EJERCICIOS Y PROBLEMAS

DE

GEOMETRÍA PLANA

POR

D. LAURO CLARIANA Y RICART,

Ingeniero y Catedrático de Matemáticas del Instituto Provincial de Tarragona.

BARCELONA.
LIBRERÍA DE LUIS NIUBÓ,
CALLE DE LA ESPASERÍA, NÚMERO 14.
1876.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

DE

GEOMETRÍA PLANA.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

DE

GEOMETRÍA PLANA

DE SUMA UTILIDAD PARA LOS INSTITUTOS DE SEGUNDA ENSEÑANZA
Y ESCUELAS PREPARATORIAS

COLECCIONADOS Y DEBIDAMENTE DESARROLLADOS

POR

D. LAURO CLARIANA Y RICART,

Ingeniero y Catedrático de Matemáticas del Instituto
Provincial de Tarragona.

BARCELONA.
LIBRERIA DE LUIS NIUBO,
CALLE DE LA ESPASERÍA, NÚMERO 14.
1876.

Imprenta de Jaime Jepús, calle de Petritxol, número 10.

ADVERTENCIA.

Cuando los jóvenes emprenden el estudio de la Geometría, es muy difícil que desde un principio acierten á comprender la importancia y fecundidad de las verdades que se encuentran en las obras elementales de la ciencia que nos ocupa, cuyos autores no hacen más que fijar á grandes distancias las principales piedras angulares del edificio que cada uno luego levanta á su manera, si bien todos conforme á una misma base; por ello es de suma importancia que el discípulo tenga al lado de la obra de texto, otra como guía, para que vea de una manera clara, aunque rápida, las múltiples y variadas combinaciones que pueden deducirse de los teoremas y corolarios que estudia, y que muchas veces cree desprovistos de aplicacion alguna. Por medio de esta guía se logra que el principiante pueda, desde luego, admirar más ó ménos, las bellezas que encierra esta ciencia modelo; á la par que se le ejercita en una gimnásia intelectual que debe darle con el tiempo resultados sorprendentes é inesperados.

Bajo este concepto ofrecemos al público, la presente obrita, como guía del estudiante, donde éste hallará medios de ejercitar su raciocinio y de acostumbrarse á manejar con facilidad el arma poderosa del análisis; á cuyo efecto, el autor desarrolla una série de ejercicios ó cuestiones geométricas que se hallan propuestas en los célebres tratados de MM. Briot, Rouché, etc.; y si bien el número de estas cuestiones, correspondientes á la primera parte de la Geometría, podia ser mucho más considerable, el justo temor de traspasar los estrechos ímites de lo que es un curso de Geometría, ha detenido la mano del Autor.

Tambien confesamos con ingenuidad ser muchas las obras que se han publicado en el mismo sentido que la presente, y algunas de ellas dignas de encomio y consideracion; empero, unas no están al alcance de los discípulos, otras, si bien más elementales, no se sujetan á la marcha ordinaria que se sigue en las aulas en el desarrollo de esta asignatura, y para obviar tales inconvenientes publicamos este insignificante trabajo, seguros de que, si él no resuelve la dificultad, puede servir siquiera, de aguijon para que otros más afortunados realicen la idea que nosotros, al escribirle, hémonos propuesto.

L. C.

EJERCICIOS DE GEOMETRÍA PLANA.

1.ª SECCION.

Combinaciones de rectas.

Ejercicio 1.º—La distancia de un punto cualquiera M de una recta AB al punto O medio de dicha recta, es igual á la semi-diferencia de las distancias de este punto M á los estremos A y B de la misma. Si el punto M se toma en prolongacion de $A\ B$, la distancia MO es igual á la semi-suma de MA y MB.

Esplicacion.—Segun se desprende de la figura 1.ª, resulta:

$$AM = AO + OM,\ MB = OB - OM.$$

Restando estas dos igualdades y no olvidando que $AO = OB$, resulta:

$$AM - MB = 2\,MO, \text{ ó sea } MO = \frac{AM - MB.}{2}$$

Para la segunda parte de este ejercicio, basta atender á la figura 2.ª, de la cual se obtiene:

$$MA = AO + OM,\ MB = MO - BO.$$

Sumando estas dos igualdades, se tiene:

$$MA + MB = AO + OM + MO - BO.$$

Pero como $AO = OB$, resulta:

$$MA + MB = 2OM, \text{ ó sea } OM = \frac{MA + MB.}{2}$$

Ejercicio 2.º—Dado un ángulo ACB, la bisectriz CO, y una recta CM trazada por el vértice en el interior del ángulo, el ángulo MCO es igual á la semi-diferencia de los ángulos MCA, MCB. Si la recta CM es esterior al ángulo, resulta el ángulo MCO igual á la semisuma de los ángulos MCA, MCB.

Esplicacion.—De la figura 1.ª, resulta:

$$\mathrm{MCB} = \mathrm{MCO} + \mathrm{OCB};\ \mathrm{MCA} = \mathrm{ACO} - \mathrm{MCO}.$$

Restando estas igualdades, se tiene:

$$\mathrm{MCB} - \mathrm{MCA} = \mathrm{MCO} + \mathrm{OCB} - \mathrm{ACO} + \mathrm{MCO}.$$

Y como $\mathrm{ACO} = \mathrm{OCB}$, resulta:

$$\mathrm{MCB} - \mathrm{MCA} = 2\,\mathrm{MCO},\text{ ó sea } \frac{\mathrm{MCB} - \mathrm{MCA}}{2} = \mathrm{MCO}.$$

Para la esplicacion de la segunda parte del ejercicio basta atender á la figura 2.ª, de la cual se obtiene:

$$\mathrm{MCB} = \mathrm{MCO} + \mathrm{OCB},\ \mathrm{MCA} = \mathrm{MCO} - \mathrm{ACO}.$$

Sumando y simplificando, resulta:

$$\frac{\mathrm{MCB} + \mathrm{MCA}}{2} = \mathrm{MCO}.$$

Ejercicio 3.º—Dadas cuatro rectas OA, OB, OC, OD que salen de un mismo punto O, probar que si DOA = BOC, y AOB = COD, los lados OA, OC, y OB, OD, están respectivamente en línea recta.

Esplicacion.—La suma de los ángulos que se pueden formar al rededor de un punto en un plano vale cuatros rectos; así pues,

$$\mathrm{AOB} + \mathrm{BOC} + \mathrm{COD} + \mathrm{DOA} = 4 \text{ rectos}.$$

Pero, por hipótesis, se tiene:

$$\mathrm{DOA} = \mathrm{BOC},\text{ y } \mathrm{AOB} = \mathrm{COD};$$

luego, $AOB + BOC + COD + DOA = 2\,AOB + 2\,BOC$; pero como $AOB + BOC + COD + DOA = 4\,r$, resulta:

$$2\,AOB + 2\,BOC = 4\,r.$$

Dividiendo ambos miembros por 2, tendremos:

$$AOB + BOC = 2\,r.$$

Y como dos ángulos que tengan un lado y vértice comun valiendo su suma dos rectos han de ser adyacentes, en la situacion que guardan los lados *AO* y *OC* de la figura, se infiere que los lados *AO* y *OC* han de estar en línea recta. De una manera parecida al caso anterior se probaria que los lados *DO* y *OB* tambien están en línea recta.

Ejercicio 4.º—Dados dos ángulos adyacentes, determinar el ángulo formado por las bisectrices de dichos ángulos.

Esplicacion.—Siendo EO y OD las bisectrices de los ángulos *AOB* y *BOC*, se tiene:

$$AOE = EOB, \text{ y } BOD = DOC$$

$AOB + BOC = 2\,r$. por ser ángulos adyacentes, y en virtud de las igualdades anteriores resulta:

$$AOB + BOC = 2\,EOB + 2\,BOD = 2\,r.$$

Dividiendo por *dos* ambos miembros de esta última igualdad, se obtiene:

$$EOB + BOD = 1\,r.$$

Lo que nos dice que las dos bisectrices *EO* y *OD* forman ángulo recto.

Ejercicio 5.º—El perímetro de un triángulo es mayor que la suma de las tres rectas tiradas desde un punto interior cualquiera á los tres vértices del mismo, y menor que el doble de esta suma.

Esplicacion.—En vista de la figura, resultan las desigualdades siguientes:

$$AC + CB > AO + OB$$
$$AC + AB > OC + OB$$
$$AB + BC > AO + OC.$$

Sumando estas desigualdades, se tiene:

$$2(AC + AB + BC) > 2(AO + OB + OC).$$

Dividiendo por *dos* ambos miembros de esta última desigualdad, tendremos:

$$AC + AB + BC > AO + OB + OC,$$

y esto nos dice que el perímetro del triángulo es mayor que la suma de las rectas que salen del punto *O* y terminan en los vértices A, B, C del triángulo dado.

De la misma figura, resultan las desigualdades siguientes:

$$AB < AO + OB,\ BC < BO + OC,\ AC < AO + OC.$$

Sumándolas se tiene:

$$AB + BC + AC < 2(AO + OB + OC).$$

Lo que demuestra que el perímetro del triángulo es menor que el doble de la suma de las rectas que saliendo del punto O van á terminar á los tres vértices del triángulo dado.

Ejercicio 6.°—Una mediana cualquiera de un triángulo, es decir, la línea que junta un vértice con el punto medio del lado opuesto, es menor que la semisuma de los dos lados que salen del mismo vértice, y mayor que la mitad del exceso de esta suma sobre el tercer lado.

Esplicacion.—Prolongando la mediana Am en una misma cantidad *mA'*, tendremos:

$$AA' < AB + BA'.$$

ó sea,

$$2\,Am < AB + AC.$$

Puesto que $BA' = AC$ por ser los triángulos *BmA'* y *AmC* iguales por tener $Bm = mC$, $Am = mA'$, y $1 = 1$ por opuestos por el vértice; así pues, de la última desigualdad, resulta:

$$Am < \frac{AB + AC.}{2}$$

De la misma figura se obtiene:

$$AB < Am + Bm, \quad AC < Am + mC.$$

Sumando, se tiene:

$$AB + AC < 2\,Am + BC;$$

luego,

$$\frac{AB + AC - BC}{2} < Am.$$

Ejercicio 7.º—El perímetro de un triángulo es mayor que la suma de sus tres medianas, y menor que el doble de esta suma.

Esplicacion.—Conforme los resultados del ejercicio precedente, podemos escribir:

$$\frac{AC + CB}{2} > Cn, \quad \frac{AB + AC}{2} > Am, \quad \frac{AB + BC}{2} > Bp.$$

Sumando estas tres desigualdades, se obtiene:

$$AC + BC + AB > Am + Cn + Bp.$$

Para probar la segunda parte de este ejercicio, tomarémos por principio la segunda parte del ejercicio anterior.

$$Am > \frac{AC+AB-CB}{2};\quad Bp > \frac{AB+BC-AC}{2};$$

$$Cn > \frac{AC+CB-AB.}{2}$$

Sumando estas desigualdades, resulta:

$$Am+Bp+Cn > \frac{AC+AB-CB+AB+BC-AC+AC+CB-AB.}{2}$$

ó sea,

$$2(Am+Bp+cn) > AB+AC+CB.$$

Ejercicio. 8.—Siendo *ABC* un triángulo cualquiera, si se toma sobre AB, prolongado, si es preciso, una longitud *AC'* igual á *AC*, y se toma luégo sobre AC una longitud AB' igual á AB; uniendo B' con C' se tendrá una recta que cortará la *BC* en el punto I: demostrar que la recta AI es la bisectriz del ángulo BAC.

Esplicacion.—Del enunciado resulta en la figura:

$$AB'=AB,\ AC=AC'.$$

Restando estas dos igualdades

$$AB'-AC=AB-AC',\ \text{ó sea},\ B'C=C'B,$$

y como $1=1$, por opuestos por el vértice y $B=B'$ por ser ángulos iguales de los triángulos iguales *AB'C'*, *ACB*, resulta que los dos triángulos *CB'I* é *IC'B*, tambien lo serán, porque tendrán un lado y dos ángulos respectivamente iguales; luego $IB'=IB$, deduciéndose de aquí la igualdad de los dos nuevos triángulos *AB'I*, *IAB* que tendrán sus tres lados respectivamente iguales, y por consiguiente, la de los dos ángulos homólogos $2=2$, debiendo ser, en su virtud, la recta AI, la bisectriz del ángulo *CAB*.

Ejercicio 9.º—Siendo I la mitad de la base *BC* de un triángulo isósceles *ABC*, y *M* un punto tomado á voluntad sobre el lado *AC;* demostrar que la diferencia de las longitudes *IB* y *IM* es menor que las longitudes *AB* y AM.

Esplicacion.—De la figura resulta:

$$IB < AI + AB, \ IM < AI + AM.$$

Restando estas dos desigualdades, se obtiene:

$$BI - IM < AI + AB - AI - AM; \text{ luego } BI - IM < AB - AM.$$

Ejercicio 10.—Si en un triángulo la recta que junta un vértice con el punto medio del lado opuesto es perpendicular á este lado, el triángulo es isósceles.

Esplicacion.—Siendo *An* perpendicular á *BC*, resultan dos triángulos rectángulos *ABn*, *nAC* que serán iguales por tener los catetos iguales; luego AB = AC, y el triángulo será isósceles.

Ejercicio 11.—Si en un triángulo la recta que divide un ángulo en dos partes iguales, divide así tambien el lado opuesto en dos partes iguales, el triángulo será isósceles.

Esplicacion.—Los dos triángulos *ABn* y *nAC* son iguales porque tienen 1 = 1, *An* comun, y Bn = nC; luego AB = AC y el triángulo resulta ser isósceles.

Ejercicio 12 —Si en un triángulo la recta que divide un ángulo en dos partes iguales es perpendicular al lado opuesto, el triángulo es isósceles.

Esplicacion.—Los dos triángulos rectángulos *AnB*, *AnC*, son iguales por tener 1 = 1, y el cateto An comun; luego AB = AC, resultando el triángulo *ABC* isósceles.

Ejercicio 13.—Las distancias de las extremidades de la base de un triángulo isósceles á los lados opuestos, son iguales entre sí.

Esplicacion.—Sean *Cm* y *Bn* las perpendiculares; como los ángulos *B* y *C* son iguales por ser el triángulo ABC isósceles, resultan inmediatamente los triángulos rectángulos *BmC* y *BnC* iguales por tener la hipotenusa *BC* comun y un ángulo agudo igual, B = C; luego los dos catetos *Bn* y *mC* serán iguales, cuyos catetos no son más que las perpendiculares trazadas desde los vértices de la base á los lados opuestos.

Ejercicio 14.—En un triángulo isósceles la suma de las perpendiculares trazadas de un punto cualquiera de la base sobre los otros dos lados, es constante.

Esplicacion.—Trácense desde el punto medio *d* de la base *BC*, las perpendiculares *ds* y *dv* á los lados *AB*, *AC*; luégo, desde un punto cualquiera *b* de la base, las nuevas perpendiculares *br*, *bt* á los mismos lados, y por último, por el punto *b* y *d* rectas paralelas respectivamente á los lados *AB* y *AC* del triángulo hasta los puntos *a* y *c*. Así tendremos que los dos triángulos *abd* y *cbd* serán iguales, porque abd=B, cdb=C y como B=C, se tiene: abd=cdb y además la hipotenusa *bd* comun; luego bc=ad; empero, de la figura se deduce que: rb=sa, ct=dv. Sumando estas tres igualdades entre sí, resulta:

$$bc + rb + ct = ad + sa + dv.$$

ó sea,

br+bt=sd + dv., y como *sd*+*dv* es una cantidad constante, resulta que *br*+*bt* tambien lo será cualquiera que sea el punto *b* que se tome de la base.—Es fácil de ver lo que resultará, cuando el punto se tome en prolongacion de dicha base.

Ejercicio 15.—En un triángulo equilátero, la suma de las perpendiculares bajadas de un punto cualquiera del interior del triángulo á los tres lados, es una cantidad constante.

Esplicacion.—Sea el punto *r*; trácense las perpendiculares *rt*, *rp*, *rq*, respectivas á los lados AB, AC, BC del triángulo; luégo por el punto r, trácese una paralela á AC, que encuentra en *e* la perpendicular *Bd* al lado AC; por el punto *e* trácense nuevamente perpendiculares *en*, *em*, á los lados *AB*, *BC* del triángulo. Ahora por el punto *b*, interseccion de las tres perpendiculares Ac, Ca, Bd, á los tres lados del triángulo, tracénse las paralelas *bs*, *bv* á los lados *AB*, *BC* del triángulo. Así, pues, si podemos demostrar que; $es+ev=be$, tendremos:

$$en+em+ed=ns+se+ev+vm+ed=ab+se+ev+bc+ed=ab+bc+bd=\text{cantidad constante};$$

y como, segun el ejercicio anterior,

$$tr+rq=ne+em.$$

Añadiendo á ambos miembros $rp=ed$, se tiene:

$$tr+rq+rp=ne+em+ed=\text{constante}.$$

Así, pues, para quedar completamente probado este ejercicio, falta demostrar que $es+ev=be$; y para ello supondremos la figura siguiente. Tomando *bsev*, de la figura anterior, pero de mayores dimensiones, para que se pueda mejor apreciar, trácese la bisectriz del ángulo *bsv*, tal como sO'; tendremos en virtud de los ángulos que forman estas rectas conforme va indicado en la figura, que el triángulo $sO'e$ será equilátero; luégo $se'=eO'=sO'=ev$. Pero el triángulo bsO' es isósceles; luego $sO'=O'b$, de donde $se+ev=O'e+O'b$.

Ó sea

$$se+ev=be,$$

que es lo que debíamos probar.

Ejercicio 16.—Si por el vértice de un triángulo ABC, se traza la recta indefinida XY perpendicular á la bisectriz del ángulo A, demostrar que si *M* es un punto cualquiera de XY, el perímetro del triángulo *BMC* es mayor que el triángulo primitivo *ABC*.

Esplicacion.—Sea el triángulo ABC y la recta XY, perpendicular á la bisectriz AD. Tomando el punto M, vamos á probar que

$$BM+MC+BC>AB+AC+BC.$$

Para ello, trazaremos desde el punto *C* la perpendicular *CC'* á *XY* y prolongando *AB* hasta el punto *C'*, tendremos:

$$C'A=AC$$

por la igualdad de los ángulos $2=2$; luego

$$BA+AC=BA+AC',$$

y como $C'M=MC$, por ser el punto o medio de la recta CC', perpendicular á XY, tendremos:

$$BC'<CM+BM,$$

ó sea,

$$BA+AC<CM+BM.$$

Agregando á ambos miembros BC, se tiene:

$$BA+AC+BC<CM+BM+BC.$$

Ejercicio 17.—Un triángulo cualquiera es el cuarto del que se obtiene trazando por cada uno de sus vértices una paralela al lado opuesto. Cada lado del nuevo triángulo es doble del lado correspondiente del triángulo propuesto.

Esplicacion.—Trazando por los vértices A, B, C, del triángulo dado paralelas á los lados opuestos, queda la figura total descompuesta en tres paralelógramos, FACB, ABCE, ABCD; y como los lados AB, BC, AC, hacen las veces de diagonales en cada uno de dichos paralelógramos, sabiendo á más que la diagonal divide al paralelógramo en dos triángulos iguales, resultan los triángulos FAB, BCE, ACD, iguales entre sí é iguales al triángulo dado ABC; luego

$$FED=FAB+ABC+BCE+ACD=4\,FAB=4\,ABC=4\,BCE=4\,ACD.$$

De donde

$$FAB={}^1/_4\,FED,\ ABC={}^1/_4\,FED,\ BCE={}^1/_4\,FED,\ ACD={}^1/_4\,FED.$$

De lo dicho anteriormente resulta tambien que

$$AB=CE,\ AB=DC.$$

y de la suma:

$$2\,AB=CE+DC=DE,$$

y así de los demás lados.

Ejercicio 18.—Si dos rectas iguales AB y CD comprendidas entre dos paralelas AC y BD se cortan en un punto *o*, se tiene: Ao=oC, oB=oD.

Esplicacion.—Trácense desde D y B perpendiculares á AC, y resultarán los dos triángulos rectángulos AmB, CnD iguales, porque tienen AB=CD y Dn=mB; luego A=C, de donde Ao=oC; y como AB—Ao=CD—oC, resulta tambien: oB=oD.

Ejercicio 19.—Si por el punto medio *D* del lado AB de un triángulo ABC se traza una paralela *DE* al lado *BC*, la recta DE pasará por el punto medio *E* de *AC* y será igual á la mitad de *BC*. Recíprocamente. —La recta que junta los puntos medios de los dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado é igual á su mitad.

Esplicacion.—Sea DE la recta paralela á *BC* que pasa por el punto medio D, de AB. Trazando la recta DF paralela á AC, tendremos el paralelógramo *DE FC*, y los dos triángulos *ADE* y *BDF*, que deben ser iguales por tener AD=DB, 1=1 y 2=2; luégo, DE=BF; pero DE=FC por ser lados opuestos de paralelógramo, así, pues, sumando las dos últimas igualdades, resulta:

$$2\,DE=BF+FC=BC.$$

luego $DE=\dfrac{BC.}{2}$

Para probar la segunda parte del ejercicio tomaremos la figura 2.ª Siendo *D* y *E* los puntos medios de *AB* y *AC*, vamos á probar que *DE* que pasa por el punto medio *D* de AB, es paralela á BC, pues para saber que es igual á la mitad de *BC* basta atender á la primera parte de este ejercicio.

Trácese por *A* y *E*, las rectas *AF* y *GEF* paralelas respectivas á los lados *BC* y *AB*, y se formará el paralelógramo ABGF en que AB=FG; pero como los triángulos *AFE* y *EGC* son iguales por razones análogas al caso anterior, se tiene EG=$^1/_2$ FG, así como por hipótesis BD=$^1/_2$ AB; y como AB =FG resulta, BD=EG, de donde se deduce que el cuadrilátero *BDEG* debe de ser un paralelógramo por tener dos lados opuestos iguales y paralelos; luego *DE* y *BG*, ó sea, *DE* y *BC*, son paralelos, que es lo que nos habíamos propuesto demostrar.

Ejercicio 20.—Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las rectas que saliendo de un mismo punto terminan en diferentes puntos de una recta dada.

Esplicacion.—Sea el punto P, y la recta dada *AB*. Trazando la recta *Pm*, el punto medio *n* de *Pm* será uno de los puntos pedidos; trazando otra recta tal como *Pm'*, el punto *n'* será otro punto pedido, pero la recta *nn'*, segun se desprende de la figura, es la paralela media al triángulo *Pmm'*, de modo que si combinamos ahora la primera recta *Pm* con la tercera *Pm''*, resultará que la recta *nn''* tendrá que ser la misma *nn'*, pues todas las paralelas que se pueden trazar por el punto *n* paralelas á AB, se confunden en una misma recta. De aquí se infiere que si por un punto medio cualquiera de las rectas *Pm*, Pm' *Pm''* etc., se traza una paralela á AB, esta recta contendrá todos los puntos pedidos, y en Geometría la línea, superficie, etc., cuyos puntos todos gozan de una propiedad esclusiva se dice que forman el lugar geométrico de ciertas condiciones geométricas establecidas; en este concepto, en el ejercicio que nos ocupa, podremos decir que el lugar geométrico de los diferentes puntos medios de las rectas que saliendo del punto dado terminan en puntos de una recta dada, viene determinado por una recta paralela á la dada que pasa por el punto medio de una cualquiera de las rectas Pm, Pm', Pm'' etc.

Ejercicio 21.—Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo concurren en un mismo punto. La bisectriz de uno de los ángulos y las de los suplementos de los otros dos ángulos concurren tambien en un mismo punto.

Esplicacion.—Sea el triángulo *ABC* y las tres bisectrices *Am*, *Bn* *Cp*; vamos á probar cómo se encuentran en un mismo punto *o*. Suponiendo de momento las dos bisectrices *Bn* y *Cp* tendremos que el punto *o*, por pertenecer á la bisectriz *Bn*, debe equidistar de los lados *AB* y *BC*, y como este mismo punto corresponde á la segunda bisectriz, debe en su virtud el mismo punto *o*, equidistar de los lados *AC* y *BC*; de donde se infiere que el punto *o* equidista de *AB* y *AC*, debiendo ser por consiguiente un punto de la tercera bisectriz *Am*, quedando así probado que las tres bisectrices internas se encuentran en un mismo punto.

Para probar la segunda parte del ejercicio, supóngase la bisectriz interna *BF* y las dos esternas *AF* y CF. El punto F, por pertenecer á la bisectriz *AF*, debe equidistar de *AB* y *AC*. El mismo punto *F*, por corresponder á la bisectriz *CF*, debe equidistar de *ÁC* y *CB*; de modo que, en virtud de estas equidistancias, resulta que el punto F debe equidistar de *AB* y *BC*; luego debe ser un punto de la bisectriz interna trazada por el ángulo *B*, quedando así probado que las tres bisectrices; AF, BF, CF se encuentran en un mismo punto.

Ejercicio 22.—Las perpendiculares levantadas sobre los puntos medios de los lados de un triángulo concurren en un mismo punto.

Esplicacion.—Sea el triángulo ABC y las perpendiculares medias mo, no, op. Tomando tan sólo las dos perpendiculares medias *mo* y *on*, tendremos que el punto *o*, por pertenecer á la recta *mo*, debe equidistar de *A* y *B*; por corresponder el punto *o* tambien á la segunda perpendicular *on*, debe equidistar de los puntos *A* y *C*, de suerte que el punto *o*, en virtud de estas equidistancias, debe equidistar del punto *B* y *C*; luego el punto *o* debe ser un punto de la tercera perpendicular *op*, quedando así demostrado que las tres perpendiculares medias se encuentran en un mismo punto.

Ejercicio 23.—Las tres alturas de un triángulo, es decir, las perpendiculares bajadas de los vértices á los lados opuestos concurren en un mismo punto.

Esplicacion.—Sea el triángulo *ABC* y las alturas Am, Bn, Cp. Trazando por los vértices A, B, C, rectas paralelas á los lados opuestos del triángulo, tendremos el triángulo total *NMp*, que, conforme al ejercicio *15*, resultarán ser las rectas Am, Bn, cp, las perpendiculares medias, y siendo así, segun el ejercicio anterior, deberán encontrarse en un mismo punto.

Ejercicio 24.—Las tres medianas de un triángulo concurren en un mismo punto, situado al tercio de la longitud de cada una de ellas, á partir del lado correspondiente.

Esplicacion.—Sea el triángulo *ABC* y las medianas Am, Bn, Cp. Tomemos dos de ellas *Bn* y *Am*, las cuales se encuentran en el punto *o*; tomando los puntos medios de *Ao* y *oB* resultará la recta, *rs*, que, segun el ejercicio *17*, debe ser paralela á *AB* é igual á su mitad; y, conforme al mismo ejercicio, la recta *nm* debe ser tambien paralela á AB é igual á su mitad, de modo que rs = nm y además esas dos rectas son paralelas, resultando los triángulos *ros* y *onm* iguales, de donde om = or; y como or = rA, se tiene que *om* es un tercio de la mediana Am; considerando luégo la segunda mediana, se obtiene *on* igual á un tercio de Bn; así, pues, combinada nuevamente la mediana *Am* con Cp, resultará que esta nueva mediana tendrá que pasar por el mismo punto por donde se cortaban las dos primeras, quedando completamente demostrado el ejercicio.

Ejercicio 25.—En un triángulo el punto de concurso de las perpendiculares elevadas sobre los puntos medios de los lados, el punto de concurso de las tres medianas y el de las tres alturas están en línea recta; y la distancia del primer punto al segundo, es mitad de la distancia del segundo al tercero.

Esplicacion.—Sea *t* el punto de interseccion de las tres alturas, y *o* el de las tres medianas. La recta Ap, es perpendicular á *CB*; del punto medio de BA, trácese la recta *mn* tambien perpendicular á CB y como *sn* es paralela á *Ap* y pasa por el punto medio de *BA* divide Bt en dos partes iguales, de modo que Bs = st.

Trazando por el punto *s* una paralela á *BD*, se tendrá *sr* igual á la mitad de *Bo* por una razon análoga á la anterior; ahora, como *oD* es tambien mitad de Bo, resulta sr = oD; prolongando el lado *to* hasta encontrar á la prolongacion de la recta *Dx* en *q*, se tendrá el triángulo str igual al oDq, por tener

$$sr = oD, 1 = 1, 2 = 2.$$

De modo que, si probamos que el punto q es el punto donde concurren las perpendiculares medias, quedará demostrado el enunciado, porque tr = ro = oq; luego ot será doble de oq. Para probar, pues, por fin, que el punto q es el de concurrencia de las perpendiculares medias, se tiene: que siendo v y D los puntos medios de los lados BC, CA, trazando las perpendiculares Dx, vz junto con vD, se formará un triángulo vxD, que es igual á Bsn por tener Bn = vD, 3 = 3, 4 = 4; luego xD = Bs; pero hemos hallado antes Bs = st, y por la igualdad de los triángulos str y oqD, st = qD; luego xD = qD, de donde resulta que x, y q, es un mismo punto quedando así demostrado el teorema.

Ejercicio 26.—Si por el punto de interseccion I de las bisectrices de los ángulos B y C de un triángulo ABC, se traza entre los lados del ángulo A la paralela DIE á BC, la recta DE será igual á la suma de BD y CE. Si por el punto de interseccion I' de la bisectriz del ángulo B y de la del suplemento del ángulo C, se traza entre los lados del ángulo A ó de su opuesto por el vértice, la paralela I' D' E' á BC, la recta $D'E'$ será igual á la diferencia de CE' y BD'.

Esplicacion.—Sea el triángulo ABC é I el punto de interseccion de las dos bisectrices internas, DIE la paralela á BC. El triángulo BDI resulta isósceles; luego

$$BD = DI.$$

Así como por ser el triángulo IEC tambien isósceles, debe resultar:

$$IE = EC.$$

Sumando, tendremos que

$$DI + IE = BD + EC.$$

ó sea,

$$DE = BD + EC.$$

Siendo ahora el punto I' el de interseccion de las bisectrices interna y esterna, trazando la recta $I'D'E'$ paralela á BC, tendremos, por ser los triángulos $BD'I'$ y $E'I'C$ isósceles,

$$BD' = D'I', \quad E'C = E'I'.$$

Restando respectivamente estas igualdades, tendremos:

$$E'I' - D'I' = E'C - BD'.$$

ó sea,

$$D'E' = E'C - BD'.$$

Ejercicio 27.—Si de las estremidades *A* y *B* y del medio de una recta AB, se trazan perpendiculares AA′, AB′, *CC′*, á una recta indefinida XY, cabe demostrar que el punto *C′* es el punto medio de A′B′; y que la perpendicular *CC′* es igual á la semi-suma ó á la semidiferencia de las perpendiculares A′A y BB′, segun que los puntos A y B estén situados á un mismo lado, ó á una y otra parte de XY.

Esplicacion.—Sea la recta *AB*, *C* su punto medio y AA′, CC′, BB′ las perpendiculares respectivas á la recta indefinida XY. Si trazamos por *C′* una paralela á *AB*, tendremos que $mC' = AC$ y $C'n = CB$, por lados opuestos de paralelógramos; y como $AC = CB$, se tendrá $mC' = C'n$; luego los triángulos A′C′m y C′nB′ son iguales, resultando de los mismos $A'C' = C'B'$; ó sea, *C′* punto medio de la recta *A′B′*. De las consideraciones anteriores, se tiene:

$$CC' = AA' - mA'; \quad CC' = BB' + B'n.$$

Sumando estas igualdades, resulta:

$$2\,CC' = AA' - mA' + BB' + B'n = AA' + BB'.$$

Ó sea:

$$CC' = \frac{AA' + BB'.}{2}$$

Si la recta XY toma la posicion X′Y′, trazando por C″ la recta m'n paralela á AB, por razones análogas á las anteriores se tendrá:

$$CC''=AA''-m'A'', CC''=n'B''-BB''; \text{luego } CC''=\frac{AA''-BB''}{2}.$$

Ejercicio 28.—Hallar el lugar geométrico de los puntos, cuya suma ó diferencia de las distancias á dos rectas fijas sea constante é igual á una longitud dada.

Esplicacion.—Sea el ángulo BAC formado por las dos rectas dadas AB y AC y la recta r de longitud determinada; podemos considerar un triángulo isósceles cuya base sea tal, que trazando perpendiculares desde los estremos de la base BC á los lados opuestos AB y AC resulte la cantidad r; y en este concepto, si se toma un punto interior ó esterior en la base del triángulo isósceles y se trazan luégo perpendiculares á los lados opuestos, resultará siempre la suma ó la diferencia de ellas igual constantemente á la recta dada r. Este ejercicio es una consecuencia de lo que se ha dicho en ejercicios anteriores.

Ejercicio 29.—Siendo AX una recta cualquiera trazada por el vértice A de un triángulo ABC, y BE, CF las perpendiculares bajadas de los puntos B y C á la recta AX; demuéstrese que el punto medio D de BC está á igual distancia de los puntos E y F.

Esplicacion.—Sea D el punto medio de BC; BE, CF, las perpendiculares respectivas á AX trazadas desde los vértices B y C; D' el punto medio de EF. Segun el ejercicio *27*, D' debe ser el pié de la perpendicular media trazada desde D á la recta EF y, en su consecuencia, $ED=DF$.

Ejercicio 30.—Demostrar. 1.º: Que si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, sus bisectrices son paralelas ó penpendiculares entre sí; y 2.º Que si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares, sus bisectrices son tambien perpendiculares ó paralelas como en el caso anterior.

Esplicacion.—Segun la figura 1.ª, resulta un nuevo ángulo, prolongando los lados *BA* y *ac*, que es *BEc*, y trazando la bisectriz *EF* de este ángulo, tendrémos: $1=2$, y $2=3$; luego $1=3$, y como estos dos ángulos tienen los lados *AC* y *ac* paralelos, deben resultar *AD* y *ad* tambien paralelos.

Conforme á la figura 2.ª, prolongando *ca*, segun el primer caso, resultan paralelas *AD* y *ad*; pero *ad* y *ag* son perpendiculares por ser las bisectrices de dos ángulos adyacentes; luego *ag* y *AD* tambien serán perpendiculares. Cuando los lados son perpendiculares, tendremos, segun la figura 3.ª; $1=1$ por mitades de ángulos iguales, $2=2$ por opuestos por el vértice, y como el ángulo *B* es recto, tiene que resultar *p* tambien recto, que no es más que el ángulo formado por las dos bisectrices; luego estas se cortan perpendicularmente. Por último, si teniendo los ángulos sus lados perpendiculares guardan la posicion de la figura 4.ª, prolónguese *bc* y resultará el ángulo *fba* que, comparado con *ABC*, guarda la misma relacion que en el caso anterior, para lo cual las bisectrices *BD* y *bd* deben de ser perpendiculares; pero como las bisectrices *db* y *bg* son perpendiculares por corresponder á ángulos adyacentes, se tiene que *BD* y *gb* son paralelas, que es el último caso que nos faltaba probar.

Suma de los ángulos de un polígono.

Ejercicio 31.—Dado un triángulo ABC y un punto *o* tomado en su interior, demostrar que el ángulo *BoC* es mayor que el ángulo BAC del triángulo.

Esplicacion.—Sea el triángulo ABC, y *o* el punto interior, que uniremos con B y C; prolongando el lado *Bo*, se tiene que el ángulo BnC por ser externo al triángulo ABn, es mayor que *A*; pero, por una razon análoga, el ángulo *o* es mayor que onC, de donde resulta BoC > BAC.

Ejercicio 32.—Un ángulo de cualquier triángulo es recto, agudo ú obtuso, segun que la mediana que sale del vértice de este ángulo sea igual, mayor ó menor que la mitad del lado opuesto.

Esplicacion.—Si $AD=DB$, y $DC=DB$, tendremos:

$$a=b,\ d=c;\ \text{luego}\ b+c=a+d=B.$$

Pero,

$$A+B+C=2\,r.$$

Y como

$$A+C=a+d=B,$$

Se tiene: $2\,B=2\,r$, ó sea, $B=1\,r$; luego cuando la mediana *BD* es igual á la mitad del lado *AC*, el triángulo es rectángulo. Si

$$BD>AD,\ y\ BD>DC.$$

Resulta:

$$a>b,\ d>c.$$

Luego

$$a+d>B.$$

ó sea,

$$A+C>B.$$

Y como $A+B+C=2\,r$, es fácil de ver que B es menor que un recto. De un modo análogo veriamos que $B>$ que un recto, si $AD>BD$. Para el recíproco supondremos que B valga un ángulo recto. Trazando una circunferencia, tomando por diámetro la recta AC, se tendrá que: $BD=AD=DC$, por tener que pasar la circunferencia por el punto *B*. Si el ángulo B es mayor que un recto, el punto B será interior á la circunferencia cuyo diámetro es AC, resultando naturalmente: $BD<AD$. Y si el ángulo B es menor que un recto, el punto *B* tendrá que ser esterior á la circunferencia cuyo diámetro es AC, resultando en este último caso: $BD>AD$.

Ejercicio 33.—Siendo AD y BC dos pararelas cortadas oblícuamente por *AB* y perpendicularmente por *AC*, si se traza entre estas dos rectas paralelas, la recta BED que corta AC en *E* de manera que ED$=$2 AB, demostrar que el ángulo DBC es el tercio del ángulo ABC.

Esplicacion.—Sean las rectas AD y BC y la trasversal *BD*, con la condicion de ser.

$$ED = 2\,AB.$$

Tomando el punto medio de *DE*, tal como *F*, resulta que, por ser el triángulo *DAE* rectángulo, la mediana AF es igual á la mitad de la hipotenusa, ó sea, igual á *DF*; luego a$=$b; y como *c* es un ángulo esterno del triángulo *ADF*, resulta:

$$c = 2\,a.$$

Ahora, como 2 AB$=$ED, se deduce que DF$=$AB, y como DF$=$FA se tiene:

$$FA = AB.$$

Luego c$=$d; y como c$=$2a, se infiere que d$=$2a; por último, f$=$a por ángulos alternos internos; sumando las dos últimas igualdades, se tiene:

$$f + d = 3a.$$

Ó sea:

$$ABC = 3ADB = 3DBC.$$

Luego:

$$DBC = \frac{1}{3}\,ABC,$$

que es lo que queríamos probar.

Ejercicio. 34—Si desde un punto A tomado fuera de una recta X Y, se traza sobre ésta la perpendicular AB, y las oblicuas AC, AD, AE, de manera que éstas oblicuas estén situadas hácia un mismo lado de A B, y que los ángulos BAC, CAD, DAE, sean iguales, se tiene: BC$<$CD$<$DE.

Explicacion.—Trazando desde A con un radio A E, el arco E F, hasta encontrar la prolongacion de la recta *A C*, el triángulo A D F, será igual á A D E, porque tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales; luego 3=3.

Relacionando ahora ángulos internos con externos de los diferentes triángulos que se forman en la figura, tendremos:

$$3<4,\ 4<5;$$

luego $3<5$, ó sea, en el triángulo C D F,

$$C\,D<D\,F;$$

pero como $D\,F=D\,E$, por ser los triángulos A D F y A D E iguales, se tiene:

$$C\,D<D\,E,$$

y así podriamos continuar las desigualdades tomando nuevas oblicuas con las condiciones de las primeras.

Ejercicio 35.—Sea un triángulo A B C, y A O, B O, C O, las bisectrices de sus ángulos; B O, prolongada, corta al lado *A C* en *D* y siendo O la perpendicular trazada del punto *O* sobre A C.; demostrar que el ángulo C O D, es igual al ángulo A O I.

Explicacion.—Del triángulo rectángulo A O I,

resulta: $$a=90^\circ-\frac{A}{2}$$

Por ser el ángulo b, externo al triángulo *BOC*, se tiene: $b=\frac{B+C}{2}$, pero el triángulo total nos dá:

$$A+B+C=180,$$

ó sea $$\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90-\frac{A}{2},$$

luego, de las igualdades anteriores, se infiere inmediatamente:

$$a=b,\ \text{ó sea } AOI=DOC.$$

Ejercicio 36.—El ángulo formado por la bisectriz del ángulo A de un triángulo ABC y por la perpendicular trazada del vértice A sobre el lado BC, es igual á la semidiferencia de los ángulos B y C.

Esplicacion.—Siendo A P la perpendicular al lado BC y AQ la bisectriz del ángulo A, inmediatamente se tiene:

$$a=\frac{A}{2}+C,$$

por ser a un ángulo esterno del triángulo AQC. El triángulo rectángulo A P Q nos dá:

$$b=90^\circ-\left(\frac{A}{2}+C\right)$$

y como $$A+B+C=180^\circ.$$

ó sea, $$\frac{A}{2}=90^\circ-\left(\frac{B+C}{2}\right),$$

sustituyendo este valor en la igualdad anterior, se tiene:

$$b=90^\circ-\left(\frac{A}{2}+C\right)=90^\circ-\left(90^\circ-\left(\frac{B+C}{2}\right)+C\right)=$$

$$=\frac{B+C}{2}-C=\frac{B}{2}-\frac{C}{2}$$

«*Ejercicio* 37.—Si se trazan las bisectrices de los ángulos exteriores de un triángulo A B C, 1°: los tres triángulos parciales y el triángulo total que ellas determinan al rededor del triángulo dado, tienen sus ángulos respectivamente iguales; y 2.° cada ángulo del triángulo A B C, tiene por suplemento el doble del ángulo que se le opone en el triángulo total.

Esplicacion.—Sean BM, CP, AN; las bisectrices esternas del triángulo ABC; luego

$$180-B=a;\text{ de donde}$$

$$90^\circ-\frac{B}{2}=\frac{a}{2}=MBC;$$

pero como $A+B+C=180$, resulta:

$$\frac{A}{2}+\frac{C}{2}=90^{\circ}-\frac{B}{2};$$

de modo que $MBC=\frac{A+C.}{2}$

Pasando al ángulo b se tiene;

$$180^{\circ}-C=b, 90^{\circ}-\frac{C}{2}=\frac{b}{2};$$

pero como $A+B+C=180$, resulta:

$$\frac{A+B}{2}=90^{\circ}-\frac{C}{2},$$

de donde

$$\frac{b}{2}=ACP=\frac{A+B}{2}=BCM.$$

Para el ángulo M, ó sea BMC, basta recordar que debe ser el suplemento de la suma de los dos anteriormente hallados: así,

$$MBC=180-\left(\frac{A+C}{2}+\frac{A+B}{2}\right)=180-\left(A+\frac{B+C}{2}\right)$$

$$=180-A-\frac{B+C}{2};$$

y como $A+B+C=180$, resulta:

$$180-A=B+C,$$

cuyo valor sustituido, dá:

$$MBC=B+C-\frac{B+C}{2}=\frac{B+C.}{2}$$

Una vez hallados los ángulos del triángulo *BMC*, fácil es deducir los valores respectivos de los ángulos de los demás triángulos NBA, ACP, como indica la figura.

Vamos á probar la segunda parte del ejercicio, demostrando, por ejemplo, que el ángulo *A* tiene por suplemento el doble de *M*. Para ello recordaremos que $A+B+C=180°$; de donde $A=180°-(B+C)$, (1) y como ya sabemos que $M=\frac{B+C}{2}$,

se tiene: $$2M=B+C,$$

cuyo valor sustituido en la igualdad (1), dá esta otra:

$$A=180°-2M, \text{ ó sea } A+2M=180°;$$

de modo que *2M* es suplemento de A, porque juntas tales cantidades, valen dos rectos. Así lo iríamos demostrando de los demás ángulos.

Ejercicio 38.—En un triángulo ABC, si se toma sobre el lado AB, y sobre su prolongacion, AD=AE=AC y luégo se junta el vértice *C* á los puntos *D* y *E;* demostrar que el ángulo *E* es la mitad del ángulo que se forma en A, y que el ángulo DCE es recto.

Esplicacion.—En la figura se supone

$$AD=AE=AC;$$

luego, por ser el triángulo *AEC* isósceles, se tiene: $E=a$;

$$\text{luego } b=2a, \text{ ó sea } E=\frac{1}{2}b.$$

Para demostrar la segunda parte del ejercicio, tenemos:

$$c=\frac{180°-b}{2}=\frac{180°-2a}{2};$$

luego

$$c+a=\frac{180°-2a}{2}+a=90°;$$

en su consecuencia el ángulo DCE es recto.

Ejercicio 39.—En un triángulo ABC si se traza desde *A* hasta encontrar al lado BC una recta AD, que forme con el lado AB un ángulo igual al C, y luégo otra AE, que forme con el lado AC un ángulo igual á *B;* demostrar que el triángulo DAE es isósceles.

Esplicacion.—Sea la recta AD que forma con AB el ángulo *C*, segun es de ver en la figura, y la recta AE que forma con el lado AC, el ángulo B. Determinando el valor del ángulo *a* considerado como externo del triángulo *ADC*, resulta:

$$a = C + (A - C) = A.$$

El ángulo *b* del triángulo *BAE* nos dará

$$b + (B - A) = B\text{: de donde } b = A\text{:}$$

luego $a = b$ y el triángulo EAD resulta ser isósceles.

Ejercicio 40.—En un triángulo rectángulo, si uno de los ángulos agudos es doble del otro, la hipotenusa es doble tambien del lado menor.—Recíproco.

Esplicacion.—Supóngase en la figura $C = 2A$. Tracemos desde el vértice B una recta que forme con AB un ángulo igual á A, tal como BD, y tendremos: $a = 2A$; pero, por ser el triángulo dado rectángulo, *b* debe ser igual á C, y como $a = 2A$, $b = C = 2A$, resulta;

$$a = b = C;$$

así, pues, $BC = DC = DB$ y como $BD = DA$, resulta:

$$AD + DC = 2\ BC,\ \text{ó sea},\ AC = 2\ BC.$$

Para demostrar el recíproco tendremos que tomar el punto medio de la hipotenusa, y como se supone $AC = 2\ BC$, se tendrá: $BD = DC = BC$; y $BD = AD$;

luego $C = a$; y $a = 2A$, de donde $C = 2\ A$.

Ejercicio 41.—Si en un triángulo cualquiera *ABC* donde el ángulo *B* es doble del ángulo *C*, se traza la recta *AD* perpendicular al lado BC; luégo sobre AB prolongado, ó no, segun que el ángulo *B* sea agudo ú obtuso, se toma *BE* igual á *BD*, y se traza en seguida la recta EDF que corte *AC* en el punto F, cabe demostrar: 1.º Que las longitudes FD, FC, FA son iguales y que los triángulos ABC, AFE, son equiángulos; 2.º Que el lado AB, es igual á la diferencia de los segmentos *DC* y *DB* de la base BC, si el ángulo *B* es agudo.

Explicacion.—Conforme se desprende de la figura, por ser isósceles el triángulo EBD, $E=a$;

$$\text{luego } b=2a=2\,E,$$

y como, por hipótesis,

$$B=2C=b,$$

se tiene: $C=E$; y como $E=a=c$, resulta: $c=C$; luego el triángulo *DFC* es isósceles, de donde

$$DF=FC.$$

Del triángulo rectángulo *ADC*, se puede deducir:

$$d+C=90^{o};\ c+f=90^{o};$$

$$\text{luego } d+C=c+f,$$

y como $C=c$, resulta: $f=d$, de donde

$$AF=FD,$$

y como se encontró $DF=FC$, se obtiene por fin:

$AF=FC=FD$, que es la primera parte del ejercicio.

Para probar que son equiángulos, los triángulos AFE, y ABC, se tiene el ángulo *A* comun, $C=E$; luego el tercer ángulo tambien será igual, resultando dichos triángulos equiángulos. Trazando ahora desde *A* la oblícua equidistante correspondiente á la *AB*, resulta la *AB'*; y el triángulo AB'C, que debe ser isósceles, porque $g=C+h$;

y como $g=b$, y $b=2E=2C$;

se tiene: $2C=C+h$, ó sea $C=h$;

asi pues $AB' = B' \times C$ y sabiendo que $AB = AB'$,

resulta; $$AB = AB' = B'C.$$

Ahora de la figura se deduce:

$$AB = AE - BE; \ (1)$$

ó sea $$AE = AB + BE,$$

y como $AB = AB' = B'C$, y $BE = BD = DB'$,

resulta: $$AE = B'C + DB' = CD.$$

Sustituyendo este valor de AE en la igualdad (1), y sabiendo además que $BE = BD$, por fin se obtiene:

$$AB = DC - BD,$$

que es lo último que nos faltaba probar respecto del ejercicio propuesto. Determine el alumno la discusion de este ejercicio, segun el valor del ángulo *B*.

Ejercicio 42.—El ángulo de las bisectrices de los ángulos consecutivos de un cuadrilatero convexo, es igual á la semisuma de los otros dos ángulos del cuadrilatero. El ángulo de las bisectrices de dos ángulos opuestos, es igual á la semi-diferencia de los otros dos ángulos.

Esplicacion.—Tomando las bisectrices de los ángulos *A* y *D* se tiene, llamando *x* el ángulo en *o*:

$$\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + x = 180^\circ;$$

$$x = 180^\circ - \left(\frac{A}{2} + \frac{D}{2}.\right)$$

Pero $$A + D + B + C = 360^\circ,$$

de donde $$\frac{A}{2} + \frac{D}{2} = 180^\circ - \left(\frac{B + C.}{2}\right)$$

Sustituyendo este valor en la igualdad anterior, resulta:

$$x=180^\circ-\left(180^\circ-\left(\frac{B+C}{2}\right)\right)=\frac{B+C}{2}.$$

Para probar la segunda parte del ejercicio, consideraremos la figura 2.ª; llamando x el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos A y C, y n su respectivo suplemento.

Del cuadrilátero $ABCo$ resulta, pues,

$$\frac{A}{2}+\frac{C}{2}+B+n=360^\circ;$$

$$n=360^\circ-\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}+B;\right)$$

$$\text{y como } A+B+C+D=360^\circ,$$

$$\text{ó sea, } \frac{A}{2}+\frac{C}{2}=180^\circ-\left(\frac{B+D}{2}\right),$$

sustituyendo en n, se tiene:

$$n=360^\circ-\left(180^\circ-\frac{B+D}{2}+B\right)=180^\circ-\left(\frac{B}{2}-\frac{D}{2};\right)$$

y observando que $x=180^\circ-n$, resulta, por fin:

$$x=180^\circ-\left(180^\circ-\left(\frac{B}{2}-\frac{D}{2}\right)\right)=\frac{B}{2}-\frac{D}{2}.$$

Ejercicio 43.—Si en un cuadrilátero las diágonales se cortan en partes iguales perpendicularmente, y además son desiguales en magnitud, la figura es un rombo.

Esplicacion.—Cortándose las diagonales en partes iguales, el cuadrilátero debe ser un paralelógramo.—Por cortarse las diagonales en partes iguales y perpendicularmente, los dos triángulos rectángulos BoC y CoD son iguales; luego BC=CD, y como por ser el cuadrilátero un paralelógramo, debe ser

$$BC=AD, \text{ y } CD=AB,$$

se vé que los cuatro lados deben ser iguales entre sí. De la comparacion de los triángulos BAD, CAD que tienen dos lados iguales y el tercer lado desigual, por hipótesis, resulta la desigualdad de los ángulos A y D, quedando así completamente probado que la figura ABCD es un rombo.

Ejercicio 44.—Si en un cuadrilátero las diagonales se cortan en partes iguales, perpendicularmente, y además son iguales, la figura propuesta, es un cuadrado.

Esplicacion.—Por cortarse las diagonales en partes iguales ya queda la variabilidad de cuadriláteros, reducida á la clase de paralelógramos; de la igualdad de los triángulos BoC y CoD, se deduce la igualdad de los lados BC y CD, y por ser el cuadrilátero paralelógramo, se infiere que los cuatro lados son iguales; de modo que la variabilidad queda mucho más reducida, pues ó ha de ser un cuadrado, ó un rombo; y como las diagonales son iguales, por hipótesis, resulta que los triángulos ABD, ACD son iguales, y en su virtud los ángulos A y D, iguales debiendo ser el cuadrilátero ABCD un cuadrado.

Ejercicio 45.—Si en un cuadrilátero las diagonales se cortan en partes iguales oblicuamente y á más son iguales, el cuadrilátero es un rectangulo.

Esplicacion.—Por la primera condicion del ejercicio, el cuadrilátero debe ser paralelógramo; por la comparacion de los triángulos DoC y CoB, resulta: $DC>CB$, y de la comparacion de los triángulos DAB y ACB, se tiene: $A=B$; luego el cuadrilátero ABCD es un rectángulo.

Ejercicio 46.—Si en un cuadrilátero las diagonales se cortan en partes iguales oblicuamente, y á más son desiguales, es un romboide la figura propuesta.

Esplicacion.—La primera condicion del ejercicio revela que el cuadrilátero debe corresponder á los paralelógramos; cortándose las diagonales oblicuamente se viene en conocimiento de que DC>CB; y por último, de la comparacion de los triángulos *DAB* y CAB, sabiendo que las diagonales son desiguales, se deduce, por ejemplo, que A<B; de modo que el cuadrilátero ABCD debe ser un romboide.

Ejercicio 47.—En un cuadrilátero los puntos medios de los lados forman los vértices de un paralelógramo.

Esplicacion.—Sean n, m, q, p, los puntos medios de los cuatro lados del cuadrilátero *ABCD*; trazando las diagonales, y uniendo entre sí los puntos medios de los lados, tendremos que *np* es la paralela media del triángulo *ABD;* lo que segun lo ya demostrado en ejercicios anteriores, hace que *np* sea paralela á *DB* é igual á su mitad; la recta *mq* se halla en las mismas condiciones, segun se desprende del triángulo *BCD*; luego *np* y *mq* son rectas iguales y paralelas; así, pues, el cuadrilatero *pnmq* debe ser un paralelógramo.

Ejercicio 48.—Las bisectrices de los ángulos de un paralelógramo forman un rectángulo cuyas diagonales son paralelas á los lados del paralelógramo é iguales á su diferencia.

Esplicacion.—Sean las bisectrices respectivas del paralelógramo ABCD, Am, Bp, Cn, Dq.

Sabemos que $A+D=180°$;

$$\text{luego } \frac{A}{2}+\frac{D}{2}=90°,$$

lo cual nos indica, en el triángulo *ADo*, que el ángulo a=b, es recto. Del mismo modo se puede ver que los ángulos d, c, f son rectos; luego el cuadrilátero ofcd es un rectángulo ó cuadrado.—Para determinar completamente el paralelógramo debemos fijarnos en la segunda parte del ejercicio. Siendo x=x', y x=z, resulta x'=z, y como *Do* es perpendicular á *Am*, el punto *o* es medio de *Am;* lo mismo sucede con el punto *c* respecto la recta *Cn*; de modo que la recta que une o con c, ó sea una de las diagonales del paralelógramo $ofcd$, debe ser paralela á AB, por pasar por los puntos medios de Am y Cn. Una cosa parecida diríamos para probar que la segunda diagonal df es paralela á AD; así, pues, el ángulo que formarán las diagonales del paralelógramo $ofcd$ será oblicuo, y, por tanto, no podrá ser: ni un cuadrado, ni un rombo, sino un romboide ó un rectángulo. La diagonal

$$oc=An=mC=CD-Dm,$$

y como $mD=DA$, por lo que se ha probado anteriormente,

resulta: $$oc=CD-AD.$$

Para la otra diagonal df, se tiene:

$$df=EC=EB-BC,$$

y como $EB=AB$, por el triángulo isósceles ABE,

resulta: $$df=AB-BC;$$

de suerte que df tiene el mismo valor de la diagonal bc, diciéndonos esto, que el paralelógramo $ofcd$ no puede ser un romboide; luego será un rectángulo.

Si el paralelógramo dado en vez de ser un romboide hubiese sido un rectángulo, entónces, segun lo dicho anteriormente, las diagonales oc y df se hubieran cortado perpendicularmente, y como deberian ser iguales por venir representadas por la diferencia de dos lados consecutivos del paralelógramo, habria resultado el paralelógramo $ofcd$ un cuadrado.

Ejercicio 49.—Dos cuadriláteros convexos son iguales, cuando tienen un ángulo igual y sus cuatro lados iguales entre sí y dispuestos de la misma manera.—Casos particulares.

Esplicacion.—En general dos figuras son iguales si tienen todos sus elementos respectivamente iguales; así, pues, en el supuesto de constar el polígono de n lados, como hay que considerar tambien n ángulos, resulta en totalidad, $2n$ elementos; pero con tal que haya $2n-3$ elementos iguales debidamente combinados entre ángulos y lados, tambien resultan iguales dos polígonos.

Así, pues, pasando al caso particular de los cuadriláteros convexos, y aplicando esta fórmula general á los cuadriláteros, tendremos: $2 \times 4 - 3 = 5$;

de modo que basta que tengan un ángulo y cuatro lados respectivamente iguales. Ahora, si se trata del paralelógramo romboide, el paralelismo de los lados dos á dos, equivalen á dos elementos, reduciéndose los cinco elementos á tres; de modo que dos romboides que tengan dosl ados contiguos y el ángulo comprendido iguales, son iguales. Si se trata del rombo, como tiene dos lados contiguos iguales, esta condicion equivale á otro elemento; así, pues, dos rombos son iguales cuando tienen un lado y ángulo respectivamente iguales. Cuando se trata del rectángulo, el ángulo recto equivale á otro elemento y por esto, para que dos rectángulos sean iguales, basta que tengan dos lados contíguos iguales; y, por fin, si el paralelógramo es un cuadrado, el ángulo recto y la igualdad de los dos lados contíguos equivalen á dos elementos, reduciéndose los tres elementos del paralelógramo á uno solo; y, por esto, dos cuadrados son iguales, con tal que tengan un lado igual.

Ejercicio 50.—Dos trapecios son iguales cuando tienen sus cuatro lados iguales y dispuestos de la misma manera.

Esplicacion.—Tomando los puntos medios de *DC* y *dc*; y trazando por dichos puntos rectas paralelas á los lados oblicuos de los trapecios, resultan los triángulos EFG, efg, iguales, por tener sus lados respectivamente iguales; por cuanto FG = fg, por representar estas rectas la diferencia de las dos bases iguales

FE = fe, por ser FE = AD, fe = ad y AD = ad

por hipótesis, resultando, por razones análogas:

que EG = eg.

Los paralelógramos AFED, y GBCE, son respectivamente iguales á *afcd*, *y bceg*, por tener dos á dos, dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales; así es que de la igualdad de todas estas figuras, se deduce que los cuatro vértices del trapecio *abcd* pueden coincidir con el trapecio *ABCD*, y por lo tanto deben ser iguales, que es lo que nos habíamos propuesto demostrar.

Ejercicio 51.—Toda recta comprendida entre dos lados opuestos de un paralelógramo, pasando por el punto de interseccion de sus diagonales ó por el centro del paralelógramo, 1.º: Queda dividida por este punto en dos partes iguales; 2.º Divide al paralelógramo en dos cuadriláteros iguales.

Esplicacion.—Tracemos por el punto *o*, interseccion de las diagonales, la recta *boc;* y por el mismo punto *o* una paralela á *AC*. Los triángulos Aod, aoB, son iguales, como es fácil de ver; luego ao = od. Los triángulos aob, cod, tambien son iguales, por ser b = c; los ángulos en *o* tambien iguales, por opuestos por el vértice, y ao = od; luego co = ob. Para probar que los cuadriláteros *ACbc* y *DBbc* son iguales, se tiene: ab = cd, segun lo que hemos probado en la primera parte, y como

$$dD = Ca,$$

resulta: $$cd + dD = ab + Ca,$$

ó sea, $$bC = cD, Ac = bB, A = B;$$

cb comun y AC = BD; condiciones necesarias para que dos cuadriláteros sean iguales: luego los cuadriláteros *ACbc*, y *DBbc* lo son.

Ejercicio 52.—Todo cuadrilátero es mitad del paralelógramo que se obtiene trazando por las extremidades de cada diagonal paralelas á la otra diagonal. Deducir de este principio que dos cuadriláteros tienen la misma superficie, cuando sus diagonales son respectivamente iguales y se cortan bajo el mismo ángulo.

Esplicacion.—Sea el cuadrilátero ABCD, y el paralelógramo *MNPQ* que resulta de trazar por los vértices del cuadrilátero rectas paralelas á las diagonales AC, DB. El paralelógramo queda descompuesto en cuatro paralelógramos, en que cada lado del cuadrilátero *ABCD* representa la diagonal de cada uno de los paralelógramos parciales; sabiendo además que la diagonal de todo paralelógramo divide á éste en dos triángulos iguales, se tiene:

$$MNPQ = AoDQ + oCPD + BNCo + MBoA = 2ADo + 2DoC + 2oCB + 2oAB = 2(ADo + DoC + oCB + oAB) = 2\,ABCD;$$

luego

$$\frac{MNPQ}{2} = ABCD.$$

Ahora, como el paralelógramo MNPQ que resulta tiene sus dos lados contíguos iguales á las dos diagonales del cuadrilátero, y el ángulo formado por dichos dos lados resulta ser igual al formado por las dos diagonales, se infiere que para todos los cuadriláteros que tengan las mismas diagonales formando el mismo ángulo, resultará siempre el mismo paralelógramo envolvente; y como quiera que se haya demostrado que el cuadrilátero es mitad de ese paralelógramo, resulta que, siendo éste siempre el mismo, todos los cuadriláteros que se conciben con las condiciones anteriores, serán mitades de un mismo paralelógramo; luego han de tener la misma superficie.

Ejercicio 53.—Dividiendo arbitrariamente, pero de una misma manera, los lados de un cuadrado, y juntando sucesivamente los puntos de division, se forma un nuevo cuadrado inscrito en el primero.

Esplicacion.—Tómense sobre los lados AB, BC, CD, DA del cuadrado, los puntos m, n, p, q, de igual manera, esto es, que

$$Am = Bn = Cp = Dq,$$

resultando á su vez

$$mB = nC = Dp = Aq.$$

De consiguiente, los triángulos rectángulos qAm, mBn, nCp, pDq, serán iguales; de modo que

$$mq = mn = np = pq.$$

Por ser los triángulos rectángulos qAm, mBn iguales, y los ángulos a y d complementarios, resultan a y b tambien complementarios; luego el ángulo c será recto, y así probariamos que los demás ángulos son rectos, debiendo de ser, en su virtud, la figura *pnmq* un cuadrado.

Ejercicio 54.—Dado un paralelógramo ABCD, si se toma en sentido inverso sobre los lados opuestos AB, CD, dos longitudes AE y CF arbitrarias, pero iguales; haciendo lo propio sobre los lados opuestos AD, BC, tomando en sentido inverso las longitudes arbitrarias DH=BG, demostrar: 1.º Que la figura EGFH es un paralelógramo inscrito en el paralelógramo propuesto; 2.º Que el centro del paralelógramo propuesto es al mismo tiempo el de todos los paralelógramos que se pueden inscribir.

Esplicacion.—Sean AE y CF las partes iguales que se toman en sentido contrario sobre los lados *AB* y *CD;* y sean DH BG, las partes tambien iguales tomadas en sentido contrario sobre los lados AD y *CB*. Los triángulos HDF y EGB son iguales; luego HF=EG: por razones análogas se tiene HE=FG; luego EHGB es un paralelógramo.

Trazando la diagonal EF, tendremos, que con la diagonal AC del paralelógramo ABCD, resultarán los triángulos AoE, oFC, iguales por tener dos ángulos iguales, y AE=FC; luego Eo=oF, y como debe resultar tambien Aо=oC, tendremos que el punto o es el de interseccion de las dos diagonales *AC* y DB. Y como la diagonal HG, ha de pasar por el punto medio de EF, por ser EBFH un paralelógramo, resulta que el punto interseccion de las diagonales del segundo paralelógramo es el mismo que el de las diagonales respectivas al primer paralelógramo ABCD.

Ejercicio 55.—Las dos rectas que juntan los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilatero se encuentran en el punto medio de la recta que une las mitades de las diagonales de este cuadrilatero.

Esplicacion.—Siendo b y c los puntos medios de las diagonales, y a, p, d, q, los puntos medios de los lados del cuadrilátero, resulta ab y cd mitades de AB y paralelas; luego abcd, es un paralelógramo, siendo sus diagonales ad y bc, que deben cortarse respectivamente en dos partes iguales. Considerando ahora el cuadrilátero *bpcq*, por razones análogas á las anteriores tendremos que será un paralelógramo cuyas diagonales *bc* y *pq* se cortarán respectivamente en dos partes iguales, es decir, que la recta *pq* pasará por el punto medio de *bc* lo mismo que *ad*, quedando así completamente probado el ejercicio.

Ejercicio 56.—Si por un punto cualquiera de la base de un triángulo isósceles se trazan paralelas á los otros dos lados, se forma un paralelógramo cuyo perímetro es constante.

Esplicacion.—Sea el punto *a* y las paralelas *ab*, *ac*, á los lados *fe* y *ed*; luego

$$ab + ac = ec + cd = ed.$$

Segun esto, el perímetro de *aceb*, será

$$ab + be + ec + ca = 2\,(ab + ac) = 2ed,$$

cantidad constante.

Ejercicio 57.—Siendo ABC un triángulo rectángulo y ABDM, ACEN, los cuadrados construidos sobre los lados *AB* y *AC* del ángulo recto, si de los vértices *D* y *E* opuestos al vértice *A* se bajan perpendiculares DF, EG á la hipotenusa BC prolongada, demostrar: 1.º Que la hipotenusa BC es igual á la suma de los perpendiculares DF, EG; 2.º Que el triángulo propuesto ABC, es la suma de los triángulos DFB, y CEG.

Explicacion.—Segun se desprende de la figura, resulta que los dos triángulos rectángulos *DFB* y *BAR* son iguales por tener DB = BA, y a = b, por tener sus lados respectivamente perpendiculares: de la igualdad de los triángulos anteriores, resulta DF=BR. Y por razones análogas á los anteriores, probariamos que RC=GE, por ser tambien los triángulos rectángulos ARC, ECG. iguales; luego

$$DF+EG=BR+RC=BC.$$

Para probar la segunda parte de este ejercicio, se tiene:

$$DFB+CEG=BAR+RAC=BAC.$$

Ejercicio 58.—Demostrar que en todo trapecio isósceles los ángulos opuestos son suplementarios.

Explicacion.—Los triángulos AnC y BDm son iguales, por tener An y Bm iguales y AC=BD; luego a=b; pero b=c, luego a=c; pero como a tiene por suplemento á d, resulta que c tiene tambien por suplemento á d.

Ejercicio 59.—En todo trapecio los cuatro puntos medios de los dos lados no paralelos y de las dos diagonales, están situados sobre una misma recta paralela á las dos bases del trapecio; la distancia de los puntos extremos es igual á la semi-suma de estas bases; la distancia de los puntos intermedios, es igual á su semi-diferencia.

Explicacion.—Sean n, p, m, q, los puntos medios respectivos de las dos diagonales y de los dos lados no paralelos del trapecio. Tendremos que la recta mn será paralela á AB é igual á su mitad, y mp será paralela á DC y DB, siendo además, mitad de DC; por último, mq tambien es paralela á AB y DC; de consiguiente, las rectas mn, mp, mq, que son todas paralelas á AB, y pasan todas por el mismo punto m, deben ser una misma recta.

Así, pues, $$np=mp-mn=\frac{DC}{2}-\frac{AB}{2},$$

y

$$mq=mp+pq=\frac{1}{2}DC+\frac{1}{2}AB=\frac{DC+AB}{2}.$$

Ejercicio 60.—Sobre un billar rectangular, averiguar en qué direccion debe ser lanzada una bola para que vuelva al punto de partida, despues de haber chocado sobre los cuatro lados del billar. ¿Cuál es la longitud total del camino recorrido por la bola?

Esplicacion.—Para el desarrollo de este ejercicio debe saberse un principio de Física, y es, que si una bola choca sobre una de las bandas del billar, al retroceder ésta, forma un ángulo con respecto á la perpendicular levantada en el punto del choque sobre la banda, igual al anterior; es decir, que si la bola sigue ántes del choque la direccion *ab*, despues del choque seguirá la *bc* en el supuesto de ser los ángulos *m* y *n* iguales.

Así, pues, supongamos en la figura 2.ª que *a* es la posicion primitiva de la bola. Trazaremos desde *a* la perpendicular á *nm*, tomando ao=oi; luégo, desde *i* una perpendicular á *np* tomando io'=o'g; despues, desde g, trazaremos una perpendicular á pq, tomando go''=o''e; y por último, desde *e* otra perpendicular á *mq* tomando o'''c=o'''e; uniendo ahora *c* con *a*, el punto *b* interseccion de la recta *ac* con *mq* indicará la direccion *ab* que debe seguir la bola, para que, despues que haya chocado en *b, d, f, h,* pase otra vez por el mismo punto *a*.

Despues de la direccion *ab* seguirá la bola, la direccion bd, porque los dos triángulos rectángulos *bo'''e* y bo'''c son iguales por tener dos catetos iguales; luego 2=3, pero 2=1, de donde 1=3; y como siendo estos ángulos iguales, tambien lo serán sus complementarios *4* y *5*, resulta que *bd* es la nueva direccion de la bola segun las leyes de Física que hemos indicado anteriormente. Razones semejantes á las que preceden, demuestran el por qué de las nuevas direcciones df, fh, ha. Por último, la recta *ac* es igual al camino recorrido por la bola despues de haber dado, podríamos decir, una vuelta completa. Porque, en virtud de los triángulos rectángulos iguales que se forman en la figura, resulta:

$$ac=ab+bc=ab+be=ab+bd+dg=ab+bd+df+fg=$$
$$=ab+bd+df+fh+hi=ab+bd+df+fh+ha.$$

Ejercicio 61.—Siendo ABCD un paralelógramo, *E* y *F* los puntos medios de los lados opuestos *AB* y *CD*, las rectas BF y DE dividen la diagonal AC en tres partes iguales.

Esplicacion —Sean *E* y F los puntos medios de *DC* y *AB*. El cuadrilátero EBFD será paralelógramo, por tener DF y EB paralelos é iguales; luego DE y FB son paralelas, resultando $5=4$; y como

$$1=2 \text{ y } AD=BC,$$

resultan los triángulos oCB y ADp iguales, de donde

$$Ap=oC.$$

Trazando por E una paralela á *AC*, se obtienen los dos triángulos *ApE* y *ErB* iguales, como es fácil de ver, y como $Er=po$, se tiene $Ap=po$, y habiendo demostrado anteriormente que $Ap=oC$, resulta, por fin,

$$Ap=po=oC.$$

Ejercicio 62.—Si por el vértice *A* de un paralelógramo ABCD, se traza una recta cualquiera AX, probar que la distancia del vértice *C* á la recta AX es igual á la suma ó á la diferencia de las distancias de los vértices B y D á la misma recta, segun que AX sea esterior ó no al paralelógramo.

Esplicacion.—Trazando desde *D*, *B* y *C* las perpendiculares Dr, Bs, Ct, á la recta AX, y luégo desde *B* la perpendicular *Bp* á *Ct*, resultan los dos triángulos iguales *ADr* y *CBp*; luego $Dr=Cp$. Así, pues,

$$Ct=Cp+pt=Dr+pt,$$

y como $pt=Bs$, se deduce que

$$Ct=Dr+Bs.$$

Si la recta AX tiene la direccion que vá indicada en la figura 2.ª, trazando por D y C las perpendiculares Dt, *Br* y *Cs* á la recta AX, y luégo por el vértice B una paralela á AX hasta encontrar á *Cs*, tendremos los dos triángulos rectángulos iguales, ADt, BCs; que darán $Dt=Cs$. Así, pues,

$$Cp=Cs-ps=Dt-ps;$$

pero como $ps=rB$, resulta:

$$Cp = Dt - rp.$$

Ejercicio 63.—Siendo D, E, F respectivamente los puntos medios de los lados AB, BC, CA, de un triángulo ABC, si se traza DG paralela á la mediana BF hasta el encuentro de la recta EF prolongada; demostrar que los tres lados del triángulo DGC, son respectivamente iguales á las tres medianas del triángulo ABC.

Esplicacion.—Sean D, E, F, los puntos medios de los lados AB, AC, CB; y sea DG la paralela á la mediana BF prolongada hasta encontrar la prolongacion de *EF*. Tendremos que, por ser la recta EF paralela á AB, el cuadrilátero *DBFG* será un paralelógramo, resultando BD=FG; del paralelógramo DBEF, resulta:

$$DB = EF;$$

de donde EF=GF. y como AF=FC, se infiere que el cuadrilátero *AECG* es un paralelógramo y en su virtud GC=AE. —En cuanto á los otros dos lados del triángulo, se demuestra fácilmente ser iguales á las otras dos medianas, pues DG=BF por lados opuestos del paralelógramo *DBFG*; y *DC* es igual á la otra mediana, por ser ella misma.

Ejercicio 64.—Descomponiendo un triángulo cualquiera en un trapecio y otro triángulo por medio de una paralela á uno de los lados de aquél, y con la precisa condicion de pasar esta paralela por los puntos medios de los otros dos lados del triángulo, el trapecio que resulta equivale á tres veces el triángulo complementario.

Esplicacion.—Sea mn la paralela media. Trazando por *m* y n rectas paralelas á los lados *BC* y AB, estas paralelas deberán encontrarse en un mismo punto de *AC*, ó sea en su punto medio, por lo que se ha dicho en ejercicios anteriores. Así, pues, tendremos cuatro triángulos iguales, porque mn=Ap=pC, y los ángulos adyacentes á estos lados son respectivamente iguales, luego:

$$AmnC = Amp + pmn + npC = 3mBn.$$

2.ª SECCION.

Combinaciones de arcos y cuerdas.

Ejercicio 65.—¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos situados á una distancia determinada de una circunferencia dada?

Esplicacion.—Sea *ao* un radio de la circunferencia o. Tómese *ab* en su prolongacion, siendo *ab* la cantidad determinada, y tendremos en *b* un punto del lugar geométrico; procediendo de un modo análogo con el radio *oc*, resulta en *d* un nuevo punto del lugar geométrico, y como $oa+ab=oc+cd$, se tiene que el lugar geométrico pedido no es más que una circunferencia concéntrica á la dada, cuyo radio es *ob*.

Ejercicio 66.—Si una recta de longitud constante se conserva paralela á ella misma, miéntras uno de sus estremos recorre los diferentes puntos de una circunferencia dada; cuál es el lugar geométrico del otro estremo.

Esplicacion.—Sea *ab* la posicion primera de la recta de longitud constante; trazando por *o* una recta *oo'* paralela á *ab* é igual en longitud, resultará el cuadrilátero *aoo'b* que tendrá que ser un paralelógramo, y en su virtud $bo'=ao$. Si tomamos una nueva posicion de recta *ab*, tal como *cd*, por razones semejantes á las anteriores, se tendrá $co=do'$, y así siguiendo. Ahora bien, como $ao=co=$...... por radios de una misma circunferencia, resulta: $bo'=do'=$...... De modo que el lugar geométrico pedido es una circunferencia igual á la primera, cuyo centro se determina trazando por el centro de la *o* una recta paralela é igual en magnitud á la recta dada.

Ejercicio 67.—Dada una circunferencia y un punto *A*, tomado en su plano, se pide el lugar de los puntos medios de las rectas que unen el punto A á los diversos puntos de la circunferencia propuesta.

Esplicacion.—Sea la recta An y el punto m medio de nA, y o' el punto medio de oA; así, pues, resulta ser mo' la paralela media del triángulo noA; luego mo' es mitad de no. Trazando la nueva recta An' y uniendo m', punto medio de $n'A$, con o' tendremos; $m'o'$ una mitad de $n'o$; pero como $no = n'o = \ldots$. dedúcese que $mo' = m'o' = \ldots\ldots$, de donde se infiere que el lugar pedido es una circunferencia de radio mitad de la dada y cuyo centro se halla en el punto medio que resulta de unir o con A.

Ejercicio 68.—¿Cuál es el lugar geométrico de los vértices de varios triángulos que descansan sobre una base fija BC y en los que la mediana que sale del vértice B, tiene una longitud dada?

Esplicacion.—Sea BC la base y Bm la longitud de la mediana que sale de B. Trazando una circunferencia cuyo radio sea Bm, se tendrá el lugar geométrico de los estremos de la mediana que pasa por B. Tomando una posicion de recta cualquiera tal como pC y volviendo á tomar $pC' = pC$, determinaremos el punto C' que será un vértice, ó sea un punto del lugar geométrico que se busca; Siguiendo así el movimiento, llegarémos á la posicion NC, en cuya posicion si tomamos $NC = NP$, tendremos otro punto del lugar geométrico. El lugar geométrico que se busca, segun la relacion que guarda este ejercicio con el anterior, debe ser una circunferencia de radio doble de la anterior, lo que se puede tambien probar inmediatamente por medio de la figura, pues como ha de ser $Cm = mn$, $NC = NP$ resulta: $nP = CP - Cn = 2(NP - Cm) = 2(NC - Cm) = 2\,Nm$; luego llamando D y d los diámetros respectivos nP, y Nm se tiene: $D = 2d$.

Ejercicio 69.—Dadas la base de un triángulo y la diferencia de los otros dos lados, hallar el lugar de los piés de las perpendiculares bajadas de las estremidades de la base sobre la bisectriz del ángulo del vértice. Resolver la misma cuestion, reemplazando la diferencia de los dos lados por la suma de los mismos, y la bisectriz del ángulo del vértice por la de su suplemento.

Esplicacion.—(fig. 1.ª) Sea Bm la diferencia de los dos lados; trazando una circunferencia de radio Bm, tendremos el lugar de los puntos correspondientes a lá diferencia de los dos lados del triángulo. Sise traza por A una recta, tal como AC, tomando su punto medio n tendremos el pié de la bisectriz del ángulo opuesto, puesto que levantando por n una perpendicular á AC y luégo por B la recta BC hasta en P, el triángulo APB tiene los dos lados PB y AP cuya diferencia es la cantidad CB dada, la recta Pn es la bisectriz del ángulo P y la recta An es la perpendicular á dicha bisectriz, de modo que el punto n ha de ser del lugar geométrico pedido; y como lo que se ha dicho de la recta AC puede decirse de toda otra que saliendo del punto A fuese á terminar en la circunferencia mCx, resulta que el conjunto de todos los puntos medios de esas rectas nos dará el lugar pedido, y esto, conforme con lo dicho en ejercicios anteriores, se vé que será una circunferencia de radio mitad de la dada mCx y cuyo centro se hallará á la mitad de la recta AB.

Para la segunda parte supondremos la figura 2.ª en que AC es la base del triángulo, siendo CB igual á la suma de los otros dos lados. Trazando una circunferencia con el radio CB, tendremos el lugar de los puntos que distan de C una cantidad igual á la suma de los otros dos lados; tómese luégo una recta AD, y su punto medio E, y por este punto trácese una perpendicular á AD, hasta encontrar á la recta que resulta de unir el punto C con D. El triángulo AFC será uno de tantos que se pueden considerar sobre la base AC, en que $AF+FC$ sea igual á CB, siendo EF la bisectriz del ángulo esterno y AE la perpendicular, á la bisectriz, que sale del estremo A de la base; luego el punto E, es un punto del lugar geométrico que se busca, y como lo que se ha dicho de este punto se podria decir de otro, resulta que, para hallar ese lugar geométrico, basta trazar diferentes rectas que saliendo de A terminen en la circunferencia BDm, tomando luégo los puntos medios de estas rectas, lo que, conforme con lo que llevamos dicho ya, será una circunferencia de radio mitad de la de *BDm*, hallándose su centro en el punto medio de la recta *AC*. Discútase este ejercicio.

Ejercicio 70.—Si se divide la cuerda de un arco de circunferencia en tres partes iguales, los radios que pasan por los puntos de division, dividen el arco en tres partes, resultando las dos de los estremos iguales, y ambas menores que la parte intermedia.

Esplicacion.—Los triángulos *abo*, *cod* son iguales porque $ao = od$, además *ob* y *oc* iguales por oblícuas equidistantes de la perpendicular *af*, y, $ab = cd$ por hipótesis; luego el ángulo $aob = cod$ ó sea, $ag = hd$. Trazando por el punto *b* una paralela *bp* á la recta *ao*, resulta el triángulo *bop*, en que *b* es un ángulo igual á *1* y además la *bp* mitad de *ao*, y $op = \frac{1}{2} oc$ por ser la recta *bp* la paralela media del triángulo *aoc*, y como $ao > oc$, resulta $bp > op$, de donde $bop > obp$; y como *obp* es igual á *aob*, se deduce $bop > aob$; pero siendo los arcos *ag* y *gh* las medidas de los ángulos *bop* y *aob*, se tiene por fin $gh > ag$; y tambien $gh > hd$.

Ejercicio 71.—Si por un punto *A* esterior á una circunferencia *o* se traza una secante *ACD*, cuya parte esterior *AC* sea igual al radio, y luégo se traza por el mismo punto la secante que pasa por el centro: Demostrar que el ángulo *CoA* es el tercio del ángulo *DoB*.

Esplicacion.—Como sea *AC* igual al radio, uniendo *C* con *o* tendremos el triángulo isósceles *ACo*, que dá $CAo = AoC$: El ángulo *DCo*, considerado como esterno del triángulo *ACo*, nos dará:

$DCo = CAo + AoC = 2\ CAo$, y como el triángulo *CDo* es tambien isósceles, resulta:

$$CDo = DCo = 2\,CAo.$$

De modo que el ángulo *DoB*, considerado como esterno tambien del triángulo *DAo*, nos dará:

$$DoB = CAo + CDo = CAo + 2\,CAo = 3\,CAo,$$

y como $CAo = AoC$, resulta:

$$DoB = 3\,CoA$$

ó sea,

$$CoA = \frac{1}{3}\,DoB.$$

Ejercicio 72.—Dada una circunferencia y un punto en su plano, determinar cuál es la cuerda más corta que puede trazarse por este punto en la circunferenciá.

Esplicacion.—Sea la circunferencia *o* y el punto *P;* para ello trazaremos el diámetro que pasa por *P*, y luégo una perpendicular á dicho diámetro, tal como *AB*, y ésta será la cuerda más corta que pasa por el punto *P*, por ser la cuerda que pasando por el punto *P* dista más del centro de la circunferencia.

Ejercicio 73.—Dada una circunferencia y un punto en su plano, determinar la posicion de recta tal que dé la mayor y menor de las muchas secantes que se pueden concebir pasando por dicho punto.

Esplicacion.—Sea la circunferencia *o* y el punto *P;* trazando la recta Po tendremos que mP será la menor, nP la mayor, pues para probar esto bastará tomar una segunda posicion de secante, tal como PQ, y hacer ver que $SP > Pm$, así como $QP < Pn$. Unamos S con o, y tendremos: $oP < oS + SP$, ó sea, $om + mP < oS + SP$, y como $oS = Om$ resulta, $SP > mP$.

Uniendo ahora o con Q, resulta: $QP < Qo + oP$, y como $Qo = on$ se tiene $QP < no + oP$, ó sea, $QP < Pn$; quedando de este modo probado el ejercicio, porque lo que se dedujo de la secante PQ, se deduciria de otra cualquiera distinta de PQ.

Ejercicio 74.—Si dos cuerdas iguales se cortan al interior de una circunferencia, los segmentos determinados sobre estas dos cuerdas por su punto de encuentro son respectivamente iguales.

Explicacion.—Uniendo a con d, y c con b, resultan dos triángulos adb, cdb, iguales, porque tienen db comun, los lados ab y cd iguales por hipótesis, y dab=dcb; resultando de la igualdad de estos dos triángulos odb=obd, luego od=ob; además, como dc=ab, restando estas dos últimas igualdades, se tiene,

$$dc-od=ab-ob; \text{ ó sea } oc=oa.$$

Ejercicio 75.—La mayor y la menor de la rectas que pueden trazarse entre dos circunferencias, pasan por los centros de dichas circunferencias.

Explicacion.—Segun se desprende de la figura, en el supuesto de ser ab un recta cualquiera, resulta:

$$ab<bo+oO+Oa;$$

luego,

$$ab<DC$$

Por otra parte, ab>Ob—Oa; y como Ob>Oo—ob sustituyendo el valor de Ob en la desigualdad anterior, con mucha más razon tendremos: $ab>Oo-ob-Oa$, ó sea, $ab>Oo-oB-OA$; simplificando, $ab>BA$.

Luego CD es el máximo y AB es el mínimo.

Ejercicio 76.—Si dos cuerdas *AB* y *CD* se cortan en un círculo, la suma *AC*+*BD* de los arcos que ellos interceptan es igual á la suma de los arcos interceptados por los dos diámetros paralelos á estas cuerdas.

Explicacion.—Siendo los diámetros pq y nm paralelos á las cuerdas AB y CD, resulta que BoD=qo'm; pero

$$BoD=\frac{1}{2}(BD+CA)$$

$$\text{y } qo'm=qm; \text{ de donde } \frac{1}{2}(BD+CA)=qm$$

ó sea $BD+CA=2\,qm=qm+np$.

Ejercicio 77.—Dado un círculo, averiguar cuántos círculos del mismo radio se necesitan para envolver al primero.

Explicacion.—Tomando en o un ángulo de 60 grados en una circunferencia de radio ob = 2ao = 2r, resulta ob = of = bf, por ser bf un lado de exágono inscrito á la circunferencia xz; luego el triángulo bof es equilátero, y la perpendicular od divide la base bf en dos partes iguales; y como ob = 2r, siendo ob = bf resulta bd = r y df = r, valores de los radios de las nuevas circunferencias que han de envolver á la primera: de modo que necesitamos seis circunferencias para resolver el ejercicio, cuyos centros se hallaran situados en los vér tices del exágono inscrito al círculo xz.

Ejercicio 78.—De todas las secantes que pasan por uno de los puntos de interseccion de dos circunferencias dadas, determinar cuál es la mayor de todas ellas.

Esplicacion.—Si suponemos una posicion de secante cualquiera, tal como AB, las perpendiculares op y $o'q$ trazadas á la recta AB, desde los centros, dan;

$$pC = \frac{1}{2}AC, \quad Cq = \frac{1}{2}CB.$$

sumando

$$pC + Cq = \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2}AB;$$

y como $o'g$ se supone paralela á AB, resulta;

$$pC + Cq = o'g;$$

luego

$$o'g = \frac{1}{2}AB.$$

Ahora, como el máximo de $o'g$ es oo', de este máximo se deduce el correspondiente para AB. Así, pues, cuando la secante sea paralela á oo' tendremos el máximo pedido.

Ejercicio 79.—¿Cuál es el lugar de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia, que tienen una longitud dada?

Esplicacion.—Sean *ab* y *cd* dos cuerdas iguales; los triángulos *aob, cod,* serán iguales y, en su virtud, las alturas *on* y *om* tambien, resultando que los puntos *n, m,....* que son los puntos medios de las cuerdas *ab, cd.....* serán puntos de una circunferencia concéntrica á la dada, cuyo radio vendrá medido por la recta *on.*

Ejercicio 80.—Siendo *AB* un diámetro fijo de un círculo y *CD* una cuerda paralela á este diámetro, si se trazan las rectas *CB* y *DA* que se cortan en *M,* así como *AC* y *BD* que se cortan en N, hallar el lugar de los puntos *M* y *N,* cuando la cuerda *CD* se mueve paralelamente á sí misma.

Esplicacion.—Siendo CD paralela á AB resulta CA = DB, los ángulos C y D iguales; luego el triángulo NCD, es isósceles. La altura Np corta á CD en dos partes iguales, debiendo pasar dicha perpendicular por el punto m, pues uniendo el punto medio de CD con el punto medio r, de AB, resulta la misma recta Np prolongada, por cuanto Np es la perpendicular media á la cuerda CD, que debe pasar por el centro; uniendo ahora A, D, y C, *B,* tendremos que CDA = DCB por ser AC = DB; luego el triángulo CmD es isósceles, debiendo corresponder el punto *m* á la perpendicular media, ó sea á la prolongacion de la recta Np. De modo que todos los puntos que obtendremos, moviendo la cuerda CD paralelamente á AB, conforme á las condiciones antedichas, serán puntos de la perpendicular media Np, ó sea de la recta, que pasa por el centro de la circunferencia perpendicular á AB, siendo ésta, por consiguiente el lugar geométrico pedido.

Ejercicio 81.—¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias del mismo radio que dividen una circunferencia dada en dos partes iguales?

Esplicacion.—Sea la circunferencia o; trácese el diámetro AB, y luégo por el centro o una perpendicular, os, al diámetro AB;

Si con el radio de las circunferencias iguales se corta desde el punto B á la recta *os* en el punto p, tendremos que pB y pA serán iguales, y la circunferencia de radio pB dividirá á la o en dos partes iguales. Si sobre otro diámetro A'B' se procede de un modo análogo al anterior, determinaremos un nuevo punto p' del lugar geométrico pedido, y como lo mismo se diria de otros puntos p'' p''', debiendo ser las rectas op = op' = op'', resulta que el lugar pedido será una circunferencia trazada con el radio op.

Ejercicio 82.—¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de circunferencias del mismo radio que cortan bajo un ángulo dado á una circunferencia conocida?

Esplicacion.—Sea AoB el ángulo dado, bajo el cual las circunferencias de un radio igual deben cortar á la circunferencia o. En este caso, trazaremos la perpendicular media os, á la cuerda AB, tomando desde B hasta P el radio de las circunferencias iguales, y como PB = PA, tendremos que P será un punto del lugar geométrico; tomando luégo una nueva cuerda A'B' = AB y A'P' = AP, resultará ser P' un nuevo punto del lugar geométrico pedido; y como los triángulos AoP y A'oP son iguales, resulta oP = oP', lo cual podríamos hacer extensivo á otros puntos, de suerte que el lugar geométrico pedido será una circunferencia de radio oP.

Ejercicio 83.—Siendo A, B, C, tres puntos cualesquiera de una circunferencia, D el punto medio del arco AB, y E el punto medio del arco AC, trazando la recta DE que corta respectivamente á las cuerdas AB y AC en F y G: Demostrar que AF = AG.

Esplicacion.—El ángulo en *F* es;

$$AFE = \frac{1}{2}(AE + BD),$$

y el ángulo en *G* es;

$$AGD = \frac{1}{2}(AD + EC);$$

pero como

$$AD = BD \text{ y } AE = EC,$$

resulta: $$AFE = AGD,$$
y en su virtud el triángulo AFG isósceles, de donde
$$AF = AG.$$

Ejercicio 84.—Siendo A un punto cualquiera de un diámetro, B la estremidad del radio perpendicular á este diámetro, si trazamos BA que corta al círculo en un punto p, y despues la tangente en este punto que corta en C al diámetro prolongado: Demostrar que $CA = Cp$.

Esplicacion.—El ángulo
$$BAD = \frac{1}{2}(BD + np),$$
el ángulo
$$CpB = \frac{1}{2}(np + nB),$$
y como $$Bn = BD$$
resulta: $$BAD = CpB$$
ó sea, $$CAp = CpA.$$
De modo que el triángulo CAp es isósceles, y en su, consecuencia $CA = Cp$.

Ejercicio 85.—Sean ABC, $A'B'C'$ seis puntos tomados sobre una circunferencia de tal manera que AB sea paralela á $A'B'$ y AC á $A'C'$; demostrar que BC' y CB' tambien son paralelas.

Esplicacion.—Siendo AC y $A'C'$ paralelas, es necesario, para que tambien lo sean BC' y $B'C$, que se verifique la siguiente igualdad: $$A'C'B = ACB'.$$
Para ello tenemos
$$ACB' = \frac{1}{2}(AB + BB');$$

$$A'C'B = \frac{1}{2}(AB + AA');$$

y como $AA' = BB'$

por ser arcos de una misma circunferencia comprendidos entre rectas paralelas, resulta:

$$A'C'B = ACB'.$$

Ejercicio 86.—Las bisectrices de los ángulos inteteriores de un cuadrilátero, forman otro cuadrilátero inscriptible en una circunferencia.

Esplicacion.—Sean Ab, Bb, aD, aC, las bisectrices de los cuatro ángulos A, B, C, D. Se sabe que,

$$A + B + C + D = 4\ r,$$

de donde

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{2} = 2\ r. = 180^\circ \quad (1)$$

Ahora, en el triángulo CDa, resulta:

$$180^\circ - \left(\frac{C}{2} + \frac{D}{2}\right) = a;$$

y en el triángulo ABb;

$$180^\circ - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = b.$$

Sumando estas dos igualdades, y recordando la igualdad (1), se obtiene

$$180^\circ + 180^\circ - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{2}\right) = 180^\circ = a + b.$$

De consiguiente, el cuadrilátero *ambn* es inscriptible, porque los ángulos opuestos del mismo son suplementarios.

Ejercicio 87.—Si por uno de los puntos de interseccion de dos circunferencias se traza un diámetro en cada círculo, la recta que junta las estremidades de los dos diámetros, pasa por el segundo punto de interseccion de las dos circunferencias.

Esplicacion.—Sean ab, ac, los dos diámetros; uniendo n con a y b resulta un triángulo rectángulo, y en su virtud el ángulo anb recto; por razones análogas se tiene que la recta nc tambien ha de formar con an ángulo recto; de consiguiente, los dos ángulos anb y anc son adyacentes, debiendo estar los dos lados bn y nc en línea recta, que es lo que nos habíamos propuesto probar.

Ejercicio 88.—Si por el punto de contacto de dos circunferencias tangentes setrazan dos secantes cualesquiera, las rectas que juntan sus estremidades son paralelas.

Esplicacion.—Tenemos $NMb' = bMP$, y como por ser ángulos semi-inscriptos abrazan respectivamente los arcos bM y Mb', estos arcos comprenden la misma cantidad angular, de donde se infiere

$$Ma'b' = Mab$$

por ángulos inscriptos que comprenden la misma cantidad angular; y como estos ángulos son los alternos internos de de las rectas ab y $a'b'$ cortadas por la secante $a'a$, siendo dichos ángulos iguales, las rectas ab y $a'b'$ son paralelas.

Ejercicio 89.—Si por uno de los puntos de interseccion de dos circunferencias se trazan dos secantes cualesquiera, las rectas que juntan las estremidades de estas dos rectas forman un ángulo constante.

Esplicacion.—Considerando el triángulo AQb, se tiene:

$$\text{QAN} = \frac{1}{2}(\text{AN} + \text{AB});$$

el ángulo

$$\text{QbN} = \frac{1}{2}\text{Na};$$

luego $$QAN+QbN=\frac{1}{2}(AN+AB+Na).$$

Considerando ahora el triángulo *PCc*, se tiene

$$PCN=\frac{1}{2}(BA+AN);$$

$$PcC=\frac{1}{2}(Nc+ca);$$

luego

$$PCN+PcC=\frac{1}{2}(AB+AN+Nc+ca)=\frac{1}{2}(AB+AN+Na).$$

Siendo la suma de estos dos ángulos igual á la suma anteriormente hallada, y siendo P y Q los suplementos de estas sumas, resulta $P=Q$, con lo cual queda probado el ejercicio.

Ejercicio 90.—Las bisectrices de los ángulos formados por los lados opuestos de un cuadrilátero inscrito, se cortan en ángulo recto.

Esplicacion.—Sean RP y QP las bisectrices respectivas, y a, b, c, d, los arcos de la circunferencia interceptados por los cuatro lados del cuadrilátero. Así, pues, segun los ángulos esternos que se forman en Q y R, si llamamos C y x las mitades de dichos ángulos, tendremos:

$$C=\frac{a-b}{4},\quad x=\frac{d-c}{4}.$$

El ángulo $RnA=180^\circ-(RAn+C)$ (1); pero

$$RAn=\frac{b+c}{2},$$

luego

$$RAn+C=\frac{b+c}{2}+\frac{a-b}{4}=\frac{2b+2c+a-b}{4}=\frac{b+a+2c}{4}$$

Podemos determinar un segundo valor de este segundo miembro, sabiendo que

$$a+b+c+d=360^\circ \text{ ó sea, } b+a+2c=360^\circ+c-d;$$
de donde,

$$\frac{b+a+2c}{4}=90+\frac{c-d}{4}.$$

Así, pues,

$$RAn+C=\frac{b+a+2c}{4}=90^\circ+\frac{c-d}{4}.$$

Sustituyendo este valor en (1), tendremos:

$$RnA=180^\circ-\left(90^\circ+\frac{c-d}{4}\right)=90^\circ+\frac{d-c}{4}=90^\circ+x.$$

Ahora, como *RnA* es el ángulo esterno del triángulo *nPQ*, se tiene:

$$RnA=nPQ+x;$$

sustituyendo en vez de *RnA* el valor anteriormente hallado, se deduce:

$$90^\circ+x=nPQ+x$$

de donde

$$nPQ=90^\circ;$$

que es lo que nos habíamos propuesto probar.

Ejercicio 91.—Las alturas AA', BB', CC', de un triángulo cualquiera ABC, son las bisectrices de los ángulos del triángulo $A'B'C'$.

Esplicacion.—Si se traza una semi-circunferencia tomando AC por diámetro, tendrá que pasar por A' y C'; lo mismo sucede respeto los lados BC y AB. De esto se infiere que $CC'A'=CAA'$, por ángulos inscritos que comprenden el mismo arco $A'C$; y por razones análogas se tiene:

$$CAA'=B'BA'=B'BC,$$

y

$$B'BC=B'C'C.$$

De esta serie de igualdades se infiere

$$CC'A'=B'C'C.$$

Así, pues, la recta CC' es la bisectriz del ángulo $B'C'A'$. De un modo parecido probaríamos que BB' y AA' son las bisectrices respectivas de los ángulos $A'B'C'$ y $B'A'C'$.

Ejercicio 92.—Siendo ABC un triángulo inscrito en una circunferencia, si se junta el centro o con el punto medio del arco BC y se traza luégo la recta AD; demostrar que el ángulo ADo es mitad de la diferencia de los ángulos B y C.

Esplicacion.—De la figura resulta,

$$B=\frac{1}{2}ApC,$$

$$C=\frac{1}{2}AB;$$

luego $$(1)\ B+C=\frac{1}{2}(ApC+AB)=\frac{1}{2}BpC;$$

y como $$AB+Ap=pC,$$

resulta: $$(2)\ \frac{1}{2}BpC=BAp.$$

Del triángulo AoD se deduce, para el ángulo esterno Aop, el valor siguiente:

$$2ADo=Aop=poB-AoB;$$

y como el ángulo poB viene medido por los arcos.

$$AB+Ap=BAp,$$

y como la suma de estos arcos hemos hallado anteriormente ser igual á $B+C$, segun se desprende de las igualdades (1) y (2), observando además que el ángulo AoB viene medido por $2C$ se tiene:

$$2ADo=B+C-2C=B-C,$$

de donde $$ADo=\frac{B-C.}{2}$$

Ejercicio 93.—Dadas dos circunferencias o y o' y un ángulo XAY, situado en su plano, el lado AX corta á la circunferencia o' en los puntos B y C, y á la circunferencia o en los puntos B' y C'; el lado AY

corta á la circunferencia o' en D y E, y á la circunferencia o en D' y E'. Demostrar que las cuerdas BD, CE, $B'D'$, $C'E'$, indefinidamente prolongadas forman un cuadrilátero inscriptible.

Esplicacion.—Los triángulos $D'EN$ y BMC' son equiángulos, porque el ángulo

$$BC'M = \frac{1}{2}(m+n);$$

y el ángulo $$E'D'B' = ND'E = \frac{1}{2}(m+n):$$

luego $$BC'M = ND'E.$$

Ahora, el ángulo $$C'BM = \frac{1}{2}(m'+n')$$

y $$DEC = NED' = \frac{1}{2}(m'+n'):$$

luego $$C'BM = NED',$$

y siendo dos ángulos iguales de los dos triángulos $ND'E$ y $C'BM$, el tercero tambien lo será por suplemento de ángulos iguales, de modo que tendremos

$$D'NE = C'MB,$$

y como PNR es suplemento de $D'NE$, se tiene que en el cuadrilátero $PNRM$, los ángulos opuestos N y M son suplementarios; luego el cuadrilátero $PNRM$, es inscriptible, que es lo que nos habíamos propuesto demostrar.

Ejercicio 94.—Siendo o el punto de concurso de las alturas de un triángulo ABC, y G el punto donde la altura AD encuentra á la circunferencia circunscrita al triángulo, se tiene:

$$oD = DG.$$

Esplicacion.—Si el triángulo CoG es isósceles, se tendrá $oD = DG$, porque CD es perpendicular á AG. Para ser isósceles, se necesita que $CoG = CGo$; pero $CoG = ABC$, por tener sus lados respectivamente perpendiculares, y como $ABC = AGC = CGo$, por ser ángulos inscriptos que abrazan el mismo arco, resulta en su virtud:

$$CoG = CGo:$$

luego $$oD = DG.$$

Ejercicio 95.—Si por el punto A mitad de un arco BAC de una circunferencia se trazan dos cuerdas cualesquiera AD y AE que corten en F y en G á la cuerda BC; el cuadrilátero $DFGE$ así formado es inscriptible.

Esplicacion.—Para probar este ejercicio, basta demostrar que el ángulo F es suplemento de E;

$$F = \frac{1}{2}(DnEC + BA);$$

$$E = \frac{1}{2}(DB + BA),$$

y como $AB = AC$ resulta:

$$F + E = \frac{1}{2}(DnEC + BA + BA + DB) = \frac{1}{2}(DnEC + AC + \\ + AB + DB) = 180^{\circ};$$

luego F y E son suplementarios, y en su virtud el cuadrilátero $DFGE$ inscriptible.

Ejercicio 96.—Siendo $ghpf$ un cuadrilátero inscriptible: si se traza una circunferencia pasando por g y h; una segunda por h y p; una tercera por p y f; y una cuarta por f y g; estas cuatro circunferencias se cortarán sucesivamente en cuatro puntos a, b, c, d, diferentes de los puntos g, h, p, f. Demostrar que el cuadrilátero $abcd$ es tambien inscriptible.

Esplicacion.—El ángulo gfd y gad son iguales, por inscritos en la circunferencia o' y abrazar el mismo arco.

Los ángulos *ghs* y *bag* tambien son iguales por ser el uno ángulo inscripto y el otro ex-inscripto en la circunferencia o'', que comprenden el mismo arco; por razones análogas á las anteriores se halla que en la circunferencia o''', $tcb = shp$. Así, pues, tendremos:

$$gfd = gad; \quad dfp = tcd; \quad ghs = bag; \quad tcb = shp;$$

sumando respectivamente estas cuatro igualdades, resulta:

$$gfp + ghp = dab + dcb;$$

y como $gfp + ghp$ es igual á dos rectos, por ser el cuadrilátero *ghpf* inscrito; $dab + dcb$ tambien valdrá dos rectos, lo que equivale á decir que son suplementarios; así, pues, el cuadrilátero *abcd*, será inscriptible, que es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 97.—Si en un cuadrilátero *ABCD* se prologan los lados *AB* y *CD* hasta su punto de encuentro en *E*; y luégo se hace lo mismo con los otros dos lados *AD* y *BC* hasta su punto de encuentro en *F*, se forma una figura, que se llama cuadrilátero completo, que contiene cuatro triángulos, *ABF*, *ADE*, *BCE*, *DCF*: Demostrar: 1.º Que las circunferencias circunscritas á estos cuatro triángulos pasan por un mismo punto; 2.º Que este punto y los centros de las cuatro circunferencias están situados en una nueva circunferencia.

Esplicacion.—Siendo α el punto de interseccion de las circunferencias *1*, y *4*; para que la circunferencia que pasa por el triángulo *ABF* pase por α es preciso que uniendo α con *A* y *F* resulta un cuadrilátero αABF inscriptible á la circunferencia *3*, y para ello basta que el ángulo $A\alpha F$, sea suplemento de *B*.

De la figura se deduce:

$$A\alpha F = A\alpha D + D\alpha F;$$

pero $\qquad A\alpha D = AED$

y $$D\alpha F=\frac{1}{2}(DC+CF);$$

y como $$\frac{1}{2}(DC+CF)$$

representa la medida del ángulo ex-inscrito *DCB*, resulta;

$$D\alpha F=DCB;$$

luego $$A\alpha F=AED+DCB=\psi$$

y como ψ y B son suplementarios se deduce que el ángulo $A\alpha F$ y el ángulo B opuestos del cuadrilátero $A\alpha FB$ son suplementarios, manifestándonos esto que la circunferencia *3* debe pasar por el punto α.

Probemos ahora como la circunferencia *2* pasa tambien por el punto α. Uniendo α con E y C tendremos un nuevo cuadrilátero, el cual nos dá:

$$E\alpha C=D\alpha C+D\alpha E,$$

pero $$D\alpha C=DFC$$

y $$E\alpha D=\frac{1}{2}(DnA+ApE)=\text{ángulo ex-inscripto } DAB,$$

luego $$E\alpha C=DFC+DAB=\psi:$$

resulta, pues, la misma conclusion del caso anterior, luego la circunferencia *2*, tambien pasará por el punto α.

Demostremos ahora como una misma circunferencia pasa por el punto α y por los cuatro centros de las circunferencias *1, 2, 3, 4*.

Trazando las líneas de los centros tendremos que el ángulo *2, 3, 4*, (designando los centros de las circunferencias por los mismos números que representan éstas) es suplemento de $F\alpha B$ por la relacion de perpendicularidad que existe entre las líneas de los centros y las cuerdas comunes; por razones análogas resulta que el ángulo *2, 1, 4*, debe ser igual á $E\alpha D$; luego si $F\alpha B=E\alpha D$ (1) los ángulos *2, 3, 4*, y *2, 1, 4* serán suplementarios y una circunferencia pasará por los puntos *1, 2, 3, 4*.

Para demostrar la igualdad (1) se tiene que el ángulo

$$E\alpha D = \frac{1}{2}(EpA + AnD) = \text{ángulo ex-inscripto } DAB,$$

pero DAB ó $FAB = F\alpha B$ por ángulos inscriptos en la circunferencia *3* que abrazan el mismo arco; luego $E\alpha D = F\alpha B$.

Por último, para probar que la circunferencia que pasa por los cuatro puntos *1, 2, 3, 4*, pasa por α, trazaremos el cuadrilátero que pasa por *1*, α, *3, 2*, y bastará demostrar que el ángulo *1*, α, *3*, es suplemento de *1, 2, 3*, pues de este modo sabremos que por los cuatro puntos pasa una circunferencia, teniendo que ser la misma que pasaba por *1, 2, 3, 4*, puesto que la nueva que se considera pasa por tres puntos *1, 2, 3*, de la anterior.

Para probar que el ángulo *1*, α, *3*, es suplemento de *1, 2, 3*, consideraremos los dos triángulos α, *1*, *r*, y *r*, *4*, *3* que tienen el ángulo *r* igual; además el ángulo central α, *3*, *F* y el ángulo inscrito αAF correspondiente en la circunferencia *3* que comprenden el mismo arco *F*, *G*, α, y siendo así resulta el ángulo central doble del inscrito, luego el ángulo mitad *G*, *3*, *F*, ó *G*, *3*, α, debe ser igual á αAF; por otra parte, el ángulo αAF ó αAD inscrito, comparado con el central α, *1*, *D* de la circunferencia *1*, resulta, por consideraciones análogas á las anteriores, ser mitad de este, ó sea

$$\alpha AD = \frac{1}{2}\alpha 1D;$$

luego $\quad \alpha 1r = \alpha AD,$

de donde si $\quad \alpha 3G = \alpha AF$

y $\quad \alpha AF = \alpha 1r,$

ó sea $\quad \alpha AD = \alpha 1r$

resulta $\quad \alpha 3G = \alpha 1r$

ó sea $\quad r34 = \alpha 1r.$

De todo lo que antecede resulta que si los dos triángulos $\alpha 1r$ y $4r3$ tienen dos ángulos iguales, los terceros ángulos tambien lo serán, deduciéndose que $1\alpha 3 = 1, 4, 3$, y como

1, 4, 3, ya está demostrado que es suplemento de *1, 2, 3*, resulta que, *1*, α, *3*, tambien lo será, quedando con esto probado, segun lo que antecede que por los puntos *1*, α, *3*, *2*, pasa una circunferencia.

Ejercicio 98.—Si sobre los tres lados de un triángulo ABC, se construyen exteriormente á él, los triángulos equiláteros ABC', ACB', BCA'; Demostrar: 1.º Que las tres rectas AA', BB', CC', son iguales: 2.º Que ellas concurren en un mismo punto o; y 3.º Que desde el punto o se ven bajo el mismo ángulo los tres lados del triángulo ABC.

Esplicacion.—El triángulo $C'BC$ es igual á ABA', por tener dos lados iguales, é igual tambien el ángulo comprendido entre ellos; luego $CC'=AA'$; del mismo modo demostraríamos que $AA'=BB'$.

Para probar que las tres rectas AA', BB', CC', se cortan en un mismo punto, debemos atender al punto o, interseccion de las dos rectas AA' y CC', y demostrar que la recta BB' pasa forzosamente por dicho punto o.

Si se une o con B, los ángulos oBA y $B'BA$ del triángulo ABB' son iguales, por cuanto los ángulos ABB' y $AC'C$ lo son, por ángulos homólogos de triángulos iguales $AC'C$ y $AB'B$,

y como $$AC'C=AC'o=ABo,$$

dedúcese inmediatamente $oBA=B'BA$, lo que nos corrobora que las rectas Bo y BB' forman una misma recta, y en su virtud que las tres rectas AA', BB', CC', se cortan en un mismo punto o.

Para la tercera parte del ejercicio se tiene que de la igualdad de los ángulos *1*, se infiere que podemos hacer pasar una circunferencia por los cuatro puntos A', B, o, C.

De la misma manera por los cuatro puntos A, o, B, C', podremos hacer pasar otra circunferencia por la igualdad de los ángulos *2*; y por ser los ángulos *3* tambien iguales se podrá hacer pasar una tercera circunferencia por los puntos A, o, C, B'. Así, en virtud de las circunferencias trazadas, resulta $BoA = 4 + 5,$

pero $4 + 5 = 4' + 5',$

y como $4' = 60.^o, \quad 5' = 60.^o.$

por ser el triángulo ABC' equilátero, se tiene

$$BoA = 60.^o + 60.^o = 120^o.$$

Siguiendo el mismo raciocinio, hallaríamos iguales valores para los ángulos BoC y CoA.

Ejercicio 99.—Por un punto fijo tomado en el plano de un círculo se trazan diferentes cuerdas; se pide el lugar geométrico de las mitades de estas cuerdas.

Esplicacion.—Sean las cuerdas AB y CD. Trazando, desde el centro, perpendiculares á las cuerdas, determinaremos los puntos n, m,..... que serán los puntos medios de las cuerdas, y de consiguiente puntos del lugar geométrico que se busca; empero todos los puntos m, n,...., no son más que los vértices de los diferentes triángulos rectángulos, cuya hipotenusa comun es Po; luego el lugar geométrico pedido será una circunferencia, cuyo diametro será Po.

Ejercicio 100.—Por una de las extremidades del diámetro AB de un círculo se traza una cuerda cualquiera AC que se prolonga en una cantidad CM igual á CB; se pide el lugar geométrico de los puntos M.

Esplicacion.—Siendo $CM = CB$, resulta el triángulo rectángulo MCB, que tiene los ángulos agudos M y B respectivamente iguales á 45 grados. Si se supone otra cuerda AC', por una razon análoga tendremos el ángulo M' de 45 grados; luego el lugar geométrico es una circunferencia descrita sobre AB, de tal modo que uniendo por la parte superior de AB un punto cualquiera de esta circunferencia con los estremos de dicha recta, resulte un ángulo de 45 grados; de suerte que para determinarla basta trazar la recta BP que forme con AB un ángulo de 45 grados, y luégo la recta BQ perpendicular á BP, para tener en Q el centro de la circunferencia pedida, cuyo radio será QB.

Ejercicio 101.—Dado un círculo y un punto fijo A, situado en su plano, y siendo ABC una cuerda cualquiera que sale del punto A; si se eleva sobre el punto medio de esta cuerda una perpendicular IM, igual á IA ¿cuál es el lugar de los puntos M?

Esplicacion.—El ángulo M es de 45°; suponiendo una nueva posicion de recta $B'C'$, determinaremos de una manera parecida un nuevo punto M', resultando este nuevo ángulo tambien de 45°; y como las perpendiculares medias MI y $M'I'$ han de pasar por el centro o, se deduce que el lugar geométrico es una circunferencia tal, que uniendo cada uno de sus puntos con Ao resulten ángulos de 45°; luego la solucion de este caso es semejante á la del ejercicio anterior.

Ejercicio 102.—Siendo ABC un triángulo equilátero ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos M, de modo que resulte siempre MC igual á $MA+MB$?

Esplicacion.—Circunscríbase al triángulo ACB una circunferencia, luégo tómese nn punto cualquiera M de la circunferencia y únase con C, tómese $Ax=AM$ y resultará el triángulo $AxC=AMB$ por ser $Ax=AM$, $AB=AC$, y $ABM=ACM$; luego $Cx=MB$: además el triángulo AMx es equilátero, porqne $AMC=ABC=60°$ y el ángulo $AxM=AMx=60°$, debiendo ser el tercer ángulo tambien de 60° por ser la suma de los dos primeros de $120°$. Así, pues, $MC=Mx+xC=AM+MB$; de donde resulta que el lugar pedido es la misma circunferencia que hemos circunscrito al triángulo dado.

Ejercicio 103.—Hallar el lugar de los puntos de concurso de las alturas de los triángulos que tienen la misma base y el mismo ángulo en el vértice.

Esplicacion.—El ángulo x formado por las perpendiculares trazadas á los lados opuestos del triángulo, desde los dos estremos de la base BC, es suplemento de A; luego todos los puntos x, x'..... del lugar geométrico son puntos de una circunferencia que, unidos con los estremos de la recta BC, forman ángulos iguales al suplemento de A, cantidad constante. Cuestion que yá queda resuelta en ejercicios anteriores.

Ejercicio 104.—Los piés de las perpendiculares bajadas de un punto cualquiera de una circunferencia sobre los tres lados de un triángulo inscrito en esta circunferencia, están en línea recta.

Esplicacion.—Sean Pn, Pm, Pr, las perpendiculares bajadas desde el punto P de la circunferencia á los tres lados del triángulo ABC. El ángulo nPr será suplemento de B; empero el ángulo APC tambien es suplemento de B, por estar el cuadrilátero $APCB$ inscrito á la circunferencia; luego $nPr = APC$; quitando de ambos miembros la cantidad angular APr, resulta, $nPA = rPC$.

Ahora, por los cuatro puntos A, n, P, m, puede pasar una circunferencia, por ser los ángulos opuestos n y m rectos, y en su virtud suplementarios.

Una razon análoga nos manifiesta que por los puntos P, m, r, C, puede pasar otre circunferencia, siendo P, C un diámetro; así, pues, $nPA = nmA$ y $rPC = rmC$; pero, como ántes hemos probado que $nPA = rPC$, resulta $nmA = rmC$; y siendo Am y mC una misma recta, dedúcese que nm y mr deben estar tambien en línea recta, siendo esta recta la que une los piés de las perpendiculares bajadas desde el punto P de la circunferencia á los tres lados del triángulo ABC.

Ejercicio 105.—Siendo o y o' dos circunferencias tangentes interiormente en el punto A, y siendo BC una cuerda de la circunferencia mayor, tangente en D á la menor; debe resultar que la recta AD sea la bisectriz del ángulo BAC.

Esplicacion.—Trazando el radio Do' y por o una paralela oE á Do'; el punto E será el punto medio del arco BEC, porque siendo $o'D$ perpendicular á BC, la Eo tambien lo será por ser las rectas Eo y Do' paralelas: luego E es punto medio de BEC. Ahora, si demostramos que los puntos E, D, A, se hallan en línea recta, tendremos que siendo $EAB = EAC$ por ángulos inscritos que abrazan iguales arcos, la recta AE será la bisectriz del ángulo CAB.

Para probar que los puntos E, D, A, están en línea recta, se tiene;

$$Do'A = EoA,$$

y como el triángulo $Do'A$ es isósceles, resulta;

$$(1)\ DAo' = \frac{180^0 - Do'A}{2}.$$

Uniendo ahora A con E, se formará otro triángulo isósceles EoA, cuyo ángulo EAo vendrá representado por

$$(2)\ EAo = \frac{180^0 - EoA}{2};$$

y como los segundos miembros de las igualdades (1) y (2) son iguales por ser $Do'A = EoA$, resulta

$$DAo' = EAo;$$

de consiguiente DA y EA forman una misma línea recta, que es lo que nos faltaba probar.

Ejercicio 106.—Una circunferencia o toca á dos circunferencias o' y o'' en los puntos A y B; si se prolonga la cuerda AB hasta su segundo punto de encuentro C con la circunferencia o'': Demostrar que los dos radios $o'A$ y $o''C$ son paralelos; luego, supuesto que la recta $o'o''$ encuentra á las circunferencias en los puntos E y D, demostrar en segundo lugar que el cuadrilátero $ABED$ es inscriptible.

Esplicacion.—Como los triángulos ABo y $Bo''C$ son isósceles, y los ángulos en B iguales por opuestos por el vértice, resulta que las rectas Ao y Co'' son paralelas, ó sea Ao' y $o''C$.

Ahora, si los ángulo DEB y DAB son suplementarios, el cuadrilátero $DABE$ será inscriptible. El ángulo BEG tiene por suplemento á $EGB + EBG$; y el ángulo DAB tiene por suplemento á $EGB + o'DA$; pero los ángulos EBG y $o'DA$ son iguales, porque el ángulo EBG ó EBC es mitad del ángulo central $Eo''C$; pero $Eo''C = Go'A$ y $Go'A$ es doble de $o'DA$, por ser el triángulo $Do'A$ isósceles; luego $o'DA = EBG$, y como anteriormente hemos hallado ser BEG suplemento de $EGB + EBG$, y DAB suplemento de $EGB + o'DA$, siendo $o'DA = EBG$

resulta $BEG = DAB$, ó sea, DEB suplemento de DAB y en su consecuencia, el cuadrilátero $ABED$ inscriptible.

Ejercicio 107.—Siendo C el punto medio de un arco AB y el punto D un punto cualquiera del mismo; demostrar que $AC + BC > AD + BD$.

Esplicacion.—Prolongando AC en una cantidad $Cn = CB$, siendo $AC = CB$ por ser el punto C medio del arco ACB,

se tiene: $$AC = CB = Cn;$$

luego el triángulo ABn debe ser rectángulo, permitiendo el circunscribirle una circunferencia, cuyo centro sea C. Si tomamos ahora el punto D y prolongamos AD, en una cantidad $Dm = DB$, resulta un triángulo equiángulo con CnB, pues como los dos triángulos nCB y mDB son isósceles, para que sean equiángulos basta con que los ángulos en los vértices D y C sean iguales; y estos en realidad lo son por ángulos ex inscritos que comprenden cada una de ellos la mitad del arco ACB; en este concepto, los ángulos m y n son iguales, y como los lados de estos dos ángulos van á terminar á los extremos de la cuerda AB, siendo n un punto de la circunferencia $ABnp$, se infiere que el punto m, tambien debe pertenecer á la misma circunferencia; así, pues, uniendo el punto m con el centro C de esta circunferencia, tendremos:

$$Am < AC + Cm,$$

ó sea, $$AD + Dm < AC + Cm;$$

y como $$Cm = CB \text{ y } Dm = DB$$

resulta $$AD + DB < AC + CB;$$

ó sea, $$AC + CB > AD + DB,$$

que es lo que queríamos demostrar.

3.ª SECCION.

Líneas proporcionales.

Ejercicio 108.—Si por el punto de interseccion o de las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, se traza la cuerda poq de modo que o sea el punto medio de la cuerda, las partes interceptadas de cuerda por los lados opuestos del cuadrilátero serán iguales.

Esplicacion.—Si la cuerda pq queda dividida en dos partes iguales por el punto o, uniendo este punto con el centro o' debe resultar oo' perpendicular á pq. Ahora, si tomamos los puntos medios de las cuerdas DC, AB, resultarán las rectas CD, ro', AB, so', respectivamente perpendiculares, deduciéndose de todas estas perpendicularidades que los cuadriláteros $moo'r$, $noo's$ deben ser inscriptibles; luego $mro = mo'o$, (1) por ángulos inscritos que abrazan el mismo arco, así como, por igual razon, debe resultar $oo'n = osn$. (2)

Mas los triángulos Dor Aos son equiángulos por ser semejantes, lo que es fácil probar; pues siendo semejantes los triángulos DoC AoB

dán $$\frac{DC}{AB} = \frac{Do}{Ao}$$

cuya proporcion puede reducirse á

$$\frac{\frac{DC}{2}}{\frac{AB}{2}} = \frac{Do}{Ao};$$

ó sea, $$\frac{Dr}{As} = \frac{Do}{Ao};$$

luego los dos triángulos *Dro* y *Aos* tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual, por ser ángulo homólogo de los dos triángulos semejantes *DoC* y *AoB*; así, pues, los triángulos *Dor* y *Aos* siendo semejantes, son equiángulos; en su virtud dán $mro = osn$; comparando esta igualdad con (1) y (2) resulta $mo'o = oo'n$, lo que nos dice que los dos triángulos rectángulos moo' y $oo'n$, son iguales por tener el cateto oo' comun y los ángulos en o' respectivamente iguales; de suerte que $mo = on$, y como $op = oq$ se tiene, por fin, $pm = nq$.

Ejercicio 109.—Una circunferencia gira, sin resbalar, en el interior de otra circunferencia de radio doble; determinar cuál es el lugar geométrico descrito por un punto de la circunferencia interior.

Esplicacion.—El ángulo

$$ao''b = o''ob + obo'',$$

y como $$oo'' = o''b,$$

resulta $$ao''b = 2o''ob = 2aoc.$$

Ahora bien, al arco ac le corresponde el ángulo aoc, y al ab el ángulo $ao''b$; pero como el arco ab corresponde á una circunferencia mitad de o, y el ángulo aoc es mitad de $ao''b$, resulta que los arcos ab y ac son iguales; pues si bien el ángulo $ao''b$ es doble de aoc, en cambio el radio de la circunferencia o''es mitad de la de o; de suerte, que haciendo girar la circunferencia menor sobre la mayor desde el punto comun, a, el punto b vendrá en c; luego b es el punto c en la segunda posicion, de donde se infiere que el punto c de la circunferencia menor girando al rededor de la mayor, irá determinando siempre puntos del diámetro cn.

Ejercicio 110.—Dado un paralelógramo $ABCD$, si por el vértice A se traza una recta cualquiera que corte á los lados BC y DC prolongados en M y N; Demostrar que el producto $BM \times DN$ es constante.

Esplicacion.—Los triángulos ADN y ABM son semejantes, porque $1=1$, $2=2$,

luego $$\frac{AD}{DN}=\frac{MB}{AB},$$

de donde se deduce que

$$AD\times AB=DN\times BM;$$

y como $AD\times AB$ es una cantidad constante, resulta que $DN\times BM$ tambien lo será.

Ejercicio 111.—Dado un paralelógramo, por un punto P tomado sobre la diagonal AC, trácese una recta cualquiera que corte á los lados BC y AB prolongado en N y M; AD y DC en M' y N': Demostrar quelos dos productos $PM\times PN$ y $PM'\times PN'$ son iguales.

Esplicacion.—Los triángulos APM y $N'PC$ son semejantes, luego $$\frac{AP}{PM}=\frac{PC}{PN'};$$

los triángulos APM' y PCN tambien lo son, y dán

$$\frac{AP}{PM'}=\frac{PC}{PN}.$$

De estas dos proporciones resulta

$$\frac{PM}{PM'}=\frac{PN'}{NP};$$

ó sea, $$PM\times PN=PM'\times PN'.$$

Ejercicio 112.—Dada una circunferencia y un diámetro AB, las tangentes AM y BN, á los estremos de este diámetro; y luégo dado un punto fijo P en el diámetro AB, si se junta el punto P con un punto cualquiera C de la circunferencia, y por el punto C se traza uno recta perpendicular á PC, esta recta encontrará á las dos tangentes fijas en dos puntos M y N; Demostrar que el producto $AM \times BN$ es constante.

Esplicacion.—Por ser MN perpendicular á PC, el cuadrilátero $PBNC$ es inscriptible, y resulta:

$$NCB = NPB.$$

Por ser PC perpendicular á MN, resulta tambien el cuadrilátero $APCM$ inscriptible, y por consiguiente

$$ACP = AMP;$$

y como ACB es un ángulo recto lo mismo que PCN, resulta

$$ACP = NCB;$$

luego, en virtud de las igualdades anteriores, resulta

$$NPB = AMP;$$

así, pues, los triángulos rectángulos AMP y PNB son semejantes, y dán

$$\frac{AP}{NB} = \frac{AM}{PB},$$

ó sea, $AP \times PB = AM \times NP =$ constante.

Ejercicio 113.—Dadas dos rectas AB, $A'B'$, un ángulo de grandor constante que gira al rededor de su vértice fijo, y cuyos lados encuentran las rectas dadas respectivamente en M y M'; Demostrar que existen sobre estas rectas puntos fijos o y o', cuyo producto $oM \times o'M'$ es constante.

Esplicacion.—Fórmese con la recta PM' un ángulo igual á *1*, tal como $M'Po'$; y con la recta PM otro, tal como oPM, igual á *2*; de este modo resultan los triángulos oPM, $o'PM'$, semejantes porque tendrán dos ángulos iguales,

luego $Po : oM :: o'M' : Po'$

ó sea, $Po \times Po' = oM \times o'M'$

Si se supone ahora otra posicion de ángulo, tal como $M_1 P M'_1$ los triángulos oM_1P y $o'PM'_1$ tambien serán semejantes, pues el ángulo M_1 valdrá $1-x$; llamando x al ángulo MPM_1. En este supuesto el ángulo $M'_1 P M'$ tambien es igual á x;

luego $$o'M'_1P=2+x,$$

lo mismo que oPM_1 el ángulo $o'PM'_1$ vale $1-x$ lo mismo que oM_1P. De consiguiente los dos triángulos PoM_1 y $Po'M'_1$ que tienen dos ángulos iguales, son semejantes y permiten escribir la proporcion siguiente:

$$oP : oM_1 : : o'M'_1 : Po',$$

así, pues, de lo que antecede resulta

$$Po \times Po' = oM \times o'M' = oM_1 \times o'M'_1 = \ldots. = \text{constante};$$

luego los puntos o y o' son los pedidos.

Ejercicio 114.—Dadas dos circunferencias tangentes interiormente en el punto A, si por un punto cualquiera P de la circunferencia esterior se traza una tangente PM á la circunferencia interior;

Demostrar que la relacion $\dfrac{PA}{PM}$ es constante.

Esplicacion.—Si trazamos el diámetro AC tendremos que los dos triángulos Adb; APC, son semejantes por ser rectángulos y tener un ángulo agudo comun; resultando los lados PC y db paralelos,

luego $$\frac{CA}{Cb}=\frac{PA}{Pd}.$$

Además sabemos que

$$\overline{PM}^2=PA \times Pd:$$

de estas igualdades resulta

$$\overline{PM}^2=PA \times \frac{Cb \times PA}{CA}=\overline{PA}^2 \times \frac{Cb}{CA},$$

ó sea, $$\frac{\overline{PM}^2}{\overline{PA}^2}=\frac{Cb}{CA};$$

luego $$\frac{PM}{PA} = \sqrt{\frac{Cb}{CA}} = \text{constante}.$$

Ejercicio 115.—Dos circunferencias dadas se cortan en dos puntos A y B; si de un punto cualquiera P de una de las circunferencias se traza una tangente PM á la otra; demostrar que la relacion

$$\frac{\overline{PM}^2}{PA \times PB} \text{ es constante.}$$

Esplicacion.—Uniremos el punto P con A y B y tendremos:

$$\overline{MP}^2 = PB \times PC;$$

luego $$\frac{\overline{MP}^2}{PB} = PC. \ (1)$$

Tambien podemos escribir

$$PB \times PC = AP \times DP,$$

de donde $$PC = \frac{AP \times DP}{PB}.$$

Sustituyendo este valor en la igualdad (1)

resulta $$\frac{\overline{MP}^2}{PB} = \frac{AP \times DP}{PB},$$

ó sea, $$\frac{\overline{MP}^2}{PB \times AP} = \frac{DP}{PB}.$$

Cualquiera que sea el punto P que se tome, siempre resulta para el ángulo PDB y DPB la misma cantidad angular; así, todos los triángulos PDB, $P'D'B$ que van resultando segun la posicion del punto P son semejantes, siendo la relacion

$$\frac{DP}{PB} = \text{constante},$$

de donde se infiere que

$$\frac{\overline{MP}^2}{PB \times AP} = \text{constante}.$$

Ejercicio 116.—Dadas dos circunferencias, si luego se describe una nueva circunferencia tangente á las dos primeras; demostrar que la recta que junta los dos puntos de contacto pasa por uno de los centros de semejanza de las dos circunferencias dadas.

Esplicion.—Sea P uno de los centros de semejanza, (cuyo centro de semejanza no es más que el punto donde las dos tangentes esteriores á las dos circunferencias encuentran á la línea de los centros.)

Trácese el rádio vector PB', prolónguense las rectas o'A', y oB, hasta su punto de encuentro en r; y como $4=4$ por ser los lados o'B' y Bo paralelos, y los ángulos en A' iguales por opuestos por el vértice, resultan los dos triángulos B'o'A' y A'rB semejantes; y como B'o'A' es isósceles, tambien lo es A'rB; de modo que rA'=rB. Asi, pues, podemos hacer pasar una circunferencia tangente á las dos circunferencias dadas por los puntos A' y B, estando el centro de la misma en r y pasando la cuerda A'B de los contactos por el centro de semejanza P de las dos circunferencias primeras; facilmente demostraríamos lo mismo para otra secante ó rádio vector cualquiera.

Ejercicio 117.—Determinar el lugar geométrico de puntos tales que trazando tangentes á las dos circunferencias dadas, resultan iguales entre sí.

Esplicacion.—Sea P uno de los puntos pedidos; bajando la perpendicular Pn á la línea de los centros y las tangentes respectivas á las dos circunferencias, se tiene:

$$\overline{AP}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{AO}^2,\quad \overline{PB}^2 = \overline{PO'}^2 - \overline{O'B}^2$$

y como $$AP = PB$$

ó sea, $$\overline{AP}^2 = \overline{PB}^2$$

resulta: $$(1)\ \overline{OP}^2 - \overline{AO}^2 = \overline{PO'}^2 - \overline{O'B}^2;$$

Ahora, de la figura se deduce

$$\overline{OP}^2 = \overline{Pn}^2 + \overline{On}^2,\quad \overline{PO'}^2 = \overline{Pn}^2 + \overline{nO'}^2:$$

sustituyendo en (1) se tiene:

$$\overline{Pn}^2 + \overline{On}^2 - \overline{AO}^2 = \overline{Pn}^2 + \overline{nO'}^2 - \overline{O'B}^2;$$

luego $$\overline{On}^2 - \overline{AO}^2 = \overline{nO'}^2 - \overline{O'B}^2,$$

y trasponiendo términos,

$$\overline{On}^2 - \overline{nO'}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{O'B}^2,$$

ó sea $$(On + nO')(On - nO') = \overline{AO}^2 - \overline{O'B}^2:$$

llamando $$AO = R,\ O'B = r,\ y\ On + nO' = D,$$

resulta $$On - nO' = \frac{R^2 - r^2}{D};$$

conociendo ahora la suma y la diferencia de On y nO', se deduce con facilidad

$$On = \frac{D}{2} + \frac{R^2 - r^2}{2D};$$

Y como el segundo miembro depende de cantidades constantes é independientes de los puntos que se consideran, se infiere que todos los puntos del lugar geométrico deben estar contenidos en la perpendicular nP, cuyo punto n es fácil de determinar conforme la fórmula últimamente hallada.

Ejercicio 118.—Dadas dos circunferencias, si por uno de los centros de semejanza se traza una secante cualquiera que corte á la primera circunferencia en dos puntos *A* y *B* y á la segunda en los puntos *A'* y *B'*; las tangentes trazadas por estos cuatro puntos forman un paralelógramo. Demostrar que una de las diagonales de este paralelógramo pasa por un punto fijo y que la otra coincide con una recta fija indefinida.

Esplicacion.—Trácese el rádio vector SB'; los rádios oA, o'A', y oB, o'B', deben resultar respectivamente paralelos; luégo, trazando lastangentes respectivas á los estremos esteriores de estos rádios, tambien resultarán paralelas dos á dos formándose el cuadrilátero MNPQ que debe ser paralelógramo, supuesto que las tangentes deben ser perpendiculares á los rádios que pasan por los puntos de contacto. Ahora, por ser Mo' y Po, las bisectrices de los ángulos formados por las tangentes; y supuesto que $B'MA'=BPA$ por ser el cuadrilátero MNPQ un paralelógramo,

resulta: $o'MA'=oPA$,

y como $A'MS=APS$,

sumando estas dos igualdades se obtiene $o'MS=oPS$. Si la recta que une MP no encuentra la línea de los centros en S, centro de semejanza, sino en α, tendremos, por ser las rectas o'M y oP paralelas;

$$\frac{o'M}{Po}=\frac{\alpha o'}{\alpha o};$$

y como por lo precedente los triángulos rectángulos o'MA' y PoA deben ser semejantes,

resulta; $$\frac{o'M}{Po}=\frac{R}{r},$$

llamando R y r los rádios respectivos de las dos circunferencias dadas; pero por ser S el centro de semejanza, tambien se tiene:

$$\frac{R}{r}=\frac{So'}{So},$$

luego $$\frac{\alpha o'}{\alpha o}=\frac{So'}{So};$$

ó sea $$\frac{\alpha o'-\alpha o}{\alpha o}=\frac{So'-So}{So};$$

de donde, llamando la distancia de los centros $oo'=D$,

se obtiene $$\frac{D}{\alpha o}=\frac{D}{So}$$

deduciéndose que $\alpha o=So$. Asi, pues, la recta MP ha de pasar forzosamente por el punto fijo S que no es mas que el centro de semejanza esterior á las dos circunferencias o y o'.

En cuanto á la diagonal NQ, observaremos que el triángulo A'BQ es isósceles, en virtud de la relacion de ángulos que existe entre los dos de este triángulo y los de los triángulos isósceles MB'A' y BPA; asi, pues, las tangentes QA' y QB son iguales: Ahora, como una cosa análoga podríamos probar respecto del triángulo NB'A, resulta que las tangentes trazadas desde los puntos N y Q á las dos circunferencias dadas son respectivamente iguales; y como tomando otro rádio vector resultarian otros dos puntos que gozarian de las mismas propiedades que los dos hallados anteriormente, de aquí se infiere que el lugar geométrico de las diagonales NQ, N'Q'...., que se pueden concebir segun la posicion de los rádios vectores, son todos puntos de aquella recta que hemos encontrado en el ejercicio anterior, cuyos tangentes trazados á las dos circunferencias dadas son iguales; luego la segunda diagonal coincide con una recta fija é indefinida.

Ejercicio 119.—Si se inscribe en una circunferencia un cuadrilátero *ABCD*, cuyos dos lados contiguos *AB*, *BC*, sean iguales, y se trazan luégo las diagonales *BD*, *AC*, que se corten en n: demostrar que cada uno de los lados iguales es medio proporcional entre la diagonal entera *BD*, y el segmento adyacente *Bn*.

Esplicacion.—Trácese el diámetro que pasa por B y se tendrá: $\overline{BC}^2 = BE \times Bm$; pero los triángulos rectángulos Bmn, BDE son semejantes, luego BE:Bn::BD:Bm, de donde $BE \times Bm = BD \times Bn$. Sustituyendo este nuevo valor en la igualdad anterior tendremos $\overline{BC}^2 = Bn \times BD$. Siguiendo la misma marcha obtendríamos tambien $\overline{AB}^2 = Bn \times BD$.

Ejercicio 120.— En todo triángulo rectángulo, el producto de los dos catetos es igual al producto de la hipotenusa por la perpendicular trazada, desde el vértice del ángulo recto á dicha hipotenusa.

Esplicacion.—Se sabe que $\overline{AB}^2 = AC \times An$; $\overline{BC}^2 = AC \times nC$. Multiplicando estas igualdades se tendrá $\overline{AB}^2 \times \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \times An \times nC$ pero $\overline{Bn}^2 = An \times nC$; sustituyendo este valor en la igualdad anterior, resulta $\overline{AB}^2 \times \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \times \overline{Bn}^2$ Estrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros se obtiene $AB \times BC = AC \times Bn$ que es lo que nos habíamos propuesto probar.

Ejercicio 121.—En un triángulo cualquiera, la suma de dos cuadrados de dos lados cualesquiera es igual al doble del cuadrado de la mitad del tercer lado, más el doble del cuadrado de la mediana correspondiente á este tercer lado.

Esplicacion.—Uniendo C con el punto n medio de la recta AB, se tiene

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AC}^2=\overline{An}^2+\overline{nC}^2+2\,An\times nm\\ \overline{CB}^2=\overline{nC}^2+\overline{nB}^2-2nB\times nm\end{array}\right\}\text{Sumando y simplificando}$$

resulta $$\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=\overline{2An}^2+\overline{2nC}^2$$

Ejercicio 122.—La diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al doble producto del tercer lado por la proyeccion sobre este lado de la mediana correspondiente.

Esplicacion.—Sea *n* el punto medio de la base *AB*, tendremos

$$\overline{AC}^2=\overline{An}^2+\overline{nC}^2+2An\times nm$$
$$\overline{CB}^2=\overline{nB}^2+\overline{nC}^2-2nB\times nm$$

Restando y simplificando estas dos igualdades,

resulta: $$\overline{AC}^2-\overline{CB}^2=4\,An\times nm;$$

y como $$2\,An=AB,$$

se tiene $$\overline{AC}^2-\overline{CB}^2=2\,AB\times nm.$$

Ejercicio 123.—Determinar las medianas de un triángulo cuyos tres lados son conocidos.

Esplicacion.—Por lo que se ha dicho en ejercicios anteriores,

se tiene: $$b^2+c^2=2m^2+2\left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

luego; $$2m^2=b^2+c^2-\frac{a^2}{2}=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{2},$$

resultando para m el valor siguiente:

$$m=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

Directamente, ó por analogía, pueden deducirse los valores de las otras medianas m' m''; así, pues,

tendremos $$m'=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2};$$

$$m''=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

Ejercicio 124.—En todo cuadrilátero la suma de los cuadrados de los cuatro lados es igual á la suma de los cuadrados de las dos diagonales, más cuatro veces el cuadrado de la recta que une los puntos medios de estas diagonales.

Esplicacion.—Considerando los triángulos DBC y ADC conforme lo que precede en ejercicios anteriores, y siendo n y m los puntos medios de las diagonales AB y DC.

resulta: $$\left.\begin{aligned}\overline{AD}^2+\overline{AC}^2&=2\overline{An}^2+2\overline{Dn}^2\\ \overline{DB}^2+\overline{CB}^2&=2\overline{nB}^2+2\overline{Dn}^2\end{aligned}\right\}\text{ Sumando}$$

$$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{An}^2+\overline{nB}^2)+4\overline{Dn}^2.$$

En el triángulo AnB

se tiene $$\overline{An}^2+\overline{nB}^2=2\overline{mn}^2+2\overline{Am}^2;$$

luego

$$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=2(2\overline{nm}^2+2\overline{Am}^2)+4\overline{Dn}^2$$

$$=4\overline{nm}^2+4\overline{Am}^2+4\overline{Dn}^2;$$

y como; $$2\,Dn=DC,\ 2\,Am=AB$$

se tiene por fin:

$$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{DC}^2+\overline{AB}^2+4\overline{nm}^2.$$

Si el cuadrilátero es un paralelógramo, la recta *mn* se reduce á cero, resultando:

$$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{DC}^2+\overline{AB}.^2$$

Ejercicio 125.—Determinar la altura de un triángulo en funcion de sus tres lados.

Esplicacion.—Del triángulo *ADC,*

resulta $(1)\ h^2=b^2-DC^2,$

llamando $DA=h,\ AC=b.$

El triángulo ABC dá;

$$c^2=b^2+a^2-2a\times CD;$$

luego $CD=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2a},$

sustituyendo este valor en (1) resulta:

$$h^2=b^2-\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}\right)^2=\frac{4a^2b^2-(b^2+a^2-c^2)^2}{4a^2};$$

en virtud de un teorema de aritmética se deduce

$$h^2=\frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)\,(2ab-b^2-a^2+c^2)^2}{4a^2}=$$

$$\frac{(\,(a+b)^2-c^2)\,(c^2-(a-b)^2\,)}{4a^2}=$$

$$\frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(c+a-b)\,c-a+b)}{4a^2}\ (2)$$

Llamando $a+b+c=2p,$

se obtiene $a+b-c=2(p-c);$

$$c+a-b=2\,(p-b):\ c+b-a=2\,(p-a).$$

Sustituyendo estos nuevos valores en (2) tendremos

$$h^2=\frac{2p\times 2\,(p-c)\times 2\,(p-b)\,2\times(p-a)}{4a^2};$$

luego $$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

y por analogía se podrán obtener los valores de las otras alturas.

$$h' = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

y $$h'' = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ejercicio 126.—Calcular el radio de la circunferencia circunscrita á un triángulo en funcion de los tres lados del mismo.

Esplicacion.—Trazando el diámetro que pasa por C, se tiene que el triángulo rectángulo EBC será semejante con ABn, siendo Bn perpendicular á AC pues los ángulos agudos BEC y BAC son iguales:

luego $$\frac{EC}{BC} = \frac{AB}{Bn},$$

de donde

(llamando $oC = r$, $Bn = h$, $BC = a$ y $AB = c$),

resulta $$\frac{2r}{a} = \frac{c}{h}$$

ó sea, $$r = \frac{ac}{2h}$$

y como $$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

se tiene: $$r = \frac{ac}{2 \times \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}};$$ ó sea

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}.$$

Ejercicio 127.—En todo cuadrilátero inscriptible el producto de las diagonales es igual á la suma de los productos de los lados opuestos.

Esplicacion.—Fórmese el ángulo *ADn* igual á *CDB*, y como

$$DAC = DBC,$$

resultan los dos triángulos *ADn* y *DCB* semejantes, por tener dos ángulos iguales;

luego
$$\frac{AD}{An} = \frac{DB}{BC};$$

por otra parte, los triángulos *DnC* y *ADB* son semejantes tambien, por cuanto

$$CDn = ADB \text{ y } DCn = DBA;$$

luego
$$\frac{DC}{Cn} = \frac{DB}{BA}.$$

De esta proporcion y de la anterior

$$\frac{AD}{An} = \frac{DB}{BC}$$

resulta
$$DC \times BA = Cn \times DB,$$
$$AD \times BC = An \times DB.$$

Sumándolas se obtiene:

$$AD \times BC + DC \times BA = An \times DB + Cn \times DB = DB\,(An + Cn);$$

luego
$$AD \times BC + DC \times BA = DB \times AC.$$

Ejercicio 128.—En todo cuadrilátero inscriptible, la relacion de las diagonales es igual á la relacion entre la suma de los productos de los lados que van á terminar en las estremidades de la primera diagonal y la suma de los productos de los lados que van á terminar en los estremos de la segunda diagonal.

Esplicacion.—Tomando $AD' = DC$ y $A'D = AB$, tendremos dos cuadriláteros inscritos que, segun el ejercicio anterior, permitirán escribir.

$$AC \times BD' = AB \times CD' + AD' \times CB.$$

$$A'C \times BD = A'B \times DC + A'D \times BC.$$

Dividiendo respectivamente estas dos igualdades y fijándose en que

$$BD' = CA', \; CD' = BA' = AD, \; AD' = CD, \; DA' = AB,$$

resulta $$\frac{AC \times CA'}{A'C \times BD} = \frac{AB \times AD + CD \times CB}{AD \times DC + AB \times BC},$$

ó sea $$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \times AD + CD \times CB}{AD \times DC + AB \times BC}.$$

Ejercicio 129.—Calcular las diagonales de un cuadrilátero inscripto en funcion de los cuatro lados a, b, c, d, del cuadrilátero.

Esplicacion.—Segun los ejercicios que preceden podemos escribir

$$x\,y = ac + bd;$$

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{dc + ab}.$$

Multiplicando estas dos igualdades

resultará $$x^2 = (ac + bd) \times \frac{ad + bc}{dc + ab};$$

luego $x = \sqrt{\dfrac{(ac + bd)\,(ad + bc)}{dc + ab}}$.

Dividiendo las mismas igualdades que antes habíamos multiplicado,

resulta; $$\frac{x\,y}{\dfrac{x}{y}} = \frac{ac + bd}{\dfrac{ad + bc}{dc + ab}};$$

luego, $$y^2 = \frac{(ac + bd)\,(dc + ab)}{ad + bc}$$

ó sea, $$y = \sqrt{\frac{(ac + bd)\,(dc + ab)}{ad + bc}}.$$

Ejercicio 130.—Determinar las condiciones bajo las cuales la bisectriz interna y esterna de un triángulo corta al lado opuesto del mismo.

Esplicacion.—Trazando por *A* una paralela *AD* á la bisectriz interna *Bn*

tendremos, $$\frac{DB}{BC} = \frac{An}{nC};$$

y como el triángulo *ABD* es isósceles, como se desprende fácilmente de la figura

resulta, $$DB = AB$$

valor que, sustituido en la igualdad anterior

nos dá, $$\frac{AB}{CB} = \frac{An}{nC} \quad (1).$$

Ahora, si por el punto *B* trazamos una recta perpendicular á la bisectriz interna *Bn*, nos determinará la direccion de la bisectriz esterna, la cual corta á la prolongacion de la base en el punto P. Levantando por los puntos *A* y *C* perpendiculares á la recta PQ, bisectriz esterna, resultan dos triángulos rectángulos *RAB* y *BCS* que deben ser semejantes por ser

$2=2$ como complementos de los ángulos iguales $1=1$; así podemos escribir

$$\frac{AR}{CS}=\frac{AB}{BC}.$$

Mas los triángulos *PRA* y *PCS*, tambien son semejantes, los cuales permiten establecer la proporcion siguiente:

$$\frac{AR}{CS}=\frac{PA}{PC},$$

y de esta proporcion y de la anterior resulta:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{PA}{PC}.$$

Y si, por fin, comparamos esta proporcion con la que habia resultado respecto la bisectriz interna (1) se tendrá:

$$\frac{An}{nC}=\frac{PA}{PC}.$$

Los puntos n, y P, dividen la recta *AC* armónicamente, y estos puntos *n* y *P* no son más que los piés de la bisectriz interna y esterna de un triángulo cuya base es la recta *AC*. hallándose los otros dos lados *AB* y *BC* bajo una relacion establecida. Así, pues, de lo que antecede se deduce que si se quiere tener el lugar geométrico de los vértices de varios triángulos cuyas bisectrices interna y esterna terminen en *n* y *P*, tomando por base del triángulo, *AC;* basta describir una circunferencia siendo el diámetro *Pn;* supuesto que el punto *B* y otros que podríamos hallar no son más que vértices de diferentes triángulos rectángulos cuya hipotenusa comun es *Pn*. Los puntos *P* y *n* se llaman puntos conjugados de los estremos de la recta *AC*.

Ejercicio 131.—Probar como el producto de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado de la bisectriz de su ángulo aumentado en el producto de los dos segmentos que esta bisectriz determina sobre el tercer lado.—Modificacion que debe sufrir el enunciado cuando se considera la bisectriz externa.

Esplicacion.—Sea el triángulo ABC, la bisectriz interna AE: el punto E es el punto medio del arco BEC, de la circunferencia circunscrita al triángulo dado.

Los triángulos ABE y DAC serán semejantes por ser $1=1$ y $BEA=BCA$; luego podremos escribir

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC},$$

de donde

$$AB\times AC=AD\times AE=AD\times(AD+DE)=\overline{AD}^2+AD\times DE;$$

pero $$AD\times DE=BD\times DC,$$

luego $$AB\times AC=\overline{AD}^2+BD\times DC.$$

Si la bisectriz es esterna, AD'; los triángulos ACD' y ABE' resultan semejantes por ser $(2=2)$, por complementos de ángulos iguales $(1=1)$, y además $BE'A=ACD'$. Así, pues, podremos establecer la proporcion

$$\frac{AB}{AE'}=\frac{AD'}{AC},$$

ó sea,

$$AB\times AC=AE'\times AD'=AD'(E'D'-AD')=AD'\times E'D'-\overline{AD'}^2;$$

pero $$AD'\times E'D'=D'C\times BD',$$

luego $$AB\times AC=D'C\times BD'-\overline{AD'}^2,$$

de cuyo resultado se infiere que el producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de los dos segmentos en que la bisectriz del ángulo externo divide al tercer lado disminuido en el cuadrado de esta bisectriz.

Ejercicio 132.—Determinar las longitudes de las bisectrices internas y externas de un triángulo en funcion de los tres lados de dicho triángulo.

Esplicacion.—Segun hemos demostrado en el ejercicio anterior, resulta (1) $bc=x^2+CD\times CB$; por ser la recta $AD=x$ la bisectriz interna. Además se tiene:

$$\frac{DB}{c}=\frac{CD}{b}$$

luego

$$\frac{DB+CD}{b+c}=\frac{DB}{c} \text{ ó } \frac{DB+CD}{b+c}=\frac{CD}{b},$$

y como $DB+CD=a$ resulta

$$DB=\frac{ac}{b+c}, \quad CD=\frac{ab}{b+c}.$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (1) se tiene:

$$bc=x^2+\frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

de donde $$x^2=\frac{bc\,(b+c)^2-a^2bc}{(b+c)^2},$$

ó $$x^2=\frac{bc\,((b+c)^2-a^2)}{(b+c)^2}=\frac{bc\,((b+c+a)\,(b+c-a))}{(b+c)^2}.$$

Si $a+b+c=2p$, resulta $b+c-a=2\,(p-a)$; luego tendremos, por fin,

$$x=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)}.$$

Por analogía se puede obtener

$$u=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp\,(p-b)}$$

y $$z=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp\,(p-c)}.$$

Para la bisectriz esterna x′ tendremos, segun el ejercicio anterior,

$$bc = EB \times EC - x'^2 \quad (2)$$

Ahora, por ser AE=x′ la bisectriz esterna, sabemos que puede escribirse

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC},$$

ó sea

$$\frac{EB-EC}{EB} = \frac{AB-AC}{AB}, \qquad \frac{EB-EC}{EC} = \frac{AB-AC}{AC},$$

y como EB — EC=a, resulta

$$EB = \frac{ca}{c-b}, \qquad EC = \frac{bc}{c-b}.$$

Sustituyendo estos valores en (2) tendremos

$$bc = \frac{a^2bc}{(c-b)^2} - x'^2;$$

luego $$x'^2 = \frac{a^2bc}{(c-b)^2} - bc,$$

ó sea

$$x' = \frac{1}{c-b}\sqrt{bc\,(a^2-(c-b)^2)} =$$

$$= \frac{2}{c-b}\sqrt{bc\,(p-b)\,(p-c)}$$

Por analogía se obtienen los valores de las otras dos bisectrices u′ y z′

$$u' = \frac{2}{c-a}\sqrt{ac\,(p-a)\,p-c),}$$

$$z' = \frac{2}{b-a}\sqrt{ab\,(p-a)\,(p-b)}.$$

Ejercicio 133.—Siendo d la longitud de una recta BA, M, y M' los puntos conjugados que la dividen en la relacion $\frac{a}{b}$; demostrar las relaciones siguientes.

$$MA = \frac{ad}{a+b},\ MB = \frac{bd}{a+b}.$$

$$M'A = \frac{ad}{a-b},\ M'B = \frac{bd}{b-a}\ \text{si } a > b.$$

$$M'A = \frac{ad}{b-a},\ M'B = \frac{bd}{b-a}\ \text{si } a < b.$$

Esplicacion.—Sea la base AB y los lados AC y CB que se hallan en la relacion $\frac{a}{b}$; trazando la bisectriz interna y esterna del ángulo C, tendremos en M y M' los puntos conjugados de la recta AB que se hallarán en la relacion $\frac{a}{b}$: así, pues, segun lo que ya sabemos, podremos escribir

$$\frac{MA}{MB} = \frac{a}{b}$$

y segun principios de la Aritmética

$$\frac{MA + MB}{MA} = \frac{a+b}{a},$$

ó tambien $$\frac{MA + MB}{MB} = \frac{a+b}{b},$$

y como $$MA + MB = AB = d$$

resulta: $$MA = \frac{da}{a+b},\quad \text{y}$$

$$MB = \frac{db}{a+b}.$$

Considerando la bisectriz esterna

se deduce, $\frac{M'A}{M'B} = \frac{a}{b}$,

y segun la Aritmetica se tiene,

$$\frac{M'A - M'B}{M'A} = \frac{a-b}{a},$$

ó tambien $\frac{M'A - MB}{M'B} = \frac{a-b}{b}$,

y como $M'A - M'B = AB = d$,

resulta: $M'A = \frac{ad}{a-b}$; y

$$M'B = \frac{bd}{a-b}.$$

Esto en el supuesto de ser $a > b$.

Si la figura guarda la posicion (figura 2.ª),

se tiene, $\frac{M'B}{M'A} = \frac{b}{a}$;

luego $\frac{M'B - M'A}{M'A} = \frac{b-a}{a}$,

ó tambien $\frac{M'B - M'A}{M'B} = \frac{b-a}{a}$,

y como $M'B - M'A = d$

resulta: $M'A = \frac{ad}{b-a}$, y

$$M'B=\frac{bd}{b-a}.$$

Esto cuando $a<b$.

Ejercicio 134.—Siendo o el punto medio de una recta *BC* y *M*, M′ los puntos conjugados con relacion á esta recta, demostrar directamente la relacion

$$\overline{oB}^2=oM\times oM'.$$

Si, *I*, es el punto medio de *MM′* demostrar al mismo tiempo que

$$\overline{IM}^2=IB\times IC.$$

Esplicacion.—Por ser *M* y *M′* los puntos conjugados de la recta *BC* resulta:

$$\frac{BM}{MC}=\frac{BM'}{CM'}.$$

Segun se desprende de la figura se tiene,

$$\frac{Bo+oM}{oC-oM}=\frac{Bo+oM'}{M'o-oC}:$$

recordando, ahora, que suma de antecedente y consecuente de la primera razon es á su diferencia, como suma de antecedente y consecuente de la segunda razon es tambien á su diferencia, y á más no olvidando que $Bo=oC$. se tiene, por fin,

$$\frac{2Bo}{2oM}=\frac{2oM'}{2Bo},$$

de lo cual se deduce,

$$\overline{Bo}^2=oM\times oM'.$$

Para probar la segunda parte de este ejercicio nos valdremos de la misma proporcion anterior, esto es:

$$\frac{BM}{CM}=\frac{BM'}{CM'}.$$

Segun se deduce de la figura, esta proporcion puede convertirse en la siguiente:

$$\frac{IB-MI}{IM-CI}=\frac{BI+IM'}{CI+IM'},$$

ó sea,
$$\frac{IB-MI}{IB+IM'}=\frac{MI-CI}{M'I+CI}.$$

Atendiendo á las mismas consideraciones del caso anterior y recordando que $IM'=IM$, resulta:

$$\frac{2IB}{2IM}=\frac{2MI}{2CI},$$

ó sea,
$$\overline{IM}^2=IB\times IC.$$

Ejercicio 135.—Siendo M y M' dos puntos conjugados con relacion á la recta *BC*, demostrar la relacion

$$\frac{2}{BC}=\frac{1}{BM}+\frac{1}{BM'}.$$

Esplicacion.—Desde luego podemos escribir

$$\frac{BM}{MC}=\frac{M'B}{M'C};$$

en su virtud
$$BM\times M'C=MC\times M'B.$$

Esta igualdad puede transformarse en

$$BM\times(BM'-BC)=BM'(CB-BM),$$

ó sea,
$$2BM\times BM'=BM'\times CB+BM\times CB.$$

Dividiendo ambos miembros de esta igualdad por

$$BC \times BM \times BM',$$

resulta:

$$\frac{2}{BC} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{BM'}.$$

Ejercicio 136.—Demostrar que si se trazan entre dos lados de un triángulo una serie de paralelas á la base, la mediana que corresponde á esta base, es el lugar geométrico de los puntos de interseccion de las diagonales de los trapecios así obtenidos.

Esplicacion.—Sea *Cm* la mediana de la base del triángulo *ACB*, tracemos la *ab* paralela á *AB*, y como los triángulos *ABC* y *abC* son semejantes, dan

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{aC}.$$

Los triángulos *AmC* y *anC* tambien son semejantes, y nos dan

$$\frac{AC}{aC} = \frac{Am}{an};$$

deduciéndose de estas dos últimas proporciones

$$\frac{AB}{ab} = \frac{Am}{an};$$

y como $$Am = \frac{1}{2} AB$$

resulta que $$An = \frac{1}{2} ab.$$

Uniendo ahora *b* con A resultan dos triángulos semejantes *onb* y Aom, por ser las rectas *nb* y *Am* paralelas; luego

$$\frac{Am}{nb} = \frac{om}{on}:$$

Uniendo luégo *a* con *B*, y en el supuesto de que esta recta corte á Cm en el punto o' distinto de o, tendremos que por ser los triángulos $ao'n$, $o'mB$ semejantes, dan

$$\frac{mB}{an}=\frac{mo'}{o'n};$$

y como $$Am=mB \text{ y } an=nb$$

de las dos últimas proporciones se obtiene,

$$\frac{mo}{no}=\frac{mo'}{o'n}$$

cuya proporcion puede transformarse en

$$\frac{mo+on}{on}=\frac{mo'+o'n}{o'n};$$

y como $$mo+on=mo'+o'n,$$

se tiene $on=o'n$, lo que nos dice que el punto o' ha de ser el mismo punto o, sopena de caer en un absurdo manifiesto; luego las diagonales del trapecio ABba se cortan en un punto de la mediana.

Lo mismo se probaria por otra paralela á la base.

Hay que advertir que este ejercicio se podria demostrar tambien de una manera ingeniosa por medio de la teoría de los polos y polares, lo que dejamos á la discrecion del Profesor.

Ejercicio 137.—Hallar el lugar geométrico de varios puntos de un plano igualmente iluminados por dos focos colocados en este plano y cuyas intensidades á la unidad de distancia están representadas por las cantidades a y b.

Esplicacion.—Para probar este ejercicio debidamente, es forzoso conocer un principio de Física, el cual dice que *la intensidad de los rayos luminosos está en razon inversa del cuadrado de las distancias*. Así, pues, siendo a y b las intensidades respectivas de los dos focos luminosos resultará, llamando d la distancia ab, y, x la distancia an.

$$\frac{a}{b}=\frac{(d-x)^2}{x^2}=\frac{nb^2}{an^2}.$$

Si hallamos ahora puntos cuya distancia á los puntos *a* y *b* estén en la relacion $\frac{nb}{na}$, serán puntos del lugar geométrico; pues suponiendo que *n'* sea uno de estos, tendremos:

$$\frac{n'b}{n'a}=\frac{nb}{na};$$

luego,

$$\frac{\overline{n'b}^2}{\overline{n'a}^2}=\frac{\overline{nb}^2}{\overline{na}^2},$$

de donde

$$\frac{a}{b}=\frac{\overline{n'b}^2}{\overline{n'a}^2}.$$

Así, pues, todos los puntos pedidos, no son más, segun se deduce de lo dicho en ejercicios anteriores, que puntos de una circunferencia cuyo diámetro sea la distancia de los dos puntos conjugados de la recta ab, dividida ésta conforme la relacion

$$\frac{nb}{an}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

de cuya fórmula se deduce:

$$\frac{ab}{an}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}, \text{ ó sea; } an=\frac{d\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

para determinar el punto *n*.

Ejercicio 138.—Hallar en el plano determinado por tres focos luminosos, el punto igualmente iluminado por cada uno de ellos.

Esplicacion.—Suponiendo las intensidades respectivas *a*, *b*, *c*, hallaremos los puntos conjugados de la recta *ab* conforme el valor

$$an=\frac{d\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \qquad am=\frac{d\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

quedando así determinada la circunferencia que pasa por los puntos conjugados m y n de ab. De una manera parecida determinaremos la circunferencia cuyo diámetro es $m'n'$, considerando estos puntos $m'n'$ relacionados con b y c siendo b y c las intensidades respectivas de estos dos focos luminosos. De modo, que el punto pedido vendrá determinado, como es fácil de comprender, por la interseccion de las dos circunferencias que hemos trazado anteriormente.

Ejercicio 139.—Hallar el lugar geométrico de los puntos que dividen en una misma relacion dada $\frac{m}{n}$ todas las rectas comprendidas entre un punto dado A y una circunferencia dada o.

Esplicacion.—Dividamos la recta Ao en la relacion $\frac{m}{n}$ segun el punto P: trácese luégo una recta cualquiera AM dividiéndola en la misma relacion $\frac{m}{n}$ en el punto Q, y tendremos que por ser los triángulos AQP y AoM semejantes, nos darán

$$\frac{AP}{Ao}=\frac{PQ}{Mo}=\frac{m}{m+n}.$$

Tomando una nueva secante AM' resultará, por razones pa recidas á las anteriores,

$$\frac{AP}{Ao}=\frac{PQ'}{oM'}=\frac{m}{m+n};$$

luego $$\frac{QP}{Mo}=\frac{PQ'}{oM'}=\ldots\ldots$$

y como $$Mo=oM'=\ldots\ldots$$

resulta: $$QP=Q'P=\ldots\ldots$$

De manera, que el lugar geométrico pedido de los puntos

Q, Q'...... será una circunferencia, cuyo centro vendrá determinado por la relacion $\frac{m}{n}$ contada sobre la recta Ao. El radio de la circunferencia del lugar geométrico que se busca vendrá representado por;

$$QP = \frac{m}{m+n} \times Mo.$$

Ejercicio 140.—Hallar el lugar geométrico de puntos, desde donde se vean bajo un mismo ángulo dos círculos dados.

Esplicacion.—Sea el punto *M* uno de los pedidos, y como los ángulos *AMC* y *BMC'* formados por las tangentes deben ser iguales, deben resultar sus mitades *AMo* y *BMo'* respectivamente iguales: luego los triángulos rectángulos *AMo* y *BMo'* son semejantes, de cuya semejanza, llamando *R* y *r* á los radios respectivos de las dos circunferencias, podemos escribir,

$$\frac{R}{r} = \frac{oM}{o'M};$$

y lo mismo resultaria si tomásemos otro punto *M'*; pues se tendria que verificar

$$\frac{R}{r} = \frac{oM'}{o'M'}$$

luego los puntos *M, M'*...... gozan de una propiedad tal, que uniéndolos con los dos puntos *o* y *o'* quedan las rectas que resultan en una relacion constante $\frac{R}{r}$; luego segun lo esplicado en ejercicios anteriores, el lugar pedido será una circunferencia cuyo diámetro sea la distancia de los puntos conjugados de la recta *oo'*, y segun la relacion $\frac{R}{r}$.

Ejercicio 141.—Hallar el punto desde donde se vean bajo un mismo ángulo tres círculos dados.

Esplicacion.—De la primera y segunda circunferencia se deducirá, como en el ejercicio anterior, la circunferencia referente á los puntos conjugados de la recta que une los dos centros de las dos primeras circunferencias dadas; luego se combinará la primera circunferencia, por ejemplo, con la tercera, y se determinará una nueva circunferencia correspondiente á los puntos conjugados de la nueva línea de los centros; y esta última circunferencia combinada con lá que habíamos hallado anteriormente nos dará el punto pedido en el ejercicio.

Ejercicio 142.—Sean dos rectas cualesquiera AB y XY. Si AB se divide en el punto C en la relacion $\frac{m}{n}$ y si de los puntos A, C, B se bajan sobre XY las perpendiculares AA', CC', BB', se tiene,

$$CC'(m+n)=n.\ AA'+m.\ BB'.$$

Esplicacion.—Conforme se desprende de la figura, se vé que los triángulos ArC BCs son semejantes; por consecuencia,

$$\frac{m}{n}=\frac{Ar}{Bs}=\frac{CC'-AA'}{BB'-CC'};$$

luego,
$$\frac{m+n}{m}=\frac{BB'-AA'}{CC'-AA'},$$

de donde

$$(m+n)\,(C'C-AA')=m\,(BB'-AA'):$$

descomponiendo,

$$(m+n)\times CC'-m\times AA'-n\times AA'=m\times BB'-m\times AA'$$

simplificando,

$$(m+n)\times CC'=n\times AA'+m\times BB'.$$

Ejercicio 143.—Dado un punto A y un círculo o.

si se traza á este círculo por el punto A una secante ABC sobre la cual se toma un punto M tal, que se tenga $AM \times AC = K^2$; hallar el lugar descrito por el punto M cuando la secante ABC gira al rededor del punto A.

Esplicacion.—Trazando la tangente AP, llamando á la longitud de esta tangente L, se tiene:

$$AB \times AC = L^2;$$

y como por hipótesis,

$$AM \times AC = K^2,$$

dividiendo respectivamente estas dos igualdades se obtiene,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{K^2}{L^2}.$$

Tomando otras secantes resulta:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AB'} = \dots\dots = \frac{K^2}{L^2} = \text{constante};$$

de donde se infiere que los puntos MM'...... son puntos de una circunferencia cuyo radio se hallará en virtud de la proporcion

$$\frac{K^2}{L^2} = \frac{x}{R},$$

llamando R el radio de la circunferencia o; así el radio x de la circunferencia que se busca vendrá determinado por

$$x = R.\frac{K^2}{L^2}.$$

Ejercicio 144.—De un punto dado fuera de una circunferencia, trazarle una secante tal, que la cuerda interceptada sea media proporcional entre la secante entera y su parte esterna.

Esplicacion.—Si suponemos una secante ABC, para que BC sea medio proporcional entre AB y AC, es preciso que BC sea igual á la tangente AM, puesto que

$$AM^2 = AB \times AC;$$

y para ello es necesario que en la circunferencia o sea posible trazar una cuerda igual á AM, tal como $A'M'$: pues trazando luégo la perpendicular on á dicha cuerda y en seguida con el radio on una circunferencia, sabiendo que todas las tangentes trazadas á dicha circunferencia, comprendidas por la circunferencia dada deben ser iguales á $A'M'$ ó sea á, AM; se deduce que trazando desde el punto A una ó dos tangentes á la circunferencia interior quedará resuelta la cuestion.

Ejercicio 145.—De un punto dado fuera de una circunferencia, trazarle una secante tal, que el producto de la secante entera por su parte interior sea igual á un cuadrado dado, K^2.

Esplicación.—Trazando desde A la tangente AD, resulta

$$AC \times AB = \overline{AD}^2;$$

ó sea, $$AC \times (AC - BC) = \overline{AD}^2;$$

de donde $$\overline{AC}^2 - AC \times BC = \overline{AD}^2,$$

lo que dá $$AC \times BC = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2,$$

y como por hipótesis

$$AC \times BC = K^2,$$

resulta, $$K^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2;$$

luego levantando en D una perpendicular á AD, tomando $DE = K$ la hipotenusa AC representará AC; para lo cual bastará, haciendo centro en A, describir el arco EC que cortando á la circunferencia en dos puntos, en general, determinará la posicion de las dos secantes AC y AC' que se sujetarán á las condiciones del problema.

Ejercicio 146.—Dado un triángulo obtusángulo, trazar desde el vértice del ángulo obtuso al lado opuesto una recta, cuyo cuadrado sea igual al producto de los segmentos que ella determina sobre este lado.

Esplicacion.—Si por el punto B determinamos la posicion de una cuerda tal que quede dividida por el punto P en dos partes iguales, respecto á la circunferencia circunscripta al triángulo ABC; la cuestion quedará resuelta, pues, segun principios muy conocidos tendremos,

$$AP \times PC = DP \times PB = \overline{PB}^2$$

Ahora, para determinar la posicion de la cuerda DB, basta trazar por el punto B la recta BE paralela á AC: luégo, por el centro, la perpendicular on á AC, tomando qm=qn: si trazamos ahora por m una paralela á AC, determinará en la circunferencia el punto D, y este punto será el otro extremo de la cuerda que se busca; pues es fácil de ver, que por ser pq la paralela media del trapecio $BnmD$ debe dividir al lado, ó á la cuerda DB en dos partes iguales.

Ejercicio 147.—AB es un diámetro de una circunferencia, CD una cuerda perpendicular á AB: si por un punto P tomado sobre CD se traza una cuerda APQ; demostrar que el producto AP, AQ es constante.

Esplicacion.—Unamos el punto Q con B, y tendremos dos triángulos rectángulos APo, AQB, semejantes, por tener el ángulo agudo en A comun:

luego $$\frac{AP}{AB} = \frac{Ao}{AQ}$$

ó sea, $AP \times AQ = Ao \times AB$

y como $Ao \times AB$ es una cantidad constante, resulta $AP \times AQ$, tambien constante.

Ejercicio 148.—Si se junta el centro de un círculo con un punto de una cuerda, el cuadrado de la recta obtenida, más el producto de los segmentos que el punto determina en la cuerda dan una suma igual al cuadrado del radio.

Esplicacion.—Sea la cuerda *AB* y el punto dado en ella *P*, razando el diámetro que pasa por *P* tendremos:

$$AP \times PB = RP \times PQ$$

ó sea, $AP \times PB = (Ro - Po)\,(Po + oR)$:

luego,

$$AP \times PB = \overline{Ro}^2 - Po \times oR + Ro \times Po - \overline{Po}^2$$

de donde, $AP \times PB + \overline{Po}^2 = \overline{Ro}^2$

Ejercicio 149.—Las cuerdas comunes á una circunferencia fija, y á todas las circunferencias que se pueden trazar por dos puntos dados, pasan por un punto fijo.

Esplicación.—Sea *n* la circunferencia fija y m, la circunferencia que pasa por los puntos *A* y *B*: determinando el punto *C*, interseccion de las cuerdas *AB* y *ab* luégo

$$(1)\ CA \times CB = Ca \times Cb,$$

trazando por el punto *C* la tangente *CM* á la circunferencia *n;* se tiene,

$$\overline{CM}^2 = Ca \times Cb$$

y en virtud de la igualdad (1)

$$\overline{CM}^2 = CA \times CB,$$

luégo, trazando por el punto C una nueva secante Ccd, tendremos,

$$Cc \times Cd = \overline{CM}^2;$$

pero como $$\overline{CM}^2 = CA \times CB$$

resulta: $$Cc \times Cd = CA \times CB.$$

Lo que nos dice que por los cuatro puntos ABcd podemos hacer pasar una nueva circunferencia; luego las secantes que pasan respectivamente por AB y por los puntos de interseccion de esta nueva circunferencia con la fija, se encuentran en el punto C anterior; así podríamos suponer infinitas circunferencias que pasarán por AB, con la seguridad de que la secante que pasa por AB y las otras que pasan por los otros dos puntos de interseccion se encuentran siempre en el punto fijo C.

Ejercicio 150.—En todo triángulo la semi-diferencia de dos lados es media proporcional con las distancias del punto medio del tercer lado á los puntos donde este lado es cortado por la bisectriz y la altura que sale del vértice del ángulo opuesto. Del mismo modo, la semi-suma de los dos lados es media proporcional con las distancias del punto medio del tercer lado á los puntos donde este lado es cortado por la bisectriz del suplemento del ángulo opuesto y la altura que sale del vértice de este ángulo.

Esplicacion.—An representa la bisectríz interna; Ar la esterna; Ap, la altura del triángulo ACB; y Bm, la diferencia de los lados AB y AC: luego tendremos,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{nB}{nC}:$$

de donde, $$(1)\ \frac{AB + AC}{AB - AC} = \frac{nB + nC}{nB - nC}.$$

Tomando el punto n' con la condicion de ser,

$$n'B = Cn,$$

si o es el punto medio de la base resulta,

$$on = on'$$

y con esas anotaciones la igualdad (1) se trasforma en

$$\frac{BQ}{mB} = \frac{CB}{2on}$$

ó sea,
$$\frac{mB}{2on} = \frac{BQ}{CB},$$

igualdad que puede escribirse de la manera siguiente:

$$\frac{\frac{mB}{2}}{on} = \frac{BQ}{CB}; \text{ (a)}$$

pero
$$BQ \times mB = CB \times sB$$

ó sea,
$$BQ \times \frac{mB}{2} = CB \times \frac{sB}{2},$$

de donde
$$\frac{BQ}{CB} = \frac{\frac{sB}{2}}{\frac{mB}{2}},$$

luego, sustituyendo este valor en (a) resulta;

$$\frac{\frac{mB}{2}}{on} = \frac{\frac{sB}{2}}{\frac{mB}{2}} \text{ (2)}.$$

Si probamos que
$$\frac{sB}{2} = op$$

quedará demostrado el ejercicio.

Para esto se tiene,

$$po + os = Cp \qquad Cp + po = os + sB,$$

sumando estas dos igualdades, resulta,

$$po + os + Cp + po = Cp + os + sB,$$

ó sea, $$2po = sB,$$

de donde $$\frac{sB}{2} = op.$$

Sustituyendo este nuevo valor en la igualdad (2) se tendrá por fin,

$$\frac{\frac{mB}{2}}{on} = \frac{op}{\frac{mB}{2}},$$

que es lo que quiríamos probar.

La segunda parte del ejercicio se resolverá trazando la bisectriz esterna *Ar*. Así, pues, podremos escribir

$$\frac{rB}{rC} = \frac{AB}{AC};$$

luego, $$\frac{rB + rC}{rB - rC} = \frac{AB + AC}{AB - AC},$$

y simplificando $$\frac{rB + rC}{BC} = \frac{AB + AC}{mB},$$

ó sea $$\frac{mB}{BC} = \frac{AB + AC}{rB + rC} \quad (3).$$

Por otra parte tenemos

$$mB \times BQ = sB \times BC;$$

ó sea,

$$mB\,(AB + AQ) = sB \times BC$$

de donde; $$mB\,(AB + AC) = sB \times BC$$

luego; $$\frac{mB}{BC} = \frac{sB}{AB + AC}$$

pero en el caso anterior hemos hallado

$$sB=2op;$$

luego, $$\frac{mB}{BC}=\frac{2op}{AB+AC}.$$

Sustituyendo este valor en la igualdad t(3) se ene

$$\frac{AB+AC}{rB+rC}=\frac{2op}{AB+AC},$$

ó sea, $$\frac{\frac{AB+AC}{2}}{\frac{rB+rC}{2}}=\frac{op}{\frac{AB+AC}{2}}.$$

Con tal que demostremos, ahora, que

$$\frac{rB+rC}{2}=or$$

quedará probada la segunda parte del ejercicio, y para ello se tiene,

$$rB=ro+oB,\ rC=ro-oC;$$

luego $$rB+rC=2ro$$

ó sea, $$\frac{rB+rC}{2}=ro.$$

Ejercicio 151.—Dado un triángulo *ABC* y la circunferencia circunscrita á dicho triángulo; dada la bisectriz *AD* del ángulo *A* que corta á *BC* en *D* y á la circunferencia en *E:* y además la recta AD' bisectriz del suplemento del ángulo *A* que corta al lado *BC* prolongado en *D'* y á la circunferencia en *E';*

Demostrar que la recta BE es media proporcional entre EA y ED y que BE' es media proporcional entre $E'A$ y $E'D'$.

Esplicacion.—Sea ADE la bisectriz interna del ángulo BAC, así como $E'AD'$, la bisectriz esterna del mismo ángulo: Los triángulos ABE y BDE son semejantes por tener el ángulo E comun y BAE=DBE, porque EAC=BAE, y como EAC =DBE, resulta BAE=DBE; luego puede escribirse

$$\frac{DE}{BE}=\frac{BE}{AE}.$$

Para la segunda parte se tiene D'AB=E'AC, por complementos de ángulos iguales (1=1)

luego, $\quad$ arco BAE'=arco E'C

pero el ángulo $\quad \mathrm{BAE'}=\frac{1}{2}\mathrm{BECE'}$, $\quad$ y

$$\mathrm{D'BE'}=\frac{1}{2}(\mathrm{BAE'}+\mathrm{BEC})=\frac{1}{2}(\mathrm{CE'}+\mathrm{BEC})=\frac{1}{2}\mathrm{BECE'}:$$

así, pues, se deduce que BAE'=D'BE', de modo que los dos triángulos $E'BA$ y $D'BE'$ son semejantes porque tienen el ángulo E' igual, por ser comun, y luego D'BE'=BAE' por lo demostrado: así, pues, podremos establecer entre los lados homólogos de dichos dos triángulos la proporcion siguiente:

$$\frac{AE'}{BE'}=\frac{BE'}{D'E'},$$

la cual nos prueba la segunda parte del ejercicio.

Ejercicio 152.—Dadas dos cuerdas que se cortan en ángulo recto sobre un punto interior á una circunferencia; demostrar que la suma de los cuadrados de dos rectas opuestas determinadas por sus puntos de interseccion de las cuerdas con la circunferencia es igual al cuadrado del diámetro: así como tambien que la suma de los cuadrados de los cuatro segmentos de las dos rectas dadas, es igual al cuadrado del diámetro.

Esplicacion.—Sean AC y BD las dos cuerdas perpendiculares, tracemos on perpendicular á BD y se tendrá ACo = Con, por ser AC y on paralelas; tomemos luégo nom = Con, para lo cual tendrá que ser om prolongacion de la recta Ao, como fácilmente se puede comprender, de modo que siendo on la bisectriz del ángulo Com se tiene Cn = mn y como debe resultar tambien Bn = nD, se deduce que $Bm = CD$.

Ahora, el triángulo ABm dá:

$$\overline{Am}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{Bm}^2,$$

y como segun lo demostrado anteriormente Bm = CD, se infiere que

$$\overline{Am}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2.$$

Para la segunda parte del ejercicio, se tiene que

$$\overline{AB}^2 = \overline{Aq}^2 + \overline{Bq}^2, \qquad \overline{CD}^2 = \overline{Cq}^2 + \overline{qD}^2.$$

Sumando estas dos igualdades;

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{Aq}^2 + \overline{Bq}^2 + \overline{Cq}^2 + \overline{qD}^2;$$

pero como $\quad \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{Am}^2 = D^2$

llamando D el diámetro, resulta por fin

$$D^2 = \overline{Aq}^2 + \overline{Bq}^2 + \overline{Cq}^2 + \overline{qD}^2.$$

Ejercicio 153.—Probar como en el ejercicio precedente debe resultar

$$4\,\overline{oq}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=8\,\overline{Ao}.^2$$

Esplicacion.—Trazando la recta *op* perpendicular á *AC*, deduciremos de los triángulos *Aoq* y *qoC*,

$$\overline{oq}^2=\overline{Ao}^2+\overline{Aq}^2-2\times Aq\times Ap;$$

$$\overline{oq}^2=\overline{oC}^2+\overline{qC}^2-2\times pC\times qC.$$

Sumando, trasponiendo términos y simplificando al mismo tiempo resulta,

$$2\,\overline{oq}^2+2Ap\,(Aq+qC)=2\,\overline{Ao}^2+\overline{Aq}^2+\overline{qC}^2\ (1).$$

Tomemos ahora los dos triángulos *Bqo* y *qoD*, y resulta:

$$\overline{oq}^2=\overline{oB}^2+\overline{Bq}^2-2\times Bq\times Br;$$

$$\overline{oq}^2=\overline{oD}^2+\overline{qD}^2-2\times qD\times rD:$$

De estas dos igualdades se obtiene,

$$2\,\overline{oq}^2+2Br\,(Bq+qD)=2\,\overline{Ao}^2+\overline{Bq}^2+\overline{qD}^2:$$

Sumando esta igualdad con la (1) tendremos,

$$4\,\overline{oq}^2+2Ap\,(Aq+qC)+2Br\,(Bq+qD)=$$

$$=4\,\overline{Ao}^2+\overline{Aq}^2+\overline{qC}^2+\overline{Bq}^2+\overline{qD}^2;\ (2)$$

pero $2Ap=AC$, $Aq+qC=AC$, $2Br=BD$, $Bq+qD=BD$, y como segun lo demostrado anteriormente,

$$\overline{Aq}^2+\overline{qC}^2+\overline{Bq}^2+\overline{qD}^2=4\,\overline{Ao},^2$$

sustituyendo todos estos nuevos valores en la igualdad (2) se tendrá,

$$4\overline{oq}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=4\overline{Ao}^2+4\overline{Ao}^2$$

ó sea, $$4\overline{oq}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=8\overline{Ao}^2,$$

que es lo que nos habiamos propuesto demostrar.

Ejercicio 154.—Si se toman dos cuerdas cualesquiera AD y BC en una semi-circunferencia cuyo diámetro es AB demostrar que:

$$\overline{AB}^2=AD\times AP+BC\times BP,$$

siendo P el punto de interseccion de dichas dos cuerdas.

Esplicacion—Segun se desprende de la figura resulta:

$$\overline{AP}^2=\overline{AB}^2+\overline{PB}^2-2\times PB\times CB.$$

$$\overline{PB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AP}^2-2AP\times AD.$$

Sumando estas dos igualdades se tiene:

$$\overline{AP}^2+\overline{PB}^2=2\overline{AB}^2+\overline{PB}^2+\overline{AP}^2-2PB\times CB-2AP\times AD.$$

Simplificando y trasponiendo términos en esta igualdad se obtiene:

$$\overline{AB}^2=AD\times AP+BC\times BP.$$

Ejercicio 155.—Sea M el punto medio de la base BC de un triángulo cualquiera ABC: I el punto de contacto del lado BC con la circunferencia inscrita al mismo triangulo ABC: H y K los puntos de encuentro de la altura y bisectriz que salen del vértice A con BC: Demostrar la relacion $MI\times HI=MH\times KI$.

Esplicacion.—Por ser la recta AK la bisectriz, resulta:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{KB}{KC},$$

de donde $$\frac{AB - AC}{AB} = \frac{BK - KC}{KB}. \quad (1)$$

Pero se sabe que

$$An = Am, \ Bn = BI, \ mC = CI;$$

luego $$AB - AC = BI - IC;$$

cuyo valor sustituido en la igualdad (1), dá

$$\frac{BI - IC}{AB} = \frac{BK - KC}{KB}$$

ó sea, siendo ***M*** el punto medio de *BC*,

$$\frac{BM + MI - (BM - MI)}{AB} = \frac{(BM + MK) - (BM - MK)}{KB}$$

y simplificando se tiene:

$$\frac{2MI}{AB} = \frac{2MK}{KB},$$

de donde, $$\frac{MI}{MK} = \frac{AB}{BK} \ (\infty).$$

Ahora, como *Bo* es la bisectriz del ángulo *B*, puede escribirse,

$$\frac{AB}{BK} = \frac{Ao}{oK},$$

y como las rectas *oI* y *AH* son paralelas resulta:

$$\frac{Ao}{oK} = \frac{HI}{KI};$$

luego, $$\frac{AB}{BK} = \frac{HI}{KI}$$

sustituyendo en (∞) tendremos,

$$\frac{MI}{MK} = \frac{HI}{KI},$$

ó sea, $$MI \times KI = MK \times HI,$$

igualdad que puede trasformarse en

$$IH(MI - KI) = KI(MH - IH).$$

Simplificando, por fin, resulta:

$$MI \times HI = MH \times KI,$$

que es la igualdad que nos habiamos propuesto demostrar

4.ª SECCION.

Superficies.

Ejercicio 156.—En un trapecio, el triángulo que tiene por base uno de sus lados no paralelos, y por vértice el punto medio del lado opuesto, equivale á la mitad de la superficie del trapecio.

Esplicacion.—Sea el trapecio *ABCD*, trazando por el punto medio de *AD* la recta *mnp* paralela á *CB*, tendremos que el área del paralelógramo *mpBC* será equivalente á la del trapecio, por serlo la de los dos triángulos *Dnm* y *nAp*. Ahora,

$$\left.\begin{array}{l} \text{Area del triángulo } mnC = \mathrm{mC} \times \dfrac{\mathrm{nr}}{2} \\ \text{»} \qquad \text{»} \qquad PnB = \mathrm{pB} \times \dfrac{\mathrm{nt}}{2} \end{array}\right\}$$

Sumando estas dos igualdades tendremos

$$\mathrm{mnC} + \mathrm{pnB} = \mathrm{mC} \times \frac{\mathrm{nr}}{2} + \mathrm{pB} \times \frac{\mathrm{nt}}{2} = \frac{\mathrm{nr}}{2}(\mathrm{mC} + \mathrm{pB}) =$$

$$= \frac{\mathrm{nr}}{2} \times 2\mathrm{mC} = \mathrm{nr} \times \mathrm{mC}$$

y como $nr = \frac{1}{2}rt$; siendo el área de $mpBC = \mathrm{rt} \times \mathrm{mC}$, resulta que

$$\mathrm{mnC} + \mathrm{pnB} = \frac{1}{2}\mathrm{mpBC},$$

luégo,

$$\mathrm{CnB} = \frac{1}{2}\mathrm{mpBC};$$

pero, como el área *mpBC* equivale á la del trapecio *ABCD*, resulta por fin,

$$\text{CnB} = \frac{1}{2}\text{ABCD}.$$

Ejercicio 157.—Dividir el área de un triángulo en partes proporcionales á las longitudes *M*, *N*, *P*, por medio de rectas trazadas desde un mismo vértice.

Esplicacion.—Divídase la base *AB* en partes proporcionales á las rectas *M*, *N*, *P*, y para ello fórmese un ángulo cualquiera *BAP*; y tómense las partes *AM*, *MN*, *NP*, respectivamente iguales á *M*, *N*, *P*, sobre *AP*; únase luégo *P* con *B*, trazando por *N* y *M* rectas paralelas á *BP* para determinar los puntos *N'*, *M'*, que, unidos con el vértice *C*, nos darán los triángulos *ACM'*, *M'CN'*, *N'CB*, que por tener la misma altura nos darán tambien áreas proporcionales á *AM'*, *M'N'*, *N'B*; pero como estas rectas son proporcionales á *M*, *N*, *P*, tendremos así que los triángulos *ACM'*, *M'CN'*, *N'CB*, serán proporcionales á *M*, *N*, *P*, que es lo que nos habíamos propuesto resolver.

Ejercicio 158.—Determinar el área de un triángulo equilátero cuyo lado es *a*.

Esplicacion.—Sabemos que $S = AB \times \frac{CN}{2}$, conforme á la figura; si llamamos AB = a, CN = h, resulta:

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}},$$

por ser *h* un cateto del triángulo rectángulo *ACN*

y
$$AN = \frac{1}{2}a.$$

Simplicando el último valor hallado se obtiene,

$$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3},$$

que es la fórmula pedida.

Ejercicio 159.—Calcular el área de un triángulo inscrito en una circunferencia de radio *R*. El mismo problema para el exágono y dodecágono regulares, el cuadrado y octógono regulares, el pentágono y decágono regulares.

Esplicacion.—Para el triángulo equilátero se sabe que $L=R\sqrt{3}$, llamando *L* al lado del triángulo y *R* al radio de la circunferencia circunscrita.

Para el apotema se tiene,

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2};$$

luego en este caso resultará;

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-3R^2}=\frac{R}{2}.$$

Conociendo ahora el lado y el apotema, conoceremos el área del triángulo en funcion de *R*, por medio de la fórmula general:

$$S=3L\times\frac{A}{2},$$

luego $$S=3R\sqrt{3}\times\frac{R}{4}=\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}.$$

Exágono y dodecágono.

En el exágono $R=L,\ A=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}=$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-R^2}=\frac{R}{2}\sqrt{3}.$$

Luego

$$S=\frac{6R}{2}\times\frac{R}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{2}R^2\sqrt{3},$$

area del exágono.

Para el dodecágono basta recordar la fórmula

$$L'=\sqrt{R\left(R+\frac{L}{2}\right)}-\sqrt{R\left(R-\frac{L}{2}\right)}$$

que dá el lado de un polígono de duplo número de lados que otro dado en funcion del lado de este y del radio de la circunferencia circunscrita. Asi, pues, como en el caso que nos ocupa $L=R$, resulta:

$$L'=\sqrt{R\left(R+\frac{R}{2}\right)}-\sqrt{R\left(R-\frac{R}{2}\right)}=$$

$$=R\sqrt{\frac{3}{2}}-R\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{R}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$

Valor del apotema

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L'^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\frac{R^2}{4}(6-2\sqrt{12}+2)}$$

$$=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{16-6+2\sqrt{12}-2}{4}}=\frac{R}{4}\sqrt{8+2\sqrt{12}}=$$

$$=\frac{R}{4}\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\frac{R}{4}\times2\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Para la superficie, *S*, se tiene;

$$S=\frac{12}{2}\times\frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{6}{4}R^2\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{3}{2}R^2\sqrt{4}=3R^2.$$

Cuadrado y octógono.

Para el cuadrado sabemos que $L=R\sqrt{2}$, luégo

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-2R^2}=\frac{R}{2}\sqrt{2};$$

y
$$S=\frac{4R\sqrt{2}}{2}\times\frac{R}{2}\sqrt{2}=2R^2.$$

Para el octógono recordaremos la misma fórmula del caso anterior, esto es,

$$L'=\sqrt{R\left(R+\frac{L}{2}\right)}-\sqrt{R\left(R-\frac{L}{2}\right)}.$$

Sustituyendo el valor de L yá hallado tendremos,

$$L'=\sqrt{R\left(R+\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)}-\sqrt{R\left(R-\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$=R\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}-R\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=R\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$$

$$=R\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right).$$

Fórmula del apotema;

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L'^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-R^2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{\frac{4-2}{4}}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$=\frac{R}{2}\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

Luégo

$$S=\frac{8L'}{2}\times A=$$

$$=4\times R\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right)\times$$

$$\times\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}=$$

$$=2R^2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{4-2}{2}}\right)=$$

$$=2R^2\times\frac{2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\,R^2.$$

Pentágono y Decágono.

Lado del pentágono,

$$L=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Apotema.

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{R}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}.$$

Para el área *S* se tiene:

$$S=\frac{5\times\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\times\frac{R}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{5}{16}R^2\sqrt{60-12\sqrt{5}+20\sqrt{5}-20}=$$

$$=\frac{5}{16}R^2\sqrt{40+8\sqrt{5}}=\frac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Pasando al decágono tendremos:

$$L'=\sqrt{R\left(R+\frac{L}{2}\right)}-\sqrt{R\left(R-\frac{L}{2}\right)}.$$

Sustituyendo el valor de *L*,

$$L'=\sqrt{R\left(R+\frac{\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)}-$$

$$-\sqrt{R\left(R-\frac{\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)}=$$

$$=R\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}.\right)$$

Para el apotema se tendrá

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L'^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-R^2\left(\frac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}-2\sqrt{\frac{16-10+2\sqrt{5}}{16}}+\right.}$$

$$\overline{\left.+\frac{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2}};$$

luego el área vendrá representada por

$$S=\frac{10L'}{2}\times A=$$

$$=\frac{10}{2}\times R\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}\right)\times$$

$$\times\frac{R}{2}\sqrt{\frac{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2}}=$$

$$=\frac{5}{4}R^2\left\{\begin{array}{l}\sqrt{8+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}+2\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\\-\sqrt{8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}+2\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.\end{array}\right\}$$

Ejercicio 160.—*ABCD* es un trapecio en el que el ángulo *A* es recto, el ángulo *B* igual á 30 grados, la base *AB* igual *a*, la altura *AC* igual á *h*; determinar el área de dicho trapecio.—El mismo problema, suponiendo el ángulo B igual á 60 g°.

Esplicacion.—El ángulo *oDB* resulta, segun se desprende de la figura, de 60 g°; ahora, si tomamos á la izquierda de la recta DD', otro ángulo oDE igual á 60 g°, se tiene EB igual al lado del triángulo equilátero; luégo

$$EB = DB\sqrt{3}.\ \text{Además}\ DB = DD' = 2Do,$$

en su consecuencia

$$EB = DB\sqrt{3},\quad \text{ó sea}\quad 2oB = 2Do\sqrt{3},$$

de donde

$$oB = Do\sqrt{3}$$

y como $AB - oB = CD$, tendremos con esto conocidas las bases y altura del trapecio, y en su virtud su área.

Para el segundo caso se tiene la figura 2.ª en que el ángulo B se supone de 60 grados, resultando:

$$DD' = DB\sqrt{3},\quad DD' = 2Do,\quad DB = 2oB;$$

luego

$$2Do = 2oB\sqrt{3},$$

ó sea

$$oB = \frac{Do}{\sqrt{3}}.$$

Y como $AB - oB = CD$, tendremos con esto, conocidas las dos bases y la altura del trapecio, y, por consiguiente, resuelto tambien el ejercicio.

Ejercicio 161.—$ABCD$ es un trapecio en el cual el ángulo A es recto, y el ángulo B de 30 grados, las dos bases paralelas AB, CD, son a y b: Determinar su área.—El mismo problema, suponiendo el ángulo B igual á 60 grados.

Esplicacion.—De la figura 1.ª resulta;

$$AB - DC = a - b = oB.$$

Como EB debe ser el lado del triángulo equilátero, resulta:

$$2oB = DB\sqrt{3},$$

luego
$$DB = \frac{2oB}{\sqrt{3}}.$$

Una vez que sean conocidas las rectas DB y oB se determina la altura del trapecio por medio de la fórmula

$$Do = \sqrt{\overline{DB}^2 - \overline{oB}^2}$$

para tener así determinados todos los elementos necesarios del área del trapecio.

Para el segundo caso, considérese la segunda figura, la cual nos dá;

$$a - b = oB = \frac{1}{2} DB;$$

luego
$$2(a - b) = DB$$

y como nos son conocidas las rectas DB y oB, puede determinarse facilmente la altura Do por la fórmula

$$Do = \sqrt{\overline{DB}^2 - \frac{1}{4}\overline{DB}^2}.$$

Así, pues, conociendo las bases y la altura del trapecio, queda determinada el área de él.

Ejercicio 162.—Dado un círculo, trazar un segundo círculo concéntrico al primero que divida su superficie en dos partes equivalentes.

Esplicacion.—Llamando R y r los radios respectivos en los dos círculos, segun el enunciado tendremos;

$$\frac{\pi(R^2-r^2)}{\pi r^2}=1,$$

ó sea
$$R^2=2r^2;$$

de donde
$$R=r\sqrt{2},$$

lo que nos dice que el radio r que se busca es igual á la mitad de la diagonal del cuadrado, cuyo lado es igual á R; así, pues, construyendo un cuadrado sobre oA, trazando las diagonales oB y AC, resultará on que representará el radio de la circunferencia pedida.

Ejercicio 163.—Si desde un punto A de una circunferencia considerado como á centro, con un radio igual al de la circunferencia se describe un arco de circunferencia, divide éste á la superficie del círculo en dos partes: Hallar la relacion de estas dos partes.

Esplicacion.—La parte $BOCAB$ se compone de dos triángulos iguales á AOB y de cuatro segmentos iguales á $AnBmA$: llamemos r al radio de la circunferencia; el triángulo AOB que debe ser equilátero, nos dará para espresion de su área; $\frac{r}{4}\sqrt{3}$; de modo que

$$ACO+AOB=\frac{2r^2}{4}\sqrt{3}=\frac{r^2}{2}\sqrt{3}.$$

El segmento $AnBmA=\frac{1}{6}2\pi r\times\frac{r}{2}-\frac{r^2}{4}\sqrt{3}=$

$$=\frac{\pi r^2}{6}-\frac{r^2}{4}\sqrt{3}.$$

Por los cuatro segmentos iguales, resulta;

$$r^2\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\right);$$

luego

$$\text{BOCpAmB}=\frac{r^2}{2}\sqrt{3}\,r^2+\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\right)=$$

$$=\frac{2r^2\pi}{3}-\frac{r^2}{2}\sqrt{3}=\frac{4\pi r^2-3r^2\sqrt{3}}{6}=\alpha,$$

llamando α al área comprendida por estos dos arcos. Si designamos por α' el área restante del círculo, tendremos;

$$\alpha'=\pi r^2-\frac{4\pi r^2-3r^2\sqrt{3}}{6}=\frac{2}{6}\pi r^2+\frac{3}{6}r^2\sqrt{3},$$

luego,

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{4\pi r^2-3r^2\sqrt{3}}{2\pi r^2+3r^2\sqrt{3}}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{2\pi+3\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{8\pi^2-18\pi\sqrt{3}+27}{4\pi^2-27}.$$

Ejercicio 164.—Siendo a, b, c, los tres lados de un triángulo, $2p$ su perímetro; demostrar que la superficie de dicho triángulo es igual á

$$\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Esplicacion.—En uno de los ejercicios anteriores hallamos que la altura *Bb*, llamándola *h* viene dada por,

$$h=\frac{2}{b}\times\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

y como el área del triángulo ABC es igual á $\left(\frac{bh}{2}\right)$, sustituyendo aquí en vez de h, el valor hallado, resulta:

$$S=\frac{b}{2}\times\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ejercicio 165.—Siendo a, b, c, los tres lados de un triángulo, hallar en el interior de éste un punto tal que juntándolo á los tres vértices del mismo, se formen tres ángulos proporcionales á los números m, n, p.

Esplicacion.—En el supuesto de ser o el punto que se busca, se tiene,

$$\frac{AoB}{BoC}=\frac{m}{n},\quad \frac{AoB}{AoC}=\frac{m}{p};$$

luégo, $$BoC=\frac{n}{m}AoB,\ (1)\quad AoC=\frac{p}{m}AoB.\ (2)$$

Mas sabemos que $AoB+BoC+AoC=360^\circ$; y en virtud de los valores anteriores resulta,

$$360^\circ=AoB+\frac{n}{m}AoB+\frac{p}{m}AoB=$$

$$=\left(1+\frac{n}{m}+\frac{p}{m}\right)AoB=\frac{m+n+p}{m}\times AoB.$$

Asi, pues, $$AoB=\frac{m}{m+n+p}\times 360^\circ.$$

Sustituyendo este valor en (1) y (2), se tiene;

$$BoC=\frac{n}{m}\times\frac{m}{m+n+p}\times 360^\circ=\frac{n}{m+n+p}\times 360^\circ.$$

$$AoC = \frac{p}{m} \times \frac{m}{m+n+p} \times 360^{o} = \frac{p}{m+n+p} \times 360^{o}.$$

Determinando, ahora, sobre cada uno de los lados del triángulo ABC arcos de circunferencias, correspondientes á los ángulos deducidos de las fórmulas anteriores, el punto donde éstos arcos se corten será el pedido.

Ejercicio 166.—Dado un rectángulo $ABCD$ en el cual, la altura AD=a, y la base AB=2a: desde el punto A, como á centro, con AD, por radio se describe un arco de círculo DE; del punto B, como á centro, con el mismo radio, otro arco CE; sobre AB como diámetro se describe la semi-circunferencia AKB que corte á los arcos precedentes en G y en H: 1.° Calcular la superficie $EGKH$ comprendida entre estos arcos de círculo. 2.° Calcular la superficie del cuadrilátero $CHGD$ que resulta de unir D con G, G con H, y H con C, por medio de rectas.

Esplicacion.—La figura $KHqEpG$, es igual al sector $GKHE$, menos dos veces el segmento. $GKHnG$, por ser los segmentos $GpEG$, $HqEH$, $GKHnG$, iguales entre sí.

Asi, pues, el sector,

$$GKHEG = \frac{1}{6} 2\pi a \times \frac{a}{2} = \frac{\pi a^{2}}{6}$$

el segmento, $$GKHnG = \frac{\pi a^{2}}{6} - \frac{a^{2}}{4} \sqrt{3},$$

luégo, $$2GKHnG = \frac{\pi a^{2}}{3} - \frac{a^{2}}{2} \sqrt{3}$$

de donde;

$$GKHqEpG = \frac{\pi a^2}{6} - \left(\frac{\pi a^2}{3} - \frac{a^2}{2}\sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\pi a^2}{3} + \frac{a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{6} = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

El cuadrilátero *DCHG*, se hallará de la manera siguiente:

el área, $$DKEGD = AEKD - AEGD = a^2 \times \left(1 - \frac{\pi}{4}\right);$$

luégo, $$DKCHEGD = 2DKEGD = 2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Quitando de esta área, GpEqHnG, nos dará el área DKCsHnGrD.

Pero como,

$$GpEqHnG = GEH - 2GKHnG = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - 2GKHnG =$$

$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - \left(\frac{\pi a^2}{3} - \frac{a^2}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{3}.$$

Así, pues,

$$DKCsHnGrD = 2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}a^2\sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{3}\right) =$$

$$= 2a^2 - \frac{a^2\pi}{2} - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3} + \frac{\pi a^2}{3} = 2a^2 - \frac{3}{4}a^2\sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{6} \quad (1).$$

Debe, ahora, agregarse á este valor los dos segmentos iguales, *DrGD*, *CsHC*, y para esto sabemos, que el área del decágono en funcion del radio *a*, es $3a^2$,

luégo, $$\frac{1}{12}3a^2 = DGA = \frac{1}{4}a^2,$$

y como $\quad \mathrm{DrGAD} = \frac{1}{12} 2\pi a \times \frac{a}{2} = \frac{\pi a^2}{12}$

resulta, $\quad \frac{\pi a^2}{12} - \frac{1}{4} a^2 = \mathrm{DrGD} = a^2 \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right);$

doblando este valor, se tiene,

$$2\mathrm{DrGD} = a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)$$

añadiendo este valor en (1) tendremos por último, el área del cuadrilátero pedido.

$$\mathrm{DCHG} = 2a^2 - \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{6} + \frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{3a^2}{2} - \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3} = 3a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Ejercicio 167.—Sea AB, el lado de un exágono regular, inscrito en un círculo; CD, el lado de un triángulo equilátero, inscrito en el mismo círculo, y paralelo á AB. Demostrar que la superficie de la porcion de círculo, comprendido entre estas dos líneas, equivale á la superficie del sector $ApBoA$.

Esplicacion.—Sea CD, el lado del triángulo equilátero, se

tiene, $\quad \mathrm{AoC} + \mathrm{BoD} = \mathrm{ApBoA};$

pero $\quad \mathrm{AoC} = \mathrm{ACm} + \mathrm{mCo},$

y $\quad \mathrm{BoD} = \mathrm{BnD} + \mathrm{nDo}.$

Sumando estas dos últimas igualdades resulta:

$$\mathrm{AoC} + \mathrm{BoD} = \mathrm{ACm} + \mathrm{BnD} + \mathrm{mCo} + \mathrm{nDo}.$$

si probamos que la suma de $mCo+nDo$, es igual al trapecio $ABmn$, se tendrá;

$$AoC+BoD=ACm+BnD+ABmn=ABCD=ApBoA.$$

Vamos, pues, á probar como $mCo+nDo=ABmn$

Los triángulos roA, y soC, son iguales, luego;

$$2roA=2sCo$$

quitando, á ambos miembros, mno, se tiene;

$$2roA-mno=2sCo-mno,$$

lo que dá: $$ABmn=mCo+nDo$$

Ejercicio 168.—Sea AB, el lado de un exágono regular inscrito en un círculo; CD, el lado de un triángulo equilátero inscrito en el mismo círculo y paralelo á AB, si se juntan oC, oD, y se prolongan estas rectas hasta los puntos E, y F, de encuentro con AB: Demostrar: 1.° Que el triángulo EoF, equivale á la mitad del exágono regular inscrito. 2.° Que la superficie de la corona circular, comprendida entre las circunferencias de radio oC y oE, es doble de la superficie del círculo oC.

Esplicacion.—El ángulo $BoC=30°$, $DCo=BEo=30°$

luego $$BE=Bo=r.$$

Por la misma razon se tiene $AF=r$: luego la suma de los tres triángulos FAo, AoB, y BoE, será;

$$3AB\times\frac{no}{2}=3r\frac{no}{2}$$

que es la mitad del área del exágono inscrito.

Ahora, se tiene,

$$on = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

y como es fácil de comprender;

$$oE = 2on = r\sqrt{3}\,.$$

Así, pues, tendremos;

$$\pi.\ \overline{oE}^2 = \pi \times r^2 \times 3 = 3\pi r^2$$

la otra área circular será, $\pi \times \overline{oC}^2 = \pi r^2$, restando estas dos áreas circulares, tendremos el área del anillo;

$$3\pi r^2 - \pi r^2 = 2\pi r^2$$

lo que nos dice, ser doble del área del círculo dado.

Ejercicio 169.—Dados dos pentágonos regulares, uno inscrito y otro circunscrito á una circunferencia: Determinar el radio de esta circunferencia: 1.° Suponiendo que la diferencia entre los perímetros de los dos polígonos, sea de un decímetro; 2.° Suponiendo que el área comprendida entre los dos perímetros, sea de un decímetro cuadrado.

Esplicacion.—Llamemos L, y l, los lados respectivos de los pentágonos, así, pues, podremos establecer, conforme el anuciado, la igualdad siguiente:

$$5L - 5l = o'1,\ ó\ L - l = \frac{1}{50}.$$

Por fórmulas muy conocidas, pertenecientes á la Geometría elemental, se sabe que;

$$L=\frac{2lr}{\sqrt{4r^2-l^2}};\text{ luégo }\frac{2lr}{\sqrt{4r^2-l^2}}-l=\frac{1}{50}$$

y como, $$l=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

se tiene;

$$\frac{2\frac{r^2}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{4r^2-\frac{r^2}{4}\left(10-2\sqrt{5}\right)}}-\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{1}{50}$$

simplificando se deduce;

$$\frac{2r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}-\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{1}{50};$$

continuando la simplificacion, resulta;

$$2r\sqrt{10-2\sqrt{5}}-r\sqrt{10+2\sqrt{5}}=\frac{1}{50}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

ó sea, por fin:

$$r=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{100\sqrt{10-2\sqrt{5}}-50\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Segun lo manifestado en la segunda parte del ejercicio, se tiene,

$$\frac{5}{2}L\times A-\frac{5}{2}l\times a=0'01,\text{ ó, }L\times A-l\times a=\frac{2}{500}=\frac{1}{250}$$

Sabiendo, ahora, que;

$$L = \frac{2lr}{\sqrt{4r^2 - l^2}} = \frac{2r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}};$$

luégo, que el apotema A es igual á r;

Y que el apotema a, se representa por

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})} = \frac{r}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}},$$

se deduce; $L \times A - l \times a = \dfrac{2r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} \times r$

$$- \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \times \frac{r}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{1}{250},$$

de donde,

$$2r^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - \frac{r^2}{8}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{1}{250}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

y por último:

$$r = \sqrt{\frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{\left(2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - \frac{1}{8}\sqrt{320 + 128\sqrt{5}}\right) \times 250}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{\left(2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{20 + 8\sqrt{5}}\right) \times 250}}.$$

Ejercicio 170.—Dado un paralelógramo $ABCD$ si se junta un punto cualquiera P del plano á los cuatro vértices: demostrar que el triángulo PAC es equivalente á la suma ó diferencia de los dos triángulos PAB, PAD.

Esplicacion.—Segun se desprende de la figura 1.ª resulta:

$$PAC = \frac{1}{2} AP(Cq + qt) = \frac{1}{2} AP(Cq + Br);$$

pero Cq = Ds, por ser los triángulos DsA y CqB iguales por tener $BC = AD$, y $sDA = qCB$, por ser los lados AD, y BC, Ds, y Cq, respectivamente paralelos, luégo el triángulo

$$PAC = \frac{1}{2} AP(Br + Ds) = ABP + DAP.$$

Para el segundo caso supondremos la figura 2.ª, la que nos dá:

$$PAC = \frac{1}{2} AP \times Cr = \frac{1}{2} AP(Ds - Dx)$$

por ser Cr y Ds perpendiculares á AP, y Cx paralela á AP; pero el triángulo DxC es igual, por razones parecidas al caso anterior á AtB: así pues, Dx = tB, de donde resulta para el triángulo;

$$PAC = \frac{1}{2} AP(Ds - tB) = APD - APB.$$

Ejercicio 171.—Dado un cuadrilátero, si por el punto medio de cada diagonal, se traza una paralela á la otra diagonal, y se junta el punto de interseccion de las rectas así obtenidas, con los puntos medios de los cuatro lados del cuadrilátero; Demostrar que el cuadrilátero queda así dividido en cuatro partes equivalentes.

Esplicacion.—Sean b y e los puntos medios de an, am; y cd la recta paralela á mn que pasa por el punto c, medio de la diagonal ap así como dr es la recta paralela á la diagonal ap que pasa por el punto medio de la diagonal nm; de este modo se tiene que la recta be resulta paralela á mn, y como cd tambien es paralela á mn, los triángulos, bcd, ecd, son equivalentes: luégo si á la superficie $abcde$, quitamos cada uno de los triángulos anteriores, tendremos $bcde = abce$; (1) pero, abc es $\frac{1}{4}$ de anp, por ser bc, la paralela media del triángulo anp: por razones análogas se tiene;

$$ace = \frac{1}{4} apm;$$

luégo, $$abc + ace = abce = \frac{1}{4}(anp + apm),$$

y como, $anp + apm = anpm$,

resulta: $$abce = \frac{1}{4} anpm;$$

luégo, en virtud de la igualdad (1) resulta:

$$abde = \frac{1}{4} anpm.$$

Probemos, ahora, como $bnsd$, es tambien $\frac{1}{4}$ de $anpm$.

Siendo r, el punto medio de la diagonal nm, los triángulos bdr, y sdr, son equivalentes, luégo;

$$bdsn = brsn;$$

pero;

$$brsn = bnr + nrs = \frac{1}{4} anm + \frac{1}{4} nmp =$$

$$= \frac{1}{4}(anm + nmp) = \frac{1}{4} anpm;$$

luégo, $$bdsn = \frac{1}{4} anpm.$$

Siguiendo, ahora, un raciocinio parecido á los anteriores, probaríamos que cada cuadrilátero *sdfp*, y *dfme*, valen un cuarto del área total del cuadrilatero *anpm*, quedando así completamente probado el ejercicio.

Ejercicio 172.—Si por el punto de interseccion de dos circunferencias, se trazan diferentes secantes, uniendo los puntos estremos de las secantes con el otro punto de interseccion de las dos circunferencias, se forman diferentes triángulos, cuyas áreas son proporcionales á los cuadrados de las secantes.

Esplicacion.—Trazando por el punto *A*, las secantes, *DC* y *D'C'*, resultan los triángulos *DCB* y *D'C'B'*, uniendo los estremos de las secantes con el punto *B;* estos triángulos son semejantes porque los ángulos *D* y *D'*, *C* y *C'* son respectivamente iguales, por ángulos inscritos que abrazan el mismo arco, siendo, pues, dichos triángulos semejantes, sus áreas serán proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos; luégo llamando S y S' lar áreas respectivas de los dos triángulos, se tendrá:

$$\frac{\overline{DC}^2}{S} = \frac{\overline{D'C'}^2}{S'}$$

lo que que podria hacerse estensivo á otros triángulos, que se hallasen en las condiciones de los dos primeros.

Ejercicio 173.—Hallar la espresion del área de un trapecio, considerándole como la diferencia de dos triángulos, que se obtienen, prolongando los dos lados no paralelos, hasta su punto de encuentro.

Esplicacion.—Segun resulta de la figura, se tiene:

$$AB\times\frac{CG}{2}-DE\times\frac{CF}{2}=ABED;$$

luégo,

$$AB\times\left(\frac{GF+FC}{2}\right)-DE\times\frac{GC-FG}{2}=ABED\ (1).$$

Ahora, por ser los triángulos *CDE* y *CAB*, semejantes, se puede escribir;

$$\frac{AB}{DE}=\frac{GC}{FC},\text{ ó sea, } AB\times CF=DE\times GC;$$

luégo; $$AB\times\frac{FC}{2}=DE\times\frac{GC}{2};$$

cuyo valor reduce la igualdad (1) á la siguiente:

$$AB\times\frac{GF}{2}+DE\times\frac{FG}{2}=ABED,$$

ó sea, $$GF\left(\frac{AB+DE}{2}\right)=ABED.$$

Ejercicio 174.—Dadas las bases y la altura de un trapecio, calcular las áreas de los dos triángulos, cuya diferencia viene determinada por el trapecio.

Esplicacion.—Se tiene:

$$AB\times\frac{EF}{2}=ABE;\ CD\times\frac{EG}{2}=ECD,$$

de los triángulos semejantes *ABE* y *CDE*, resulta, $\frac{EF}{EG}=\frac{AB}{CD}$

luégo,

$$\frac{EF-EG}{EF}=\frac{AB-CD}{AB},\quad \frac{EF-EG}{EG}=\frac{AB-CD}{CD},$$

y si representamos *GF*, por *d; AB* y *CD*, respectivamente por *a* y *b*, se tiene:

$$EF=\frac{ad}{a-b},\quad EG=\frac{bd}{a-b}.$$

Una vez hallados estos valores, podemos pasar á deducir el área de los triángulos, pues

$$ABE=AB\times\frac{EF}{2}=\frac{AB}{2}\times EF=\frac{a}{2}\times\frac{ad}{a-b}=\frac{a^2d}{2(a-b)}.$$

$$\text{y } ECD=CD\times\frac{EG}{2}=\frac{CD}{2}\times EG=\frac{b}{2}\times\frac{bd}{a-b}=\frac{b^2d}{2(a-b)}.$$

Ejercicio 175.—El área de un trapecio es igual al producto de uno de sus lados no paralelos, por la perpendicular bajada del medio del otro lado al primero.

Esplicacion.—Trácese la diagonal *AC*, y se tendrá,

$$ABC+ACD=S;$$

pero el área del triángulo *ACB*, es equivalente á ADB,

luégo, $$ADB+ADC=S$$

ó sea, $$S=AD\times\frac{p}{2}+AD\times\frac{p'}{2};=AD\times\frac{p+p'}{2}$$

y si tomamos el punto medio de *CB*, y trazamos la recta *EF* paralela á p y p', resultará ser dicha recta $EF = p''$ la paralela media, que debe ser igual á $\frac{p+p'}{2}$, luégo $S = AD \times p''$, que es lo que nos habíamos propuesto demostrar.

Ejercicio 176.—Por un punto tomado sobre la bisectriz de un ángulo, trazar una recta tal que la parte interceptada por los lados del ángulo, sea un mínimo. Averiguar lo que resulta en cuanto al área del triángulo que se origina por dicha recta.

Esplicacion.—Sea el ángulo EAC, la bisectriz Ao, y BC, la perpendicular á la bisectriz que pasa por el punto o: ED otra recta cualquiera que pasa por el punto o, luégo se podrá escribir:

$$AE : AD :: Eo : oD;$$

pero como $AE > AD$, resulta $Eo > oD$. Ahora, las áreas de los triángulos BoE, y DoC por tener el ángulo o igual, son entre sí como,

$$oE \times oB : oD \times oC;$$

y como oB y oC, deben ser iguales, la relacion de las áreas de los dos triángulos anteriores es igual á $\frac{oE}{oD}$, y habiendo demostrado que $oE > oD$, resulta el área del triángulo oEB, mayor que la del triángulo DoC, lo cual nos dará, área del triángulo AED mayor que la del triángulo ABC, ó en otros términos:

$$\frac{1}{2} FA \times ED > \frac{1}{2} Ao \times BC,$$

y como se puede comprender á la vista de la figura que $AF < oA$, se infiere que ED, ha de ser forzosamente mayor que BC, quedando así probado que BC, es la menor de todas las rectas interceptadas por los lados del ángulo, pasando por el punto o. De lo demostrado anteriormente resulta, que el triángulo ABC es el que contiene menor área, pues ya se ha visto que trazando por el punto o una recta cualquiera distinta de BC tal como DE, resulta ser el área del triángulo AED, mayor que la del triángulo ABC.

Ejercicio 177.—Dado un triángulo ABC, si en los estremos B y C de un mismo lado BC, se trazan á esta recta las perpendiculares BD y CE, y se les da á estas una longitud dupla de la altura del triángulo ABC, siendo F y G, los puntos medios de los lados AB y AC: demostrar que el triángulo ABC, es equivalente á la suma, ó á la diferencia de los dos triángulos BDF y CEG, segun que los ángulos en B y en C, sean ó no todos dos agudos.

Esplicacion.—Supónganse los ángulos B y C agudos. Por ser F y G los puntos medios de las rectas AB y AC, resulta que

$$\text{MF}=\text{Fn, y, nG}=\text{GN}:$$

luégo:

$$\text{Area DBF}=\frac{1}{2}\text{BD}\times\text{MF}=\frac{1}{2}\text{BD}\times\text{Fn};$$

$$\text{Area CGE}=\frac{1}{2}\text{CE}\times\text{GN}=\frac{1}{2}\text{CE}\times\text{Gn}.$$

Sumando se tiene:

$$\text{DBF}+\text{CGE}=\frac{1}{2}\text{DB}\times\text{Fn}+\frac{1}{2}\text{CE}\times\text{Gn}$$

pero $\text{BD}=\text{CE}=2\text{h}$, siendo h, la altura del triángulo, luégo

$$\text{DBF}+\text{CGE}=\frac{1}{2}2\text{h}\times(\text{Fn}+\text{nG})=\text{h}\times\text{FG},$$

y como $\text{FG}=\frac{1}{2}\text{BC}$, se deduce,

$$DBF + CGE = h \times \frac{1}{2} BC = \text{área del triángulo } ABC.$$

De un modo parecido se probaria el segundo caso.

Ejercicio 178.—Los dos triángulos opuestos que se forman, juntando un punto, tomado en el interior de un paralelógramo con sus cuatro vértices, equivalen juntos á la mitad del paralelógramo.

Esplicacion.—Sean los dos triángulos opuestos *DpC*, y, *pAB*,

luego, $$DpC = DC \times \frac{1}{2} np,$$

$$ApB = AB \times \frac{1}{2} mp.$$

Sumando estas dos igualdades, se obtiene;

$$DpC + ApB = DC \times \frac{1}{2} np + AB \times \frac{1}{2} pm =$$

$$= \frac{1}{2} AB (np + pm) = \frac{1}{2} AB \times nm$$

y como, $AB \times nm$, representa el área del paralelógramo $ABCD = S$, se infiere que

$$DpC + ApB = \frac{1}{2} S.$$

Ejercicio 179.—Dado un rectángulo *ABCD*, si se toma un punto cualquiera *E* sobre *BC*, un punto cualquiera *F* sobre *CD:* Demostrar que el rectangulo *ABCD*, equivale al doble del triángulo *AEF*, aumentado en el rectangulo, que tiene por dimensiones los segmentos *BE* y *DF*.

Esplicacion.—Tracemos por E y F, rectas paralelas á los lados del rectàngulo, tendremos:

$$ABCD = Apnm + pnFD + nECF + nEBm = Apnm + 2pFn +$$
$$+ 2FnE + 2nEB = Apnm + 2(pFn + FnE + nEB) \ (1).$$

Ahora, $pFn = AFn$ por ser triángulos, que tienen la misma base y altura; por lo mismo se tiene, $nEB = AnE$.

De modo que

$$pFn + FnE + nEB = AFn + FnE + AnE = AFE.$$

Sustituyendo este valor en (1) tendremos;

$$ABCD = Apnm + 2AFE = BE \times DF + 2AFE.$$

Ejercicio 180.—Todo rectángulo es mitad del rectángulo que tiene por dimensiones las diagonales de los cuadrados construidos sobre los lados contiguos del primero.

Esplicacion.—Construyendo cuadrados sobre los lados AD y AB, se tiene:

$$\overline{Am}^2 = 2\overline{AD}^2, \ \overline{Bp}^2 = 2\overline{AB}^2,$$

$$Am = AD\sqrt{2}, \ Bp = AB\sqrt{2}.$$

Multiplicando estas dos últimas igualdades resulta:

$$Am \times Bp = 2AD \times AB$$

y como $AD \times AB$ es igual al área del rectángulo ABCD, llamando á esta área S, tendremos:

$$Am \times Bp = 2S$$

ó sea,
$$S = \frac{Am \times Bp}{2}.$$

Ejercicio 181.—Si por el punto medio E de la diagonal BD de un cuadrilatero $ABCD$, se traza la paralela FEG, á la segunda diagonal AC: demostrar que la recta AG divide el cuadrilátero en dos partes equivalentes.

Esplicacion.—Uniendo el punto E, con A y C se tiene:

$$\text{área AED} = \text{área AEB}$$

por ser triángulos que tienen la misma base y altura. Por la misma razon resulta:

$$\text{área ECD} = \text{área BEC}.$$

Sumando estas dos igualdades, se tiene;

$$AED + ECD = AEB + BEC$$

de donde,
$$ADCE = ABCE$$

ó sea,
$$AEF + FED + EGD + ECG = ABC + AEC \quad (1)$$

pero,
$$AEF = FE \times \frac{1}{2} An,$$

$$ECG = EG \times \frac{1}{2} An;$$

luego

$$AEF + ECG = \frac{1}{2} An (FE + EG) = \frac{1}{2} An \times FG = AFG.$$

Por otra parte AEC = ACG por ser triángulos que tienen la misma base y altura, sustituyendo, ahora, estos nuevos valores en (1), resulta:

$$FED + EGD + AFG = ABC + ACG$$

ó sea, $$AGD = ABCG$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 182.—Siendo ABCD, un rectángulo, si se inscribe en el triángulo *ABC*, una circunferencia que toque á *AB*, en *E*, y á *BC*, en *F*, y luego se traza *EH*, paralela á *AD*, y *FK* paralela á *CD*: demostrar que el rectángulo KH, es mitad del rectángulo *ABCD*.

Esplicacion.—Segun se vé en la figura, resulta que,

$$\text{área } Aot = \text{área } AoE:$$

pero, $$\text{área } AoE = \text{área } AoK$$

luégo, $$\text{área } Aot = \text{área } AoK.$$

Por otra parte, área oCF = área oCt;

pero $$\text{área } oCF = \text{área } oCH$$

luégo, $$\text{área } oCt = \text{área } oCH.$$

Ahora, como el área del triángulo *ACB*, se compone de

$$2Cto + 2tAo + EoFB$$

siendo el triángulo ACB mitad del rectángulo, y en virtud de las equivalencias anteriores, se obtiene:

$$ACB = \frac{1}{2}\, ABCD = 2Cto + 2tAo + EoFB =$$
$$= oHCF + AEoK + EoFB = ABCHoK.$$

De consiguiente el rectángulo restante *DHoK* será igual á la otra mitad del rectángulo *ABCD*, que está conforme con el enunciado.

Ejercicio 183.—Dividir un cuadrilátero en cuatro triángulos equivalentes por medio de rectas que, saliendo de un punto interior, vayan á terminar en los cuatro vértices del cuadrilátero, y en el supuesto de que las perpendiculares bajadas de los vértices opuestos á una misma diagonal sean iguales.

Esplicacion.—Siendo Bm=Dn; si tomamos el punto o, medio de la diagonal AC, resulta que si se une o, con A, B, C, D, se obtienen cuatro triángulos equivalentes, por tener la misma base y la misma altura, luégo el punto o, es el pedido.

Ejercicio 184.—Si de los vértices de un triángulo, hasta los lados opuestos ó sus prolongaciones, se trazan tres rectas iguales á una longitud dada, y si de un punto interior se trazan, luégo, paralelas á estas rectas hasta los mismos lados, la suma de estas paralelas es igual á la longitud dada.

Esplicacion.—Sea el triángulo ABC; tómense las distancias CD, BF, AE, respectivamente iguales á una longitud dada, y sea p, el punto por el cual se trazan las rectas pn, pr, pm, paralelas á las rectas anteriores, vamos, pues, á probar que;

$$\mathrm{pn} + \mathrm{pm} + \mathrm{pr} = \mathrm{CD} = \mathrm{BF} = \mathrm{AE}$$

Para ello, uniremos A con p, y resultará la recta As, que dará origen á los triángulos semejantes AEs, mps;

luego, $$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{mp}} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{ps}},$$

de donde, $$\mathrm{mp} = \mathrm{AE} \times \frac{\mathrm{ps}}{\mathrm{As}} \ (1).$$

Uniendo, ahora, C con p tendremos otros dos triángulos semejantes npt, tCD:

luego, $$\frac{DC}{np}=\frac{Ct}{tp},$$

de donde, $$np=DC\times\frac{tp}{Ct}$$

y como $DC=AE$ resulta,

$$np=AE\,\frac{tp}{Ct}\,(2).$$

Por fin, uniendo B con p, resulta por razones análogas á las anteriores,

$$\frac{BF}{rp}=\frac{Bq}{pq}$$

ó sea, $$rp=BF\times\frac{pq}{Bq}$$

y como $BF=AE$, se tiene,

$$rp=AE\times\frac{pq}{Bq}.$$

Sumando las igualdades (1) y (2) con esta última, se tiene,

$$mp+pn+rp=AE\left(\frac{ps}{As}+\frac{tp}{Ct}+\frac{pq}{Bq}\right)$$

Con tal que se demuestre, ahora, que,

$$\frac{ps}{As}+\frac{tp}{Ct}+\frac{pq}{Bq}=1\ (3)$$

quedará completamente demostrado el ejercicio, pues entonces resultará,

$$mp+pn+rp=AE.$$

Para probar esta última parte, basta considerar los cuatro triángulos *Apq*, *pqC*, *ABq*, *qBC*, que nos dán:

$$\text{área Apq} = \frac{pq \times Ax}{2};$$

$$\text{área pqC} = \frac{pq \times zC}{2}$$

sumando,

$$Apq + pqC = \frac{pq}{2}\left(Ax + Cz\right) = ApC \quad (4).$$

Pasando á los otros dos triángulos, se tiene,

$$\text{área ABq} = \frac{Bq \times Ax}{2}$$

$$\text{área qBC} = \frac{Bq \times Cz}{2}$$

Sumando, resulta;

$$ABq + qBC = ABC = \frac{Bq}{2}\left(Ax + Cz\right) \ (5).$$

Dividiendo, ahora, las dos igualdades (4) y (5), se obtiene:

$$\frac{ApC}{ABC} = \frac{\frac{pq}{2}(Ax + Cz)}{\frac{Bq}{2}(Ax + Cz)} = \frac{pq}{Bq}$$

De un modo semejante, deduciremos:

$$\frac{ApB}{ABC} = \frac{tp}{tC}, \text{ y, } \frac{BpC}{ABC} = \frac{ps}{As}.$$

Sustituyendo estos nuevos valores en (3) se tiene:

$$\frac{\mathrm{BpC}}{\mathrm{ABC}}+\frac{\mathrm{ApB}}{\mathrm{ABC}}+\frac{\mathrm{ApC}}{\mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{BpC}+\mathrm{ApB}+\mathrm{ApC}}{\mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{ABC}}=1$$

que es lo que nos faltaba probar.

Ejercicio 185.—Si las diagonales de un cuadrilátero inscrito se cortan en ángulo recto, la suma de los productos de los lados opuestos representa una área doble de la del cuadrilátero dado.

Esplicacion.—Sea *ABCD*, el cuadrilátero inscrito: segun el teorema de Ptolomeo, se tiene:

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{DC}+\mathrm{AD}\times\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}.$$

Si por los cuatro vértices del cuadrilátero, se trazan rectas paralelas á las diagonales, resulta el rectángulo *MNPQ*, que dá:

$$MNPQ=2\mathrm{AoB}+2\mathrm{BoC}+2\mathrm{DoC}+2\mathrm{AoD}=$$
$$=2(\mathrm{AoB}+\mathrm{BoC}+\mathrm{DoC}+\mathrm{AoD})=2\,\mathrm{ABCD};$$

pero el rectángulo *MNPQ* tiene por área

$$\mathrm{QM}\times\mathrm{MN}=\mathrm{BD}\times\mathrm{AC};$$

luégo, $\quad \mathrm{BD}\times\mathrm{AC}=2\,\mathrm{ABCD}$:

Pero como; $\quad \mathrm{BD}\times\mathrm{AC}=\mathrm{AB}\times\mathrm{DC}+\mathrm{AD}\times\mathrm{BC}$

resulta por fin:

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{DC}+\mathrm{AD}\times\mathrm{BC}=2\mathrm{ABCD}.$$

Ejercicio 186.—Determinar el área de un triángulo en funcion de los tres lados *a*, *b*, *c*, y el radio de la circunferencia circunscrita al mismo—deducir la fórmula del radio de la circunferencia circunscrita, en funcion del perímetro del triángulo.

Esplicacion.—Sea el triángulo ABC, inscrito á la circunferencia o; sea *Bb* la altura del triángulo, y *AM* el diámetro que pasa por el vértice A; luégo los triángulos rectángulos MBA, y CBb son semejantes, y dán:

$$\frac{MA}{c}=\frac{a}{Bb}$$

y como $MA=2R$ y $Bb=h$, resulta:

$$\frac{2R}{c}=\frac{a}{h};\ \text{luégo}\ h=\frac{ac}{2R}.$$

Ahora, siendo el área del triángulo

$$ABC=b\times\frac{h}{2},$$

se tiene: $$\text{área}\ ABC=b\times\frac{\frac{ac}{2R}}{2}=\frac{abc}{4R}.$$

Para determinar *R*, en funcion del perímetro del triángulo, recordaremos que

$$\text{área}\ ABC=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

luégo, $$\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}=\frac{abc}{4R}$$

de donde, $$R=\frac{abc}{4\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}.$$

Ejercicio 187.—Determinar el área de un triángulo en funcion de sus tres lados, y del radio de la circunferencia inscrita á dicho triángulo.

Esplicacion.—Determinando el punto de interseccion de las bisectrices, tendremos conocido el centro de la circunferencia inscrita, quedando así, descompuesto el triángulo en otros tres, que tienen la misma altura *os*, *or*, *ot*, por ser radios de una misma circunferencia; luégo

$$\text{área } ABC = AoB + BoC + CoA =$$

$$= AB \times \frac{os}{2} + BC \times \frac{or}{2} + AC \times \frac{ot}{2} = \frac{os}{2}(AB + BC + AC) \; (1):$$

designemos por *r*, el valor *os*, por ser radio de la circunferencia, y como

$$AB = c, \; BC = a, \; AC = b.$$

y,

$$\text{área } ABC = S;$$

resulta, sustituyendo en (1)

$$S = \frac{r}{2}(a + b + c).$$

Si llamamos *2p*, al perímetro, se tiene:

$$S = \frac{r}{2} \times 2p = rp.$$

Para tener *r*, en funcion del perímetro, basta sustituir el valor,

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

luégo,

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$$

de donde, $$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Ejercicio 188.—Conociendo los tres lados, *a*, *b*, *c*, de un triángulo, determinar la relacion en que se hallan los radios de las circunferencias, inscrita y circunscrita al mismo triángulo.

Esplicacion.—Conforme á lo esplicado en los dos ejercicios anteriores, se tiene: radio de la circunferencia inscrita,

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

radio de la circunferencia circunscrita,

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}:$$

luégo,

$$\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}{\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}=\frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.$$

Ejercicio 188.—Determinar el área de un triángulo, en funcion de los radios de las cuatro circunferencias, inscrita, y ex-inscritas á dicho triángulo.

Esplicacion.—Si nos referimos en la figura, á la circunferencia *o'*, se puede suponer;

$$ABC = Ao'B + Bo'C - Ao'C = \frac{cr'}{2} + \frac{ar'}{2} - \frac{br'}{2} =$$

$$= \frac{c+a-b}{2} \times r' = \frac{2(p-b)}{2} \times r' = (p-b)r'.$$

Si á la circunferencia *o''*, resulta,

$$ABC = (p-c)\,r,''$$

Si á la circunferencia o''', se obtiene:

$$ABC = (p-a)\,r'''$$

Y por fin, si nos referimos al rádio *r* de la circuferencia interior, segun lo que hemos esplicado en ejercicios anteriores resulta, $ABC = pr$. Multiplicando, pues, las cuatro igualdades anteriores y designando por *S*, el área del triángulo *ABC* se tiene,

$$S^4 = pr \times (p-a)\,r''' \times (p-c)\,r'' \times (p-b)\,r' \,(1)$$

y como,

$$p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c) = S^2,$$

sustituyendo y simplificando al propio tiempo resulta que la igualdad (1) se transforma en,

$$S^2 = r\,r'\,r''\,r''', \text{ ó sea, } S = \sqrt{r\,r'\,r''\,r'''}$$

cuya fórmula traducida al lenguaje vulgar nos dice, que «el area de un triángulo es igual á la raiz cuadrada del producto de los cuatro rádios, correspondientes á las circunferencias inscrita y ex-inscritas al mismo triángulo.

Ejercicio 190.—Siendo *ABCD* un cuadrilátero inscrito, demostrar por las propiedades de las áreas, la relacion conocida.

$$\frac{AC}{BD}=\frac{BA \times AD + BC \times CD}{AB \times BC + AD \times DC}$$

Esplicacion.—La diagonal AC descompone el cuadrilátero $ABCD$, en dos triángulos: llamando S el área del cuádrilatero tendremos, $S = ADC + ABC$: pero el área del triángulo ABC en funcion de los lados, y del rádio r de la circuferencia, segun lo esplicado en ejercicios anteriores es

$$\text{área } ABC=\frac{AB \times BC \times AC}{4r}$$

y para el triángulo ADC, es

$$\text{área } ADC=\frac{AD \times DC \times AC}{4r}$$

luego,

$$S=\frac{AB \times BC \times AC}{4r}+\frac{AD \times DC \times AC}{4r} \quad (1)$$

Por otra parte, si en el cuadrilátero, trazamos la diagonal BD, por razones análogas á las precedentes dedúcese:

$$S=\frac{AB \times AD \times DB}{4r}+\frac{DB \times BC \times DC}{4r}$$

y como esta igualdad y (1) tienen sus dos primeros miembros iguales, se pueden igualar los segundos, omitiendo de paso el divisor $4r$ comun, así, pues, tendremos:

$$AB \times BC \times AC + AD \times DC \times AC =$$
$$= AB \times AD \times DB + DB \times BC \times DC$$

simplificando, se tiene;

$$AC(AB \times BC + AD \times DC) = BD(AB \times AD + BC \times CD):$$

luego,
$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \times AD + BC \times CD}{AB \times BC + AD \times DC}$$

Ejercicio 191.—De un punto o, tomado en el interior de un triángulo ABC, si se trazan á los lados BC, AC, y AB, las rectas cualesquiera oa, ob, oc; luégo por los vértices A, B, C, hasta los mismos lados, las paralelas Aa', Bb', Cc', á las primeras rectas: demostrar la relacion.

$$\frac{oa}{Aa'} + \frac{ob}{Bb'} + \frac{oc}{Cc'} = 1$$

Esplicacion.—Uniendo A, con o, resulta la recta Aa'', dando orígen á los dos triángulos semejantes. $Aa'a''$ y oaa''; luego podremos escribir,

$$\frac{oa}{Aa'} = \frac{oa''}{Aa''} \quad (1)$$

Uniendo B, con o, resultan otros dos triángulos semejantes, $Bb''b'$ y $ob''b$, los cuales nos dán,

$$\frac{ob}{Bb'} = \frac{ob''}{Bb''} \quad (2)$$

Por último, uniendo C, con o, dará orígen dicha recta á los dos triángulos semejantes, $cc''o$, y $c''c'C$, que permitirán escribir la proporcion siguiente:

$$\frac{co}{Cc'} = \frac{c''o}{c''C} \quad (3)$$

Sumando las igualdades (1), (2) y (3), resulta:

$$\frac{oa}{Aa'} + \frac{ob}{Bb'} + \frac{oc}{Cc'} = \frac{oa''}{Aa''} + \frac{ob''}{Bb''} + \frac{oc''}{Cc''} \quad (4)$$

Si demostramos que este segundo miembro, es igual á *1*, quedará probado el ejercicio: pues entonces resultará,

$$\frac{oa}{Aa'}+\frac{ob}{Bb}+\frac{oc}{Cc'}=1$$

Para probar que el segundo miembro de la igualdad (4) es igual á la unidad, haremos referencia á lo dicho en el ejercicio 182, del cual se deduce que:

$$\frac{oa''}{Aa''}=\frac{\text{área BoC}}{\text{área ABC}},\ \frac{ob''}{Bb''}=\frac{\text{área AoC}}{\text{área ABC}},\ \frac{oc''}{Cc''}=\frac{\text{área BoA}}{\text{área ABC}}$$

Sumando estas tres igualdades, se obtiene:

$$\frac{oa''}{Aa''}+\frac{ob''}{Bb''}+\frac{oc''}{Cc''}=\frac{\text{área BoC}}{\text{área ABC}}+\frac{\text{área AoC}}{\text{área ABC}}+\frac{\text{área BoA}}{\text{área ABC}}=$$
$$=\frac{\text{área ABC}}{\text{área ABC}}=1$$

que es lo que nos faltaba deducir.

Ejercicio 192.—Demostrar que el área de un triángulo, en funcion de sus medianas α, β, γ, se espresa por la fórmula.

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}.$$

Esplicacion.—Refirámonos al triángulo AoB, siendo α, β, γ, las tres medianas del triángulo ABC, así, pues, tendremos:

$$Ao=\frac{2}{3}\alpha,\ oB=\frac{2}{3}\beta,\ om=\frac{1}{3}\gamma$$

luégo, $$\overline{Ao}^2+\overline{oB}^2=2\overline{om}^2+2\left(\frac{Am}{2}\right)^2,$$

ó sea, $$\frac{4}{9}\alpha^2+\frac{4}{9}\beta^2=2\times\frac{1}{9}\gamma^2+2\times\frac{c^2}{4}$$

de donde, $$\frac{8}{9}\alpha^2+\frac{8}{9}\beta^2-\frac{4}{9}\gamma^2=c^2.$$

Aplicando este raciocinio á los triángulos *AoC* y *CoB*, resulta:

$$b^2=\frac{8}{9}\alpha^2+\frac{8}{9}\gamma^2-\frac{4}{9}\beta^2$$

y $$a^2=\frac{8}{9}\beta^2+\frac{8}{9}\gamma^2-\frac{4}{9}\alpha^2.$$

Considerando, ahora, que *AC*, sea la base del triángulo; *Bh* la altura, que podemos designar por *h*, nos dá el triángulo ABh.

$$h^2=c^2-\overline{Ah}^2 \text{(1) pero, } a^2=c^2+b^2-2b\times Ah,$$

de donde, $$Ah=\frac{c^2+b^2-a^2}{2b},$$

valor que sustituido en (1) dá:

$$h^2=c^2-\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2b}\right)^2.$$

Escribiendo *a*, *b*, *c*, en funcion de las medianas, resulta:

$$h^2=\frac{8}{9}\alpha^2+\frac{8}{9}\beta^2-\frac{4}{9}\gamma^2-\frac{\left(\frac{20}{9}\alpha^2-\frac{4}{9}\gamma^2-\frac{4}{9}\beta^2\right)^2}{4\left(\frac{8}{9}\alpha^2+\frac{8}{9}\gamma^2-\frac{4}{9}\beta^2\right)},$$

y multiplicando ambos miembros por b^2, y simplificando, se tiene:

$$6^2h^2=\frac{4}{9}(2\alpha^2 6^2+2\alpha^2\gamma^2+26^2\gamma^2-\alpha^4-6^4-\gamma^4)\quad(2);$$

pero el área del triángulo *ABC*, es $S=\frac{bh}{2}$, de donde,

$$b^2h^2=4S^2;$$

sustituyendo este valor en (2) resulta:

$$4S^2=\frac{4}{9}(2\alpha^2 6^2+2\alpha^2\gamma^2+26^2\gamma^2-\alpha^4-6^4-\gamma^4.)$$

Reduciendo, por fin, se obtiene la fórmula,

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{2\alpha^2 6^2+2\alpha^2\gamma^2+26^2\gamma^2-\alpha^4-6^4-\gamma^4}.$$

Ejercicio 193.—Dadas las tres alturas de un triángulo, hallar sus tres lados y su superficie.

Esplicacion.—De la figura y de lo que se ha dicho en otros ejercicios, resulta,

$$h^2=a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2\quad(1)$$

$$h'^2=c^2-\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2b}\right)^2\quad(2)$$

$$h''^2=b^2-\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}\right)^2\quad(3)$$

pero como $ah''=ch$, y $bh'=ch$, resulta:

$$a=\frac{ch}{h''}\text{ y }b=\frac{ch}{h'}.$$

Sustituyendo estos valores en (1) se tiene:

$$h^2 = \frac{c^2 h^2}{h''^2} - \frac{\left(\frac{c^2 h^2}{h''^2} + c^2 - \frac{c^2 h^2}{h'^2}\right)^2}{4c^2},$$

de cuya igualdad, se deduce;

$$c = \frac{2\, h\, h'^2 h''^2}{\sqrt{4\, h^2\, h''^2\, h'^4 - (h^2\, h'^2 + h'^2\, h''^2 - h^2\, h''^2)^2}}.$$

Para determinar el lado *b*, seguiremos el cálculo siguiente, conforme al valor *h'* de la fórmula (2).

$$h' = c^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}\right)^2;$$

y como, $c = \frac{bh'}{h}$, $a = \frac{bh'}{h''}$,

se tiene,

$$h'^2 = \frac{b^2 h'^2}{h^2} - \frac{\left(\frac{b^2 h'^2}{h^2} + b^2 - \frac{b^2 h'^2}{h''^2}\right)}{4b^2},$$

de donde:

$$b = \frac{2h^2\, h'\, h''^2}{\sqrt{4h^2\, h'^2\, h''^4 - (h'^2\, h''^2 + h^2\, h''^2 - h^2\, h'^2)^2}}$$

Para la determinacion de *a*, nos valdremos de la fórmula (3).

$$h''^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

y como $b = \frac{ah''}{h'}$, $c = \frac{ah''}{h}$, tendremos:

$$h''^2 = \frac{a^2h''^2}{h'^2} - \frac{\left(\frac{a^2h''^2}{h'^2} + a^2 - \frac{a^2h''^2}{h^2}\right)^2}{4a^2},$$

luégo,

$$a = \frac{2h'^2h^2h''}{\sqrt{4h^4h'^2h''^2 - (h^2h''^2 + h^2h'^2 - h'^2h''^2)^2}}$$

Una vez hallados los valores de a, b, c, aplicando la fórmula general, $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, se puede determinar la superficie del triángulo.

Mas, si en el ejercicio se pidiera tan solo la determinacion del área del triángulo, se podria hallar ésta directamente en funcion de las alturas, sin el intermedio de los lados, lo que simplificaria mucho la cuestion, como se puede apreciar en los cálculos siguientes:

Hemos hallado;

$$h^2 = a^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4c^2};$$

de donde;

$$4c^2h^2 = (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c);$$

siendo $\frac{ch}{2} = S$, resulta:

$$16\,S^2 = (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c) \quad (1).$$

y como, $\quad c = \frac{2S}{h},\ a = \frac{2S}{h''},\ b = \frac{2S}{h'}$:

sustituyendo estos valores en (1) resulta:

$$16S^2=\left(\frac{2S}{h''}+\frac{2S}{h}+\frac{2S}{h'}\right)\left(\frac{2S}{h''}+\frac{2S}{h}-\frac{2S}{h'}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{2S}{h'}+\frac{2S}{h''}-\frac{2S}{h}\right)\left(\frac{2S}{h'}-\frac{2S}{h''}+\frac{2S}{h}\right)$$

ó sea,

$$1=S^2\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}\right)\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h''}-\frac{1}{h'}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}-\frac{1}{h''}\right)$$

de donde,

$$S=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}\right)\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}-\frac{1}{h''}\right)\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h''}-\frac{1}{h'}\right)\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}-\frac{1}{h}\right)}}.$$

Ejercicio 194.—Los lados consecutivos de un cuadrilátero cualquiera, estando representados por *a, b, c, d*, y sus diagonales por *m* y *n;* el área de este cuadrilátero, se espresa por la fórmula,

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)\,(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)}$$

Esplicacion.—El triángulo *AoC,* viene determinado por $\frac{oC\times Ap}{2}$ (1); tomando sobre *oA*, una parte *or*, igual á la unidad lineal, bajando la *rs*, perpendicular á *DC*, tendremos dos triángulos semejantes *ors* y *oAp*, que nos dán;

$$Ap:oA::rs:1;$$

luégo $\qquad Ap=oA\times rs.$

Llamando $rs=\alpha$, se tiene, $Ap=oA\times\alpha$. Sustitúyase este valor en (1) y se tendrá:

$$\text{Area del triángulo AoC} = \frac{oC \times oA \times \alpha}{2}.$$

De un modo semejante, tendremos,

$$\text{Area del triángulo DoA} = \frac{oD \times oA \times \alpha}{2}.$$

Sumando estas dos áreas, se tiene,

$$AoC + DoA = \frac{oC \times oA \times \alpha}{2} + \frac{oD \times oA \times \alpha}{2} =$$

$$= \frac{oA\,(oC + oD)\,\alpha}{2}$$

y como $oC + oD = m$, resulta;

$$\text{área DAC} = \frac{oA \times m \times \alpha}{2}.$$

Pasando, ahora, á los dos triángulos *oBC* y *DoB*, se tiene que el área, $oBC = \frac{oC \times tB}{2}$, pero los triángulos *tBo* y *ros*; son semejantes, los cuales dán,

$$Bt : Bo :: rs : ro : \text{luégo } Bt = Bo \times \alpha.$$

Sustituyendo este valor, en la igualdad anterior, resulta:

$$\text{área oBC} = \frac{oC \times oB \times \alpha}{2},$$

y así, de un modo parecido obtendriamos;

$$\text{área DoB} = \frac{Do \times oB \times \alpha}{2}.$$

Sumando estas dos áreas, resulta:

$$oBC + DoB = \frac{oC \times Bo \times \alpha}{2} + \frac{Do \times oB \times \alpha}{2} =$$

$$= \frac{oB\,(oC + Do)\,\alpha}{2},$$

y como $oC + Do = m$, dá:

$$\text{área } DBC = \frac{oB \times m \times \alpha}{2}.$$

Así, pues,

$$\text{área total } ABCD = \text{área } DAC + \text{área } DBC =$$

$$= \frac{oA \times m \times \alpha}{2} + \frac{oB \times m \times \alpha}{2} = \frac{m\,(oA + oB) \times \alpha}{2};$$

y como $oA + oB = n$, resulta,

$$\text{área } ABCD = \frac{m \times n}{2} \times \alpha.$$

Ahora, el triángulo AoC, nos dá

$$b^2 = \overline{Ao}^2 + \overline{oC}^2 - 2 \times Co \times op \ (2).$$

El valor op, se puede deducir de los triángulos semejantes oAp y ors, que dán; $\frac{oA}{op} = \frac{or}{os}$. Y si, $os = \delta$, siendo $or = 1$, resulta, $op = oA \times \delta$, sustituyendo este valor de op, en (2) se tiene:

$$b^2 = \overline{Ao}^2 + \overline{oC}^2 - 2 \times oC \times oA \times \delta$$

Considerando, luego, el triángulo DoA, resulta por procedimientos análogos:

$$a^2 = \overline{Ao}^2 + \overline{oD}^2 + 2 \times oD \times oA \times \delta.$$

Ahora, si restamos estas dos últimas igualdades, se obtiene:

$$a^2 - b^2 = \overline{oD}^2 - \overline{oC}^2 + 2\,Ao\,(oC + oD) \times 6 =$$
$$= \overline{oD}^2 - \overline{oC}^2 + 2Ao \times n \times 6 \ (3).$$

Considerando, ahora, los dos triángulos *CoB* y *DoB*, resulta;

$$\left.\begin{array}{l} d^2 = \overline{Do}^2 + \overline{oB}^2 - 2Do \times oB \times 6 \\ c^2 = \overline{oC}^2 + \overline{oB}^2 + 2oB \times oC \times 6 \end{array}\right\}$$ Restando, estas dos igualdades, se obtiene:

$$c^2 - d^2 = \overline{oC}^2 - \overline{Do}^2 + 2oB \times n \times 6 \ (4).$$

Sumando (3) y (4) se tiene:

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2n \times 6\,(Ao + oB) = 2n \times 6 \times m$$

luégo, $6 = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2mn}$;

pero $\propto$ y 6, son los catetos del triángulo rectángulo *ors*, cuya hipotenusa es igual á la unidad, así pues;

$$\propto = \sqrt{1 - 6^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2mn}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{4m^2n^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}{4m^2n^2}} =$$
$$= \frac{1}{2mn}\sqrt{(2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)\,(2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)},$$

pero antes, hemos hallado, área ABCD $= \dfrac{mn}{2} \times \propto$, sustituyendo, pues, aquí, el valor de $\propto$ resulta:

$$\text{área } ABCD = S = \frac{mn}{2} \times$$

$$\times \frac{1}{2mn} \sqrt{(2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)}.$$

Ejercicio 195.—Determinar la fórmula

$$S = \sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d)},$$

correspondiente al área de un cuadrilátero inscriptible en una circunferencia, siendo *P*, el semi-perímetro y *a*, *b*, *c*, *d*, los cuatro lados respectivos del cuadrilátero.

Esplicacion.—El área del triángulo *ABC*, se determina por $\frac{AB \times pC}{2}$. Tomando *Br* igual á la unidad lineal, y trazando por *r*, la perpendicular *rs*, al lado *a*, resultan los triángulos semejantes, *Brs* y *BCp*, los cuales nos dan $\frac{Cp}{CB} = \frac{sr}{Br}$. Llamando $sr = \alpha$ y $Br = 1$, resulta $Cp = CB \times \alpha$: así, pues,

$$\text{área } ABC = \frac{AB \times BC \times \alpha}{2} = \frac{ab}{2} \times \alpha.$$

Considerando, ahora, el triángulo ACD, se obtiene;

$$\text{área } ADC = \frac{DC \times Aq}{2}.$$

Los triángulos rectángulos *AqD* y *Bsr*, son semejantes, pues los ángulos *pBC* y *ADC*, son iguales, por ser suplementos del mismo ángulo *ABC*: así, pues, podremos escribir la proporcion, $\frac{Aq}{AD} = \frac{sr}{Br}$; luégo, $Aq = AD \times \alpha$, de donde,

$$\text{área ADC} = \frac{DC \times AD}{2} \times \alpha = \frac{cd}{2} \times \alpha.$$

Luégo, área total *ABCD*=área ABC+área ADC=

$$= \frac{ab}{2} \times \alpha + \frac{cd}{2} \times \alpha = \frac{\alpha}{2}(ab + cd).$$

Por otra parte tenemos que los triángulos *ABC* y *ADC*, nos dán:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times Bp \\ \overline{AC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AD}^2 - 2DC \times Dq \end{array}\right\} (1).$$

Hallemos, ahora, los valores de *Bp* y *Dq*. Los triángulos semejantes *BpC* y *Bsr*, dán; $\frac{BC}{Br} = \frac{Bp}{Bs}$.

Si llamamos, $Bs = \delta$, resulta, $Bp = BC \times \delta$, y de la semejanza de los triángulos *ADq* y *Bsr*, se deduce:

$$\frac{AD}{Dq} = \frac{Br}{Bs}, \text{ ó sea, } Dq = AD \times \delta.$$

Sustituyendo estos valores en (1) tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC \times \delta \\ \overline{AC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \times DC \times AD \times \delta \end{array}\right\} \text{luego,}$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \times AB \times BC \times \delta =$$
$$= \overline{DC}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \times DC \times AD \times \delta,$$

ó sea,

$$a^2 + b^2 + 2ab \times \delta = c^2 + d^2 - 2dc \times \delta:$$

de dónde:

$$\delta = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2(ab + dc)}$$

Ahora, el triángulo *Brs*, cuyos catetos son α y β, y la hipotenusa igual á la unidad, dá:

$$\alpha^2 = 1 - \beta^2 = 1 - \left(\frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2\,(ab + dc)}\right)^2$$

Y en el supuesto de que, $a + b + c + d = 2P$, despues de la simplificacion, resulta:

$$\alpha^2 = \frac{2\,(P - d) \times 2\,(P - c) \times 2\,(P - b) \times 2\,(P - a)}{4\,(ab + cd)^2}$$

luego:

$$\alpha = \frac{2}{ab + cd} \sqrt{(P - a)(P - b)(P - c)(P - d)}.$$

y como hemos hallado, área total $ABCD = S = \frac{\alpha}{2}(ab + cd)$, sustituyendo aqui en vez de α, su valor, tendremos:

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{2\,(ab + cd)}{ab + dc} \sqrt{(P - a)(P - b)(P - c)(P - d)}$$

ó sea,

$$S = \sqrt{(P - a)(P - b)(P - c)(P - d)}.$$

NOTA.—Conviene que el alumno en estos últimos ejercicios, se esfuerce en hallar otras demostraciones de las que se representan en el texto.

Ejercicio 196.—Averiguar la fórmula:

$$S = \frac{1}{4} \frac{a + c}{a - c} \sqrt{(b + d + a - c)(b + d + c - a)(a - c + b - d)(a - c + d - b)}$$

representante del área de un trapecio, cuyos cuatro lados vienen designados por a, b, c, d, teniendo a y c, por bases.

Esplicacion.—Prolongando los lados oblícuos del trapecio, resulta el triángulo oCD, el cual nos dá;

$$\frac{a}{c}=\frac{oC}{oA}$$

ó sea, $$\frac{a-c}{a}=\frac{oC-oA}{oC}=\frac{d}{oC};\ \frac{a-c}{c}=\frac{d}{oA};$$

luégo, $$oC=\frac{ad}{a-c},\ oA=\frac{dc}{a-c}$$

y del mismo modo obtendríamos;

$$oD=\frac{ab}{a-c},\ oB=\frac{cb}{a-c}.$$

Determinando el área del triángulo oAB, por la fórmula general

$$\sqrt{p\,(p-a')\,(p-b')\,(p-c')}$$

en el supuesto de ser, ahora,

$$a'=oA=\frac{dc}{a-c};\ b'=oB=\frac{cb}{a-c},\ c'=AB=c$$

resulta:

$$AoB=\sqrt{\frac{1}{2}\left(c+\frac{dc}{a-c}+\frac{cb}{a-c}\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dc+cb}{a-c}\right)-\frac{c}{2}\right)\times \times\left(\frac{c}{2}+\frac{dc}{2(a-c)}-\frac{cb}{2(a-c)}\right)\left(\frac{c}{2}-\frac{dc}{2(a-c)}+\frac{cb}{2(a-c)}\right)}$$

luégo;

$$AoB = \frac{c^2}{4(a-c)^2}\sqrt{\left((d+b)^2-(a-c)^2\right)\left((a-c)^2-(d-b)^2.\right)}$$

Haciendo cálculos parecidos á los anteriores para determinar el área del triángulo oCD, resultará:

$$oCD = \frac{a^2}{4(a-c)^2}\sqrt{\left((p+b)^2-(a-c)^2\right)\left((a-c)^2-(d-b)^2.\right)}$$

Restando, ahora, las áreas de los triángulos oCD y oAB, tendremos el área del trapecio: así, pues,

$$\text{área } ABCD = S =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(d+b+a-c)(d+b+c-a)(a-c+d-b)(a-c+b-d)}$$

que es la fórmula que nos habíamos propuesto determinar.

Ejercicio 197.—Hallar el área de un cuadrilátero cualquiera, en funcion de las dos diagonales y de las dos rectas, que juntan los puntos medios de los lados opuestos.

Esplicacion.—Segun hemos encontrado en un ejercicio anterior, el área de un cuadrilátero viene determinada por la fórmula siguiente:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)} \quad (1).$$

Sea el cuadrilátero $ABCD$, en que $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, y $DA=d$;

Tomando los puntos medios de los lados del cuadrilátero, y los puntos medios de las diagonales, tendremos, segun se ha demostrado en ejercicios anteriores, dos paralelogramos, $ao'co$

y *bodo'*, en que las diagonales respectivas serán *oo'*, *ac* y *oo'*, *db*. Así pues, segun se demostró en el ejercicio 124, resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{ao'}^2+\overline{o'c}^2+\overline{oc}^2+\overline{oa}^2=\overline{ac}^2+\overline{oo'}^2\\ \overline{od}^2+\overline{ob}^2+\overline{bo'}^2+\overline{do'}^2=\overline{db}^2+\overline{oo'}^2\end{array}\right\}$$

Ahora, como,

$$ao'=\frac{1}{2}d=oc,\ ao=o'c=\frac{1}{2}b,$$

$$do'=ob=\frac{1}{2}a,\ od=bo'=\frac{1}{2}c,$$

resulta,

$$\frac{1}{2}d^2+\frac{1}{2}b^2=\overline{ac}^2+\overline{oo'}^2,$$

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}c^2=\overline{db}^2+\overline{oo'}^2.$$

Llamando $ac=p$, $db=q$, tendremos:

$$d^2+b^2=2p^2+2\overline{oo'}^2,$$

$$a^2+c^2=\overline{2q}^2+2\overline{oo'}^2;$$

y de estas dos igualdades se deduce:

$$a^2-b^2+c^2-d^2=2(q^2-p^2)$$

y, $$-a^2+b^2-c^2+d^2=2(p^2-q^2).$$

Sustituyendo estos nuevos valores en la fórmula (1) tendremos la fórmula pedida:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+2(q^2-p^2))(2mn+2(p^2-q^2))}$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(mn+q^2-p^2)(mn+p^2-q^2)}$$

Ejercicio 198.—Demostrar que el área de un cuadrilátero, á la vez inscriptible y circunscriptible á una circuferencia, es igual á la raiz cuadrada del producto de sus cuatro lados.

Esplicacion.—Por ser inscriptible el cuadrilátero $ABCD$, se halla sujeto á la fórmula,

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad (1)$$

y por estar al propio tiempo circunscribto, debe resultar $a + c = b + d$; luégo, como, $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} p-a = a+c-a = c \\ p-b = b+d-b = d \\ p-c = a+c-c = a \\ p-d = b+d-d = b \end{array}\right\}$$

Sustituyendo estos nuevos valores en la fórmula (1) se obtiene:

$S = \sqrt{a\ b\ c\ d}$, que es lo que queriamos demostrar.

Ejercicio 199.—Determinacion de la fórmula de *Simpson*, para averiguar el área aproximada de una superficie cerrada por una línea cualquiera.

Esplicacion.—Sea la figura $ABCD$, la cual se supone limitada por tres rectas y una curva.

Las rectas BA, cd, ba..... CD, se llaman *ordenadas*, por ser rectas perpendiculares á la base AD, la cual se supone dividida en partes iguales.

Empezaremos por determinar el área comprendida por $ABba$, que supondremos en la figura 2.ª de mayor tamaño para apreciar mejor las lineas.

Divídase Ad en tres partes iguales, y se tendrá $An = \frac{2}{3} Ad$, l uego;

$$An = nq = qa = \frac{2}{3} Ad$$

si llamamos, $Ad = m$, se tiene;

$$An = nq = qa = \frac{2}{3} m.$$

Asi, pues, resulta:

$$\text{área } ABba = ABmn + mnpq + pbaq,$$

luégo,

$$\text{área } ABba = \frac{AB + mn}{2} \times An + \frac{mn + pq}{2} \times nq$$

$$+ \frac{pq + ba}{2} \times qa = An\left(\frac{AB + 2mn + 2pq + ba}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} m \times \frac{AB + 2(mn + pq) + ba}{2} =$$

$$= \frac{1}{3} m (AB + 2(mn + pq) + ba).$$

Ahora, como se puede considerar, $\frac{mn + pq}{2} = cd$, resulta;

$$2(mn + pq) = 4cd,$$

de suerte, que,

$$\text{área } ABba = \frac{1}{3} m (AB + 4cd + ab).$$

Sustituyendo los valores de las ordenadas, tendremos.

$$\text{área } ABba = \frac{1}{3} m (y_1 + 4 y_2 + y_3).$$

Si pasamos, ahora, á determinar las otras áreas parciales, por un cálculo parecido al anterior, tendremos:

área $baa'b' = \frac{1}{3} m (y_3 + 4y_4 + y_5)$ y así siguiendo,

$$\text{área } b'a'a''b'' = \frac{1}{3} m (y_5 + 4y_6 + y_7)$$

$$\text{área } b''a''a'''b''' = \frac{1}{3} m (y_7 + 4y_8 + y_9)$$

$$\text{área } b'''a'''DC = \frac{1}{3} m (y_9 + 4y_{10} + y_{11})$$

Sumando todas estas áreas parciales tendremos el área total $ABCD = S$.

Luego,

$$S = \frac{1}{3} m (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + 4y_6 + 2y_7 + 4y_8 + 2y_9 + 4y_{10} + y_{11})$$

simplificando;

$$S = \frac{1}{3} m (y_1 + y_{11} + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}) + 2(y_3 + y_5 + y_7 + y_9))$$

Si queremos representar en su mayor grado de generalidad esta fórmula, en el supuesto de ser y_1 y_{n+1} las ordenadas estremas, tendremos:

$$S = \frac{1}{3} m (y_1 + y_{n+1} + 4 (y_2 + y_4 + \dots y_n) + 2 (y_3 + y_5 + \dots y_{n-1}))$$

Cuando se trata de aplicar esta fórmula en una figura mas irregular que la anterior, tal como se presenta en la figura 3.ª, no hay mas que considerar una recta AB como á base, trazar las ordenadas aplicando la fórmula hallada, en la parte superior é inferior de la misma, para que la suma de las dos partes nos dé el área total de la figura.

Ejercicio 200.—Determinacion de la fórmula de Poncelet, para averiguar el área aproximada de una superficie cerrada por una línea cualquiera.

Esplicacion.—Unamos, primero, por medio de rectas *B* con *b* y *u* con *C*, luego *be*, *el*, *lq*, *qu*; y por fin por *b*, *e*, *l*, *q*, *u*, tracemos tangentes á la curva *BC*, hasta encontrar las ordenadas respectivas, inmediatas. Llamando á las ordenadas, y_1, y_2.... y á la distancia constante $Aa=ad=.....=h$, tendremos, conforme á las tangentes;

$$\begin{aligned} \text{área } Bd &= 2hy_2 \\ \text{»} \quad ch &= 2hy_4 \\ \text{»} \quad gp &= 2hy_6 \\ \text{»} \quad nt &= 2hy_8 \\ \text{»} \quad sD &= 2hy_{10}. \end{aligned}$$

Sumando y llamando S, al área resultante da;

$$S=2h(y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10})$$

y si designamos por *P*, la suma de estas ordenadas pares, tendremos; $S=2hP$.

Si nos atenemos, ahora, á los trapecios que resultan en la figura al trazar las diferentes cuerdas, se tiene:

$$\text{área, } Ba=h\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right);$$

$$\text{área, } bf=2h\left(\frac{y_2+y_4}{2}\right); \text{ área, } em=2h\left(\frac{y_4+y_6}{2}\right)$$

$$\text{área, } lr=2h\left(\frac{y_6+y_8}{2}\right); \text{ área, } qv=2h\left(\frac{y_8+y_{10}}{2}\right);$$

$$\text{área, } uD=h\times\left(\frac{y_{10}+y_{11}}{2}\right)$$

luégo llamando s, al área total será;

$$s=h\frac{y_1+y_2}{2}+h\frac{y_{10}+y_{11}}{2}+$$

$$+2h\left(\frac{y_2+y_4+y_4+y_6+y_6+y_8+y_8+y_{10}}{2}\right)=$$

$$=h\frac{y_1+y_2}{2}+h\frac{y_{10}+y_{11}}{2}+h(y_2+y_{10})+2h(y_4+y_6+y_8),$$

añadiendo y quitando á la vez, $2h(y_2+y_{10})$, resulta:

$$s=h\frac{y_1+y_2}{2}+h\frac{y_{10}+y_{11}}{2}+$$

$$+h(y_2+y_{10})+2h(y_2+y_{10})-2h(y_2+y_{10})+2h(y_4+y_6+y_8)=$$

$$=h\frac{y_1+y_2+y_{10}+y_{11}}{2}-h(y_2+y_{10})+2h(y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10})=$$

$$=h\frac{y_1+y_{11}}{2}-h\frac{y_2+y_{10}}{2}+2hP=h\left(\frac{y_1+y_{11}}{2}-\frac{y_2+y_{10}}{2}+2P\right).$$

Ahora, como la verdadera área, está comprendida entre S y s, tomando un promedio entre estos valores, tendremos, salvo algun pequeño error, la espresion de la verdadera área; así, pues,

$$\frac{S+s}{2}=A=\frac{2hP+h\left(\frac{y_1+y_{11}}{2}-\frac{y_2+y_{10}}{2}+2P\right)}{2}=$$

$$=h\left(\frac{y_1+y_{11}}{4}-\frac{y_2+y_{10}}{4}+2P\right).$$

Llamando $y_1+y_{11}=E$, y, $y_2+y_{10}=E'$, resulta la fórmula final:

$$A=h\left(\frac{E-E'}{4}+2P\right).$$

Se puede determinar fácilmente el límite superior del error, pues la curva verdadera está comprendida entre S, y, $\frac{S+s}{2}$, ó entre $\frac{S+s}{2}$, y, s; pero hallando la diferencia que existe entre estas áreas, se obtiene;

$$S-\frac{S+s}{2}=\frac{S-s}{2},$$

ó

$$\frac{S+s}{2}-s=\frac{S-s}{2},$$

lo que da el mismo valor, representando esta espresion, el mayor valor que pueda alcanzar, la diferencia entre el área verdadera, y el área deducida por la fórmula de Poncelet. Así, pues, como conocemos el valor de *S*, y *s*, podremos determinar el límite superior del error,

$$\frac{S-s}{2}=\frac{2Ph-h\left(\frac{E-E'}{2}+2P\right)}{2}=\frac{E'-E}{4}\times h$$

ó sea,

$$\left(\frac{E'}{2}-\frac{E}{2}\right)\frac{h}{2},$$

y como se desprende de la figura, resulta:

$$\frac{E'}{2}=mP;\frac{E}{2}=mQ.$$

De modo que el límite superior del error es;

$$(mP-mQ)\frac{h}{2}=PQ\times\frac{h}{2},$$

valor, que puede determinarse fácilmente.

La fórmula de Poncelet, es preferible á la de Simpson, porque no necesita calcular mas que las ordenadas pares; y sobre todo porque dá el valor del área con mas aproximacion.

PROBLEMAS NUMÉRICOS.

Problema 1.º—Convertir $38^{\circ}\ 35'\ 24''$ del sistema sexagesimal al centesimal.

Redúzcanse los $35'\ 24''$ á fraccion decimal de grado. De modo que $38^{\circ}\ 35'\ 24' = 38^{\circ},59$. Ahora en virtud de la proporcion $90^{\circ} : 100^{g}. :: 38^{\circ}, 59 : x$, ó sea, $9^{\circ} : 10^{g}. :: 38^{\circ}, 59 : x$, se obtiene para x,

$$x = \frac{10 \times 38^{\circ},59}{9} = 42^{g}.\ 8777$$

valor que podemos representar por $42^{g}.\ 87'\ 77''$ en el sistema centesimal, equivalente á $38^{\circ}\ 35'\ 24''$ del sistema sexagesimal.

Problema 2.º—Convertir $42^{g}.\ 87'\ 77''$ del sistema centesimal al sexagesimal.

Estableciendo la proporcion general

$$9 : 10 :: x : 42^{g}\ 8777 \text{ resulta, } x = \frac{9 \times 42'8777}{10} = \frac{385'8993}{10} =$$
$$= 38^{\circ}, 58993,$$

evaluando la parte decimal, en minutos y segundos, resulta; $38^{\circ}, 58993 = 38^{\circ}\ 35'\ 24''$, valor en el sistema sexagesimal, equivalente á $42^{g}\ 87'\ 77''$ del sistema centesimal.

Problema 3.º—Resultados numéricos, en algunos polígonos regulares, de las relaciones que existen entre lados, apotemas, áreas y radios de las circunferencias circunscritas á los mismos.

Nota.—En los desarrollos siguientes, supondremos siempre

$\sqrt{2} = 1'4142136$, $\sqrt{3} = 1'7320508$, $\sqrt{5} = 2'236068$ y $\sqrt{15} = 3'8729833$.

Lados en funcion del radio.

$R = 1$

Triángulo. . .	$L = R\sqrt{3}$	$L = \sqrt{3}$	$L = 1'7320508$.
Cuadrado. . .	$L = R\sqrt{2}$	$L = \sqrt{2}$	$L = 1'4142136$.
Pentágono. . .	$L = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.	$L = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.	$L = 1'1755705$.
Exágono. . .	$L = R$.	$L = 1$.	$L = 1'0000000$.
Decágono. . .	$L = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$. .	$L = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. .	$L = 0'6180340$.

Pentadecágono.

$$L = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right)$$

$$L = \frac{1}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right)$$

$$L = 0'4158234.$$

Radios en funcion del lado.

		$L=1$	
Triángulo. . . .	$R=\frac{L}{3}\sqrt{3}$	$R=\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$R=0'5773503.$
Cuadrado. . . .	$R=\frac{L}{2}\sqrt{2}$	$R=\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$R=0'7071068.$
Pentágono. . . .	$R=\frac{L}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$.	$R=\frac{1}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$.	$R=0'8506508.$
Exágono.	$R=L$	$R=1$	$R=1'0000000.$
Decágono. . . .	$R=\frac{L}{2}(\sqrt{5}+1)$ . . .	$R=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ . . .	$R=1'6180340.$

Pentadecágono.

$$R=\frac{1}{\frac{L}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)}$$

$$R=\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)}$$

$$R=2'4048670.$$

Apotemas en funcion del lado.

		$L=1$	
Triángulo. . . .	$a=L\frac{\sqrt{3}}{6}$.	$a=\frac{\sqrt{3}}{6}$.	$a=0'2886751$.
Cuadrado. . . .	$a=\frac{L}{2}$.	$a=\frac{1}{2}$.	$a=0'5000000$.
Pentágono.. . .	$a=\frac{L}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.	$a=\frac{1}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.	$a=0'6881909$.
Exágono.. . . .	$a=\frac{L}{2}\sqrt{3}$.	$a=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.	$a=0'8660254$.
Decágono. . . .	$a=\frac{L}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. .	$a=\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. .	$a=1'5388417$.
Pentadecágono.	$a=$.	$a=\frac{1}{2}\sqrt{4(2'4048670)^2-1}$.	$a=2'3523149$.

Apotemas en funcion del radio.

$R = 1$

Triángulo. . . .	$a = \frac{R}{2}$	$a = \frac{1}{2}$	$a = 0'5000000.$
Cuadrado. . . .	$a = \frac{R}{2}\sqrt{2}$	$a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$a = 0'7071068.$
Pentágono.. . .	$a = \frac{R}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ . .	$a = \frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ . .	$a = 0'8090170.$
Exágono.. . . .	$a = \frac{R}{2}\sqrt{3}$	$a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$a = 0'8660254.$
Decágono. . . .	$a = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ ..	$a = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ ..	$a = 0'9510565.$
Pentadecágono.	$a =$	$a = \frac{1}{2}\sqrt{4-(0'415823)^2}$.	$a = 0'9781476.$

Áreas.

$$A = \frac{P}{2} \times a.$$

Areas en funcion del lado.

$$L = 1$$

Triángulo. . . .	$A = \frac{L^2}{4}\sqrt{3}$	$A = \frac{1}{4}\sqrt{3}$	$A = 0'4330127.$
Cuadrado. . . .	$A = L^2$.	$A = 1$.	$A = 1'0000000.$
Pentágono. . . .	$A = \frac{L^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.	$A = \frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.	$A = 1'7204774.$
Exágono.	$A = \frac{3}{2}L^2\sqrt{3}$	$A = \frac{3}{2}\sqrt{3}$	$A = 2'5980762.$
Decágono. . . .	$A = \frac{5}{2}L^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$A = \frac{5}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ . .	$A = 7'6942088.$
Pentadecágono.	$A =$	$A = \frac{15}{2} \times 2'3523149$. .	$A = 17'6423617.$

Areas en funcion del radio

$R = 1$

Triángulo. . . .	$A = \frac{3}{4} R^2 \sqrt{3}$	$A = \frac{3}{4} \sqrt{3}$	$A = 1'2990381.$
Cuadrado. . . .	$A = 2 R^2$	$A = 2$	$A = 2'0000000.$
Pentágono.. . .	$A = \frac{5}{8} R^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$A = \frac{5}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$A = 2'3776413.$
Exágono.. . . .	$A = \frac{3}{2} R^2 \sqrt{3}$	$A = \frac{3}{2} \sqrt{3}$	$A = 2'5980762.$
Decágono. . . .	$A = \frac{5}{8} R^2 (\sqrt{5} - 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$A = \frac{5}{8} (\sqrt{5} - 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$A = 2'9389263.$
Pentadecágono.	$A =$	$A = \frac{0'415823 \times 15}{2} \times 0'97815..$	$A = 3'0505295.$

Problema 4.º—Determinar el valor angular del arco ρ. cuya longitud es igual al radio.

La circuferencia contiene 1296000″ del sistema sexagesimal: luego la longitud de 1″ vendrá representada por $\frac{2\pi r}{1296000}$, y conforme á la proporcion $\frac{2\pi r}{1296000} : 1'' : : r : \rho$, resulta que ρ nos dará en segundos el valor angular del arco cuya longitud es igual al radio: de donde,

$$\rho = \frac{1296000}{2\pi} = 206264'',81 = 57^\circ\,17'\,44'',81$$

Diferentes valores de ρ, en grados, en minutos, y en segundos.

$\rho^\circ = 57^\circ,295779513$.	log. $\rho^\circ = 1'7581226$.
$\rho' = 3437',746770785$.	log. $\rho' = 3'5362739$.
$\rho'' = 206264'',806247096$. . .	log. $\rho'' = 5'3144251$.

Problema 5.º—Diferentes valores dependientes de π.

$\pi = 3'141592653589793$. . . .	log. $\pi = 0'4971498726 94$.
$2\pi = 6'283185307$.	log. $2\pi = 0'7981799$.
$3\pi = 9'424777961$.	log. $3\pi = 0'9742711$.
$\frac{1}{2}\pi = 1'570796327$.	log. $\frac{1}{2}\pi = 0'1961199$.
$\frac{1}{3}\pi = 1'047197551$.	log. $\frac{1}{3}\pi = 0'0200286$.
$\frac{1}{\pi} = 0'318309886$.	log. $\frac{1}{\pi} = \overline{1}'5028501$.
$\frac{1}{2\pi} = 0'159154944$	log. $\frac{1}{2\pi} = \overline{1}'2018201$.
$\pi\sqrt{2} = 4'44288938$.	log. $\pi\sqrt{2} = 0'6476649$.

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2'22144469. \;.\;.\;.\;.\; \log.\ \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 0'3466349.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0'450158158.. \;.\;.\;.\; \log.\ \frac{\sqrt{2}}{\pi} = \overline{1}'5533651.$$

$$\sqrt{\pi} = 1'772453851. \;.\;.\;.\; \log.\ \sqrt{\pi} = 0'2485750.$$

$$2\sqrt{\pi} = 3'544907702.. \;.\;.\;.\; \log.\ 2\sqrt{\pi} = 0'5496050.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0'886226926. \;.\;.\;.\; \log.\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \overline{1}'9475450.$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1'253314137.. \;.\;.\; \log.\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0'0980600.$$

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0'564189584. \;.\;.\; \log.\ \sqrt{\frac{1}{\pi}} = \overline{1}'7514250.$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0'797884561. \;.\;.\; \log.\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \overline{1}'9019400.$$

$$\pi^2 = 9'869604401. \;.\;.\;.\;.\;.\; \log.\ \pi^2 = 0'9942997.$$

$$\frac{1}{\pi^2} = 0'101321184.. \;.\;.\;.\;.\; \log.\ \frac{1}{\pi^2} = \overline{1}'0057003.$$

Problema 6.°—Diferentes espresiones que dán aproximadamente el valor de π.

Fórmula de Arquímedes. . . . . . $\frac{22}{7}$

» » Rivard. . . . . . $\frac{333}{106}$

» » Adriano Mecio. . . . . $\frac{355}{113}$

Si reducimos á fraccion contínua el valor de $\pi = 3'14159$..... encontramos:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \dots}}}}$$

$$\frac{3}{1} \quad \frac{22}{7} \quad \frac{333}{106} \quad \frac{355}{113} \dots\dots\dots$$

en donde es de ver que la 2.ª, 3.ª y 4.ª reducidas, nos dán respectivamente las fórmulas numéricas de Arquímedes, Rivard y Adriano Mecio.

El lado del cuadrado, mas el del triángulo inscritos en una misma circuferencia, dán aproximadamente la rectificacion de media circunferencia, ó sea el valor de π: pues siendo el radio igual á la unidad, resulta:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1'4142136 + 1'7320508 = 3'1462644.$$

Fórmula de Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12.14.14.16.16.18.18\dots\dots}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13.13.15.15.17.17.19.19\dots\dots}$$

Tomando un número limitado de factores tendremos una aproximacion del valor de π, multiplicando el 2.º miembro por 2; así, pues, resulta:

$$2 \times \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12.14.14.16.16.18.18\dots\dots}{1.3.3.5.5.7.7.9.9\ 11.11.13.13.15.15.17.17.19.19\dots\dots} =$$

$$= \frac{69039237051187200}{22561587455281875} = 3'0600$$

Este valor es el de π, en menos error de una décima, y se comprende que para tener el valor de π, por medio de esta fórmula notable de Wallis, fuera preciso tomar muchos factores en los dos términos del quebrado anterior.

Segun Schwab la cantidad $\frac{1}{\pi}$, representa el límite hácia el cual tienden varios números que partiendo de 0 y $\frac{1}{2}$, se van sucediendo por una série no interrumpida de medios aritméticos y medias proporcionales, entre los dos valores precedentes.

Llamando a_1, a_2, a_3.... los medios aritméticos y r_1, r_2, r_3.... las medias proporcionales, se obtiene la série de valores siguientes:

$a_1 = 0'2500000$. . . . . . $r_1 = 0'3535534$
$a_2 = 0'3017767$. . . . . . $r_2 = 0'3266407$
$a_3 = 0'3142087$. . . . . . $r_3 = 0'3203645$
$a_4 = 0'3172866$. . . . . . $r_4 = 0'3188218$
$a_5 = 0'3180542$. . . . . . $r_5 = 0'3184377$
$a_6 = 0'3182459$. . . . . . $r_6 = 0'3183418$
. . . .

Para r_6 se encuentra el valor de $\frac{1}{\pi}$, representado por 0'3183, en menos error de una milésima: dividiendo, pues, la unidad por 0'3183 resultará 3'142, que es el valor de π, en menos error de una milésima.

Fórmula de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right).$$

Tomando solo tres términos de ambos paréntesis, viene el valor de $\frac{\pi}{4}$ representado por

$$4 \times 0'1973973333334 - 0'0041840760018.$$

De donde $\pi = 3'14162$...... Con esta fórmula se puede hallar el valor de π con bastante aproximacion.

Problema 7.º—Deducir la fórmula

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \ldots\ldots$$

ó sea su trasformada

$$\pi = \text{límite } 2^m \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}$$

Demostracion.—Sabemos que el lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia, en funcion del radio R de ésta, y del lado a del polígono regular, que tiene mitad número de lados que el dado, es:

$$a' = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - a^2})}.$$

Siendo $R = 1$ resulta;

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}};$$

Ahora, como $4 - (4 - a^2) = a^2$, puede escribirse:

$$(2 + \sqrt{4 - a^2})(2 - \sqrt{4 - a^2}) = a^2;$$

luégo,
$$2 - \sqrt{4 - a^2} = \frac{a^2}{2 + \sqrt{4 - a^2}},$$

y como $2 - \sqrt{4 - a^2} = a'^2$, se tiene:

$$a' = \frac{a}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a^2}}}.$$

Si empezamos á considerar el cuadrado, sabemos que $a = R\sqrt{2}$, y como $R = 1$, se deduce: $a^2 = 2$. En este concepto resulta para el octógono:

$$a' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - 2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Pasando á un polígono de 16 lados, tendremos:

$$a'' = \frac{a'}{\sqrt{2+\sqrt{4-a'^2}}} = \frac{\dfrac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{4-\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{4-\dfrac{2(2-\sqrt{2})}{4-2}}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{4-2+\sqrt{2}}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

El perímetro del polígono de que se trata, será igual al valor anterior multiplicado por *16,* ó sea,

$$\frac{2\times 2^4}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

y la relacion entre el semi-perímetro y el diámetro de la circunferencia circunscrita á dicho polígono, será la cuarta parte del valor anterior, ó sea:

$$\frac{2^3}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} =,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

Por la ley que se descubre en este valor, puede deducirse sin necesidad de repetir el cálculo, que la relacion que habria entre el semi-perímetro de un polígono de 32 lados, y el diámetro de la circunferencia circunscrita al mismo, vendria representada por,

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot$$

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\cdots$$

Ahora bien, como aumentando el número de lados de los polígonos inscritos, nos vamos acercando á la circunferencia, resulta, que continuando los factores del valor anterior indefinidamente, podremos considerar su límite como representante de la relacion entre la semi-circunferencia y el diámetro, de modo que;

$$\frac{\frac{c}{2}}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\cdots;$$

pero siendo $R=1$, resulta ser, $\frac{c}{2}=\pi$: luego tendremos por fin,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot$$

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\cdots$$

Esta fórmula conviene modificarla en la práctica, lo que se puede lograr por los cálculos siguientes:

Para mayor sencillez supondremos solo tres factores, y as tendremos:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$= \frac{2^2\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$= \frac{2^2\sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}}{(2+\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}\,(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}\,(2-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}\,(2-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})}{2-\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}\,(2-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times$$
$$\times (2-\sqrt{2+\sqrt{2}})\,(2+\sqrt{2}) =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\sqrt{(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})^2} =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sqrt{(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})(4-2-\sqrt{2})} =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\sqrt{4-2}\,\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Si en vez de tomar tres factores de la fórmula, hubiésemos tomado cuatro, hubiera resultado;

$$2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

Si tomamos m, factores, en el concepto de que m, aumente indefinidamente, sabemos que nos dará el valor de $\frac{\pi}{2}$; así, pues,

$$\frac{\pi}{2} = \text{límite } 2^{m-1} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

ó sea,

$$\pi = \text{límite } 2^{m} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

habiendo *m*, radicales.

Para comprobar dicha fórmula, basta tomar un número limitado de radicales, y ver como se halla con cierto grado de aproximacion el valor de π.

Tomemos cinco radicales, y la fórmula general se trasformará en:

$$2^5 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} =$$

$$= 2^5 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3'4142135623730950488016887}}}} =$$

$$= 2^5 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3'847759065023}}}.$$

Para hallar dicha última raiz cuadrada, con mayor número de cifras decimales, podremos escribir ceros á la derecha del decimal hallado, resultando en este caso el valor de π, aproximado por defecto; así, pues, escribiremos:

$$2^5 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3'8477590650230000000000000}}} =$$

$$= 2^5 \sqrt{2 - \sqrt{3'961570360806}} = 2^5 \sqrt{2 - 1'990369} =$$

$=2^5 \sqrt{0'0096310000}=2^5\times 0'09813=32\times 0'009813=3'14016,$ y este resultado representa el valor de π, exactamente hasta las centésimas. Tomando un número mayor de radicales, así como un mayor grado de aproximacion en las raices cuadradas de la cifra *2*, hubiéramos obtenido el valor de π, con menos error.

Problema 8.º—Determinacion aproximada del valor de π, por los tres métodos denominados; de los perímetros, de los isoperímetros y de las áreas.

MÉTODO DE LOS PERÍMETROS.

Para hallar el valor de π, por este procedimiento, se suponen en una circunferencia dos polígonos regulares, de igual número de lados, uno inscrito y otro circunscrito; y duplicando, luégo, respectivamente los lados de estos dos polígonos, iremos multiplicando indefinidamente los lados de los polígonos inscritos y circunscritos, con la particularidad de que los perímetros de estos polígonos se irán acercando al perímetro de la circunferencia. Hallando las relaciones de los perimetros de estos polígonos, con el diámetro de la circunferencia, iremos estrechando sus valores, hasta tanto que encontremos un cierto número de cifras iguales, tanto para los polígonos inscritos como para los circunscritos, cuyas cifras se podrán tomar como verdaderamente representantes de la relacion de la circunferencia al diámetro, ó sea del valor de π. Las fórmulas, que permiten pasar de unos polígonos á otros, de duplo número de lados, son los siguientes:

1.ª Fórmula referente á los polígonos inscritos

$$l'=\sqrt{r\left(2r-\sqrt{4r^2-l^2}\right)}$$

r, radio de la circunferencia; l, lado del primer polígono inscrito; l', lado del nuevo polígono inscrito de duplo número de lados que el primero. Esta fórmula se puede trasformar por medio de la general

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

en $$l'=\sqrt{r\left(r+\frac{l}{2}\right)}-\sqrt{r\left(r-\frac{l}{2}\right)},$$

mas conveniente para las aplicaciones.

La segunda fórmula referente á los polígonos circunscritos es:

$$L'=\frac{Lr}{r+\sqrt{r^2+\frac{L^2}{4}}}$$

siendo r, el radio de la circunferencia; L, el lado del primer polígono circunscrito; y L', el lado del nuevo polígono circunscrito, de duplo número de lados que el primero.

Ahora bien; partiendo del exágono y tomando por unidad el diámetro, resulta que los perímetros de los diferentes polígonos que irán resultando, conforme á las dos fórmulas precitadas, irán acercándose al verdadero valor de π. Y como en este caso resulta para el perímetro del exágono inscrito el valor numérico 3, y para el circunscrito $2\sqrt{3}$, con estos valores se puede ya establecer la tabla siguiente, mediante la aplicacion de las dos fórmulas conocidas.

Número de lados.	Perímetros de los polígonos inscritos.	Perímetros de los polígonos circunscritos.
6	3'00000	3'46415
12	3'10582	3'21539
24	3'13262	3'15966
48	3'13935	3'14608
96	3'14103	3'14271
192	3'14145	3'14187
384	3'14155	3'14166
. . .	. . .	. . .

Al llegar á un polígono de 384 lados, se vé que se obtiene el valor de π, en menos error de una diez milésima.

MÉTODO DE LOS ISOPERÍMETROS.

Para determinar el valor de π, por este segundo procedimiento, necesitamos tambien dos fórmulas que nos permitan pasar de un polígono á otro, duplicando sucesivamente sus lados, pero con la condicion de que todos estos polígonos, tengan igual perímetro, aproximándose á una circunferencia. Las dos fórmulas en este caso representan el radio recto y oblícuo de cada uno de los polígonos, cuyos valores se van igualando poco á poco, hasta tanto que resultan varias cifras comunes que deben considerarse éstas como el valor del radio de la circunferencia que se busca, y como se conoce el perímetro de la circunferencia: puesto que ha de ser igual al del primer polígono, se determina, el valor de π, por medio de la fórmula $\frac{c}{2r}=\pi$. Las dos fórmulas generales que necesitamos son:

$$r'=\frac{1}{2}(R+r),\ R'=\sqrt{Rr'}\,;$$

r y R, representan los radios recto y oblícuo del primer polígono, y r', R', los radios recto y oblícuo del nuevo polígono de duplo número de lados que el primero, siendo isoperímetro con este.

Así, partiendo del cuadrado, suponiendo el lado igual á la unidad, resulta:

$$r=\frac{1}{2},\ y,\ R=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Teniendo determinados estos primeros valores, podemos, por medio de las fórmulas generales, deducir la tabla siguiente:

Número de lados.	Radios rectos.	Radios oblícuos.
4 . . .	$r\ =0'5000000$ . . .	$R\ =0'7071068$
8 . . .	$r^{I}\ =0'6035534$ . . .	$R^{I}\ =0'6532815$
16 . . .	$r^{II}\ =0'6284174$ . . .	$R^{II}=0'6407289$
32 . . .	$r^{III}=0'6345731$ . . .	$R^{III}=0'6376435$
64 . . .	$r^{IV}=0'6361083$ . . .	$R^{IV}=0'6368754$
128 . . .	$r^{V}\ =0'6364919$ . . .	$R^{V}\ =0'6366836$
256 . . .	$r^{VI}=0'6365878$ . . .	$R^{VI}=0'6366357$

. . . .

Al llegar á un polígono de 256 lados, observamos que la diferencia que existe entre el radio recto y oblícuo de dicho polígono, es menor que una diez milésima: así, pues, tomando, por verdadero valor del radio de la circunferencia que se busca *0'6366*, resultará:

$$\frac{c}{2r}=\frac{4}{1'2732}=3'14169.....$$

espresion que da el valor de π exactamente hasta las milésimas inclusive.

MÉTODO DE LAS ÁREAS.

Se determinará el valor de π, por este tercer procedimiento, conociendo las dos fórmulas

$$A'=\sqrt{AB}\ ,\ B'=\frac{2AB}{A+\sqrt{AB}},$$

en que A y B, representan las áreas de dos polígonos de igual número de lados, uno inscrito y otro circunscrito á una circunferencia de radio 1: A' y B' representan las áreas respectivas de otros dos polígonos de duplo número de lados que los dos primeros y tambien uno inscrito y el otro circunscrito á la misma circunferencia. Aplicando estas dos fórmulas por el mismo estilo del metodo de los perímetros, resulta que á medida que vamos aumentando indefinidamente los lados de los dos polígonas inscrito y circunscrito, estas dos áreas se van aproximando al área del círculo, y por esto, continuando los cálculos, se llegan á tener varias cifras iguales, cuyas cifras se podrán tomar como representantes del valor de π, pues siendo πr^2, la fórmula del área del círculo, si $r=1$, resulta que π, representa precisamente el área del círculo.

Conviene en este caso, empezar por el cuadrado, porque así, las áreas del cuadrado inscrito y circunscrito á la circunferencia, se espresan sencillamente, por los númerós 2 y 4; y con estos dos valores numéricos y las dos fórmulas generales, podremos deducir la tabla de valores siguiente:

Número de lados.	Áreas de los polígonos inscritso.	Áreas de los polígonos circunscrios
4	2	4
8	2'82843	3'31371
16	3'06147	3'18260
32	3'12144	3'15173
64	3'13655	3'14412
128	3'14033	3'14223
256	3'14128	3'14175

Al llegar á un polígono de 256 lados, podemos notar que se halla el valor de π, exactamente hasta tres cifras decimales; si se deseara mayor aproximacion, habria necesidad de tomar un número de decimales mayor que el que hemos supuesto en la tabla, continuando duplicando indefinidamente los lados de los polígonos hasta obtener la aproximacion que fuese de desear.

Problema 9.º—Valor del área del cuadrante de círculo, valiéndose de las fórmulas de Simpson y Poncelet.

Para determinar con bastante aproximacion dicha área, dividiremos el radio en 100 partes iguales, hallando el valor numérico de las ordenadas y_1, y_2, y_3..... valores que son fáciles de hallar por ser dichas ordenadas catetos de triángulos rectángulos, que tienen todos por hipotenusa el radio de la circunferencia, que se puede suponer igual á la unidad, y por cateto conocido una parte alícuota del radio, ó sea de la unidad.

Ejecutando los cálculos se obtiene la tabla de valores siguiente:

y_1 . .	1'00000000	y_9 . .	0'99679486
y_2 . .	0'99994999	y_{10} . .	0'99594176
y_3 . .	0'99979998	y_{11} . .	0'99498743
y_4 . .	0'99954989	y_{12} . .	0'99393158
y_5 . .	0'99919967	y_{13} . .	0'99277389
$_6$ . .	0'99874921	y_{14} . .	0'99151399
$_7$ . .	0'99819837	y_{15} . .	0'99015150
$_8$.	0'99754699	y_{16} . .	0'98868599

y_{17} . .	0'98711701	y_{56} . .	0'83516465
y_{18} . .	0'98544406	y_{57} . .	0'82849260
y_{19} . .	0'98366661	y_{58} . .	0'82164469
y_{20} . .	0'98178409	y_{59} . .	0'81461647
y_{21} . .	0'97979589	y_{60} . .	0'80740324
y_{22} . .	0'97770137	y_{61} . .	0'80000000
y_{23} . .	0'97549986	y_{62} . .	0'79240141
y_{24} . .	0'97319062	y_{63} . .	0'78460180
y_{25} . .	0'97077288	y_{64} . .	0'77659513
y_{26} . .	0'96824583	y_{65} . .	0'76837490
y_{27} . .	0'96560861	y_{66} . .	0'75993420
y_{28} . .	0'96286032	y_{67} . .	0'75126559
y_{29} . .	0'96000000	y_{68} . .	0'74236109
y_{30} . .	0'95702664	y_{69} . .	0'73321211
y_{31} . .	0'95393920	y_{70} . .	0'72380936
y_{32} . .	0'95073655	y_{71} . .	0'71414284
y_{33} . .	0'94741754	y_{72} . .	0'70420167
y_{34} . .	0'94398093	y_{73} . .	0'69397406
y_{35} . .	0'94042543	y_{74} . .	0'68344714
y_{36} . .	0'93674969	y_{75} . .	0'67260686
y_{37} . .	0'93295230	y_{76} . .	0'66143782
y_{38} . .	0'92903175	y_{77} . .	0'64992307
y_{39} . .	0'92498648	y_{78} . .	0'63804388
y_{40} . .	0'92081485	y_{79} . .	0'62577951
y_{41} . .	0'91651513	y_{80} . .	0'61310684
y_{42} . .	0'91208552	y_{81} . .	0'60000000
y_{43} . .	0'90752410	y_{82} . .	0'58642987
y_{44} . .	0'90282990	y_{83} . .	0'57236352
y_{45} . .	0'89799777	y_{84} . .	0'55776339
y_{46} . .	0'89302855	y_{85} . .	0'54258639
y_{47} . .	0'88791891	y_{86} . .	0'52678268
y_{48} . .	0'88266641	y_{87} . .	0'51029403
y_{49} . .	0'87726848	y_{88} . .	0'49305172
y_{50} . .	0'87172243	y_{89} . .	0'47497368
y_{51} . .	0'86602540	y_{90} . .	0'45596052
y_{52} . .	0'86017440	y_{91} . .	0'43588989
y_{53} . .	0'85416626	y_{92} . .	0'41460824
y_{54} . .	0'84799764	y_{93} . .	0'39191835
y_{55} . .	0'84166501	y_{94} . .	0'36755951

y_{95} . .	0'34117444	y_{99} . .	0'19899748
y_{96} . .	0'31224989	y_{100} . .	0'14106735
y_{97} . .	0'28000000	y_{101} . .	0'00000000
y_{98} . .	0'24310491		

Suma de las ordenadas impares, escepto las dos estremas. . . . . 38'72835616

Suma de las ordenadas pares. . . . . . 39'28207015

APLICACION DE LA FÓRMULA DE SIMPSON.

$$S=\frac{1}{300}\Big(y_1+y_{101}+2(y_3+y_5+\cdots y_{99})+4(y_2+y_4+\cdots y_{100})\Big)=$$

$$=\frac{1}{300}(1+77'45671232+4\times 39'28207015)=$$

$$=\frac{1}{300}\times 235'58499292=0'78528330.....$$

APLICACION DE LA FÓRMULA DE PONCELET.

$$S=h\left(2P+\frac{E-E'}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{100}\left(2(y_2+y_4+\dots y_{100})+\frac{(y_1+y_{101})-(y_2+y_{100})}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{100}\left(78'564140+\frac{1-1'14101734}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{100}(78'564140-0'0352543)=\frac{1}{100}\times 78'528886=0'78528886.$$

Siendo el radio del cuadrante, que se considera igual á la unidad, el área del cuarto de círculo, segun las cifras verdaderas de π, será

$$\frac{\pi}{4}=0'78539816.$$

Comparando este resultado con cada uno de los obtenidos, segun las dos fórmulas anteriores, resulta:

Error segun la fórmula de Simpson. 0'00011486 $\begin{cases} 0'78539816 \\ 0'78528330 \end{cases}$

» » » » » Poncelet. 0'00010930 $\begin{cases} 0'78539816 \\ 0'78528886 \end{cases}$

Límite superior del error segun la fórmula de Poncelet.

$$\frac{h}{2}\left(\frac{E'-E}{2}\right)=\frac{1}{100}\times 0'03525434=0'00035254.....$$

Luégo el error, 0'0001093, que hemos hallado, es menor que este límite.

FIN.

ERRATAS IMPORTANTES.

Página.	Línea.	Dice.	Debe decir.
13	1	las longitudes.	las de las longitudes
15	16	se'.	se
22	10	AB'.	BB'
27	17	O.	OI
38	— 4	afcd.	afed
43	—11	DB.	AB
46	1	rp.	rB
50	11	af.	of
54	9	M.	m
	11	M.	m
55	19	A'oP.	A'oP'
67	15	AA' = BB'.	CC' = BB'
76	16	AM×NP.	AM×NB
83	1	de dos cuadrados.	de los cuadrados
	9	$\overline{2An}^2+\overline{2nC}^2$.	$2\overline{An}^2+2\overline{nC}^2$
84	—11	$\overline{2An}^2+\overline{2Dn}^2$.	$2\overline{An}^2+2\overline{Dn}^2$
	—10	$\overline{2nB}^2+\overline{2Dn}^2$.	$2\overline{nB}^2+2\overline{Dn}^2$
92	1	$bc=x^2+CD+CB$.	$bc=x^2+CD\times DB$.
95	— 3	$\frac{b-a}{a}$.	$\frac{b-a}{b}$
98	— 5	An.	an
120	1	triángulo inscrito.	triángulo equilátero inscrito
129	4	$\frac{r^2}{2}\sqrt{3}\,r^2+\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$.	$\frac{r^2}{2}\sqrt{3}+r^2\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$
139	10	bcde.	abde
161	1	$\epsilon^2\,h^2$.	b^2h^2
172	5	$(p+b)^2$.	$(d+b)^2$

Precio de esta obra: 20 rs. en España y 24 en Ultramar.

Se halla de venta en las principales librerías de España.

Los pedidos de alguna consideracion pueden hacerse directamente al Autor.