MATEMÁTICAS

AL ALCANCE DE TODOS.

ENSAYO DE UN CURSO TEÓRICO PRÁCTICO POR EL MÉTODO SINTÉTICO, PARA QUE PUEDA SERVIR DE TEXTO Á LOS ALUMNOS DE SEGUNDA ENSEÑANZA, Á LOS DE LAS ACADEMIAS DE LAS ARMAS GENERALES Y Á LOS DE ALGUNAS CARRERAS FACULTATIVAS; FORMANDO SU PRIMERA PARTE, Ó SEA LA ARITMÉTICA USUAL Y COMPLEMENTAL, UN CURSO COMPLETO PREPARATORIO PARA QUE LOS NIÑOS Y ADOLESCENTES PUEDAN CON PROVECHO DESPUES DEDICARSE Á TODA CLASE DE ESTUDIOS MATEMÁTICOS, AUNQUE SEAN POR EL MÉTODO ANALÍTICO.

SUPLEMENTO AL TRATADO I.

ÁLGEBRA ELEMENTAL

DISPUESTO PARA COMPLETAR EL PRIMER CURSO DE MATEMÁTICAS DE LOS ALUMNOS DE SEGUNDA ENSEÑANZA Y QUE PUEDA SERVIRLES DE TEXTO

POR

D. José M.ª Tuero.

José M.ª Tuero

MADRID.
IMPRENTA Y FUNDICION DE MANUEL TELLO,
Isabel la Católica, 23.
1876.

MATEMÁTICAS

AL ALCANCE DE TODOS.

ENSAYO DE UN CURSO TEÓRICO PRÁCTICO
POR EL MÉTODO SINTÉTICO, PARA QUE PUEDA SERVIR
DE TEXTO Á LOS ALUMNOS DE SEGUNDA ENSEÑANZA, Á LOS DE
LAS ACADEMIAS DE LAS ARMAS GENERALES Y Á LOS DE ALGUNAS CARRERAS
FACULTATIVAS; FORMANDO SU PRIMERA PARTE, Ó SEA LA ARITMÉTICA USUAL Y
COMPLEMENTAL, UN CURSO COMPLETO PREPARATORIO PARA QUE LOS NIÑOS
Y ADOLESCENTES PUEDAN CON PROVECHO DESPUES DEDICARSE Á
TODA CLASE DE ESTUDIOS MATEMÁTICOS, AUNQUE
SEAN POR EL MÉTODO ANALÍTICO.

SUPLEMENTO AL TRATADO I.

ÁLGEBRA ELEMENTAL

DISPUESTO PARA COMPLETAR EL PRIMER CURSO DE MATEMÁTICAS DE LOS ALUMNOS
DE SEGUNDA ENSEÑANZA Y QUE PUEDA SERVIRLES DE TEXTO

POR

D. JOSÉ M.ª TUERO.

José Mª Tuero

MADRID.
IMPRENTA Y FUNDICION DE MANUEL TELLO,
Isabel la Católica, 23.
1876.

NOTAS.

1.ª Esta obra es propiedad del autor, y todos los ejemplares llevan varias contraseñas.

2.ª Se vende en Madrid en las principales librerías á 9 rs. rústica y 11 encartonada, y un real más respectivamente en provincias, sirviéndose los pedidos que se hagan á la plaza del Cordon, núm. 1, bajo, con 15 y 20 por 100 de rebaja, pago adelantado por letras ó libranzas, segun que se pida respectivamente más de 10 ó 25 ejemplares. Y análogamente la Aritmética del mismo autor que vale 15 rs. en Madrid y 16 en provincias, y 2 rs. más encartonada.

3.ª Al fin del Algebra se ponen algunas correcciones al Tratado de Aritmética, y á continuacion del Indice se señalan algunos errores y erratas del Algebra.

PRÓLOGO.

Cuando hace pocos meses publiqué el tratado primero de *Matemáticas al alcance de todos*, ó sea por el método sintético, comprensivo de la Aritmética inferior y superior, ó usual y complemental, me proponia, segun indiqué en su prólogo, publicar, aunque no muy inmediatamente, un segundo y un tercer tratado que contuviese el Álgebra, la Geometría y la Trigonometría, dispuestos de manera que aunque fuese por ellos posible á los alumnos de segunda enseñanza aprenderlos en los dos cursos ó años como es costumbre, fueran más á propósito para hacerlo en tres años, porque siendo materia muy importante y cursándose en los institutos como accesoria, no creia suficientes dos años.

No he variado de conviccion, pero considerando lo que puede, sobre todo en España, la fuerza de la costumbre, y que por ello no es de esperar varíe el sistema vigente, por el que se hace el estudio de la segunda enseñanza en cinco años, me he convencido de que es indispensable que el de Matemáticas se siga haciendo en dos años, para que en los otros se cursen las historias y la geografía como accesorias, y en los cinco las principales de latin, retórica, filosofía, química, etc.

En su consecuencia, he creido que para que mi tratado de Aritmética pudiera ser utilizable en su principal objeto de servir de texto á los alumnos de segunda enseñanza, era urgente la publicacion del Algebra elemental bajo el mismo plan y método que empleé en la Aritmética; y no como tratado segundo de Matemáticas, sino como suplemento al primero, pues que en éste traté con suficiente extension las razones y proporciones, las progresiones y logaritmos que otros autores incluyen en el Algebra, y en la que como elemental sólo necesitaba generalizar su teoría y múltiples aplicaciones, sin perjuicio de darle más extension en una segunda edicion, si el éxito de la primera me hiciera esperar que pudiese ser utilizada por los que se preparan para carreras altamente facultativas.

Para que este suplemento á la Aritmética llenara su objeto, comprendí, como acabo de indicar, la necesidad de seguir en él el mismo método sintético empleado en aquella, y de cuyas ventajas para la juventud cada dia estoy más convencido. No desconocí que la empresa era difícil, porque el Algebra es esencialmente analítica, así como puede decirse que la Geometría es esencialmente sintética; pero creo haberla llevado á cabo convenientemente áun en la parte más analítica, ó sea la discusion de las ecuaciones, cuyo análisis presento en las demostraciones de los teoremas en que convierto las verdaderas deducciones. Y es evidente que si lo consigo, es porque se trata del Algebra elemental, pues en la superior sería ridículo el intentarlo.

Creo ademas que el Algebra elemental por este método y consiguientemente la Aritmética, no sólo podrá servir para la segunda enseñanza, sino tambien para emprender despues el estudio de las matemáticas sublimes; pues aunque parezca que para ellas convenga acostumbrarse al análisis, la verdad es, que los niños y áun los adolescentes lo aprenden casi de memoria y no les penetra sino presentado en forma de demostracion de teoremas, cuyas demostraciones serán siempre una preparacion para el procedimiento analítico de las matemáticas superiores.

El tratado de Geometría y Trigonometría no lo publicaré inmediatamente, por no ser urgente su publicacion, porque en esa materia esencialmente sintética, como llevo indicado, poco podré separarme de otros autores, pues aunque lo que sobre ella tengo preparado, algo creo haber hecho en beneficio de que esté más al alcance de todos, no hay inconveniente en que los que aprendan mi Aritmética y mi Algebra, estudien la Geometría por cualquier otro autor.

Expuestos someramente los motivos que me impulsan á publicar este tratado de Algebra elemental, é indicados los medios que he empleado para que sirva de suplemento á mi Aritmética, así como al prólogo de ésta le puse con poca oportunidad, y por lo tanto, como verdadero estrambote, mis ideas sobre la libertad de enseñanza, voy á completarlas con otro sobre la instruccion pública en general.

INSTRUCCION PÚBLICA.

Queremos muy laudablemente los españoles, que nuestros hijos se instruyan como se instruyen los jóvenes de los países más cultos de Europa; y sin embargo, por la indolencia y holgazanería que nos es característica, y por el inmoderado afan de que las carreras se terminen lo antes posible, padres y profesores parece como que trabajan de consuno, é influyen inevitablemente en el gobierno, para que el sistema de enseñanza sea tal, que por él nuestros bachilleres no sepan ni lo que saben los que están principiando la segunda enseñanza en otros países.

Apuntemos someramente las causas y despues indíquense algunos de los posibles remedios.

Son, pues, causas de mal tan grave: 1.ª Que se empieza la segunda enseñanza por niños que no han cumplido diez años, y con sólo saber leer y escribir y sumar y restar números abstractos. 2.ª Que los cursos son cortos, pues se dan casi cuatro meses de vacaciones, cuando sólo dos tienen en el extranjero; aparte de que nosotros, diferentemente á ellos, tenemos despues vacaciones intermedias de Navidad, semana santa y multitud de fiestas religiosas y nacionales. 3.ª Que los programas de exámen no son generales, ni están acordes con la corta duracion de los cursos, ni acordes tampoco con libros de texto á propósito para que los alumnos puedan saber bien lo poco que pueden aprender en tan corto tiempo. Y 4.ª Que se puede alcanzar el grado de bachiller antes de los diez y seis años, y en edad por lo tanto que es imposible que, sea cual sea el grado de precocidad de los jóvenes, sepan como deben saber la retórica, las matemáticas, y ménos la filosofía.

Los males que nacen de las expresadas causas, no tienen radical remedio sino por medio de un cambio completo del sistema de enseñanza, imitando en lo posible á los franceses, que en la primera aprenden no sólo la gramática perfectamente y la aritmética práctica, sino hasta algo de retórica, y cursan la segunda enseñanza en siete ú ocho años. Pero contentémonos con los siguientes remedios:

1.° Que la segunda enseñanza se empiece con el conocimiento completo de las primer letras y á los diez años cumplidos, y no se pueda ser bachiller hasta los diez y seis; pues los jóvenes más aventajados continuarán siéndolo durante su carrera y despues de ella, y no lo serán, si por serlo se precipitan en sus estudios.

2.° Que las vacaciones sean más cortas.

3.° Que las asignaturas se clasifiquen de principales aquellas que deben serlo, como el latin, la retórica, filosofía y física, y de accesorias las historias, la geografía y las matemáticas, pues á pesar de la importancia de estas, con darles demasiada, estudiándose como se estudian simultáneamente á otras materias principales, lo que se consigue es que los bachilleres no sepan de ellas ni áun lo necesario para los usos de la vida comun, y que estén muy lejos de tener la debida preparacion para emprender estudios matemáticos profundos.

4.° Que los libros de texto, que naturalmente no deben ser en número fijo, estén arreglados á la duracion de los cursos y á las dichas calificaciones de las asignaturas de ser principales ó accesorias, pues en estas, es tiempo perdido el que empleen, por ejemplo, los niños en aprender de la historia otra cosa que los sucesos principales y en matemáticas más de la parte elemental de ellas.

5.° Que los programas de exámen sean generales por toda España y dados ó aprobados por el consejo de Instruccion pública, pero arreglados á las circunstancias que deben tener los textos segun va dicho en el anterior número.

Con estos remedios se consiguen minorar algo los males indicados y preparar la opinion para darles un dia un radical remedio.

INDICE.

Págs.

ERRATAS Y ERRORES NCTABLES DEL ÁLGEBRA.

Impreso este primer pliego despues de los que le siguen, algunos errores y erratas notables podemos señalar en este sitio, omitiendo aquellos poco importantes.

Página 28, línea 19, en lugar de «por ejemplo $\frac{2x}{x} = 2$ multiplicado por x, da $2x = 2x$,» debe decir: «*por ejemplo* $\frac{2x^2}{x} = 8$, *multiplicado por* x *da* $2x^2 = 8$ x; pues $\frac{2x}{x} = 2$ no es ecuacion, sino identidad. Y seis líneas antes hay un denominador 2 que debe ser x.

Página 32, línea 14, hay en la primera ecuacion un 2 que debe ser z, errata que acaso se halle repetida en otros sitios.

Página 58, entre las líneas 11 y 12, se comió el cajista lo siguiente: «*Sustituyendo los valores hallados á* y, *á* x *y á* u *en cualquier ecuacion del sistema de* 4, *por ejemplo en la* 1.ª, *se tendrá* $3z + 2 \times 2 + 4 \times 1 + 2 \times 0 = 17$, *que da* $z = \frac{17-8}{3} = \frac{9}{3} = 3$.»

Página 66, líneas 13 y 14, en lugar de «por el duplo del primero de la raíz,» debe decir: «*por el duplo de los dos términos hallados para la raíz.*»

Página 68, línea 16, en lugar de «$9 = 9 \times -1$,» debe decir: «$-9 = 9 \times -1$.»

Página 76, línea primera, hay un paréntesis de más, pues debe decir: «4×-2^2, pues como $-2^2 = 4$ será $4 \times -2^2 = 16$ y $(4 \times -2)^2 = 64$.»

Página 96, en los dos últimos renglones del número 322, en lugar de «(Log. $a)^n$,» debe decir: «(Log. a) $\times$ n ó (Log. a) n.»

La demostracion del corolario siguiente número 323, como consecuencia de la anterior errata, por no haber advertido que lo era al corregir las pruebas, se corrigió mal, pues debe simplemente decir: «*Porque si suponemos* $\sqrt[n]{a} = x$, *será* $x^n = a$, *y por el corolario anterior será* (Log. x) $\times$ n = Log. a, *que da* Log. x $= \frac{\text{Log. a}}{n}$.»

ALGEBRA ELEMENTAL.

CAPÍTULO PRIMERO.

NOCIONES PRELIMINARES.

ARTÍCULO PRIMERO.

DEFINICION, OBJETO, FIN Y MEDIOS DEL ALGEBRA.

1. Definicion. ALGEBRA Ó ARITMÉTICA UNIVERSAL *se llama la ciencia que trata de las leyes de la cantidad en general, prescindiendo de su naturaleza continua ó discreta, y áun de todo valor numérico; llamándose tambien la ciencia de las fórmulas.*

2. El *objeto* del Algebra es, por lo tanto, la cantidad en sus leyes generales; su *fin*, consiguientemente, la generalizacion de las reglas para la resolucion de los problemas por medio de fórmulas, por las que ademas se deducen demostraciones generales de teoremas y leyes múltiples de la cantidad en general á que no alcanza la Aritmética; y sus *medios* son las maneras especiales de expresar la cantidad que permiten dicha generalizacion y las deducciones indicadas.

ARTÍCULO II.

CARACTÉRES Ó NOTAS Y SIGNOS ALGEBRÁICOS.

3. Los caractéres ó notas de que se vale el Algebra para representar las cantidades, son las letras minúsculas del alfabeto, empleando la primera a, b, c, etc., para la representacion ó sustitucion más ó ménos pasajera de las cantidades que son ó se suponen conocidas en un teorema ó problema; y las últimas v, x, y, z, para representar las incógnitas.

Así, a puede sustituir en un problema á 10 hombres lo mismo que á 8 metros cuadrados de paño, y puede representar lo mismo un número cualquiera de varas que una superficie de cualesquiera dimensiones.

4. Una letra con uno, dos ó tres acentos en esta forma: a', a'', a''', etc., que se leen: *a prima*, *a segunda*, *a tercera*, etc., sirve para representar cantidades análogas á aquellas que en el mismo problema ó teorema esté representada por igual letra sin acentos.

Así, si la ganancia de un capital que se representa por b se le llama y, á la ganancia de otro capital análogo, en cualquier sentido, se le suele llamar y' y á su capital correspondiente b'.

5. Finalmente, para representar cantidades heterogéneas ó compuestas de muchas partes, que no sea en el problema ó teorema importante el considerar detalladamente en un momento dado, se suelen usar

las letras mayúsculas del alfabeto A, B, etc., y áun tambien los caractéres griegos.

Así, en lugar de $a+b+c$ suele ponerse A, si el problema, teorema ó fórmula no exige que tales partes a, b y c se consideren aisladamente para lograr el objeto del problema, la demostracion del teorema ó la apreciacion y aplicacion de la fórmula. Acostumbran algunos dar á las minúsculas p y q el privilegio de representar cantidades doblemente compuestas como $\frac{A}{B}$ y CD.

6. Los signos de que se vale el Algebra para indicar las operaciones que deben hacerse con las cantidades, ó la relacion de sus partes, ó el carácter de estas, son los mismos que usa la Aritmética.

$+$, $-$, $\times$ ó $\cdot$, $\div$ ó $:$, $\sqrt{\ }$, $=$, $<$, $>$, $(\ )$.

7. El signo de la multiplicacion se suprime cuando indica la de dos ó varias letras entre sí, porque no siendo fundibles, digámoslo así, como los números, tal signo es innecesario.

Así, $a\times b\times c=abc$ cosa que con los números no puede hacerse, porque $2\times 3\times 4=24<234$.

8. Tambien se suprime el signo de multiplicacion cuando indica que se ha de multiplicar una cantidad que está dentro de un paréntesis por otra que está fuera ó dentro de otro.

Así, $a\times(b-c)=a(b-c)$ y $(a+b)\times(m-n)=(a+b)(m-n)$.

9. Los signos $+$ y $-$ no sólo sirven para indicar la suma ó resta de las cantidades que separan, sino tambien para señalar su carácter positivo ó negativo, como se indicó en la Aritmética (80). Pero siendo este carácter de mucha más importancia en el Algebra que en la Aritmética, no sólo toda cantidad debe tenerlo señalado siempre y suponérsele el positivo cuando no lleve ningun signo (pues se suprime por innecesario al principio de una expresion; ó de una de sus partes dentro de paréntesis), sino que debe llevar doble signo cuando quepa confusion en el que corresponde al carácter de una cantidad, con el que indique la operacion que deba hacerse con ella.

Así, $a+(-m-c)$ dice que á la cantidad a debe sumarse la suma de la cantidad negativa m con la negativa c.

10. Los signos $+$ y $-$ formando uno solo $\pm$, llamado de ambigüedad, muy usado en el Algebra, sirven para expresar que la cantidad á que preceden, segun las condiciones del teorema ó problema, lo mismo puede sumarse que restarse á la anterior, en cuyo caso el signo de carácter de la cantidad será el positivo sino lleva el negativo.

Así, $a\pm b$ dice que á la cantidad positiva a debe sumarse ó restarse indistintamente la positiva b, y $a\pm(-bc)$ dice que á la cantidad positiva a puede sumarse ó restarse la negativa bc.

11. Los paréntesis, como dijimos (Aritmética 345 y 348), sirven para no confundir las partes de un producto con las de un sumando ó sustraendo, confusion que, siendo de mayores consecuencias en el Algebra que en la Aritmética, porque la mayor parte de las operaciones se resuelven dejándolas indicadas, obliga hasta á usar á veces dobles paréntesis de diferente forma.

Así, $a\left[b-c(m-n)+x\right]+bt$, dice que la diferencia de m y n, multiplicada por c y restada de b y sumada con x, se ha de multiplicar por a y sumar despues con bt. Y sin paréntesis, con los signos de multiplicacion que por ellos se omiten, sería: $a\times b-c\times m-n+x+bt$, expresion cuyas operaciones indicadas son bien diferentes de las que exigen los paréntesis.

12. El signo $=$ de igualdad sirve, como en Aritmética, para indicar el resultado de los problemas y la equivalencia de las cantidades que por ello forman igualdades, que en el Algebra, cuando en ellas hay incógnitas, toman el nombre de *ecuaciones;* forma la más á propósito para el cálculo algebráico.

ARTÍCULO III.

MEDIOS DE EXPRESAR LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS COMPUESTAS.

13. *Cantidad* ó *expresion algebráica* se llama, no sólo toda letra que representa una cantidad, sino cualquier reunion de letras, con ó sin números con ellas, y cuyas partes están separadas por los signos que conocemos, segun habremos podido observar en los ejemplos del artículo anterior. Llamándose cantidad algebráica numérica cuando en ella no hay más letras que las incógnitas, y literal cuando algunas de las cantidades conocidas están representadas por letras.

Así, $3+4+x$ es numérica y $3+b+z$ es literal.

14. La cantidad ó expresion algebráica se llama *entera* cuando en ella no hay ningun signo de division ni radical; *fraccionaria* cuando tiene algun signo de division; *radical* cuando tiene ese signo en toda ella ó en alguna de sus partes, y *racional* cuando aunque sea fraccionaria, no tiene signo radical.

Así, $a+b$ es una cantidad entera, $a+\frac{b}{c}$ es fraccionaria, $a+\sqrt{b}$ es radical, y lo mismo $\sqrt{a+b}$, y son racionales las dos primeras, llamándose la segunda *racional fraccionaria*.

15. *Término* de una expresion algebráica se llama cualquiera de sus partes, separadas de las otras por el signo $+$ ó el $-$ y *dimension* cualquiera de los factores de que se compone un término.

Así, $a+ab$ tiene dos términos, el primero con una dimension y el segundo con dos.

16. La expresion con un sólo término se llama *monomio*, con dos *binomio*, con tres *trinomio*, y en general *polinomio* cuando tiene dos ó más términos. Y se llama grado de un término al número de dimensiones que contiene, aunque más generalmente se llama grado el número de dimensiones incógnitas de una cantidad ó término.

Así, a es un monomio de primer grado, $a+bc$ un binomio de segundo grado y $a+bcd-m$ un trinomio de tercer grado.

17. *Coeficiente* de un término se llama el factor numérico entero ó quebrado que lleva entre la parte literal y su signo, y dice las veces que se considera repetida tal parte literal en la expresion algebráica; llamándose tambien coeficiente (y siendo á veces preciso ó conveniente considerarlo tal) á cualquiera de los factores simples ó compuestos de un término y á la unidad si no lo tiene numérico.

Así, en $4ab=ab+ab+ab+ab$, 4 es el coeficiente numérico, y en $\frac{1}{2}ab=\frac{ab}{2}$, es $\frac{1}{2}$ el coeficiente. En abc puede considerarse como coeficiente ó 1 de abc, ó a de bc y áun ab de c.

18. El coeficiente numérico no se toma en cuenta para llamar á una cantidad binomia, trinomia, etc.; pues estos nombres se refieren al número de términos con que una cantidad aparece.

Así, $a + 2bc$ es un binomio, aunque equivalente al trinomio $a + bc + bc$.

19. *Exponente* se llama al número que se pone sobre una letra, para indicar su potencia ó veces que en el término entra por factor, suponiéndosele la unidad á la que no tiene ninguno, y considerándose el valor del exponente para la computacion de dimensiones y grado de un término. Y tambien el exponente puede ser literal en sustitucion de una cantidad determinada ó representando una indeterminada.

Así, $a^2 = aa$ es un término con dos dimensiones y de segundo grado, y el exponente es 2, y b tiene 1 de exponente y $a^m = aaaa.....$

20. Es muy importante el no confundir el coeficiente con el exponente, pues $2a = a + a$, tiene muy diferente valor que $a^2 = aa$, como puede observarse dando á a cualquier valor, por ejemplo 8, pues $8 + 8 = 16$ y $8^2 = 64$.

21. Se llaman términos semejantes los que tienen las mismas letras con iguales exponentes, aunque sean diferentes sus signos y sus coeficientes numéricos.

Así, $4a^3b$ es semejante á $-2a^3b$.

22. El *valor numérico* de las expresiones algebráicas, es el que resulta de efectuar todas las operaciones que indican los signos, sustituyendo antes á las letras los valores numéricos que representan; por lo que el valor numérico de una expresion algebráica no será ninguno, si sus letras no sustituyen determinadamente números, ó si tiene incógnitas cuyo valor no se ha determinado.

Así, si en un problema en lugar de un dato 4 se pone a, en lugar de otro 5 se pone b y en lugar de otro 7 se pone c, y la cantidad que con esos tres datos resulta es, por ejemplo, $a + c - b$, su valor numérico será $4 + 7 - 5 = 6$. Pero si a, c, b representa cantidades cualesquiera, el valor numérico de la total será indeterminado. Y si $a = 16$ y $b = 8$ y se tiene $x + a + b$, el valor numérico de esa expresion no se podrá conocer, mientras no se determine el valor de x en virtud de alguna operacion de las que enseña el Algebra.

ARTÍCULO IV.

CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS.

23. Ya en la Aritmética superior (80) adelantamos que cantidades positivas que se expresan con el signo + son aquellas que en los problemas obran en sentido favorable al valor absoluto del resultado que se busca, y negativas que se expresan con el signo — las que obran en sentido contrario á las positivas. Ampliaremos aquella explicacion, porque se trata de un punto muy importante del Algebra.

24. Toda cantidad que entra en un problema puede obrar de dos maneras diferentes y contrarias. Si se desea saber la ganancia que resultará despues de obtener cierto número de pérdidas y de beneficios, evidentemente que estos contribuirán á *aumentar* la ganancia, y aquellos á *disminuir* su valor absoluto resultante. Pero si lo que se desea saber es la pérdida resultante, es evidente que las pérdidas parciales aumentarán la total, y los beneficios disminuirán la pérdida. Las ganancias, pues, en el primer caso serán las cantidades positivas y negativas las pérdidas; y lo contrario en el segundo caso. De lo que desde luego podemos deducir que una misma cantidad puede ser positiva ó negativa, segun el objeto del problema; pero que una vez determinado el carácter de un dato, queda fijado el de todos los demas del problema.

25. Las cantidades positivas destruyen á las negativas y vice-versa, porque es casi axiomático, y se desprende de las consideraciones del número anterior, que 4 de ganancia y 2 de pérdida producen 2 de verdadera ganancia.

26. Las cantidades negativas son menores que 0, y mayores aquellas cuyo valor absoluto sea menor.

Porque evidentemente que el que no tiene nada tiene más que el que tiene una deuda, y el que la tiene menor tiene realmente más que el que la tiene mayor.

27. Varias cantidades negativas equivalen á la suma negativa de todas ellas, análogamente á lo que sucede con las positivas; y varias cantidades unas positivas y otras negativas, equiválen á la diferencia que haya entre la suma de las positivas y la de las negativas, cuya diferencia tendrá el carácter de la suma mayor.

Así, $$-4+3-5+2=(3+2)-(-4-5)=5-9=-4.$$

28. El resultado negativo de un problema dice generalmente, como sabremos mejor más adelante, que el enunciado es absurdo, ó está mal expresado.

En efecto; en un problema en que se busque la ganancia, el resultado negativo dirá que no la hay, y sí por el contrario pérdida.

Así, ¿cuánto se ahorra con una renta de 8 y un gasto de 11? Será $+8-11=-3$, que quiere decir que no se gana nada, y al contrario, se pierden 3; pero si se hubiera preguntado en cuánto quedará empeñado, ó al ménos cuánto resultará de ahorro ó de déficit (que es la manera más racional de presentar el problema), pues no siempre puede preverse si el resultado será saldo ó déficit, se planteará $11-8=3$, dando á 11 el carácter positivo, porque siendo el dato mayor, más propiamente debe representar el minuendo; pero teniendo en cuenta que representa gasto, y por lo tanto, que siendo mayor que la renta, el resultado debe ser déficit, aunque tenga carácter positivo por su analogía con el gasto de 11 á que se le asignó ese carácter.

29. Hemos puesto todos los ejemplos en números y no en letras, porque éstas no nos servirian para hacer más evidentes las consideraciones expuestas; pero las letras, como cantidades algebráicas, tienen siempre un carácter positivo ó negativo, y sufren como tales los efectos de las consideraciones expuestas.

ARTÍCULO V.

SIMPLIFICACION Y ORDENACION DE LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS COMPUESTAS.

30. Toda expresion ó cantidad algebráica compuesta, puede y debe simplificarse lo que se llama *reduccion de términos semejantes*, cuando los tenga, poniendo en lugar de ellos uno solo con las mismas letras, con un coeficiente numérico igual á la suma de los de todos los términos semejantes si tienen igual signo; término reducido que llevará tambien el mismo signo, sea positivo ó negativo; ó con un coeficiente numérico igual á la diferencia entre los coeficientes positivos y los negativos; término reducido que llevará el signo de la mayor suma de coeficientes positivos ó negativos. Simplificacion que se funda evidentemente en la definicion y funciones del coeficiente (17), y en las propiedades de las cantidades positivas y negativas respectivamente (27).

Así, del mismo modo que $3a = a + a + a$ y $-3 + 4 - 5 = -4$, será evidentemente $-3ab^2 + 4ab^2 - 34ab^2 = -4ab^2$, y por lo tanto $5abc^2 + 4db - 8abc^2 - 3abc^2 = 4db - 6abc^2$.

31. Toda expresion ó cantidad algebráica compuesta puede ordenarse con relacion á las potencias descendentes ó ascendentes de una letra cualquiera que se llama *ordenatriz* (generalmente la que tiene mayores y más variados exponentes, y está repetida en todos ó casi todos los términos), poniendo por primer término en el primer caso el que tenga dicha letra con mayor exponente, por segundo el que tenga un exponente inmediatamente menor, y así sucesivamente; y por último, el término ó los términos en que no figurase dicha letra, los cuales podrán ordenarse con relacion á otra letra, que puede llamarse *sub-ordenatriz*, y á la que debe atenderse para la colocacion en la primera parte de la ordenacion de los términos en que la ordenatriz principal tenga igual exponente.

Esta ordenacion que, aunque no sea siempre indispensable, es conveniente siempre y se funda evidentemente en el principio axiomático de que el órden de los sumandos no altera la suma, aunque entre ellos haya algunos de carácter negativo.

Así,
$$-3a^2b^4c - 4cba^2x + 5a^4b^3z + 6a^5b^2s + zv =$$
$$6a^5b^2s + 5a^4b3z + 3a^2b^4 - 4cba^2 + zb, =$$
$$-4cba^2 + 3a^2b^4 + 5a4b^3z + 6a5b^2s + zv.$$

ARTÍCULO VI.

SUPERIORIDAD PATENTE DEL ÁLGEBRA SOBRE LA ARITMÉTICA.

32. La superioridad del Algebra sobre la Aritmética pudimos ya apreciarla en la Aritmética superior cuando adoptamos algunas fórmulas verdaderamente algebráicas, para fijar reglas generales de algunos problemas.

33. En efecto, en el capítulo XII, artículo II, núm. 619 y siguientes, despues que expusimos la regla para determinar el interés ó ganancia que produce un capital en un tiempo dado, y de demostrarla sobre un problema particular, la generalizamos, llamando y al dicho interés, ó sea á la incógnita del problema, c al capital, i al tanto por ciento legal ó convenido, y t al tiempo por el que el capital estuviese empleado, lo que nos permitió traducir la regla por la fórmula $y = \frac{c \times i \times t}{100}$, en la que evidentemente, sustituyendo en cada caso particular á cada letra el dato correspondiente, y efectuando las operaciones indicadas, se obtiene fácilmente el valor de la incógnita. Salta, pues, á la vista la ventaja de este procedimiento sobre el puramente aritmético, áun generalizando como allí generalizamos la regla antes de convertirla en fórmula.

34. Pero ademas, tal fórmula nos proporcionó la ventaja de deducir fácilmente de ella otras para los casos en que la incógnita fuese cualquiera de las otras expresadas letras; deduccion que, aunque la hicimos por procedimientos más bien aritméticos que algebráicos, por uno puramente aritmético y sin el auxilio de las letras que representasen las cantidades que debian entrar en los problemas, hubiéramos necesitado una demostracion para cada una de las deducidas reglas, á pesar de la analogía que hay entre ellas.

35. Los números, ademas, fundiéndose, digámoslo así, en cada operacion, no dejan siempre señales de cada una, cosa que no sucede á las letras, cuyas operaciones se efectúan casi todas dejándolas indicadas, y señalan por lo tanto el camino que se llevó para llegar al resultado.

Así, $3 \times 4 = 12$; pero 12 puede ser tambien producto de 2 y 6 y suma de 4 de 4 y de 4 y de 6 y 6, al paso que ab siempre será producto de a y b.

36. La anterior verdad no es rigorosamente exacta, aunque como tal la expresen muchos autores para ponderar las ventajas del Algebra. En efecto, no sólo ab puede ser resultado de problemas muy distintos, y al que se haya podido llegar por caminos muy diferentes, como se comprenderá con sólo considerar que por lo que ya sabemos $ab = 2a^2b + ab - 2a^2b$, sino que cualquier resultado numérico, ese mismo 12, lo mismo que cualquier resultado literal, tendrá siempre precediéndole, si no se borran, las operaciones numéricas que le han producido. Pero tal verdad es suficientemente exacta, pues aunque $ab = 2a^2b + ab - 2a^2b$, ab dice que es inútil en el problema á que ese resultado conduce, el múltiplo 2 por el cuadrado de a y por b, etc., y que basta multiplicar a por b.

37. Lo que hay, pues, de cierto, y basta para probar la superioridad del Algebra sobre la Aritmética, es que el sustituir á los datos numéricos las letras, facilita muchas operaciones y á veces se evitan otras; que esas operaciones, hechas con números, no marcarian tan claramente siempre el camino de llegar al resultado, como lo marcan las letras; que con estas, se generalizan las reglas y se deducen fácilmente otras, como acabamos de ver recordando la Aritmética superior; y finalmente, que como se indicó en el artículo primero, el análisis de las fórmulas permite, ó ha permitido, descubrir leyes de la cantidad, á que no alcanza la Aritmética; leyes tan múltiples y tan elevadas algunas, que han dado lugar á la necesaria division del Algebra en dos partes esencialmente distintas, llamadas Algebra elemental y Algebra superior.

CAPÍTULO II.

OPERACIONES PRINCIPALES DE LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS.

ARTÍCULO PRIMERO.

PRELIMINARES.

38. Con las cantidades algebráicas se hacen las mismas operaciones que con las numéricas y muchas otras que no pueden hacerse con estas. Las principales son la *adicion*, la *sustraccion*, la *multiplicacion* y la *division*, que se indican con los mismos signos aritméticos que conocemos, aunque como ya advertimos, son ó pueden ser independientes los que caracterizan de positivas ó negativas las cantidades de aquellos que indican las operaciones que deben hacerse con ellas.

39. Las definiciones de esas cuatro operaciones ó problemas generales, son las mismas que como principales dimos en la Aritmética (60, 61, 84, 118); pero las que allí ofrecimos como secundarias, no son todas rigorosamente exactas tratándose de cantidades algebráicas.

ARTÍCULO II.

ADICION ALGEBRÁICA.

40. Regla. *Para sumar dos ó más cantidades algebráicas, monomios ó polinomios, se reunen en una sola, conservando sus términos los mismos signos que tuvieren en los sumandos, y simplificando la suma si tiene términos semejantes, lo que se conseguirá más fácilmente si se colocan los sumandos unos debajo de los otros para deducir la suma ya simplificada.*

Ejemplo 1.° Se desea sumar la cantidad algebráica a (positiva) con la negativa $-b$. La suma será, pues, $a - b$.

Ejemplo 2.° Se desea saber cuál es la suma de las cantidades algebráicas siguientes, que para deducirlas más fácilmente se presentan unas debajo de otras, correspondiéndose los términos semejantes.

$$\begin{array}{rl} & ab + 3a^2c - 4x + 5c^2 \\ + & ab + 2ac - 5x + 4cx - 9c^2 \\ + & - 3a^2c + abd + 5c^2 \\ \hline = & 2ab - 9x + c^2 + 2ac + 4cx + abd \end{array}$$

Explicacion. En el segundo ejemplo, el primer término ab del primer sumando con el primero del segundo semejante á él, forman el primero de la suma $2ab$. El segundo término del primer sumando se destruye con el primero del tercer sumando. El tercero del primer sumando, con el tercero del segundo, forma el segundo de la suma $-9x$. El cuarto del primer sumando, con sus semejantes el quinto del segundo sumando y con el tercero del tercer sumando, forman c^2, tercero de la suma, cuyos cuarto, quinto y sexto término son respectivamente los términos de los sumandos que no tienen semejantes.

41. *Demostracion.* Como las letras que representan cantidades algebráicas no son susceptibles de fundirse como los números para producir otras iguales al conjunto de varias, en el primer ejemplo las cantidades a y b que deben sumarse no son susceptibles de otra suma que la que resulte de unir todo lo posible tales cantidades con sus signos característicos correspondientes. Y análogamente, en el segundo ejemplo todo cuanto es posible hacer con los sumandos para hallar una cantidad equivalente á todos ellos juntos, es ponerlos unos inmediamente á otros, con la simplificacion correspondiente de reunir sus términos semejantes, que es verdaderamente la sola operacion efectiva que se hace para hallar la suma.

42. Cuando el objeto del problema lo exige ó conviene á sus fines, la suma se deja indicada encerrando cada sumando en un paréntesis.

Así, la suma $a+b$ y $-b-m$, es $(a+b)+(-b-m)$.

43. *Observacion.* La demostracion de la regla de la suma puede darse tambien diciendo: si tenemos que sumar con a la cantidad $b-c$, y prescindimos de c, la suma de a y b evidentemente que no puede ser otra que $a+b$; pero como el segundo sumando no es b, sino una cantidad menor que b en todo lo que valga c, la suma $a+b$ será mayor de lo que debé ser en la cantidad c, que restándosela producirá la suma verdadera $a+b-c$.

ARTÍCULO III.

SUSTRACCION ALGEBRÁICA.

44. Regla. *Para restar una cantidad algebráica de otra, se trate de monomios ó de polinomios, se une al minuendo con sus signos característicos, el sustraendo con sus signos cambiados, y se simplifica el conjunto reduciendo los términos semejantes si los hubiere.*

Ejemplo 1.° Si se desea restar de a la cantidad negativa $-b$ será $a-(-b)=a+b$.

Ejemplo 2.° Se desea de restar

$$\begin{array}{l} 4a^3bc+5xct+bc \\ -(+6a^3bc+6x-bc) \\ \hline =\ -2a^3bc+5xct+2bc-6x \end{array}$$

Explicacion. En el primer ejemplo, segun la regla, la diferencia entre la cantidad positiva a y la negativa b, es $a+b$.

En el segundo ejemplo, segun la regla, para hallar la diferencia al mismo tiempo que simplificarla, dijimos que $4a^3bc$ del minuendo, y $+6a^3bc$ del sustraendo, que al pasar á formar parte de la resta tiene que tomar signo contrario ó negativo, da $-2a^3bc$. Despues escribimos el segundo término del minuendo, que no tiene semejante en el sustraendo. En seguida, al ir á escribir el tercero bc, como en el sustraendo vimos tambien bc, que aunque negativo, debia volverse positivo al formar parte de la resta, llevamos á ella $+2bc$ para tercer término, cuyo cuarto debia ser el segundo del sustraendo, que no tiene semejante en el minuendo, pero con signo contrario, ó sea $-6x$.

45. *Demostracion..* Como la resta ó diferencia sumada al sustraendo debe dar el minuendo segun la definicion, toda resta algebráica debe necesariamente componerse de todo el minuendo tal cual es y de todo el sustraendo con carácter opuesto, para que lo destruya en la expresada suma y deje sólo el minuendo. Esto es, que en el primer ejemplo $a + b$ es la sola cantidad que, sumada con $- b$, puede dar a, pues $a + b - b = a$; y deduccion análoga puede hacerse sobre el segundo ejemplo.

Observacion. Tambien puede demostrarse análogamente á lo que dijimos sobre la suma (43), diciendo si de a queremos restar $b - c$, y prescindimos momentáneamente de c, evidentemente que la resta no podrá ser otra que $a - b$; pero como el verdadero sustraendo es menor que b en la cantidad c, la resta $a - b$ será menor de lo que debe ser en la cantidad c (A. 75), y la verdadera será, por lo tanto, $a - b + c$.

ARTÍCULO IV.

MULTIPLICACION ALGEBRÁICA.

46. El problema general de la multiplicacion algebráica se divide en tres tambien generales: 1.° Multiplicar un monomio por otro. 2.° Multiplicar un polinomio por un monomio ó al contrario. Y 3.° Multiplicar un polinomio por otro.

47. Regla 1.ª *Para multiplicar un monomio por otro, hay que atender á cuatro cosas: á signos, á coeficientes, á letras y á exponentes. Relativamente á signos, si los factores lo tienen igual, el producto será positivo, y si lo tienen desigual el del producto será negativo. Con respecto á coeficientes se multiplicarán por las reglas aritméticas, considerando por supuesto la unidad por coeficiente al que no tenga ninguno. En cuanto á las letras, el producto tendrá todas las de los factores, sin repetirlas aunque estén en ambos; y finalmente, con relacion á los exponentes, los de las letras que sólo figuren en un factor, serán iguales en las del producto, y las letras que figuren en ambos factores, tendrán en el producto un exponente igual á la suma de los exponentes que tengan en los factores, suponiéndosele por supuesto* 1 *á la que no tenga exponente.*

Ejemplos. 1.° $3a^2bc \times 2ax = 6a^3bcx.$

2.° $4a^5b^2cx \times - 2a^2b^3cs = - 8a^7b^5c^2xs.$

48. *Demostracion.* La parte de la regla correspondiente á los signos, ó sea que $+ \times +$ ó $- \times -$ dan de producto $+$, y $+ \times -$ ó $- \times +$ dan de producto $-$, se funda en la definicion de la multiplicacion (Aritmética, 84), de que el producto ha de guardar igual relacion con el multiplicando, que el multiplicador con la unidad, naturalmente positiva, á que se refiere tal definicion. Pues en efecto, si el multiplicando es positivo, y positivo tambien el multiplicador, el producto tendrá que ser positivo, ó sea lo mismo que el multiplicando, pues que el multiplicador es de igual carácter que la unidad positiva. Si tienen los dos factores el signo negativo, el producto deberá ser positivo, ó sea de carácter contrario al multiplicando, pues que el multiplicador lo es tambien á $+ 1$. Si el multiplicando es negativo y positivo el multiplicador, el producto tiene que ser negativo, ó sea igual al multiplicando, porque el multiplicador lo es á la unidad. Y, finalmente, si el multiplicando es positivo, y negativo el multiplicador, el producto tendrá que ser negativo ó contrario al multiplicando como el multiplicador lo es á $+1$.

La parte de la regla correspondiente á los coeficientes, letras y exponentes, se demuestra descomponiendo el multiplicando y multiplicador de cualquier ejemplo en los factores de que se compongan. Así, en el ejemplo anterior 1.°, tendremos que $3a^2bc \times 2ax = 3 \times a \times a \times b \times c \times 2 \times a \times x$; y como el órden de los factores no altera el producto (Aritmética, 91), será igual á $3 \times 2 \times a \times a \times a \times b \times c \times x$, en cuya expresion, verificando las operaciones indicadas que sean posibles, resultará $6a^3bcx$, que es el producto hallado, segun la regla que queda demostrada.

49. Regla 2.ª *Para multiplicar un polinomio por un monomio (y lo mismo un monomio por un polinomio, pues que se podrá tomar por multiplicador siempre el monomio), se multiplica el monomio multiplicador por cada uno de los términos del multiplicando, segun la regla 1.ª anterior, sin que quepa simplificacion en el producto si el multiplicando está como debe, sin términos semejantes.*

50. Conviene ordenar el multiplicando para que el producto resulte tambien ordenado.

Ejemplos. 1.° $(a + b) \times c = ac + bc$.

2.° $(3a^2b^3c - 4a^3 - 5xa) \times 2abc$, y ordenando el multiplicando $(-4a^3 + 3a^2b^3c - 5xa) \times 2abc =$
$= -8a^4bc + 6a^3b^4c^2 - 10a^2bcx$.

51. *Demostracion.* Demostrada la regla de la multiplicacion de un monomio por otro, la de un polinomio por un monomio descansa en la misma demostracion, y en la que en la Aritmética dimos para multiplicar un número compuesto de varias cifras por un dígito (99); pues lo que se hace es multiplicar todas las partes del multiplicando por el multiplicador; no habiendo necesidad de empezar la multiplicacion por la derecha, porque los productos de las letras no producen aumento para el producto de otras á la manera que los números. Y en cuanto á que la ordenacion del multiplicando, produce necesariamente que el producto resulte ordenado, es evidente, pues, que la letra ordenatriz aparecerá en el producto en cada término con su exponente aumentado con tantas unidades como tenga en el multiplicador, y por lo tanto los términos resultarán con semejante ordenacion; de lo que tambien se deduce evidentemente que el producto no puede tener términos semejantes si no los tenia el multiplicando, como no debe tenerlos. Luego toda la regla queda demostrada.

52. *Observacion.* Puede demostrarse la segunda regla tambien diciendo, si por ejemplo tenemos que multiplicar $a + b$ por m, áun por la definicion ménos general (Aritmética, 86) tendremos que tomar á $a + b$ tantas veces como unidades valga m, y por lo tanto, el producto podremos representarlo de esta manera: $a + a + a + \ldots\ldots + b + b + b + \ldots\ldots$ ó sea a, tomado m veces por sumando, mas b tomado otras m veces; y como esa expresion equivale, segun la definicion del coeficiente, á $ma + mb = am + bm$, resulta tambien la regla demostrada de esta manera.

53. *Escolio.* Como de lo expuesto se deduce que todos los factores de un monomio multiplicador aparecen en todos los términos de un producto, siempre que convenga (que será muchas veces en el Algebra), se podrá á un polinomio, cuyos términos tengan un factor comun, extraérselo y ponerlo como multiplicador, lo que se llama *sacar el factor comun.*

Así, en lugar de	$3a^2b + xb + 5asb$,
se podrá poner	$(3a^2 + x + 5as)\,b$;
y en lugar de	$5a^3bs + 15a^2z + 20a^2$,
se podrá poner	$(abs + 3z + 4)\,5a^2$,
y tambien	$abc - b = (ac - 1)\,b$,
y tambien será	$-a^3 + a^2 = (-a + 1)\,a^2$.

54. Regla 3.ª *Para multiplicar un polinomio por otro, se multiplica cada término del más pequeño, que se tomará como multiplicador por todo el multiplicando, segun las reglas 1.ª y 2.ª, y se tendrán productos parciales que, sumados, darán el total; el cual se simplificará si tiene términos semejantes, operacion que se conseguirá más fácilmente si antes de la multiplicacion se ordenan los factores y al escribir los productos parciales se procura que los términos semejantes queden unos inmediatamente debajo de los otros.*

Ejemplos.

1.º $(a + b) \times (c - m) = ac + cb - am - bm$

2.º
$$\begin{array}{l} 6a^5b^2 + 4a^4bc + 2a^3c^2 - abc \\ \times \qquad\qquad 2a^2b - ac \\ \hline 12a^7b^3 + 8a^6b^2c + 4a^5bc^2 - 2a^3b^2c \\ \qquad - 6a^6b^2c - 4a^5bc^2 - 2a^4c^3 + a^2bc^2 \\ = 12a^7b^3 + 2a^6b^2c - 2a^4c^3 - 2a^3b^2c + a^2bc^2. \end{array}$$

3.º $(3a^4bc + 5a^5mt - 2a^2b^2m + b)\,a^2 - a^3$,

ó
$$\begin{array}{l} (5a^5mt + 3a^4bc - 2a^2b^2m + b) \\ \times \qquad\qquad - a^3 + a^2 \\ \hline = - 5a^8mt - 3a^7bc + 2a^5b^2m - a^3b + \\ \quad + 5a^7mt + 3a^6bc - 2a^4b^2m + a^2b = \\ \hline = 5a^8mt + 5a^7mt - 3a^7bc + 3a^6bc + 2a^5b^2m - 2a^4b^2m - a^3b + a^2b. \end{array}$$

Explicacion. En el primer ejemplo hemos hecho la posible multiplicacion de todos los términos de un factor por los del otro, y el producto no ha admitido simplificacion.

En el segundo ejemplo hemos multiplicado primeramente todo el multiplicando que ya aparece ordenado por $2a^2b$, y despues por $-ac$, y puestos los dos productos parciales uno debajo del otro, nos ha sido muy fácil deducir el producto total ya simplificado, colocando el segundo producto de modo que sus términos quedasen debajo de los semejantes del primero.

La simplificacion ha consistido en poner en lugar de $+ 8a^6b^2c - 6a^6b^2c$ el equivalente ó sea su diferencia $2a^6b^2c$. En destruir por completo el tercer término del primer producto parcial y el segundo término del segundo producto parcial, por ser idénticos y de contrario signo. Y finalmente, añadimos al total todos los términos sin semejantes con atencion á la ordenatriz a.

En el tercer ejemplo hemos hecho la multiplicacion como en el primero, y el producto total ha sido la suma de los dos parciales sin ninguna simplificacion, y hemos necesitado intercalar entre cada dos términos del uno, cada uno del otro para que el resultado total quedase ordenado como los parciales

55. *Demostracion*. Es la misma que la de la regla 2.ª, pues que hemos multiplicado todas las partes de un factor por todas las del otro y sumado los productos parciales.

56. *Observacion*. Con marcada intencion, el ejemplo tercero lo hemos propuesto de manera que sin producir un producto total reducible llamase la atencion, por no serlo, cuando por el aspecto del multiplicador parecerá á muchos que deberia ofrecer un producto muy simplificable. Hemos querido tambien con ese multiplicador acostumbrar al estudiante á no confundir las funciones del exponente con las del coeficiente. Parece, en efecto, á primera vista, que $-a^3 + a^2$ es una espresion muy fácil de convertir en un monomio, y por lo tanto, que no está simplificada; pero si se descomponen los dos términos en sus factores, se verá que es igual á $(-a \times -a \times -a) + (a \times a)$ expresion que vale lo mismo, segun se indicó en el último ejemplo del número 54, que $(-a + 1)\,a^2$, sin que admita ninguna otra trasformacion que la simplifique.

57. *Escolio*. Por lo expuesto se deduce que, ordenados los factores, los productos parciales resultarán ordenados, y fácilmente se consigue la ordenacion del total. Pero debemos observar ademas, que el producto del primer término del multiplicando y el del último no pueden tener nunca términos semejantes en el producto total, porque el uno resulta de la multiplicacion del término del multiplicando y del término del multiplicador donde la letra ordenatriz tiene el mayor exponente, y el otro de aquellos términos de los factores en los que no se halla tal letra ó tiene el menor exponente; circunstancias ambas que no pudiendo repetirse en las demas multiplicaciones parciales, no pueda producir términos semejantes, á no ser que los tuvieran los factores por no estar simplificados.

58. No se ha tratado más que de la multiplicacion de dos expresiones ó cantidades algebráicas, una de las que figura como multiplicando y otra como multiplicador; pero las reglas dadas son aplicables á los problemas en los que sean más de dos las cantidades algebráicas que se deben multiplicar, ya sean monomios ya polinomios, si bien las multiplicaciones de estos deben hacerse sucesivas, cosa que no es indispensable en la multiplicacion de monomios.

Asi, en $4ab \times 3a^3c \times 2a^4x$, se podrá desde luego decir que 4 por 3 son 12, y por 2 son 24; y que a, y a^3, y a^4, producen a^8, y por lo tanto, que el producto es $24a^8bcx$; pero en $(a+b) \times (c+d) \times (m+n)$, no es fácil hacer simultáneamente las dos multiplicaciones, á pesar de ser tan sencillos los datos. El resultado será $ac + cb + da + db + acm + cbm + dam + dbm + acn + cbn + dan + dbn$, que evidencia la dificultad de la operacion en grandes polinomios.

59. *Escolio*. El signo de un producto de varios factores será positivo si todos los factores son positivos, ó si los negativos son en número par; y el producto será negativo si el de factores negativos fuese impar; de lo que se deduce que siempre que al objeto del cálculo convenga, se pueden mudar los signos á dos factores, pues lo mismo es $-a \times b \times c = -abc$ que $a \times -b \times c = -abc$.

60. *Escolio*. El número de términos de un producto antes de simplificarse, es igual al número de términos del multiplicando, multiplicado por el de términos del multiplicador.

Así, el de un binomio por otro será de 4, el de un trinomio por un binomio de 6, y el de tres binomios será $2 \times 2 + 4 \times 2 = 12$, como se ve en el ejemplo del núm. 58.

ARTÍCULO V.

DIVISION ALGEBRÁICA.

61. El problema general de la division de cantidades algebráicas se divide en tres tambien generales: 1.° Dividir un monomio por otro. 2.° Un polinomio por un monomio. Y 3.° Un polinomio por otro polinomio.

62. Regla 1.ª *Para dividir un monomio por otro, hay que atender, como en la multiplicacion, á signos, coeficientes, letras y exponentes. Relativamente á signos, semejantemente á la multiplicacion, si dividendo y divisor tienen igual signo positivo ó negativo, el cociente será positivo, y negativo si dividendo y divisor tuviesen diferente signo. Con respecto á coeficientes, se dividirán por las reglas aritméticas, considerando por supuesto la unidad por coeficiente al término que no tenga ninguno. En cuanto á letras, todas las del dividendo que no estén en el divisor deberán figurar en el cociente; y, finalmente, con relacion á los exponentes, toda letra del dividendo que figure en el divisor, pasará al cociente con exponente igual á la diferencia que resulte de restar el exponente de la del divisor, del exponente de la del dividendo.*

63. Las letras que tenga el divisor y no figuren en el dividendo, no pueden formar parte del cociente, y hacen la division impracticable; y tambien cuando una letra comun en el divisor y el dividendo tenga mayor exponente en aquel. En uno y otro caso la division hay que dejarla indicada, constituyendo una fraccion reducible muchas veces, y algunas tanto, que da por resultado cantidades que todavía no conocemos, como son las que están representadas por letras con exponente o y con exponente negativo, que reclaman artículo aparte, que corresponde despues del de las fracciones algebráicas.

Ejemplos. 1.° $+ 8a^4b^2c : + 2a^3b = + 4abc.$

2.° $- 10a^5b^3c : - 5ab = + 2a^4b^2c.$

3.° $- 8a^9b^3c : + 3a^9b^3 = - \frac{8}{3} c.$

4.° $+ 2a^3b^2c : - 5a^3b^2c = - \frac{2}{5}.$

Explicacion. Sólo hay que notar que en todos los cuatro ejemplos el cociente hallado, multiplicado por el divisor, da exactamente el dividendo, pues la multiplicacion de $-\frac{2}{5}$ por $5a^3b^2c$, segun regla de multiplicacion, da primero + para el producto; despues para coeficiente $\frac{2}{5} \times 5 = 2$, y como no hay letras en el cociente, el producto de él por el divisor debe tener las mismas que éste y con los mismos exponentes.

64. *Demostracion.* La parte de la regla correspondiente á los signos, se funda en la parte análoga de la dada para la multiplicacion (48), pues como el producto del cociente por el divisor debe ser igual al dividendo y consiguientemente de igual signo, cuando el dividendo y divisor sean positivos, positivo tendrá que ser el cociente, porque multiplicado por una cantidad positiva, dé un producto positivo como se supone el dividendo. Cuando dividendo y divisor sean negativos, el cociente tendrá que ser positivo, para que multiplicado por un divisor negativo, produzca un producto negativo como se supone ser el dividendo. Cuando el dividendo sea positivo y negativo el divisor, el cociente deberá ser negativo para que, multiplicado por el divisor negativo, tambien ofrezca un producto positivo como el dividendo, y, finalmente, cuando el dividendo sea negativo y positivo el divisor, el cociente tendrá que ser negativo para que, multiplicados por el divisor, dé un producto negativo como el dividendo.

La parte de la regla correspondiente á los coeficientes, letra y exponentes, se funda en que el mismo principio de que el cociente multiplicado por el divisor debe dar el dividendo, pues el coeficiente del cociente debe ser el cociente de dividir el coeficiente del dividendo por el divisor, pues que multiplicado por éste, debe dar aquel. Análogamente toda letra del dividendo que no esté en el divisor debe figurar en el cociente para que resulte en el producto de tal cociente por el divisor y el exponente de cada una que figure en dividendo, y divisor debe ser la diferencia de los exponentes que lleve en ambos términos, única manera de que al multiplicar el cociente por el divisor, y sumar consiguientemente los exponentes de las letras comunes, resulten iguales á las que lleva el dividendo.

Finalmente, la division es impracticable cuando el divisor tenga alguna letra que no figure en el dividendo, porque fuere cual fuere el cociente, dicha letra deberia aparecer en el producto por el divisor, y no resultando igual al dividendo, probaria no ser exacto ni verdadero el cociente. Y del mismo modo es impracticable la division, cuando alguna letra del dividendo tiene menor exponente que la igual del divisor; pues ningun cociente, tenga ó no tenga tal letra, multiplicado por tal divisor, puede dar el dividendo supuesto. Luego queda demostrada completamente la regla y sus adiciones.

65. Regla 2.ª *Para dividir un polinomio por un monomio, se ordena primeramente el dividendo con relacion á las potencias (descendentes más bien que ascendentes) de la letra que esté repetida, en todos ó casi todos sus términos, si se quiere que el cociente resulte ordenado. En seguida, por la regla anterior, primera, se divide el primer término de la izquierda del dividendo por el divisor, y se tendrá el primero del cociente. Se multiplicará éste por el divisor, y se restará del dividendo, y de su parte restante despues de reducir los términos que puede tener semejantes, se dividirá el primer término por el divisor, y se obtendrá el segundo del cociente. Y asi se continuará hasta que no quede en el dividendo ningun término que dividir, ó hasta que alguno no sea divisible por el divisor, en cuyo último caso, la parte indivisible forma el numerador de un quebrado, cuyo denominador será el divisor; quebrado que completará el cociente.*

Ejemplos.

1.° $(ac + bc) : c = a + b.$

2.° $$\begin{array}{l|l} -\,8a^4bc + 6a^3b^4c^2 - 10a^2bcx & 2abc \\ \hline +\,8a^4bc - 6a^3b^4c^2 + 10a^2bcx & = -\,4a^3 + 3a^2b^3c - 5xa. \end{array}$$

3.° $$\begin{array}{l|l} 4a^2b^2c - 8a^3bc + 4a^2x & 2abc \\ \hline -\,4a\,b^2c + 8a^3bc & = 2a^3b - 4a^2 + \frac{4a^2x}{2abc}. \end{array}$$

Explicacion. En el ejemplo primero hemos dividido á simple vista ac por c., obteniendo a para primer término del cociente, que multiplicado por c, nos dió ac, y restado del dividendo resultó de diferencia bc, (porque $ac + bc - ac = bc$); para restar ac de $ac + bc$, no hay más que cambiarle el signo. Despues, el resto bc lo dividimos por c y nos dió b, y por lo tanto, el cociente completo $a + b$.

En el segundo ejemplo dividimos análogamente cada término del dividendo por el divisor para hallar cada uno del cociente, que con el signo cambiado para restar destruyó uno del dividendo.

En el tercer ejemplo obramos del mismo modo; pero al llegar al tercer término del dividendo, como no tenia todas las letras que tiene el divisor, suspendimos la division y completamos el cociente, como previene la regla, por un quebrado que no simplificamos, por no haber tratado todavía de la simplificacion de las fracciones.

66. *Demostracion.* La regla de la division algebráica que vamos á demostrar se funda como la primera de un monomio por otro, en las correspondientes dadas y demostradas en la multiplicacion. En efecto, como el dividendo puede considerarse como producto del divisor por el cociente, si el dividendo está ordenado, su primer término representará el producto del divisor por el primero del cociente (57).

Luego en el ejemplo segundo, $-\,8a^4bc$ es el producto de $2abc$ por el primer término del cociente que se busca, y éste no puede evidentemente ser otro que el correspondiente á la division de $-\,8a^4bc$ por $2abc$, que segun la regla primera ya demostrada, es $-\,4a^3$; luego éste será el primer término del cociente deseado. Multiplicado por el divisor, dará $-\,8a^4bc$; pero para restarlo del dividendo no habrá que hacer más que cambiarle el signo, con lo que destruirá el primer término del dividendo. Y como de este se habrá restado el producto del divisor por el primer término del cociente, lo que resta del dividendo se podrá considerar como producto del divisor por el segundo y demás términos que falten por hallar del cociente. Y como el primer término de tal resto del dividendo será aquel en que la letra ordenatriz tenga mayor exponente (despues del primer término ya dividido), se podrá considerar, por lo tanto, como el producto del divisor por el segundo término del cociente; y por consideraciones análogas á las de la division parcial anterior, dijimos que $6a^3b^4c^2 : 2abc = 3a^2b^3c$ que seria el segundo término del cociente. Procedimos como con el primero, y hallamos análogamente el tercer término del cociente $-\,5xa$, cociente que es exacto, porque no deja residuo, y que es el verdadero, porque multiplicado por el divisor en tres veces, ha dado las tres partes ó términos de que se compone el dividendo.

Y en el tercer ejemplo, como al querer hallar el tercer término del cociente, dividiendo el tercero del dividendo por el divisor, vimos que la division era impracticable (63), no pudimos completar el cociente deseado, más que poniendo el resíduo con la division indicada, ó sea en forma de quebrado, que aunque reducible, por tener en sus términos factores comunes, no simplificamos, porque todavía no nos hemos ocupado de las fracciones algebráicas.

Luego la regla segunda queda demostrada.

67. Regla 3.ª *Para dividir un polinomio por otro, se ordenan ambos, como se dijo para el dividendo en la regla segunda. En seguida se divide por la primera el primer término del dividendo por el primero del divisor, y se tiene el primero del cociente. Se multiplica éste por todos los términos del divisor, y el producto se resta del dividendo, lo que se consigue con sólo mudar los signos á todos sus términos, y reducir los que resulten semejantes con los del dividendo; del resto de éste, ordenándolo si en virtud de la anterior resta no resultase ordenado, se divide el primer término por el primero del divisor, y se obtendrá el segundo del cociente. Y procediendo de una manera análoga que con el primer término, se irán deduciendo todos los términos que deba teñer el cociente, hasta que se haya hallado por resto del dividendo* o, *ó hasta que alguno de sus términos no sea divisible, en cuyo caso, como en la regla segunda, se dejará la parte indivisible en forma de quebrado para completar el cociente.*

Ejemplos.

1.º

$$
\begin{array}{l|l}
ac + cb - am - bm : \ldots\ldots & c - m \\ \cline{2-2}
-ac \qquad + am & a + b \\
\qquad - cb \qquad + bm & \\ \hline
\end{array}
$$

2.º

$$
\begin{array}{l|l}
12a^7b^3 + 2a^6b^2c - 2a^4c^3 + 2a^3b^2c + a^2bc^2 & 2a^2b - ac \\ \cline{2-2}
-12a^7b^3 + 6a^6b^2c & 6a^5b^2 + 4a^4bc + 2a^3c^2 - abc
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
1.^{er}\ \text{resto.} & +8a^6b^2c - 2a^4c^3 + 2a^3b^2c + a^2bc^2 \\
& -8a^6b^2c + 4a^5bc^2. \\ \hline
2.^{o}\ \text{resto.} & 4a^5bc^2 - 2a^4c^3 + 2a^3b^2c + a^2bc^2 \\
& -4a^5bc^2 + 2a^4c^3 \\ \hline
3.^{er}\ \text{resto.} & 2a^3b^2c + a^2bc^2 \\
& -2a^3b^2c - a^2bc^2. \\ \hline
\end{array}
$$

3.º

$$
\begin{array}{l|l}
-5a^8mt + 5a^7mt - 3a^7bc + 5a^7mt - 5a^6mt + 3a^6bc : & -a^3 + a^2 \\ \cline{2-2}
+5a^8mt - 5a^7mt + 3a^7bc - 5a^7mt + 5a^6mt - 3a^6bc & 5a^5mt - 5a^4mt + 3a^4bc
\end{array}
$$

Explicacion. En el primer ejemplo, siguiendo la regla, no hemos necesitado gran trabajo para restar á todas las partes del dividendo los productos de todas las del cociente por el divisor.

En el segundo, hemos necesitado despues de cada resta, para mayor claridad, ordenarla.

Y en el tercer ejemplo, á pesar de lo irregular al parecer del divisor, los productos de todas las partes del cociente por el divisor se han ido restando de todas las partes del dividendo, sin necesidad de ordenar los restos para continuar la division, pues que resultaban ordenados.

68. *Demostracion.* Es casi idéntica que la de la regla segunda, pues que el ser el divisor polinomio no obliga á otra cosa que á multiplicar cada término del cociente por todos los del divisor, lo que produce muchas veces que á pesar de estar el divisor ordenado como el dividendo, los restos que resultan en éste no aparecen completamente ordenados. Pero siempre es fácil la ordenacion, y siempre el dividendo representará el producto del cociente por el divisor, y los restos de aquel serán los productos del divisor por las partes que falte que hallar del cociente; luego el procedimiento que exige la regla descansa sobre los mismos principios que la segunda, y queda, pues, esta tercera igualmente demostrada.

69. *Observacion.* Diremos, para que sirva de ejercicio de la inteligencia, que la ordenacion completa del dividendo y divisor no es indispensable cuando ambos tienen pocos términos, pues como el dividendo debe considerarse siempre como producto del divisor por el cociente, más el residuo, si lo hubiere, fácilmente se conocerá cuáles son los términos que compone éste, por no ser divisible por ninguno del divisor, y cuáles los que representen productos de términos del divisor por otros del cociente.

Así, si tenemos $(ma + nb + mb + xb + na) : (n + m)$, sin necesidad de ordenacion, veremos que ha de haber un residuo de xb, porque no es término divisible por n ni por m, y veremos fácilmente tambien que aunque ma no es divisible por n, lo es por m, y por m tambien mb, y que aunque nb no es divisible por m, lo es por n, y por n tambien na, y por lo tanto, el cociente, se hallará diciendo, $ma : m = a$, y $n \times a = na$, y $m \times a = ma$, cuyos dos productos al restarlos del dividendo dejarán este reducido á $nb + mb + xb$; y dividiendo nb por n, dará b para segundo término del cociente, que multiplicado por n y por m, dará los productos nb y mb, que restados del dividendo lo dejarán reducido á xb, que será el residuo.

Lo mismo sucederia con el dividendo sin ordenar $n^2a + n^2s + mna + mns + n^2b + mnb + n^2c + mnc$; y el divisor $m + n$, aunque admiten la ordenacion siguiente: $(mna + mnb + mnc + mns + n^2a + n^2b + n^2c + n^2s) : (m + n)$, y tambien: $(n^2a + n^2b + n^2c + n^2s + mna + mnb + mnc + mns) : (n + m)$; pero con cualquiera de las dos ordenaciones, y sin ninguna, se hallará muy fácilmente el cociente $na + nb + nc + ns$, aunque en sus términos salgan con diferente órden. Debemos, sin embargo, advertir que como los términos del dividendo mna, mnb, mnc, mns, son divisibles lo mismo por m que por n, si tomamos por primer término del divisor á n, los cocientes de dividir por n, los cuatro términos dichos, serán $ma + mb + mc + ms$, y despues una série interminable de términos, que se destruirán de cuatro en cuatro por sus signos contrarios, á consecuencia de considerar que mna es el producto de n, término del divisor, y de uno del cociente sin tal letra; cuando el hallarse esta repetida en todos los términos del dividendo y en la mitad de ellos con esponente ^{2}, dice claramente que debe figurar en todos los del cociente; y el hallarse la m en el dividendo sin esponente y tambien en el divisor, revela que no debe figurar en el cociente.

70. Por lo expuesto en el anterior número, puede sentarse, aunque sin ventaja práctica notable, que el dividendo y divisor debe ordenarse en lo posible con relacion á la letra más repetida, porque de lo contrario, no sólo la operacion será más difícil, sino que puede producir un cociente que no sea el verdadero, si por ser algunos términos del dividendo divisores por dos ó más del divisor, se toma por primero de este uno cuyo producto por otro del verdadero cociente no sea el que parece represente el primero del dividendo; pero que cuando dividendo y divisor sean de pocos términos y cada uno de aquel no sea divisible más que por uno de este, no es indispensable la ordenacion, aunque fácil es hacerla, y puede efectuarse la division hallando cada término del cociente por la division de cada uno del dividendo por el del divisor que lo divida, pero efectuando la correspondiente multiplicacion del cociente por el divisor, por ver si produce el dividendo, pues si no lo produce, habrá que seguir en todo la regla.

Asi, $(n^2 - m^2) : (m + n) = n - m$; porque $(m + n)(n - m) = n^2 + nm - nm - m^2 = n^2 - m^2$; pero $(n^2 + m^2) : (m + n)$ no da de cociente $m + n$; porque $(n + m)(n + m) = n^2 + nm + nm + m^2 = n^2 + 2nm + m^2$, y haciendo la division segun la regla, dará:

$$
\begin{array}{lrr|l}
 & m^2 + & n^2 & m + n \\
\cline{4-4}
 & -m^2 - mn & & m - n \\
\hline
\text{Primer resto.} & -mn + & n^2 & \\
 & +mn + & n^2 & \\
\hline
\text{Residuo} & & 2n^2 &
\end{array}
$$

pues $(m + n)(m - n) = m^2 - n^2$,

y con el residuo de $+2n^2$ dará el dividendo $m^2 + n^2$, porque $m^2 - n^2 + 2n^2 = m^2 + n^2$.

71. El número de términos de un cociente no puede preveerse cuál será, pues aunque el dividendo sea un producto completo de su divisor y su cociente exacto, y dijimos que el de términos de un producto, se deduce del número de términos de sus factores (60), la deduccion se hace relativamente al producto sin simplificar como allí se dijo; pero un dividendo, considerado como producto, no se puede saber cuantos términos puede haber perdido por la simplificacion.

72. La prueba de las cuatro operaciones principales de que nos hemos ocupado, son las mismas teóricamente que las de la Aritmética. Sin embargo, como la adicion no es en realidad más que una simplificacion, no admite más prueba que la rectificacion ó examen de lo operado. Y como la multiplicacion de un polinomio por otro, siendo ambos grandes, es tan susceptible de errores al repetirla cambiado el órden de los factores, lo mejor es repetir las multiplicaciones parciales, y cuando uno de los factores sea pequeño, dividir el producto por el tal factor, y ver si da el otro. Y la prueba de la division es evidentemente la multiplicacion del cociente por el divisor. Para ello, los ejemplos que hemos puesto de la division, sirven de prueba á los que pusimos en la multiplicacion, y por el contrario.

ARTÍCULO VI.

FRACCIONES Ó QUEBRADOS ALGEBRÁICOS.

73. Los quebrados literales ó algebráicos no pueden tener otro orígen que la division impracticable de una cantidad algebráica por otra; casi lo mismo que sucede á los quebrados numéricos, pues aunque éstos dijimos en la Aritmética (177), que pueden tambien nacer de la inconmensurabilidad ó inumerabilidad exacta de algunas cantidades indeterminadas al convertirlas en números; como el Algebra prescinde de todo valor numérico, el quebrado literal no puede tener otro orígen que la indivisibilidad de una cantidad algebráica por otra. Ademas, en la misma Aritmética (179, observacion 4.ª), demostramos que en realidad el orígen de todo quebrado es una division más ó ménos impracticable.

74. Todo quebrado literal puede, por lo tanto, con más razon que el numérico considerarse como una division indicada del numerador por el denominador, y generalizando esa verdad como lo hicimos y demostramos en Aritmética en un teorema fundamental (179), la estableceremos sin necesidad de demostracion para los quebrados literales, y es que *todo quebrado*, no sólo como va dicho, *es equivalente* á la *division del numerador* *por el denominador*, sino que tambien *toda division puede considerarse como un quebrado, cuyo numerador es el dividendo, y cuyo denominador es el divisor; quebrado que naturalmente será impropio ó compuesto de una parte entera y otra fraccionaria á veces, si el dividendo es divisible por el divisor, aunque no de cociente exacto.*

75. Todas las propiedades y todas las reglas que demostramos sobre los quebrados numéricos son aplicables á los literales, pues descansan en el principio fundamental expuesto en el número anterior y en su principal consecuencia de que el valor de un quebrado no se altera, aunque se multipliquen ó dividan sus dos términos por igual cantidad.

76. Tales propiedades pueden demostrarse de una manera más general por el Algebra que por la Aritmética, por lo que demostraremos algebráicamente, para que sirva de guia, la propiedad que acabamos de expresar; y como la aplicacion de las reglas para la resolucion de los problemas sobre quebrados, siendo estos literales, se hace de un modo distinto, aunque semejante que siendo numéricos, tambien aplicaremos al Algebra tales reglas; y finalmente, nos fijaremos especialmente en la cuestion de signos, y en ciertos resultados especiales que ofrece la simplificacion de un quebrado.

77. Teorema. *Un quebrado no se altera multiplicando ó dividiendo sus dos términos por un mismo número.*

Esto es, que $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a:c}{b:c}$.

Demostracion. Llamando m al valor que represente el quebrado $\frac{a}{b}$ sea cual sea, tendremos la igualdad $\frac{a}{b} = m$. Y como todo dividendo es igual al cociente multiplicado por el divisor, tendremos que $a = mb$; y multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la cantidad c, la igualdad subsistirá y será $ac = mbc$ ó $ac = bc \times m$, y dividiendo los dos miembros por bc, tendremos $\frac{ac}{bc} = \frac{bc \times m}{bc}$, segundo miembro que evidentemente es igual á m; porque m multiplicado y dividido por la misma cantidad, dará m. Pero m lo hemos supuesto igual $\frac{a}{b}$, luego $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Y si en la igualdad $\frac{a}{b} = m$ que da $a = mb$, dividimos los dos miembros por c, será $\frac{a}{c} = \frac{bm}{c} = \frac{b}{c} \times m$, y si ahora los dos miembros los dividimos por $\frac{b}{c} = b : c$, será $\frac{a:c}{b:c} = \frac{b:c}{b:c} \times m = m$, y como $m = \frac{a}{b}$ será $\frac{a:c}{b:} = \frac{a}{b}$. Luego el teorema queda demostrado.

En esta propiedad se funda la simplificacion de los quebrados literales y su reduccion á un comun denominador, como en la Aritmética.

78. *Para simplificar un quebrado literal*, se le quitan ó suprimen los factores que tenga comunes, pues que equivaldrá á dividir sus dos términos por dichos factores.

Ejemplos. 1.° $\frac{8a^4b^2c}{10a^5b^3} = \frac{2 \times 4 . a^4 . b^2 c}{2 \times 5 . a^4 . a . b^2 . b} = \frac{4c}{5ab}$.

2.° $\frac{4a^4 - 8a^6b}{2a^3 + 2a^6bc} = \frac{2 \times 2 . a^3 . a - 2 . 4a^3 . a^3 . b}{2a^3 + 2 . a^3 . a^3 . b . c} = \frac{2a - 4a^3b}{2a^3bc}$.

Explicacion. En el primer ejemplo hemos suprimido los factores comunes $2a^4$ y b^2, ó sea dividido los dos términos por $2a^4b^2$; y en el segundo ejemplo hemos suprimido los factores 2 y a^3, únicos comunes, pues aunque parece que lo es b, porque figura el numerador y denominador, no es factor comun de los dos términos, porque por él no es divisible ni $4a^5$ ni $2a^5$, ni por lo tanto las cantidades de que esos términos forman parte.

79. *Para reducir quebrados literales á un comun denominador*, se multiplican algebráicamente los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los demas, ó se determina el mínimo comun múltiplo de los denominadores y ese será el comun de los nuevos quebrados, cuyos numeradores serán los productos de cada uno de los numeradores propuestos por los cocientes de las divisiones del mínimo comun múltiplo por cada uno de los denominadores dados; pues no se hace otra cosa que multiplicar los dos términos de cada quebrado por una misma cantidad.

80. El mínimo comun múltiplo de varios monomios algebráicos es un término cuyo coeficiente numérico será el mínimo comun múltiplo aritmético de los coeficientes de los monomios dados, y cuyas letras serán todas las que tengan los monomios sin repetirlas, aunque algunas entren en varios; pero cada una con el mayor exponente con que figure en ellos; pues ese monomio resultante será evidentemente divisible por los propuestos y será el mínimo dividendo, porque otro es que faltare alguna letra ó en el que el coeficiente numérico fuera menor que el mínimo comun múltiplo de los coeficientes propuestos, no sería divisible por los monomios dados.

Así, el mínimo comun múltiplo de $2a^5b^2$ y de $4abc$, es $4a^5b^2c$, que los dividirá, y otro menor, por ejemplo, $3a^2b^2c$, ó $4a^5b$, ó $2a^3b^2$ no los dividiria.

Ejemplos de reduccion de quebrados literales á un comun denominador:

1.° $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ y $\frac{m}{n} = \frac{adn}{bdn}$ y $\frac{cnb}{bdn}$ y $\frac{mdb}{bdn}$.

2.° $\frac{n^2b}{4a^5tc}$ y $\frac{2n^2cx}{2a^3d}$ y $\frac{4n}{5ac}$.

El mínimo comun múltiplo de $4a^5tc$, de $2a^3d$ y de $5ac$, es $20a^5cdt$.

Los cocientes de dividir el mínimo comun múltiplo por los denominadores respectivos son:

$$\frac{20a^5cdt}{4a^5tc} = 5d \qquad \frac{20a^5cdt}{2a^3d} = 10a^2ct \qquad \frac{20a^5cdt}{5ac} = 4a^4dt.$$

Los productos de estos cocientes por los numeradores dados son:

$5d \times n^2b = 5n^2db \qquad 10a^2ct \times 2n^2cx = 10a^2c^2ntx \qquad 4a^4dt \times 4n = 6a^4dtn;$

luego $\frac{5n^2db}{20a^5cdt}$ y $\frac{10a^2c^2nntx}{20a^5cdt}$ y $\frac{4a^4dtn}{20a^5cdt}$, son

quebrados equivalentes á los propuestos y con igual denominador. Por el método ordinario del principio de la regla dará:

$$\frac{10a^4n^2bdc}{40a^9c^2td} \quad \frac{40a^6n^2c^3tx}{40a^9c^2td} \quad \frac{32a^8tcdn}{40a^9c^2td},$$

quebrados muy complicados, iguales á los sacados por el otro método, pues por ejemplo, $\frac{10a^4n^2bac}{40a^9c^2td} = \frac{5n^2db}{20a^5cdt}$; pero la operacion es, como se ha visto, más complicada por el método del mínimo como múltiplo.

81. *Para sumar quebrados literales*, lo mismo que los numéricos y por las mismas razones (Arit. 200, 201 y 202), se reducen á un comun denominador: si no lo tienen, se suman los denominadores, y á la suma se le pone por denominador el comun, considerando cuando algun sumando sea entero como quebrado, con la unidad por denominador.

Ejemplos.

1.° $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{cd}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{cd+cb}{bd}$.

2.° $a + \frac{c}{d} = \frac{a}{1} + \frac{c}{d} = \frac{ad+c}{d}$.

3.° $a + \frac{a^2b}{d} + \frac{t}{x} = \frac{adx}{dx} + \frac{a^2bx}{dx} + \frac{td}{dx} = \frac{adx+a^2bx+td}{dx}$.

82. *Para restar quebrados literales*, lo mismo que los numéricos, y por iguales razones (Arit. 204, 205, 206 y 207), se restan algebráicamente los numeradores, despues de darles un denominador comun si no le tuvieren.

Ejemplos. 1.° $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} = \frac{cb}{bd} = \frac{ad-cb}{bd}$.

2.° $a - \left(c + \frac{d}{b}\right) = a - \left(\frac{cb+d}{b} = \frac{a}{1} - \frac{cb+d}{b} = \frac{ab-cb-b}{b}\right.$.

83. *Para multiplicar quebrados literales*, lo mismo que los numéricos y por iguales razones (Arit. 212, 213, 214 y 215), se multiplican los numeradores y los denominadores y se tienen los términos del quebrado producto; considerando como quebrado con la unidad por denominador al factor que sea entero.

Ejemplos. 1.° $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

2.° $a \times \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$.

3.° $a^3 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{x} = \frac{a^4c}{bx}$.

84. *Para dividir quebrados literales*, lo mismo que los numéricos y por las mismas razones (Arit. 218, 219, 220, 221, 222 y 223), se multiplican en cruz, y si uno de los términos es entero, se le considera con la unidad por denominador.

Ejemplos. 1.° $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

2.° $a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a5}{b}$.

3.° $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{bc}$.

85. En los quebrados hay que considerar especialmente, á veces, como hemos visto en el ejemplo segundo del núm. 82, el signo característico de cada uno de sus términos, que suele ser diferente del que parece tener el quebrado.

En efecto, $x + \frac{a}{b}$, no es lo mismo que $x + \frac{-a}{b}$ ni que $x + \frac{a}{-b}$. Sin embargo, teniendo presente que un quebrado representa una division (74), y la regla de los signos de esa operacion (62), por la que un quebrado es positivo si sus términos son ambos positivos ó negativos, y será el quebrado negativo, si sus términos el uno es positivo y el otro negativo, fácil será determinar el carácter del resultado; y como ademas se puede cambiar los signos característicos del numerador y denominador, ó del dividendo y divisor, sin que varíe de carácter el cociente ó el valor de un quebrado, pues

$$+\frac{a}{b} = \frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b} \text{ y } -\frac{a}{b} = \frac{-a}{+b} = \frac{+a}{-b},$$

esto facilitará en todos los casos la determinacion del carácter ó signo de un resultado de operaciones de quebrados.

ARTÍCULO VII.

DEL EXPONENTE CERO Y DEL NEGATIVO.

86. Las cantidades algebráicas, ó algunas de sus partes representadas con exponente cero ó con exponente negativo, no sabemos todavía lo que valen ni cuál es su origen, y como resultan, segun veremos en seguida, de la division de cantidades algebráicas que segun la regla general son indivisibles, ó mejor dicho de los quebrados literales al simplificarlos en algunas ocasiones, con esa materia debemos terminar este capítulo.

87. Teorema. *Toda letra con exponente cero equivale á la unidad, y proviene de una division ó quebrado en el que tal letra tiene igual exponente en el dividendo que en el divisor.*

Demostracion. Si tenemos $\frac{a^5}{a^2}$, segun la regla de la division (62), lo que en realidad haremos para hallar el cociente se puede expresar por a^{5-2}. Y análogamente, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; pero como n puede ser igual á m, tendríamos $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$; y como tambien $\frac{a^m}{a^m} = 1$, será evidentemente $a^0 = 1$.

Luego queda demostrado el teorema.

88. El conocimiento del valor ó significacion de las letras con exponente cero, sirve para evitar que desaparezcan de una expresion, porque al objeto del cálculo pueda convenir su conservacion para conocer los trámites del procedimiento que se haya empleado, ó para determinar de alguna manera sinó su valor su significacion:

Así, $\frac{a^3b^3cx^2}{a^3bcx} = b^2x$; pero tambien $= a^0b^2c^0x$.

89. Teorema. *Toda letra con exponente negativo equivale á un quebrado con la unidad por numerador, y por denominador la misma letra con el mismo exponente, pero positivo; y proviene de una division ó quebrado, en cuyo denominador está tal letra con exponente mayor que en el numerador, ó que en éste no se halla.*

Demostracion. Si tenemos que dividir b^2 por b^4, la division es impracticable, segun la regla (63), y hay que dejarla indicada en forma de quebrado, simplificándolo si es posible, y será $\frac{b^2}{b^4}$. Pero como los dos términos de él son divisibles por b^2, lo simplificaremos, y nos dará $\frac{1}{b^2}$ y no $\frac{0}{b^2}$ como podrá parecer á algunos á primera vista. Pero por la misma regla de la division podémos sin inconveniente decir que $\frac{b^2}{b^4} = b^{2-4}$, y como $2-4 = -2$, resultará $\frac{b^2}{b^4} = b^{-2}$; luego $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$. Del mismo modo $\frac{a}{x} = \frac{a \times 1}{1 \times x} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{x} = a \times \frac{1}{x}$; y como tambien $\frac{a}{x} = \frac{ax}{x^2} = ax^{1-2} = ax^{-1}$; luego $a \times \frac{1}{x} = ax^{-1}$ y $\frac{1}{x} = x^{-1}$, y queda en todas sus partes el teorema demostrado.

90. El conocimiento del valor y equivalencia de las letras con exponente negativo, puede servir para poder operar con ellas, cuando por cualquier motivo se presenten en el cálculo, lo mismo que con las que tienen exponentes positivos, pues que se pueden convertir en quebrados positivos. Y tambien puede convenir para representar en forma de entero un quebrado reducible ó irreducible ó el cociente de una division impracticable.

Asi, en lugar de $\frac{a^2bs}{ab^3s^4q}$, se puede poner $ab^{-2}s^{-3}q^{-1}$; y será un cociente entero aunque equivalente al $a \times \frac{1}{b^2} \times \frac{1}{s^3} \times \frac{1}{q}$ que se conoce que es el cociente verdadero de la division propuesta, porque multiplicado por el divisor da el dividendo,

$$\text{pues } a \left(\times \frac{1}{b^2} \times \frac{1}{s^3} \times \frac{1}{q} \right) \times ab^3s^4q = \frac{a}{b^2s^3q} \times ab^3s^4q = \frac{a^2b^3s^4q}{b^2s^3q} = a^2bs.$$

No es, pues, completamente impracticable la division de un número por otro, aunque el divisor tenga letras que no estén en el dividendo, ó haya en aquel alguna con menor exponente que en éste; pero el cociente, aunque pueda dársele forma de entero, equivale á un quebrado.

CAPÍTULO III.

ECUACIONES EN GENERAL, Y EN PARTICULAR LA DE PRIMER GRADO CON UNA SOLA INCÓGNITA.

ARTÍCULO PRIMERO.

PRELIMINARES.

91. Ecuacion. *Segun indicamos (12), se llama toda igualdad en la que entran una ó varias incógnitas.* Igualdad sabemos lo que es (Aritmética 64), y tambien sus principales propiedades.

La ecuacion es el medio más general de que se vale el Algebra para resolver problemas particulares, para generalizarlos, estableciendo fórmulas que son todas ecuaciones, y para deducir múltiples leyes de la cantidad, y aprovechar sus variadas aplicaciones. Son, pues, las ecuaciones la forma más general que reviste la cantidad para todo el cálculo algebráico.

92. *Ecuacion numérica* se llama (análogamente á lo que dijimos sobre las cantidades algebráicas en general), la que tiene expresados con números todos los datos ó cantidades conocidas, y *literal* cuando algunas, aunque no sean todas las cantidades conocidas, están representadas por letras; ya sustituyendo transitoriamente á los números conocidos, para evitar algunas operaciones pesadas, ya para generalizar las reglas, ya representando cantidades indeterminadas, para deducir reglas ó leyes generales de la cantidad.

Asi, $4 + 2x = 16$, es una ecuacion numérica, y son literales $a + ax = b$, y $4 + cx^2 = m$.

93. *Grado* de una ecuacion se llama el mayor esponente que tiene la incógnita en cualquiera de sus términos despues de simplificada, ó la suma de los esponentes de las incógnitas que entran en el término de una ecuacion que tiene más; llamándose *ecuacion de primer, segundo* grado, etc., segun el que resulte de su incógnita.

Asi, $ax = b$ es una ecuacion de primer grado, y tambien $ax + z = 80$, y de segundo grado $ax^2 + b = m$, y $az^2 + x = 100$, y $zx + b = q$; pero $ax = \frac{b}{x}$ y $ax = \frac{b}{z}$, aunque parezcan de primer grado, como simplificadas, segun despues sabremos mejor, dan respectivamente $ax^2 = b$, y $axz = b$, son de segundo grado

94. *Identidad* se llama toda ecuacion ó igualdad cuyos miembros son exactamente idénticos; y tambien se llama identidad la ecuacion ó la igualdad literal, que simplificada, resulta con miembros idénticos (y áun la numérica susceptible de fácil simplificacion), y cuya propiedad característica que le distingue de la ecuacion, es que en ella, sea cuales sean los valores que se atribuyan á las letras, resulta siempre con ellos una identidad numérica, al paso que en la ecuacion sólo atribuyendo á la incógnita un valor, ó cierto número limitado de valores, produce la identidad numérica.

Así, son identidades evidentemente $8+2=8+2$, y $a-b=a-b$ y $ax-c=ax-c$; pero tambien lo es $4ax=\frac{16a^3x}{4a^2}$, porque simplificándola, efectuando la division indicada en su segundo miembro, produce $4ax=4ax$, en la que es evidente que sea cual sea el valor que se suponga á a y á x, resultará siempre identidad numérica, y en la ecuacion, por ejemplo, $4x=24$, sólo siendo $x=6$ se convertirá la ecuacion en identidad.

95. *Valores* de las incógnitas son aquellos números que, sustituidos por ellas en una ecuacion, la convierten en una identidad, diciéndose que tales valores *satisfacen* ó *verifican la ecuacion;* operacion que constituye la prueba de que el signo de igualdad es una verdad; y como despues sabremos, prueba tambien de los problemas algebráicos. Tales valores de la incógnita son dos en las ecuaciones de segundo grado, y se llaman las *raices de la ecuacion.*

96. *Resolver una ecuacion* es determinar el valor ó los valores de las incógnitas que entran en ella y que la satisfacen ó verifican, llamándose la ecuacion determinada si con un solo valor ó número limitado de valores de la incógnita, se verifica, é indeterminada en el caso contrario.

97. A la resolucion de una ecuacion tiene evidentemente que precederle su *planteo*, que en todos los ejemplos citados hemos supuesto ya exactamente hecho, y que consiste en traducir un problema en una ó varias ecuaciones ligadas entre sí, pues deben ser tantas si es posible, como incógnitas tenga el enunciado; prévia operacion, la más difícil acaso que encierra el Algebra, y por lo que exige artículo separado.

98. Tambien debe preceder á la resolucion de una ecuacion su simplificacion, porque sin ella, como veremos despues, no se puede siempre fácilmente saber cuál es su grado, ni qué regla, por lo tanto, debe seguirse para su resolucion; simplificacion que se llama *preparacion*, y que exige tambien artículo separado.

99. Como tanto la preparacion de una ecuacion, cuanto su resolucion y áun tambien en cierto modo su planteo, se fundan en el principio de que dos ecuaciones son equivalentes y sustituibles una por otra, cuando, aunque tengan diferentes cantidades conocidas, las incógnitas tienen necesariamente el mismo valor, la demostracion de ese principio generalizado á los casos en que existe tal equivalencia, y sus consecuencias, como bases de todo cálculo algebráico, será objeto del artículo siguiente.

ARTÍCULO II.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL PLANTEO, PREPARACION Y RESOLUCION DE LAS ECUACIONES Y DE TODO EL CÁLCULO ALGEBRÁICO.

100. Teorema. *Dos ecuaciones son equivalentes y sustituibles una por otra, porque sus incógnitas tendrán en ellas iguales valores necesariamente, si la una es el resultado de sumar, restar, multiplicar y dividir los dos miembros de la otra por una misma cantidad numérica ó literal, con tal que no sea la multiplicacion ó division por* o *ó por una cantidad en la que éntre al-*

guna incógnita; que en este caso resultará á veces una ecuacion con dos ó más valores para la incógnita, y por lo tanto, no será equivalente á la primitiva.

Demostracion. Sea la ecuacion $2x = 8$. Si esas dos cantidades son, como deben ser, realmente iguales, el valor efectivo de x tiene necesariamente que ser 4, y sustituido tal valor en la ecuacion propuesta, dará la identidad $8 = 8$.

Siendo, pues, iguales $2x$ y 8, es axiomático que, añadiéndoles iguales cantidades ó quitándoselas, los resultados serán iguales; y por lo tanto, tan igualdad será $2x = 8$, como $2x + 2 = 8 + 2$, como $2x - 2$, $= 8 - 2$; y como $2x \pm a = 8 \pm a$. Para ver si son equivalentes y sustituibles, bastará que el valor 4, que necesariamente vimos que debia tener la incógnita en la primera ecuacion, veamos si sustituido en las otras produce identidad; y vemos, en efecto, que $2 \times 4 + 2 = 8 + 2$, da $10 = 10$, y $2 \times 4 - 2 = 8 - 2$, da $6 = 6$, y $2 \times 4 \pm a = 8 \pm a$, da $8 \pm a = 8 \pm a$; luego las ecuaciones halladas son, no sólo tales igualdades ó ecuaciones, sino que son equivalentes y sustituibles una por otra, porque la incógnita no varía de valor.

Multipliquemos ahora y dividamos los dos miembros de la ecuacion propuesta, por ejemplo, por 2, y $2x = 8$, dará $2x \times 2 = 8 \times 2$, y $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$, y $2x \times a = 8 \times a$, y $\frac{2x}{a} = \frac{8}{a}$.

Como axiomático es tambien, que si dos cantidades son iguales, sus mitades y lo mismo sus terceras partes tambien deben serlo y sus duplos, etc.: todas las ecuaciones que acabamos de hallar serán realmente igualdades, y sólo necesitamos ver si son equivalentes en el sentido del valor de la incógnita; para lo que sustituiremos en ellas el valor que x tiene necesariamente en la primera ecuacion, y darán $2 \times 4 \times 2 = 8 \times 2$; la identidad $16 = 16$; la $\frac{2 \times 4}{2} = \frac{8}{2}$; la identidad $4 = 4$; la $2 \times 4 \times a = 8 \times a$; la identidad $8a = 8a$ y la $\frac{2 \times 8}{a} = \frac{8}{a}$, la identidad $\frac{8}{a} = \frac{8}{a}$.

Multipliquemos ahora los dos miembros de la ecuacion propuesta por o, y veremos ciertamente que tan igualdad es $2x = 8$, como $2x \times o = 8 \times o$; pero como ésta se aniquila, sean cual sean los valores de x, y de las otras cantidades que hay y pudiera haber en ella, esta ecuacion no puede llamarse equivalente á la propuesta, pues aunque sustituyendo en ésta por x el valor 4 da la identidad $o = o$, tambien la dará, poniendo en lugar de x, cualquiera otra cantidad que en la primera, no produciria identidad.

En cuanto á dividir los dos miembros por o, como no se aniquilan produciendo $o = o$, como acaso parezca á primera vista, y sí el *infinito*, y de esta cantidad inmensamente grande tenemos que ocuparnos por separado, bastará que digamos, para llenar esta parte de la demostracion del teorema, que tampoco produciria una ecuacion equivalente, porque lo mismo $\frac{2 \times 4}{o} = \frac{8}{o}$ producirá una identidad de dos cantidades infinitamente grandes, que $\frac{2 \times 6}{o} = \frac{8}{o}$.

Multipliquemos, por último, los dos miembros de la ecuacion propuesta $2x = 8$ por $x - 5$, y dará $2x(x - 5) = 8(x - 5)$, ecuacion que produce una identidad poniendo á x su valor 4, pues da $2 \times 4^2 - 2 \times 4 \times 5 = (8 \times 4) - 8 \times 5$, ó $32 - 40 = 32 - 40$; pero como tambien la da poniendo á x el valor de 5, pues dará $2 \times 5(5 - 5) = 8(5 - 5)$, ó $2 \times 5 \times 5 - 2 \times 5 \times 5 = 8 \times 5 - 8 \times 5$, ó $50 - 50 = 40 - 40$, ú $o = o$, no pueden tales ecuaciones $2x = 8$ y $2x(x - 5) = 8(x - 5)$ llamarse equivalentes.

Pero dice el teorema que esto sólo sucede en algunos casos, y en efecto, si multiplicamos ó dividimos los dos miembros por x, resultará una ecuacion equivalente, que no puede admitir más valor para x que 4, como puede observarse poniendo en las ecuaciones $2x \times x = 8 \times x$ y $\frac{2x}{x} = \frac{8}{2}$ todos los valores que se quieran á x, y se verá que sólo da identidad con el valor 4; luego queda el teorema demostrado.

101. *Escolio.* La multiplicacion ó division de los dos miembros de una ecuacion por una cantidad con incógnita, para tener seguridad de que produzcan otra equivalente, es menester que tal cantidad sea respectivamente divisor ó factor de algun término sin serlo de todos; pues, por ejemplo, $\frac{2x}{x} = 2$, multiplicado por x, da $2x = 2x$; y $2x = 8$, dividido por x, da $2 = \frac{8}{x}$, que, como va dicho, no admite por x más valor que 4.

102. *Advertencia.* Para indicar la equivalencia de una ecuacion con otra, usaremos en esta obra el signo de igualdad mayor que el que separe á los miembros de las ecuaciones, á fin de que, denotando que se refiere, no á la igualdad del miembro que le precede con el que le sigue, sino á la igualdad ó equivalencia de toda la ecuacion que le precede con la que le sigue, se eviten equivocaciones y se exprese más sencillamente el cálculo.

103. Quisiéramos que á grandes matemáticos se les hubiera ocurrido la indicada conveniencia de un signo de igualdad referente á dos ecuaciones, y que hubieran propuesto, por ejemplo, tres rayitas; pero en nuestra pequeñez no nos atrevemos á tanto.

104. *Corolario 1.º del teorema anterior.* En toda ecuacion se puede poner el primer miembro por segundo y el segundo por primero, sin variarles los signos, porque $2x = 8$, es equivalente á $8 = 2x$ axiomáticamente.

105. *Corolario 2.º* En toda ecuacion se puede pasar un término cualquiera de un miembro á otro, cambiándole el signo, porque $a + b = x$ será equivalente á $a = x - b$; porque esta ecuacion resulta de restar á los dos miembros de la primera b, pues $a + b - b = a$.

106. *Corolario 3.º* En toda ecuacion, el factor de todo un miembro monomio ó polinomio, podrá pasar al otro como divisor de todo él, pues $ab = x$ es equivalente á $a = \frac{x}{b}$, porque esta resulta de dividir los dos miembros de aquella por b, pues $\frac{ab}{b} = a$.

107. *Corolario 4.º* En toda ecuacion el divisor de todo un miembro monomio ó polinomio podrá pasar al otro como factor de todo él, pues $ab = x$ es equivalente á $a = \frac{x}{b}$, porque esta resulta de multiplicar los dos miembros de aquella por b, pues $\frac{x}{b} \times b = x$.

108. *Corolario* 5.° En toda ecuacion se podrán mudar los signos á todos sus términos, por lo dicho en los corolarios primero y segundo, y ademas, porque equivale la trasformacion á multiplicar los dos miembros de la ecuacion por -1.

109. *Corolario* 6.° Todo factor comun de todos los términos de un miembro de una ecuacion, puede pasar al divisor del otro, considerando si es preciso como factor del comun, la unidad en aquel en que dicho factor está sólo. Porque $ab + ac = x$ es equivalente á $b + c = \frac{x}{a}$, porque esta resulta de dividir los dos miembros de aquella por a, como en el corolario 6.° (106), y lo mismo $a + ac = x$, será equivalente á $c + 1 = \frac{x}{a}$, porque esta resulta de dividir los dos miembros de aquella por a.

110. *Corolario* 7.° Todo factor comun de todos los términos de un miembro, puede quedar en él solo, pasando de divisor del otro miembro todo lo restante de los términos de que es factor, inclusa la unidad, por cualquiera en que pueda estar solo.

Porque $a + ac = x$ es equivalente á $a = \frac{x}{c + 1}$, porque esta resulta de dividir los dos miembros de aquella por $c + 1$.

Pues $\left(\begin{array}{l|l} a + ac & 1 + c \\ \cline{2-2} a - ac & a \end{array}\right)$

111. *Corolario* 8.° Dividiendo una cantidad cualquiera que no sea o, por los dos miembros de una ecuacion, producirá otra equivalente; porque aunque no se deduzca tan directamente del teorema último (100), la misma Aritmética nos enseña que siendo los dividendos iguales y los divisores, los cocientes tienen que serlo; y lo único que algebráicamente tenemos que considerar es si la nueva ecuacion será equivalente á la primera, con relacion al valor de la incógnita, lo cual se desprende del citado teorema. Pero si el dividendo es o, la ecuacion se aniquilará y le convendrán cualesquiera valores para la incógnita, por lo que no podrá ser idéntica á la propuesta. Y áun tambien podrá suceder algunas veces que no lo sea, si en el dividendo entra una incógnita (101).

112. *Corolario* 9.° Una cantidad que está de dividendo de todo un miembro de una ecuacion, podrá pasar de dividendo del otro, porque $\frac{a}{x} = b$ es equivalente á $x = \frac{a}{b}$, pues esta resulta de dividir a por sus dos miembros, pues $a : \frac{a}{x} = \frac{ax}{a} = x$ (124).

113. *Corolario* 10. Dos ecuaciones equivalentes sumadas, restadas, multiplicadas ó divididas, ordenadamente miembro con miembro, producirán otra equivalente á ellas, porque se desprende de lo expuesto en el teorema anterior (100) y sus corolarios, pues en el caso de la mul-

tiplicacion ó division, la incógnita será divisor ó factor de algunos términos, sin serlo de todos (101).

Así, $2x = 8$ y $2x^2 = 8x$ equivalentes, lo serán tambien á $2x^2 \pm 2x = 8x \pm 8$ y á $4x^3 = 64x$ y $\frac{2x^2}{2x} = \frac{8x}{8}$.

114. Teorema. *Una ecuacion fraccionaria se convertirá en entera equivalente, multiplicando todos sus términos enteros por el producto de los denominadores que haya, y los numeradores de los términos fraccionarios por el producto de los denominadores de los demas.*

Demostracion. Si tenemos la ecuacion $a + \frac{b}{c} - \frac{mx}{2} = 30$, poniendo los términos enteros en forma de quebrados dará $\frac{a}{1} + \frac{b}{c} - \frac{mx}{2} = \frac{30}{1}$, y reduciendo ahora los quebrados á un comun denominador, con lo que quedarán iguales, será $\frac{2ac}{2c} + \frac{2b}{2c} - \frac{mxc}{2c} = \frac{60c}{2c}$, y multiplicando ahora los dos miembros por $2c$, dará $2ac + 2b - mxc = 60c$; y como esto es justamente lo que previene la regla que envuelve el teorema, éste queda demostrado, y sentada y demostrada aquella.

115. *Escolio.* Como el factor *0* aniquila la cantidad por la que se multiplica; como los términos semejantes con igual exponente y contrario signo desaparecen tambien, y las letras de un dividendo y divisor que son iguales y tienen igual exponente, desaparecen igualmente; y conviene muchas veces huir de esas desapariciones, ya para que quede más marcada la traza del cálculo algebráico, ya para buscar un resultado que, aunque no sea práctico y real, sea más explícito; ya finalmente, porque la incógnita desapareciendo termina sin ningun resultado apreciable el objeto de la ecuacion, dejaremos sentado: 1.° una letra igual de dividendo y divisor se podrá dejar en el cociente con el exponente *o* (88); 2.° un término que tiene semejante se puede evitar su desaparicion no simplificando; 3.° una letra que debe desaparecer por un factor reducido á cero, se puede evitar la desaparicion, dejando indicada la operacion que tal *o* debia producir, pues $x\,(b - b) = m + b$, puede convertirse en $x = \frac{m+b}{b-b} = \frac{m+b}{o}$, cuyo valor de x es el infinito segun veremos despues, y aniquilándola no se podria conocer.

116. *Lema.* Toda proporcion con una incógnita puede ponerse en forma de ecuacion, siempre que el primer miembro se componga del producto de los extremos, y el otro miembro del producto de los medios ó con sus miembros quebrados, teniendo por numeradores los antecedentes y por denominadores los consecuentes ó al contrario (Arit. 575 y siguientes).

ARTÍCULO IV.

PLANTEO DE LAS ECUACIONES.

117. *Plantear una ecuacion* (ó plantear un sistema de ecuaciones, si el problema tiene varias incógnitas), segun indicamos (97), es expresar por medio de números ó letras con los signos correspondientes y en forma de ecuacion ó ecuaciones, el problema que se trata de resolver.

118. El planteo, segun tambien se indicó, es la parte acaso más difícil del Algebra, y que sólo puede poseerse á fuerza de práctica, y ni áun con ella logran plantear problemas complicados los jóvenes poco inteligentes ó irreflexivos, pues es operacion que no está sujeta á una regla fija. Para que de tal pueda servir, daremos la siguiente.

119. Regla. *Para plantear una ecuacion, se considerará el problema como resuelto, llamando* x, z, *etc., á la cantidad ó cantidades desconocidas que contenga, y examinando la relacion que tales cantidades guarden con los datos conocidos, ó supuesto serlo, se verá la manera de traducir esa relacion por medio de una ecuacion* (ó varias relacionadas entre sí, y que cada una contenga una incógnita diferente, aunque tambien pueden tener las otras como sabremos despues); *ecuacion que deberá ser tal, y no, por lo tanto, simple identidad* (94).

Demostracion. No la tiene esta regla, y sólo se desprende de los artículos y ejemplos siguientes que la aclararán y comprobarán. Ejemplos que serán aritméticos los primeros, única manera de que se puede fácilmente aprender á plantear los algebráicos.

120. *Ejemplo* 1.° Se desea plantear en forma de ecuacion el sencillísimo problema aritmético siguiente:

¿Cuál será la ganancia líquida que resultará de una de 15 *talegas y de otra de* 17, *cuyos gastos para hacerlas efectivas han sido de* 11 *talegas?*

Evidentemente que si llamamos x á la ganancia líquida que buscamos, podremos formar la ecuacion $x = 15 + 17 - 11$.

121. *Ejemplo* 2.° Se desea plantear en forma de ecuacion, el tambien sencillo problema aritmético siguiente:

Con una ganancia de 34 *talegas, otra de* 25 *y otra de* 37; *y gastos en un sentido de* 9, *otros en otro sentido de* 15, *se quiere saber á* CUÁNTO *les tocará á cada uno de los cinco socios que componen una compañía ó empresa.*

Si llamamos x la cantidad que buscamos, ésta deberá ser igual á la suma de todas las ganancias, ménos la suma de todos los gastos, dividida la diferencia por 5; luego la ecuacion será $x = \frac{(34 + 25 + 37) - (9 + 15)}{5}$.

122. *Ejemplo* 3.° Se desea plantear en forma de ecuacion el sencillo problema algebráico siguiente: *¿Cuáles serán los dos números cuya suma sea* 42 *y su diferencia* 12?

Lo primero que debemos observar es, que aunque el problema aparece con dos cantidades desconocidas, la ecuacion puede plantearse con una sola incógnita, pues conocida cualquiera de las dos, como se conoce la suma y la diferencia de ambas, fácil será por una resta determinar la otra. Llamemos, pues, x al número menor que se busca, y como sabemos que difiere del otro en 12, el número mayor será evidentemente $x + 12$; y como tambien sabemos que la suma de ambos es *igual* á 42, podremos formar la siguiente ecuacion: $x + x + 12 = 42$; y tambien llamando z al mayor, $z + z - 12 = 42$.

Para plantear este problema generalizándolo, llamariamos s la suma y d la diferencia, y plantearíamos cualquiera de las dos ecuaciones siguientes:

$$x+x+d=s \quad \text{ó} \quad z+z-d=s.$$

123. Ejemplo 4.° *Se desea saber cuáles son los tres números de los que se sabe que el 1.°, más la tercera parte del 2.°, más el 3.°*, componen 23; que el *duplo del 2.°, ménos el 1.°, más el 3.°*, dan 30, y que el *triplo del 1.°, más el 3.°, ménos el duplo del 2.°*, componen 10.

Desde luego vemos que el problema tiene tres cantidades desconocidas, que desde luego podremos llamar á la menor x, á la que le sigue ó segunda y, y á la tercera ó mayor z; y como los datos son expresivos de las relaciones que hay entre esos números, y operaciones que con ellos se deberian hacer para producir tres cantidades qne se nos dan conocidas, podemos escribir en forma de tres ecuaciones el problema, y será:

$$x+\frac{y}{3}+z=23 \qquad 2y-x+z=30 \qquad 3x+z-zy=10.$$

Ejemplo 5.° Se desea plantear el problema algebráico siguiente: *Dos vapores marchan por un rio corriente abajo: el que va delante marcha con velocidad de 4 millas por hora, y el otro de 6 millas, y en un momento dado, pasan respectivamente por dos puntos separados por una distancia de 5 millas, y se quiere saber en dónde se encontrarán ó alcanzará el segundo al primero.*

La distancia que buscamos, que desde luego llamaremos x, es la que haya entre el punto del encuentro y uno de los conocidos, separados 5 millas, es decir, del punto en donde se halla el vapor más adelantado, ó el más atrasado; pero desde luego se comprenderá que lo mejor será que sea del primer punto, pues que la distancia al otro es conocida. ¿Qué relacion, diremos despues, hay entre x y los tres datos conocidos? Sin dificultad se nos ocurrirá que los datos 6 y 4 millas, no tienen en el problema un valor absoluto, sino relativo uno del otro, pues lo mismo sería que se nos dijese, que mientras uno anda 12, el otro anda 8, ó que mientras uno anda 3 el otro anda 2. De esta consideracion, desde luego comprenderemos la conveniencia de tomar por datos 3 y 2; pero tambien podremos deducir que, si la velocidad del uno fuera doble que la del otro, la distancia que el uno anduviese en un tiempo dado sería doble que la del otro; por lo que veremos que esas velocidades guardan proporcion con las distancias; proporcion cuyos cuatro términos serán: 2 millas, 3 millas, x distancia que tiene que andar el más adelantado, y $x+5$ distancia que tiene que andar el más atrasado; luego podremos formar la proporcion siguiente, $2:3::x:x+5$ y consiguientemente (115):

$$\frac{x}{x+5}=\frac{2}{3} \quad \text{ó} \quad 3x=2x+10 \quad \text{ó} \quad \frac{x+5}{x}=\frac{3}{2}.$$

124. Generalizando este problema, del que tenemos que ocuparnos despues mucho, llamaremos a la velocidad ó andar de 3^{ms}, y a' el de 2, y d las 5^{ms} de distancia que separa los vapores, y será: $\frac{x+d}{x}=\frac{a}{a'}$, que simplificaremos en otro artículo, pero que por lo pronto advertiremos á los ménos reflexivos que el x del numerador y denominador no desaparecerá en la simplificacion, pues que no es factor en el numerador, sino sumando.

125. Para conocer si en vez de ecuaciones hemos planteado identidades, no hay tampoco regla segura, y por ello á veces no se conoce sino como resultado de la ecuacion. Diremos, sin embargo, que el aspecto de las ecuaciones planteadas lo dirá casi siempre, sobre todo, despues de simplificadas; y ademas, que si la ecuacion no es muy complicada, puede reconocerse si es identidad dando á la incógnita valores distintos pequeños, para que sea fácil el exámen. Así, en el tercer ejemplo, haciendo $x = 2$, se ve que no resulta identidad; pero esta comprobacion en ecuaciones complicadas equivaldria á su resolucion en el trabajo que necesitaria, y por eso hemos dicho que á veces no se conoce que es identidad una ecuacion hasta resolverla.

ARTÍCULO V.

PREPARACION DE LAS ECUACIONES.

126. *Preparar una ecuacion.* Segun indicamos (98), es simplificarla; operacion que indispensablemente debe preceder á su resolucion, porque, como tambien indicamos (88), no es fácil siempre conocer de qué grado es una ecuacion, ni por lo tanto la regla que debe seguirse para resolverla.

127. Toda ecuacion, por complicada que sea, si es de primer grado, despues de simplificada debe aparecer bajo la forma $Ax = \pm B$. Es decir, la incógnita multiplicada por una cantidad conocida, á veces compuesta de varios términos y con signo positivo, igual á otra cantidad conocida, simple ó compuesta, positiva ó negativa. Pudiendo suceder en problemas muy sencillos como los aritméticos y algunos algebráicos de los ejemplos del artículo anterior, que resulte la incógnita sin factor ninguno, pero que puede suponérsele por tal la unidad.

128. Si la ecuacion es de segundo grado, la forma en que aparecerá la conoceremos en otro lugar, aunque no hay inconveniente lógico en que adelantemos (pues que lo hemos de ver ya en algunos ejemplos de este artículo), que será la de $Ax^2 \pm Bx = \pm C$, ó $x^2 \pm px = \pm q$, dando á p y q el privilegio de representar cantidades doblemente compuestas, que en este caso serán $p = \frac{B}{A}$ y $q = \frac{C}{A}$, dividiendo la ecuacion $Ax^2 \pm Bx = \pm C$ por A.

129. Regla. *Para preparar una ecuacion se hacen con ella las trasformaciones siguientes, aunque no siempre son todas necesarias:*

1.ª *Se convierte en entera si fuese fraccionaria* (113).

2.ª *Se trasladan al primer miembro todos los términos con incógnita que puede haber en el segundo, y á éste todos los conocidos que haya en el primero* (105).

3.ª *Se reducen á un solo término todos aquellos en que la incógnita tenga igual exponente, sacándola como factor comun de ellos* (53), *suponiendo la unidad de factor de la incógnita en el término en que esté sola* (109), *y se reducen lo posible tambien los términos conocidos.*

Y 4.ª *Si el término donde la incógnita tiene mayor exponente es negativo, se convierte en positivo mudando los signos á todos los términos* (108).

Demostracion. La de esta regla está dada en los números citados en cada una de sus partes.

130. *Ejemplos de preparacion.* Preparemos ante todo las ecuaciones planteadas en el artículo anterior, á excepcion de las dos primeras, que traduciendo sencillos problemas aritméticos, no admiten más simplificacion que su resolucion; pues aunque en la segunda hay un denominador, puede decirse que está bajo la forma $Ax = B$, aunque A es 1 y B una fraccion.

131. Preparemos ahora la ecuacion (121): $x + x + 12 = 42$. Como no es fraccionaria, no hay que ejecutar la primera parte de la regla. Por la segunda dará $x + x = 42 - 12$, y por la tercera $2x = 30$, no habiendo tampoco necesidad de cambiar los signos, porque ya la incógnita lo tiene positivo. Igualmente la $z + z - 12 = 42$, da preparada $2z = 30$, y las $x + x + d = s$ y la $z + z - d = s$, dan respectivamente $2x = s - d$ y $2z = s - d$.

132. Las ecuaciones del ejemplo núm. 122, como son tres en un mismo problema, y este capítulo no abraza más que las ecuaciones de primer grado con una sola incógnita, reservamos debidamente su preparacion para otro capítulo.

133. Preparemos ahora la ecuacion (12) $\frac{x+5}{x} = \frac{3}{2}$, que dará, convirtiéndola en entera, $2x + 10 = 3x$, que es otra forma bajo la que le pudimos plantear y planteamos. Despues, pasando todos los términos con incógnita al primer miembro y los conocidos al segundo, resulta $2x - 3x = -10$, y simplificando el primero $-x = -10$, ó $x = 10$ (cambiando los signos á todos los términos), ecuacion, no sólo preparada, sino que sale resuelta. Pero para evitarlo, y ademas para ulterior objeto, preparemos la generalizada ó literal (123) $\frac{x+d}{x} = \frac{a}{a'}$, y dará $a'x + da' = ax$ y $ax - a'x = da'$ y $x(a - a') = da'$, ecuacion completamente preparada, pues está bajo la forma $Ax = B$; porque $a - a'$ está representando á A, y da' á B.

134. Siendo los problemas propuestos hasta ahora sencillos para que fuese fácil el planteo, la preparacion de sus ecuaciones ha sido fácil tambien; pero siendo materia de importancia en la que conviene adiestrarse, vamos á preparar la ecuacion complicada siguiente:

$$-x + \frac{bc}{m} - 4n + \frac{1}{2} = \frac{ct + m - s}{2xb}$$ y dará primeramente

$$-4x^2bm + 4b^2cx - 16nbxm + 2xbm = 2ctm + 2m^2 - 2sm,$$

y dividiendo por 2 los dos miembros, dará $-2x^2bm + 2b^2cx - 8nbxm + xbm = ctm + m^2 - sm.$

Y despues, $-2x^2bm + x(2b^2c - 8nbm + bm) = ctm + m^2 - sm$, la cual resulta de segundo grado y no admite mayor simplificacion, mientras no se resuelva ó conozcamos los valores de b, n, m, c.

135. La preparacion de esta ecuacion prueba; primero, que pareciendo al proponerla de primer grado, ha resultado de segundo despues de preparada; que la de segundo grado preparada se puede convertir en la forma de $Ax^2 \pm Bx = \pm C$, si bien A, B y C, pueden ser cantidades compuestas de muchos términos.

NOTA. Es de mucha importancia el ejercicio de la preparacion, y no se ponen ejemplos para él porque los profesores puedan ponerlos más ó ménos complicados, segun convenga á la clase de discípulos de que se trate.

ARTÍCULO VI.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

136. Regla. *Para resolver una ecuacion de primer grado con una incógnita, aunque provenga de un problema con dos ó más cantidades desconocidas, pero cuyos valores dependan muy claramente el de unas del de las otras* (121), *despues de preparada y convertida en la forma* $Ax = \pm B$ (127), *no hay más que dividir el segundo miembro por el factor simple ó compuesto que afecte á la incógnita, que quedará sola en el primero, y resultará* $x = \pm \frac{B}{A}$.

Determinar así el valor de una incógnita, se dice *despejarla*.

Demostracion. Se funda en el principio ya demostrado (106).

137. Resolvamos las ecuaciones preparadas en el artículo anterior que son algebráicas y de una sola incógnita.

Primera. Las del problema de hallar dos números cuya suma y diferencia es conocida,

$x + x + 12 = 42$, que preparada da $2x = 30$, resuelta da $x = \frac{30}{2} = 15$.

La $z + z - 12 = 42$, que preparada da $2z = 54$, resuelta da $z = \frac{54}{2} = 27$.

La $x + x + d = s$, que preparada da $2x = s - d$, resuelta da $x = \frac{s-d}{2}$,

y la $z + z - d = s$, que preparada da $2z = s + d$, resuelta da $z = \frac{s+d}{2}$.

Las dos primeras se refieren al problema particular de ser la suma y la diferencia determinadas, y las dos últimas á ser tales suma y diferencia cualesquiera; pero segun se indicó en el capítulo anterior (121), cualquiera de las dos ecuaciones basta para resolver el problema, y por eso pertenecen al caso de resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita; porque, en efecto, conociendo que x, número menor buscado, vale 15, como se sabe que difiere del mayor en 12, éste será 27; y lo mismo si sólo se resolviese la otra ecuacion, y análogamente en las literales.

138. Las ecuaciones del problema anterior generalizado, son resueltas fórmulas que dicen; *que conocida la suma y la diferencia de dos números, el valor de éstos será, el del menor, la mitad de la suma ménos la mitad de la diferencia conocida, y el del mayor la mitad de la suma más la mitad diferencia.*

139. Resolvamos ahora el problema de los vapores que marchan por un rio con velocidades respectivamente de 3 y 2 millas, y que en un momento dado, cuando se hallan separados 5 millas, se desea saber dónde se encontrarán (123).

La ecuacion es $\frac{x+5}{x} = \frac{3}{2}$, que preparándola da primeramente $2x + 10 = 3x$; despues $2x - 3x = -10$, y finalmente, completamente preparada $x = 10$, que como allí indicamos sale ya resuelta; siendo pues 10 millas la distancia que separará el punto del encuentro de aquel en que se encontraba el vapor más adelantado, y 15 consiguientemente del otro punto.

La ecuacion del mismo problema generalizado, que es $\frac{x+d}{x} = \frac{a}{a'}$, que preparándola da primeramente $xa' + da' = xa$, y luego $xa - xa' = da'$; y finalmente, $x(a - a') = da'$, resuelta da $x = \frac{da'}{a-a'}$, que dice que *el punto del encuentro de dos móviles con velocidades diferentes conocidas, y cuya separacion se conoce en un momento dado, distará del punto donde se hallare el más adelantado, la distancia conocida que los separaba, multiplicada por la marcha del que ande ménos, dividido todo por la velocidad del más ligero, ménos la del más pesado.*

140. La aplicacion de las fórmulas resultantes de la generalizacion de los problemas algebráicos consiste, no sólo en servirse de ellas para resolver más fácilmente problemas semejantes y otros que, aunque no lo parezcan, puedan serlo, si bien se consideran; si no tambien para determinar fácilmente el valor de todas las partes de tales fórmulas, cuando siendo la incógnita conocida, es verdadera incógnita cualquiera de las cantidades conocidas de la fórmula.

Así, la fórmula $x = \frac{da'}{a-a'}$, no sólo puede servir para cualquier otro problema análogo, por ejemplo, en el que la distancia sea 6, y la velocidad del más adelantado 4, y la del más atrasado 7 millas por hora; pues sin necesidad de plantear la ecuacion, resolveriamos la fórmula $x = \frac{6 \times 4}{7-4} = \frac{24}{3} = 8$; y tambien, por ejemplo, si se quiere saber cuánto tendrán lo mismo dos que ahorran diferentemente uno 9 y otro 5 talegas al año, y éste tiene ya ahorradas 17 y aquel sólo 7; pues que los ahorros anuales pueden considerarse como velocidades y la diferencia de lo que tienen ya ahorrado, $17 - 7$, distancia que les separa, pues se resolveria el problema de este modo: $x = \frac{10 \times 5}{9-5} = \frac{50}{4} = 12,5$; y por lo tanto, que el de 17 talegas ahorradas tendrá $17 + 12,5$, y el de 7 tendrá $12,5 + 7 + 10 = 29,5$.

De este resultado y del de los vapores, puede fácilmente deducirse el *cuándo* del encuentro de los vapores, ó de tener iguales ahorros los hombres; pues que se sabe cuánto andan los vapores por hora y cuánto ahorran los hombres cada año; y por lo tanto, para el encuentro de los vapores en el último ejemplo, pasarán dos horas que tardará el más adelantado en andar 8 millas; y los ahorros mencionados serán iguales á los dos años y medio que tendrán que pasar para que el que ahorra 5 anuales, ahorre 12,5. Este *cuándo*, para deducirlo directamente de una ecuacion, necesitaria distinta consideracion y diferente ecuacion ó fórmula.

Finalmente, si por la fórmula $x = \frac{da'}{a-a'}$ conociéramos $x = 8$, y no conociéramos d y el valor de ésta lo quisiéramos determinar, despejaríamos á d de este modo: $x = \frac{da'}{a-a'} = xa - xa' = da' = d = \frac{xa - xa'}{a'}$, y poniendo $x = 8$, $a = 7$ y $a' = 4$, sería $d = \frac{(8 \times 7) - (8 \times 4)}{4} = 6$.

La resolucion de las ecuaciones de primer grado con una sola incógnita, es materia importante, cuyo ejercicio sólo puede producir su completo conocimiento, por lo que al final del capítulo dedicaremos su último artículo á ejemplos, indicando en algunos su planteo, preparacion y generalizacion.

141. La prueba del resultado de una ecuacion se halla viendo si el valor hallado á la incógnita y sustituido por ella en la ecuacion primitiva, produce una identidad. Así, en el ejemplo del número 137, en la ecuacion $x+x+12=42$, poniendo en lugar de x, su valor hallado, dará $15+15+12=42 == 42=42$, que es una identidad.

142. *Comprobar un problema* es ver si el valor de la incógnita además de satisfacer la ecuacion satisface todas las condiciones del problema (con lo que se consigue una doble prueba); pues en el caso de que no las satisfaciere, y si se verificase la ecuacion, sería señal de que está bien planteada con relacion á los datos, y bien resuelta, pero que el problema tiene condiciones insuficientes para satisfacerlo. En cuanto á la significacion de un resultado negativo, infinito, indeterminado, etc., ya en el capítulo siguiente nos ocuparemos de ello.

Para que el signo convencional de identidad de dos ecuaciones (102) no surta efecto contraproducente, dígase al llegar á él, no *igual á* sino *ecuacion igual á*.

ARTÍCULO VII.

EJERCICIO DE PLANTEO, PREPARACION Y RESOLUCION DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA SOLA INCÓGNITA.

143. Planteemos el problema siguiente:

Dos hermanos tienen de capital el mayor 58 talegas y el menor 15, y lo aumentan, aquel con una cantidad anual de 3 talegas y el otro con 5, y desean saber cuántos años faltarán para que el capital del mayor sea doble del otro, pues quieren dejar á sus hijos igual herencia, y tiene el mayor doble número de ellos.

Desde luego se debe observar que este problema no puede resolverse por la fórmula general $x=\frac{da'}{a-a'}$ (139), aunque se consideren los ahorros como velocidades y como distancia de móviles, la diferencia de los capitales 58 y 15, como hicimos en un problema parecido á éste, indicado al fin del núm. 140, pues en el caso de que ahora se trata, lo que se desea saber es *cuándo* tendrán los hermanos doble capital el uno que el otro; y la tal fórmula, toda referente á distancias, no puede evidentemente servir, ni áun fácilmente de la manera indirecta indicada en el mismo número, de deducir el *cuándo* del *dónde;* pues éste por dicha fórmula se deduce de las diferencias de las velocidades y de los capitales, y el montante de estos es en absoluto de primera importancia en el problema que nos ocupa, pues que se desea saber cuándo el uno será doble del otro.

Plantearemos, pues, el problema diciendo: llamando x al número de años que han de pasar hasta que el capital del hermano menor sea igual á la mitad del que entonces tenga el mayor, éste será evidentemente entonces su actual capital de 58 talegas, más tantas veces 3 que ahorra anualmente, como años han de pasar, y será, por lo tanto, $58 + x \times 3$, ó sea $58 + 3x$. Y entonces el capital del menor tendrá que ser su actual capital de 15, más 5 que ahorra anualmente, tomadas tantas veces como años han de pasar; y como este capital entonces ha de ser igual á la mitad del otro, podremos formar la ecuacion $\frac{58+3x}{2} = 15 + 5x$.

144. Preparemos y resolvamos ahora esta ecuacion, y tendremos que, quitando el denominador, dará $58 + 3x = (15 + 5x)\ 2$. Verificando la multiplicacion que indica el paréntesis del segundo miembro, dará $58 + 3x = 30 + 10x$.

Poniendo por primer miembro el segundo, y este por primero, porque en él la incógnita tiene mayor coeficiente, y de ella hay que restar la otra, y sin hacer este cambio (no recomendado ni exigido en la regla de preparacion, por suponer que se hace al practicar su segunda parte) suele padecerse alguna equivocacion de signos, dará $10x + 30 = 58 + 3x$. Pasando ahora al primer miembro los términos desconocidos, y al segundo los conocidos, dará $10x - 3x = 58 - 30$. Y reuniendo ahora todos los términos desconocidos en uno, y haciendo lo propio con los conocidos, dará $7x = 28$, ecuacion ya preparada, y que resuelta, da $x = \frac{28}{7} = 4$ años.

145. Veamos á ver si ese valor de x verifica la ecuacion primitiva y satisface las condiciones del problema, y dará $\frac{58+3\times 4}{2} = 15 + 5\times 4$, en la que, efectuando las operaciones indicadas, dará $35 = 35$; identidad que prueba que el valor 4 verifica la ecuacion planteada; y como en 4 años el hermano mayor, ahorrando 3 talegas por año, habrá ahorrado 12, y tendrá de capital 70; y el menor, ahorrando 5 anuales, habrá ahorrado en 4 años 20, y tendrá 35, mitad de 70, tenemos que el resultado satisface tambien las condiciones del problema.

146. Generalicemos ahora el problema:

Llamemos c al capital mayor del hermano mayor, y c' al del hermano menor, y a el ahorro anual, menor en este caso, correspondiente al hermano mayor, y a' al ahorro del menor, y la ecuacion planteada será $\frac{c+ax}{2} = c' + a'x$, que preparándola y resolviéndola, dará primeramente $c + ax = (c' + a'x)\ 2$, despues $c + ax = 2c' + 2a'x$, luego $2a'x + 2c' = c + ax$, en seguida $2a'x - ax = c - 2c'$, despues $(2a' - a)\ x = c - 2c'$ y finalmente $x = \frac{c - 2c'}{2a' - a}$ fórmula general que podrá servir para resolver todos los problemas análogos, sean cuales sean los datos, y tambien para conocer los valores de c ó de c', ó de a ó de a', si alguno de ellos fuese en algun problema desconocido, siendo conocida x.

147. Como ya indicamos (142), los resultados negativos cero, infinito, indeterminado, etc., que pueden dar las ecuaciones para valer de incógnita, los tomaremos en consideracion en el capítulo siguiente, y para ello nos servirá tambien la anterior fórmula y los demas generales que hemos hallado.

148. Plantéense, prepárense y resuélvanse los problemas siguientes, á continuacion de los cuales se expresa el resultado que deben dar, y se indicará en los de más difícil planteo el camino para efectuarlo, así como la generalizacion de algunos.

Problema 1.° ¿Cuál es el número, cuyo duplo es igual á un quíntuplo ménos 545? Resultará 175.

Problema 2.° Buscar un número, cuya cuarta parte, aumentado de 9, produzca 157. Resultará 592.

Problema 3.° Buscar un número, cuya mitad, su tercera parte y su cuarta con 45 compongan 448. Resultará 372.

Problema 4.° Buscar un número que, dividido sucesivamente por 3 y por 7, dé 20 de suma de los cocientes. Resultará 42.

Problema 5.° ¿Cuáles son los tres números de los que sabemos que su suma es 37, que el mayor excede al mediano en 7 unidades y el mediano al más pequeño en 3?

Llamando x al más pequeño, el mediano deberá ser $x+3$ y el mayor $x+3+7$, y planteando una sola ecuacion, deberá dar por valor de x número menor buscando 8, del que se deducirá muy fácilmente los valores de los otros, que serán 11 y 18.

Problema 6.° Se quiere dividir 1300 pesetas entre tres personas, no en partes iguales, sino de manera que la primera tenga 48 pesetas más que la segunda y ésta 20 más que la tercera.

Llamando x á lo que le tocará á la primera, lo que le toque á la segunda será $x-48$, y lo que le toque á la tercera $x-48-20$, etc., y deberá dar 472 por valor de x, y de ese valor se deducen los de 424 y 404.

Problema 7.° Un padre tiene treinta años y su hijo ocho, y se desea saber cuándo la edad del padre será triple de la del hijo.

Llamando x á los años que falten para que tal suceda, la edad del padre será entonces $30+x$, y la del hijo $8+x$, y ésta igual á la tercera parte de aquella, por lo que deberá resultar de la ecuacion que $x=3$ años.

Problema 8.° Un padre deja al morir á su mujer la mitad de su caudal; para repartirlo entre sus hermanos la tercera parte del mismo; y para sus sobrinos la dozava parte, y ademas dos talegas para los pobres, y se desea saber cuál es su fortuna ó capital legado.

Llamando x tal cantidad, lo que deja á su mujer será $\frac{x}{2}$, etc., y deberá resultar $x=24$ talegas.

Problema 9.° Un tendero compró 256 litros de vino á 65 céntimos de peseta el litro, y quiere saber con cuánta agua deberá mezclar el vino para que le salga el litro á media peseta, y poder ganar aunque tenga que venderlo á 60 céntimos.

Llamando x el agua que debe mezclar con el vino $256+x$ á 50 céntimos, deberán valer lo mismo que 256 á 65 céntimos. Resultará 77 litros de agua próximamente.

Problema 10. Un estanque es alimentado por tres fuentes. La mayor, corriendo sola, llena el estanque en *dos horas;* la mediana en *cuatro horas,* y la menor en *seis horas;* y se desea saber en cuánto tiempo el estanque se llenará corriendo las tres fuentes á la vez

Llamando x al número entero ó fraccionario de horas que se busca, y haciendo la capacidad del estanque igual á 1, diremos: si la fuente mayor llena el estanque en dos horas, es evidente que en una hora llenará medio estanque ó $\frac{1}{2}$, y en x horas $\frac{x}{2}$. Y análogamente, la mediana llenará en una hora una cuarta parte del estanque, y en x hora $\frac{x}{4}$, y la menor consiguientemente $\frac{x}{6}$, y las tres á la vez llenarán el estanque, que se le supone de capacidad 1, en x horas.

Planteada y resuelta la ecuacion, dará, por valor de x, *una hora, cinco minutos* y *veinticuatro segundos.*

Para generalizar este problema, diremos: si llamamos a el tiempo que necesita la primera fuente para llenar el estanque, b el que necesita la segunda, y c el que necesita la tercera y x el tiempo que necesitan las tres, será la ecuacion $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=1$, y $bcx+acx+abx=abc$ y $x=\frac{abc}{bc+ac+ab}$, fórmula que dice que para conocer el tiempo que emplearon tres fuentes en llenar un estanque, conociendo el que emplean cada una, se divide el producto de los tiempos de las tres por la suma del producto de la primera por el de la segunda, de la primera por la tercera y de la segunda por la tercera.

No siendo más que dos fuentes, la fórmula que se hallaria, será $x=\frac{ab}{a+b}$, que diría que el tiempo que emplearan dos fuentes, será igual al cociente de dividir el producto de las horas que emplea cada una por la suma de las mismas. Así, si dos fuentes, una llena el estanque en dos horas y otra en tres, será $x=\frac{2\times 3}{2+3}=\frac{6}{5}=1{,}2=1^{h}$ y $12'$.

CAPÍTULO IV.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS Ó MÁS INCÓGNITAS Y APRECIACION DE TODO RESULTADO DE CUALQUIER ECUACION.

ARTÍCULO PRIMERO.

PRELIMINARES.

149. *Ecuaciones de primer grado* con dos ó más incógnitas, se llaman las que resultan de plantear un problema algebráico con dos ó más cantidades desconocidas, y cuyo valor no se puede determinar fácilmente con una sola ecuacion, como en el caso ya considerado (121) de determinar cuáles son los dos números cuya suma y diferencia se conoce.

150. Al conjunto de ecuaciones que origina un problema con dos ó más cantidades desconocidas, se llama *sistema de ecuaciones*, y su condicion esencial es que tales ecuaciones han de estar ligadas por incógnitas comunes, que tengan el mismo valor en una ecuacion que en otra.

151. *Solucion de un sistema de ecuaciones*, se llama el conjunto de valores de las incógnitas que verifican ó satisfacen todas las ecuaciones del sistema; y *resolver* un sistema es hallar todas sus soluciones.

152. *Sistema determinado* de ecuaciones, se llama el que sólo admite un número limitado de soluciones, é *indeterminado*, en el caso contrario.

153. *Sistemas equivalentes*, se llaman aquellos que tienen las mismas soluciones, y que, por lo tanto, son sustituibles uno por otro.

154. La resolucion de los problemas con dos ó más cantidades desconocidas, consta de varias partes: primera, su planteo; segunda, la simplificacion ó preparacion de todas sus ecuaciones; tercera, la reduccion del sistema por eliminacion de incógnitas; cuarta, el valoramiento de éstas; y quinta, la verificacion de los valores hallados á las incógnitas, y comprobacion del resultado con relacion á lás condiciones del enunciado del problema. Todo lo que será objeto de este capítulo, que abrazará ademas la apreciacion de todo resultado de ecuaciones, que, como ya indicamos (142), puede ser, no sólo real y positivo, sino tambien negativo, cero, infinito é indeterminado.

ARTÍCULO II.

PLANTEO DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES.

155. Regla general. *Para plantear un problema de dos ó más cantidades desconocidas, ademas de seguirse la regla general dada* (118), *hay que* *atender á que el sistema de ecuaciones que resulte, reuna las condiciones siguientes: primera, que ya indicamos* (150 *y* 118), *que todas las ecuaciones del sistema estén ligadas entre sí por algunas incógnitas comunes, aunque no sean todas las del problema, y que tengan ó representen el mismo valor en una que en otra ecuacion; segunda, que sean, si es posible, tantas las ecuaciones del sistema como cantidades desconocidas entran en el problema; tercera, que ninguna de las ecuaciones, sea absurda, imposible, contradictoria ó incompatible con las otras, circunstancias que á veces no podrán ciertamente conocerse, sino al resolver el sistema; cuarta, que ninguna ecuacion sea una identidad; y quinta, que ninguna ecuacion exprese la misma condicion que otra.*

156. *Demostracion.* Las ecuaciones de un sistema deben estar ligadas entre sí por incógnitas comunes, pues de otro modo evidentemente que, ó el problema sería insoluble (porque, como despues veremos por el valor de una incógnita, es menester deducir el de otra), ó serían varios problemas distintos que no constituirian una sola cuestion. Deben ser, si es posible, tantas las ecuaciones como las incógnitas, porque de otro modo (como tambien veremos, y podemos presentir por lo indicado de su resolucion de unas por otras), el valor de ellas quedará siempre dependiente del de alguna otra. No debe ninguna ecuacion ser absurda, imposible, etc.; porque por lo dicho, esa circunstancia resaltaria en todo el sistema. No debe ninguna ser identidad, porque sus incógnitas no tendrian valor determinado (94). Y finalmente, no deben dos ecuaciones referirse á la misma condicion, porque evidentemente una resultaria inútil, y á veces las dos, y falto de ellas el sistema. Luego la regla queda suficientemente demostrada por lo pronto, pues que su completa demostracion resaltará en todos los artículos siguientes, y especialmente en los de la apreciacion de todo resultado de cualquier ecuacion ó sistema de ecuaciones.

ARTÍCULO III.

REDUCCION Ó PREPARACION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES.

157. *Reduccion de un sistema de ecuaciones* se llama á su simplificacion y verdadera preparacion para resolverlo, consintiendo en la simplificacion ó preparacion de cada una de sus ecuaciones, y en la reduccion de todas ellas á una equivalente á todas.

158. La simplificacion ó preparacion de cada una de las ecuaciones de un sistema, se practica, segun la regla que ya conocemos (129), si bien no quedarán bajo la forma $Ax = \pm B$, pues habiendo más incógnitas, el primer miembro tendrá tantos términos como incógnitas diferentes tenga la ecuacion que se prepara, por ejemplo: $Ax \pm Bz = \pm C$.

159. La reduccion de un sistema de ecuaciones ya preparadas, se consigue eliminando una por una todas las incógnitas ménos una, y con cada incógnita eliminada desaparecerá una ecuacion; diciéndose *eliminar* á la operacion por la que se hace desaparecer una incógnita sin variar el valor de las otras.

160. La eliminacion de las incógnitas sin variar el valor de las que van quedando, y obteniendo consiguientemente sistemas equivalentes, aunque más reducidos, se puede conseguir por tres métodos diferentes, que son: 1.°, método de *reduccion*, ó sea de adicion ó sustraccion; 2.°, método de *sustitucion*; y 3.°, método de *igualacion* ó comparacion.

161. Regla 1.ª Método de reduccion.—*Si la incógnita que se quiere eliminar entre dos ecuaciones tiene igual coeficiente y diferente signo, se suman ordenadamente las dos ecuaciones, y reduciendo los términos semejantes en la ecuacion resultante, ésta quedará sin la incógnita que se quiere eliminar. Si aunque las incógnitas tengan igual coeficiente sus signos son iguales, se restarán las ecuaciones una de otra, y la resultante simplificada, quedará sin la incógnita de que se trata. Si tiene en ambas ecuaciones diferente coeficiente, se hará que sea igual, multiplicando todos los términos de la primera ecuacion por el coeficiente que la incógnita que se quiere eliminar tenga en la segunda, y todos los términos de ésta por el coeficiente de la incógnita de la primera; y mejor, todos los términos de ambas ecuaciones por el mínimo comun múltiplo de los coeficientes de la incógnita, considerando como tal el coeficiente mayor, si fuera múltiplo del menor, en cuyo caso no habrá que multiplicar más que los términos de la ecuacion con incógnita de menor exponente. Y una vez ya la incógnita con igual coeficiente, se obrará como en el caso apuntado al principio de esta regla.*

162. *Ejemplo.*

$$\begin{array}{ll} 2x + 3z = a & 4x + 6z = 2a \\ 4x - 2z = b & 12x - 6z = 3b \end{array} \quad [A].$$

$$4x + 12x + 6z - 6z = 2a + 3b = 16x = 2a + 3b \quad [B].$$

Demostracion. Se han multiplicado todos los términos de la primera ecuacion por 2, coeficiente de z, en la segunda, que es la letra que se quiere eliminar, con lo que la ecuacion no se altera (100). Despues se han multiplicado todos los términos de la segunda ecuacion por 3, coeficiente de z, en la primera, con lo que tampoco se altera la ecuacion; obteniendo por ambas multiplicaciones dos ecuaciones equivalentes á las propuestas [A], que sumadas ordenadamente, nos han dado una [B] equivalente á ambas juntas (112). Y como lo mismo deberia suceder restando estas ecuaciones si la z tuviese signos iguales, pues para restar se les cambiaria á la que hiciese de sustraendo y destruiria la otra; y lo mismo tambien sucederia si las dos ecuaciones se hubiesen multiplicado por el mínimo comun múltiplo de 3 y 2, que es 6; y lo mismo, finalmente, si, por ejemplo, para eliminar la x se hubieran multiplicado solamente todos los términos de la primera ecuacion por 2, la regla queda demostrada.

163. Regla 2.ª Método de sustitucion.—*Se despeja la incógnita que se quiere eliminar en cualquiera de las dos ecuaciones, y su valor se pone en lugar suyo en la otra ecuacion, la que resultará sin la incógnita y equivalente á las dos propuestas.*

Ejemplo. Sea el mismo sistema de ecuaciones de la regla primera

$$2x + 3z = a \qquad z = \frac{a - 2x}{3}$$
$$4x - 2z = b \qquad 4x - 2 \times \frac{+a - 2x}{3} = b.$$

$$4x - 2 \times \frac{a - 2x}{3} = b = 12x - 2a + 4x = 3b = 16x = 3b + 2a.$$

Demostracion. Se ha despejado la z en la primera ecuacion, obteniendo una equivalente (105 y 106), y hemos puesto en la segunda propuesta en lugar de z su valor hallado, obteniendo evidentemente una ecuacion equivalente é igual á la hallada por el primer método (162), si bien para reconocer fácilmente la igualdad hemos simplificado la hallada por este método, el que queda demostrado.

164. *Observacion.* No será inútil para algunos hacerles observar, para evitarles equivocaciones, que al simplificar la ecuacion hallada por el segundo método y deber, ante todo, quitar el denominador 3, hemos multiplicado por él todos los términos, ménos los que tiene por numerador, á pesar de ser dos y ser el quebrado de que forman parte igual á $\frac{a}{3} - \frac{2x}{3}$, que puesto en esta forma en la ecuacion, obligaria á multiplicar a por 3 y $2x$ por 3; pero en ese caso, tambien los otros términos, en lugar de multiplicarlos por 3, los multiplicaríamos por $9 = 3 \times 3$: y el resultado sería el mismo aunque más complicado. Siendo tambien conveniente observar que la multiplicacion de 2 por el numerador, produce $-2a + 4x$, porque $2z$ es negativo, y el quebrado $\frac{a - 2x}{3}$ es el valor de z positivo. Ademas que $-2 \times a = -2a$ y $-2 \times -2x = +4x$.

165. Regla 3.ª Método de igualacion ó comparacion.—*Despéjese en ambas ecuaciones la incógnita que se trata de eliminar, y resultarán dos ecuaciones equivalentes, cuyos primeros miembros serán iguales y hasta idénticos, pues se compondrán sólo de tal incógnita; y con los segundos se formará una ecuacion sin tal incógnita y equivalente á las dos propuestas.*

Ejemplo. Sea el mismo de los números anteriores.

$$2x + 3z = a \qquad z = \frac{a - 2x}{3}$$
$$4x - 2z = b \qquad z = \frac{b + 4x}{2} \qquad \text{y} \quad \frac{a - 2x}{3} = \frac{4x - b}{2}.$$

$$2a - 4x = 12x - 3b = 16x = 3b + 2a.$$

Demostracion. Despejando la incógnita z en las dos ecuaciones, hemos indudablemente obtenido otras equivalentes (105 y 106); y como estas resultan con un miembro igual é idéntico, es axiomático que los segundos miembros serán iguales entre sí, y constituirán una ecuacion equivalente á las dos propuestas, é igual á la hallada por los otros métodos, aunque para ver esta igualdad hayamos tenido necesidad de simplificarla.

166. *Observacion.* Comparando los tres métodos, parece el primero el ménos sencillo, sobre todo en los casos en que hayan de multiplicarse todos los términos de las dos ecuaciones por el mínimo comun múltiplo de los coeficientes de la incógnita que se trata de eliminar; pero le hemos dado lugar preferente, porque es el que creemos más exento de errores, pues por los otros dos aparecen casi siempre quebrados que, si se componen de varios términos con diferentes signos, suelen producir equivocaciones. El más usado por los hombres científicos, es el de sustitucion, y es tambien el único que se exige en los exámenes para el bachillerato en Francia.

167. Regla 4.ª *Para reducir un sistema de más de dos ecuaciones, se empieza eliminando primeramente una incógnita en dos cualesquiera de las propuestas, por ejemplo, si son cuatro, entre la primera y segunda, y resultará una ecuacion, primera del sistema reducido. Despues se elimina la misma incógnita entre la primera y tercera, y se tendrá la segunda del sistema reducido; y, finalmente, entre la primera y la cuarta, y se tendrá la tercera del sistema reducido á tres. Despues en este se eliminará otra incógnita entre la primera y segunda, y se tendrá la primera del sistema nuevamente reducido á dos ó tercero; luego la misma incógnita entre la primera y tercera, y se tendrá la segunda del sistema reducido á dos, en el que se eliminará otra incógnita, y se obtendrá una ecuacion equivalente al sistema propuesto con una sola incógnita. Pudiéndose observar otro órden cualquiera para la eliminacion, por ejemplo, primera y segunda, segunda y tercera, tercera y cuarta, pero cuidando de que en las eliminaciones entren todas las ecuaciones del sistema primitivo.*

168. Si en el sistema que se trata de reducir hay alguna ecuacion que tenga ménos incógnitas que las otras, se considerará como teniéndolas ya eliminadas, y formará desde luego parte del sistema reducido á que corresponda por el número de incógnitas que tenga.

169. *Ejemplo.* Sea el sistema que planteamos en el capítulo anterior, correspondiente á un problema (122);

$$\left.\begin{array}{lcl} x+\frac{y}{3}+z=23 & = & 3x+y+3z=69 \\ 2y-x+z=30 & & -x+2y+z=30 \\ 3x+z-2y=10 & & 3x-2y+z=10 \end{array}\right\}\text{[A]}.$$

$$-3x+6y+3z=90$$

$$\left.\begin{array}{l} -3x+6y+3z-3x-y-3z=90-69 = -6x+5y=21 \\ -x+2y+z-3x+2y-z=30-10 = -4x+4y=20 \end{array}\right\}\text{[B]}.$$

$$\left.\begin{array}{l} -20x+20y=100 \\ -24x+20y=84 \end{array}\right\}\text{[C]}.$$

$$-20x+20y+24x-20y=100-84 \text{ que da } 4x=16.$$

170. *Demostracion.* Simplificamos primeramente las ecuaciones propuestas [A], y en seguida multiplicamos todos los términos de la segunda por 3, coeficiente de z en la primera, y restando á la resultante la primitiva primera nos dió la primera del nuevo sistema [B]. En seguida, como z tenia igual coeficiente en la segunda y tercera, la eliminamos, restando simplemente la tercera de la segunda, y obtuvimos la segunda del sistema reducido á dos. En seguida multiplicamos todos los términos de la nueva primera por 4, coeficiente de y en la nueva segunda, y todos los términos de ésta por 5, coeficiente de y en la nueva primera, y restando las dos ecuaciones resultantes [C] nos dió simplificada la ecuacion $4x = 16$, equivalente al sistema propuesto, porque todo cuanto se hizo con todas las ecuaciones debia producir otras equivalentes (100 y 112); luego queda demostrada esta regla.

171. En cuanto á lo que dice la regla que se necesita (si se sigue en la eliminacion un órden cualquiera), que no deje de entrar en las eliminaciones parciales alguna de las ecuaciones del primitivo, es porque resultaria sinó el sistema reducido indeterminado, por tener más incógnitas que ecuaciones.

172. En las eliminaciones anteriores, si hubiéramos eliminado la z (despues de hacerlo entre la primera y segunda) entre la primera y tercera, nos hubiera dado el mismo resultado; porque multiplicando por 3, coeficiente de z en la primera, todos los términos de la tercera, nos habría dado $9x - 6y + 3z = 30$ que, restándola de la primera, nos hubiera producido $3x + y + 3z - 9x + 6y - 3z = 69 - 30$ que, simplificada, da $-6x + 7y = 39$ como segunda del segundo sistema; la que, multiplicada por 5, coeficiente de y en la dicha segunda, nos hubiera dado las dos equivalentes
$42x + 35y = 147$, y $-30x + 35y = 195$, y restando aquella de ésta $-30x + 35y + 42x - 35y = 195 - 147 = 12x = 48$, evidentemente equivalente á $4x = 16$.

ARTÍCULO IV.

RESOLUCION DE LOS SISTEMAS CON TANTAS ECUACIONES COMO INCÓGNITAS.

173. Regla. *Preparado ó reducido un sistema de ecuaciones, y convertido, por lo tanto, en una sola ecuacion con una sola incógnita, se despejará ésta* (136), *y se tendrá su valor, que sustituido en una de las ecuaciones del sistema reducido á dos, se tendrá otra ecuacion con una sola incógnita diferente de la anteriormente despejada; la que se despejará tambien, y así sucesivamente todas las incógnitas del sistema, con lo que se tendrán sus valores, que se comprobarán, viendo si sustituidos en el sistema primitivo, producen identidades, y si satisfacen las condiciones del problema.*

174. *Ejemplo.* Resolvamos, pues, el que planteemos en el capítulo anterior (122), y simplificamos ó preparamos en el artículo precedente (169).

$$\begin{array}{lcll} x + \frac{y}{3} + z = 23 & = & 3x + y + 3z = 69 & \\ 2y - x + z = 30 & & -x + 2y + z = 30 & [A]. \\ 3x + z - 2y = 10 & & 3x - 2y + z = 10 & \end{array}$$

$$-3x + 6y + 3z = 90$$

$$\left.\begin{array}{l} -3x + 6y + 3z - 3x - y - 3z = 90 - 69 = -6x + 5y = 21 \\ -x + 2y + z - 3x + 2y - z = 30 - 10 = -4x + 4y = 20 \end{array}\right\} [B].$$

$$\left.\begin{array}{l} -20x+20y=100 \\ -24x+20y=84 \end{array}\right\} [C].$$

$$=20x+20y+24x-20y=100-84 \text{ que da } 4x=16$$

Repetimos la preparacion, porque para resolver el sistema se necesita operar, como dice la regla ,con todos los sistemas que ha producido la reduccion del propuesto.

175. Para resolver, pues, el sistema, despejaremos x en la última ecuacion, y dará $x=\frac{16}{4}=4$, valor de x, que sustituido en la segunda del sistema de dos [B], $-4x+4y=20$, dará $-4\times 4+4y=20 = 4y = 20+16 = y=\frac{36}{4}=9$. Y sustituyendo este valor 9 de y, y el de 4 para x en cualquiera de las ecuacion del sistema primitivo [A], dará en la segunda, por ejemplo, $-4+2\times 9+z=30 = z=30-14=16$.

176. Luego los valores de las incógnitas serán $x=4$, $y=9$ y $z=16$, que sustituidos en la ecuacion del sistema primitivo, da la comprobacion, pues, resultan identidades:

$4+\frac{9}{3}+16=23 = 4+3+16=23$, finalmente $23=23$,

$2\times 9- 4+16=30 = 14+16=30$, finalmente $30=30$,

$3\times 4+16-2\times 9=10 = 28-18=10$, finalmente $10=10$.

177. Para ver si tales valores satisfacen tambien las condiciones del problema, no hay más que ver si recitando la anterior comprobacion, llamando á cada incógnita por su valor, resulta el enunciado del problema.

Y diremos: el primer número 4, más un tercio del segundo 9 que es 3, más el tercero 16, componen 30. Y en efecto, así sucede. Que el duplo del segundo 9 que son 18, ménos el primero 4; que da 14, más el tercero 16, suman 30, y así sucede tambien. Y finalmente, que el triplo del primero 4 que es 12, más el tercero 16 que hacen 28, ménos el duplo del segundo 9 que es 18, dan 10; y lo dan efectivamente. Luego el problema era soluble, estaba bien planteado y bien preparado, y ha sido bien resuelto.

178. Es casi evidente, que si los valores hallados á las incógnitas aunque verificasen las ecuaciones del sistema, produciendo identidades, no satisfaciesen las condiciones del enunciado del problema, sería señal de que era insoluble, estaba mal planteado en el sentido de que el sistema representaba otro problema diferente, y por eso los resultados eran satisfactorios con relacion á las ecuaciones del planteo.

179. La resolucion de los problemas algebráicos no es á veces posible sin el conocimiento de otras ciencias; y para muestra pondremos el ejemplo (tradicional puede decirse, pues ningun autor deja de ponerlo), resuelto por *Arquimedes*.

180. Problema. *Hieron, rey de Siracusa, dió á su platero 20 libras de oro para que le fabricase una corona, y al recibirla terminada, sospechando que alguna parte del oro habia sido reemplazada por plata, encargó á Ar-*

quimedes que sin deshacer la corona averiguase si su sospecha era fundada, y cuál la magnitud de la estafa.

El sabio Arquímedes, sabiendo que el peso específico del oro (ó sea lo que pesa más que igual volúmen de agua), es diferente del peso de la plata, pesó la corona sumergida, y halló que pesaba 18,75 libras, con cuyo dato y los de física de que el oro pierde, sumergido 0,052 y 0,099 la plata, y las 20 libras de oro dadas por el rey, planteó el problema de dos incógnitas y dos ecuaciones, haciendo las consideraciones siguientes:

Llamando x al oro de la corona y z á la plata que pudiera contener, sería $x + z = 20$ libras que pesa la corona fuera del agua. Como el oro pierde en el agua 0,052, las x libras de oro perderán $0{,}052x$; y análogamente la plata $0{,}099z$; y como el peso perdido por la corona, hallado al pesarla sumergida, es 1,25 (pues pesó 18,75 en lugar de 20 que pesaba fuera), esa pérdida, debia ser igual á la del oro, más la de la plata, ó sea

$$0{,}052x + 0{,}099z = 1{,}25,$$

que forma sistema con $\quad x + z = 20.$

Considerando, como es debido, los términos de la primera ecuacion fraccionarios, deben convertirse en enteros, lo que se consigue multiplicando por 1000 los dos miembros, y dará $52x + 99z = 1250$.

Despejando á x en la segunda del sistema, será $x = 20 - z$, y sustituyendo su valor en la primera ya simplificada, dará

$$52\,(20 - z) + 99z = 1250;$$

y $\quad 1040 - 52z + 99z = 1250$

y $\quad 47z = 210,$

y $\quad z = \frac{210}{47} = 4{,}47.$

Sustituyendo este valor en la segunda, da $x + 4{,}47 = 20$,

y $\quad x = 20 - 4{,}47 - = 15{,}53.$

El peso del oro que tenia la corona era 15,53 libras y 4,47 de plata, y cantidad igual de oro habia sido robada.

Para comprobar estos valores, hay que sustituirlos en las ecuaciones primitivas, cosa fácil en la segunda y pesada en la primera.

ARTÍCULO V.

DISCUSION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

181. *Discusion de las ecuaciones* se llama en el Algebra al análisis que se hace en una fórmula ó problema de la significacion ó interpretacion que debe darse á los valores de diferente carácter ó de magnitud no apreciada por la Aritmética, que pueden resultar á la incógnita.

182. El método sintético que nos hemos propuesto razonadamente seguir en esta obra, nos obliga sin inconveniente, segun creemos, á presentar dicho análisis en forma de teoremas, con sus correspondientes demostraciones, que constituirán el verdadero análisis con ejemplos, que lo harán más comprensible.

183. Teorema. *La resolucion de una ecuacion de primer grado con una incógnita* (sea porque así resulte del planteo del problema, sea por ser resultante de la reduccion de un sistema de varias ecuaciones), *puede producir como valor de ella, no sólo una cantidad positiva, sino tambien una negativa, ó cero, ó una infinita, ó una indeterminada, ó una fraccionaria*, aceptable ó inaceptable; resultado que satisfacerá siempre la ecuacion primitiva.

Demostracion. Preparada una ecuacion de primer grado con una incógnita, resultará bajo la forma $Ax = \pm B$, y resuelta dará $x = \pm \frac{B}{A}$, en la que tenemos que el signo de ambigüidad del segundo miembro, no siendo como no es arbitrario, pues B puede ser una cantidad positiva ó negativa al efectuar las operaciones que enlacen sus partes, resulta evidentemente que el valor del quebrado $\pm \frac{B}{A}$, puede ser negativo, y consiguientemente el de x; cuyo valor satisface la ecuacion primitiva, pues si $\frac{B}{A} = 4$, será $-\frac{B}{A} = -4$, y en la ecuacion $Ax = -B$, sustituyendo en lugar de x su valor -4, y pasando A al segundo miembro, y poniendo en lugar de $\frac{A}{B}$ su valor supuesto 4, dará evidentemente $A \times -4 = -B$ y luego $-4 = \frac{-B}{A} = -4$. Luego el valor de la incógnita puede ser negativo y satisfacer la ecuacion.

Si en $x = \pm \frac{B}{A}$, suponemos que B se convierta en o (por la reduccion de sus partes, pues B puede resultar igual á $a - a$), se tendrá $x = \pm \frac{o}{A}$, y como o partido por cualquier cantidad es o, será $x = \pm o = o$; valor de x que tambien satisface la ecuacion primitiva $Ax = \pm B$, porque sustituyendo en lugar de x y de B su valor supuesto o, dará $A \times o = O$, y luego $o = o$. Luego el valor de la incógnita puede ser cero, y satisfacer la ecuacion de que procede.

Si en la misma ecuacion $x = \pm \frac{B}{A}$, suponemos que A se reduzca á cero (pues tambien puede ser $A = a - a$), sería $x = \pm \frac{B}{o}$, quebrado cuyo valor desconocemos. Mas si consideramos que en toda division disminuyendo el divisor aumenta el cociente (Arit. 133), y que $\frac{4}{2} = 2$ y $\frac{4}{1} = 4$ y $\frac{4}{0,1} = 40$, y $\frac{4}{0,01} = 400$, y $\frac{4}{0,001} = 4000$ (Arit. 270), veremos que siendo el divisor o, el cociente tiene que ser infinitamente grande ó sea el *infinito* que se expresa con este signo ∞; luego en alguna ecuacion puede resultar $x = \infty$, valor de x, que satisface la ecuacion primitiva $Ax = \pm B$; pues sustituyendo por x su valor hallado, y poniendo á A el valor cero que se le supone, dará $o \times \infty = \pm B$ y luego $o = \pm \frac{B}{\infty}$, quebrado que es igual á o (porque si $\frac{B}{O} = \infty$ tambien $\frac{B}{\infty} = o$ (Arit. 124), y dará $o = o$.

Luego el valor de la incógnita puede ser el infinito y satisfacer la ecuacion de que procede.

Si en la misma ecuacion $x = \pm \frac{B}{A}$ suponemos que B y A se conviertan en o, será $x = \pm \frac{o}{o}$, símbolo cuyo valor ó significacion no conocemos, pero podremos apreciar, considerando que toda cantidad multiplicada por o da de producto o, y, por lo tanto, que el cociente de dividir o por o es una cantidad cualquiera, ó sea una indeterminada; luego el valor de x es indeterminado ó es cualquiera valor, que satisface la ecuacion primitiva $Ax = \pm B$, pues sustituyendo por A y B sus valores supuesto de o, y por x una cantidad cualquiera, resultará siempre identidad, pues $o \times 7 = o$ da $o = o$, y $o \times 30 = o$ da $o = o$. Luego el valor de la incógnita puede ser indeterminado y satisfacer la ecuacion de que procede.

Finalmente, como los valores de A y de B pueden ser tales, que B no sea divisible por A, evidentemente $\frac{B}{A}$ puede ser una fraccion, y ser una fraccion el valor de x, que satisfará la ecuacion primitiva, pues suponiendo que $B : A = \pm \frac{n}{m}$ será $A \times \pm \frac{n}{m} = \pm B$, y $\pm \frac{n}{m} = \pm \frac{B}{A}$, que como se supone que $\frac{B}{A}$ da de cociente $\pm \frac{n}{m}$, será $\frac{n}{m} = \frac{n}{m}$; pero valor que puede no ser aceptable si las condiciones del problema reclaman resultado entero.

Luego queda en todas sus partes demostrado el teorema.

184. *Observacion.* El resultado ∞ y $\frac{o}{o}$, no se obtiene en las ecuaciones sino cuando se resuelven por medio de una fórmula general; pero resueltas directamente, el resultado infinito se manifiesta por la ecuacion final $o = A$, y el indeterminado por la $o = o$. Sin embargo, huyendo de aniquilar la incógnita como conviene para determinar su valor (114), se obtendrá aún por el método directo los resultados ∞ y $\frac{o}{o}$.

Pues, por ejemplo, $\frac{x}{3} = \frac{x+5}{3} = 3x = 3x + 15 = 3x - 3x = 15$ da $o = 15$; pero tambien $\frac{x}{3} = \frac{x+5}{3} = 3x = 3x + 15 = 3x - 3x = 15$ $= (3-3)\,x = 15$ da $x = \frac{15}{3-3} = \frac{15}{0} = \infty$ y análogamente $\frac{x}{3} = \frac{x}{3} = 3x = 3x = 3x - 3x = o$ da $o = o$; pero tambien $3x - 3x = o = (3-3)\,x = o$ da $x = \frac{o}{3-3} = \frac{o}{o}$.

185. *Observacion* 2.ª El valor $\frac{o}{o}$ que resulta de la incógnita proviene algunas veces de algun factor o que aniquila los dos términos de un quebrado á que la incógnita es igual; pero huyendo de esa aniquilacion, la incógnita resultará con un valor determinado. En efecto, si tenemos $x = \frac{a^2b - ab^2}{a^2 - b^2}$, y se supone que $a = b$, y se sustituye en la ecuacion por b, su valor a dará $x = \frac{a^3 - a^3}{a^2 - a^2}$ $= \frac{o}{o}$; pero huyendo de aniquilar los términos de ese quebrado, no haciendo la sustitucion de a por b, hasta obtener una ecuacion en que no se aniquilen las cantidades conocidas, y considerando que $a - b$ es un factor del numerador y del denominador, tendremos que $x = \frac{a^2b - ab^2}{a^2 - b^2}$ podrá dar $x = \frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)}$, y suprimiendo ahora el factor comun $a - b$, dará $x = \frac{ab}{a+b}$, en cuya ecuacion ya no hay inconveniente en poner por b su valor a, pues dará $x = \frac{a^2}{2a} = \frac{1}{2}a$.

186. Teorema. *El valor negativo hallado á la incógnita en una ecuacion, es real y aceptable si la cantidad que representa, por su naturaleza es susceptible de ser considerada en dos sentidos enteramente opuestos. En otro caso representa el absurdo, porque el problema lo sea, ó esté mal planteado.*

Demostracion. Si los dos vapores que con desigual velocidad marchan por el rio del problema citado (123), y que van en la misma direccion de la corriente (que puede considerarse positiva y le contraria rio arriba negativa) se supone que el que va delante anda más que el que va detras en la misma proporcion del problema de 3 á 2 millas, por la fórmula (139) $x = \frac{da'}{a - a'}$, se tendrá $x = \frac{5 \times 3}{2 - 3} = \frac{15}{-1} = -15$.

Valor de x, real y aceptable, porque la cantidad á que se refiere puede considerarse en dos sentidos enteramente opuestos, y lo que -15 dice, es que los vapores no se encontraran en ninguna parte, pero que se han encontrado 15 millas rio arriba del punto donde está el más avanzado, ó 10 del punto en donde está el más atrasado.

Y sería evidentemente absurdo un resultado -15 si se tratase de determinar la distancia de dos ciudades; luego queda el teorema demostrado.

187. *Observacion.* Un resultado negativo puede no ser aceptable, aunque se refiera á una cantidad, que pueda considerarse en dos sentidos enteramente opuestos, si tal signo del resultado nace de alguna falsa apreciacion en el planteo, ó de una equivocacion en el cálculo, lo que se conocerá viendo si satisface las condiciones del problema con tal signo, como hemos visto en el ejemplo de los vapores. Pues si el caso fuera que el vapor que va delante fuera el de ménos velocidad, y obtuviéramos, por ejemplo, -15, fácilmente conoceriamos que no satisfacía las condiciones del problema, pues andando el que va detras más que el que va delante, no han podido encontrarse antes; y, por lo tanto, que el signo negativo nacia de algun error ó falsa apreciacion en el planteo del problema. Puede, en efecto, al quererlo resolver por la fórmula $x = \frac{da'}{a - a'}$, haber cambiado los valores de a' y a, y haber puesto al que va delante la mayor velocidad y resultar -15 debiendo resultar $+10$. Siendo muy fácil tambien que, resolviendo el problema por el método directo, haya habido una equivocacion, por ejemplo, en $\frac{x+5}{x} = \frac{3}{2} = 2x + 10 = 3x$, al pasar el $2x$ al segundo miembro, y convertirlo en primero, se haya indebidamente cambiado el signo á 10 por creer que pasaba realmente á otro miembro y resultar así $3x - 2x = -10$. De cualquier modo el error, si lo es, se podrá reconocer fácilmente.

188. Teorema. *El valor o hallado en una ecuacion á una incógnita, es aceptable si la cantidad á que se refiere puede considerarse en dos sentidos enteramente opuestos, pues en ese caso no representa* la *nada, sino el* minimum *que une las cantidades positivas con las negativas. En otro caso significan el absurdo del problema ó su mal planteo.*

Demostracion. Si en el mismo problema de los vapores, se supone $d = o$, la fórmula dará $x = \frac{o \times 2}{3 - 2} = \frac{o}{1} = o$. Resultado aceptable, porque dice que los vapores que marchan desigualmente en igual direccion, ni se han encontrado ni se encontrarán; pero que estan juntos en el momento en que se hace la pregunta; y en efecto, juntos estarán si la distancia que los separa es cero.

Y ese valor o, significará evidentemente el absurdo, si se buscase la distancia que hay del sol á la tierra.

Luego el teorema está demostrado.

189. *Observacion.* Evidente es tambien que un resultado o puede provenir de una falsa apreciacion del problema para su planteo, ó de un error en el cálculo; pero tambien es evidente que se reconocerá tal causa viendo si o satisface las condiciones del problema, como las satisface en el ejemplo citado.

190. Teorema. *El valor infinito* ∞ *hallado á una incógnita en una ecuacion, significa la imposibilidad ó el absurdo.*

Demostracion. Si en el problema de los vapores de que nos venimos ocupando, se supone que marchen con igual velocidad, por la fórmula $x = \frac{da'}{a - a'}$, se tendrá $x = \frac{5 \times 3}{3 - 3} = \frac{15}{0} = \infty$, valor de la incógnita que satisface las condiciones del problema, pues en efecto, dos vapores separados por una distancia de 5 millas, y que marchen en la misma direccion y con igual velocidad, no se encontrarian nunca ó se encontrarian á una distancia infinitamente grande, tanto que la imaginacion no la alcanza y la iguala á nunca. Luego el teorema queda demostrado.

191. *Observacion.* Tambien el infinito podrá ser resultado de error en el cálculo ó en el planteo, y ya se indicó (185), que puede manifestarse en la forma $o = A$, cuando el problema se resuelve directamente.

192. Teorema. *El valor indeterminado* $\frac{0}{0}$, *hallado en una ecuacion á una incógnita, significa que tal ecuacion es una identidad,* y *puede ser aceptable en ciertos problemas.*

Demostracion. En el problema de los vapores si no sólo se supone $d = o$, sino que tambien la velocidad del uno sea igual á la del otro: la fórmula dará $x = \frac{o \times 3}{3 - 3} = \frac{o}{o}$, resultado indeterminado que satisface el problema, porque si los vapores están juntos y marchan con igual velocidad, se encontrarán en cualquier parte, ó sea en todas. Pero el problema es esencialmente absurdo, porque ¿quién hace pregunta semejante? Y ese absurdo se revela desde su mismo planteo, ya se haga por la forma general como se ha visto, ya por el método directo, pues daria $\frac{x + o}{x} = \frac{3}{3}$: luego el teorema queda demostrado.

193. *Observacion.* Diciendo el resultado indeterminado que la ecuacion no es tal, sino una identidad, puede ser hija del mal Planteo ó de algun error de cálculo si ve que cualquier cantidad no conviene á las condiciones del problema, como conviene en el caso de los vapores; pero debe ademas tenerse en cuenta si la indeterminacion proviene de un factor cero, que ha aniquilado dos términos (186).

194. *Lema.* El valor fraccionario hallado á una incógnita, es inaceptable si el problema reclama enteros por resultado; y lo mismo puede decirse de los valores enteros, positivos ó negativos si el problema reclama el resultado dentro de ciertas condiciones que no llenan los enteros hallados por su magnitud ó cualesquiera otra circunstancia.

Porque es evidente que si por un problema se quiere determinar los muertos que ha habido en una batalla por datos especiales que se tienen, y se halla una fraccion, este resultado será inaceptable; y si satisface, sin embargo, la ecuacion de que procede, dirá que ésta está mal planteada ó que el problema por la naturaleza de sus datos ó por su número es insoluble. Y análogamente, si el enunciado del problema reclamara un resultado dentro de ciertos límites, y se hallase un entero fuera de ellos, tampoco sería aceptable.

195. Discutamos ahora en virtud de lo sentado en los números antecedentes la ecuacion ó fórmula general, deducida del problema (143), y que vimos (146) era $x = \frac{c - 2c'}{2a' - a}$ en la que segun dijimos c representa un capital, c' otro menor, a el ahorro del propietario del capital mayor (que se supuso ser menor que el ahorro del otro), y a' el ahorro mayor del propietario del capital menor.

Si c se supone que sea menor que $2c'$, el numerador del quebrado resultará negativo, y todo el quebrado, si el denominador es positivo, porque $2a'$ sea mayor que a; y negativo tambien si aunque c sea mayor que $2c'$, fuese a mayor que $2a'$. La incógnita en uno y otro caso tendria valor negativo, que debe ser aceptable (187), porque x representa una cantidad que puede ser considerada en dos distintos sentidos y opuestos, tiempo *porvenir* y tiempo *pasado*. Veamos, pues, prácticamente si ese *resultado negativo* satisfaria la condicion de un problema análogo al que sirvió para deducir la expresada fórmula. Si c fuese 79 talegas y $c' = 50$, siendo $a = 3$ y $a' = 5$, tendríamos $x = \frac{79 - 2 \times 50}{(2 \times 5) - 3} = \frac{-21}{7} = -3$; y en efecto, -3 años es resultado aceptable, porque teniendo 50 talegas el que ahorra 5 anuales, y 79 el que ahorra 3, tres años antes, el primero tendrá 35, y el segundo 70, que es doble de 35. Y si tenemos que $c = 24$ y $c' = 9$, pero que el ahorro de c, que se llama a, es 7, y el de c' que se llama $a' = 3$, tendremos $x = \frac{24 - 2 \times 9}{2 \times 3 - 7} = \frac{6}{-1} = -6$, que dice que hace seis años el capital del c' era mitad del de c, pues en efecto, ahorrando aquel 3 talegas anuales, tendria hace un año 6, hace dos 3, hace tres 0, hace cuatro -3, ó sea 3 de deuda; hace cinco -6, y hace seis una deuda de 9; y el otro ahorrando 7, tendria hace seis años -18, ó sea una deuda de 18, doble que la del otro.

196. *Veamos ahora el valor o* que puede tener la incógnita. Si $2c' = c$, la fórmula $x = \frac{o}{2a' - a} = o$. Que dice que no pasarán ningunos años para que el capital del uno sea doble del otro; y en efecto, si por ejemplo, $c = 70$, y $c' = 35$, tendriamos $x = \frac{70 - 2 \times 35}{2 \times 5 - 3} = \frac{o}{7} = o$; y en efecto, sean cuales sean los ahorros anuales que tengan, ya 35 talegas es la mitad de 70.

197. *Veamos ahora el valor infinito.* Si en la fórmula suponemos que sea $c > 2c'$, pero que $2a' = a$, dará $x = \frac{c - 2c'}{2a' - a} = \frac{c - 2c'}{o} = \infty$, resultado que dirá la imposibilidad de que se verifique lo que se desea, pues si suponemos $c = 58$ y $c' = 15$ y $a = 4$ y $a' = 2$, dará $x = \frac{58 - 2 \times 15}{2 \times 2 - 4} = \frac{28}{o} = \infty$, que dice que no siendo el capital c', mitad del c, y ahorrando el de este doble que el de aquel, nunca llegará á ser aquel mitad de este.

198. *Veamos ahora el resultado indeterminado.* Si suponemos que $c = 2c'$ y que $2a' = a$, dará $x = \frac{c - 2c'}{2a' - a} = \frac{o}{o}$. Veamos si ese resultado es tambien satisfactorio. Para ello, necesitamos que, por ejemplo, $c = 70$, $c' = 35$, $a' = 3$ y $a = 6$, y dará $x = \frac{70 - (2 \times 35)}{(2 \times 3) - 6} = \frac{o}{o}$. Y en efecto, siendo el capital del uno ya doble del capital del otro, y ahorrando aquel doble que este, siempre tendrán el uno doble del otro, y cualquier valor que se suponga á x satisface el problema, pues si se le supone, por ejemplo 2, dentro de dos años, el uno tendrá 82 talegas y el otro 41, etc.

199. El resultado indeterminado no por eso se puede llamar en todos casos aceptable, pues aunque, segun se indicó (194), satisfaga las condiciones del problema último, siempre dirá que es absurdo y análogamente el resultado infinito y aun el o á veces. ¿Quién pregunta, en efecto, cuando dos que ahorran tendrán el uno doble que el otro si ya lo tienen; ni sino teniéndolo el que tiene ménos, ahorra ménos que el que tiene más; ni si teniendo el uno doble que el otro, ahorra tambien doble que el otro?

ARTÍCULO VI.

IMPOSIBILIDAD É INDETERMINACION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

200. Hasta ahora no hemos considerado otras ecuaciones de primer grado que las determinadas, pues áun en aquellos casos en que una ecuacion produce, para valor de la incógnita, una cantidad indeterminada, ella prueba que la ecuacion no es verdadera ecuacion, sino una identidad. Tenemos, pues, que ocuparnos en este artículo de las ecuaciones indeterminadas, por tener más incógnitas que ecuaciones; pero ántes corresponde que tratemos de las que son indeterminadas, á pesar de haber tantas ecuaciones como incógnitas, y ese verdadero análisis lo haremos tambien por el mismo método sintético, que seguir invariablemente nos hemos propuesto.

201. *Lema.* Un sistema de ecuaciones de primer grado será soluble y determinado, aunque alguna de sus ecuaciones produzca, para valor de la incógnita á que quede reducida, una cantidad negativa, la unidad y áun á veces 0; pero el sistema será insoluble, si el valor de alguna de sus incógnitas fuese el infinito ó el indeterminado, y si el 0 no satisface las condiciones del problema.

Porque es evidente que si un valor negativo satisficiese las condiciones especiales de un problema, y consiguientemente el sistema de ecuaciones de su planteo, y lo mismo la unidad y áun el 0, el sistema será soluble, pues que tales valores, sustituidos en el sistema reducido, irian produciendo los de las otras incógnitas que no podrian por ménos de ser aceptables, como se verá prácticamente en el primer ejemplo del ejercicio del fin del capítulo. Pero evidentemente que si alguna incógnita del sistema resulta con valor infinito ó indeterminado, y lo mismo el 0, no satisfaciendo las condiciones del problema, al sustituir ese valor en las demas ecuaciones, haria todo el sistema de solucion imposible ó indeterminada como veremos en seguida.

202. Teorema. *El valor infinito hallado á una incógnita de un sistema de ecuaciones de primer grado, y algunas veces el 0, hace el sistema insoluble, y dice que sus ecuaciones son contradictorias ó incompatibles.*

Demostracion. Si tenemos el sencillo sistema siguiente

$$\begin{array}{l} x - z = a \\ z - x = 2a \end{array} \quad \text{dará la primera } x = a + z,$$

y sustituyendo este valor en la segunda, será $z - a - z = 2a$, y $z - z = 2a - a$ y $z(1 - 1) = a$ y $z = \frac{a}{1-1} = \frac{a}{o} = \infty$, y como en efecto las ecuaciones propuestas son evidentemente contradictorias, pues si $x - z = a$, ¿cómo la $z - x$ ha de poder igualar al duplo de la a? Y esa incompatibilidad ó contradiccion puede ser tan grande, que por ella resulte una de las incógnitas igual á 0 ó las dos. En efecto, si tenemos que $x = \frac{z}{2}$ y $z = \frac{x}{2}$, dará $2x = z$ y $2z = x$, y sustituyendo en la primera por x su valor $2z$, ó en la segunda por z, su valor $2x$ dará $4z = z$, y $4x = x$, que dan respectivamente $4z - z = o$, y $4x - x = o$, y $3z = o$, y $3x = o$, y $z = \frac{o}{3} = o$, y $x = \frac{o}{3} = o$, resultado que dice que las ecuaciones son tan contradictorias, que sólo teniendo las incógnitas el valor o, las satisfará; luego el teorema queda demostrado.

203. Teorema. *El valor indeterminado $\frac{o}{o}$, hallado á una incógnita de un sistema de ecuaciones, lo hace insoluble ó indeterminado, y dice generalmente que dos de sus ecuaciones expresan una misma condicion.*

Demostracion. Si tenemos el sistema sencillo

$$\begin{array}{l} x + z = a \\ 2x + 2z = 2a \end{array} \quad \text{dará} \quad \begin{array}{l} x = a - z \\ 2 \times (a - z) + 2z = 2a \end{array}$$

y $\quad 2a - 2z + 2z = 2a$ que da $2z - 2z = 2a - 2a$,

que dá $o = o$, ó $z(2 - 2) = 2a - 2a$ que produce $z = \frac{2a - 2a}{2 - 2} = \frac{o}{o}$, resultado que más fácilmente pudimos hallarlo eliminando una incógnita por reduccion, pues daria $2z - 2z = 2a - 2a$ que produce $z(2 - 2) = 2a - 2a$ y $z = \frac{2a - 2a}{2 - 2} = \frac{o}{o}$, resultado indeterminado que hace insoluble el sistema, porque evidentemente lo mismo es decir que x y z valen a, que decir que dos veces x y dos veces z valen dos veces a; luego queda el teorema demostrado.

204. Estos dos teoremas y el lema que le precede, completan la demostracion (156) sobre las condiciones que deben darse á las ecuaciones de un sistema al plantear un problema de muchas incógnitas para que sea soluble.

ARTÍCULO VII.

ANÁLISIS INDETERMINADO DE PRIMER GRADO.

205. *Análisis indeterminado de primer grado*, se llama el que se hace para averiguar los diferentes valores que puede tener una incógnita con valor indeterminado, porque el problema que representa la ecuacion en que se halle, no ha podido ofrecer datos suficientes para plantear tantas ecuaciones como incógnitas.

Así, si se pide hallar dos números cuya suma sea 12, no podrá plantearse otra ecuacion que la siguiente: $x + z = 12$.

Y si se pide hallar tres números cuya suma sea 30, y que el duplo del menor más el mayor, ménos el mediano den 19, no podremos plantear más que el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x + y + z = 30$$
$$2x + z - y = 19.$$

En el primer ejemplo todo cuanto se puede hacer es despejar á x en valor de z diciendo, $x = 12 - z$, y en el segundo ejemplo, podemos eliminar la y, y quedará $3x + 2z = 49$ y $x = \frac{49 - 2z}{3}$; no pudiendo saber fijamente el valor de x, mientras no se conozca el de z; pero el determinar los diferentes valores que puede tener, es justamente lo que se llama análisis indeterminado.

206. Se dice que una incógnita está en *funcion* de otra, cuando el valor de aquella depende del valor que tenga ésta, que se llama *variable*, porque no conociendo lo que vale, se le atribuyen varios valores para ver cuáles son los que satisfacen las condiciones del problema; pues si son pocos los que las satisfacen, la indeterminacion del problema no será á veces notable, y acaso se convierta en verdaderamente determinado.

Así, se pregunta cuántas monedas de á peseta y duros se necesitan para pagar la suma de 11 pesetas, llamando x las piezas de á peseta y z las de á cinco pesetas, tendremos $x + 5z = 11$, única ecuacion que nos permite plantear el problema, y de la que sólo podemos deducir que $x = 11 - 5z$ y $z = \frac{11 - x}{5}$.

En la primera ecuacion, para conocer el valor de x es menester dar á z varios valores, probando con 0, 1, 2, etc.; y análogamente, para conocer el valor de z en la segunda ecuacion, tendremos que dar valores diferentes á x.

Pero considerando que si en $x = 11 - 5z$ á z se le da un valor mayor de 2, por ejemplo 3, resultará $x = 11 - 5 \times 3 = -4$, valor negativo que no satisface el problema, se deduce que z no puede tener más valor que 2, ó 1 ó o. Si le damos el valor de 2 será $x = 11 - 5 \times 2 = 1$, que dirá que si el número de monedas de á cinco pesetas es 2, el de monedas de á peseta será 1; y en efecto, dos duros y una peseta son 11 pesetas. Si ahora le damos á z el valor de 1, tendremos que $x = 11 - 5 \times 1 = 6$, y dirá que si el número de duros es 1, el de pesetas deberá ser 6, y en efecto, 6 pesetas y 1 duro son 11 pesetas. Finalmente, si el número de duros es o, será $x = 11 - 5 \times o = 11$, que dice que sino hay ningun duro, el número de pesetas será 11. Por todo lo que se ve que el problema, aunque indeterminado, es casi determinado, pues sólo admite tres soluciones, que por su corto número puede decirse que contestan á la pregunta del problema, aunque no completamente, pues se necesitaba que se hubiese preguntado de cuántas maneras se podrá pagar, etc. Pero como así puede convenir hacer la pregunta, se comprenderá que todas las soluciones de los problemas indeterminados son á veces aceptables.

207. No es del dominio del Algebra elemental, y ménos bajo el método sintético con que le tratamos, el análisis indeterminado de primer grado, y sólo para que se tenga de él una sucinta idea suficiente para llenar el objeto de esta obra, hemos apuntado y ligeramente explicado en lo que consiste, y los ventajosos resultados que puede dar; y así terminaremos este artículo, con la indicacion de otro caso que no conocemos, en que un sistema de ecuaciones puede ser indeterminado.

208. Cuando un sistema de ecuaciones tiene más que incógnitas es determinado, si tomando solamente tantas ecuaciones como incógnitas, y hallando sus valores por el sistema ordinario, sustituidos en las ecuaciones que para hallarlos se desatendieron, las satisfacen. Si así no fuese, el sistema es imposible, pues que no satisfará todas las condiciones del enunciado del problema.

ARTÍCULO VIII.

EJERCICIO DE PLANTEO, REDUCCION Y RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON TANTAS ECUACIONES COMO INCÓGNITAS.

209. Planteemos y resolvamos el problema siguiente, como comprobante de lo que dijimos (200), de que en un sistema de ecuaciones los valores negativo y cero, pueden ser aceptables por satisfacer las ecuaciones y las condiciones del problema.

Problema. Preguntados *cinco* hermanos qué *capital* tienen, responden que todos sus *capitales juntos* suman 5 *talegas*. Que el *duplo* del capital del *mayor más* el del *segundo más* el *triplo* del *tercero*, *más* el del *cuarto*, *ménos* el del *quinto*, componen 12 talegas. Que el *triplo* del *mayor más* el *triplo* del *segundo más* el *cuadruplo* del *tercero*, *más* el *duplo* del *cuarto*, suman 19 talegas. Que *un tercio* del *mayor* más la *mitad* del *segundo*, más el *triplo* del *tercero*, más el *triplo* del *cuarto*, componen 5 talegas. Y finalmente, que la *mitad* del *mayor más* la *mitad* del *segundo*, más la *mitad* del *tercero*, *más* el *cuadruplo* del *cuarto*, suman 3 talegas.

Planteo. Llamando z al capital del mayor, y al del *segundo*, x al del *tercero*,

u al del *cuarto* y t al del *quinto*, como la primer condicion del problema, es que todos los capitales juntos compongan 5 talegas, podremos plantear la primera ecuacion del sistema, diciendo

$$z + y + x + u + t = 5,$$

y análogamente las otras cuatro que formarán el sistema siguiente:

$$[A]\quad \begin{array}{l} z + y + x + u + t = 5 \\ 2z + y + 3x + u - t = 12 \\ 3z + 3y + 4x + 2u = 19 \\ \frac{z}{3} + \frac{y}{2} + 3x + 3u = 5 \text{ que da } 2z + 3y + 18x + 18u = 30 \\ \frac{z}{2} + \frac{y}{2} + \frac{x}{2} + 4u = 3 \text{ que da } 4z + 4y + 4x + 32u = 24 \end{array}$$

Eliminando la t que sólo figura en las dos primeras ecuaciones, nos dará el sistema segundo reducido á 4.

$$[B]\quad \begin{array}{l} 3z + 2y + 4x + 2u = 17 \\ 3z + 3y + 4x + 2u = 19 \\ 2z + 3y + 18x + 18u = 30 \\ 4z + 4y + 4x + 32u = 24 \end{array}$$

Eliminando la z entre la primera y la segunda del sistema [B], nos da la ecuacion $y = 2$, equivalente á ambas juntas en la que aparece eliminada, no sólo la z, sino la x y la u. Eliminando la misma z, entre la primera y la tercera, nos dará primeramente, dándole á z igual coeficiente,

$$\begin{array}{l} 6z + 4y + 8x + 4u = 34 \\ 6z + 9y + 54x + 54u = 90 \quad \text{y} \quad 5y + 46x + 50u = 56 \end{array}$$

y eliminando la misma z entre la primera y la cuarta, nos dará análogamente

$$\begin{array}{l} 12z + 12y + 12x + 96u = 72 \\ 12z + 8y + 16x + 8u = 68 \quad \text{y} \quad 4y - 4x + 88u = 4 \end{array}$$

por lo que el sistema reducido á tres, será (aunque pudiera ser otro, porque $y = 2$, ya puede pertenecer al sistema de dos ecuaciones).

$$[C]\quad \begin{array}{l} y = 2 \\ 5y + 46x + 50u = 56 \\ 4y - 4x + 88u = 4 \end{array}$$

Eliminando la y entre la primera y la segunda ecuacion, haciendo primero que tengan igual coeficiente, dará

$$\begin{array}{l} 5y = 10 \\ 5y + 46x + 50u = 56 \quad \text{y} \quad 46x + 50u = 46 \end{array}$$

Eliminando la misma y entre la primera y tercera, dará análogamente

$$\begin{array}{l} 4y = 8 \\ 4y - 4x + 88u = 4 \quad \text{y} \quad -4x + 88u = 4 - 8 = -4 \end{array}$$

y tendremos el sistema reducido á los dos siguientes:

$$[D]\quad \begin{array}{l} 46x + 50u = 46 \\ 4x + 88u = -4 \end{array}$$

Eliminando x haciendo primeramente que tenga en ambas ecuaciones el coeficiente dará

$$\begin{aligned} 184x + 200u &= 184 \\ -184x + 4084u &= -184 \quad \text{y} \quad 4284u = 0 \end{aligned}$$

Despejando en esta ecuacion á u, será $u = \frac{o}{4284} = o$, y sustituyendo este valor en la primera del sistema reducido á 2, nos dará $46x = 46$ y $x = \frac{46}{46} = 1$.

Sustituyendo ahora los valores hallados á x y u, en cualquiera de las ecuaciones del sistema reducido á tres, para hallar el valor de y, (aunque inútilmente, porque ya lo conocemos por la primera del dicho sistema), nos dará $5y + 46 = 56$ y $y = \frac{56 + 46}{5} = 2$, y sustituyendo los valores hallados á z, á y, á x y á u en la primera del sistema primitivo, nos dará $3 + 2 + 1 + o + t = 5$; y despejando á t, dará $t = 5 - 6 = -1$.

Luego los valores de las cinco incógnitas, son $t = -1$, $u = o$, $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$, que á pesar de ser uno o, otro negativo y otro la unidad, satisfacen las ecuaciones, como puede verse sustituyéndolos en cualquiera del sistema primitivo, por ejemplo, en la primera, pues dará $3 + 2 + 1 + o - 1 = 5$ que da $5 = 5$; pues aunque en la ecuacion t tenga el signo $+$ como vale -1, y para sumar algebráicamente se dejan los sumandos con sus mismos signos, el sumando $-t = -1$, deberá restarse á los otros. Y análogamente en la segunda, como t tiene signo que indica que debe restarse, y el restar en Algebra se hace cambiando el signo del sustraendo, para restar $-t = -1$, deberá ponérsele el $+$ y sumarse con los demas términos, y será $6 + 2 + 3 + o + 1 = 12$ que da $12 = 12$.

Y esos valores satisfacen tambien las condiciones del problema, pues si el hermano mayor tiene 3 talegas, el segundo 2, el tercero 1, el cuarto no tiene nada y el quinto debe 1; el capital de todos junto valdrá realmente 5 talegas; y 12 el duplo del mayor, más el del segundo, más el triplo del tercero, más el cuarto, ménos el capital del quinto, que siendo deuda diferirá de la suma de los capitales de los otros, en tal suma y el montante de su deuda, y por eso la diferencia de tal suma y tal deuda es la suma de ambas cantidades; y análogamente, se verá que satisface las demás condiciones del problema.

210. Plantear y resolver los problemas siguientes:

1.° Con 51 monedas unas de 5 pesetas, y otras de 2, se ha pagado la cantidad de 159 pesetas, y se desea saber cuántas monedas se han dado de cada clase.

Llamando x el número de monedas de cinco pesetas, y z el de á dos, se tendrá que como todas las monedas son en número de 51, y valen pesetas 159 todas las de á 5 pesetas, más todas las de á 2, podremos plantear un sistema de dos ecuaciones cuyo resultado debe ser $19 = x$ y $32 = z$.

2.° Una persona caritativa da un dia de limosna 75 pesetas á 15 hombres, 24 mujeres y 31 niños. Otro dia reparte 103 pesetas y 80 céntimos entre 30 hombres, 18 mujeres y 40 niños. Y en fin, otro dia da 64 pesetas á 12 hombres, 25 mujeres y 19 niños; y se desea saber cuánto ha dado á cada hombre, á cada mujer y á cada niño.

Representando por x, por y y por z, lo que respectivamente ha dado á cada hombre, á cada mujer y á cada niño, se planteará el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} 15x + 24y + 31z &= 75 \\ 30x + 18y + 40z &= 103{,}8 \\ 12x + 26y + 19z &= 64 \end{aligned}$$

Debe resultar $x = 2^p$ $y = 1^p{,}10$, y $z = 0{,}60$.

211. Conviniendo ejercitarse mucho en la resolucion de los sistemas de ecuaciones, eliminando por los tres métodos enseñados, ponemos á continuacion sistemas ya planteados con sus soluciones.

	Sistema	*Solucion*
1.°	$11x - 10y = 14$ $5x + 7y = 41$	$x = 4$ $y = 3$
2.°	$3x + 5y = 31$ $4x - y = 26$	$x = 7$ $y = 2$
3.°	$ax + by = m$ $cx + dy = n$	$x = \frac{dm - bn}{ad - bc}$ $y = \frac{an - cm}{ad - bc}$
4.°	$(x+5)(y+7) = (x+1)(y-9) + 112$ $2x + 10 = 3y + 1$	$x = 3$ $y = 5$
5.°	$4x - 3y + 2z = 9$ $2x + 5y - 3z = 4$ $5x + 6y - 2z = 18$	$x = 2$ $y = 3$ $z = 5$
6.°	$x + y + z = 29,25$ $x + y - z = 18,25$ $x - y + z = 13,75$	$x = 16$ $y = 7,75$ $z = 5,5$
7.°	$x + y = 10$ $x + z = 19$ $y + z = 23$	$x = 3$ $y = 7,75$ $z = 5,5$
8.°	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b$ $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c$	$x = \frac{2}{a + b - c}$ $y = \frac{2}{a + c - b}$ $z = \frac{2}{b + c - a}$
9.°	$3x + 4z = 20$ $5x - 2u = 18$ $4z + 9y = 35$ $6x - 7u = 17$	$x = 4$ $y = 3$ $z = 2$ $u = 1$
10.	$3x - 2y - 5z = 11$ $5x + 3y - 7u = 47$ $11u - 2t + 4z = 9$ $8t - 5y = 25$ $2x - 13u = 5$	$x = 9$ $y = 3$ $z = 2$ $t = 5$ $u = 1$

NOTA. Los diez problemas anteriores y alguno que otro de esta obrita, son copiados del tratado de Algebra francés de Eysseric y Pascal, porque habiendo dado originales los que nos han servido de principales ejemplos para el planteo y resolucion de las ecuaciones, hemos creido que el copiar los ejercicios anteriores no probaria otra cosa que nuestra poca desocupacion ó nuestra pereza para hallar soluciones á otros ejemplos originales. Ni hemos temido tampoco que el notar esa copia haga nacer la idea de que nuestra Algebra elemental sea casi una traduccion de la francesa, pues comparándola se verá que ni en el método siquiera se parece la una á la otra, ni parecido se encontrará á la nuestra con la de ningun otro autor aunque sea inferior á todas.

CAPÍTULO V.

POTENCIAS Y RAÍCES DE LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS.

ARTÍCULO PRIMERO.

PRELIMINARES.

212. *Potencia* de una cantidad algebráica se llama como la de una numérica (Arit. 470), al producto que resulta de multiplicarla por sí misma tantas veces como unidades ménos una tiene el exponente que la indica; ó sea, entrando tantas veces por factor como unidades tiene tal exponente. Y *elevar* una cantidad algebráica á una potencia, es averiguar el producto que constituye su potencia, que tambien se llama *cuadrarla* si es la segunda, *cubicarla* si es la tercera, etc.

213. *Raiz* de una cantidad algebráica, es aquella que elevada á una potencia igual al índice de la raiz, produce aquella de que se llama raiz; y *extraer* la raiz de una cantidad algebráica, es averiguar qué cantidad elevada á la potencia correspondiente produce la radical.

214. La elevacion á potencias y extraccion de raíces son operaciones comunes al Algebra y á la Aritmética, como lo son las cuatro principales de los enteros, las de los quebrados, las de las razones y proporciones, y áun las de las progresiones y logaritmos; no sucediendo lo mismo con todas las partes de la Aritmética, pues los quebrados decimales, por ejemplo, no puede tomarlos en consideracion el Algebra, porque los quebrados literales, no teniendo valor numérico fijo en sus denominadores, no pueden tener la circunstancia característica de los decimales. Las potencias y raíces, pues, de las cantidades, constituyen materia algebráica que debemos tratar en este lugar, cuyo prévio conocimiento es indispensable para resolver las ecuaciones de segundo grado.

ARTÍCULO II.

ELEVACION Á POTENCIAS DE LOS MONOMIOS ENTEROS Ó FRACCIONARIOS.

215. Regla 1.ª *Para elevar un monomio entero á una potencia cualquiera, se eleva á ella su coeficiente numérico por las reglas aritméticas.* (Arit. 477 y 480 y siguientes). *Se multiplican en seguida los exponentes de las letras por el que indique la potencia á que deba elevarse la cantidad, y se tendrá la de la potencia deseada; cuyo signo será positivo si el de la cantidad dada es positivo, ó si, aunque sea negativo, el grado de la potencia es par; y será negativo en caso contrario.*

Ejemplos. 1.° $(5a^3bc^2)^2 = 5 \times 5 \times a^{3\times 2} \times b^{1\times 2} \times c^{2\times 2} = 25a^6b^2c^4$

2.° $(2a^2b^2c^3)^3 = -8a^6b^6c^9$.

Demostracion. La definicion de la potencia de una cantidad (Arit. 470) exige que para elevarla al cuadrado se multiplique por sí misma una vez, ó sea entrando dos veces por factor; por lo que $(5a^3bc^2)^2 = 5a^3bc^2 \times 5a^3bc^2$. Y como para multiplicar un monomio por otro se multiplican los coeficientes numéricos y se suman los exponentes de las letras iguales (47), y esto se consigue siguiendo la regla; y como relativamente á signos la multiplicacion de signos semejantes da producto positivo, y la de desemejantes negativo (48), es evidente que todo cuadrado será positivo y que cualquiera otra potencia será positiva ó negativa en los casos que dice la regla; pues una cantidad positiva, entre cuantas veces entre por factor, siempre dará producto positivo; pero una negativa, entrando dos veces por factor, dará producto positivo, y lo mismo entrando cuatro, seis, etc.; pero entrando tres veces ó cinco, etc., el producto será negativo; (pues $- \times - = +$; pero $+ \times - = -$, y por lo tanto $- \times - \times - = -$). Luego queda en todas sus partes demostrada la regla.

216. *Escolio.* La potencia de grado par de una cantidad positiva será igual á la misma potencia de la misma cantidad negativa, y por lo tanto $+a^2b^2$ puede provenir de $(ab)^2$ y de $(-ab)^2$; pero toda potencia negativa impar proviene necesariamente de una cantidad negativa, al paso que siendo par no puede provenir de ninguna cantidad real, por lo que las cantidades radicales negativas de grado par se llaman *imaginarias*, como $\sqrt{-a^2b^2}$; (pues $-a^2b^2$ puede considerarse como potencia de $-ab$ y de $+ab$, pero tambien como producto de $+ab \times -ab$).

217. Regla 2.ª *Para elevar á una potencia cualquiera un quebrado ó fraccion algebráica, se eleva numerador y denominador y se tiene el quebrado potencia con el signo que le corresponda, segun el del quebrado dado y el grado de la potencia.*

Ejemplos.

$$\left(\frac{-ab}{cd}\right)^2 = \left(-\frac{ab}{cd}\right)^2 = +\frac{a^2b^2}{c^2d^2}.$$

Demostracion.

Porque $\left(\frac{-ab}{cd}\right)^2 = \frac{-ab}{cd} \times \frac{-ab}{cd} = \frac{+a^2b^2}{+c^2d^2} = +\frac{a^2b^2}{c^2d^2}$,

y lo mismo $\left(\frac{-ab}{-cd}\right)^2 = \left(+\frac{ab}{cd}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2d^2}$;

porque $\left(\frac{-ab}{-cd}\right)^2 = \frac{-ab}{-cd} \times \frac{-ab}{-cd} = \frac{+a^2b^2}{+c^2d^2} = +\frac{a^2b^2}{c^2d^2}$;

y finalmente $\left(\frac{-ab}{cd}\right)^3 = \left(-\frac{ab}{dc}\right)^3 = -\frac{a^3b^3}{c^3d^3}$,

porque $\left(\frac{-ab}{cd}\right)^3 = \frac{-ab}{cd} \times \frac{-ab}{cd} \times \frac{-ab}{cd} = \frac{-a^3b^3}{+c^3d^3} = -\frac{a^3b^3}{c^3d^3}$.

Luego queda la regla demostrada.

ARTÍCULO III.

POTENCIAS DE LOS POLINOMIOS.

218. Teorema. *El cuadrado de un binomio se compone del cuadrado de su primer término, del duplo del primero por el segundo, y del cuadrado de éste, con signo positivo todos los tres términos, si en el binomio, ambos términos tienen igual signo positivo ó negativo, y si lo tienen contrario, será negativo el duplo del primero por el segundo, y positivos los otros; pudiéndose considerar primer término del binomio cualquiera de los dos.*

Ejemplos.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(-a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(-a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Demostracion. Porque lo mismo que demostramos sobre los números (Arit. 501), por la definicion de *potencia* $(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b)$, y por la regla de multiplicacion algebráica (49), $(a+b)\times(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$, y simplificando este producto por la reduccion de sus dos términos semejantes, segundo y tercero, dará $a^2 + 2ab + b^2$. Y análogamente, $(a-b)^2 = (a-b)\times(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Y $(-a-b)^2 = (-a-b)\times(-a-b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Y finalmente, $(-a+b)^2 = (-a+b)\times(-a+b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Luego queda demostrado el teorema.

219. *Corolario.* Para elevar á la segunda potencia un binomio, ó sea cuadrarlo, no hay más que practicar la operacion que claramente indica el enunciado del teorema.

220. *Escolio.* Un binomio no puede ser un cuadrado perfecto, pues que el cuadrado de un monomio es otro monomio, y el de un binomio es un trinomio; pero podrá ser un cuadrado *imperfecto*, que así se llama el que, añadiéndole un tercer término, resulta un cuadrado perfecto.

Así, $a^2 + 2ab$ no es cuadrado perfecto, pero es imperfecto, porque añadiéndole b^2 resulta perfecto; y lo mismo $a^2 - 2ab$, y no será cuadrado imperfecto $a^2 + 2bm$, porque sea cual sea el término que se le añada, no lo hará cuadrado perfecto. Tambien es cuadrado imperfecto $a^2 + 6a$, pues añadiéndole 9 lo será.

pues $\qquad (a+3)^2 = a^2 + 6a + 9.$

221. Teorema. *El cuadrado de un trinomio se compone del cuadrado del primer término, más el duplo del primero por el segundo; más el duplo del primero por el tercero; más el cuadrado del segundo, más el duplo del segundo por el tercero; más el cuadrado del tercero; con signo positivo todos los términos, si todos son positivos ó negativos todos los del trinomio; y en otro* *caso, tendrán signo negativo aquellos que sean duplo del producto de uno positivo por otro negativo.*

Ejemplos. $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$,
y $(-a-b-c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + e^2$,
y $(a-b+c)^2 = a^2 - 2ab + 2ac + b^2 - 2bc + c^2$,
y $(a+b-c)^2 = a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$,
y $(a-b-c)^2 = a^2 - 2ab - 2ac + b^2 + 2bc + c^2$.

Demostracion. Es análoga á la del teorema anterior.

222. *Corolario* 1.° Para elevar al cuadrado ó cuadrar un trinomio, se ejecutan las operaciones que indica el enunciado del anterior teorema.

223. *Corolario* 2.° El cuadrado de un polinomio cualquiera se compone del cuadrado de un primer término, del duplo del primero por el segundo, del duplo del primero por el tercero, del duplo del primero por el cuarto, etc. (segun el número de términos); del cuadrado del segundo, del duplo del segundo por el tercero, del duplo del segundo por el cuarto, etc.; del cuadrado del tercero, del duplo del tercero por el cuarto, y del cuadrado de éste, si se trata de un cuadrinomio; y los signos serán positivos los de todos los términos que son cuadrados de alguno del propuesto, y negativos los que sean duplos de uno positivo y otro negativo; y de esta composicion del cuadrado de cualquier polinomio, se deduce la correspondiente regla para cuadrar cualquier polinomio.

224. *Corolario* 3.° El cuadrado de un trinomio tiene seis términos, el de un cuadrinomio diez términos, etc, y no pueden ser cuadrados perfectos los polinomios compuestos de dos, cuatro, cinco, siete, ocho y nueve términos.

225. *Corolario* 4.° El cuadrado de un polinomio ordenado, resultará ordenado tambien en el mismo órden, y por la misma letra y el primer término del uno será el cuadrado del primero del otro y el último del término.

226. Teorema. *El cubo de un binomio se compone del cubo del primer término, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo; todos los cuatro términos un signo positivo si los dos términos del binomio son positivos; pero si uno es positivo y otro negativo, el cubo del término negativo será negativo, y negativo tambien el del triplo del cuadrado del positivo por el negativo, y si los dos términos del binomio son negativos, negativos serán todos los del cubo.*

Ejemplos.
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(-a+b)^3 = -a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$$
$$(-a-b)^3 = -a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Demostracion. Como $(a-b)^3 = (a-b)^2 \times (a-b) = (a^2 - 2ab + b^2) \times (a-b)$, esta multiplicacion da $a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$, que simplificada da lo que dice el teorema, y manifiesta el primer ejemplo, y análogamente se demostrarán los otros. Luego queda demostrado el teorema.

227. *Corolario.* Para elevar al cubo ó cubicar un binomio, se practicará cuanto indica el anterior teorema.

El cubo de un polinomio y cualquiera de sus potencias, se pueden fácilmente determinar por la fórmula célebre llamado del *binomio de Neuton*, que conoceremos oportunamente.

ARTÍCULO VI.

RAIZ CUADRADA DE LOS MONOMIOS ENTEROS Ó QUEBRADOS.

228. Regla 1.ª *Para extraer la raiz cuadrada de un monomio entero, se extrae aritméticamente* (Arit. 324) *la raiz del coeficiente numérico, y se dividen por dos los exponentes de todas las letras, y se tendrá el monomio raiz del propuesto; no siendo practicable la operacion cuando el coeficiente numérico no tiene raiz cuadrada exacta, ó los exponentes de las letras no son divisibles por 2; en cuyos casos la operacion se deja indicada, y como cantidad radical se simplifica si se puede, como se verá en otro sitio. La raiz cuadrada siempre lleva el signo $\pm$.*

Ejemplo. $\sqrt{16a^2b^4} = \pm 4ab^2$.

Demostracion. La definicion de la raiz y las reglas de la multiplicacion y division algebráicas (49 y 62), prueban que si $4ab^2 \times 4ab^2 = 16a^2b^4$, tambien $\sqrt{16a^2b^4} = \pm 4ab^2$, pues el signo de la ambigüidad está justificado, porque lo mismo $(4ab^2)^2$, da $16a^2b^4$ que $(-4ab^2)^2$. Luego la regla está demostrada.

229. Regla 2.ª *Para extraer la raiz cuadrada de un quebrado, se extrae la del numerador y la del denominador, por la regla anterior, y se tendrá la raiz de la cantidad propuesta; raiz fraccionaria que tendrá el signo de ambigüidad.*

Ejemplo. $\sqrt{\frac{a^2b^4}{4c^6d^4}} = \pm \frac{ab^2}{2c^3d^2}$.

Demostracion. Por razones análogas á las apuntadas en la demostracion de la regla anterior, si $\left(\frac{ab^2}{2c^3d}\right)^2 = \frac{a^2b^4}{2c^3d^2}$, tambien $\sqrt{\frac{a^2b^4}{4c^6d^4}} = \pm \frac{ab^2}{2c^3d^2}$; pues el signo de ambigüidad indica que lo mismo la raiz positiva que la negativa, elevada al cuadrado produce la cantidad cuya raiz se quiere extraer. Luego la regla queda demostrada.

ARTÍCULO V.

RAIZ CUADRADA DE UN TRINOMIO.

La regla más conveniente y sencilla, fundada en la composicion del cuadrado de un binomio (220), es ordenar el trinomio y extraer la raiz de sus términos primero y último, y se tendrán los dos de la raiz, con signo igual positivo ó negativo indistintamente, si los tres términos son positivos y con signo negativo el segundo término, y positivo el primero; si el segundo término del trinomio es negativo; pero daremos á continuacion la regla general, porque es conveniente su aplicacion cuando los términos del trinomio son complicados y no es fácil ver si constituyen un cuadrado perfecto; y porque con tal regla se hace más comprensible la de extraer la raiz cuadrada de un polinonio de más de tres términos.

230. Regla. *Se extrae la raiz cuadrada de su primer término* (despues de estar el trinomio ordenado), *y lo que se halle será el primer término de la raiz que se busca. Se cuadra, y el cuadrado se resta del trinomio propuesto, y el primer término del resto se divide por el duplo de la raiz antes hallada, y se tendrá por cociente el segundo término de la raiz, que se comprobará multiplicándolo por el duplo del primer término hallado para la raiz, y viendo si el producto resultante, más el cuadrado de dicho segundo término, restados del resto anterior del trinomio propuesto, producen* 0.

La raiz hallada debe considerarse con signo de ambigüedad, ó como generalmente se hace, considerando el primero positivo, los demas formarán con él una de las dos raices de diferentes signos que tiene todo cuadrado (216).

Ejemplo.
$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\;a^4 + 2a^2b^2 + b^4} & a^2 + b^2 \\ \hline -a^4 - 2a^2b^2 - b^4 & 2a^2 \times b^2 \end{array}.$$

Demostracion. Suponiendo que el trinomio fuera, como ha sido, un cuadrado perfecto, su primer término, ordenado, debia ser un cuadrado del primero de la raiz (217), y extrayéndola á aquel debia producirle, por lo que hallamos, a^2 para primer término de la raiz, que debe ser $\pm a^2$, pero del que tomamos $+a^2$. Como restado su cuadrado del trinomio, el resto debia contener el duplo del primer término de la raiz por el segundo, más el cuadrado del segundo, y conocíamos el primero, dividiendo por su duplo el resto dicho del trinomio, nos debia dar, como nos dió, por cociente el segundo término de la raiz buscada; que comprobamos, restando dicho producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo del resto anterior del trinomio, y nos dió o; señal de que la raiz hallada era legítima, y que la cantidad propuesta la tenia exacta; y tambien seria raiz de la misma cantidad $-a^2-b^2$: luego queda demostrada la regla.

231. *Observacion.* Si la consideracion de que el trinomio propuesto fuese un cuadrado perfecto, no fuese fundada, alguna de las operaciones hechas no sería en ese caso practicable, y quedaria un residuo, por ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\;a^4 - 2a^2b^2 + b^2} & a^2 \\ \hline -a^4 + 2a^2b^2 - b^4 & 2a^2 \times -b^2 \end{array}.$$

En el que se ve, que aunque el cuadrado de a^2 destruye a^4, y el producto de $2a^2$ por $-b^2$ destruye el $-2ab^2$, el cuadrado de $-b^2$ es $+b^4$, que no destruye á $+b^2$, por lo que el trinomio propuesto no es cuadrado perfecto y su raiz es a^2 con residuo de $-2a^2b^2+b^2$, cuyo valor ni aproximadamente se puede apreciar, y sólo puede decirse que el cuadrado de a^2 más su residuo, equivale al trinomio propuesto, y ademas que á éste, para ser un cuadrado perfecto, le falta sólo $+b^2$ por factor de su tercer término.

ARTÍCULO V.

RAIZ CUADRADA DE UN POLINOMIO CUALQUIERA.

232. Regla. *Para extraer la raiz cuadrada de un polinomio de más de tres términos, se ordena colocando primeramente los términos que tengan letra que esté más repetida; en seguida los que tienen otra letra inmediatamente ménos repetida, y así de los demas. Se extrae la raiz del primer término, y el resultado será el primer término de la raiz que se busca. Se cuadrará y restará del polinomio propuesto. El primer término del resto se dividirá por el duplo de la raiz hallada, y dará por cociente el segundo término de la raiz, que se sumará ó restará segun su signo al duplo del primer término hallado para la raiz; y el binomio que forme, multiplicado por dicho término segundo hallado, se restará del resto anterior del polinomio propuesto. El primer término del nuevo resto que resulte se dividirá por el duplo del primero de la raiz hallada, y el cociente será el tercer término de la raiz, que se le sumará ó restará segun su signo, al duplo del primer término de la raiz más ó ménos el duplo del segundo, y el trinomio resultante multiplicado por el tercer término hallado para la raiz se restará del resto anterior del polinomio propuesto; y así se continuará hasta que no haya más términos que considerar.*

Ejemplo.

$$\sqrt{b^2 + 2ac + 2ab + c^3 + a^2 + 2bc} =$$

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2} & a + b + c \\
\hline
- a^2 - 2ab - \quad - b^2 & (2a + b)\, b \\
\qquad - 2ac \qquad - 2bc - c^2 & (2a + 2b + c)\, c
\end{array}$$

Demostracion. Suponiendo el polinomio propuesto un cuadrado perfecto, como tiene seis términos, tres debe tener su raíz (223), (cosa que no es tan fácil determinar préviamente, cuando el polinomio es muy grande; pero que importa poco el no conocerlo anticipadamente); ordenado por a, letra preferente alfabéticamente, pues no está más repetida; a^2 debia ser el cuadrado del primer término de la raíz (220); y extrayéndola da a, cuyo cuadrado es a^2, restado del polinomio propuesto con sólo cambiarle el signo, nos dejó el propuesto reducido á cinco términos, que debian contener todas las partes del cuadrado de un trinomio (220), ménos el cuadrado de su primer término. Y como la segunda parte debia ser el duplo del primer término por el segundo, y el primero conociamos que es a, dividiendo el segundo término del polinomio propuesto por el duplo del primero de la raíz, nos debia dar el segundo de ella; y en efecto, hallamos b, que para ser legítimo, multiplicado por el duplo de a y por b, ó sea cuadrando b, debian producir el segundo término del polinomio y otro del mismo, y nos dió en efecto $2ab$ y b^2, que restados del polinomio nos dejó de resto sólo tres términos, cuyo primero debia ser el duplo del primero de la raíz por el tercero, por lo que dividiéndolo por tal duplo, nos debia dar y dió para tercero c; que para ser legítimo, debia multiplicado por el duplo del primero y por el duplo del segundo y por sí mismo ó cuadrándolo, producir los tres términos del resto del polinomio propuesto. Luego la regla queda demostrada.

233. *Observacion.* Es inútil la aplicacion de esta regla si fácilmente se conocen los términos que son aisladamente cuadrados perfectos, pues extrayéndoles la raíz, se tendrán todos los términos de la que se busca; que se podrá comprobar viendo si el polinomio propuesto contiene las demas partes de que debe constar el cuadrado del polinomio que resulte de raíz.

En el ejemplo anterior pudimos, pues, muy fácilmente ver que los términos a^2, b^2, c^2, eran los únicos que eran cuadrados perfectos, y por lo tanto, que $a+b+c$ debia ser la raíz que se buscaba, y que lo era realmente, porque el polinomio propuesto contenia ademas el duplo de a por b, el de a por c y el de b por c.

Pero si tenemos el polinomio $a^4 - 2a^3 + 12a^2 + a^2 - 12a + 36$, áun ordenado como se halla, no se verá fácilmente si es un cuadrado perfecto y habrá que proceder á la aplicacion de la regla general. Sin embargo, teniendo presente que el primer término debe ser el cuadrado del primero de la raíz y el último el cuadrado del último de ella, fácil será conocer que a^2 es cuadrado de a, y por lo tanto, que extrayendo la raíz de a^4, de a^2 y de 36, nos dará $a^2 - a + 6$, por raíz deseada.

234. La raíz cúbica de un polinomio de cuatro términos, fácil será tambien determinarla por consideraciones análogas, si fácilmente se ve cuáles son los dos términos, que son cubos perfectos, pues extrayendo su raíz cúbica, nos dará los dos términos del binomio que constituye la raíz cúbica del polinomio propuesto. Así, si se nos da ya ordenado (ú ordenándolo para mejor apreciar si es cubo perfecto) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, fácilmente conoceremos que su raíz cúbica es $a - b$.

235. La raíz cúbica de cualquier polinomio y la raíz de cualquier grado superior, no son del dominio del Algebra elemental, por lo que vamos á pasar á la apreciacion de las cantidades algebráicas radicales que no tienen raíz exacta.

ARTÍCULO VI.

CÁLCULO DE LAS CANTIDADES RADICALES DE SEGUNDO GRADO REALES Ó IMAGINARIAS.

236. Teorema fundamental. *La raiz cuadrada de un producto es igual al producto de las raices cuadradas de sus factores.*

Demostracion. Vamos á demostrar que $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \times \sqrt{B}$. Para ello diremos que por la definicion de la potencia $(\sqrt{A} \times \sqrt{B})^2$ debe ser igual á $\sqrt{A} \times \sqrt{B} \times \sqrt{A} \times \sqrt{B}$, y variando el órden de los factores será $\sqrt{A} \times \sqrt{A} \times \sqrt{B} \times \sqrt{B}$. Pero $\sqrt{A} \times \sqrt{A} = A$, porque la cantidad que multiplicada por sí misma produzca A, por ejemplo, a debe ser igual á $\sqrt{A}$, y tambien $a \times \sqrt{A} = a \times a$; y lo mismo es multiplicar una cantidad por otra igual que por sí misma, luego $a \times a$

$= A$ y $\sqrt{A} \times \sqrt{A} = A$. Y análogamente $\sqrt{B} \times \sqrt{B} = B$. Pero si $(\sqrt{A} \times \sqrt{B})^2 = AB$, tendremos que siendo $\sqrt{A} \times \sqrt{B}$ la cantidad que cuadrada produce AB, será evidentemente $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \times \sqrt{B}$, y como análogamente se demostraria que $\sqrt{ABC} = \sqrt{A} \times \sqrt{B} \times \sqrt{C}$ el teorema queda demostrado.

237. *Corolario* 1.° A toda cantidad radical descompuesta en dos factores, uno de los cuales sea un cuadrado perfecto, se le podrá extraer la raiz cuadrada y la que produzca ponerla fuera del radical como factor, y será su verdadero coeficiente; pues

$$\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a \times \sqrt{b}.$$

238. *Corolario* 2.° Toda cantidad que sea factor de una radical pudiendo considerarla como su coeficiente, se podrá poner dentro del radical elevándola al cuadrado, porque $a \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$.

239. *Corolario* 3.° Toda cantidad radical imaginaria, puede convertirse en mixta de real é imaginaria, pues siendo, por ejemplo, $9 = 9 \times -1$, será $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = 3 \times \sqrt{-1}$.

Del teorema anterior y sus corolarios, se deducen las reglas siguientes:

240. Regla 1.ª *Para simplificar una cantidad radical de segundo grado, se dividen por 2 los exponentes de las letras que están debajo del radical y las letras con el exponente cociente de la dicha division, quedarán fuera como factores ó coeficientes del radical, cuyo verdadero coeficiente numérico será la raiz cuadrada de uno de los factores en que pueda descomponerse el coeficiente numérico de la cantidad radical, la que quedará con el otro.*

Ejemplo. $\sqrt{27a^7bc^4} = 3a^3c^2 \times \sqrt{3ab}$.

porque

$$\sqrt{27a^7b^2c^4} = \sqrt{9 \times 3a^6abc^4} = \sqrt{9a^6c^4} \times \sqrt{3ab} = 3a^3c^2 \times \sqrt{3ab}.$$

241. Regla 2.ª *Para simplificar una cantidad que contenga términos con radicales semejantes*, (que asi podrán llamarse evidentemente los que sean de un mismo grado, y tengan dentro del signo iguales letras con iguales exponentes y coeficientes, aunque los coeficientes ó factores externos no sean iguales, como $4a \times \sqrt{b}$ y $2b \times \sqrt{b}$) *se pondrá el radical por factor de los coeficientes simplificados que tenga en todos los términos semejantes*. Así, $4\sqrt{b} - 2\sqrt{b} = 2\sqrt{b}$ y $ab\sqrt{b} - ac\sqrt{b} = (ab - ac)\sqrt{b}$, porque los coeficientes son factores verdaderos en los radicales, é influyen como tales.

242. Regla 3.ª *Para sumar cantidades radicales de segundo grado, se sigue la regla general de la adicion algebráica, simplificando la suma consiguientemente, que es la verdaderamente única operacion.*

Así, $a\sqrt{ab}$ sumada con $b\sqrt{c^2d}$ y con $-2a\sqrt{ab}$,

dará $a\sqrt{ab}+b\sqrt{c^2d}-2a\sqrt{ab}=-a\sqrt{ab}+bc\sqrt{d}$.

243. Regla 4.ª *Para restar cantidades radicales de segundo grado, se obra por la regla de la sustraccion algebráica, simplificando el resultado consiguientemente.*

Así, $a\sqrt{ab}$ restado de $b\sqrt{ab}$, dará $b\sqrt{ab}-a\sqrt{ab}=(b-a)\sqrt{ab}$.

244. Regla 5.ª *Para multiplicar cantidades radicales de segundo grado, se multiplican sus coeficientes algebráicamente, y las cantidades que estén bajo el radical, simplificando el resultado si se pudiere.*

Así, $\sqrt{a^2b^3c}\times\sqrt{abcd}=\sqrt{a^3b^4c^2d}=ab^2c\sqrt{ad}$,

y $-5\sqrt{ab}\times 8\sqrt{a^2b}=-40\sqrt{a^3b^2}=-40ab\sqrt{a}$.

245. Regla 5.ª *Para dividir cantidades radicales de segundo grado, se dividen los coeficientes, si lo tienen, y se dividen tambien las cantidades que están debajo de los radicales, y el cociente de estas se pone debajo de un radical con el coeficiente de la division de los correspondientes á los radicales.*

Así, $\dfrac{\sqrt{a^2b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{ab}$ y $\dfrac{8\sqrt{a^6b^2}}{2\sqrt{a}}=4\sqrt{a^5b^2}=4a^2b\sqrt{a}$,

pues $\sqrt{ab}\times\sqrt{a}=\sqrt{a^2b}$, que es el dividendo del primer ejemplo.

246. Regla 6.ª *Para elevar al cuadrado una cantidad radical de segundo grado, no hay más que suprimirle el signo radical, y cuadrar el coeficiente, si lo tuviere.*

Así, $(\sqrt{a})^2=a$, pues $(\sqrt{a})^2=\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$.

247. *Regla* 7.ª *Para extraer la raiz cuadrada de una cantidad radical, se cuadra el índice, y si el radical tiene coeficiente, se le extrae la raiz cuadrada, metiéndolo dentro del radical si no tuviese raiz exacta, pero cuadrándolo.*

$$\text{Así, } \sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a} \quad \text{y} \quad \sqrt{a^2\sqrt{b}}=a\sqrt[4]{b}$$

$$\text{y} \quad \sqrt{a\sqrt{b}}=\sqrt{\sqrt{a^2b}}=\sqrt[4]{a^2b},$$

pues $\sqrt{a}=\left(\sqrt{\sqrt{a}}\right)^2$ y cuadrando los dos miembros dará $\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(\sqrt{\sqrt{a}}\right)^4$ y $a=\left(\sqrt{\sqrt{a}}\right)^4$; luego si $\left(\sqrt{\sqrt{a}}\right)$ es una cantidad que elevada á la cuarta potencia produce a, será la raiz cuarta de a; luego $\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}$.

248. *Escolio.* Siendo $\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}$, es evidente que para extraer de una cantidad una raiz de grado tal que sea potencia de 2, no habrá más que extraer sucesivamente de la cantidad tantas veces la raiz cuadrada como unidades tenga la potencia de 2 á que equivalga el índice del radical.

Asi,

$$\sqrt[16]{a^{32}b^{16}} = \sqrt[2^4]{a^{32}b^{16}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^{32}b^{16}}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a^{16}b^{8}}}} = \sqrt{\sqrt{a^{8}b^{4}}}$$

$$= \sqrt{a^4b^2} = a^2b, \quad \text{y} \quad \sqrt[8]{6561} = \sqrt[2^3]{6561} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}} = \sqrt{\sqrt{81}}$$

$$= \sqrt{9} = 3.$$

249. Regla 8.ª *Para reducir un quebrado cuyo denominador sea irracional á otro con denominador racional, se multiplica el numerador del propuesto por el radical del denominador, y el producto será el numerador del quebrado equivalente que se desea, cuyo denominador será la cantidad que estaba dentro del radical.*

Si el denominador fuese un binomio de radicales, el quebrado equivalente tendrá el mismo binomio, pero con signo contrario uno de los términos, y el denominador tendrá todas las cantidades que estaban debajo de los signos radicales, pero con signo contrario una de ellas.

Así, $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$, pues multiplicando en cruz da $ab = \sqrt{b} \times a\sqrt{b} = a\sqrt{b^2}$ $= ab$ y $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a \times (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$, pues multiplicando en cruz será $a \times (b - c) = ab - ac$ y $a \times (\sqrt{b} - \sqrt{c}) = (a\sqrt{b} - a\sqrt{c})$ y $(a\sqrt{b} - a\sqrt{c}) \times (\sqrt{b} + \sqrt{c}) = ab - ac$, y quebrados que multiplicados en cruz dan productos iguales son quebrados iguales Arit. 113 (113).

250. Regla 9.ª *Para convertir una cantidad imaginaria en mixta de real y de imaginaria de la unidad, se pone la raiz de la misma cantidad imaginaria con signo positivo, y como factor un radical de segundo grado con la unidad negativa dentro de él.*

Así, $\sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1}$, pues $-a^2 = +a^2 \times -1$ y $\sqrt{a^2 \times -1} = a\sqrt{-1}$ y tambien $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$.

251. *Regla* 10. Para operar con las cantidades imaginarias, se convierten en mixtas de reales é imaginarias, y habiéndose convenido en que $(\sqrt{-1})^2 = -1$, se efectúan todas las operaciones como con las demas cantidades.

Así, 1.° $a\sqrt{-1} + b\sqrt{-1} = (a + b)\ \sqrt{-1}$.

2.° $a\sqrt{-1} - b\sqrt{-1} = (a - b)\ \sqrt{-1}$.

3.° $a\sqrt{-1} \times b\sqrt{-1} = ab\ (\sqrt{-1})^2 = ab \times -1$.

4.° $\frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} = \frac{a}{b}$.

5.° $(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + b) + (c + d)\sqrt{-1}$.

$$6.^\circ \quad (a+b\sqrt{-1}) - (c+d\sqrt{-1}) = (a+b) - (c+d)\sqrt{-1}.$$

$$7.^\circ \quad (a+b\sqrt{-1}) \times (c+d\sqrt{-1}) = ac+cb\sqrt{-1}+ad\sqrt{-1}-bd,$$

(porque $b\sqrt{-1} \times d\sqrt{-1} = bd\,(\sqrt{-1})^2 = bd \times -1 = -bd.$)

y $\quad ac+cb\sqrt{-1}+ad\sqrt{-1}-bd = (ac-bd)+(cb+ad)\sqrt{-1}.$

$$8.^\circ \quad \frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}} = \frac{(a+b\sqrt{-1})\,(c-d)\sqrt{-1}}{(c+d\sqrt{-1})\,(c-d)\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{(ac+bd)+(bc-ad\sqrt{-1})}{c^2+cd\sqrt{-1}-cd\sqrt{-1}+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-d^2}\sqrt{-1}.$$

252. *Observacion.* Se observa, pues, que los resultados de todas las operaciones de cantidades imaginarias, convertidas en mixtas de reales é imaginarias, son mixtas tambien; á excepcion del producto y el cociente de un monomio mixto de imaginario por otro que son cantidades reales, pues $ab \times -1 = -ab$, es cantidad real, aunque negativa, y tambien $\frac{a}{b}$ es real, y esos resultados dan la multiplicacion y la division de los ejemplos 3.º y 4.º, porque en el 3.º ya se dijo que se ha convenido en que $(\sqrt{-1})^2 = -1$ y en el 4.º evidentemente que en el quebrado ó division $\frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}$ como $\sqrt{-1}$ es factor comun á los dos términos, suprimiéndolo quedará el quebrado $\frac{a}{b}$ que es una cantidad real.

CAPÍTULO VI.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y BICUADRADAS.

ARTÍCULO PRIMERO.

PRELIMINARES.

253. *Ecuaciones de segundo grado* sabemos (93) son aquellas que despues de preparadas resultan con la incógnita elevada al cuadrado en alguno de sus términos, y áun tambien con dos incógnitas sin exponente en uno mismo, aunque de estas no se ocupa el Algebra Elemental.

254. Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, que son las que nos ocuparán ahora, pueden ser completas é incompletas. Completas son aquellas que despues de preparadas (antes de lo que ya dijimos, no siempre es fácil el conocer su grado) (98 y 126), resultan bajo la forma

$$Ax^2 \pm Bx = \pm c$$

ó

$$x^2 \pm px = \pm q,$$

é incompletas cuando resultan bajo la forma

$$Ax^2 \pm Bx = 0$$

ó

$$x^2 \pm px = 0;$$

y tambien $\quad Ax^2 = \pm C \quad$ ó $\quad x^2 = \pm q,$

haciendo en la segunda forma $\frac{B}{A} = p$, y $\frac{C}{A} = q$, pues que $Ax^2 \pm Bx = \pm C$ es equivalente á $x^2 \pm \frac{B}{A} x = \pm \frac{C}{A}$, porque resulta de dividir la primera por A.

255. La preparacion y resolucion de las ecuaciones de segundo grado se funda en principios que tenemos ya demostrados, á excepcion de dos que vamos á establecer para completar estos preliminares.

256. 1.° *Lema.* Toda ecuacion cuyos dos miembros se elevan al cuadrado y áun á una potencia cualquiera, produce otra equivalente, pues no siendo la elevacion á potencias más que en caso particular de la multiplicacion, y produciendo esta ecuaciones equivalentes (100) tambien deben serlo las que sean resultado de aquella.

Así, en $2x^2 = 18$ el valor de x debe ser precisamente 3, y el mismo tendrá si se duplican los dos miembros, que si se cuadran, pues duplicarlos, será tomarlos dos veces, y cuadrarlos será tomarlos diez y ocho veces; y será $2x^2 \times 2x^2 = 18^2$ y $4x^4 = 18 \times 18$.

257. 2.° *Lema.* A toda ecuacion á cuyos dos miembros se les extrae la raiz cuadrada y áun una raiz cualquiera, producirá otra equivalente por semejantes razones á las expuestas en el número anterior, pues si $x = 4$ es equivalente $x^2 = 16$, tambien $x^2 = 16$ será equivalente á $\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$, que lo es á $x = 4$.

258. *Corolario.* De los dos números anteriores, se deduce como consecuencia que completa el contenido del artículo II, capítulo III, que una cantidad que constituye un miembro de una ecuacion, y se halla elevada al cuadrado, podrá quedar sin exponente extrayendo la raiz cuadrada del segundo miembro, ó poniéndole el radical correspondiente.

Así, $x^2 = B$, será equivalente á $x = \sqrt{B}$; pues si extrajeramos la raiz cuadrada de los dos miembros de la ecuacion $x^2 = B$, daria la equivalente $\sqrt{x^2} = \sqrt{B}$, y $\sqrt{x^2} = x$; y por lo tanto, $x = \sqrt{B}$.

E inversamente una cantidad afectada del signo radical que constituye un miembro de una ecuacion, podrá quedar sin radical, elevando al cuadrado ó potencia correspondiente el otro miembro.

Así, $\sqrt{x} = A$, será equivalente á $x = A^2$; porque si elevamos al cuadrado los dos miembros de la ecuacion $\sqrt{x} = A$, dará la equivalente $(\sqrt{x})^2 = A^2$ y $(\sqrt{x})^2 = x$; y por lo tanto $x = A^2$.

Conviene, sin embargo, advertir, que como lo mismo A^2 puede ser el cuadrado de $+ A$ que de $- A$, toda raiz cuadrada puede ser lo mismo positiva que negativa; y por lo tanto, que $x^2 = A$ será equivalente á $x = \pm \sqrt{A}$, y más exactamente $\pm x = \pm \sqrt{A}$; pero á la incógnita no se le pone nunca el signo de ambigüedad, porque tenga el signo $+$ ó el $-$ resultan siempre para ella iguales valores.

En efecto, en $\pm x = \pm \sqrt{A}$ separando los signos da

$$1.^\circ \quad + x = \pm \sqrt{A} \quad \text{ó} \quad x' = \sqrt{A} \quad \text{y} \quad x'' = - \sqrt{A}.$$

$$2.^\circ \quad - x = \pm \sqrt{A} \quad \text{ó} \quad x' = \sqrt{A} \quad \text{y} \quad x'' = - \sqrt{A};$$

luego x lo mismo que $-x$, tiene siempre los mismos dos valores, uno negativo y otro positivo, correspondientes al signo de ambigüedad del segundo miembro, y es por lo tanto inútil que tenga el signo de ambigüedad la incógnita del primer miembro.

259. *Ecuacion bicuadrada*, es aquella que despues de preparada resulta bajo la forma $Ax^4 \pm Bx^2 = \pm C$.

ARTÍCULO II.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS CON UNA SOLA INCÓGNITA.

260. Regla 1.ª *Para resolver una ecuacion de segundo grado incompleta y con una sola incógnita, que, despues de preparada, resulta bajo la forma* $Ax^2 = \pm C$, *ó* $x^2 = \pm q$, *se extrae simplemente la raiz cuadrada del quebrado que forme el término conocido, teniendo por denominador* *el coeficiente de la incógnita, ó sea, segun la fórmula,* $x = \pm\sqrt{\pm\frac{C}{A}}$, *ó* $x = \pm\sqrt{\pm q}$, *y se tendrán dos valores para la incógnita iguales, pero de signo contrario por el signo de ambigüedad correspondiente al radical, independientemente del positivo ó negativo que caracterice el término conocido de la ecuacion preparada.*

Demostracion. Evidentemente que si en la ecuacion $Ax^2 = +C$ ó en la $Ax^2 = -C$, quitamos el coeficiente á la incógnita, resultará $x^2 = +\frac{C}{A}$ y $x^2 = -\frac{C}{A}$, y si extraemos la raiz cuadrada de ambos miembros de cualquiera de estas ecuaciones, dará respectivamente $x = \pm\sqrt{\frac{C}{A}}$ *y* $x = \pm\sqrt{-\frac{C}{A}}$, y como toda raiz cuadrada puede ser positiva ó negativa, indistintamente (228), cada una de esas ecuaciones dará dos valores para la incógnita, que se llaman *sus raices* (95), y serán respectivamente $x' = \sqrt{\frac{C}{A}}$ ó $x' = \sqrt{-\frac{C}{A}}$ y $x'' = -\sqrt{\frac{C}{A}}$ ó $x'' = -\sqrt{-\frac{C}{A}}$.

Luego el resultado serán dos valores para la incógnita iguales, pero de signo contrario; y éste independiente del signo positivo ó negativo que tenga en la ecuacion propuesta el término conocido; luego ese resultado está justificado y la regla demostrada.

261. *Ejemplos.* 1.° $\frac{3x}{4} = \frac{27}{x} = 3x^2 = 27 \times 4$, que da $x^2 = \frac{27\times4}{3}$, y finalmente, $x = \pm\sqrt{\frac{27\times4}{3}} = \pm\sqrt{\frac{108}{3}} = \pm\sqrt{36} = \pm 6$, por lo que $x' = 6$ y $x'' = -6$.

Ejemplo. 2.° $\frac{x}{b^3c} = \frac{bc}{x}$, da $x^2 = b^4c^2$, y finalmente, $x = \pm\sqrt{b^4c^2} = \pm b^2c$, por lo que $x' = b^2c$ y $x'' = -b^2c$.

Explicacion. En ambos ejemplos hemos preparado las ecuaciones quitando los denominadores y despejado la incógnita despues, segun la regla, y nos ha dado en el primero por valores de la incógnita 6 y -6, y en el segundo b^2c y $-b^2c$, que satisfacen las ecuaciones de que proceden, pues poniendo esos valores en las propuestas, dan respectivamente

$$\frac{3\times6}{4} = \frac{27}{6} = \frac{18}{4} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = \frac{9}{2},$$

y $$\frac{3\times-6}{4} = \frac{27}{-6} = \frac{-18}{4} = \frac{27}{-6} = -\frac{9}{2} = -\frac{9}{2},$$

y $$\frac{b^2c}{b^3c} = \frac{bc}{bc} = b^4c^2 = b^4c^2,$$

y $$\frac{-b^2c}{b^3c} = \frac{bc}{-b^2c} = b^4c^2 = b^4c^2.$$

262. Regla 2.ª *Para resolver una ecuacion incompleta de segundo grado con una incógnita, y que despues de preparada resulte bajo la forma* $Ax^2 \pm Bx = 0$, *se divide el coeficiente de la incógnita del segundo término* B *con signo contrario por el coeficiente* A *de la incógnita del primer término, y se tendrá uno de los dos valores de la incógnita, siendo* 0 *el otro como co-*

ciente de dividir 0 *por la suma del coeficiente* B *con el producto de* A *por* x.

Demostracion. Porque $Ax^2 + Bx = 0$ y $Ax^2 - Bx = 0$ dan respectivamente

$$Axx + Bx = 0 \qquad \text{y} \qquad Axx - Bx = 0$$
$$x(Ax + B) = 0 \qquad\qquad x(Ax - B) = 0$$
$$x = \frac{0}{Ax+B} = 0 \qquad\qquad x = \frac{0}{Ax-B} = 0$$

y tambien

$$Ax^2 + Bx = 0 \qquad \text{y} \qquad Ax^2 - Bx = 0$$
$$Ax^2 = -Bx \qquad\qquad Ax^2 = +Bx$$
$$\frac{Ax^2}{x} = -\frac{Bx}{x} \qquad\qquad \frac{Ax^2}{x} = +\frac{Bx}{x}$$
$$Ax = -B \qquad\qquad Ax = B$$
$$x = -\frac{B}{A} \qquad\qquad x = \frac{B}{A}$$

Valores de x que, sustituidos en la ecuacion primitiva, la satisfacen, pues el 0 desde luego convierte en 0 el primer miembro y forma la identidad $0 = 0$ y $-\frac{B}{A}$ y $+\frac{B}{A}$ dan el primero en $Ax^2 + Bx = 0$.

$A \times -\left(\frac{B}{A}\right)^2 + B \times -\frac{B}{A} = 0 \equiv A \times + \frac{B^2}{A^2}$ [porque $-B \times -B = +B^2$] $+ B \times -\frac{B}{A} = 0 \equiv \frac{AB^2}{A^2} - \frac{B^2}{A}$ y como $\frac{AB^2}{A^2} = \frac{B^2}{A}$, será $\frac{B^2}{A} - \frac{B^2}{A} = 0 \equiv 0 = 0$, y análogamente á $Ax^2 - Bx = 0$, siendo $x = \frac{B}{A}$ dará $A \times \left(\frac{B}{A}\right)^2 - B \times \frac{B}{A} = 0 \equiv \frac{AB^2}{A^2} - \frac{B^2}{A} = 0 \equiv \frac{B^2}{A} - \frac{B^2}{A} \equiv 0 = 0$.

Luego la regla queda demostrada.

263. Esta regla se demuestra más fácilmente por medio de la fórmula de la resolucion de las ecuaciones completas, haciendo 0 el término conocido; pero es conveniente conocer la anterior, annque no le den otros autores, pues viene á evidenciar que toda ecuacion de segundo grado tiene dos valores ó raíces, aunque no provengan del signo de ambigüedad de la extraccion de la raíz cuadrada, que, como se ha visto en este caso, no se extrae para la resolucion.

264. Ejemplos de resolucion de ecuaciones de segundo grado incompletas sin término conocido.

$$4x^2 + 8x = o$$
$$x\,(4x + 8) = o$$
$$x = \frac{o}{4x + 8} = o,$$

y tambien

$$4x^2 + 8x = o,$$
$$4x^2 = -8x$$
$$4x = -8$$
$$x = -\frac{8}{4} = -2.$$

Y la ecuacion $4x^2 - 8x = o$ da análogamente, $x\,(4x - 8) = o \equiv x = \frac{o}{4x-8} = o$, y tambien $4x^2 - 8x = o \equiv 4x^2 = 8x \equiv 4x = 8 \equiv x = \frac{8}{4} = 2$.

Valores que sustituidos en las correspondientes ecuaciones primitivas, dan el o evidentemente la igualdad $o = o$ y el -2 da $(4 \times -2)^2 + 8 \times -2 = o = 16 - 16 = o = o = o$, y el $+2$ es la ecuacion $4x^2 - 8x = o$, da análogamente $4 \times 2^2 - 8 \times 2 = o = 16 - 16 = o = o = o$.

ARTÍCULO III.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES COMPLETAS DE SEGUNDO GRADO CON UNA SOLA INCÓGNITA.

265. *Regla.* Para resolver una ecuacion de segundo grado completa, que despues de preparado resulte bajo la forma $x^2 \pm px = \pm q$, *se pone por valor de la incógnita la mitad del coeficiente del segundo término de la ecuacion preparada con signo contrario, más ménos la raiz cuadrada de la suma algebráica del cuadrado de la mitad del dicho coeficiente, y el término conocido positivo ó negativo; y tal valor no será único por el signo de ambigüedad del radical, que encierra la fórmula siguiente á que se refiere la regla*

$$x = +\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\tfrac{p^2}{4} + q} \text{ ó } x = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\tfrac{p^2}{4} + q} \text{ ó } -q,$$

segun que el término conocido sea positivo ó negativo en el segundo miembro.

Demostracion. Como toda ecuacion que despues de preparada resulte de segundo grado, se le podrá dar la forma $x^2 \pm px = \pm q$, pues como ya se indicó (254), aunque el término de x^2 tenga coeficiente, se le podrá hacer desaparecer dividiendo por él los demas términos, esta ecuacion producirá los equivalentes siguientes:

$$x^2 \pm px + \tfrac{p^2}{4} = \pm q + \tfrac{p^2}{4},$$
$$x \pm \tfrac{p}{2} = \pm \sqrt{\pm q + \tfrac{p^2}{4}},$$
$$x = \mp \tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\pm q + \tfrac{p^2}{4}},$$

pues la primera de las tres anteriores equivale á la propuesta, porque resulta de sumar á sus dos miembros $\frac{p^2}{4}$ para que el primero, que es un cuadrado imperfecto, resulte el perfecto del binomio $x \pm \frac{p}{2}$. Y la segunda, es equivalente á la anterior, porque resulta de extraer la raiz cuadrada de los dos miembros; pues la raiz del primero es $x \pm \frac{p}{2}$, y la del segundo se deja indicada; y la última ecuacion es equivalente á las anteriores, porque resulta de pasar al segundo miembro con signo contrario $\frac{p}{2}$, que se le pone de ambigüedad, porque así se generaliza más la regla, pues que puede tener en la ecuacion propuesta el signo positivo ó el negativo. Y evidentemente que la incógnita tendrá dos valores en cada caso por el signo de ambigüedad propio del radical; luego la regla queda demostrada.

266. *Regla complemental.* Aunque la regla anterior tenga tan fácil demostracion, no es la que generalmente se emplea, por no ser en la mayor parte de los casos tan expedita como la que se deduce de la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$$

correspondiente á la ecuacion preparada bajo la forma

$Ax^2 + Bx = + C$, pues esta da las siguientes:

$$4A^2x^2 + 4ABx = 4AC,$$
$$4A^2x^2 + 4ABx + B^2 = B^2 + 4AC,$$
$$(2Ax + B)^2 = B^2 + 4AC,$$
$$2Ax + B = \pm \sqrt{B^2 + 4AC},$$
$$2Ax = -B \pm \sqrt{B^2 + 4AC},$$
$$x = -\frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}.$$

Pues se multiplican todos los términos por $4A$ para que el primer miembro sea un cuadrado imperfecto, y se le agregan despues á los dos miembros B^2 para que el primero sea el cuadrado de $2Ax + B$, que se pone en lugar del trinomio con exponente 2, que se hace desaparecer poniendo un radical al segundo miembro; y despejando despues la x, produce la fórmula, en la que evidentemente el $-B$ sería $+B$ si en el primer miembro hubiese sido negativo, así como el $+4A\,C$ sería $-4AC$ si fuera el C de la ecuacion propuesta negativo en el segundo miembro.

267. Ejemplos de resolucion de ecuaciones de segundo grado completas.

$$\frac{(x+2)(x-1)}{3x} = \frac{x-1}{5}$$

que preparándola da

$$5(x^2 + x - 2) = 3x(x-1)$$
$$5x^2 + 5x - 10 = 3x^2 - 3x$$
$$2x^2 + 8x = 10$$
$$x^2 + 4x = 5,$$

ecuacion preparada que por la fórmula $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ correspondiente á la $x^2 + px = q$, que es semejante á la anterior preparada, da $x = -2 \pm \sqrt{4 + 5}$, por lo que

$$x' = -2 + \sqrt{9} = -2 + 3 = 1$$
$$x'' = -2 - \sqrt{9} = -2 - 3 = -5$$

cuyos dos valores, sustituidos en la ecuacion propuesta, la satisfacen, pues dan respectivamente

$$\frac{(1+2)(1-1)}{3 \times 1} = \frac{1-1}{5} = \frac{3 \times 0}{3} = \frac{0}{3} = 0 = 0 \quad \text{y}$$

$$\frac{(-5+2)(-5-1)}{3 \times -5} = \frac{-5-1}{5} = \frac{-3 \times -6}{-15} = \frac{-6}{5} = \frac{18}{-15} = \frac{-6}{5} = -\frac{6}{5} = -\frac{6}{5}.$$

268. Haciendo en la ecuacion $Ax^2 + Bx = + C$, que sea $c = 0$, la fórmula de su resolucion $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$, se convertiria en $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2}}{2A}$, porque si $c = 0$ será $4AC = 0$.

y $$x' = \frac{-B + \sqrt{B^2}}{2A}$$

y $$x'' = \frac{-B - \sqrt{B^2}}{2A}$$

y $$x' = \frac{-B + B}{2A} = 0$$

y $$x'' = \frac{-B - B}{2A} = \frac{-2B}{2A} = -\frac{B}{A},$$

por lo que se ve que la incógnita tendrá dos valores, uno cero y otro real, que en este caso es negativo; pero que sería positivo si el término de la ecuacion en que la incógnita está sin exponente, fuera negativo en el primer miembro ó positivo en el segundo. Valores que son iguales á los que sin necesidad de fórmula con radical, dedujimos en la demostracion de la regla para resolver ecuaciones incompletas de esta clase (262).

269. Y si en la fórmula general hacemos $B = o$, resultaria $x = \frac{o \pm \sqrt{o^2 + 4AC}}{2A} = \frac{\pm\sqrt{4AC}}{2A} = \pm \frac{1}{2A}\sqrt{4AC} = \pm \sqrt{\frac{4AC}{4A^2}} = \pm \sqrt{\frac{C}{A}}$; pues $\frac{\pm\sqrt{4AC}}{2A} = \pm \frac{1}{2A}\sqrt{4AC}$, porque un quebrado, con la unidad por numerador, multiplicado por una cantidad cualquiera, es evidentemente igual á la misma cantidad con el denominador de tal quebrado, pues $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$ y tambien $\pm \frac{1}{2A}\sqrt{4AC} = \pm \sqrt{\frac{4AC}{4A^2}}$, porque cuadrando el coeficiente de una cantidad radical se puede meter dentro del signo radical (238), y $\frac{4AC}{4A^2}$ simplificado, dividiendo sus dos términos por $4A$, da $\frac{C}{A}$. De lo que resulta que en esta clase de ecuaciones la incógnita tendrá dos valores iguales, pero de signo contrario, segun tambien se dedujo, sin apelar á la fórmula general (260); siendo, pues, el valor de la incógnita la raíz cuadrada del cociente del término conocido dividido por el coeficiente de la incógnita.

ARTÍCULO IV.

DISCUSION DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

270. *Discutir ecuaciones de segundo grado*, es análogamente que en las de primero, determinar por el análisis de la fórmula general cuántas clases de valores pueden resultar á la incógnita.

Este análisis lo expondremos por el método sintético que seguir en todo nos hemos propuesto, aunque parezca absurdo el pretender *analizar sintéticamente*, pero sintéticamente podemos establecer como teoremas las verdades cuyo análisis originario sean sus demostraciones, como hicimos en la discusion de la ecuacion de primer grado.

271. *Lema.* En las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, los dos valores de ésta pueden ser positivos, negativos, cero, infinito é indeterminado, como en las de primer grado, y ademas pueden ser iguales y desiguales, reales é imaginarios.

Porque la ecuacion general

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \quad \text{ó bien} \quad \left(x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q \text{ ó } -q}\right),$$

cuyas raíces son $x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$,

y $x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$,

estando la incógnita en funcion de p y de q, cantidades que evidentemente podrán ser positivas ó negativas, iguales ó desiguales, y mayor p que q y q que p, los resultados de las operaciones que indica la fórmula, deben producir por valor de x, cualquiera de los que indica el enunciado del lema, y tener la misma significacion que se les asignó en las correspondientes demostraciones de la discusion de las ecuaciones de primer grado, ménos el imaginario que allí no se consideró, porque no es lo comun que resulte en aquella clase de ecuaciones.

272. Teorema. *En todo problema de segundo grado, cuya ecuacion preparada resulte bajo la forma* $x^2 + px = q$, *cuya fórmula de resolucion es* $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, *y cuyo término* q *es positivo, produce siempre dos raíces reales, desiguales y de signos contrarios.*

Demostracion. Porque si q es positiva, será $q > o$, y su suma con $\frac{p^2}{4}$ será necesariamente positiva, y el radical consiguientemente real, y reales por lo tanto las dos raíces de la incógnita; y como ademas $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ será mayor $\sqrt{\frac{p^2}{4}}$ (cosa que no sucederia siendo q negativo) y mayor tambien que $\frac{p}{2}$ $\left(\text{pues } \sqrt{\frac{p^2}{4}} = \frac{p}{2}\right)$, luego la suma ó la diferencia entre $-\frac{p}{2}$ y $-\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, tendrá que ser desigual á $-\frac{p^2}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, y de signo contrario, pues en el primer caso se suman dos cantidades negativas, y la suma será igual al conjunto de ambas con signo negativo; y en el segundo caso, se suman dos cantidades de opuesto signo, y la suma será la diferencia de ambas, pero positiva por ser $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} > \frac{p}{2}$ y análogamente sucedería si $-\frac{p}{2}$ fuera $+\frac{p}{2}$.

Luego el teorema queda demostrado.

273. Teorema. *En todo problema de segundo grado, cuya ecuacion preparada resulte bajo la forma* $x^2 + px = q$ *cuando* $q = o$, *la incógnita* *tiene una raiz* o *y otra igual al coeficiente que en la ecuacion preparada tiene el segundo término, pero de signo contrario.*

Demostracion. Porque la fórmula general segun se dijo (268)

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \text{ siendo } q = o, \text{ dará}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}} \text{ que da } x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2},$$

$$\text{y} \quad x' = -\frac{p}{2} + \frac{p}{2} = o,$$

$$\text{y} \quad x'' = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -\frac{2p}{2} = -p.$$

Luego queda demostrado el teorema.

274. Teorema. *En todo problema de segundo grado, cuya ecuacion resultà bajo la forma* $x^2 + px = +q$ *cuando* q *es negativo, y por lo tanto* $q < o$, *resultarán dos raices reales desiguales, y con igual signo si* $q < \frac{p^2}{4}$, *y las raices serán iguales y del mismo signo si* $q = \frac{p^2}{4}$ [*y la ecuacion propuesta será el cuadrado de* $x + \frac{p}{2}$], *y las raices serán imaginarias si* $q > \frac{p^2}{4}$.

Demostracion. Si en la fórmula $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, tenemos que q negativo es menor que $\frac{p^2}{4}$ la cantidad debajo del radical será positiva y el tal radical real y sus raíces consiguientemente.

Si $q = \frac{p^2}{4}$ el radical resultará nulo, y las dos raices serán iguales y con igual signo, pues que no habrá en realidad más que una $x = -\frac{p}{2} \pm o$ [y $x^2 + px + q$, sería el cuadrado de $x + \frac{p}{2}$, pues $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ y $\frac{p^2}{4}$ se supone igual á q].

Y finalmente, si q negativo es mayor que $\frac{p^2}{4}$, la cantidad radical será negativa, y por lo tanto, imaginarias las dos raíces correspondientes á la incógnita; luego queda el teorema demostrado.

275. *Lema.* Las raices imaginarias, como resultado de una ecuacion, significan que el problema es absurdo, porque no habiendo cantidad ninguna positiva ni negativa que multiplicada por sí misma produzca una negativa, no puede ninguna imaginaria satisfacer el problema.

276. Los dos valores ó raíces que resultan en todas las ecuaciones de segundo grado, las satisfacen como hemos demostrado en todos los ejemplos; pero como no pueden siempre ambos satisfacer el problema correspondiente; uno de tales valores se refiere generalmente al mismo problema, pero expresado de otra manera. Por ejemplo, si se pregunta por qué número se debe dividir 24 para que el divisor y el cociente sumen 10, resultan dos raíces 6 y 4 que no sólo satisfarán la ecuacion, sino tambien el problema, pues cualquiera de los dos números 6 y 4 tomado por divisor dará el otro por cociente, y la suma de ambos será 10; pero si se pregunta en un problema con sujecion á ciertos datos, cuántos objetos de determinada especie se han vendido, y se tiene una raíz positiva y otra negativa, la positiva responderá directamente al enunciado del problema, y la negativa, para que respondiese sería menester preguntar por compras en lugar de ventas y trasformar el problema, en cuyo caso la negativa vuelta positiva, satisfaria directamente el problema, y la positiva vuelta negativa, no porque se referia á ventas. Bastan estas indicaciones, que sólo la práctica puede hacer eficaces, para apreciar los valores de una incógnita. Añadiremos, sin embargo, que como las dos raíces de una ecuacion de segundo grado nacen principalmente del signo de ambigüedad inherente al radical, y tal signo proviene de que lo mismo es el cuadrado de una cantidad positiva que el de una igual negativa, las condiciones de un problema podrán satisfacerlas una de las dos raíces, y otra no; la que sin embargo, satisfaria las del problema presentado con más extension, todo lo que se comprenderá mejor con los ejemplos del artículo VI.

ARTÍCULO V.

ECUACIONES BICUADRADAS CON UNA INCÓGNITA Y DE SEGUNDO GRADO CON VARIAS.

277. *Ecuacion bicuadrada* se llama aquella que despues de preparada resulta bajo la forma $x^4 + px^2 = q$, pudiendo consiguientemente ser q negativo, y px^2 tambien; y pudiendo ser p y q quebrados, por resultar esta ecuacion de la $Ax^4 + Bx^2 = C$, que da $x^4 + \frac{B}{A}x^2 = \frac{C}{A}$.

278. El Algebra elemental no alcanza las ecuaciones de otro grado superior al segundo. Sin embargo, por una excepcion trata de estas del cuarto, por la grande analogía que tienen con las del segundo.

279. Regla. *Para resolver una ecuacion bicuadrada incompleta que despues de preparada resulte bajo la forma* $x^4 = p$, *se procede con arreglo á la fórmula* $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{p}}$; *y si la ecuacion es completa, la fórmula será* $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm\sqrt{+\frac{p^2}{4} + q}}$, *dando una y otra fórmula cuatro raíces como valores de la incógnita.*

Demostracion. Si en las ecuaciones $x^4 = q$ y $x^4 + px^2 = q$ hacemos $x^2 = z$, y este valor lo sustituimos por x^2, las ecuaciones propuestas se volverán de segundo grado, pues serán $z^2 = q$ y $z^2 + pz = q$, que por las fórmulas demostradas darán respectivamente $z = \pm\sqrt{q}$ y $z = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{\frac{p^2}{2} + q}$, y sustituyendo por z su valor supuesto x^2, serán respectivamente $x^2 = \pm\sqrt{q}$ que da $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{q}}$

y $x^2 = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, que da $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}}$.

Luego la regla queda demostrada.

280. *Regla complemental*. Cuando la ecuacion es incompleta ó de dos términos y en el segundo está la incógnita cuadrada, las raíces serán $x' = o$ y $x'' = \pm\sqrt{\frac{B}{A}}$, pues por lo demostrado, (262) en la ecuacion $4x^2 + Bx = o$, es $x' = o$ y $x'' = \frac{B}{A}$; y en la $Ax^4 + Bx^2 = o$; haciendo $x^2 = z$ dará $z' = o$ y $z'' - \frac{B}{A}$; y sustituyendo por z su valor x^2, dará $x^2 = o$ y $x^2 = \frac{B}{A}$ y $x = - \pm\sqrt{\frac{B}{A}}$.

281. *Observacion*. Las ecuaciones incompletas de un grado potencia de 2, se pueden resolver de una manera análoga; pues si tenemos, por ejemplo, $x^8 = q$ y hacemos $z = x^2$, dará $z^4 = q$, y por las reglas anteriores A $z = \pm\sqrt{\pm\sqrt{q}}$, y poniendo en lugar de z su valor x^2, dará $x^2 = \pm\sqrt{\pm\sqrt{q}}$ y $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt{q}}}$.

282. Las ecuaciones de segundo grado con más incógnitas de una, ya indicamos que no son del dominio del Algebra elemental; pero cuando hay tantas ecuaciones como incógnitas se resuelven de una manera análoga á las de los sistemas de ecuaciones de primer grado; esto es, se reducen los sistemas por cualquiera de los tres métodos allí considerados, y hallando el valor de la incógnita cuadrada que resulte como única en la ecuacion, única tambien del sistema reducido, se sustituye su valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema en que figure dicha incógnita con sólo otra, y se determinan el valor de dicha otra, y así sucesivamente el de todas las del sistema; pero el sistema no será á veces soluble por el Algebra elemental, si en él no hubiera alguna ecuacion del primer grado con relacion á las dos incógnitas, pues podrá resultar una ecuacion del sistema reducido de tercero ó cuarto grado, que no sabemos la manera de resolverla.

ARTÍCULO VI.

PLANTEO, RESOLUCION Y DISCUSION DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA SOLA INCÓGNITA.

283. Planteemos primeramente el sencillísimo problema ya indicado (476), siguiente:

¿Por qué número se dividirá 24 para que reuniendo tal número con el cociente que produzca, resulte 10?

Llamando x al número que buscamos, como ese número sumado con el cociente de dividir por él á 24 debe dar 10, la ecuacion planteada será $x + \frac{24}{x} = 10$, y preparándola dará sucesivamente $x^2 + 24 = 10x$ y $x^2 - 10x = - 24$, y por la fórmula general dará $x = \frac{+10}{2} \pm \sqrt{\frac{10^2}{4} - 24} = + 5 \pm \sqrt{25 - 24} = + 5 \pm 1$ y $x' = + 5 + 1 = 6$ y $x'' = + 5 - 1 = + 4$.

Estos dos valores satisfacen igualmente la ecuacion y el problema, porque ninguna de sus condiciones da preferencia al 4 sobre el 6, ni al contrario; pues si se divide 24 por 4 dará por cociente 6, que sumado con 4 da 10; y si se divide 24 por 6 dará por cociente 4, que sumado con 6 da tambien 10. Y ambos valores satisfacen la ecuacion propuesta, pues

$$4+\frac{24}{4}=10=4+6=10=10=10,$$

y $$6+\frac{24}{6}=10=6+4=10=10=10.$$

La ecuacion $x+\frac{24}{x}=10$ generalizada, dará $x+\frac{q}{x}=p$ y $x^2-px+q=0$ y $x=+\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, de cuya generalizacion puede deducirse regla aplicable á problemas semejantes. La discusion que de esta fórmula puede hacerse, es que cuando q, que representa el número dado, cuya division por el que se busca produzca un cociente, que sumado con éste componga otro tambien dado, sea mayor que el cuadrado de la mitad de dicha suma, el radical será imaginario. Y en efecto, si se nos hubiera preguntado por qué número habia que dividir 26 para que el cociente sumado con él diese 10, la ecuacion sería $x+\frac{26}{x}=10=x^2+26=10x=x^2-10x=-26$ y finalmente $x=\frac{10}{2}\pm\sqrt{\frac{10^2}{4}-26}=5\pm\sqrt{25-26}$, que da $x'=5+\sqrt{-1}$ y $x''=5-\sqrt{-1}$, valores ambos imaginarios que significan lo absurdo del problema, pues todos los divisores de 26 que no son más que 13 y 2, y ambos cocientes respectivamente de las dos divisiones de que es capaz el número propuesto, suman más de 10.

284. Planteemos y resolvamos el problema siguiente.

Se ha comprado un pedazo de paño por 540 pesetas; si por la misma suma se hubieran comprado 3 metros más, cada metro hubiera costado 15 pesetas ménos, y se desea saber á cómo ha costado el metro.

Para plantear este problema, diremos, si llamamos x al costo del metro de paño $\frac{540}{x}$ será el número de metros comprados, y ese número más 3 deberá ser igual al número de metros que se hubieran comprado por la misma suma á 15 pesetas ménos el metro; luego se podrá plantear el problema por medio de la siguiente ecuacion $\frac{540}{x}+3=\frac{540}{x-15}$. Quitando los denominadores dará $540x-8100+3x^2-45x=540x$. Pasando los términos con incógnita al primer miembro, y los conocidos al segundo, y simplificando dará $3x^2-45x=8100$ y $x^2-15x=2700$, que por la fórmula de las ecuaciones completas dará

$$x=7{,}5\pm\sqrt{\frac{15^2}{4}+2700} \quad \text{y como} \quad \frac{15^2}{4}=56{,}25,$$

será $$x=7{,}5\pm\sqrt{56{,}25+2700}=7{,}5\pm\sqrt{2756{,}25}=7{,}5\pm52{,}5,$$

y $$x'=7{,}5+52{,}5=60,$$
y $$x''=7{,}5-52{,}5=-45.$$

Ambos valores satisfacen la ecuacion primitiva

pues $\frac{540}{60}+3=\frac{540}{60-15}=9+3=\frac{540}{45}=12=12,$

y $\frac{540}{-45}+3=\frac{540}{-45-15}=-12+3=\frac{540}{-60}=-9=-9.$

Pero de ambos valores sólo el positivo 60 satisface las condiciones del problema pues $\frac{540}{60}=9$, son los metros de paño comprados á 60 rs. evidentemente, pues si como dice el enunciado se hubiera comprado 3 metros más, ó sea 12 por la misma suma, hubieran costado á 15 pesetas ménos, ó sea $60-15=45$, valor del metro en ese caso.

Este número 45 es igual á una de las raíces halladas, pero como no satisface las condiciones del problema, indica que cambiando el enunciado las satisfaria.

En efecto, si se propone el problema del modo siguiente:

Se ha comprado un pedazo de paño por 540 pesetas. Si por la misma cantidad hubieran comprado tres metros ménos, cada metro hubiera costado 15 pesetas más, y se desea saber á cómo ha costado el metro.

Planteada y resuelta la correspondiente ecuacion da primeramente

$$\frac{540}{x}-3=\frac{540}{x+15}=540x+8100-3x^2-45x=540x.$$

Despues $-3x^2-45x=-8100=3x^2+45x=8100.$

Luego $x^2+15x=2700$, ecuacion preparada que por la fórmula correspondiente da

$$x=-7{,}5\pm\sqrt{\frac{15^2}{4}+2700}=-7{,}5\pm\sqrt{56{,}25+2700}=-7{,}5\pm\sqrt{2756{,}25}$$
$=-7{,}5\pm52{,}5$, y por lo tanto

$$x'=-7{,}5+52{,}5=45,$$
$$x''=-7{,}5-52{,}5=-60.$$

Valores ó raíces que satisfacen el primero 45 al problema enunciado últimamente y el -60 no, pero sí al enunciado anteriormente.

285. Planteemos, resolvamos y generalicemos discutiéndolo el sencillo problema siguiente. Descomponer el número 100 en dos partes, cuyo producto sea 2400.

Llamando x á la parte mayor, la menor será evidentemente $100-x$, y como el producto debe ser 2400, la ecuacion planteada será

$x(100-x)=2400$ que, preparada, da

primeramente $-x^2+100x=2400,$

despues $x^2-100x=-2400,$

luego $x=+50\pm\sqrt{\frac{100^2}{4}-2400},$

y $x=+50\pm\sqrt{2500-2400},$

y $x=+50\pm\sqrt{100},$

y $x'=+50+10=60,$

y $x''=+50-10=40.$

Valores ó raíces que los dos satisfacen la ecuacion propuesta, pues x, número menor, siendo 40 la ecuacion primitiva

dará $40(100-40)=2400,$

y $40\times60=2400,$

y $2400=2400,$

y satisfacen las condiciones del problema, porque el número 100, dividido en dos partes 60 y 40, estas suman 100, y multiplicadas entre sí, producen 2400, pues $40 \times 60 = 2400$.

Para generalizar este problema, llamaremos x á una de las partes, n al número que ha de dividirse en dos, y por lo que la otra parte será $n - x$ y llamando p al producto de ambas, la ecuacion será

$$x\ (n - x) = p;$$

que, preparada, da
$$x^2 - nx = -p,$$

y resuelta
$$x = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - p}.$$

De esta fórmula se deduce: 1.° Que siempre que el producto p de las dos partes en que debe dividirse el número propuesto, sea mayor que la cuarta parte del cuadrado de tal número, el problema será absurdo porque las raíces de la incógnita serán imaginarias; y en efecto, si en el problema numérico anterior el producto fuese 2800, daria $x = 50 \pm \sqrt{-300}$ demostrando que todos los productos de las partes en que 100 puede dividirse, son menores que el supuesto de 2800. Y 2.° Que cuando dicho producto sea igual á la cuarta parte del cuadrado del número propuesto, las partes en que dicho número quiere dividirse son iguales; pues, en efecto, si el producto dado en el problema anterior fuera 2500, será $x = +50 \pm \sqrt{2500 - 2500} = 50$, número que satisfaria la ecuacion propuesta, pues $50\ (100 - 50) = 2500$ da $50 \times 50 = 2500$.

De lo que tambien se deduce que *el mayor producto que puede formarse con las dos partes en que puede descomponerse un número, resulta cuando dichas dos partes son iguales.*

286. Prepárense y resuélvanse las ecuaciones siguientes, ya planteadas, y otras á juicio de los profesores, en vista de las circunstancias de los discípulos.

1.ª $5x^2 + 40 = 4x^2 - 58.$

2.ª $x\ (4x + 6) = o.$

3.ª $x\ (8x + 8) = 78.$

4.ª $ax^2 - \frac{b}{c} = dx.$

5.ª $\frac{3x^2 - x}{4 - x} - 1 = o.$

6.ª $\frac{x^2}{6} + 9 = 10x.$

7.ª $8x^2 - \frac{1}{2} = x.$

8. $\frac{5x^2}{6} - \frac{x}{2} + \frac{3}{4} = 8 - \frac{2}{3}x - x^2 + \frac{273}{12}.$

Plantéense, prepárense, y resuélvanse los siguientes problemas:

1.° Cuál es el número cuya mitad más 7, multiplicada por su mitad ménos 7 produce 32.

Resultará 18 y -18, por la fórmula de la ecuacion de segundo grado incompleta $x^2 = p = x = \pm \sqrt{p}.$

2.° Cuál es el número cuyo doble cuadrado aumentado del triplo de tal número, da 65.

Debe resultar $+5$ y $-6{,}5$.

3.° Dividir el número 12 en dos partes cuyo producto sea 42.

Debe resultar raíz imaginaria.

4.° *Hallar dos números cuya suma sea* 12, *y que restado el mayor del cuadrado del menor dé* 18.

Este problema produce un sistema de dos ecuaciones, una de segundo grado y otra de primero. Despejando una incógnita en la del primero en funcion de la otra, y sustituyendo su valor en la de segundo grado, las raíces de esta deben ser una positiva 5, y otra negativa — 6.

Tomando la positiva y sustituyendo en lugar de la correspondiente incógnita de la ecuacion de primer grado, dará $z = 7$, y tomando por valor de x el -6, dará $z = 18$. Es decir, las dos soluciones del problema deben ser una 5 y 7, y otra -6 y 18, y ambas satisfacen las condiciones del problema, pues $5 + 7 = 12$ y $5^2 - 7 = 18$, y tambien $-6 + 18 = 12$ y $-6^2 - (+18) = 18$, porque considerando estos números como cantidades algebráicas $-6^2 = -6 \times -6, = +36$, y restar algebráicamente 18, es cambiar el signo, y dará $36 - 18 = 18$.

CAPÍTULO VII.

RAZONES, PROPORCIONES, PROGRESIONES Y LOGARITMOS.

ARTÍCULO PRIMERO.

PRELIMINARES.

287. *Las razones y proporciones* las hemos tratado con suficiente extension en la Aritmética que llamamos superior (capítulo X), porque es materia esencialmente aritmética, y aunque comun al Algebra, es de más aplicacion aritmética que algebráica. Por tal motivo no necesitamos en este capítulo otra cosa que generalizar de una manera sucinta cuanto allí expusimos, dando más completas y científicas demostraciones.

288. *Las progresiones*, aunque materia tambien esencialmente aritmética, en la superior sólo expusimos la parte necesaria para la comprension de la teoría y aplicacion de los logaritmos; pero poco tenemos que añadir sobre ella en este suplemento, pues es Algebra simplemente elemental la que escribimos, y no debe abrazar otra cosa que la generalizacion de las indicadas nociones que sirven de base á la teoría de los logaritmos, y lo necesario para la resolucion de los problemas más comunes que se resuelvan por progresiones.

289. *Los logaritmos*, finalmente, materia esencialmente aritmética, tambien la tratamos con mucha extension en la superior, por lo que tampoco necesitábamos otra cosa que generalizar los principios fundamentales, demostrarlos más científicamente y enseñar algunas aplicaciones que hubieran sido impropias de la Aritmética.

290. Las definiciones de *razon* y *proporcion*, ya se trate de aritméticas ya de geométricas, las de *progresion* y *logaritmos* son las mismas que ya conocemos, pudiéndose únicamente llamar literales á las razones, proporciones ó progresiones algebráicas, pues los logaritmos no pueden por su esencia, ser sino numéricos, aunque tambien se pueden generalizar las progresiones que los constituyen, haciéndolas literales.

ARTÍCULO II.

RAZONES Y PROPORCIONES.

291. *Razon aritmética literal* es, pues, la comparacion de dos cantidades literales, atendiendo á la diferencia de una con otra, y razon geométrica, cuando se comparan las cantidades con relacion al cociente que da la una dividida por la otra.

Así, $a \,.\, b$ ó $a - b$ es una razon aritmética; y $a : b$ ó $\frac{a}{b}$ es una geométrica.

292. Siendo el valor real de una razon (aunque no se atienda sino al relativo de sus partes), la diferencia entre el antecedente y el consecuente si se trata de una aritmética, y el cociente del antecedente por el consecuente, si se trata de una geométrica, todas las propiedades demostradas en la Aritmética referentes á la sustraccion y á la division ó quebrados son comunes á las razones, aunque sean algebráicas.

293. *Proporcion algebráica*, es análogamente que en la aritmética, la igualdad de dos razones aritméticas ó geométricas; y consiguientemente proporcion aritmética es la igualdad de dos razones aritméticas y geométrica, la de dos geométricas.

Así $a \,.\, b : c \,.\, d$ ó $a - b = c - d$ es una proporcion aritmética discreta, pues sería contínua si fuera $a \,.\, b : b \,.\, c$ ó $\div a \,.\, b \,.\, c$ y $a : b :: c : d$ ó $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporcion geométrica, y será contínua $a : b :: b : c$ ó $\div\div a : b : c$.

294. La propiedad fundamental de que en toda proporcion aritmética la suma de extremos es igual á la de medios (Arit. 571), se demuestra muy sencillamente por el Algebra, pues si $a - b = c - d$, cambiando de miembro las cantidades b y d que tienen signo negativo, dará $a + d = c + b$.

295. Todas las propiedades de la proporcion aritmética demostradas (Arit. 572, 573 y 574), se demuestra muy fácilmente por el Algebra de una manera análoga á la empleada para la demostracion del principio fundamental que acabamos de exponer; pues si $a - b = c - d$, será $a = c + b - d$ y $b = d + a - c$, etc., y en $a - b = b - c$, será $a = 2b - c$; y por lo tanto, conociendo tres términos de una proporcion aritmética discreta ó dos de una contínua, se puede muy fácilmente determinar el valor del término desconocido.

296. La propiedad fundamental de toda proporcion geométrica de que el *producto de extremos es igual al de medios* (Arit. 575), se demuestra muy fácilmente por el Algebra, pues si $a : b :: c : d$, será $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y quitando los denominadores á esa igualdad (113), dará $ad = cb$.

297. Todas las propiedades de las proporciones geométricas demostradas (Arit. 576 y siguientes), se demuestran tambien muy fácilmente por el Algebra, pues si es $a : b :: c : d$, será $ad = bc$, y $ad = bc$ será equivalente á $a = \frac{bc}{d}$ y á $\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$ y á $adm = bcm$, y evidentemente $a : b :: c : d$, equivalente $a : c :: b : d$ y á $b : a :: d : c$, etc., y en $a : b :: b : c$ será $a = \frac{b^2}{c}$ y $b = \sqrt{ac}$, etc., y en $a{:}b{::}c{:}d$ y $m{:}n{::}p{:}q$, será $am : bn :: cp : dq$, pues $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, dará $\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{c}{d} \times \frac{p}{q}$ y $\frac{am}{bn} = \frac{cp}{dq}$. Bastando estas indicaciones para demostrar todas las propiedades de las proporciones y sus aplicaciones.

298. Las aplicaciones de las razones y proporciones son, como hemos dicho en diferentes partes, más aritméticas que algebráicas, pues como se ha visto en este tratado de Algebra, sólo para plantear algunas ecuaciones (123) nos hemos apoyado en la teoría de las proposiciones. En la Aritmética, pues, superior, expusimos las principales aplicaciones (Arit. 598 al 645). Reservamos, sin embargo (aunque no muy justificadamente) para el Algebra el segundo caso de la *regla de aligacion*, y con él debemos concluir este artículo.

299. La regla de aligacion (Arit. 644) sabemos que puede ser de dos clases: la primera, que aprendimos á ejecutar en la Aritmética, es la que enseña á determinar el precio medio á que sale una mezcla formada de varias partes de diferente valor; y la segunda *es la que enseña las partes de diferente valor que pueden mezclarse para que la mezcla resulte con un valor medio deseado.*

300. Regla. *Para hallar la razon en que deben mezclarse dos efectos de diferente valor y precio, y cuyo valor medio sea dado, se halla la diferencia entre los precios medio é inferior, y esta diferencia representará las unidades que deben mezclarse del efecto de valor superior, y hallando la diferencia entre el precio de este y el medio, se tendrán las unidades que deben mezclarse del efecto de valor inferior.*

Si fuesen más de dos los efectos que deben mezclarse, se combinará cada uno de precio inferior con otro de precio superior, y si no hubiera tantos de un precio como de otro, se combinará uno de los primeros con dos ó más de los segundos ó al contrario.

301. *Ejemplo 1.°* ¿En qué razon se ha de mezclar café de 40 reales kilógramo con otro de á 30 el kilógramo, para que el valor medio sea de 35?

Resolucion. Café inferior $40 - 35 = 5.$
Café superior $35 - 30 = 5;$

luego en la razon de 5 á 5; y en efecto, 5 kilógramos á 40 reales valen 200, y 5 á 35 valen 150, y los 10 kilógramos valen 350, ó sea á 35 el kilógramo.

Ejemplo 2.° ¿Cuántos litros de vino se han de mezclar de los precios 15, 11, 8 y 7, para que la mezcla resulte á 9 reales?

$$9 \left\{ \begin{array}{l} \text{de } 15 \text{ será } 9 - 7 = 2 \\ \text{de } 11 \text{ será } 9 - 8 = 1 \\ \text{de } \ 8 \text{ será } 11 - 9 = 2 \\ \text{de } \ 7 \text{ será } 15 - 9 = 6. \end{array} \right.$$

Y en efecto, 2 litros á 30 reales, 1 á 11, 2 á 8 y 6 á 7, importan 99 reales los 11 litros, y su valor medio será 9 reales, porque $99 : 11 = 9$.

Ejemplo 3.° ¿Cuántos litros de vino se han de mezclar de los precios 15, 11 y 8, para que la mezcla resulte á 12?

$$12 \left\{ \begin{array}{l} \text{de } 15 \text{ será } 12 - 11 = 1 \quad \text{y} \quad + 12 - 8 = 4 \text{ que da } 5 \\ \text{de } 11 \text{ será } 15 - 12 = 3 \\ \text{de } \ 8 \text{ será } 15 - 12 = 3. \end{array} \right.$$

Y en efecto, 5 litros á 15 importan 75 reales, y 3 á 11 valen 33, y 3 á 8 valen 24, y el total de los 13 litros 132 rs., y por lo tanto, como $132 : 13 = 12$, la mezcla resultará al precio deseado.

302. *Demostracion.* Llamando x á la cantidad del efecto de precio inferior y z á la del precio superior, cada unidad de materia de a reales producirá un exceso del precio medio deseado (que puede llamarse ganancia y expresarse por g) de $a+g-a=g$; y cada unidad de materia de $a+g+p$ reales una disminucion del precio medio (que puede llamarse perdida) de $a+g+p-(a+g)=p$; luego x, unidades del efecto de precio inferior, producirán la ganancia gx y z, unidades del precio superior, una pérdida de pz; más como la mezcla debe resultar con un valor que no llegue ni exceda del precio medio dado, ó sea sin pérdida ni ganancia, deberá ser $gx=pz$, igualdad que da la proporcion $g:p::x:z$, que dice que las cantidades que deben mezclarse están en razon inversa de la diferencia de sus precios al medio deseado; y por lo tanto, que la razon en que tales cantidades deben mezclarse, serán las que indique la diferencia entre el precio medio y los dados, que es lo que previene la regla que queda demostrada.

El problema anterior es esencialmente indeterminado, pues 2 litros á 4 reales, y 4 á 7 producen 6 litros al precio medio de 6 reales y 2 litros á 7 y $5\frac{1}{2}$ á 4 forman una mezcla de igual precio medio; pero este problema se hace determinado añadiendo una condicion más, y es que el número de las unidades de los efectos que se han de mezclar sean dadas, pues en $2-4=6$ y $2+5\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$ son diferentes.

ARTÍCULO III.

PROGRESIONES ARITMÉTICAS.

303. Siendo como es la progresion (Arit. 646) una série de números tales que cada uno es igual al que le precede más ó ménos una cantidad constante llamada razon, si la progresion es aritmética; y cada número es igual al que le precede multiplicado por la razon si la progresion es geométrica, se podrán expresar algebráicamente proporciones, llamando d la razon aritmética y q la geométrica, de este modo:

$$\div a \,.\, a+d \,.\, a+2d \,.\, a+3d \,.\, a+4d \ldots\ldots$$

$$\div\!\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ldots\ldots$$

304. *Lema.* En toda progresion aritmética un término cualquiera es igual al primero más ó ménos tantas veces la razon como términos precedan al de que se trate, pues lo evidencia la definicion de la progresion y la simple inspeccion de la progresion generalizada del número anterior; y esa verdad, que es el principio fundamental de la progresion, se podrá expresar por medio de la fórmula $l=a+(n-1)d$ ó $l=a+md$ llamando l al término de que se trate, a al primero de la progresion, n al número que del término l ó m al de términos que deben precederle, aunque m suelen llamar al número de medios que hay entre el primero y el último, por lo que $n-1=m+1$.

305. Problema. *Insertar entre dos términos dados de una progresion un número cualquiera de medios aritméticos ó diferenciales; ó lo que viene á ser lo mismo, determinar los términos de una progresion cuyo primero y último se conocen, conociéndose tambien el número de términos que la progresion se quiere que tenga.*

Resolucion. Por la fórmula del número anterior se conseguirá, pues m será al número de términos que ha de preceder al último l, y la incógnita será d, ó sea la razon, y dará

$$l = a + md, \text{ que produce } d = \frac{l-a}{m}.$$

Ejemplo. Se quieren insertar cinco medios entre 3 y 15 de una progresion, será $d = \frac{15-3}{6} = \frac{12}{6} = 2$, y por lo tanto la progresion será ÷ 3.5.7.9.11.13.15.

306. *Corolario.* Si entre cada dos términos de una progresion cualquiera se inserta un mismo número de medios, resultará una nueva proporcion, pues que la razon para cada una de las inserciones será igual, siendo la diferencia de dos términos de la progresion primitiva igual á la de otros dos cualesquiera de ella.

307. Teorema. *En toda progresion aritmética todos los términos equidistantes de los extremos suman iguales cantidades.*

Esto es, que $5 + 13 = 7 + 11$, etc., en la proporcion del número 305.

Demostracion. Sea la progresion creciente

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, f \ldots\ldots\ldots t \,.\, h \,.\, k \,.\, l;$$

Siendo la razon d, será

$$b = a + d, \quad c = a + 2d, \text{ etc.},$$

como vimos en la progresion generalizada, y dará aquella $\div a \,.\, a + d \,.\, a + 2d \,.\, a + 3d$, etc. Si se invierten los términos de la misma progresion primitiva para formar una decreciente, dará $\div l \,.\, k \,.\, h \,.\, t \ldots\ldots f \,.\, c \,.\, b \,.\, a$, y en la que evidentemente, siendo como va dicho d la razon, será $k = l - d$ $h = l - 2d$, etc.

Y sumadas término á término las dos progresiones primitivas, darán $\div a + l \,.\, b + k \,.\, c + h \,.\, f + t$, etc., y como $b = a + d$ y $k = l - d$, será $b + k = a + d + l - d = a + l$, y como $c = a + 2d$ y $h = l - 2d$, será $c + h = a + 2d + l - 2d = a + l$, y análogamente $f + t = a + 3d + l - 3d = a + l$; luego $a + l = b + k = c + h = f + t$, etcétera; pero b y k son términos de la progresion equidistantes de los extremos a y l, y lo mismo c y h, y f y t; luego el teorema queda demostrado.

308. Problema general. *Hallar la suma de los términos de una progresion aritmética.*

Llamando S la suma que se busca de la progresion aritmética $\div a \,.\, b \,.\, c \ldots\, h \,.\, k \,.\, l.$, será evidentemente

$$S = a + b + c + \ldots h + k + l, \text{ y tambien}$$
$$S = l + k + h + \ldots c + b + a,$$

y sumando estas dos ecuaciones ordenadamente, darán

$$2s = (a + l) + (b + k) + (c + h)....,$$

pero por el teorema anterior sabemos que $b + k = a + l$ y $c + h = a + l$; luego $2s = (a + l) + (a + l) + (a + l)....$

y llamando n al número de términos repetidos en el segundo miembro, será

$$2s = (a + l)\,n, \text{ y } s = \frac{(a+l)\,n}{2},$$

de cuya fórmula se deduce, como solucion del problema propuesto, que *la suma de los términos de una progresion aritmética es igual á la semisuma de los extremos, multiplicada por el de términos que tenga la progresion.*

309. *Problema particular.* 1.° Hallar la suma de los 25 números enteros que forman la progresion $\div 1 . 2 . 3 . 4$, etc., cuya razon es 1, será

$$S = \frac{1+25}{2} \times 25 = 13 \times 25 = 325.$$

Y en efecto, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 = 325$.

310. Problema particular. 2.° *¿Cuál es la suma de los números impares que hay desde 1 á 25?*

Como éstas forman la progresion $\div 1 . 3 . 5 . 7$, etc., cuya razon es 2, y cuyo número de términos es 13, dará por la fórmula

$$S = \frac{1+25}{2} \times 13 = 13 \times 13 = 169.$$

Y en efecto, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 = 169$, deduciéndose tambien que $s = n^2$, es decir, *que la suma de los números impares del sistema de numeracion es igual al cuadrado del número de términos de que consta la progresion que constituyen.*

ARTÍCULO IV.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS.

311. Teorema. *En toda progresion geométrica un término cualquiera es igual al primero multiplicado por la razon elevada á la potencia con tantas unidades como términos precedan al de que se trate.*

Demostracion. Porque, no sólo como dijimos (Arit. 663), por la definicion de la progresion si cada término ha de ser igual al que le precede multiplicado por la razon, deberá ser tambien igual al primero multiplicado por tantas veces la razon como términos le precedan, ó sea elevada á la potencia que dice el teorema, sino que puede demostrarse del modo siguiente:

Sea la progresion $\div\div a : b : c : d.....$ etc., y como $b = a + q$, llamando q la razon y $c = a \times q \times q = aq^2$, etc., se podrá decir que la progresion propuesta es igual á $\div\div a : aq : aq^2 : aq^3$, etc. Pero 2 y 3, etc., son los exponentes de la razon, y tienen tantas unidades como términos preceden á aquel de que respectivamente forman parte; luego queda demostrado el teorema, que puede expresarse por la fórmula $l = aq^m$, llamando, como otras veces, m al número de términos que preceden al de que se trate.

Los mismos ejemplos que pusimos en la Aritmética, sirven de aplicacion de este teorema, pues que ya allí nos valimos de la misma fórmula algebráica.

312. *Corolario 1.º* De la dicha fórmula se deduce, como dijimos (Arit. 644), que conociendo cualquiera de estas cuatro cosas: primer término de una progresion, su último, su razon y su número de términos, se podrán determinar las otras tres (aunque una de ellas sólo por logaritmos), pues dicha fórmula da $a = \frac{l}{q^m}$ y $q = \sqrt[m]{\frac{l}{a}}$, no pudiendo despejar á m, por lo que sabemos de matemáticas, pues sólo podremos obtener $q^m = \frac{l}{a}$, en la que el valor de m, como hemos dicho y veremos á su tiempo, sólo puede hallarse por medio de los logaritmos.

313. *Corolario 2.º* Por la fórmula $q = \sqrt[m]{\frac{l}{a}}$ se pueden insertar todos los términos que se quieran entre los dos de cualquier progresion dada, los que formarán una progresion, pues que se conocerá el valor de la razon q.

Así, si se quiere insertar dos medios entre los 8 y 16 de la progresion $\div$ 8 : 16 : 32 : etc., ó entre las 16 y 32 por la fórmula, dará $q = \sqrt[3]{\frac{16}{8}} = \sqrt[3]{2}$ $= 1{,}2$ y residuo de 0,272, que producirá un decimal ilimitado, por lo que los términos que resulten con esa razon no serán exactos, como advertimos (Aritmética 665).

Al hacer allí esa advertencia, lo hicimos de manera que podria parecer que queríamos decir que las raíces cuyo índice sea 3 ó un número mayor de 3 deben ser inconmensurables. Debemos simplemente decir que lo serán *casi todas*, y por lo tanto, que en la aplicacion de esta fórmula rara vez q resultará un número entero ni áun decimal exacto.

314. *Escolio.* Por lo que sabemos sobre cantidades radicales, podemos simplificar en muchos casos la aplicacion de la fórmula anterior, pues si tenemos por ejemplo, que insertar 5 medios geométricos entre dos de una progresion que sean 4 y 256 dará $q = \sqrt[6]{\frac{256}{4}}$; mas como $\sqrt[6]{a} = \sqrt{\sqrt[3]{a}}$ (246) será $q = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{256}{4}}} = \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2$, razon entera que produce $\div$ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256.

315. *Problema general.* Hallar la suma de los términos de una progresion geométrica.

Si tenemos $\div\, a : b : c : d....$ que por lo que varias veces hemos dicho será lo mismo que $\div\, a : aq : aq^2 : aq^3.... : aq^m$, la suma será $S = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^m$, y multiplicando por q los dos miembros de esta última igualdad, dara $Sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 ..... aq^{m+1}$, y restando de esta igualdad la anterior ó primitiva cambiando sus signos, y considerando que $-aq$ de la primera, destruye á $+aq$ de la segunda, y aq^4 del minuendo es destruido por $-aq^4$ que puede suponérsele al sustraendo en lugar de los puntos suspensivos, así como que el $-aq^m$ del sustraendo destruirá otro aq^m, que puede suponérsele al minuendo delante de aq^{m+1}, tendremos que $Sq - s = aq^{m+1} - a$, y como $Sq - s = s(q-1)$ y $aq^{m+1} - a = aq^m \times q - a$; y finalmente, $aq^m = l$ (306), tendremos primeramente que

$$Sq - s = aq^{m+1} - a,$$

da

$$S(q-1) = aq^m \times q - a,$$

y despues

$$S = \frac{aq^m \times q - a}{q-1} = \frac{lq - a}{q-1},$$

fórmula que dice que la solucion de este problema general puede expresarse diciendo que *la suma de todos los términos de una progresion geométrica es igual á la diferencia que hay entre el producto del último término, por la razon, y el primero dividida por la misma razon ménos uno.*

316. Para generalizar más el problema haciéndolo aplicable á los casos en que no se conozca el último término de una progresion, y si sólo el primero la razon y el número de términos que debe haber ó que se consideran, diremos que como $aq^m \times q - a = a(q^m \times q - 1)$ y $q^m \times q = q^{m+1}$ y $m + 1 = n$, llamando n al número que ocupa en una progresion el último término, y cuyo número de las que le preceden se llama m, la fórmula será $s = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$.

317. Ejemplo 1.° *Se desea saber cuánto suman los seis primeros términos de una progresion cuyo primero es* 2 *y la razon* 2 *tambien.*

Resolucion. Por la fórmula del número anterior, será $s = \frac{2(2^6 - 1)}{2-1} = \frac{2(64-1)}{2-1} = 2 \times 63 = 126$, y en efecto será $\div\div$ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 ; 64

$$S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126.$$

Ejemplo 2.° *Ofreciendo un ricacho á un obrero, que le habia prestado un buen servicio, qué recompensa queria, le contestó que se contentaba con que los lunes le diese* 1 *real, los martes* 3, *los miércoles* 9, *y así triplicando la suma todos los dias de la semana, y se desea saber cuánto tenia que abonarle cada semana.*

Solucion. Como las cantidades que pide forman una progresion cuya razon es 3 y 1 es primer término, y el número de términos es 7 dias que tiene la semana, se hallará el resultado por la misma fórmula del número anterior, y será

$$S = \frac{1(3^7 - 1)}{3-1} = \frac{1(2187-1)}{3-1} = \frac{1 \times 2181}{2} = 1093 \text{ rs.}$$

Ejemplo 3.° *El inventor del juego de ajedrez, á quien su soberano ofreció una recompensa, dijo que sólo queria, como premio de su invencion,* 1 *grano de trigo por la primera de las* 64 *casillas que el tablero tiene;* 2 *por la segunda;* 4 *por la tercera, y así sucesivamente duplicando hasta la casilla* 64. *Y se desea saber cuánto trigo pedia.*

Resolucion. Como el número de granos de trigo es la suma de una progresion geométrica, cuyo primer término es 1, su razon 2 y 64 el número de sus términos, tendremos

$S = \frac{1(2^{64} - 1)}{2-1} = 2^{64} - 1 = 2^{32} \times 2^{32} - 1 = 18_3446.744_2073.709_1551.615$ granos de trigo.

Cantidad inmensa de grano, pues suponiendo que 5 granos colocados en línea compongan un centímetro, un centímetro cúbico tendrá 125 granos; un decimetro 125000, y por consiguiente un hectólitro 125000000, por lo que el número de granos que ofrece el resultado del problema equivale á más de $1_2475.739_1525.896$ hectólitros, que á 100 reales cada uno importan más de la enorme cantidad de $147_2573.952_1589.690$ reales, que como se comprenderá, el rey de que se trata no pudo pagar, ni hoy podria pagar ningun soberano ni potentado, á pesar de que cantidades como millares de millones hoy las han pagado naciones como Francia, sin llegar ni aproximarse siquiera á la ruina.

ARTÍCULO V.

LOGARITMOS.

318. Aunque los logaritmos sean, como son, materia esencialmente aritmética, y aunque se expresen, como se expresan, necesariamente por *dos progresiones numéricas, una aritmética que empieza por* o *y otra geométrica que empieza por* 1, *y que se corresponden término á término* (Arit. 647), al tratar de ellos en el Álgebra, atendiendo al carácter esencial de esta, no se puede por ménos de generalizar tan importante materia, lo que no puede conseguirse sino generalizándo las dichas proporciones haciéndolas literales.

319. Todo sistema, pues, de logaritmos, sea cual sea su *base* (Aritmética 673), y por lo tanto, ya pertenezca al sistema de su inventor *Neper*, ya al vulgar de Brigg, puede expresarse bajo la forma general siguiente:

$$\div\!\div\ 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : q^7 \ldots\ldots q^m : q^n \ldots\ldots : q^{m+n}$$
$$\div\ 0 \,.\, d \,.\, 2d \,.\, 3d \,.\, 4d \,.\, 5d \,.\, 6d \,.\, 7d \ldots\ldots md \,.\, nd \ldots\ldots (m+n)\,d;$$

pues representando q la razon de la progresion geométrica y d la razon de la progresion aritmética, es evidente que, sea cual sea el valor ó magnitud de una y otra razon, no podria por ménos de estar bien representado cualquier sistema bajo esa forma.

Y no forma excepcion el sistema de Neper (Arit. 675)

$$\div\!\div\ 1 : 1+x : (1+x)^2 : (1+x)^3 \ldots\ldots$$
$$\div\ 0 \,.\quad x \,.\quad 2x \quad .\quad 3x \quad \ldots\ldots$$

porque en este sistema es $x = d$ y $1 + x = q$.

320. Teorema fundamental. *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

Demostracion. Ya demostramos este teorema (Arit. 669) aritméticamente sobre un sistema de dos progresiones numéricas; para demostrarlo algebráicamente diremos refiriéndonos al sistema de logaritmos generalizado expuesto en el número anterior:

Si $2d$ es logaritmo de q^2, y $3d$ de q^3, y md de q^m, y nd de q^n, y finalmente, $(m+n)d$ de q^{m+n}, será evidentemente (porque $q^{m+n} = q^m \times q^n$.

$$\text{Log.}\ (q^m \times q^n) = (m+n)d = md + nd.$$

Pero md y nd son respectivamente los logaritmos de q^m y de q^n;

luego $\qquad \text{Log.}\ (q^m \times q^n) = \text{Log.}\ q^m + \text{Log.}\ q^n,$

y por lo tanto, siendo a y b dos números cualesquiera,

será $\qquad \text{Log.}\ ab = \text{Log.}\ a + \text{Log.}\ b.$

Y si se tratase del producto $abcd$,

sería $\qquad \text{Log.}\ (a \times bcd) = \text{Log.}\ a + \text{Log.}\ bcd,$

y $\qquad \text{Log.}\ (b \times cd) = \text{Log.}\ b + \text{Log.}\ cd,$

y $\qquad \text{Log.}\ (c \times d) = \text{Log.}\ c + \text{Log.}\ d,$

y por lo tanto, Log. $(abcd) = $ Log, $a +$ Log. $b +$ Log. $c +$ Log. d.
Luego queda el teorema demostrado.

321. Corolarios 1.° *El logaritmo de un cociente correspondiente á una division es igual al logaritmo del dividendo ménos el logaritmo del divisor.*

Porque si suponemos que $\frac{a}{b} = x$ será $xb = a$, y como por el teorema anterior Log. $xb =$ Log. $x +$ Log. b y $xb = a$ será Log. $a =$ Log. $x +$ Log. b, y pasando el último término al primer miembro de esa igualdad, y convirtiéndolo en segundo, dará

$$\text{Log. } x = \text{Log. } a - \text{Log } b.$$

322. Corolario 2.° *El logaritmo correspondiente á la potencia de un número es igual al logaritmo de tal número multiplicado por el exponente de la potencia.*

Porque si suponemos

$$a^n = x \text{ como } a^n = aaaa \ldots.$$

y Log. $a^n =$ Log. $a +$ Log. $a +$ Log. $a +$ Log. $a \ldots.$ y como $a^n = x$,
será Log. $x =$ Log. $a +$ Log. $a +$ Log. $a +$ Log. $a \ldots.$
y como tambien

$$\text{Log. } a + \text{Log. } a + \text{Log. } a \ldots. = (\text{Log. } a)^n,$$

será

$$\text{Log. } x = (\text{Log } a)^n.$$

323. Corolario 3.° *El logaritmo de la raiz de un número es igual al logaritmo de tal número dividido por el índice de la raiz.*

Porque si suponemos $\sqrt[n]{a} = x$ como $x^n = a$ (elevando á la potencia n los dos miembros), y segun el corolario anterior, será

$$\text{Log. } a = (\text{Log. } x)^n \quad \text{y} \quad (\text{Log. } x)^n = \text{Log. } x + \text{Log. } x + \text{Log. } x \ldots.$$

será por lo tanto,

$$(\text{Log. } x)^n = (\text{Log. } x) \times n,$$

que dará $(\text{Log. } x) \times n = \text{Log. } a$ y $\text{Log. } x = \frac{\text{Log. } a}{n}$.

324. De las anteriores propiedades generales de los logaritmos y de la índole particular de las vulgares de *Brigg*, (Arit. 673 al 678) dedujimos las propiedades particulares de éstos (Arit. 679 al 695), que no admiten generalizacion algebráica, porque se refieren á circunstancias numéricas de dicho sistema; pero conviene, sin embargo, que en este sitio aclaremos lo que allí indicamos (Arit. 678) sobre la inexactitud esencial de los logaritmos.

325. La inexactitud esencial de los logaritmos (á excepcion de los correspondientes á números potencias enteros de 10) (Arit. 678) consiste en que para desarrollar el sistema de Brigg (y lo mismo cualquiera otro), ha sido preciso interpolar entre los términos de las progresiones

$$\div\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : \text{etc.},$$
$$\div\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ \text{etc.},$$

suficiente número de términos para que la nueva progresion geométrica contuviese todos los números naturales 1 . 2 . 3; y como esa interpolacion tenía que hacerse por la fórmula $q = \sqrt[m]{\frac{l}{a}}$ (308) áun haciendo á m suficientemente grande y potencia exacta de dos para conseguir la extraccion de tal raiz por medio de extracciones sucesivas de la raiz cuadrada siempre $\sqrt[m]{\frac{10}{1}}$ para interpolar $m - 1$ medios entre 1 y 10 (y lo mismo entre 10 y 100), la razon resultará un decimal, y por lo tanto los términos de la progresion geométrica no serán exactamente los números naturales 1 . 2 . 3, etc., sino otros entre los que habrá algunos que se le aproximan mucho en valor; y consiguientemente sus logaritmos ó términos de la progresion aritmética, aunque deducidos exactamente por la fórmula $d = \frac{l-a}{m}$ (300) no son exactamente los correspondientes á los números naturales, como se supone en las tablas, pero inexactitud insignificante en la mayor parte de los casos (Arit. 722).

ARTÍCULO VI.

APLICACIONES DE LOS LOGARITMOS.

326. Las aplicaciones principales de los logaritmos las conocemos (Arit. 696 al 730), y sólo nos falta tratar de aquellas que por no ser propias de la sencillez de la Aritmética, corresponden verdaderamente al Álgebra, como son la determinacion del *interés compuesto* de las llamadas *anualidades*, de las *rentas vitalicias* y de las *ecuaciones exponenciales*.

327. *Interés compuesto*, sabemos lo que es (Arit. 617), y la regla aritmética para determinarlo (Arit. 622); pero segun expresamos al darla (Arit. 673), áun operando con el auxilio de los logaritmos, resulta de ejecucion pesada, cuando se trata de muchos años, por lo que segun ofrecimos debemos dar aquí la regla algebráica.

328 Problema general. *Determinar la cantidad en que se convierte un capital con sus réditos, dado á interés compuesto.*

Regla. *Llamando* C *á la cantidad que se busca,* c *al capital prestado,* t *al número de años porque se tiene dado; y* p *al interés de* 1 *peseta (ó* 1 *real si la unidad numérica es el real), se harán las operaciones que indica la siguiente fórmula,* $C = c\,(1 + p)^t$, *cuya ejecucion por logaritmos es por la fórmula*

$$\text{Log. } C = \text{Log. } c + t \times \text{Log. } (1 + p).$$

Demostracion. Como si el interés que una unidad monetaria á que se refiera el capital c es p, será cp el interés que tal capital produce en un año, y al cabo de ese tiempo, tal capital se habrá convertido en $cp + c$, que es igual á $c\,(1 + p)$, y al cabo del segundo año en $c\,(1 + p)\,(1 + p) = c\,(1 + p)^2$, y al cabo del tercer año en $c\,(1 + p)\,(1 + p)\,(1 + p = c\cdot(1 + r)^3$, y al cabo de t años en $c\,(1 + p)^t$ y será $C = c\,(1 + p)^t$.

Y como el logaritmo de la potencia de una cantidad es igual al logaritmo de dicha cantidad, multiplicando por el exponente de la potencia

Logaritmo $(1 + p) \times t$, será igual al log. $(1 + p)^t$; y como el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de sus factores será log. $C =$ log. $c + t \times$ log. $(1 + p)$.

Luego la regla queda demostrada.

329. *Regla complemental.* Conocidas tres de estas cuatro cosas, capital impuesto á interés compuesto, tiempo porque está prestado, interés de la unidad monetaria en un año y cantidad en que el capital se convierte acumulándole el interés compuesto, se puede determinar la incógnita por medio de la fórmula anterior ó respectivamente por una de las tres siguientes.

$$\text{Log. } c = \text{log. } C - t \times \text{log. } (1 + p),$$

$$\text{log. } (1 + p) = \frac{\text{log. } C - \text{log. } c}{t},$$

$$t = \frac{\text{log. } C - \text{log. } c}{\text{L } (1 + p)}.$$

Demostracion. La fórmula primitiva del número anterior log. $C =$ log. $c + t \times$ log. $(1 + p)$, produce despejando á log. c, ó sea pasando al primer miembro $+ t \times$ log. $(1 + p)$, y convirtiéndolo en segundo y log. c en primero, la fórmula log. $c =$ log. $C - t \times$ log. $(1 + p)$.

Despejando en ella á log. $(1 + p)$, porque el valor de p no puede conocerse hasta que el $1 + p$ sea conocido, dará pasando $- t \times$ log. $(1 + p)$ al primer miembro, y al segundo log. c, y dividiendo este por t factor del primero, la fórmula log. $(1 + p) = \frac{\text{log. } C - \text{log. } c}{t}$ y despejando en esta á t, da $t = \frac{\text{log. } C - \text{log. } c}{\text{log. } (1 + p)}$. Luego esta regla complemental queda tambien demostrada.

330. El interés compuesto se supone siempre por un número entero de años; pues cuando se trata de un quebrado propio de años, se toma por interés compuesto el interés simple; y cuando se trata de un quebrado impropio de años, se determina al interés compuesto correspondiente á los años enteros, y el simple que corresponde á la fraccion de año; en todo lo que hay poco error y se desprecia en la práctica.

331. Ejemplos. 1.º *Hallar la cantidad en qué se convierten 1,000 pesetas en 6 años al 5 por 100 de interés compuesto.*

Resolucion. Por la fórmula $C = c\,(l + p)^t$, ó sea log. $C =$ log. $c + t \times$ log. $(1 + p)$, será

$$\text{log. } x = \text{log. } 1000 + 6 \times \text{log. } (1 + 0{,}05),$$

porque si el interés de 100 pesetas es 5, el de 1 peseta será 0,05, y dará

$$\text{log. } 1000 = 3{,}000000$$

$$6 \times \text{log. de } 1{,}05, \text{ que es } 0{,}021189 = \underline{0{,}127134}.$$

$$C = 1340,\ N \text{ del log. } 3{,}127134$$

El capital c se habrá convertido en 1340 pesetas próximamente, pues hecha con exactitud la operacion da un pico de algo más de 9 centésimos; y lo mismo dará operando aritméticamente por el método práctico (Arit. 622).

332. Ejemplo 2.º *Hallar el capital que se necesitará dar á interés com-*

puesto, para que en 6 años, al 5 por 100 anual. se convierta en el de 1340,09 pesetas.

Resolucion. Por la fórmula correspondiente $\log. c = \log. C - t \times \log. (1+p)$, dará

$$\begin{array}{lr} \text{Log. de } 1340{,}09 \ldots\ldots\ldots\ldots & 3{,}127134 \\ -\ \text{log. de } 1{,}05\text{, que es } 0{,}021189 \times 6 = & 0{,}127134 \\ \hline C = 1000,\ N \text{ del log.} \ldots\ldots\ldots\ldots & 3{,}000000 \end{array}$$

Luego 1000 pesetas es el capital que se necesita, porque 1000 es el número correspondiente al logaritmo 3,000000, y este resultado sirve de comprobacion al del problema anterior.

333. Ejemplo 3.° *Determinar á qué interés anual se necesitará prestar un capital de 1000 pesetas por 6 años, para que se convierta en el de 1340,09.*

Resolucion. Por la fórmula correspondiente $\log. (1+p) = \frac{\log. C - \log. c}{t}$, dará

$$\begin{array}{lr} \text{Log. de } 1340{,}09 \ldots\ldots\ldots & 3{,}127134 \\ -\ \text{Log. de } 1000 \ldots\ldots\ldots & 3{,}000000 \\ \hline \text{Log.} \ldots\ldots\ldots\ldots = & 0{,}127134 : 6 \\ \text{luego} \quad 1+p = 1{,}05,\ N \text{ del log.} & 0{,}021189 \end{array}$$

y $p = 1{,}05 - 1 = 0{,}05$ interés al año de una peseta, y consiguientemente el 5 por 100 es el tanto por ciento que se busca, porque si una peseta da de interés 0,05, darán 100 pesetas 5 pesetas.

334. Ejemplo 4.° *Determinar por cuántos años habrá que prestar un capital de 1000 pesetas, para que al interés compuesto de 5 por 100 se conviertan en 1340,09.*

Resolucion. Por la fórmula correspondiente $t = \frac{\log C - \log. c}{\log. (1+p)}$, dará

$$\begin{array}{lr} \text{Log. de } 1340{,}09 \ldots\ldots\ldots\ldots & = 3{,}127134 \\ -\ \text{log. de } 1000 \ldots\ldots\ldots\ldots & = 3{,}000000 \\ \hline & = 0{,}127134 \\ \text{Dividido por log. de } (1+p)\ 1{,}05 & = 0{,}021189 \end{array}$$

y como $127134 : 21189 = 6$, serán 6 años el valor de la incógnita.

335. En las cajas de ahorros, cuando se hacen imposiciones semanales, se consideran como hechas á 1.° del mes siguiente, y se les atribuye interés simple hasta fin del año, en cuya época se acumulan y empiezan á ganar interés compuesto hasta el 1.° del año en que se verifica la devolucion, con interés simple por los meses que hayan trascurrido desde el principio del año; lo que simplifica mucho las operaciones, sobre todo en los casos que son más frecuentes en esos establecimientos, que son los de hacer las imposiciones con mucha irregularidad y sacar cantidades con irregularidad semejante.

336. *Anualidades* se llaman los pagos iguales y anuales que, para extinguir una deuda, se conviene en hacer durante cierto tiempo entre un deudor y su acreedor.

337. Problema general. *Prestada una cantidad á interés determinado y á condicion de reembolsarla á interés compuesto en determinado número de anualidades iguales, se desea saber el valor de cada anualidad.*

Regla. Llamando C la cantidad prestada, p el tanto por ciento anual convenido de la unidad monetaria, n el número de años en que se ha de reembolsar, y a la anualidad que debe pagarse para conseguirlo, incógnita del problema que podria llamarse x, se procederá con arreglo á la fórmula $a = \frac{Cp(1+p)^n}{(1+p)^n-1}$.

Demostracion. Considerando que la primera anualidad producirá en manos del acreedor el interés compuesto correspondiente á $n - 1$, la segunda el de $n - 2$, la tercera el de $n - 3$, etc., todas reunidas, con sus intereses al fin de n años, deben componer el capitalpr estado C, como si entonces se pagase todo con sus intereses (328) ó sea $C(1+p)^n$. Ademas

La primera anualidad producirá. . . . . $a(1+p)^{n-1}$
La segunda. . . . . $a(1+p)^{n-2}$
La tercera. . . . . $a(1+p)^{n-3}$
La penúltima, pagada al empezar el último año. . . . . $a(1+p)$
Y la última, pagada al final del último año. . . . . . . a.

La suma de todas reunidas formarán la suma de $a + a(1+p) + a(1+p)^3 + \ldots a(1+p)^{n-2} + a(1+p)^{n-1}$, y como esta série de términos forma una progresion geométrica cuya razon es $1+p$ y el primer término es a, tendremos que $S = \frac{a[(1+p)^n - 1]}{p}$, y tendremos la ecuacion $C(1+p)^n = \frac{a[(1+p)^n - 1]}{p}$, en la que, despejando la a que es la incógnita del problema, nos dará $a = \frac{Cp(1+p)^n}{(1+p)^n-1}$.

Luego la regla queda demostrada.

338. De esta fórmula se pueden deducir evidentemente las correspondientes para los casos en que la incógnita sea p, ó c, ó n, ó a; pero la correspondiente al valor de p no es de solucion fácil, porque resulta ecuacion de grado n, que siendo superior al segundo, no es de las de que trata el Algebra elemental.

339. *Ejemplo. Problema particular.* Qué anualidad deberá pagarse para extinguir en 10 años al 5 por 100 de interés compuesto una deuda de 10000 pesetas.

Resolucion. Por la fórmula del número 337, $a = \frac{Cp(1+p)^n}{(1+p)^n-1}$; haciendo $C = 1$ para abreviar el cálculo, como $p = 0{,}05$, pues si 100 pesetas producen 5, es evidente que 1 peseta producirá 0,05 y $1 + p = 1{,}05$.

Y como log. de 1,05 $= 0{,}021189$,
y multiplicado por 10, da 0,21189, cuyo número correspondiente es 1,628, la fórmula se convertirá en $a = \frac{0{,}05 \times 1{,}628}{0{,}628} = 0{,}12931$, que será la anualidad; pero como supusimos el capital de 1 y es de 10000 la anualidad hallada para ser la verdadera, habrá que multiplicarla por 10000, y será 1296,1 pesetas.

340. Análogamente se obraria en los demas problemas de los casos en que la incógnita no fuese a; é inútil no será advertir que la última parte del cálculo del número anterior se hace por logaritmos más fácilmente, y por lo tanto que á ellos debe recurrirse siempre en problemas complicados.

341. *Rentas vitalicias* se llama las cantidades anuales que reciben los imponentes en ciertas cajas de depósitos durante su vida, como consecuencia de una imposicion que hacen para tener ese derecho, y que la caja admite con riesgo de pérdida ó ganancia, segun que la vida del imponente sea mayor ó menor que la probable, que, segun su edad, al hacer la imposicion le imputa dicho establecimiento, en virtud de ciertas tablas que existen calculadas para ese efecto.

Tales anualidades se determinan por la fórmula del número penúltimo, haciendo C igual á la imposicion, p el tanto por 1, correspondiente al tanto por 100 que la caja tenga establecido; y por n el número de años de vida probable, determinado en vista de la edad del imponente al hacer la imposicion, y lo que por tal dato expresan las indicadas tablas.

342. *Vida probable* de una persona se llama el tiempo que ha de trascurrir para que mueran la mitad de las que tienen su misma edad.

343. Las estadísticas suministran datos para construir tablas de vida probable correspondientes á todas las edades en cada país. Para España puede hoy servir la sacada de un trabajo sobre la ley de mortalidad en España, dado á luz en 1866, por D. Miguel Merino, y es la siguiente:

Edad.	Vida probable.	Edad.	Vida probable.	Edad.	Vida probable.
1	44	31	33,8	61	11
2	50	32	33	62	10,3
3	52	33	32,2	63	9,7
4	53	34	31,3	64	9,2
5	53,5	35	30,5	65	8,6
6	53,4	36	29,7	66	8
7	53	37	28,9	67	7,5
8	52,5	38	28,1	68	7
9	51,8	39	27,3	69	6,6
10	51	40	26,5	70	6,2
11	50,3	41	25,7	71	5,7
12	49,5	42	24,9	72	5,4
13	48,7	43	24	73	5
14	47,8	44	23,4	74	4,7
15	47	45	22,6	75	4,4
16	46,1	46	21,8	76	4,2
17	45,3	47	21	77	3,9
18	44,4	48	20,2	78	3,7
19	43,6	49	19,4	79	3,5
20	42,8	50	18,7	80	3,4
21	42	51	17,9	81	3,2
22	41,1	52	17,2	82	3
23	40,8	53	16,5	83	2,8
24	39,5	54	15,7	84	2,6
25	38,7	55	15	85	2,5
26	37,9	56	14,2	86	2,3
27	37,1	57	13,6	87	2,1
28	36,3	58	13	88	1,9
29	35,4	59	12,3	89	1,7
30	34,6	60	11,6	90	1,5

344. *Ecuaciones exponenciales* se llaman aquellas en que la incógnita es exponente de una de las cantidades conocidas.

Así $a^x = b$; $a^{c^x} = b$; $a^{c^{c^x}} = b$; $a^{c^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}} = b$,

son ecuaciones exponenciales, distinguiéndose entre sí la primera, llamándola de primer órden, la segunda de segundo órden, la tercera de tercer órden, y la cuarta pudiendo considerarse del órden n.

345. La resolucion de estas ecuaciones no corresponden realmente al Álgebra elemental, sin embargo, lo fácilmente que se resuelven por logaritmos y el haber reservado para el Álgebra la resolucion de un problema aritmético, sobre progresiones (Arit. 664) de los cuatro que se resuelven por la fórmula $l=a\times q^m$ que produce la $a = \frac{l}{q^m}$ y $q = \sqrt[m]{\frac{l}{a}}$ nos obliga á terminar este artículo sobre aplicaciones de los logaritmos, con la correspondiente á la resolucion de dichas ecuaciones.

346. La ecuacion exponencial de primer órden $a^x = b$, se resuelve por logaritmos muy fácilmente, pues como el logaritmo de la potencia de un número es igual al logaritmo del mismo número, multiplicado por el exponente de la potencia, dicha ecuacion $a^x = b$, dará $x \times \text{Log. } a = \text{Log. } b$ y $x = \frac{\text{Log. } b}{\text{Log. } a}$. Luego

Cuando la incógnita sea exponente de una cantidad conocida é igual á otra conocida tambien, simple ó compuesta, la incógnita será igual al logaritmo de la cantidad á que es igual la conocida con la incógnita por exponente, dividida por el logaritmo de la cantidad á que la incógnita afecta como exponente.

Ejemplo.

$$4^x = 64 \quad \text{da} \quad x = \frac{\text{Log. } 64 = 1,806180}{\text{Log. } \ 4 = 0,602060}.$$

Y como $\quad 1,806180 : 0,602060 = 3,$

será $\quad x = 3;$ y en efecto, $4^3 = 64.$

347. Para resolver una ecuacion exponencial superior al primer grado, se toman los logaritmos del segundo miembro y del primero sin exponente, con lo que se reduce al órden inferior inmediato, y así sucesivamente hasta tener una del primer órden, que se resolverá por el procedimiento del número precedente.

Así, $\quad 4^{3^x} = 263144$

da $\quad 3^x \times \text{Log. } 4 = \text{Log. } 262144$ y $3^x = \frac{\text{Log. de } 262144 = 5,418540}{\text{Log. } \ 4 = 0,602060} = 9,$

y despues en $3^x = 9$ será $x = \frac{\text{Log. } 9 = 0,954243}{\text{Log. } 3 = 0,477121} = 2,$

y una fraccion de millonésimo, hija del error consiguiente á la inexactitud de las tablas; luego la ecuacion propuesta es

$$4^{3^2} = 262144; \quad \text{y en efecto,} \quad 4^{3^2} = 4^9 = 262144.$$

CAPÍTULO VIII Y ÚLTIMO.

IDEA GENERAL DE ALGUNOS PUNTOS DEL ÁLGEBRA QUE NO PERTENECEN REALMENTE Á LA ELEMENTAL, COMO SON: LA DESCOMPOSICION EN FACTORES DE PRIMER GRADO DEL TRINOMIO QUE CONSTITUYE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO COMPLETA DESPUES DE PREPARADA; LA RELACION QUE HAY ENTRE LAS RAÍCES DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO Y SUS COEFICIENTES; LAS COORDINACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES Y EL BINOMIO DE NEWTON, CON SU APLICACION Á LA ELEVACION Á POTENCIAS.

ARTÍCULO PRIMERO.

PRELIMINARES.

348. El Algebra elemental no alcanza, segun el justificado criterio de la mayor parte de los autores, más que á la resolucion de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita y bicuadradas, con la generalizacion de la teoría y aplicaciones de las razones, proporciones, progresiones y logaritmos; pero como casi todos los autores, al escribir Algebra elemental, dan una idea de algunos puntos de la superior, ya en observaciones intercaladas en el texto de la elemental, ya en apéndice á la misma, creemos deber completar nuestro trabajo, dando en este último capítulo una idea de lo que dice el epígrafe.

Como materia, sin embargo, de ménos importancia, atendido el objeto principal de la obra, lo haremos de una manera sucinta, sin perjuicio de ampliarla en otra edicion, si el éxito de esta primera nos indujese á dar la otra, aprovechable para otros que los que cursan la segunda enseñanza.

ARTÍCULO II.

DESCOMPOSICION EN FACTORES DE PRIMER GRADO DEL TRINOMIO QUE CONSTITUYE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO COMPLETA DESPUES DE PREPARADA, Y RELACION QUE HAY ENTRE LAS RAÍCES DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO Y SUS COEFICIENTES.

349. El trinomio $x^2 \pm px \pm q = 0$, que constituye realmente toda ecuacion de segundo grado completa despues de preparada (pues $x^2 \pm px = \pm q$, da $x^2 \pm px \pm q = 0$), y sucesivamente tomando sólo el signo $+$ y análogamente si tomáramos el $-$ del signo de ambigüedad,

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$$

$$[A] \qquad (x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$$

$x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, cuyas raíces son $x' = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ y

$x'' = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$; pero como la ecuacion [A] produce tambien la $(x + \frac{1}{2}p)^2 - (\frac{1}{4}p^2 - q) = 0$, y como $\frac{1}{4}p^2 - q = \left(\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right)^2$, la ecuacion anterior producirá $(x + \frac{1}{2}p)^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right)^2 = 0$, y como $x^2 + px + q = 0$ de esta ecuacion y la anterior se deduce la $x^2 + px + q = (x + \frac{1}{2}p)^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{2}p^2 - q}\right)^2$. Y finalmente, como el segundo miembro es la diferencia de dos cuadrados, será igual al producto de la suma por la diferencia de sus raíces; porque $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, pues $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$, y será $\left(x + \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{2}p^2 - q}\right)\left(x + \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\right) = x^2 + px + q$ [B].

Comparando ahora los dos factores del primer miembro de la anterior ecuacion á las raíces x' y x'' que produce la $x^2 + px + q = 0$, se tendrá $x + \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} = x - x''$ y $x + \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} = x - x'$; luego el primer miembro de [B] se podrá poner bajo la forma $(x - x')(x - x'')$, y por lo tanto $x^2 + px + q = (x - x')(x - x'')$, la que prueba que *el trinomio que constituye la ecuacion de segundo grado completa, despues de preparada, se compone del producto de dos factores binomios compuestos de la diferencia entre* x *y cada una de las dos raíces de la ecuacion de segundo grado á que pertenece.*

350. *Observacion.* La deduccion del final del número anterior, podria ser el enunciado de un teorema cuya demostracion sería casi igual al análisis que nos ha conducido á tal deduccion; y así lo hubiéramos hecho, siguiendo el método sintético que hasta ahora hemos seguido (aunque no siempre en el anterior capítulo), pero lo abandonamos en este, porque siendo su materia propia del Algebra superior, el tratarla sintéticamente sería quitar al Algebra su principal mérito, pues que es ciencia analítica por excelencia, y como ya hemos dicho en el prólogo, sólo la elemental se presta sin inconveniente á la síntesis. Ademas, el objeto de este capítulo y los fines que debe llenar, nos impulsan á exponer su contenido de manera que sirva de ejercicio analítico para los que deban dedicarse á estudios matemáticos profundos, sirviéndoles de medio de transicion de uno á otro método, y de medio tambien de que conozcan prácticamente, en virtud de la indicacion del principio de esta observacion, cómo una análisis puede convertirse en teorema, y cuán difícil é inconveniente es hacer tal conversion en el Algebra superior.

351. Si en la ecuacion deducida en el número penúltimo $x^2 + px + q = (x - x')(x - x'')$, efectuamos la multiplicacion de los dos factores del segundo miembro dará $x^2 + px + q = x^2 - (x' + x'')x + x'x''$.

Para que la igualdad sea verdadera, es evidentemente preciso que $x' + x'' = -p$ y $x''x' = q$, y como igualmente se encuentra relacion semejante sumando y multiplicando entre sí las raíces x' y x'' halladas en el número penúltimo, resulta que *en toda ecuacion de segundo grado completa, despues de preparada el coeficiente* p *es igual, y de signo contrario á la suma de las raíces de la ecuacion; y el término conocido* q *es igual al producto de tales raíces.*

352. La aplicacion de la anterior deduccion y de la del número penúltimo, es la de poder reconstruir una ecuacion de segundo grado, cuyas raíces se conocen, ó formar una con resultados determinados.

Ejemplo. Si tenemos $x' = 9$ y $x'' = -5$, como debe ser, $p = -(9 - 5) = -4$ y $q = 9 \times -5 = -45$.

La ecuacion de que proceden será $x^2 - 4x - 45 = o$, que en efecto da $x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} + 45} = 2 \pm \sqrt{\frac{16}{4} + 45} = 2 \pm \sqrt{4 + 45} = 2 \pm \sqrt{49} = 2 \pm 7$ y $x' = 9$ y $x'' = -5$.

353. El conocimiento de las deducciones de los números anteriores puede servir tambien para plantear más fácilmente problemas de segundo grado, de determinar cuáles son los dos números cuya suma y producto se conocen, pues que p, coeficiente del segundo término de la ecuacion preparada, deberá ser igual á la suma conocida de dichos números, y q, tercer término de la ecuacion preparada, será el producto conocido de los términos que se buscan.

Ejemplo. Se desea averiguar cuáles son los números cuya suma es 16 y su producto 63.

Como p será -16 y q será 63, la ecuacion será $x^2 - 16x + 63 = o$, la que para resolverla dará sucesivamente

$$x = +8 \pm \sqrt{\frac{16^2}{4} - 63} = +8 \pm \sqrt{64 - 63} = 8 \pm \sqrt{1} = 8 \pm 1,$$

y tendremos $x' = 8 + 1 = 9$ y $x'' = 8 - 1 = 7$.

Luego los números buscados son 9 y 7 que satisfacen ia ecuacion preparada

pues $9^2 - 16 \times 9 + 63 = o$ da $o = o$

y tambien $7^2 - 16 \times 7 + 63 = o$ da $o = o$,

y ambos satisfacen las condiciones del problema, porque $7+9=16$, suma dada, y $7 \times 9 = 63$, producto dado.

354. Para plantear el anterior problema por el método ordinario, tendríamos que decir que, como los dos números que se buscan están tan ligados entre sí, que conociendo el uno fácilmente se averigua el valor del otro, la ecuacion puede plantearse con una sola incógnita. Por lo que llamando x al número menor (y análogamente al mayor) el mayor será $16 - x$, y la ecuacion que se puede plantear por conocer el producto de ambos números será $x(16 - x) = 63$, que preparada dá sucesivamente

$$-x^2 + 16x = 63 = x^2 - 16x = -63 = x^2 - 16x + 63 = o;$$

justamente la misma que obtuvimos por el método de los números anteriores.

355. La discusion que puede hacerse del problema anterior, es que si la mitad de la suma de los números que se buscan elevada al cuadrado es menor que el número dado como producto, el problema es absurdo; pues si se nos dice cuáles son los dos números que sumando 14 su producto sea 63, tendremos

$$x^2 - 14x = -63,$$

que da $$x = 7 \pm \sqrt{\frac{14^2}{4} - 63} = 7 \pm \sqrt{49 - 63} = 7 \pm \sqrt{-14},$$

cuyas dos raíces son imaginarias, porque en efecto, no hay dos números en que pueda descomponerse el 14, como son 1 y 13, 2 y 12, etc., que produzcan de producto 63, porque los dos mayores son sus mitades, ó sea $7+7$ y $7^2 = 49$ menor que 63.

ARTÍCULO III.

COORDINACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES.

356. *Coordinaciones* se llaman los diferentes grupos que pueden formarse con determinado número de objetos, entrando en cada uno igual número de ellos, y diferenciándose en alguno de los objetos que los forman ó en la manera en que estén colocados. Llamándose las coordinaciones binarias, ternarias, cuaternarias, etc., segun el número de objetos que entren en cada grupo.

Dos problemas pueden resolverse por medio de la teoría de las coordinaciones: 1.º Formar las coordinaciones binarias, ternarias, etc., de un número cualquiera de objetos. 2.º Determinar las coordinaciones de órden determinado que pueden formarse con determinado número de objetos.

357. *Problema general.* 1.° Fórmense las coordinaciones binarias, ternarias, etc., que se puedan con las letras *a*, *b*, *c*, *d*.

Solucion Si á la derecha de *a* colocamos sucesivamente las otras tres letras *b*, *c*, *d*, y al de *b* las otras *a*, *c*, *d*, etc., tendremos evidentemente las doce combinaciones binarias siguientes:

ab,	*ba*,	*ca*,	*da*,
ac,	*bc*,	*cb*,	*db*,
ad,	*bd*,	*cd*,	*dc*,

sin que admitan esas cuatro letras otra distribucion en grupos de dos.

Si ahora, á la derecha de la primera coordinacion binaria *ab*, colocamos las otras dos letras sucesivamente, ó sea formando dos grupos, y lo mismo hacemos con la segunda combinacion binaria, evidentemente nos dará las veinte y cuatro combinaciones ternarias siguientes:

abc,	*bac*,	*cab*,	*dab*,
abd,	*bad*,	*cad*,	*dac*,
acb,	*bca*,	*cba*,	*dba*,
acd,	*bcd*,	*cbd*,	*dbc*,
adb,	*bda*,	*cda*,	*dca*,
adc,	*bdc*,	*cdb*,	*dcb*,

y de una manera análoga se deducirian las cuaternarias.

358. De la inspeccion de los cuadros del número anterior y del procedimiento empleado para formarlo, se deduce la siguiente regla: *Para formar las coordinaciones binarias de* n *objetos, se colocan á la derecha de cada uno sucesivamente todos los demas dados; para formar las ternarias, se colocan á la derecha de cada coordinacion binaria sucesivamente todos los demas objetos que sean dados. Y en general, para formar las coordinaciones del órden* m *de* n *objetos, se forman primeramente los del órden* m — 1, *y al lado de cada una de éstas se ponen uno por uno los objetos restantes.*

Ejemplo. Se desea saber cuántos números de tres cifras se podrá formar con las 3, 5, 7, 9, y diremos que sus coordinaciones binarias son.

35	53	79	93
37	57	73	95
39	59	75	97

y las ternarias que se desean, serán

357	537	793	935
359	539	795	937
375	573	735	953
379	579	739	957
395	593	753	973
397	597	759	975

359. *Problema general.* 2.° Determinar el número de coordinaciones binarias ó ternarias, etc., que puede formarse con n objetos.

Solucion. Como las binarias con n objetos se forman con cada uno de ellos al lado de cada uno de los restantes, que serán $n - 1$, cada objeto produciria $n - 1$, combinaciones binarias en que entre en primer lugar, y las n objetos $n\,(n - 1)$. Y en efecto, las cuatro cifras del ejemplo del número anterior, dan $4\,(4 - 1) = 12$ coordinaciones binarias.

Llamando Coordinacion $\frac{2}{n}$ las binarias de n objetos, será

$$\text{Coordinacion } \frac{2}{n} = n\,(n - 1).$$

Como las ternarias se forman con las binarias, y cada uno de los objetos que no entran en ellas son evidentemente $n-2$, las ternarias serán $n(n-1)(n-2)$; y en efecto, en el ejemplo citado serán $4(4-1)(4-2)=24$ las ternarias; y las cuaternarias serian tambien 24, porque Coordinacion $\frac{4}{n}=n(n-1)(n-2)(n-3$, en tal ejemplo, será $4(4-1)(4-2)(4-3)=4\times3\times2\times1=24$, y en general Coordinacion del órden m da Coordinacion $\frac{m}{n}=n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-m+1)$, por lo que en el ejemplo citado las coordinaciones quinquenarias no son posibles, porque los objetos dados son 4, y no pueden formar grupos de á 5, pues dará $4(4-1)(4-2)(4-3)(4-4)=4\times3\times2\times1\times o=o$.

Ejemplo. Determinar de cuántas maneras se podrán sentar 12 personas en una mesa cuadrada, ó sea en grupos de 3, que cabe en cada uno de los cuatro lados.

Resolucion. Por la fórmula Coordinada $\frac{m}{n}=n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$ como en el problema propuesto $m=3$ y $n=12$, dará $12(12-1)(12-2)$.

que produce $12\times11\times10=1320$.

Luego de 1320 maneras podrán sentarse 12 personas en la mesa cuadrada, y empleando 1 minuto en cada trasformacion será 22 horas el tiempo que emplearian.

360 *Permutaciones.* Se llaman las coordinaciones en las que entran en cada grupo todos los objetos dados.

Ejemplo. Se desea saber cuántas palabras distintas pueden formarse con las cuatro letras *a s r o.*

Resolucion. Coordinaciones binarias	*as*	*sa*	*ra*	*oa*
	ar	*sr*	*rs*	*os*
	ao	*so*	*ro*	*or*
Coordinaciones ternarias,	*asr*	*sar*	*ras*	*oas*
	aso	*sao*	*rao*	*oar*
	ars	*sra*	*rsa*	*osa*
	aro	*sro*	*rso*	*osr*
	aos	*soa*	*roa*	*ora*
	aor	*sor*	*ros*	*ors*
Coordinaciones cuaternarias que se llaman permutaciones,	*asro*	*saro*	*raso*	*oasr*
	asor	*saor*	*raos*	*oars*
	arso	*srao*	*rsao*	*osar*
	aros	*sroa*	*rsoa*	*osra*
	aosr	*soar*	*roas*	*oras*
	aors	*sora*	*rosa*	*orsa.*

361. Del cuadro anterior se deduce evidentemente que el número de permutaciones de 4 es $4\times3\times2\times1=24$, el de 3 será $3\times2\times1$ y el de n objetos $1\times2\times3\dots\times n$; y por lo tanto, la fórmula será Permutacion de $n=1\times2\times3\dots\times n$, y las de 7 objetos serán por tal fórmula $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7=5040$.

362. *Combinaciones* se llaman las coordinaciones que se distinguen por uno ó más de los objetos que entran en los grupos, pudiendo ser binarias, ternarias, etc., segun el número de objetos de cada grupo.

363. Dos problemas pueden resolverse tambien por medio de combinaciones: 1.° Formar las combinaciones binarias, ternarias, etc., de varios objetos colocados en fila. Y 2.° Determinar el número de combinaciones que con varios objetos pueden formarse conociendo su número y el órden de las combinaciones deseadas.

364. *Problema general.* 1.° Fórmense las combinaciones binarias, ternarias, etc., con los objetos *a, b, c, d.*

Solucion. Si al lado de cada una de esas letras colocamos sucesivamente las otras de su derecha, y no las de su izquierda, tendremos los grupos siguientes:

ab,	*bc*,	*cd*.
ac,	*bd*,	
ad,		

Sin poder hacer más combinaciones, porque, por ejemplo, la coordinacion *ba* y las *ca, da, cb, db* y *dc*, tienen los mismos objetos, aunque colocados de diferente manera, que respectivamente las *ab, ac, ad, bc, bd* y *cd*, y no son combinaciones distintas.

Si al lado de cada grupo de las combinaciones binarias se ponen uno por uno los objetos dados que siguen por la derecha á los de cada combinacion binaria, tendremos las ternarias

abc	*bcd*,
abd	
acd	

y análogamente los cuaternarios, que en este caso sólo sería una *abcd*, pues cualquier otra coordinacion con las cuatro letras, no sería combinacion distinta de la *abcd*.

365. Dedúcese de lo expuesto: 1.° Que para formar las combinaciones binarias de *n* objetos, se colocan por su órden y á su lado cada uno de los restantes, considerados en el mismo órden de colocacion. 2.° Que para formar las combinaciones ternarias, se pone al lado de cada combinacion binaria cada uno de los que siguen en órden al último de la binaria. Y 3.° Que en general, para formar las combinaciones de órden *m* de *n* objetos, se forman primeramente las del órden $m-1$, y al lado de cada uno se ponen uno por uno los demas objetos que no entraron en ellas.

Ejemplo. Determinar los ternos que son posibles con los números 3, 4, 5, 6 y 7.

Las combinaciones binarias serán:

3 . 4	4 . 5	5 . 6	6 . 7.
3 . 5	4 . 6	5 . 7	
3 . 6	4 . 7		
3 . 7			

Las ternarias ó ternos deseados,

3 . 4 . 5	4 . 5 . 6
3 . 4 . 6	4 . 5 . 7
3 . 4 . 7	4 . 6 . 7
3 . 5 . 6	5 . 6 . 7.
3 . 5 . 7	
3 . 6 . 7	

366. *Problema general.* 2.° Determinar el número de combinaciones que sean posibles con *n* objetos.

Solucion. Por la inspeccion del cuadro del número anterior, deduciremos sin necesidad de elevarnos á cálculo más difícil, que el número de combinaciones binarias de 5 objetos es $\frac{5\times(5-1)}{2}=10$, el de ternarias $\frac{5\times(5-1)(5-2)}{2\times3}=10$, el de cuaternarias $\frac{5\times(5-1)(5-2)(5-3)}{2\times3\times4} = 5$, que son en el ejemplo anterior 3 4 5 6 3 4 5 7 3 4 6 7 3 5 6 7 4 5 6 7 y el de las quinquenarias una, y en general serán

Com. tern. $\frac{3}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2\times3}$

y el de las cuaternarias $\frac{3}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times3\times4}$

y en general Comb. $\frac{m}{n} = \frac{n(n-1)(n-2).....n-m+1}{1\times2\times3.....\times m}$

Ejemplo. Se desea saber con los 90 números de la lotería primitiva, ya abolida, cuántos ternos pueden formarse, ó sea combinaciones de tres cifras ó ternarias.

Resolucion. Comb. $\frac{3}{90} = \frac{90\times89\times88}{1\times2\times3} = 117480.$

367. *Teoría de las probabilidades* se llama la que enseña á determinar la relacion que hay entre el número de casos favorables de que una cosa suceda, y el de adversos entre varios posibles, pues se llama probabilidad matemática favorable cuando el número de casos favorables es mayor que el de desfavorables; probabilidad que aumenta y se iguala á la certeza cuando es *o* el número de casos adversos ó contrarios.

Ejemplo. Si metemos en un saco 10 bolas negras y 8 blancas, al sacar una tenemos alguna mayor probabilidad de sacar bola negra, que se expresa matemáticamente por la razon 10 : 8 ó $\frac{10}{8}$. Si las bolas negras fueran 8 y las blancas 10, la probabilidad sería de sacar blanca, y la de sacar negra se expresa por $\frac{8}{10}$, y si todas las bolas fuesen negras la certeza se expresará por $\frac{18}{0}$.

368. *Problema.* ¿Qué probabilidad tiene un jugador de tresillo de recibir espada y basto?

Resolucion. Como el número de casos favorables es el de combinaciones binarias que puedan hacerse con las 9 cartas que recibe, esto es $\frac{9\times8}{1\times2} = 36$, y el de casos posibles es el de las combinaciones binarias de las 40 cartas de la baraja ó $\frac{40\times39}{1\times2} = 780$; la probabilidad que se busca es $\frac{36}{780} = \frac{3}{65}$.

Luego de cada 65 veces que se reparten las cartas hay la probabilidad de recibir 3 veces espada y basto si todos los jugadores tienen igual, eso que se llama buen náipe ó suerte, ó lo que sea; es decir, si los caprichos de la suerte no se saliesen del órden matemático, y que realmente de él no se salen si se considera un número grande de veces, pues aunque en 65 veces un jugador reciba ménos de 3 veces la espada y basto, es probable y casi seguro, que en $65\times t$ los reciba $3\times t$ veces, llamando t á muy grande número de juegos.

ARTÍCULO IV.

FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON.

369. *Fórmula del binomio de Newton* se llama á una que dedujo ese sabio de la antigüedad para elevar un binomio á una potencia cualquiera sin necesidad de elevarlo primeramente á las potencias inferiores, como exige el método ordinario; fórmula que es aplicable á la elevacion á cualquier potencia de un polinomio.

370. Para deducir la expresada fórmula por el método analítico que seguir en este capítulo nos hemos propuesto, diremos que si tenemos que multiplicar entre sí varios binomios, por ejemplo, $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$. etc., cuyo primer término es comun á todos, nos dará:

$$
\begin{array}{l}
x+a \\
\times\, x+b \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
=x^2+a & x+ab \\
b &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\hline
\times\, x+c \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|l}
=x^3+a & x^2+ab & x+abc \\
b & ac & \\
c & bc &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\hline
\times\, x+d \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
=x^4+a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd, \\
b & ac & abd & \\
c & ad & acd & \\
d & bc & bcd & \\
 & bd & & \\
 & cd & &
\end{array}
$$

pues las rayitas verticales indican que el x de su derecha es factor comun de las letras que están á su izquierda.

371. La inspeccion del cuadro del número anterior nos manifiesta que la multiplicacion de esos cuatro binomios con un término comun x produce para el producto como su primer término á dicho término x elevando á una potencia con tantas unidades como factores binomios son dados, y que el mismo se repite despues cada vez con un exponente de una unidad ménos hasta no tener ninguno. Que en tal primer término el coeficiente es 1; el del segundo la suma de los segundos términos de los binomios dados; el del tercero la suma de las combinaciones binarias de los segundos términos de los factores binomios; el cuarto la suma de las combinaciones ternarias de dichos segundos términos, y el último término del producto se compone simplemente del producto de dichas segundas partes sin entrar el primer término comun x.

372. Para deducir de la ley observada en ese producto una fórmula general para la elevacion á potencia de cualquier binomio, en lugar de $(x+a)(x+b)(x+c)$, hagamos igual el segundo término de esos binomios, y será $(x+a)(x+a)(x+a)$, que evidentemente resulta la tercera potencia de $x+a$, ó sea $(x+a)^3$, y tendremos

$$(x+a)(x+a)(x+a)\ldots=(x+a)^n$$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
=x^n+a & x^{n-1}+a^2 & x^{n-2}+a^3 & x^{n-3}\ldots+a^n \\
a & a^2 & a^3 & \\
a & a^2 & a^3 & \\
a & a^2 & a^3 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot &
\end{array}
$$

En cuyo cuadro y en el anterior vemos que la a se halla repetida en el segundo término por sumando tantas veces como binomios hay, y como le suponemos n, dicho segundo término será na. La a^2 se halla repetida tantas veces como combinaciones binarias se puedan formar con el número n de segundos términos; luego será (366)

$$a^2+a^2+a^2\ldots=\frac{n\,(n-1)}{1\times 2}\,a^2.$$

Análogamente, llamando m al órden de la última combinacion

$$a^m + a^m + a^m \ldots = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots \times m} a^m.$$

Sustituyendo estos valores en vez de los coeficientes se tendrá que

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^2 x^{n-2} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots \times m} a^m x^{n-m} + \ldots\ldots + a^n,$$

que es la fórmula, pues conocida con el nombre del binomio de Newton, de la que se deduce la siguiente:

373. Regla práctica. *Para elevar un binomio á la potencia del grado* n, *se eleva su primer término á la potencia deseada, y se tendrá el primero que se busca. Se multiplica* n *por el producto del segundo término del binomio por la potencia* n — 1 *del primer término, y se tendrá el segundo de la potencia deseada. Se forma el coeficiente numérico del tercer término multiplicando el del segundo por el exponente que en él lleve el primero del binomio, y dividiendo el producto por el exponente del segundo término del binomio aumentado en una unidad. Formado el coeficiente del tercer término, se multiplica por el producto del segundo término del binomio con un exponente de una unidad mayor que el anterior, y del primero con exponente de una unidad menor, y se tendrá el tercer término de la potencia deseada; y así se continuará hasta formar* n + 1 *términos, cuyo último será el segundo término del binomio elevado á* n.

374. Conviene advertir que cuando se haya calculado la mitad de los coeficientes, si la suma de términos es par ó cuando se haya calculado la mitad más uno de los coeficientes si el número de términos es impar, los restantes serán iguales á los anteriores, aunque de un órden *inverso*, ó *recíprocamente*.

Ejemplos.

1.° Sea $(c+a)^5 = c^5 + 5ac^4 + 10a^2c^3 + 10a^3c^2 + 5a^4c + a^5$.

2.° $(2a^2 + 3c^2)^4 = (2a^2)^4 + 4 \times 3c^2 \times (2a^2)^3 + 6 \times (2c^2)^2 \times (2a^2)^2 + 4 \times (3c^2)^3 \times 2a^2 + (3c^2)^4$.

375. Para elevar á cualquier potencia un polinomio, no hay más que convertirle transitoriamente en binomio, haciendo dos ó más de sus términos iguales á uno, y hallada la potencia del tal binomio, sustituir en ella los valores que se supusieran para convertir en binomio el polinomio.

Ejemplo. Sea $(a+b+c)^3$; haciendo $b + c = s$, dará $(a+s)^3 = a^3 + 3a^2s + 3as^2 + s^3$, y sustituyendo en lugar de s su igual $b + c$, será $(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b^2 + 2bc + c^2) + (b^3 + 3b^2c + 3bc^3 + c^3)$ $= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

376. El descubrimiento de la fórmula del binomio de Newton (que nosotros presentamos expresando con n el número de binomios en lugar de hacerlo con m, como otros autores, porque significacion parecida damos á n en toda esta obra, y por lo que llamamos m al órden de la combinacion última que llaman n otros autores) ha permitido dar un paso grandísimo á la ciencia algebráica, pues tal fórmula es la base de la teoría general de las ecuaciones y del alto análisis. Sólo indicaremos, para conclusion de este artículo con que terminamos los elementos del Algebra, que por la fórmula del binomio de Newton, no sólo, como hemos visto, se puede elevar un polinomio cualquiera á una potencia que se desee, sino que se puede extraer la raíz de cualquier grado de un polinomio de una manera relativamente fácil; pero que por no serlo tanto como conviene al objeto que llevamos en esta obra, no explicaremos, y nos contentamos con consignar la posibilidad, pues en todo este capítulo, como dijimos en su primer artículo, nuestro objeto no es más que dar una idea superficial de algunos puntos del Algebra, que no corresponden realmente á la elemental que aquí terminamos.

Correcciones al tratado de Aritmética á que sirve de suplemento este de Álgebra Elemental.

Al publicar el tratado de Aritmética inferior y superior, ó usual y complemental, se escaparon en el manuscrito algunos errores, que por ser poco importantes pueden considerarse como erratas de imprenta, que los profesores y los mismos discípulos corregirán muy fácilmente. Tenemos, sin embargo, que señalar aquí dos que tienen alguna importancia, atendida la pretension de que esta obra esté al alcance de todos, y por lo tanto, que resplandece en ella la exactitud al lado de la sencillez.

1.° En la Aritmética superior, capítulo XII, artículo 8.°, núm. 638, pág. 196, dimos á la regla conjunta una demostracion, que aunque exacta, contiene la falta de poder ser más sencilla, y que con ella se nos escapó por un extravío de la imaginacion, tan frecuente en el que corrije con prisa una obra de Matemáticas.

Dijimos, pues, que

$$x^{\text{pts.}} = 100^{\text{k}}$$
$$150^{\text{k}} = 13^{\text{a}}$$
$$4^{\text{a}} = 60^{\text{pts.}}$$

da $x^{\text{pts.}} \times 150^{\text{k}} \times 4^{\text{a}} = 100^{\text{k}} \times 13^{\text{a}} \times 60^{\text{pts.}}$ y $x^{\text{pts}} = \dfrac{100^{\text{k}} \times 13^{\text{a}} \times 60^{\text{pts.}}}{150^{\text{k}} \times 4^{\text{a}}} = 130^{\text{pts.}}$

y para demostrarlo multiplicamos los dos miembros de la primera igualdad por 150^{k} y por 100^{k} los de la segunda; multiplicadores, que por hacerlo inadvertidamente, é innecesariamente concretos, nos obligó á decir despues con poca sencillez que $130^{\text{pts.}}$ (se puso en la imprenta reales, pero esto fué una errata evidente) eran pesetas, y no kilógramos ni arrobas, porque los multiplicadores, aunque fueran concretos, hacian el papel de abstractos por ser multiplicadores. Lo que debimos, pues, decir es que, multiplicando los dos miembros de la primera igualdad por 150 abstracto y por 100 la segunda, nos daria respectivamente

$$x^{\text{pts.}} \times 150 = 100^{\text{k}} \times 150,$$

y

$$150^{\text{k}} \times 100 = 13^{\text{a}} \times 100$$

y que como 100^{k} multiplicado por el número abstracto 150, es un número de kilos igual á $150^{\text{k}} \times 100$: esas dos igualdades tenian un miembro igual y los otros lo debian ser, y resultar $x^{\text{pts.}} \times 150 = 13^{\text{a}} \times 100$.

Y haciendo análogamente las demas multiplicaciones por números abstractos, resultaria $x^{\text{pts.}} \times 150 \times 4 = 100 \times 13 \times 60^{\text{pts.}}$

y

$$x^{\text{pts.}} = \left(\frac{100 \times 12 \times 60}{180 \times 4}\right)^{\text{pts.}} = 130^{\text{pts.}}$$

2.° En el capítulo XIII, artículo 5.°, núm. 678, pág. 206 de la Aritmética, al tratar de la formacion de las tablas de logaritmos y razonar el por qué los logaritmos de las tablas no deben considerarse completamente exactos, lo hicimos de una manera que á algunos pareceria que queriamos decir que en toda interpolacion de términos en una progresion geométrica, los términos interpolados siempre serian inconmensurables, pues citamos el número 665 en que tambien por mala forma de expresion dijimos que si $\sqrt[3]{2} = q$, da por valor de q un número inconmensurable, con más motivo lo daria cualquier otra raíz con índice más grande. Lo que quisimos y debimos decir es lo que más claramente expresamos en este tratado de Algebra, números 313 y 325. Esto es, que la razon de los términos que se intercalan entre los de una progresion geométrica, rara vez serán entera ni áun decimal exacta; y que los intercalados entre los de las progresiones que á Brigg sirvieron para la formacion de sus tablas son decimales, cuyo valor se aproxima en algunos á los números naturales 1, 2, 3, etc., pero no son ellos; y por lo tanto, los logaritmos correspondientes á esos números casi iguales á 1, 2, 3, etc., no son exactamente los que corresponden á tales números enteros que se tomaron para formar las tablas.

Precio de este tratado de Algebra: en rústica, **9 reales** en Madrid, **10** en provincias, doble en Ultramar y **2 reales** más encartonado.

Se vende en Madrid en las librerías de *Hernando*, calle del Arenal; *Lopez*, calle del Cármen; *Cuesta*, calle de Carretas; *Bailly-Bailliere*, plaza de Santa Ana; *San Martin*, Puerta del Sol; *Duran*, Carrera de San Jerónimo; *Murillo*, calle de Alcalá; *Hijos de Fé*, calle de Jacometrezo; y *Perdiguero y Compañía*, calle de San Martin.

Barcelona, *Rosell*, y en las demas provincias en las principales librerías.

Se sirven pedidos de ejemplares sueltos, francos de porte, por **10 reales**, en sellos de franqueo con carta certificada, al autor, *Plaza del Cordon, núm 1. bajo derecha.*

En pedidos de más de 10 ó 25 ejemplares se hace respectivamente la rebaja de 15 y 20 por 100; pago adelantado por letras ó libranzas.

Análogamente el tratado de Aritmética inferior y superior, vale en Madrid **15 reales** y **16** en provincias, en rústica, y **2** más encartonado.