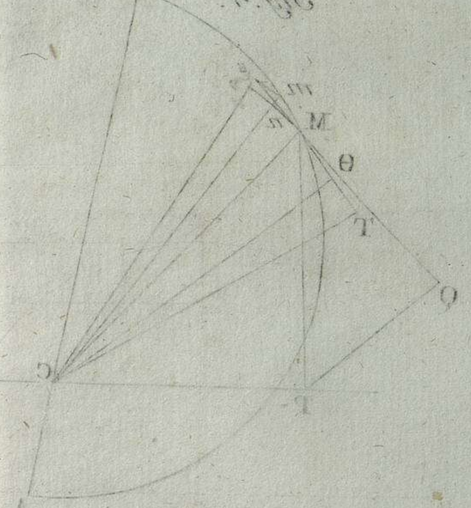
BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

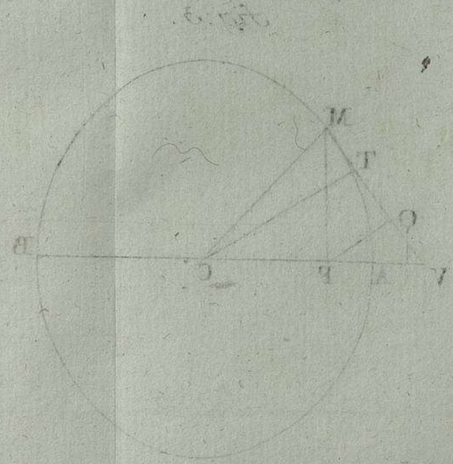
Tom: I. Tab: VIII.

M.E.C.D. 2017









BIBLIOTECA
DEL
CENTRO DE E. AVANZADOS

M.E.C.D. 2017

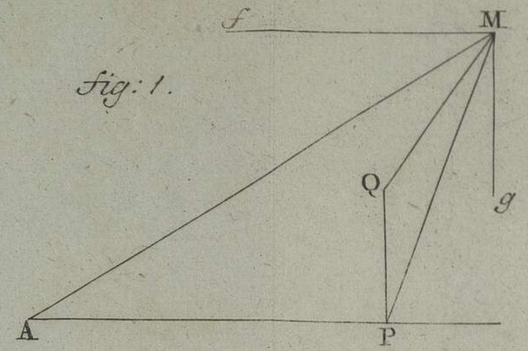


fig: 1.

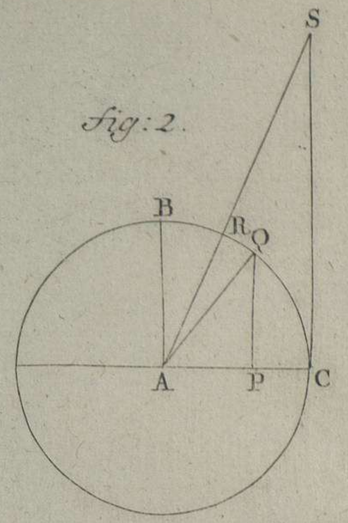


fig: 2.

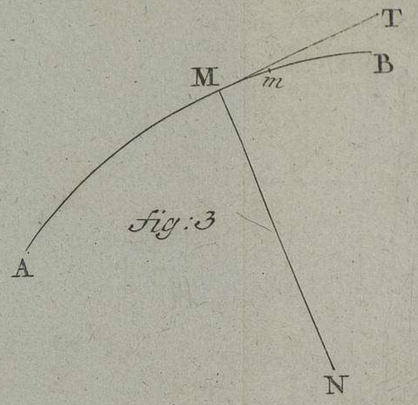


fig: 3

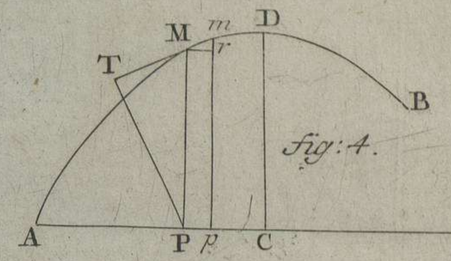


fig: 4.

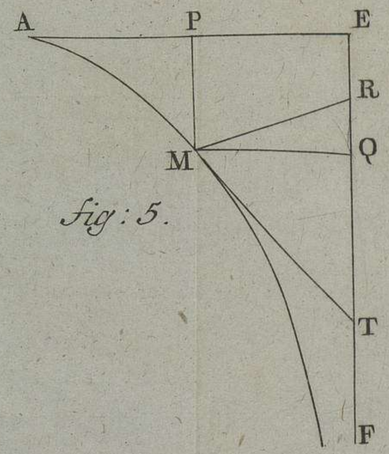


fig: 5.

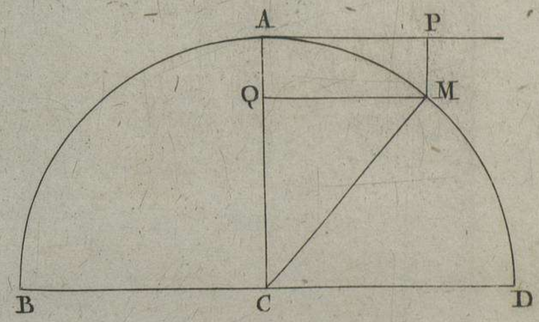


fig: 6.

Tom: I. Tab: XI.

M.E.C.D. 2017

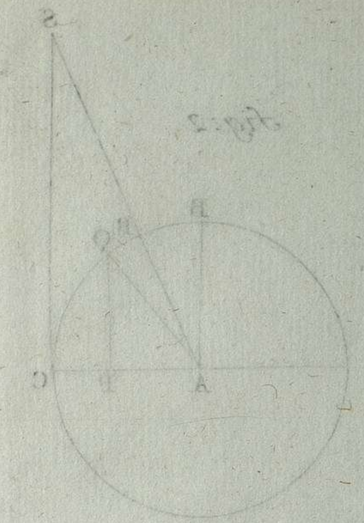


Fig. 2.

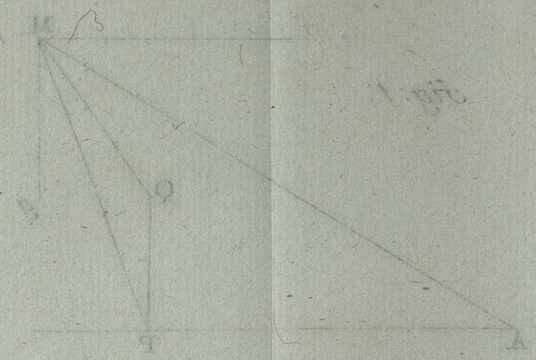


Fig. 1.

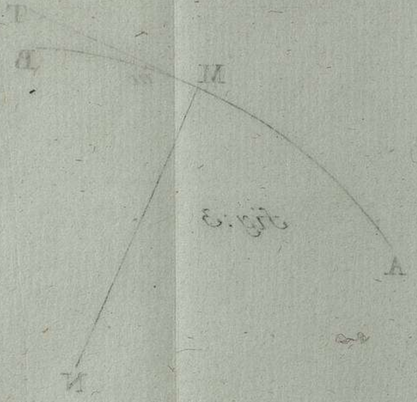
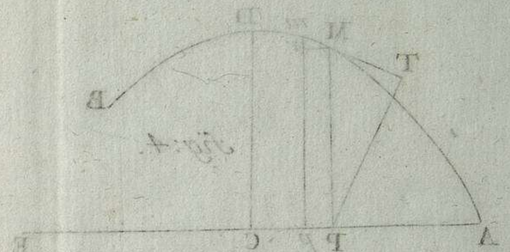


Fig. 3.



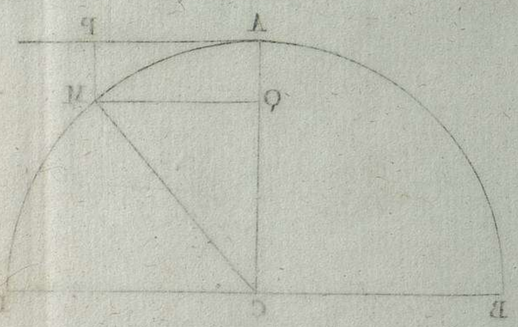


Fig. 6.

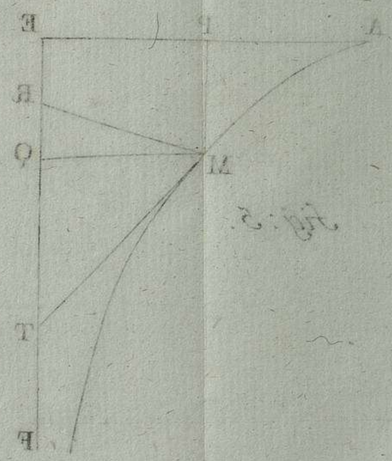


Fig. 5.

Pm. I. Tab. XI.

M.E.C.D. 2017

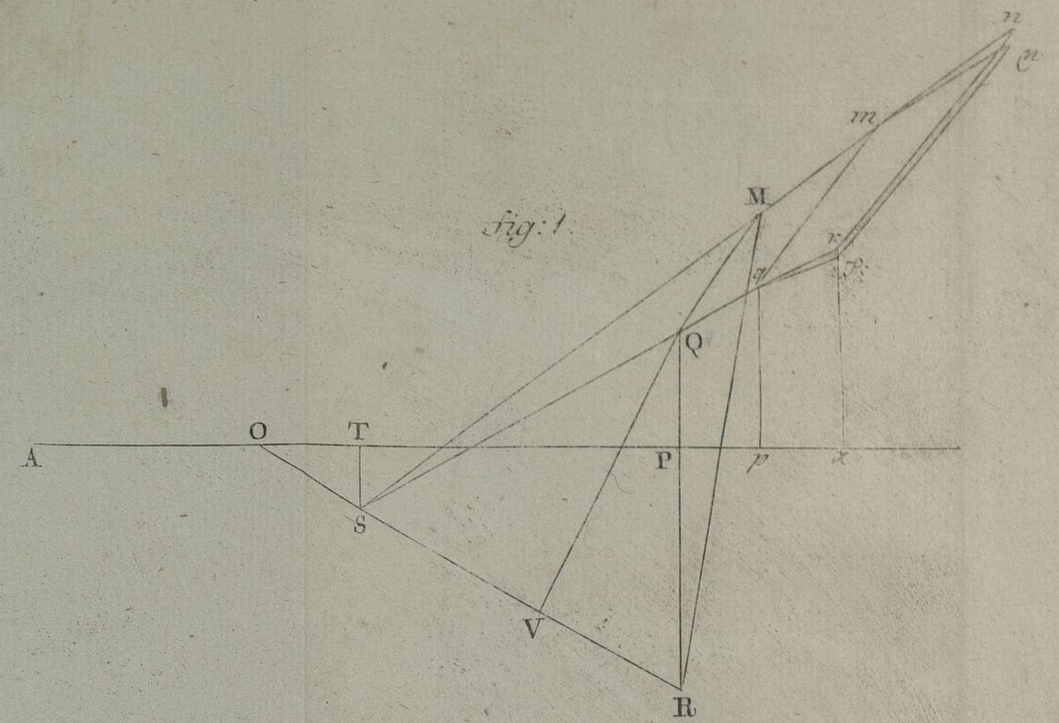


fig: 1.

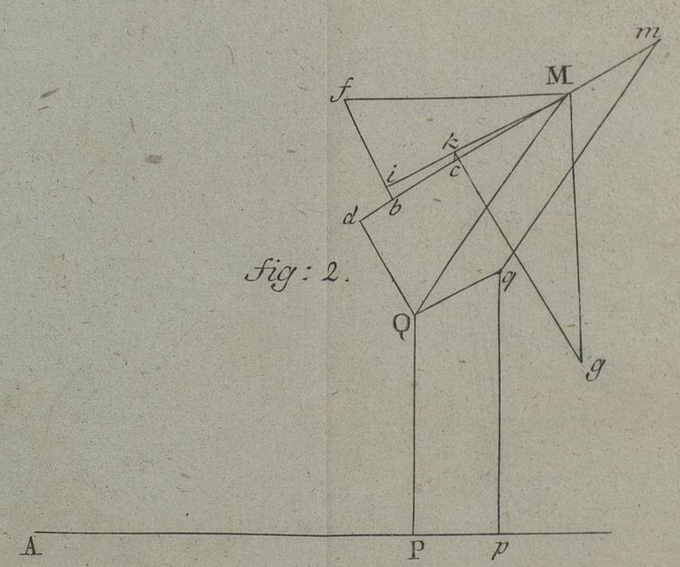


fig: 2.

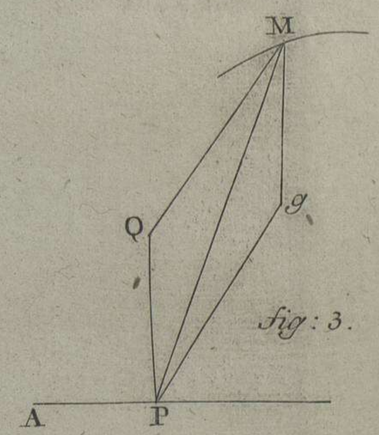
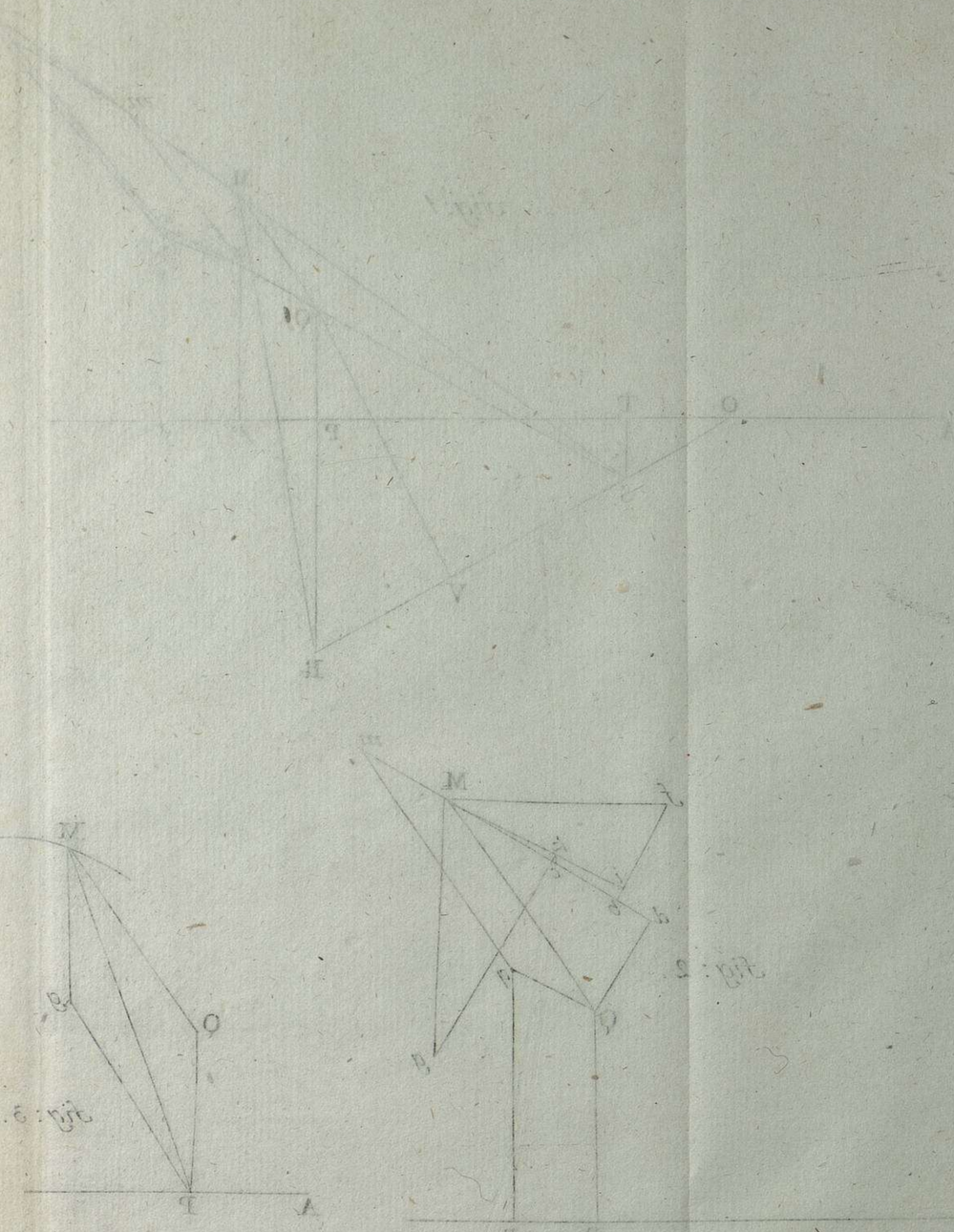


fig: 3.

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

Tom: I. Tab: X.

M.E.C.D. 2017



M.E.C.D. 2017

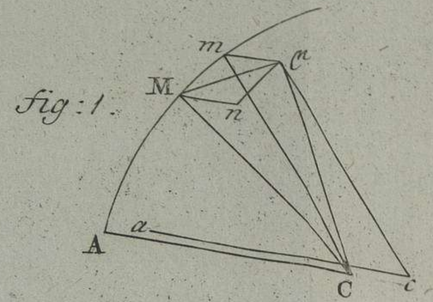


fig: 1.

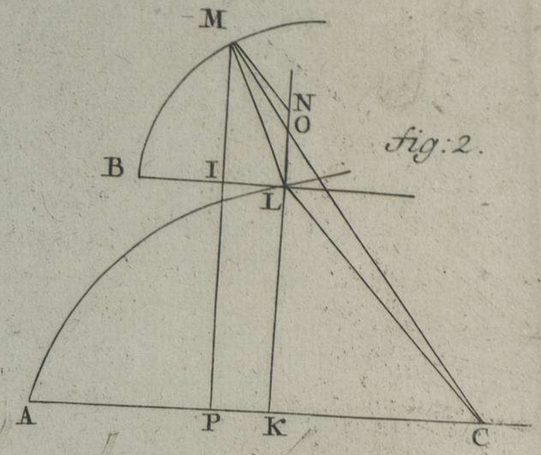


fig: 2.

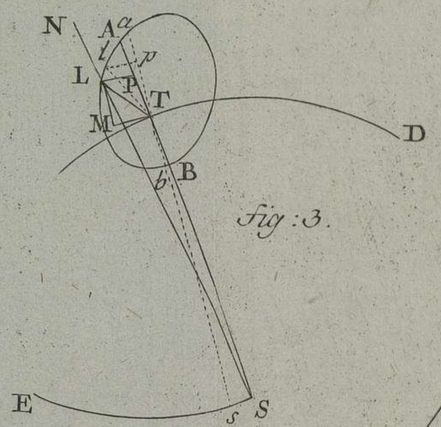


fig: 3.

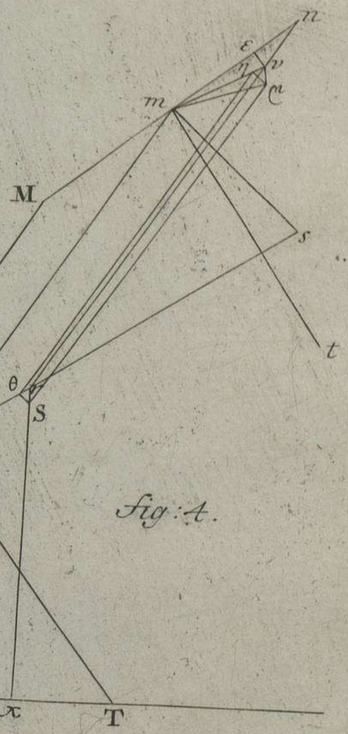
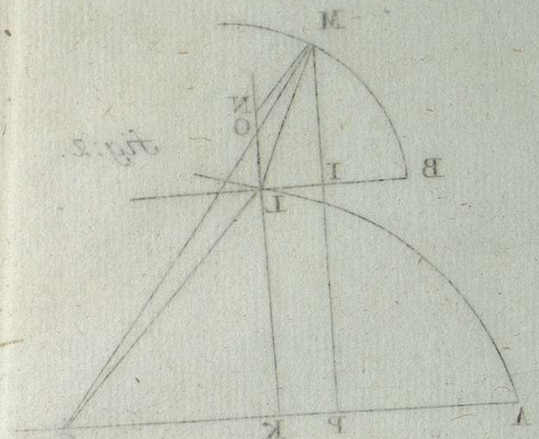
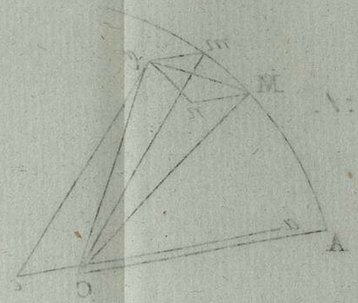


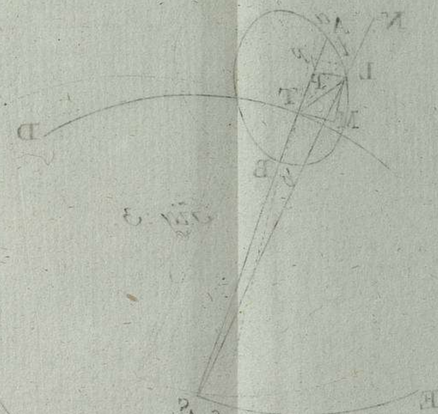
fig: 4.

Tom: I. Tab: IX.

M.E.C.D. 2017







M.E.C.D. 2017

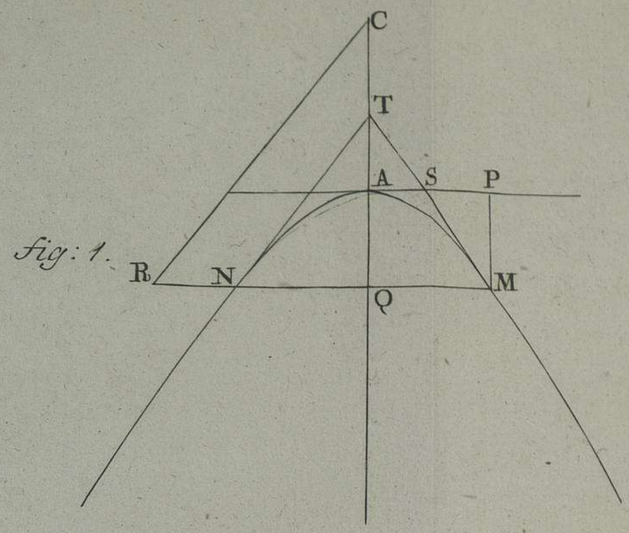


fig: 1.

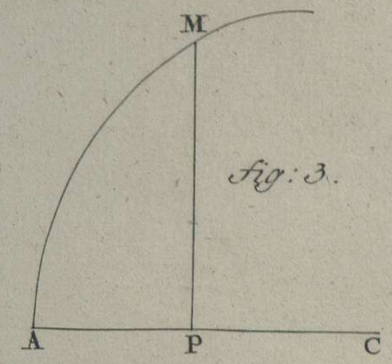


fig: 3.

fig: 4.

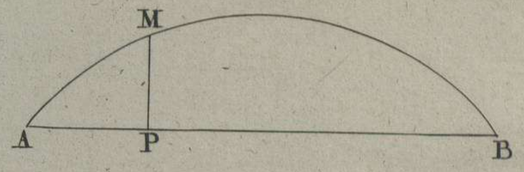


fig: 2.

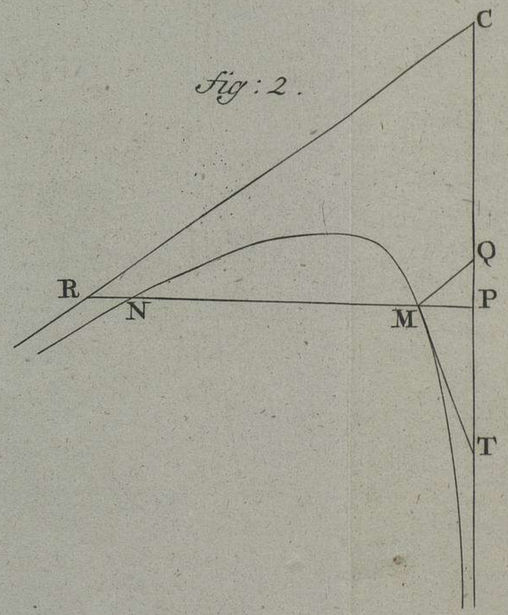
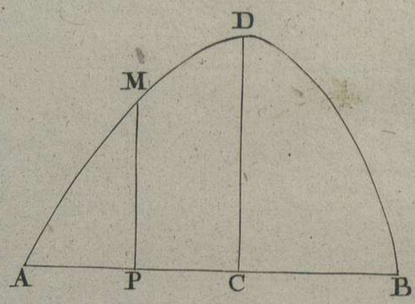


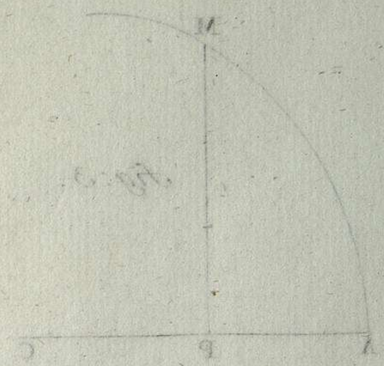
fig: 5.

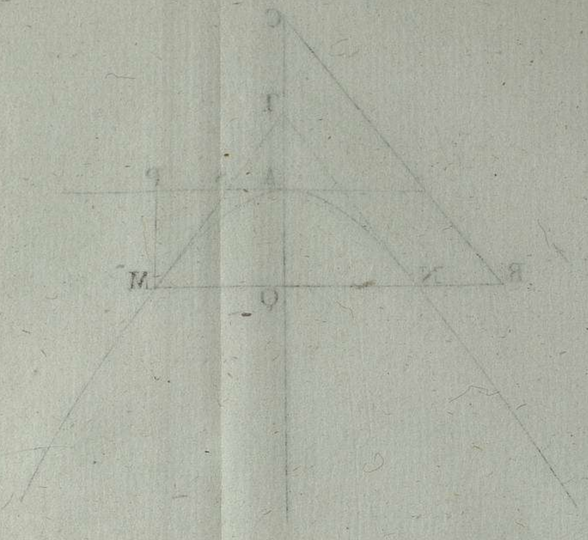


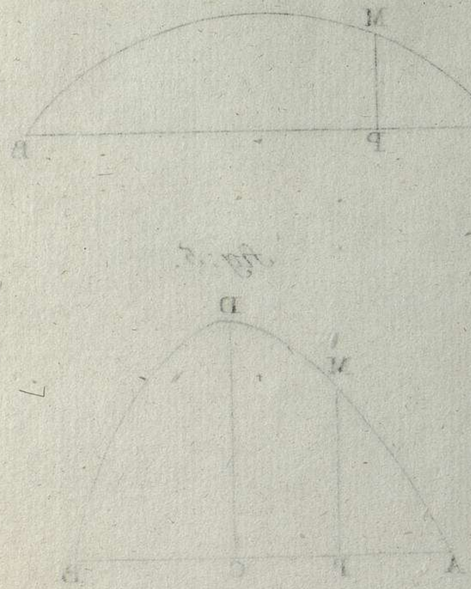
BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

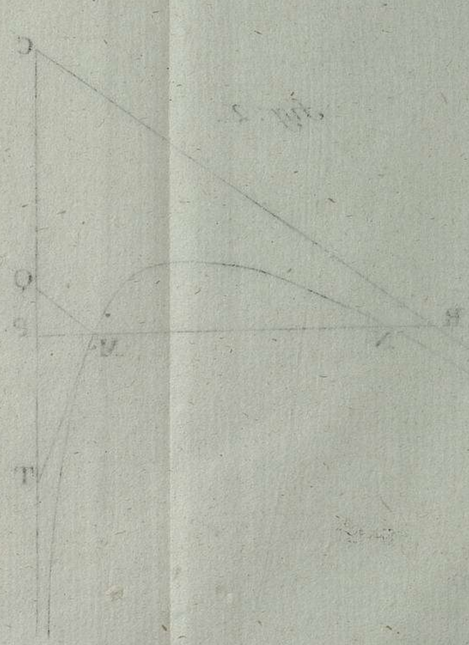
Tom: I. Tab: XII.

M.E.C.D. 2017









M.E.C.D. 2017

fig: 1.

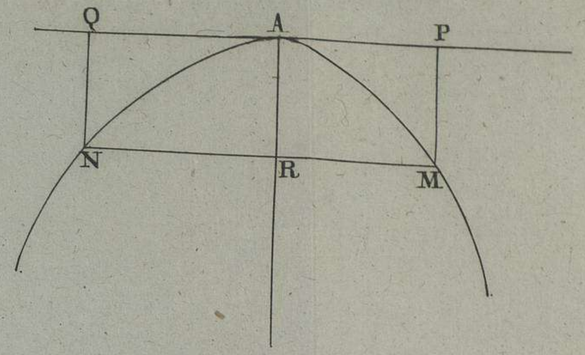


fig: 2.

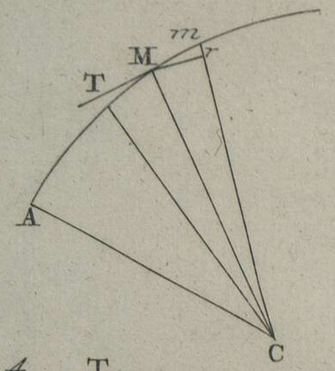


fig: 3.

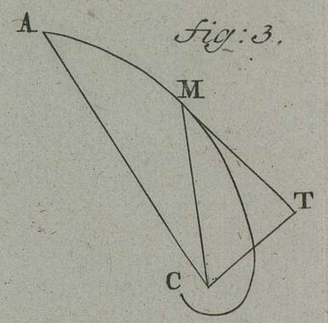


fig: 4.

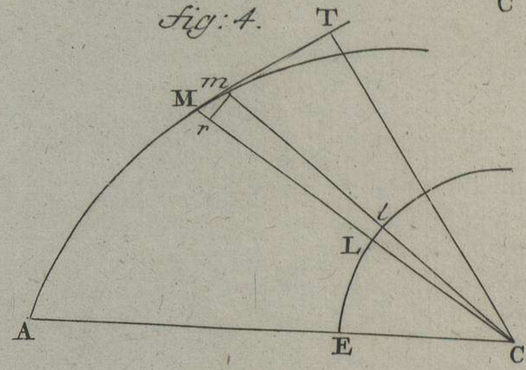


fig: 5.

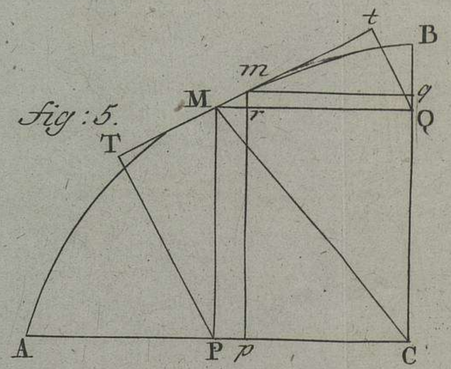
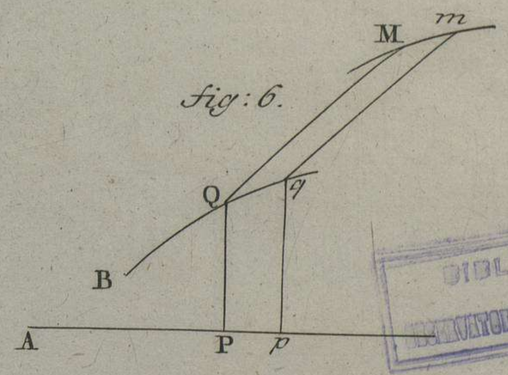


fig: 6.



BIBLIOTECA
DEL
LABORATORIO DE E. FÍSICA

Tom: I. Tab: XIII.

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

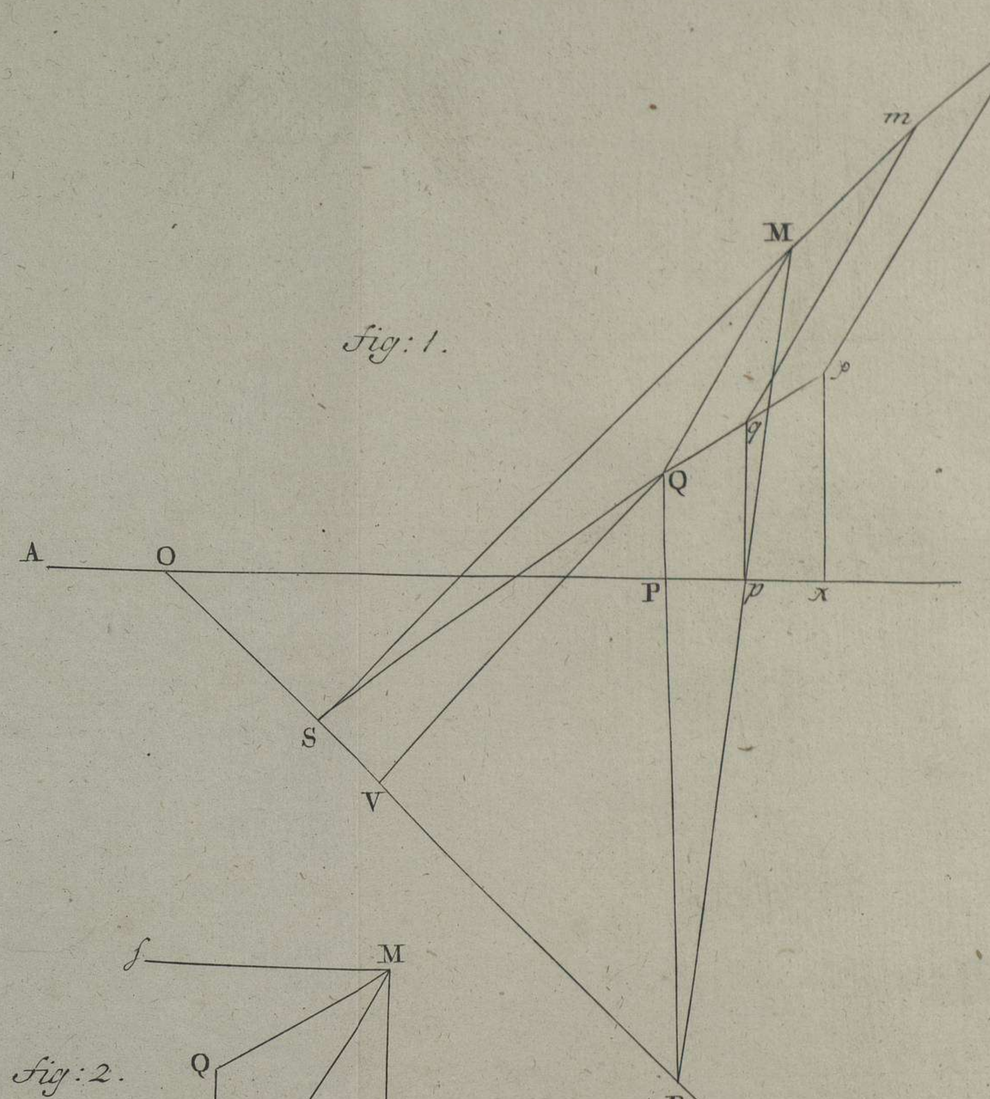


Fig: 1.

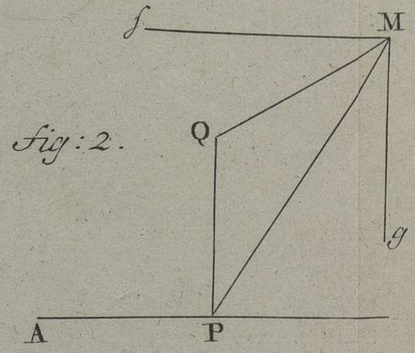
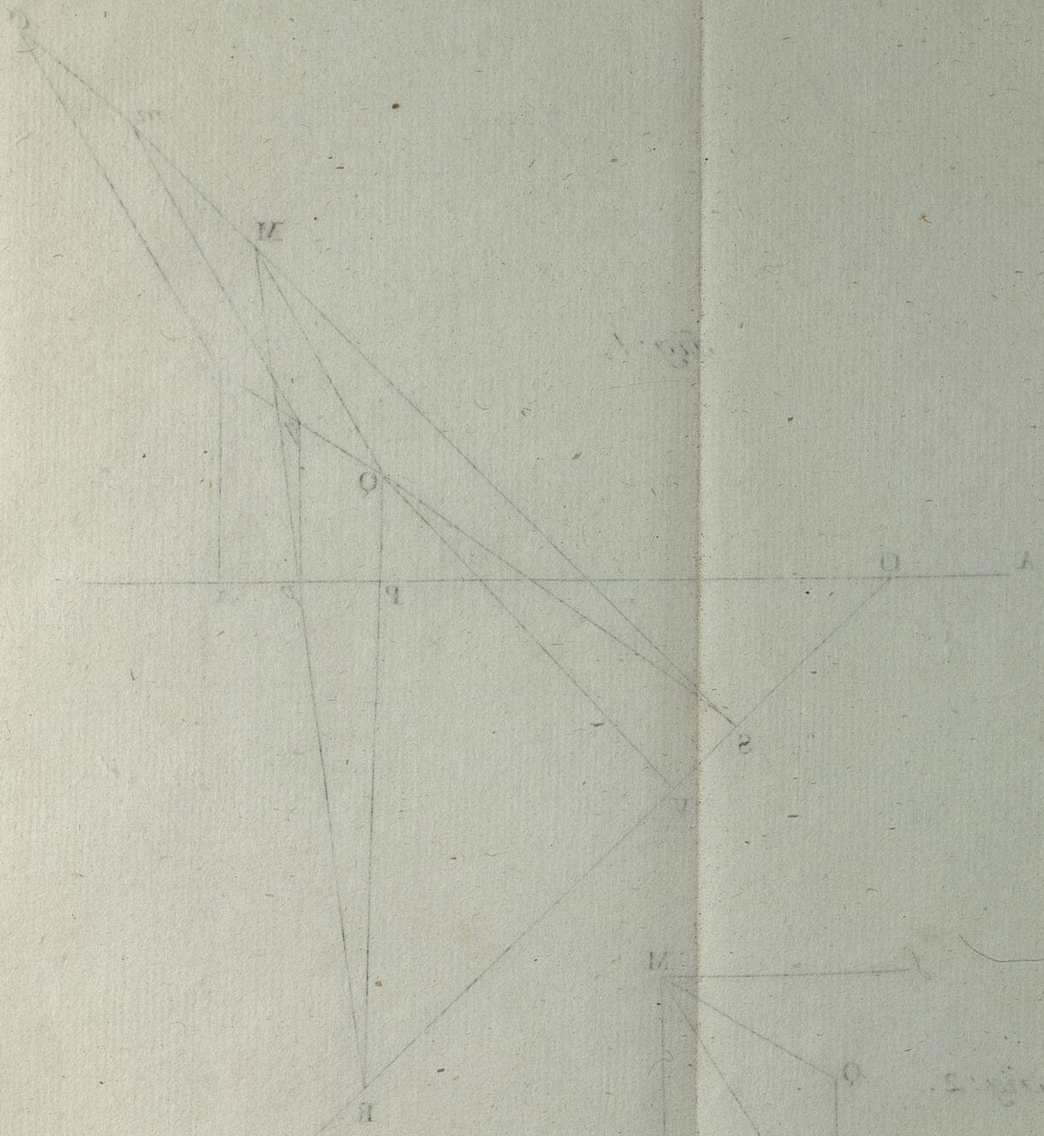


fig: 2.

Tom: I. Tab. XIV.

M.E.C.D. 2017



M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

1462

Observatorio de Marina
BIBLIOTECA
Núm. 1498

Real Observatorio de la Armada
BIBLIOTECA
01498

M.E.C.D. 2017