TRATADO DE APLICACION
AL
ESTUDIO, TRAZADO Y REPLANTEO
DE
CAMINOS DE HIERRO, CARRETERAS Y CANALES
(Y)

TABLAS DE TODAS LAS LÍNEAS Y COLÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS NATURALES,

CALCULADAS CON SIETE CIFRAS DECIMALES
PARA LOS ANGULOS TRIGONOMÉTRICOS, EN GRADUACION CRECIENTE DE 30″ EN 30″ DESDE 0 A 90°;
Y PARA LOS DISTINTOS ELEMENTOS DE CURVAS CIRCULARES,
COMBINADOS
EN FUNCION DEL RÁDIO-UNIDAD Y DE LOS ÁNGULOS DE LAS ALINEACIONES RECTAS,
QUE DECRECEN DE 1′ EN 1′ DESDE 180° HASTA 0:
SON APLICABLES Á LOS SISTEMAS DE COORDENADAS Y SECCIONES CÓNICAS,
A LA TRIANGULACION GEODÉSICA Y OPERACIONES CATASTRALES, A LA TOPOGRAFÍA Y AL TRAZADO
DE CURVAS DE SEGUNDO GRADO.

POR

ANGEL DEL MONTE,

PROFESOR EN ARQUITECTURA, DIRECTOR DE CAMINOS Y CANALES, JEFE EN ESTUDIOS
DE FERRO-CARRILES, ETC.

MADRID: 1866.
ESTABLECIMIENTO TIPOGRAFICO DE ESTRADA, DIAZ Y LOPEZ.
Hiedra, 5 Y 7.

TRATADO DE APLICACION

AL ESTUDIO DE

CAMINOS Y CANALES.

Angel del Monte

TRATADO DE APLICACION

AL

ESTUDIO, TRAZADO Y REPLANTEO

DE

CAMINOS DE HIERRO, CARRETERAS Y CANALES

Y

TABLAS DE TODAS LAS LÍNEAS Y COLÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS NATURALES

CALCULADAS CON SIETE CIFRAS DECIMALES
PARA LOS ANGULOS TRIGONOMÉTRICOS, EN GRADUACION CRECIENTE DE 30″ EN 30″ DESDE 0 A 90°;
Y PARA LOS DISTINTOS ELEMENTOS DE CURVAS CIRCULARES,
COMBINADOS
EN FUNCION DEL RÁDIO-UNIDAD Y DE LOS ÁNGULOS DE LAS ALINEACIONES RECTAS,
QUE DECRECEN DE 1′ EN 1′ DESDE 180° HASTA 0:
SON APLICABLES Á LOS SISTEMAS DE COORDENADAS Y SECCIONES CÓNICAS,
A LA TRIANGULACION GEODÉSICA Y OPERACIONES CATASTRALES, A LA TOPOGRAFÍA Y AL TRAZADO
DE CURVAS DE SEGUNDO GRADO.

POR

ANGEL DEL MONTE,

PROFESOR EN ARQUITECTURA, DIRECTOR DE CAMINOS Y CANALES, JEFE EN ESTUDIOS
DE FERRO-CARRILES, ETC.

MADRID: 1866.
ESTABLECIMIENTO TIPOGRAFICO DE ESTRADA, DIAZ Y LOPEZ.
Hiedra, 5 y 7.

Á LOS DIRECTORES DE CAMINOS Y CANALES.

La falta de un Plan general *y de un* Tratado especial *para realizar los proyectos de las vias de comunicacion y aprovechamiento de aguas, ha sido causa para determinarme á redactar algunos apuntes, con el fin de suplir la necesidad que experimentamos de usar obras extranjeras de aplicacion inmediata.*

En las azarosas circunstancias que atravesamos y al empezar la publicacion por este pequeño libro, para dedicároslo sin pretensiones de ningun género, he pensado en las consecuencias de tan árdua empresa.

Espero ver á los comprofesores de la clase á que me honro de pertenecer, ocupando el lugar que les corresponde: así admitirán el fruto de mis primeros estudios experimentales, como una débil muestra del espíritu de compañerismo y del deseo que me anima.

Aceptad, pues, esta dedicatoria si la considerais oportuna, tal cual la ofrezco, y si el éxito no corona mis esfuerzos, á pesar de todo, tendrá la satisfaccion de haberlo intentado vuestro compañero

Angel del Monte

Madrid 1.º de Marzo de 1866.

INTRODUCCION.

Cuando en 1856, siendo alumno de la Escuela especial de Arquitectura el autor de estas líneas, fué destinado por Real órden al Cuerpo facultativo subalterno de Obras públicas, en virtud de concurso ante la Escuela de Ingenieros de Caminos, los obstáculos insuperables con los medios de accion de que podia disponer en el ejercicio de su empleo, le hicieron conocer desde luego la gran diferencia que existe entre la teoría y su aplicacion inmediata.

De muy pocas obras podía entonces valerse, tal vez de ninguna, para los estudios y buena eleccion de trazados; pues las que se habian publicado, unas, solo contenian simples indicaciones ó reglas prácticas para resolver los casos mas ordinarios en terreno poco accidentado: otras, por su excesiva extension, tenian el grave inconveniente de presentar mezcladas las cuestiones relativas al proyecto, ejecucion y explotacion de caminos de hierro, carreteras y canales; y otras, en fin, carecian tanto de cuerpo de doctrina, como de los medios auxiliares para efectuar con facilidad y precision las diversas operaciones topográficas, en terrenos muy quebrados, y á la vez los cálculos de suma importancia, ya al atravesar forzosamente ciertos parajes, cruzando elevadas divisorias y profundos talwegs, ya tambien al salvar los grandes barrancos y otros pasos peligrosos é inaccesibles.

Pero los principios que deben servir de base en los trazados y proyectos de las vias de comunicacion y los procedimientos adoptados, no se han estudiado en España con método y de una manera clara y precisa, que permita aplicarlos fácilmente.

Muchas verdades teóricas y no pocas generalidades se hallan esparcidas en diferentes obras, así nacionales como extranjeras, que ya por lo que estas pierden en la traduccion, ó bien por su forma y dimensiones, no se pueden usar en campaña; y además por su carácter de obras de enseñanza no siempre son aplicables sus teorías, aun cuando sea evidente que en la serena region de los principios invariables ó de las ciencias puras, la doctrina científica debia ser tambien constante en cualquier época y en todos los paises. Pero no sucede lo mismo en la práctica con los tratados de aplicacion; porque en la esfera impura de la realidad, casi es imposible efectuar con toda exactitud lo que enseñan las ciencias físico-matemáticas, y lo que el entendimiento humano comprende en toda su perfeccion. Así es, que esta última clase de libros varían de una nacion á otra y cambian de dia en dia, por las modificaciones que hay que introducir, segun los adelantos y los resultados de la experiencia.

Por consiguiente, no basta sentar principios absolutos, ni describir analítica ó gráficamente brillantes sistemas que, por buenos que parezcan, serán incompletos si las verdades que contienen no están bien ordenadas, atendida la mútua relacion que debe haber entre ellas; desentrañando las cuestiones para determinar *cómo, cuándo, entre qué límites y hasta qué punto se pueden aproximar los resultados á lo que prescriben las ciencias.*

Hé aquí indicado sucintamente de donde proviene la gran diferencia que hay entre la ciencia y su aplicacion inmediata, y la modificacion que admiten las formas á que están sujetas ó pueden sujetarse las variaciones; estableciendo solucion de continuidad por medio de coeficientes experimentales y de las séries de observaciones para descender de la teoría á la práctica; puesto que siendo constantes los principios absolutos en que se funda la primera, y variables los elementos y medios de accion que se emplean en la segunda, esta vá pasando por todos los grados de aproximacion, hasta que finalmente la diferencia se halle comprendida dentro de estrechos límites. De los procedimientos empleados para conseguir el mismo objeto, con la mayor prontitud y exactitud posible, dimanan los diversos sistemas.

Por tanto, las obras de aplicacion y de utilidad práctica, deben estar escritas sobre el terreno, en el idioma nacional, con gran copia de datos adquiridos en el país; planteando las cuestiones y analizando las distintas ú opuestas condiciones que envuelve el problema más general, para conciliarlas: ayudado tambien á veces de los mismos principios y demás ciencias auxiliares por quienes existen y la combinacion de que dependen. Este asunto y la solucion de cada problema, formarán en todos los casos el complemento, y el conjunto de los resultados constituye la parte principal del depósito de la ciencia; prestándose á la modificacion que se apetezca, atendiendo siempre á las circunstancias y al objeto propuesto. De suerte que el modo de plantear toda cuestion y su resolucion, será siempre obra del génio y del talento de cada facultativo que, interpretando con acierto las fórmulas, sabe aplicarlas oportunamente.

Así lo comprendieron en las naciones que se han colocado á la cabeza de la civilizacion; cuyo perfeccionamiento y notables progresos, tanto en el antiguo como en el nuevo mundo, son debidos en su mayor parte al gran resorte de la iniciativa individual y al espíritu emprendedor y de asociacion, porque siendo libres las carreras profesionales, la educacion científica se halla muy generalizada, y muchos de los conocimientos que abrazan las ciencias, se han hecho vulgares por las innumerables publicaciones y libros de todas clases; formando un ambiente de saber que dá mucha facilidad para su inmediata aplicacion á las artes, á la industria y á la agricultura.

Si en España no se ha generalizado todavía este género de saber, si es muy escaso el número de hombres capaces de discurrir nuevos procedimientos, y si tampoco hay notabilidades ó especialidades en todos los ramos de construcciones, no es culpa de las dotes intelectuales, celo y actividad de sus habitantes, cualidades reconocidas por los extranjeros. Es entre otras causas, cuyo detenido exámen publicaremos oportunamente, por carecer de libros elementales bastante extensos, sobre tan vastas materias: es tambien por falta de un pensamiento preconcebido y de un sistema de ejecucion bien combinado; y sobre todo, por no haberse apreciado debidamente la importancia de la iniciativa individual y de la libre competencia.

Concretándonos ahora á este pequeño libro, vamos á dar una sucinta idea acerca de las secciones en que se divide, de los asuntos que contiene, y de las aplicaciones de que se trata.

Pero antes haremos notar una de las primeras dificultades con que hemos tropezado, á saber: si convendría descartar las teorías y fórmulas, presentando únicamente las reglas prácticas para los casos más comunes, ó si habría que plantear las cuestiones en el terreno científico para utilizar todos los medios auxiliares. En el primer concepto, hemos tenido presente que la práctica exagerada suele ser pura rutina; y además, siendo tan diversas y opuestas las condiciones que deben llenar los buenos trazados, y tan caprichosa la forma de la tierra, seria preciso escribir muchos volúmenes si se hubieran de comprender un gran número de casos para la mejor eleccion de trazados en terrenos muy accidentados: y bajo el segundo punto de vista, largos y tortuosos muchos de los procedimientos analíticos y gráficos de exposicion, no siempre conducen directamente á los verdaderos resultados; y complicándose con largas discusiones hacen penoso el llegar á ellos, ó acaso dificultan su inteligencia y aplicacion. Huyendo de los extremos, para evitar ambos escollos, y al mismo tiempo con el deseo de presentar un tratado de aplicacion al estudio, trazado y replanteo de caminos de hierro, carreteras y canales tan completo como el que más, y en mucho menor volúmen, hemos empezado siempre por las cuestiones fundamentales y fórmulas generales, desde la más complicada ó trascedental, hasta la más sencilla ó elemental: presentando como ejemplos numéricos los casos más principales, que comprenden mayor número de condiciones y de circunstancias particulares entre los de su especie. Reducidas ya las fórmulas á su última expresion y traducidas al lenguaje vulgar, la solucion de todos los demás problemas análogos, es operacion de meras sustituciones ó de las modificaciones concernientes *para investigar los giros que, segun los casos y los accidentes de cada caso, convenga dar á la cuestion propuesta.*

Así hemos podido ordenar y agrupar en un reducido espacio, las expresiones trigonométricas y logaritmicas, que con las del álgebra, geometría elemental y analítica, y con la aplicacion del cálculo diferencial é integral, establecen solucion de continuidad y constituyen la ciencia fundamental en que está basado el presente tratado.

En cuanto á su originalidad, debemos decir que tiene mucho de todas las obras consultadas, sin que se parezca á ninguna; y bajo este concepto es todo lo original que pueden serlo los tratados de aplicacion que se fundan en teorías anteriormente demostradas y que tienden al mismo fin.

Esta es la combinacion con que se ha procurado distinguir este libro de los de su clase, hasta conseguir darle carácter de original, abriendo diversos senderos y siguiendo nuevos rumbos para acortar y llegar fácilmente á los resultados por medio del cálculo y de operaciones descriptivas con figuras intercaladas en el texto, y de todas las tablas de que nos ocupamos en el cuerpo de la obra.

Para establecerlo todo con órden y método, dividimos este tratado en tres secciones:

La *primera* hará conocer el orígen é invencion de los logaritmos, las definiciones y relaciones de las líneas y colíneas trigonométricas naturales, y el tipo del cálculo en que se funda la composicion de las tablas; presentando al mismo tiempo la combinacion de los elementos necesarios para el trazado de curvas por arcos de círculo, y la resolucion de los triángulos rectilíneos.

La *segunda* contendrá los sistemas de coordenadas y secciones cónicas, que son la parte mas principal de este ramo de las matemáticas, por sus infinitas aplicaciones, tanto para el trazado de curvas circulares como para las de segundo órden; ocupándose de los medios adecuados para expresar las diferentes condiciones comunes á uno ó más puntos consecutivos, que frecuentemente producirán ecuaciones indeterminadas: con las cuales, será posible hallar en expresiones algebráicas y trigonométricas *la situacion de un punto, el curso de una línea y, en general, cuanto tenga relacion con la forma y dimensiones de los cuerpos.*

Y por último, la *tercera* tratará de la aplicacion al estudio, trazado y replanteo de caminos y canales, propiamente dichos; de los problemas de topografía; del cálculo, composicion y disposicion, uso y aplicacion de tres tablas de coordenadas de curvas circulares, elípticas y parabólicas.

Finalmente acompañan con la portada y el correspondiente apéndice, acerca de su disposicion y uso, las tablas trigonométricas complementarias y trazado de curvas sobre el terreno: de modo que con el texto podrán encuadernarse juntamente, ó bien para mayor comodidad en tomo separado.

No concluiremos sin indicar que de intento no nos hemos ocupado en primer lugar de la mútua correspondencia y enlace de las distintas vias de comunicacion, y de las condiciones á que debe satisfacer su establecimiento y explotacion; porque este asunto vasto y prolijo merece indudablemente un plan bien combinado y un tratado completo: todo lo cual requiere profundos conocimientos, gran copia de datos y larga experiencia. Esto no obstante, los datos y conocimientos acerca de un *Plan general de Obras públicas* y de un *Tratado especial*, que ha podido adquirir el autor, al ejercer bastante tiempo y en dos épocas distintas el cargo de Secretario de inspeccion de los distritos de Sevilla, Córdoba y Badajoz, y últimamente estando en Empresas, los ordenará y extenderá si este primer ensayo merece la benevolencia de las personas ilustradas é imparciales, y si juzgan que en ello podemos servir al país y á la clase á que tenemos la honra de pertenecer.

Tal es, en compendio, el libro que ofrecemos á nuestros comprofesores y tal el objeto que nos proponemos, sin otra pretension y sin otro móvil, que el de generalizar y simplificar la aplicacion de los conocimientos útiles y necesarios; escitando el celo y actividad de los jóvenes estudiosos á su propagacion y perfeccionamiento.

PRIMERA SECCION.

COMPOSICION DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS Y ELEMENTOS DE CURVAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

INVENCION DE LOS LOGARITMOS Y EXPRESION DE LAS LÍNEAS Y COLÍNEAS.

1.—Reseña histórica de los logaritmos.—Al célebre Juan Néper, que ha publicado á principios del siglo XVI una obra en latin bajo el título de *De mirifici logarithmorum canonis constructione*, es debida esta admirable invencion de infinitas aplicaciones.

A Enrique Briggs, no ménos célebre, y contemporáneo de Néper, estimulado por este grande inventor, se debe el sistema de logaritmos artificiales. Este sistema se ha dado á conocer en unas tablas de logaritmos de los números desde 1 hasta 20.000 con *catorce* cifras decimales, y despues de 90.000 á 100.000: precedian á ellas las correspondientes explicaciones en inglés acerca de la naturaleza, propiedades, usos y aplicaciones de los logaritmos, publicadas en Lóndres el año 1624, con el nombre de *Aritmética logarítmica.*

Adriano Vlacq fué el que se encargó de llenar el vacío que habia dejado Briggs, calculando otras grandes tablas de logaritmos de los senos, tangentes y secantes para todos los grados del cuarto de círculo, de minuto en minuto, con diez decimales; es decir, de 0 á 5.400 minutos, y para todos los números desde 1 hasta 100.000; así como tambien una aritmética logarítmica escrita en latin y publicada el año 1628, que despues se ha traducido al inglés y al francés.

El mismo Adriano Vlacq ha sido el que ha calculado con diez decimales los logaritmos, senos, cosenos, tangentes y cotangentes de 10″ en 10″, por medio de los senos naturales, etc. del *Opus palatinum*. Esta tabla precedida de una trigonometría rectilínea y esférica, escrita en latin, se dió á luz el año 1633 intitulada *Trigonometria artificialis.* Al mismo tiempo se han impreso las tablas centesimales que Briggs habia calculado y rogado á Vlacq que se encargara de corregir la edicion, las cuales contenian los senos naturales y sus logaritmos, para los 90° del cuadrante de la circunferencia, con catorce decimales; y además las tangentes y secantes naturales y los logaritmos tangentes de los mismos arcos; pero solamente con diez cifras decimales.

Sucesivamente han aparecido varias tablas de logaritmos más ó ménos completas, que han dado á luz diferentes hombres ilustrados: entre ellos Sherwin, que ha publicado el año 1724 unas tablas, las cuales han sido aumentadas y reproducidas por Gardiner en 1742, y otra nueva edicion en el año de 1770 revisada por el P. Pecenas, y finalmente por Callet y Taylor, con *siete* cifras independientemente de la característica. Las tablas de Lagrange, Laplace, Cousen, Mauduit y Delambre, las de Lalande impresas en 1802, y las de Plauzoles estereotipadas en 1809; las centesimales de C. Borda, y las grandes tablas de Prony director de la Escuela de *Ponts et Chausses* de Francia llamadas del *Catastro*; estas últimas tablas son las más completas que se conocen, puesto que están calculadas con ocho decimales además de la característica. Y en fin, no obstante las correcciones hechas por Zach, Véga, Ideler, Delambre, Burckardt, Bagay y otros muchos hasta el año 1857, especialmente Brémicker en Berlin, y Lefort en Paris, han hecho sentir la necesidad de una revision general de las tablas de Callet, estereotipadas en 1795, las cuales por último han sido corregidas por Saigey y verificada nuevamente la tirada en el año 1861.

Tal es en resúmen la invencion trascendental de los logaritmos *neperianos*, que dan inmediatamente los valores de las líneas y colíneas trigonométricas naturales, la longitud y áreas de la hiperbólica equilátera, por cuya razon se llaman *logaritmos hiperbólicos*, y que tambien se conocen por el título de *Canon mirificus* ó sistema de Néper que tiene la unidad por *módulo*; y tal el orígen de los logaritmos tabulares ó de Briggs, que se dicen vulgares porque su base 10 es la misma de nuestro sistema ordinario de numeracion décupla ó decimal.

2.—**Descripcion y objeto de las tablas.**—Nos hemos remontado hasta el orígen de los logaritmos neperianos y artificiales, con el doble fin de dar á conocer los inventores á quienes somos deudores de unos sistemas de inmensas aplicaciones, y las épocas en que fueron publicadas las mejores tablas de los sábios cuyos nombres pasarán á la posteridad unidos á sus inmortales obras, y al mismo tiempo para recordar á nuestros lectores de dónde provienen las tablas de líneas y colíneas trigonométricas naturales, así como los elementos geométricos de curvas circulares en que se funda su composicion, uso y aplicacion al estudio y trazado de alineaciones rectas y curvas, para el establecimiento de caminos y canales, resolucion de triángulos y otras muchas cuestiones por medio de los cálculos, despues de haber hallado las relaciones que ligan á los angulos y lados de todo triángulo; pero como aquellos no podian ligarse directamente á no ser por ecuaciones muy complicadas, hé aquí la razon que ha habido para introducir las líneas y colíneas trigonométricas como auxiliares, cuyos valores numéricos dependen de la abertura de los ángulos, y cuyas relaciones con los lados son muy sencillas segun veremos más adelante.

Las líneas y colíneas trigonométricas naturales, presentan el valor de la tangente y cotangente, seno y coseno, senoverso y cosenoverso, secante y cosecante del verdadero ángulo trigonométrico y el de su complemento, es decir, para los arcos complementarios de 0 á 90° que tienen la unidad por rádio, y crecen de 30 en 30 segundos, calculadas con siete cifras decimales. Son aplicables al trazado de curvas combinando los distintos elementos en funcion del ángulo de las alineaciones, del suplemento ó del semi-ángulo en el centro y del rádio tomado por unidad, esto es, para los arcos suplementarios desde 180° á 0, que van decreciendo de minuto en minuto: expresan la longitud natural de la tangente, semi-cuerda, flecha, secante, longitud del arco correspondiente al ángulo trigométrico ó de la semi-curva y desarrollo de su complemento: contienen las coordenadas rectangulares, adoptando las abscisas y ordenadas en funcion de la tangente ó de la cuerda del arco de círculo y del rádio 1; así como tambien pueden calcularse por medio de dichas tablas los diferentes sistemas de coordenadas para las curvas planas y demás que resultan de las secciones cónicas: sirven para el cálculo de distancias y alturas accesibles é inaccesibles, triangulacion y medicion de ángulos horizontales y verticales, é igualmente para la nivelacion por pendientes y reduccion de distancias al horizonte; ó bien la longitud de las alineaciones reducida á su proyeccion horizontal, conociendo las cotas de altura de los puntos nivelados, y demás problemas: simplifican las operaciones de campo y de gabinete, facilitan no solo el estudio y trazado definitivo, sino que tambien la formacion de proyectos de los caminos de hierro, carreteras y canales, y su replanteo con toda la exactitud posible.

3.—Definicion de las líneas y colíneas trigonométricas.—*El seno de un arco de círculo ó de un ángulo, es la perpendicular bajada desde un extremo del arco correspondiente sobre el rádio que pasa por el otro extremo.*

El coseno de un ángulo es el seno del complemento del arco.

La tangente de un ángulo ó de un arco, es la recta que partiendo del extremo, en el punto de contacto ú origen del arco, termina en la prolongacion del rádio que pasa por el otro extremo del mismo arco.

La cotangente de un arco, es la tangente del complemento del arco ó del ángulo á que corresponde.

La secante de un arco, es la distancia del centro al extremo de la tangente del mismo arco.

La cosecante de un ángulo ó de un arco, es la secante del complemento de este ó del mismo ángulo.

El senoverso de un arco, es la parte de rádio comprendida entre el pié del seno y el origen de la tangente ó del extremo de dicho arco.

El cosenoverso de un ángulo ó del arco correspondiente, es el senoverso del complemento de este arco ó de aquel ángulo.

El desarrollo de un arco de círculo, es la parte de curva rectificada que tiene por longitud ó medida la razon aproximada de la circunferencia al diámetro, tomando el rádio como unidad.

Observaciones.—1.ª *El seno de un ángulo, es la relacion del seno del arco que mide el ángulo al rádio del mismo arco; y el complemento de este es el arco correspondiente al coseno de dicho ángulo.*

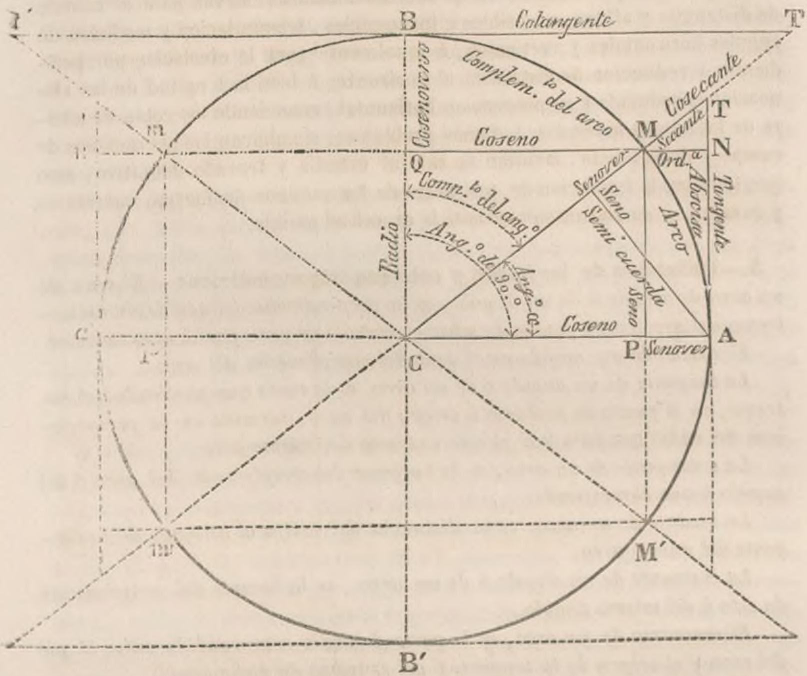
2.ª *La tangente de un ángulo es la relacion de la tangente del arco que mide el ángulo, al rádio del mismo arco.*

3.ª *La tangente, seno, senoverso, secante y desarrollo del complemento de un arco ó de un ángulo, son la cotangente, coseno, cosenoverso, cosecante y longitud de dicho arco correspondiente al mismo ángulo trigonométrico.*

4.ª El desarrollo del arco trigonométrico, es la longitud del arco que corresponde al complemento del ángulo recto, que tiene por medida el cuadrante.

4.—Análisis de las fórmulas generales.—Sea A el orígen de los arcos AM, AMm, AmM′, etc. (*fig. 1.*);

Fig. 1.



el arco AM tendrá MP por seno; MQ, por coseno; AT, por tangente; BT′, por cotangente; CT, por secante; CT′, por cosecante; AP, por senoverso, y BQ por cosenoverso: el ángulo ACM medido por el arco AM, tendrá $\frac{MP}{AC}$, por seno; $\frac{MQ}{AC}$, por coseno; $\frac{AT}{AC}$, por tangente; $\frac{BT'}{AC}$, por cotangente; $\frac{CT}{AC}$, por secante; $\frac{CT'}{AC}$, por cosecante; $\frac{AP}{AC}$, por senoverso; y $\frac{BQ}{AC}$, por cosenoverso. Del mismo modo el arco ABm tiene mp, por seno; mQ, por coseno; $a't$, por tangente; Bt', por cotangente; Ct, por secante; Ct', por cosecante, etc.

De las definiciones precedentes se deduce que el triángulo CPM, rectángulo en P, es exactamente igual al triángulo CQM, y semejante á los triángulos CAT y CBT'; por consiguiente se tiene

$$MQ = CP;\ MP = CQ;\ \overline{MP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CM}^2;$$

$$\frac{AT}{AC} = \frac{MP}{PC} = \frac{BC}{BT'};\ \frac{CT}{AC} = \frac{MC}{CP};\ \frac{CT'}{CB} = \frac{MC}{MP}:$$

$$AP = AC - MQ, \text{ y } BQ = BC - MP.$$

Conociendo el seno de un arco ó de un ángulo, se pueden calcular por medio de estas relaciones el coseno, la tangente y cotangente, la secante y cosecante, el senoverso y cosenoverso de este ángulo y el arco correspondiente.

Veamos, pues, cómo se deben calcular los senos de los arcos. Sean dos arcos AM y MN (*fig.* 2); AP y NO los senos; CP y CO los cosenos: los dos arcos ó su suma AMN, tendrá NQ por seno, y CQ por coseno. Los triángulos semejantes CAP, CSQ y NSO darán formando las proporciones

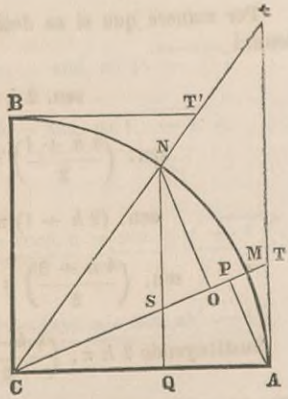
CP : AC :: CQ : CS, y CP : AP :: ON : OS;
CP : AC :: ON : NS, y CP : AP :: CQ : QS;

de donde se deducen las ecuaciones

(A) $\quad CP \times CO = AC \times CQ + AP \times ON.$

(B) $\quad CP \times NQ = AP \times CQ + AC \times ON.$

Fig. 2.



Multiplicando la ecuacion (A) por AP, y la ecuacion (B) por AC; restando el primer producto del segundo; tomando por $\overline{AC}^2 - \overline{AP}^2$ su valor $\overline{CP}^2$, y despues dividiendo por CP, nos da

(C) $$AC \times NQ - AP \times CO = CP \times ON:$$

ahora multiplicando la ecuacion (A) por AC, y la ecuacion (B) por AP; restando el segundo producto del primero, y operando del mismo modo que con la precedente, tendremos

(D) $$AC \times CO - AP \times NQ = CP \times CQ.$$

Siendo el arco AM $= \alpha$, y el arco MN $= \beta$; el arco AMN valdrá $\alpha + \beta$, y haciendo AC $= 1$ las ecuaciones (A) y (C) darán

(E) $$\text{sen.}\ (\alpha + \beta) = \text{sen.}\ \alpha \times \cos.\ \beta + \cos.\ \alpha \times \text{sen.}\ \beta,$$

(F) $$\cos.\ (\alpha + \beta) = \cos.\ \alpha \times \cos.\ \beta - \text{sen.}\ \alpha \times \text{sen.}\ \beta.$$

Al contrario, siendo AMN $= \alpha$ y AM $= \beta$, en este caso MN valdrá $\alpha - \beta$; y las ecuaciones (B) y (D) nos darán

(G) $$\text{sen.}\ (\alpha - \beta) = \text{sen.}\ \alpha \times \cos.\ \beta - \cos.\ \alpha \times \text{sen.}\ \beta.$$

(H) $$\cos.\ (\alpha - \beta) = \cos.\ \alpha \times \cos.\ \beta + \text{sen.}\ \alpha \times \text{sen.}\ \beta.$$

Designando por π, la semi-circunferencia de un círculo cuyo rádio es la unidad, ó bien $R = 1$, tendremos

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279, \text{ etc.}$$

De las definiciones precedentes se sigue:

$$\text{Sen. } 0 \times \pi = 0;\ \cos.\ 0 \times \pi = 1;\ \text{sen. } \frac{1}{2}\pi = 1;\ \cos.\ \frac{1}{2}\pi = 0;$$

$$\text{sen. } \pi = 0;\ \cos.\ \pi = -1;\ \text{sen. } \frac{3}{2}\pi = -1;\ \cos.\ \frac{3}{2}\pi = 0:$$

$$\text{sen. } 2\pi = 0;\ \cos.\ 2\pi = 1;\ \text{sen. } \frac{5}{2}\pi = 1;\ \cos.\ \frac{5}{2}\pi = 0:$$

$$\text{sen. } 3\pi = 0;\ \cos.\ 3\pi = -1;\ \text{sen. } \frac{7}{2}\pi = -1;\ \cos.\ \frac{7}{2}\pi = 0, \text{ etc.}$$

Por manera que si se designa por h un número entero cualquiera, se tendrá

$$\text{sen. } 2h\pi = 0;\ \cos.\ 2h\pi = 1:$$

$$\text{sen. } \left(\frac{4h+1}{2}\right)\pi = 1;\ \cos.\ \left(\frac{4h+1}{2}\right)\pi = 0:$$

$$\text{sen. } (2h+1)\pi = 0;\ \cos.\ (2h+1)\pi = -1:$$

$$\text{sen. } \left(\frac{4h+3}{2}\right)\pi = -1;\ \cos.\ \left(\frac{4h+3}{2}\right)\pi = 0:$$

Sustituyendo $2h\pi$, $\left(\frac{4h+1}{2}\right)\pi$, etc. en lugar de α, en las fórmulas (E), (F), (G) y (H); tendremos

$$\text{sen. } (2h\pi \pm 6) = \pm \text{ sen. } 6;\ \cos.\ (2h\pi \pm 6) = \cos.\ 6:$$

$$\text{sen.} \left[\left(\frac{4h+1}{2}\right)\pi \pm 6\right] = \cos.\ 6;\ \cos.\ \left[\left(\frac{4h+1}{2}\right)\pi \pm 6\right] = \mp \text{ sen. } 6:$$

$$\text{sen } [(2h+1)\pi \pm 6] = \mp \text{ sen. } 6;\ \cos.\ [(2h+1)\pi \pm 6] = -\cos.\ 6:$$

$$\text{sen.}\left[\left(\frac{4h+3}{2}\right)\pi \pm 6\right] = -\cos.\ 6;\ \cos.\left[\left(\frac{4h+3}{2}\right)\pi \pm 6\right] = \pm \cos.\ 6.$$

Estas fórmulas hacen ver cómo crecen ó decrecen los senos y cosenos de los arcos ó de los ángulos.

Sea $\alpha = 6$, las fórmulas (E) y (F) nos dan

$$\text{Sen. } 2\alpha = 2 \text{ sen. } \alpha \times \cos.\ \alpha;\ \cos.\ 2\alpha = (\cos.\ \alpha)^2 - (\text{sen. } \alpha)^2:$$

multiplicando la primera por $\sqrt{-1}$ y aumentando el producto á la segunda, ó restando este producto de la segunda, nos dará

$$\cos. 2\alpha \pm \text{sen}. 2\alpha \times \sqrt{-1} = (\cos. \alpha)^2 \pm 2 \text{ sen}. \alpha \cos. \alpha \sqrt{-1} -$$

$-(\text{sen}. \alpha)^2$ que es el cuadrado de $\cos. \alpha \pm \text{sen}. \alpha \sqrt{-1}$. Luego será

$$(\cos. \alpha \pm \text{sen}. \alpha \sqrt{-1})^2 = \cos. 2\alpha \pm \text{sen}. 2\alpha \sqrt{-1}:$$

multiplicando cada miembro por $\cos. \alpha \pm \text{sen}. \alpha \sqrt{-1}$; tendremos:

$$(\cos. \alpha \pm \text{sen}. \alpha \sqrt{-1})^3 = \cos. 2\alpha \cos. \alpha - \text{sen}. 2\alpha. \text{sen}. \alpha \pm$$

$$\pm (\text{sen}. 2\alpha. \cos. \alpha + \cos. 2\alpha. \text{sen}. \alpha) \times \sqrt{-1} = \cos. 3\alpha \pm \text{sen}. 3\alpha \sqrt{-1}.$$

Del mismo modo, tendremos

$$(\cos. \alpha \pm \text{sen}. \alpha \sqrt{-1})^4 = \cos. 4\alpha \pm \text{sen}. 4\alpha \sqrt{-1};$$

y en general

$$(\cos. \alpha + \text{sen}. \alpha \sqrt{-1})^n = \cos. n\alpha + \text{sen}. n\alpha \sqrt{-1};$$

$$(\cos. \alpha - \text{sen}. \alpha \sqrt{-1})^n = \cos. n\alpha - \text{sen}. n\alpha \sqrt{-1}:$$

de aquí se deduce

$$\text{(I)} \qquad \cos. n\alpha = \frac{(\cos \alpha + \text{sen}. \alpha \sqrt{-1})^n + (\cos. \alpha - \text{sen}. \alpha \sqrt{-1})^n}{2}.$$

$$\text{(K)} \qquad \text{sen}. n\alpha = \frac{(\cos. \alpha + \text{sen}. \alpha \sqrt{-1})^n - (\cos. \alpha - \text{sen}. \alpha \sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}:$$

desarrollando estas potencias en séries, nos dan

$$\text{(L)} \qquad \cos. n\alpha = (\cos. \alpha)^n - \frac{n.(n-1)}{2}. (\cos. \alpha)^{n-2}. \text{sen}. \alpha^2 +$$

$$+ \frac{n \ldots n-3}{2 .. 3 .. 4} \times (\cos. \alpha)^{n-4}. (\text{sen}. \alpha)^4 - \frac{n .. n-5}{2 \ldots . 6} \times$$

$$\times (\cos. \alpha)^{n-6}. (\text{sen}. \alpha)^6 + \text{etc.}$$

$$\text{(M)} \qquad \text{sen}. n\alpha = n. (\cos. \alpha)^{n-1}. \text{sen}. \alpha - \frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3} \times$$

$$\times (\cos. \alpha)^{n-3}. (\text{sen}. \alpha)^3 + \frac{n \ldots (n-4)}{2 \ldots 5}. (\cos. \alpha)^{n-5} \times$$

$$\times (\text{sen}. \alpha)^5 - \frac{n \ldots (n-6)}{2 \ldots 7}. (\cos. \alpha)^{n-7} (\text{sen}. \alpha)^7 + \text{etc.}$$

Sea α un arco infinitamente pequeño, y n un número infinito: $n\alpha$ será un arco finito; designándole por x, entónces cos. $\alpha = 1$; sen. $\alpha = \alpha$:

$$(N) \qquad \cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2\ldots 6} + \frac{x^8}{2\ldots 8} - \text{etc.}$$

$$(O) \qquad \text{sen}. x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2\ldots 5} - \frac{x^7}{2\ldots 7} + \frac{x^9}{2\ldots 9} - \text{etc.}$$

Sea $x = \frac{m\pi}{2n}$; tendremos las siguientes expresiones:

$$(P) \qquad \text{Cos.}\frac{m\pi}{2n} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000 -$$

$$- \frac{m^2}{n^2}.\ 1{,}23370\ 05501\ 36169\ 82735\ 43 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{m^{26}}{n^{26}}.\ 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 03 + \ldots\ldots \text{etc.}$$

$$(Q) \qquad \text{Sen.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n} \times 1{,}57079\ 63267\ 94896\ 61923\ 13 -$$

$$- \frac{m^3}{n^3}.\ 0{,}64596\ 40975\ 06246\ 25365\ 58 + \ldots\ldots :: +$$

$$+ \frac{m^{25}}{n^{25}}.\ 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 52 - \ldots\ldots \text{etc.}$$

Por medio de estas fórmulas se obtienen fácilmente los senos y cosenos de los ángulos.

$$(R) \qquad \text{Tang.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{2mn}{n^2 - m^2} \times 0{,}63661\ 97723\ 67581\ 34307\ 55 +$$

$$+ \frac{m}{n}.\ 0{,}29755\ 67820\ 59733\ 93308 + \ldots\ldots : +$$

$$+ \frac{m^{41}}{n^{41}}.\ 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00001 + \ldots\ldots \text{etc.}$$

$$(S) \qquad \text{Cot.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{m}.\ 0{,}63661\ 97723\ 67581\ 34307\ 55358\ 53490\ 0374480126 -$$

$$- \frac{4mn}{4n^2 - m^2} \times 0{,}31830\ 98861\ 83790\ 67153\ 8 -$$

$$- \frac{m}{n}.\ 0{,}20528\ 83894\ 14508\ 20153\ 9\ \ldots\ldots : -$$

$$- \frac{m^{31}}{n^{31}}.\ 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00007 - \ldots\ldots \text{etc.}$$

El cálculo de las secantes y cosecantes no presenta ya ninguna dificultad. Se las obtiene fácilmente por via de sustraccion. Con efecto, si el ángulo MCB (*fig.* 2), complemento de ACM, se divide en dos partes iguales por medio de Ct, será CT = Tt; es decir,

$$\text{secan. AM} = \text{cot. } \frac{1}{2} \text{ compto. AM.} - \text{tang. AM:}$$

y

$$\text{cosec. BM} = \text{cot. } \frac{1}{2} \text{ BM} - \text{cot. BM.}$$

Del mismo modo se obtienen los senoversos y cosenoversos. En efecto, de las definiciones que preceden, se sigue que

$$\text{senov. } \alpha = 1 - \text{cos. } \alpha; \text{ y cosenov. } \alpha = 1 - \text{sen. } \alpha.$$

5.—**Fórmulas logarítmicas.**—Antes de Néper, se habian formado las tablas trigonométricas de los senos naturales, cosenos, tangentes, etc.: por medio de ellas y por via de multiplicacion ó division se obtenian difícilmente las soluciones de las cuestiones relativas á la topografía, geodésia, astronomía, etc.; pero desde que se dió á conocer el gran descubrimiento de Néper, las cosas han cambiado por completo, y á los senos naturales, cosenos, tangentes, cotangentes, etc., se han sustituido los logaritmos. Por lo tanto presentaremos ahora las fórmulas logarítmicas y á seguida la correspondencia recíproca entre los logaritmos vulgares ó artificiales con los neperianos ó hiperbólicos, para hacer despues las oportunas aplicaciones.

Así, pues, viniendo á las dos inmensas progresiones que resultan de la combinacion de las potencias subduplas de 10 y de los exponentes; tomando dos términos consecutivos cualesquiera, tales como Y é YM′, y los logaritmos y é $y + m'$, se tiene

$$\frac{\text{YM}' - \text{Y}}{\text{Y}} \text{ ó } \frac{\Delta\text{Y}}{\text{Y}} = \text{M}' - 1, \text{ é } \quad y + m' - y \text{ ó } \Delta\text{L.Y} = m':$$

ó bien

$$m' = (\text{M}' - 1)\,\text{K}; \text{ luego } \Delta\text{L.Y} = \text{K } \frac{\Delta\text{Y}}{\text{Y}}.$$

En estas últimas expresiones K representa un valor aproximado del módulo. Esta aproximacion de k en el límite, no difiere del verdadero valor del módulo mas que en una cantidad infinitamente pequeña; y por consiguiente se tendrá; haciendo uso del cálculo diferencial

$$d\,\text{L. Y} = k\ \frac{d\text{Y}}{\text{Y}}$$

Las dos séries de esta ecuacion pueden desarrollarse tanto por encima de 10 y de su logaritmo 1, como por debajo de 1 y de su logaritmo 0: de todos modos Y puede representar los números mayores ó menores que la unidad. Sea, pues, $Y = 1 + x$ y tendremos

$$d\,\mathrm{L.}\,(1+x) = k\,\frac{dx}{1+x} = k\,(dx - xdx + x^2dx - x^3dx + \text{etc.}):$$

de donde se deduce

$$\mathrm{L.}\,(1+x) = k\,(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \text{etc.});$$

del mismo modo se tiene

$$\mathrm{L.}\,(1-x) = -k\,(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \text{etc.}).$$

Sea $x = \frac{\Delta n}{n}$, nos dará

$$(\mathrm{A}')\qquad \mathrm{L.}\,(n+\Delta n) = \mathrm{L.}\,n + k.\left[\frac{\Delta n}{n} - \frac{(\Delta n)^2}{2n^2} + \frac{(\Delta n)^3}{3n^3} - \frac{(\Delta n)^4}{4n^4} + \frac{(\Delta n)^5}{5n^5} - \ldots \text{etc.}\right].$$

$$(\mathrm{B}')\qquad \mathrm{L.}\,(n-\Delta n) = \mathrm{L.}\,n - k.\left[\frac{\Delta n}{n} + \frac{(\Delta n)^2}{2n^2} + \frac{(\Delta n)^3}{3n^3} + \frac{(\Delta n)^4}{4n^4} + \frac{(\Delta n)^5}{5n^5} + \ldots \text{etc.}\right].$$

Si se suman ó se restan estas dos fórmulas nos dan

$$(\mathrm{C}')\qquad \mathrm{L.}\,(n+\Delta n) = 2\,\mathrm{L.}\,n - \mathrm{L.}\,(n-\Delta n) - k\left[\frac{(\Delta n)^2}{n^2} + \frac{(\Delta n)^4}{2n^4} + \frac{(\Delta n)^6}{3n^6} + \text{etc.}\right].$$

$$(\mathrm{D}')\qquad \mathrm{L.}\,(n+\Delta n) = \mathrm{L.}\,(n-\Delta n) + 2k.\left[\frac{\Delta n}{n} + \frac{(\Delta n)^3}{3n^3} + \frac{(\Delta n)^5}{5n^5} + \frac{(\Delta n)^7}{7n^7};+\text{etc.}\right]$$

Sustituyendo en la fórmula (A'), $2\Delta n$ á Δn; $3\Delta n$ á Δn; $4\Delta n$ á Δn, etc.; $m\Delta n$ á Δn, resultarán las ecuaciones (A''); (A'''); etc., que combinadas entre sí de un modo tal, como

$A'' - 2A'$; $A''' - 3A'' + 3A'$; etc., darán un gran número de fórmulas que serán otros tantos casos particulares de la expresion general que sigue:

$$(E')\qquad L.\,(n + m\Delta n) = m\,L.\,[n + (m-1)\,\Delta n] - \frac{m\,(m-1)}{2}\ldots$$

$$L.\,[n + (m-2)\,\Delta n] + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{2\ldots3}\ldots\ldots$$

$$L.\,[n + (m-3)\,\Delta n] - \text{etc.}\ \ldots\ldots \mp L.\,n. \mp$$

$$\mp \frac{k}{m}.\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^{m} \times (m^{m} - m.\,(m-1)^{m} + \frac{m\,(m-1)}{2} \times$$

$$\times (m-2)^{m}\ldots\ldots \mp m) \pm \frac{k}{m+1}.\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^{m+1} \times$$

$$\times (m^{m+1} - m\,(m-1)^{m+1} + \frac{m\,(m-1)}{2}\,(m-2)^{m+1}\ldots \mp m)$$

$$\mp \frac{k}{m+2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^{m+2} \times (m^{m+2} - m\,(m-1)^{m+2} +$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2}(m-2)^{m+2}\ldots \mp m) \pm \ldots \text{etc.}$$

El signo más tiene lugar cuando m es par. Si se opera del mismo modo con la fórmula (B') se llega á otra (F') que no difiere de (E') sino en que $\Delta\, n$ y es negativo. De la misma manera si operase en las fórmulas (C') y (D'), resultarian las expresiones que se obtendrian combinando (E') y (F') por via de adicion y de sustraccion.

La aplicacion de todas estas fórmulas á la investigacion de los logaritmos, es muy fácil, y por lo tanto no nos detendremos en presentar ejemplos.

6 —Relacion entre los logaritmos artificiales y los neperianos.—Indicaremos sucintamente el modo con que se ha efectuado el cálculo de unos y otros logaritmos, y la relacion que exi-te entre ellos La série que da logaritmo $(1 + x)$, si se hace $x = y - 1$, se convierte en logaritmo comun

$$\log.\,y = \log.\,e\,[y - 1 - \tfrac{1}{2}\,(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}\,(y-1)^3 - \tfrac{1}{4}\,(y-1)^4 + \text{etc.}].$$

Cuando el logaritmo es neperiano se le designará solo con la letra l, y en tal caso será

$$l\,y = y - 1 - \tfrac{1}{2}\,(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}\,(y-1)^3 - \tfrac{1}{4}\,(y-1)^4 + \text{etc.}$$

Estas fórmulas no pueden aplicarse sino cuando el número y difiere muy poco de la unidad. Mas si se hace

$$y = \sqrt[r]{z},$$

siendo r un número cualquiera, la primera dará

$$\log. z = r \log. e \left[\sqrt[r]{z} - 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt[r]{z} - 1 \right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sqrt[r]{z} - 1 \right)^3 - \text{etc.} \right];$$

y si se toma r negativamente, será

$$\log. z = r \log. e \left[1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} \right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} \right)^3 + \text{etc.} \right].$$

Estas dos séries, en las que se puede dar á r el valor que se quiera, serán convergentes; la primera cuando r sea tal que se tenga $\sqrt[r]{z} < 2$, y la segunda cuando sea $\sqrt[r]{z} > \frac{1}{2}$. Además se ve desde luego que si la primera série está compuesta alternativamente de términos positivos y negativos, mientras que en la segunda todos son positivos, se tiene

$$\log. z < r \log. e \left(\sqrt[r]{z} - 1 \right), \text{ y } \log. z > r \log. e \left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} \right).$$

Lo que da dos límites que se pueden aproximar cuanto se quiera, aumentando el índice r del radical.

Además es preciso conocer $\log. e$. Se obtiene advirtiendo que si b es la base del sistema á que pertenece $\log. z$, se tiene $e = b^{\log. e.}$; tomando en ambos miembros los logaritmos neperianos, resulta

$$1 = \log. e.\, l\, b;$$

de donde

$$\log. e = \frac{1}{l\, b}.$$

La expresion de $l\, y$ arriba indicada, da haciendo..... $y = b$,

$$l\, b = \frac{1}{\log. e} = b - 1 - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \frac{1}{4}(b-1)^4 + \text{etc.}$$

y por lo tanto

$$l b = \frac{1}{\log. e} = r \left[\sqrt[r]{b} - 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt[r]{b} - 1 \right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sqrt[r]{b} - 1 \right)^3 + \text{etc.} \right].$$

$$l\, b = \frac{1}{\log. e} = r \left[1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{\ }} \right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} \right)^3 + \text{etc.} \right].$$

El número $l b$, esto es, el logaritmo neperiano de la base del sistema, se llama *módulo* por los geómetras y que nosotros designaremos por M. En el sistema neperiano, el módulo es igual á la unidad. Los logaritmos tomados en el sistema cuya base es b, multiplicados por $lb = M$, ó sea el módulo, se convertirán en logaritmos neperianos.

En el sistema comun la base $b = 10$.

Tomando $r = 2^{60}$ se halla extrayendo 60 veces la raiz cuadrada de 10, y será

$$\sqrt[2^{60}]{10} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527.$$

$$\frac{1}{2^{60}} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37988\ 40354.$$

Luego:

$$\frac{1}{lb} = \log.\ e = \frac{86\ 73617\ 37988\ 40354}{199\ 71742\ 08125\ 50527} = 0{,}43429\ 44819.$$

$$M = lb = \frac{1}{\log.\ e} = 2{,}30258\ 50930.$$

Por esta última relacion se deben multiplicar los logaritmos ordinarios para obtener los neperianos.

CAPÍTULO II.

CÁLCULO DE LOS VALORES TRIGONOMÉTRICOS Y ELEMENTOS NECESARIOS PARA EL TRAZADO DE CURVAS CIRCULARES.

7.—Problema fundamental.—Siendo nuestro propósito indicar únicamente los fundamentos y las relaciones que ligan á los logaritmos neperianos y artificiales con los valores trigonométricos naturales de las líneas y colíneas, sin ocuparnos de la manera de aplicar las fórmulas generales, nos concretaremos á los estrechos límites de este tratado, dando solamente una ligera idea del procedimiento para determinar los valores de las líneas y colíneas, desarrollo de los arcos correspondientes á los ángulos trigonométricos complementarios, y los distintos elementos para trazar las curvas circulares, construyendo las tablas trigonométricas naturales en vista de las expresiones logarítmicas, y presentando desde luego la cuestion principal bajo el enunciado siguiente:

Dado el número de grados, minutos y segundos de un arco cualquiera, hallar por medio de logaritmos artificiales los valores de las líneas y colíneas trigonométricas naturales á que pertenecen, y recíprocamente.

El logaritmo seno, coseno, tangente y cotangente del ángulo trigonométrico, y el de su complemento ó el de los arcos complementarios, se halla directamente en las tablas de logaritmos.

Habiendo observado en distintas veces que las diversas tablas de líneas trigonométricas que hemos usado, y especialmente otras varias que contienen los elementos para el trazado sobre el terreno de curvas circulares y parabólicas, tuvimos ocasion de notar graves errores, no solo materiales, sino lo que es peor todavía del sistema seguido en su composicion. Las notables diferencias que se advierten confrontando unas con otras, sin duda provienen ó de su orígen, ó del grado de aproximacion y del número de cifras decimales con que hayan sido calculadas. De manera que en vista de los resultados comparados, confrontados los cálculos fundados en ellas, aparecerian diferencias muy notables, y á veces cuando estas se van acumulando concluyen por dar lugar á errores enormes. Por lo tanto hemos creido conveniente extender los valores ó elementos á siete cifras decimales, calculadas de 1′ en 1′ por las tablas de Callet, y de 30″ en 30″ por la interpolacion de las partes proporcionales, interpolacion que, ya sea por cocientes ó por diferencias, darán en todo caso resultados más ó ménos exactos y aproximados entre sí para los pequeños incrementos de los ángulos. Aunque para el trazado de alineaciones rectas y curvas serian suficientes unas tablas calculadas con cinco ó seis cifras decimales; sin embargo, como las del último órden no siempre son exactas sino que hay alguna diferencia por defecto ó por exceso si se desprecia alguna fraccion ó se hace refluir aumentando en una unidad la última cifra decimal; y por otra parte, como para el cálculo de distancias y alturas, medicion de ángulos, resolucion de triángulos y otras cuestiones que requieren mucha precision, conviene tomar el mayor número de cifras exactas, aun cuando se supriman despues algunas, aproximando el resultado final á millonésimas solamente; hé aquí porque teniendo esto en cuenta hemos adoptado como suficiente el número de siete cifras decimales igual al de las tablas de logaritmos de Callet que son unas de las completas y exactas que generalmente se usan para los cálculos superiores, tanto de astronomía y geodesia, como de geografía y navegacion, etc., con el objeto de conseguir cierta uniformidad y el mayor grado de exactitud en los estudios y trazados de caminos y canales, á fin de que tengamos un prototipo, digámoslo así, refiriendo á las mencionadas tablas de Callet como término de comparacion constante, todas las tablas trigonométricas naturales que se usan en la práctica ó segun nos las presentan los últimos adelantos.

Aunque las actuales las hemos comprobado diferentes veces por distintos sugetos, confrontadas con otras y últimamente revisadas; sin embargo, como pudiéramos haber equivocado alguna cifra ó se hubiese escapado algun error al tiempo de manejar las tablas ya de apreciacion en las últimas decimales, ya material ó de imprenta, á pesar de las precauciones tomadas en la correccion de pruebas y demás, hemos creido conveniente indicar el tipo del cálculo, presentando algunos ejemplos numéricos tanto de las primeras líneas y colíneas como de las segundas; cuyos valores han sido deducidos con el objeto de que nuestros lectores puedan rectificar cualquier falta y confrontar facilmente los valores ó elementos de curvas en casos análogos, aunque las tablas trigonométricas complementarias llevan en sí mismas, como tales, un medio seguro y sencillo de comprobacion, fundado en la relacion que existe entre los ángulos ó los arcos complementarios ó suplementarios situados sobre una misma horizontal en cada dos páginas que llamaremos *gemelas*, porque se abarcan de un solo golpe de vista.

Renunciamos en obsequio de la brevedad á la resolucion del problema recíproco; esto es, conocidos los logaritmos artificiales ó vulgares, de las líneas trigonométricas, determinar el número de grados, minutos y segundos de un arco ó de un ángulo. Así, pues, nos limitaremos solo á la composicion de las tablas, presentando ejemplos numéricos y como resúmen de todo el

8.—Tipo del cálculo de las primeras líneas y colíneas respectivas.

EJEMPLOS.

1.° Dado el ángulo de 10° 20′ 30″ determinar el seno natural.

Log. sen. 10° 20′ 30″........................ = 9.2541072:
Seno natural 10° 20′ 30″........................ = 0,1795176.

2.° Determinar el coseno natural del ángulo 10° 20′ 30″

Log. cos. 10° 20′ 30″........................ = 9.9928868:
Coseno natural 10° 20′ 30″........................ = 0,9837547.

3.° Conocido el ángulo ó el arco de 20° 10′ 30″, hallar la tangente natural.

Log. tang. 20° 10′ 30″........................ = 9.5651782:
Tangente natural 20° 10′ 30″........................ = 0,3674330.

4.° Hallar la cotangente natural del ángulo de 20° 10′ 30″.

Log. cotang. 20° 10′ 30″........................ = 0.4348218:
Cotangente natural 20° 10′ 30″........................ = 2,7215848.

5.° Longitud del arco de 20° 10′ 30″ $= \dfrac{2\pi R\ (20^{\circ}\ 10'\ 30'')}{360^{\circ}} = 0{,}3521202.$

Aunque las tablas de logaritmos de que nos hemos servido, no contienen mas que los senos y cosenos, tangentes y cotangentes; esto no obstante se pueden hallar sencillamente por medio de ellas el senoverso y cosenoverso, secante y cosecante naturales, segun se deduce de las expresiones trigonométricas; expresiones que, traducidas al lenguaje vulgar, nos dan las siguientes:

9.—Reglas para determinar las segundas líneas y colíneas correspondientes.— 1.ª *Al complemento aritmético del logaritmo coseno, añádase una decena, esto es,* 10,0000000, *y se tendrá el logaritmo de la secante.*

2.ª *Para hallar el logaritmo de la cosecante, auméntese* 10,0000000 *al complemento aritmético del logaritmo del seno.*

3.ª *El logaritmo del senoverso se hallará del mismo modo añadiendo al doble logaritmo seno de la mitad del ángulo ó del arco dado, una constante* $C = 0{,}3010300$, *y restando* 10,0000000 *de la suma.*

4.ª *Al doble logaritmo seno de la mitad del complemento del arco dado, auméntese la constante* 0,3010300, *réstense* 10,0000000 *de la suma, y se tendrá el logaritmo del cosenoverso.*

Para mayor claridad presentaremos algunos ejemplos numéricos que indiquen el procedimiento tanto respecto al modo de hallar los valores de las líneas trigonométricas arriba expresadas, como para que sirvan de comprobacion, en la forma siguiente:

10.—Tipo del cálculo de las segundas líneas y colíneas.—

EJEMPLOS.

1.° Hallar la sec. natural del arco 86° 48′ 30″.

C.to log. cos. 86° 48′ 30″................	= 1.2543297
....	+ 10.0000000
Log. sec. 86° 48′ 30″................	= 11.2543297
Secante natural 86° 48′ 30″................	= 17,960968

2.° Determinar la cosec. del ángulo 48° 56′ 30″.

C.to log. sen. 48° 56′ 30″................	= 0.1226049
....	+ 10.0000000
Log. cosec. 48° 56′ 30″................	= 10.1226049
Cosecante natural 48° 56′ 30″................	= 1,3261874

3.° Hallar el senoverso natural del arco 34° 18′ 30″.

Log. sen. 17° 9′ 15″................	= 9 4697393
Duplo del log. seno................	= 18.9394786
....	+ 0.3010300
	19.2405086
....	— 10.0000000
Log. senov. 34° 18′ 30″................	= 9.2405086
Senoverso natural 34° 18′ 30″................	= 0,1739837

4.° Determinar el cosenoverso natural del ángulo 1° 1′ 30″.

C.to del arco 88° 58′ 30″	
Log. sen. 44° 29′ 30″................	= 9.8455653
Duplo del log. seno................	= 19.6911306
....	+ 0.3010300
	19.9921606
....	— 10.0000000
Log. cosenov. 1° 1′ 30″................	= 9.9921606
Cosenoverso natural 1° 1′ 30″................	= 0,9821111

11.—Coordinacion de los elementos de curvas circulares combinados con las líneas y colíneas trigonométricas.—Así como hemos podido determinar (núm. 6), la relacion entre los logaritmos vulgares y los neperianos, tambien es fácil conocer la recíproca correspondencia que existe entre las líneas trigonométricas y los distintos elementos de curvas, y la conversion de los valores de aquellas en otros geométricos para el trazado de alineaciones curvas por arcos de círculo; cuyos valores trasformados se calculan en funcion del ángulo de las alineaciones rectas y del radio-unidad.

De suerte que se han podido coordinar de un modo tal, que solamente con unas tablas de fácil manejo se presentan al primer golpe de vista los valores numéricos de las líneas y colíneas de los ángulos trigonométricos, é igualmente los elementos necesarios para el establecimiento de alineaciones rectas y curvas circulares, cuyas tablas son de grande utilidad práctica, tanto por su extension é innumerables aplicaciones, como por la claridad y sencillez con que están dispuestas para que puedan ser de un uso frecuente, y sobre todo general.

Antes de presentar las expresiones generales y el tipo del cálculo de los principales elementos aplicables al objeto de que se trata, será conveniente darlos á conocer empezando por las respectivas

12.—Definiciones de los elementos que constituyen la union ó acordacion de las alineaciones rectas.—*La tangente geométrica de un arco de círculo, es la tangente trigonométrica del arco que mide la mitad del suplemento del ángulo de las alineaciones rectas; en otros términos, es la tangente del arco correspondiente al ángulo trigonométrico complemento de la mitad del ángulo de las alineaciones ó de las tangentes principales.*

Se llama semi-cuerda de un arco, la mitad de la recta que une los puntos de tangencia; cuya mitad es á la vez igual á la abscisa tomada sobre la tangente y al seno correspondiente al ángulo trigonométrico.

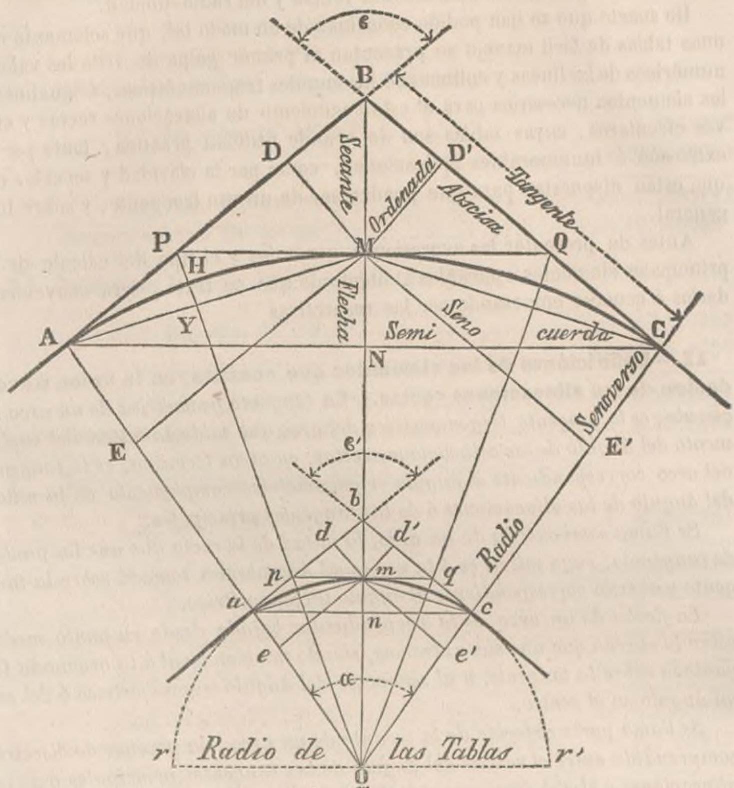
La flecha de un arco, es la perpendicular bajada desde su punto medio sobre la cuerda que une sus extremos, siendo tambien igual á la ordenada levantada sobre la tangente, y al senoverso del ángulo trigonométrico ó del semi-ángulo en el centro.

Se llama parte exterior de la secante de un arco, la porcion de bisectriz comprendida entre el vértice del ángulo de las tangentes principales ó de las alineaciones y el del arco correspondiente al ángulo en el centro; la cual es igual á la diferencia entre el radio y la secante del arco que mide el ángulo suplementario.

La semi-curva es la longitud de un arco de círculo que tiene su origen en el punto de tangencia de las alineaciones rectas, y el otro extremo sobre la bisectriz del ángulo que forman en su encuentro, é igual al desarrollo del correspondiente al arco trigonométrico.

13.—Discusion de las fórmulas principales.—Sean AB y BC (*fig.* 3) dos alineaciones rectas que se cortan formando entre sí un ángulo conocido, y R el radio dado.

Fig. 3.



$ro = or' = 1^m,0000000$

Las perpendiculares OA y OC á las alineaciones AB y BC determinan los puntos de contacto A y C; y por consiguiente las tangentes geométricas BA y BC del arco AMC.

Llamando α al ángulo AOC formado en el centro por los radios OA y OC de los puntos de tangencia, y 6 al ángulo ABC de las alineaciones rectas, que es igual á $6'$ ó al que resulta de la interseccion de las dos tangentes *ab* y *bc* al arco trigonométrico *amc*, y tendremos

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \text{tang.}\ \frac{1}{2}\,\alpha\,;\ \text{y AN} = \mathrm{EM} = \text{sen.}\ \frac{1}{2}\,\alpha\,:$$

$$\mathrm{AN} = \mathrm{AD} = \mathrm{AC} - \mathrm{NC} = \text{semi-cuerda}\ \frac{1}{2}\,\alpha$$

$$\mathrm{MN} = \mathrm{AE} = \text{senover.}\ \frac{1}{2}\,\alpha\,;\ \text{y MN} = \mathrm{MD} = \text{flecha}\ \frac{1}{2}\,\alpha$$

$$BM = BO - MO = \text{secante}\,\frac{1}{2}\,\alpha;\ \text{y}\ AM = \text{arco}\,\frac{1}{2}\,\alpha = \frac{2\pi R\,\frac{1}{2}\,\alpha}{360^\circ}$$

Observando que en el cuadrilátero ABCO, los ángulos en A y en C son rectos (Geom.), la suma de los otros dos ángulos α y 6 es igual á media circunferencia; y por consiguiente

$$\alpha + 6 = 180^\circ;\ \text{de donde}\ \alpha = 180^\circ - 6.$$

Pero 6 es el ángulo de las alineaciones igual al de las tangentes, y α el ángulo en el centro: *Luego este ó sea el ángulo trigonométrico, es suplemento del ángulo de las alineaciones rectas y recíprocamente; es decir, que los dos son suplementarios: y por lo tanto los valores ó los elementos del primero equivalen á los del segundo.*

Tambien se observa que los triángulos rectángulos BAO y BCO tienen sus lados y sus ángulos respectivamente iguales, y la suma de los ángulos agudos de cada triángulo nos dá

$$\frac{1}{2}\,\alpha + \frac{1}{2}\,6 = 90^\circ;\ \text{de aquí se deduce que}\ \frac{1}{2}\,\alpha = 90^\circ - \frac{1}{2}\,6;$$

pero $\frac{1}{2}\,6$ es mitad del ángulo de las alineaciones, y $\frac{1}{2}\,\alpha$ mitad del ángulo en el centro: *luego la mitad del ángulo de las alineaciones, es complemento de la mitad del ángulo en el centro ó del ángulo trigonométrico, y por consiguiente, siendo ambos complementarios, las líneas trigonométricas del primero (núm. 3.) equivalen á las colíneas del segundo y recíprocamente:*

Así, pues, tendremos:

1.° La tangente geométrica AB del arco AMC, es la tangente trigonométrica de la mitad del mismo arco, que llamaremos T, y nos da la fórmula

$$(1)\qquad T = AB = R\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\,\alpha = R\ \text{cotang.}\,\frac{1}{2}\,6.$$

Tirando por M la recta PQ perpendicular á BO, será tangente en el vértice de la curva, y uniendo los puntos P y Q con O, los ángulos AOP, POM, MOQ y QOC son iguales entre sí; y por lo tanto cada uno de ellos es igual á $\frac{1}{4}\,\alpha$: la recta MP tangente geométrica del ángulo AOM $= \frac{1}{2}\,\alpha$, es la tangente trigonométrica de POM; y por consiguiente llamándola T_1 se tiene la expresion

$$(2)\qquad T_1 = R\ \text{tang.}\ \frac{1}{4}\,\alpha = R\ \text{cotang.}\ \frac{1}{4}\,6.$$

En general, para una fraccion $\frac{1}{n}$ del arco de círculo, la tangente geométrica es la tangente trigonométrica de su mitad $\frac{1}{2n}$: de donde resulta la fórmula

(3) $$T_n = R \text{ tang. } \frac{\alpha}{2n} = R \text{ cotang. } \frac{6}{2n}.$$

2.° La cuerda AC que une los puntos de tangencia, como que es igual al doble seno de la mitad del arco AMC, designándola por C, tendremos la expresion

(4) $$C = 2R \text{ sen. } \frac{1}{2}\alpha = 2R \cos. \frac{1}{2} 6.$$

Del mismo modo la semi-cuerda se obtiene dividiendo por 2 esta fórmula, que nos dá

(4′) $$\frac{1}{2} C = R \text{ sen. } \frac{1}{2}\alpha = B \cos. \frac{1}{2} 6.$$

Igualmente la cuerda AM de la mitad del arco llamándola C_1 será

(5) $$C_1 = 2R \text{ sen. } \frac{1}{4}\alpha = 2R \cos. \frac{1}{4} 6:$$

y en general, la cuerda de la fraccion $\frac{1}{2n}$ del arco total, estará expresada por la fórmula

(6) $$C_n = 2R \text{ sen. } \frac{\alpha}{2n} = 2R \cos. \frac{6}{2n}.$$

3.° La flecha MN que es igual al senoverso de la mitad AM del arco AMC, lamándola F nos da la expresion

(7) $$F = R \text{ senover. } \frac{1}{2}\alpha = R \text{ cosenover. } \frac{1}{2} 6.$$

De la misma manera la flecha HY de la mitad AM del arco, será F_1; y así se tiene la fórmula

(8) $$F_1 = R \text{ senover. } \frac{1}{4}\alpha = R \text{ cosenover. } \frac{1}{4} 6.$$

En general, la parte $\frac{1}{2n}$ del arco total se deduce de la expresion

(9) $$F_n = R \text{ senover. } \frac{\alpha}{2n} = R \text{ cosenover. } \frac{6}{2n}.$$

4.° La parte exterior BM de la secante geométrica de un arco, es igual á la diferencia entre la secante trigonométrica BO de la mitad del arco y el radio: de donde si se designa por S — R, resulta la fórmula

(10) $$S - R = R \sec. \frac{1}{2}\alpha - R = R\left(\sec. \frac{1}{2}\alpha - 1\right) = R\left(\text{cosec. } \frac{1}{2} 6 - 1\right).$$

Del mismo modo la parte exterior PH de la secante de la mitad del arco AMC, se obtiene por la fórmula

$$(11)\qquad S_1 - R = R\left(\sec.\ \frac{1}{4}\alpha - 1\right) = R\left(\operatorname{cosec.}\ \frac{1}{4}\beta - 1\right):$$

y en general, para una fraccion $\frac{1}{2n}$ del arco total, representándola por $S_n - R$, tendremos la expresion

$$(12)\qquad S_n - R = R\left(\sec.\ \frac{\alpha}{2n} - 1\right) = R\left(\operatorname{cosec.}\ \frac{\beta}{2n} - 1\right).$$

5.° El desarrollo ó longitud de la circunferencia del radio R, tiene por expresion $2\pi R$; y como este desarrollo corresponde á los 360° de la circunferencia, la longitud del arco de un grado será $\frac{2\pi R}{360°}$ y por consiguiente el desarrollo del arco de α grados designándole por D, se deduce de la expresion

$$(13)\qquad D = \frac{2\pi R\alpha}{360°} = 0{,}0174532925\ R\,\alpha.$$

Observando que $\frac{2\pi R\alpha}{360°}$ es igual al total desarrollo del arco de α grados del círculo, el de $\frac{1}{2}\alpha$ que representa la semi-curva, se hallará por la fórmula

$$(14)\qquad \frac{1}{2}\ D = \frac{2\pi R\ \frac{1}{2}\alpha}{360°} = 0{,}0174532925\ R\ \frac{1}{2}\alpha:$$

en general la longitud de la parte $\frac{1}{2n}$ del arco total designándola por D_n, nos da la expresion

$$(15)\qquad D_n = \frac{2\pi R\ \frac{1}{2}\alpha}{360° n} = 0{,}0174532925\ R\ \frac{\alpha}{2n}.$$

Si se quisiera tener otras fórmulas de los principales elementos para el trazado de curvas circulares en funcion de la tangente y del mismo ángulo de las alineaciones, no habria mas que despejar R en las ecuaciones precedentes y sustituir su valor en las respectivas expresiones en lugar de R; cuyo valor se hallaria fácilmente, aunque las fórmulas ya no serian tan sencillas como cuando se calculan en funcion del radio.

14.—Cuestion fundamental acerca de los valores numéricos de los elementos de curvas circulares.—Por medio de las fórmulas que preceden se pueden hallar los principales elementos para el trazado de curvas por arcos de círculo, que para un radio determinado y constante dén los valores numéricos correspondientes en cada expresion, ya en funcion de los ángulos trigonométricos complementarios que crecen de 30 en 30 segundos, ó bien de los ángulos suplementarios de las alineaciones que decrecen de minuto en minuto, combinándoles entre sí en virtud de las mútuas relaciones que existen entre unos y otros valores que ya se pueden hallar directamente sirviéndonos desde luego de las tablas trigonométricas complementarias en todos los casos que puedan ocurrir, los que se comprenden en la cuestion fundamental bajo el sencillo enunciado que sigue:

Dado el ángulo de las alineaciones rectas y el rádio del arco de circulo que ha de unirlas, resolver en funcion de estos datos y por medio de las tablas trigonométricas los problemas para hallar los elementos que á continuacion se expresan:

1.° *La longitud de la tangente del arco; la de su mitad; la de su cuarta parte, y en general, la que corresponde á la fraccion* $\frac{1}{2n}$ *de todo el arco.*

2.° *La cuerda del arco; la semi-cuerda; la de su cuarta parte, y la de la porcion* $\frac{1}{2n}$ *del mismo arco.*

3.° *La flecha del arco; la de su mitad, y la de la parte* $\frac{1}{2n}$ *de dicho arco.*

4.° *La secante del arco y su parte externa; la de su mitad, y la de la porcion* $\frac{1}{2n}$ *del arco.*

5.° *La longitud del arco ó de la semi-curva, y en general, el desarrollo de la fraccion* $\frac{1}{2n}$ *del arco.*

Con el objeto de indicar pronta y ordenadamente el procedimiento, conviene poner de manifiesto la recíproca correspondencia entre los valores de las líneas trigonométricas y los de los elementos geométricos de las curvas, y hacer ver como hemos podido trasformarlos fácilmente y combinarlos sin alterar las mútuas relaciones que existen entre los ángulos trigonométricos complementarios, y los de las alineaciones suplementarios; por lo tanto, consideramos oportuno presentar los valores numéricos.

Así, pues, para que sirva de ejemplo vamos á resolver los problemas derivados de la cuestion fundamental, haciendo aplicacion de las fórmulas (1), (4'), (7), (10) y (14).

Sea una curva de 1.000 metros de radio, la cual debe unir dos alineaciones rectas que forman entre sí un ángulo de 156° 29', hallar los valores de las líneas geométricas: 1.° de la tangente; 2.° de la semi-cuerda de los puntos de contacto; 3.° de la flecha; 4.° de la secante y su parte exterior; y 5.° de la longitud del arco trigonométrico, igual á la semi-curva que ha de enlazar las dos alineaciones rectas.

Sustituyendo en las fórmulas los elementos de curvas á los valores respectivos de las líneas que nos dan inmediatamente las tablas trigonométricas naturales que tienen la unidad por rádio, y representándolos por sus iniciales, podremos fijar sencilla y claramente el

15.—Tipo del cálculo de los elementos de curvas circulares.—

EJEMPLOS.

1.° Tang. $\frac{1}{2}\ \alpha = t = 0{,}2081520$

2.° Sen. $\frac{1}{2}\ \alpha = \frac{1}{2}\ c = 0{,}2037841$

3.° Sen. ver. $\frac{1}{2}\ \alpha = f = 0{,}0209841$

4.° Sec. $\frac{1}{2}\ \alpha - 1 = s - r = 1{,}0214339 - 1 = 0{,}0214339$

5.° Arc. $\frac{1}{2}\ \alpha = \frac{1}{2}\ D = 0{,}2052216.$

Como todos los valores, tanto de las líneas y colíneas trigonométricas, como los de los elementos de las líneas geométricas, son proporcionales al radio y á la tangente, antes y despues de su trasformacion en las fórmulas, bastará para sustituir las últimas líneas á las primeras, multiplicar los valores trigonométricos por el del radio dado; y por consiguiente, como en el problema propuesto el valor del radio es $R = 1.000$ metros, si representamos las líneas geométricas por las mismas letras de los primeros términos de las respectivas fórmulas, tendremos

1.° $T = 208{,}152$

2.° $\frac{1}{2}\ C = 203{,}784$

3.° $F = 20{,}984$

4.° $S - R = 1021{,}434 - 1.000 = 21{,}434$

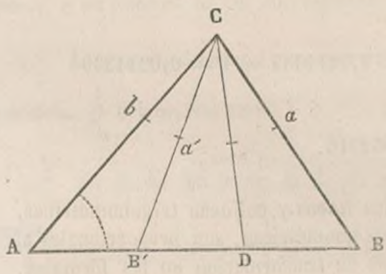
5.° $\frac{1}{2}\ D = 205{,}222$

CAPÍTULO III.

RESOLUCION DE TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS.

16.—Condiciones de los triángulos oblicuángulos.—*Casos que pueden ocurrir.*—Para que el problema de la resolucion de triángulos rectilíneos, en general, sea determinado, es necesario conocer en todo triángulo oblicúangulo tres de las seis partes que le constituyen, á saber: tres ángulos y tres lados, debiendo figurar entre los datos uno de estos lados por lo menos. Pero cuando el triángulo es rectángulo se conoce siempre el ángulo recto, y por lo tanto bastará que se conozcan otras dos de las cinco partes restantes. De suerte que las resoluciones de los triángulos rectángulos no son más que casos particulares del problema general de los triángulos rectilíneos.

Fig. 4.



En la resolucion de estos, pueden presentarse cuatro casos: para que se comprenda mejor el procedimiento y con mayor facilidad en todos ellos, designaremos por A, B, C, (*fig.* 4), los tres ángulos, y llamaremos a, b, c, á los tres lados del mismo triángulo respectivamente opuestos á dichos ángulos.

Primer caso.—*Dados el lado a y los ángulos B y C, hallar los lados b y c y el ángulo A opuesto á dicho lado.*

Desde luego se tiene $A = 180^\circ - (B + C)$.

El lado b se hallará por el siguiente teorema:

«*En todo triángulo los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*»

De donde resulta la proporcion

$$a : b :: \text{sen. } A : \text{sen. } B,$$

que nos da la fórmula

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } A}. \qquad (16)$$

El lado c se hallará igualmente por la ecuacion

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } A}. \qquad (17)$$

Segundo caso.—*Dados dos lados a y b y el ángulo comprendido C, hallar el tercer lado c y los otros dos ángulos A y B.*

Tenemos desde luego $A + B = 180° - C$. De suerte que conocemos la suma de los dos ángulos A y B.

Ahora podemos hallar su diferencia, cuya resolucion se funda en el siguiente enunciado.

«*En todo tiríngulo la suma de dos lados, es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de los ángulos opuestos á dichos lados, es á la tangente de la mitad de la diferencia de los mismos ángulos.*»

Formando proporcion nos da la fórmula

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\,(A+B)}{\text{tang. } \frac{1}{2}\,(A-B)}. \qquad (18)$$

Para hallar el lado c tenemos la proporcion

$$c : a :: \text{sen. } C : \text{sen. } A,$$

que se resuelve por la fórmula (17) segun hemos dicho.

Tercer caso.—*Dados los tres lados a, b y c, hallar los tres ángulos A, B y C.*

Hay que tener presente el teorema siguiente:

«*En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de estos dos lados por el coseno del ángulo comprendido.*»

Aplicando esto á los tres lados del triángulo nos dará tres ecuaciones distintas:

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos. A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos. B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos. C \end{array}\right. \qquad (19)$$

que contienen á las seis partes del triángulo, y por consiguiente pueden servir para la resolucion del problema general de la trigonometría rectilínea.

Así, pues, el ángulo A se hallará por la ecuacion

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c, \cos. A,$$

que contiene á los datos y á la incógnita, de donde resulta

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a}{2\,b\,c}.$$

Por medio de esta fórmula puede hallarse otra mejor dispuesta para el cálculo. Si se introduce el perímetro $a + b + c = 2\,p$; restando $2\,c$ de ambos miembros, sustituyendo y suprimiendo el factor comun 2, tendremos

$$\text{sen.}^2 \frac{1}{2} A = \frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}. \qquad (20)$$

Extrayendo la raiz cuadrada será

$$(21)\qquad \text{sen. } \frac{1}{2}\, A = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}}.$$

Permutando convenientemente las letras y aplicando á los ángulos B y C el teorema precedente, resultarán las dos fórmulas que siguen:

$$(22)\qquad \text{Sen. } \frac{1}{2}\, B = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{a\,c}}.$$

$$(23)\qquad \text{Sen. } \frac{1}{2}\, C = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{a\,b}}.$$

De un modo semejante hallaremos

$$(24)\qquad \text{Cos. } \frac{1}{2}\, A = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}}.$$

$$(25)\qquad \text{Cos. } \frac{1}{2}\, B = \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{a\,c}}.$$

$$(26)\qquad \text{Cos. } \frac{1}{2}\, C = \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}}.$$

Igualmente dividiendo cada una de las fórmulas (21), (22) y (23) por su correspondiente, de las (24), (25) y (26), resultan estas otras tres

$$(27)\qquad \text{Tg. } \frac{1}{2}\, A = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}.$$

$$(28)\qquad \text{Tg. } \frac{1}{2}\, B = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}.$$

$$(29)\qquad \text{Tg. } \frac{1}{2}\, C = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}.$$

Se tendrá una comprobacion en que la suma de los tres ángulos así hallados debe ser igual á 180°.

De la ecuacion del perímetro $a + b + c = 2\,p$ se deduce que la superficie de un triángulo cualquiera cuando se conocen los tres lados a, b, c, tiene por expresion

$$(30)\qquad \text{S.} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Cuarto caso. *Dados dos lados a y b y el ángulo A opuesto á uno de ellos, hallar el tercer lado c y los otros dos ángulos B y C.*

El ángulo B se hallará por la proporcion

$$\text{sen. B} : \text{sen. A} :: b : a$$

(31) $$\text{sen. B} = \frac{b \text{ sen. A}}{a}.$$

El ángulo $C = 180^\circ - (A + B)$.

El lado c se halla en seguida por la proporcion

$$c : a :: \text{sen. C} : \text{sen. A}.$$

(32) $$c = \frac{a \text{ sen. C}}{\text{sen. A}}.$$

La fórmula (31) no determina si el triángulo ABC por razon del ángulo B, es acutángulo, obtusángulo ó rectángulo. De suerte que en este problema pueden ocurrir diferentes accidentes.

1.° Si $a > b$, tambien el ángulo A será mayor que el B, y por consiguiente este ángulo será agudo, en cuyo caso no hay más que una sola solucion; es decir, que el problema es determinado.

2.° Si $a = b$ será $A = B$; luego tambien en este caso el problema es determinado.

3.° Si $a < b$ será el ángulo A menor que el B.

En este caso nada se opone á que el ángulo B tenga dos valores; uno el de un ángulo agudo β dado por las tablas, y el otro su suplemento $180^\circ - \beta$.

Siendo β y $180^\circ - \beta$ los dos valores de B, los correspondientes de C serán $180^\circ - A - \beta$, y $180^\circ - A - 180^\circ + \beta = \beta - A$.

Los valores correspondientes de c se hallan

$$c = \frac{a \text{ sen. } (A + \beta)}{\text{sen. A}},\ c = \frac{a \text{ sen. } (\beta - A)}{\text{sen. A}}.$$

4.° Si a es igual á la altura del triángulo, el ángulo B es recto, y el problema no tiene más qne una solucion.

5.° Si a fuese menor que la altura, resultaria un absurdo, que nos advertiria que el triángulo era imposible.

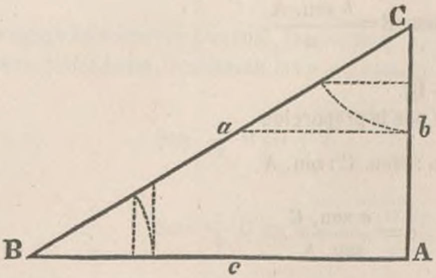
En cuanto al lado c puede hallarse directamente por medio de la (*fór.* 19) que contiene á los datos y á la incógnita,

ó bien

(33) $$c = b \cos. A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \text{ sen.}^2 A}.$$

17.—Condiciones de los triángulos rectángulos.—*Casos que se presentan.*—Como ya hemos dicho en el número precedente que en todo triángulo rectángulo, cuyos lados son A, B y C (*fig.* 5), se conoce el ángulo recto; claro es que bastará conocer otras dos de las cinco partes para que el problema sea determinado. En la resolucion de él pueden ocurrir cuatro casos distintos, á saber:

Fig. 5.



Primer caso.—*Dados los dos catetos b y c, hallar la hipotenusa a y los ángulos* B *y* C. Por el teorema llamado de Pitágoras se ha demostrado que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de cuadrados de los catetos.

La hipotenusa se hallará en seguida por la ecuacion $a^2 = b^2 + c^2$, que contiene á los datos b, c, y á la incógnita a. De esta ecuacion resulta la fórmula

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}. \tag{34}$$

El ángulo B se determina por el teorema siguiente: «*En todo triángulo rectángulo el radio es á la tangente de uno de los ángulos agudos, como el cateto adyacente á dicho ángulo, es al cateto opuesto.*»

Formando proporcion, tendremos R : tg. B : : c : b

Siendo R $= 1$, se puede reducir á la ecuacion $b = c$ tg. B ; de ella resulta

$$\text{tg. B} = \frac{b}{c}. \tag{35}$$

Conocido este ángulo, tendremos $C = 90° - B$.

Segundo caso.—*Dados la hipotenusa a y el cateto b, hallar el cateto c y las ángulos* B *y* C.

El cateto c se hallará por el teorema de Pitágoras, que nos da la ecuacion $c^2 = a^2 - b^2$:
de donde resulta

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{36}$$

El ángulo B se obtiene por el teorema que sigue:

«*En todo triángulo rectángulo el radio es al seno de uno de los ángulos agudos, como la hipotenusa es al cateto opuesto á dicho ángulo: ó bien, el ra-*

dio es al coseno de uno de los ángulos agudos, como la hipotenusa es al cateto adyacente á dicho ángulo.»

Formando proporcion será

$$R : \text{sen. } B :: a : b$$

ó bien

$$R : \cos. B :: a : c$$

que nos dan

$$\text{sen. } B = \frac{R\,b}{a}, \quad \cos. B = \frac{R\,c}{a}$$

pero como $R = 1$ es el radio de las tablas trigonométricas tomado por unidad se puede suprimir, y tendremos la fórmula

$$(37) \qquad \begin{cases} \text{sen. } B = \dfrac{b}{a}. \\ \cos. B = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

El ángulo $c = 90° - B$.

Tercer caso.—*Dados el cateto b y el ángulo* B, *hallar el cateto c, la hipotenusa a y el ángulo* C.

El cateto c se hallará por la ecuacion $b = c \text{ tg. } B$, de donde,

$$(38) \qquad c = b \cot. B.$$

La hipotenusa a se hallará por la ecuacion $b = a \text{ sen. } B$, de la cual resulta

$$(39) \qquad a = \frac{\text{sen. } B}{b}.$$

El ángulo c será

$$C = 90° - B.$$

Cuarto caso.—*Dados la hipotenusa a y el ángulo* B, *hallar los catetos b y c y el angulo* C.

Los catetos b y c se hallarán como en el 2.° caso, multiplicando por a los dos miembros de ambas ecuaciones, tendremos

$$(40) \qquad \begin{cases} b = a. \text{ sen. } B \\ c = a. \cos. B. \end{cases}$$

El ángulo C será tambien

$$C = 90° - B.$$

SEGUNDA SECCION.

SISTEMAS DE COORDENADAS Y SECCIONES CÓNICAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

PROBLEMAS INDETERMINADOS.

18. — Condiciones diferentes que deben reunir los problemas. — Para fijar cualquier punto en un plano, es necesario conocer sus distancias ó á dos rectas invariables, ó á un punto y una recta, conociendo esta y aquel, ó su distancia á un punto y la inclinacion de la linea que la marca con otra, ó bien en general, dos condiciones equivalentes á las anteriores. De aquí resulta que si al situar un punto no nos fuese conocida más de una de estas condiciones, se hallarian infinitos puntos que la cumpliesen, y en tal caso el problema que tuviese por objeto el fijarle, seria *indeterminado.*

Como para situar un punto han de existir precisamente dos condiciones diferentes, á las que debe satisfacer al mismo tiempo, se comprende bien que para reunir en una expresion algebráica ciertas condiciones á las cuales hayan de corresponder del mismo modo muchos puntos, cuando se trata de formular la expresion, resultará una série de puntos unidos entre sí que por lo general forman una línea. Luego, *si hay medios adecuados para ligar condiciones que sean comunes á muchos puntos consecutivos produciendo cuestiones indeterminadas, será posible hallar por medio de expresiones algebráicas la situacion de un punto, el curso de una línea con todos sus accidentes, y en general, todo cuanto tenga relacion con las formas y dimensiones de los cuerpos.*

Sabiendo ya que para que un punto quede determinado, se necesitan conocer sus distancias á dos ejes ó á dos rectas fijas, y como toda línea puede considerarse que es una série no interrumpida de puntos, para su representacion el medio adoptado consiste tambien en referir todos los puntos de cada línea á los mismos dos ejes fijos, deduciendo despues la relacion que, haciendo depender unas distancias de otras, sea comun á todos los puntos de la línea propuesta.

Tales son los medios ó artificios que se emplean para obtener fórmulas que representen las diversas líneas que nos son conocidas, y tal es el objeto de los sistemas de coordenadas que nos proponemos analizar y generalizar, haciendo aplicacion oportunamente de la geometría analítica, y calculando los valores numéricos en funcion de las líneas y colíneas naturales que contienen las tablas trigonométricas; cuyos valores derivados de aquellas se trasforman en geométricos de la misma manera que hemos hecho en el capítulo precedente respecto de los elementos de curvas circulares, y aplicándolos para la resolucion de los varios problemas á que dan lugar las secciones cónicas y curvas planas.

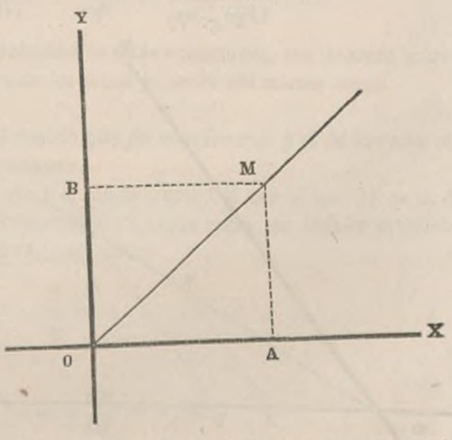
19.—Definiciones y consideraciones sobre los problemas indeterminados.—Se llaman *ejes coordenados* á dos rectas fijas que se trazan en un plano, y á las cuales se refieren todos los puntos del mismo plano. Si los ángulos que forman dichas rectas son iguales, se denominan *ejes rectangulares*, y si forman ángulos desiguales, se los designa con el nombre de *ejes oblícuos*.

El punto de interseccion de las rectas ó vértice comun de los ángulos, se llama *orígen de coordenadas*, ó se dice simplemente *orígen*. Las distancias á los ejes contadas en un sentido determinado se consideran como *positivas*, y como *negativas* las tomadas en sentido opuesto.

Llámanse *coordenadas de un punto*, las rectas tiradas por él paralelamente á los ejes: si estos fuesen rectangulares, las paralelas á los mismos se convierten en las verdaderas distancias de dicho punto á los ejes; pero si estos fuesen oblícuos, las coordenadas del punto dado no miden las distancias á los expresados ejes, si bien las reemplazan en todas sus funciones.

Sean OX y OY (*fig.* 6) los dos ejes rectangulares, y M el punto dado: las paralelas MB y MA miden las respectivas distancias á los indicados ejes. Estos suelen nombrarse separadamente por la letra con que se designan las distancias contadas sobre ellos. Así el eje OX con el que pueden y deben apreciarse las distancias paralelas, tal como MB, que siempre representaremos por x, se llama eje de las x ó de las *abscisas*; el otro eje OY al cual son paralelas las distancias MA que se expresan por y, se dice eje de las y ó de las *ordenadas*.

Fig. 6.



Ahora bien, si consideramos que para cada punto de una línea cualquiera trazada en un plano, existe una relacion constante, una ley invariable entre sus coordenadas, y esta relacion ó ley rige en una expresion algebráica entre x é y, dicha expresion ha de representar necesariamente aquella línea de donde proviene, y si la citada ley es exclusiva y única del curso de la misma línea, la expresion algebráica representará solo la recta ó curva que le dió su orígen; pero si la relacion entre ordenada y abscisa de cada uno de sus puntos fuese tal, que se verificase en una ó más líneas cuya existencia se ignorase todavía, el álgebra que con sus signos y caractéres las incluiria á todas al establecer dicha ley ó relacion, nos las haria conocer al tratar de aplicarla para determinar diferentes puntos.

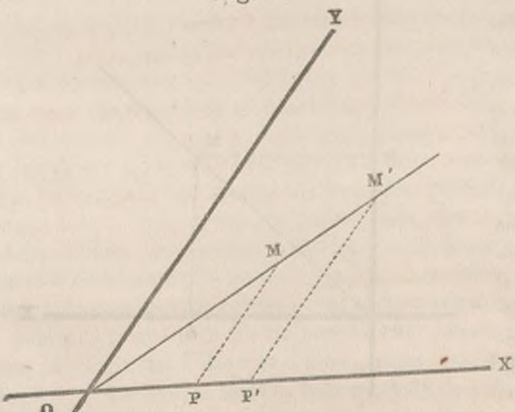
La ecuacion de los puntos de una línea contendrá las dos incógnitas x é y, ó sean las distancias de cada punto que se trate de encontrar; para fijar dichos puntos no habrá más que dar á una de estas incógnitas, por ejemplo á y, valores completamente arbitrarios, y calcular con ellos los que resultan en la ecuacion propuesta para x, que es la otra incognita ó distancia desconocida. De suerte, que se podrán ir colocando cuantos puntos se quieran de la línea, y por fin, hasta construirla.

Toda ecuacion en la cual al hacer $x = o$, dé $y = o$, es de una línea que pasa por el orígen. Pues si al dar en dos ecuaciones un mismo valor á las abscisas y ordenadas, resultan iguales los otros de las ordenadas y abscisas, las dos líneas se cortan en el punto á que corresponden dichos valores; pero como cualquiera otra línea en que aparezcan simultáneamente estos valores pasa por aquel punto particular del plano en que se halla, porque estos valores se suponen iguales á cero, las líneas que se encuentran en estas condiciones representadas por x é y pasarán por un mismo punto del plano que las contiene; es decir, por el punto en que se cortan los ejes.

Fundados en estas consideraciones vamos á determinar ante todo su expresion.

20.—Hallar la fórmula general de una recta que pasa por el órigen de las coordenadas.—Sean OX y OY (*fig.* 7) los ejes coordenados, y α el ángulo que forman entre sí; sea MO la recta que pasa por el orígen, y cuya expresion vamos á determinar.

Fig. 7.



Las ordenadas de los diferentes puntos M, M′, etc., de esta recta, serán las MP, M′P′, etc., paralelas al eje OY; mientras que las correspondientes abscisas serán las distancias OP, OP′, etc., contadas sobre el eje OX.

Para obtener la ecuacion de la recta OM, es preciso hallar entre x é y una relacion ó ley que se verifique en todos los puntos; desde luego se observa que los triángulos OPM, OP′M′, etc., son semejantes por tener los lados paralelos: comparando sus lados homólogos se obtiene una série de razones iguales

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \text{etc.};$$

pero observando que los numeradores que hacen de antecedentes, representan á y ó á los ordenados y los consecuentes ó denominadores, las abscisas x, resulta que la relacion constante entre las coordenadas de cada punto tendrá un valor a y será

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{OP'}} = \text{etc} = \frac{y}{x} = a:$$

de donde despejando y se tiene

$$y = a\,x \tag{A}$$

Pero esta expresion establece una condicion que se verifica en todos los puntos de una misma recta, siempre que pase por el orígen; luego será la fórmula general pedida.

21.—Observacion I.—*La relacion entre las coordenadas de cada punto de una recta, es la de los senos de los ángulos que forma con los ejes.* Con efecto, en cada triángulo OMP, OM'P', etc., sucede que los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos; luego

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}} = \frac{\text{sen. MOP}}{\text{sen. OMP}};\ \frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{OP'}} = \frac{\text{sen. M'OP'}}{\text{sen. OM'P'}},\ \text{etc.}$$

Los ángulos en M, M', etc., son iguales entre sí por correspondientes é iguales tambien á MOY por alternos internos entre paralelas; de consiguiente

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}} = \frac{\text{sen. MOX}}{\text{sen. MOY}},\quad \frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{OP'}} = \frac{\text{sen. MOX}}{\text{sen. OMY}},\ \text{etc.};$$

pero las primeras razones ó quebrados de estas ecuaciones, son siempre iguales al valor a; luego las relaciones de los senos lo serán del mismo modo.

Observacion II.—*Dado el ángulo que forman los ejes y el de la recta con uno de ellos, queda esta determinada.*

Si el ángulo de los ejes es m, y el de la recta OM con el eje OX es n, de la ecuacion ó fórmula (A) correspondiente á dicha recta, se deduce dividiendo ambos términos por x, y será (*núm.* 20.)

$$\frac{y}{x} = a$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{\mathrm{P'M'}}{\mathrm{OP'}} = a;\ y\ \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OP}} = a,\ \text{etc.}$$

Pero la relacion entre las coordenadas de cada punto, es la de los senos de los ángulos que la recta forma con los ejes; por consiguiente

$$a = \frac{\mathrm{P'M'}}{\mathrm{OP'}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}} = \frac{\text{sen } m}{\text{sen. } (m-n)}: \tag{41}$$

de aquí resulta que siendo m y n conocidos, lo es igualmente a; luego solo quedan como indeterminadas las coordenadas x é y en la fórmula general de la recta, ó lo que es lo mismo, la expresion se particulariza al representar la única recta que forma con el eje OX un ángulo MOX $= n$.

Observacion III.—*Si los ejes son rectangulares, el coeficiente a de x en la ecuacion de una recta, es la tangente trigonométrica del ángulo que forma con el eje de las abscisas.*

Porque siendo (fór. A) $y = a\,x$ el coeficiente de x, será

$$a = \frac{\text{sen. MOX}}{\text{sen. MOY}},$$

cuando los ejes son rectangulares, es decir, cuando el ángulo YOX es recto, cada uno de los ángulos MOX y MOY que la recta forma con los ejes, es complemento del otro; luego cada uno de los senos que figuran en la relacion a, es el coseno del ángulo del otro, y por lo mismo

$$(41)' \qquad a = \frac{\text{PM}}{\text{OP}} = \frac{\text{sen. MOX}}{\text{sen. MOY}} = \frac{\text{sen. MOX}}{\text{cos. MOX}} = \text{tang. MOX}.$$

Así como se ha obtenido en valores trigonométricos la equivalencia del coeficiente a de x, siendo oblícuos los ejes coordenados, tambien pudo deducirse directamente imaginando la recta OM que sale del orígen de las coordenadas referidas á los ejes rectangulares OX y OY (*fig.* 6.), puesto que en seguida se hubiera visto que cada ordenada AM forma con su abscisa OA y la parte de recta OM, un triángulo rectángulo OMA en el que segun la (fór. 35) de trigonometría (núm. 17), cada cateto AM es igual al otro multiplicado por la tangente del ángulo opuesto; de donde

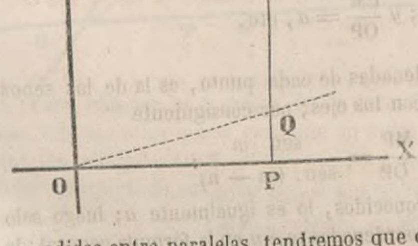
$$\text{MA} = \text{AO} \times \text{tang. MOX}$$

ó bien

$$y = \text{tang. MOX} \times x.$$

22.—Determinar la expresion general de una recta cualquiera que no pasa por el orígen de las coordenadas.—Sean OY y OX (*fig.* 8) los ejes, y MN una recta cualquiera, cuyas coordenadas se refieren á dichos ejes: si por su orígen O se tira la OQ paralela á MN, cuya ecuacion se trata de hallar, las ordenadas de esta deberán estar expresadas por las de PQ y QM, y por consiguiente tendremos

Fig. 8.



$$\text{PQ} = y = ax;$$

y como las MP de la recta MN, se compondrán siempre de las partes PQ que corresponden como ordenadas de las anteriores OQ, y de las porciones MQ iguales todas á ON por paralelas comprendidas entre paralelas, tendremos que cada ordenada MP estará representada por

$$\text{MP} = \text{PQ} + \text{QM} = a\,x + \text{ON};$$

luego llamando b á la longitud constante ON para todas las ordenadas, se tendrá la fórmula general

$$(B) \qquad y = a\,x + b.$$

Observacion.—Por la forma de esta expresion, que es la de toda recta situada de cualquier modo respecto de los ejes, se ve que para determinar una recta es preciso conocer las dos cantidades a y b, lo que equivale en general á hallar dos de sus puntos ó condiciones equivalentes: por consiguiente los accidentes que en sus expresiones representa el álgebra, van conformes en todo á los que se nos dieron conocidos en las líneas por la geometría.

Si en la ecuacion de una recta que pasa por el orígen, no habia más que la relacion a que determinar para fijar cada recta; es decir, sino habia en general que conocer más que un punto, conviene tener presente que con deber pasar por el orígen, resultaban dos para trazarla.

23.—Dadas las coordenadas de un punto, hallar la fórmula de toda recta que pase por él.—Si las coordenadas del punto dado son x' é y', como la ecuacion de la recta ha de tener la forma general

$$y = a\,x + b,$$

no habrá más que sustituir en la fórmula (B) los valores y' x' por y x; porque en el momento en que la recta pase por el punto x' é y', estas coordenadas son suyas y han de satisfacer á su ecuacion, por consecuencia se tendrá

$$y' = a\,x' + b.$$

Entre esta ecuacion y la anterior solo se puede hacer desaparecer una de las dos cantidades a ó b desconocidas; pues aun cuando son dos ecuaciones con dos incógnitas, en la primera son indeterminadas x é y que no pueden dar á conocer ni a ni b aunque se las despeje. Restando una de otra las dos ecuaciones anteriores, se eliminará la b; así resultará la fórmula

$$(42) \qquad y - y' = a\,(x - x'):$$

que es la ecuacion de toda recta, ó mejor dicho, la forma que tendrá cuando pase por un punto cuyas coordenadas x' é y' sean conocidas.

Aun cuando en la fórmula obtenida pudiera despejarse la y para ponerla bajo la forma adoptada hasta aquí en las ecuaciones de las rectas, es más conveniente presentarla en la que tiene, toda vez que (*núm*. 21 *observ*. *III*) la diferencia entre las ordenadas es igual á la de las abscisas multiplicada por la relacion a de los senos, ó por la tangente trigonométrica.

24.—Hallar la expresion de una recta que pasa por dos puntos dados.—Sean $(x'\ y')$ y $(x''\ y'')$ las respectivas coordenadas de dichos puntos.

Como la fórmula (B) de toda recta ha de verificarse necesariamente cuando por x y se sustituyan x' y', ó bien cuando debiendo ser el punto que marcan estas coordenadas, uno de los de la recta indeterminada, en el momento en que pase por él, la x' ha de tener con la y' la relacion a que liga á las demás; luego sustituyendo en la fórmula (B) que es general, tendremos

$$y' = a\,x' + b.$$

Las mismas consideraciones hacen ver que las coordenadas x'' y'' deben satisfacer la ecuacion general de la recta; por consiguiente, sustituyendo en esta ecuacion aquellas coordenadas particulares, se tendrá

$$y'' = a\,x'' + b.$$

Ahora, restando estas dos ecuaciones para eliminar la incógnita b, darán

$$y' - y'' = a\,(x' - x'');$$

en donde no existiendo más cantidad desconocida que la relacion a, se podrá despejar, la cual tendrá por valor

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Sustituyéndole en la fórmula (42) de una recta sujeta á pasar por un punto, dará para la cuestión presente que tiene que pasar por dos, la expresion

(43) $$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}\,(x - x').$$

25.—Toda ecuacion de primer grado con dos variables, tiene por lugar geométrico una recta.—Para demostrarlo, examinemos la ecuacion general de primer grado que tiene la forma

$$A\,y + B\,x + C = 0:$$

despejando la y ó dividiendo toda la ecuacion por A, y pasando al segundo miembro los dos últimos términos, resulta

$$y = -\frac{B}{A}\,x - \frac{C}{A};$$

haciendo en esta ecuacion las cantidades conocidas $-\frac{B}{A} = a$, y $-\frac{C}{A} = b$

que sustituidas en esta última expresion nos da

$$y = a\,x + b:$$

ecuacion ya conocida (*núm.* 22) para una recta, la cual demuestra que corta al eje de las y á una altura sobre el orígen expresada por $b = -\frac{C}{A}$, y que forma con el eje de las x un ángulo cuya tangente trigonométrica es la relacion $a = -\frac{B}{A}$.

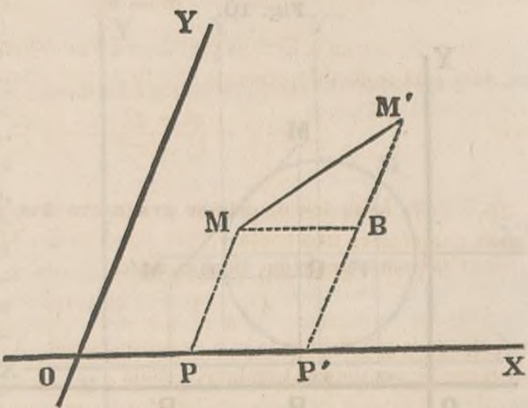
Por lugar geométrico de una línea se entiende, pues, que es la série de coordenadas de los puntos que tienen una relacion tal, cual expresa la ecuacion propuesta.

Observacion.—Cuando dada una ecuacion de primer grado con dos variables, se quiere construir la recta que representa, como estas líneas no necesitan más que dos puntos para quedar determinadas, bastará suponer $x = o$, que dará para y el punto del eje de las ordenadas por donde pasa; y despues $y = o$ que dará para x el valor correspondiente al encuentro de la recta con el eje de las abscisas.

Si haciendo $x = o$ resulta $y = o$, entonces la recta pasa por el orígen, y basta dar á x un valor cualquiera, por ejemplo 1, para fijar el extremo de la ordenada correspondiente por donde pasa la recta.

26.—Dadas las coordenadas de dos puntos, determinar la fórmula de su distancia. —Observacion.—Sean M y M′ los dos puntos (*fig.* 9) (x', y') y (x'', y'') las coordenadas conocidas, y cuya distancia de M á M′ se quiere hallar, para esto tendremos:

Fig. 9.



$OP = x'$, $OP' = x''$, $PM = y'$, $P'M' = y''$.

Tirando por M la recta MB paralela al eje OX, se formará un triángulo MM′B en el que segun hemos visto (*núm.* 16, *caso* 3.°), respecto de los triángulos oblicuángulos, se verifica que el cuadrado de un lado es igual á la suma de cuadrados de los otros dos, menos el duplo del producto por el coseno del ángulo comprendido; y por consiguiente resulta

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{M'B}^2 - 2 \times MB.\, BM' \times \cos.\, MBM'.$$

Pero la distancia MB igual PP′, por paralelas comprendidas entre paralelas, no es sino la diferencia OP′ — OP de las abscisas dadas: lo mismo puede observarse respecto á la línea BM′ = P′M′ — P′B = P′M′ — PM, que es la diferencia de las dos ordenadas propuestas. El ángulo MBM′, cuyo coseno figura en la expresion del cuadrado de MM′, es tambien igual al OP′M′ por correspondientes, y siendo este suplemento del ángulo YOX que forman los ejes, pues con él suma dos rectos, se sigue que dicho coseno de MBM′ es el de YOX; recordando que las líneas trigonométricas de un arco son iguales á las de su suplemento: el ángulo YOX conocido, podremos representarle por α; y últimamente á la distancia incógnita MM′ por D: con estas condiciones la ecuacion será

$$D^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 - 2\,(x'' - x')\,(y'' - y') \times \cos.\, \alpha.$$

Extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros nos da la fórmula

(44) $$D = \sqrt{(x'' - x') + (y'' - y') - 2\,(x'' - x')\,(y'' - y') \times \cos.\, \alpha}.$$

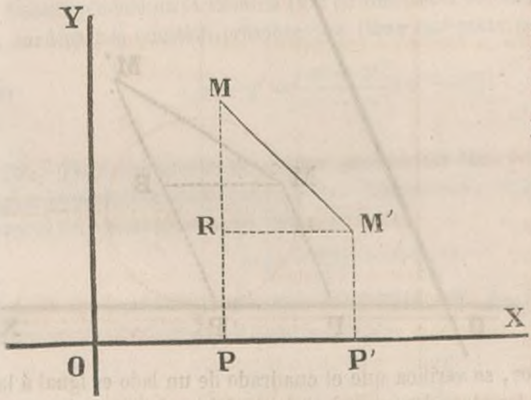
Observacion.—Si los ejes son rectangulares, el coseno del ángulo que forman se hace igual *cero*; luego si cos. $\alpha = 0$, la expresion de la distancia se reduce á

$$(45) \qquad D = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

que es la que con más frecuencia se emplea, porque por lo general se refieren todas las líneas y puntos á ejes ortogonales ó perpendiculares entre sí, para simplificar y facilitar la solucion de los varios problemas.

La fórmula que debe dar el valor de la distancia MM′, se puede hallar directamente suponiendo que los ejes OY y OX (*fig.* 10) son rectangulares, entonces una distancia cualquiera M M′ entre dos puntos forma con las paralelas á los ejes tiradas por ellos M′R y R M, un triángulo rectángulo MRM′, la cual será la hipotenusa, y en tal caso nos da

Fig. 10.



$$\overline{M'M}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{M'R}^2;$$

y como los dos catetos MR y RM′ son lo mismo que anteriormente, las diferencias entre las ordenadas y abscisas de los puntos conocidos M y M′, tendremos

$$\overline{M'M}^2 = D^2 = (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2:$$

luego

$$(46) \qquad D = \sqrt{(y'' - y')^2 + (x'' - x')^2}.$$

De aquí se deduce que: *La distancia entre dos puntos es igual á la raiz cuadrada de la suma de cuadrados de las diferencias entre sus abcisas y ordenadas.*

Si uno de los puntos dados es el orígen de las coordenadas, por ejemplo, el $(x''\ y'')$, estas se harán nulas en la expresion de la distancia. Así si los ejes son del sistema oblícuo, suponiendo x'' é y'' igual *cero* (fór. 44), resultará

$$(46)' \qquad D = \sqrt{(x' + y')^2 - 2\,x'y' \cos.\alpha}.$$

Y si los ejes fuesen rectangulares, haciendo en esta fórmula de las distancias referidas á ellos, las mismas hipótesis de $x'' = o$ é $y'' = o$, se tendrá

$$(46)'' \qquad D = \sqrt{(x' + y')^2}.$$

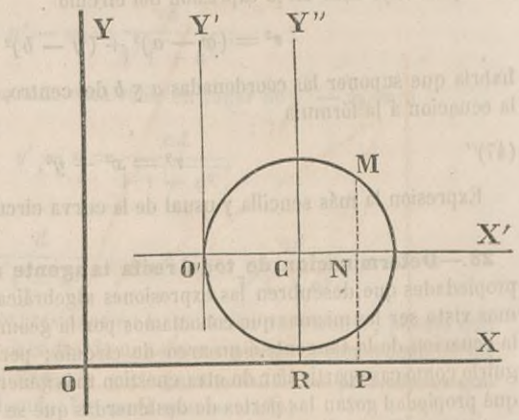
De modo que nos da la siguiente regla: *La distancia de un punto cualquiera al origen, es igual á la raiz cuadrada de la suma de cuadrados de sus ordenadas.*

CAPÍTULO II.

FÓRMULAS DEL CÍRCULO Y LA TANGENTE.

27.—Hallar la expresion general del círculo.—Observaciones.—Para determinar la expresion de (x, y) que pueda verificarse en cualquier punto de un mismo círculo con referencia á los ejes rectangulares OX y OY (*fig.* 11), basta recordar que todos sus puntos distan del centro una cantidad constante representada por el radio: si á este se le expresa por r; por (a, b) las coordenadas del centro, y por (x, y) las coordenadas generales que corresponden indistintamente á cada punto de la circunferencia, bastará recordar, repetimos, que la expresion hallada (*núm.* 26, *fórmula* 46) será la que se busca, con relacion á los ejes ortogonales, tan pronto como se hayan reemplazado las cantidades que ahora deben figurar en lugar de aquellas.

Fig. 11.



La expresion de la distancia entre dos puntos (x', y'), (x'', y'') referidos á los ejes rectangulares, era

$$D = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2};$$

y haciendo desaparecer el radical, nos da

$$D^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2.$$

Luego si $x'' = a$, $y'' = b$, $y' = y$, $D = r$, la expresion general de un círculo será

$$\text{(C)} \qquad r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Observacion I.—Si el orígen de las coordenadas se colocase en el extremo de un diámetro, siendo este el eje de las abscisas como se representa (*fig.* 11), en donde los ejes respecto al círculo no son ya OX y OY, sino O'X' y O'Y'; entonces en la expresion precedente la abscisa del centro $a = \mathrm{OR}$ se convertirá en la $\mathrm{O'C} = r$, y la ordenada $b = \mathrm{CR}$ en cero; con estas modificaciones la fórmula anterior se reduce á la

$$(47) \qquad r^2 = (x - r)^2 + y^2;$$

ó desarrollando el cuadrado del binomio $(x - r)^2$, tendremos

$$r^2 = x^2 - 2rx + r^2 + y^2;$$

destruyendo los términos en r^2, viene á convertirse en

$$(47)' \qquad y^2 = 2rx - x^2, \text{ ó bien, } y^2 = x(2r - x):$$

de donde se deduce: *que cada ordenada y perpendicular al eje de las x, es media proporcional entre los segmentos del diámetro, como ya sabíamos por la geometría elemental.*

Observacion II.—Si el origen de las coordenadas se hallase en el centro C, en cuyo caso en la expresion del círculo

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

habria que suponer las coordenadas a y b del centro, *nulas*; lo cual reducirá la ecuacion á la fórmula

$$(47)'' \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

Expresion la más sencilla y usual de la curva circular.

28.—Determinacion de toda recta tangente á un círculo.—De las propiedades que descubren las expresiones algebráicas que hasta ahora hemos visto ser las mismas que conocíamos por la geometría, se puede deducir la ecuacion de la tangente á un arco de círculo; pero con objeto de conseguirlo como caso particular de otra cuestion más general, examinaremos ántes qué propiedad gozan las partes de dos cuerdas que se cortan, contadas desde su interseccion hasta la circunferencia.

Sean (m, n) las coordenadas del punto comun á las dos cuerdas; la ecuacion de la primera cuerda que pasa por dicho punto será

$$y - n = a(x - m):$$

llamando d á la distancia del punto comun á la circunferencia contada sobre esta recta, y (x', y') las coordenadas de su encuentro con la curva, se verificará en la recta que

$$y' - n = a(x' - m);$$

y para el círculo, siendo su ecuacion $x^2 + y^2 - r^2$, tendremos

$$x'^2 + y'^2 = r^2.$$

Tambien con la distancia d se verificará necesariamente esta condicion: de donde resulta,

$$d^2 = (y' - n)^2 + (x' - m)^2;$$

luego tendremos tres ecuaciones para determinar las dos incógnitas (x', y') que hasta ahora existen; es evidente que habiendo una ecuacion de más, esta será la que exprese la condicion que han de llenar las otras cantidades ó líneas que se han tomado en consideracion.

La eliminacion de (x', y') debe hacerse con preferencia entre las dos ecuaciones

$$y' - n = a\,(x' - m),\ \text{y}\ d^2 = (y' - n)^2\ (x' - n)^2,$$

de la recta y una de sus porciones; sustituyendo despues sus valores en la del círculo, y poniendo por $y' - n$ en la segunda de estas ecuaciones, su expresion tomada de la primera, tendremos

$$d^2 = a^2\,(x' - m)^2 + (x' - m)^2;$$

sacando el factor comun $(x' - m)^2$, será

$$(x' - m)^2\ (a^2 + 1) = d^2:$$

de donde resulta

$$x' - m = \frac{d}{\sqrt{1 + a^2}};$$

y por consiguiente reemplazando este valor en lugar de $y' - n$, dará

$$y' - n = \frac{ad}{\sqrt{1 + a^2}},$$

ó bien

$$x' = \frac{d}{\sqrt{1 + a^2}} + m,\ \text{é}\ y' = \frac{ad}{\sqrt{1 + a^2}} + n.$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la ecuacion del círculo, puesto que son, como se dijo, las coordenadas de uno de sus puntos, darán á conocer las condiciones á que ha de satisfacer la recta para gozar de las propiedades que hasta ahora se le han ido fijando. De modo que se tendrá

$$\frac{d^2}{a^2 + 1} + \frac{2dm}{\sqrt{a^2 + 1}} + m^2 + \frac{a^2 d^2}{a^2 + 1} + \frac{2dna}{\sqrt{a^2 + 1}} + n^2 + r^2:$$

ordenando con respecto á d que es la cantidad que no podrá ser arbitraria cuando la recta además de pasar por el punto (m, n) forma un ángulo determinado α con el eje de las abscisas, da

$$d^2 + 2\,\frac{m + an}{\sqrt{a^2 + 1}}\,d + (m^2 + n^2 - r^2) = o.$$

Los dos valores de d que presenta esta ecuacion de segundo grado, serán las porciones de cada recta tirada en el círculo en un punto dado por sus coordenadas (m, n).

Esta expresion hace ver que el tercer término siendo el producto de las raices ó segmentos de cada cuerda ó secante, es independiente del ángulo que cada una de ellas forma con el eje de abscisas; porque en dicho tercer término $(m^2 + n^2 - r^2)$ no aparece α: luego *los dos segmentos de cada cuerda que se tire por un punto, dan siempre el mismo producto*: y cuando el producto de dos factores es igual al producto de otros dos, se puede formar proporcion (Arit.), resulta que: *cada dos cuerdas que se cortan en un círculo se dividen en partes reciprocamente proporcionales.*

Si las coordenadas (m, n) del punto por donde pasan las rectas son tales que corresponden á uno situado fuera de la circunferencia, las distancias d dadas por las raices de la última ecuacion, serán la secante entera contada desde dicho punto y su parte exterior; luego en este caso el tercer término $(m^2 + n^2 - r^2)$ independiente del ángulo α, nos da la siguiente regla: *todas las secantes tiradas desde un punto á un círculo, multiplicadas por su parte externa, dan el mismo producto*: es decir, comparando dos á dos las secantes, puesto que cada una de ellas dá el mismo producto cuando se las multiplica por su parte exterior, se pueden formar con estos factores una proporcion; de donde se deduce igualmente: que *las secantes tiradas á un círculo desde un punto fuera, son recíprocamente proporcionales á los segmentos externos*.

Volviendo ahora á la cuestion primeramente anunciada, para hallar la fórmula de la tangente á un arco de círculo, haremos notar que la expresion que determina las distancias ó segmentos de una recta tirada ya desde un punto interior ó exterior, á sus intersecciones con una circunferencia, en el caso de que la recta se convierta en tangente, debe sufrir una modificacion que es fácil determinar.

En efecto, si el punto (m, n) se supone primeramente situado sobre la misma circunferencia, estas coordenadas deben satisfacer la ecuacion del círculo; luego

$$m^2 + n^2 = r^2:$$

esto supuesto, en la ecuacion que da las distancias del punto á la circunferencia desaparece el último término, y solo queda

$$d^2 + 2\frac{m + an}{\sqrt{1 + a^2}}\,d = o; \text{ ó bien, } d\left(d + 2\frac{m + an}{\sqrt{1 + a^2}}\right) = o.$$

Las raices de esta ecuacion son

$$d' = o, \text{ y } d'' = -2\frac{m + an}{\sqrt{1 + a^2}};$$

lo cual está conforme con solo observar la posicion que ahora se ha dado al punto (m, n); puesto que siendo este uno de los de la circunferencia, la distancia á sí misma es nula, mientras que la distancia al otro extremo de toda cuerda que salga de él, puede ser una cantidad cualquiera determinada. Mas si se quiere que la recta se convierta en tangente, es necesario que desaparezca esta longitud que existe en el interior de la circunferencia; por consiguiente debe verificarse que

$$-2\frac{m + an}{\sqrt{1 + a^2}} = o, \text{ como tambien } m + na = o;$$

de esta condicion resulta que

$$a = -\frac{m}{n}.$$

Luego, sustituyendo este valor en la ecuacion de una recta cualquiera, se tendrá la fórmula general para la tangente sujeta á pasar por un punto (m, n).

$$(D) \qquad y - n = -\frac{m}{n}(x + m).$$

Si combinamos la ecuacion de la tangente con la del radio tirado al punto de contacto, se hallará, pues, que dicho radio es una recta que pasa por el orígen, y su ecuacion será

$$y = a\,x:$$

y la de la tangente es

$$(D') \qquad y - n = -\frac{m}{n}(x - m).$$

Como el radio que se considera ha de pasar por el punto de contacto cuyas coordenadas están expresadas por (m, n), su ecuacion dará estos valores; es decir, que

$$n = am:$$

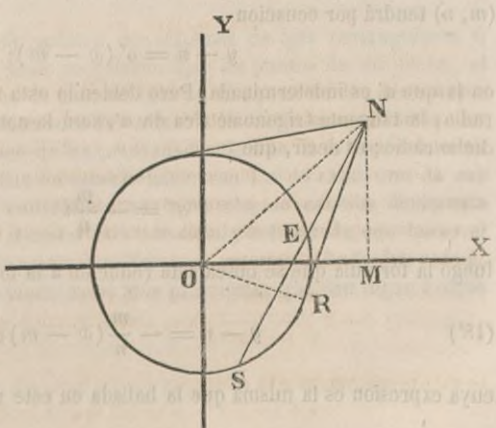
de donde resulta

$$a = \frac{n}{m}.$$

Luego si la tangente trigonométrica $-\frac{m}{n}$ del ángulo que la tangente al círculo forma con el eje de las abscisas, es la cotangente negativa del ángulo que el radio tirado al punto de contacto forma con el mismo eje, dichas líneas son perpendiculares. Por consiguiente: *el radio tirado al punto de contacto de una recta con una circunferencia, es perpendicular á la tangente.*

En cuanto á la expresion que daba las distancias de un punto de una recta á sus intersecciones con la circunferencia, hemos demostrado en el presente número que el producto de estas distancias era el tercer término $(m^2 + n^2 - r^2)$ de dicha expresion.

Fig. 12.



Ahora bien, si se considera que el punto (m, n) es el exterior N (*fig.* 12), dicho producto que expresa el de cualquier secante NS por su parte externa EN, hace notar que tambien es el cuadrado de la tangente NR tirada desde el mismo punto exterior N; pues como en el triángulo rectángulo ONM, segun el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de cuadrados de los catetos, resulta

$$m^2 + n^2 = \overline{OM}^2 + \overline{NM}^2 = \overline{ON}^2\,.$$

Por la misma razon el triángulo rectángulo ORN, nos dá la fórmula

$$(48) \qquad m^2 + n^2 - r^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OR}^2 = \overline{NR}^2 .$$

Luego si se comparan una secante y su parte externa, con la tangente tirada desde el mismo punto, y siendo el producto de aquellas igual al cuadrado de esta, se deduce la regla siguiente: *Si desde un punto se tiran una tangente y una secante á un círculo, la tangente es media proporcional entre la secante y su parte externa.*

Tambien pudo hallarse con mucha más facilidad la fórmula de la tangente, haciendo aplicacion de la propiedad exclusiva ó singular de que: *toda perpendicular en el extremo de un radio, es tangente al círculo en dicho punto.*

Así, pues, nos valdremos del conocimiento de este teorema: si el punto de contacto tuviese por coordenadas (m, n), la ecuacion del radio tirado á él tendria la forma

$$y = ax$$

la cual estaría satisfecha con m y n; es decir, que se verificaria necesariamente

$$n = am:$$

de donde

$$a = \frac{n}{m};$$

cuyo valor sustituido en la ecuacion $y = ax$, fijaría el radio con la ecuacion resultante

$$y = \frac{n}{m}\, x.$$

Como la tangente es una recta sujeta á pasar por el punto de contacto (m, n) tendrá por ecuacion

$$y - n = a'\,(x - m);$$

en la que a' es indeterminada. Pero debiendo esta recta ser perpendicular al radio, la tangente trigonométrica de a', será la cotangente negativa de la de dicho radio; es decir, que

$$a' = -\frac{m}{n}:$$

luego la fórmula que se busca está reducida á la forma

$$(48') \qquad y - n = -\frac{m}{n}(x - m);$$

cuya expresion es la misma que la hallada en este número (*for.* D'.)

CAPÍTULO III.

TRASFORMACION DE COORDENADAS.

29.—Cuestion fundamental.—Con lo que llevamos dicho en esta segunda seccion, se comprende fácilmente que por la expresion de una línea se puede conocer su curso y las propiedades de que goza, determinando todos sus puntos; para esto no hay mas que dar valores arbitrarios á una de las variables, que generalmente es la abscisa, y levantar sobre cada una de las que se van suponiendo la ordenada ú ordenadas correspondientes al valor de x en la ecuacion que se discute; pero como esta discusion ó exámen de las líneas curvas y su trazado ha de ser más ó menos difícil segun la expresion que la represente, conviene adoptar la de cada línea de la manera más clara y sencilla que la relacion entre sus abscisas y ordenadas permita.

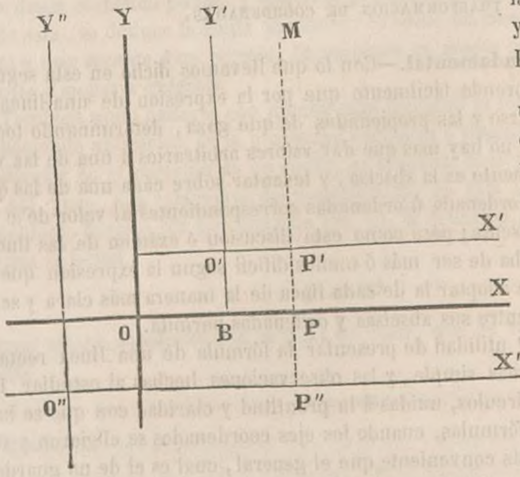
La conveniencia y utilidad de presentar la fórmula de una línea recta ó curva bajo la forma más simple, y las observaciones hechas al estudiar los puntos, las rectas y círculos, unidas á la prontitud y claridad con que se han llegado á obtener las fórmulas, cuando los ejes coordenados se eligieron y situaron de un modo más conveniente que el general, cual es el de no guardar ninguna analogía con punto alguno de dichas líneas, hace conocer ahora la imprescindible necesidad de saber referir una curva dada con respecto á unos ejes, á otros que puedan simplificar su expresion algebráica.

Esta cuestion es, en general, la que toma el nombre de *trasformacion de coordenadas*, y se reduce, como hemos dicho, á determinar los valores que tienen las que se buscan, cuando dependen de las que se dan en la ecuacion de la curva; ó como debe decirse tratándose del álgebra y de la trigonometría, es hallar las fórmulas de unas coordenadas desconocidas *en funcion* de otras conocidas.

Esto supuesto, como solo existen dos sistemas de ejes rectangulares ú oblícuos, cuando de este modo se quieren fijar los puntos de un plano, el problema de la trasformacion de coordenadas se compone de los casos á que pueden dar lugar las combinaciones de estas dos clases de ejes. Además, es evidente que la determinacion de las coordenadas de una línea cualquiera en funcion de otras, solo consiste en saberlo hacer con las de cada uno de sus puntos. En virtud de estas consideraciones generales se concibe fácilmente el órden que debe seguirse al tratar esta cuestion, y solo queda que hacer el estudio aislado en cada caso particular. Nosotros, en gracia de la brevedad, solo nos ocuparemos de los cinco casos más principales que dan lugar á otros tantos problemas, á saber:

30.—Hallar las nuevas coordenadas de un punto cuando se trasporte el orígen sin cambiar la direccion de los ejes.—Sean estos los primitivos OX y OY (*fig.* 13), y el nuevo orígen O′; si los ejes han de conservar la direccion de los anteriores, serán las dos paralelas O′X′ y O′Y′ tiradas por el punto O′.

Fig. 13.



En estos supuestos, un punto cualquiera M del plano de los nuevos ejes, tiene por coordenadas primitivas OP y PM; y por coordenadas nuevas O′P′ y P′M.

La relacion que liga á estas con aquellas, se ve que es sumamente sencilla; porque segun las condiciones de los ejes, resulta

$$OP = OB + BP \text{ y } PM = BO' + P'M;$$

pero OB y O′B han de ser conocidas para poder trasportar el orígen al punto que designen: luego si se suponen $OB = a$ y $O'B = b$, las coordenadas antiguas (x, y) y las modernas (x', y'), tendremos las fórmulas

$$(49)\qquad \begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y'. \end{cases}$$

Por consiguiente estos serán los valores que deberán sustituirse por (x, y) en cualquiera ecuacion, cuando sea necesario referirla á ejes paralelos, pero cuyo orígen se halle en un punto determinado por sus coordenadas con respecto á los primitivos: la nueva ecuacion que resulte entre las variables (x', y') aparecerá con toda la sencillez á que pueda dar lugar la eleccion de dicho orígen.

Las fórmulas precedentes obtenidas para (x, y) lo han sido en el supuesto de hallarse el nuevo orígen en el ángulo YOX de las coordenadas positivas; mas si se le hubiera imaginado en O″ situado en el ángulo xOy de las coordenadas negativas, en este caso habria que cambiar los signos de (a y b) en aquellos valores. Con efecto, siendo los ejes primitivos OX y OY, las coordenadas (x, y) de un punto cualquiera M son OP y PM, mientras que siendo los nuevos ejes O″X″ y O″Y″, las coordenadas (x', y'), serán O″P″ y P″M. La ley que liga á unas y otras es la misma, y en cuyo caso será

$$OP = O''P'' - O''B'', \text{ y } PM = P''M - B''O;$$

ó bien poniendo las representaciones adoptadas nos dá

$$x = x' - a, \text{ é } y = y' - b.$$

Reuniendo en uno los valores de cada coordenada, hallados en el primer supuesto y en el presente, obtendremos para fórmulas generales en el cambio de orígen, siempre que los ejes permanezcan paralelos

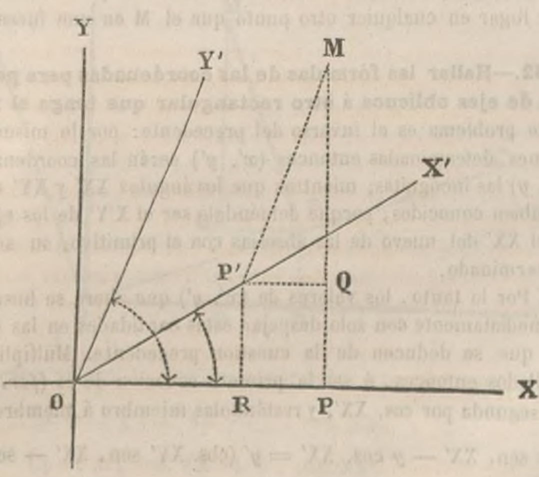
$$(49') \qquad \begin{cases} x = x' \pm a \\ y = y' \pm b. \end{cases}$$

Estas expresiones contienen todas las situaciones posibles del orígen nuevo con relacion á los ejes primeros; porque si se halla en el ángulo XOY, los signos positivos son los que corresponden: si está en el ángulo xOy, su abscisa a se hace negativa, mientras que la ordenada b permanece positiva: si se encuentra en el ángulo xOy, las dos coordenadas a y b deben llevar el signo *menos*, y por último, si está situado el nuevo orígen en el ángulo yOX, su abscisa a vuelve á ser positiva, en tanto que la ordenada b, continúa siendo negativa.

Resuelto el primer caso, nos evita el tener que considerar á lo sucesivo el cambio de orígen, puesto que una vez obtenidas las fórmulas para (x, y) en funcion de las nuevas coordenadas referidas á ejes de diferente direccion, pero de un mismo orígen, si fuese preciso tambien cambiar éste, bastaría sustituir en dichas fórmulas por las coordenadas modernas, las expresiones halladas anteriormente.

31.—Determinar las expresiones de las coordenadas de un punto para pasar de un sistema de ejes rectangulares á otro de oblícuos que tengan el mismo orígen.— Sean OX y OY los ejes primitivos rectangulares (*fig.* 14), cuyas coordenadas están expresadas por (x, y). siendo OX′ y OY′ los nuevos ejes y las coordenadas representadas por (x', y').

Fig. 14.



Es evidente que para pasar del primer sistema de ejes YOX al segundo Y′OX′, se necesita conocer los ángulos Y′OX y X′OX que los nuevos ejes forman con uno de los primitivos que hemos supuesto ser el de las abscisas. Estos ángulos para más sencillez los expresaremos por XY′ y XX′ que son las letras de sus extremos, é indican clara y distintamente los dos ejes cuyo ángulo se considera.

Para conocer ahora la relacion que liga las nuevas coordenadas de cada punto del plano con las primitivas, imagínese un punto cualquiera M, y trácense las ordenadas PM perpendicular á OX y P'M paralela á OY'; de donde

$$OP = x, \; PM = y, \; OP' = x' \text{ y } P'M = y'.$$

Si por el extremo P' de la nueva abscisa se tiran P'Q paralela á OX, y P'R paralela á OY, se tendrá

$$x = OP = OR + P'Q. \text{ é } y = PM = MQ + P'R.$$

Pero OR y P'Q, MQ y P'R son los catetos de dos triángulos rectángulos ORP' y P'QM, cuyas hipotenusas OP' y P'M son (x', y'), y los ángulos P'OR y MP'Q iguales á XX' é Y'X son conocidos; por consiguiente (*núm.* 17), cada uno de estos catetos debe ser igual á su hipotenusa multiplicada, ó por el seno del ángulo opuesto, ó por el coseno del ángulo adyacente.

Luego:

$$\begin{aligned} OR &= OP' \times \cos. P'OR = x' \cos. XX', \\ P'Q &= P'M \times \cos. MP'Q = y' \cos. XY'; \\ P'R &= OP' \times \text{sen}. P'OR = x' \text{sen}. X'X, \\ MQ &= P'M \times \text{sen}. MP'Q = y' \text{sen}. Y'X: \end{aligned}$$

estos valores sustituidos en los de (x, y), darán

$$(50) \quad \begin{cases} x = x' \cos. XX' + y' \cos. Y'X \\ y = x' \text{sen}. XX' + y' \text{sen}. Y'X. \end{cases}$$

Estas fórmulas de los valores de (x, y) en funcion de las nuevas coordenadas y de los ángulos que forman con el eje de las abscisas primitivas, se vé que son generales para todos los puntos del plano en que estén trazados los ejes; porque las construcciones verificadas para deducirlas, pueden tener lugar en cualquier otro punto que el M en que fuesen empleadas.

32.—Hallar las fórmulas de las coordenadas para pasar de un sistema de ejes oblícuos á otro rectangular que tenga el mismo orígen — Este problema es el inverso del precedente: por lo mismo segun las ecuaciones determinadas entonces (x', y') serán las coordenadas conocidas, y (x, y) las incógnitas; mientras que los ángulos XX' y XY' continuarán siendo tambien conocidos, porque debiéndolo ser el X'Y' de los ejes oblícuos dados, y el XX' del nuevo de las abscisas con el primitivo, su suma es un ángulo determinado.

Por lo tanto, los valores de (x', y') que ahora se buscan, se obtendrán inmediatamente con solo despejar estas cantidades en las expresiones de (x, y) que se deducen de la cuestion precedente. Multiplicando los valores hallados entonces, ó sea la primera ecuacion de la (*fór.* 50) por sen. XX', la segunda por cos. XX', y restándolas miembro á miembro se obtiene

$$x \text{ sen}. XX' - y \cos. XX' = y' (\cos. XY' \text{ sen}. XX' - \text{sen}. XY' \cos. XX'):$$

de donde resulta

$$y' = \frac{x \text{ sen. } XX' - y \cos. XX'}{\text{sen. } (XX' - XY')};$$

ó bien cambiando los signos á numerador y denominador para que en este no aparezca un ángulo negativo, pues XX' es menor que XY', nos da la fórmula

$$(51) \qquad y' = \frac{y \cos. XX' - x \text{ sen. } XX'}{\text{sen. } (XY' - XX')}.$$

El valor de x' se puede hallar del mismo modo multiplicando la primera ecuacion por sen. XY', la segunda por cos. XY', y restándolas despues, tendremos

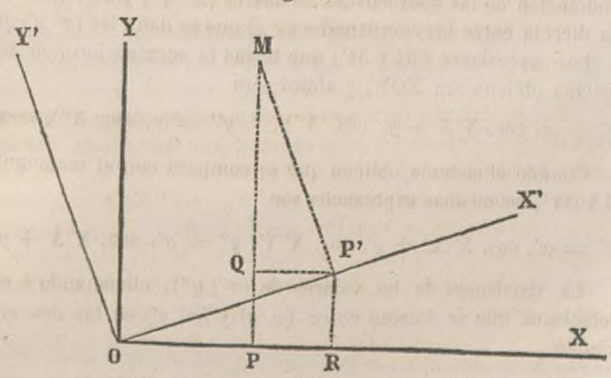
$$x \text{ sen. } XY' - y \cos. XY' = x' (\text{sen. } XY' \cos. XX' - \cos. XY' \text{ sen. } XX'):$$

de cuya igualdad se deduce inmediatamente la expresion

$$(51)' \qquad x' = \frac{x \text{ sen. } XY' - y \cos. XY'}{\text{sen. } (XY' - XX')}.$$

33.—Determinar las expresiones de las coordenadas de un punto para pasar de un sistema de ejes rectangulares á otro tambien rectangular que tenga el mismo orígen.—Para obtener los valores de las coordenadas del sistema primitivo (x y) en funcion de las nuevas (x' y'), cuando unas y otras son rectangulares, no hay más que introducir en las (*fórs.* 50) halladas para pasar de un sistema rectangular á otro oblícuo, las modificaciones inherentes á lo que hemos supuesto actualmente. Estas modificaciones se efectuan con mucha sencillez. En efecto, si el ángulo $X'Y'$ (*fig.* 15) se hace recto, el ángulo XX' es el complemento por exceso del XY'; así sen. XY' = cos. XX' y cos. $XY' =$ — sen. XX'. Con estos valores tendremos las fórmulas para el presente caso

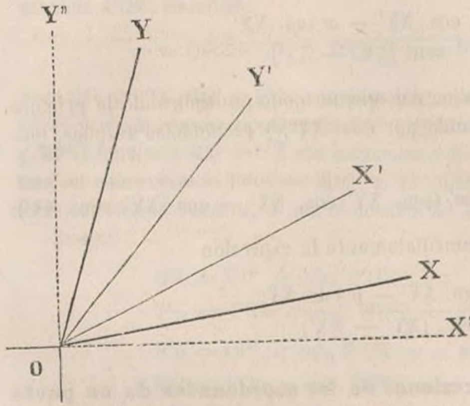
Fig. 15.



$$(52) \qquad \begin{cases} x = x' . \cos. XX' - y' . \text{ sen. } XX' \\ y = x' . \text{ sen. } XX' + y' . \cos. XX'. \end{cases}$$

34.—Dadas las coordenadas de un punto referido á ejes oblícuos, hallar las fórmulas para pasar á otro sistema tambien oblícuo que tenga el mismo orígen.—Sean los ejes primitivos OX y OY (*fig.* 16), y los nuevos OX' y OY': las coordenadas antiguas las expresaremos por (x y) y las modernas por (x' y').

Fig. 16.



Si por el orígen comun O de estos dos sistemas de ejes se concibe otro tercero X''OY'' rectangular, cuyo ángulo XX'' será conocido, puesto que podremos elegirle arbitrariamente: con las fórmulas para pasar del sistema dado XOY al rectangular X''OY'', y las que conocemos para hacerlo de este al que se desea X'OY', quedará resuelto el problema que nos ocupa.

Las (*fórs.* 50) que ligan las coordenadas rectangulares con las oblícuas, y que por ser más sencillas deben ahora preferirse, se hallaron (*núm.* 31): poniendo en ellas primero (x'' y'') en lugar de (x y) que eran entonces las coordenadas rectangulares, y por (x' y') tambien (x y); sustituyendo despues (x y) por las (x'' y''), y dejando las (x' y') acentuadas del mismo modo que lo están, se tendrán dos expresiones de x'' y de y'', la una en funcion del sistema oblícuo dado, y la otra del oblícuo en que quiere trasformarse; así solo quedará que hacer la eliminacion de las coordenadas auxiliares (x'' y'') para lograr una dependencia directa entre las coordenadas (x y) que se dan y las (x' y') que se buscan.

Las expresiones (51 y 51') que tenian la acentuacion indicada, cuando el sistema oblícuo era XOY, y ahora será

$$x'' = x.\ \cos.\ X''X + y.\ \cos.\ X''Y, \qquad y'' = x.\ \text{sen.}\ X''X + y.\ \text{sen}\ X''Y.$$

Cuando el sistema oblícuo que se compara con el rectangular X''OY'' es el X'OY', las mismas expresiones son

$$x'' = x'.\ \cos.\ X''X' + y'.\ \cos.\ X''Y', \ y'' = x'.\ \text{sen.}\ X''X' + y'.\ \text{sen.}\ X''Y'.$$

La igualacion de los valores de (x'' y''), elimanando á estas, dará las relaciones que se buscan entre (x y) y (x' y') en las dos ecuaciones que siguen

$$x.\ \cos.\ X''X + y \cos.\ X''Y = x'.\ \cos.\ X''X' + y'.\ \cos.\ X''Y':$$
$$x.\ \text{sen.}\ X''X + y\ \text{sen.}\ X''Y = x'.\ \text{sen.}\ X''X' + y'.\ \text{sen.}\ X''Y'.$$

Ahora, para hallar los valores de (x y) se eliminará una de estas variables y se tendrá la expresion de la otra. La eliminacian más conveniente es, para hallar la x, multiplicar cada ecuacion por el coeficiente de y en la otra, y restar despues las ecuaciones.

En efecto, multiplicando la primera ecuacion por sen. X''Y, la segunda por cos. X''Y, y restándolas se tiene

x (sen. X''Y. cos. X''X — sen. X''X. cos. X''Y) = x' (sen. X''Y. cos. X''X' — X''X' cos. X''Y) + y' (sen. X''Y. cos. X''Y' — sen. X''Y'. cos. X''Y), ó lo que es lo mismo

x. sen. (X''Y — X''X) = x'. sen. (X''Y — X''X') + y'. sen. (X''Y' —X''Y): Luego

$$x = \frac{x'.\ \text{sen.}\ (X''Y - X''X') + y'.\ \text{sen.}\ (X''Y' - X''Y)}{\text{sen.}\ (X''Y - X''X)}$$

Los mismos procedimientos repetidos para eliminar la x darán para el valor de y

$$y = \frac{x'.\ \text{sen.}\ (X''X' - X''X) + y'.\ \text{sen.}\ (X''Y' - X''X)}{\text{sen.}\ (X''Y - X''X)}.$$

Pero las sustracciones de los ángulos que aparecen en estas expresiones, deben efectuarse, para que ninguno quede con relacion á los ejes rectangulares; por lo mismo examinando la figura se ve que

X''Y — X''X' = X'Y, X''Y' — X''Y = Y'Y, X''X' — X''X = XX', X''Y' — X''X = XY', y X''Y — X''X = XY.

De donde se deducen las fórmulas siguientes:

$$(53)\quad \begin{cases} x = \dfrac{x'.\ \text{sen.}\ X'Y + y'.\ \text{sen.}\ Y'Y}{\text{sen.}\ XY} \\[2ex] y = \dfrac{x'.\ \text{sen}\ XX' + y'.\ \text{sen.}\ XY'}{\text{sen.}\ XY}. \end{cases}$$

Observacion. — Si en cualquiera de los casos de trasformacion de coordenadas que se han resuelto, hubiera que trasportar el orígen, que en todos los problemas se ha supuesto invariable, se aumentaria la expresion de la abscisa con la del orígen, y tambien la de la ordenada con la del mismo orígen, segun se indicó en el primer problema.

CAPÍTULO IV.

COORDENADAS POLARES.

35.—Condiciones simultáneas y definiciones.—Cuando en el capítulo primero de esta seccion hemos manifestado al principio el modo de fijar los puntos de un plano relativamente á otros invariables ó líneas tiradas por ellos en dicho plano, se demostró despues en los números sucesivos hasta el presente, que no solo podia conseguirse por medio de lo que se ha convenido en llamar *sistema de coordenadas*, sino que tambien pudieran elegirse otras condiciones tales, que determinaran completa y definitivamente la situacion de un punto cualquiera.

Así sucede: *cuando la posicion de un punto se marca por su distancia á otro invariable, y por el ángulo que forma con una recta dada, la existentencia de estas dos condiciones simultáneas constituye lo que llaman* COORDENADAS POLARES.

La recta fija ó *eje* que, ó pasa por el punto dado, ó se sustituye por una paralela tirada por él, con este mismo punto, se dice *sistema polar*.

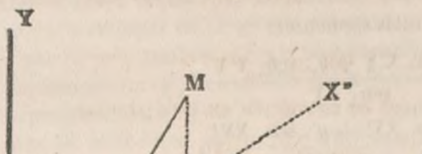
El punto inmóvil al que se refieren las distancias de todos los del plano, se designa con el nombre de *polo*.

Y por último, la distancia respectiva de cada punto al mismo polo, se denomina *radio vector*.

El hallar la expresion de una línea referida á un sistema polar, es cuestion que interesa muchísimo y se presenta con mucha frecuencia; pero como para conseguirlo no se necesita ya otra cosa más que deducir las fórmulas de trasformacion correspondientes, segun hemos visto en el capítulo precedente, vamos ahora á determinarlas por este otro sistema polar.

36.—Dadas las coordenadas rectangulares de un punto, hallar sus expresiones para pasar á un sistema polar de eje paralelo.—Sea el sistema rectangular YOX (*fig.* 17), el polo O′ y el eje que pasa por el O′X′; siendo paralelo al de las abscisas, por ejemplo.

Fig. 17.



Las coordenadas de un punto cualquiera M del plano, son OP y PM que se componen de OR y O′Q, y de RO′ y QM; es decir, que tendremos

$$\text{OP} = \text{OR} + \text{O'Q}$$
$$\text{PM} = \text{RO'} + \text{QM}.$$

Si las coordenadas OR y RO′ del polo que han de ser necesariamente conocidas, se representasen por a y b, y á las OP y PM se las llama como hasta aquí $(x\ y)$, se tiene

$$\text{OP} = x = a + \text{O'Q};\ \text{PM} = y = b + \text{QM}:$$

por consiguiente la cuestion ya está reducida á determinar las expresiones de las líneas O′Q y QM en funcion ó con relacion al radio vector O′M del punto dado y de su ángulo MO′X′ con el eje.

Llamando r al radio vector y v al ángulo MO′X′; se deduce del triángulo rectángulo MO′Q′, que

$$\text{O'Q} = \text{O'M. cos. } v, \text{ y } \text{QM} = \text{O'M. sen. } v;$$

ó bien

$$\text{O'Q} = r \text{ cos. } v, \text{ y } \text{QM} = r. \text{ sen. } v.$$

Estos valores sustituidos en los de las coordenadas OP y PM, dan para el caso presente como fórmulas

$$(54)\qquad \begin{cases} x = a + r.\ \cos.\ v \\ y = b + r.\ \text{sen}.\ v \end{cases}$$

37.—Determinar los valores de las coordenadas para pasar de un sistema rectangular á otro polar cuyo eje tenga una inclinacion conocida.—El sistema rectangular primitivo es el YOX (*fig.* 17); O′ es el polo, y O′X″ el eje del sistema polar á que han de referirse las coordenadas OP y PM de un punto M, y así tendremos

$$\text{OP} = \text{OR} + \text{O'Q},\ \text{y PM} = \text{RO'} + \text{QM}$$

ó bien

$$x = a + \text{O'Q};\ y = b + \text{QM}:$$

siendo

$$\text{OP} = x \text{ y PM} = y;\ \text{OR} = a \text{ y RO'} = b.$$

El ángulo MO′X′ que cada radio vector MO′ $= r$, forma con el eje OX de abscisas ó con una paralela suya O′X′, se compone del MO′X″ que se designa por v y del constante X″O′X′ que fija la posicion del nuevo eje con relacion al primitivo; por lo tanto, el triángulo rectángulo MO′Q, dará como anteriormente en cantidades conocidas las expresiones de sus dos catetos, y serán

$$\text{O'Q} = r.\ \cos.\ (v + \text{X''X'}),\ \text{y QM} = r.\ \text{sen}.\ (v + \text{X''X'}).$$

Con lo cual los valores de (x, y) se convierten en las fórmulas

$$(55)\qquad \begin{cases} x = a + r.\ \cos.\ (v + \text{X''X'}) \\ y = b + r.\ \text{sen}.\ (v + \text{X''X'}) \end{cases}$$

38.—Hallar las fórmulas para pasar de un sistema de ejes oblícuos á otro polar.—Si por el orígen de un sistema oblícuo dado se imaginan dos ejes rectangulares, las fórmulas halladas para pasar de uno á otro, y las que se acaban de obtener para pasar del rectangular al polar, darán eliminando las coordenadas rectangulares que se han introducido como auxiliares, la relacion ó correspondencia recíproca entre las oblícuas y las polares.

Sean (x, y) las coordenadas oblícuas de un punto cualquiera; y (x', y') las rectangulares de dicho punto referido á un sistema del mismo orígen, segun el (*núm.* 34) se tendrá

$$x' = x.\ \cos.\ \text{X'X} + y.\ \cos.\ \text{X'Y};\quad y' = x.\ \text{sen}.\ \text{X'X} + y.\ \text{sen}.\ \text{X'Y}.$$

Las mismas coordenadas rectangulares en funcion de las radios vectores r y de los ángulos v', serán

$$x' = r.\ \cos.\ v';\quad y' = r.\ \text{sen}.\ v:$$

en las cuales se ha prescindido ahora de los incrementos constantes a y b, y en las que v' representa los ángulos de los radios vectores, no con su eje, sino con el de las abscisas x.

Eliminando por la igualacion de valores á (x', y'), se tiene

$$r.\ \text{cos.}\ v' = x.\ \text{cos}\ X'X + y.\ \text{cos.}\ X'Y;\ r.\ \text{sen.}\ v' = x.\ \text{sen.}\ X'X + \\ + y.\ \text{sen.}\ X'Y.$$

Multiplicando la primera por sen. X'X, la segunda por cos. X'X, y restándolas se tendrá

$$r.\ (\text{cos.}\ v.\ \text{sen.}\ X'X - \text{sen.}\ v.\ \text{cos.}\ X'X) = y\ (\text{cos.}\ X'Y.\ \text{sen.}\ X'X - \text{sen.}\ X'X \\ X\ \text{cos.}\ X'X)$$

de donde se deduce la fórmula

$$(56)\qquad y = \frac{r.\ \text{sen.}\ (v' - X'X)}{\text{sen.}\ (X'Y - X'X)}.$$

Procediendo del mismo modo para hallar el valor de x, se encontrará

$$(56')\qquad x = \frac{r.\ \text{sen.}\ (X'Y - v')}{\text{sen.}\ (X'Y - X'X)}.$$

Expresiones en las que trazando la figura correspondiente, se pueden reemplazar las diferencias entre ángulos que existen, por los verdaderos ángulos que resultan, y lo son todos con relacion á los ejes oblícuos dados.

39.—Observaciones.—1.ª Cuando haya precision de variar tambien el orígen ó polo de aquellas coordenadas, se deberá aumentar la abscisa x en la del polo a, y la ordenada en b.

2.ª Si se quisiera hallar la ecuacion polar del círculo con referencia á su centro, en el que se coloca tambien el polo, sustituiremos en la ecuacion $x^2 + y^2 = R^2$ (*fór.* 47″– *núm.* 27) del círculo por (x, y) las expresiones halladas (*núm.* 27), en el que se supondrian nulas a y b. Estas expresiones serian por lo tanto

$$x = r.\ \text{cos.}\ v;\quad y = r.\ \text{sen.}\ v.$$

con las que la ecuacion del círculo se convierte en

$$r^2\ (\text{sen.}^2\ v + \text{cos.}^2\ v) = R^2;$$

pero como $\text{sen.}^2\ v + \text{cos.}^2\ v$, es la unidad, segun la trigonometría, resulta

$$(56'')\qquad r^2 = R^2,\ \text{ó bien}\ r = R:$$

de aquí se deduce que: *el radio vector es constante, puesto que es independiente del ángulo v; y por consiguiente todos los puntos de la circunferencia equidistan del polo*, como ya se sabe.

3.ª Si el polo se coloca en el extremo del diámetro, podrá obtenerse la ecuacion del círculo, sustituyendo los mismos valores de (x, y) en su ecuacion $y^2 + x^2 = 2\ R\ x$ (*núm.* 27—*fór.* 47′), cuando el orígen se halla en un extremo del diámetro.

En este concepto la ecuacion polar del círculo se reduce á

$$r^2\ (\text{sen.}^2\ v + \text{cos.}\ v) = 2\ R \times r.\ \text{cos.}\ v:$$

ó suprimiendo el paréntesis que es la unidad, resulta la fórmula

$$(56''')\qquad r^2 = 2\ R.\ r.\ \text{cos.}\ v.$$

Siendo $r. \cos. v$ la parte de diámetro comprendida desde su extremo hasta el pié de la perpendicular bajada desde el extremo de cada rádio vector ó cuerda del círculo, se deduce fácilmente que, *cada cuerda r es medio proporcional entre el diámetro y el segmento correspondiente.*

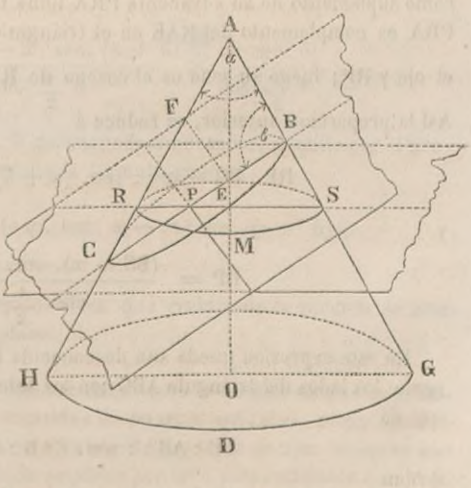
CAPÍTULO V.

SECCIONES CÓNICAS.

40.—Determinacion de las curvas planas.—Habiendo estudiado la situacion de los puntos, el curso de las rectas y curvas circulares, y despues de conocer los medios de simplificar en muchos casos las fórmulas de los puntos y líneas, corresponde ahora determinar las de las curvas planas que resultan de la interseccion de un cono recto con un plano.

41.—Hallar la expresion de un cono recto y de toda seccion causada en él por un plano. —Observaciones.— Para obtener con más facilidad y sencillez la ecuacion que pueda representar todos los puntos de una línea sin otra condicion que la de hallarse sobre una superficie cónica y un plano secante que haya de originarla, se debe suponer el cono recto HAG (*fig.* 18). Si AO es su eje y HDG el círculo de su base, cualquier plano que pase por el eje, será perpendicular al de la base, porque contendrá á dicho eje que es una perpendicular á la base.

Fig. 18.



Ahora imagínese que el cono HAG, se le ha colocado de modo que presente á la vista el punto más alto B y el más bajo C de la seccion CMB cuya ecuacion se busca: si por el punto E donde el eje atraviesa al plano CMB de la seccion se levanta á este la perpendicular EF, el plano que pase por ella será perpendicular al de la seccion; por consiguiente el plano HAG de la figura que divide de arriba á bajo al cono en dos mitades, supondremos que es el que pasa por dicha EF y por el eje, y por tanto el que goza de la propiedad de ser perpendicular al de la seccion CBM y al de la base HAG del cono.

Cortando ahora la superficie cónica por un tercer plano RMS paralelo á la base y que atraviesa al de la seccion, será tambien perpendicular al HAG: de lo que deducimos que si el CMB y el RMS son perpendiculares al HAG, su comun seccion PM será perpendicular á las PC y PR de cada plano con el tercero HAG.

Pero la curva RMS causada en el cono por un plano paralelo á su base es un círculo, y por consiguiente cada perpendicular MP tirada desde la circunferencia al diámetro será media proporcional entre los segmentos de este; luego

$$\overline{PM}^2 = RP \times PS.$$

Con esta observacion se limita la cuestion á determinar los valores RP y PB en los triángulos RPC y BPS en los que es necesario saber qué partes han de ser conocidas. Para esto, fijemos el orígen de las coordenadas de todos los puntos de la seccion CMB en B, tomemos por eje de abscisas la interseccion BC imaginando las ordenadas MP perpendiculares, lo que hará que $PM = y$ y $BP = x$. Sea $AB = c$: llámese α al ángulo HAG que fija la superficie cónica, y represéntese por β el ABC que determina la seccion.

Segun estos súpuestos el segmento RP del diámetro, como lado del triángulo RPC se halla recordando que en todo triángulo los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos, lo que da

$$RP : PC :: \text{sen. } ACB : \text{sen. } HRS;$$

pero $PC = BC - BP = BC - x$; el ángulo ACB, como parte del triángulo ABC es suplemento de $A + B = \alpha + \beta$, y su seno igual al de este; HRS, como suplemento de su adyacente PRA tiene tambien el mismo seno; mas el PRA es complemento del RAE en el triángmlo rectángulo que forman con el eje y RP; luego su seno es el coseno de $RAE = \frac{1}{2}\ RAS = \frac{1}{2}\ \alpha$. Así la proporcion anterior, se reduce á

$$RP : BC - x :: \text{sen. } (\alpha + \beta) : \cos.\ \tfrac{1}{2}\ \alpha$$

y

$$RP = \frac{(BC - x).\ \text{sen. } (\alpha + \alpha)}{\cos.\ \frac{1}{2}\ \alpha}.$$

En esta expresion queda aun desconocida la BC, y para hallarla compararemos los lados del triángulo ABC con los senos de los ángulos opuestos, que nos da

$$BC : AB :: \text{sen. } CAB : \text{sen. } ACB;$$

ó bien

$$BC : c :: \text{sen. } \alpha : \text{sen. } (\alpha + \beta) :$$

de donde

$$BC = \frac{c.\ \text{sen } \alpha}{\text{sen. } (\alpha + \beta)}.$$

Este valor sustituido al anterior será

$$RP = \frac{c.\ \text{sen}.\ \alpha - x.\ \text{sen}.\ (\alpha + \beta)}{\cos.\ \frac{1}{2}\ \alpha}.$$

El segmento PS como lado del triángulo PSB, se determina en él, comparando lados y senos de ángulos opuestos, y se tiene

$$PS : PB :: \text{sen}.\ CBG : \text{sen}.\ RSA;$$

pero $PB = x$: el ángulo CBG es suplemento de su adyacente CBA que es β, y por lo tanto su seno es igual al de este ángulo; y por último el RSA tiene como el SRA por seno el $\cos.\ \frac{1}{2}\ \alpha$; luego la proporcion anterior será

$$PS : x :: \text{sen}.\ \beta : \cos.\ \frac{1}{2}\ \alpha :$$

de aquí se deduce que

$$PS = \frac{x.\ \text{sen}.\ \beta}{\cos.\ \frac{1}{2}\ \alpha}.$$

Las expresiones de RP y PS halladas, sustituidas por el valor del cuadrado de $PM = y$, dan una relacion entre (x, y) dependiente de las únicas cantidades que fijan cada seccion cónica, y que será por lo mismo la ecuacion de todas; así tendremos

$$\overline{PM}^2 = RP \times PS:$$

de donde

$$y^2 = \frac{c.\ \text{sen}.\ \alpha - x.\ \text{sen}.\ (\alpha + \beta)}{\cos.\ \frac{1}{2}\ \alpha} \times \frac{x.\ \text{sen}.\ \beta}{\cos.\ \frac{1}{2}\ \alpha}:$$

sacando por factor comun sen. β del segundo numerador, partido por el producto de los denominadores, resulta la fórmula general

$$(E) \qquad y^2 = \frac{\text{sen}.\ \beta}{\cos.^2\ \frac{1}{2}\ \alpha}\ [c\,x.\ \text{sen}.\ \alpha - x.^2\ \text{sen}.\ (\alpha + \beta)\ ].$$

Esta es la ecuacion de cualquier línea que resulte de la seccion de una superficie cónica recta por un plano.

Observaciones.—1.ª Los valores dados para y en esta ecuacion general que carece del término que contiene su primera potencia, serán iguales y de signo contrario para cada valor de x; luego, *toda seccion cónica es simétrica respecto al eje, causada en su plano por otro perpendicular que pase por el eje del cono.*

2.ª Si el plano de la seccion corta todas las generatrices del cono, como se ha supuesto en la figura, $(\alpha + \beta)$ no llega á valer dos ángulos rectos, y su seno será precisamente positivo. La curva cerrada que aparece en este caso se denomina *elipse*.

3.ª Si el plano de la seccion gira alrededor de B permaneciendo perpendicular al HAG, hasta que dejando de cortar todas las generatrices se sitúe paralelamente á la opuesta AH, entonces $\alpha + \beta$ como suplemento uno de otro, valen dos ángulos rectos, y su seno se hace nulo. La curva indefinida abierta hácia la parte opuesta á B, se llama *parábola.*

4.ª Si el plano de la seccion sigue aproximándose más á la parte superior AB de la arista, ó bien si el plano de la seccion gira hasta colocarse en una posicion paralela al eje del cono, la suma $\alpha + \beta$ es mayor que dos ángulos rectos, y su seno se hará esencialmente negativo. La curva que, suponiendo indefinido el cono por encima de su vértice, así como el plano secante que volvería á aparecer en el cono invertido, será por decirlo así, abierta en todos sentidos, la cual se distingue con el nombre de *hipérbola.*

42.—Determinar la fórmula de la elipse referida á uno de los vértices.—Hemos dicho arriba que cuando en la ecuacion general (E) de las secciones cónicas, $\alpha + \beta$ es menor de dos ángulos rectos, y por lo tanto su seno positivo, sucedia que el plano secante cortando todas las aristas del cono, engendraba la elipse. Para obtener ahora su expresion bajo una forma más adecuada, se deben reunir por una parte todo lo que sean líneas trigonométricas, dejando en otra las coordenadas ó distancias conocidas.

En efecto, divídase el factor de dentro del paréntesis por sen. $(\alpha + \beta)$, multiplicando al de fuera por la misma cantidad; esta operacion no altera en nada la expresion de y en dicha ecuacion general. Pero esta expresion hace ver que, al buscar los puntos en que la curva corta al eje de las x, para lo cual se ha de suponer $y = o$; las abscisas de los encuentros con el eje de la curva son $x' = o$ y $x'' = \dfrac{c.\ \text{sen.}\ \alpha}{\text{sen.}\ (\alpha + \beta)}$, es decir, que un encuentro es en el orígen B (*fig.* 18), y el otro á una distancia determinada BC de dicho orígen; luego si á esta distancia $\dfrac{c.\ \text{sen.}\ \alpha}{\text{sen.}\ (\alpha + \beta)}$, la representamos por $2a$, lo que no ofrece ningun inconveniente, quedará la ecuacion bajo la forma apetecida, y nos da

$$y^2 = \frac{\text{sen.}\ \beta.\ \text{sen.}\ (\alpha + \beta)}{\cos.^2 \frac{1}{2} \alpha} (2\,\alpha\, x - x^2).$$

La recta BC ó 2α por dividir en mitades todas las perpendiculares comprendidas en la curva, se llama *eje primero.* El punto medio de este eje se le da el nombre de *centro*: y la doble ordenada que pasa por el centro, se llama *eje segundo.* Los extremos de los ejes se dicen *vértices* de la curva.

Si al semi-eje segundo le representamos por b, como su extremo tiene por coordenadas a y b, hallándose sobre la curva, la expresion de esta quedará determinada con estos valores, y será

$$b^2 = \frac{\text{sen.}\ \beta.\ \text{sen.}\ (\alpha + \beta)}{\cos.^2 \frac{1}{2} \alpha}\, \alpha^2;$$

ó bien dividiendo los dos miembros por a^2, da

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\text{sen. } 6 \text{. sen. } (\alpha + 6)}{\cos.^2 \frac{1}{2} \alpha}.$$

Es decir, que el factor constante que multiplica á la diferencia ($2\, a\, x - x^2$) puede reemplazarse por el cociente de los cuadrados de los semi-ejes, lo cual da á la fórmula de la elipse la forma siguiente

$$(57) \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2\, a\, x - x^2).$$

Tal es la expresion de toda la elipse referida á ejes rectangulares y cuyo orígen se halla en uno de los vértices.

43. — Hallar la expresion de la elipse con relacion á su centro. — Para obtener la fórmula de la elipse cuando el orígen se halla en su centro, basta observar que las coordenadas de dicho centro son (a y o); luego deberá ponerse por x en la ecuacion anterior $x + a$, y tendremos

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2\, a\, x - x^2),$$

de donde resulta

$$(57') \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Que es la fórmula que se pedia.

44. — Los círculos trazados sobre los ejes, quedan el uno inscrito y el otro circunscrito á la elipse. — Si la expresion de la elipse es

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

la del círculo descrito con el radio a, será

$$x^2 + y'^2 = a^2, \text{ ó bien } y'^2 = a^2 - x^2;$$

porque á una misma abscisa x corresponderán al círculo ordenadas y' diferentes de las y de la elipse.

Dividiendo ó comparando miembro á miembro esta ecuacion de la curva elíptica, se tiene

$$y^2 : y'^2 :: b^2 : a^2, \text{ ó bien, } y : y' :: b : a;$$

luego si b era el eje menor, y' ha de ser siempre mayor que y: y si b fuese el mayor eje de la elipse y' seria siempre menor que y, lo que prueba el teorema.

Observacion. — La proporcion anterior demuestra que: *las ordenadas de la elipse, y las de los círculos inscrito y circunscrito, son proporcionales á los semi-ejes*; y por consiguiente puede servir para construir esta curva sin más que buscar cuartas proporcionales á los semi-ejes y á cada ordenada del círculo descrito con uno de ellos como radio.

45.—Determinar los puntos, cuyas distancias á los de la elipse sean una expresion racional de su abscisa.—Sean las coordenadas del punto que se busca $(x'\ y')$, y sean $(x\ y)$ las de cualquier punto de la curva: la distancia del primero á uno de estos estará determinada por la suma de cuadrados de las diferencias entre las abscisas y ordenadas; luego llamando D á la distancia, se tendrá

$$D^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 - 2\,x\,x' + x^2 + y^2 - 2\,y\,y' + y^2.$$

Ahora si se sustituye por y su valor deducido de la ecuacion de la elipse que es

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

expresion radical, y claro es que quedará bajo esta forma el término $2yy'$; por consiguiente este término debe desaparecer, lo cual da á conocer que $y' = o$; luego el punto que se busca ha de estar sobre el eje primero de la curva. No existiendo el término $2yy'^2$ ni el y^2, la expresion de D^2 se reduce á

$$D^2 = x^2 - 2\,x\,x' + x^2 + y^2$$

que, con el valor de

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

se convierte en

$$D^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x'^2 - 2\,x\,x' + (x'^2 + b^2).$$

Si el valor D, ha de ser racional, es necesario que tenga raiz exacta ó que, suponiéndole un trinomio, el producto de los términos extremos sea igual al cuadrado de la mitad del término medio; es decir, que la ecuacion de condicion ha de ser

$$x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)(x'^2 + b^2) = x^2 x'^2;$$

ó partiendo por x^2 tendremos

$$\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)(x'^2 + b^2) = x'^2;$$

siendo lo mismo que

$$\frac{b^2}{a^2}\,x'^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\,b^2$$

ó dividiendo por

$$\frac{b^2}{a^2}\,x'^2 = a^2 - b^2:$$

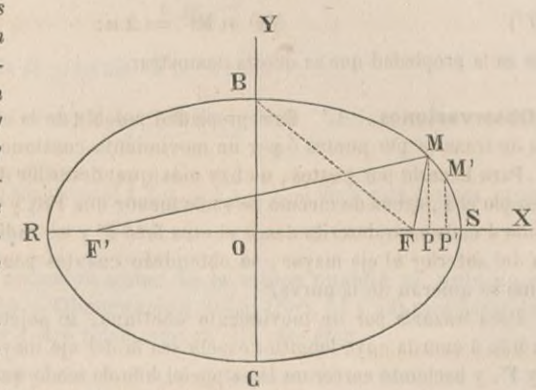
nos da la fórmula

(58) $$x' = \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Por consiguiente: *la abscisa del punto que se buscaba, es el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el semi-eje mayor, y el otro cateto el menor, tomado ya positiva, ya negativamente.*

Así, pues, *existen dos puntos sobre el eje mayor cuyas distancias á todos los de la curva, pueden expresarse en funcion racional de la abscisa, y para determinarlos no hay más que hacer centro en el extremo* B *del eje menor y con un rádio igual á la mitad del mayor, trazar dos arcos que le cortenen* F *y* F′ (*fig.* 19.) *Estos puntos se llaman* FOCOS *de la elipse, y sus abscisas* OF *y* OF′ *dadas por la expresion acabada de encontrar, se distinguen con el nombre de* EXCENTRICIDAD. *Cualquiera recta tirada desde los focos á un punto de la curva, se dice* RADIO VECTOR; *y como existen dos focos, se sigue que para cada punto de la elipse hay dos radios vectores.*

Fig. 19.



46.—En toda elipse la suma de los radios vectores de cada punto es constante é igual al eje primero.—Observaciones.—Puesto que cada radio vector MF ó MF′ (*fig.* 19), no es más que la distancia entre el foco correspondiente y un punto de la curva, en hallando las expresiones de estas distancias y sumándolas, se verá si es cierta la propiedad anunciada.

La distancia MF entre el punto M cuyas coordenadas son $(x\ y)$ y el foco F que tiene por coordenadas $(\sqrt{a^2 - b^2},\ o)$, es

$$\overline{\mathrm{MF}}^2 = (\sqrt{a^2 - b^2} - x)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);$$

poniendo por y^2 la ecuacion de la curva, será

$$\overline{\mathrm{MF}}^2 = x^2\left(1^2 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 2\,x\,\sqrt{a^2 - b^2} + a^2.$$

Pero

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \mathrm{O\,F};$$

luego si esta excentricidad OF se expresa por e, tendremos

$$\overline{\mathrm{MF}}^2 = \frac{e^2}{a^2}\,x^2 - 2\,e\,x + a^2,$$

que por ser cuadrado perfecto el segundo miembro da

$$(59) \qquad \mathrm{MF} = a - \frac{e}{a} x.$$

La expresion del radio vector MF′ se obtendrá del mismo modo; pero siendo evidente que resultarian las mismas combinaciones para su valor, fuera de ser la excentricidad e negativa, con solo introducir esta condicion en la expresion de MF′, que precede, tendremos la de

$$(59') \qquad \mathrm{MF}' = a + \frac{e}{a} x.$$

Ahora sumando los dos radios vectores, resulta

$$(59'') \qquad \mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2\,a:$$

que es la propiedad que se queria demostrar.

Observaciones. 1.ª Esta propiedad notable de la elipse facilita un medio de trazarla por puntos ó por un movimiento contínuo.

Para hacerlo por puntos, no hay más que describir desde un foco, por ejemplo el F, arcos de círculo de radio menor que FR; y mayor que FS; cortando á cada arco descrito desde el otro foco F′ y un radio igual á la diferencia del anterior al eje mayor, se obtendrán cuantos puntos y tan próximos como se quieran de la curva.

Para trazarla por un movimiento contínuo, se sujetan los extremos de un hilo ó cuerda cuya longitud exacta sea la del eje mayor RS en los focos F y F′, y haciendo correr un lápiz por el hilo de modo que siempre conserve la misma tension; á medida que la parte del hilo recorrida por el lápiz aumenta, disminuirá en la misma cantidad la que debe aun recorrerse, de una manera tal, que todas las posiciones sucesivas de él en contacto del hilo, corresponderán á puntos de la misma elipse.

2.ª Desde luego se comprende que estos dos procedimientos pueden aplicarse sobre el papel, ó bien sobre el terreno, sustituyendo al hilo y al lápiz una cuerda y un punzon; pero como estos procedimientos exigen que la superficie sea plana y que el terreno sea bastante despejado é igual, y que la mayor dimension de los ejes sea de corta longitud, y como tratándose de trazado de caminos y canales, en general, el terreno es en extremo desigual y cubierto de maleza, la superficie demasiado accidentada, y sobre todo, el desarrollo de la curva elíptica, es muy considerable para que pueda replantearse por movimiento contínuo; de suerte que, para obviar estos inconvenientes y vencer en todos los casos cualquiera dificultad ú obstáculo, lo mejor y más exacto es la aplicacion de las tablas de coordenadas calculadas al efecto; así como la longitud del arco, segun veremos más adelante.

47.—La doble ordenada que pasa por el foco de la elipse, es igual al parámetro.—Llámase PARÁMETRO de la elipse una tercera proporcional á los ejes de la misma.

Siendo la ecuacion de las ordenadas

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

no habrá más que poner por x el valor de la excentricidad e, ó sea la distancia del centro al foco, para obtener la que pasa por este; y si esta ordenada cumple con la condicion de ser una tercera proporcional á los ejes, será el parámetro

La abscisa del foco es $\sqrt{a^2 - b^2}$; luego su cuadrado $x^2 = a^2 - b^2$ que, puesto en la ecuacion de la elipse, dará para y^2 la expresion

$$y^2 = \frac{b^2 (a^2 - a^2 + b^2)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2};$$

de donde

$$y = \frac{b^2}{a}$$

y su doble ordenada se presenta en la fórmula

$$(60) \qquad 2\,y = \frac{2\,b^2}{a} = \frac{4\,b^2}{2\,a};$$

que es una cuarta proporcional á $2\,a$, $2\,b$ y $2\,b$, ó bien una tercera proporcional á los ejes.

48.—Hallar la ecuacion polar de la elipse cuando el polo se encuentra en el foco.—Observacion.—Las (*fórs.* 54 y 55) para pasar de un sistema rectangular á otro polar, que en este caso eran

$$x = r.\cos.\,v + a, \text{ é } y = r.\,\text{sen.}\,v + b;$$

sustituidas en la ecuacion de la elipse, con las modificaciones convenientes para situar el polo en el foco, darian la que se busca.

Pero teniendo ya conocida la expresion (59) del radio vector (*núm.* 46) MF ó r que era $a - \frac{e}{a}x$; en donde e representaba la excentricidad OF, bastará poner en ella por x su valor en funcion de dicho radio vector y del ángulo que forma con el eje para obtener la ecuacion que se desea.

Para esto la OP (*fig.* 19) ó x, correspondiente al punto M nos da

$$\text{OF} + \text{FP} = x = e + r.\cos.\,v;$$

siendo $v =$ MFP.

Luego

$$r = a - \frac{e}{a}(e + r.\cos.\,v) = \frac{a^2 - e^2 - er.\cos.\,v}{a}:$$

y poniendo por e^2 su valor $a^2 - b^2$, será

$$a^2 - b^2 r = \frac{b^2 - er.\cos.\,v}{a},$$

ó bien despejando r tendremos la fórmula

$$(61) \qquad r = \frac{b^2}{a + e.\cos.\,v}.$$

Observacion.— *El circulo es una elipse cuyos ejes son iguales*:

En efecto, en cualquiera de las dos ecuaciones que se conocen para la elipse, si se suponen a y b iguales, resulta la ecuacion del círculo.

La elipse referida al extremo de su eje, está expresada (*núm* 42) por la (*fór.* 57); y si en esta ecuacion se supone $b = a$, resulta

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

que es la expresion del círculo referido al extremo de su diámetro, cuando este es igual á $2a$.

La (*fór.* 57') de la elipse referida al centro, y si en ella se hace $a = b$, se tiene para la elipse de ejes iguales la expresion

$$(62) \qquad y^2 = a^2 - x^2, \text{ ó bien, } x^2 + y^2 = a^2:$$

de donde resulta la fórmula de un círculo referido á su centro, cuyo radio es a.

49.—Determinar la expresion de la hipérbola referida al extremo de su eje primero ó vértice.—Cuando la seccion causada en un cono por un plano era tal que este plano cortaba á la generatriz AB (*núm.* 41, *fig.* 18), y á su opuesta para lo cual habia de verificarse que $(\alpha + \beta)$ fuese mayor que dos rectos, hemos dicho (*núm.* 41 *observ.* 1.ª) que la curva tomaba el nombre de *hipérbola*, y se componia de dos ramas que necesariamente estarian separadas por el espacio que debia existir entre las dos secciones que la produjesen.

Ahora nos corresponde hallar la fórmula de esta curva sin otra condicion que la de suponer $(\alpha + \beta)$ mayor que dos ángulos rectos; pasando despues á examinar algunas de sus propiedades en el mismo órden que se hizo con la elipse.

Si $(\alpha + \beta)$, segun la expresion general (E) de las secciones cónicas que se ha discutido en el (*núm.* 41), es mayor que dos rectos, sen. $(\alpha + \beta)$ será precisamente *negativo*, lo que dá para ecuacion de todas las hipérboles originadas en el mismo cono

$$y^2 = \frac{\text{sen. } \beta}{\cos.^2 \frac{1}{2} \alpha} \left(cx. \text{ sen. } \alpha + x^2 . \text{ sen. } (\alpha + \beta) \right).$$

Para presentar esta ecuacion bajo una forma más sencilla y fácil en su aplicacion, multiplicaremos el factor fraccionario por sen. $(\alpha + \beta)$, dividiendo el que le sigue por esta misma cantidad, conforme hicimos para la elipse, y tendremos:

$$y^2 = \frac{\text{sen. } \beta . \text{ sen. } (\alpha + \beta)}{\cos.^2 \frac{1}{2} \alpha} \left(\frac{c. \text{ sen. } \alpha}{\text{sen. } (\alpha + \beta)} x + x^2 \right).$$

El multiplicador de x, es precisamente el valor que corresponde á la longitud del eje de las x, existente entre los puntos donde la curva le atraviesa; pues haciendo $y = o$, y pudiéndose dividir entónces toda la expresion por el factor que se halla fuera del paréntesis, resultan para x los valores *cero*, y tambien $-\frac{c. \text{ sen. } \alpha}{\text{sen. } (\alpha + \beta)}$ que son el orígen B y la distancia BC contada en sentido *negativo*; luego si á esta distancia invariable para cada hipérbola se la representa por $-2a$, la ecuacion se simplifica y toma la forma de

$$y^2 = \frac{\text{sen. } 6 \text{. sen. } (\alpha + 6)}{\cos. \frac{1}{2}\alpha} (2ax + x^2).$$

Esta expresion por carecer del término y, hace ver que á cada valor de x corresponden dos de y iguales y de signo contrario; luego la recta BC *biseca todas las perpendiculares comprendidas en la curva*: por esta razon toma el nombre de *eje primero de la hipérbola. El punto medio de dicho eje* se designa con el nombre de *centro.*

Si en él se levanta una perpendicular al eje, dicha línea como ordenada, no corresponderá á ningun punto de la curva, y en tal caso su expresion debe ser *imaginaria*, representándola por $b\sqrt{-1}$: de suerte que a, y $b\sqrt{-1}$, deberán satisfacer la ecuacion de la hipérbola, pues miradas como coordenadas del punto de la curva que se halle sobre el centro, no existiendo ninguno en esta situacion, y llevando dichas coordenadas este carácter por ser $b\sqrt{-1}$ imaginario, la ecuacion de la hipérbola se verificará con ellas, y será

$$-b^2 = \frac{\text{sen. } 6 \text{. sen. } (\alpha + 6)}{\cos. \frac{1}{2}\alpha} \times -a^2:$$

de donde despejando, resulta

$$\frac{\text{sen. } 6 \text{. sen. } (\alpha + 6)}{\cos.^2 \frac{1}{2}\alpha} = \frac{b^2}{a^2}.$$

El valor de b se conoce fácilmente en esta expresion, cuyo valor mirado como *real,* determina una perpendicular levantada en el centro al primer eje, y que tomada hácia ambos lados de este, recibe el nombre de *eje segundo* ó eje *imaginario.*

Pero la sustitucion de $\frac{b^2}{a^2}$ en vez del quebrado á quien es igual, reduce la ecuacion de la hipérbola á la misma forma que la de la elipse, excepto el signo de x^2. Luego se tendrá la ecuacion general de la hipérbola referida al extremo de su eje primero ó vértice que nos da la fórmula

(63) $$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2).$$

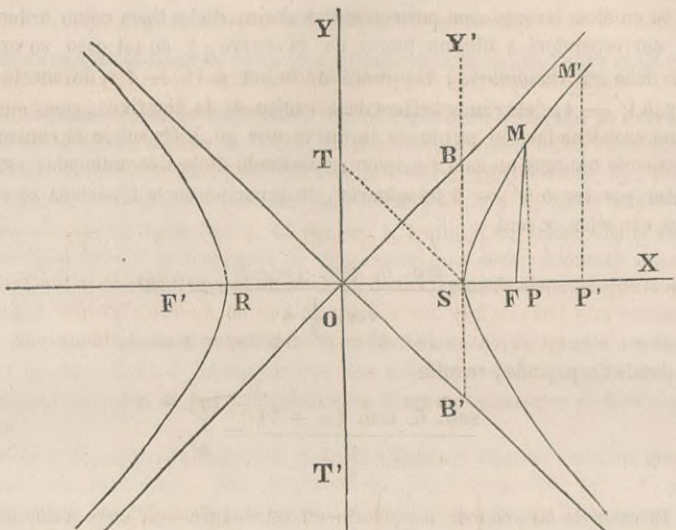
Observaciones.— 1.ª Mientras x sea positiva, tambien lo será y, creciendo simultáneamente: luego *la hipérbola es indefinida en el sentido de las abscisas positivas*.

2.ª Si x es negativa, siendo menor que $2a$, el valor de y aparecerá imaginario. Por consiguiente, *hay en la hipérbola un espacio igual al eje primero, sobre el cual no existe punto alguno de la curva.*

3.ª Si $x = -2a$, resulta $y = o$; y si x toma valores negativos mayores que $2a$, la y se hace positiva, creciendo indefinidamente á medida que lo hace x del lado de las abscisas negativas, lo cual manifiesta que: *en toda hipérbola existen dos ramas indefinidas en sentido contrario, que están separadas sobre el eje real por la longitud de este mismo eje.*

50.—Deducir la fórmula de la hipérbola referida á su centro.— Las coordenadas del centro O (*fig.* 20) con relacion al orígen S á que se refiere la expresion (63) de la hipérbola, son $x = -a$, é $y = o$; y como los

Fig. 20.



nuevos ejes OX y OY permanecen paralelos á los primeros SX y SY′, no habrá más que sustituir por x, $x - a$ en la ecuacion precedente, para obtener la que se busca.

Esta sustitucion nos da la fórmula

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2). \tag{64}$$

Expresion de la hipérbola referida á su centro, que no solo podria discutirse y dar á conocer las propiedades que ya se han descubierto, y aun otras muchas que le sean exclusivas, sino que quitando el denominador, con lo que aparece bajo esta forma

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2,$$

manifiesta que todas las propiedades halladas para la elipse, se verifican en la hipérbola; pues sus ecuaciones están formadas de una manera análoga; con solo mudar en las expresiones de aquella el signo de b^2.

Así, pues, la ecuacion (64) hace ver:

1.° Que si $x = o$, ó bien si toma valores menores que a, ya positivos ya negativos, la y resulta imaginaria; es decir, que en toda la longitud del eje primero ó *real* no hay curva.

2.° Si x se hace igual á a positiva ó negativamente, se obtiene para y el valor *cero*, lo que prueba que la curva pasa por los extremos del eje ó vértices.

3.° Si x toma valores mayores que a, ya positivos ó bien negativos, por cada valor que se suponga, resultan para y dos iguales y de signo contrario; lo cual quiere decir: *que la curva es simétrica respecto al eje primero prolongado*. Y como del mismo modo se observa que para cada dos valores de x iguales y de signo contrario, y toma uno mismo, tambien resulta que: *la hipérbola es simétrica con relacion al eje imaginario.*

51.—Hallar los puntos del plano de una hipérbola cuya distancia á los de la curva sea una expresion racional de la abscisa.— Sean las coordenadas de uno de los puntos que se buscan (x', y') y las de uno cualquiera (*fig.* 20) de la hipérbola (x, y): el cuadrado de la distancia entre ellos, estará representado por D, y será

$$D^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2.$$

Sustituyendo por y^2 su expresion tomada de la ecuacion de la hipérbola, é imaginando el término $2yy' = o$ á fin de que no aparezca radical segun se desea en la cuestion, para lo cual es preciso hacer $y' = o$, tendremos:

$$D^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2);$$

ó bien

$$D^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2xx' + (x'^2 - b^2).$$

Si esta expresion ha de dar el valor racional de D, es indispensable que tenga raiz exacta, para lo que considerando como trinomio dicha expresion, pueda llenar la condicion de que el producto de los extremos sea igual al cuadrado de la mitad del término medio: esto es, que

$$x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)(x'^2 - b^2) = x^2 x'^2 :$$

ó dividiendo los dos miembros por x^2, se tiene

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)(x'^2 - b^2) = x'^2.$$

Esta ecuacion nos dará el valor de la abscisa x, efectuando la multiplicacion, destruyendo los términos semejantes y dividiendo por el coeficiente á que está afecta, resulta

$$x'^2 = a^2 + b^2:$$

de donde se deduce la expresion

(65) $$x' = \pm\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Luego, hay dos puntos situados á distancias iguales del centro, y colocados en el eje que llenan la condicion indicada.

Para construir ó situar estos puntos, se tomará la hipotenusa ST que pasa por los extremos de los semi-ejes a y b y se colocará desde el centro O á derecha é izquierda, lo que dará los puntos F y F′ que se llaman *focos.* Las rectas tiradas desde estos focos á cualquier punto de la hipérbola, son los *radios vectores*: á la distancia OF y OF′ del centro á los focos se designa con el nombre de *excentricidad.*

52.—En toda hipérbola, la diferencia de los radios vectores tirados á un mismo punto, es constante é igual al eje primero.—Sea M (*fig.* 20) un punto cualquiera de la curva, y sus coordenadas (x, y): el radio vector FM que mide la distancia del punto M al F, cuyas coordenadas son ($x' = e$, $y = o$); en donde e representa la excentricidad, será

$$\sqrt{a^2 + b^2};$$

y

$$\overline{MF}^2 = (e - x)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = a^2 + b^2 - 2ex + x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2:$$

en este desarrollo se ha puesto por e^2, su igual $a^2 + b^2$: de donde se deduce

$$\overline{MF}^2 = x^2\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) - 2ex + a^2;$$

y poniendo por el numerador $(a^2 + b^2)$, su expresion e^2, tendremos

$$\overline{MF}^2 = \frac{e^2}{a^2}x^2 - 2ex + a^2:$$

extrayendo la raiz cuadrada, puesto que el segundo miembro la tiene exacta, resulta la fórmula

(66) $$MF = \frac{e}{a}x - a.$$

La expresion del otro radio vector MF′ correspondiente al mismo punto M, solo diferirá de la precedente en el signo de e que será negativo para el foco F′, lo que da

$$\overline{MF'}^2 = \frac{e^2}{a^2}x^2 + 2ex + a^2, \text{ y } MF' = \frac{e}{a}x + a.$$

Restando del MF′ el MF; pues ya por la figura, ya por sus expresiones se ve que aquel es mayor siempre que este, resultará la ecuacion

(67) $$MF' - MF = \frac{e}{a} + a - \frac{e}{a} + a = 2a.$$

Que es la propiedad que se habia enunciado.

Tambien pudieran haberse hallado directamente las expresiones de MF y MF', en los triángulos rectángulos FMP y F'MP.

Observacion.—De esta notable propiedad de la hipérbola se sigue un procedimiento para trazarla, ya por puntos ó bien por un movimiento contínuo.

Para describir por puntos la hipérbola, cuando se conocen sus ejes RS y TT' se marcarán primeramente los focos F y F', colocando la distancia TS sobre el eje primero desde O á una y otra parte; despues se hará centro en uno de ellos, F por ejemplo, y describiendo con un radio arbitrario FM un arco, no habrá más que añadir á este radio la longitud RS para tener el del arco que se ha de trazar desde el foco F' para que corte al anterior en un punto de la curva. Esta operacion repetida varias veces, dará á conocer cuantos puntos se quieran de la curva.

En vista de lo que hemos indicado (*núm.* 46—2.ª observacion), renunciamos á la descripcion de la hipérbola por un movimiento contínuo.

53.—La doble ordenada de la hipérbola que pasa por el foco es igual al parámetro.—Se llama *parámetro* en la hipérbola á una tercera proporcional á los ejes.

La expresion de una ordenada cualquiera de la curva, está dada por

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2);$$

luego cuando por x se sustituya su igual $\sqrt{a^2 + b^2}$, que es la abscisa del foco, resultará para y el de la ordenada que pasa por él.

Haciendo esta sustitucion, se convierte en la ecuacion que sigue

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + b^2 - a^2) = \frac{b^4}{a^2}:$$

de donde

$$y = \frac{b^2}{a}$$

y duplicando la expresion, nos da

$$2y = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}. \tag{68}$$

Este valor, siendo el de la doble ordenada que pasa por el foco, se obtiene buscando una cuarta proporcional á $2a$, $2b$ y $2b$, ó una tercera proporcional á los ejes, lo que prueba que es el parámetro.

54.—Hallar la expresion polar de la hipérbola.—Para determinar la ecuacion polar de la hipérbola, se puede aplicar la (*fór.* 67) del radio vector, conocida desde el (*núm.* 52) en que solo con sustituir por x su expresion en funcion del mismo radio MF (*fig.* 20), que supondremos igual á r, y del ángulo que forma con el eje que designaremos por v, como anteriormente, se tendrá la expresion que se busca.

Al determinar los valores de la abscisa OP en funcion del radio vector FM del mismo punto y del ángulo MFP, ya se vió en la cuestion general (*núm.* 36) de coordenadas polares que

$$OP = OF + FP = e + r.\cos.v.$$

Siendo e la excentricidad OF, tendremos

$$MF = r = \frac{e}{a}(e + r.\cos.v) - a:$$

de donde

$$r = \frac{e^2 + e\,r.\cos.v - a^2}{a},$$

que poniendo por e^2 su valor $(a^2 + b^2)$, da

$$r = \frac{b^2 + e\,r.\cos.v}{a};$$

luego despejando á r, se obtiene por último la expresion

(69) $$r = \frac{b^2}{a - e.\cos.v}.$$

Esta ecuacion polar de la hipérbola, solo se diferencia de la de la elipse en el signo de e.

55.—Determinar la fórmula de la parábola referida á su vértice.— Observaciones.—Hemos dicho (*núm.* 41, *obser.* 3.ª) que cuando el plano secante es paralelo á una de las generatrices del cono, la curva recibe el nombre de parábola; así para hallar la expresion correspondiente se deberá modificar la fórmula general (E) de las secciones cónicas (*núm.* 41), observando que $(\alpha + \beta)$ valdrán dos ángulos rectos, y que su seno debe ser *cero*, con lo cual resulta

$$y^2 = \frac{c.\,\text{sen}.\,\beta.\,\text{sen}.\,\alpha}{\cos.^2 \frac{1}{2}\alpha}x;$$

y como la relacion expresada por la fraccion es constante para cada parábola, puesto que solo depende del ángulo α que forman entre sí las generatrices del cono, dado para cada caso, y el ángulo β, ó sea la inclinacion del plano secante, que es siempre suplemento del anterior, nada más fácil y natural que imaginar se ha construido la línea expresada por dicha fraccion; la que, representada por $2p$, da á la expresion la sencilla forma

(70) $$y^2 = 2px.$$

Esta es la fórmula de la parábola, referida á su *vértice ó punto desde el que, el eje de la seccion la divide en dos ramas simétricas,* como manifiesta la misma expresion.

Observaciones.—1.ª Discutiendo la ecuacion $y^2 = 2px$ de la parábola, se puede venir en conocimiento de su curso y de las propiedades que la distinguen. Así, si x se supone *cero*, resulta tambien *cero* el valor de y; lo cual manifiesta que la parábola pasa por el orígen O de las coordenadas.

2.ª Para cada valor arbitrario, que se asigne á x, resultan dos iguales y de signos contrarios para y; luego el eje de las abscisas divide á la parábola en dos ramas simétricas.

3.ª Cuando x toma valores positivos, y siempre es real; y á medida que aquellos se hacen mayores, crecen tambien los de y: luego la parábola se extiende hasta el infinito en el sentido de las abscisas positivas.

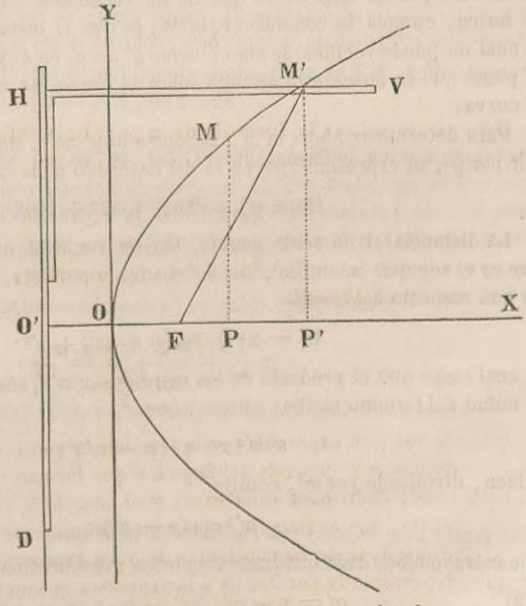
4.ª Si x se hace negativa, la ordenada y resulta imaginaria; y como ninguno de los valores negativos de la abscisa la vuelve á convertir en real, resulta: que la parábola no existe sino á un lado del orígen ó vértice.

5.ª De todo esto se deduce que, el eje de la parábola es indefinido; por consiguiente, ni podemos tomar su mitad, ni levantar en ella un segundo eje: así que la fórmula $y^2 = 2px$, es la única que se emplea para esta curva.

56.—En toda parábola, los cuadrados de las ordenadas, son proporcionales á las abscisas correspondientes.—Sea M'MO etc. (*fig.* 21) una parábola cualquiera: si sus ejes OX y OY son rectangulares y tienen el orígen en el vértice, la ecuacion de la curva, será

$$y^2 = 2px.$$

Fig. 21.



Llamando (x', y') las coordenadas OP y PM de un punto M, y (x'', y'') las OP' y P'M' de otro cualquiera M', sus valores estarán ligados por la relacion escrita en la expresion de la parábola; es decir, que se tendrá

$$y'^2 = 2px',$$
$$y''^2 = 2px''.$$

Comparando miembro á miembro estas ecuaciones, resultará

$$y'^2 : y''^2 :: 2px' : 2px'';$$

dividiendo la segunda razon por el factor comun $2p$, nos da

$$y'^2 : y''^2 :: x' : x'':$$

proporcion que, reponiendo en ella, por (x', y') y (x'', y''), las líneas que representen en la figura, hace ver que

$$(71)\qquad \overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: OP : OP',$$

es la propiedad que se queria demostrar.

57.—Determinar un punto cuya distancia á cualquiera de los de la parábola, sea una expresion racional de la abscisa.— Sea M' (*fig.* 21), un punto cualquiera de la parábola, cuyas coordenadas, representaremos por (x, y): si las del punto que se busca se designan por (x', y'), el cuadrado de la distancia D entre estos dos puntos, tendrá la forma

$$D^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2;$$

que desarrollando los cuadrados de las diferencias será

$$D^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2.$$

Ahora, sustituyendo por y en esta expresion su valor deducido de la ecuacion de la parábola $y^2 = 2px$, tendremos

$$y = \pm\sqrt{2px},$$

que siendo radical, da á conocer que mientras en la expresion D exista un término con la y elevada al primer grado, no podrá resultar una funcion racional de x; luego lo primero que ha de verificarse para que el punto que se busca, cumpla la condicion exigida, es que el término $-2yy'$ sea *cero*, lo cual no puede verificarse sino cuando $y' = o$, en cuyo caso manifiesta que el punto que se busca está situado sobre el eje de las abscisas, que es el de la curva.

Para determinar ahora la x', suponiendo $y' = o$, no habrá más que sustituir por y^2, su expresion $2px$ en la del cuadrado de la distancia: que nos dará

$$D^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + 2px.$$

La distancia D no será todavía funcion racional de x, si su expresion que es el segundo miembro, no es cuadrado perfecto, en tal caso, ordenada con respecto á x, será

$$D^2 = x^2 + 2x(p - x') + x'^2:$$

la cual exige que el producto de los extremos $x^2x'^2$, sea igual al cuadrado de la mitad del término medio; esto es, que

$$x^2x'^2 = x^2(p - x')^2:$$

ó bien, dividiendo por x^2, resulta

$$x'^2 = (p - x')^2;$$

que extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros nos dá la expresion

$$(72)\qquad x' = p - x',\ 2x' = p,\ \text{y}\ x' = \tfrac{1}{2}p.$$

Condicion indispensable para obtener la solucion que se quería, es decir, que el punto en cuestion F se halla sobre el eje á una distancia $\frac{1}{2}p$ del orígen.

A este punto cuya distancia á cualquiera de los de la parábola, es funcion racional de la abscisa, se llama *foco*; y las distancias FM′ del foco á la curva, *radios vectores*.

58.—Todos los puntos de la parábola equidistan del foco y de la directriz.—Observaciones.—Se llama *directriz* de la parábola, una perpendicular á su eje que dista del vértice tanto como el foco.

Sea M′ un punto cualquiera de la parábola, cuyo orígen es O (*fig.* 21) y su eje OX el de las abscisas; si se coloca la distancia OF, del vértice al foco, esto es, desde O hasta O′, y en este punto se levanta la perpendicular HD, esta será la directriz segun la propiedad que se ha reconocido en ella para darla este nombre.

La distancia del punto M′ á la directriz, es la M′H paralela al eje de las x, y por lo tanto igual á O′P′; pero $O'P' = O'O + OP' = \frac{1}{2}p + x$: Luego si la expresion del radio vector FM′ es la misma, habremos probado la propiedad enunciada.

Dos medios se presentan para hallar el valor del radio vector FM′: el primero consiste en sustituir en la fórmula de la distancia, hallada precedentemente, por x' su igual $\frac{1}{2}p$, lo que da

$$D^2 = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2, \text{ ó bien, } D = x + \frac{1}{2}p:$$

el segundo se reduce á buscar directamente dicho valor de FM′, como hipotenusa del triángulo rectángulo FP′M′, de donde

$$\overline{FM'}^2 = \overline{FP'}^2 + \overline{P'M'}^2 = (OP' - OF)^2 + \overline{P'M'}^2,$$

que poniendo por estas líneas sus correspondientes será

$$\overline{FM'}^2 = (x - \tfrac{1}{2}p)^2 + y^2;$$

ó bien desarrollando y sustituyendo por y^2 su valor $2px$, resulta

$$\overline{FM'}^2 = x^2 + 2px + \frac{1}{4}p^2:$$

tambien para expresion del radio vector FM′, da la más sencilla fórmula

$$FM' = x + \frac{1}{2}p. \qquad (73)$$

Observacion.—De esta propiedad se deducen dos medios para trazar la parábola, dado su vértice y su foco: ya por puntos aislados tan próximos como se quieran, y ya por un movimiento contínuo.

Para determinar puntos aislados de la curva, se toma desde el orígen á la parte opuesta del foco, la distancia OF entre estos puntos, lo que dará el punto O′ por donde se hace pasar la directriz HD; levantando ahora en cualesquiera punto P′, etc. verticales P′M′ etc., no habrá más que trazar desde F como centro, y con los radios O'P', arcos que las corten, para tener puntos M' equidistantes del foco y de la directriz.

Por las mismas razones expuestas (*núm.* 46 — *obser.* 2.ª), omitimos el segundo medio de describir la parábola por movimiento contínuo, conforme á lo dicho al tratar de la hipérbola.

59.—La doble ordenada que pasa por el foco en toda parábola, es igual al parámetro.—La línea $2p = \frac{y^2}{x}$ que es una tercera proporcional á la abscisa y ordenada de cualquier punto de la parábola, se llama *parámetro*.

Porque siendo $y^2 = 2px$ la ecuacion de la parábola referida á su vértice, si en ella se sustituye por x la abscisa $\frac{1}{2}p$ del foco, resulta

$$y^2 = p^2, \text{ y tambien, } y = p,$$

que multiplicando por 2 ambos miembros, dará la expresion

(74) $$2y = 2p.$$

60.—Hallar la ecuacion polar de la parábola cuando el polo se halla en el foco.—La expresion del radio vector tal como FM', se ha determinado al tratar de las coordenadas polares: cuyo valor era

$$FM' = x + \frac{1}{2}p:$$

Si en esta expresion se sustituye por x una funcion del radio vector mismo y del ángulo que forma con el eje, se tendrá la ecuacion polar que se desea, llamando r al radio vector, y v al ángulo M'FX que forma con el eje; del triángulo rectángulo FM'P', deducimos que

$$FP' = r.\cos.v:$$

y como

$$x = OP' = OF + FP'$$

se tendrá

$$x = \frac{1}{2}p + r.\cos.v.$$

Este valor puesto en lugar de $r = x + \frac{1}{2}p$, y despejando r, da la fórmula.

(74) $$r = -\frac{p}{1 - \cos.v}.$$

Expresion polar de la parábola referida á su foco.

CAPÍTULO VI.

TANGENTES Y DIÁMETROS DE LAS CURVAS.

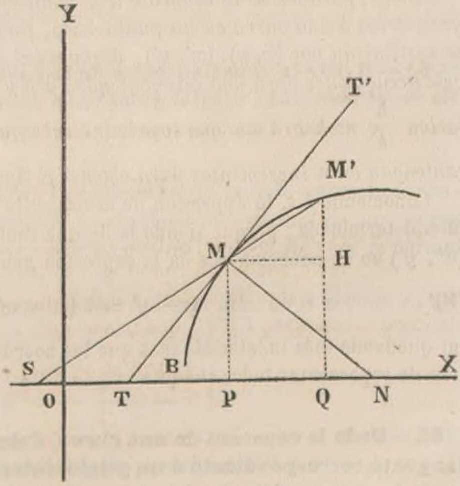
61.—Dada una curva por su ecuacion, hallar la expresion de su tangente en un punto dado.—Se entiende por *tangente* á una curva cualquiera, toda recta que solo tiene un punto comun con ella.

La cuestion general que se presenta para hallar la fórmula de la tangente en un punto dado sobre una curva, podrá resolverse de varias maneras.

La más sencilla es la siguiente:

Sean los dos ejes coordenados OX y OY (*fig.* 22), y una curva cualquiera BMM' referida á los mismos ejes: sea el punto M de contacto dado, y sus coordenadas OP $= x'$, y PM $= y'$.

Fig. 22.



Sea TT' la tangente que se pide. La incógnita en este caso será tang. T'TX que llamaremos t.

Para determinarla, supongamos que la abscisa x' ú OP recibe un incremento PQ que designaremos por h: es evidente que la ordenada y' ó PM habrá recibido otro incremento correspondiente HM' que podemos llamar k. Tirando ahora la recta SMM' que será una secante, el ángulo M'SX que forma con el eje de las x, será igual al M'MH; luego las tangentes serán iguales; pero

$$\text{tang. M'SX} = \frac{\text{M'Q}}{\text{SQ}},\ \text{y tang. M'MH} = \frac{\text{M'H}}{\text{MH}},$$

como lo manifiestan los triángulos rectángulos M'SQ y M'MH; luego

$$\frac{\text{M'Q}}{\text{SQ}} = \frac{\text{M'H}}{\text{M'H}} = \frac{k}{h}:$$

por consiguiente en hallando la relacion entre los incrementos de la ordenada y la abscisa de un punto de la curva, se tiene la tangente trigonométrica del ángulo que la recta pasando por dicho punto y el correspondiente á los incrementos forma con el eje de las abscisas.

A medida que la recta M'S sujeta á pasar siempre por M, gire acercándose á la tangente T'T, el punto M' se acerca al dado M, y cuando la secante haya llegado á ser la misma tangente, dichos puntos h y k se hacen nulos; luego en la relacion

$$\frac{k}{h} = \frac{\mathrm{M'Q}}{\mathrm{SQ}},$$

debemos examinar que parte desaparece por la condicion de $h = o$ y $k = o$, para lo cual el segundo miembro en donde entran estas líneas que no se hacen nulas porque el punto M' se haya confundido con el M, escribiremos así la fórmula general

$$(\mathrm{F}) \qquad \text{tang.}\,\mathrm{M'SX} = \frac{k}{h} = \frac{\mathrm{PM} + \mathrm{HM'}}{\mathrm{SP} + \mathrm{PQ}} = \frac{\mathrm{PM} + k}{\mathrm{SP} + h}$$

en donde al hacer $k = o$ en el numerador, queda la parte independiente y constante PM, y en el denominador al suprimir h, quedará el límite TP de las porciones SP de eje interceptadas por la ordenada y el pié de la secante, que contínuamente se acerca á T hasta confundirse con él, cuando llega á ser tangente.

Luego, *para hallar la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente geométrica á una curva en un punto dado, forma con el eje de las abscisas, se sustituirán por* (x, y), (x', y'), *despues* $(x' + h)$ *é* $(y + h)$: *la resta de estas ecuaciones dará una que contendrá á* h *y* k, *y despejando en ella la relacion* $\frac{h}{k}$ *no habrá más que suprimir en el segundo miembro los términos que contengan estos incrementos para obtener el límite que corresponde á* t.

Conociendo á t, *la expresion de la tangente* que se nos pedia queda tambien determinada; porque siendo la de una recta sujeta á pasar por el punto (x', y') en su ecuacion nos da la expresion general

$$(\mathrm{F})' \qquad y - y' = t\,(x - x'),$$

no quedando más indeterminadas que las coordenadas generales (x, y) que han de representar todos sus puntos.

62.—Dada la ecuacion de una curva, determinar el valor de la subtangente correspondiente á un punto determinado.—Se llama *sub-tangente* á una curva la parte del eje TP (*fig.* 22), comprendida entre los piés de la tangente y de la perpendicular bajada desde el punto de contacto.

Si (x', y') son las coordenadas del punto marcado en la curva, la expresion de la tangente en dicho punto será

$$y - y' = t\,(x - x');$$

y como lo que ahora se busca es la parte de eje comprendida entre el pié de la tangente y el de la ordenada que evidentemente es $(x - x')$, cuando la x corresponde á la interseccion de la tangente con el eje de las abscisas, se hará primero $y = o$ en la ecuacion de dicha tangente, y será

$$-y' = t\,(x - x').$$

En esta expresion ya representa x la abscisa del encuentro de la tangente con el eje; y por consiguiente, despejando $x - x'$, se obtiene la fórmula general

$$(G) \qquad \text{sub-tang.} = x - x' = -\frac{y'}{t}.$$

63.—Dada la ecuacion de una curva hallar la fórmula de la normal de un punto conocido.—Se dice *normal* á una curva la perpendicular MN (*fig.* 22) á la tangente en el punto de contacto, contada hasta su encuentro con el eje.

Si las coordenadas del punto dado son (x', y'), la ecuacion de la tangente en él será

$$y - y' = t(x - x');$$

y como la normal es una perpendicular á esta, sujeta á pasar por el mismo punto (x', y'), su ecuacion nos dará necesariamente la fórmula general

$$(H) \qquad y - y' = -\frac{1}{t}(x - x') = -\frac{h}{k}(x - x').$$

Siendo h y k los incrementos dados á la abscisa y ordenada del punto fijado en la curva, se encuentra en su relacion la parte independiente de los mismos.

64.—Dada una curva, hallar la expresion de la sub-normal correspondiente á un punto determinado.—Se llama *sub-normal* de una curva la parte PN del eje comprendida entre los pies de la ordenada y de la normal del punto de contacto.

Sea (x', y'), el punto dado en la curva: la expresion de la normal en dicho punto será

$$y - y' = -\frac{1}{t}(x - x').$$

Haciendo $y = o$, resulta de la ecuacion precedente

$$-y' = -\frac{1}{t}(x - x'):$$

donde x representa la abscisa de la interseccion de la normal con el eje de las x; luego $(x - x')$ es la sub-normal que se busca, y por consiguiente despejando esta diferencia se obtiene la expresion general

$$(I) \qquad \text{sub-nor.} = x - x' = ty'.$$

Es evidente que con cualquiera de las cuatro líneas precedentes que se conozca para un punto de una curva tal, como BMM' (*fig.* 22), queda conocida en funcion de ella la tangente y sub-tangente, la normal y sub-normal.

65.—Determinar la fórmula de la tangente á la elipse en un punto dado.—La ecuacion de la elipse será

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \text{ ó } a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2:$$

si el punto dado es (x', y'), dicha ecuacion quedará satisfecha con estas coordenadas; es decir, que

$$a^2y'^2 = a^2b^2 - b^2 x'^2.$$

Sustituyendo por x, su igual $x' + h$, y por y tambien $y' + k$, se tiene

$$a^2y'^2 + 2a^2 y'k + a^2 k^2 = a^2b^2 - b^2 x'^2 - 2b^2x'h - b^2h^2:$$

restando de esta la ecuacion anterior, resulta

$$2a^2y'k + a^2k^2 = -(2b^2x'h + b^2h^2);$$

ó bien

$$k(2a^2y' + a^2k) = -(2b^2x' + b^2h)\,h:$$

de donde

$$\frac{k}{h} = -\frac{2b^2x' + b^2h}{2a^2y' + a^2k};$$

expresion que suponiendo $h = o$, y $k = o$, da para la tangente trigonométrica t del ángulo que la tangente geométrica forma con el eje de las abscisas

$$t = -\frac{b^2x'}{a^2x'}:$$

luego la ecuacion ó la fórmula de la tangente á la elipse en el punto (x', y'), será

$$(75) \qquad y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x').$$

66.—Expresion de la sub-tangente á la elipse.—Sustituyendo en la fórmula general (G) subt. $= x - x' = -\frac{y'}{t}$ por t su valor $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$, tendremos la expresion

$$(76) \quad \text{subt.} = -\frac{a^2y'^2}{b^2x'} = -\frac{a^2b^2 - b^2x'^2}{b^2x'} = -\frac{b^2(a^2 - x'^2)}{b^2x'} = -\frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

67.—Fórmula de la normal á la elipse en un punto conocido.—Esta fórmula será

$$(77) \qquad y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x').$$

Expresion de la sub-normal de la elipse.—Observaciones.—Poniendo en la fórmula general de esta línea subn. $= ty'$, por t, nos dará su valor la siguiente fórmula

$$(78) \qquad \text{subn.} = -\frac{b^2x'y'}{a^2y'} = -\frac{b^2x'}{a^2}.$$

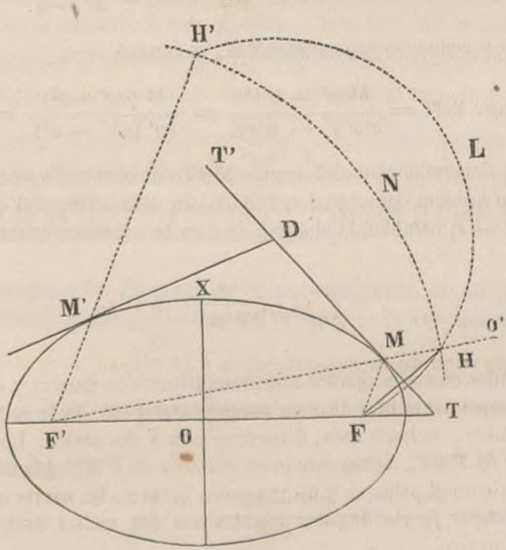
Observaciones.— 1.ª De la ecuacion de la tangente á la elipse, se deduce que desde $x' = o$, en cuyo caso $y' = b$, y $t = o$, hasta $x' = a$, en que $y = o$, y $t = \infty$, dicha tangente puede formar con el eje de las abcisas todos los ángulos posibles desde la posicion paralela cuando $t = o$ hasta la perpendicular cuando $t = \infty$.

2.ª Se deduce igualmente de la ecuacion de la normal que puede tomar todas las posiciones, desde ser perpendicular al eje hasta coincidir con él.

3.ª Tambien las longitudes de la sub-tangente y sub-normal varian desde *cero* hasta el infinito.

68.—Determinar la expresion de los ángulos que la tangente en un punto de la elipse forma con los radios vectores correspondientes al mismo punto.—Observaciones.—Supongamos que el punto de contacto sea M, cuyas coordenadas son (x', y'): la ecuacion de la tangente TT′ (*fig.* 23), será

Fig. 23.



$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{ay'}(x - x'),$$

ó bien

$$y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} x + \frac{a^2 y'^2 + b^2 x'^2}{a^2 y'}:$$

poniendo por el segundo numerador su igual $a^2 b^2$, nos da

$$y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} x + \frac{b^2}{y'}.$$

La ecuacion del radio vector FM recta que pasa por el punto M cuyas coordenadas son (x', y'), y por el punto F, cuyas coordenadas serán $(x''=e, y''=o)$, nos da

$$y - y'' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x''), \text{ó bien } y = \frac{y'}{x' - e}(x - e).$$

La fórmula general del ángulo FMT que forman dos rectas dadas por sus ecuaciones, es

$$(79) \qquad \text{tang. FMT} = \frac{a' - a}{1 + aa'};$$

en donde a' y a representan las tangentes trigonométricas de los ángulos que cada recta forma con el eje de las abcisas.

Ahora, sustituyendo por a', $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$, y por a, $\frac{y'}{x'-e}$; hechas las trasformaciones y reducciones convenientes, se tendrá

$$\text{tang. FMT} = \frac{b^2ex' - a^2b^2}{e^2x'y' - a^2ey'} = \frac{b^2(ex' - a^2)}{ey'(ex' - a^2)} = \frac{b^2}{ey'}.$$

Como la determinacion del ángulo F'MT del otro radio vector con la misma tangente hubiera dado igual resultado sin otra alteracion que ser la abscisa OF' $= -e$; cambiando el signo de e en la expresion anterior, se tendrá la fórmula

$$(79') \qquad \text{tang. F'MT} = -\frac{b^2}{ey'}.$$

Dos ángulos cuyas tangentes trigonométricas son iguales y de signo contrario, son suplemento uno de otro; porque la tangente de la suma de ellos, segun la fórmula, se hace *cero*, ó corresponde á dos rectos. Luego si FMT es suplemento de F'MT, como este lo es tambien de F'MT' por adyacente suyo; por consiguiente el primero y último serán iguales. De suerte que: *toda tangente á la elipse forma ángulos iguales con los radios vectores tirados al punto de contacto.*

Observaciones.— 1.ª Esta propiedad facilita medios para tirar tangentes á una elipse, ya por un punto suyo y ya por otro dado fuera de ella.

Para trazar á la elipse una tangente por el punto M (*fig* 23), se tirarán á él los dos radios vectores FM y F'M, prolongando este en una distancia cualquiera MO'; ahora si se divide el ángulo FMO' en dos mitades, la recta TT' que le biseca será la tangente; pues siendo por construccion FMT = TMO', y como tambien TMO' = F'MT' por opuestos por el vértice, resulta FMT = F'MT', que son los ángulos que la TT' forma con los radios vectores correspondientes al mismo punto M por donde pasa la tangente.

2.ª Para tirar una tangente á la elipse desde un punto D dado fuera de la curva, se trazará desde este punto y con el radio DF, distancia al foco, un arco HLH'; y desde el otro foco F', y con un radio igual al eje primero otro arco HNH' que cortará al anterior en los puntos H y H', desde los que tirando al segundo centro F' las rectas HF' y H'F', sus encuentros M y M' con la curva, serán los puntos de contacto que se desean, y las rectas DM y DM' las tangentes correspondientes.

69.—Hallar la expresion de la tangente á la hipérbola en un punto dado por sus coordenadas.—La ecuacion de la hipérbola ya sabemos que es

$$a^2y^2 = a^2b^2 + b^2x^2;$$

sustituyendo $(x'\ y')$ será

$$a^2y'^2 = a^2b^2 + b^2x'^2.$$

Ahora, efectuando las operaciones indicadas trasponiendo y reduciendo, la expresion de la tangente que se pide, por ser una recta cuya inclinacion con el eje de las x conocemos por las (*fórs.* 79 y 79') del número anterior que pasa además por el punto $(x'\ y')$, obtendremos la expresion

$$(80) \qquad y - y' = \frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x').$$

Esta fórmula solo se diferencia de la expresion de la tangente á la elipse en el signo de b^2, como debia suceder, puesto que es el único accidente en que difieren las expresiones de ambas curvas.

70.—Determinar la fórmula de la sub-tangente de un punto de la hipérbola.—Sustituyendo en la fórmula general de la sub-tangente de cualquiera curva

$$\text{subt.} = \frac{y'}{t},$$

el valor hallado para

$$t = \frac{b^2x'}{a^2y'}:$$

lo que da para expresion de la sub-tangente á la hipérbola

$$\text{subt.} = \frac{a^2y'^2}{b^2x'};$$

poniendo por $a^2\ y'^2$ su igual $b^2\ x'^2 - a^2\ b^2 = b^2\ (x'^2 - a^2)$, nos da la fórmula

$$(81) \qquad \text{subt.} = \frac{x'^2 - a^2}{x'}$$

Esta expresion nos dice: *que la sub-tangente es una cuarta proporcional á la abscisa del punto de contacto, y á la suma y diferencia entre el semi-eje y dicha abscisa.*

71.—Hallar la expresion de la normal á la hipérbola en un punto dado.—Suponiendo que las coordenadas de este punto sean $(x'\ y')$, tendremos la fórmula

$$y - y' = -\frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x'); \tag{82}$$

pues esta es la expresion de una perpendicular á la tangente en el punto $(x'\ y')$ de la hipérbola.

72.—Determinar la fórmula de la sub-normal en un punto de la hipérbola.—Se halla poniendo en la expresion general de la sub-normal á cualquier curva subn.$= t\ y'$, por t el valor conocido para la hipérbola que es

$$t = \frac{b^2x'}{a^2y'};$$

de donde se deduce la expresion

$$\text{subn.} = \frac{b^2x'}{a^2}. \tag{83}$$

Observaciones.—1.ª De la expresion de la tangente á la hipérbola se deduce, por el contrario que en la elipse, que dicha tangente no puede tomar todas las posiciones posibles desde ser paralela hasta ser perpendicular.

Si por el orígen O (*fig.* 20), se tiran dos rectas que pasen por los extremos B y B' de la perpendicular al eje en el extremo S, iguales á b; las rectas OB y OB' irán á tocar á la curva en un punto situado en el infinito, puesto que su abscisa $x' = \infty$, y todas las demás tangentes á la curva lo han de ser en puntos más próximos al orígen que el infinito, se sigue que las rectas OB y OB' cuyo ángulo con el eje BOX está dado por la expresion

$$\text{tang. BOX} = \frac{\text{BS}}{\text{OS}} = \frac{b}{a},$$

son el límite de todas las tangentes á la hipérbola.

Se llaman ASÍNTOTAS DE LA HIPÉRBOLA, *sus tangentes en el infinito tiradas desde el orígen, ó bien, las rectas límites de todas las tangentes.*

2.ª De la ecuacion de la normal á la hipérbola se deduce igualmente que solo puede tomar las posiciones comprendidas entre ser paralela ó coincidir con el eje, lo que sucede en los vértices de la curva, y formar con dicho eje un ángulo complemento del de las asíntotas ó límites de las tangentes, que estará expresado por

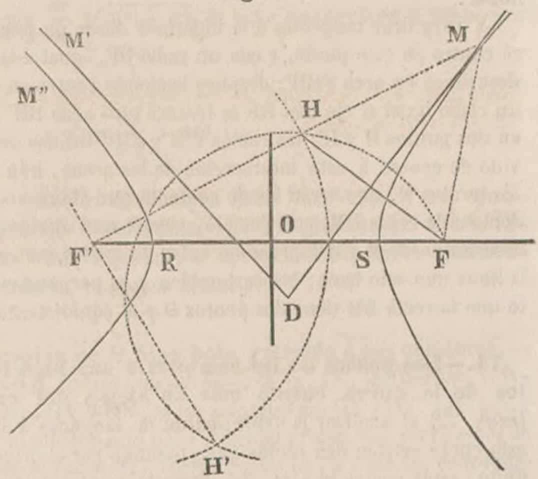
$$-\frac{1}{t} = \mp\frac{a}{b}.$$

3.ª Las longitudes de la sub-tangente y sub-normal varian como en las otras curvas entre *cero* é infinito.

73.—Determinar el ángulo que la tangente en un punto de la hipérbola forma con los radios vectores tirados al mismo punto.—Sea M (*fig.* 24) el punto dado de contacto, y sus coordenadas (x' y'); segun este supuesto la tangente en M tendrá por ecuacion

$$y-y'=\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x').$$

Fig. 24.



Despejando á y para prepararla bajo la forma que ha de darse á la ecuacion de cada radio vector, resulta

$$y=\frac{b^2x'}{a^2y'}x+\frac{b^2}{y'}.$$

La ecuacion del radio vector FM, sujeto á pasar por M cuyas coordenadas se han representado por (x' y'), y además por el foco F que tiene por coordenadas ($x''=e$, $y''=o$); en donde e es la excentricidad, será

$$\mathrm{OF}=\sqrt{a^2+b^2},$$

que nos da

$$y-y''=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x''),\ \text{ó bien},\ y=\frac{y'}{x'-e}(x-e).$$

El ángulo DMF que forman la tangente DM y el radio vector MF, es

$$\text{tang. DMF}=\frac{a'-a}{1+aa'}:$$

haciendo las sustituciones y reducciones convenientes, resulta la fórmula

$$(84)\qquad \text{tang. DMF}=\frac{b^2(a^2-ex')}{ey'(ex'-a^2)}=\frac{-b^2(ex'-a^2)}{ey'(ex'-a^2)}=-\frac{b^2}{ey'}.$$

Determinando de la misma manera el ángulo DMF' de la tangente con el otro radio vector, dará evidentemente un resultado que solo diferirá en el signo, por ser la e negativa para el foco F'.

Observacion.—De esta propiedad de ser iguales los ángulos que forma la tangente con los radios vectores del punto de contacto, se derivan medios para tirar tangentes á la hipérbola, ya en un punto dado de ella, ó bien desde otro conocido fuera de la curva.

Para tirar una tangente á la hipérbola por un punto M, señalado en la misma, se trazarán primero los dos radios vectores MF′ y MF que corresponden á dicho punto, y dividiendo en dos partes iguales el ángulo F′MF, la recta DM que biseca dicho ángulo, es la tangente que se queria determinar.

Y para tirar tangentes á la hipérbola desde un punto D dado fuera, se hará centro en este punto, y con un radio DF, igual á la distancia al foco F, se describirá un arco FHH′: despues haciendo centro en el segundo foco F′ con un radio igual al eje real RS se trazará otro arco HH′ que cortará al anterior en dos puntos H y H′: las rectas F′H y F′H′ tiradas desde el foco que ha servido de centro á esta interseccion de los arcos, irán á cortar á la curva en los puntos M, que serán los de contacto que ahora se deseaban. Concretándonos á la recta DM, por ejemplo, vemos que divide por mitad á todo arco descrito desde M y comprendido entre los radios vectores, tal como FH; pero la línea que esto hace, biseca tambien y es perpendicular á la cuerda, puesto que la recta DM tiene dos puntos D y M equidistantes de F y H.

74.—Los puntos de las asíntotas á una hipérbola se aproximan á los de la curva cuanto más se alejan del orígen.—Hemos dicho (*núm.* 72) al analizar la expresion de la tangente á la hipérbola, que para esta curva existen dos rectas que, pasando por el orígen, la tocan en el infinito: estas rectas que se han llamado asíntotas, tienen propiedades muy notables que ahora vamos á examinar.

Para demostrar la existencia de la propiedad enunciada, solo habrá que hallar la diferencia de ordenadas de la asíntota y de la hipérbola en puntos que correspondan á una misma abscisa.

La expresion de la asíntota superior, cuya línea está sujeta á pasar por el orígen de coordenadas, formando con el eje de las abscisas un ángulo que tiene por tangente trigonométrica $\frac{b}{a}$, será

$$y = \frac{b}{a}\,x.$$

La ecuacion de la hipérbola dá el valor de sus ordenadas en la siguiente forma

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Representando por d la diferencia que se busca, será

$$d = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right).$$

Ahora bien: si se extrae la raiz de $x^2 - a^2$, y se multiplica por $\frac{b}{a}$ en cuyo caso se hallará una série de términos $\frac{bx}{a} - \frac{ba}{2x}$ — etc., que irán con-teniendo en los denominadores mayores potencias de x, hará visible la propiedad enunciada.

Luego sustituyendo por $\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, el valor que tiene en la série, nos dá

$$d=\frac{ba}{2x}+\text{etc.}:$$

en donde á medida que crece x, disminuyen estas fracciones, y por consiguiente su suma; pero sin que lleguen á hacerse cero, mientras x no sea infinita: luego las asíntotas á una hipérbola se aproximan á la curva *continuamente* sin poder jamás tocarla, ni menos cortarla.

75.—Hallar la expresion de la hipérbola, referida á sus asíntotas.—Observaciones.-Sea MRM′ (*véase más adelante la fig.* 25), la hipérbola referida á los ejes rectangulares OX y OY: si las asíntotas son OX′ y OY′ para pasar del sistema rectangular al oblícuo que tiene el mismo orígen, nos serviremos de las (*fórs.* 50) halladas en el (*núm.* 31), en las cuales (x', y') son las coordenadas generales del nuevo sistema, y las mayúsculas indican los ángulos de los ejes que las tienen en la figura, y cuyo vértice se halla siempre en el orígen O.

Las modificaciones que las citadas fórmulas experimentan para la trasformacion de sus ejes, se reducen á dos: 1.ª El ángulo XX′ por hallarse con respecto al eje OX en sentido contrario que el Y′X, ó ser negativo, tiene su seno tambien negativo, mientras que el coseno permanece positivo. 2.ª Los ángulos XX′ y Y′X son iguales.

Reducidas las (*fórs.* 50), y buscando los valores de sen. XX′ y cos. XX′ en funcion de la tangente que como ya se sabe, es $\frac{b}{a}$; y por consiguiente las expresiones para pasar del sistema rectangular de los ejes, al oblícuo de las asíntotas, se convierten en

$$x=(x'+y')\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \text{ó},\ y=(x'-y')\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Estas expresiones, son pues, las que se han de sustituir por x y por y en la fórmula de la hipérbola

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2:$$

restando despues los numeradores, efectuando los desarrollos y divisiones convenientes, resultará para la fórmula de la hipérbola referida á sus asíntotas

(85) $$4xy=e^2,\ \text{ó bien}\ xy=\frac{1}{4}e^2.$$

Expresion que dice: *en toda hipérbola el producto de las coordenadas* *asintóticas de cada punto, es constante é igual al cuadrado de la mitad de la distancia del centro al foco.*

Observaciones. — 1.ª La ecuacion $xy = \frac{1}{4} e^2$, prueba desde luego con toda claridad que las asíntotas se acercan constantemente á la curva sin tocarla jamás; puesto que despejando la ordenada PM $= y$, se tiene

$$y = \frac{e^2}{4x};$$

de donde á medida que aumente el denominador por incrementos de x, tanto menor será el valor de y; pero como el numerador e^2, es constante, solo puede hacerse $y = o$ cuando $x = \infty$.

2.ª La superficie del paralelógramo OP'M'H construido sobre las coordenadas de un mismo punto es, considerando OH $=$ P'M' por base y siendo la altura M'O', tendremos que el

$$\text{área} = P'M' \times M'O';$$

pero M'O' en el triángulo M'O'H es igual á

$$HM' \times \text{sen. } O'HM'\text{: y como } HM' = OP' \text{ y } O'HM' = Y'OX',$$

se tiene

$$\text{área } OP'M'H = P'M' \times OP'. \text{ sen. } Y'X' = xy. \text{ sen. } Y'X'.$$

El producto xy es constante, el ángulo que forman las asíntotas tambien: *luego los paralelógramos construidos sobre las coordenadas de cada punto de la hipérbola son equivalentes.*

3.ª Entre los paralelógramos construidos sobre las coordenadas de los distintos puntos de la hipérbola, se halla el OO''RO''' cuyo vértice R coincide con el de la curva, y cuyos lados son iguales, porque los triángulos OO''R y OO'''R iguales, son isósceles; pues O''RO $=$ ROO''' por alternos internos entre paralelas, y este último ROO''' $=$ ROO''.

El producto de las coordenadas asintóticas del vértice, se llama potencia de la hipérbola: y como son iguales en todos casos, resultará

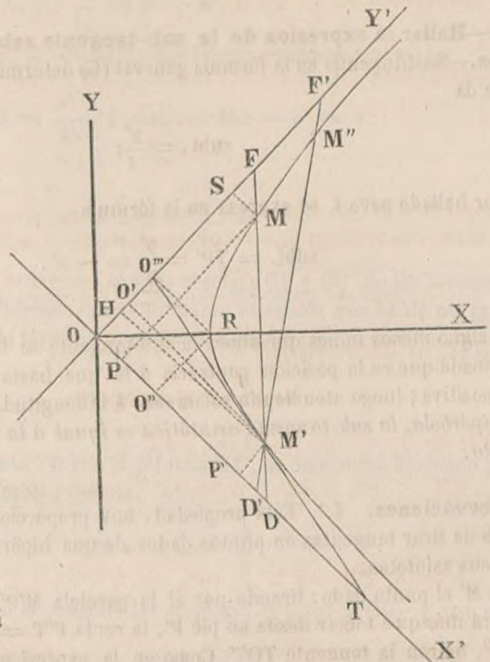
$$x^2 = \frac{1}{4} e^2\text{; de donde } x = \frac{1}{2} e.$$

Luego: *la abscisa y ordenada del vértice son iguales á la semi-excentricidad.*

76.—Determinar la fórmula de la tangente á una hipérbola con relacion á sus asíntotas.—Sea el punto de contacto M (*fig.* 25), cuyas coordenadas representaremos por (x', y').

Para hallar el ángulo que la tangente en M, forma con la asíntota OX, es necesario sustituir en la ecuacion de la curva por (x, y), (x', y'): despues $x' + h$, é $y' + k$, y restando las ecuaciones que resultan, deducir de la final la relacion $\frac{k}{h}$; tomando de ella la parte independiente de estos incrementos.

Fig. 25.



La expresion de la hipérbola referida á las asíntotas, es

$$yx = \frac{1}{4} e^2:$$

sustituyendo las coordenadas del punto M, resulta

$$y'x' = \frac{1}{4} e^2;$$

ahora si se sustituye $x' + h$ á x y por y, $x' + k$, se tiene

$$x'y' + hy' + kx' + hK = \frac{1}{4} e^2:$$

restando las dos ecuaciones y dejando en la resultante los términos con k en el primer miembro, y los términos con h en el segundo, queda

$$k(x' + h) = -hy';$$

de donde

$$t = \frac{k}{h} = -\frac{y'}{x'}.$$

Por consiguiente la fórmula de la tangente TO‴, será

$$(86)\qquad y - y' = -\frac{y'}{x'}(x - x').$$

77.—Hallar la expresion de la sub-tangente asintótica.—Observaciones.—Sustituyendo en la fórmula general (G) determinada en el (*núm.* 62), lo que da

$$\text{subt.} = \frac{y'}{t};$$

el valor hallado para t, se expresa en la fórmula

$$(87)\qquad \text{subt.} = \text{TP}' = \frac{y'}{\frac{y'}{-x}} = -x'.$$

El signo *menos* indica que ahora la sub-tangente se halla á la derecha de la ordenada que es la posicion contraria á la que hasta aquí se ha mirado como positiva; luego atendiendo solamente á la longitud, se verifica que: *en toda hipérbola, la sub-tangente asintótica es igual á la abscisa del punto de contacto.*

Observaciones. 1.ª Esta propiedad, nos proporciona un medio fácil y sencillo de tirar tangentes en puntos dados de una hipérbola, cuando se conocen sus asíntotas.

Sea M′ el punto dado: tirando por él la paralela M′P′ á una asíntota OY′, no habrá más que tomar desde su pié P′, la recta P′T = OP′: el punto T y el dado M′, fijarán la tangente TO‴. Como en la expresion de la hipérbola entran de un mismo modo (x, y), tambien se verifica que la parte HO‴ del eje de ordenadas comprendida entre los encuentros de la tangente y una paralela á la abscisa tirada por el punto de contacto, *será igual* á la ordenada OH de este mismo punto; luego puede tirarse por M′ la M′H paralela á la segunda asíntota OX′ y tomar la porcion OH desde H hasta O‴ para tener en este punto otro de la tangente pedida.

2.ª De los triángulos semejantes TM′P′ y TO‴O, se deduce que

$$\text{TP}' : \text{TO} :: \text{TM}' : \text{TO}''';$$

pero

$$\text{TP}' = \frac{1}{2}\,\text{TO} : \text{luego, } \text{TM}' = \frac{1}{2}\,\text{TO}'''.$$

De modo que: *las tangentes á la hipérbola comprendidas entre sus asíntotas, están bisecadas en el punto de contacto.*

78.—Los segmentos de una recta cualquiera, comprendidos entre cada rama de la hipérbola y su asíntota inmediata, son iguales.—Consecuencia.—Sea la recta FD, que atraviesa la hipérbola; su expresion tendrá la forma

$$y = ax + b:$$

en donde a y b son indeterminadas, y por lo tanto la ecuacion representará todas las rectas imaginables.

La fórmula de la hipérbola referida á sus asíntotas ya sabemos que es

$$xy = \frac{1}{4} e^2.$$

Igualando coordenadas, se obtendrán las de sus encuentros, y serán

$$ax + b = \frac{e^2}{4x}: \text{ y } 4ax^2 + 4bx - e^2 = o:$$

de donde

$$x^2 + \frac{b}{a} x - \frac{e^2}{4a} = o.$$

Las raices de esta ecuacion, son las abscisas OP y OP′ de las intersecciones de la recta y la hipérbola; pero su suma es sabido que ha de ser igual al coeficiente del segundo término mudado el signo: luego

$$\mathrm{OP} + \mathrm{OP}' = -\frac{b}{a}.$$

El encuentro de la recta FD con la asíntota OX′, se determina haciendo $y = o$ en la expresion de la recta, que da

$$\mathrm{OD} = x = -\frac{a}{b}.$$

De aquí se deduce que la suma de las abscisas, es igual á OD; y por consiguiente

$$\mathrm{OP} + \mathrm{OP}' = \mathrm{OD}.$$

Despejando OP, resulta

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OD} - \mathrm{OP}' = \mathrm{P'D}.$$

Siendo OP ó su paralela SM = P′D, los triángulos SMF y M′P′D son iguales por tener además de los lados SM y P′D iguales, tambien los ángulos SFM = = P′M′D y FSM = M′P′D; pues sus lados son paralelos.

De la igualdad de los triángulos FSM y M′P′D se sigue que FM = M′D, que es lo que nos hemos propuesto demostrar.

Consecuencia.—De esta propiedad se puede hacer uso para construir una hipérbola, cuando se conozcan las asíntotas y un punto; porque no habrá más que tirar por dicho punto, tal como M′, cuantas rectas DF, D′F′, etc., se quieran, y tomando despues en cada una la parte M′D′ que hay hasta la asíntota más próxima, y colocarla desde F hasta M: del mismo modo se coloca la parte M′D′ de la otra secante desde F′ hasta M″, y procediendo de esta manera con suficiente número de secantes, se obtendrán puntos tan próximos como se quieran de la rama superior para poder conocerla y trazarla. Para la rama inferior se podría imaginar al punto M despues de hallado, como el conocido para tirar por él diversas secantes, repitiendo las operaciones indicadas.

Este procedimiento es muy importante por su sencillez, facilidad y exactitud.

79.—Hallar la fórmula de la tangente á la parábola en un punto dado.—Sustituyendo en la (*fór.* 70) determinada en el (*núm.* 55), por (y, x) las coordenadas del punto dado para el contacto, que supondremos ser $(y'\ x')$, resulta

$$y'^2 = 2px'.$$

Ahora sustituyendo $y' + k$ por y, y $x' + h$ por x, se tendrá

$$y'^2 + 2ky' + k^2 = 2px' + 2ph.$$

La resta entre los dos miembros de la primera ecuacion y los de esta, será

$$2ky' + k^2 = 2ph, \text{ ó bien, } k\,(2\,y' + k) = 2ph.$$

Despejando en esta última expresion á $\frac{k}{h}$ se obtiene

$$\frac{k}{h} = \frac{2p}{2y' + k};$$

y tomando la parte independiente de k, pues h no aparece en el segundo miembro, queda por último

$$t = \frac{p}{y'}.$$

Por consiguiente la expresion de la tangente á la parábola en el punto conocido (x', y') será

$$y - y' = \frac{p}{y'}\,(x - x'). \tag{88}$$

80.—Determinar la expresion de la sub-tangente correspondiente á un punto dado de la parábola.—Esta expresion se obtiene sustituyendo en la fórmula general (G) hallada (*núm.* 62) de las subtangentes, subt. $= \frac{y'}{t}$ por el denominador, cuyo valor se halla en la ecuacion de la tangente, y tendremos la expresion

$$\text{subt.} = \frac{y'}{\frac{p}{y'}} = \frac{y'^2}{p}, \text{ y tambien , subt.} = \frac{2px'}{p} = 2\,x'. \tag{89}$$

81.—Hallar la fórmula de la normal á la parábola en un punto conocido.—Siendo (x', y') las coordenadas del punto dado, tendremos la fórmula

$$y - y' = -\frac{y'}{p}\,(x - x'). \tag{90}$$

Desde luego se comprende que debe ser una recta perpendicular á la tangente tirada por el mismo punto; pues cada una de las tangentes trigonométricas de los ángulos que forman con el eje de las abscisas, ha de ser la cotangente negativa del otro.

82.—Determinar la sub-normal relativa á un punto de la parábola.—Observaciones.—Se halla poniendo por t, su valor en la fórmula

$$\text{subn.} = ty':$$

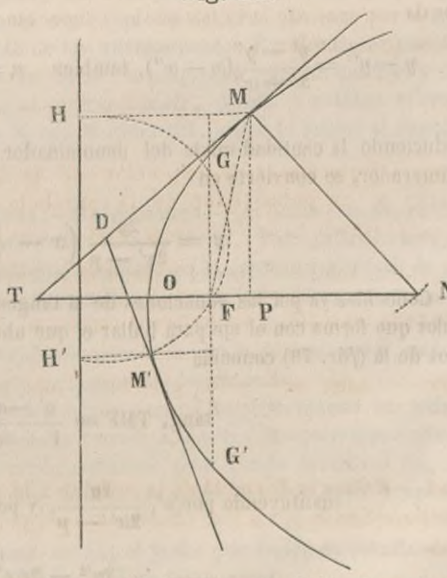
la que da en este caso la expresion de la sub-normal

$$\text{(91)} \qquad \text{subn.} = \frac{p'}{y'}y' = p'.$$

Observaciones.—1.ª De la fórmula de la tangente á la parábola, se deduce que desde $x' = o$, en cuyo caso la expresion de la curva hace $y' = o$, y t resulta *infinita*, hasta $x' = \infty$, resultando $y' = \infty$, y $t = o$; la recta tangente puede tomar todas las posiciones imaginables desde perpendicular al eje hasta ser casi paralela al mismo. A esta posicion no llegará nunca; porque siendo infinitas las coordenadas (x', y') del punto de contacto, hacen ver claramente que este se halla situado á una distancia tambien infinita del orígen.

2.ª Los valores de la sub-tangente varian igualmente desde *cero* al *infinito*; pero su relacion con la abscisa presenta un medio sencillo de tirar tangentes á la parábola en puntos dados: porque si M (*fig.* 26) es el punto fijado, bajando desde él la perpendicular MP al eje, se tendrá conocida la abscisa OP, y colocándola desde O hasta T, en este punto terminará la sub-tangente; así la tangente en cuestion será la recta TM que pasa por T y M.

Fig. 26.



3.ª La expresion de la normal hace conocer tambien que puede esta línea tomar todas las posiciones imaginables desde coincidir con el eje, si bien jamás llegará á ser perpendicular al mismo.

4.ª El valor constante p, de la sub-normal proporciona de la misma manera un medio fácil de tirar una tangente á la parábola en punto dado. Con efecto, sea el punto dado el M: ante todo, se tirará por el foco la GG′ perpendicular al eje; y como la doble ordenada que pasa por el foco es el parámetro $2p$, colocando la GF desde P hasta N, la MN será la normal, y una perpendicular en el extremo será la tangente.

83.—Hallar la expresion del ángulo que forma la tangente á la parábola con el radio vector tirado al punto de contacto.—Observacion. La fórmula de la tangente en un punto dado M (*fig.* 26), cuyas coordenadas son (x', y') ya sabemos que es

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x'):$$

despejando y para obtener la expresion bajo la forma ordinaria

$$y = \frac{p}{y'}x + \frac{y'^2 - px'}{y'};$$

poniendo por y'^2 su igual $2px'$, tendremos

$$y = \frac{p}{y'}x + \frac{px'}{y'}$$

La ecuacion del radio vector MF que, pasando por el punto M tiene por coordenadas (x', y'), y por el foco F cuyas coordenadas, segun hemos visto (*núm.* 57) (*fór.* 72), son

$$\left(x'' = \frac{p}{2},\quad y'' = 0\right),$$

nos da

$$y - y'' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x''),\ \text{tambien}\quad y = \frac{y'}{x' - \frac{p}{2}}\left(x - \frac{p}{2}\right);$$

reduciendo la cantidad mixta del denominador á quebrado, y dividiendo el numerador, se convierte en

$$y = \frac{2y'}{2x' - p}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Conocidos ya por las ecuaciones de la tangente y del radio vector los ángulos que forma con el eje para hallar el que abrazan entre sí, nos serviremos de la (*fór.* 79) conocida

$$\text{tang. TMF} = \frac{a' - a}{1 + aa'}:$$

sustituyendo por a', $\frac{2y'}{2x' - p}$, y por a, $\frac{p}{y'}$, se tiene

$$\text{tang. TMF} = \frac{2y'^2 - 2px' + p^2}{2x'y' - p'y' + 2py'};$$

poniendo por y'^2 su valor $2px'$, y haciendo las reducciones convenientes obtendremos la fórmula

$$(92) \qquad \tan.\ TMF = \frac{2px' + p^2}{2x'y' + py}, = \frac{p\,(2x' + p)}{y'\,(2x' + p)} = \frac{p}{y'}.$$

Pero esta expresion es tambien la que se halló para el ángulo MTN de la tangente con el eje de abscisas ó con cualquiera paralela MH. Luego: *la tangente á la parábola forma ángulos iguales con el radio vector y la paralela al eje, tirada por el punto de contacto.*

Observacion.—Esta propiedad facilita medios para tirar tangentes á una parábola, ya en puntos dados sobre la misma, y ya por puntos situados fuera de ella.

Para tirar tangentes á una parábola, por el punto M (*fig.* 26) fijado sobre la curva, se tiran desde él, el radio vector MF y una paralela MH al eje, y dividiendo en mitades el ángulo HMF, la recta que lo bisectriza, será la tangente que se debe establecer.

Para tirar tangentes á la parábola desde un punto exterior D, se hace centro en D y con el radio DF, que es la distancia al foco, se describe un arco que cortará en H y H' á la directriz: por los puntos H y H' se hacen pasar dos paralelas al eje, y sus encuentros M y M' con la curva, serán los puntos de contacto.

En efecto, cada recta DM y DM' biseca el ángulo HMF y H'M'F que forman las paralelas al eje y los radios vectores tirados á los puntos de contacto. Para convencerse de esta verdad, nos concretaremos á la recta DM, cuyo punto D equidista de F y H como centro que es del arco que pasa por estos puntos, M' equidista igualmente de los mismos puntos F y H por ser uno de los de la parábola, todos los cuales tiene la propiedad respecto del foco y de la directriz; luego la recta DM al bisecar á la HF, divide en mitades el arco que pudiera describirse desde M con el radio MH, y por lo mismo al ángulo á que corresponde dicho arco.

84.—Diámetro de las curvas.—Definiciones.—*Se llama cuerda, cualquiera recta que va de un punto á otro de una curva.* Para hallar la longitud de una cuerda, no hay más que sustituir en la expresion general de la distancia entre dos puntos, por coordenadas de estos, los valores que tengan en cada caso particular.

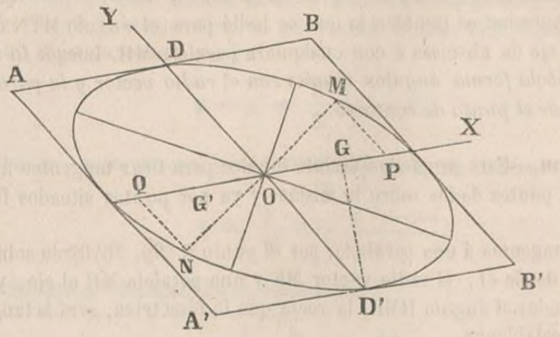
Cuando dos cuerdas tiradas desde un mismo punto de una curva, van á terminar en los extremos del eje, se llaman suplementarias.

La elipse y la hipérbola pueden tener cuerdas suplementarias en todos sus puntos; porque teniendo el eje dos extremos, pueden tirarse rectas á ellos. La parábola no tiene cuerdas suplementarias; pues siendo infinito el eje, la que fuese al extremo infinitamente lejano, seria una paralela cuya longitud nunca podrá ser determinada.

Se entiende por centro de una curva, el punto que divide en mitades todas las rectas que pasan por él y terminan en dicha curva.

85.—Si una curva tiene centro, en su ecuacion no aparecerán las primeras potencias de las variables.—Consecuencias.—Sean los ejes coordenados, dos cualesquiera OX y OY (*fig.* 27) que pasen por el centro de la curva. Una recta tal como MN que atraviesa por dicho centro ha de quedar biseca da en él; luego marcando las ordenadas MP y NQ de los extremos de la recta, los triángulos MOP y NOQ resultan iguales; pues tienen el lado ON = OM, los ángulos en O iguales por opuestos, y los en N y M tambien iguales, por alternos internos: de donde resulta que, como partes de los triángulos MOP y NOQ, las abscisas OP y OQ tienen que ser iguales, y tambien las ordenadas PN y QN. Luego la expresion de la curva ha de ser tal, que sustituyendo en ella por x sus valores OP y OQ iguales y de signo contrario, los que dé para y han de gozar de la misma propiedad. Esto solo se verifica cuando una ecuacion de segundo grado, carece de segundo término: por consiguiente para que exista centro es necesario que no haya término en y; y como lo mismo puede decirse respecto de x, resulta que toda ecuacion en donde entre alguna de las primeras potencias de las variables, no tiene centro.

Fig. 27.



Consecuencias.—1.ª *La elipse y la hipérbola tienen centro y este es el encuentro de los ejes.* Porque se ha visto que sus expresiones referidas al punto medio de dichos ejes, no contienen más que los cuadrados de sus coordenadas.

2.ª *En la parábola el vértice no es centro*; porque entrando en su fórmula la primera potencia de x, cuando á esta se dén valores positivos y negativos iguales, resultarán para y unos reales y otros imaginarios.

Para demostrar que esta curva no tiene centro, vamos á resolver la siguiente cuestion.

86.—Dada la expresion de una curva referida á cualesquiera ejes, determinar las coordenadas de su centro.—Consecuencia.—La ecuacion más general de segundo grado entre dos variables (y, x), es

$$(M) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0:$$

en ella aparecen todos los términos posibles de (x, y), y además un término

F conocido; por lo tanto incluye todas las ecuaciones de las curvas que hasta ahora conocemos: más adelante veremos que no puede representar otras.

Para hallar las coordenadas del centro de las líneas que puede expresar la ecuacion anterior, supongamos que son dichas coordenadas a y b. Para trasformar los ejes actuales en otros paralelos que pasen por el centro, habrá que sustituir por y, $(y + b)$ y por x, $(x + a)$, y tendremos

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + (2Ab + Ba + D)\,y + (2Ca + Bb + E)\,x + M = o.$$

En esta ecuacion M representa el conjunto de términos en donde no entran variables ó mejor dicho, es el término constante.

Ahora bien, para que la curva tenga centro, es necesario que el cuarto y quinto término, que contienen las primeras potencias de (y,x), desaparezcan, es decir que los coeficientes de estas variables han de ser *cero*; luego resultan para la existencia del centro estas dos condiciones:

$$2Ab + Ba + D = 0, \quad \text{y} \quad 2Ca + Bb + E = 0.$$

De estas dos ecuaciones se pueden deducir las expresiones de a y b; las cuales son

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \text{ y } b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}.$$

Cualquiera de estas dos condiciones simultáneas que se elijan, sirven para conocer si una curva dada por su expresion tiene centro; pero como las últimas dan además el valor de sus coordenadas, es preferible siempre el hacer la sustitucion en ellas.

Esta sustitucion está reducida á reemplazar las cantidades A, B, C, D y E con los coeficientes de y^2, xy, x^2, y y x de la ecuacion propuesta.

Consecuencia.—*La parábola no tiene centro.*—Para demostrarlo, siendo la expresion de la parábola $y^2 = 2\,px$, no habrá más que hacer en las ecuaciones de a y b, $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ y $E = -2p$; y tendremos

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} = \frac{-4p}{0} = \infty, \quad \text{y } b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} = \frac{0}{0}.$$

Esto quiere decir que la abscisa del centro es infinita, y la ordenada levantada en su extremo puede tener todos los valores imaginables, ó bien que el centro de la parábola está en el infinito.

Llámase diámetro de una curva, toda recta bisetriz de un sistema de cuerdas paralelas.

De esta definicion se sigue que: ***la tangente en un extremo del diámetro ha de ser paralela al sistema de cuerdas que divide en mitades.*** Porque de no ser paralela á dicho sistema, se podria tirar por el extremo en cuestion una cuerda que lo fuese, y esta no quedaria dividida en su mitad; lo cual está en oposicion con la condicion de que bisectriza á todas.

87.—Toda curva referida á un diametro y á una paralela al sistema de cuerdas que divide en mitades, carece en su ecuacion de la primera potencia de una de las variables.—Si, por ejemplo, se toma el diámetro por eje de las abscisas, como cada ordenada por ser paralela á las cuerdas que biseca, será la mitad de una de ellas, es claro que la ordenada negativa bajada desde su pié será la otra media: luego á cada valor de x han de corresponder dos iguales y de signo contrario para y; pero raices iguales y de signo contrario solo las dan las ecuaciones que carecen de la primera potencia de la incógnita despejada: luego para que una curva esté referida á un diámetro, y una paralela á las cuerdas bisecadas, es preciso que no exista uno de los términos en y ó en x de su ecuacion.

Dos diámetros se dicen conjugados, cuando cada uno divide en mitades las cuerdas paralelas al otro.

Cualquiera diámetro de la elipse pasa por su centro.—Porque para ser diámetro ha de dividir en mitades todas las cuerdas paralelas de un sistema dado, y entre ellas á la que pase por el centro; y como este punto biseca á cualquier cuerda que pase por él, se sigue que corresponda á uno de los del diámetro.

88.—Las propiedades de la elipse respecto á sus ejes, se verifican tambien con relacion á sus diámetros conjugados.—Para persuadirse de esta verdad, no hay mas que observar si la expresion de la curva referida á diámetros conjugados, es análoga á la relativa á sus ejes, y si aquellos entran del mismo modo que estos.

Se puede conocer la forma de la ecuacion de la elipse cuando se halle referida á diámetros conjugados, recordando que por pasar estos por el centro, es decir, por estar el orígen de las coordenadas en él, no pueden aparecer en la expresion (*núm.* 85), las primeras potencias de las variables; y como además el eje de abcisas es diámetro, tampoco puede tener dicha expresion segun el (*núm.* 85-2.ª *consec.*), un término yx que, respecto á y contiene su primera potencia: luego la expresion de la elipse será precisamente de la forma

$$Ay^2 + Bx^2 = C.$$

Si se supone la longitud del diámetro de las abscisas igual á $2m$, y la de su conjugado igual á $2n$, es evidente que cuando $x = o$, habrá de ser $y = n$, lo que reducirá la ecuacion

$$Bn^2 = C, \text{ y por lo mismo } B = \frac{C}{n^2}.$$

Si se imagina en la ecuacion $y = o$, ha de resultar necesariamente $x = m$; con lo cual la ecuacion se convierte en

$$Am^2 = C, \text{ y } A = \frac{C}{m^2}.$$

Ahora, sustituyendo por A y B las cantidades á que equivalen, resulta para ecuacion de la elipse

$$\frac{C}{m^2}\, y^2 + \frac{C}{n^2}\, x^2 = C;$$

dividiéndola toda por C dá

$$\frac{y^2}{m^2} + \frac{x^2}{n^2} = 1:$$

quitando los denominadores, tendremos la expresion

$$(93) \qquad n^2y^2 + m^2x^2 = m^2n^2.$$

Esta fórmula manifiesta lo que se ha propuesto demostrar, porque es análoga en todo á la que depende de los ejes, y en ella entran los cuadrados de los semi-diámetros conjugados como coeficientes de los de cada ordenada, de la misma manera que lo hacian los semi-ejes.

89.—En toda elipse, la suma de cuadrados de los semi-diámetros conjugados, es igual á la de los cuadrados de los semi-ejes.—Para demostrar esta propiedad, es indispensable hallar la ecuacion de los ejes, siendo estos funcion de los diámetros, para compararla con la referida á estos, ó al contrario.

Sea la expresion de la curva referida á sus diámetros conjugados que son ejes oblícuos

$$m^2y^2 + n^2x^2 = m^2n^2:$$

para que esta ecuacion corresponda á la de los ejes, lo primero será trasformarla á ejes rectangulares con el mismo orígen: las fórmulas para la trasformacion halladas (*núm.* 32), nos dan

$$x = \frac{x'.\ \text{sen.}\ YX' - y'.\ \cos.\ XY'}{\text{sen.}\ X'Y'}. \qquad y = \frac{y'.\ \cos.\ XX' - x'.\ \text{sen.}\ XX'}{\text{sen.}\ X'Y'}$$

En estas fórmulas (x', y'), son las coordenadas rectangulares, y (x, y) las oblícuas dadas: en sus denominadores se ha supuesto ejecutada la resta que sen. (XY′ — XX′) indicaba (*núm.* 32) arriba citado.

Sustituyendo estos valores de (x, y) en la ecuacion dada, se tiene quitando denominadores y haciendo *cero* el término que contiene xy; pues no puede existir en ecuacion alguna referida á diámetros como lo son los ejes: así tendremos

$$\begin{cases} (m^2.\ \cos^2.\ XX' + n^2.\ \cos^2.\ XY')\ y'^2 + (m^2.\,\text{sen}^2.\ XX' + n^2.\ \text{sen.}\ XY')\ x'^2 = \\ = m^2.\ n^2.\ \text{sen}^2.\ X'Y'. \end{cases}$$

La condicion para hacer desaparecer el término xy, que es la de igualar su coeficiente á *cero* será

$$m^2.\ \cos.\ XX'.\ \text{sen.}\ XX' + n^2.\ \cos.\ XY'.\ \text{sen.}\ XY' = o.$$

Pero la expresion de la elipse referida á sus ejes, ya sabemos que tiene la forma

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2:$$

luego debe ser idéntica con la penúltima que corresponde al mismo supuesto: mas como esta identidad ó igualacion entre cada dos términos correspondientes, no puede evidenciarse directamente, supongamos que k es un número tal, que multiplicando por él la ecuacion $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, la haga idéntica con la otra de los ejes rectangulares en funcion de diámetros conjugados; en este caso, haciendo la multiplicacion resulta

$$a^2ky^2 + b^2kx^2 = a^2b^2k\,;$$

comparando las coeficientes de las variables con los respectivos de los de la otra ecuacion se deduce

$$m^4.\ \cos^2.\ XX' + n^2.\ \cos^2.\ XY' = a^2k$$

$$m^2.\ \text{sen}^2.\ XX' + n^2.\ \text{sen}^2.\ XY' = b^2k$$

$$m^2.\ n^2.\ \text{sen}^2.\ X'Y' = a^2b^2k.$$

Para conocer la cantidad indeterminada k hay un sencillo artificio que consiste en multiplicar las dos primeras de estas tres ecuaciones, y restar de la resultante el cuadrado de la ecuacion de condicion que es el coeficiente de xy, igualado á *cero*:

La multiplicacion de las dos ecuaciones primeras de este grupo de tres nos dá

$$\left\{\begin{array}{l} m^4.\ \text{sen}^2.\ XX'.\ \cos^2.\ XX' + m^2.\ n^2.\ \text{sen}^2.\ XX'.\ \cos^2.\ XY' + m^2.\ n^2 \times \\ \times\ \text{sen}^2.\ XY'.\ \cos^2.\ XX' + n^4.\ \text{sen}^2.\ XY'.\ \cos^2.\ XY' = a^2b^2k^2. \end{array}\right.$$

La ecuacion de condicion

$$m^2.\ \cos.\ XX'.\ \text{sen}.\ XX' + n^2.\ \cos.\ XY'.\ \text{sen}.\ XY' = o,$$

elevada al cuadrado nos dará

$$\left\{\begin{array}{l} m^4.\ \text{sen}^2.\ XX'.\ \cos^2.\ XX' + 2m^2.\ n^2.\ \text{sen}.\ XX'.\cos.\ XX'.\ \text{sen}.XY'.\cos.XY' \\ +\ n^4.\ \text{sen}^2.\ XY'.\ \cos^2.\ XY' = o: \end{array}\right.$$

restada de la resultante de la multiplicacion anterior, se convierte en la que sigue:

$$m^2n^2\,(\text{sen}.\ XX'.\ \cos.\ XY'.\ -\ \text{sen}.\ XY'.\ \cos.\ XX')^2 = a^2b^2k^2.$$

Pero el paréntesis es el sen. $(XY' - XX') =$ sen. $X'Y'$, segun se ha supuesto en los denominadores de las fórmulas para la trasformacion; luego

$$m^2.\ n^2.\ \text{sen}^2.\ X'Y' = a^2b^2k^2.$$

El primer miembro de esta ecuacion es el mismo que el de la tercera de las del grupo deducido por la identidad; por consiguiente, los segundos miembros serán tambien iguales, y se tendrá

$$a^2b^2k^2 = a^2b^2k\,;$$

dividiendo por a^2b^2k, dá para k el valor de $k = 1$.

Es decir que no existe coeficiente alguno necesario, para hacer idénticas las dos expresiones de la elipse referidas á sus ejes, mas que la unidad; luego dichas ecuaciones son idénticas por sí mismas.

Convencidos de esta verdad para hallar la propiedad que se trataba de conocer, supondremos $k = 1$ en el grupo de ecuaciones originadas de la identidad que ya queda demostrada: esto supuesto, la convertirá en

$$m^2 . \cos^2 . XX' + n^2 . \cos^2 . XY' = a^2$$
$$m^2 . \text{sen}^2 . XX' + n^2 \text{sen}^2 . XY' = b^2$$
$$m^2 . n^2 . \text{sen}^2 . XY = a^2 b^2 .$$

En estas tres ecuaciones se hallan ya cuantas relaciones existen entre los ejes y los diámetros conjugados, como vamos á ver en los tres casos siguientes:

1.° Sumando las dos ecuaciones primeras, se deduce así que,

$$m^2 . (\text{sen}^2 . XX' + \cos^2 . XX') + n^2 . (\text{sen}^2 . XY' + \cos^2 . XY') = a^2 + b^2 .$$

pero cada paréntesis, segun la trigonometría, equivale á la unidad; luego resulta la fórmula

$$(94) \qquad m^2 + n^2 = a^2 + b^2 :$$

es decir, que segun se trataba de demostrar: *la suma de cuadrados de los semi-ejes, es igual á la de los semi-diámetros conjugados.*

2.° La tercera ecuacion del grupo, por sí sola, dá extrayendo la raiz cuadrada de sus dos miembros

$$m . n . \text{sen} . X'Y' = ab$$

Pero $m . n .$ sen. XY, es el área del paralelógramo D'OXB' (*fig.* 27), construido sobre los diámetros conjugados OX y OD'; pues tomando por base $OX = m$, la altura D'G, en el triángulo rectángulo D'GO, resulta igual á $OD' \times$ sen. $D'OX = n .$ sen. XY: y como el paralelógramo total ABB'A' se compone de otros cuatro iguales al D'B'XO, multiplicando por 4 los dos miembros de la ecuacion que se discute, tendremos la expresion

$$(95) \qquad 4m . n . \text{sen} . XY = 4ab .$$

De suerte que: *el paralelógramo construido en la elipse sobre los diámetros conjugados, es equivalente al rectángulo trazado sobre los ejes.*

3.° Siendo tres las ecuaciones de condicion entre los ejes y los diámetros conjugados, y figurando en ellas seis cantidades diferentes, resuelven este problema generalmente. De estas seis partes que son *los dos ejes, los dos diámetros conjugados y los dos ángulos, uno de ellos, el que forman entre sí y el otro con un eje, se hace frecuente uso: así es, que dadas tres de las seis cantidades, las otras tres se determinan fácilmente.*

90.—Las propiedades de la hipérbola respecto á sus diámetros conjugados, son las mismas que las que tienen con relacion á sus ejes.— Todas las propiedades que hemos hallado para la elipse, se verifican en la hipérbola sin más alteracion que la producida al considerar la cantidad b^2 como *negativa* en la ecuacion de aquella; pues que á esto se reduce la diferencia en la formacion de las expresiones de ambas curvas.

En efecto, la ecuacion de la hipérbola referida á diámetros conjugados, es análoga en todas sus partes á la que la representa con relacion á sus ejes, pues la fórmula de esta curva ha de carecer de términos en (x, y) por estar el orígen en el centro; además carecerá tambien del término xy, porque cualquiera de los ejes que se mire como el de abscisas, es diámetro: luego tendrá dicha expresion precisamente la forma

$$Ay^2 + Bx^2 = C.$$

Sean $2m$ y $2n$ las longitudes del diámetro de las abscisas y de las ordenadas: cuando $y = o$ será necesariamente $x = m$; en cuyo caso la ecuacion viene á ser

$$Bm^2 = C.$$

Pero cuando $x = o$ se hace y imaginaria; luego si la longitud de esta en el orígen es n, su valor dado por la ecuacion será $n\sqrt{-1}$: y por consiguiente la expresion de la hipérbola resulta

$$-An^2 = C.$$

De esta igualdad y la anterior, se deduce

$$A = -\frac{C}{n^2}, \text{ y } B = \frac{C}{m^2};$$

valores que, puestos en la ecuacion de la hipérbola referida á diámetros conjugados, se obtienen por la fórmula

(96) $$m^2\, y^2 - n^2\, x^2 = -m^2\, n^2.$$

Expresion cuya composicion demuestra que: *todas las propiedades relativas á los ejes, tienen lugar con relacion á los diámetros conjugados.*

91.—En toda hipérbola la diferencia de cuadrados de los semi-diámetros conjugados, es igual á la de los semi-ejes.—Las ecuaciones de condicion deducidas de la elipse serán las mismas para la hipérbola, solo con variar los signos de n^2 y b^2; luego si para la elipse se dedujo

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2,$$

para la hipérbola se verificará la ecuacion

(97) $$m^2 - n^2 = a^2 - b^2.$$

Expresion que no es más que la escritura algebráica de la propiedad que se ha tratado de evidenciar.

92.—El paralelógramo construido sobre los diámetros conjugados, es equivalente al rectángulo trazado sobre los ejes.—De la tercera ecuacion de condicion que ligaba en la elipse los diámetros conjugados y los ejes, se dedujo para esta curva

$$4\; m.\, n.\, \text{sen.}\; X'Y' = 4ab:$$

y como las propiedades de la hipérbola se deducen de la curva anterior, nada más fácil que variar los signos de n^2 y b^2; ahora se tendrá

$$4\,m.\,n.\ \text{sen. XY}\ \sqrt{-1} = 4ab\sqrt{-1};$$

dividiendo ambos miembros por $\sqrt{-1}$, resulta la fórmula

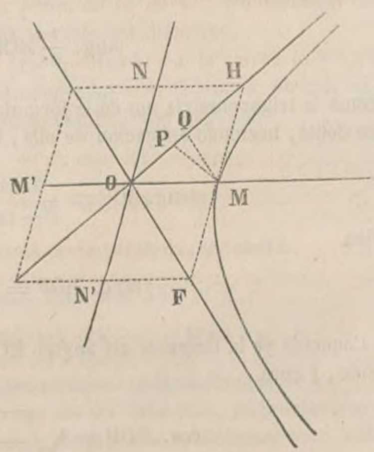
$$4\,m.\,n.\ \text{sen. XY} = 4ab. \tag{98}$$

Esta expresion prueba tambien que la propiedad enunciada es cierta.

93.—Las diagonales de cualquier paralelógramo construido sobre los diámetros conjugados, son las asíntotas de la hipérbola.—Sean los diámetros conjugados MM′ y NN′ (*fig.* 28); si O es el centro de la hipérbola, y en él está el orígen de las coordenadas, se verificará que $OM = OM' = m$, y $ON = ON' = n$.

Ahora, tirando la MQ, desde el punto M de contacto de la tangente HF, paralela al diámetro conjugado NN′, dicha MQ paralela á la asíntota OF, será la ordenada asintótica del punto M; así como la OQ será tambien la abscisa asintótica del mismo punto.

Fig 28.



En el triángulo OMQ, por ser oblicuángulo se verifica, (*número* 16.—3.^{er} *caso*) que el cuadrado de un lado opuesto á un ángulo agudo, es igual á la suma de cuadrados de los otros dos, menos el duplo del producto de uno de ellos por el segmento suyo adyacente al ángulo agudo.

Así se tendrá:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QM}^2 - 2.\,OQ \times PQ:$$

siendo como se supone la PM perpendicular á la OQ. La porcion ó segmento PQ en el triángulo rectángulo PMQ, es igual á la hipotenusa QM multiplicada por el coseno del ángulo adyacente PQM, ó OQM; luego

$$\overline{OM}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QM}^2 - 2.\,OQ \times QM.\ \cos.\ OQM;$$

poniendo por OM, m; y llamando x á OQ, é y á QM, tendremos

$$m^2 = x^2 + y^2 - 2xy.\ \cos.\ OQM.$$

El ángulo OQM es suplemento del HOF que forman las asíntotas; luego OQM = — cos. HOF, y con esto la ecuacion se convierte en

$$m^2 = x^2 + y^2 + 2xy.\ \cos.\ HOF.$$

En el triángulo HQM se verifica que

$$\overline{MH}^2 = x^2 + y^2 - 2xy.\cos HOF;$$

pues QH = OQ por ser proporcional á las partes de la tangente MH = FM; restando esta de la anterior ecuacion, se tiene

$$m^2 - \overline{MH}^2 = 4xy \cos.\ HOF.$$

Segun la ecuacion de la hipérbola referida á sus asíntotas, cuya ecuacion es $xy = \frac{1}{4}e^2$, ó bien, $4xy = e^2$: en la que e^2 representaba á $(a^2 + b^2)$, se tiene

$$4xy = a^2 + b^2.$$

Ahora solo falta hallar el cos. HOF, para sustituir su valor en la expresion de $m^2 - \overline{MH}^2$, y demostrar de este modo la propiedad que se ha enunciado.

El ángulo HOF es igual á $2\frac{1}{2}$HOF; pero

$$\text{tang.}\frac{1}{2}\ HOF = \frac{b}{a}:$$

y como la trigonometría nos dá la fórmula para determinar la tangente de un arco doble, haciendo aplicacion de ella, tendremos

$$\text{tang.}\ HOF = \frac{2.\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\ HOF}{1 - \text{tang.}\ 2\ \frac{1}{2}\ HOF},$$

ó bien

$$\text{tang.}\ HOF = \frac{2.\ ab}{a^2 - b^2}.$$

Conocida ya la tangente del ángulo HOF, se halla fácilmente el coseno del mismo, y será

$$\cos.\ FOH = \sqrt{\frac{1}{1 + \text{tang}^2.\ HOF}}.$$

En donde sustituyendo por tang. HOF su valor, resulta

$$\cos.\ FOH = \sqrt{\frac{1}{\frac{(a^2 - b^2)^2 + 4\,a^2\,b^2}{(a^2 - b^2)^2}}} = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}:$$

con esta expresion y la de $4xy$, la diferencia $m^2 - \overline{MH}^2$, se convierte en

$$m^2 - \overline{MH}^2 = a^2 - b^2;$$

pero el segundo miembro $a^2 - b^2$, diferencia de los cuadrados de los semiejes, es igual á $m^2 - n^2$ diferencia de los cuadrados de los diámetros conjugados; luego

$$m^2 - \overline{MH}^2 = m^2 - n^2:$$

de donde se deduce la fórmula que se busca

$$\text{MH} = n. \tag{99}$$

De aquí se sigue que la tangente HF contada hasta las asíntotas, es igual al diámetro conjugado NN′: luego dichas asíntotas son las diagonales del paralelógramo construido sobre los diámetros conjugados.

94.—Toda recta paralela al eje de la parábola biseca un sistema de cuerdas paralelas á la tangente en su extremo.—La expresion de la parábola referida á ejes rectangulares, es

$$y^2 = 2px:$$

y como en ella no entra la primera potencia de y, á cada valor de x arbitrario, corresponderán dos órdenadas iguales y de signos contrarios: como cada doble ordenada es una cuerda, resulta que el eje biseca un sistema de cuerdas, que es la condicion para llamarle diámetro.

Ahora lo que deberá hacerse, es trasformar la expresion en otra de ejes oblícuos, cuyo orígen se halle en un punto de la curva, y determinar despues las condiciones para que el de las abscisas sea diámetro.

Sean las coordenadas del nuevo orígen situado en la curva (a y b); las fórmulas halladas en el (*núm.* 34), aumentadas con la nueva abscisa en a, y su coordenada en b; porque tambien se cambia el orígen, son

$$x = x'.\ \text{cos. XX}' + y'.\ \text{cos. XY}' + a;$$

$$y = x'.\ \text{sen. XX}' + y'.\ \text{sen. XY} + b.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de la parábola, se tendrá

$$\begin{cases} \text{sen.}^2\ \text{XY}'.\ y'^2 + 2.\ \text{sen. XX}'.\ \text{sen. XY}'.\ x'\ y' + \\ + 2\ b.\ \text{sen. XY}' - 2p.\ \text{cos. XY}'.\ y' + \text{M} = o: \end{cases}$$

en esta ecuacion M representa todos los términos independientes de y.

Luego, para que el eje de las abscisas sea un diámetro, es preciso que los términos en $x'\ y'$, y en y' desaparezcan, ó que sus coeficientes sean nulos, y será

$$\text{sen. XX}'.\ \text{sen. XY}' = o;\ b.\ \text{sen. XY}' - p.\ \text{cos. XY}' = o.$$

De la segunda de estas ecuaciones se deduce el ángulo que el nuevo eje de las y, forma con el primitivo de las x; porque despejando el primer término, resulta

$$b.\ \text{sen. XY} = p.\ \text{cos. XY}':$$

dividiendo ambos términos por b. cos. XY′, se tiene

$$\frac{\text{sen. XY}}{\text{cos. XY}'} = \text{tang. XY}' = \frac{p}{b}.$$

Y como esta expresion es la que se determinó para cualquier tangente á la parábola, se sigue que si el eje de las nuevas abscisas ha de dividir en mitades un sistema de cuerdas paralelas, ó bien si ha de ser diámetro, es preciso que dichas cuerdas sean paralelas á la tangente á la curva parabólica en el extremo del eje de las abscisas; esto es, que la tangente sea el de las ordenadas.

La primera ecuacion de condicion

$$\text{sen. } XX' . \text{ sen. } XY' = o,$$

hace ver que siendo el ángulo XY′ el de su tangente, puesto que esta se ha hallado que es una cantidad real, es necesario que nos dé la fórmula

$$\text{(100)} \qquad \text{sen. } XX' = o.$$

Luego para que el nuevo eje de abscisas sea diámetro, es indispensable que forme con el primitivo un ángulo nulo; ó bien que le sea paralelo. De suerte que: *en la parábola toda recta paralela al eje, es un diámetro, y las cuerdas que biseca son paralelas á la tangente tirada á la curva en su extremo.*

95.—Observaciones.—Las propiedades de los diámetros conjugados en la elipse y en la hipérbola, facilitan medios de tirar á estas curvas, tangentes paralelas á una recta dada.

1.ª En la elipse y en la hipérbola, dada la recta á que ha de ser paralela la tangente, no habrá más que tirar una cuerda que lo sea á dicha recta, y el diámetro que pase por su mitad dará en sus extremos los puntos de contacto para tirar por los medios conocidos dos rectas paralelas á la dada. Resultarán por esta construccion dos tangentes.

2.ª En la parábola dada la recta á que ha de ser paralela la tangente, se tirará una cuerda que lo sea á dicha recta, y la paralela al eje que pasa por su mitad, dará en su encuentro con la curva el punto de contacto. Resultará una sola tangente.

3.ª Si en vez de ser las tangentes que se piden, paralelas á una recta conocida, hubieran de formar con ella un ángulo dado, se construiria antes dicho ángulo en un punto cualquiera de la recta, y la nueva línea haria en este caso las veces de la primera para proceder como se ha dicho; es decir, que se habrian de tirar tangentes paralelas á la segunda recta.

TERCERA SECCION.

APLICACION AL ESTUDIO, TRAZADO Y REPLANTEO DE CAMINOS Y CANALES.

CAPÍTULO PRIMERO.

PROBLEMAS DE TOPOGRAFÍA.

96.—Objeto y procedimiento.—La inmediata aplicacion de las fórmulas conforme á lo expuesto en la 1.ª y 2.ª seccion de este Tratado, para dar solucion á diversas cuestiones que se presentan en la práctica, y para determinar la forma, division y demás accidentes de un territorio de más ó ménos extension, es el objeto de los *problemas de topografía.*

En cuanto al procedimiento, siempre es idéntico lo mismo en los trabajos de campo que en los de gabinete; ya se trate del estudio de las líneas férreas y ordinarias, ya de canales y aprovechamientos de aguas, ó bien del saneamiento y desecamiento de terrenos pantanosos: puesto que se dirige á conocer desde luego las distancias entre puntos determinados, la altura de estos entre sí ó con relacion á un plano general de nivel llamado de *comparacion*, la configuracion y accidentes de la superficie de la tierra, con el fin de establecer los trazados que sirvan de base para la redaccion y realizacion de proyectos de las vías de comunicacion y aplicaciones de las aguas á la agricultura y á la industria, segun el objeto ó importancia, medios disponibles, y demás circunstancias; cuyo procedimiento consiste en efectuar las operaciones en el menor tiempo posible y la mayor exactitud que se requiere en los datos y observaciones, á fin de obtener con precision los resultados del cálculo, para la más pronta ejecucion material con todas las garantías de acierto y el buen éxito de la explotacion.

Para las operaciones topográficas se necesita el auxilio de varios instrumentos y otros medios que darán resultados más ó ménos aproximados á la exactitud de la teoría, conforme á la mayor ó menor perfeccion con que aquellos se hayan construido, de la destreza de quien tenga que usarlos y escrupulosidad con que se proceda.

Todo lo cual depende tanto del ingenio y pericia del director ó facultativo encargado del proyecto, y de la acertada division del trabajo entre el personal auxiliar destinado para efectuar las diversas operaciones topográficas y demás, segun indicaremos oportunamente, como de la disposicion y ordenado sistema de aplicacion al estudio, trazado y replanteo de caminos y canales.

En muchas ocasiones acontece durante los trabajos de campo, que ya por carecer cualquier facultativo de toda clase de instrumentos con que poder observar ó graduar los ángulos que las alineaciones rectas forman entre sí en los frecuentes y pronunciados cambios de direccion é inclinacion, ya por encontrarse desprovisto de instrumentos para medir ángulos en casos imprevistos, y ya por haberse inutilizado en un momento desgraciado alguno de los que se usaban, sin tener otros de respeto, lo cual ocurre con demasiada frecuencia en paises muy accidentados, escabrosos ó cubiertos de maleza; por cualquiera de estos accidentes habria que suspender las operaciones en todo ó en parte, segun las circunstancias, ocasionando su paralizacion graves perjuicios, y una pérdida de tiempo considerable. Por lo tanto, es de grande interés y hasta cierto punto necesario utilizar desde luego en su defecto los innumerables recursos que pueden suministrar las tablas trigonométricas complementarias que se aplican directaménte con la mayor exactitud como medio supletorio que ofrece mucha facilidad y economía, estableciendo las alineaciones rectas simplemente con las banderolas y piquetes, midiendo las distancias con la cinta metálica ó cadena, y hallando al mismo tiempo el valor de los ángulos expresados en grados y minutos, etc., solamente con el auxilio de las tablas, como veremos más adelante al tratar de los medios expeditos de verificarlo, para continuar despues las operaciones en grande escala, haciendo uso de los mejores instrumentos y demás medios de accion conforme al procedimiento.

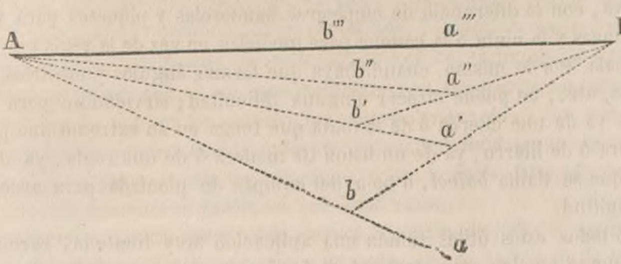
Tal es el objeto que nos proponemos en la presente seccion, empezando por trazar y medir líneas, observando los ángulos que forman y concluyendo con las operaciones de primer órden que para su mayor exactitud, prontitud y facilidad, requieren instrumentos los más perfeccionados, resolviendo préviamente los problemas que se refieren al mejor modo de establecer y medir las líneas horizontales, inclinadas y verticales accesibles é inaccesibles.

97.—Trazar una recta que pase por dos puntos dados sobre el terreno.—Casos que se presentan.—A dos se pueden reducir los casos que se presentan en el trazado de alineaciones rectas. 1.° Cuando los dos puntos dados son al mismo tiempo visiblemente accesibles. 2.° Cuando uno de ellos ó ambos á la vez son inaccesibles, ó invisible el uno desde el otro.

Primer caso.—Para señalar en el terreno la alineacion que marca la traza del plano vertical que pasa por los dos puntos dados visibles entre sí, se colocan en ellos dos jalones ó banderolas, y se fijan en los puntos intermedios otras, alineándolas con aquellas y procurando retirarse un poco de las extremos, para mirar tangencial y alternativamente por uno y otro lado hasta que las banderolas intermedias queden bien cubiertas con las de los puntos dados, y que todas aparezcan en línea recta como si no hubiese mas que una sola, es decir, que todas se hallen en el mismo plano proyectante.

Segundo caso.—Supongamos que se quiere trazar una recta con banderolas en el terreno pasando por los puntos A y B (*fig.* 29), siendo los dos inaccesibles ó invisibles entre sí. Para esto se coloca en *a* una banderola, y á cierta distancia de las otras puestas en los puntos dados desde donde se las pueda ver y alinear aisladamente como en el primer caso: hácia el medio de la distancia entre A y B, y á poco más ó ménos sobre la alineacion de estos dos puntos se pondrá otra banderola en b sobre la direccion Aa; colocado en b el que dirige la operacion, hará trasladar á a' la banderola que estaba situada en a, de suerte que quede en la direccion bB; del mismo modo hará pasar la banderola de b á b' en la direccion $a'A$, y así sucesivamente

Fig. 29.



por tanteos hasta que las banderolas que al principio se habian colocado en a y b ocupen los puntos a''' y b''' que corresponden á la traza, pasando por A y B: determinados aquellos puntos y fijando banderolas en ellos, y otras en los lugares intermedios, siguiendo en ambos sentidos, quedará establecida la línea recta tal cual se deseaba.

Cuando los puntos dados se hallan muy distantes entre sí y las rectas atraviesan países muy accidentados, cuyo trazado exige mayor exactitud, se jalonan las alineaciones por medio del anteojo, del teodolito ó de otro instrumento provisto de hilos micrométricos y se practican las operaciones segun dejamos indicado en el primer caso. Este procedimiento se aplica necesariamente en los terrenos montuosos y cubiertos de maleza, cuando hay que salvar algun talwegs ó los profundos valles y para cruzar divisorias muy pronunciadas.

Si hubiese necesidad de partir, haciendo estacion en cualquiera punto determinado, se elige una altura, aunque sea en la prolongacion de la misma alineacion, en uno ó en ambos sentidos, desde los cuales se vea el mayor número posible de puntos culminantes; se dirige el anteojo á estos puntos por donde debe pasar la línea, y se fijan en ellos banderolas, y así se van enfilando sucesivamente; advirtiendo que cada banderola debe afirmarse en la posicion del plano vertical, de modo que coincida con la interseccion de los hilos de la rectícula, haciendo girar el anteojo sobre su eje horizontal.

Determinados de este modo los puntos principales, no hay más que trasladarse en seguida de un extremo á otro de la alineacion, y en cada una de las alturas hacer colocar las banderolas y los jalones intermediarios que fueren necesarios. Deberá evitarse, siempre que sea posible, el dar principio á la traza definitiva en el medio de las rectas, por ser demasiado pesado el procedimiento y poco exacto el resultado; pero si el terreno fuese muy accidentado, es tal vez el medio más expedito el tanteo arriba indicado.

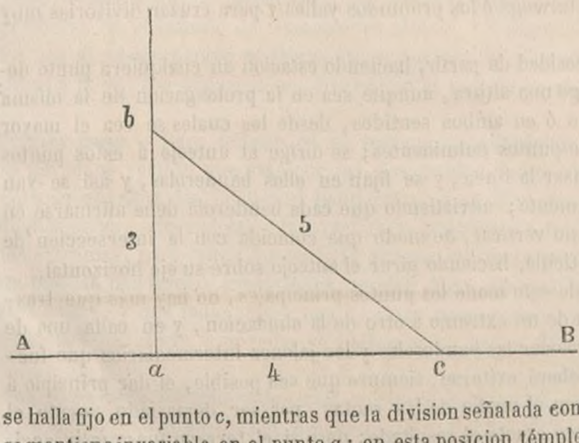
Cuando una línea viene á terminar sobre otra ya establecida, hay que determinar y distinguir perfectamente el punto de interseccion de dos alineaciones rectas, plantando, en los vértices de los ángulos que forman, las mejores banderolas; es decir, las más derechas y de mayor altura, bien aseguradas, de modo que puedan permanecer por mucho tiempo en posicion vertical.

98.—Levantar perpendiculares á una recta dada.—Las operaciones de levantar ó bajar perpendiculares y de trazar paralelas, lo mismo que las del número precedente, son iguales á las que se enseñan en la geometría especulativa, con la diferencia de emplearse banderolas y piquetes para marcar las lineas y la cinta ó la cadena para medirlas, en vez de la regla y el compás ó escala. Por lo mismo, cuando haya que formar ángulos y medirlos, trazar arcos, etc., no puede ofrecer ninguna dificultad; sirviéndose para trazar estos ya de una cuerda ó de la cinta que tenga en su extremo una punta de madera ó de hierro, ya de un liston de madera ó de una regla, ya de un aparato que se llama *baivel*, ó bien del compás de plomada para arcos de poca amplitud.

Como todos estos útiles tienen una aplicacion muy limitada, raro es el caso en que se pueden usar, tratándose de los estudios y trazados de caminos y canales, cuando las curvas son de gran radio y solo para operaciones de poca entidad; por lo mismo no nos ocuparemos de ellos, concretándonos únicamente á los medios de trazar con bastante exactitud perpendiculares de corta longitud, con banderolas ó jalones y la cadena ó una cinta cualquiera, segun se trata en seguida.

Ejemplo.—Supongamos que se quiere levantar en el punto a una perpendicular á la recta AB (*fig.* 30): para esto tiéndase sobre la misma línea desde el punto a hasta c una parte de la cadena ó cinta igual á 4 metros, permaneciendo fijo el extremo de esta en c y lo mismo el punto de division que señala los $4^m,00$ en a: tómense en dicha cinta otras dos porciones que tengan de longitud una de ellas $3^m,00$ y la otra $5^m,00$ que juntamente con los cuatro anteriores, comprenden la division marcada segun el órden de numeracion con el de $12^m,00$; el extremo de esta longitud júntese al mismo de la cinta que

Fig. 30.



se halla fijo en el punto c, mientras que la division señalada con el número $4^m,00$ se mantiene invariable en el punto a: en esta posicion témplese bien la cinta ó cadenilla hasta que llegue al grado de tension ordinario, y cogiéndola por donde tiene señalada la division $7^m,00$ póngase en el punto b correspondiente al terreno una banderola ó piquete, y desde luego habremos formado un triángulo abc; cuyos lados son $ab = 3$, $ac = 4$ y $bc = 5$: elevando al cuadrado los dos miembros de cada una de estas igualdades, tendremos

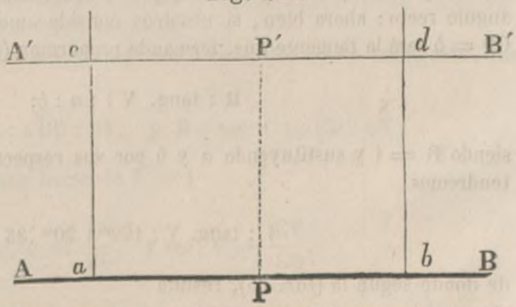
$$\overline{ab}^2 = 3^2,\ \overline{ac}^2 = 4^2,\ \overline{bc}^2 = 5^2:$$

observaremos que $3^2 + 4^2 = 5^2$, ó bien, $9 + 16 = 25$; pero segun el teorema recíproco del enunciado de Pitágoras, si el cuadrado de un lado es igual á la suma de cuadrados de los otros dos, el ángulo opuesto á dicho lado es recto: luego resulta que $\overline{bc}^2$ es la hipotenusa del triángulo abc rectángulo en a; así como $\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2$ que concurren en este punto son perpendiculares entre sí, por ser los catetos del mismo triángulo; y por consiguiente tendremos por construccion que ab prolongada indefinidamente es perpendicular en el punto a, fijado de antemano, sobre la recta dada AB, con la que coincide exactamente el cateto ac por igual razon.

Segun esto podrá servir una cuerda tambien dividida en partes de un modo tal que los valores numéricos de cada una, se hallen en la misma relacion; es decir, con tal de que el cuadrado de una de las partes sea igual á la suma de cuadrados de las otras dos, se podrán levantar cuantas perpendiculares se pidan.

99.—Trazar paralelas á una recta conocida.—Para tirar paralelas á una recta cualquiera AB (*fig.* 31), pasando una de ellas por un punto P′ distante por ejemplo 20m,54 de la recta dada, se levantarán dos perpendiculares ac y bd indefinidas á uno y otro lado del punto P, y á una distancia más ó menos corta segun lo permita el terreno, aplicando el sencillo procedimiento del número anterior; despues se marca la distancia de 20m,54 sobre cada una de ellas y la recta A′B′ trazada por los puntos cd señalados, pasará al mismo tiempo por el punto P′; puesto que distan igualmente de la recta AB.

Fig. 31.



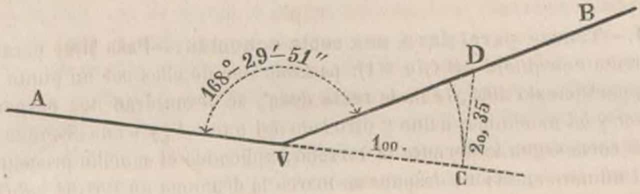
Si hubiese que trazar otra paralela á esta línea por un punto cualquiera, conocida su distancia más corta á la recta AB ó á su paralela A′B′, se tomaria sobre las mismas perpendiculares ú otras levantadas á la vez en los puntos más convenientes, longitudes iguales á la distancia conocida.

El procedimiento de trazar paralelas y levantar perpendiculares es muy sencillo y se emplea con buen éxito cuando se carece de instrumentos y las líneas son de corta longitud; pero no ofrecen bastante precision en las operaciones que requieren para su exactitud buenos instrumentos.

100.—Graduacion de los ángulos sobre el terreno cuando se carece de instrumentos para medirlos.—Los ángulos formados por la interseccion de las alineaciones rectas, se gradúan exactamente con los instrumentos más perfeccionados que se usan para medirlos, de los que nos serviremos más adelante en las operaciones importantes; pero á falta de ellos, en caso de necesidad, se usan á la vez con el poderoso auxilio de las líneas trigonométricas naturales, de los mismos útiles de que hemos hecho mencion para trazar y medir líneas de poca longitud en terreno fácil, ya fuesen perpendiculares ó bien paralelas entre sí; cuyos ángulos se miden muy sencillamente, como veremos en los ejemplos siguientes:

1.° Sea el ángulo formado por dos alineaciones rectas AV y VB (*fig.* 32), cuyo vértice es V; considerando uno de los lados AV, por ejemplo, indefinido en ambos sentidos, tómese sobre su prolongacion á contar desde el vértice una longitud VC determinada por un número redondo de metros, tal como 10, 100, etc.: levántese en la extremidad *c* de esta distancia marcada una perpendicular hasta su encuentro con la otra alineacion VB, mídase esta distancia que supondremos de 20^m,35, y habremos construido.

Fig. 32.



un triángulo VCD rectángulo en C, por lo cual conocemos los dos lados del ángulo recto: ahora bien, si nosotros consideramos VC $= a$ como radio, CD $= b$ será la tangente que, formando proporcion (*núm.* 17), nos dá

$$R : \text{tang. } V : : a : b;$$

siendo R $= 1$ y sustituyendo a y b por sus respectivos valores numéricos tendremos

$$1 : \text{tang. } V : 100^m : 20^m{,}35$$

de donde segun la (*fór.* 35), resulta

$$\text{tang. } V = \frac{20^m{,}35}{100} = 0{,}2035.$$

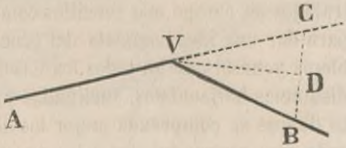
En seguida buscando en las tablas trigonométricas en la columna de las tangentes la que más se aproxima al valor 0,2035, se halla la correspondiente al ángulo 11° 30′ 9″. Pero como el ángulo que se trata de medir es el su–

plemento de CVD, será por lo tanto igual á

$$180° - 11° 30' 9''. = 168° 29' 51''.$$

2.° Si, por ejemplo, sobre uno de los lados del ángulo y la prolongacion del otro á partir del vértice, ó bien sobre cada uno de los lados del ángulo tomamos dos distancias iguales, tendremos en ambos casos dos procedimientos distintos, á saber: sea el ángulo AVB (*fig.* 33) en el que siendo iguales los lados VB y VC, cuyas longitudes se miden con la cadena ó cinta, y uniendo sus extremos con la recta BC, se forma un triángulo isósceles en el que conocemos los tres lados ya determinados por construccion: en este caso el ángulo del vértice V se deduce (*núm.* 16 —3.er *caso*) de la (*fór.* 21), que nos da

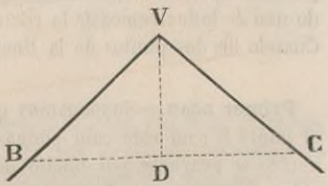
Fig. 33.



$$\text{sen. } \frac{V}{2} = \frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{bc}$$

3.° Tambien se puede obtener el valor del ángulo (*fig.* 34) por otro procedimiento; esto es, tomando CD mitad de BC, puesto que estando marcadas cada una de dichas longitudes BV y BC partiendo del vértice V, se descompone el triángulo BVC en otros dos triángulos iguales VDC = VDB, y ambos rectángulos en D.

Fig. 34.



De suerte que tanto por la (*fig.* 33) como por la (*fig.* 34) en cada uno de estos dos triángulos se conoce la hipotenusa y uno de los catetos; considerando estos iguales al radio, la hipotenusa será la secante, en cuyo caso podremos servirnos de las siguientes proporciones y aplicarlas á cada uno de los triángulos, que nos dará

$$R : \text{sec. } B : : BD : BV, \quad \text{y } R : \text{sec. } C : : CD : CV;$$

de donde se puede deducir haciendo $R = 1$

$$\text{sec. } B = \frac{BV}{BD}, \quad \text{y sec. } C = \frac{CV}{CD}.$$

Ahora buscando en seguida en las tablas los valores de la sec. B y de la sec. C en las respectivas casillas, se hallarán enfrente de dichos valores numéricos y sobre la misma horizontal los ángulos á que corresponden B y C. En la (*fig.* 33) el ángulo que se trataba de medir ó graduar será igual á la suma de los ángulos B y C; recordando que el ángulo formado por un lado de un triángulo y la prolongacion de otro, es igual á la suma de los ángulos no adyacentes á él: mientras que en la (*fig.* 34) el ángulo BVC es el suplemento; es decir, que BVC = 180° — (B + C).

Por último, todavía se puede hallar el valor DV por medio del cuadrado de la hipotenusa, que se determina en seguida aplicando las fórmulas de los triángulos rectángulos expuestas en el (*núm* 17).

101.—Medicion de líneas accesibles é inaccesibles, horizontales, inclinadas y verticales.—Despues de lo que se ha dicho al hablar de la aplicacion de las tablas y de los útiles que, en defecto de otros instrumentos, se emplean en casos de necesidad sobre el terreno, vamos ahora á tratar de las operaciones que deben verificarse con el teodolito por ser el instrumento angular más perfeccionado y usual por sus buenas condiciones tanto para los trabajos de campo más sencillos como para los de mayor importancia. Aunque para dar una idea completa del procedimiento hubiera sido suficiente el problema general que en todos los casos abraza el medio de trazar líneas, hallar distancias horizontales, inclinadas y verticales; esto no obstante con el objeto de que se comprenda mejor los diversos giros que segun los accidentes de cada caso convendrá dar á las cuestiones para resolverlas más fácil y sencillamente, presentaremos tres problemas principales para que sirvan de ejemplos en casos análogos, que se ponen á continuacion por el órden siguiente:

102 —Problema I.—Medir una distancia horizontal —Casos que pueden ocurrir.—En este problema hay que considerar dos casos: 1.° Cuando uno de los extremos de la recta dada es accesible é inaccesible el otro. 2.° Cuando los dos puntos de la línea son inaccesibles.

Primer caso.—Supongamos que la distancia AB (*fig.* 35) es accesible en el punto B : en este caso póngase el teodolito en estacion de modo que su centro se proyecte por medio del perpendículo en el mismo punto B dado sobre el terreno; es decir, que ambos puntos estén en una misma vertical; puesto el limbo horizontal y conicidiendo la línea de fe con la del platillo superior, diríjase el anteojo al punto A inaccesible; fíjese el limbo inferior y haciendo girar el superior hácia un punto b, desde el que se puedan ver los dos puntos dados A y B y de modo que forme con ellos un ángulo mayor de 30°; mídase el ángulo ABb, y trasládese el instrumento al punto b, estando en estacion como anteriormente, mídase el ángulo AbB y tambien la recta Bb; de esta suerte tendremos formado un triángulo ABb en el que conocemos un lado y los dos ángulos adyacentes, como tambien el tercero por ser suplemento de los otros dos.

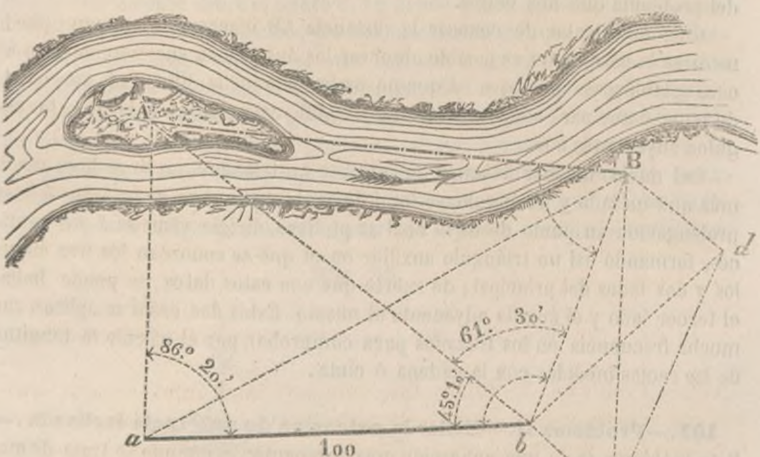
Desde luego se tiene A = 180° — (B + b). El lado A B se hallará recordando (*núm.* 16 — *caso* 1.°) que en todo triángulo los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos: de donde resulta la proporcion

$$\text{sen. A} : \text{sen. } b :: \text{B } b : \text{A B} = \frac{\text{B } b \times \text{sen. } b}{\text{sen. A}}$$

Sean por ejemplo el áng. A = 42° 50′ y el áng. b = 61° 30′; siendo la recta B $b = 100^m,00$: sustituyendo los respectivos valores numéricos en la expresion anterior tendremos la distancia horizontal entre A y B, con el auxilio de las tablas, que nos dan

$$A\,B = \frac{100 \times 0{,}8788171}{0{,}6798681} = 129{,}261$$

Fig. 35.



Segundo caso. — Si la distancia de la línea AB fuese del todo inaccesible, establézcase una base *ab* de un modo tal, que desde sus extremos se descubran los puntos A y B inaccesibles y se pueda obtener con la mayor exactitud la longitud en proyeccion horizontal; obsérvense los ángulos que con ella forman en el punto *a* los A y B; practíquese una operacion análoga en el otro punto *b* de la base, dirigiendo visuales á los mismos extremos de la línea dada, y se tendrán los datos suficientes para resolver el triángulo A*ba*; y por lo tanto conocer el lado A*b*: del mismo modo se podria resolver el triángulo A*b*B para conocer el otro lado B*b*: pero como estos lados y el ángulo en B ya nos son conocidos por el caso anterior, é igualmente el ángulo *b* comprendido, se podrá determinar la distancia entre A y B buscada, conforme al cálculo que hemos hecho arriba. Mas cuando no se tienen estos últimos datos, despues de resolver aquellos triángulos segun el procedimiento anterior y conocido el ángulo *b* que comprenden los dos lados A*b* y B*b*, se hallará fácilmente el tercer lado AB y los otros dos ángulos A y B, formados en estos puntos; de donde resulta que la suma de dichos ángulos $A + B = 180° - b$.

De consiguiente, aplicando la (*fór.* 18) del (*núm.* 16) tendremos

$$\frac{Ab + bB}{Ab - bB} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\left(A + B\right)}{\text{tang. } \frac{1}{2}\left(A - B\right)}.$$

El lado AB se hubiera hallado ahora haciendo uso de la (*fór*. 16) de que se trata en el número citado, y seria la misma proporcion que nos da

$$AB = \frac{Bb \times \text{sen. } b}{\text{sen. } A};$$

cuya distancia resultaria igual á la que hemos determinado en el primer caso del problema que nos ocupa.

Cuando al tratar de conocer la distancia AB inaccesible, aunque pueda medirse la base *ab* no es posible observar los ángulos en sus extremos, en tal caso establézcase otra base *cd* que no presente aquella dificultad, con objeto de tener datos para resolver el triángulo A*b*B, conocido un lado B*b* y los ángulos adyacentes á él.

Del mismo modo si al tiempo de resolver un triángulo no se pudiese medir más que un lado y un ángulo, se tomaria sobre cualquiera de los lados ó en su prolongacion un punto desde el cual se pudiere dirigir visuales á dos vértices, formando así un triángulo auxiliar en el que se conozcan los tres ángulos y dos lados del principal; de suerte que con estos datos, se puede hallar el tercer lado y el ángulo adyacente al mismo. Estos dos casos se aplican con mucha frecuencia en los trazados para comprobar por el cálculo la longitud de las rectas medidas con la cadena ó cinta.

103.—Problema II.—Hallar la extension de una recta inclinada.— Este problema es de una aplicacion muy frecuente: ya cuando se trata de medir una série de líneas más ó menos inclinadas y del tanteo de pendientes que tiene por objeto franquear alguna divisoria ó desarrollar cualquier trazado, conocido el desnivel entre aquella y los talwegs, para descender al fondo de los valles y recíprocamente, y ya cuando se quiere determinar la máxima pendiente y extension de la falda de una montaña en línea absoluta desde la cúspide ó cima hasta el pie ó lado horizontal de la base sobre que insiste. Como bajo este último concepto tendremos ocasion de tratar más adelante al mismo tiempo que de las alturas inaccesibles por su pié, solo nos ocuparemos ahora especialmente del modo de hallar cualquier distancia de una recta inclinada, así como tambien su proyeccion horizontal ó vertical, segun mejor convenga en cada caso.

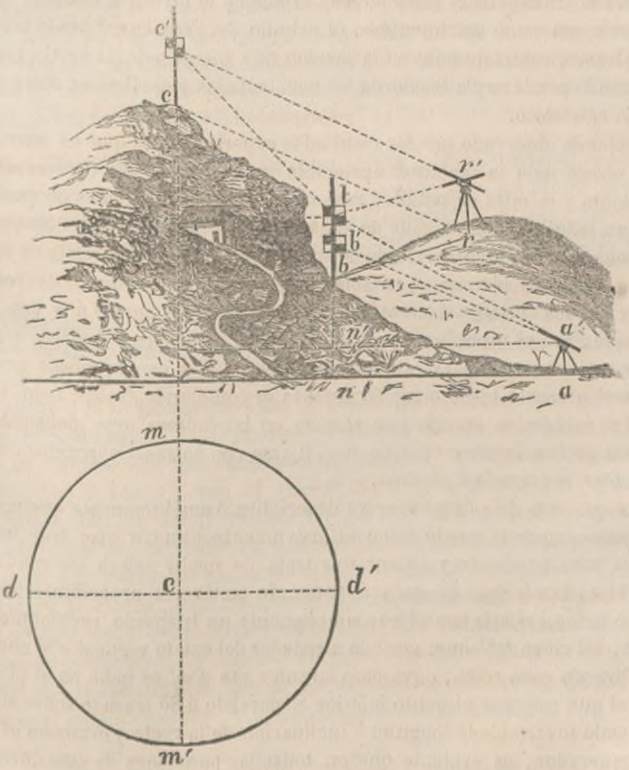
Además del sencillo problema en que la recta inclinada que se trata de medir es accesible, pueden ocurrir otros dos casos: 1.° Cuando uno de los extremos de la línea inclicada es accesible. 2.° Cuando ambos son inaccesibles.

Primer caso.—Sea la recta inclinada *a'b'* paralela á la que pasa por los puntos *a* y *b* trazada sobre el terreno (*fig*. 36), accesible en el extremo inferior *a*: en este sitio, póngase el teodolito en estacion y diríjase al punto *b* una visual donde se habrá colocado una mira de tablilla, despues de haber fijado en esta la altura del instrumento sobre el plano horizontal *a n*, tangente al punto *a*, contada desde el plano de nivel *a' n'* que pasa por el eje óptico del anteojo, á fin de evitar la correccion de la altura *a a'* del instrumento; pues dá los mismos resultados la línea *a'b'* siendo paralela á la *ab* que une los puntos *a* y *b* dados sobre el terreno: obsérvese el ángulo de elevacion

$b'a'n'$ con el que se resolverá el triángulo rectángulo *abn* formado por la línea inclinada *ab*, que algunas veces se puede medir en sentido de la pendiente natural del terreno, la vertical *bn* y la horizontal *an*, cuya longitud tambien se mide aplicando lo dicho en el número precedente y las (*fórs.* 36, 38 y 40) de las que nos hemos ocupado (*núm.* 17.)

Segundo caso.—Cuando el terreno es muy accidentado y no es posible situar el instrumento sobre el punto *b*, en donde estaba colocada la mira desde el que ya varía la inclinacion, por ser inaccesible á causa de los obstáculos que impiden dirigir visuales al otro extremo *c* de la línea dada; en este caso si hubiese de continuar la operacion para hallar la pendiente y longitud de la recta *bc*, se colocará el teodolito en sitio despejado, á cierta distancia fuera de la línea inclinada en un punto *r*, tal que puesto el instrumento en estacion, el eje óptico del telescopio coincidiendo con el plano de nivel, se encuentre más elevado que el plano paralelo que pasa por *b*, y al mismo tiempo que se pueda dirigir una visual al extremo superior *c*, estando equidistan-

Fig. 36.



te de este el centro de estacion *r* y el otro extremo inferior *b* : permaneciendo la mira en posicion vertical sobre este punto, hágase subir ó bajar la tablilla hasta que su centro coincida con la visual, la cual determina la altura del plano de nivel sobre el otro paralelo que pasa por el punto b en que está colocado el pie de la mira; despues de fijar la altura bt, trasládese al extremo c y la visual dirigida á la misma tablilla estará en el plano paralelo á la inclinacion de la recta que une los puntos b y c; porque la altura de mira que se habia fijado, es la misma respecto al plano inclinado, con el que coincide bc y la visual $b'c'$ que le es paralela: obsérvese el ángulo de elevacion $c'r't = crb$, y la resolucion del triángulo rectángulo bcS que se efectúa del mismo modo que se ha indicado en el primer caso, dará la distancia de la línea bc inclinada ó inaccesible y sus dos proyecciones horizontal y vertical.

Este procedimiento que por primera vez nos hemos visto en la extrema necesidad de estudiar en los trabajos de campo para salvar los grandes obstáculos que con frecuencia se encontraban é impedian la continuacion del tanteo de pendientes que, por la fragosidad del terreno era materialmente imposible poder vencerlos siguiendo el sistema ordinario, hemos tenido que valernos de este recurso para desarrollar el trazado de la carretera de Avila á Talavera en la bajada del puerto del Pico á las Cuevas y á Mombeltran. Tambien lo hemos aplicado con buen éxito en la misma Sierra del Guadarrama para el trazado de la línea férrea, cruzando la divisoria desde el Escorial á Segovia; así como igualmente en el estudio del ferro-carril desde las Portillas á Orense, especialmente en la seccion que comprende las vertientes al Sil y siguiendo por la orilla izquierda las accidentadas y escabrosas márgenes de este rio caudaloso.

Habiendo observado por los resultados experimentales que es muy expedito y ofrece toda la exactitud apetecible en esta clase de operaciones con el teodolito y la mira de tablilla, aun en los casos más difíciles en que pueda verse un facultativo encargado de ellas, que de pronto se encúentre *encerrado ó colgado*, como vulgarmente se dice, por no encontrar salida en algunos tramos en que el terreno es notablemente quebrado, cubierto de rocas en masa y bancos cortados casi verticalmente en sentido opuesto á la pendiente, tanto que, por el procedimiento descrito en el primer caso, seria, sino imposible, interminable para ejecutar las operaciones con la misma precision que en el presente caso, como fácilmente se comprende, sobre todo tratándose del estudio de grande importancia en las laderas muy inclinadas para la investigacion del trayecto que debe fijarse con bastante aproximacion antes de adoptar el trazado definitivo.

Aunque se podría demostrar ya descriptiva ó analíticamente que en todos los casos siempre se puede situar el instrumento á uno ú otro lado fuera de la línea cuya pendiente y distancia se trata de medir segun las condiciones impuestas, nos hemos limitado á poner de relieve el procedimiento; pues de otro modo bastaria considerar simplemente un triángulo rectángulo cualquiera, tal como tcS′ que, girando alrededor del cateto vertical c'S′ como eje, engendra un cono recto, cuya base circular $dm\ d'm'$ se halla en el plano horizontal que pasa por el punto inferior S′ paralelo á Sb trazado sobre el terreno: siendo invariable la longitud é inclinacion de la recta y lo mismo el triángulo generador, es evidente que en todas las posiciones de este durante su movimiento de rotacion, los ángulos formados por la hipotenusa y el cateto horizontal, serán iguales; y por consiguiente los ángulos de elevacion y la proyeccion de dos ó más oblícuas tiradas á un mismo punto c', que se apartan igualmente del pié S' de la vertical.

Ahora bien, si nos fijamos en la proyeccion horizontal del cono y en la traza del plano sobre que insiste, se ve desde luego que no hay inconveniente en poner el instrumento en estacion fuera de la línea inclinada á uno ú otro lado de ella, por ejemplo, en vez de situarle en r se pudo haber colocado en un punto cualquiera de la base $dm\ d'm'$ del cono; fijando la altura del plano de nivel sobre el que pasa por el extremo inferior b, en donde primero se habia colocado la mira para marcar la altura $b't$ de la tablilla antes de trasportarla al extremo superior c: de todo lo cual resulta que al dirigir las respectivas visuales, sus proyecciones horizontales son iguales entre sí por corresponder á radios de un mismo círculo, é igualmente cada uno de los rayos visuales, comparados con la inclinacion de la recta y su proyeccion $bS = o'd'$ por ser oblícuas equidistantes ó líneas de máxima pendiente.

Por último, cuando se trata de una pronunciada hondonada ó de un profundo barranco, son aplicables los dos casos, pero en sentido inverso, es decir, que así como ántes hemos observado el ángulo de elevacion ABC (*figura* 5), (a) que es el opuesto al cateto vertical AC; ahora se mide el de inclinacion ACB opuesto al cateto horizontal AB del triángulo rectángulo ABC que resulta formado; cuya hipotenusa es la línea inclinada; y en cuanto á su resolucion se verifica del mismo modo como en los dos casos de que nos hemos ocupado, sirviéndonos de los senos ó de las tangentes cuyas líneas se indican en la figura, y de los valores trigonométricos que nos dan inmediata y exactamente las tablas trigonométricas.

104.— Problema III. — Medir una altura ó línea vertical.—En la medicion de líneas verticales ó alturas, lo mismo que en los problemas que se presentan para las distancias horizontales é inclinadas, ya sean accesibles en todo ó en parte y ya completamente inaccesibles, pueden reducirse tambien á dos casos:

Primer caso.—Sea la altura AC (*fig.* 37) de un obelisco cuya base es accesible hasta su pie en plano horizontal. Colóquese el instrumento en un punto B, tal que la distancia AB parezca á simple vista próximamente igual á la altura que se busca: nivélese el teodolito, y diríjase por el anteojo la visual bC á la cúspide C. Obsérvese el ángulo de elevacion con la línea de nivel ab. Mídase con toda exactitud la base BB', añadiéndola el semi-lado cd del cubo ó plinto sobre el que se ha erigido el obelisco, y nos dará la distancia AB; de donde resulta formado un triángulo rectángulo con la línea de nivel ab, la visual bC y la vertical aC; hallada esta y sumada con Aa, igual á la altura del plano de nivel del instrumento sobre el punto B, tendremos la altura total del obelisco ú objeto de que se trata. De modo que hay que resolver un triángulo rectángulo, conocido un ángulo agudo y el cateto adyacente, lo cual es muy sencillo recordando (*núm.* 17) que el radio es á la tangente de uno de los ángulos agudos, como el cateto adyacente es al cateto expuesto, y formando proporcion nos da

$$R : \text{tang. } b : : ab : aC;$$

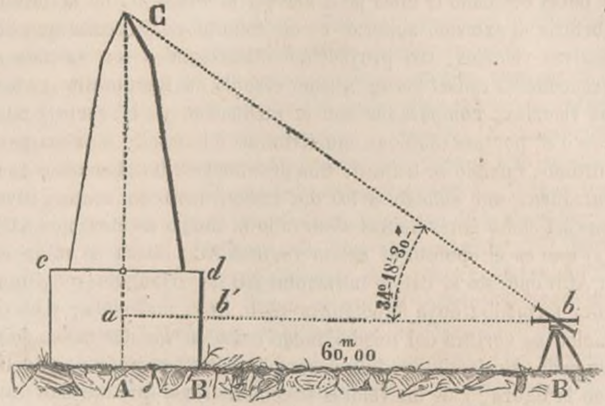
(a) Véase lo que hemos expuesto (*núm.* 17), respecto de los triángulos rectángulos.

siendo $ab = 60$ metros y el ángulo $b = 34^\circ\ 18'\ 30''$: de donde resulta haciendo uso de las tablas trigonométricas en las que $R = 1$, tendremos

$$aC = ab \times \text{tang.}\, b = 60^m \times \text{tang.}\ 34^\circ 18' 30'' = 60^m \times 0{,}682367 = 40^m{,}94.$$

Añadiendo $1^m{,}10$ que tiene de altura el plano de nivel del instrumento sobre el punto B marcado en el terreno, resulta que la altura total AC del obelisco sobre la base de operaciones AB, es de $42^m{,}04$.

Fig. 37.

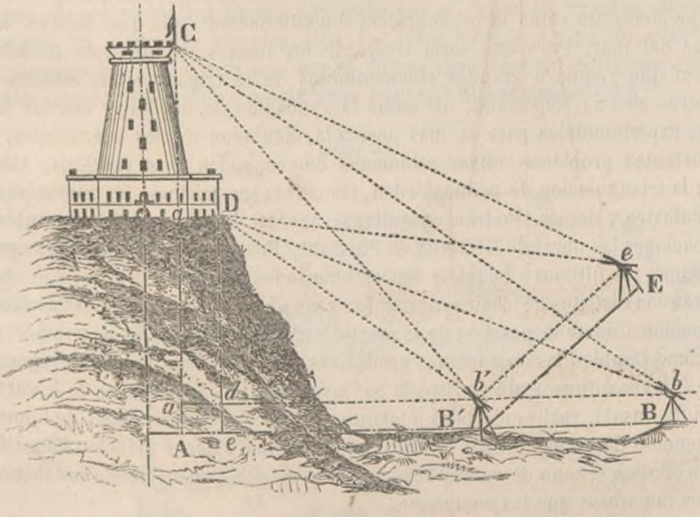


Segundo caso.—Cuando la altura es completamente inaccesible, como por ejemplo, un castillo situado sobre una elevada colina (*fig.* 38); elíjase una base ya sea enfilando con el punto culminante, ya en una direccion cualquiera, y si el terreno no es horizontal, hállese la diferencia entre las alturas de sus extremos. Colocado el teodolito como anteriormente en el punto B, obsérvense los ángulos abC y dbD. Háganse iguales operaciones en B' y colóquese el instrumento de modo que la visual ó el eje óptico del anteojo se halle en el mismo plano vertical de la estacion anterior, y obsérvense los ángulos $db'D$ y $ab'C$; tómese la altura del instrumento á contar desde su plano de nivel hasta el de la base de operaciones, cuya altura será $Bb = Aa$. Mídase con toda precision la base BB'; y como además se conocen los ángulos $Db'b$ y $Cb'b$, se tendrán en el triángulo bDb' los datos necesarios para calcular Db', y en él bCb' la Cb'.

Conocidas ya Db' y Cb' que son las hipotenusas de los respectivos triángulos rectángulos Ddb' y Cab', se averiguarán las alturas $Dd = a'a$ y aC, tanto de la colina como del castillo sobre el plano de nivel del instrumento, á las cuales se añadirá la altura $Aa = Bb$ del plano del nivel sobre la base de operaciones. De suerte que no solo tenemos las alturas totales del castillo y de la colina calculadas desde la base general, si que tambien la altura de aquel contada desde la cima de dicha colina restando la segunda de la primera, es decir, que $aC = AC - Aa$.

Tambien puede hacerse eligiendo una base de operaciones tal como B'E horizontal ó inclinada, anotando la diferencia entre los planos de nivel de las estaciones para obtener la total altura de los puntos máximos sobre los mínimos del terreno, con relacion á los planos de nivel tangentes á dichos puntos, ya se trate de una construccion ó edificio ú objeto material, cualquiera que sea su forma, ó bien de una colina, montaña, etc.; cuya base de operaciones B'E no estando en el mismo plano vertical de las visuales dirigidas al punto culminante y á su pie desde uno de sus extremos, forma con las visuales tiradas á los mismos puntos observados desde la otra, una pirámide triangular en la que dos de sus caras son verticales y la arista que resulta de la interseccion de las mismas coincide exactamente con la altura buscada de la cúspide á la base sobre que insiste.

Fig. 38.



105.—Triangulacion.—Cuando se trata de los distritos geodésicos ó de levantar el plano topográfico-catastral de un pais ó territorio, la zona ó faja dentro de la cual se quiere establecer, por ejemplo, cualquier trazado de caminos y canales, ó efectuar el desecamiento de lagunas y el saneamiento de terrenos pantanosos, hay que situar los pueblos y caseríos más ó ménos diseminados y demás objetos notables, tal cual se hallan unos respecto de otros.

Es necesario saber elegír con acierto los parajes elevados, ya sean naturales como las mesetas que presentan las cumbres de algunas montañas y la cima de los ramales ó de las colinas, etc., y ya artificiales, como torres, castillos, y otras construcciones desde donde se descubran muchos puntos de los que se desean situar en el plano: al mismo tiempo se trazarán en un croquis las líneas que sigan próximamente la direccion de los citados puntos ú objetos, y se escribirá á su lado los nombres de ellos; con este bosquejo se tendrá una idea clara y distinta de las operaciones que desde luego habrá que ejecutar sobre el terreno más en detall con toda precision.

Despues de estos preliminares se procederá á la eleccion del sitio más llano y horizontal posible en paraje elevado, para verificar la medida de una línea de longitud proporcionada á la extension y configuracion del terreno y clase de triángulos de la *red* con que haya de cubrirse la superficie; cuya línea se llama tambien *base de operaciones ó de partida*; porque, en efecto, desde ella parten todas las demás. Conviene procurar que sus extremos sean puntos visibles é invariables, como casas, torres ú otros objetos naturales análogos que presenten aristas; pues de lo contrario seria preciso usar de señales que personas mal intencionadas, los animales, el viento fuerte, las corrientes de aguas extraordinarias, torrentadas ú otras causas puedan arrancar ó derribar.

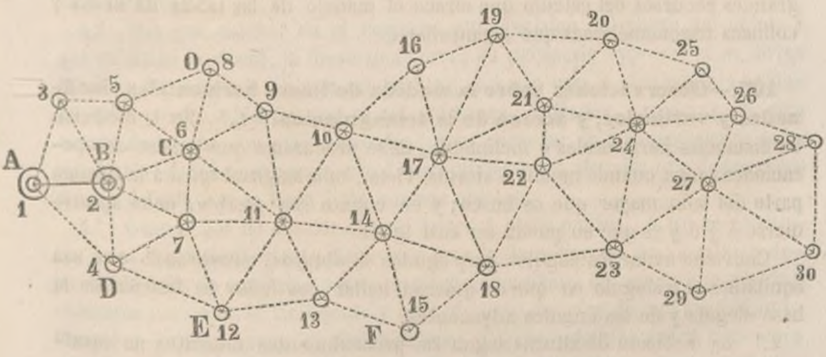
Cuando los lados de los triángulos de la red que deberá trazarse resulten, segun el terreno despejado en que se opera, de una grande extension, habrá que tener en cuenta la curvatura terrestre, y calcular los puntos en que las verticales bajadas desde sus vértices, encuentren la superficie de la tierra que se considera como la prolongacion ó continuacion de la que forman las aguas del mar. Pero esto seria traspasar los límites del presente tratado, puesto que requiere grandes conocimientos de la trigonometría esférica y de otras ciencias especiales, así como la aplicacion de teorías, y utilizar los datos experimentales para la más acertada ejecucion de las operaciones, é importantes problemas cuyas soluciones corresponden á la Geodésia, tales son: la triangulacion de primer órden, las cartas geográficas, las operaciones del catastro y demás. Podrán consultarse acerca de tan variadas y notables aplicaciones las obras de Geodesia de Puissant, Francoeur y otras muchas que contienen los últimos adelantos; especialmente los grandes trabajos que encierran los distritos geodésico-catastrales y las observaciones para determinar astronómicamente la posicion de la mayor parte de las capitales de provincia, así como tambien las operaciones geodésicas y topográficas que se han ejecutado á la vez últimamente en España por las comisiones encargadas de la carta de la Península, realizando tales adelantos que no han podido menos de llamar la atencion de los sabios más eminentes de Europa y hacer mencion honorífica de ellos en el seno de varias Academias de ciencias, mereciendo los elogios de los miembros que las componen.

Esto no obstante, creemos que la triangulacion de segundo órden hecha sin tantos requisitos y sin necesidad de usar el círculo repetidor, será muy útil en muchos casos sin conducir á errores de trascendencia, manejando bien los mejores teodolitos cuando se trata de levantar el plano de una comarca ó de una faja de terreno que no exceda de 4 kilómetros de ancho para el proyecto de las grandes vias de comunicacion en las regiones que habrán de atravesar en su largo trayecto, como tambien las cuencas y valles que se quieran desecar ó regar por medio de canales; fijando desde las cumbres el contorno y las vertientes á contar desde las divisorias de las montañas ó ramales que las rodean, para determinar el orígen y curso de las grandes corrientes naturales, el de los afluentes y puntos de derivacion de las artificiales, pueblos ú objetos notables y demás datos necesarios. En tal concepto indicaremos ligeramente el procedimiento, presentando con el mismo objeto el siguiente problema general.

106. —Dada la base de los puntos de partida, situar los pueblos y lugares notables de una ó más regiones.—Sean los pueblos ú objetos notables A, B, C, D, E, etc., que se designan por números y por sus iniciales. Medida con toda exactitud la base AB de los puntos de partida (*fig.* 39), que supondremos elegida de tal modo que sus extremos se hayan situado en las entradas ó lugares culminantes de los pueblos ú otros objetos invariables, que representan las letras A y B.

Puesto el teodolito en estacion en el extremo A de la base y bien nivelado, diríjase una visual por el anteojo móvil al extremo B, fijando en cualquier punto á larga distancia la interseccion de los hilos del telescopio llamado de *prueba*, que debe tener el teodolito; cuyo objeto es indicar si el instrumento durante el curso de las observaciones de los puntos 2, 3, 4, etc. ha variado de la línea de referencia: hágase girar el limbo para dirigir visuales á los demás puntos visibles y repetir los ángulos, girando siempre de izquierda á derecha ó vice-versa, pero en el mismo sentido ambas observaciones. Se anotan en una libreta ó registro por su órden los ángulos observados que las diferentes visuales dirigidas á los puntos arriba mencionados forman con la base, dando una vuelta entera alrededor del horizonte con el limbo superior y telescopio móvil hasta tomar el último ángulo 3AD.

Fig. 39.



En seguida se traslada el teodolito al extremo de la base correspondiente á B, y en este punto se ejecutan iguales operaciones observando los ángulos como anteriormente, y dirigiendo visuales no solo á los mismos puntos que puedan verse, sino tambien á otros que de nuevo se descubran y se quieran situar, apuntando siempre en la libreta de campo ó registro los ángulos correspondientes. Despues de algunas observaciones con el telescopio superior ó cuando parezca conveniente, se ve si el eje del anteojo inferior, intercepta exactamente el punto en que se habia fijado la visual, y no siendo así hay que repetir las operaciones anteriores y reponer el instrumento y el telescopio de prueba en su debido estado por medio de los tornillos de presion y el de coincidencia.

Para continuar las operaciones se toma uno de los lados de los triángulos ya calculados para nueva base, tal como BC: ejecutando en sus extremos lo mismo que en la primera base AB con relacion á los puntos que la rodean, y así sucesivamente si hubiese que extender más el plano en cualquier sentido, midiendo nuevas bases, en cuyos extremos se procederá segun se ha dicho respecto de las anteriores. De este modo quedará formada una red de triángulos para enlazar los puntos principales de cada comarca. Siguiendo el mismo procedimiento se pueden determinar otros intermedios y los que antes no hubiese sido posible descubrir, formando una segunda red de triángulos más pequeños; y en fin, determinando otros accidentes ú objetos en detall, comprendidos entre las mallas de la *red*, con lo cual quedará levantado el plano geométrico del terreno.

Concluidas todas las operaciones indicadas, y resolviendo los triángulos que resulten por el órden de las apuntaciones, se hallarán las distancias horizontales de unos puntos á otros; cuyas operaciones de cálculo se simplifican extraordinariamente con el uso de las tablas trigonométricas naturales, en vez de los logaritmos artificiales.

Muchas veces sucederá que al tiempo de calcular algunos triángulos parece á primera vista que no hay datos suficientes para su resolucion, porque en la série de operaciones de campo se han olvidado de medir alguno ó algunos ángulos, ó bien por la imposibilidad de poder observarlos; esto no obstante, no dejan de encontrarse medios fáciles de resolverlos en el gabinete, ya por los procedimientos gráficos solamente, ó bien combinados con los grandes recursos del cálculo que ofrece el manejo de las tablas de líneas y colíneas trigonométricas que acompañan.

107.—Observaciones sobre la medida de líneas horizontales, inclinadas y verticales, y acerca de la triangulacion. 1.ª En la medicion de distancias horizontales ó inclinadas, debe procurarse que la base de operaciones tenga cuando menos á simple vista, una longitud igual á la décima parte del lado mayor que se busca; y en cuanto sea posible, debe aproximarse á $\frac{1}{4}$ ó $\frac{1}{2}$ ya que no pueda ser casi igual.

Conviene evitar los ángulos muy agudos ú obtusos, procurando que sea equilátero el triángulo en que se quieran hallar dos lados en funcion de la base elegida y de los ángulos adyacentes.

2.ª La medicion de alturas segun los procedimientos descritos no resultará exacta, porque si es demasiado agudo el ángulo de elevacion, el más lijero error en su graduacion será bastante notable con relacion á la altura buscada. Y es muy fácil de incurrir en error en la apreciacion de la fraccion de segundos si el teodolito es demasiado pequeño, ya por la diferencia entre el nivel verdadero y el aparente, é inconstancia de las refracciones de la luz, ya por la oscilacion que, en ciertas horas del dia en cada localidad, segun las estaciones del año, ofrecen los objetos en el anteojo á causa de los vapores terrestres segun el clima, ya en fin, porque el viento ó la atraccion de las montañas, hagan desviar de la posicion vertical la plomada al tiempo de fijar el centro de estacion.

Cuando las alturas que se miden están á una distancia considerable de la base ó puntos de estacion, es necesario hacer las dos correcciones arriba indicadas, para obtener la verdadera altura. Mas como nos hemos ocupado de ellas en la segunda parte de nuestra obra, haciendo notar, al tratar de la nivelacion, que la refraccion es muy variable cerca de la superficie de la tierra, y sumamente inconstante en un mismo dia y lugar determinado, para llevar en cuenta lo que debia rebajarse por esta causa de las diferencias de nivel aparente al verdadero, segun la tabla calculada al efecto, no nos detendremos en esto, tanto más, cuanto que conforme á las condiciones arriba impuestas acerca de la proporcion que debe guardar la base con las alturas y los ángulos de elevacion ó de presion medidos con el teodolito, serán inapreciables aquellos errores en tan corta distancia, puesto que solo influyen en las grandes nivelaciones.

La altura que no presenta un punto culminante ó una arista, no puede medirse con exactitud, porque no hay medios de comprobar que el eje óptico del telescopio y la direccion de la visual, se hallan en el plano vertical que pasa por la altura y el punto de estacion.

3.ª En cuanto á la triangulacion, tenemos que hacer varias observaciones además de lo que se ha dicho. Antes de empezar las operaciones indicadas en el número precedente, hay que rectificar el instrumento para conocer su error central de division y de colimacion, y en cada punto de estacion de la base despues de observar todos los ángulos haciendo girar el limbo superior hasta hacer una revolucion completa, es decir, todos los ángulos formados alrededor del centro de estacion de los diferentes puntos hasta volver al de partida; cuya suma total debe ser igual á 360° si las observaciones se han hecho con toda exactitud.

4.ª Hay que marcar en el registro con precision, el punto del objeto á que se dirige la visual; si fuese una torre, es necesario expresar si se dirige la visual á la veleta ó á cierta arista, etc.; si á una casa ú otro edificio análogo, será preciso advertir que es tal chimenea, mirador, palomar, ú otro cuerpo de la casa que más sobresalga, para recordar en las operaciones subsiguientes, á donde seguramente deben dirigirse las visuales que desde otros puntos de estacion se tiren á los mismos objetos.

5.ª Cuando por no ofrecer el país torres ú otros puntos, ó no se presentan estos convenientemente dispuestos para la direccion de las visuales y dejar salida á fin de continuar las operaciones sucesivas, de modo que puedan enlazarse unas á otras fácilmente y bajo el punto de mira de que los triángulos que se formen tengan las circunstancias correspondientes, será necesario establecer señales. Estas pueden consistir en peñascos que se presentan aislados y terminan en agujas, árboles de tronco bien recto, ó en ramas que se unen por sus puntas despues de clavadas en tierra por la parte más gruesa, de suerte que forman una choza cónica. Tambien se construyen castillos de madera y pirámides de piedra, ó se afirman verticalmente en el suelo postes de madera que á veces convendrá pintarlos á trozos de distintos colores para distinguirlos mejor. Las hogueras pueden emplearse útilmente, y de noche las lámparas de reverbero, servirán lo mismo, especialmente si el estado atmosférico no hace oscilar el sitio aparente de la luz. De todos modos, deben preferirse las observaciones hechas durante el dia.

6.ª Las atalayas de forma piramidal son preferibles para las señales; porque no se padece error en la direccion de las visuales cuando se puede descubrir con claridad el vértice. Si no se distingue bien, será más conveniente que las señales tengan la forma de un paralelepípedo de base cuadrada.

7.ª Segun hemos dicho en las primeras observaciones, la exactitud de las operaciones exige como condicion precisa que la magnitud de la base se aproxime ó sea igual si fuese posible al lado que se busca, é igualmente los ángulos en sus dos extremos: de suerte que, la circunstancia más favorable de un triángulo para su fácil y exacta resolucion, consiste en que sea equilátero; porque tiene la gran ventaja de que tambien los ángulos se miden con más precision, y los pequeños errores de las observaciones influyen mucho ménos en la longitud de los lados.

8.ª Los triángulos deben tambien ser proporcionados á la extension de la comarca cuyo plano se levanta. Aunque no es muy fácil encontrar señales en el terreno que ofrezcan la ventaja de que resulten triángulos equiláteros conforme á las condiciones precitadas, sin embargo, tampoco será necesario cuando el teodolito sea tal, que por su tamaño, mecanismo y precision, se pueda usar en lugar del círculo repetidor, con el que se aprecian los ángulos con la diferencia en ménos de 3 segundos; en cuyo caso el lado mayor del triángulo puede llegar á tener de 40 á 50 kilómetros, sin que el error influya en las unidades de metro, siempre que el ángulo ó arco de ménos amplitud observado sea mayor de 35° que es el límite inferior adoptado en las operaciones geodésicas. Pero siendo muchas veces imposible llenar las condiciones de que los lados resulten casi de la misma longitud que la base medida de antemano, é iguales los ángulos observados en ambos extremos de ella, hay que contentarse con no admitir ningun ángulo menor de 30° para satisfacer á las dos condiciones en cuanto se pueda: en tal concepto se dice que *el triángulo está bien formado.*

9.ª Conviene medir otras bases para calcular de nuevo las que les preceden y las distancias ya determinadas despues de varias operaciones; y si se hallan iguales, se tendrá una comprobacion de los resultados obtenidos, ó se conocerán los errores cometidos, dejándolos aislados para que no se vayan acumulando en los cálculos sucesivos de los triángulos que componen la red general.

10. En cada punto de estacion será muy conveniente calcular cuántos triángulos se puedan formar antes de pasar más adelante; porque si se deja este trabajo para despues, podrá suceder que luego en el gabinete se encuentren errores que obliguen á volver á un sitio del que ya se estaba demasiado distante, lo cual ocasiona gran pérdida de un tiempo precioso, sin contar con los gastos y perjuicios que son consiguientes.

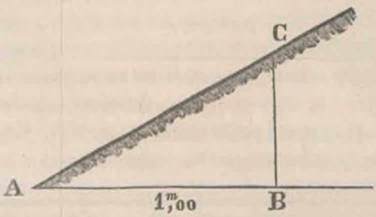
La libreta ó registro que debe llevarse diariamente para el cálculo de las distancias ó lados de los triángulos, podrá tener la forma siguiente:

NÚMERO de órden.	NOMBRES Y MARCAS DE LOS		ANGULOS MEDIDOS.		VALOR TRIGONOMÉTRICO DE LOS LADOS.		OBSERVACIONES.
	Puntos observados en cada estacion.	Vértices de la red de triángulos.	Horizontales.	Verticales.	Parcial.	Total.	
1							
2							

108.—Conversion de las pendientes en ángulos verticales y recíprocamente.—En las expresiones de las pendientes ó rampas, ya para su trasformacion en ángulos verticales é inclinados, anotados en grados, minutos y segundos, ó bien recíprocamente, siempre hay que considerar la proyeccion horizontal que se fija ordinariamente por unidad de base, y tambien por 10, 100, 1000 metros, etc., y la altura que varía segun el grado de inclinacion: en este concepto se dice que la pendiente tiene tanto de altura por metro, por 100, por kilómetro, etc., de base, como veremos en los dos casos siguientes:

Primer caso.—Sea el triángulo ABC (*fig.* 40), formado por la proyeccion AB de la línea inclinada AC y la altura BC que mide el ángulo BAC de inclinacion de la pendiente: considerando ABC como un triángulo trigonométrico rectángulo en B, y tomando AB por unidad igual al radio de las tablas, tendremos por lo tanto que BC será la tangente trigonométrica, y AC la secante.

Fig. 40.



De aquí resulta que si se nos diese el grado de inclinacion de una rampa, se hallará haciendo uso de las tablas en la columna de las tangentes, enfrente del ángulo BAC, el valor trigonométrico de BC.

Así tendremos que una pendiente de

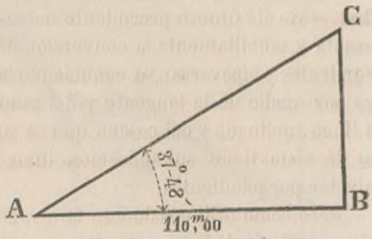
$0,^m 001$ corresponde á un ángulo de.........	0°	3'	30"
0, 005..............................	0	17	30
0, 010..............................	0	34	30
0, 015..............................	0	51	30
0, 020..............................	1	9	00
0, 025..............................	1	26	00
0, 030..............................	1	43	00
0, 035..............................	2	00	30
0, 040..............................	2	17	30
0, 045..............................	2	34	30
0, 050..............................	2	51	30
0, 055..............................	3°	9'	00".

Segundo caso.—Recíprocamente, si se quiere tener la pendiente por metro, dado el ángulo vertical expresado en grados, minutos y segundos, se obtiene directamente con las tablas, consultando la columna de las tangentes sobre la horizontal enfrente de la expresion del ángulo conocido. Por ejemplo, si se observase que el ángulo de una linea inclinada era de 11° 20' 30", la pendiente por metro seria de $0^m,20$, y si fuese de 35° 24' 30", resultaría $0^m,711$ de pendiente por unidad de base.

Si en lugar de tomar el radio sobre el cateto AB (*fig.* 41) se hubiera tomado sobre la hipotenusa ó línea inclinada AC, en tal caso el otro cateto BC que será igual al seno de las tablas, indicará la pendiente por metro de longitud tomada sobre AC. Desde luego se comprende en vista de cuanto se ha dicho, que este procedimiento se puede aplicar con ventaja al cálculo de los triángulos rectángulos.

Sea, por ejemplo, un triángulo ABC en el que se conoce el ángulo agudo en A de 37° 48′ y el cateto adyacente de $110^m,00$, y se quieren hallar la hipotenusa y el otro cateto.

Fig. 41.



Segun hemos visto arriba la expresion de la tangente al extremo de un metro de longitud tomado sobre AB, se hallará por medio de las tablas y será 37° 48′ $= 0^m,775679$; pero al cabo de $110^m,00$ que tiene de longitud AB, la pendiente se habrá elevado en el punto C á una altura 110 veces mayor; la cual estará, pues, expresada por

$$BC = 0^m,775679 \times 110^m,00 = 85^m,32.$$

La misma longitud de $1^m,00$ tomada sobre AB y considerada como el radio de las tablas, corresponde á una parte de la línea inclinada AC que tambien está expresada en las tablas por la secante, cuyo valor es de $1^m,265574$; pero como á $1^m,00$ de AB corresponde $1^m,265574$ sobre AC, tendremos que á $110^m,00$ corresponderá x formando proporcion

$$1^m,00 : 1^m,265574 :: 110^m,00 : x = AC$$

de donde se deduce que,

$$x = AC = 1^m,265574 \times 110^m = 139^m,21.$$

Si solamente se conociese la hipotenusa AC y el ángulo en A, bastaria multiplicar la longitud de aquella (*núm.* 17—2.° *caso*) por el seno de este ángulo para determinar la altura ó cateto BC y por el coseno del mismo ángulo para hallar la proyeccion horizontal ó cateto AB. Así en este último caso, llamando D al desarrollo de AC, ó sea la longitud ó medida en sentido de la pendiente; P á la proyeccion horizontal AB, y α al ángulo que forma en A la línea inclinada trazada sobre el terreno con la horizontal, tentremos la fórmula

(101) $$P = D. \cos. \alpha.$$

De modo que los cálculos indicados en esta expresion son idénticos á los que se han verificado anteriormente aplicando las (*fórs.* 34, 35, 36, 37, 38, 39 y 40), para la resolucion de los triángulos rectángulos en los cuatro casos que, segun el (*núm.* 17) se presentan.

Así, pues, se comprende fácilmente el grande auxilio que prestan las tablas, y como se puede nivelar por pendientes á medida que se vaya haciendo un trazado provisional, calculando las alturas y reduciendo al horizonte las distancias inclinadas que se midan, conociendo el ángulo que forma con la horizontal; cuyas alturas se deducen de la distancia medida, tomada como radio del arco correspondiente al ángulo vertical, multiplicándola ya por el seno de este en cada tirada que se quiera nivelar para obtener la altura; ó bien por el coseno, con lo cual quedará reducida al horizonte la distancia medida.

Para evitar la acumulacion de los errores que pudieran cometerse en el cálculo, es preferible deducir la altura inmediatamente de la distancia medida antes de reducirla, empleando el seno del ángulo en vez de obtenerla despues de haberla reducido al horizonte multiplicándola por la tangente.

109.—Reduccion al horizonte de las distancias entre puntos nivelados.—En el número precedente hemos visto de que manera puede verificarse exacta y sencillamente la conversion de las pendientes ó rampas en ángulos verticales y viceversa; ya conociendo la pendiente por metro, 100, 1000, etc., ya por medio de la tangente y del seno del ángulo vertical y ya de la secante ó línea inclinada y del coseno que es su proyeccion horizontal: bajo este punto de vista tiene su aplicacion inmediata la expresada trasformacion para nivelar por pendientes.

Pero como ordinariamente la nivelacion de los trazados definitivos se efectúa con el nivel de aire, y además como no es posible medir con toda exactitud la proyeccion horizontal de cualquier línea trazada sobre un terreno muy accidentado, especialmente si son grandes las diferencias de nivel y corto el desarrollo de las distancias entre los puntos nivelados, hay que valerse de otros medios para reducirlas al horizonte, resolviendo el problema en funcion de las longitudes desarrolladas y de la diferencia de los planos de nivel ó de las cotas de altura de los puntos nivelados.

De suerte que la cuestion de la reduccion de distancias al horizonte, puede formularse en los términos siguientes:

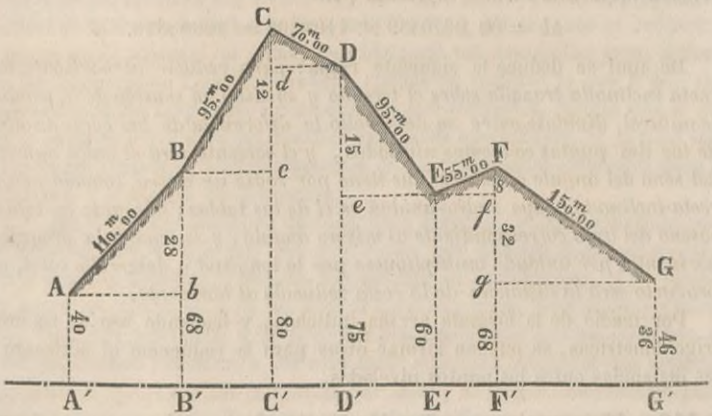
Conocida la longitud de cualquier línea inclinada y las cotas de altura de los extremos, deducidas de las operaciones verificadas con el nivel de aire, determinar la proyeccion horizontal de la recta dada ó reducir al horizonte las distancias desarrolladas sobre el terreno entre los puntos nivelados.

Sea, por ejemplo, la seccion de un pequeño trozo en el que se han medido las distancias inclinadas ó desarrollo parcial comprendido entre los puntos nivelados A, B, C, D, etc. (*fig.* 42), marcados sobre el terreno y tendiendo la cadena en sentido de la pendiente natural: las cotas de altura de aquellos puntos referidas á un plano de comparacion, corresponden á los cambios de inclinacion más notables, y se deducen de las lecturas de mira verificadas con el nivel de aire.

Ahora bien: si se bajan las verticales desde los puntos A, B, C, D, etc., del terreno sobre el plano de proyeccion, la superficie proyectante que pasa por el lugar geométrico determinado por la línea que une los piés de las verticales, y los extremos de las líneas inclinadas, marcará las correspondientes proyecciones A'B', B'C', C'D', etc. Para poderlas calcular, supóngase que tambien se han tirado las horizontales A*b*, Bc, etc., desde los puntos del terreno niveladas, prolongadas hasta encontrar las verticales bajadas de los inmediatos superiores: de suerte que se habrán formado los triángulos rectángulos A*b*B, BcC, C*d*D, DeE, etc., en cada uno de los cuales son conocidas la línea inclinada y la diferencia entre las cotas de altura de los puntos nivelados, correspondientes á los extremos de aquellas distancias medidas.

Así tendremos que en el triángulo A*b*B, rectángulo en *b*, conocemos la hipotenusa AB y el cateto Bb; y de consiguiente (*núm.* 17) estamos en el segundo caso, y aplicando las (*fórs.* 36 y 37) se hallará el otro cateto Ab cuyo valor numérico es igual al coseno del ángulo en A, el cual representa la distancia de la línea inclinada reducida al horizonte.

Fig. 42.



De modo que, aplicando el mismo procedimiento á los demás triángulos, tomando dos á dos las cotas de altura de los puntos extremos de las distancias parciales niveladas, se obtendrán por el cálculo trigonométrico las proyecciones horizontales de las líneas inclinadas, cuyas proyecciones deberán marcarse por su órden sobre el eje de las abscisas que, con las ordenadas correspondientes, determinarán la superficie proyectante y el verdadero perfil longitudinal del terreno; así como la total longitud horizontal conforme con las distancias parciales señaladas en el mismo eje del trazado desarrollado en plano y perfil.

Con el objeto de que el problema de la reduccion de distancias al horizonte, quede planteado con toda generalidad y bajo la forma más sencilla para todos los casos que ocurran en la práctica, cualquiera que sea el desarrollo y la diferencia de nivel entre los puntos extremos de cada distancia nivelada ó de toda línea recta más ó menos inclinada, vamos á determinar, por ejemplo, en el triángulo rectángulo AbB, del cual nos hemos ocupado arriba, la expresion de la distancia inclinada AB reducida al horizonte por unidad de longitud tomada sobre ella como radio. Para esto habrá que hallar el seno y el coseno del arco ó del ángulo opuesto al cateto dado: el seno se obtiene dividiendo el cateto Bb, que representa la diferencia de nivel de los puntos A y B, entre la longitud conocida de la línea inclinada AB, y será

$$\frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{AB}} = \frac{28}{110} = 0^{\mathrm{m}},2545454.$$

Buscando en las tablas el seno del ángulo á que corresponde este cociente, se halla el de 14°, 45′ cuyo valor numérico del seno es de 0^{m},2546019, que solo se diferencia en 0^{m},0000565 por esceso: esta pequeña fraccion se desprecia en este caso, y sobre la horizontal que parte de los 45′ se encuentra en la plana de la derecha el coseno del mismo ángulo, cuyo valor de $0^m,9670459$ representa la proyeccion horizontal por metro de distancia de la línea inclinada (*fór.* 101); pero como esta tiene de longitud $110^m,00$, claro es que su proyeccion reducida al horizonte, será tambien en la misma proporcion 110 veces mayor: luego la distancia inclinada AB reducida á su proyeccion horizontal, estará expresada por

$$Ab = 0^m,9670459 \times 110^m,00 = 106^m,375.$$

De aquí se deduce la siguiente regla: *para reducir al horizonte toda recta inclinada trazada sobre el terreno y medida en sentido de la pendiente natural, divídase entre su desarrollo la diferencia de las cotas de altura de los dos puntos extremos nivelados, y el cociente será el valor numérico del seno del ángulo ó del arco que tiene por radio un metro, tomado sobre la recta inclinada, cuyo radio-unidad es el de las tablas; búsquese en estas el coseno del arco correspondiente al mismo ángulo, y se tendrá la proyeccion horizontal por unidad; multiplíquese por la longitud ó desarrollo total, y el producto será la distancia de la recta reducida al horizonte.*

Por medio de la fórmula arriba indicada, y haciendo uso de las tablas trigonométricas, se pueden formar otras para la reduccion al horizonte de las distancias entre los puntos nivelados.

110.—Observaciones sobre los límites de las diferencias en la medicion y nivelacion de las líneas.—Cuando la tierra presenta una superficie regular en una extensa region ó se halla limitada por planos más ó ménos inclinados, se pueden medir las distancias tendiendo la cadena ó cinta metálica en sentido de la pendiente natural.

Mas como todas las operaciones topográficas se verifican en la hipótesis de que el terreno es horizontal; pues de lo contrario, seria muy difícil, por no decir imposible, coordinar operaciones ejecutadas sobre planos de diferente inclinacion, de aquí la necesidad de proyectar en un mismo plano llamado por esto de *comparacion* todos los puntos del terreno; ya por medio de los ángulos de inclinacion ó de las varias pendientes de diferentes líneas, segun lo indicado (*núm.* 109), ó bien calculando en funcion de la diferencia de las cotas de altura de los puntos del terreno y las respectivas distancias comprendidas entre ellos, conforme á las operaciones de nivelacion efectuadas con el nivel de aire, y en vista de lo expresado en el número citado.

Pero cuando la superficie del terreno es irregular y los cambios de inclinacion son demasiado frecuentes, aunque sean poco bruscos, no solamente se cometen graves errores en suponer que las distancias medidas sobre el terreno en sentido de la pendiente son rectas y su longitud exacta, si que tambien en la reduccion de las distancias al horizonte por la misma razon; y porque los errores se van acumulando, á pesar del cálculo prolijo, desde el punto de partida ú orígen hasta el de llegada ó arribo, en los trayectos de mucha longitud.

En tales conceptos haremos algunas observaciones:

1.ª Cuando los terrenos más ó ménos accidentados presentan una superficie alabeada, rocas en masa y bancos ú otros obstáculos que no se pueden superar, sino que para medir las líneas trazadas hay que tender la cadena ó cinta por encima ó apoyada en ellos, resulta que las distancias medidas no serán las verdaderas longitudes de las rectas inclinadas, sino que realmente son el desarrollo de líneas convexas y cóncavas en plano vertical, combinadas con elementos de rectas; formando una contínua sucesion cuando hay que franquear alguna vertiente ó ladera fragosa, surcada por una série de contrafuertes y barrancos, los cuales habrá de cruzar el trazado en direccion próximamente normal á sus divisorias y talwegs: en cuyo caso la proyeccion vertical de la directriz será más bien mistilínea, y por lo tanto al reducir á la proyeccion horizontal los arcos, considerando sus desarrollos como si fuesen las distancias de líneas inclinadas, cuando en realidad lo que debia reducirse serian las longitudes de las cuerdas sub-tendentes, resulta que se cometen muchos errores en las distancias parciales que influyen en la total longitud de los trazados y en los resultados de las operaciones ulteriores para la redaccion y ejecucion de proyectos.

2.ª En el trazado definitivo de caminos y canales, y muy especialmente de ferro-carriles, no solo hay que medir sino que además debe marcarse á la vez sobre la directriz la division kilométrica en hectómetros, y lo mismo las distancias intermedias de los puntos notables, como los máximos y mínimos, etc., con referencia á los piquetes más inmediatos que les preceden de la misma division kilométrica. De este modo se tienen señaladas con piquetes fijos sobre el eje, todas las distancias parciales y al orígen, tanto del trayecto desarrollado como de la nivelacion que debe verificarse en seguida con el nivel de aire, respecto de las longitudes marcadas y las cotas de altura de los puntos nivelados para representar el trazado definitivo en plano y perfil.

Pero como despues al efectuar la nivelacion y reducir al horizonte las tiradas inclinadas que unen los puntos nivelados, no solo se altera la division kilométrica del trazado en plano y perfil, trastornando estas distancias tomadas en números redondos, porque simplifican muchísimo las operaciones de campo y de gabinete, sino que hace variar todos los datos anotados para el plano y los lugares ú objetos situados con relacion al eje, base de operaciones: de donde resulta que á los errores que hemos indicado en la 1.ª observacion, hay que añadir los que provienen de las pequeñas fracciones parciales que se desprecian en el cálculo; pero que reunidas influyen mucho en las operaciones subsiguientes, porque se van acumulando insensiblemente en mayor ó menor proporcion, segun el número de cifras decimales con que se opera la reduccion. De suerte que al reducir las distancias niveladas á su proyeccion horizontal, se cometen errores materiales y de cálculo, y se pierde un tiempo precioso, que por sí solo representa un capital incalculable, sin contar los demás gastos y perjuicios que se originan.

3.ª Para obtener los datos de campo con prontitud, sencillez y exactitud, es preferible efectuar las proyecciones horizontales al mismo tiempo que se opera sobre el terreno; siguiendo el sistema metódico que se establece en otro lugar, se puede conseguir todas estas ventajas, haciendo uso los medidores de jalones bien derechos, provistos de su correspondiente perpendículo para verificar la vertical cuando se apoyan en el suelo, y de la cinta de trama metálica que reune muy buenas condiciones, sin estar tan expuesta como la cadena á la variacion de longitud; con la que se pueden apreciar hasta los dobles milímetros, y por su poco peso no influye en ella la gravedad hasta el punto de formar la catenaria ó pandeo que casi es inevitable en las cadenas que exceden de 10 metros, mientras que la cinta se tiende horizontalmente. Cuando la pendiente es fuerte y para que la cinta se mantenga en su punto, uno de los medidores la levanta apoyando su extremo contra el jalon y el otro baja el extremo opuesto hasta el regaton de su jalon, si es preciso; y así se van midiendo las distancias en contacto unas de otras, alineando los dos jalones con las banderolas que señalan la traza: la cinta se templa constantemente la cantidad suficiente, marcando siempre los puntos extremos sobre los cuales se hincan los jalones ó se proyecta su eje verticalmente. Si los cambios de inclinacion son bruscos y las pendientes demasiado rápidas, hay que doblar ó recojer la cinta y solo se tiende una parte tal, que pueda sostenerse bien templada con la horizontalidad y exactitud que se requiere; y que, si es posible, la cantidad de su longitud sea en números redondos para medir con ella más fácilmente sin que dé lugar á ninguna equivocacion en las anotaciones y fracciones de las distancias parciales, ni se cometan errores de apreciacion en la division kilométrica al tiempo de clavar los piquetes de los hectómetros ó de fijar las marcas de los demás puntos intermedios que convenga situar en la traza.

Así, pues, no se debe tolerar entre dos ó más medidas horizontales y en las nivelaciones de una misma línea, especialmente en las vías férreas y canales, toda diferencia que exceda de $0^m,10$ por kilómetro como límite máximo, debiendo tambien fijarse el mínimo de $0^m,001$ por unidad kilométrica. Siendo difícil obtener dos medidas exactamente iguales en un trayecto de 1.000 kilómetros, por ejemplo, y la diferencia mínima seria en el límite un metro, que apenas influye en el capital de construccion y explotacion de una via de comunicacion, mientras que el gasto y tiempo invertido en una tercera rectificacion representaria un capital importante; así puede considerarse desde luego la diferencia de $0^m,001$ por kilómetro, término medio, como si fuese exacta dentro de los límites que nos hemos propuesto y de los medios de accion de que se puede disponer en las operaciones topográficas. Pero no sucede lo mismo cuando excede la diferencia del límite máximo de $0^m,10$; pues en un trazado de 1.000 kilómetros daria un error de 100 metros, y el capital que representaria por ambos conceptos, merece tenerse muy en cuenta; tanto más, cuanto que segun la ley general de ferro-carriles en explotacion, la percepcion de las fracciones por kilómetro empezado se pagan como si se hubiera recorrido por entero. De manera que si el error estuviera distribuido en diferentes secciones, pudiera ocasionar injustamente al tráfico un gravámen considerable.

Por último, hemos fijado estos límites fundados en datos experimentales, por varias razones: 1.ª porque en los estudios verificados al atravesar llanuras como las de Castilla con buenos medidores y confrontadas las alineaciones rectas por el cálculo de distancias inaccesibles y las alineaciones curvas por el desarrollo que dan las tablas, hemos obtenido en muchos casos una diferencia igual al límite inferior, y en otros una exactitud increible y lo mismo en la nivelacion: 2.ª porque al cruzar divisorias y valles, franqueando vertientes de más de 35° y escarpes de 30 á 60 metros de altura sobre la base inferior, es muy difícil que los medidores puedan conseguir resultados tan exactos como en los paises llanos, y muchas veces tampoco se puede confrontar por el cálculo á causa de la escabrosidad del terreno ó de hallarse poblado de bosque, á no ser las alineaciones curvas por medio de la longitud, calculada en las tablas; así es que por necesidad hay que tolerar el límite máximo; y 3.ª porque no siempre se puede disponer de todos los medios de accion más precisos, ni del tiempo indispensable para rectificar diariamente los instrumentos y confrontar la cadena ó cinta con el tipo del metro, corrigiendo las notables variaciones debidas á las alteraciones de dilatacion y contraccion ú otras causas, acortando y alargando la cantidad suficiente para que conserve constantemente su longitud exacta; así como tambien respecto de la nivelacion.

Reasumiremos estas observaciones manifestando que las tolerancias que pueden admitirse en la medicion y nivelacion de una série de líneas comprendidas entre dos puntos dados, ó bien para la suma de dos ó más séries que tienden á encontrarse, como sucede con las líneas radicales de la red de ferro-carriles; cuyas tolerancias deben tener sus límites, porque seria un error el creer que cualesquiera que fuesen las diferencias que se hallasen, debia pasarse por alto en la rectificacion de los trabajos de campo ó en la redaccion de proyectos, y proceder á la construccion una vez obtenida la aprobacion y autorizacion de la superioridad.

Terminaremos presentando en resúmen los límites de las diferencias que se toleran generalmente admitidas como legales en las operaciones topográfico-catastrales de algunos paises, y particularmente en Francia, que para las líneas en general, se han adoptado los límites siguientes:

$0^{m},02$	por unidad desde	50 á 100 metros
0 01		100 á 300
0 004		300 á 500
0 002		500 á 1.000.

Como se vé las diferencias en el límite están en razon inversa de la distancia total: y de consiguiente habiendo la misma relacion en los grandes trayectos llegará al mínimo que hemos obtenido experimentalmente por kilómetro, término medio; y en cuanto al máximo fijado, se ha deducido de algunos trozos del terreno más accidentado que puede presentarse en la Península española. Tal es la escala gradual que abraza los dos extremos entre los cuales están comprendidas las diferencias intermedias de otros paises menos montañosos que el nuestro.

CAPÍTULO II.

TRAZADO DEFINITIVO DE ALINEACIONES RECTAS Y CURVAS.

111.—Sistema metódico adoptado.—El sistema metódico que el arte del ingeniero enseña y los resultados de la experiencia aconsejan, acerca del estudio y trazado definitivo de caminos y canales, consiste en establecer simultánea y sucesivamente las alineaciones rectas y curvas sobre el terreno, unidas por una série de puntos más ó ménos próximos entre sí, para señalar el trazado seguido desde el orígen ó punto de partida hasta el de llegada; cuyo trayecto marcado por la traza de los planos proyectantes, tendrá por expresion la total longitud reducida al horizonte de la directriz desarrollada en plano y perfil.

Si en los cambios de direccion é inclinacion no hubiera que satisfacer á diversas y opuestas condiciones, pudieran adoptarse los trazados en recta y pendiente absoluta, ó cuando más establecer las alineaciones en pendiente mínima y las curvas de union de un radio tal, que los motores y vehículos por razon de dichos cambios, experimentaran la menor resistencia. Pero como por una parte la economía y accidentes del terreno, y por otra las circunstancias y el objeto que deben llenar las vias de comunicacion, bajo el triple punto de vista de la construccion, explotacion y conservacion, no solo hay que tener en cuenta el tipo de los motores y de los vehículos, si que tambien la clase ó categoría de las diferentes vias y la utilidad, para determinar ante todo, entre qué límites y hasta qué punto, pueden satisfacerse las principales condiciones.

En efecto, unas veces por la economía en la construccion hay que plegar el trazado más ó ménos á las inflexiones del terreno, y evitar las grandes obras de fábrica y de movimiento de tierras: otras la conveniencia de atravesar los talwegs, divisorias y contrafuertes, cruzándolos normalmente en alineacion recta, obliga á fijar en puntos determinados los vértices, entrada y salida de las curvas; y en fin, otras la facilidad, economía y utilidad del tráfico, exige que se sacrifique el capital de construccion al de explotacion ó al contrario, y que se calcule la longitud de los radios aplicando la escala gradual deducida de los datos experimentales, y discutiendo la fórmula de la fuerza de traccion ó de resistencia en las curvas, para determinar cómo, cuándo, entre qué límites y hasta qué punto se pueden conciliar las condiciones admisibles.

Generalmente en el trazado de carreteras y de canales, y en particular en los de los caminos de hierro, se emplean los arcos de círculo para unir las alineaciones rectas; por cuya razon es de la mayor importancia la exposicion de los medios que convendrá adoptar para su establecimiento, segun los casos y accidentes de cada caso; dejando para más adelante la investigacion de otros medios para el trazado de las curvas planas que resultan de las secciones cónicas.

Así, pues, concretándonos al objeto que nos hemos propuesto en este capítulo, presentaremos ahora la cuestion reducida á los mismos términos en que ha sido analizada (*núm.* 13), á saber:

Dado el ángulo de las alineaciones rectas y el radio del arco de círculo que ha de unirlas, determinar en funcion de estos datos los demás elementos y recíprocamente.—Planteado el problema, y suponiendo que la curva circular estuviera determinada por el radio y por el ángulo de las alineaciones rectas que debe enlazar, todavía hay que calcular la tangente para fijar los puntos de entrada y salida ó de contacto de la alineacion curva, y la parte exterior de la secante que marca el vértice del arco; ó bien el extremo de la semi-curva sobre la bisectriz del ángulo. Recíprocamente, prefijados de antemano los elementos que constituyen la tangente y la secante, habria que calcular la longitud del radio é investigar la graduacion correspondiente á la abertura del ángulo, variando desde luego la posicion de las dos alineaciones rectas que le forman.

Como se vé el problema es indeterminado, porque su expresion envuelve siempre dos ó más incógnitas, y por consiguiente admite varias soluciones, habiendo sido tomado el ángulo ó dado al radio un valor arbitrario. Esto no obstante, puede utilizarse ventajosamente su indeterminacion, sabiendo sacar mucho partido de ella, ya para establecer las alineaciones rectas ó bien para hacer pasar la curva de union por uno ó más puntos de sujecion, con tal de que sean compatibles y no se opongan á las principales condiciones que debe reunir el mejor trazado, bajo el doble punto de mira que queda indicado de la construccion y explotacion.

Toda vez que cada una de las alineaciones curvas está determinada por el ángulo de las tangentes principales y por el radio, vamos á ocuparnos en primer lugar de los medios más exactos y expeditos que conduzcan directamente á situar los lados que forman el vértice de aquel, y á seguida fijar el radio de curvatura y demás elementos, teniendo en cuenta las condiciones arriba indicadas.

112.—Determinacion de los ángulos.—A dos sistemas puede reducirse el procedimiento: uno es el adoptado por la escuela del cuerpo de ingenieros civiles, y el otro forma parte del que nos hemos propuesto seguir en nuestro Tratado. El primero consiste en elegir definitivamente el trazado poligonal y unir despues entre sí las alineaciones por medio de curvas, ya descritas analítica ó gráficamente en el gabinete, ya más tarde sobre el terreno. El segundo está reducido á establecer sucesiva y simultáneamente las alineaciones rectas y curvas que constituyen el trazado del eje ó directriz, en virtud del cálculo hecho y operaciones topográficas ejecutadas al mismo tiempo en el campo para su replanteo.

Habiendo practicado nosotros ambos sistemas en distintas ocasiones, hemos observado que, en igualdad de circunstancias y empleando idénticos medios de accion, los resultados experimentales obtenidos, no solo hay una diferencia de más del simple al doble á favor del segundo sistema, tanto por la exactitud y sencillez en las operaciones y resultados deducidos del cálculo, como por la prontitud y facilidad en el conjunto de los trabajos de campo y de gabinete, sino que tambien por la grande economía de tiempo y de gasto total de cada proyecto.

De modo que, segun el sistema seguido ordinariamente por la mayor parte de los ingenieros dependientes del Gobierno, no solamente todos los ángulos ó las rectas y vértices que constituyen el trazado definitivo poligonal, son una série de líneas y puntos de sujecion arbitrarios tomados *á priori* sin reglas ni datos fijos, y á los cuales ó hay que subordinar despues las curvas de enlace ó variar el trazado, si que además se cometen graves desaciertos al determinarlas gráficamente, y los errores que son consiguientes al tener que variar las distancias al orígen y las parciales en plano y perfil; así como los datos de nivelacion y demás que sirven de base para el cálculo, cubicacion y otras operaciones de gabinete; y hé aquí la causa principal del mal éxito y desconcierto en los proyectos de obras públicas, cuyas consecuencias se tocan ya al tiempo de ir á ejecutarlas á pesar de los trámites de un lento é interminable expedienteo, y los estériles resultados de la explotacion no corresponden al trabajo y recursos invertidos: mientras que por el segundo sistema no se admiten más puntos de sujecion que los impuestos por la imperiosa ley de la necesidad y alguno que otro compatible con las condiciones á que deben satisfacer las alineaciones curvas; subordinando siempre á ellas el trazado de las rectas y la abertura de los ángulos, por la grande influencia que ejerce su resistencia al movimiento, los deterioros, gastos y demás inconvenientes que presentan en la explotacion, lo cual no sucede en las rectas de igual pendiente; y además, porque habiendo hecho ya el replanteo de curvas *á posteriori* en virtud del estudio comparado y comprobado sobre el terreno, claro es que permanecen invariables en el gabinete las distancias horizontales y la division kilométrica en hectómetros, etc., del trazado definitivo y el plano acotado, é igualmente los datos de nivelacion y demás obtenidos con toda precision y el mejor acierto por el cálculo; en los cuales se funda el estudio de rasantes en el gabinete, y el buen éxito con algunas ligeras variantes que convenga introducir en la traza definitiva al tiempo de la realizacion del proyecto, en beneficio de las principales condiciones á que debe satisfacer.

Así, pues, es necesario efectuar el trazado definitivo simultáneo de alineaciones rectas y curvas sobre el terreno, teniendo en cuenta el radio de curvatura como veremos más adelante; y además el estudio general acerca del régimen y distribucion de las pendientes. En este supuesto haremos algunas indicaciones que en cierto modo puedan servir de reglas de aplicacion inmediata, á saber:

1.ª Cuando el terreno es accidentado y no es fácil, económicamente hablando, seguir en línea recta desde el punto de partida al de llegada, sino que hay necesidad de plegar todo lo posible el trazado á las inflexiones que formen los contrafuertes y los senos ó valles que se encuentran entre ellos; en este caso para franquearlos es inevitable el que las curvas se sucedan con frecuencia y muchas veces la concavidad de los arcos habrá de estar vuelta en sentido opuesto: por lo mismo hay que tener la mayor prevision en los cambios de direccion para fijar los vértices y establecer las alineaciones rectas de un modo tal, que segun la pendiente del terreno, se compensen hasta cierto límite á simple vista las alturas de los puntos máximos y mínimos con relacion á la rasante provisional que convenga adoptar en cada tramo en desmonte ó terraplen; así como la abertura de los ángulos que las rectas forman entre sí, consideradas dos á dos, y que la longitud de ellas sea la mayor posible.

2.ª Para efectuar el cambio de direccion que deberá seguir una recta, habrá que tantearla alineándola provisional y solamente con banderolas, situándola (*núm.* 97) en posicion la más conveniente y prolongándola en ambos sentidos de manera que puedan vencerse los obstáculos para dejar expedita la salida por una y otra parte; esto es, por ambos extremos, para que la nueva alineacion venga á empalmar sobre la última ya establecida que se habia dejado indefinida hasta fijar por medio de su interseccion el vértice. En este punto se pone al teodolito en estacion, y se rectifica enfilando bien las banderolas con el anteojo para marcar la recta que se habia alineado á simple vista: en seguida se ve si el rumbo de la otra alineacion ya trazada definitivamente es igual al que se habia obtenido en el vértice anterior, y en el caso de que resultase alguna diferencia, se vuelven á rectificar las dos alineaciones y su interseccion, colocando nuevamente el instrumento y repitiendo las operaciones hasta conseguir que el rumbo directo de la penúltima línea sea próximamente igual al del vértice precedente ± 180°. Cuando el ángulo que resulta formado por las dos alineaciones, expresado en grados, minutos, etc., es mayor de 120° como límite mínimo en los trazados de caminos de hierro, y de 65° en los de carreteras y canales, bajo este concepto se dice que *el ángulo de las alineaciones está bien formado.*

Existen, como veremos despues, medios con los que se puede obtener ángulos de mayor graduacion que la de estos límites, aun cuando los formados por las tangentes principales ó por las alineaciones rectas fuesen menores, tanto respecto á los de las vías férreas, como los de las ordinarias. Por consiguiente, solo en casos muy excepcionales deben admitirse los ángulos agudos.

Cuando se han fijado de antemano por disposicion de la superioridad ó arbitrariamente, como por desgracia sucede con frecuencia, uno ó más puntos de sujecion de la directriz; ya cuando tiene que salvar el trazado algun paso difícil, y ya para evitar obras demasiado costosas al cruzar los talwegs y atravesar las divisorias: en cualquiera de estos casos y ántes de aproximarse á dichos parajes con el trazado definitivo, debe suspenderse en el mejor sitio que se encuentre, trasladándose desde luego los encargados de estas operaciones con los instrumentos al punto de sujecion ó paso difícil, para franquearlo estableciendo provisional y oportunamente, como hemos dicho arriba, la posicion y direccion de las alineaciones en ambos sentidos; tomando aquel como punto de partida hasta encontrar la mejor salida, y volviendo despues en sentido opuesto, alineando y marcando solo con banderolas y jalones cada una de las rectas, de manera que corte siempre á la que le precede en el punto más conveniente, y que la abertura del ángulo que formen entre ellas sea el mayor posible, hasta acordar la parte de trazado provisional con el definitivo. En seguida se puede continuar este, modificando y rectificando si fuere preciso, el trazo provisional. Con estas precauciones se consigue en poco triempo, sencilla y acertadamente, lo que de otro modo sin el tanteo aproximado, hubiera comprometido tal vez el buen éxito del estudio en la parte más costosa; ó de lo contrario, habria que inutilizar una gran porcion de las operaciones principales del trazado en plano y perfil, retrocediendo y perdiendo entre tanto el personal subalterno encargado de los trabajos secundarios, un tiempo considerable.

Tal es la exposicion de motivos, y tales las indicaciones que, entre otras muchas, pueden servir de regla, en la imposibilidad de dar tantas, cuantos serán los innumerables casos y accidentes de cada caso particular que se presentan en la práctica.

En el modo de aplicarlas oportunamente, y en el mejor acierto para dirigir las operaciones de campo, es donde más bien se dan á conocer la inteligencia y prevision, el buen criterio y pericia del director del trazado, dotado de ciencia y de una mirada penetrante para ver en el espacio y calcular á simple vista con aproximacion las distancias y alturas de los puntos notables que convenga apreciar despues experimentalmente, por el conocimiento del relieve del terreno que se oculta á su vista y que debió adquirir préva y ordenadamente: de esta suerte se puede hacer más en pocos momenos y obtener una cantidad de trabajo útil mucho mayor que otros con todo el lujo de teorías y el aparato de medios auxiliares insuficientes, trazando líneas de tal longitud que dan lugar á trabajos prolijos y á cálculos inexactos, é impracticables operaciones sobre el terreno más ó menos accidentado.

113—Determinacion de los radios.—Establecido ya el ángulo de las alineaciones tangentes, como se ha dicho arriba, la determinacion de los radios para el trazado de alineaciones curvas se obtiene con mucha facilidad y sencillez por medio del cálculo, sin necesidad de tratar gráfica ó analíticamente de las soluciones que pudieran adoptarse segun los distintos casos; porque si bien no ofrecen ninguna dificultad en el papel, tal vez seria, sino imposible, cuando menos interminable poderlas verificar sobre un terreno quebrado y en malísimas condiciones, que es precisamente donde hay que resolver las cuestiones sobre la marcha, y con frecuencia en las peores circunstancias: por lo tanto, renunciamos desde luego á las soluciones gráficas por su prolijidad é inexactitud, y á las analíticas por ser demasiado lenta y poco expedita su aplicacion inmediata; limitándonos á describir las figuras solo con el objeto de dar una idea clara y completa del procedimiento para resolver inmediatamente las cuestiones que se presentan en la práctica, y para replantear las alineaciones rectas y curvas, ó sea el trazado definitivo sobre el terreno antes de la redaccion del proyecto de cualquiera via de comunicacion, lo mismo que despues al tiempo de ir á ejecutarla.

Al determinar los radios de curvatura, debe procurarse que su longitud sea tal que los motores y vehículos no experimenten más resistencia en ellas ni tengan otros inconvenientes al tiempo de recorrerlas á toda velocidad, que si el trayecto fuese en recta; pero como por una parte los accidentes del terreno, y por otra ciertos puntos de sujecion no permiten adoptar siempre curvas de grande radio, y como á medida que la longitud de este disminuye, aumenta la resistencia de aquellas en mayor proporcion, resulta que llega á cierto límite el esfuerzo adicional en cada momento, y por lo mismo la traccion en alineacion curva se hace muy difícil y costosa con los rozamientos laterales y demás que se desarrollan. Segun los resultados deducidos del cálculo experimentalmente, desde que las curvas circulares tienen 1000 metros de radio en ferro-carriles y $100^m,00$ en carreteras y canales, el esfuerzo adicional que imprime el desvío es casi nulo, y la resistencia que se opone á la fuerza de traccion en alineacion curva, ya se considera como en recta: por el contrario, cuando los radios no tienen más que 300 metros en caminos de hierro y 30 en carreteras y canales, las resistencias son muy considerables. De manera que admitiremos por límite máximo de resistencia, el de las curvas de 300^m de radio en las vías férreas, y el de $30^m,00$ en las ordinarias; y como límite mínimo el de $1000^m,00$ para las primeras, y 100 para las segundas.

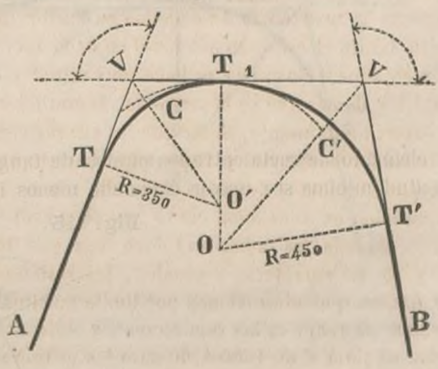
Recíprocamente, los radios tomados en cada uno de estos límites serán los extremos de la escala gradual dentro de los cuales estarán comprendidas todas las soluciones para la determinacion de los radios en los distintos casos y segun los accidentes de cada uno de ellos. De modo que cuando para el trazado de alineaciones curvas, se puedan adoptar en ferro-carriles radios de 1000 metros ó más, ya no hay cuestion respecto á la traccion y explotacion, atendiendo solamente á los puntos de contacto y á las demas de sujecion segun las condiciones del mejor trazado y de la construccion.

Si hubiese que admitir forzosa y económicamente hablando, radios menores de $300^m,00$ para poder vencer los obstáculos y atravesar paises muy quebrados con cualquier via férrea de más ó ménos importancia, entónces hay que tener muy presente á la vez las circunstancias locales para establecer una explotacion especial, ó á doble traccion, acumulando las pendientes por tramos, conforme á las condiciones del material móvil; adoptando el sistema articulado para curvas de pequeño rádio, y el grado de pendiente en relacion con la potencia y tipo de los motores. Tambien en algunos casos excepcionales hay que admitir radios menores de 30 metros tanto en carreteras como en los canales. Pero deben evitarse á todo trance las curvas de pequeño radio; sacrificando el capital de construccion al de explotacion, por los muchos peligros y graves inconvenientes que presentan al tráfico, los deterioros que ocasionan en el material fijo y móvil, y demás excesos de gastos para la buena conservacion.

114.—Casos que pueden presentarse.—Varios casos pueden ocurrir en el trazado de alineaciones circulares; ya con relacion á los puntos de contacto, ya respecto de otros que deben considerarse como de sujecion dentro del ángulo de las alineaciones tangentes. Dejando para despues los que se refieren á estos últimos, nos ocuparemos en primer lugar de los correspondientes á los puntos de contacto. Estos se reducen á tres que son: 1.° cuando dos arcos circulares se tocan interiormente: 2.° cuando dos alineaciones curvas se tocan exteriormente; y 3.° cuando dos arcos se cortan ó son exteriores uno á otro.

Primer caso.—*Si dos curvas circulares se tocan interiormente, la distancia de los centros* O y O′ *de los círculos es igual á la diferencia de los radios* (Geom.); y por consiguiente la traza de las dos alineaciones curvas que siguen una á continuacion de la otra, ó los arcos respectivos, vuelven su concavidad al mismo lado.

Fig. 43.



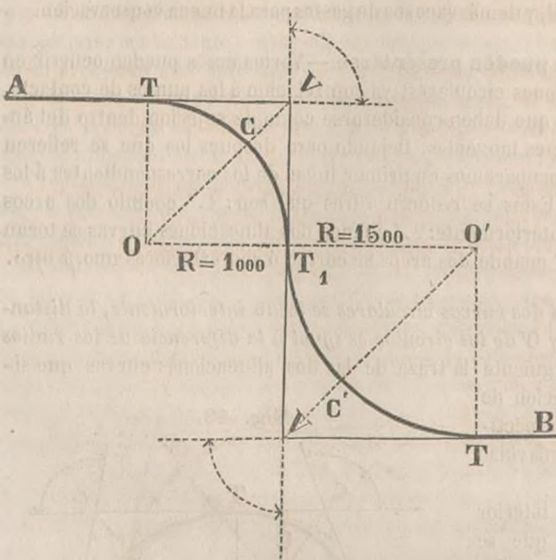
Sea el arco TCT_1, interior al $T_1C'T'$ (*fig.* 43), que se tocan en el punto T_1. En este caso conviene que la diferencia entre la longitud de los radios sea la menor posible, con el objeto de evitar cierta especie de garrotes y el paso brusco de la curva menor á la mayor y vice-versa.

Segundo caso.—*Si dos arcos de círculo se tocan exteriormente, la distancia de los centros* O y O′ *es igual á la suma de los radios*; y por lo mismo las dos alineaciones curvas vuelven su convexidad en sentido opuesto. Sean V y V′ (*fig.* 44) los vértices de las tangentes; TCT_1 y $T_1C'T'$ los dos arcos que se tocan exteriormente en el punto T_1 de contacto.

Desde luego se ve que ahora la convexidad de los dos arcos se halla á diferente lado, y por esta circunstancia las dos alineaciones circulares forman una *inflexion* en el punto de contacto.

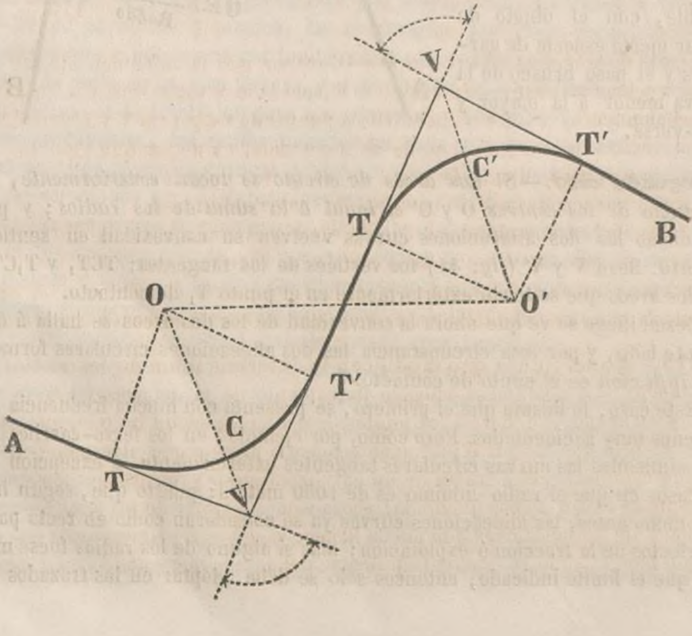
Este caso, lo mismo que el primero, se presenta con mucha frecuencia en terrenos muy accidentados. Pero como, por ejemplo, en los ferro-carriles no son admisibles las curvas circulares tangentes exteriormente, á excepcion de los casos en que el radio mínimo es de 1000 metros; puesto que, segun hemos dicho antes, las alineaciones curvas ya se consideran como en recta para los efectos de la traccion ó explotacion; mas si alguno de los radios fuese menor que el límite indicado, entonces solo se debe adoptar en los trazados de las vias de acordacion que pueden situarse los puntos tangenciales desequidistantes, y en las del servicio de estaciones, como veremos al final del presente capítulo; porque se desarrollan resistencias excesivas y no se puede marchar á gran velocidad por ser muy expuesto á descarrilamientos, cuando parte del convoy se halla en una de las curvas y la otra continúa recorriendo ya la que le sigue.

Fig. 44.



Con el fin de evitar estos graves inconvenientes, es necesario separar las dos alineaciones curvas tales como TCT′ y TC′T′ por un elemento de recta entre los puntos de tangencia T′ y T (*fig.* 45), cuya longitud mínima sea mayor ó cuando menos igual á la máxima de un tren

Fig. 45.

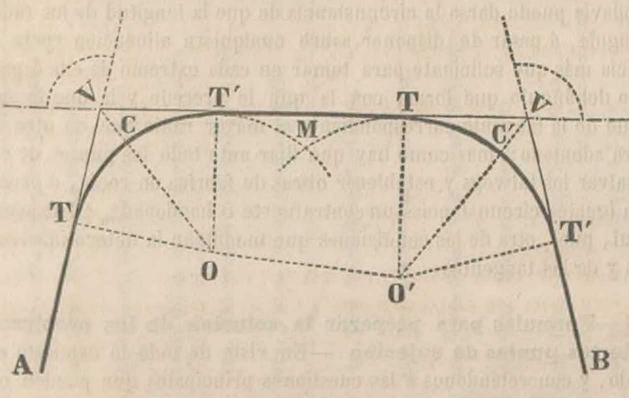


completo: está admitido como suficiente una recta de 100 metros de distancia. Es evidente que esta condicion disminuye la longitud de los radios, y por consiguiente aumenta el rozamiento; pero este inconveniente aun es preferible en el caso del radio mínimo; porque el elemento de recta intermedio permite que se pueda elevar el carril correspondiente á la parte convexa de ambas curvas, pasando insensiblemente del lado interior más bajo de una curva, al exterior de la otra más alto, y viceversa. Por este medio ingenioso aplicado al asiento de las vías férreas y al afirmado de las carreteras, se evita ó disminuye en gran parte el peligro de que puedan descarrilar los trenes, y volcar los carruajes.

Tercer caso.—*Si dos arcos circulares se cortan, la distancia de los centros* O *y* O′ *es menor que la suma de los radios, y mayor que su diferencia.*

Sean las dos curvas TCT′ y TC′T′ (*fig.* 46) que se cortan en el punto M;

Fig. 46.



siendo la distancia de los centros O y O′ mayor que la diferencia de los radios, vuelven su concavidad hácia un mismo lado y están separados por una alineacion recta, comprendida entre los puntos de tangencia T y T′; cuya longitud, aunque menor que la suma de los radios, es mayor que cada uno de ellos, y por consiguiente la traza de las curvas de union es más fácil y no ofrece tantos inconvenientes como en los casos anteriores.

Si las dos curvas circulares fuesen exteriores una á otra, la distancia de los centros seria mayor que la suma de los radios; y por consiguiente no presentaria ninguna dificultad su trazado, que podria considerarse aisladamente la cuestion del replanteo de cada una de las alineaciones curvas.

115.—Condiciones que modifican la determinacion de los radios.—Hasta aquí solo nos hemos ocupado únicamente de la determinacion de los radios en lo que se refiere á los puntos de contacto, segun los distintos casos y accidentes que aislada ó juntamente pueden presentarse al establecer una vía de comunicacion á través de un pais montañoso y en parajes en que el terreno es más ó ménos quebrado: ahora vamos á tratar de los puntos de sujecion y de las cuestiones que pueda haber, ya sobre las alineaciones tangentes, ó bien cuando se encuentran dentro del ángulo que estas forman menor de 180°, siempre que los puntos referidos sean compatibles con las condiciones del mejor trazado posible.

Mas como es necesario tener en cuenta la distancia de las alineaciones rectas, medida de vértice á vértice, y el ángulo que forman en su encuentro, para fijar sobre cada una de ellas la longitud de las tangentes geométricas de las curvas sucesivas en valores trigonométricos; así como tambien el elemento de recta que debe haber entre los puntos de tangencia más inmediatos, hay que tener muy presente lo indicado en el (2.° *y* 3.er *caso*). Pero si por la configuracion del terreno ú otro accidente fuese muy corta la distancia, que llamaremos *disponible*, de cada una de las alineaciones rectas que se cortan entre sí, es preciso limitarse á la menor longitud de que se pueda hacer uso en la determinacion de los puntos de contacto de dos alineaciones curvas consecutivas; y por consiguiente la mayor distancia disponible en la alineacion recta más corta, viene á ser precisamente una de las primeras condiciones que limita la extension de los radios de curvatura.

Todavía puede darse la circunstancia de que la longitud de los radios esté restringida, á pesar de disponer sobre cualquiera alineacion recta de una distancia más que suficiente para tomar en cada extremo de ella á partir del vértice del ángulo que forma con la que le precede y la que le sigue, la longitud de la tangente correspondiente al mayor radio que en otro caso se hubiera adoptado; mas como hay que fijar ante todo los puntos de contacto para salvar los talwegs y establecer obras de fábrica en recta, ó cruzar á la vez en iguales circunstancias un contrafuerte ú hondonada, estribacion, etc.; de aquí, pues, otra de las condiciones que modifican la determinacion de los radios y de las tangentes.

116.—Fórmulas para preparar la solucion de los problemas sobre ciertos puntos de sujecion.—En vista de todo lo expuesto en este capítulo, y concretándonos á las cuestiones principales que pueden ocurrir, vamos á resolver algunas de ellas, sirviéndonos al efecto de las fórmulas más sencillas ya conocidas, que, haciendo uso de las Tablas, se aplican con mucha facilidad para la resolucion de los problemas por medio de otros tantos ejemplos numéricos, para indicar el procedimiento en casos análogos; cuyas fórmulas, deducidas de las que ya se han enumerado, presentamos una coleccion de ellas para hallar unos elementos de curvas circulares en funcion de otros tomados como datos, segun indica el cuadro siguiente:

NUMEROS de órden.	DATOS.	INCOGNITAS.	FORMULAS.
1	Ang. de las alineaciones. Radio.	Tang. Sem-cuerda. Flecha. Sec. Semi-curva.	Lineas de las tablas multiplicadas por el Radio.
2	Ang. de las alineaciones { Semi-cuerda. Abscisa.	Tang. Orden. Sec. Semi-cuerda. Radio.	$\text{Radio.} = \frac{\text{Abscisa.}}{\text{Abscisa. Tab.}}$
3	Ang. de las alineaciones { Flecha. Ordenada.	Tang. Abscisa. Sec. Semi-curva. Radio.	$\text{Radio.} = \frac{\text{Ordenada.}}{\text{Ordenada. Tab.}}$
4	Ang. de las alineaciones. Tangente.	Abscisa. Orden. Secante. Semi-curva. Radio.	$\text{Radio.} = \frac{\text{Tang.}}{\text{Tang. Tab.}}$
5	Ang. de las alineaciones.. Secante.	Tang. Semi-cuerda. Flecha. Semi-curva. Radio.	$\text{Radio.} = \frac{\text{Secant.}}{\text{Secant. Tab.}}$
6	Ang. de las alineaciones.. Semi-curva.	Tang. Abscisa. Ordenada. Secante. Radio.	$\text{Radio.} = \frac{\text{Semi-curva.}}{\text{Semi-curva. Tab.}}$
7	Radio.. { Semi-cuerda. Abscisa.	Ang. Tang. Orden. Secan. Semi-curva.	$\text{Ang.} = \frac{\text{Abscisa.}}{\text{Radio.}} = \text{Absc. Tab.}$
8	Radio.. { Flecha. Ordenada.	Ang. Tang. Abscisa. Secant. Semi-curva.	$\text{Ang.} = \frac{\text{Ordenada.}}{\text{Radio.}} = \text{Ord. Tab.}$
9	Radio.. Tangente.	Ang. Semi-cuerda. Flecha. Secant. Semi-curva.	$\text{Ang.} = \frac{\text{Tangente.}}{\text{Radio.}} = \text{Tang. Tab.}$
10	Radio.. Secante.	Ang. Tang. Absc. Orden. Semi-curva.	$\text{Ang.} = \frac{\text{Secante.}}{\text{Radio.}} = \text{Sec. Tab.}$
11	Radio.. Semi-curva.	Ang. Tang. Semi-cuerda. Flecha. Secan.	$\text{Ang.} = \frac{\text{Semi-curva.}}{\text{Radio.}} = \text{Semi-curva. Tab.}$
12	Tangente. Secante.	Ang. Asc. Orden. Semi-curva. Radio.	$\text{Radio.} = \sqrt{\text{Tang}^2 + \text{Sec}^2}.$
13	{ Semi-cuerda. Abs. } { Flecha. Ord. }	Ang. Radio. Tang. Sec. Semi-curva.	$R = \frac{\left(\frac{\text{Abscisa}^2}{\text{Flecha}} + \text{Flecha.}\right)}{2}.$

El problema (*núm.* 1) se resuelve multiplicando los elementos de las tablas por el radio dado.

Para la solucion del (*núm.* 2) basta dividir como indica la fórmula la abscisa conocida por la que se halla en las tablas enfrente del ángulo dado; el cociente será la longitud del radio, que siendo determinada tambien la expresion del ángulo de las alineaciones, se obtiene los demás elementos como en el problema (*núm.* 1), multiplicándolos por el valor del radio hallado.

El mismo procedimiento se sigue respecto de los problemas (*núms.* 3, 4, 5 y 6).

Por lo que hace á la solucion de los problemas desde el (*núm.* 7 al 11), en los cuales se fijan como datos el radio y uno de los elementos geométricos, conviene observar que el segundo elemento será ya el resultado de la multiplicacion del radio por otro elemento del mismo nombre tomado de las tablas: de aquí se sigue que dividiendo este segundo dato por el primero, es decir, por su radio, el resultado nos suministrará el valor primitivo de los elementos que contienen las tablas; buscando en ellas dichos valores, se hallarán colocados sobre la misma horizontal los demás elementos y los ángulos de las alineaciones á que corresponden, y por lo tanto, la solucion de cada uno de estos problemas, se encuentra en el caso de los precedentes.

Para la resolucion de los problemas (*núms.* 12 y 13), bastará hallar el valor del radio, y despejar el de las incógnitas, quedando reducidas al caso de las fórmulas anteriores.

117.—Problemas y ejemplos numéricos.—Para simplificar y presentar en resúmen la cuestion general de los radios con toda la claridad hay que atender al mismo tiempo á los puntos de contacto y á los demás de sujecion compatibles que pueda haber señalado, dentro del ángulo menor de 180°, ó bien sobre las tangentes principales: esto supuesto, vamos á reducirla en términos concretos á tres casos distintos que pueden ocurrir, y á resolver los problemas por medio de otros tantos ejemplos numéricos, haciendo aplicacion de las fórmulas que contiene el cuadro precedente, á saber:

1.° Cuando el punto de referencia ó de sujecion se halla sobre una de las alineaciones rectas.

2.° Cuando el punto determinado se encuentra en la bisectriz del ángulo de las tangentes principales.

3.° Cuando el punto de sujecion está situado entre una de las alineaciones tangentes y la bisectriz del ángulo que forman.

Si el punto prefijado resultase fuera del ángulo de las alineaciones rectas, no habria más que desviarlas moviéndolas paralelamente á sí mismas, ó variando tambien la abertura del ángulo, para situarlas de manera que uno ó más puntos de sujecion queden dentro del que forman en su encuentro las tangentes principales, y así la cuestion está comprendida en alguno de los tres casos que se acaba de enumerar.

Primer ejemplo.—*Conocido el ángulo de las alineaciones ó de las tangentes de 152° 40′ y la tangente de 109ᵐ,43, distancia medida desde el punto de sujecion al vértice, hallar el radio y todos los demás elementos.*—Siendo las líneas geométricas y sus valores trigonométricos, proporcionales al radio de curvatura, para hallar la longitud de este nos serviremos de la misma proporcionalidad: recordando que el radio 1 es la unidad á que están referidos los valores trigonométricos de las tablas; llamando R al radio geométrico que se busca; $T = 109^m,43$ la tangente medida ó distancia disponible, y $t = 0,243157$ la tangente trigonométrica que corresponde al ángulo observado, podremos formar la proporcion siguiente:

$$t : 1 :: T : R = \frac{T}{t} = \frac{109\ ,43}{0^m,2431575} = 450.$$

Hallado ya el radio que es de 450 metros de longitud, solo falta multiplicar los demás elementos geométricos correspondientes al ángulo dado de 152° 40′ por R = 450.

	Tang.	Sec.	Semi-curva.
Para el radio 1	0,2431575	0,0291383	0,2385283
	450	450	550
Para R = 450	$109^m,420875$	$13^m,11235$	$107^m,533773$

Este ejemplo pudiera aplicarse al primer caso (*fig.* 44) acotando las líneas y los ángulos de las alineaciones para obtener la longitud del radio por medio de la distancia de que se puede disponer desde el punto T_1 de sujecion ó de contacto de los arcos, hasta el siguiente vértice V del ángulo dado; cuya distancia disponible, es precisamente la que mide la tangente geométrica que nos ha servido de dato, correspondiente al ángulo observado.

Si, por ejemplo, hubiese que dejar entre los puntos de tangencia T′ y T (*fig.* 46), algun elemento de recta, como se ha dicho en el segundo y tercer caso, habria que aumentar esta parte á la de la tangente que le precede, marcándola sobre la alineacion recta, y la diferencia entre esta suma y la total distancia de vértice á vértice, seria la longitud que se podria tomar para la tangente que sigue desde el punto de contacto fijado últimamente hasta el vértice; y por lo tanto el segundo y tercer caso se resuelve lo mismo que el primero.

Segundo ejemplo.—*Observado el ángulo de las alineaciones rectas expresado por 168° 21′, y conocida la distancia de $10^m,90$ sobre la bisectriz entre el punto de sujecion y el vértice del ángulo dado, determinar todos los demás elementos de la alineacion curva.*

Siendo $s = 0^m,0051903$ la parte exterior de la secante que para el ángulo 168° 21′ y el radio 1 presentan las tablas, y $S = 10^m,90$ la distancia disponible desde el punto referido al vértice del ángulo para la secante del arco de círculo que debe unir las alineaciones rectas, se obtendrá ante todo la expresion del radio R por medio de la proporcion

$$s : 1 :: S : R = \frac{S}{s} = \frac{10^m,90}{0,0051903} = 2100.$$

Determinada ya la longitud del radio R = 2100 metros, se multiplicarán por esta cantidad los valores trigonométricos correspondientes al ángulo de 168° 21', así tendremos

	Tangente	Secante	Semi-curva
Para el radio 1	0,1020171	0,0051903	0,1016654
	2100	2100	2100
Para R = 2100	214^m,23591	10^m,89963	213^m,49734

Del mismo modo se hubieran obtenido los valores geométricos de los demás elementos multiplicándolos por la longitud de 2100^m que tiene el radio determinado.

Tercer ejemplo.—*Conocido el ángulo de las alineacianes ó de las tangentes de 140° 28' y la distancia de 29^m,462 de la ordenada bajada desde el punto de sujecion situado entre la bisectriz del ángulo dado y una de las alineaciones rectas más próxima, hallar en funcion de estos datos el radio del arco de círculo que debe pasar por el punto fijado, la tangente, secante y desarrollo de la curva*, etc.

La longitud del radio R se determinará como en los ejemplos precedentes formando proporcion; para esto llamando $Y = 29^m,462$ á la ordenada medida, $y = 0,0589223$ el valor de la ordenada que para el ángulo de 140° 28' y el arco de círculo de radio 1 nos dan las tablas, tendremos

$$y : 1 :: Y : R = \frac{Y}{y} = \frac{29^m,462}{0,0589223} = 500.$$

Ahora multiplicando las líneas trigonométricas que nos presentan las tablas por los 500 metros que resulta tener el radio de la alineacion curva, obtendremos en valores geométricos todos los elementos correspondientes al ángulo de 140° 28', y serán

	Tangente	Secante	Semi-curv.
Para el radio 1	0,3593651	0,0626115	0,3449934
	500	500	500.
Para R = 500^m	179^m,68255	31^m,30575	172^m,4967

Por último, á pesar de que en la ejecucion solo pueden apreciarse las distancias parciales medidas con la cinta hasta los dobles milímetros, esto no obstante, conviene que el cálculo se haga con las siete cifras decimales que presentan las tablas, con el objeto de que los resultados aproximados solo á milímetros sean bastante exactos, sin que los errores parciales á causa de las fracciones despreciadas ó aumentadas en la última cifra, se vayan acumulando por defecto ó por exceso.

118.—Observaciones.—En vista de todo lo expuesto acerca de la determinacion de los radios, conviene observar que si se hubiese calculado expresamente con la mayor aproximacion el rozamiento de los vehículos en las curvas circulares para cada radio de los admitidos hoy dia en la práctica, por el esfuerzo adicional que emplean los motores en cada momento al cambiar de direccion, en su marcha constante, por unidad de longitud del arco; es evidente que cuanto más aumente el desarrollo de una curva de enlace de radio dado, tanto mayor será la suma total de esfuerzos adicionales y de resistencias que experimentarán los vehículos durante el trayecto del arco recorrido, y en la misma relacion la fuerza de traccion ó impulsion que habrá de ejercer el motor para efectuar el desvío; así como igualmente los gastos de explotacion y el deterioro del material fijo y móvil en las vias terrestres por el total desarrollo de cada una de las alineaciones curvas. Hé aquí una de los razones porque se ha dicho (*núm.* 112), que debia procurarse mucho al establecer los ángulos, que su abertura fuese la mayor posible, con el doble objeto de simplificar las operaciones y de disminuir cuanto es dable el total desarrollo de las alineaciones curvas.

Es preciso tambien cuando hay que establecer varios arcos consecutivos de diferente radio, combinarlos entre sí de manera que la longitud de estos aumente ó disminuya gradualmente para que no haya garrotes y el paso de unos á otros sea imperceptible, sacando al mismo tiempo el mejor partido de las inflexiones del terreno compatible con la mayor facilidad y economía en la explotacion.

De suerte que podemos deducir algunas conclusiones que nos sirvan hasta cierto punto de regla para recordarlas y aplicarlas oportunamente á los varios casos que ocurren en la ejecucion, á saber:

1.ª Que á igualdad de radio la longitud de las tangentes y el desarrollo de las alineaciones curvas, está en razon inversa de la graduac ion de los ángulos que forman entre sí las alineaciones rectas.

2.ª Que para un mismo radio el paso de los trenes en los puntos de entrada y salida de las curvas, es tanto más fácil y ménos expuesto á descarrilamientos en las vias férreas y á funestos accidentes en las ordinarias, cuanto mayor es la abertura del ángulo de las tangentes principales y recíprocamente.

3.ª Cuando haya que adoptar dos ó mas arcos de círculo de diversa amplitud debe procurarse en los puntos de contacto, que la diferencia entre la longitud de los radios sea la menor posible, para evitar en el paso de unos á otros el cambio brusco de los trenes.

4.ª Que las combinaciones de tres ó más arcos seguidos cuando vuelven en un mismo sentido, deberán establecerse de modo que la alineacion curva en su conjunto aparezca aproximándose más ó ménos á la forma de las ramas de la elipse ó de la parábola, segun que la curvatura de los arcos extremos se acerque hasta confundirse casi con las alineaciones rectas, hallándose los puntos de tangencia á desigual distancia del vértice de la curva del centro si las ramas no fuesen simétricas.

5.ª Cuando la longitud de los radios es igual ó mayor de 1000 metros, se consideran ya las alineaciones curvas como en recta para los efectos consiguientes á la explotacion de los caminos de hierro, y $100^{m},00$ para carreteras y canales.

6.ª Que si el radio de curvatura fuese menor de 300 metros para las vias férreas y de 30 en las ordinarias, habrá que disminuir las pendientes y variar en las primeras el tipo de los motores y las condiciones de la vía, ó bien adoptar el sistema del material móvil articulado, para evitar los grandes rozamientos: mientras que en las segundas ya se hace difícil la circulacion; siendo ya muy considerable la fuerza de impulsion con que los vehículos tienden en su desvio á marchar por la tangente ó á descarrilar siguiendo en pendiente fuerte.

Tambien conviene advertir, que si para simplificar el cálculo en los tres problemas últimamente presentados como otros tantos ejemplos numéricos, hemos procurado que la longitud de los radios fuese en números redondos, no sucede así en la aplicacion; porque ordinariamente resultan fraccionarios, cuando se calculan unos elementos que penden de otros datos, ó cuando hay que atender á los puntos forzados ó de sujecion. Se comprende fácilmente la gran ventaja de las tablas calculadas en funcion del radio-unidad y de los ángulos expresados en grados, minutos, etc., sobre las diversas tablas que hoy todavía se usan para el trazado de curvas combinadas para cierto número de ángulos expresados en grados, y únicamente para radios determinados tambien en números redondos, que por lo comun crecen de 50 en 50 ó de 100 en 100; por consiguiente solo en casos particulares ó en terreno fácil pueden admitirse, subordinando á este sistema rutinario las condiciones á que deben satisfacer los buenos trazados al establecer la posicion de alineaciones rectas y curvas en terrenos accidentados, cualquiera que sea la graduacion de los ángulos expresados en grados, minutos, segundos, etc.; así como la longitud de los radios de curvatura.

Tal es el procedimiento segun los distintos casos y los accidentes de cada caso que pueden presentarse al hacer un trazado, adoptando una explotacion especial con pendientes económicas para los tramos en que se atraviesan parajes muy quebrados, haciendo uso de frenos enérgicos ó automotores y siguiendo el mismo sistema metódico en terrenos más ó menos accidentados.

119.— Establecimiento de alineaciones curvas. — Se pueden seguir dos sistemas para trazar las curvas circulares, á saber: Por movimiento contínuo, y por puntos sucesivos. Cuando el radio de curvatura es pequeño, hay muchos medios auxiliares para establecer los arcos de círculo sobre un terreno llano y despejado: el primer sistema por movimiento contínuo se ejecuta con una cuerda, cadena, baibel, etc., que se fija uno de sus extremos en el centro del arco, y con un punzon ó estaca en el otro extremo se va marcando la traza sobre una superficie plana. Mas si la longitud del radio excede de cierto límite, como sucede en las vias férreas y aun en las ordinarias, ó cuando el terreno es accidentado, seria muy difícil y costoso si se emplease el primer sistema; y además de la inexactitud, tal vez hubiera sido imposible por la gran longitud que suelen tener los radios y los obstáculos insuperables que con frecuencia se presentan en los parajes quebrados.

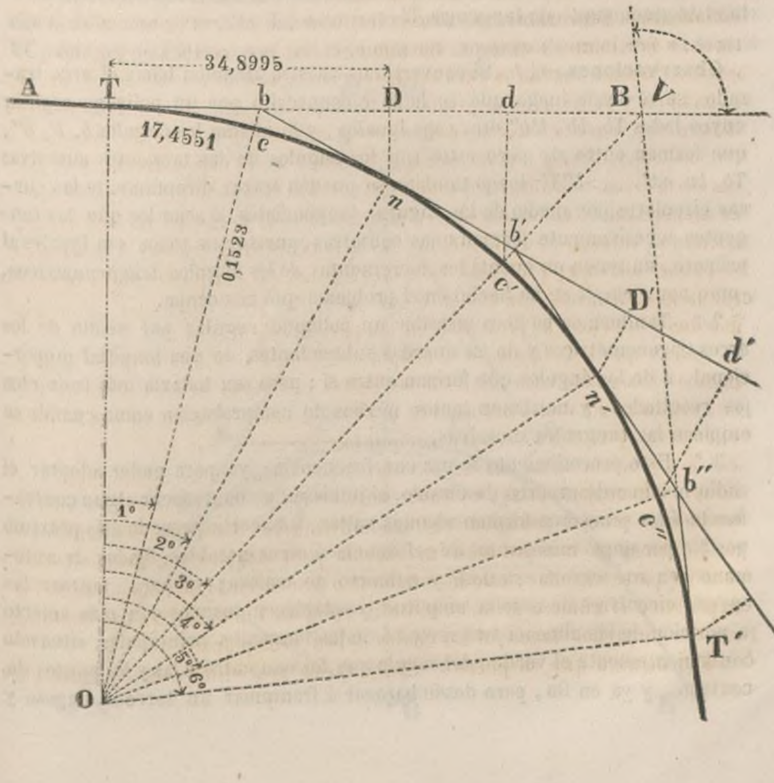
Así es que generalmente se adopta el segundo sistema; es decir, que conocido el ángulo de las alineaciones rectas y el radio de las curvas de enlace, segun se ha dicho (*núms.* 112 *y* 113), se puede prescindir del centro de cada arco, y se fijan siempre por puntos marcando con piquetes el vértice, entrada y salida de las curvas circulares por medio de las tablas; pero cuando hay que replantearlas, no basta señalar los puntos principales, sino que tambien es preciso continuar el trazado definitivo, determinando tantos puntos intermedios cuantos sean necesarios para establecer convenientemente toda la parte circular, circunscribiendo é inscribiendo polígonos regulares y duplicando el número de lados hasta llegar á un límite tal, que se confundan con los pequeños arcos, á los cuales deben reemplazar.

Por manera que se pueden seguir varios procedimientos, y entre ellas, citaremos algunos de los más usuales, como son: 1.° Por los sistemas de coordenadas: 2.° Por los ángulos tangenciales: 3.° Por las cuerdas subtendentes: 4.° Por interseccion de las cuerdas: 5.° Por la desviacion tangencial: 6.° Por las cuerdas subduplas del arco: 7.° Por las cuerdas sucesivas y sus flechas correspondientes: 8.° Por los senos y cosenoversos: 9.° Por la longitud de las tangentes sucesivas y el doble seno de la mitad del ángulo formado en su encuentro: 10. Por la longitud de las cuerdas sucesivas y el doble seno de la mitad del ángulo que cada una forma con la anterior: 11. Por las tangentes y la parte exterior de la secante correspondiente: 12. Por la longitud de la tangente del arco y la parte exterior de la secante del arco doble, etc.

Dejando para el siguiente capítulo los sistemas de coordenadas, solo presentaremos ahora tres procedimientos que son los que se pueden verificar por medio de las operaciones más fáciles, más expeditas, y sobre todo, las más exactas, haciendo uso de las tablas, á saber: 1.° Por las tangentes ó cuerdas sucesivas. 2.° Por la duplicacion de las tangentes ó de las cuerdas; y 3.° por el trazado de las vías de acordacion.

120.—Trazado de curvas por tangentes sucesivas.—Observaciones.—*Dado el radio de 1000 metros, por ejemplo, trazar una curva circular por incrementos constantes del arco, partiendo del punto de tangencia ó de otro situado sobre una alineacion recta.*—Sea AB (*fig.* 47), la recta dada

Fig. 47.



y T el punto de contacto ú otro situado sobre ella. Sea OT = R = 1000 metros el radio para los arcos ó ángulos trigonométricos en graduacion creciente desde 0 á 30'; de 1° en 1°; de 10° en 10°; de 20° en 20°, etc., y tendremos consultando la figura, en la que se suponen los incrementos tomados de grado en grado, planteada la cuestion, á saber:

$$Tb = (\text{tang. } 1°) = 17^m,4551 \; ; \quad y \quad bc = (\text{sec. } 1° - R) = 0^m,1523$$
$$TD = (\text{sen. } 2°) = 34^m,8995 \; ; \quad y \quad Dn = (\text{senov. } 2°) = 0^m,6092.$$

Como $bn = Tb$ y el ángulo trigonométrico $2bOT = dbn = 2°$, la línea bn y el punto n se ha determinado dos veces, lo cual es un medio de verificacion.

Así pues, siempre se tiene

$$nb' = Tb = 17^m,4551$$
$$b'c' = bc = 0^m,1523$$
$$nD' = TD = 34^m,8995 = nb' + (34^m,8995 - 17^m,4551)$$
$$D'n' = Dn = 0^m,6092$$

y

$$D'b'n' = Dbn = 2°$$

Todavía conviene notar que

$$Td = (\text{sen. } 3°) = 52^m,336$$
$$dc' = (\text{senov. } 3°) = 1^m,371 \; ;$$

y hé aquí otra nueva comprobacion. Del mismo modo se puede continuar hasta el segundo punto de tangencia T'.

Observaciones.—1.ª Si convertimos nuestra atencion hácia el arco trazado, se vé desde luego que se halla circunscrito por un polígono regular cuyos lados Tb, bb', $b'b''$ etc., son iguales, y lo mismo los ángulos b, b', b'', que forman entre sí; pero estos son los ángulos de las tangentes sucesivas Tb, bn, nb'..... : $b''T'$: luego tambien se pueden trazar directamente las curvas circulares por medio de los ángulos tangenciales, ó sean los que las tangentes sucesivamente forman unas con otras, puesto que todos son iguales al primero, sin tener en cuenta los incrementos de los ángulos trigonométricos, como por ejemplo se ha hecho en el problema que nos ocupa.

2.ª Tambien se pudiera inscribir un polígono regular por medio de los arcos trigonométricos y de las cuerdas subtendentes, de una longitud proporcional, ó de los ángulos que forman entre sí; pero son todavia más inexactos los resultados, y no tienen tantos medios de comprobacion como cuando se emplean las tangentes sucesivas.

3.ª Este procedimiento se usa con frecuencia; ya para poder adoptar el radio máximo de un arco de círculo, si hubiese que contornear algun contrafuerte ó los senos que forman algunos valles, y hacerle pasar lo más próximo posible por dos ó más puntos de referencia ú otros notables fijados de antemano en un terreno sinuoso y cubierto de maleza; ya para tantear las curvas circulares de mucha amplitud y establecer despues con más acierto la posicion de las alineaciones rectas ó de las tangentes principales, situando convenientemente el vértice del ángulo que forman entre ellas y los puntos de contacto, y ya en fin, para desembarazar ó franquear un terreno fragoso y demasiado escabroso ántes de efectuar el replanteo de las alineaciones curvas, ó sea el trazado definitivo.

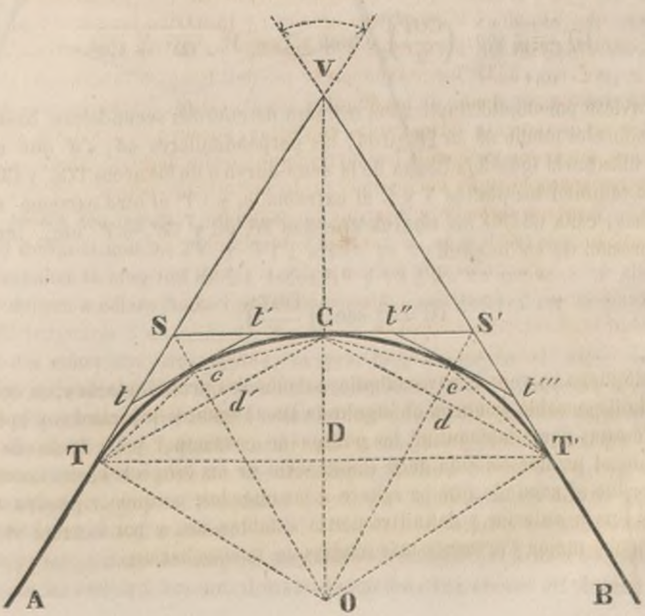
Pero es necesario de todos modos operar con muchísimo cuidado y hacer en cada punto correspondiente á una alineacion curva todas las verificaciones, utilizando oportunamente los distintos medios que las tablas trigonométricas nos suministran.

Así, pues, si estuviese determinado el ángulo de las alineaciones rectas y fijados los puntos de contacto, es preferible partir de ambos puntos de tangencia y terminar en el vértice del arco: de esta manera los errores que hayan podido cometerse en cualquiera de las semi-curvas, se evita que se vayan acumulando y se trasmitan de una rama á la otra; sirviendo de comprobacion el vértice del arco circular, que ya ha debido fijarse al mismo tiempo que la entrada y salida de cada alineacion curva.

121.—Duplicacion de las tangentes y de las cuerdas.—Es muy conveniente duplicar el número de las tangentes ó de las cuerdas que sirven de base á las ordenadas, con el objeto de disminuir su longitud, segun veremos más adelante. Por regla general, es mejor duplicar el número de las tangentes, cuando la mayor ordenada excede de 40 metros, ó bien cuando se trata de circunscribir al arco un polígono regular cuyos lados sean tan pequeños como se quieran, hasta el límite en que las tangentes se confundan con los arcos. Hé aquí como se procede.

Despues de haber fijado los puntos de tangencia T y T′ (*fig.* 48) y el vértice C de la curva, se tira por este punto una perpendicular SS′ á la bisectriz VC; esta perpendicular por ser tangente en el punto C, sustituye al ángulo

Fig. 48.



de las alineaciones AVB por otros dos secundarios CST y CS′T′, que tiene cada uno de ellos su vértice situado sobre las tangentes pricipales y un valor igual á $\frac{1}{2}$ V + 90°.

En efecto, siendo por construccion la tangente SS′ perpendicular á CV que biseca el ángulo de las alineaciones rectas, resultan dos triángulos SCV y S′CV rectángulos en C. Ahora bien, sabiendo (Geom.) que: *todo ángulo CST formado por un lado CS de un triángulo SVC y la prolongacion de otro lado SV, es igual á la suma de los ángulos en V y en C no adyacentes á él*; pero el ángulo $\frac{1}{2}$ V es mitad del AVB de las alineaciones ó de las tangentes principales, y el ángulo C = 90°; luego CST = CS′T′ = $\frac{1}{2}$ V + 90°. En seguida se opera sobre cada uno de aquellos ángulos como sobre el ángulo primitivo y calculando la longitud de las tangentes y de todas las demás líneas de las cuales haya que hacer uso, obtendremos los puntos t, t', t'', t''', etc., de contacto y los vértices C, C′, C″, etc.; y así se continuaria en las dos semi-curvas que constituyen el arco total. Si las últimas tangentes secundarias fuesen todavía mayores de $50^m,00$, se haria otra nueva division en cada uno de los ángulos suplementarios, y así sucesivamente se obtienen cuantos puntos intermedios se puedan desear hasta que próximamente el polígono circunscrito coincida en todas sus partes con la alineacion curva.

Duplicacion de las cuerdas.—Cuando hay necesidad de proceder por medio de las cuerdas, casi siempre es necesario reemplazar la cuerda primitiva TT′ por las dos cuerdas secundarias TC y CT′ que desde luego están determinadas por los primeros elementos de la curva circular: la longitud de las cuerdas secundarias, es igual al doble seno de la mitad del ángulo trigonométrico. Así para el ángulo COT (*fig*. 48), tendremos

$$CT = 2 \text{ sen. } \left(\frac{COT}{2}\right), \text{ ó bien } CT = \sqrt{\overline{TD}^2 + \overline{CD}^2}.$$

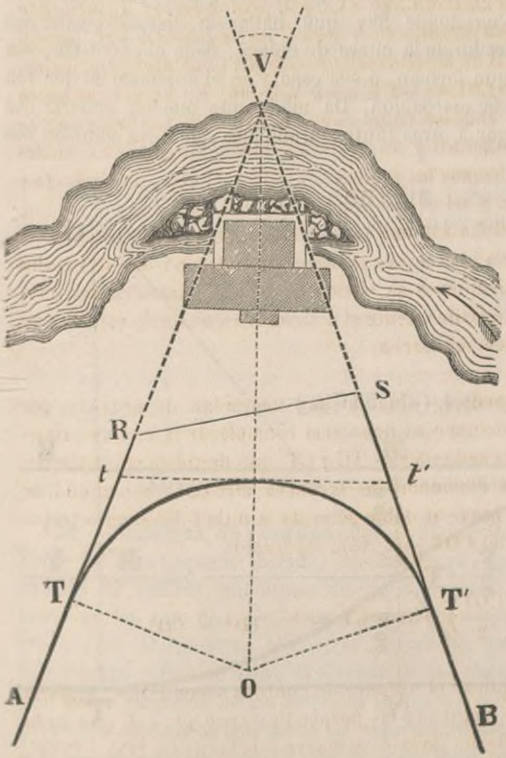
Si tuviese por objeto duplicar el número de cuerdas secundarias, bastaria elevar sobre el medio de su longitud, las perpendiculares cd, $c'd'$ que cada una de ellas seria igual á la flecha de la semi-curva ó de los arcos TCC y CC′T′; uniendo tambien los puntos T y C al extremo c, y CT′ al otro extremo c' de las flechas, cada una de las nuevas cuerdas Tc, cC y Cc', c'T′ etc., tendrá por expresion de su longitud

$$TC = 2 \text{ sen. } \left(\frac{COT}{4}\right).$$

Desde luego se ve que por cualquiera de los dos procedimientos, es igualmente indispensable conocer el ángulo de las tangentes principales y la longitud de estas para determinar los puntos de contacto T y T′: de donde resulta que el primer sistema de la duplicacion de las tangentes, casi siempre es preferible al segundo que se refiere á las cuerdas; porque se pueden utilizar las líneas anterior y definitivamente establecidas, y por lo tanto se verifica mucho mejor y presenta más medios de comprobacion.

122.—Observacion importante.—Sucede con frecuencia que, ya por ser inaccesible el vértice V del ángulo de las alineaciones y las rectas AV y BV (*fig.* 49) que le forman, á cierta distancia de su encuentro, ó bien, cuando entre los puntos de contacto y la interseccion de las tangentes principales hay algunos obstáculos: como rios, bosques, etc., es necesario en tales casos establecer convenientemente una trasversal cualquiera RS; cuya traza pueda descubrirse en toda su extension, y de modo que corte en dos puntos accesibles R y S las alineaciones rectas AV y VB.

Fig. 49.



Despues que se haya medido la longitud de la trasversal y los ángulos de los puntos R y S, se conocerá la base del triángulo RSV y los dos ángulos adyacentes R y S; y por consiguiente el ángulo del vértice V será

$$V = 180^\circ - (R + S),$$

y los lados RV y VS se conocerán por la (*fórs.* 16 y 17 del *núm.* 16, 1.er *caso*.)

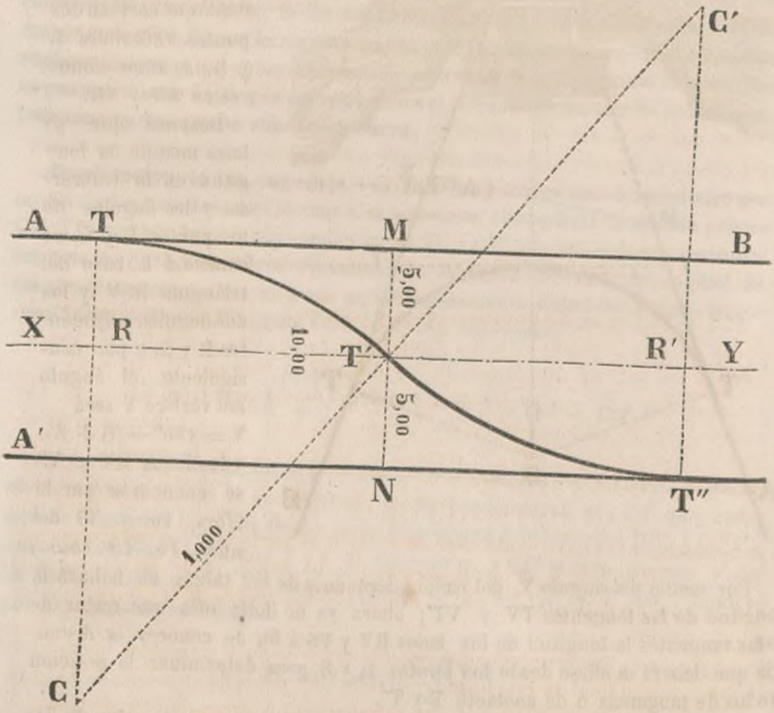
Por medio del ángulo V, del radio adoptado y de las tablas se hallará la longitud de las tangentes TV y VT′; ahora ya no falta más que restar de estas tangentes la longitud de los lados RV y VS á fin de conocer la distancia que deberá medirse desde los puntos R y S para determinar la posicion de los de tangencia ó de contacto T y T′.

Una vez conocidos estos puntos, todavía falta averiguar el valor de las tangentes secundarias. Los ángulos de estas tangentes son siempre iguales y determinados, aumentando 90° á la mitad del ángulo de las tangentes principales: de suerte que bastará hallar las tangentes iguales $Tt = T't'$, que nos darán la posicion de los dos vértices secundarios t y t'; y por lo tanto la direccion y posicion de las tangentes tt', y así sucesivamente como hemos dicho en el número precedente.

Este procedimiento se emplea tambien con mucha frecuencia cuando los ángulos de las alineaciones son demasiado agudos; con lo cual se obtiene por medio del cálculo, la longitud de las tangentes mucho más fácil y exactamente que por la medicion ordinaria.

123.—Trazado de las vias de acordacion.—Se presenta algunas veces esta cuestion, ya para empalmar dos líneas férreas paralelas, trazadas en el mismo sentido ó en el opuesto, más ó ménos distantes entre sí, ya especialmente en los cambios de via ó apartaderos que tienen lugar para el servicio de estaciones; en donde hay que hallar la distancia entre los puntos tangenciales y el radio de la curva de enlace, dado el entre-eje, sin que se conozca el ángulo que forman, ó sea *cero*, y en el supuesto de que son paralelas cerca del punto de acordacion. De modo que pueden ocurrir dos casos distintos que dan lugar á otros tantos problemas, de cuya solucion nos vamos á ocupar ahora.

Fig. 50.



Problema I.—*Dado el radio del arco de acordacion de dos vias paralelas y el entre-eje, hallar la distancia entre los puntos de tangencia.*—Sea el radio $CT = C'T' = 1000^m,00$ (*fig.* 50): y sea $MN = 10^m,00$ el entre-eje de las vías paralelas AB y A′T″; cuya mitad $MT' = 5^m,00$. Las distancias TN y NT″ se determinan fácilmente. En el triángulo rectángulo CRT′, conocemos el lado $CR = (1000^m,00 - 5^m,00) = 995^m,00$; el lado $CT' = 1000^m,00$ y el ángulo recto en R. Así pues, el valor de RT′ será (*núm.* 17, 2.° *caso*).

$$RT' = \sqrt{1000^2 - 995,^2} = 99^m,88.$$

De donde resulta 199m,76 para valor total de la distancia entre los puntos de tangencia T y T''.

Problema II.— *Hallar el radio conocida la longitud entre los puntos de tangencia y el entre-eje de las vias.*—Sea la distancia MT = NT'' = 99m,88 (*fig.* 50): el entre-eje MN = 10m,00; y la mitad MT' = 5m,00.

Este problema se resuelve por la expresion (13) del (*núm.* 116) que figura en el cuadro; conociendo la flecha y la abscisa ó semi-cuerda RT' = T'R' = 99m,88 hay que determinar el radio R por la fórmula

$$\text{Radio} = \frac{\left(\dfrac{\overline{\text{Semi-cuerda}}^2}{\text{Flecha}} + \text{Flecha}\right)}{2}.$$

Siendo la flecha RT = MT' = 5m,00 la longitud del radio R se hallará, sustituyendo estos valores conocidos en la expresion anterior, que nos dá

$$\text{Radio} = \frac{\left(\dfrac{99{,}88^2}{5{,}00} + 5{,}00\right)}{2} = 1000^{m}{,}00.$$

CAPÍTULO III.

CÁLCULO DE COORDENADAS Y REPLANTEO DE CURVAS.

124.—Sistemas de coordenadas.— Siguiendo el método adoptado en el curso de este pequeño tratado, vamos ahora, en fin, á determinar por el cálculo los valores numéricos de los diferentes sistemas de coordenadas, tanto de las que con preferencia conviene emplear para el replanteo inmediato de alineaciones circulares, como las que deben aplicarse al establecimiento definitivo sobre el terreno de las curvas planas en general; segun la investigacion de las fórmulas indicadas en las respectivas secciones, partiendo desde el orígen hasta las expresiones más sencillas y concretas que será mucho más conveniente usar en cada caso particular, y muy especialmente en virtud de la ámplia discusion que ha tenido lugar en la segunda seccion del presente tratado con el propio objeto, acerca de las curvas de segundo grado.

Así, pues, nos ocuparemos á seguida del cálculo y elementos necesarios; presentando al final de este libro tres tablas diferentes de coordenadas para su replanteo, y empezando por la que se refiere á los arcos de círculo trazados por puntos sobre el terreno.

125.—Coordenadas rectangulares.—En general, además de los puntos principales de la entrada, vértice y salida de las curvas circulares que determinan las marcas ó piquetes, es indispensable fijar otros intermedios mucho más próximos entre sí, cuando se trata del replanteo, que por el procedimiento indicado anteriormente. Esto se consigue con mucha facilidad calculando y haciendo aplicacion de las abscisas y ordenadas que se designan bajo el nombre comun de *coordenadas rectangulares*.

Aunque estas se calculan y emplean en funcion de los radios y de las tangentes, como tambien de las cuerdas, sin embargo, nosotros solo nos ocuparemos de estos dos últimos procedimientos; porque por medio de las tangentes ó de las cuerdas se pueden obtener sencillamente todas las demás.

Los sistemas de coordenadas adoptados con preferencia se pueden reducir á seis, que son: 1.° Coordenadas de los ángulos trigonométricos que dán sobre el arco correspondiente puntos equidistantes por incrementos enteros ó fraccionarios. 2.° Coordenadas de puntos equidistantes tomadas sobre las tangentes por incrementos constantes. 3.° Coordenadas por equidistancias fijadas sobre el arco en decámetros ó por incrementos de 10 en 10 metros. 4.° Coordenadas de puntos desequidistantes sobre el arco por incrementos fraccionarios. 5.° Coordenadas en funcion de las cuerdas sub-tendentes. 6.° Combinacion de coordenadas en funcion de las cuerdas y de las tangentes paralelas que dán ordenadas complementarias.

126.—Coordenadas de los ángulos trigonométricos.—Las tablas trigonométricas forman el más vasto sistema de coordenadas para los arcos correspondientes á la division del círculo de radio 1, por medio de los senos y cosenos, senoversos y cosenoversos, etc.; puesto que para cada uno de ellos presentan la abscisa, la ordenada y tambien el desarrollo circular, las cuales no hay más que multiplicarlas por el radio dado, para que puedan ser aplicables á todos los casos sin ninguna excepcion.

127.—Coordenadas de puntos equidistantes fijados sobre las tangentes por incrementos enteros.—En este caso solo se propone determinar las coordenadas aplicándolo á todos los múltiplos de 1, 5, 10, 20, etc., ó de cualquier otro número exacto de metros medidos sobre la tangente, á partir del punto de contacto.

Si se tratase de hallar por medio de las tablas trigonométricas y para un radio de 100 metros, las ordenadas correspondientes á las abscisas decamétricas de 0 hasta 80 metros, se dispondrán los datos y los resultados del cálculo segun indica el siguiente cuadro

SENOS Ó ABSCISAS.		SENOVERSO Ú ORDENADAS.		OBSERVACIONES.
dadas para R — 100	de las tablas.	de las tablas.	para R = 100.	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	La segunda columna expresa los cocientes de la primera casilla dividida por el radio; así
10	0,100	0,005017	0,5017	
20	0,200	0,020220	2,0220	$\frac{10}{100}$ = 0,100 igual á la abscisa para
30	0,300	0,046065	4,6065	
40	0,400	0,083463	8,3463	R = 1.
50	0,500	0,133975	13,3975	La tercera columna contiene las ordenadas halladas en las tablas por
60	0,600	0,199966	19,9966	medio de las abscisas de la segunda casilla.
70	0,700	0,285833	28,5833	
80	0,800	0,399929	39,9929	La cuarta columna es el producto de la tercera por el radio dado.

128.—Coordenadas tomadas sobre el arco en decámetros ó por incrementos de 10 en 10 metros.—El empleo de este sistema dá lugar á dos procedimientos. Consiste el primero, en determinar los puntos marcados sobre el arco por equidistancias circulares, calculadas ordinariamente por incrementos de 10 en 10 metros, á partir de cada punto de tangencia; de donde resulta que hay una interrupcion en las equidistancias entre los dos puntos de contacto marcados, é igualmente distantes de la secante ó del vértice de las tangentes principales.

El segundo procedimiento está reducido á calcular las coordenadas por incrementos desiguales, de puntos que se hallan á diferentes distancias unos de otros; cuyas distancias parciales se van sumando para tener las generales con relacion al orígen ó punto de partida, como veremos en el siguiente número.

La disposicion que deberá darse en casos análogos á los datos y elementos concernientes al objeto, se indican en el siguiente cuadro preparado para obtener las diez primeras coordenadas de una curva circular que tiene 500 metros de radio.

Incremento del ángulo.	Arcos dados. — R = 500.	DATOS TOMADOS DE LAS TABLAS. Abscisas.	Ordenadas.	PARA R = 500. Abscs.	Orden.	OBSERVACIONES.
1.ª —	2.ª —	3.ª —	4.ª —	5.ª —	6.ª —	
4125″	10	0,019962	0,000199	9,981	0,0995	La primera casilla expresa el valor angular de los arcos en segundos, y está formada por la adicion sucesivá del primer ángulo. La segunda contiene las equidistancias por incrementos de 10 en 10 metros á partir de la tangente. La tercera y la cuarta presentan los senos ó abscisas y los senoversos ú ordenadas de los ángulos tomados de las tablas que tienen la unidad por radio. Y por último, multiplicando las cantidades de las dos columnas por el radio dado R = 500, se obtiene el valor de las abscisas y ordenadas de las dos últimas casillas.
8250	20	0,039986	0,000800	19,993	0,4000	
12375	30	0,059943	0,001797	29,971	0,8965	
16500	40	0,079909	0,003198	39,954	1,599	
20625	50	0,099826	0,004994	49,913	2.497	
24750	60	0,119704	0,007190	59,952	3,595	
28875	70	0,139533	0,009883	69,766	4,942	
33000	80	0,159307	0,012771	79,654	6,386	
37125	90	0,178972	0,016154	89,486	8,077	
41250″	100	0,198655	0,019931	99,328	9,966	

Conocido el incremento de los arcos en decámetros y la longitud del radio R = 500, se deduce fácilmente el valor de los ángulos de la 1.ª casilla ó de los arcos correspondientes que aparecen en la 2.ª columna; determinando antes el valor angular del arco de 1 metro de longitud por la expresion

$$\frac{360^\circ}{2\pi R}=\frac{360^\circ}{2\times 3{,}14159265\times R}=\frac{1296000''}{6{,}2831853\times 500}=\frac{129600''}{3141^m{,}59265}=412'',5.$$

De suerte que habiendo reducido á 1296000 segundos los 360 grados de la circunferencia de 500 metros de radio, y dividido por su total desarrollo de $3141^m,59265$, hemos obtenido $412'',5$, valor angular por unidad de longitud de cada arco; pero como el desarrollo de los arcos de las equidistancias circulares está dado por incrementos de 10 en 10 metros, es evidente que el valor del ángulo ó del arco correspondiente, tomado por unidad, expresado por $412'',5$ habrá que multiplicarle por la misma cantidad de 10 metros: de donde resultan los $4125''$ del primer ángulo que figura al principio de la 1.ª columna.

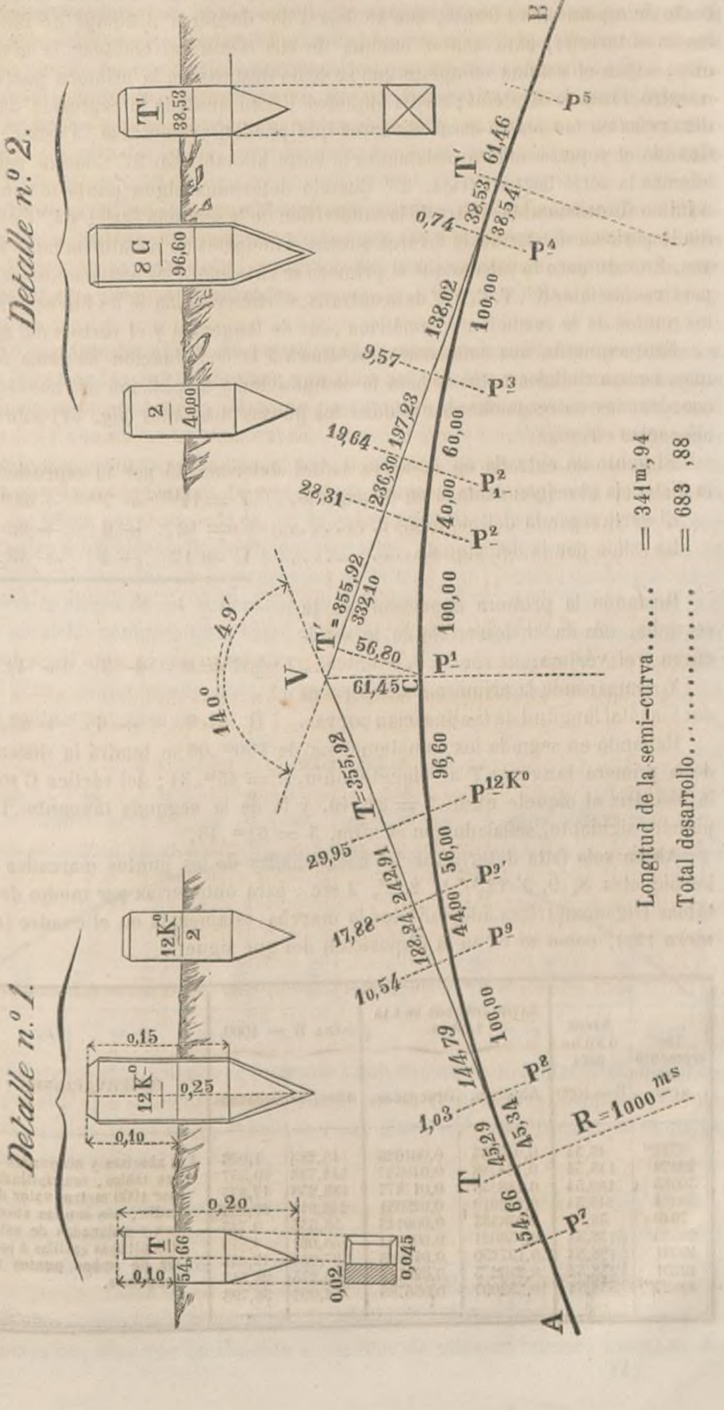
129.—Coordenadas de puntos desequidistantes por incrementos fraccionarios.—Con respecto al segundo procedimiento arriba indicado, hay que calcular directamente todos los puntos de la curva en relacion con la medicion kilométrica del trazado general desde su orígen; empezando por determinar la posicion de todos los piquetes hectométricos á los que deben referirse los de los puntos intermedios, tales como los de tangencia y vértice de las curvas, é igualmente los máximos y mínimos, etc.

Despues de haber calculado los puntos principales que dán la posicion de las tangentes T y T′ (*fig.* 51) del vértice C de la curva sobre la bisectriz y el desarrollo, se mide al tiempo del replanteo la distancia del último piquete hectométrico á la entrada de la curva, que segun el ejemplo propuesto es de $54^m,66$, la cual se halla acotada en la figura entre $p\overset{7}{-}$ y T; midiendo en seguida el complemento de 100 metros, se tendrá la distancia de la primera tangente T al piquete $p\overset{8}{-}$ señalado con el número 8, cuyo complemento es igual á $45^m,34$: el vértice C del arco situado sobre la bisectriz, dista $96^m,60$ del piquete $P\overset{12\,k.}{—}$ que marca los kilómetros; y el punto de contacto de la segunda tangente T′ está separado del piquete $p\overset{4}{-}$ por una distancia de $38^m,54$. Del mismo modo se han acotado las distancias de los piquetes intermedios p'^9, $p_1\overset{2}{-}$, etc., colocados en los puntos máximos y mínimos ú otros notables que ha sido conveniente determinar y señalar refiriéndolos al piquetage del trazado general.

Los piquetes están numerados por séries de 10 que son las partes en que se divide cada kilómetro. Por consiguiente todos ellos tienen dos numeraciones: 1.ª la de la série de kilómetros á que pertenecen; y 2.ª la del número correspondiente á cada una de las séries de hectómetros.

Plantados así los piquetes de 100 en 100 metros, el número de unidades que tenga cada uno en la 2.ª série hectométrica, representa otras tantas centenas, de la misma manera que en la 1.ª série kilométrica las unidades de millar. En cuanto á la subdivision de los hectómetros que marcan los piquetes intermedios, tambien contienen dos numeraciones, que son: la del piquete hectométrico que le precede y la de la distancia que le separa de este. De suerte que, todo piquete lleva inscripta la expresion de la distancia acotada referida al anterior y la general al orígen del trazado; es decir, las distancias parciales de todos los puntos que se ha creido conveniente determinar, y la total longitud entre cada uno de ellos y el punto de partida.

Fig. 51.


Detalle n.º 1
Detalle n.º 2
Longitud de la semi-curva...... = 341m,94
Total desarrollo........ = 683,88
R = 1000 ms

Así, pues, se representan en detall cuatro piquetes con una muesca ó corte de espera en su frente, que se deja á flor de tierra al tiempo de hincarlos en el terreno, para sentar encima de ella la mira al efectuar la nivelacion, segun el sistema completo que se halla descrito en la primera parte de nuestro *Tratado especial*; cuyos piquetes llevan anotada la expresion de las distancias en los cuatro casos distintos que pueden presentarse, á saber: 1.° Cuando el piquete marca solamente la série kilométrica. 2.° Cuando señala además la série hectométrica. 3.° Cuando determina algun punto máximo ó mínimo ú otro notable dentro de la subdivision de la segunda série; y 4.° Cuando fija la posicion de alguno de los tres puntos principales de las alineaciones curvas. En este caso lo mismo que el primero se antepone á las acotaciones las respectivas iniciales K°. T, C, y T′ de la entrada, vértice y salida de las curvas, ó sean los puntos de la medicion kilométrica, los de tangencia y el vértice del arco.

Esto supuesto, nos concretaremos ahora á la combinacion de estos últimos, comparándolos entre sí para la composicion y disposicion del cuadro de coordenadas correspondientes á todos los puntos marcados (*fig.* 51) sobre la alineacion circular.

El punto de entrada en la curva estará determinado por la expresion de la distancia al orígen acotada en el piquete.. $T = 11^{\text{kilo.}} + 7^{\text{hect.}} + 54^{\text{m}},66$

El vértice por la del piquete............ $C = 12 + 0 + 96,60$

La salida por la del piquete............ $T' = 12 + 4 + 38,54$

Restando la primera expresion de la segunda, nos da el desarrollo de la semicurva y el vértice...................... $\frac{1}{2} C = 0 + 3 + 41,94$

Y comparando la primera con la tercera dará la total longitud de la alineacion curva.. $C = 0 + 6 + 83,88$

Hallando en seguida los complementos de $100^{\text{m}},00$ se tendrá la distancia de la primera tangente T al piquete núm. $8 = 45^{\text{m}},34$; del vértice C sobre la bisectriz al piquete núm. $1 = 3^{\text{m}},40$, y la de la segunda tangente T′ al piquete siguiente, señalado con el núm. $5 = 61^{\text{m}},46$.

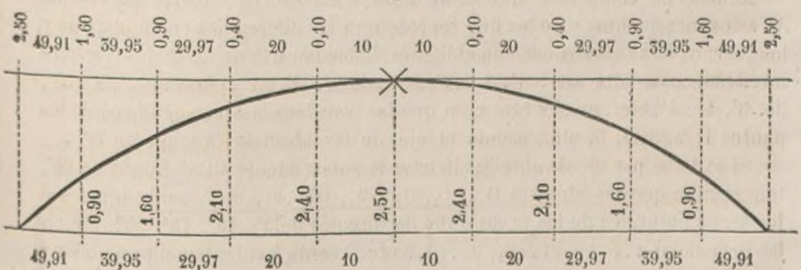
Ahora solo falta determinar las coordenadas de los puntos marcados por los piquetes 8, 9, 9′ 12,$^{\text{k.°}}$ 1, 2, 2′, 3 etc: para obtenerlas por medio de las tablas trigonométricas adoptaremos la marcha establecida en el cuadro (*número* 128), como se ve en la disposicion del que sigue:

Incremento del arco.	Arcos dados para R = 1000	DATOS TOMADOS DE LAS TABLAS.		PARA R = 1000.		OBSERVACIONES.
		Abscisas.	Ordenadas.	Abscisas	Ordenads	
9352″	45,34	0,045285	0,001026	45,285	1,026	Las abscisas y ordenadas de las tablas, multiplicadas por 1000 metros valor del radio, nos dan las abscisas y ordenadas de estas dos últimas casillas á partir de ambos puntos de tangencia.
29978	145,34	0,144788	0,010537	144,788	10,537	
39053	189,34	0,188238	0,017877	188,238	17,877	
50604	245,34	0,242910	0,029951	242,910	29,951	
7949	38,54	0,038533	0,000743	38,533	0,743	
28575	138,54	0,138021	0,009571	138,021	9,571	
40951	198,54	0,197230	0,019643	197,230	19,643	
49201	238,54	0,236273	0,028314	236,273	28,313	
69827″	338,54	0,332097	0,056798	332,097	56,798	

Observacion.—El mismo procedimiento haria conocer las coordenas si la curva hubiese que replantearla por piquetes de 50 en 50 metros desde cada uno de los puntos de tangencia; hallando los complementos de la equidistancia adoptada, y tambien se podrán determinar todos los puntos intermediarios que se consideren necesarios; pero es mucho mejor, cuando una curva está replanteada por los piquetes hectométricos, no emplear más coordenadas que las de las cuerdas subtendentes de 100 metros para llenar los puntos intermedios, porque entonces las cuerdas quedando todas determinadas por la posicion de los hectómetros, son muy pocas en número y siempre las mismas para cada radio, y sobre todo, son considerablemente de menor longitud que las de las tangentes.

130.—Combinacion de coordenadas en funcion de las tangentes y de las cuerdas subtendentes que dan ordenadas complementarias.—Se comprende que este sistema de coordenadas puede muy bien combinarse con cada uno de los tres anteriores, especialmente con el de las tangentes; puesto que siempre es fácil tirar una tangente á un arco de círculo paralela á la cuerda subtendente: en este caso la tangente tiene su punto de contacto en el vértice del arco; esto es, en la extremidad de la flecha que mide la separacion ó equidistancia de las dos paralelas. Por consiguiente si se resta de la flecha la longitud de las ordenadas de la tangente, obtendremos por diferencia la altura de las ordenadas en funcion de la cuerda; las abscisas por ser paralelas comprendidas entre paralelas, como tambien las ordenadas, son iguales por una parte y por otra; teniendo el mismo orígen sobre la flecha del arco, segun puede observarse en el siguiente, trazado con un radio de 500 metros por ejemplo.

Fig. 52.



De suerte que, cuando la tangente tiene su punto de contacto en el vértice del arco que subtende una cuerda paralela, las ordenadas de esta son complementarias de las de aquella para cada punto del arco; porque su suma es igual á la longitud de la flecha.

131. Construccion y disposicion, uso y aplicacion de las tablas de coordenadas.—Hemos visto en todo el curso de este tratado que el uso de las tablas trigonométricas suministra de la manera más completa que darse puede, todos los elementos necesarios, no solamente para el trazado y replanteo de curvas circulares por lo que se ha convenido en llamar puntos principales, sino que igualmente se deduce de ellas un número ilimitado de abscisas y ordenadas por incrementos constantes ó variables, enteros ó fraccionarios á elegir como mejor convenga, ya con relacion á los arcos de círculo, ya sobre rectas tomadas como ejes, segun se ve en los cuadros precedentes: y además presentan grandes recursos para la construccion de otros sistemas de coordenadas aplicables á las curvas que resultan de las secciones cónicas, ó curvas de segundo grado.

Esto no obstante los cálculos no dejarian de ser bastante pesados cuando tuviese por objeto operar sobre una série de puntos á la vez, como sucede en el replanteo de curvas. Para obviar estos inconvenientes y proporcionar medios expeditos que los faciliten en el menor tiempo posible, presentamos á continuacion tres tablas de coordenadas de curvas circulares, elípticas y parabólicas, por medio de las que se simplifican muchísimo las operaciones; cuyas tablas van precedidas de las correspondientes explicaciones, por el órden que se acaba de enunciar, acerca de su composicion y disposicion, uso y aplicacion.

132.—TABLA PRIMERA.—Coordenadas del círculo.—Sea el arco BCO (*fig.* 53) la cuarta parte de la circunferencia. Si el orígen de las coordenadas se coloca en O y á partir de este punto se divide el arco en partes iguales á 5°, por ejemplo, las perpendiculares bajadas desde los puntos de division 1, 2, 3, 4, etc., sobre el radio que pasa por el otro extremo B del mismo arco, serán los cosenos naturales de los ángulos ó de los incrementos de los arcos. Si se prolongan estos cosenos hasta el encuentro de la tangente OY en los puntos 1′, 2′, 3′, 4′, etc., cada parte tal como 1′...1″, 2′...2″, 3′...3″, 4′...4″ será igual al radio menos el coseno correspondiente, y las partes 0...1′, 0...2′, 0...3′, 0...4′, etc., tambien serán iguales á los senos naturales con relacion á los incrementos.

Además se comprende que el arco BCO puede replantearse por medio de estos incrementos y de los que representan las diferencias entre el radio y los cosenos de los arcos correspondientes, haciendo uso de las tablas trigonométricas, cuyas partes 0...1′, 0...2′, 0...3′, 0...4′, etc., y las 1...1′, 2...2′, 3...3′, 4...4′, etc., no son otra cosa que las coordenadas rectangulares de los puntos 1, 2, 3, 4, 5, etc.; siendo el eje de las abscisas la tangente OY.

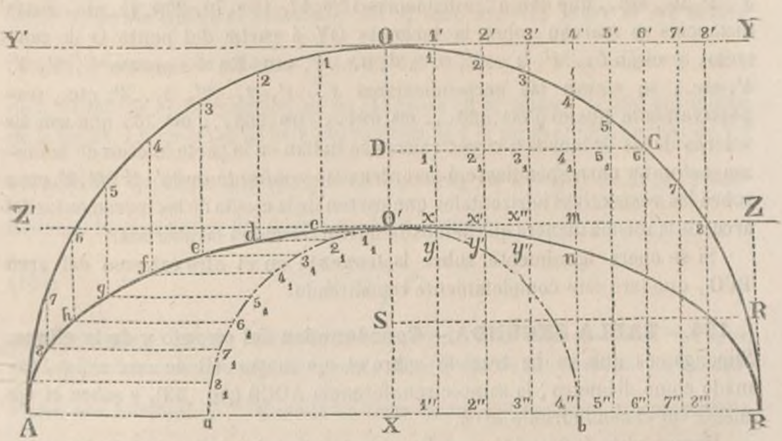
Si se toma por eje de abscisas la cuerda sub-tendente CD del arco de 60°, tendremos: que las abscisas $D...1_1$, $D...2_1$, $D...3_1$, etc., serán iguales á los senos naturales de los arcos ó de los ángulos de 5°, 10°, 15°, 20°, etc.; y las ordenadas $1...1_1$, $2...2_1$, $3...3_1$, etc., serán evidentemente iguales á los cosenos de los mismos ángulos, menos la parte constante C.. 6″ igual al seno de 60°, complemento de 30°, mitad del arco que la cuerda CD subtende, ó al coseno del mismo arco.

Ahora si se imagina el arco BCO dividido en otros arcos iguales á 1′, 5′, 10′, 15′, 30′, etc., ó á 1°, es fácil comprender que las coordenadas correspondientes á todos los puntos de division se obtienen como anteriormente.

Las coordenadas así obtenidas para el radio-unidad, habrá que multiplicarlas en cada caso por el radio dado. Para evitar en gran parte estos cálculos, se ha determinado una série de valores trigonométricos de las abcisas y ordenadas para los radios representados por los números dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y sus múltiplos.

Esta tabla presentada así, dará en general sin ningun cálculo en muchísimos casos, los valores de las coordenadas, aunque cada una de las nueve cifras que figuran á la cabeza y al pié de las columnas, esté seguida de uno ó más ceros; puesto que no hay más que correr la coma otros tantos lugares hácia la derecha, como ceros le acompañan, segun veremos al tratar de su uso y aplicacion. Tal es la composicion de la tabla primera.

Fig. 53.



Disposicion.—La tabla, miradas cada dos páginas, que llamaremos *gemelas*, están divididas en diez columnas. La casilla lateral de la izquierda contiene la graduacion de los arcos por incrementos de 5′ en 5′ desde 0 á 10°; de 10′ en 10′ hasta 20°; de 30′ en 30′ hasta 40° y de 1° en 1° hasta los 90 grados: siguen á continuacion las nueve casillas que presentan con siete cifras decimales los valores de las abscisas y de las correspondientes ordenadas.

Para facilitar más su frecuente uso y presentar al primer golpe de vista la más sencilla disposicion, tanto los incrementos de los arcos como los valores respectivos de coordenadas, se han puesto á la cabeza el nombre de ABSCISAS y al pié el de ORDENADAS, que se corresponden vertical y horizontalmente con la numeracion de los guarismos que figuran á la cabeza y al pié de las casillas, que se refieren á los radios, y la graduacion de los ángulos en la primera casilla titulada INCREMENTOS DEL ARCO; pero se han dividido en dos partes iguales con una línea doble todas las columnas: de manera que en la mitad superior de cada dos páginas se hallan las abscisas, y en la otra mitad inferior se encuentran las ordenadas por su órden correlativo.

133.—Uso y aplicacion.—En cuanto al uso y aplicacion es sumamente fácil. Sea, por ejemplo, una curva de 600 metros de radio que, despues de fijar los puntos de tangencia y el vértice como ya hemos dicho repetidas veces, se trata de replantear marcando cuantos puntos intermedios se puedan desear, equidistantes entre sí. Para esto la eleccion de la primera abscisa, ya se tome sobre la tangente ó sobre una cuerda paralela, dependerá de la distancia á que se quieran obtener los puntos de la curva, y será próximamente igual á la longitud del arco á que corresponde la ordenada bajada desde su extremo.

Si se supone que los puntos se han de fijar sobre el arco de 30′ en 30′, se busca en la columna vertical que corresponde al radio 6, señalada con este número y sobre la horizontal que marcan los 30′ en la casilla del incremento del arco, se tendrá el valor de la primera abscisa, corriendo la coma dos lugares á la derecha, puesto que el radio es de 600 metros, y será $5^m,236$: del mismo modo se hallará en la misma columna y en la horizontal correspondiente á 1° 0′ el segundo incremento, y así sucesivamente para 1° 30′, 2°, 2° 30′, 3°, 3° 30′, etc., que darán las distancias $10^m,47$, $15^m,70$, $20^m,94$, etc. Estas distancias se marcan sobre la tangente OY á partir del punto O de contacto, y serán 0...1′, 0...2′, 0...3′, 0...4′, etc. En los puntos 1′, 2′, 3′, 4′, etc., se elevan las perpendiculares 1...1′, 2...2′, 3...3′, etc., respectivamente iguales á $0^m,023$... $0^m,091$... $0^m,205$... $0^m,365$ que son los valores de las ordenadas; cuyos valores se hallan en la parte inferior de la misma columna correspondiente á las ordenadas y enfrente de 30′, 1° 30′, 2°, etc., sobre las respectivas horizontales que parten de la casilla de los incrementos del arco, de la misma manera que hemos dicho con relacion á las abscisas.

Si se opera igualmente sobre la tangente en el otro extremo del arco BCO, quedará este completamente replanteado.

134.—TABLA SEGUNDA.—Coordenadas del círculo y de la elipse. Supongamos que se ha trazado sobre el eje mayor AB de una elipse, tomado como diámetro, la semi-circunferencia AOCB (*fig.* 53), y sobre el eje menor *ab* el semi-círculo *a*O′*b*.

Hemos visto (*núm.* 44), que los círculos descritos sobre los ejes, quedan uno inscrito y otro circunscrito. Y como la expresion de la elipse era (*fór.* 57′) la del círculo trazado con el radio $r = a$, será $y'^2 = a^2 - x^2$.

Comparando miembro á miembro estas dos ecuaciones, tendremos

$$y^2 : y'^2 :: a^2 : b^2, \text{ ó bien } y : y' :: b : a.$$

Esta proporcion demuestra que las ordenadas de la elipse y las de los círculos inscrito y circunscrito, son proporcionales á los semi-ejes: por lo tanto puede servir para trazar la curva elíptica solo con hallar cuartas proporcionales á los semi-ejes y á cada ordenada del círculo descrito con uno de ellos como radio.

Así, si y' representa el semi-eje mayor OX = XB, será el radio del semicírculo AOCB cuyo diámetro es AB; y la proporcion anterior nos da la ecuacion $\frac{y}{y'} = \frac{b}{a}$; es decir: *la ordenada de la elipse, es á la ordenada del semi-círculo descrito sobre el eje primero, como el eje menor es al eje mayor.*

Las coordenadas de la tabla segunda se pueden calcular por la expresion general (*núm.* 27), ó del círculo (*fór.* 47), cuando el orígen de las coordenadas se coloca en el extremo de un diámetro con relacion á la tangente en este punto; cuya fórmula es $r^2 = (x - r)^2 + y^2$: de donde se deduce el valor de la ordenada sustituyendo el radio a en vez de r, y será

$$y = a - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

La ecuacion de la elipse referida á la tangente en el vértice del eje menor se convierte en $y = b - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Todavía subsiste la proporcion arriba indicada que nos hace ver claramente la igualdad $\frac{y}{y'}=\frac{b}{a}$, de donde proviene la fórmula

$$(102) \qquad y=\frac{b}{a}y':$$

la cual nos dice: *para obtener la ordenada de una elipse cuyos ejes son conocidos, se multiplica la ordenada del círculo descrito sobre el eje mayor como diámetro por la relacion* $\frac{b}{a}$; siendo $y=b-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ el valor de la ordenada en la ecuacion de la tangente en el vértice O' del eje menor de la elipse. La ecuacion de esta curva referida á la tangente BZ en uno de los vértices del eje mayor por ejemplo en B, será $y=a-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}$, y desde luego hará conocer del mismo modo la fórmula

$$(103) \qquad y=\frac{a}{b}y';$$

es decir, que *se puede hallar la ordenada de una elipse, dados los ejes, multiplicando la ordenada del círculo descrito sobre el eje menor como diámetro por la relacion* $\frac{a}{b}$. Cuando se trate de las aplicaciones haremos observar que si hay que trazar un cuarto de elipse tal, como el arco elíptico A*h*...cO' se puede efectuar bien la parte O'*h* del arco por medio de la tangente tirada desde el vértice O'; pero se llega á cierto punto en que ya los elementos que constituyen la curva elíptica se presenta con tal oblicuidad á la direccion de las ordenadas que, por este procedimiento, casi es imposible fijar con precision los puntos cuanto más se aproximan al vértice A. En este caso es indispensable el tomar por eje de abscisas la tangente en A.

De aquí se deduce que, tanto con relacion al círculo como respecto de la elipse, nada más fácil que, conociendo la flecha, trazar estas curvas por medio de las cuerdas sub-tendentes.

Para esto, se calculará la ordenada, y se multiplicará la que representa y' del círculo de radio a ó b por la correspondiente relacion $\frac{b}{a}$ ó $\frac{a}{b}$, segun que se opera sobre la tangente tirada ya por el vértice O', ya por la otra que parte del extremo B, y restando la ordenada así obtenida de la flecha dada que llamaremos f y será respectivamente en uno ú otro caso

$$y=f-\frac{b}{a}y' \quad \text{ó bien} \quad y=f-\frac{a}{b}y'.$$

Volviendo á la construccion de la tabla segunda, solo nos resta decir que se ha calculado por la (*fór.* 47) arriba indicada, que nos da el valor $y=r-\sqrt{r^2-x^2}$, para la cuarta parte de la circunferencia que tiene la unidad por radio, por incrementos constantes de las abscisas de 1 en 1 milésima, desde 0 hasta $0^m,999$; y de 1 en 1 diezmilésima hasta $1^m,000$: siendo igualmente aplicables á las coordenadas de la elipse.

Sustituyendo los valores de $r = 1$ y de la primera abcisa $x = 0,001$ en la fórmula que precede, tendremos $y = 1 - \sqrt{1^2 - 0,001^2}$.

Las coordenadas obtenidas así para el radio-unidad, hay que multiplicarlas en cada caso por el valor del radio dado, como veremos luego al ocuparnos de su uso y aplicacion.

Disposicion.—En cuanto á la tabla segunda, cada página se divide en ocho columnas y está dispuesta de manera que las casillas impares contienen los valores trigonométricos de las abscisas, y en frente de estas en las columnas pares se encuentran los de las ordenadas correspondientes; calculadas con 6 decimales por la (*fór.* 47) ya citada, y por incrementos de las abscisas de milímetro en milímetro, á excepcion de las últimas que varian de diezmilésima en diezmilésima.

135.—Uso y aplicacion para hallar las coordenadas del círculo.—Las coordenadas de un círculo de radio dado R, se obtienen multiplicando por él las abscisas y ordenadas de la tabla segunda: el radio conocido R, ó todo número que le multiplique ó divida exactamente puede tomarse como primera abscisa; y, una vez adoptada, las demás quedarán determinadas: esto es, que se obtendrán todas las ordenadas igualmente espaciadas entre sí, puesto que el incremento siempre será igual á la primera abscisa.

Ejemplo.—Como uso y aplicacion determinaremos las coordenadas de un arco circular de 100 metros de radio. Segun hemos dicho arriba se puede tomar este número como primera abscisa y lo mismo todo múltiplo ó sub-múltiplo de él.

Así, por ejemplo, si se elige por primera abscisa $5^m,00$, para hallar la ordenada correspondiente, divídase esta abscisa ó su valor $5^m,00$ por el radio, que nos da el cociente $0^m,05$; búsquese este en la columna de las abscisas de la tabla, y enfrente de ella, en la casilla de las ordenadas, se hallará la que corresponde, y será $0^m,001251$; multiplíquese por $R = 100$, y se tendrá la ordenada $0^m,1251$ correspondiente á la abscisa $5^m,00$ dada.

La ordenada que corresponde al incremento ó abscisa $10^m,00$ inmediata siguiente, se obtiene del mismo modo que en el caso anterior. Hé aquí las diez primeras coordenadas para trazar un arco de círculo de 100 metros de radio, que hemos tomado por ejemplo, siendo la primera abscisa $x = 5$, tendremos los incrementos de

$$x = \left\{\begin{array}{ll} 5^m, & 00 \\ 10 & 00 \\ 15 & 00 \\ 20 & 00 \\ 25 & 00 \\ 30 & 00 \\ 35 & 00 \\ 40 & 00 \\ 45 & 00 \\ 50 & 00 \end{array}\right. \quad \text{y los de las ordenadas serán } y = \left\{\begin{array}{ll} 0^m, & 1251 \\ 0 & 5013 \\ 1 & 1314 \\ 2 & 0204 \\ 3 & 1754 \\ 4 & 6061 \\ 6 & 3250 \\ 8 & 3481 \\ 10 & 6972 \\ 13 & 3975 \end{array}\right.$$

Aunque en la práctica no se aproximan los resultados finales más que hasta milímetros solamente, hemos tomado todas las cuatro cifras decimales que nos da la tabla para mayor exactitud.

136.—Uso y aplicacion para obtener las coordenadas de la elipse.— Para el replanteo de arcos elípticos cuando los ejes son conocidos, ya hemos dicho que no habia más que multiplicar las ordenadas del círculo descrito sobre el eje mayor, tomado como diámetro, por la relacion entre el eje menor y el mayor.

Siendo a el semi-eje mayor de la elipse y b el semi-eje menor de la misma, representando por y' la ordenada del círculo de radio a, calculada por la segunda tabla, la ordenada y de la elipse correspondiente á la misma abscisa se obtiene por la fórmula (102).

Pero todavía es más conveniente no hacer uso de las ordenadas del círculo: en este caso, para obtener las ordenadas de la elipse por medio de la tabla segunda de radio 1 sin necesidad de calcular las ordenadas del círculo de radio a, se multiplican las ordenadas de esta tabla por b, que es el semi-eje menor de la elipse. De suerte que la ordenada y cuyo semi-eje menor es b, tendrá por valor la expresion

(104) $$y = y'' \times b;$$

siendo y'' no la ordenada del círculo de radio a, sino más bien la ordenada de la tabla cuyo radio sabemos que es $r = 1$.

Para demostrarlo, recordaremos que para hallar por la tabla la ordenada de un círculo de radio a, era necesario multiplicar y' por el valor de este radio; cuya ordenada estará representada por la expresion

(105) $$y = y'' \times a.$$

Luego la ordenada de la elipse será $y = (y'' \times a)\,\frac{b}{a}$; de donde resulta la fórmula (104), expresion muy sencilla por medio de la cual se hallan las ordenadas de una elipse rápidamente y sin mas dificultad que las de un círculo, cualquiera que sea su radio.

Así, de las expresiones (102 y 103), y de las (104 y 105), se deducen dos modos diferentes para calcular el valor de y. Ahora aplicaremos sucesivamente uno y otro á un mismo ejemplo; y veremos como ambos conducen tambien á un mismo resultado.

Ejemplo.—Hallar las coordenadas de una elipse cuyo semi-eje mayor es de $43^m,75$, y el semi-eje menor de $15^m,75$.

Determinaremos por el sistema ya conocido las ordenadas del círculo de radio $a = 43^m,75$. Se puede elegir el número que mejor convenga para primera abscisa ó el que sea más cómodo para hallar las demás con mayor aproximacion.

En efecto, si se multiplica por 0,08, se obtiene $3^m,50$, número más conveniente bajo todos conceptos. Por manera que si queremos hallar las ordenadas correspondientes á las cuatro primeras, tendremos que siendo el incremento igual á $3^m,50$, resulta que á cada nuevo valor de

$$x = \left\{\begin{array}{l} 3^m,50 \\ 7\ \ 00 \\ 10\ \ 50 \\ 14\ \ 00 \\ 17\ \ 50 \\ 21\ \ 00 \end{array}\right. \quad \text{el de la respectiva ordenada será } y' = \left\{\begin{array}{l} 0^m,1402 \\ 0\ \ 5636 \\ 1\ \ 2787 \\ 2\ \ 3001 \\ 3\ \ 6525 \\ 5\ \ 3695 \end{array}\right.$$

Las ordenadas de la elipse correspondientes á las mismas abscisas de arriba, se obtienen multiplicando los valores que sucesivamente va tomando y' por la relacion $\frac{15,75}{43,75} = 0,36$ entre el semi-eje menor y el mayor de la elipse, y tendremos que

$$\text{para } x = \begin{cases} 3^m,50 \\ 7\ \ 00 \\ 10\ \ 50 \\ 14\ \ 00 \\ 17\ \ 70 \\ 21\ \ 00 \end{cases} \text{ las correspondientes ordenadas son } y = \begin{cases} 0^m,0505 \\ 0\ \ 2029 \\ 0\ \ 4603 \\ 0\ \ 8281 \\ 1\ \ 3149 \\ 1\ \ 9330 \end{cases}$$

Hallando directamente las ordenadas de la elipse, sin las intermediarias del círculo de radio $a = 43^m,75$ que no hay necesidad de conocer; suponiendo los mismos datos que en el ejemplo precedente, y tomando por primera abscisa 3,50 que representa el incremento, solo habrá que buscar en la tabla las ordenadas correspondientes á los incrementos de la abscisa, para cada valor que sucesivamente va tomando

$$x = \begin{cases} 3^m,50 \\ 7\ \ 00 \\ 10\ \ 50 \\ 14\ \ 00 \\ 17\ \ 50 \\ 21\ \ 00 \end{cases} \text{ el de la respectiva ordenada será } y' = \begin{cases} 0^m,003205 \\ 0\ \ 012883 \\ 0\ \ 029227 \\ 0\ \ 052583 \\ 0\ \ 083485 \\ 0\ \ 122731 \end{cases}$$

Ahora para obtener las ordenadas de la elipse correspondientes á las seis abscisas de arriba, se multiplican los valores de y' por el del eje menor; esto es, las ordenadas del círculo que nos da la tabla multiplicándolas á la vez por el eje menor, de donde resulta:

$$x = \begin{cases} 3^m,50 \\ 7\ \ 00 \\ 10\ \ 50 \\ 14\ \ 00 \\ 17\ \ 50 \\ 21\ \ 00 \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ y' = \begin{cases} 0^m,1505 \\ 0\ \ 2029 \\ 0\ \ 4603 \\ 0\ \ 8281 \\ 1\ \ 3149 \\ 1\ \ 9330 \end{cases}$$

cuyos valores son idénticos á los hallados en el primer caso.

Conviene observar que las ordenadas determinadas así, son las que se obtendrian si se resolviese la cuestion por la (*fór.* 57); es decir, si se dedujese por la ecuacion de la elipse con relacion á la tangente en el vértice ó extremo del eje menor, cuya expresion es $y = b - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Si se hubiese de trazar el cuarto de elipse BnO' (*fig.* 53) únicamente por la tangente ZZ' en el extremo O' del eje menor, se marcarán sobre ella las distancias O'x, O'x', O'x'', O'm, etc., respectivamente iguales á los valores 3,50...7,00...10,50...14,00... etc.; en los diferentes puntos así obtenidos, se elevarán las perpendiculares xy, $x'y'$, $x''y''$, mn... etc., que serán las ordenadas correspondientes, cuyos valores 0,0505...0,2029...0,4603... 0,8281...etc., se determinaron arriba, y así sucesivamente se continuará hasta el punto Z que será el límite de las abscisas.

Para trazar el mismo cuarto de elipse, tomando por eje de abcisas el mayor AB, bastará restar los valores de las ordenadas xy, $x'y'$ ...mn, etc., del semi-eje menor O'X $= 15^m,75$ para obtener las correspondientes á las abscisas tomadas sobre el eje mayor: así, por ejemplo, O'X — $mn = bn$; ó bien $15,75 - 0,8281 = 14,9219$; y así continuamente se demuestra de una manera general que las ordenadas de una elipse calculadas por la (*fór.* 57) que se refiere á la tangente en el vértice de uno de los ejes, y por medio de la tabla primera, se obtienen las respectivas ordenadas elevadas en los puntos á que corresponden las abscisas tomadas sobre la cuerda paralela á la tangente, restando el valor de cada ordenada hallada, del de la flecha, si es un arco elíptico el que se trata de replantear, ó del semi-eje si es un cuarto de elipse. De modo que, segun el (*núm.* 130) las ordenadas referidas á la cuerda paralela á la tangente en el vértice del arco, son complementarias.

Para trazar una elipse sobre el papel existen muchos procedimientos; aunque ya hemos indicado alguno al tratar de esta curva en la segunda seccion de este tratado; sin embargo, vamos á ocuparnos de uno que es sumamente fácil, fundado en los mismos principios admitidos al aplicar la segunda tabla al trazado de los arcos elípticos sobre el terreno.

Sean AX y XO' los semi-ejes de la elipse (*fig.* 53). Desde el punto X como centro y con los radios XO y XO', se trazarán los dos cuadrantes de círculo AO y *a*O', que se dividen en un mismo número de partes iguales. Esto se consigue muy sencillamente, puesto que los dos arcos son concéntricos y la division es la misma; y por consiguiente se hace coincidir el centro de un trasportador con el punto X, de manera que los ejes AX y XO' prolongados cubran los puntos 0 y 90° del cuadrante: en esta posicion el trasportador, se marcarán sobre el papel por arriba ó por debajo del arco AO los puntos de la division que se haya adoptado, señalándolos con un pequeño trazo sobre los dos arcos concéntricos, sin necesidad de tirar las líneas radicales. Ahora tirando por cada uno de los puntos de division de los arcos AO y *a*O' las rectas paralelas respectivamente á los semi-ejes, las intersecciones de aquellas serán otros tantos puntos que marcan el cuarto de la elipse. De este modo se puede trazar cualquier arco elíptico sobre el papel siguiendo el mismo procedimiento.

137.—TABLA TERCERA. Coordenadas de la parábola.—Sea el arco de la parábola TOT' (*fig.* 54) que segun hemos visto (*núm.* 55) tiene por expresion $y^2 = 2px$; siendo la única que se emplea para esta curva. Por la fórmula (70) de la parábola referida á su vértice, en donde el eje de la seccion la divide en dos ramas simétricas, se deduce que el valor de cada una de estas ramas es $y^2 = px$; de consiguiente, el de la ordenada y^2, será

$$y = \sqrt{px}.$$

Si se supone $Ob_1 = x$, será $b_1b = y$; es decir, que las abscisas se toman sobre el eje y las ordenadas correspondientes serán perpendiculares al mismo eje.

Pero si se cuentan las abscisas á partir del vértice O, como orígen de coordenadas, sobre la tangente OY' perpendicular al eje OX, las ordenadas serán paralelas al mismo, siendo Ob' la abscisa, y $b'b$ la ordenada.

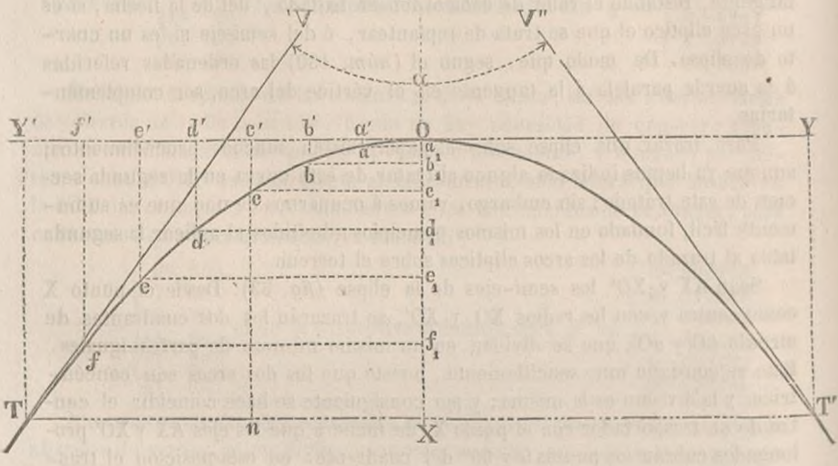
Observaremos que $bb_1 = Ob'$ y $Ob_1 = bb'$; luego en la ecuacion $y^2 = px$

se puede cambiar y por x, y se tendrá para la expresion de la parábola referida á la tangente en el vértice la ecuacion $x^2 = py$; de donde

$$(106) \qquad y = \frac{x^2}{p}:$$

expresion muy sencilla y desembarazada del radical.

Fig. 54.



Disposicion.—Se ha dividido cada página en ocho casillas: las abscisas están en las columnas impares y enfrente de ellas se hallan en las casillas pares las correspondientes ordenadas; calculadas unas y otras por la expresion $y = \frac{x^2}{p}$ que, siendo $p = 1$, se convierte en $y = x^2$.

Por medio de esta fórmula se han calculado las ordenadas de la tabla tercera en funcion del parámetro-unidad, y por incrementos de las abscisas de una en una diezmilésima desde 0 á $0^m,013$: de cinco en cinco diezmilésimas hasta $0^m,046$: de una en una diezmilésima hasta $0^m,22$: y de dos en dos milésimas hasta $0^m,30$.

Siendo $y = \frac{x^2}{p}$ el valor de la ordenada de la tabla, otra ordenada cualquiera y' correspondiente á la misma abscisa x de una parábola, cuyo parámetro sea p' tendrá por expresion $y' = \frac{x^2}{p'}$.

Si se dividen miembro á miembro esta ecuacion y la precedente, tendremos

$$(107) \qquad y' = \frac{p}{p'} \times y.$$

Como $p = 1$ se tiene $y' = \frac{1}{p} \times y$; es decir, que para obtener por medio de la tabla una ordenada de la parábola cuyo parámetro es p' y para una abscisa x contenida en dicha tabla, basta multiplicar y por la relacion $\frac{1}{p'}$.

La ventaja de operar por la tangente, se ve claramente, y la inspeccion de la (*fig.* 54) basta para hacerla resaltar á primera vista.

Tambien se comprende que la ordenada nc, perpendicular á la cuerda ff_1 no es otra cosa que la diferencia entre la flecha OX y la ordenada $c'c$, y la abscisa Xn será igual á cc_1: luego conocida la flecha de una curva parabólica se obtendrán las ordenadas perpendiculares á la cuerda, restando de la flecha las ordenadas de la tabla. De donde podemos concluir que, por medio de la tabla tercera, se podrá trazar fácil é inmediatamente todo arco de parábola, ya sea por la tangente ó por la cuerda, dado el parámetro.

138.—Uso y aplicacion.— El uso y aplicacion de la misma tabla es muy sencillo. Para obtener las ordenadas de una parábola cuyo parámetro es conocido, la primera operacion que hay que hacer, consiste en dividir el parámetro 1 por el número que represente el parámetro dado; buscando en las columnas de las abscisas los incrementos de ellas, que cada uno de los cuales será igual á la primera abscisa elegida, y despues multiplicando las ordenadas correspondientes que contiene dicha tabla por la relacion entre el parámetro-unidad y el dado en cada caso.

Ejemplo.—Supongamos que se trata del replanteo de una parábola, cuyo parámetro es de 50 metros por incrementos de las abscisas de 20 en 20 metros.

Segun hemos visto arriba, para obtener las ordenadas correspondientes por medio de la tabla que tiene por parámetro la unidad, lo primero que debe hacerse es, dividir este parámetro por el dado; buscar despues en la casilla de las abscisas los números 20, 40, 60, etc., y multiplicar las ordenadas correspondientes á estos incrementos por la relacion $\frac{1}{50} = 0{,}02$.

Mas como los valores de las abscisas de la tabla se han calculado, segun hemos dicho al indicar su disposicion, por incrementos de una en una diezmilésima, resulta que son 10000 veces menores que las que hemos elegido ahora, y las ordenadas correspondientes se encuentran en la misma relacion; por consiguiente habrá que multiplicar ante todo los valores de las abscisas y ordenadas de la tabla por la cantidad de 10000, sin que por esto se altere su correspondencia recíproca, puesto que (Arit. y Alg.), toda relacion ó igualdad $y = \frac{x^2}{p}$ no varía multiplicando ó dividiendo sus términos ó miembros por una misma cantidad; luego tendremos que, para los incrementos de

$$x = \begin{cases} 20 \\ 40 \\ 60 \\ 80 \\ 100 \end{cases} \quad \text{los de las ordenadas correspondientes son} \quad y = \begin{cases} 0{,}0400 \\ 0{,}1600 \\ 0{,}3600 \\ 0{,}6400 \\ 1{,}0000 \end{cases}$$

Ahora para hallar las ordenadas que se buscan habrá que multiplicar cada uno de los valores de y por la relacion $\frac{1}{50} = 0,02$ entre los parámetros, y tendremos por el mismo órden

$$x = \begin{cases} 20 \\ 40 \\ 60 \\ 80 \\ 100 \end{cases} \text{ de donde } y = \begin{cases} 0,0400 \\ 0,1600 \\ 0,3600 \\ 0,6400 \\ 1,0000 \end{cases} \times 0,02 = \begin{cases} 0,0008 \\ 0,0032 \\ 0,0072 \\ 0,0128 \\ 0,0200 \end{cases}$$

Antes de replantear la parábola por medio de las coordenadas así obtenidas, se traza la recta indefinida YY′ tangente en el vértice, y sobre ella á partir de este punto se marcan hácia OY′ las distancias Oa', Ob', Oc', etc., que serán respectivamente iguales á los incrementos 20, 40, 60, 80, 100 metros, que va tomando la abscisa; en cada uno de los puntos a'... b'... c'... etc., se elevan las perpendiculares $a'a, b'b, c'c$, etc., iguales en longitud á las ordenadas $0^m,0008$; $0^m,0032$; $0^m,0072$; etc. Los puntos extremos a... b... c... etc., que corresponden á la parábola se señalan con piquetes.

Si nos fijamos bien en la (*fig.* 54), se comprende desde luego que para trazar la curva por la semi-cuerda que une los puntos de tangencia T y T′, siendo conocida la flecha OX, se obtiene la ordenada cn, por ejemplo, correspondiente á la abscisa $Xn = Oc'$, restando la ordenada $c'c$ de la flecha $OX = f$, es decir, que $cn = f - c'c$, y así para cualquier otro punto se pueden determinar las demás ordenadas, puesto que segun hemos visto (*número* 130), las ordenadas tomadas sobre la tangente paralela á una cuerda, son complementarias á partir del vértice de la curva.

139.—Consideraciones acerca de las curvas planas.—Habiendo tratado ya en este capítulo de los sistemas de coordenadas para el replanteo de curvas circulares con bastante extension, por ser las que se usan exclusivamente en los trazados de ferro-carriles, y en vista de la descripcion analítica de las curvas planas y de la teoría en que se funda el trazado en general de la elipse, de hipérbola y de la parábola por los sistemas de coordenadas que preceden, debemos utilizar ahora estos elementos necesarios para su replanteo.

Mas como los sistemas de coordenadas de curvas circulares pueden servir tambien para el trazado de los arcos elípticos, hiperbólicos y parabólicos, consideramos oportuno consignar esta gran ventaja, puesto que en todo caso basta multiplicar las abscisas y ordenadas por una relacion constante (*número* 134). A excepcion de la raiz cuadrada del parámetro, los elementos de la parábola tambien son proporcionales al radio del arco de círculo que une dos alineaciones rectas, conocido el ángulo y siendo el radio igual á la normal de la parábola. Los motivos que pudieran hacer necesario el trazado de las curvas de segundo grado, serán los que en los diversos casos particulares darán lugar á la investigacion de la relacion correspondiente á cada una de ellas: por lo tanto, siendo de muy poco uso, no haremos más que indicar el procedimiento y las fórmulas reducidas á su última expresion, para hallar el desarrollo de los arcos por medio del cálculo diferencial é integral. Pero no sucede lo mismo con las curvas parabólicas que además de los arcos de círculo son las únicas entre las de segundo grado aplicables en muchos casos á las líneas de carreteras y canales.

Es indudable que las alineaciones circulares son generalmente las que más se emplean en los trazados de las vías de comunicacion; porque tienen la gran ventaja sobre todas las demás de que el radio de curvatura es constante y su replanteo mucho más fácil, y porque una vez entrado en ella cualquier carruaje produce un rozamiento igual en todas sus partes, y el esfuerzo de traccion que ejerce el motor durante el movimiento para cambiar de direccion y seguir recorriendo toda la série de puntos, experimenta una resistencia uniforme; y por consiguiente, los gastos de explotacion por el deterioro de la vía en alineacion curva son menores, y los vehículos están ménos espuestos á descarrilamientos ó vuelcos: mientras que los arcos de parábola ofrecen las ventajas de que con ellos se pueden plegar muchísimo los trazados en parajes sinuosos ó muy accidentados, y adaptar su directriz á las inflexiones que representan gráficamente las curvas de nivel, á fin de evitar los gastos extraordinarios que ocasiona la construccion de las grandes obras de fábrica y de movimiento de tierras; como tambien la de acercarse mucho más al vértice de las alineaciones rectas para unos mismos puntos de tangencia comunes á una curva circular y á otra parabólica, y la de que, creciendo el radio de curvatura desde la *entrada* hasta el *vértice* de esta última, los vehículos entran y salen de ella con mayor facilidad, é insensiblemente se pasa de la alineacion recta á la curva ó vice-versa; pero en cambio presentan el grave inconveniente de que variando el rozamiento ó resistencia que se opone al movimiento entre el *mínimo* y el *máximo* correspondiente en razon inversa al radio de curvatura que, variando desde la *entrada* hasta el *vértice*, vuelve á decrecer con mucha rapidez desde este último punto hasta el de *salida*.

140.—Replanteo de las curvas parabólicas.—Para el trazado de los arcos de parábola sobre el terreno, se pueden emplear varios medios, ya sean iguales ó desiguales las distancias de los puntos de tangencia al encuentro de las alineaciones rectas. Conocida la posicion del *eje* de las abscisas, el *vértice* y el *parámetro* hay que calcular tambien los principales elementos para su replanteo, entre ellos el *radio vector* y el de *curvatura* del punto de contacto.

Será aplicable cada procedimiento con preferencia á los demás, segun los casos y circunstancias particulares ó accidentes que ofrezca el terreno en cada caso, lo mismo que hemos dicho al tratar de las curvas circulares.

Aunque con relacion á las curvas parabólicas se podrian resolver problemas idénticos á los propuestos respecto á la union de las alineaciones rectas por medio de los arcos de círculo, sin embargo, atendiendo al poco uso que se hace de los arcos de parábola, por los muchos inconvenientes que presenta su empleo, nos limitaremos á cuatro problemas de más fácil aplicacion y de mayor utilidad práctica, que simplifican algun tanto su trabajoso replanteo.

La solucion de continuidad que segun hemos visto existe entre el círculo, la elipse y la hipérbola, y como hay tambien la misma solucion entre los sistemas de coordenadas de curvas circulares que pueden aplicarse á la parabola, multiplicando por una relacion constante las abscisas y ordenadas, vamos á ocuparnos de las aplicaciones con relacion á esta última curva.

141.—Problema I.—*Conocido el ángulo de dos alineaciones rectas enlazarlas por medio de un arco de parábola tangente á ellas en puntos equidistantes del vértice.*

Sea, por ejemplo, el arco de parábola STOT'S' (*fig.* 55), que está determinado por la condicion de ser tangente en T y T', lo mismo que el arco de círculo QTO'T'Q', á las alineaciones rectas AV y VB (1); cuya parábola tiene por *eje* de abscisas la bisectriz VX del ángulo de las alineaciones AVB, en virtud de la posicion simétrica de los puntos de tangencia T y T'.

Haciendo aplicacion de lo que hemos dicho (*núm.* 80), tendremos: que la distancia del vértice ú *orijen* O de la parábola al *vértice* V del ángulo de las alineaciones, es la mitad de la sub-tangente VD.

En el triángulo rectángulo VDT se tiene que la sub-tangente VD es igual á la tangente $VT \times \cos. \frac{1}{2}\alpha$; y la distancia VO tambien es igual á la tangente $\frac{VT \times \frac{1}{2}\cos. \alpha}{2}$.

La abscisa OD es la distancia VO del vértice de la parábola al vértice del ángulo de las alineaciones; porque el punto O ocupa el medio de la sub-tangente VD. La ordenada TD es la semi-cuerda del arco de círculo ó curva de enlace.

El *parámetro*, estando el orígen de las coordenadas colocado en el vértice O de la parábola, la ecuacion de una de las ramas de esta curva será

$$y^2 = px.$$

Para el punto de tangencia T esta expresion nos da $\overline{TD}^2 = p \times OD$: de donde el valor del parámetro p, se deduce de la expresion

$$p = \frac{\overline{TD}^2}{OD}. \tag{108}$$

Pero la ordenada TD es la semi-cuerda del arco de círculo que une las dos alineaciones rectas; luego la abscisa OD es igual, como ya hemos dicho arriba, á la distancia VO del vértice del ángulo al vértice ú origen de la parábola.

Tambien se puede hallar el parámetro por medio del triángulo TDC, rectángulo en D, que nos da

$$p = 2CD = 2TD \operatorname{tang}. \frac{1}{2}\alpha = 2VT \operatorname{sen}. \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}. \frac{1}{2}\alpha.$$

Pero CD es la subnormal; luego esta es igual á la mitad del parámetro.

Siendo F el foco de la curva parabólica, el *radio vector* TF, es igual á la abscisa OD más un cuarto del parámetro; esto es, $TF = OD + \frac{1}{4}p$.

Se puede obtener el valor del radio vector TF, por medio del triángulo VTF, cuyos ángulos V y T son iguales, y tendremos la proporcion

$$TF : VT :: \operatorname{sen}. \frac{1}{2}\alpha : \operatorname{sen}. \alpha;$$

---

(1) Téngase presente que se han truncado las rectas AV y VB, como se ve en la figura, por los puntos V' y V''.

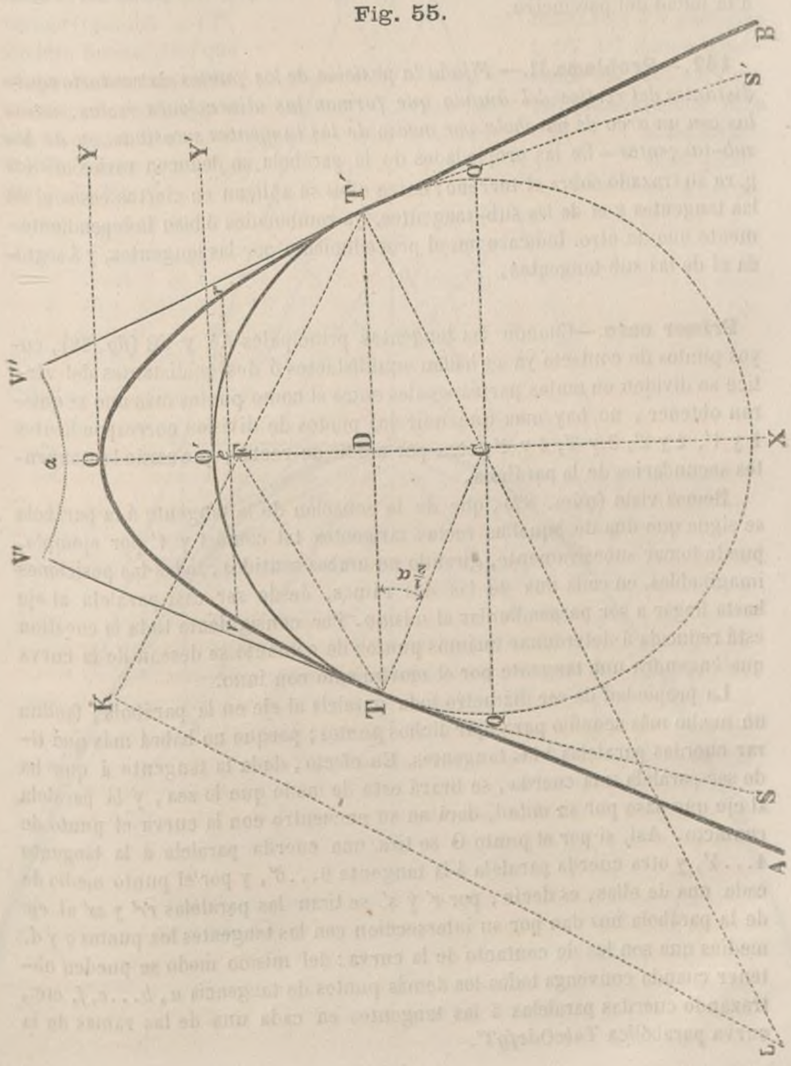
de donde el radio vector se halla por la fórmula

(109) $$TF = \frac{\text{tang. VT} \times \text{sen.} \frac{1}{2}\,\alpha.}{\text{sen.}\,\alpha}$$

El *radio de curvatura* T'L en el punto de tangencia T', se deduce del triángulo T'KL rectángulo en K, construido con la condicion de que el lado T'K ha de ser doble del radio vector T'F: y por consiguiente formando proporcion se tiene

$$T'L : T'K :: \text{sen. } T'KL : \text{sen. } T'LK = VT'F = T'VF = \frac{1}{2}\,\alpha;$$

Fig. 55.



ó bien

$$T'L : 2T'F :: 1 : \text{sen.}\ \frac{1}{2}\alpha:$$

reemplazando el radio vector T'F por su valor, el del radio de curvatura se deduce de la fórmula

$$(110) \qquad T'L = \frac{2 \times \text{tang. VT}}{\text{sen. } \alpha}.$$

El radio de curvatura, pues, en el vértice ú origen de la parábola, es igual á la mitad del parámetro.

142.—Problema II.— *Fijada la posicion de los puntos de contacto equidistantes del vértice del ángulo que forman las alineaciones rectas, unirlas con un arco de parábola por medio de las tangentes sucesivas, y de las sub-tangentes*— De las propiedades de la parábola se deducen varios medios para su trazado sobre el terreno; entre ellos se aplican en ciertos casos el de las tangentes y el de las sub-tangentes, ya combinados ó bien independientemente uno de otro. Indicaremos el procedimiento por las tangentes, y á seguida el de las sub-tangentes.

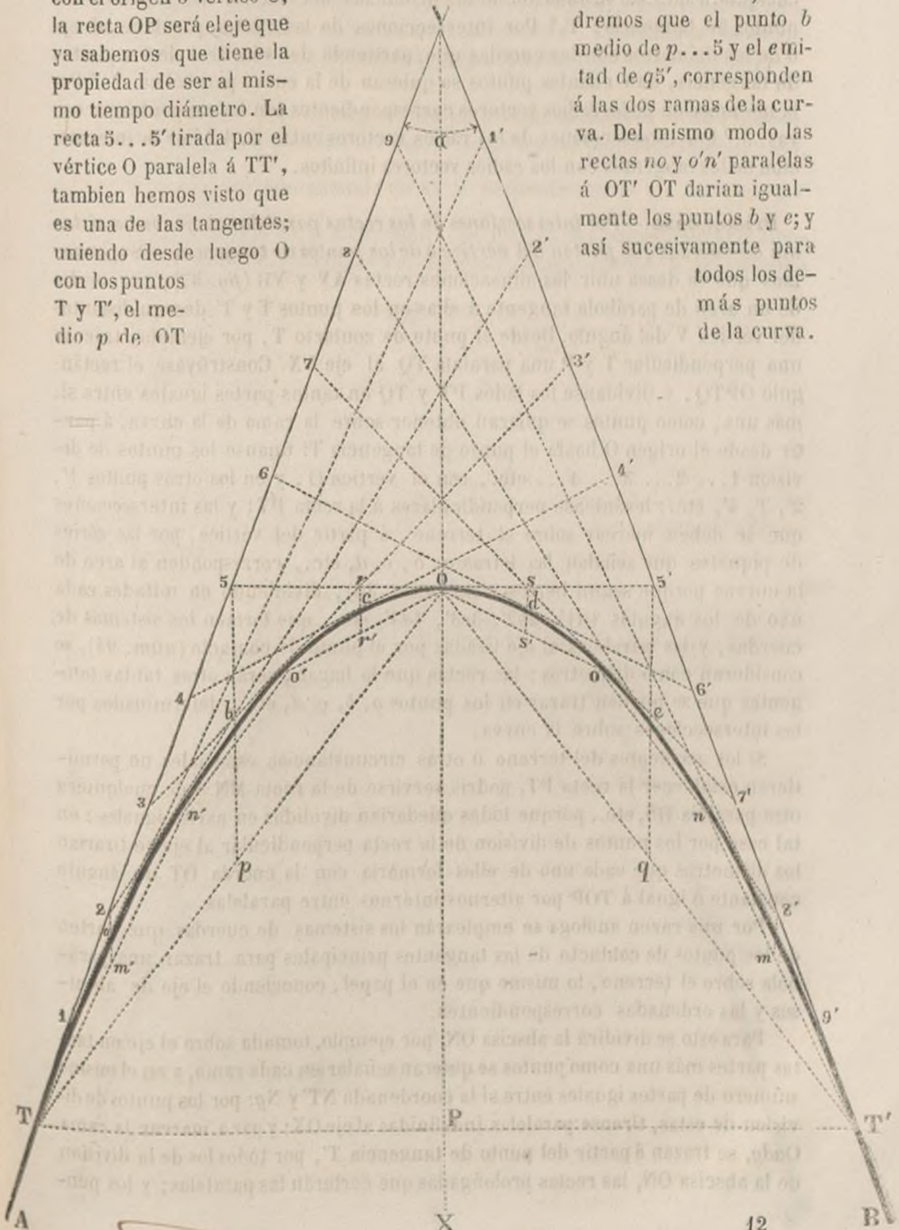
Primer caso.—Cuando las tangentes principales AV y VB (*fig.* 56), cuyos puntos de contacto ya se hallen equidistantes ó desequidistantes del vértice se dividen en tantas partes iguales entre sí como puntos más uno se quieran obtener, no hay mas que unir los puntos de division correspondientes 1 y 1', 2 y 2', 3 y 3', 4 y 4', etc., por medio de rectas, que serán las tangentes secundarias de la parábola.

Hemos visto (*núm.* 82), que de la ecuacion de la tangente á la parábola se sigue que una de aquellas rectas tangentes tal como 1 y 1' por ejemplo, puede tomar sucesivamente, girando en ambos sentidos, todas las posiciones imaginables, en cada una de las dos ramas, desde ser casi paralela al eje hasta llegar á ser perpendicular al mismo. Por consiguiente toda la cuestion está reducida á determinar cuántos puntos de contacto se desean de la curva que engendra una tangente por el movimiento contínuo.

La propiedad de ser diámetro toda paralela al eje en la parábola, facilita un medio más sencillo para fijar dichos puntos; porque no habrá más que tirar cuerdas paralelas á las tangentes. En efecto, dada la tangente á que ha de ser paralela una cuerda, se tirará esta de modo que lo sea, y la paralela al eje que pase por su mitad, dará en su encuentro con la curva el punto de contacto. Así, si por el punto O se tira una cuerda paralela á la tangente 4...4', y otra cuerda paralela á la tangente 6...6', y por el punto medio de cada una de ellas, es decir, por *r'* y *s'* se tiran las paralelas *rr'* y *ss'* al eje de la parábola nos dan por su interseccion con las tangentes los puntos *c* y *d*, medios que son los de contacto de la curva: del mismo modo se pueden obtener cuando convenga todos los demás puntos de tangencia *a*, *b*...*e*, *f*, etc., trazando cuerdas paralelas á las tangentes en cada una de las ramas de la curva parabólica T*abc*O*defg*T'.

Segundo caso.—La expresion (89) del (*núm*. 80), hace conocer la propiedad de que la sub-tangente es doble de la abscisa del punto de contacto, bien esté referida al eje ó bien á la paralela á la cuerda que une los puntos de tangencia: por consiguiente, si se unen entre sí los puntos T y T' de contacto, y el medio P con el orígen ó vértice O, la recta OP será el eje que ya sabemos que tiene la propiedad de ser al mismo tiempo diámetro. La recta 5. . .5' tirada por el vértice O paralela á TT', tambien hemos visto que es una de las tangentes; uniendo desde luego O con los puntos T y T', el medio *p* de OT con 5, y el punto *q* mitad de OT' con 5', tendremos que el punto *b* medio de *p*. . .5 y el *e* mitad de *q*5', corresponden á las dos ramas de la curva. Del mismo modo las rectas *no* y *o'n'* paralelas á OT' OT darian igualmente los puntos *b* y *e*; y así sucesivamente para todos los demás puntos de la curva.

Fig. 56.



143.—Problema III.—*Dado el ángulo de las tangentes principales y la posicion de los puntos de contacto de la parábola desequidistantes del vértice, unirlas por medio de un arco trazado por el sistema de intersecciones.—Casos que se presentan.*

Para la resolucion de este problema pueden presentarse cuatro casos, cualquiera que sea la relacion de las distancias del vértice del ángulo á los puntos de tangencia: 1.° Por intersecciones de las rectas paralelas al eje ó de los diámetros con las cuerdas que, partiendo del vértice ó de los puntos de tangencia, dan cuantos puntos se quieran de la curva parabólica. 2.° Por la interseccion de los radios vectores correspondientes con las tangentes sucesivas. 3.° Por intersecciones de los radios vectores entre sí. 4.° Por la interseccion de las tangentes con los radios vectores infinitos.

Primer caso.—*Por intersecciones de las rectas paralelas al eje con un sistema de cuerdas que parten del vértice ó de los puntos de tangencia.*—Supongamos que se desea unir las alineaciones rectas AV y VB (*fig.* 57), por medio de un arco de parábola tangente á ellas en los puntos T y T′ desequidistantes del vértice V del ángulo. Desde el punto de contacto T, por ejemplo, trácese una perpendicular T y P una paralela TQ al eje VX. Constrúyase el rectángulo OPTQ, y divídanse los lados PT y TQ en tantas partes iguales entre sí, más una, como puntos se quieran obtener sobre la rama de la curva, á partir desde el orígen O hasta el punto de tangencia T: únanse los puntos de division 1... 2... 3... 4... etc., con el vértice O, y en los otros puntos 1′, 2′, 3′, 4′, etc.: levántense perpendiculares á la recta PT; y las intersecciones que se deben marcar sobre el terreno, á partir del vértice, por las séries de piquetes que señalan las letras *a*, *b*, *c*, *d*, etc., corresponden al arco de la curva; porque segun hemos visto (*núm.* 83), dividiendo en mitades cada uno de los ángulos 1*a*1′, 2*b*2′, 3*c*3′, 4*d*4′, etc., que forman los sistemas de cuerdas, y las paralelas al eje tiradas por el punto de contacto (*núm.* 94), se consideran como diámetros; las rectas que lo hagan, serán otras tantas tangentes que se pueden trazar en los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, etc., determinados por las intersecciones sobre la curva.

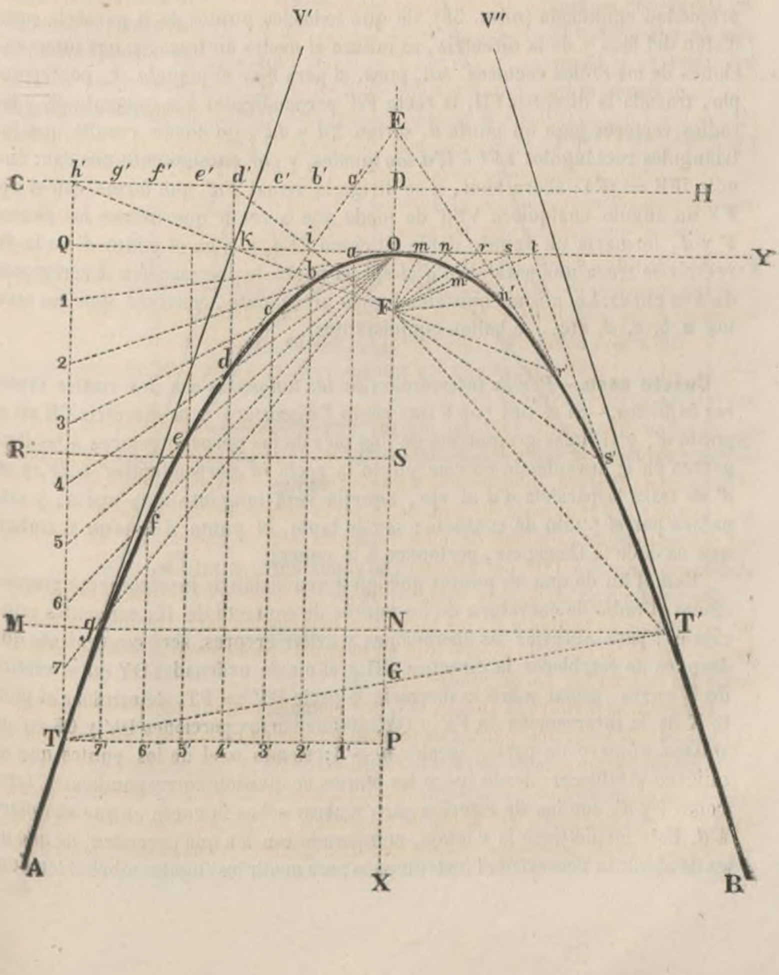
Si los accidentes del terreno ú otras circunstancias especiales no permitieran establecer la recta PT, podria servirse de la recta MN ó de cualquiera otra paralela RS, etc., porque todas quedarian divididas en partes iguales: en tal caso por los puntos de division de la recta perpendicular al eje se tirarian los diámetros que cada uno de ellos formaria con la cuerda OT un ángulo constante é igual á TOP por alternos internos entre paralelas.

Por una razon análoga se emplearán los sistemas de cuerdas que parten de los puntos de contacto de las tangentes principales para trazar una parábola sobre el terreno, lo mismo que en el papel, conociendo el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes.

Para esto se dividirá la abscisa ON, por ejemplo, tomada sobre el eje en tantas partes más una como puntos se quieran señalar en cada rama, y en el mismo número de partes iguales entre sí la coordenada NT′ y N*g*: por los puntos de division de estas, tírense paralelas indefinidas al eje OX; y para marcar la rama O*adg*, se trazan á partir del punto de tangencia T′, por todos los de la division de la abscisa ON, las rectas prolongadas que cortarán las paralelas; y los puntos de interseccion serán los que marcan el arco de la parábola. Operando del mismo modo y tirando cuerdas á partir del punto g de contacto, se fijará la otra rama $Os'T'$ á causa de la simetría de la curva. Pero si las ramas no fuesen simétricas, es decir, si los puntos de tangencia estuviesen desequidistantes del vértice, como sucede en la (*fig.* 57) que nos ocupa, habria que hacer las mismas operaciones sobre la abscisa OP y la doble ordenada TP para determinar el arco mayor $OadT$, segun hemos dicho arriba con el menor, acerca de la doble ordenada T'N y de la abscisa ON tomada sobre el mismo eje de la parábola.

Segundo caso.—*Por la interseccion de los radios vectores con las tangentes.*—Determinada la posicion del foco F, conocido el parámetro (*núm.* 141). por ser $OF = \frac{1}{4} p$, y levantando en O la perpendicular al eje, la recta QY será el lugar geométrico que contendrá los piés de las perpendiculares tiradas desde el foco á las tangentes. De modo que, si desde F se tira una

Fig. 57.



recta cualquiera Fr, la perpendicular Err' á este en r, es la tangente que tiene en r' el punto de contacto; pero en la parábola un radio vector tal, como Fr', del punto de tangencia, es igual á la distancia EF del pié de la tangente, luego los dos triángulos ErF y Frr' rectángulos en r, son iguales: de donde, ángulo $EFr = rFr'$. Por consiguiente, si haciendo estacion en el foco F se tiran las rectas Fr y Fr' y se miden los ángulos de manera que $r'FE = 2rFE$, y en el punto r marcado sobre QY se levanta rr' perpendicular al radio vector Fr, el punto de interseccion r' del radio Fr' con la perpendicular rr', es un punto de la curva. Si se repite la misma operacion, se pueden obtener los demás puntos de interseccion que se quieran sobre el arco parabólico.

Conviene elegir de antemano los puntos m, n, r, s, l, etc., equidistantes y próximos entre sí, para que los que se quieran obtener tales, como m', n', r', s', t', etc., resulten á distancias, sino iguales, tanto menores cuanto mayor sea el radio de curvatura de los puntos de tangencia de la parábola.

Tercer caso.—*Por intersecciones de los radios vectores entre sí.*—De la propiedad enunciada (*núm.* 58), de que todos los puntos de la parábola equidistan del foco y de la directriz, se infiere el medio de trazarla por intersecciones de los radios vectores. Así, pues, si para fijar el piquete d, por ejemplo, trazada la directriz CH, la recta Fd' perpendicular á la tangente dE y los radios vectores para un punto d, serian Fd y dd'; de donde resulta que los triángulos rectángulos EFi é iFd son iguales, y por consiguiente nos dan: ángulo $iFE = iF4$; ahora bien, si se dirige la visual Fd' que forme con el eje FV un ángulo cualquiera VFd' de modo que la recta que uniese los puntos F y d, formaria un ángulo doble tal como EFd, y si en el punto d' de la directriz se traza una paralela $d'd$ al eje, el punto de interseccion d corresponde á la curva. Lo mismo que en el caso precedente, conviene que los puntos a, b, c, d, etc., se hallen equidistantes.

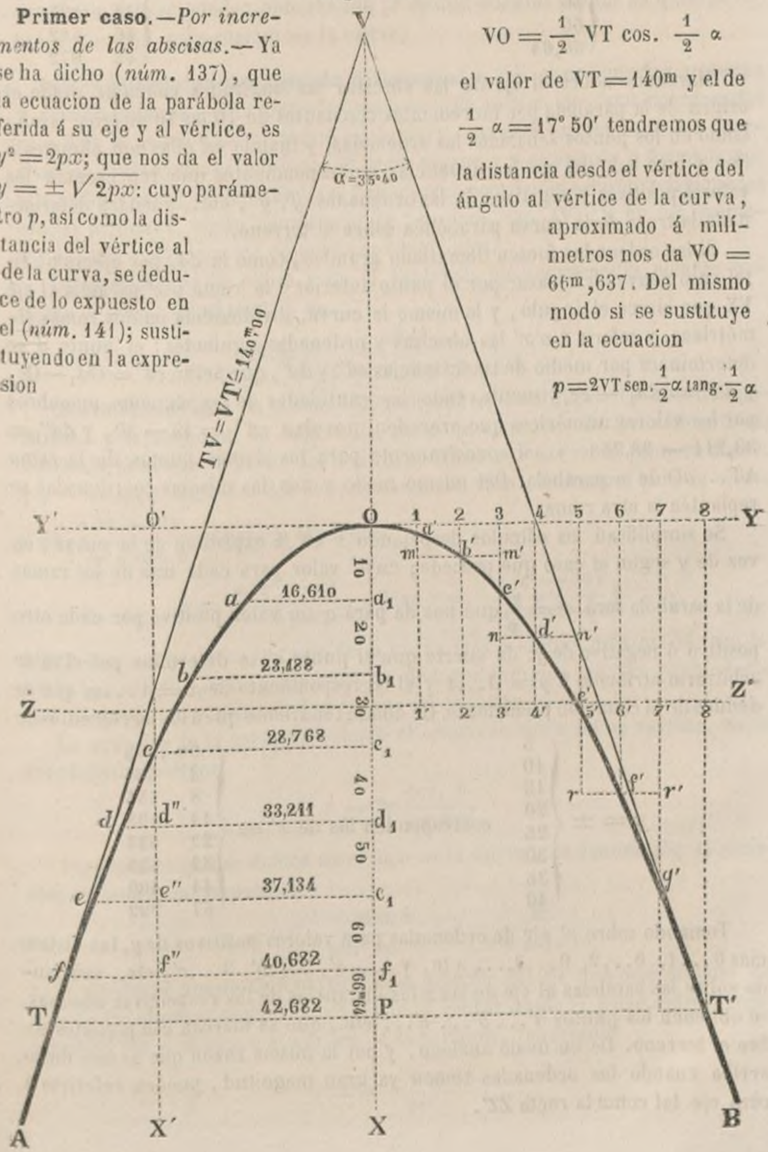
Cuarto caso.—*Por la interseccion de las tangentes con los radios vectores infinitos.*—Si se tira por F una recta Fd, cortará á la directriz CH en el punto d', y al lugar geométrico de los piés de las perpendiculares á las tangentes en i: levantando en este punto la recta id perpendicular á iF, y en d' se traza la paralela $d'd$ al eje, aquella será tangente á la curva, y esta pasará por el punto de contacto; por lo tanto, el punto d comun á ambas, que es el de la tangencia, pertenece á la curva.

Con el fin de que los puntos queden á una distancia inversamente proporcional al radio de curvatura de los puntos de contacto de las tangentes principales, para abreviar las operaciones y evitar errores, será conveniente que despues de establecer la directriz CH y el eje de ordenadas OY en el vértice de la curva, tomar sobre la directriz la parte $Dh' =$ PT, determinar el punto K de la interseccion de Fh' y QY, dividiendo las porciones Dh' y OK en un mismo número de partes iguales $n + 1$; siendo n el de los puntos que se quieren establecer: desde luego los puntos de division correspondientes, tales como i y d', son los de estacion para marcar sobre la curva el que se refiere á d. Este medio tiene la ventaja, comparado con los que preceden, de que no es de absoluta necesidad el instrumento para medir los ángulos sobre el terreno.

144.—Problema IV.—*Unir con una curva parabólica dos alineaciones rectas por medio de los sistemas de coordenadas.*—Supongamos que se trate de enlazar dos alineaciones rectas AV y VB (*fig.* 58), que forman entre sí un ángulo de 35° 40′ por un arco de parábola ATOT′B tangente á ellas en los puntos T y T′ equidistantes 140^m del vértice V.

Dos medios se presentan para la resolucion de este problema: 1.° Por incrementos constantes de las abscisas. 2.° Por incrementos constantes de las ordenadas.

Fig. 58.



Primer caso.—*Por incrementos de las abscisas.*—Ya se ha dicho (*núm.* 137), que la ecuacion de la parábola referida á su eje y al vértice, es $y^2 = 2px$; que nos da el valor $y = \pm\sqrt{2px}$: cuyo parámetro p, así como la distancia del vértice al de la curva, se deduce de lo expuesto en el (*núm.* 141); sustituyendo en la expresion

$$\text{VO} = \frac{1}{2}\,\text{VT cos.}\,\frac{1}{2}\,\alpha$$

el valor de VT$=140^m$ y el de $\frac{1}{2}\,\alpha = 17°\ 50'$ tendremos que la distancia desde el vértice del ángulo al vértice de la curva, aproximado á milímetros nos da VO $= 66^m{,}637$. Del mismo modo si se sustituye en la ecuacion

$$p = 2\text{VT sen.}\frac{1}{2}\alpha\ \text{tang.}\frac{1}{2}\alpha$$

la longitud de la tangente y la graduacion del ángulo nos da el valor del parámetro $p = 27^m,586$ aproximado á milímetros.

Si ahora se calculan las ordenadas en funcion de los incrementos constantes de la abscisa, y haciendo sucesivamente $x = 10, 20, 30, 40$, etc., tendremos que

$$\text{para } x = \begin{cases} 10^m,00 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \\ 60 \\ 66,64 \end{cases} \text{ los de las ordenenadas serán } y = \pm \begin{cases} 16^m\ ,610 \\ 23\quad 488 \\ 28\quad 768 \\ 33\quad 211 \\ 37\quad 134 \\ 40\quad 582 \\ 42\quad 872 \end{cases}$$

Marcando sobre el eje de las abscisas las longitudes contadas desde el orígen de la parábola por incrementos constantes de 10 en 10 metros; levantando en los puntos señalados las ordenadas, y fijando en ellas con piquetes á uno y otro lado del eje las distancias correspondientes que representan los valores positivos y negativos de las ordenadas y', y'', etc., quedará determinada la traza de la curva parabólica sobre el terreno.

Si las ordenadas fuesen demasiado grandes, como la dd_1 por ejemplo, en tal caso convendrá trazar por el punto anterior c la recta $o'x'$ paralela al eje VX que biseca el ángulo, y lo mismo la curva, dividiéndola en dos ramas simétricas, y referir á $o'x'$ las abscisas y ordenadas siguientes: el punto d se determinará por medio de las distancias cd'' y dd'', que serán $cd'' = Od_1 - Oc_1$ y $dd'' = dd_1 - cc_1$; sustituyendo las cantidades de los segundos miembros por los valores numéricos que preceden, nos dan $cd'' = 40 - 30$, y $dd'' = 33,211 - 28,768$: y así sucesivamente para los demás puntos de la rama AT...aO de la parábola. Del mismo modo y con las mismas coordenadas se replantea la otra rama.

Se simplifican los cálculos despejando x en la expresion de la curva, en vez de y segun el caso que precede; cuyo valor para cada una de las ramas de la parábola será $x = \frac{y^2}{p}$ que nos da para x un valor positivo por cada otro positivo ó negativo de y: de suerte que el punto a' se determina por el valor arbitrario atribuido á $y = 0...1$ y el correspondiente de $x = 1...m$ que se deduce de la ecuacion precedente. De donde tendremos que á los incrementos de

$$y = \pm \begin{cases} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \\ 30 \\ 35 \\ 40 \end{cases} \text{ corresponden los de } x' = \begin{cases} 0^m\ ,905 \\ 3\quad 634 \\ 8\quad 155 \\ 14\quad 498 \\ 22\quad 653 \\ 32\quad 620 \\ 44\quad 400 \\ 57\quad 992 \end{cases}$$

Tomando sobre el eje de ordenadas para valores positivos de y, las distancias 0...1, 0...2, 0...3,... etc. y 1...a', 2...b', 3...c', etc., señalando sobre las paralelas al eje de las x las distancias de las respectivas abscisas, se obtienen los puntos a'... b'... c'... etc., que se marcan con piquetes sobre el terreno. De un modo análogo, y por la misma razon que hemos dicho arriba cuando las ordenadas tienen ya gran magnitud, pueden referirse á otro eje tal como la recta ZZ'.

Segundo caso.— *Por incrementos constantes de las ordenadas.*—Para esto si se tira por los puntos pares b', d', f', etc., las líneas mm', nn', rr', etc., y advirtiendo que si en la abscisa $1\ldots a'$ se toma $a'\ldots m = 2\ldots b' - 1\ldots a' = x'' - x'$, y en el punto m se traza una paralela mm' al eje de las y, y sobre ella se toma mb' y $b'm'$ iguales á la distancia comprendida entre los números 2 y 3 que tambien es igual á $y''' - y''$, el punto b' pertenece á la curva, y el m' corresponde á la abscisa del siguinte tomando sobre ella $m'c' = y''' - y''$, y $c'n = y^{\text{IV}} - y'''$, el punto c' es de la curva, y n el pié de la ordenada m', y así sucesivamente se pueden obtener con prontitud cuantos puntos se quieran sobre el terreno, para replantear la curva.

145.—Aplicacion del cálculo diferencial á las coordenadas polares y rectangulares.—*Coordenadas polares.*—El empleo de estas coordenadas para fijar la posicion de un punto cualquiera, consiste en sustituir las *coordenadas rectangulares* x é y por el radio vector r y el ángulo v formado por este radio y el eje de las abscisas. Las nuevas coordenas estarán relacionadas con las primeras, segun hemos visto (2.ª seccion, cap. IV), y en los (*números* 48, 54, y 60), por las respectivas ecuaciones.

La expresion de la elipse y de la hipérbola en coordenadas polares que tienen el orígen en el centro, es

$$r^2 = \frac{a^2\, b^2}{b^2 \cos.^2 v \pm a^2 \operatorname{sen.}^2 v}.$$

Situando su orígen en el foco de la elipse, en sentido de las abscisas positivas, y lo mismo en la hipérbola, pero en la region de las x negativas; contando la abscisa á partir del centro, se tiene $x + ae$ en la primera curva, y $x - ae$ en la segunda. Sus ecuaciones serán respectivamente para la elipse

$r = \dfrac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \cos.\, v}$, y para la hipérbola

$$r = \frac{a\,(e^2 - 1)}{1 + e \cos.\, v},\ \text{ó bien}\ r = \frac{a\,(e^2 - 1)}{e \cos.\, v - 1}:$$

segun que se considere la rama de la curva más ó ménos próxima al foco tomado por orígen. Estas ecuaciones se deducen tambien de las propiedades que ya nos son conocidas de las curvas en cuestion.

La ecuacion de la parábola cuando el orígen se sitúa en el vértice, es en coordenadas polares

$$r = 2p\, \frac{\cos.\, v}{\operatorname{sen.}^2 v}.$$

Pero si el orígen se coloca en el foco de la curva, se tendrá por la ecuacion en coordenadas polares

$$r = 2r'\, \frac{1 + \cos.\, v}{\operatorname{sen}^2.\, v},\ \text{ó}\ r = \frac{2r'}{1 \cos.\, v}$$

y se cuenta el ángulo v á partir de la porcion del eje que está situado del lado de las abscisas negativas; es decir, á contar desde la parte del eje comprendida entre el foco y el vértice de la parábola, tendremos

$$r = \frac{1 + \cos.\, v.}{2r'}.$$

Esta ecuacion se deduce fácil é inmediatamente de las propiedades de la parábola ya conocidas; y por lo tanto no nos detendremos en otras explicaciones ni se necesita recordar su más oportuna aplicacion. Los mismos resultados pueden obtenerse por la geometría sencillamente.

Coordenadas rectangulares.—Volviendo á este sistema de coordenadas, es muy conveniente adoptar para las ordenadas incrementos constantes, como queda dicho en el número precedente, y calcular los correspondientes de las abscisas. En tal caso se pueden determinar los incrementos de x sin que sea preciso conocer las abscisas y deducir desde luego estas de aquellos, haciendo uso del cálculo diferencial para cada una de las ramas de la parábola, cuya expresion es $x = \frac{y^2}{p}$, que nos da la relacion por medio de la fórmula

$$(111) \qquad x = \frac{1}{p} f(y)^2.$$

Para formarse una idea precisa sobre esta ecuacion, supóngase ahora que la variable independiente $(y)^2$ aumenta á partir de este valor en una cantidad constante que llamaremos Δy, la funcion x variará por consiguiente en una cierta cantidad que designaremos por Δx: de modo que se tendrá

$$x + \Delta x = \frac{1}{p} f(y + \Delta y)^2;$$

ó bien haciendo la trasposicion y sustitucion,

$$\Delta x = \frac{1}{p} f(y + \Delta y)^2 - \frac{1}{p} f(y)^2.$$

Desarrollando el término $(y + \Delta y)^2$ por la fórmula del binomio de Newton, se tiene $y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2$; haciendo la reduccion, nos da para hallar la diferencia entre la primera y segunda abscisa, la ecuacion.

$$(112) \qquad \Delta x = \frac{1}{p}\left(2y\Delta y + (\Delta y)^2\right).$$

La fórmula para determinar la diferencia constante entre las primeras diferencias de las abscisas, se hallarán del mismo modo por el procedimiento idéntico al anterior que nos da la expresion

$$(113) \qquad \Delta^2 x = \frac{2}{p}(\Delta y)^2.$$

Si suponemos que el valor numérico atribuido al incremento constante de las ordenadas, es $\Delta y = 5$, y siendo el del parámetro $27^m,586$ como se ha determinado en el primer caso, sustituyendo en la (*fór.* 111) el valor de la variable independiente $y^2 = 5^2$, y el del parámetro $p = 27,586$, tendremos

$$x = \frac{25}{27,586} = 0^m,906.$$

Haciendo la sustitucion de los valores numéricos en la (*fór.* 112), se deduce igualmente

$$\Delta x = \frac{1}{27,586}(2 \times 5 \times 5 + 5^2) = \frac{75}{27,586} = 2,719.$$

Del mismo modo la expresion (113) nos da

$$\Delta^2 x = \frac{2 \times 5^2}{27,586} = 1,812.$$

Para más claridad y órden presentamos el resultado del cálculo en el siguiente cuadro:

Puntos.	Abscisas.	DIFERENCIAS DE	
		Primer órden.	Segundo órden.
		0,906	
1	0,906		
		2,719	
2	3,625		
		4,531	
3	8,156		
		6,343	
4	14,499		
		8,155	1,812
5	22,654		
		9,967	
6	32,621		
		11,779	
7	44,400		
		13,591	
8	57,991		
		etc.	
etc.	etc.		

Como desde luego se observa, tanto el valor de la primera abscisa 0,906 como la diferencia de primer órden que figura á la cabeza, son iguales á la mitad de la diferencia 1,812 de segundo grado: sumando esta con la primera diferencia 0,906, se obtiene 2,718, que solo difiere en 1 milésima de la cantidad 2,719 hallada por la (*fór.* 112); cuya cantidad es el incremento de la primera abscisa: para conocer los demás incrementos se va sumando sucesivamente la diferencia de la 4.ª casilla con el que le precede, y así se obtienen los demás valores de las primeras diferencias que contiene la 3.ª columna; los cuales se aumentan á las abscisas de la 2.ª casilla entre las que están comprendidos, para hallar la inmediata siguiente.

Del mismo modo conviene advertir que las cantidades colocadas entre dos abscisas consecutivas son las diferencias primeras de aquellas; de suerte que basta conocer la primera abscisa y la diferencia de primer órden entre ella y la segunda, para que todas las demás queden determinadas. Cualesquiera que sean las ordenadas y el parámetro de la parábola, cuyas abscisas se tratan de calcular, la primera de estas es siempre igual á la mitad de la diferencia de segundo grado, y la segunda abscisa el doble de esta diferencia: se obtendrá por sustraccion el número 2,719, diferencia primera de las dos primeras abscisas, y por sumas sucesivas todas las demás.

Supongamos que se tratase de replantear la rama de parábola $OabdT$ (*fig*. 54), se marcarian sobre el eje OY' los incrementos Oa', $a'b'$, $b'c'$, etc., iguales á 5, 10, 15, etc.; y sobre el otro eje OX los valores de las abscisas Oa_1, a_1b_1, b_1c_1, etc., respectivamente iguales á 0 ,906; 3,625; 8,156; etc.: tirando por los puntos marcados sobre los dos ejes, rectas paralelas á los mismos, tales como $a'a$ y a_1a, $b'b$ y b_1b, etc., sus intersecciones determinarán puntos de la curva que se marcarán con los piquetes a, b, c, d, etc.

Aplicando el mismo procedimiento á la otra rama, quedará trazado todo el arco comprendido entre los puntos de tangencia.

146.—Uso del cálculo integral para hallar las longitudes de las curvas planas.—Para completar el plan que nos hemos trazado en este libro, réstanos hacer uso de las integrales definidas para la evaluacion ó desarrollo de las curvas planas ó de segundo grado, empezando por la

Elipse. La ecuacion de esta curva con relacion á su centro es, (*núm.* 43), $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ y la del círculo de radio $r = a$, será $y'^2 = a^2 - x^2$; de donde (*núm.* 134 *fór.* 102) $y = \frac{b}{a}\,y'$. En la cual segun sea $b >$ ó $< a$, tambien será $y >$ ó $< y'$. Luego la elipse estará comprendida entre dos círculos trazados con los semi-ejes como radios. Ahora bien: si fueran conocidas las coordenadas de uno de estos círculos, podríamos, en virtud de la relacion anterior $y = \frac{b}{a}\,y'$, trazar ó replantear la elipse por puntos, segun lo expuesto (*núms.* 134 y 136) acerca del cálculo y aplicacion de las coordenadas de la tabla segunda.

Pero si se considera la elipse referida á sus diámetros rectangulares se hallará fácil y aproximadamente su desarrollo, aplicando el cálculo integral cuya ecuacion es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ \text{y tendremos}\ y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\ \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a - x^2}}:$$

de donde resulta

$$s = \int_0^x dx\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \int_0^x dx\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}{a^2\,(a^2 - x^2)}},$$

para expresion de la longitud del arco, contado desde el vértice de la curva hasta el punto cuya abscisa es x. Introduciendo la excentricidad representada por e, ó haciendo $a^2 - b^2 = a^2 e^2$, esta expresion tomará la forma

$$s = \int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}.$$

Observando, por ejemplo, que $\frac{x}{a}$ es siempre una fraccion, podremos suponer $x = a.\ \cos.\ \varphi$; de donde $dx = -\,a.\ \text{sen}.\ \varphi d\varphi$, y

$$s = -\,a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} dx\,\sqrt{1 - e^2 \cos^2.\ \varphi}.$$

Si suponemos $x = a$, y por consiguiente $\cos.\ \varphi = 1$, ó bien, $\varphi = 0$, la anterior expresion dará el desarrollo del cuarto del contorno de la elipse, segun la fórmula

$$(114)\quad \frac{\pi a}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2 - \text{etc.}\right].$$

Como la aplicacion inmediata de la fórmula que precede conduce generalmente á un cálculo muy prolijo y bastante difícil para determinar la longitud rectificada de una elipse ó de un arco elíptico, se han deducido de la expresion general ciertas relaciones con una aproximacion suficiente para hallar fácilmente el desarrollo de los arcos elípticos en los diversos casos que se presentan en la práctica.

147.—Relacion aproximada entre los semi-ejes y la longitud del arco del cuarto de elipse.—Aplicacion.— Para simplificar los cálculos presentamos las relaciones de los cuartos de elipse, desde aquel en que el semi-eje menor es $\frac{1}{10}$ del semi-eje mayor, tomando este por unidad, hasta aquellos en que los semi-ejes son iguales entre sí, y en tal caso su desarrollo es el mismo del cuarto de círculo, cuya longitud ya sabemos por las tablas trigonométricas y elementos de curvas que es igual á 1,5707963. Así, pues, tendremos el cuadro siguiente:

RELACION entre los semi-ejes.	LONGITUD del arco por unidad.	OBSERVACIONES.
0,1	1,015841	Las relaciones de la primera casilla provienen de quebrados ordinarios cuyo numerador es el semi-eje menor, y cuyo denominador es el semi-eje mayor. Multiplicando por este las primeras longitudes de la primera columna, se obtiene la del cuarto de elipse.
0,2	1,050442	
0,3	1,092131	
0,4	1,150626	
0,5	1,211054	
0,6	1,276352	
0,7	1,345594	
0,8	1,418185	
0,9	1,495255	
1,0	1,570796	

Aplicacion.—*Hallar la longitud rectificada del cuarto de elipse.*—Dos casos pueden presentarse. 1.° Que la relacion de los semi-ejes se halle exactamente en el cuadro que precede. 2.° Que dicha relacion no se encuentre en el mismo.

Primer caso.—Sea, por ejemplo, una elipse cuyo semi-eje mayor $a = 50$ metros, y el semi-eje menor $b = 30$ metros; la relacion será

$$\frac{b}{a} = \frac{30}{50} = \frac{6}{10} = 0,6:$$

ahora buscando en el cuadro la longitud por unidad que corresponde á esta relacion, encontramos sobre la horizontal que á 0,6 de la primera casilla corresponde 1,276352; muliplicando esta cantidad por 50 metros que es igual al semi-eje mayor, se obtiene $63^{m},8166$ que nos da la longitud del cuarto de elipse buscada.

Segundo caso.—Si la relacion de los semi-ejes de la elipse no estuviese comprendida entre las del cuadro precedente, se halla con mucha facilidad la longitud del cuarto del arco de ella por medio de una sencilla proporcion. Supongamos que la relacion entre los dos semi-ejes de la elipse cuyo desarrollo se trata de averiguar fuese

$$\frac{b}{a} = \frac{38}{72} = \frac{19}{36} = 0{,}5277.$$

Esta relacion está comprendida entre 0,5 y 0,6; de consiguiente será 0,5 + 0,0277; pero á la relacion 0,5 corresponde 1,211054, y para saber lo que hay que aumentar á esta última cantidad por la fraccion 0,0277, se halla la diferencia entre las relaciones 0,5 y 0,6, cuya diferencia es de 0,06529, y despues se establece la proporcion siguiente:

$$1 : 0{,}06529 :: 0{,}0277 : x = 0{,}001808$$

que, junto con 1,211054, da 1,212862. Multiplicando esta última cantidad por el semi-eje mayor $a = 72$, se halla 87,326 que es el desarrollo del cuarto de elipse que se pedia.

148.—Hipérbola.—Ya sabemos (*núm.* 50 *fór.* 46), que esta curva referida á su centro tiene por expresion

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right).$$

Desde luego conviene advertir que esta expresion que solo difiere de la hallada para la elipse, en el signo de x^2, tendrá ó dará por lo tanto propiedades idénticas á las de aquella curva. Y de consiguiente se puede aplicar el mismo procedimiento para hallar la relacion constante y trazar la hipérbola por puntos lo mismo que hemos dicho respecto de la elipse, conociendo las coordenadas de uno de los círculos trazados con los semi-ejes.

Haciendo uso de las integrales definidas para la evaluacion de las longitudes de las curvas planas, tendremos que la ecuacion de la hipérbola

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, nos dá $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$; ó bien, $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$:

por consiguiente

$$s = \int_a^x dx\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{x^2 - a^2}} = \int_a^x dx\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)\,x^2 - a^4}{a^2\,(x^2 - a^2)}};$$

ó, haciendo $a^2 + b^2 = a^2\,e^2$, se tiene

$$s = \int_a^x dx\,\sqrt{\frac{e^2\,x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}$$

para expresion de la longitud del arco, contado desde el vértice de la curva hasta el punto cuya abscisa es x. Como aquí siempre es $x > a$,

se puede suponer que $x = \frac{a}{\cos.\varphi}$; de donde $dx = \frac{a\,\text{sen.}\,\varphi d\varphi}{\cos.\,\varphi^2}$, y

$$s = a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}\sqrt{e^2 - \cos.^2\varphi} = a\int_0^\varphi d\varphi\,\frac{e}{\cos.^2\,\varphi}\sqrt{1 - \frac{\cos.^2\,\varphi}{e^2}}.$$

Observaremos que siendo la ecuacion de la asíntota $y = \frac{b}{a}\,x$, la distancia del centro de la curva al punto de la asíntota cuya abscisa es x, nos dá

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,.\,x}{a} = ex = \frac{ae}{\cos.\,\varphi}.$$

Sea r esta distancia: tendremos

$$r - s = \begin{cases} ae\,\dfrac{1-\text{sen.}\,\varphi}{\cos.\,\varphi} + \dfrac{a}{2e}\,\varphi + a\displaystyle\int_0^{\varphi} d\varphi\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{4e^3}\cos.^2\varphi\right. \\ \left. + \dfrac{1.3}{2.4}\,\dfrac{1}{6e^5}\cos.^4\varphi + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\,\dfrac{1}{8e^7}\cos.^6\varphi + \text{etc.}\right). \end{cases}$$

Si se supone $x = \frac{1}{0}$, y por lo tanto $\cos.\,\varphi = 0$, ó bien, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; esta última fórmula dará en el límite á que tienda el exceso de r sobre s, á medida que la abscisa se hace mayor $\left(\text{teniendo siempre presente que } \frac{1-\text{sen.}\,\varphi}{\cos.\,\varphi} = \frac{\cos.\,\varphi}{1+\text{sen.}\,\varphi} = 0, \text{ cuando } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, de las dos ramas de la hipérbola contadas desde el vértice hasta el punto que marca la abscisa x; cuyo desarrollo reducido á su última expresion, se obtiene por la fórmula

$$(115)\quad \frac{\pi a}{4e}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{e^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{e^3}\right)^2 + \text{etc.}\right].$$

149.—Parábola.—La ecuacion de la parábola que tiene por orígen de las coordenadas el único punto de contacto con la curva, y que en virtud de lo que expresa la fórmula nos da el valor de $y = \pm\sqrt{px}$, se extenderá indefinidamente á uno y otro lado del eje de las abscisas. Pero la forma más sencilla de la ecuacion de la parábola referida á su vértice, punto desde el cual el eje de las x la divide en dos ramas simétricas, será $y^2 = 2px$; que nos dá

$$y = \sqrt{2px},\quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

De suerte que, la longitud rectificada del arco comprendido entre el vértice de la curva y el punto cuya abscisa es x, tiene por expresion

$$s = \int_0^x dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}}.$$

La integral indefinida $\int dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}}$, se hallará suponiendo

$$\sqrt{1+\frac{p}{2x}} = t;\ \text{de donde } x = \frac{p}{2\,(t^2-1)};$$

y

$$\int dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}} = \int dx.\,t = xt - \int xdt = xt - \frac{p}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}.$$

Tomando la integral desde $x = o$ hasta $x = x$, se obtiene el desarrollo de la curva parabólica aplicando la fórmula más sencilla

$$(116) \qquad s = \frac{1}{2}\sqrt{2px + 4x^2} + \frac{1}{2}p.L^n.\frac{2x + \sqrt{2px + 4x^2}}{2px}.$$

150.—Aplicacion.—Para el desarrollo y fácil uso de esta expresion, debemos tener presente, además de lo expuesto en los (*núms.* 5 y 6), acerca de las fórmulas logarítmicas y de la relacion entre los logaritmos vulgares y los neperianos L^n que, así como la base de los artificiales es 10, la de los hiperbólicos es

2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 8.

De consiguiente, para facilitar la conversion de los logaritmos artificiales en neperianos y vice-versa, hay que hacer uso de las tablas de Callet, las cuales se refieren al módulo y sus productos desde 1 hasta 100, para pasar de los logaritmos vulgares á los hiperbólicos y recíprocamente.

Supongamos, por ejemplo, que es necesario calcular la longitud de la rama ó arco de parábola OaT (*fig.* 58), contado desde el orígen O de coordenadas en el vértice de la curva hasta el punto T de tangencia; siendo la abscisa OP $= 66^m,637$, y en el supuesto de que el parámetro es $p = 27^m,586$: sustituyendo estos valores numéricos, efectuando las operaciones indicadas en la fórmula y llamando D al desarrollo del arco parabólico ó longitud rectificada, tendremos

$$D = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\sqrt{2 \times 27,586 \times 66,637 + 4 \times 66,637^2} + \dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{2}27,586L^n.\frac{2.66,637 + \sqrt{2.27,586.66,637 + 4.66,637^2}}{2.27,586.66,637} = 83^m,703. \end{array}\right.$$

Como los puntos de tangencia equidistan del vértice V del ángulo de las alineaciones rectas, multiplicando por 2 el resultado final se obtiene el total desarrollo que es igual á $167^m,406$.

Si las dos ramas no fuesen simétricas; esto es, si los dos puntos de tangencia estuviesen desequidistantes del vértice, se calcularian separadamente cada una de dichas ramas; y lo mismo si hubiese que hallar la longitud del arco *bd*T, se determinaria la parte *Oab* y se restaria de la longitud de $83^m,703$ hallada anteriormente. De la misma manera se podria calcular para tener á la vez una parte de la otra rama, tal como *c'd'Oa*T, comprendida desde el vértice O hasta el punto *c'* á que corresponde la abscisa $x' = 25$ y la rama contada desde el mismo vértice hasta el punto de contacto T, cuya abscisa ya sabemos que es OP $= x = 66^m,637$, y su suma nos daria el desarrollo del arco *c'*OT, ó bien, la longitud rectificada.

TABLA PRIMERA.

ABSCISAS Y ORDENADAS,

POR INCREMENTOS DEL ARCO DE CÍRCULO DE 5′ EN 5′, DE 0° Á 10°; DE 10′ EN 10′, HASTA 20°; DE 30′ EN 30′, HASTA 40°; Y DE 60′ EN 60′, HASTA 90°:

CONTIENEN

LOS VALORES DE LAS COORDENADAS CON SIETE CIFRAS DECIMALES

PARA LOS RADIOS REPRESENTADOS POR LOS NUEVE GUARISMOS DE LOS NÚMEROS DÍGITOS,

Y PARA SUS MÚLTIPLOS.

Incrementos del ARCO.	ABSCISAS. 1	2	3	4
0° 0′	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000
5	0,001 4544	0,002 9088	0,004 3632	0,005 8176
10	0,002 9089	0,005 8178	0,008 7267	0,011 6356
15	0,004 3633	0,008 7266	0,013 0899	0,017 4532
20	0,005 8177	0,011 6354	0,017 4551	0,023 2708
25	0,007 2721	0,014 5442	0,021 8163	0,029 0884
30	0,008 7265	0,017 4530	0,026 1795	0,034 9060
35	0,010 1809	0,020 3618	0,030 5427	0,040 7236
40	0,011 6353	0,023 2706	0,034 9059	0.046 5412
45	0,013 0896	0,026 1792	0,039 2688	0,052 3584
50	0,014 5439	0,029 0878	0,043 6317	0,058 1756
55	0,015 9982	0,031 9964	0,047 9946	0,063 9928
1° 0′	0,017 4524	0,034 9048	0,052 3572	0,069 8096
5	0,018 9066	0,037 8132	0,056 7198	0,075 6264
10	0,020 3608	0,040 7216	0,061 0824	0,081 4432
15	0,021 8149	0,043 6298	0,065 4447	0,087 2596
20	0,023 2690	0,046 5380	0,069 8070	0,093 0760
25	0,024 7230	0,049 4460	0,074 1690	0,098 8920
30	0,026 1769	0,052 3538	0,078 5307	0,104 7076
35	0,027 6309	0,055 2618	0,082 8927	0,110 5236
40	0,029 0847	0,058 1694	0,087 2541	0,116 3388
45	0,030 5385	0,061 0770	0,091 6155	0,122 1540
50	0,031 9922	0,063 9844	0,095 9766	0,127 9688
55	0,033 4459	0,066 8918	0,100 3377	0,133 7836
2° 0′	0,034 8995	0,069 7990	0,104 6985	0,139 5980
5	0,036 3530	0,072 7060	0,109 0590	0,145 4120
10	0,037 8065	0,075 6130	0,113 4195	0,151 2260
15	0,039 2598	0,078 5196	0,117 7794	0,157 0392
20	0,040 7131	0,081 4262	0,122 1393	0,162 8524
25	0,042 1663	0,084 3326	0,126 4989	0,168 6652

Incrementos del ARCO.	ORDENADAS. 1	2	3	4
0° 0′	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000
5	0,000 0011	0,000 0022	0,000 0033	0,000 0044
10	0,000 0042	0,000 0084	0,000 0126	0,000 0168
15	0,000 0095	0,000 0190	0,000 0285	0,000 0380
20	0,000 0170	0,000 0340	0,000 0510	0,000 0680
25	0,000 0265	0,000 0530	0,000 0795	0,000 1060
30	0,000 0381	0,000 0762	0,000 1143	0,000 1524
35	0,000 0518	0,000 1036	0,000 1554	0,000 2072
40	0,000 0677	0,000 1354	0,000 2031	0,000 2708
45	0,000 0857	0,000 1714	0,000 2571	0,000 3428
50	0,000 1058	0,000 2116	0,000 3174	0,000 4232
55	0,000 1280	0,000 2560	0,000 3840	0,000 5120
1° 0′	0,000 1523	0,000 3046	0,000 4569	0,000 6092
5	0,000 1788	0,000 3576	0,000 5364	0,000 7152
10	0,000 2073	0,000 4146	0,000 6219	0,000 8292
15	0,000 2380	0,000 4760	0,000 7140	0,000 9520
20	0,000 2708	0,000 5416	0,000 8124	0,001 0832
25	0,000 3057	0,000 6114	0,000 9171	0,001 2228
30	0,000 3427	0,000 6854	0,001 0281	0,001 3708
35	0,000 3818	0,000 7636	0,001 1454	0,001 5272
40	0,000 4231	0,000 8462	0,001 2693	0,001 6924
45	0,000 4664	0,000 9328	0,001 3992	0,001 8656
50	0,000 5119	0,001 0238	0,001 5357	0,002 0476
55	0,000 5594	0,001 1188	0,001 6782	0,002 2376
2° 0′	0,000 6092	0,001 2184	0,001 8276	0,002 4368
5	0,000 6610	0,001 3220	0,001 9830	0,002 6440
10	0,000 7149	0.001 4298	0,002 1447	0.002 8596
15	0,000 7710	0,001 5420	0,002 3130	0,003 0840
20	0,000 8291	0,001 6582	0,002 4873	0,003 3164
25	0,000 8894	0,001 7788	0,002 6682	0,003 5576
Incrementos del ARCO.	1	2	3	4

ABSCISAS.

5	6	7	8	9
0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000
0,007 2720	0,008 7264	0,010 1808	0,011 6352	0,013 0896
0,014 5445	0,017 4534	0,020 3623	0,023 2712	0,026 1801
0,021 8165	0,026 1798	0,030 5431	0,034 9064	0,039 2697
0,029 0885	0,034 9062	0,040 7239	0,046 5416	0,052 3593
0,036 3605	0,043 6326	0,050 9047	0,058 1768	0,065 4489
0,043 6325	0,052 3590	0,061 0855	0,069 8120	0,078 5585
0,050 9045	0,061 0854	0,071 2663	0,081 4472	0,091 6281
0,058 1765	0,069 8118	0,081 4471	0,093 0824	0,104 7177
0,065 4480	0,078 5376	0,091 6272	0,104 7168	0,117 8064
0,072 7195	0,087 2634	0,101 8073	0,116 3512	0,130 8951
0,079 9910	0,095 9892	0,111 9874	0,127 9856	0,143 9838
0,087 2620	0,104 7144	0,122 1668	0,139 6192	0,157 0716
0,094 5330	0,113 4396	0,132 3462	0,151 2528	0,170 1594
0,101 8040	0,122 1648	0,142 5256	0,162 8864	0,183 2472
0,109 0745	0,130 8894	0,152 7043	0,174 5192	0,196 3341
0,116 3450	0,139 6140	0,162 8830	0,186 1520	0,209 4210
0,123 6150	0,148 3380	0,173 0610	0,197 7840	0,222 5070
0,130 8845	0,157 0614	0,183 2383	0,209 4152	0,235 5921
0,138 1545	0,165 7854	0,193 4163	0,221 0472	0,248 6781
0,145 4235	0,174 5082	0,203 5929	0,232 6776	0,261 7623
0,152 6925	0,183 2310	0,213 7695	0,244 3080	0,274 8465
0,159 9610	0,191 9532	0,223 9454	0,255 9376	0,287 9298
0,167 2295	0,200 6754	0,234 1213	0,267 5672	0,301 0131
0,174 4975	0,209 3970	0,244 2965	0,279 1960	0,314 0955
0,181 7650	0,218 1180	0,254 4710	0,290 8240	0,327 1770
0,189 0325	0,226 8390	0,264 6455	0,302 4520	0,340 2585
0,196 2990	0,235 5588	0,274 8186	0,314 0784	0,353 3382
0,203 5655	0,244 2786	0,284 9917	0,325 7048	0,366 4179
0,210 8315	0,252 9978	0,295 1641	0,337 3304	0,379 4967

5	6	7	8	9
0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000
0,000 0055	0,000 0066	0,000 0077	0,000 0088	0,000 0099
0,000 0210	0,000 0252	0,000 0294	0,000 0336	0,000 0378
0,000 0475	0,000 0570	0,000 0665	0,000 0760	0,000 0855
0,000 0850	0,000 1020	0,000 1190	0,000 1360	0,000 1530
0,000 1325	0,000 1590	0,000 1855	0,000 2120	0,000 2385
0,000 1905	0,000 2286	0,000 2667	0,000 3048	0,000 3429
0,000 2590	0,000 3108	0,000 3626	0,000 4144	0,000 4662
0,000 3385	0,000 4062	0,000 4739	0,000 5416	0,000 6093
0,000 4285	0,000 5142	0,000 5999	0,000 6856	0,000 7713
0,000 5290	0,000 6348	0,000 7406	0,000 8464	0,000 9522
0,000 6400	0,000 7680	0,000 8960	0,001 0240	0,001 1520
0,000 7615	0,000 9138	0,001 0661	0,001 2184	0,001 3707
0,000 8940	0,001 0728	0,001 2516	0,001 4304	0,001 6092
0,001 0365	0,001 2438	0,001 4511	0,001 6584	0,001 8657
0,001 1900	0,001 4280	0,001 6660	0,001 9040	0,002 1420
0,001 3540	0,001 6248	0,001 8956	0,002 1664	0,002 4372
0,001 5285	0,001 8342	0,002 1399	0,002 4456	0,002 7513
0,001 7135	0,002 0562	0,002 3989	0,002 7416	0,003 0843
0,001 9090	0,002 2908	0,002 6726	0,003 0544	0,003 4362
0,002 1155	0,002 5386	0,002 9617	0,003 3848	0,003 8079
0,002 3320	0,002 7984	0,003 2648	0,003 7312	0,004 1976
0,002 5595	0,003 0714	0,003 5833	0,004 0952	0,004 6071
0,002 7970	0,003 3564	0,003 9158	0,004 4752	0,005 0346
0,003 0460	0,003 6552	0,004 2644	0,004 8736	0,005 4828
0,003 3050	0,003 9660	0,004 6270	0,005 2880	0,005 9490
0,003 5745	0,004 2894	0,005 0043	0,005 7192	0,006 4341
0,003 8550	0,004 6260	0,005 3970	0,006 1680	0,006 9390
0,004 1455	0,004 9746	0,005 8037	0,006 6328	0,007 4619
0,004 4470	0,005 3364	0,006 2258	0,007 1152	0,008 0046

ORDENADAS.

Incrementos del ARCO.	ABSCISAS. 1	2	3	4
2° 30′	0,043 6194	0,087 2388	0,130 8582	0,174 4776
35	0,045 0724	0,090 1448	0,135 2172	0,180 2896
40	0,046 5253	0,093 0506	0,139 5759	0,186 1012
45	0,047 9781	0,095 9562	0,143 9343	0,191 9124
50	0,049 4308	0,098 8616	0,148 2924	0,197 7232
55	0,050 8835	0,101 7670	0,152 6505	0,203 5340
3° 0′	0,052 3360	0,104 6720	0,157 0080	0,209 3440
5	0,053 7883	0,107 5766	0,161 3649	0,215 1532
10	0,055 2406	0,110 4812	0,165 7218	0,220 9624
15	0,056 6928	0,113 3856	0,170 0784	0,226 7712
20	0,058 1448	0,116 2896	0,174 4344	0,232 5792
25	0,059 5967	0,119 1934	0,178 7901	0,238 3868
30	0,061 0485	0,122 0970	0,183 1455	0,244 1940
35	0,062 5002	0,125 0004	0,187 5006	0,250 0008
40	0,063 9517	0,127 9034	0,191 8551	0,255 8068
45	0,065 4031	0,130 8062	0,196 2093	0,261 6124
50	0,066 8544	0,133 7088	0,200 5632	0,267 4176
55	0,068 3055	0,136 6110	0,204 9165	0,273 2220
4° 0′	0,069 7565	0,139 5130	0,209 2695	0,279 0260
5	0,071 2073	0,142 4146	0,213 6219	0,284 8292
10	0,072 6580	0,145 3160	0,217 9740	0,290 6320
15	0,074 1085	0,148 2170	0,222 3255	0,296 4340
20	0,075 5589	0,151 1178	0,226 6767	0,302 2356
25	0,077 0091	0,154 0182	0,231 0273	0,308 0364
30	0,078 4591	0,156 9182	0,235 3773	0,313 8364
35	0,079 9090	0,159 8180	0,239 7270	0,319 6360
40	0,081 3587	0,162 7174	0,244 0761	0,325 4348
45	0,082 8082	0,165 6164	0,248 4246	0,331 2328
50	0,084 2576	0,168 5152	0,252 7728	0,337 0304
55	0,085 7067	0,171 4134	0,257 1201	0,342 8268

Incrementos del ARCO.	ORDENADAS. 1	2	3	4
2° 30′	0,000 9518	0,001 9036	0,002 8554	0,003 8072
35	0,001 0163	0,002 0326	0,003 0489	0,004 0652
40	0,001 0829	0,002 1658	0,003 2487	0,004 3316
45	0,001 1516	0,002 3032	0,003 4548	0,004 6064
50	0,001 2225	0,002 4450	0,003 6675	0,004 8900
55	0,001 2955	0,002 5910	0,003 8865	0,005 1820
3° 0′	0,001 3705	0,002 7410	0,004 1115	0,005 4820
5	0,001 4476	0,002 8952	0,004 3428	0,005 7904
10	0,001 5269	0,003 0538	0,004 5807	0,006 1076
15	0,001 6084	0,003 2168	0,004 8252	0,006 4336
20	0,001 6919	0,003 3838	0,005 0757	0,006 7676
25	0,001 7775	0,003 5550	0,005 3325	0,007 1100
30	0,001 8652	0,003 7304	0,005 5956	0,007 4608
35	0,001 9551	0,003 9102	0,005 8653	0,007 8204
40	0,002 0471	0,004 0942	0,006 1413	0,008 1884
45	0,002 1411	0,004 2822	0,006 4233	0,008 5644
50	0,002 2373	0,004 4746	0,006 7119	0,008 9492
55	0,002 3356	0,004 6712	0,007 0068	0,009 3424
4° 0′	0,002 4360	0,004 8720	0,007 3080	0,009 7440
5	0,002 5385	0,005 0770	0,007 6155	0,010 1540
10	0,002 6431	0,005 2862	0,007 9293	0,010 5724
15	0,002 7498	0,005 4996	0,008 2494	0,010 9992
20	0,002 8587	0,005 7174	0,008 5761	0,011 4348
25	0,002 9697	0,005 9394	0,008 9091	0,011 8788
30	0,003 0827	0,006 1654	0,009 2481	0,012 3308
35	0,003 1978	0,006 3956	0,009 5934	0,012 7912
40	0,003 3151	0,006 6302	0,009 9453	0,013 2604
45	0,003 4345	0,006 8690	0,010 3035	0,013 7380
50	0,003 5560	0,007 1120	0,010 6680	0,014 2240
55	0,003 6796	0,007 3592	0,011 0388	0,014 7184

ABSCISAS.

5	6	7	8	9
0,218 0970	0,261 7164	0,305 3358	0,348 9552	0,392 5746
0,225 3620	0,270 4344	0,315 5068	0,360 5792	0,405 6516
0,232 6265	0,279 1518	0,325 6771	0,372 2024	0,418 7277
0,239 8905	0.287 8686	0,335 8467	0,383 8248	0,431 8029
0,247 1540	0,296 5848	0,346 0156	0,395 4464	0,444 8772
0,254 4175	0,305 3010	0,356 1845	0,407 0680	0,457 9515
0,261 6800	0,314 0160	0,366 3520	0,418 6880	0,471 0240
0,268 9415	0,322 7298	0,376 5181	0,450 3064	0,484 0947
0,276 2030	0,331 4436	0,386 6842	0,441 9248	0,497 1634
0,283 4640	0,340 1568	0,396 8496	0,453 5424	0,510 2352
0,290 7240	0,348 8688	0,407 0136	0,465 1584	0,523 3032
0,297 9835	0,357 5802	0,417 1769	0,476 7736	0,536 3703
0,305 2425	0,366 2910	0,427 3395	0,488 3880	0,549 4365
0,312 5010	0,375 0012	0,437 5014	0,500 0016	0,562 5018
0,319 7585	0,383 7102	0,447 6619	0,511 6136	0,575 5653
0,327 0155	0,392 4186	0,457 8217	0,523 2248	0,588 6279
0,334 2720	0,401 1264	0,467 9808	0,534 8352	0,601 6896
0,341 5275	0,409 8330	0,478 1385	0,546 4440	0,614 7495
0,348 7825	0,418 5390	0,488 2955	0,558 0520	0,627 8085
0,356 0365	0,427 2438	0,498 4511	0,569 6584	0,640 8657
0,363 2900	0,435 9480	0,508 6060	0,581 2640	0,653 9220
0,370 5425	0,444 6510	0,518 7595	0,592 8680	0,666 9765
0,377 7945	0,453 3534	0,528 9123	0,604 4712	0,680 0301
0,385 0455	0,462 0546	0,539 0637	0,616 0728	0,693 0819
0,392 2955	0,470 7546	0,549 2137	0,627 6728	0,706 1319
0,399 5450	0,479 4540	0,559 3630	0,639 2720	0,719 1810
0,406 7935	0,488 1522	0,569 5109	0,650 8696	0,732 2283
0,414 0410	0,496 8492	0,579 6574	0,662 4656	0,745 2758
0,421 2880	0,505 5456	0,589 8032	0,674 0608	0,758 3184
0,428 5335	0,514 2402	0,599 9469	0,685 6536	0,771 3603

5	6	7	8	9
0.004 7590	0,005 7108	0,006 6626	0,007 6144	0,008 5662
0,005 0815	0,006 0978	0,007 1141	0,008 1304	0,009 1467
0,005 4145	0,006 4974	0,007 5803	0,008 6632	0,009 7461
0,005 7580	0,006 9096	0,008 0612	0,009 2128	0,010 3644
0,006 1125	0,007 3350	0,008 5575	0,009 7800	0,011 0025
0,006 4775	0,007 7730	0,009 0685	0,010 3640	0,011 6595
0,006 8525	0,008 2230	0,009 5935	0,010 9640	0,012 3345
0,007 2380	0,008 6856	0,010 1332	0,011 5808	0,013 0284
0,007 6345	0,009 1614	0,010 6883	0,012 2152	0,013 7421
0,008 0420	0,009 6504	0,011 2588	0,012 8672	0,014 4756
0,008 4595	0,010 1514	0,011 8433	0,013 5352	0,015 2271
0,008 8875	0,010 6650	0,012 4425	0,014 2200	0,015 9975
0,009 3260	0,011 1912	0,013 0564	0,014 9216	0,016 7868
0,009 7755	0,011 7306	0,013 6857	0,015 6408	0,017 5959
0,010 2355	0,012 2826	0,014 3297	0,016 3768	0,018 4239
0,010 7055	0,012 8466	0,014 9877	0,017 1288	0,019 2699
0,011 1865	0,013 4238	0,015 6611	0,017 8984	0,020 1357
0,011 6780	0,014 0136	0,016 3492	0,018 6848	0,021 0204
0,012 1800	0,014 6160	0,017 0520	0,019 4880	0,021 9240
0,012 6925	0,015 2310	0,017 7695	0,020 3080	0,022 8465
0,013 2155	0,015 8586	0,018 5017	0,021 1448	0,023 7879
0,013 7490	0,016 4988	0,019 2486	0,021 9984	0,024 7482
0,014 2935	0,017 1522	0,020 0109	0,022 8696	0,025 7283
0,014 8485	0,017 8182	0,020 7879	0,023 7576	0,026 7273
0,015 4135	0,018 4962	0,021 5789	0,024 6616	0,027 7443
0,015 9890	0,019 1868	0,022 3846	0,025 5824	0,028 7802
0,016 5755	0,019 8906	0,023 2057	0,026 5208	0,029 8359
0,017 1725	0,020 6070	0,024 0415	0,027 4760	0,030 9105
0,017 7800	0,021 3360	0,024 8920	0,028 4480	0,032 0040
0,018 3980	0,022 0776	0,025 7572	0 029 4368	0,033 1164
5	6	7	8	9

ORDENADAS.

Incrementos del ARCO.		ABSCISAS. 1	2	3	4
5°	0′	0,087 1557	0,174 3114	0,261 4671	0,348 6228
	5	0,088 6046	0,177 2092	0,265 8138	0,354 4184
	10	0,090 0532	0,180 1064	0,270 1596	0,360 2128
	15	0,091 5016	0,183 0032	0,274 5048	0,366 0064
	20	0,092 9499	0,185 8998	0,278 8497	0,371 7996
	25	0,094 3979	0,188 7958	0,283 1937	0,377 5916
	30	0,095 8458	0,191 6916	0,287 5374	0,383 3832
	35	0,097 2934	0,194 5868	0,291 8802	0,389 1736
	40	0,098 7408	0,197 4816	0,296 2224	0,394 9632
	45	0,100 1881	0,200 3762	0,300 5645	0,400 7524
	50	0,101 6351	0,203 2702	0,304 9053	0,406 5404
	55	0,103 0819	0,206 1638	0,309 2457	0,412 3276
6°	0′	0,104 5285	0,209 0570	0,313 5855	0,418 1140
	5	0,105 9748	0,211 9496	0,317 9244	0,423 8992
	10	0,107 4210	0,214 8420	0,322 2630	0,429 6840
	15	0,108 8669	0,217 7338	0,326 6007	0,435 4676
	20	0,110 3126	0,220 6252	0,330 9378	0,441 2504
	25	0,111 7580	0,223 5160	0,335 2740	0,447 0320
	30	0,113 2032	0,226 4064	0,339 6096	0,452 8128
	35	0,114 6482	0,229 2964	0,343 9446	0,458 5928
	40	0,116 0929	0,232 1858	0,348 2787	0,464 3716
	45	0,117 5374	0,235 0748	0,352 6122	0,470 1496
	50	0,118 9816	0,237 9632	0,356 9448	0,475 9264
	55	0,120 4256	0,240 8512	0,361 2768	0,481 7024
7°	0′	0,121 8693	0,243 7386	0,365 6079	0,487 4772
	5	0,123 3128	0,246 6256	0,369 9384	0,493 2512
	10	0,124 7560	0,249 5120	0,374 2680	0,499 0240
	15	0,126 1990	0,252 3980	0,378 5970	0,504 7960
	20	0,127 6416	0,255 2832	0,382 9248	0,510 5664
	25	0,129 0841	0,258 1682	0,387 2523	0,516 3364

Incrementos del ARCO.		ORDENADAS. 1	2	3	4
5°	0′	0,003 8053	0,007 6106	0,011 4159	0,015 2212
	5	0,003 9331	0,007 8662	0,011 7993	0,015 7324
	10	0,004 0631	0,008 1262	0,012 1893	0,016 2524
	15	0,004 1951	0,008 3902	0,012 5853	0,016 7804
	20	0,004 3292	0,008 6584	0,012 9876	0,017 3168
	25	0,004 4655	0,008 9310	0,013 3965	0,017 8620
	30	0,004 6038	0,009 2076	0,013 8114	0,018 4152
	35	0,004 7443	0,009 4886	0,014 2329	0,018 9772
	40	0,004 8868	0,009 7736	0,014 6604	0,019 5472
	45	0,005 0315	0,010 0630	0,015 0945	0,020 1260
	50	0,005 1783	0,010 3566	0,015 5349	0,020 7132
	55	0,005 3272	0,010 6544	0,015 9816	0,021 3088
6°	0′	0,005 4782	0,010 9564	0,016 4346	0,021 9128
	5	0,005 6312	0,011 2624	0,016 8936	0,022 5248
	10	0,005 7864	0,011 5728	0,017 3592	0,023 1456
	15	0,005 9437	0,011 8874	0,017 8311	0,023 7748
	20	0,006 1031	0,012 2062	0,018 3093	0,024 4124
	25	0,006 2646	0,012 5292	0,018 7938	0,025 0584
	30	0,006 4282	0,012 8564	0,019 2846	0,025 7128
	35	0,006 5938	0,013 1876	0,019 7814	0,026 3752
	40	0,006 7617	0,013 5234	0,020 2851	0,027 0468
	45	0,006 9316	0,013 8632	0,020 7948	0,027 7264
	50	0,007 1036	0,014 2072	0,021 3108	0,028 4144
	55	0,007 2777	0,014 5554	0,021 8331	0,029 1108
7°	0′	0,007 4538	0,014 9076	0,022 3614	0,029 8152
	5	0,007 6322	0,015 2644	0,022 8966	0,030 5288
	10	0,007 8126	0,015 6252	0,023 4378	0,031 2504
	15	0,007 9951	0,015 9902	0,023 9853	0,031 9804
	20	0,008 1797	0,016 3594	0,024 5391	0,032 7188
	25	0,008 3663	0,016 7326	0,025 0989	0,033 4652

ABSCISAS.

5	6	7	8	9
0,435 7785	0,522 9342	0,610 0899	0,697 2456	0,784 4013
0,443 0230	0,531 6276	0,620 2322	0,708 8368	0,797 4414
0,450 2660	0,540 3192	0,630 3724	0,720 4256	0,810 4788
0,457 5080	0,549 0096	0,640 5112	0,732 0128	0,823 5144
0,464 7495	0,557 6994	0,650 6493	0,743 5992	0,836 5491
0,471 9895	0,566 3874	0,660 7853	0,755 1832	0,849 5811
0,479 2290	0,575 0748	0,670 9206	0,766 7664	0,862 6122
0,486 4670	0,583 7604	0,681 0558	0,778 3472	0,875 6406
0,493 7040	0,592 4448	0,691 1856	0,789 9264	0,888 6672
0,500 9405	0,601 1286	0,701 3167	0,801 5048	0,901 6929
0,508 1755	0,609 8106	0,711 4457	0,813 0808	0,914 7159
0,515 4095	0,618 4914	0,721 5735	0,824 6552	0,927 7371
0,522 6425	0,627 1710	0,731 6995	0,836 2280	0,940 7565
0,529 8740	0,635 8488	0,741 8256	0,844 7984	0,953 7732
0,537 1050	0,644 5260	0,751 9470	0,859 3680	0,966 7890
0,544 3545	0,653 2014	0,762 0683	0,870 9352	0,979 8021
0,551 5630	0,661 8756	0,772 1882	0,882 5008	0,992 8134
0,558 7900	0,670 5480	0,782 3060	0,894 0640	1,005 8220
0,566 0160	0,679 2192	0,792 4224	0,905 6256	1,018 8288
0,573 2410	0,687 8892	0,802 5374	0,917 1856	1,031 8338
0,580 4645	0,696 5574	0,812 6503	0,928 7432	1,044 8361
0,587 6870	0,705 2244	0,822 7618	0,940 2992	1,057 8366
0,594 9089	0,713 8896	0,832 8712	0,951 8528	1,070 8344
0,602 1280	0,722 5536	0,842 9792	0,963 4048	1,083 8304
0,609 3465	0,731 2158	0,853 0851	0,974 9544	1,096 8257
0,616 5640	0,739 8768	0,863 1896	0,986 5024	1,109 8152
0,623 7800	0,748 5360	0,873 2920	0,998 0480	1,122 8040
0,630 9950	0,757 1940	0,883 3930	1,009 5920	1,135 7910
0,638 2080	0,765 8496	0,893 4912	1,021 1328	1,148 7744
0,645 4205	0,774 5046	0,903 5887	1,032 6728	1,161 7569

5	6	7	8	9
0,019 0265	0,022 8318	0,026 6371	0,030 4424	0,034 2477
0,019 6855	0,023 5986	0,027 5317	0,031 4648	0,035 3979
0,020 3155	0,024 3786	0,028 4417	0,032 5048	0,036 5679
0,020 9755	0,025 1706	0,029 3657	0,033 5608	0,037 7559
0,021 6460	0,025 9752	0,030 3044	0,034 6336	0,038 9628
0,022 3275	0,026 7930	0,031 2585	0,035 7240	0,040 1895
0,023 0190	0,027 6228	0,032 2266	0,036 8304	0,041 4342
0,023 7215	0,028 4658	0,033 2101	0,037 9544	0,042 6987
0,024 4340	0,029 3208	0,034 2076	0,039 0944	0,043 9812
0,025 1575	0,030 1890	0,035 2205	0,040 2520	0,045 2835
0,025 8915	0,031 0698	0,036 2481	0,041 4264	0,046 6047
0,026 6360	0,031 9632	0,037 2904	0,042 6176	0,047 9448
0,027 3910	0,032 8692	0,038 3474	0,043 8256	0,049 3038
0,028 1560	0,033 7872	0,039 4184	0,045 0496	0,050 6808
0,028 9320	0,034 7184	0,040 5048	0,046 2912	0,052 0776
0,029 7185	0,035 6622	0,041 6059	0,047 5496	0,053 4933
0,030 5155	0,036 6186	0,042 7217	0,048 8248	0,054 9279
0,031 3230	0,037 5876	0,043 8522	0,050 1168	0,056 3814
0,032 1410	0,038 5692	0,044 9974	0,051 4256	0,057 8538
0,032 9690	0,039 5628	0,046 1566	0,052 7504	0,059 3442
0,033 8085	0,040 5702	0,047 3319	0,054 0936	0,060 8553
0,034 6580	0,041 5896	0,048 5212	0,055 4528	0,062 3844
0,035 5180	0,042 6216	0,049 7252	0,056 8288	0,063 9324
0,036 3885	0,043 6662	0,050 9439	0,058 2216	0,065 4993
0,037 2690	0,044 7228	0,052 1766	0,059 6304	0,067 0842
0,038 1610	0,045 7932	0,053 4254	0,061 0576	0,068 6898
0,039 0630	0,046 8756	0,054 6882	0,062 5008	0,070 3134
0,039 9755	0,047 9706	0,055 9657	0,063 9608	0,071 9359
0,040 8985	0,049 0782	0,057 2579	0,065 4376	0,073 6173
0,041 8315	0,050 1978	0,058 5641	0,066 9304	0,075 2967

ORDENADAS.

Incrementos del ARCO.	ABSCISAS. 1	2	3	4
7° 30′	0,130 5262	0,261 0524	0,391 5786	0,522 1048
35	0,131 9681	0,263 9362	0,395 9043	0,527 8724
40	0,133 4096	0,266 8192	0,400 2288	0,533 6384
45	0,134 8509	0,269 7018	0,404 5527	0,539 4036
50	0,136 2919	0,272 5838	0,408 8757	0,545 1676
55	0,137 7327	0,275 4654	0,413 1981	0,550 9308
8° 0′	0,139 1731	0,278 3462	0,417 5193	0,556 6924
5	0,140 6132	0,281 2264	0,421 8396	0,562 4528
10	0,142 0531	0,284 1062	0,426 1593	0,568 2124
15	0,143 4926	0,286 9852	0,430 4778	0,573 9704
20	0,144 9319	0,289 8638	0,434 7957	0,579 7276
25	0,146 3708	0,292 7416	0,439 1124	0,585 4832
30	0,147 8094	0,295 6188	0,443 4282	0,591 2376
35	0,149 2477	0,298 4954	0,447 7431	0,596 9908
40	0,150 6857	0,301 3714	0,452 0571	0,602 7428
45	0,152 1234	0,304 2468	0,456 3702	0,608 4936
50	0,153 5607	0,307 1214	0,460 6821	0,614 2428
55	0,154 9978	0,309 9956	0,464 9934	0,619 9912
9° 0′	0,156 4345	0,312 8690	0,469 3035	0,625 7380
5	0,157 8708	0,315 7416	0,473 6124	0,631 4832
10	0,159 3069	0,318 6138	0,477 9207	0,637 2276
15	0,160 7426	0,321 4852	0,482 2278	0,642 9704
20	0,162 1779	0,324 3558	0,486 5337	0,648 7116
25	0,163 6129	0,327 2258	0,490 8387	0,654 4516
30	0,165 0476	0,330 0952	0,495 1428	0,660 1904
35	0,166 4819	0,332 9638	0,499 4457	0,665 9276
40	0,167 9159	0,335 8318	0,503 7477	0,671 6636
45	0,169 3495	0,338 6990	0,508 0485	0,677 3980
50	0,170 7828	0,341 5656	0,512 3484	0,683 1312
55	0,172 2156	0,344 4312	0,516 6468	0,688 8624

Incrementos del ARCO.	ORDENADAS. 1	2	3	4
7° 30′	0,008 5551	0,017 1102	0,025 6653	0,034 2204
35	0,008 7461	0,017 4922	0,026 2383	0,034 9844
40	0,008 9391	0,017 8782	0,026 8173	0,035 7564
45	0,009 1341	0,018 2682	0,027 4023	0,036 5364
50	0,009 3313	0,018 6626	0,027 9939	0,037 3252
55	0,009 5306	0,019 0612	0,028 5918	0,038 1224
8° 0′	0,009 7320	0,019 4640	0,029 1960	0,038 9280
5	0,009 9355	0,019 8710	0,029 8065	0,039 7420
10	0,010 1410	0,020 2820	0,030 4230	0,040 5640
15	0,010 3486	0,020 6972	0,031 0458	0,041 3944
20	0,010 5584	0,021 1168	0,031 6752	0,042 2336
25	0,010 7702	0,021 5404	0,032 3106	0,043 0808
30	0,010 9842	0,021 9684	0,032 9526	0,043 9368
35	0,011 2002	0,022 4004	0,033 6006	0,044 8008
40	0,011 4183	0,022 8366	0,034 2549	0,045 6732
45	0,011 6385	0,023 2770	0,034 9155	0,046 5540
50	0,011 8608	0,023 7216	0,035 5824	0,047 4432
55	0,012 0852	0,024 1704	0,036 2556	0,048 3408
9° 0′	0,012 3117	0,024 6234	0,036 9351	0,049 2468
5	0,012 5402	0,025 0804	0,037 6206	0,050 1608
10	0,012 7709	0,025 5418	0,038 3127	0,051 0836
15	0,013 0036	0,026 0072	0,039 0108	0,052 0144
20	0,013 2385	0,026 4770	0,039 7155	0,052 9540
25	0,013 4754	0,026 9508	0,040 4262	0,053 9016
30	0,013 7144	0,027 4288	0,041 1432	0,054 8576
35	0,013 9555	0,027 9110	0,041 8665	0,055 8220
40	0,014 1987	0,028 3974	0,042 5961	0,056 7948
45	0,014 4439	0,028 8878	0,043 3317	0,057 7756
50	0,014 6913	0,029 3826	0,044 0739	0,058 7652
55	0,014 9408	0,029 8816	0,044 8224	0,059 7632

ABSCISAS.

5	6	7	8	9
0,652 6310	0,783 1572	0,913 6834	1,044 2096	1,174 7358
0,659 8405	0,791 8086	0,923 7767	1,055 7448	1,187 7129
0,667 0480	0,800 4576	0,933 8672	1,067 2768	1,200 6864
0,674 2545	0,809 1054	0,943 9563	1,078 8072	1,213 6581
0,681 4595	0,817 7514	0,954 0433	1,090 3352	1,226 6271
0,688 6635	0,826 3962	0,964 1289	1,101 8616	1,239 5943
0,695 8655	0,835 0386	0,974 2117	1,113 3848	1,252 5579
0,703 0660	0,843 6792	0,984 2924	1,124 9056	1,265 5188
0,710 2655	0,852 3186	0,994 3717	1,136 4248	1,278 4779
0,717 4630	0,860 9556	1,004 4482	1,147 9408	1,291 4334
0,724 6595	0,869 5914	1,014 5233	1,159 4552	1,304 3871
0,731 8540	0,878 2248	1,024 5956	1,170 9664	1,317 3372
0,739 0470	0,886 8564	1,034 6658	1,182 4752	1,330 2846
0,746 2385	0,895 4862	1,044 7339	1,193 9816	1,343 2293
0,753 4283	0,904 1142	1,054 7999	1,205 4856	1,356 1713
0,760 6170	0,912 7404	1,064 8638	1,216 9872	1,369 1106
0,767 8035	0,921 3642	1,074 9249	1,228 4856	1,382 0463
0,774 9890	0,929 9868	1,084 9846	1,239 9824	1,394 9802
0,782 1725	0,938 6070	1,095 0415	1,251 4760	1,407 9105
0,789 3540	0,947 2248	1,105 0956	1,262 9664	1,420 8372
0,796 5345	0,955 8414	1,115 1483	1,274 4552	1,433 7621
0,803 7130	0,964 4556	1,125 1982	1,285 9408	1,446 6834
0,810 8895	0,973 0674	1,135 2453	1,297 4232	1,459 6011
0,818 0645	0,981 6774	1,145 2903	1,308 9032	1,472 5161
0,825 2380	0,990 2856	1,155 3332	1,320 3808	1,485 4284
0,832 4095	0,998 8914	1,165 3733	1,331 8552	1,498 3371
0,839 5795	1,007 4954	1,175 4113	1,343 3272	1,511 2431
0,846 7475	1,016 0970	1,185 4465	1,354 7960	1,524 1455
0,853 9140	1,024 6968	1,195 4796	1,366 2624	1,537 0452
0,861 0780	1,033 2936	1,205 5092	1,377 7248	1,549 9404

0,042 7755	0,051 3306	0,059 8857	0,068 4408	0,076 9959
0,043 7305	0,052 4766	0,061 2227	0,069 9688	0,078 7149
0,044 6955	0,053 6346	0,062 5737	0,071 5128	0,080 4519
0,045 6705	0,054 8046	0,063 9387	0,073 0728	0,082 2069
0,046 6565	0,055 9878	0,065 3191	0,074 6504	0,083 9817
0,047 6530	0,057 1836	0,066 7142	0,076 2448	0,085 7754
0,048 6600	0,058 3920	0,068 1240	0,077 8560	0,087 5880
0,049 6775	0,059 6150	0,069 5485	0,079 4840	0,089 4195
0,050 7050	0,060 8460	0,070 9870	0,081 1280	0,091 2690
0,051 7430	0,062 0916	0,072 4402	0,082 7888	0,093 1374
0,052 7920	0,063 3504	0,073 9088	0,084 4672	0,095 0256
0,053 8510	0,064 6212	0,075 3914	0,086 1616	0,096 9318
0,054 9210	0,065 9052	0,076 8894	0,087 8736	0,098 8578
0,056 0010	0,067 2012	0,078 4014	0,089 6016	0,100 8018
0,057 0915	0,068 5098	0,079 9281	0,091 3464	0,102 7647
0,058 1925	0,069 8310	0,081 4695	0,093 1080	0,104 7465
0,059 3040	0,071 1648	0,083 0256	0,094 8864	0,106 7472
0,060 4260	0,072 5112	0,084 5964	0,096 6816	0,108 7668
0,061 5585	0,073 8702	0,086 1819	0,098 4936	0,110 8053
0,062 7010	0,075 2412	0,087 7814	0,100 3216	0,112 8618
0,063 8545	0,076 6254	0,089 3963	0,102 1672	0,114 9381
0,065 0180	0,078 0216	0,091 0252	0,104 0288	0,117 0324
0,066 1925	0,079 4310	0,092 6695	0,105 9080	0,119 1465
0,067 3770	0,080 8524	0,094 3278	0,107 8032	0,121 2786
0,068 5720	0,082 2864	0,096 0008	0,109 7152	0,123 4296
0,069 7775	0,083 7330	0,097 6885	0,111 6440	0,125 5995
0,070 9935	0,085 1922	0,099 3909	0,113 5896	0,127 7883
0,072 2195	0,086 6634	0,101 1073	0,115 5512	0,129 9951
0,073 4565	0,088 1478	0,102 8391	0,117 5304	0,132 2217
0,074 7040	0,089 6448	0,104 5856	0,119 5264	0,134 4672
5	6	7	8	9

ORDENADAS.

Incrementos del ARCO.	ABSCISAS. 1	2	3	4
10° 0′	0,173 6482	0,347 2964	0,520 9446	0,694 5928
10	0,176 5121	0,353 0242	0,529 5363	0,706 0484
20	0,179 3746	0,358 7492	0,538 1238	0,717 4984
30	0,182 2355	0,364 4710	0,546 7065	0,728 9420
40	0,185 0949	0,370 1898	0,555 2847	0,740 3796
50	0,187 9527	0,375 9054	0,563 8581	0,751 8108
11° 0′	0,190 8090	0,381 6180	0,572 4270	0,763 2360
10	0,193 6636	0,387 3272	0,580 9908	0,774 6544
20	0,196 5166	0,393 0332	0,589 5498	0,786 0664
30	0,199 3679	0,398 7358	0,598 1037	0,797 4716
40	0,202 2176	0,404 4352	0,606 6528	0,808 8704
50	0,205 0655	0,410 1310	0,615 1965	0,820 2620
12° 0′	0,207 9117	0,415 8234	0,623 7351	0,831 6468
10	0,210 7561	0,421 5122	0,632 2683	0,843 0244
20	0,213 5988	0,427 1976	0,640 7964	0,854 3952
30	0,216 4396	0,432 8792	0,649 3188	0,865 7584
40	0,219 2786	0,438 5572	0,657 8358	0,877 1144
50	0,222 1158	0,444 2316	0,666 3474	0,888 4632
13° 0′	0,224 9511	0,449 9022	0,674 8533	0,899 8044
10	0,227 7844	0,455 5688	0,683 3532	0,911 1376
20	0,230 6159	0,461 2318	0,691 8477	0,922 4636
30	0,233 4454	0,466 8908	0,700 3362	0,933 7816
40	0,236 2729	0,472 5458	0,708 8187	0,945 0916
50	0,239 0984	0,478 1968	0,717 2952	0,956 3936
14° 0′	0,241 9219	0,483 8438	0,725 7657	0,967 6876
10	0,244 7433	0,489 4866	0,734 2299	0,978 9732
20	0,247 5627	0,495 1254	0,742 6881	0,990 2508
30	0,250 3800	0,500 7600	0,751 1400	1,001 5200
40	0,253 1952	0,506 3904	0,759 5856	1,012 7808
50	0,256 0082	0,512 0164	0,768 0246	1,024 0328

Incrementos del ARCO.	ORDENADAS. 1	2	3	4
10° 0′	0,015 1923	0,030 3846	0,045 5769	0,060 7692
10	0,015 7015	0,031 4030	0,047 1045	0,062 8060
20	0,016 2192	0,032 4384	0,048 6576	0,064 8768
30	0,016 7451	0,033 4902	0,050 2353	0,066 9804
40	0,017 2794	0,034 5588	0,051 8382	0,069 1176
50	0,017 8219	0,035 6438	0,053 4657	0,071 2876
11° 0′	0,018 3729	0,036 7458	0,055 1187	0,073 4916
10	0,018 9320	0,037 8640	0,056 7960	0,075 7280
20	0,019 4995	0,038 9990	0,058 4985	0,077 9980
30	0,020 0753	0,040 1506	0,060 2259	0,080 3012
40	0,020 6594	0,041 3188	0,061 9782	0,082 6376
50	0,021 2517	0,042 5034	0,063 7551	0,085 0068
12° 0′	0,021 8524	0,043 7048	0,065 5572	0,087 4096
10	0,022 4614	0,044 9228	0,067 3842	0,089 8456
20	0,023 0785	0,046 1570	0,069 2355	0,092 3140
30	0,023 7040	0,047 4080	0,071 1120	0,094 8160
40	0,024 3377	0,048 6754	0,073 0131	0,097 3508
50	0,024 9797	0,049 9594	0,074 9391	0,099 9188
13° 0′	0,025 6299	0,051 2598	0,076 8897	0,102 5196
10	0,026 2884	0,052 5768	0,078 8652	0,105 1536
20	0,026 9552	0,053 9104	0,080 8656	0,107 8208
30	0,027 6301	0,055 2602	0,082 8903	0,110 5204
40	0,028 3133	0,056 6266	0,084 9399	0,113 2532
50	0,029 0046	0,058 0092	0,087 0138	0,116 0184
14° 0′	0,029 7043	0,059 4086	0,089 1129	0,118 8172
10	0,030 4121	0,060 8242	0,091 2363	0,121 6484
20	0,031 1282	0,062 2564	0,093 3846	0,124 5128
30	0,031 8524	0,063 7048	0,095 5572	0,127 4096
40	0,032 5848	0,065 1696	0,097 7544	0,130 3392
50	0,033 3254	0,066 6508	0,099 9762	0,133 3016

ABSCISAS.

5	6	7	8	9
0,868 2410	1,041 8892	1,215 5374	1,389 1856	1,562 8338
0,882 5605	1,059 0726	1,235 5847	1,412 0968	1,588 6089
0,896 8730	1,076 2476	1,255 6222	1,434 9968	1,614 3714
0,911 1775	1,093 4130	1,275 6485	1,457 8840	1,640 1195
0,925 4745	1,110 5694	1,295 6643	1,480 7592	1,665 3541
0,939 7635	1,127 7162	1,315 6689	1,503 6216	1,691 5745
0,954 0450	1,144 8540	1,335 6630	1,526 4720	1,717 2810
0,968 3180	1,161 9816	1,355 6452	1,549 3088	1,742 9724
0,982 5830	1,179 0996	1,375 6162	1,572 1328	1,768 6494
0,996 8395	1,196 2074	1,395 5753	1,594 9432	1,794 3111
1,011 0880	1,213 3056	1,415 5232	1,617 7408	1,819 9584
1,025 3275	1,230 3930	1,435 4585	1,640 5240	1,845 5895
1,039 5585	1,247 4702	1,455 3819	1,663 2936	1,871 2053
1,053 7805	1,264 5366	1,475 2927	1,686 0488	1,896 8049
1,067 9940	1,281 5928	1,495 1916	1,708 7904	1,922 3892
1,082 1980	1,298 6376	1,515 0772	1,731 5168	1,947 9564
1,096 3930	1,315 6716	1,534 9502	1,754 2288	1,973 5074
1,110 5790	1,332 6948	1,554 8106	1,776 9264	1,999 0422
1,124 7555	1,349 7066	1,574 6577	1,799 6088	2,024 5599
1,138 9220	1,366 7064	1,594 4908	1,822 2752	2,050 0596
1,153 0795	1,383 6954	1,614 3113	1,844 9272	2,075 5431
1,167 2270	1,400 6724	1,634 1178	1,867 5632	2,101 0086
1,181 3645	1,417 6374	1,653 9103	1,890 1832	2,126 4561
1,195 4920	1,434 5904	1,673 6888	1,912 7872	2,151 8856
1,209 6095	1,451 5314	1,693 4533	1,935 3752	2,177 2971
1,223 7165	1,468 4598	1,713 2031	1,957 9464	2,202 6897
1,257 8135	1,485 3762	1,732 9389	1,980 5016	2,228 0643
1,251 9000	1,502 2800	1,752 6600	2,003 0400	2,253 4200
1,265 9760	1,519 1712	1,772 3664	2,025 5616	2,278 7568
1,280 0410	1,536 0492	1,792 0574	2,048 0656	2,304 0738

0,075 9615	0,091 1538	0,106 3461	0,121 5384	0,136 7307
0,078 5075	0,094 2090	0,109 9105	0,125 6120	0,141 3135
0,081 0960	0,097 3152	0,113 5344	0,129 7536	0,145 9728
0,083 7255	0,100 4706	0,117 2157	0,133 9608	0,150 7059
0,086 3970	0,103 6764	0,120 9558	0,138 2352	0,155 5146
0,089 1095	0,106 9314	0,124 7533	0,142 5752	0,160 3971
0,091 8645	0,110 2374	0,128 6103	0,146 9832	0,165 3561
0,094 6600	0,113 5920	0,132 5240	0,151 4560	0,170 3880
0,097 4975	0,116 9975	0,136 4965	0,155 9960	0,175 4955
0,100 3765	0,120 4518	0,140 5271	0,160 6024	0,180 6777
0,103 2970	0,123 9564	0,144 6158	0,165 2752	0,185 9346
0,106 2585	0,127 5102	0,148 7619	0,170 0136	0,191 2653
0,109 2620	0,131 1144	0,152 9668	0,174 8192	0,196 6716
0,112 3070	0,134 7684	0,157 2298	0,179 6912	0,202 1526
0,115 3925	0,138 4710	0,161 5495	0,184 6280	0,207 7065
0,118 5200	0,142 2240	0,165 9280	0,189 6320	0,213 3360
0,121 6885	0,146 0262	0,170 3639	0,194 7016	0,219 0393
0,124 8985	0,149 8782	0,174 8579	0,199 8376	0,224 8173
0,128 1495	0,153 7794	0,179 4093	0,205 0392	0,230 6691
0,131 4420	0,157 7304	0,184 0188	0,210 3072	0,236 5956
0,134 7760	0,161 7312	0,188 6864	0,215 6416	0,242 5968
0,138 1505	0,165 7806	0,193 4107	0,221 0408	0,248 6709
0,141 5665	0,169 8798	0,198 1931	0,226 5064	0,254 8197
0,145 0230	0,174 0276	0,203 0322	0,232 0368	0,261 0414
0,148 5215	0,178 2258	0,207 9301	0,237 6344	0,267 3387
0,152 0605	0,182 4726	0,212 8847	0,243 2968	0,273 7089
0,155 6410	0,186 7692	0,217 8974	0,249 0256	0,280 1538
0,159 2620	0,191 1144	0,222 9668	0,254 8192	0,286 6716
0,162 9240	0,195 5088	0,228 0936	0,260 6784	0,293 2632
0,166 6270	0,199 9524	0,233 2778	0,266 6052	0,299 9286
5	6	7	8	9

ORDENADAS.

Incrementos del ARCO.	ABSCISAS. 1	2	3	4
15° 0′	0,258 8190	0,517 6380	0,776 4570	1,035 2760
10	0,261 6277	0,523 2554	0,784 8831	1,046 5108
20	0,264 4342	0,528 8684	0,793 3026	1,057 7368
30	0,267 2384	0,534 4768	0,801 7152	1,068 9536
40	0,270 0403	0,540 0806	0,810 1209	1,080 1612
50	0,272 8400	0,545 6800	0,818 5200	1,091 3600
16° 0′	0,275 6374	0,551 2748	0,826 9122	1,102 5496
10	0,278 4324	0,556 8648	0,835 2972	1,113 7296
20	0,281 2251	0,562 4502	0,843 6753	1,124 9004
30	0,284 0153	0,568 0306	0,852 0459	1,136 0612
40	0,286 8032	0,573 6064	0,860 4096	1,147 2128
50	0,289 5887	0,579 1774	0,868 7661	1,158 3548
17° 0′	0,292 3717	0,584 7434	0,877 1151	1,169 4868
10	0,295 1522	0,590 3044	0,885 4566	1,180 6088
20	0,297 9303	0,595 8606	0,893 7909	1,191 7212
30	0,300 7058	0,601 4116	0,902 1174	1,202 8232
40	0,303 4788	0,606 9576	0,910 4364	1,213 9152
50	0,306 2492	0,612 4984	0,918 7476	1,224 9968
18° 0′	0,309 0170	0,618 0340	0,927 0510	1,236 0680
10	0,311 7822	0,623 5644	0,935 3466	1,247 1288
20	0,314 5448	0,629 0896	0,943 6344	1,258 1792
30	0,317 3047	0,634 6094	0,951 9141	1,269 2188
40	0,320 0619	0,640 1238	0,960 1857	1,280 2476
50	0,322 8164	0,645 6328	0,968 4492	1,291 2656
19° 0′	0,325 5682	0,651 1364	0,976 7046	1,302 2728
10	0,328 3172	0,656 6344	0,984 9516	1,313 2688
20	0,331 0634	0,662 1268	0,993 1902	1,324 2536
30	0,333 8069	0,667 6138	1,001 4207	1,335 2276
40	0,336 5475	0,673 0950	1,009 6425	1,346 1900
50	0,339 2853	0,678 5706	1,017 8559	1,357 1412

Incrementos del ARCO.	ORDENADAS. 1	2	3	4
15° 0′	0,034 0742	0,068 1484	0,102 2226	0,136 2968
10	0,034 8312	0,069 6624	0,104 4936	0,139 3248
20	0,035 5963	0,071 1926	0,106 7889	0,142 3852
30	0,036 3695	0,072 7390	0,109 1085	0,145 4780
40	0,037 1510	0,074 3020	0,111 4530	0,148 6040
50	0,037 9406	0,075 8812	0,113 8218	0,151 7624
16° 0′	0,038 7383	0,077 4766	0,116 2149	0,154 9532
10	0,039 5442	0,079 0884	0,118 6326	0,158 1768
20	0,040 3582	0,080 7164	0,121 0746	0,161 4328
30	0,041 1803	0,082 3606	0,123 5409	0,164 7212
40	0,042 0105	0,084 0210	0,126 0315	0,168 0420
50	0,042 8488	0,085 6976	0,128 5464	0,171 3952
17° 0′	0,043 6952	0,087 3904	0,131 0856	0,174 7808
10	0,044 5498	0,089 0996	0,133 6494	0,178 1992
20	0,045 4124	0,090 8248	0,136 2372	0,181 6496
30	0,046 2831	0,092 5662	0,138 8493	0,185 1324
40	0,047 1618	0,094 3236	0,141 4854	0,188 6472
50	0,048 0486	0,096 0972	0,144 1458	0,192 1944
18° 0′	0,048 9435	0,097 8870	0,146 8305	0,195 7740
10	0,049 8464	0,099 6928	0,149 5392	0,199 3856
20	0,050 7574	0,101 5148	0,152 2722	0,203 0296
30	0,051 6764	0,103 3528	0,155 0292	0,206 7056
40	0,052 6034	0,105 2068	0,157 8102	0,210 4136
50	0,053 5384	0,107 0768	0,160 6152	0,214 1536
19° 0′	0,054 4815	0,108 9630	0,163 4445	0,217 9260
10	0,055 4325	0,110 8650	0,166 2975	0,221 7300
20	0,056 3915	0,112 7830	0,169 1745	0,225 5660
30	0,057 3585	0,114 7170	0,172 0755	0,229 4540
40	0,058 3335	0,116 6670	0,175 0005	0,233 3340
50	0,059 3165	0,118 6330	0,177 9495	0,237 2660

ABSCISAS.

5	6	7	8	9
1,294 0950	1,552 9140	1,811 7330	2,070 5520	2,329 3710
1,308 1385	1,569 7662	1,831 3939	2,093 0246	2,354 6493
1,322 1710	1,586 6052	1,851 0394	2,115 4736	2,379 9078
1,336 1920	1,603 4304	1,870 6688	2,137 9072	2,405 1456
1,350 2015	1,620 2418	1,890 2821	2,160 3224	2,430 3627
1,364 2000	1,637 0400	1,909 8800	2,182 7200	2,455 5600
1,378 1870	1,653 8244	1,929 4618	2,205 0992	2,480 7366
1,392 1620	1,670 5944	1,949 0268	2,227 4592	2,505 8916
1,406 1255	1,687 3506	1,968 5757	2,249 8008	2,531 0259
1,420 0765	1,704 0918	1,988 1071	2,272 1224	2,556 1377
1,434 0160	1,720 8192	2,007 6224	2,294 4256	2,581 2288
1,447 9435	1,737 5322	2,027 1209	2,316 7096	2,606 2983
1,461 8585	1,754 2302	2,046 6019	2,338 9736	2,631 3453
1,475 7610	1,770 9132	2,066 0654	2,361 2176	2,656 3698
1,489 6515	1,787 5818	2,085 5121	2,383 4424	2,681 3727
1,503 5290	1,804 2348	2,104 9406	2,405 6464	2,706 3522
1,517 3940	1,820 8728	2,124 3516	2,427 8304	2,731 3092
1,531 2460	1,837 4952	2,143 7444	2,449 9936	2,756 2428
1,545 0850	1,854 1020	2,163 1190	2,472 1360	2,781 1530
1,558 9110	1,870 6932	2,182 4754	2,494 2576	2,806 0398
1,572 7240	1,887 2688	2,201 8136	2,516 3584	2,830 9032
1,586 5235	1,903 8282	2,221 1329	2,538 4376	2,855 7423
1,600 3095	1,920 3714	2,240 4333	2,560 4952	2,880 5571
1,614 0820	1,936 8984	2,259 7148	2,582 5312	2,905 3476
1,627 8410	1,953 4092	2,278 9774	2,604 5456	2,930 1138
1,641 5860	1,969 9032	2,298 2204	2,626 5376	2,954 8548
1,655 3170	1,986 3804	2,317 4438	2,648 5072	2,979 5706
1,669 0345	2,002 8414	2,336 6483	2,670 4552	3,004 2621
1,682 7375	2,019 2850	2,355 8527	2,692 3800	3,028 9275
1,696 4265	2,035 7118	2,374 9971	2,714 2824	3,053 5677

5	6	7	8	9
0,170 3740	0,204 4452	0,238 5194	0,272 5936	0,306 6678
0,174 1560	0,208 9872	0,243 8184	0,278 6496	0,313 4808
0,177 9815	0,213 5778	0,249 1741	0,284 7704	0,320 3667
0,181 8475	0,218 2170	0,254 5865	0,290 9560	0,327 3255
0,185 7550	0,222 9060	0,260 0570	0,297 2080	0,334 3590
0,189 7030	0,227 6436	0,265 5842	0,303 5248	0,341 4654
0,193 6915	0,232 4298	0,271 1681	0,309 9064	0,348 6447
0,197 7210	0,237 2652	0,276 8094	0,316 3536	0,355 8978
0,201 7910	0,242 1492	0,282 5074	0,322 8656	0,363 2238
0,205 9015	0,247 0818	0,288 2621	0,329 4424	0,370 6227
0,210 0525	0,252 0630	0,294 0735	0,336 0840	0,378 0945
0,214 2440	0,257 0928	0,299 9416	0,342 7904	0,385 6392
0,218 4760	0,262 1712	0,305 8664	0,349 5616	0,393 2568
0,222 7490	0,267 2988	0,311 8486	0,356 3984	0,400 9482
0,227 0620	0,272 4744	0,317 8868	0,363 2992	0,408 7116
0,231 4155	0,277 6986	0,323 9817	0,370 2648	0,416 5479
0,235 8090	0,282 9708	0,330 1326	0,377 2944	0,424 4562
0,240 2430	0,288 2916	0,336 3402	0,384 3888	0,432 4374
0,244 7175	0,293 6610	0,342 6045	0,391 5480	0,440 4915
0,249 2320	0,299 0784	0,348 9248	0,398 7712	0,448 6176
0,253 7870	0,304 5444	0,355 3018	0,406 0592	0,456 8166
0,258 3820	0,310 0584	0,361 7348	0,413 4112	0,465 0876
0,263 0170	0,315 6204	0,368 2238	0,420 8272	0,473 4306
0,267 6920	0,321 2304	0,374 7688	0,428 3072	0,481 8456
0,272 4075	0,326 8890	0,381 3705	0,435 8520	0,490 3335
0,277 1625	0,332 5950	0,388 0275	0,443 4600	0,498 8925
0,281 9575	0,338 3490	0,394 7405	0,451 1320	0,507 5235
0,286 7925	0,344 1510	0,401 5095	0,458 8680	0,516 2265
0,291 6675	0,350 0010	0,408 3345	0,466 6680	0,525 0015
0,296 5825	0,355 8990	0,415 2155	0,474 5320	0,533 8485
5	6	7	8	9

ORDENADAS.

Incrementos del ARCO.		ABSCISAS. 1	2	3	4
20°	0′	0,342 0202	0,684 0404	1,026 0606	1,368 0808
	30	0,350 2074	0,700 4148	1,050 6222	1,400 8296
21°	0	0,358 3679	0,716 7358	1,075 1037	1,433 4716
	30	0,366 5013	0,733 0026	1,099 5039	1,466 0052
22°	0	0,374 6066	0,749 2132	1,123 8198	1 498 4264
	30	0,382 6834	0,765 3668	1,148 0502	1,530 7336
23°	0′	0,390 7311	0,781 4622	1,172 1933	1,562 9244
	30	0,398 7491	0,797 4982	1,196 2473	1,594 9964
24°	0	0,406 7366	0,813 4732	1,220 2098	1,626 9464
	30	0,414 6932	0,829 3864	1,244 0796	1,658 7728
25°	0	0,422 6183	0,845 2366	1,267 8549	1,690 4732
	30	0,430 5111	0,861 0222	1,291 5333	1,722 0444
26°	0′	0,438 3712	0,876 7424	1,315 1136	1,753 4848
	30	0,446 1978	0,892 3956	1,338 5934	1,784 7912
27°	0	0,453 9905	0,907 9810	1,361 9715	1,815 9620
	30	0,461 7486	0,923 4972	1,385 2458	1,846 9944
28°	0	0,469 4716	0,938 9432	1,408 4148	1,877 8864
	30	0,477 1588	0,954 3176	1,431 4764	1,908 6352
29°	0′	0,484 8096	0,969 6192	1,454 4288	1,939 2384
	30	0,492 4236	0,984 8472	1,477 2708	1,969 6944
30°	0	0,500 0000	1,000 0000	1,500 0000	2,000 0000
	30	0,507 5384	1,015 0768	1,522 6152	2,030 1536
31°	0	0,515 0381	1,030 0762	1,545 1143	2,060 1524
	30	0,522 4986	1,044 9972	1,567 4958	2,089 9944
32°	0′	0,529 9193	1,059 8386	1,589 7579	2,119 6772
	30	0,537 2996	1,074 5992	1,611 8988	2,149 1984
33°	0	0,544 6390	1,089 2780	1,633 9170	2,178 5560
	30	0,551 9370	1,103 8740	1,655 8110	2,207 7480
34°	0	0,559 1929	1,118 3858	1,677 5787	2,236 7716
	30	0,566 4062	1,132 8124	1,699 2186	2,265 6248

Incrementos del ARCO.		ORDENADAS. 1	2	3	4
20°	0′	0,060 3074	0,120 6148	0,180 9222	0,241 2296
	30	0,063 3278	0,126 6556	0,189 9834	0,253 3112
21°	0	0,066 4196	0,132 8392	0,199 2588	0,265 6784
	30	0,069 5825	0,139 1650	0,208 7475	0,278 3300
22°	0	0,072 8161	0,145 6322	0,218 4483	0,291 2644
	30	0,076 1205	0,152 2410	0,228 3615	0,304 4820
23°	0′	0,079 4951	0,158 9902	0,238 4853	0,317 9804
	30	0,082 9399	0,165 8798	0,248 8197	0,331 7596
24°	0	0,086 4546	0,172 9092	0,259 3638	0,345 8184
	30	0,090 0387	0,180 0774	0,270 1161	0,360 1548
25°	0	0,093 6922	0,187 3844	0,281 0766	0,374 7688
	30	0,097 4147	0,194 8294	0,292 2441	0,389 6588
26°	0′	0,101 2060	0,202 4120	0,303 6180	0,404 8240
	30	0,105 0657	0,210 1314	0,315 1971	0,420 2628
27°	0	0,108 9935	0,217 9870	0,326 9805	0,435 9740
	30	0,112 9892	0,225 9784	0,338 9676	0,451 9568
28°	0	0,117 0524	0,234 1048	0,351 1572	0,468 2096
	30	0,121 1829	0,242 3658	0,363 5487	0,484 7316
29°	0′	0,125 3803	0,250 7606	0,376 1409	0,501 5212
	30	0,129 6443	0,259 2886	0,388 9329	0,518 5772
30°	0	0,133 9746	0,267 9492	0,401 9238	0,535 8984
	30	0,138 3708	0,276 7416	0,415 1124	0,553 4832
31°	0	0,142 8327	0,285 6654	0,428 4981	0,571 3308
	30	0,147 3598	0,294 7196	0,442 0794	0,589 4392
32°	0′	0,151 9519	0,303 9038	0,455 8557	0,607 8076
	30	0,156 6086	0,313 2172	0,469 8258	0,626 4344
33°	0	0,161 3294	0,322 6588	0,483 9882	0,645 3176
	30	0,166 1142	0,332 2284	0,498 3426	0,664 4568
34°	0	0,170 9624	0,341 9248	0,512 8872	0,683 8496
	30	0,175 8738	0,351 7476	0,527 6214	0,703 4952

ABSCISAS,

5	6	7	8	9
1,710 1010	2,052 1212	2,394 1414	2,736 1616	3,078 1818
1,751 0370	2,101 2444	2,451 4518	2,801 6592	3,151 8666
1,791 8395	2,150 2074	2,508 5753	2,866 9432	3,225 3111
1,832 5065	2,199 0078	2,565 5091	2,932 0104	3,298 5117
1,873 0330	2,247 6396	2,622 2462	2,996 8528	3,371 4594
1,913 4170	2,296 1004	2,678 7838	3,061 4672	3,444 1500
1,953 6555	2,344 3866	2,735 1177	3,125 8488	3,516 5799
1,993 7455	2,392 4946	2,791 2437	3,189 9928	3,588 7419
2,033 6830	2,440 4196	2,847 1562	3,253 8928	3,660 6294
2,073 4660	2,488 1592	2,902 8524	3,317 5456	3,732 2388
2,113 0915	2,535 7098	2,958 3281	3,380 9464	3,803 5647
2,152 5555	2,583 0666	3,013 5777	3,444 0888	3,874 5999
2,191 8560	2,630 2272	3,068 5984	3,506 9696	3,945 3408
2,230 9890	2,677 1868	3,123 3846	3,569 5824	4,015 7802
2,269 9525	2,723 9430	3,177 9335	3,631 9240	4,085 9145
2,308 7430	2,770 4916	3,232 2402	3,693 9888	4,155 7374
2,347 3580	2,816 8296	3,286 3012	3,755 7728	4,225 2444
2,385 7940	2,862 9528	3,340 1116	3,817 2704	4,294 4292
2,424 0480	2,908 8576	3,393 6672	3,878 4768	4,363 2864
2,462 1180	2,954 5416	3,446 9652	3,939 3888	4,431 8124
2,500 0000	3,000 0000	3,500 0000	4,000 0000	4,500 0000
2,537 6920	3,045 2304	3,552 7688	4,060 3072	4,567 8456
2,575 1905	3,090 2286	3,605 2667	4,120 3048	4,635 3429
2,612 4930	3,134 9916	3,657 4902	4,179 9888	4,702 4874
2,649 5965	3,179 5158	3,709 4351	4,239 3544	4,769 2737
2,686 4980	3,223 7976	3,761 0972	4,298 3968	4,835 6964
2,723 1950	3,267 8340	3,812 4730	4,357 1120	4,901 7510
2,759 6850	3,311 6220	3,863 5590	4,415 4960	4,967 4330
2,795 9645	3,355 1574	3,914 3503	4,473 5432	5,032 7361
2,832 0310	3,398 4372	3,964 8434	4,531 2496	5,097 6558

0,301 5370	0,361 8444	0,422 1518	0,482 4592	0,542 7666
0,316 6390	0,379 9668	0,443 2946	0,506 6224	0,569 9502
0,332 0980	0,398 5176	0,464 9372	0,531 3568	0,597 7764
0,347 9125	0,417 4950	0,487 0775	0,556 6600	0,626 2425
0,364 0805	0,436 8966	0,509 7127	0,582 5288	0,655 3449
0,380 6025	0,456 7230	0,532 8435	0,608 9640	0,685 0845
0,397 4755	0,476 9706	0,556 4657	0,635 9608	0,715 4559
0,414 6995	0,497 6394	0,580 5793	0,663 5192	0,746 4591
0,432 2730	0,518 7276	0,605 1822	0,691 6368	0,778 0914
0,450 1935	0,540 2322	0,630 2709	0,720 3096	0,810 3483
0,468 4610	0,562 1532	0,655 8454	0,749 5376	0,843 2298
0,487 0735	0,584 4882	0,681 9029	0,779 3176	0,876 7323
0,506 0300	0,607 2360	0,708 4420	0,809 6480	0,910 8540
0,525 3285	0,630 3942	0,735 4599	0,840 5256	0,945 5913
0,544 9675	0,653 9610	0,762 9545	0,871 9480	0,980 9415
0,564 9460	0,677 9352	0,790 9244	0,903 9136	1,016 9028
0,585 2620	0,702 3144	0,819 3668	0,936 4192	1,053 4716
0,605 9145	0,727 0974	0,848 2803	0,969 4632	1,090 6461
0,626 9015	0,752 2818	0,877 6621	1,003 0424	1,128 4227
0,648 2215	0,777 8658	0,907 5101	1,037 1544	1,166 7987
0,669 8730	0,803 8476	0,937 8222	1,071 7968	1,205 7714
0,691 8540	0,830 2248	0,968 5956	1,106 9664	1,245 3372
0,714 1635	0,856 9962	0,999 8289	1,142 6616	1,285 4943
0,736 7990	0,884 1588	1,031 5186	1,178 8784	1,326 2382
0,759 7595	0,911 7114	1,063 6633	1,215 6152	1,367 5671
0,783 0430	0,939 6516	1,096 2602	1,252 8688	1,409 4774
0,806 6470	0,967 9764	1,129 3058	1,290 6352	1,451 9646
0,830 5710	0,996 6852	1,162 7994	1,328 9136	1,495 0278
0,854 8120	1,025 7744	1,196 7368	1,367 6992	1,538 6616
0,879 3690	1,055 2428	1,231 1166	1,406 9904	1,582 8642
5	6	7	8	9

ORDENADAS.

Incrementos del ARCO.	ABSCISAS. 1	2	3	4
35° 0′	0,573 5764	1,147 1528	1,720 7292	2,294 3056
30	0,580 7030	1,161 4060	1,742 1090	2,322 8120
36° 0	0,587 7853	1,175 5706	1,763 3559	2,351 1412
30	0,594 8228	1,189 6456	1,784 4684	2,379 2912
37° 0	0,601 8150	1,203 6300	1,805 4450	2,407 2600
30	0,608 7614	1,217 5228	1,826 2842	2,435 0456
38° 0′	0,615 6615	1,231 3230	1,846 9845	2,462 6460
30	0,622 5146	1,245 0292	1,867 5438	2,490 0584
39° 0	0,629 3204	1,258 6408	1,887 9612	2,517 2816
30	0,636 0782	1,272 1564	1,908 2346	2,544 3128
40° 0′	0,642 7876	1,285 5752	1,928 3628	2,571 1504
41°	0,656 0590	1,312 1180	1,968 1770	2,624 2360
42°	0,669 1306	1,338 2612	2,007 3918	2,676 5224
43°	0,681 9984	1,363 9968	2,045 9952	2,727 9936
44°	0,694 6584	1,389 3168	2,083 9752	2,778 6336
45°	0,707 1068	1,414 2136	2,121 3204	2,828 4272
46°	0,719 3398	1,438 6796	2,158 0194	2,877 3592
47°	0,731 3537	1,462 7074	2,194 0611	2,925 4148
48°	0,743 1448	1,486 2896	2,229 4344	2,972 5792
49°	0,754 7096	1,509 4192	2,264 1288	3,018 8384
50°	0,766 0444	1,532 0888	2,298 1332	3,064 1776
51°	0,777 1460	1,554 2920	2,331 4380	3,108 5840
52°	0.788 0107	1,576 0214	2,364 0321	3,152 0428
53°	0,798 6355	1,597 2710	2,395 9066	3,194 5420
54°	0,809 0170	1,618 0340	2,427 0510	3,236 0680
55°	0,819 1521	1,638 3042	2,457 4563	3,276 6084
56°	0.829 0376	1,658 0752	2,487 1128	3,316 1504
57°	0,838 6706	1,677 3412	2,516 0118	3,354 6824
58°	0.848 0481	1,696 0962	2,544 1445	3,392 1924
59° 0′	0,857 1673	1,714 3346	2,571 5019	3,428 6692

Incrementos del ARCO.	ORDENADAS. 1	2	3	4
35° 0′	0,480 8479	0,561 6958	0,542 5437	0,723 3916
30	0,185 8845	0,371 7690	0,557 6535	0,743 5380
36° 0	0,190 9830	0,381 9660	0.572 9490	0,763 9320
30	0.196 1431	0,392 2862	0,588 4293	0,784 5724
37° 0	0,201 3645	0,402 7290	0,604 0935	0.805 4580
30	0,206 6467	0,413 2934	0,619 9401	0,826 5868
38° 0′	0,211 9893	0,423 9786	0,635 9679	0.847 9572
30	0,217 3918	0,434 7836	0,652 1754	0.869 5672
39° 0	0,222 8540	0,445 7080	0,668 5620	0,891 4160
30	0.228 3754	0,456 7508	0,685 1262	0.913 5016
40° 0′	0,233 9556	0,467 9112	0,701 8668	0.935 8224
41°	0,245 2904	0,490 5808	0,735 8712	0,981 1616
42°	0,256 8552	0,513 7104	0,770 5656	1,027 4208
43°	0,268 6463	0,537 2926	0,805 9389	1,074 5852
44°	0,280 6602	0,561 3204	0.841 9806	1,122 6408
45°	0.292 8932	0,585 7864	0,878 6796	1.171 5728
46°	0,305 3416	0,610 6832	0,916 0248	1.221 3664
47°	0,318 0016	0,636 0032	0,954 0048	1,272 0064
48°	0,330 8694	0,661 7388	0,992 6082	1,323 4776
49°	0,343 9410	0,687 8820	1,031 8230	1.375 7640
50°	0,357 2124	0,714 4248	1,071 6372	1,428 8496
51°	0,370 6796	0,741 3592	1,112 0388	1,482 7184
52°	0.384 3385	0.768 6770	1,153 0155	1,537 3540
53°	0,398 1850	0,796 3700	1,194 5550	1,592 7400
54°	0,412 2147	0,824 4294	1,236 6441	1,648 8588
55°	0,426 4236	0,852 8472	1,279 2708	1,705 6944
56°	0,440 8071	0,881 6142	1,322 4213	1,763 2284
57°	0,455 3610	0,910 7220	1,366 0830	1,821 4440
58°	0,470 0807	0,940 1614	1,410 2421	1,880 3228
59° 0′	0,484 9619	0,969 9258	1,454 8857	1,939 8476

ABSCISAS.

5	6	7	8	9
2,867 8820	3,441 4584	4,015 0348	4,588 6112	5,162 1870
2,903 5150	3,484 2180	4,064 9210	4,645 6240	5,226 3270
2,938 9265	3,526 7118	4,114 4971	4,702 2824	5,290 0677
2,974 1140	3,568 9368	4,163 7596	4,758 5824	5,353 4052
3,009 0750	3,610 8900	4,212 7050	4,814 5200	5,416 3350
3,043 8070	3,652 5684	4,261 3298	4,870 0912	5,478 8526
3,078 3075	3,693 9690	4,309 6305	4,925 2920	5,540 9533
3,112 5730	3,735 0876	4,357 6022	4,980 1168	5,602 6314
3,146 6020	3,775 9224	4,405 2428	5,034 5632	5,663 8836
3,180 3910	3,816 4692	4,452 5474	5,088 6256	5,724 7038
3,213 9380	3,856 7256	4,499 5132	5,142 3008	5,785 0884
3,280 2950	3,936 3540	4,592 4130	5,248 4720	5,904 5310
3,345 6530	4,014 7836	4,683 9142	5,353 0448	6,022 1754
3,409 9920	4,091 9904	4,773 9888	5,455 9872	6,137 9856
3,473 2920	4,167 9504	4,862 6088	5,557 2672	6,251 9256
3,535 5340	4,242 6408	4,949 7476	5,656 8544	6,363 9612
3,596 6990	4,316 0388	5,035 3786	5,754 7184	6,474 0582
3,656 7685	4,388 1222	5,119 4759	5,850 8296	6,582 1833
3,715 7240	4,458 8688	5,202 0136	5,945 1584	6,688 3032
3,773 5480	4,528 2576	5,282 9672	6,037 6768	6,792 3864
3,830 2220	4,596 2664	5,362 3108	6,128 3552	6,894 3996
3,885 7300	4,662 8760	5,440 0220	6,217 1680	6,994 3140
3,940 0535	4,728 0642	5,516 0749	6,304 0856	7,092 0963
3,993 1775	4,791 8132	5,590 4485	6,389 0840	7,187 7198
4,045 0850	4,854 1020	5,663 1190	6,472 1360	7,281 1530
4,095 7605	4,914 9126	5,734 0647	6,553 2168	7,372 3689
4,145 1880	4,974 2256	5,803 2632	6,632 3008	7,461 3384
4,193 3530	5,032 0256	5,870 6942	6,709 3648	7,548 0554
4,240 2405	5,088 2886	5,936 3367	6,784 3848	7,632 4329
4,285 8365	5,143 0038	6,000 1711	6,857 3384	7,714 5057

5	6	7	8	9
0,904 2595	1,085 0874	1,265 9353	1,446 7832	1,627 6311
0,929 4225	1,115 3070	1,301 1915	1,487 0760	1,672 9605
0,954 9150	1,145 8980	1,336 8810	1,527 8640	1,718 8470
0,980 7155	1,176 8586	1,373 0017	1,569 1448	1,765 2879
1,006 8225	1,208 1870	1,409 5515	1,610 9160	1,812 2805
1,033 2335	1,239 8802	1,446 5269	1,653 1736	1,859 8203
1,059 9465	1,271 9358	1,483 9251	1,695 9144	1,907 9037
1,086 9590	1,304 3508	1,521 7426	1,739 1344	1,956 5262
1,114 2700	1,337 1240	1,559 9780	1,782 8320	2,005 6860
1,141 8770	1,370 2524	1,598 6278	1,827 0032	2,055 3786
1,169 7780	1,403 7336	1,637 6892	1,871 6448	2,105 6004
1,226 4520	1,471 7424	1,717 0328	1,962 3232	2,207 6136
1,284 2760	1,541 1312	1,797 9864	2,054 8416	2,311 6968
1,343 2315	1,611 8778	1,880 5241	2,149 1704	2,417 8167
1,403 3010	1,683 9612	1,964 6214	2,245 2816	2,525 9418
1,464 4660	1,757 3592	2,050 2524	2,343 1456	2,636 0388
1,526 7080	1,832 0496	2,137 3912	2,442 7328	2,748 0744
1,590 0080	1,908 0096	2,226 0112	2,544 0128	2,862 0144
1,654 3470	1,985 2164	2,316 0858	2,646 9552	2,977 8246
1,719 7050	2,063 6460	2,407 5870	2,751 5280	3,095 4690
1,786 0620	2,143 2744	2,500 4868	2,857 6992	3,214 9116
1,853 3980	2,224 0776	2,594 7372	2,965 4368	3,336 1164
1,921 6925	2,306 0310	2,690 3695	3,074 7080	3,459 0465
1,990 9250	2,389 1100	2,787 2950	3,185 4800	3,583 6650
2,061 0735	2,473 2882	2,885 5029	3,297 7176	3,709 9323
2,132 1180	2,558 5416	2,984 9652	3,411 3888	3,837 8124
2,204 0355	2,644 8426	3,085 6497	3,526 4568	3,967 2639
2,276 8050	2,732 1660	3,187 5270	3,642 8880	4,098 2490
2,350 4035	2,820 4842	3,290 5649	3,760 6456	4,230 7263
2,424 8095	2,909 7714	3,394 7333	3,879 6952	4,364 6571

5	6	7	8	9

ORDENADAS.

Incrementos del ARCO.	ABSCISAS. 1	2	3	4
60° 0′	0,866 0254	1,732 0508	2,598 0762	3,464 1016
61°	0,874 6197	1,749 2394	2,623 8591	3,498 4788
62°	0,882 9476	1,765 8952	2,648 8428	3,531 7904
63°	0,891 0065	1,782 0130	2,673 0195	3,564 0260
64°	0,898 7940	1,797 5880	2,696 3820	3,595 1760
65°	0,906 3078	1,812 6156	2,718 9234	3,625 2312
66°	0,913 5454	1,827 0908	2,740 6362	3,654 1816
67°	0,920 5049	1,841 0098	2,761 5147	3,682 0196
68°	0,927 1839	1,854 3678	2,781 5517	3,708 7356
69°	0,933 5804	1,867 1608	2,800 7412	3,734 3216
70°	0,939 6926	1,879 3852	2,819 0778	3,758 7704
71°	0,945 5185	1,891 0370	2,836 5555	3,782 0740
72°	0,951 0565	1,902 1130	2,853 1695	3,804 2260
73°	0,956 3048	1,912 6096	2,868 9144	3,825 2192
74°	0,961 2617	1,922 5234	2,883 7851	3,845 0468
75°	0,965 9258	1,931 8516	2,897 7774	3,863 7032
76°	0,970 2957	1,940 5914	2,910 8871	3,881 1828
77°	0,974 3701	1,948 7402	2,923 1103	3,897 4804
78°	0,978 1476	1,956 2952	2,934 4428	3,912 5904
79°	0,981 6271	1,963 2542	2,944 8813	3,926 5084
80°	0,984 8077	1,969 6154	2,954 4231	3,939 2308
81°	0,987 6883	1,975 3766	2,963 0649	3,950 7532
82°	0,990 2680	1,980 5360	2,970 8040	3,961 0720
83°	0,992 5462	1,985 0924	2,977 6386	3,970 1848
84°	0,994 5218	1,989 0436	2,983 5654	3,978 0872
85°	0,996 1947	1,992 3894	2,988 5841	3,984 7788
86°	0,997 5640	1,995 1280	2,992 6920	3,990 2560
87°	0,998 6295	1,997 2590	2,995 8885	3,994 5180
88°	0,999 3908	1,998 7816	2,998 1724	3,997 5632
89° 0′	0,999 8477	1,999 6954	2,999 5431	3,999 3908

Incrementos del ARCO.	ORDENADAS. 1	2	3	4
60° 0′	0,500 0000	1,000 0000	1,500 0000	2,000 0000
61°	0,515 1904	1,030 3808	1,545 5712	2,060 7616
62°	0,530 5284	1,061 0568	1,591 5852	2,122 1136
63°	0,546 0095	1,092 0190	1,638 0285	2,184 0380
64°	0,561 6288	1,123 2576	1,684 8864	2,246 5152
65°	0,577 3817	1,154 7634	1,732 1451	2,309 5268
66°	0,593 2634	1,186 5268	1,779 7902	2,373 0536
67°	0,609 2689	1,218 5378	1,827 8067	2,437 0756
68°	0,625 3934	1,250 7868	1,876 1802	2,501 5736
69°	0,641 6321	1,283 2642	1,924 8963	2,566 5284
70°	0,657 9798	1,315 9596	1,973 9394	2,631 9192
71°	0,674 4318	1,348 8636	2,023 2954	2,697 7272
72°	0,690 9830	1,381 9660	2,072 9490	2,763 9320
73°	0,707 6283	1,415 2566	2,122 8849	2,830 5132
74°	0,724 3626	1,448 7252	2,173 0878	2,897 4504
75°	0,741 1810	1,482 3620	2,223 5430	2,964 7240
76°	0,758 0781	1,516 1562	2,274 2343	3,032 3124
77°	0,775 0489	1,550 0978	2,325 1467	3,100 1956
78°	0,792 0883	1,584 1766	2,376 2649	3,168 3532
79°	0,809 1910	1,618 3820	2,427 5730	3,236 7640
80°	0,826 3518	1,652 7036	2,479 0554	3,305 4072
81°	0,843 5655	1,687 1310	2,530 6965	3,374 2620
82°	0,860 8269	1,721 6538	2,582 4807	3,443 3076
83°	0,878 1307	1,756 2614	2,634 3921	3,512 5228
84°	0,895 4715	1,790 9430	2,686 4145	3,581 8860
85°	0,912 8443	1,825 6886	2,738 5329	3,651 3772
86°	0,930 2435	1,860 4870	2,790 7305	3,720 9740
87°	0,947 6640	1,895 3280	2,842 9920	3,790 6560
88°	0,965 1005	1,930 2010	2,895 3015	3,860 4020
89° 0′	0,982 5476	1,965 0952	2,947 6428	3,930 1904

ABSCISAS.

5	6	7	8	9
4,330 1270	5,196 1524	6,062 1778	6,928 2032	7,794 2286
4,373 0985	5,247 7182	6,122 3279	6,996 9576	7,871 5773
4,414 7380	5,297 6856	6,180 6332	7,063 5808	7,946 5284
4,455 0325	5,346 0390	6,237 0455	7,128 0520	8,019 0585
4,493 9700	5,392 7640	6,291 5580	7,190 3520	8,089 1460
4,531 5390	5,437 8468	6,344 1546	7,250 4624	8,156 7702
4,567 7270	5,481 2724	6,394 8178	7,308 3632	8,221 9080
4,602 5245	5,523 0294	6,443 5343	7,364 0592	8,284 5441
4,635 9195	5,563 1034	6,490 2873	7,417 4712	8,344 6551
4,667 9020	5,601 4824	6,535 0628	7,468 6432	8,402 2230
4,698 4630	5,638 1556	6,577 8482	7,517 5408	8,457 2334
4,727 5925	5,673 1110	6,618 6295	7,564 1480	8,509 6665
4,755 2825	5,706 3390	6,657 3955	7,608 4520	8,559 5085
4,781 5240	5,737 8288	6,694 1336	7,650 4584	8,606 7432
4,806 3085	5,767 5702	6,728 8319	7,690 0936	8,651 3553
4,829 6290	5,795 5548	6,761 4806	7,727 4064	8,693 3322
4,851 4785	5,821 7742	6,792 0699	7,762 3656	8,732 6613
4,871 8505	5,846 2206	6,820 5907	7,794 9608	8,769 3309
4,890 7380	5,868 8856	6,847 0332	7,825 1808	8,803 3284
4,908 1355	5,889 7626	6,871 3897	7,853 0168	8,834 6439
4,924 0385	5,908 8462	6,893 6539	7,878 4616	8,863 2693
4,938 4415	5,926 1298	6,913 8181	7,901 5064	8,889 1947
4,951 3400	5,941 6080	6,931 8760	7,922 1440	8,912 4120
4,962 7310	5,955 2772	6,947 8234	7,940 3696	8,932 9158
4,972 6090	5,967 1308	6,961 6526	7,956 1744	8,950 6962
4,980 9735	5,977 1682	6,973 3629	7,969 5576	8,965 7523
4,987 8200	5,985 3840	6,982 9480	7,980 5120	8,978 0760
4,993 1475	5,991 7770	6,990 4065	7,989 0360	8,987 6655
4,996 9540	5,996 3448	6,995 7356	7,995 1264	8,994 5172
4,999 2385	5,999 0862	6,998 9339	7,998 7816	8,998 6293

5	6	7	8	9
2,500 0000	3,000 0000	3,500 0000	4,000 0000	4,500 0000
2,575 9520	3,091 1424	3,606 3328	4,121 5232	4,636 7136
2,652 6420	3,183 1704	3,715 6988	4,244 2272	4,774 7556
2,730 0475	3,276 0570	3,822 0665	4,368 0760	4,914 0855
2,808 1440	3,369 7728	3,931 4016	4,493 0304	5,054 6592
2,886 9085	3,464 2902	4,041 6719	4,619 0536	5,196 4353
2,966 3170	3,559 5804	4,152 8438	4,746 1072	5,339 3706
3,046 3445	3,655 6134	4,264 8823	4,874 1512	5,483 4201
3,126 9670	3,752 3604	4,377 7538	5,003 1472	5,628 5406
3,208 1655	3,849 7926	4,491 4247	5,133 0568	5,774 6889
3,289 8990	3,947 8788	4,605 8586	5,263 8384	5,921 8182
3,372 1590	4,046 5908	4,721 0226	5,393 4544	6,069 8862
3,454 9150	4,145 8980	4,836 8810	5,527 8640	6,218 8470
3,538 1415	4,245 7698	4,953 3981	5,661 0264	6,368 6547
3,621 8130	4,346 1736	5,070 5382	5,794 9008	6,519 2634
3,705 9050	4,447 0860	5,188 2670	5,929 4480	6,670 6290
3,790 3905	4,548 4686	5,306 5467	6,064 6248	6,822 7029
3,875 2445	4,650 2934	5,425 3423	6,200 3912	6,975 4401
3,960 4415	4,752 5298	5,544 6181	6,336 7064	7,128 7947
4,045 9550	4,855 1460	5,664 3370	6,473 5280	7,282 7190
4,131 7590	4,958 1108	5,784 4626	6,610 8144	7,437 1662
4,217 8275	5,061 3930	5,904 9585	6,748 5240	7,592 0895
4,304 1345	5,164 9614	6,025 7883	6,886 6152	7,747 4421
4,390 6535	5,268 7842	6,146 9149	7,025 0456	7,903 1763
4,477 3575	5,372 8290	6,268 3005	7,163 7720	8,059 2435
4,564 2215	5,477 0658	6,389 9101	7,302 7544	8,215 5987
4,651 2175	5,581 4610	6,511 7045	7,441 9480	8,372 1915
4,738 3200	5,685 9840	6,633 6480	7,581 3120	8,528 9760
4,825 5025	5,790 6030	6,755 7035	7,720 8040	8,685 9045
4,912 7380	5,895 2856	6,877 8332	7,860 3808	8,842 9284

ORDENADAS.

TABLA SEGUNDA.

ABSCISAS Y ORDENADAS

DEL CUADRANTE DEL CÍRCULO EN FUNCION DEL RADIO-UNIDAD, POR INCREMENTOS DE LAS ABSCISAS, DE 1 EN 1 MILÉSIMA DE $0^{m},001$ Á $0^{m},999$; Y DE 1 EN 1 DIEZMILÉSIMA, HASTA $1^{m},000$: SIENDO APLICABLES Á LAS COORDENADAS DE LA ELIPSE.

ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.
0,001	0,000001	0,067	0,002247	0,133	0,008884	0,199	0,020001
0,002	0,000002	0,068	0,002315	0,134	0,009019	0,200	0,020204
0,003	0,000005	0,069	0,002383	0,135	0,009155	0,201	0,020409
0,004	0,000008	0,070	0,002453	0,136	0,009291	0,202	0,020614
0,005	0,000012	0,071	0,002524	0,137	0,009429	0,203	0,020822
0,006	0,000018	0,072	0,002595	0,138	0,009568	0,204	0,021029
0,007	0,000024	0,073	0,002668	0,139	0,009708	0,205	0,021238
0,008	0,000032	0,074	0,002742	0,140	0,009849	0,206	0,021448
0,009	0,000041	0,075	0,002817	0,141	0,009991	0,207	0,021659
0,010	0,000050	0,076	0,002892	0,142	0,010133	0,208	0,021871
0,011	0,000061	0,077	0,002969	0,143	0,010277	0,209	0,022084
0,012	0,000072	0,078	0,003047	0,144	0,010422	0,210	0,022299
0,013	0,000084	0,079	0,003125	0,145	0,010568	0,211	0,022514
0,014	0,000098	0,080	0,003205	0,146	0,010715	0,212	0,022720
0,015	0,000113	0,081	0,003286	0,147	0,010864	0,213	0,022948
0,016	0,000128	0,082	0,003368	0,148	0,011013	0,214	0,023166
0,017	0,000145	0,083	0,003451	0,149	0,011163	0,215	0,023386
0,018	0,000162	0,084	0,003534	0,150	0,011314	0,216	0,023607
0,019	0,000180	0,085	0,003619	0,151	0,011466	0,217	0,023828
0,020	0,000200	0,086	0,003705	0,152	0,011620	0,218	0,024051
0,021	0,000221	0,087	0,003792	0,153	0,011774	0,219	0,024275
0,022	0,000242	0,088	0,003880	0,154	0,011929	0,220	0,024500
0,023	0,000264	0,089	0,003968	0,155	0,012086	0,221	0,024726
0,024	0,000288	0,090	0,004058	0,156	0,012243	0,222	0,024953
0,025	0,000313	0,091	0,004149	0,157	0,012401	0,223	0,025182
0,026	0,000338	0,092	0,004241	0,158	0,012561	0,224	0,025411
0,027	0,000365	0,093	0,004334	0,159	0,012721	0,225	0,025641
0,028	0,000392	0,094	0,004428	0,160	0,012883	0,226	0,025873
0,029	0,000421	0,095	0,004523	0,161	0,013046	0,227	0,026105
0,030	0,000451	0,096	0,004619	0,162	0,013209	0,228	0,026339
0,031	0,000481	0,097	0,004716	0,163	0,013374	0,229	0,026574
0,032	0,000512	0,098	0,004814	0,164	0,013540	0,230	0,026809
0,033	0,000545	0,099	0,004913	0,165	0,013706	0,231	0,027046
0,034	0,000578	0,100	0,005013	0,166	0,013874	0,232	0,027284
0,035	0,000613	0,101	0,005114	0,167	0,014043	0,233	0,027523
0,036	0,000648	0,102	0,005216	0,168	0,014213	0,234	0,027763
0,037	0,000685	0,103	0,005319	0,169	0,014384	0,235	0,028005
0,038	0,000722	0,104	0,005423	0,170	0,014556	0,236	0,028247
0,039	0,000761	0,105	0,005528	0,171	0,014729	0,237	0,028491
0,040	0,000801	0,106	0,005634	0,172	0,014903	0,238	0,028735
0,041	0,000841	0,107	0,005741	0,173	0,015078	0,239	0,028981
0,042	0,000882	0,108	0,005849	0,174	0,015255	0,240	0,029227
0,043	0,000925	0,109	0,005958	0,175	0,015432	0,241	0,029475
0,044	0,000968	0,110	0,006068	0,176	0,015610	0,242	0,029724
0,045	0,001013	0,111	0,006180	0,177	0,015789	0,243	0,029974
0,046	0,001059	0,112	0,006292	0,178	0,015970	0,244	0,030225
0,047	0,001105	0,113	0,006405	0,179	0,016151	0,245	0,030477
0,048	0,001153	0,114	0,006519	0,180	0,016334	0,246	0,030731
0,049	0,001201	0,115	0,006634	0,181	0,016517	0,247	0,030985
0,050	0,001251	0,116	0,006751	0,182	0,016702	0,248	0,031240
0,051	0,001302	0,117	0,006868	0,183	0,016887	0,249	0,031497
0,052	0,001353	0,118	0,006986	0,184	0,017074	0,250	0,031754
0,053	0,001405	0,119	0,007106	0,185	0,017262	0,251	0,032013
0,054	0,001459	0,120	0,007226	0,186	0,017450	0,252	0,032273
0,055	0,001514	0,121	0,007347	0,187	0,017640	0,253	0,032534
0,056	0,001569	0,122	0,007470	0,188	0,017831	0,254	0,032796
0,057	0,001626	0,123	0,007593	0,189	0,018023	0,255	0,033059
0,058	0,001683	0,124	0,007718	0,190	0,018216	0,256	0,033323
0,059	0,001742	0,125	0,007843	0,191	0,018410	0,257	0,033589
0,060	0,001802	0,126	0,007970	0,192	0,018605	0,258	0,033855
0,061	0,001862	0,127	0,008097	0,193	0,018802	0,259	0,034123
0,062	0,001924	0,128	0,008226	0,194	0,018999	0,260	0,034392
0,063	0,001987	0,129	0,008355	0,195	0,019197	0,261	0,034661
0,064	0,002050	0,130	0,008486	0,196	0,019396	0,262	0,034932
0,065	0,002115	0,131	0,008618	0,197	0,019597	0,263	0,035204
0,066	0,002181	0,132	0,008750	0,198	0,019798	0,264	0,035477

ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.
0,265	0,035752	0,331	0,056369	0,397	0,082182	0,463	0,113642
0,266	0,036027	0,332	0,056721	0,398	0,082615	0,464	0,114165
0,267	0,036304	0,333	0,057073	0,399	0,083049	0,465	0,114689
0,268	0,036581	0,334	0,057427	0,400	0,083485	0,466	0,115215
0,269	0,036860	0,335	0,057782	0,401	0,083922	0,467	0,115743
0,270	0,037140	0,336	0,058138	0,402	0,084360	0,468	0,116272
0,271	0,037421	0,337	0,058496	0,403	0,084800	0,469	0,116802
0,272	0,037703	0,338	0,058854	0,404	0,085241	0,470	0,117334
0,273	0,037986	0,339	0,059214	0,405	0,085684	0,471	0,117867
0,274	0,038270	0,340	0,059575	0,406	0,086127	0,472	0,118402
0,275	0,038556	0,341	0,059937	0,407	0,086572	0,473	0,118938
0,276	0,038843	0,342	0,060300	0,408	0,087018	0,474	0,119475
0,277	0,039130	0,343	0,060635	0,409	0,087466	0,475	0,120014
0,278	0,039419	0,344	0,061020	0,410	0,067915	0,476	0,120555
0,279	0,039709	0,345	0,061397	0,411	0,088365	0,477	0,121097
0,280	0,040000	0,346	0,061766	0,412	0,088816	0,478	0,121640
0,281	0,040292	0,347	0,062135	0,413	0,089269	0,479	0,122185
0,282	0,040586	0,348	0,062506	0,414	0,089723	0,480	0,122731
0,283	0,040880	0,349	0,062877	0,415	0,090179	0,481	0,123279
0,284	0,041176	0,350	0,063250	0,416	0,090635	0,482	0,123829
0,285	0,041473	0,351	0,063625	0,417	0,091094	0,483	0,124370
0,286	0,041770	0,352	0,064000	0,418	0,091553	0,484	0,124932
0,287	0,042070	0,353	0,064377	0,419	0,092014	0,485	0,125486
0,288	0,042370	0,354	0,064755	0,420	0,092476	0,486	0,126041
0,289	0,042671	0,355	0,065134	0,421	0,092939	0,487	0,126598
0,290	0,042973	0,356	0,065514	0,422	0,093404	0,488	0,127156
0,291	0,043277	0,357	0,065896	0,423	0,093870	0,489	0,127716
0,292	0,043582	0,358	0,066278	0,424	0,094338	0,490	0,128277
0,293	0,043888	0,359	0,066663	0,425	0,094807	0,491	0,128840
0,294	0,044195	0,360	0,067048	0,426	0,095277	0,492	0,129405
0,295	0,044503	0,361	0,067434	0,427	0,095748	0,493	0,129971
0,296	0,044812	0,362	0,067822	0,428	0,096221	0,494	0,130538
0,297	0,045123	0,363	0,068214	0,429	0,096696	0,495	0,131107
0,298	0,045434	0,364	0,068601	0,430	0,097171	0,496	0,131678
0,299	0,045747	0,365	0,068993	0,431	0,097648	0,497	0,132250
0,300	0,046061	0,356	0,069385	0,432	0,098126	0,498	0,132823
0,301	0,046376	0,367	0,069779	0,433	0,098606	0,499	0,133398
0,302	0,046692	0,368	0,070174	0,434	0,099087	0,500	0,133975
0,303	0,047009	0,369	0,070571	0,435	0,099570	0,501	0,134553
0,304	0,047328	0,370	0,070968	0,436	0,100054	0,502	0,135133
0,305	0,047648	0,371	0,071367	0,437	0,100539	0,503	0,135714
0,306	0,047968	0,372	0,071767	0,438	0,101025	0,504	0,136296
0,307	0,048291	0,373	0,072169	0,439	0,101513	0,505	0,136881
0,308	0,048614	0,374	0,072571	0,440	0,102002	0,506	0,137467
0,309	0,048938	0,375	0,072975	0,441	0,102493	0,507	0,138054
0,310	0,049264	0,376	0,073380	0,442	0,102985	0,508	0,138643
0,311	0,049590	0,377	0,073787	0,443	0,103478	0,509	0,139234
0,312	0,049918	0,378	0,074195	0,444	0,103973	0,510	0,139826
0,313	0,050247	0,379	0,074603	0,445	0,104469	0,511	0,140419
0,314	0,050577	0,380	0,075013	0,446	0,104967	0,512	0,141015
0,315	0,050908	0,381	0,075425	0,447	0,105466	0,513	0,141612
0,316	0,051241	0,382	0,075838	0,448	0,105967	0,514	0,142280
0,317	0,051575	0,383	0,076252	0,449	0,106469	0,515	0,142810
0,318	0,051909	0,384	0,076667	0,450	0,106972	0,516	0,143412
0,319	0,052245	0,385	0,077084	0,451	0,107476	0,517	0,144015
0,320	0,052583	0,386	0,077501	0,452	0,107982	0,518	0,144620
0,321	0,052921	0,387	0,077920	0,453	0,108490	0,519	0,145226
0,322	0,053250	0,388	0,078341	0,454	0,108999	0,520	0,145834
0,323	0,053601	0,389	0,078762	0,455	0,109509	0,521	0,146444
0,324	0,053943	0,390	0,079185	0,456	0,110020	0,522	0,147055
0,325	0,054286	0,391	0,079609	0,457	0,110533	0,523	0,147667
0,326	0,054630	0,392	0,080035	0,458	0,111048	0,524	0,148282
0,327	0,054976	0,393	0,080462	0,459	0,111564	0,525	0,148898
0,328	0,055322	0,394	0,080890	0,460	0,112081	0,526	0,149546
0,329	0,055670	0,395	0,081319	0,461	0,112600	0,527	0,150135
0,330	0,056019	0,396	0,081750	0,462	0,113120	0,528	0,150756

ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.
0,529	0,151378	0,595	0,196273	0,661	0,249614	0,727	0,313363
0,530	0,152002	0,596	0,197016	0,662	0,250496	0,728	0,314423
0,531	0,152628	0,597	0,197759	0,663	0,251381	0,729	0,315486
0,532	0,153256	0,598	0,198504	0,664	0,252267	0,730	0,316553
0,533	0,153885	0,599	0,199251	0,665	0,253157	0,731	0,317622
0,534	0,154516	0,600	0,200000	0,666	0,254048	0,732	0,318695
0,535	0,155148	0,601	0,200751	0,667	0,254943	0,733	0,319771
0,536	0,155782	0,602	0,201504	0,668	0,255839	0,734	0,320851
0,537	0,156418	0,603	0,202259	0,669	0,256738	0,735	0,321933
0,538	0,157055	0,604	0,203016	0,670	0,257639	0,736	0,323018
0,539	0,157694	0,605	0,203775	0,671	0,258543	0,737	0,324107
0,540	0,158335	0,606	0,204536	0,672	0,259449	0,738	0,325199
0,541	0,158978	0,607	0,205298	0,673	0,260358	0,739	0,326295
0,542	0,159622	0,608	0,206063	0,674	0,261269	0,740	0,327393
0,543	0,160268	0,609	0,206830	0,675	0,262182	0,741	0,328495
0,544	0,160915	0,610	0,207599	0,676	0,263098	0,742	0,329600
0,545	0,161564	0,611	0,208369	0,677	0,264017	0,743	0,330709
0,546	0,162215	0,612	0,209142	0,678	0,264938	0,744	0,331821
0,547	0,162868	0,613	0,209917	0,679	0,265862	0,745	0,332936
0,548	0,163522	0,614	0,210694	0,680	0,266788	0,746	0,334054
0,549	0,164178	0,615	0,211473	0,681	0,267717	0,747	0,335176
0,550	0,164835	0,616	0,212254	0,682	0,268648	0,748	0,336301
0,551	0,165495	0,617	0,213037	0,683	0,269582	0,749	0,337430
0,552	0,166156	0,618	0,213822	0,684	0,270518	0,750	0,338562
0,553	0,166819	0,619	0,214609	0,685	0,271457	0,751	0,339698
0,554	0,167484	0,620	0,215398	0,686	0,272398	0,752	0,340837
0,555	0,168150	0,621	0,216189	0,687	0,273343	0,753	0,341980
0,556	0,168818	0,622	0,216983	0,688	0,274289	0,754	0,343126
0,557	0,169488	0,623	0,217778	0,689	0,275239	0,755	0,344275
0,558	0,170159	0,624	0,218576	0,690	0,276191	0,756	0,345428
0,559	0,170832	0,625	0,219375	0,691	0,277145	0,757	0,346585
0,560	0,171507	0,626	0,220177	0,692	0,278103	0,758	0,347746
0,561	0,172184	0,627	0,220981	0,693	0,279062	0,759	0,348909
0,562	0,172863	0,628	0,221787	0,694	0,280025	0,760	0,350077
0,563	0,173543	0,629	0,222595	0,695	0,280991	0,761	0,351248
0,564	0,174225	0,630	0,223405	0,696	0,281958	0,762	0,352423
0,565	0,174909	0,631	0,224217	0,697	0,282929	0,763	0,353602
0,566	0,175595	0,632	0,225032	0,698	0,283902	0,764	0,354784
0,567	0,176282	0,633	0,225848	0,699	0,284878	0,765	0,355970
0,568	0,176971	0,634	0,226667	0,700	0,285857	0,766	0,357159
0,569	0,177662	0,635	0,227488	0,701	0,286839	0,767	0,358353
0,570	0,178355	0,636	0,228311	0,702	0,287823	0,768	0,359550
0,571	0,179050	0,637	0,229136	0,703	0,288810	0,769	0,360751
0,572	0,179747	0,638	0,229964	0,704	0,289800	0,770	0,361956
0,573	0,180445	0,639	0,230793	0,705	0,290793	0,771	0,363165
0,574	0,181145	0,640	0,231625	0,706	0,291788	0,772	0,364378
0,575	0,181847	0,641	0,232459	0,707	0,292787	0,773	0,365594
0,576	0,182551	0,642	0,233295	0,708	0,293789	0,774	0,366814
0,577	0,183256	0,643	0,234134	0,709	0,294792	0,775	0,368039
0,578	0,183963	0,644	0,234975	0,710	0,295798	0,776	0,369267
0,579	0,184672	0,645	0,235818	0,711	0,296808	0,777	0,370499
0,580	0,185383	0,646	0,236663	0,712	0,297821	0,778	0,371736
0,581	0,186096	0,647	0,237510	0,713	0,298836	0,779	0,372976
0,582	0,186811	0,648	0,238360	0,714	0,299854	0,780	0,374221
0,583	0,187527	0,649	0,239212	0,715	0,300876	0,781	0,375469
0,584	0,188246	0,650	0,240066	0,716	0,301900	0,782	0,376722
0,585	0,188967	0,651	0,240922	0,717	0,302927	0,783	0,377978
0,586	0,189689	0,652	0,241790	0,718	0,303957	0,784	0,379239
0,587	0,190413	0,653	0,242642	0,719	0,304990	0,785	0,380504
0,588	0,191139	0,654	0,243505	0,720	0,306026	0,786	0,381774
0,589	0,191867	0,655	0,244371	0,721	0,307065	0,787	0,383047
0,590	0,192597	0,656	0,245239	0,722	0,308107	0,788	0,384325
0,591	0,193328	0,657	0,246109	0,723	0,309152	0,789	0,385607
0,592	0,194062	0,658	0,246982	0,724	0,310200	0,790	0,386893
0,593	0,194798	0,659	0,247857	0,725	0,311251	0,791	0,388184
0,594	0,195535	0,660	0,248734	0,726	0,312305	0,792	0,389479

ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.
0,793	0,390778	0,853	0,478094	0,913	0,592041	0,973	0,769195
0,794	0,392082	0,854	0,479727	0,914	0,594286	0,974	0,773452
0,795	0,393391	0,855	0,481373	0,915	0,596546	0,975	0,777795
0,796	0,394703	0,856	9,483024	0,916	6,598826	0,976	0,782230
0,797	0,396021	0,857	0,484684	0,917	0,601113	0,977	0,786761
0,798	0,397343	0,858	0,486351	0,918	0,603420	0,978	0,791395
0,799	0,398669	0,859	0,488025	0,919	0,605741	0,979	0,796140
0,800	0,400000	0,860	0,489706	0,920	0,608081	0,980	0,801003
0,801	0,401336	0,861	0,491395	0,921	0,610438	0,981	0,805992
0,802	0,402676	0,862	0,493092	0,922	0,612810	0,982	0,811119
0,803	0,404021	0,863	0,494796	0,923	0,615200	0,983	0,816394
0,804	0,405371	0,864	0,496508	0,924	0,617608	0,984	0,821832
0,805	0,406725	0,865	0,498228	0,925	0,620033	0,985	0,827446
0,806	0,408085	0,866	0,499956	0,926	0,622477	0,986	0,833255
0,807	0,409449	0,867	0,501692	0,927	0,624939	0,987	0,839280
0,808	0,410817	0,868	0,503436	0,928	0,627420	0,988	0,845546
0,809	0,412191	0,869	0,505188	0,929	0,629921	0,989	0,852084
0,810	0,413570	0,870	0,506948	0,930	0,632441	0,990	0,858933
0,811	0,414954	0,871	0,508717	0,931	9,634981	0,991	0,866138
0,812	0,416347	0,872	0,510494	0,932	0,637542	0,992	0,873762
0,813	0,417736	0,873	0,512280	0,933	0,640124	0,993	0,881886
0,814	0,419135	0,874	0,514074	0,934	0,642727	0,994	0,890620
0,815	0,420539	0,875	0,515877	0,935	0,645352	0,995	0,900125
0,816	0,421948	0,876	0,517689	0,936	0,648000	0,996	0,910647
0,817	0,423362	0,877	0,519510	0,937	0,650671	0,997	0,922598
0,818	0,424782	0,878	0,521339	0,938	0,653365	0,998	0,936786
0,819	0,426207	0,879	0,523178	0,939	0,656083	0,999	0,955290
0,820	0,427637	0,880	0,525026	0,940	0,658826	0,9991	0,957583
0,821	0,429072	0,881	0,526884	0,941	0,661594	0,9992	0,960008
0,822	0,430513	0,882	0,528751	0,942	0,664389	0,9993	0,962590
0,823	0,431959	0,883	0,530627	0,943	0,667207	0,9994	0,965364
0,824	0,433410	0,884	0,532513	0,944	0,670055	0,9995	0,968381
0,825	0,434867	0,885	0,534409	0,945	0,672930	0,9996	0,971719
0,826	0,436330	0,886	0,536315	0,946	0,675833	0,9997	0,975507
0,827	0,437798	0,887	0,538231	0,947	0,678766	0,9998	0,980001
0,828	0,439272	0,888	0,540157	0,948	0,681730	0,9999	0,985858
0,829	0,440753	0,889	0,542093	0,949	0,684724	0,99991	0,986584
0,830	0,442237	0,890	0,544040	0,950	0,687751	0,99992	0,987531
0,831	0,443728	0,891	0,545997	0,951	0,690809	0,99993	0,988168
0,832	0,445224	0,892	0,547965	0,952	0,693902	0,99994	0,989046
0,833	0,446727	0,893	0,549943	0,953	0,697030	0,99995	0,990000
0,834	0,448236	0,894	0,551933	0,954	0,700193	0,99996	0,991056
0,835	0,449750	0,895	0,553934	0,955	0,703394	0,99997	0,992254
0,836	0,451271	0,896	0,555946	0,956	0,706633	0,99998	0,993675
0,837	0,452797	0,897	0,557970	0,957	0,709912	0,99999	0,995528
0,838	0,454330	0,898	0,560005	0,958	0,713232	1,00000	1,000000
0,839	0,455869	0,899	0,562051	0,959	0,716594		
0,840	0,457414	0,900	0,564110	0,960	0,720000		
0,841	0,458965	0,901	0,566181	0,961	0,723452		
0,842	0,460523	0,902	0,568264	0,962	0,726951		
0,843	0,462086	0,903	0,570360	0,963	0,730499		
0,844	0,463657	0,904	0,572468	0,964	0,734098		
0,845	0,465234	0,905	0,574588	0,965	0,737751		
0,846	0,466817	0,906	0,576722	0,966	0,741458		
0,847	0,468407	0,907	0,578869	0,967	0,745224		
0,848	0,470004	0,908	0,581030	0,968	0,749050		
0,849	0,471607	0,909	0,583204	0,969	0,752939		
0,850	0,473217	0,910	0,585392	0,970	0,756895		
0,851	0,474834	0,911	0,587594	0,971	0,760921		
0,852	0,476458	0,912	0,589810	0,972	0,765019		

TABLA TERCERA.

ABSCISAS Y ORDENADAS

DE LA PARÁBOLA EN FUNCION DEL PARÁMETRO-UNIDAD, POR INCREMENTOS DE LAS ABSCISAS, DE 1 EN 1 DIEZMILÉSIMA DE 0^m,0020, Á 0^m,013; DE 5 EN 5 DIEZMILÉSIMAS, HASTA 0^m,046; DE 1 EN 1 MILÉSIMA, HASTA 0^m,220; Y DE 2 EN 2 MILÉSIMAS, HASTA 0^m,300,

ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.
0,0020	0,00000400	0,0086	0,00007396	0,0240	0,00057600	0,0690	0,004761
0,0021	0,00000441	0,0087	0,00007569	0,0245	0,00060025	0,0700	0,004900
0,0022	0,00000484	0,0088	0,00007744	0,0250	0,00062500	0,0710	0,005041
0,0023	0,00000529	0,0089	0,00007921	0,0255	0,00065025	0,0720	0,005184
0,0024	0,00000576	0,0090	0,00008100	0,0260	0,00067600	0,0730	0,005329
0,0025	0,00000625	0,0091	0,00008281	0,0265	0,00070225	0,0740	0,005476
0,0026	0,00000676	0,0092	0,00008464	0,0270	0,00072900	0,0750	0,005625
0,0027	0,00000729	0,0093	0,00008649	0,0275	0,00075625	0,0760	0,005776
0,0028	0,00000784	0,0094	0,00008836	0,0280	0,00078400	0,0770	0,005929
0,0029	0,00000841	0,0095	0,00009025	0,0285	0,00081225	0,0780	0,006084
0,0030	0,00000900	0,0096	0,00009216	0,0290	0,00084100	0,0790	0,006241
0,0031	0,00000961	0,0097	0,00009409	0,0295	0,00087025	0,0800	0,006400
0,0032	0,00001024	0,0098	0,00009604	0,0300	0,00090000	0,0810	0,006561
0,0033	0,00001089	0,0099	0,00009801	0,0305	0,00093025	0,0820	0,006724
0,0034	0,00001156	0,0100	0,00010000	0,0310	0,00096100	0,0830	0,006889
0,0035	0,00001225	0,0101	0,00010201	0,0315	0,00099225	0,0840	0,007056
0,0036	0,00001296	0,0102	0,00010404	0,0320	0,00102400	0,0850	0,007225
0,0037	0,00001369	0,0103	0,00010609	0,0325	0,00105625	0,0860	0,007396
0,0038	0,00001444	0,0104	0,00010816	0,0330	0,00108900	0,0870	0,007569
0,0039	0,00001521	0,0105	0,00011025	0,0335	0,00112225	0,0880	0,007744
0,0040	0,00001600	0,0106	0,00011236	0,0340	0,00115600	0,0890	0,007921
0,0041	0,00001681	0,0107	0,00011449	0,0345	0,00119025	0,0900	0,008100
0,0042	0,00001764	0,0108	0,00011664	0,0350	0,00122500	0,0910	0,008281
0,0043	0,00001849	0,0109	0,00011881	0,0355	0,00126025	0,0920	0,008464
0,0044	0,00001936	0,0110	0,00012100	0,0360	0,00129600	0,0930	0,008649
0,0045	0,00002025	0,0111	0,00012321	0,0365	0,00133225	0,0940	0,008836
0,0046	0,00002116	0,0112	0,00012544	0,0370	0,00136900	0,0950	0,009025
0,0047	0,00002209	0,0113	0,00012769	0,0375	0,00140625	0,0960	0,009216
0,0048	0,00002304	0,0114	0,00012996	0,0380	0,00144400	0,0970	0,009409
0,0049	0,00002401	0,0115	0,00013225	0,0385	0,00148225	0,0980	0,009604
0,0050	0,00002500	0,0116	0,00013456	0,0390	0,00152100	0,0990	0,009801
0,0051	0,00002601	0,0117	0,00013689	0,0395	0,00156025	0,1000	0,010000
0,0052	0,00002704	0,0118	0,00013924	0,0400	0,00160000	0,1010	0,010201
0,0053	0,00002809	0,0119	0,00014161	0,0405	0,00164025	0,1020	0,010404
0,0054	0,00002916	0,0120	0,00014400	0,0410	0,00168100	0,1030	0,010609
0,0055	0,00003025	0,0121	0,00014641	0,0415	0,00172225	0,1040	0,010816
0,0056	0,00003136	0,0122	0,00014884	0,0420	0,00176400	0,1050	0,011025
0,0057	0,00003249	0,0123	0,00015129	0,0425	0,00180625	0,1060	0,011230
0,0058	0,00003364	0,0124	0,00015376	0,0430	0,00184900	0,1070	0,011449
0,0059	0,00003481	0,0125	0,00015625	0,0435	0,00189225	0,1080	0,011664
0,0060	0,00003600	0,0126	0,00015876	0,0440	0,00193600	0,1090	0,011881
0,0061	0,00003721	0,0127	0,00016129	0,0445	0,00198025	0,1100	0,012100
0,0062	0,00003844	0,0128	0,00016384	0,0450	0,00202500	0,1110	0,012321
0,0063	0,00003969	0,0129	0,00016641	0,0460	0,002116	0,1120	0,012544
0,0064	0,00004096	0,0130	0,00016900	0,0470	0,002209	0,1130	0,012769
0,0065	0,00004225	0,0135	0,00018225	0,0480	0,002304	0,1140	0,012996
0,0066	0,00004356	0,0140	0,00019600	0,0490	0,002401	0,1150	0,013225
0,0067	0,00004489	0,0145	0,00021025	0,0500	0,002500	0,1160	0,013456
0,0068	0,00004624	0,0150	0,00022500	0,0510	0,002601	0,1170	0,013689
0,0069	0,00004761	0,0155	0,00024025	0,0520	0,002704	0,1180	0,013924
0,0070	0,00004900	0,0160	0,00025600	0,0530	0,002809	0,1190	0,014161
0,0071	0,00005041	0,0165	0,00027225	0,0540	0,002916	0,1200	0,014400
0,0072	0,00005184	0,0170	0,00028900	0,0550	0,003025	0,1210	0,014641
0,0073	0,00005329	0,0175	0,00030625	0,0560	0,003136	0,1220	0,014884
0,0074	0,00005476	0,0180	0,00032400	0,0570	0,003249	0,1230	0,015129
0,0075	0,00005625	0,0185	0,00034225	0,0580	0,003364	0,1240	0,015376
0,0076	0,00005776	0,0190	0,00036100	0,0590	0,003481	0,1250	0,015625
0,0077	0,00005929	0,0195	0,00038025	0,0600	0,003600	0,1260	0,015876
0,0078	0,00006084	0,0200	0,00040000	0,0610	0,003721	0,1270	0,016129
0,0079	0,00006241	0,0205	0,00042025	0,0620	0,003844	0,1280	0,016384
0,0080	0,00006400	0,0210	0,00044100	0,0630	0,003969	0,1290	0,016641
0,0081	0,00006561	0,0215	0,00046225	0,0640	0,004096	0,1300	0,016900
0,0082	0,00006724	0,0220	0,00048400	0,0650	0,004225	0,1310	0,017161
0,0083	0,00006889	0,0225	0,00050625	0,0660	0,004356	0,1320	0,017424
0,0084	0,00007056	0,0230	0,00052900	0,0670	0,004489	0,1330	0,017689
0,0085	0,00007225	0,0235	0,00055225	0,0680	0,004624	0,1340	0,017956

ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.	ABSCISAS.	ORDENADAS.
0,1350	0,018225	0,1710	0,029241	0,2070	0,042849	0,2680	0,071824
0,1360	0,018496	0,1720	0,029584	0,2080	0,043264	0,2700	0,072900
0,1370	0,018769	0,1730	0,029929	0,2090	0,043681	0,2720	0,073984
0,1380	0,019044	0,1740	0,030276	0,2100	0,044100	0,2740	0,075076
0,1390	0,019321	0,1750	0,030625	0,2110	0,044521	0,2760	0,076176
0,1400	0,019600	0,1760	0,030976	0,2120	0,044944	0,2780	0,077284
0,1410	0,019881	0,1770	0,031329	0,2130	0,045369	0,2800	0,078400
0,1420	0,020164	0,1780	0,031684	0,2140	0,045796	0,2820	0,079524
0,1430	0,020449	0,1790	0,032041	0,2150	0,046225	0,2840	0,080656
0,1440	0,020736	0,1800	0,032400	0,2160	0,046656	0,2860	0,081796
0,1450	0,021025	0,1810	0,032761	0,2170	0,047089	0,2880	0,082944
0,1460	0,021316	0,1820	0,033124	0,2180	0,047524	0,2900	0,084100
0,1470	0,021609	0,1830	0,033489	0,2200	0,048400	0,2920	0,085264
0,1480	0,021904	0,1840	0,033856	0,2220	0,049284	0,2940	0,086436
0,1490	0,022201	0,1850	0,034225	0,2240	0,050176	0,2960	0,087616
0,1500	0,022500	0,1860	0,034596	0,2260	0,051076	0,2980	0,088804
0,1510	0,022801	0,1870	0,034969	0,2280	0,051984	0,3000	0,090000
0,1520	0,023104	0,1880	0,035344	0,2300	0,052900		
0,1530	0,023409	0,1890	0,035721	0,2320	0,053824		
0,1540	0,023716	0,1900	0,036100	0,2340	0,054756		
0,1550	0,024025	0,1910	0,036481	0,2360	0,055696		
0,1560	0,024336	0,1920	0,036864	0,2380	0,056644		
0,1570	0,024649	0,1930	0,037249	0,2400	0,057600		
0,1580	0,024964	0,1940	0,037636	0,2420	0,058564		
0,1590	0,025281	0,1950	0,038025	0,2440	0,059536		
0,1600	0,025600	0,1960	0,038416	0,2460	0,060516		
0,1610	0,025921	0,1970	0,038809	0,2480	0,061504		
0,1620	0,026244	0,1980	0,039204	0,2500	0,062500		
0,1630	0,026569	0,1990	0,039601	0,2520	0,063504		
0,1640	0,026896	0,2000	0,040000	0,2540	0,064516		
0,1650	0,027225	0,2010	0,040401	0,2560	0,065536		
0,1660	0,027556	0,2020	0,040804	0,2580	0,066564		
0,1670	0,027889	0,2030	0,041209	0,2600	0,067600		
0,1680	0,028224	0,2040	0,041616	0,2620	0,068644		
0,1690	0,028561	0,2050	0,042025	0,2640	0,069696		
0,1700	0,028900	0,2060	0,042436	0,2660	0,070756		

ÍNDICE.

PRIMERA SECCION.

COMPOSICION DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS Y ELEMENTOS DE CURVAS.

CAPÍTULO PRIMERO.—Invencion de los logaritmos y expresion de las líneas y colíneas.

CAPÍTULO II.—Cálculo de los valores trigonométricos y elementos necesarios para el trazado de curvas circulares.

CAPÍTULO III.—Resolucion de triángulos rectilíneos.

SEGUNDA SECCION.

SISTEMAS DE COORDENADAS Y SECCIONES CÓNICAS.

CAPÍTULO PRIMERO.—Problemas indeterminados.

CAPITULO II.—Fórmulas del círculo y de la tangente.

CAPITULO III.—Trasformacion de coordenadas.

CAPITULO IV.—Coordenadas polares.

CAPITULO V.—Secciones cónicas.

CAPITULO VI.—Tangentes y diámetros de las curvas.

TERCERA SECCION.

APLICACION AL ESTUDIO, TRAZADO Y REPLANTEO DE CAMINOS Y CANALES.

CAPITULO PRIMERO.—Problemas de topografía.

CAPITULO II.—Trazado definitivo de alineaciones rectas y curvas.

CAPITULO III.—Cálculo de coordenadas y replanteo de curvas.

TABLA PRIMERA.

TABLA SEGUNDA.

TABLA TERCERA.

Este Tratado se hallará de venta por separado de las Tablas Trigonométricas Complementarias, á 4 escudos en las principales librerías de Madrid y de provincias.

Administracion, calle de la Hiedra, núm. 5 y 7, imprenta.

OBRAS EN PRENSA.

Plan general de comunicaciones.—Contiene el *ante-proyecto* para establecer la red completa de ferro-carriles de un modo tal, que su realizacion pueda satisfacer á la vez las necesidades de España en sus relaciones interiores y exteriores, segun las condiciones políticas y militares, administrativas y comerciales. A esta obra acompañan dos mapas ó cartas itinerarias de la *Península Española*: en una de ellas se representan las vias existentes, ya en explotacion, en construccion ó en proyecto, tal como se hallan en el dia; y en la otra se fijan los ejes de las líneas radiales y de los troncos trasversales de las redes, marcando los cruceros y demás puntos de union, é indicando el entronque de cada uno de los ramales principales y los empalmes de los secundarios que forman las ramificaciones de distintas categorías, para la más acertada ejecucion de las diferentes clases de vias, por el órden de preferencia.

Tratado especial.—Se divide en tres partes, que componen otros tantos volúmenes.

En la primera se trata de los estudios fundamentales é investigaciones acerca de los mejores sistemas para el establecimiento y explotacion de los ferro-carriles, conforme á las condiciones á que hayan de satisfacer, en vista de los últimos adelantos.

La segunda contiene los principios y bases que deben servir de fundamento para la determinacion y trazado de los caminos ordinarios ó carreteras.

La tercera comprende los estudios aplicables á la navegacion interior, aprovechamiento de aguas, desecamiento de lagunas y saneamiento de terrenos.