NUEVO METODO

DE

ENSEÑANZA MATEMÁTICA

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa
Delegado de la Comisión Internacional de la enseñanza matemática
y miembro de otras Asociaciones matemáticas

ZARAGOZA
Tipografía de Casañal, Coso, 98
1911

1912 A H

NUEVO MÉTODO

DE

ENSEÑANZA MATEMÁTICA

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa
Ex-Delegado de la Comisión Internacional de la enseñanza matemática
y miembro de otras Asociaciones matemáticas

ZARAGOZA
Artes Gráficas, de Casañal, Coso, 98
1912

NUEVO METODO

DE

ENSEÑANZA MATEMÁTICA

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa
Delegado de la Comisión Internacional de la enseñanza matemática
y miembro de otras Asociaciones matemáticas

ZARAGOZA
Tipografía de Casañal, Coso, 98
1911

PRELIMINARES

I

El problema de la enseñanza preocupa hoy á nuestros legisladores que intentan reformas sucesivas para obtener alguna mejora en este sentido.

Este problema tiene dos aspectos: externo é interno, dos extensiones: la individual y la social.

La satisfacción de estos cuatro puntos de vista constituye la perfección de la enseñanza.

La educación extensiva, como se realiza en los Estados Unidos, donde todo ciudadano está obligado á recibir la instrucción que se da en los establecimientos medios, crea la gran masa intelectual de donde salen los sabios que dirigen y los obreros que realizan las concepciones de aquéllos.

La inmensidad de los descubrimientos teóricos y de sus aplicaciones así lo exigen.

En todo territorio donde ha de sostenerse la vida, debe haber accidentes, llanuras donde se han de producir abundantes cosechas, altas cumbres desde las que deben descender las corrientes fertilizantes de los ríos. Así ha de ser la sociedad. La enseñanza ha de atender á estos dos fines.

Para elevarse una nación, ha de tener un grado de intelectualidad que le libre de la dependencia de otras naciones más adelantadas, para reducir la importación de productos. Sin esto, la educación general resultaría estéril, como en la guerra las armas de corto alcance.

Hoy entre nosotros domina la corriente simpática hacia la educación general de aumentar las escuelas para reclutar los ejércitos que han de dar vida á las publicaciones y obras intelectuales de toda especie, proveyendo de la primera materia, indispensable para tales objetos. Hoy, en lo que se llama *extensión universitaria* se prefieren los trabajos realizados por los profesores para divulgar entre la clase obrera los conocimientos elementales y se premian preferentemente tales trabajos.

Pero no debe olvidarse qne urge tener una educación é instrncción superior, suficiente para defendernos en la lucha y competencia internacional que enriquece y acrecienta los recursos propios, sin que la labor nacional se reduzca á un simple cambio de equilibrios interiores.

Bien es cierto que este aspecto, más desatendido que el primero es más difícil, porque se necesitan grandes maestros, capaces de convertirlo en realidad.

Aparte de la creación de pensiones para ir á estudiar al extranjero, que á pesar de ser un medio eficaz, no lo es en la medida de los sacrificios que cuestan á una nación, podría haberse intentado la importación de ilustres profesores, como lo hicieron otras naciones que hoy se lucran por los beneficios recibidos, ya que fructificaron las semillas lanzadas en terreno fértil; y también habríamos podido avanzar con marcha más lenta, pero segura, si hubiéramos aprovechado los modestos y escasos recursos nacionales, para caminar hacia una regeneración científica.

Ciertamente que esto habría ofrecido algunas dificultades; porque no siempre es factible el seleccionar lo bueno ó aceptable de lo malo ó ineficaz. Y los legisladores luchan á veces denodadamente, á pesar de sus sinceros propósitos, contra esos desequilibrios á que conduce la realización del proverbio, *hecha la ley hecha la trampa*.

Por esta razón nos fatigamos ya de ver sucederse tantas disposiciones de orden secundario que atienden tan sólo: verbigracia, al modo de realizarse los exámenes, las oposiciones ó modos de ingreso para el profesorado, ó maneras de ascender en la carrera ó de adjudicarse premios ó recompensas honoríficos ó materiales, de cambiar las tramitaciones que han de conducir á tales resultados; lo cual conduce á dificultades por lo indirecto ó inadecuado, á veces, de los procedimientos y á veces á que no se acierte con lo eficaz para los fines perseguidos.

Y no hemos de insistir en este aspecto externo de la enseñanza, pues nos basta consignarlo, para deplorar que sea el predominante entre nosotros durante largo período de tiempo. Bien es cierto, que desde poco ha, ya alternan con dichas disposiciones otras más prácticas, respecto á los laboratorios, museos, etc., aunque no de tanta cuantía como fuera de desear, para convertir nuestro arraigado verbalismo en los métodos *reales-objetivos*. Pero sí añadiremos que, al lado de este aspecto real-objetivo y dominándolo, debe figurar en la medida de su importancia, el aspecto puramente teórico porque siempre es y será la teoría la fuente de las aplicaciones y no ha de quedar envuelta por lo esencialmente utilitario que lleva al empirismo. La intelectualidad matemática debe dominar siempre las aplicaciones de las ciencias experimentales, como la atmósfera en la vida, sin despreciar la marcha ascendente desde la experiencia hacia las ideas puras.

La nueva obra, dedicada á la enseñanza, tiene un carácter que participa de estos dos puntos opuestos de vista, ó mejor, complementarios; pues la enseñanza, por su carácter pedagógico, ha de poner á contribución las tendencias lógica, psicológica ó especialmente intuitiva, puesto que debe amoldar la ciencia al desarrollo intelectual.

Nuestra tarea no es completamente nueva, pues se halla constituída por multitud de obras publicadas con un fin progresivo que puede reducirse á dos tendencias dominantes, la primera en los estudios matemáticos elementales y la segunda en los superiores.

Constituyen la primera parte de nuestra labor obras tales como los: 1) *Tratado de Aritmética*, 2) de *Algebra*, parte elemental, 3), parte superior, 4) de *Geometría elemental* 5) y *general*, 6) *Problemas de Aritmética* y *Algebra con nociones de crítica algorítmica* y como complementaria de éstas: 7) *Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas elementales*, 8) *El método aplicado á la ciencia matemática*, 9) *Consi-*

deraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para el estudio de las matemáticas elementales, 10) *Estudios sobre la generación de los conceptos matemáticos,* 11) *Complemento de Geometría elemental ó Crítica geométrica,* 12) *El Algebra histórica y críticamente considerada,* 13) *Las modernas generalizaciones expresadas por el Algebra simbólica, las geometrías no-euclídeas y el concepto de hiperespacio* y el folleto de tendencia puramente educativa, *Ciencia, educación y enseñanza.*

Todos estos trabajos están destinados á la enseñanza matemática en el período de la enseñanza secundaria.

El límite superior de las materias llega, en Geometría (4), á las teorías de Chasles en sus relaciones con los porismas de Euclides, á nociones acerca de las diversas geometrías, analítica, sintética pura, geometrías vectoriales y pangeometría con las nociones acerca de lo imaginario geométrico de Poncelet, en Algebra á las nociones concernientes á la continuidad, basada en las definiciones de las funciones monógenas, monótropas, polítropas, etc., y, en la sección correspondiente á la combinatoria, las nociones acerca de la teoría de los grupos de sustituciones (sustituciones conjugadas de Cauchy), teoría de las formas homogéneas (invariantes, covariantes, etc), (3) y las generalizaciones de Grassmann acerca del cálculo formal (2).

El Algebra tuvo como complemento teórico, la exposición somera y sintética del Algebra, según las tendencias cuantitativas de los Descartes, Newton, Lagrange, Rolle y Sturm, la cualitativa de Argand, Faure, Vallés, etc., la combinatoria, de los creadores del Algebra de la Lógica, Boole y Jevons, por el lado psicológico y las de Lagrange, Abel y Galois por el lado puramente abstracto de la teoría de los grupos discontínuos, por el lado filosófico de Du Bois Reymond y Cantor que abordan el problema del infinito actual y de Hankel que llega á la condensación de las singularidades (13).

El *Progreso matemático,* revista de carácter general, aunque en la tesitura predominante de los estudios llamados de matemáticas especiales (*spéciales*) ofrece un conjunto de trabajos doctrinales, de crítica, metodología, pedagogía y bibliográficos, debidos á distinguidos colaboradores extranjeros y nacionales, constituyendo una rica colección de carácter esencialmente educativo.

Otra serie de trabajos constituyen el tránsito de la parte elemental educativa á la parte que constituyen los estudios superiores, los cuales se distinguen por su carácter sintético y sistemático. Entre éstos se hallan: *Carácter y transcendencia de la Matemática en la época presente* (discurso inaugural) (14), *L'unification des concepts dans les mathématiques* (memoria) (15), *La moderna organización de la Matemática* (diez lecciones explicadas en el Ateneo de Madrid) que comprende: 1.º *Carácter de la Matemática en el siglo XIX.* 2.º *Teoría de los números.* 3.º *Geometría moderna.* 4.º *Geometría no euclídeas.* 5.º *Geometría de n dimensiones.* 6.º *Algebra.* 7.º *Algebra de la Lógica.* 8.º *Algebra de las formas homogéneas.* 9.º *Teorías de las funciones.* 10.º *Unificación de los conceptos de la Matemática en el siglo XIX* y varios trabajos publicados en el *Boletín de Crítica, Enseñanza* y *Bibliografía matemática* (16).

Pero el penetrar en el inmenso campo de la Matemática en sus regiones superiores ó estudios universitarios, exigía una preparación sintética, crítica y pedagógica.

Con este objeto fueron publicadas, entre otras, que se omite citar: *Algunas consideraciones sobre filosofía y enseñanza matemáticas* (17), *Estudios de Crítica y de Pedagogía matemática* (18), *Exposición sumaria de las teorías matemáticas* (19), *Nueva contribución á la enseñanza matemática* (20), *Los programas de mis cursos de Cálculo infinitesimal* (21), *Algunos conceptos fundamentales en un curso de Análisis matemático y de las funciones* (22), y *Ensayos de síntesis matemática y nuevo método de enseñanza matemática* (23), que he dejado sin terminar, porque prefiero continuar la exposición del *Nuevo método de enseñanza matemática* que me permitirá enlazar, bajo unidad de idea, los trabajos preparatorios, publicados desde el comienzo de mis publicaciones hasta el momento actual; porque me propongo hacer ostensible la unidad de idea que ha guiado la colección citada de obras publicadas en muy diversas circunstancias.

Otras obras han sido publicadas, de carácter eminentemente expositivo ó doctrinal: *Cálculo diferencial* (24), *Principios generales de la teoría de las funciones* (25), *Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas* (26), *Cálculo integral* (27), *Aplicación del Cálculo infinitesimal al* *estudio de las figuras en el espacio* (28), *Teoría de las ecuaciones diferenciales* (29), y *Resumen y complemento de la Teoría de los números* (30).

En la convicción de que el análisis es el método de investigación, educativo de las inteligencias, he reunido multitud de métodos y procedimientos de teorías y aplicaciones varias y numerosas que complementan los puntos de vista sintéticos y sistemáticos de otras obras, en las cuales dominan las tendencias críticas y pedagógicas. Y esta armonización se encontrará justificada con detalle, en la obra actual, cuyo objeto es considerar bajo el concepto de unidad, lo que de no hacerlo así, aparecería disperso é incoherente.

Como trataremos de hacer claramente perceptible, aparte del desarrollo puramente lógico que encadena las verdades, apoyando las unas en las otras por la demostración rigurosa, hay una acción psicológica que expresa la influencia subjetiva en la formación de la ciencia, en la invención y en el organismo de las verdades que se agrupan según la orientación que aquélla formula.

Como testimonio de este modo de sentir, en materia educativa, reproducimos dos notas presentadas al Congreso internacional de matemáticos, de París y el de Filosofía de Bolonia.

II

Note sur la critique mathématique (*), par Zoel G. de Galdeano (Saragosse)

La Mathématique, pendant ce siècle, est arrivée à un état tel, qu'il faut constituer une nouvelle branche fondamentale qui pourrait s'appeller: *Critique mathématique*; tel est le but de la presente Communication.

Nous avons vu comment les philosophes ont entrepris la tâche de classifier toutes les idées les plus générales et simples qu'embrassent toutes les autres, qui sont définies par elles comme leurs fondements et leurs sources naturelles: la

---

(*) De esta Memoria, presentada al Congreso internacional de París, en 1900, sólo fué publicado un extracto, por haberse perdido las pruebas de imprenta; lo que imposibilitó su publicación íntegra.

relation, cause, qualité, nombre, position, succesion, etc., que les philosophes ont réunies, d'après des critériums différents.

Nous avons vu dans quel degré les plus illustres mathématiciens ont été des philosophes et ont infflué dans la Mathématique et, notamment: comment Wronski et Comte, d'après des vues opposées ont entrepris de fonder la Mathématique dans des systèmes philosophiques.

Nous voyons, d'une part, que la Mathématiqne puise ses premières données dans l'observation du monde extérieur; telles sont ses premières définitions, ses postulats, ses axiomes.

D'une autre part, nous voyons aussi, comme la Mathématique se développe comme science subjective, soumise rigoureusement aux principes de la logique plus inmédiatement que aucune autre science, avec le plus haut degré d'abstraction.

«Nous trouvons, selon disait M. Hoüel, deux sciences: la science réelle et la science idéale, se rapprochant indéfiniment l'une de l'autre, et toutes deux également valables, étant l'une le contrôle de l'autre, augmentant ensemble leur spiritualité et leur réalité».

La Mathématique, malgré de recevoir l'influence de la Philosophie, avec certains liens d'une prochaine parenté, se développe avec ses propres ressources, avec une complète indépendance des systèmes philosophiques; elle reste toujours inébranlable, ses conquêtes ne s'effacent jamais, étant elles-mêmes le sout'en de nouvelles conquêtes.

Dans ces continuels et profonds développements, nous voyons de nouvelles branches s'ajouter aux anciennes, annonçant une nouvelle systématisation des concepts, la formation d'un superbe édifice.

Cependant, nous trouvons trois beaux mots, héritage de la science classique, qui semblent rester toujours comme l'aiguille aimantée, qui donne l'orientation du tout vers la première direction de la pensée mathématique: l'Arithmétique, l'Algèbre et la Géométrie. El nous voyons que l'influence de toutes trois s'enfonce profondément dans tous les domaines de la Mathématique.

En regardant l'ensemble de toutes les branches mathématiques, nous les voyons s'entrelacer et quelques-unes s'vanouir dans le fond des autres, sans nous montrer ses bornes.

Le nombre semble le fil conducteur qui s'entrelace dans tout. Etant discontinu, comme expression de la quantité discrète, cependant il conduit à la continuité, cherchant à embrasser la quantité dans ses plus mystérieux coins, et tout semble subordonné à sa puissance.

Mais malgré cela, sur le nombre, nous voyons les concepts combinatoires presque envélopper tout, nombre, étendue, cause, force... Tout cela devient objet soumis aux lois combinatoires; et d'après l'idée de Boole, la combinaison s'exerce indépendament des objets qui lui sont soumis, et sur le calcul ordinaire apparaît le calcul formel qui donne les schèmes aux plus bizarres résultats, d'après ce qu'en ont fait voir Cayley, Hamilton, Grassmann, Clifford et autres, qui ont étudié les divers systèmes d'algèbres ou concrété ces purs concepts dans divers systèmes géométriques.

Nous pourrons en dire autant de l'idée de relation qui paraît aussi envelopper tout, jusqu'à ce qui reste dans le domaine idéal n'existant que par le lien du rapport.

Toutes ces vues, on nous dira, sont en déhors du domaine de la Mathématique, peut-être seront dangereuses, en envahissant le champ de la Métaphysique, qui seulement doit l' eclairer dans ses frontières, selon elle fait pour toutes les sciences, soit du côté de la raison, soit du côté de l'experience. Mais ces vues sont très utiles, en facilitant à parcourir la science d'après diverses allures, aidant la simplification des théories qui pourraient être reduites à ce qui ont d'essentiel en laissant les détails, trop nombreux pour les applications. Cela rendra facile la compréhension d'ensemble de la Mathématique, aujourd'hui d'une étendue trop vaste pour être épuisée du côté des faits, sans des procédés d'une très haute portée synthétique.

Ces indications, qui seulement peuvent ici être très sommaires, montrant le besoin de compléter l'enseignement de la Mathématique surabondament objectif jusqu'au présent, avec le secours d'une nouvelle branche pédagogique, qui pourrait être nommée *Critique mathématique*.

Il est certain que dans quelques universités se sont ajoutés des cours d'Histoire de la Mathématique, et peut-être serait-il convenable aussi d'en ajouter un autre de Pédagogie mathématique, qui pourrait viser notamment sur les méthodes mathématiques et sur celles de l'enseignement. Mais peut-être, cette branche pourrait devenir un complément ou une application des principes dont l'étude poursuivrait avec une plus grande amplitude: la *Critique mathématique*, pas la *Philosophie mathématique*, qui pourrait égarer quelques-uns vers des domaines extérieurs à la Mathématique, qui n'a pas besoin que de quelques reflets de la mère de toutes les sciences.

La Critique mathématique contiendrait des développements historiques, par ce lien de parenté entre la génération historique et la génération logique de nos connaissances; elle contiendrait aussi l'étude syntétique des diverses branches visant à l'enchaînement des idées; ferait de même un renversement de l'étude des théories, en soumettant des objets divers aux concepts qui les embrassent; tels sont, par exemple, les concepts de l'infini, continuité, singularité..., des rapports tels que ceux de la conformité ou disconvenance entre le sujet et l'objet, qui ont jeté une si éclatante lumière dans la résolution des questions mathématiques, les associant ou dissociant d'après des modifications dans les données. Des procédés tels que celui de l'adjonction de nouveaux êtres dans un domaine, qui fait disparaître certaines impossibilités relatives, enfantées par de fausses correspondances entre deux systèmes de nature différente, des généralisations qui nous placent dans un monde idéal soulevé sur les êtres de pure raison, mais qui unifient la science, simplifiant ses procédés, pour arriver aisément à des résultats pénibles d'obtenir d'une autre manière. Tout cela et une infinité de vues que l'intélligence peut posséder, d'après les impulsions de sa propre activité, créatrice de nouveaux objets et de nouveaux procédés, peuvent être étudiés dans cette branche, soit qu'elle se développe seule, soit qu'elle fut englobé dans la Pédagogie mathématique, d'après les plans adoptés dans les universités.

Un plan d'enseignement universitaire doit, en effet, embrasser, non seulement l'enseignement téchnique, qui fait connaître la science en soi, mais il doit aussi être enrichi par de autres enseignements, dont le but soit de former les futurs profeseurs, des hommes possédant une vocation scientifique inébranlable, capables de la communiquer aux élevès, moyennant, non seulement une haute culture intellectuelle, mais aussi moyennant les vertus enfantées par l'habitude dans l'exercice de la pensée et par l'amour desintéressé vers la Science. Les nations ont besoin autant des hommes utiles par ses aptitudes vers les applications des connaissances théoriques, que des scientifiques dévoués au perfectionnement de l'esprit, source des découvertes, dans un avenir plus ou moin lointain. Le manque des uns ou des autres enfanterait ou l'empirisme ou l'excés des théoriciens qui pourraient égarer les courantes sociales. Il faut donc, parvenir au soutien des deux ordres complémentaires de la science humaine, qui produit, par son harmonisation, toute sorte de bienfaits.

Note sur un nouveau procedé d'expositión mathématique

Dès il y a quelques années j'ai adressé tous mes efforts à constituer une branche de l'enseignement qui sous le titre de *Critique mathématique* comprendrait les principes logiques de cette science, sous un de ses chapitres, la Méthodologie; mais aussi qui fixera les rapports subjetivo-objectifs dans les démonstrations des théorèmes et la résolution des problèmes.

Quelques de mes ouvrages parues dès l'anneé 1874 jusqu' aujour d'hui,sont écrites dans ce but que j'ai répris dans toutes les occasions qui se sont présentées.

Je ne répéterai ce que j'ai écrit; mais j'ajouterai à présent que nous pouvons distinguer dans l'exposition et l'enseignement de la Mathématique, considerée comme une science théorique, deux procedés:

1.er Le procedé logique, exclusivement suivi jusqu'au présent, dont le but prédominant est le rigueur démostratif et l'ordre de dépendence des subjects.

2.ième Le nouveau procédé que je propose comme un procédé psychologique qui tient aux rapports de l'intelligence avec son objet.

La Mathématique ordinaire pousse ses principales résources dans ses algorithmes qui lui fournisent un langage organisé très supérieur par sa concision, sa régularité et sa flexibilité. Ce langage conduit, par l'application de ses régles, aux conclusions qui conservent sa validité dans tout l'enchaînement de ses transformations.

Les expresions de l'Analyse constituent un langage abregé et rigoureux.

Mais il est encore possible un développement mathématique, qui laissant de côté le langage algorithmique et les descriptions géométriques, applique directement l'action de l'esprit à l'objet, même sans aucun intermediaire; c'est un procédé intuitif qui éclaire l'objet avec la plus éclatante lumière intellectuelle.

Le procédé logique est parfaitement rigoureux; mais il cache l'objet transformé dans chacun de ses chaînons. L'intuition constitue, dans beaucoup de cas, une démonstration directe, dont le raisonnement mathématique ne forme que des details complementaires.

J'intelligence est en possesion de certaines formes qui enveloppent les objets mathématiques.

Nous propossons des mots pour les exprimer, ce qui nous fairons de proche en proche.

Par les propositions directe et réciproque nous trouvons le prédicat contenu dans le sujet en comprehension et le sujet contenu dans le prédicat en extension, ainsi que l'hypothèse dans la thèse dans les théorèmes.

Par la réciprocité, les êtres qui forment l'hypothèse s'ajustent avec ceux qui forment la thèse par un plissement.

Et nous trouvons, dans la Mathématique, un *ajustage* dans la coincidence de deux figures égales, dans la substitution des inconnues d'une équation algébrique par ses solutions ou dans les équations différentièlles qui sont les moules d'un ajustage.

Par les propositions directe et inverse nous trouvons un épuisement de tous les sujets des hypothèses pliés avec ceux des thèses correspondantes. Ici nous ne trouvons que des tissus de rapports. Ces tissus sont formés par des constructions ou des rapports intermediaires que disparaîssent, restant seulement les termes extrèmes pour constituer un théorème.

Ces termes moyens peuvent être posés moyennant des constructions, comme dans la Géométrie élémentaire, ou par la mise directe de quelques conditions exprimées par des équations, qui conduisent à distincts rapports selon les quantités qu'on peut éliminer. Les quantités éliminées sont des éléments invariantes qui nous apellons *éléments d'adhérence*, espèce de soutien des éléments restés dans l'équation finale, qui généralement exprime une *condition* de possibilité du système.

Le nombre des conditions possées et celui des variables conduiront aux cas de l'indétermination, détermination ou impossibilité.

Mais la contenance des objets les uns dans les autres, la trouvons sous la vue de la subordination, supraordination totales ou partièlles. Celles-ci seront des *interférences.* Nous trouvons aussi un cas *limite* de l'interférence dans la *frontière* des ensembles et dans la *section* de Dedekind, qui est le terme de jonction de deux systèmes extérieurs l'un à l'autre.

Généralement, nous avons à considérer la compénétration des concepts et la coexistence des rapports.

Nous pouvons considérer une table de multiplication dont l'un des facteurs serait composé de concepts substantifs tels qu'Arithmétique, Algèbre, Géométrie, etc. ou de sous-divisions de celles-ci, et l'autre des concepts adjectifs tels que: correspondances, corrélations, facteurs qui pourront être produits d'autres facteurs; et nous pourrons parcourir la Science diversement suivant des intersections données des lignes et colonnes correspondantes à tels facteurs que nous choisirons.

Nous aurons des êtres ou des rapports qui auront un plus grand comun diviseur et un plus petit commun multiple, et d'aprês celà, la Science nous offre une liberté très considerable dans ses évolutions.

Nous voyons par celà une inversion des procédés classiques qui entouraient les concepts de nombre, figures et équations, etc. comme des noyaux d'une grande variété de propriétés.

A présent, les idées d'ordre, combinaison et nombre sont mises au service d'autres idées, sous des déterminations spéciales, comme celles qui donnent le genre d'une fonction ou d'une courbe, ou comme l'exposant au quel appartient un nombre, etc., sont des êtres appartenant à la catégorie du nombre et de l'ordre, qui entrent dans des classifications dont on pourrait construir des riches vocabulaires. Les anciennes abstractions se sont concretées par des qualifications.

Dans le monde des idées nous avons les thèses correspondantes à des hypotèhses données qui s'expriment moyennant des théorèmes. Les thèses varient à travers de rapports de coexistence; et le tissu de ces coexistences forment chaque théorie.

Un objet, une fonction, par exemple, est susceptible de beaucoup de propriétés et peut être soumise à un très grand nombre de rapports qu'on établit entre elle et d'autres objets; et nous parlerons de ses correspondences géométriques ou analytiques, de ses représentations, de ses transformations, etc.

Les anciennes branches: Arithmétique, Algèbre, etc. dispairaîsent à présent sous ces rapports possés par l'activité intellectuelle, créatriz des théories, d'après de vues toujours renouvelées. Aujourd'hui, propriétés telles que celles de la croissance, de l'appolarité, de la périodicité, etc., font l'objet d'une seule théorie ou branche mathématique.

La chaîne des verités subordonnées à une seule idée, telle que celle de nombre, s'est transformée en des noyaux ou des centres d'irradiations des verités vers d'autres centres.

Même les problèmes se reduisent à un ajustage des conditions imposées par nôtre activité avec les liaisons existentes entre les objets correspondantes.

Nous avons ensuite, visant l'action subjective, dans les définitions, des moyens de génération d'objets seulement soumis au précept de respecter le principe de contradiction, et alors nous pourrons déduire de ces rapports, ou de ces êtres créés, des enchaînements logiques.

Mais nous avons d'autres procédés de création des êtres mathématiques:

Nous avons l'*expansion* et la *condensation.*

L'intégration est l'effet d'une action expansive. Par chaque intégration, nous ajoutons une constante, fonction ou paramètre arbitraire. Nous dilatons le champ primitif. Au contraire, par la différentiation nous réduisons le champ primitif en suprimant chaque fois un paramètre.

Mais nous possedons un autre moyen d'extension d'un champ ou domaine, celui de l'*adjonction*. Le domaine des nombres rationnels a plus d'extension que celui des nombres entiers et celui des nombres algébriques, est plus étendu que celui des nombres rationnels. Mais l'étendue est au sens de sa *densité*. L'adjonction produit une *condensation* qui rend possibles beaucoup de problèmes *inverses*, impossibles pour des domaines moins denses.

Les constructions directes peuvent se continuer par des combinaisons toujours possibles, parce que résultent des opérations progresives. Mais celà n'est pas généralement possible par des operations inverses. Cela tient à ce que les operations directes du calcul sont esentiellement discontinues et n'épuisent tout le fonds qui soutient les quantités ainsi produites, le *continuum* étant le système du maximum de densité. Mais les constructions intellectuelles doivent conduire à des systèmes sans omission ni répétition. Il faut choisir des éléments tels que des nombres premiers, équations, courbes, etc. irreductibles dans le but de conduire à des correspondences univoques.

Le procédé de l'adjonction qui produit des ensembles d'objets chaque fois plus denses, vise aux procédès inverses de la résolution des équations algébriques ou l'intégration des équations différentièlles, dont les anciens problèmes de la résolution formelle exigeait des détachements ou dénouements de rapports plissés.

Nous avons fait un aperçu de ce qui pourrait être une méthode inverse et complémentaire de la méthode logique. Cette méthode s'exerce par l'action de l'intélligence sur les réprésentations géométriques et analytiques en appliquant les régles de construction ou de calcul, deduites des définitions précises.

La méthode psychologique est un regard direct sur l'objet soumis aux diverses manières de s'exercer notre activité. C'est regarder le monde des idées comme nous regardons le monde des phénomènes extérieurs du monde physique. Au monde psychologique comme au monde physique et au monde sociale il ne manque que l'expression mathématique qui exprime certains phénomènes par d'autres.

Par ces considérations, nous aurons, au lieu d'une Mathématique isolée dans les pures abstractions et constructions ideales, une Mathématique incarnée dans des phénomènes, de quelque sorte, qu'ils soient phsychologiques, physiques ou sociales.

III

SOBRE LAS RELACIONES SUBJETIVO-OBJETIVAS

Hoy la importancia objetiva se completa por la acción subjetiva. Sobre el número, figura, ecuación diferencial, integral, etc., consideramos, por ejemplo, la generación, la proyectividad, las singularidades.

Sobre los objetos, preponderan la relación, la transformación y cuantas modulaciones puedan comunicar á aquellos la inagotable acción del espíritu. Este modela según sus puntos de vista la Ciencia, manteniendo la preponderancia subjetiva.

Estas relaciones son comunes, no tan sólo á los objetos primordiales sobre los que se edificaron las antiguas disciplinas, sino sobre otros objetos derivados de aquéllos, creados por definición y por nuevas conexiones que han ido apareciendo en el desarrollo científico.

Y además de este carácter predominantemente subjetivo, aun hallamos una inversión que transforma el carácter esencialmente lógico ó deductivo y hasta orgánico, en un carácter crítico, eminentemente intuitivo é inventivo. La inteligencia no se limita á deducir y demostrar, aspira á ver y analizar, á la luz de la intuición, sus objetos y creaciones.

Los libros doctrinales son una masa de ideas más ó menos organizada, según el talento expositivo de sus autores. Pero la inteligencia no se conforma con este modo individual de agrupar y de exponer; porque sobre dicho modo y estilo ó forma crea nuevas disposiciones posibles, mediante el espíritu inventivo, porque ninguna forma de exposición es cabal, ya que no es posible expresar la infinidad de modos según los cuales son susceptibles de combinarse las ideas.

Todo libro es pues un fondo de nuevas combinaciones de ideas y de razonamientos.

Existe por tanto, un método generalmente seguido por los matemáticos inventores, capaces de descubrir dichas nuevas combinaciones; y en éstas consisten los constantes progresos con que se enriquece la Ciencia. Dicho método existe latente en las inteligencias superiores, que ven más allá de cuanto les ofrecen los medios imperfectos de exposición en las obras didácticas, donde están como petrificadas las ideas y sujetas á ciertos convencionalismos en la forma y á ciertos puntos de vista personales y exclusivos.

Dicho método da vida á la ciencia encasillada bajo los signos tipográficos, que sólo sirven de ocasión para despertar las ideas y darles su movilidad natural y, refiriéndonos á la enseñanza, diremos que, así como Pestalozzi sustituyó el libro por el examen directo de la Naturaleza, en la Matemática debemos, no precisamente sustituir, sino simplemente simultanear el procedimiento lógico que fija las ideas bajo la fuerza deductiva, con el procedimiento psicológico que crea nuevas posibilidades sobre la red ó cánevas de ideas que permiten nuevas disposiciones de éstas, como los seres que se agitan dentro del espacio, comprendido en una triangulación geodésica que es su fondo invariable.

Dicho método es en parte un complemento de cualquier obra didáctica; porque cualquiera de ellas da origen á reflexiones y razonamientos nuevos. Por esto se aspira á aprender, no tal ó cual libro, sino la Ciencia en sí, á la manera que Pestalozzi aspiraba á que sus alumnos conocieran directamente la Naturaleza, suprimiendo el artificio intermediario que constituye el libro, lo cual según hemos dicho, en Matemática no es absolutamente aplicable; porque lo característico de la Matemática es su lenguaje *propio*, es decir, la representación algorítmica ó gráfica de los conceptos que constituyen el objeto, también *propio* de la misma. Las obras extensas, expuestas en lenguaje ordinario, son indigestas, contracientíficas y contrapedagógicas, atormentan las inteligencias, las obligan á fijarse en el trabajo de interpretación de las palabras, acostumbran al doctrinarismo, atrofian las facultades inventivas y evitan el que la inteligencia produzca naturalmente tales resultados que están incluídos en uno solo de los casos de la división ó definición.

Hay que preferir la elegancia de la sencillez, efectuar constantemente la economía del esfuerzo, y acostumbrarse á la rapidez que conduce á los puntos culminantes, desde donde se ven los demás. De otro modo nos hallaremos siempre en el estado rudimentario, en la entrada, sin conocer el edificio. El progreso actual exige é impone seleccionar, podando las ramas inútiles ó sobrantes.

Los libros sobradamente extensos, ó son como el fondo que ofrece material sobre que discurrir, ó como catálogo de numerosas ideas; pero no se adapta á la enseñanza, porque la inteligencia no debe ser meramente almacén de innumerables verdades que jamás agotarán la posibilidad de otras nuevas, ni existe memoria capaz de retenerlas, si bien ésta es nula ante la capacidad deductiva. Y á lo sumo servirán de ocasión para obtenerlas como ejercicio educativo, debiendo consistir el fin útil de la enseñanza, no en una erudición banal, que retiene lo indiscernible, acercándose á lo individual, sino la capacidad de obtener las consecuencias contenidas en sus principios y la posesión natural de métodos que á ellas conduzcan.

Si como los cuadradores y trisectores, modelos de tipos ignorantes con un mínimo de conocimientos, pretendían superar con sus pobres inteligencias lo que resistía al esfuerzo de las demás, los que aspiran á acumular doctrinas por el fácil empleo de la deducción, sobre innumerables detalles y subdivisiones posibles, se dirigen á la anulación de la actividad intelectual por el estado pasivo propio del conocimiento transmitido ó latente, dentro de sus principios.

Todas las ciencias tienen sus museos, sus colecciones de individuos, y especialmente la Matemática tiene sus tablas, sus clasificaciones, sus enciclopedias, que son los inventarios de sus conceptos y verdades; y á ellos puede acudirse en la práctica para encontrar algún resultado útil. Pero sobre esta parte instrumental está la parte ideal y teórica que legisla sobre los hechos.

El método consiste en sustituir el *ver* por el *hacer*, la perezosa intuición *pasiva* por el razonamiento *activo*, el sustituir el lenguaje ordinario, tardo y rígido por el lenguaje matemático, rápido y flexible y que muchas veces suple al mismo pensamiento.

Es una preocupación funesta creer que sólo puede llegarse á las alturas tras largo y penoso camino por lo elemental, si bien el ser elemental ó superior tiene un carácter circunstancial ó relativo, que sólo aparece en el artificio de la enseñanza.

La Matemática puede estudiarse en cualquiera de sus regiones. Basta para ello las definiciones necesarias y conocer lo *esencial* de las teorías adjuntas.

Puede adquirirse según grados distintos de densidad, por procedimientos cíclicos. Así se ha formado la Ciencia por condensaciones sucesivas, pues no es preciso en ningún caso, *saberlo todo*, sino lo *suficiente, para cada finalidad*, librándonos de lastre inútil que embarace el movimiento.

Pocas ideas y fecundas, actividad que las transforme para llegar al fin propuesto, en vez de almacenar.

Preferir el talento á la erudición, el crear ó siquiera hacer combinaciones, á la catalogación, las relaciones á los hechos. Conocer las finalidades en vez de una serie indefinida de prolegómenos, ilustrar sobre lo nuevo, difícil y desconocido, en vez de girar con monótona insistencia alrededor de lo ya trillado y del dominio común, lo que oculta bajo el disfraz de la profundidad el atraso. Hay que conquistar siempre nuevas posiciones, no detenerse en un convencional recinto. Así nos acostumbraremos á ver desde lo alto y desde lejos, y perderemos el hábito de reptar sobre el campo llano.

Los científicos de ahora ven mucho más que los científicos de antaño, porque la suma del trabajo de todos ha facilitado los puntos de vista altamente comprensivos é intensivos de ideas.

La enseñanza, en los primeros grados, debe ser ténue y convenientemente densa en los grados superiores, pues los bloques de ideas iluminan los conjuntos y economizan tiempo y esfuerzo.

Se preguntará con frecuencia, para qué sirven tales ó cuales propiedades de los invariantes ó covariantes, de las congruencias, de las figuras de tal ó cual especie, etc.?

Pero no se preguntará para qué sirve el perfeccionamiento del espíritu en la región más adecuada al desenvolvimiento del raciocinio, y sus aptitudes inventivas. Aquéllos muchas veces sirven y han servido en tales ó cuales aplicaciones, esto siempre tendrá una utilidad absoluta.

Las ideas complejas prenden en las inteligencias como las raíces en la tierra, desarrollándose y extendiéndose.

Por el contrario las ideas simples, aisladas se desvanecen, pues nada hay que las fije, si no es el artificio memorativo

Lo abstracto se concreta en las aplicaciones, cuando se tratan asuntos complejos.

Hay que evitar hacer difícil lo que es fácil. En vez de preocuparse de que tales cosas se llamen de tal ó cual modo y de que admitan tales ó cuales divisiones, hay que emplear el esfuerzo en transformar expresiones, en usar el lenguaje matemático para reducir, y normalizar, etc.

Hay que trabajar en la *arquitectónica*, que constituye las realidades matemáticas, ó sea determinaciones algorítmicas ó geométricas, lo que constituye su parte objetiva; y por otro lado perfeccionarse en lo subjetivo que dirige la gestiones por las vías de su resolución ó sea la gimnasia intelectual, que señala las finalidades, dando la razón, el motivo y la utilidad de los procedimientos que enlazan los objetos matemáticos.

Sin esta mirada general, nuestra marcha será la de un ciego que no puede formarse idea de los objetos que palpa y sólo puede proceder *á posteriori*.

La Matemática es una ciencia descriptiva. Determina, detallándolos, los varios aspectos y modos de ser de cada uno de sus objetos, en la serie sucesiva de sus estados.

Distingue, ordena y clasifica los objetos pertenecientes á cada agrupación y extiende unas á otras tales agrupaciones, para estudiarlas en sus correlaciones y correspondencias. Crea sistemas irreducibles, sin repetición ni omisión, y estudia las compenetraciones de unos en otros ó sus expansiones en sistemas más amplios ó más densos.

Sus problemas consisten, unas veces, en las intersecciones de sistemas distintos (lugares geométricos ó algorítmicos), otras en el desdoblamiento de lo que esté plegado (resolución de problemas inversos), otras en reducir á formas canónicas ó discernibles y simples unos elementos ó entidades por medio de otros.

Expuestas en cada caso, las nociones indispensables, se puede abordar la Ciencia por las más varias teorías. Y es preferible elegirla de alguna densidad ideal con objeto de que los análisis resulten más ricos en detalles é instructivos, en vez de proceder por los hilos sutiles que tardía y trabajosamente llegaban á reforzarse, después de larga y desagradable caminata; pues á la inteligencia halaga y sugestiona el contemplar las finalidades que persigue, más que un misterioso acceso, por el cual sólo conoce el camino recorrido, cifrando su confianza en el éxito de sus esfuerzos, en la autoridad directora del maestro.

La Geometría, en la antigua Grecia, fijaba la extensión de la Matemática. Las cónicas de Apolonio, las diversas curvas eran un aliciente poderoso para las inteligencias, que aparte de la satisfacción propia, por el descubrimiento obtenido, forjaban ideales de perfeccionamientos futuros en los problemas de la trisección del arco y de las cuadraturas.

Por otra parte, la demostración de las proposiciones elementales de la Geometria llevaba á Euclídes hacia los amplios ideales que abarcaban sus porismas, proposiciones de carácter inventivo que encerraban el germen de la moderna Geometría superior ó proyectiva, como los problemas de Diofanto orientaban hacia las modernas finalidades del Algebra.

Diremos, por último, que los grandes matemáticos de la época del renacimiento, hasta principios del siglo XIX, fundaban sus ideales en los descubrimientos por ellos obtenidos. Extendían constantemente el cánevas ó tejido de las verdades incesantemente acumuladas. Su objetivo era extender el campo de las mismas.

El matemático propiamente tal, ama la verdad directamente por sí, y aspira constantemente á obtenerla y demostrarla y á perfeccionar los métodos que á ella conducen.

Los grandes matemáticos fundaban sus innumerables descubrimientos en la amplitud de miras de sus privilegiadas inteligencias que les permitían recorrer las teorías en diversos sentidos, dejando huellas profundas de su acción.

Además de la idea, poseían el *modo de hacer*, de llegar á fórmulas por medio de ingeniosas transformaciones. La infinidad de tablas de todo género de funciones y formas, de resoluciones y de construcciones geométricas. Todo ello se ofrece como obra indestructible, base de otras que sobre ella pueden extenderse indefinidamente.

Pero, como ya he indicado en diversas ocasiones, hoy la inmensidad de tales resultados ha exigido la acción de la Crítica y de la Pedagogía, para equilibrar la potencialidad intelectual con la densidad y extensión científica.

La enseñanza cambia según la ciencia. El cúmulo de teorías que se compenetran, exige el auxilio de la bibliografía, al mismo tiempo que la crítica ordenadora de los conceptos acá y allá dispersos. Y la *Encyclopedie der Mathematischen Wissenschaften* cumple hoy esta finalidad, siendo un guía precioso para la síntesis científica.

Pero esta es obra demasiado extensa que se dirige preferentemente al sabio.

En el reducido campo de la enseñanza, esta excesiva amplitud debe localizarse á reducido campo, en que puede extenderse la acción intelectual del alumno.

Basta, para los fines actuales, modificar los procedimientos anteriores.

La primera modificación consiste el alterar la objetividad científica.

Antes, se proponía un objeto para las operaciones algorítmicas, las ecuaciones, las cónicas, etc., y se agrupaban en torno de estos centros de investigación las propiedades, ya fuese la divisibilidad, factores primos, ya la discusión de los casos de resolubilidad de cada problema, ya los centros, focos, asíntotas, cuerdas suplementarias, etc.

Hoy, sobre estas particularidades predominan los conceptos generales, tales como irreductibilidad, la independencia ó la dependencia lineal, los elementos irreducibles, las correspondencias y transformaciones, la normalización, etc.

Las antiguas propiedades son individuos en esta generalidad de puntos de vista. Y las antiguas disciplinas se han disgregado en infinidad de divisiones y subdivisiones para agregarse en indefinida variedad de nuevos núcleos, tan sólo sometidos á las exigencias de cada finalidad intelectual.

No existe hoy el orden rigurosamente lineal que atrofiaba las ideas, aislándolas en la sutil disposición sucesiva.

Lo importante son los núcleos de relaciones en los que están concentrados conceptos muy diversos que se unen en tales ó cuales resultados, que la inteligencia analiza.

Queda derogado el orden artificioso de los libros que no pueden ajustarse á las modalidades é inflexiones del ejercicio intelectual.

Capítulos y teorías elegidos es lo preferente para educar las inteligencias, suprimiendo aquellos largos y áridos caminos preparatorios para llegar á un fin.

Resumiendo lo expuesto y como condensación ó programa de lo que se va á exponer, diremos que en el orden histórico-crítico, es interesante en primer término, señalar el *carácter distintivo de la Matemática en el periodo clásico y en el moderno* 1), después, describir la acción matemática, diseñando los métodos y los conceptos matemáticos que iluminan esta acción, lo que hemos hecho en el folleto «*Algunos conceptos matemáticos que pueden ser útiles en un curso de Análisis* y *Funciones*», las *correspondencias matemáticas en la ciencia*, de que traté en una nota que presenté al Congreso de Valencia, y los *problemas matemáticos* se han complementado en la historia, ya que estas correspondencias han sido el antecedente obligado de dichos problemas que han relacionado luego, en la teoría, los dos órdenes intelectual y material, ó los mundos externo é interno, de la experiencia y de la razón.

La abstracción y el esquematismo, así como la *Lógica matemática*, miran estas cuestiones desde el punto de vista del lenguaje, en el que deroga la inteligencia su acción, mediante sus reglas combinatorias; lo que lleva también á las *clasificaciones* y á los *sistemas*.

La *Metodología* es la exposición sistemática y razonada de cuanto se ha indicado y el *Nuevo método*, objeto final de este trabajo, depende, como se verá, de un nuevo modo de relacionarse los conceptos que han predominado en épocas anteriores y los que hoy predominan y que es importante se destaquen del fondo en que implícitamente se hallan contenidos.

Todo lo cual puede considerarse como programa de un curso de *divulgación matemática*.

Zaragoza 18 de Diciembre de 1911.

CAPÍTULO PRIMERO

Resumen de la exposición didáctica elemental

SECCIÓN DOCTRINAL

ARITMETICA.– **Parte 1.ª—Tratado del número abstracto.**

LIBRO PRIMERO Cálculo del número *abstracto*......	I. Nociones generales.—II. Numeración.—III. Operaciones fundamentales: adición, sustracción, multiplicación, elevación á potencias, extracción de raíces.
LIBRO SEGUNDO Teoría del número *abstracto*......	I. Nociones generales.—II. Principios fundamentales de la teoría de los números primos.—III. Teoría de los factores propios.—IV. Número de factores primos. Descomposición en factores.

Parte 2.ª—Tratado del número concreto.

SECCIÓN PRIMERA.—*Cálculo del número concreto conmensurable.*

LIBRO PRIMERO Cálculo del número concreto *indeterminado*	I. Fracciones ordinarias, Propiedades, adición, sustracción, multiplicación y división.—II. *Fracciones de forma entera.* Cálculo.
LIBRO SEGUNDO Cálculo del número concreto *determinado*	I. Nociones generales.—II. Numeración de los números concretos.—III. Cálculo de los números concretos (adición, sustracción, multiplicación, división, reducción de unidades de distintos sistemas).

SECCIÓN SEGUNDA.—*Teoría del número concreto conmensurable*

I. Expresión general de los números fraccionarios de *igual valor*.—II. Teoría de las magnitudes *proporcionales*.—Cuestiones que se refieren á magnitudes proporcionales.

SECCIÓN TERCERA.—*Teoría y cálculo del número concreto inconmensurable.*

Libro 1.º—Teoría del número inconmensurable.— Libro 2.º cálculo de los números inconmensurables y aproximados.

Resumen crítico.—Domina el carácter sintético-deductivo. Las materias se exponen en forma simétrica.—Para favorecer la *intuición* acompañan á los razonamientos ordinarios otros abreviados, *esquemáticos* que presentan dichos razonamientos en forma *sinóptica.*

El número abstracto y el concreto difieren por la numeración. Los números concretos pueden considerarse como números abstractos en los que varían las dependencias de las unidades de diversos órdenes, siendo la dependencia decimal un artificio útil, como lo es el sistema métrico decimal, respecto á los sistemas antiguos de pesos y medidas, aparte de que aquél se halla fundado en unidades fijas tomadas en la Naturaleza.

GEOMETRIA ELEMENTAL.—En este tratado domina la distinción entre la *igualdad* y *desigualdad geométrica,* objeto de la parte primera y la *proporcionalidad geométrica,* objeto de la segunda.

Dentro de esta división principal, dominan los conceptos de: *existencia, determinación, correspondencias* y *transformaciones.*

El *Libro primero* está destinado á las *definiciones* que son como la presentación de la materia sobre la cual se han de formular las proposiciones y los razonamientos.

Los epígrafes de los diversos capítulos constituyen una sinópsis de los teoremas en ellos contenidos: Asi tenemos: *Determinación* de la perpendicular á una recta, *existencia* y *determinación* de las rectas no concurrentes ó paralelas, *determinación* de los triángulos, *extensión* de la determinación de los triángulos á los polígonos; *transformación ó correspondencia* de la igualdad y desigualdad angular con el paralelismo ó no paralelismo, correspondencia de las relaciones angulares y de posición con relaciones de magnitud lineal entre rectas concurrentes, *correspondencias* de la igualdad y desigualdad triangular en el doble paralelismo.

La Geometría plana (1.ª edición) consta de cuatro libros dedicados respectivamente á: *Definiciones, divisiones* y *nociones primitivas.*—

Principios de la existencia, determinación y sustituciones geométricas.—Aplicación de la teoría de la proporcionalidad de las magnitudes á la Geometría.—Problemas.

En dos libros se expone la Geometría del espacio: 1.º *Principios de la existencia, determinación* y *sustituciones geométricas* que tratan de la existencia y determinación de la recta y el plano, de las *correlaciones* de la perpendicularidad y el paralelismo, de las *transformaciones* ó *sustituciones* de las relaciones angulares por relaciones de paralelismo, tratando de la proyección ortogonal y principios de simetría, de las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del ángulo triedro, posibilidad de los poliedros regulares, existencia y determinación de las figuras esféricas.

El *Libro segundo* tiene por objeto la *aplicación de la teoría de la proporcionalidad de las magnitudes á la Geometría del espacio*: segmentos rectilíneos, homotecia y semejanza—ángulos diedros y rectilíneos, áreas y líneas—volúmenes y dimensiones—relaciones métricas de las figuras semejantes.

Esta primera edición está completada por una *Sección crítica* cuyo primer libro, *Metodología geométrica*, trata de: Nociones generales—Método analítico ó de invención—métodos demostrativos ó de exposición (Métodos generales, particulares determinativos y particulares extensivos).

El *libro* 2.º, *Crítica de las verdades geométricas*, trata de—Nociones generales—La existencia en Geometría—La determinación en Geometría—Generación de las figuras geométricas (generación superficial, la recta y la circunsferencia como lugares geométricos)—*Síntesis geométrica* que comprende: nociones generales, subordinación de las verdades—Coordinación de las verdades.

Esta *sección crítica* fué completada inmediatamente por el opúsculo: *Complemento de la Geometría elemental ó crítica* geométrica de que se tratará más adelante.

La segunda edición, publicada en 1888, calcada en los conceptos señalados y característicos de carácter psicológico que presiden al encadenamiento lógico, por una tendencia predominantemente crítica, adquiere amplitud por el aditamento de la Geometría métrica, según Chasles, y además por expresar una tendencia á la fusión de las geometrías plana y del espacio y á una separación de las relaciones de igualdad ó congruencia y desigualdad con las de proporcionalidad que introducen el número como representante de las relaciones geométricas. Así pues, la *parte primera* trata de la *igualdad y desigualdad geométrica*, refiriéndose el *libro segundo* á las *figuras rectilíneas contenidas en un plano* y el *libro tercero* á las *figuras rectilíneas en el espacio*, así como la *parte segunda* de la obra se dedica exclusivamente á la *teoría de la proporcionalidad geométrica*.

Añadiremos que la extensión á las figuras en el espacio, ó de tres dimensiones se halla calcada sobre la anterior, Así, se trata de la *determinación* del plano, de las *correlaciones* del paralelismo y perpendicularidad de rectas y de planos, *existencia* y *determinación* de los triedros y de los poliedros, *posibilidad* de los poliedros regulares, *equivalencias* de poliedros.

Y aparte de la correspondencia dualística del punto con el plano, asi como en Aritmética se hizo resaltar con el máximo común divisor y mínimo común múltiplo y también la existente entre las proporciones por diferencia y por cociente, que permite la sinópsis á doble columna, las correlaciones de la perpendicularidad y el paralelismo tienen una forma sinóptica en el modo de escribir los teoremas, haciendo visible la reciprocidad total ó parcial de los conceptos enumerados, que inicia en la inclusión total ó parcial (interferencia), de las proposiciones, esto auxiliado por el empleo de los signos de la perpendicularidad $\perp$, paralelismo $\|$, ángulo $\angle$, etc., que hace *intuitivas* las relaciones enunciadas. Así, por ejemplo, tenemos que:

Si una $|^{a}$ es $\perp$ á un plano XX	1.º Todo plano que contiene á la $|^{a}$ ó que le es $\|^{o}$, es $\perp$ al plano XX *directo*.
	2.º Todo plano $\perp$ al XX es $\|^{o}$ ó contiene á la $|^{a}$ (*recíproco*).

La *parte segunda* está basada en la *medida* de las magnitudes geométricas y el *número* que expresa la *relación anarmónica* de cuatro puntos en línea recta.

Respecto á la primera, se tratan inmediatamente las diversas *especies* de magnitudes proporcionales, comenzando por la homotecia y semejanza: ángulos y arcos, áreas y dimensiones, volúmenes y dimensiones, relaciones de áreas y volúmenes de las figuras semejantes.

En correlación con la geometría de la medida, se trata de la posición: principios y nociones relativas á la posición y al signo, basados en los procedimientos del *giro* y de la *rotación*, reseñando la teoría de los ciclos de Laguerre y expresando la correspondencia de la teoría de los polígonos regulares con la teoría algebraica de las sustituciones.

Y, ciertamente que vemos relacionados estos conceptos en el *Tratado de Algebra* (parte elemental), á partir de las congruencias binomias (Sección tercera, libro segundo, *las funciones implícitas en las ecuaciones de congruencia*) y previa la definición de los residuos potenciales que se expuso en el *Tratado de Aritmética*, teoría del *número-resto* y de los números que *pertenecen á un exponente* dado, según un módulo dado, llegándose á la obtención de las raíces primitivas en el *Tratado de Algebra*.

Sigue la exposición de la Geometría métrica, subordinada al principio fundamental de la igualdad, de la relación anarmónica de dos sistemas de cuatro puntos situados en línea recta, distinguiéndoe los dos sistemas de Geometría euclidiano y no-euclidiano, la Geometría analítica y la Geometría pura, fundadas en elementos analíticos ó puramente geométricos, ésta última con sus dos procedimientos expansivo y restrictivo de la *proyección* y la *sección*.

Debe manifestarse que, en el *libro segundo*, concerniente á las *relaciones métricas* se expone la *Trigonometría* como *un capítulo de la Geometría*, considerándose de una manera *sistemática* todos los triángulos rectángulos posibles formados por giro y prolongación, como después, en la *Geometría general*, se tratan las correspondencias de igualdad y desigualdad y aun la Geometría del triángulo como un sistema de figuras adjuntas á las figuras de base ó fundamentales. En este tratado elmental sólo se indican los sistemas de circunferencias y las figuras inversas y método de transformación por radios vectores recíprocos.

La falta de ejercicios prácticos y problemas en este tratado, obedece al propósito, no realizado ni entonces ni después, de publicar una extensa colección, subordinada á los preceptos de una *Metodología*, tan sólo diseñada en diversos trabajos.

TRATADO DE ALGEBRA (parte primera). *Tratado elemental* 1883).

Tenemos el cuadro sinóptico:

SECCIÓN PRIMERA.—*Teoría de los algoritmos primitivos.*

- **Libro 1.º Definiciones, divisiones y nociones primitivas.**
  - I. Nociones generales sobre la cantidad aglebraica.
  - II. Nociones sobre la cantidad concreta y su cualidad ó modo de ser.
    - § 1.º Nociones sobre la cantidad continua.
    - § 2.º Concepto de las cantidades positivas y negativas.
    - § 3.º Cantidades llamadas imaginarias ó complejas.
  - III. Nociones sobre los conceptos que intervienen en el Algebra.
  - IV. Nociones sobre las ecuaciones
  - V. Nociones sobre las funciones.
- **Libro 2.º Teoría combinatoria.**
  - § 1.º Combinaciones. § 2.º Permutaciones. § 3.º Combinaciones. § 4.º Coordinaciones, permutaciones y combinaciones con repetición. § 5.º Probabilidades. § 6.º Sustituciones. § 7.º Teoría de los determinantes.
- **Libro 3.º Teoría de las funciones explícitas ó cálculo algebraico.**
  - *Cap.* I. Nociones generales.—*Cap.* II. Cálculo de las cantidades racionales enteras (Adición..... extracción de raíces).—*Cap.* III. Nociones sobre el cálculo de los determinantes (Transformaciones y reducciones, adición y sustracción, multiplicación). *Cap.* IV. Fracciones algebráicas (cálculo).—*Capítulo* V. Series y progresiones (nociones, progresiones por diferencia y cociente).—*Cap.* VI. Cantidades reales de forma radical. § 1.º Reducciones y simplificaciones. § 2.º Cálculo de las cantidades radicales. § 3.º Cálculo de las cantidades afectadas de exponentes fraccionarios.—*Cap.* VII. Cantidades imaginarias (nociones, adición.... extracción de raíces).—*Cap.* VIII. Cantidades infinitas ó incomparables. § 1.º Nociones sobre el infinito matemático. § 2.º Casos singulares que se presentan en los algoritmos elementales.

SECCIÓN SEGUNDA.—*Teoría de las funciones explícitas en los algoritmos derivados.*

Libro 1.º Algoritmos técnicos.	*Cap.* I. Las *series* consideradas como algoritmo técnico.—*Cap.* II. Las *fracciones* consideradas como algorítmo técnico.—§ 1.º Desarrollo de una cantidad en *fracción continua.* § 2.º Problema inverso.
Libro 2.º Algoritmos teóricos derivados	*Cap.* I. La *numeración.*—*Cap.* II. Las *factoriales.*—*Capítulo* III. La función *logaritmo.* § 1.º Su definición y propiedades fundamentales. § 2.º Sistemas de logaritmos. § 3.º Naturaleza y expresión teórica del logaritmo. § 4.º Expresión técnica del logarítmo. § 5.º Expresiones técnicas de algunos números por medio de los logaritmos.—*Cap.* IV. La función *seno.* § 1.º Expresiones teórica y técnica de la función seno. § 2.º Expresiones teórica y técnica del número π. § 3.º Fórmula de Moivre.—*Cap.* V. *Periodicidad* de las funciones exponencial y seno y multiplicidad de la función logarítmica.—*Cap.* VI. *Correspondencias geométricas de las funciones exponencial, logarítmica, seno y coseno.* § 1.º Representación geométrica de las funciones. § 2.º Representación geométrica de la periodicidad de las funciones exponencial y seno y de los múltiples valores de la logarítmica.

LIBRO 3.º.—*Teoría general de las cantidades y de las operaciones*

Cap. I. *Teoría general de las operaciones.* § 1.º Nociones generales. § 2.º Propiedades generales de las operaciones. § 3.º Propiedades de las operaciones *asociativas.* § 4.º Propiedad *distributiva.*

Cap. II. *Teoría de la cantidad.* § 1.º Generalización sucesiva del concepto de cantidad. § 2.º De las cantidades complejas en general. § 3.º Nociones sobre los cuaternios. § 4.º Resumen sobre las operaciones de los vectores, las birradiales y los cuaternios.

SECCIÓN TERCERA.—*Teoría de las funciones implícitas.*

LIBRO 1.º—*Las funciones implícitas en las ecuaciones de equivalencia.*

Cap. I. *Principios generales sobre las sustituciones de las ecuaciones y de los sistemas.*

Cap. II. *Ecuaciones de primer grado.*—§ 1.º Discusión de las ecuaciones con una incógnita. § 2.º Idem de las ecuaciones con varias incógnitas.

Cap. III. *Ecuaciones de segundo grado.*—§ 1.º Resolución. § 2.º Propiedades de las raíces. § 3.º Discusión.

Cap. IV. *Teoría de las ecuaciones binomias.*—§ 1.º Resolución de las ecuaciones binomias por medio de las funciones circulares. § 2.º Propiedades de las raíces de la unidad. 3.º Representación geométrica de las raíces de la unidad. § 4.º Correspondencias entre las raíces de la unidad y los polígonos regulares.

Cap. V. *Sistemas de ecuaciones.* § 1.º Eliminación de una incógnita entre dos ecuaciones.

§ 2.º Resolución de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneas con igual número de ecuaciones que de incógnitas.

§ 3.º Discusión de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneas.

§ 4.º Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas.

LIBRO 2.º—*Las funciones implícitas en las ecuaciones de congruencia.*

Cap. I. Principios generales sobre las sustituciones de las congruencias y de sus sistemas.

Cap. II. Congruencias de primer grado.

Cap. III. *Teoría de las congruencias binomias.* § 1.º Nociones preliminares. § 2.º De los números que pertenecen á un exponente dado. § 3.º Propiedades de las congruencias binomias. § 4.º Nociones sobre las congruencias de Euler y de Fermat. § 5.º Nociones sobre las raíces primitivas.

LIBRO 3.º—*Teoría de las ecuaciones.*

Cap. I. Nociones generales.—*Cap.* II. Inecuaciones de primer grado con una incógnita.—*Cap.* III. Inecuaciones de segundo grado.

PROBLEMAS DE ARITMETICA Y ALGEBRA CON LAS NOCIONES CORRESPONDIENTES DE CRITICA ALGORITMICA (1885).

Esta obra, aunque notoriamente didáctica, tiene además un carácter crítico, como indica el índice siguiente:

Libro 1.º: Principios generales de Metodología.—I. Definiciones y nociones.—II. El análisis y la síntesis en la Aritmética.—III. Síntesis y análisis algebráicas.

Libro 2.º: Principios generales y cuestiones sobre el cálculo de probabilidades.—I. Principios del cálculo de probabilidades.—II. Problemas relativos á la teoría de probabilidades.

Libro 3.º: Problemas de Aritmética y Algebra.—I. Nociones generales sobre la aplicación del análisis, á la resolución de los problemas aritméticos y algebráicos.—II. Problemas aritméticos. § 1.º El análisis aplicado á la resolución de los problemas aritméticos. § 2.º Resolución sintética de los problemas aritméticos. § 3.º Colección de problemas de Aritmética.—III. Problemas algebráicos. § 1.º Problemas que se resuelven por medio de una ecuación de primer grado. § 2.º Problemas que se resuelven por medio de dos ó más ecuaciones de primer grado. § 3.º Problemas que se resuelven por ecuaciones de segundo grado. § 4.º Problemas relativos á máximos y mínimos. § 5.º Problemas relativos á las ecuaciones indeterminadas. § 6.º Problemas relativos á progresiones por diferencia § 7.º Problemas relativos á las progresiones geométricas. § 8.º Intereses compuestos y anualidades.

Libro 4.º: Principios generales de la tecnia algebráica.—I. Nociones sobre la realidad del mundo físico y los conceptos intelectuales. II. El lenguaje algebráico. § 1.º El lenguaje en la expresión de las magnitudes concretas y sus relaciones. § 2.º Analogías y divergenoias entre el lenguaje algébrico y la realidad física.—III. Discusión de los problemas de primero y segundo grado. § 1.º Discusión de los problemas de primer grado. § 2.º Problemas de segundo grado. IV. Correspondencias entre los conceptos de número y extensión.— V. Principios de las correlaciones algebráicas.

TRATADO DE ALGEBRA CON ARREGLO A LAS TEORIAS MODERNAS. 1886. Comprende dos secciones:

SECCIÓN PRIMERA—*Teoría de la continuidad.*

LIBRO PRIMERO.—Clasificación de las funciones.—Definición de la continuidad.—Definiciones de las derivadas, diferencias, cantidades infinitamente pequeñas y diferenciales.

LIBRO SEGUNDO.—Teoría de las series.—II. Teoría de los productos infinitos.

LIBRO TERCERO.—Teoría de las derivadas.

LIBRO CUARTO.—Teoría de las diferencias.

LIBRO QUINTO.—Teoría de los grados y de las facultades.

LIBRO SEXTO.—Teoría de las funciones y de las ecuaciones, comprendiendo nociones acerca de los ceros é infinitos de las funciones, funciones monótropas y polítropas, con sus representaciones gráficas, contornos elementales, funciones infinitiformes, holomorfas y meromorfas, teorema de Cauchy acerca de la continuidad de las raíces simples y múltiples en la proximidad del punto en que son múltiples, para definir la función algebráica atendiendo á los puntos singulares algebráicos, terminando con la definición de la función holomorfa.

SECCIÓN SEGUNDA.—*Teoría de la combinación y del orden.*

LIBRO 1.º—*Principios de combinatoria y aplicaciones inmediatas*

Cap. I. Cálculo combinatorio.—*Cap.* II. Composición de una función general.—*Cap.* III. De la partición de los números.—*Capítulo* IV. Cálculo de las expresiones simbólicas.—*Cap.* V. Aplicación del cálculo de las expresiones simbólicas al cálculo de las funciones derivadas, etc. § 1.º Generalidades. § 2.º Funciones homogéneas. § 3.º Diferencias de las funciones de diversas variables.

LIBRO 2.º—*Teoría de las sustituciones.*

Cap. I. Principios y definiciones relativos á las sustituciones.—*Cap.* II. Sistemas de sustituciones conjugadas.

LIBRO 3.º—*Teoría de las determinantes.*

Cap. I. Nociones generales acerca de las matrices y de las determinantes. § 1.º Nociones acerca de las matrices. § 2.º Nociones acerca de las determinantes.—*Cap.* II. Desarrollo de las determinantes.—*Cap.* III. Cálculo y reducción de las determinantes.—*Cap.* IV. Determinantes especiales. § 1.º Determinantes recíprocas ó adjuntas. § 2.º Determinantes simétricas, hemi-simétricas y pseudo-simétricas.

LIBRO 4.º—*Teoría de la eliminación.*

Cap. I. Nociones y principios generales.—*Cap.* II. Preliminares relativos á las cantidades primas.—*Cap.* III. Aplicación de la teoría del máximo común divisor á la resolución de un sistema de ecuaciones.—*Cap.* IV. Exposición de los principales métodos fundados en el empleo de los coeficientes indeterminados.

LIBRO V.—*Teoría de las funciones simétricas y alternadas.*

Cap. I. Nociones generales acerca de las funciones simétricas.—*Cap.* II. Determinación de las funciones simétricas de las raíces de una ecuación. § 1.º Determinación de las funciones simples ó sumas de las potencias semejantes, etc. § 2.º Determinación de las funciones simétricas de orden cualquiera de las raíces de una ecuación. § 3.º Determinación de las funciones simétricas de orden cualquiera de las soluciones de dos ecuaciones. § 4.º Cálculo de las funciones simétricas de las diferencias de las raíces de una ecuación. § 5.º Determinación de las funciones simétricas por medio de ecuaciones diferenciales. § 6.º Funciones alephs de Wronski.—*Capítulo* III. Aplicación de la teoría de las funciones simétricas á la de la resultante. § 1.º Determinación de la resultante. §. 2.º Propiedades de la resultante.—*Cap.* IV. Teoría de las funciones alternadas.

LIBRO 6.º—*Teoría de las formas homogéneas.*

Cap. I. Principios generales relativos á las sustituciones lineales.—*Cap.* II. Transformaciones de las funciones homogéneas de primero y segundo grado. § 1.º Funciones homogéneas de primer grado. § 2.º Funciones homogéneas de segundo grado.—*Cap.* III. De las determinantes funcionales. § 1.º Definiciones y nociones generales. § 2.º Propiedades de la discriminante. § 3.º Propiedades de la jacobiana. § 4.º Propiedades de la hessiana.

LIBRO 7.º—*Algoritmo de la forma.*

Cap. I. Nociones generales relativas á las invariantes y covariantes.—*Cap.* II. Propiedades generales de las invariantes y las covariantes. § 1.º Propiedades fundamentales de las invariantes. § 2,º Propiedades fundamentales de las covariantes.—*Cap.* III. Diversidad de las formas homogéneas y sus mútuas dependencias. § 1.º Nociones acerca de las emanentes, contravariantes, concomitantes mixtas, evectantes, cataleticantes é intermutantes. § 2.º Formas que son invariantes y covariantes.—*Cap*, IV. Métodos que sirven para obtener invariantes y covariantes.—*Cap*, V. Número de iuvariantes y covariantes de una forma,—*Cap.* VI. Formas canónicas.

SECCIÓN CRÍTICA

I. LA ENSEÑANZA ELEMENTAL

Los tres opúsculos: *Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas elementales* (1874), *El Método aplicado á la ciencia matemática*(1875) y *Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas elementales* (1877) tienen un carácter marcadamente psicológlco. Se tratan las cuestiones relacionadas con el modo de proceder la actividad intelectual.

Sintetizaremos primeramente, para contemplar en su conjunto las ideas diseminadas en dichos trabajos y para después referirnos, especialmente á puntos determinados de nuestra antigua exposición.

Desde luego nos fijaremos en el método *ad absurdum*, tema predilecto en algunos de nuestros trabajos, porque dicho método se reduce al procedimiento de *correspondencia biunívoca* entre dos conceptos distintos y coexistentes. Y ante todo, será preciso establecer el modo de hallarse contenidas, en *extensión*, unas relaciones en otras, como en el Algebra clásica se halla contenido el sujeto en el predicado; pues de esta manera se halla incluído el concepto de *ángulos opuestos* por el vértice en el de *ángulos iguales*.

Y á este modo de ver se refiere la multitud de problemas que se resuelven por intersección de *lugares geométricos*. Así, por ejemplo, para: *Construir un triángulo* ABC, *dados el ángulo* B, *la suma de los lados* AB *y* BC *y el tercer lado* AC, se prolonga AB en un segmento BC′ = BC, obteniéndose un triángulo auxiliar CC′A, cuyo ángulo opuesto al lado AC está determinado, por ser la mitad del ángulo conocido B. Y el vértice C′ queda determinado por hallarse á la vez en el arco de circunferencia capaz del ángulo C′ y en la circunferencia del radio AC′ = AB + BC′, lo que conduce al triángulo que se busca.

Los lugares geométricos corresponden á condiciones ó propiedades comunes de un sistema de figuras. Sus intersecciones dan una determinación equivalente al conjunto de las determinaciones que aporta á la cuestión cada uno de dichos lugares. En el ejemplo citado, el punto C′ es el individuo común á cada uno de los sistemas de ángulo C′ y de distancia AC′.

Por esta razón, es utilísimo el obtener colecciones de sistemas geométricos, como lo hizo el Sr. Echegaray en sus *Problemas elementales de Geometría* (1865); y en mi *Geometría general* reuno respectivamente, lugares correspondientes á *distancias iguales*, á un *ángulo constante* y á *relaciones métricas*, lo que ya se expuso también en el *Complemento de Geometría*, al tratar de los diversos modos de generación de las figuras, bajo el epígrafe: *determinación compleja y derivada ó teoría de los lugares geométricos*, (páginas 75-81).

Y, en este terreno, debe observarse como indico en el artículo, *La Geometría elemental* (*Boletín de Crítica, enseñanza y bibliografía matemática*, (páginas 103-111) que, en esta rama, los objetos se presentan aislados, sin conexión previa, correspondiendo á la acción intelectual que constituye una Geometría subjetivo-objetiva, cuyos enlaces están dados por procedimientos subjetivos, tan sólo sometidos á la convención de cierta *equivalencia* objetiva. «La inteligencia fija relaciones objetivas, por acción directa, por un procedimiento uniforme, el *análisis geométrico*. Y, sólo más tarde, en posesión de ciertos principios generales, sustituye el cálculo baricéntrico de Moebius, su acción inmediata por métodos como el arriba citado (el de Chasles) ó las formas armónicas de Staudt, etc.»

De un modo más general, tenemos, en todas las ramas de la Matemática, dos procedimientos, *expansivo* y *restrictivo*, que en Geometría proyectiva conduce, de las formas inferiores á las superiores, de las líneas á las superficies, de las series de puntos á los haces planos y de éstos á las irradiaciones en el espacio, por *proyección* ó de éstas á aquéllas por *sección*; y en la teoría de los números tenemos *intersecciones de cuerpos de números*, y los sistemas de ecuaciones nos dan intersecciones de lugares algorítmicos, lo que ya permite prescindir de la acción directa intelectual por delegación en el lenguaje algorítmico que la sustituye, mediante las reglas ó preceptos combinatorios, lógicamente asentados, que reemplazan dicha acción.

El hecho de que baste demostrar una proposición y su recíproca ó su contraria para que resulten demostradas las otras dos, ó que sea idéntico el demostrar un teorema y el recíproco de su contrario, se reduce á la identidad ó equivalencia, desde el punto de vista de la existencia entre los dos conceptos que expresan la hipótesis y la tesis de un teorema. Y esto se halla establecido en la clásica proposición:

Cuando hechas todas las hipótesis sobre un sujeto, las tesis correspondientes son todas distintas, los teoremas recíprocos son ciertos.

Esto lo establecí intuitivamente, considerando dos círculos divididos en n partes cada uno, de modo que se correspondan las 1, 2, 3,... con las 1′, 2′, 3′,... respectivamente, y en particular tres regiones, cuando se trata de las relaciones, *mayor, menor ó igual* (*Geom. gen.*, parte 1.ª, pág. 69), por lo que se establece la correspondencia unívoca que hoy se busca siempre, eligiendo bases irreducibles (ecuaciones, curvas, exponente á que pertenece un número, según un módulo dado, etcétera), para formar ó construir los sistemas complejos.

El método *ad absurdum* no es pues ciego; es un procedimiento abreviado para realizar un *ajuste* entre dos conceptos equivalentes.

«Sea para más claridad, digo en el opúsculo *Consideraciones sobre la conveniencia*, etc. (pág. 44), la proposición: *Todo metal es mineral*, que es verdadera. Si suponemos que en la Naturaleza no existiera más que un mineral, se podría admitir desde luego como cierta la recíproca, que se enunciaría diciendo: *Todo mineral es metal*. Y así, demostrado que *por un punto no se puede trazar más que una perpendicular á una recta* se demuestra, por reducción al absurdo que: *Dos perpendiculares á una tercera recta son paralelas*, porque, si no fueran paralelas, se encontrarían, y habría, desde el punto de encuentro, dos perpendiculares á una recta.

Y en la proposición relativa á la equidistancia de los puntos de la perpendicular, trazada á una recta en su punto medio, de los extremos de dicha recta, que puede enunciarse esquemáticamente así:

(1) si en........ igual (2) si fuera...... desigual
(3) si igual...... en (4) si desigual fuera,

se ve que enunciar uno de los teoremas (1) y (4) ó de los teoremas (2) y (3) es enunciar el otro (*Complemento de Geometría*, pág. 37).

Otra cuestión capital es la de la *equivalencia de los problemas y de los teoremas*, á que dedico los párrafos: *sustituciones y equivalencias en la determinación triangular y circular*.

Efectuándose el tránsito de unos problemas á otros por la simple adjunción de figuras ó construcciónes tales, por ejemplo, como prolongar una recta una longitud igual á otra de la figura, trazar circunferencias concéntricas y rectas paralelas á las dadas, según radios ó distancias convenientes, etc.

De una manera general, podremos concebir que las figuras geométricas se hallan encadenadas entre sí, constituyendo configuraciones. Y esto lo expreso en mi *Geometría general*, denominando tales figuras agregadas, *figuras adjuntas* de una figura dada, tales como las circunferencias inscritas, exinscritas y circunscritas á una circunferencia dada, y como la multitud de figuras que se obtienen en la Geometría del triángulo.

Tales redes de figuras conducen á la resolución de multitud de problemas, en virtud de las *relaciones de coexistencia* que las determinan mútuamente.

Y esto conduce á otra cuestión: la de las *condiciones compatibles*, dentro de cada sistema, porque de lo contrario, resultaría lo imposible, como en los comienzos del Algebra fueron resultando los números sordos, las raíces negativas y las imaginarias, y de la discusión de los problemas, por ejemplo, el de los móviles, resultan imposibilidades correspondientes á incompatibilidades de las condiciones impuestas *a priori*.

Y esta diversidad se acrecienta al aplicar la Matemática á cuestiones externas á su dominio, tales como las concernientes á los fenómenos naturales que dependen de la medida, condición á que se han de someter las fuerzas, energías, etc., de modo que el número sea el representante de éstas (*Problemas de Aritmética y Algebra*, pág. 17), que por tal intermediario se someten á las operaciones del cálculo, como en Termodinámica se establece el equivalente mecánico del calor, en electrostática, la unidad eléctrica; y se define el potencial eléctrico por medio del trabajo, convirtiéndose la Física en expresión matemática» (Idem, páginas 92 y 94).

Pero esta correspondencia métrica, se complica por otro intermediario: el *lenguaje*, correspondencia más difícil de establecer porque es la de la inteligencia que impone condiciones; y el signo representativo de éstas, no siempre es adecuado á la naturaleza del objeto representado.

De esto se trata en el *capítulo* II de dicha obra, *El lenguaje algebráico* que comprende los párrafos 1.º *el lenguaje en la expresión de las magnitudes concretas y sus relaciones*: 2.º *Analogías y divergencias entre el lenguaje algebraico y la realidad física* (páginas 92-96).

Los problemas concretos, aun en la misma Geometría, se asocian y se disocian, según particularidades propias de cada cuestión. Y esto, en la simple Geometría, conduce, tanto á soluciones imposibles como á soluciones múltiples, no previstas en el enunciado, pero que resultan de la naturaleza del objeto.

Además de la inclusión de que se ha tratado, en el caso de no existir reciprocidad entre dos conceptos ó relaciones, existen, por lo general interferencias ó compenetraciones parciales entre relaciones varias que producen una *superabundancia* de condiciones, útil para los encadenamientos discursivos, especialmente en los que por el análisis geométrico se llega á la resolución de los problemas. Estas condiciones superabundantes permiten transformar el encadenamiento *hipotético* de que se parte, en el método de Platon ó de Pitágoras, en un encadenamiento regresivo, real y efectivo. Asi, en el problema: *Trazar una tangente común á dos circunferencias,* se llega á trazar, desde un punto exterior á una circunferencia concéntrica á una de las dadas, una tangente que *es, además,* cateto de un triángulo rectángulo y perpendicular al radio y paralelo á la tangente hipotética común; lo que permite el retroceso, *efectivo,* desde el último problema hasta el primero.

Estas compenetraciones ó inclusiones resultan de la varia generalidad de los conceptos. El mundo de las relaciones matemáticas se semeja al de los atributos predicables de un sujeto. Las relaciones son múltiples y varias.

De esto nos podemos formar una idea, considerando el andamiaje, ó encadenamiento de términos medios que sirven para ligar la hipótesis de un teorema con su tesis, de modo que desaparecen aquéllos, como elementos *de adherencia,* para que sólo aparezcan los dos términos del teorema.

Las múltiples relaciones geométricas y analíticas se ajustan en la medida precisa para constituir un todo íntegro y bien definido; y cada ajuste constituye un teorema ó la resolución de un problema, como los componentes químicos que forman una sal, dejando libres los elementos que resultan extraños ó sobrantes.

Y la Matemática procede siempre de una de dos maneras, por construcción explícita ó por desdoblamiento de lo implícito contenido en los moldes de las ecuaciones ó de las construcciones geométricas propuestas.

En las obras citadas, trato de la *existencia,* la *determinacién* y la *generación* como momentos primeros de la constitución de las entidades matemáticas, las dos primeras que las definen como realizadas y constituídas, la tercrea como desarrollándose en todos los movimientos de su existencia.

Otra cuestión es la que se refiere á la acción subjetiva que concierne principalmente á la *Metodología* que sale de la Matemática como desenvolvimiento puramente lógico, para extenderse en la región de la Psicología. De ello he tratado en mis primeros opúsculos; y basta citar los siguientes epígrafes de las cuestiones desarrolladas:

«Algunas nociones de psicología, principios de la Ciencia, cuestiones de la ciencia matemática, ideas que se refieren á las cuestiones matemáticas, divisiones de los teoremas, demostraciones que se refieren á la acción y á la especulación, forma del número, demostración *ad absurdum*, existencia de las figuras, determinación de las figuras, relaciones del contenido de las figuras, figuras equivalentes y semejantes, figuras referidas al círculo. Teoremas fundamentales de las diversas teorías geométricas. Análisis de algunas cuestiones matemáticas (*Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas*, 1874).

Además, en *El Método aplicado á la ciencia matemática* (1875), trato las siguientes cuestiones: Ideas generales, método aplicado al desenvolvimiento de una cuestión (modos de ser del objeto y modos de obrar ó ser del sujeto). Desde el punto de vista objetivo, tenemos, en las cuestiones matemáticas: 1.º ciertas cantidades caracterizadas por existir hipotéticamente. 2.º otras unidas á las primeras por el lazo de la coexistencia. 3.º ciertas construcciones ó transformaciones que ponemos arbitrariamente para poder introducir nuevas entidades y relaciones que nos sirvan como medios de enlace entre los elementos expresados en la cuestión. 4.º Teoremas que justifican los enlaces de las entidades y relaciones auxiliares con las expuestas en la cuestión.

Respecto al modo de obrar del sujeto, trato del análisis y de la síntesis. Explico el modo de la acción intelectual ante un amontonamiento de problemas, la influencia de la imaginación, la variedad y viveza de las representaciones en el momento inventivo, la síntesis que acompaña á un análisis más ó menos vago é indeterminado, hasta llegar á la fijeza y al esclarecimiento, á medida que la atención se fija y ejercita en el problema que resolvemos».

Trato de los *métodos matemáticos*, el de sustituciones sucesivas, los modos de sustituirse las cuestiones por *intuición* y *discursión*, de la *inducción* empírica y racional, del *método de generalización por idénticos modos de ser*, de algunos métodos particulares é ideas generales acerca de la definición, división y clasificación.

Todas estas indicaciones primeras, como se ve, constituyen un preliminar para la constitución de una *crítica* y *pedagogía matemática*, pues en cuanto á ambos extremos, digo en *Consideraciones sobre la conveniencia*, etc. (pág. 17): «Se enseñan series de demostraciones ligadas entre sí por inquebrantable lazo; se exponen teorías cuya dependencia y analogías no se ven. La materia anula á la forma, el hecho á la idea.«

«Se hacen demostraciones exactas, indiscutibles; pero no se sabe á que ley superior obedecen unas y otras, diseminadas en la Ciencia, sin corresponder á un plan conocido que las haga aplicables á determinadas categorías de verdades, es decir, se expone el porqué de todo; pero no se expone la razón de este porqué.»

«Se sabe, siguiendo rigurosas transformaciones, de cálculo, llegar á una relación final que surge de ese simbolismo como efecto de un juego de prestidigitación. La inteligencia no duda de la verdad del resultado, porque el razonamiento ha sido riguroso, ha sido un encadenamiento en que se ha sucedido sin interrupción el asentimiento intelectual; pero se queda en la oscuridad y la duda entrañadas por tan misterioso acceso.»

«No habiendo un lazo racional para el razonamiento, como existe para los términos que se unen por la demostración, la memoria lo suple, interviniendo en una ciencia eminentemente racional.»

«Este es acaso el principal motivo de la facilidad con que la Matemática se olvida, pues no se ha asimilado á la inteligencia, no se ha fundado en lazos lógicos, no ha recibido la suficiente preparación para fundirse en ella, constituyendo un todo inquebrantable; y se borra prontamente de su fondo, donde no puede arraigar lo incidental, lo que se une de una manera contingente.»

En estos párrafos se halla envuelta la idea de la crítica matemática, que da la razón de los procedimientos lógicos y la necesidad de la pedagogía, que lleva el aspecto psicológico, especialmente al ejercicio de la actividad directora de nuestros procedimientos y á la asimilación subjetivo-objetiva.

Y esta segunda dirección que comprende, entre otros extremos, la *constitución científica*, la *comprensión*, *la ordenación*, la *expresión*, la *comunicación* y la *invención*, como he expresado recientemente en *Nueva contribución á la enseñanza matemática* (1910), se detalla en dicho opúsculo (*Consideraciones*, etc.), al establecer la correspondencia de la enseñanza con las fases del desarrollo intelectual, á saber, de la intuición, empírica ó percepción, la de la inducción, generalización, abstracción y clasificación, la de la razón que investiga en su último grado el porqué de las cosas, su ley, su fundamento científico (páginas 4 y 5).

Ya en otras publicaciones he insistido, repitiendo como lo hago brevemente, que en un primer tratado, llamado *Exposición preliminar ó* *intuitiva*, se contendrían las definiciones, divisiones, operaciones de la Aritmética y las pertenecientes á la Geometría, antepuesta al Algebra por su carácter más intuitivo, que después podría tener lugar la *Metodología*, como provechoso ejercicio intelectual en la resolución de los problemas, ya que, como digo en otra parte, la Matemática es una sucesión de Métodos, y, con estos preliminares, se podría hacer el estudio, *razonado*, de la Aritmética la Geometria, el Algebra y la Teoría de las funciones circulares, con la resolución numérica de los triángulos rectilíneos, terminándose con la *Crítica* y una *Síntesis general* (Idem páginas 25-27).

Como arriba se indicó, estas dos últimas generalidades se encuentran expuestas en la *parte crítica* de la *Geometría elemental* (1.ª edición) y en la sección segunda, *Crítica de las verdades geométricas*, del *Complemento de Geometría*.

Por otra parte, en el folleto *Ciencia, educación y enseñanza* afianzo mi opinión á favor de la enseñanza eminentemente *intuitiva* en los primeros años, que deben dedicarse á la *educación*, teniendo una importancia muy secundaria la *instrucción*, puesto que la primera implica potencialidad en la segunda.

«La Gramática, digo, ocasiona el que aparezcan en la inteligencia las primeras ideas de relación, la de sujeto y objeto, la del sujeto en su modificaciones y cualidades, en la sucesión y distinción de sus modos de obrar »

«La Aritmética es el complemento de la Gramática, descubriendo á la inteligencia un nuevo horizonte: el del orden, la combinación y relación del todo con las partes que lo constituyen.»

«Simultáneamente con las nociones de Aritmética, deben irse inculcando al niño las de la Geometría, que conviene se vayan adelantando á las de aquélla, por corresponder á un orden más concreto.» «El contar y el cálculo aritmético en primer término, sirven de ejercicio á la memoria, función intelectual que debe ponerse en acción en este tan favorable periodo de la vida, ya que la Naturaleza, tan previsora, cuando nos faltan los medios de relacionar ideas, nos provee de este instrumento que luego decae con la edad, por efecto de ser cada vez menos necesario, cuando otras facultades superiores se han desarrollado y la suplen ventajosamente.»

«Pero el cálculo aritmético, al mismo tiempó que constituye un ejercicio de la memoria, debe ir acompañado de *ejercicios intuitivos*, porque urge, en el desenvolvimiento gradual de la inteligencia, que al lado artificioso que constituye la memoria, llegue á suceder ó sustituir el hábito de contemplar la inteligencia *directamente* su objeto, de que adquiera la aptitud de enlazar estas dos entidades y evitar un defecto frecuente, consecuencia de los procedimientos generalmente seguidos, esto es, relacionar la inteligencia con el signo ó palabra, mas nó con el objeto, defecto que adquiere por el abuso de los libros, siendo muy digno de tenerse en cuenta, en este periodo de la educación las ideas de Pestalozzi, que prefirió al estudio en los libros el estudio en la Naturaleza, creando el método *real-objetivo*.»

«El cálculo puede servir de auxilio á la Geometría; pero conviene limitarlo mucho en la instrucción primaria, pues las primeras relaciones geométricas son las de igualdad ó equivalencia que pueden adquirirse hasta por medio de juegos ó combinaciones bien elegidas de objetos; y parece conveniente que desde luego se enseña la Geometría del espacio, pues un error de la enseñanza actual es pretender que, por las figuras dibujadas en la pizarra, el alumno pase á la consideración de las figuras naturales, cuando el procedimiento lógico es el inverso.»

Con análogo carácter que los trabajos concernientes á la crítica geométrica ya indicados publiqué varias notas, artículos, etc., en diversas revistas y especialmente en *El Progreso matemático*.

II. La enseñanza matematica especial ó media

Los franceses llaman *matemáticas especiales* á las teorías que constituyen la preparación inmediata para las superiores ó universitarias y para los estudios de aplicación. Estas enseñanzas han sido relegadas al final de los estudios de segunda enseñanza y hasta han descendido á ésta algunas nociones que ya entran en la categoria superior, tales como el concepto de función, de derivado y, por consiguiente, de *límite*.

La Geometria descriptiva, por su carácter gráfico, puede llevarse á dicha región media y aun el método cartesiano, reducido á acepción más estricta, á saber, la sustitución de cálculo á las demostraciones del método sintético en el estudio de las figuras.

Sin aspirar á fin alguno en este orden de ideas, á continuación publiqué trabajos acerca de las teorías que ocupan un lugar medio en el desenvolvimento matemático, y no porque tal ó cual teoria se considere como superior ó inferior respecto á tal otra, sino porque indican un grado mayor ó menor de complejidad.

Vemos en efecto, que las ramas llamadas elementales tienen entre sí cierta independencia, siendo escaso el número de conceptos que toman prestados de las otras.

Mi Geometría general tiene este carácter medio ó preparatorio por el contenido ó materias que comprende, y por la forma ó conceptos generales predominantes, puede considerarse como un preliminar de la crítica científica ó especialmente geométrica.

Los libros primero y segundo contienen substancialmente lo expuesto en anteriores folletos, con el aditamento de proposiciones de la Geometría de las transversales y de los porismas de Euclídes, el método trigonómetrico, los métodos de la Geometría proyectiva según Poncelet, con su teoría de las cónicas suplementarias, su método proyectivo, el cálculo baricéntrico de Moebius, el método de la relación anarmónica de Chasles, y de las formas armónicas de Staudt.

Siguen los métodos analítico-geométricos de las equipotencias y de los cuaternios y nociones del *Tratado de la extensión* de Grassmann.

Para afianzar el espíritu general y sistemático de este tratado, la parte segunda se denomina, *Sistematización de la Geometría*, comprendiendo como maetrias principales las primeras proposiciones de los elementos de Euclídes y nociones de la Geometria no-euclídea.

Un capítulo se dedica á la *sistematización en la Geometría elemental* completado por las *correspondencias entre el número y la extensión*, la *eliminación de elementos simétricos* que se realiza en la Geometría de las transversales y otras particularidades como el *teorema de Stewart*, seguido de aplicaciones de las propiedades proyectivas á la generación de las cónicas y nociones de la Geometría del triángulo.

Es, por tanto, un tratado de carácter sistemático que inicia al lector ó al alumno en la variedad de procedimientos geométricos.

Pero el objeto capital en sí y en sus aplicaciones á toda la Matemática, es el número. Este, formado por las primeras combinaciones que constituyen el cálculo aritmético, se estudia sistemáticamente en las congruencias, cuyo objeto es el número entero.

Pero después de la generalización de Gauss, que importó el número complejo, tenemos la generalización que expresan los números ideales de Kummer y los ideales de Dedekind que explican satisfactoriamente ciertas anomalías acerca de la divisibilidad que aparecían en los cuerpos de números algebráicos.

La Crítica y síntesis del Algebra tiene para el Algebra la misma finalidad que la anterior para la Geometría por su carácter crítico é histórico-bibliográfico.

Su contenido se reduce á lo siguiente:

Capítulo I. *Indicaciones sobre el concepto del Algebra.*

Capítulo II. *Resúmen histórico.* 1.º Generación del concepto de *número* (Euclídes, Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Dirichlet, Kummer, Dedekind).—2.º Generación del concepto de *continuidad* (Neper, Wallis, Harriot, Newton, Taylor, Maclaurin, Stirling, Cardan, Ferrari, Lagrange, Fourier, Budan, D,Alembert, Cauchy, Sturm, Ampére, Sylvester, Hermite y Graffe).—3.º Generación del concepto de *cualidad* y *Algebra geométrica.*—La cualidad en el Algebra abstracta, la cualidad en el Algebra geométrica (Argand, Bueé, Mourey, Warren, Faure, Poinsot, Vallés, Cauchy, Liouville, Hermite, Riemann y Neumann. Estos matemáticos hicieron avanzar el Algebra en el sentido de la representación vectorial).

Prevaleciendo este carácter representativo, se llegó á los conceptos de puntos, lineas y superficies y espacios analíticos de n dimensiones, traspasando los límites del Algebra para entrar en los del Análisis ó Teoría de las funciones (Riemann, Weierstrass, Cantor, Bois-Reymond, Darboux): Y aunque estas nociones y los trabajos de los matemáticos citados corresponden naturalmente á la teoría de las funciones, creímos necesario evocarlas, según se expresa oportunamente, porque forman un núcleo de verdades de las que se desprenden como consecuencias, no pocas, constitutivas del organismo algebráico.

Bien es cierto, añadiremos, que en los últimos treinta años, el Algebra ha limitado sus dominios, dentro de los conceptos de grupo discontinuo, de la teoría de los números y de las formas homogéneas, dirigiéndose, en este sentido, á compenetrarse con la Geometría analítica.

En el Algebra geométrica y simbólica se hacen indicaciones y desarrollos acerca del Ausdehnungslehre de 1844, de las cantidades alternadas y las claves de Cauchy, el cálculo formal de Grassmann, el algebra de la Lógica de Boole y Jevons, las teorías de Bellavitis y Hamilton, de Ball y de Clifford, con su clasificación de las álgebras geométricas.

4.º *Generación del concepto de cualidad en la aplicación del Algebra á la Geometría ó en general á la resolución de problemas de orden concreto.*

Al comenzar este párrafo, observo que las correspondencias entre la variación de signos y la disposición de las figuras, en la Geometría cartesiana. fueron el punto de partida de un sistema de investigaciones concernientes, más bien que á la ciencia algebráica considerada en sí, á la correlación que existe entre los principios de la misma y el modo de existir de las entidades del orden concreto á que estos se aplican.»

Desde este punto de vista, comienzo por diseñar la idea de Carnot de las *correlaciones directa, inversa y compleja* expuesta en su *Geometría de position* que si bien no tuvo transcendencia, sirve de punto de partida á las investigaciones de Poncelet, continuador y generalizador de este orden de ideas, expuestas en sus *Aplications d'Analyse et de Géométrie,* donde se propone establecer el *principio de continuidad,* considerando, conforme á la idea de Monge, en su método de transmutación de las figuras, los intervalos en que ciertas magnitudes geométricas son inconstructibles ó cesando de existir, son puramente ideales; y en este caso, cree permitido considerarlas como magnitudes indeterminadas que no dejan de existir en las ecuaciones ó relaciones métricas correspondientes. Observa, refiriéndose al *razonamiento explícito,* propio del análisis cartesiano, siendo las ecuaciones que se refieren á expresiones tales como $a-b$, $\sqrt{a-b}$, etc., puramente literales, nada puede indicar, en la serie de sus transformaciones sucesivas, el modo de existencia, para cada estado de magnitudes y que, no conservando el resultado final de este razonamiento huellas de las transformaciones sufridas por las relaciones primitivamente dadas, y siendo la indicación de las nuevas relaciones que existen entre las magnitudes indeterminadas del sistema, ocurrirá que será preciso considerar estas relaciones como pertenecientes y aplicables á todos los estados posibles del sistema» (obra cit., pág. 68). Y esto le conduce, en su teoría de las propiedades proyectivas de las figuras á la consideración de las *cuerdas ideales* en las *curvas suplementarias* y á sus generalizaciones, considerando las intersecciones imaginarias en el infinito.

Cournot en su obra *De l'origine et des limites de la correspondence entre l'Algebre et la Géométrie* sigue en este orden de ideas, en la traducción por el Algebra de las condiciones de los problemas, haciendo ver cómo la correspondencia no es siempre perfecta, puesto que las cuestiones asociadas por analogías naturales se ven frecuentemente disociadas en las ecuaciones que las traducen» (pág. 72).

5.º *Generación de los conceptos de combinación y orden.*—Respecto á las ecuaciones, se indican las investigaciones de Lagrange, Abel, Galois, Kronecker y Hermite acerca de conceptos tales como el de ecuación abeliana, condiciones de resolubilidad, adjunción, grupo propio. Y respecto al algoritmo de la forma, se trata de la propiedad de *invariación* de las formas, hasta Cayley, Clebsch y Hermite.

Termina esta obra con un *Examen del plan del Algebra,* considerada hasta los resultados de Abel y Galois.

La obra, ESTUDIOS DE CRÍTICA Y PEDAGOGÍA MATEMÁTICA está en un nivel científico algo superior que las anteriores por su mayor generalidad y un carácter crítico más señalado, pues comprende las materias siguientes:

Los conceptos fundamentales.—Los sistemas matemáticos (de Comte y Wronski).—Los críticos matemáticos.—La ciencia real y la ciencia ideal.—La formación de los objetos matemáticos.—La enumeración de los conceptos.—Necesidad de la crítica matemática, su objeto.—La crítica en la Aritmética, en la Geometría, en el Algebra.—El Algebra de la Lógica.—La Geometría numerativa.—Crítica de la teoría de las funciones.—La Geometría cinemática, la diferencial.—La teoría de los grupos de transformaciones.—El concepto de imaginarismo.—El infinito en la Matemática y la unificación de los conceptos matemáticos.

Capítulo II. *La síntesis filosófico-matemática* comprende: § 1.º Filosofía, Combinatoria, Clasificación de los conceptos.—Matemática (los matemáticos analistas y geómetras), los axiomas.—§ 2.º *Síntesis algorítmica* que comprende: La teoría de los números.—Funciones de variables complejas.—§ 3.º *Síntesis geométrica* que comprende la Geometría elemental, las correspondencias geométricas, la descriptiva, cartesiana, infinitesimal, diferencial y las proyectivas, superior y de la posición.—§ 4.º *Los sistemas matemáticos* que comprenden: Sistemas combinatorios, sistemas geométricos en el orden objetivo y subjetivo, sistemas algorítmicos *a*) equivalencia de las formas *b*) cuerpos finitos *c*) invariantes, covariantes y sus especies *d*) grupos (transformaciones lineales y de contacto).—Compenetración de los conceptos.—*Resumen* que comprende: objeto, procedimientos, principios subjetivos (lógicos, combinatorios, ideografía).—§ 5.º *Síntesis general*: Comprende la determinación cuantitativa (medida) de la Geometría elemental y la cualitativa (posición y forma) de la Geometría descriptiva, la Geometría sistemática (aplicación de la teoría de los grupos proyectivo, de rotación y de los movimientos euclídeos, etc.); el Algebra y sus sistemas, el cálculo *directo* de las funciones, su generación *infinitesimal*. Se trata de la teoría de las ecuaciones diferenciales que constituye el problema general de la obtención de las funciones y de la noción de grupo, como lazo común de las relaciones y propiedades numéricas y geométricas.

La teoría de los grupos es el capítulo más importante de la rama formal, llamada combinatoria. Tenemos la Geometría numerativa y el cálculo simbólico ó formal y finalmente la combinatoria aplicada á las operaciones del espíritu. Y: «Aunque la *intuición* es la característica en el dominio elemental, en las regiones superiores, el razonamiento matemático consiste en prescindir de la intuición, cimentándose en el idealismo de sus definiciones y de sus construcciones simbólicas ó ficticias, como por ejemplo, la esfera en el espacio de *n* dimensiones, etc.»

El libro segundo trata de la *Enseñanza*. Tenemos: *Cap*. I. Cuestiones de orden sociológico y cuestiones doctrinales. Se preconizan los procedimientos de Pestalozzi y Froebel en primera enseñanza. En ésta y en la secundaria, la intuición. En los Institutos, Liceos y Gimnasios, los ciclos, imitando el modo de prosperar la Ciencia que se mueve en períodos cada vez más amplios. Y las ciencias no son como líneas rectas que deben ser recorridas sin interrumpirse, en toda su dirección, sino como haces divergentes que, abandonando las direcciones rectilíneas, se entrelazan y forman una red, por cuyos hilos puede caminarse en diversas direcciones.»

«El profesor da vida y movimiento á las ideas del libro; los ciclos son una imitación de lo que nos revela la historia de la Ciencia. Cada época científica es un nuevo ciclo que recorre la humanidad, por el que se llega á un nuevo grado de condensación.»

«En vez de teorizar hay que presentar problemas en que se hallen graduadas las dificultades de la manera más natural posible.

En cuanto á la *forma* de la enseñanza, debe reducirse la parte doctrinal á lo más indispensable, extendiéndose considerablemente las aplicaciones. El trabajo del profesor consistirá en una *distribución gradual de las dificultades.*

A estas consideraciones pueden agregarse las siguientes, expuestas en *Quelques réflexions sur l'enseignement mathématique* (*Extrait des comptes rendus de l'Association française* etc. *Congrès de Paris* 1900): «L'instruction doit viser au développement des fonctions intellectuelles, conduisant graduellement, depuis l'analyse qui affermit l'esprit d'observation, jusqu'aux idées d'ensemble..... Au seuil de l'enseignement, nous croyons util de rappeler toujours le précepte cartesien: *ne recevoir jamais aucune chose pour être vraie que je ne la connusse évidement être telle*, principe qui dans l'enseignement élémentaire, se réduit à maintenir la prédominance de l'intuition dans l'acquisition de toute connaissance: cette intuition se borne ici aux définitions, divisions ou variétés d'objets... Il faudra, au commencement, apprendre plus dans les objets que dans les livres... les figures, les modelles.....

La Géométrie doit être aussi préférée dans le premier dégré de l'enseignemet, en groupant au début les propositions relatives à l'égalité et l'inégalité... L'Arithmétique pourra ainsi s'étudier en même temps que la Géométrie. Les concepts d'association, conmutation, distribution et contenance préparent à la combinatoire.

C'est une préocupation nuisible que de subordonner le plan de l'enseignement à certains détails tels que des insuffissances dans les démostrations... L'ensemble doit prévaloir toujours sur quelque défaut de détail... L'enseignement, au lieu d'adopter la succession linéaire, doit adopter la disposition *cyclique:* il doit diviser et déplacer les systèmes classiques.

CAPÍTULO II

Resumen de la exposición matemática superior

SECCIÓN CRÍTICA

I. Recapitulación de algunos trabajos

La enseñanza superior admite este calificativo más que por la calidad de los conocimientos ó de sus teorías por su complejidad, pues en ella se combina y compenetra una gran variedad de conceptos.

Imposible es abarcarla en su totalidad por la variedad de sus disciplinas que incluyen vastos dominios de verdades é inmensidad de métodos y puntos de vista.

Sin embargo, existen un foco hacia el cual todas convergen y que puede facilitar estudio tan extenso de conocimientos y dos aspectos generales: el analítico y el geométrico.

A la teoría de las funciones se refieren todas las ramas superiores de la Matemática.

El método de enseñanza consiste especialmente, en la selección de materias y en la combinación de tratados que permitan mayor economía de esfuerzo en tarea tan extensa y complejidad de conocimientos, si bien es cierto, creemos, que puede conseguirse mucho por el método, como veremos al final de la obra, pudiendo adelantar por ahora, que el método se va realizando lentamente por las tendencias críticas y bibliográficas de estos últimos años, de lo que es testimonio la publicación de la *Encyclopaedie der Mathematische Wissenschafften*.

Como ensayo para llegar á un conocimiento general de las teorías modernas hemos publicado algunas obras y opúsculos en las cuales se diseñan los caracteres más salientes de dichas teorías. Así, tenemos la

Exposición sumaria de las teorias matemáticas

Presentaremos á manera de índice las materias contenidas en este tomo:

Después de reseñar la evolución cronológica de la Matemática clásica que comprende: La Geometría, el Algebra, la Aritmética, Teoría de los números y el cálculo infinitesimal, se trata de la Matemática moderna en el orden siguiente:

Evolucion de las teorias combinatorias.—Determinantes.—Teoría de los grupos.—Aplicaciones (grupo resoluble, metacíclico, modular, funciones poliédricas modulares).—Geometría numerativa.—Combinatoria.

Evolucion de la Geometria.—Geometría elemental.—Geometría reciente ó del triángulo.—Geometría superior.—Geometría proyectiva.—Geometría de la posición.—Geometría cinemática.—Geometría analítica.—Geometría vectorial.—Geometría de las formas discontinuas.—Configuraciones.—Curvas de tercero y cuarto orden.—Geometría diferencial.—Sistemas geométricos.—Geometría reglada.—Variedades.—Geometría esférica.—Geometría circular.—Pangeometría.—Geometría de n dimensiones

El Algebra en su relación con los grupos.—Concepto general.—Lagrange.—Abel.—Galois.—Kronecker.

Algunas consideraciones sobre filosofia y enseñanza de la matemática

Esta obra es un complemento natural de la anterior. Sólo difieren por el predominio de los dos elementos subjetivo y objetivo.

En la *Exposición sumaria* predomina el objeto. Es más técnica. Se describen las diversas teorías matemáticas á la luz de la crítica que orienta, coordinando y agrupando los conceptos en aquéllos que son más generales y conducen á la unificación científica.

En *Algunas consideraciones sobre la Filosofía y Enseñanza de la*

Matemática, el objeto desaparece bajo el predominio de la acción subjetiva que da un carácter psicológico á la obra. Y la Psicología se presenta como precedente de la Pedagogía.

El libro primero está dedicado á la *Filosofía*, el libro segundo á la *Enseñanza*.

En una *Exposición histórica de la evolución filosófico-matemática* (*Cap.* I), se trata de: 1.º Resumen de las investigaciones anteriores al siglo XIX.—2.º Evolución filosófico-matemática en el siglo XIX, comprendiendo la *escuela racionalista* representada por Wronski y la *evolución positivista* de Augusto Comte.—3.º *Exposición histórica de la evolución matemático-filosófica* en geometría, correspondencias geométrico-algebraicas y cálculo infinitesimal.

Estos opúsculos forman una especie de *inventario* del material de la Matemática, distribuído según los puntos de vista propios de cada una de sus ramas, como por ejemplo el de Chasles y el de Staudt en la Geometría, las series enteras de Weierstrass y el cálculo infinitesimal, y además, expresan la varia manera de actuar la inteligencia dentro de las posibilidades de su acción, que puede modificarse por definición de nuevos entes matemáticos, como hicieron Kummer y Dedekind al crear los números ideales ó los ideales.

Pero en suma, no se llega más que á una clasificación artificial, sujeta al estado actual de la Ciencia, sin vislumbrarse una unidad que domine á todas las ramas hoy existentes ó conocidas.

Por el contrario, el *Ensayo de clasificación de las ideas matemáticas* (Congreso de Zaragoza) señala algunos puntos de vista generales que expresan relaciones que aparecen en todas las teorías.

Este ensayo se complementa en el opúsculo, *Algunos conceptos fundamentales en un curso de Análisis matemático y de la teoría de las funciones*, al presentarse, ante todo, la materia matemática de un modo general, como elementos y como sistemas, para expresar después los múltiples procedimientos que se agrupan en los dos métodos: directo ó constructivo é inverso ó resolutivo.

Por el primero, se crean sistemas sin repetición ni omisión que permiten relacionarse unívocamente con otros. Por el segundo se desenvuelve ó despliega lo plegado ó existente implícitamente en los moldes de las ecuaciones.

Los elementos y sistemas son lo que se ofrece como *existente*, los métodos directo é inverso conducen á la *determinación*; los conceptos generales son los puntos de vista de la inteligencia, que consideramos en tres grupos: de *acción*, de *hechos* y de *relación*. Además debemos considerar las *propiedades* que son las relaciones constitutivas de cada objeto, las cuales son relativas á la naturaleza de los objetos á sus correspondencias ó á su forma puramente matemática (obra cit., pg. 66).

La Nueva contribución a la enseñanza de la matemática, no es doctrinal como la anterior; y, puesto que su objeto es la transmisión de la ciencia, en ella, además de la *constitución científica*, hay que considerar: la *comprensión*, la *ordenación*, la *expresión*, la *comunicación* y la *invención*.

Una y otra obra tienen por objeto establecer la necesidad de la *Crítica* y la *Pedagogía* matemáticas.

Al lado de las finalidades especiales de cada rama de la Matemática, se expresa el modo de realizarlas, mediante el establecimiento de la *existencia* de las entidades, las *definiciones* que crean nuevas entidades auxiliares, los *dominios* matemáticos que forman *sistemas*, el *lenguaje* que expresa y representa las realidades objetos y sus relaciones, la *arquitectónica* que construye, dando forma á los objetos y normaliza lo informe más ó menos indiscernible. Y lo substantivo, materia ú objeto de nuestras investigaciones queda dominado por la actividad creadora que conduce incesantemente á nuevos problemas que dilatan el campo de la Ciencia, mediante una serie continua de descubrimientos.

II. La enseñanza en su aspecto objetivo

Cualquier tratado especial ó cualquiera rama de la Matemática puede servir de medio educativo de la inteligencia, pues en ellos se encuentran ocasiones para el ejercicio de la lógica, demostrando, ó para el ejercicio de la actividad inventiva, investigando gradual y metódicamente, bajo la dirección del profesor. Y cuando se ha perfeccionado la inteligencia en su ejercicio y acrecentado la vocación científica por un ejercicio metódico que resulta agradable, cuando se armonizan el sujeto y el objeto, y las fuerzas de cada individuo con los obstáculos que ha de vencer, en las ramas especiales, en un aislamiento convencional que prescinde temporalmente de los objetos relacionados con el objeto que hemos elegido como preferente ó exclusivo (caso de las especialidades), nos podemos lanzar al estudio de las conexiones y armonías entre varios objetos, es decir, al conocimiento de lo sistemático. Y ciertamente que la Ciencia se reduce á una serie de sistemas que la Enseñanza ó la Pedagogía ha de ir escalonando.

Como la Naturaleza es una combinación de organismos que coexisten en sus dependencias mútuas y sus compenetraciones, la Ciencia es un organismo de relaciones también coexistentes y transformables entre sí por la acción de la actividad intelectual que las rige, en los sistemas que crea, para realizar esa conveniencia mutua que se llama verdad, entre aquélla y su objeto, encadenada por los lazos de la Lógica. Y tanto más grato y fecundo es el ejercicio intelectual, cuanto más complejos son los sistemas sobre que se investiga.

Por esta razón, el Análisis matemático, en cuyo campo caben las más diversas direcciones de la investigación matemática, es una disciplina preferente en las universidades, para desenvolver las aptitudes de los alumnos. Y para preparar las conclusiones definitivas de este trabajo, vamos á referirnos á nuestro *Tratado de Análisis*, del que haremos una breve reseña, ya que consideramos ahora la enseñanza en su aspecto objetivo.

Nuestro *Tratado de análisis* que comprende: El *Cálculo diferencial*, los *Principios generales de la teoría de las funciones*, *Aplicación del Cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas*, el *Cálculo integral*, la *Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras en el espacio* y la *Teoría de las ecuaciones diferenciales*, á pesar de su extensión, puede considerarse tan sólo como un resumen de tan vasta materia, útil para iniciarse en las varias teorías que se hallan desarrolladas en tratados especiales y que todavía alcanzan extensión muy considerable en las obras de los grandes matemáticos.

El cálculo diferencial, está reducido á las reglas de la diferenciación, además de contener nociones de cálculo integral; y, para familiarizar á los alumnos en el ejercicio de las dos operaciones complementarias, contiene unos preliminares de la teoría de los conjuntos, hoy considerada como el tratado del infinito actual, y además contiene el ingenioso procedimiento de Newton que es el primer ensayo de resolución del problema: la *reversión de las series*, perfeccionado después por Lagrange.

Pero tanto el cálculo diferencial como el integral son dos métodos ó medios de pasar de un orden ó otro de funciones. Tienen un carácter instrumental cuya materia es la función, por lo que se impone el conocimiento de ésta.

Terminaremos estas consideraciones con la siguiente recapitulación, de carácter teórico-descriptivo:

Las ideas culminantes expuestas en *El Cálculo diferencial* comienzan á exponerse al tratar dc los *Conjuntos*, que es la teoría del infinito *actual*, cuya primera manifestación se halla en la serie *alef* que ofrece el sistema más simple de los números transfinitos de Cantor y que termina en el *continuo*, y además según el punto de vista clásico, en los principios tundamentales del cálculo diferencial é integral relativos, respectivamente, al límite de una razón ó *derivada* y al de una suma de infinito número de sumandos que da la íntegral.

Las demás cuestiones tratadas en el cálculo diferencial conciernen á los modos de formar las derivadas en los diversos casos de las funciones que corresponden al *algoritmo diferencial*. Y al lado de este algoritmo se exponen las nociones más precisas acerca del algoritmo inverso, constituido por el cálculo integral que por su superior importancia exige ser tratado después aparte y detalladamente en el tomo IV, *Cálculo integral*.

Otra cuestión capital, después de las citadas, es la de la *existencia* de las funciones *implícitas* en una ecuación entre varias funciones, $u, v, \ldots$ de las variables $x, y, z, \ldots$ que especialmente es el caso de una función F $(x, y, \ldots u)$ que se anula en el punto $(x_0, y_0, \ldots u_0)$, definida, con derivadas parciales continuas $F'_x, \ldots, F'_u$ en el entorno de dicho punto sin que se anule F'_u en el mismo.

Se demuestra que *puede determinarse una función de las variables* x, y, ..., *definida en el entorno de* $(x_0, y_0, \ldots)$ *que adquiera en este punto el valor* u_0, *y que sustituida en vez de* u *en* $F = o$ *la satisfaga idénticamente* y además que: *esta fución es* ÚNICA *y admite las derivadas parciales* $-\frac{F'_x}{F'_u}, -\frac{F'_y}{F'_u}, \ldots$

Dichas derivadas respecto á $x, y, \ldots$ se consideran, según el modo actual de razonar, en dominios $|x - x_0|$, $|y - y_0|$, de manera que difieran de sus valores iniciales respectivos en menos que una cantidad ε tan pequeña como se quiera, menor en valor absoluto que $(F'_u)_0$ y eligiéndose un valor A, mayor que los módulos de dichas derivadas incrementadas en ε, así como también una cantidad B, de de modo que $|F'_u|$ sea mayor que B.

El razonamiento corriente, fundado en la continuidad, conduce á que F es una función continua comprendida entre $u_0 - h$ y $u_0 + h$. La suma de los módulos de los m primeros términos del desarrollo de la diferencia de la función F para las m variables, es menor que cierta cantidad mAk y el término correspondiente al incremento $\triangle u$ es mayor que cierta cantidad Bh, que puede exceder á la suma de aquéllos, dando su signo á la expresión total que es el de la derivada $F'u$ y da valores de signo contrario á $F(x, y, ..., u)$ para h y $-h$, que sólo se anula una vez.

La determinación de dicha función implícita es el fundamento de la determinación de un sistema de funciones cuyo determinante funcional no se anula, en el entorno del punto $(x_0, y_0, ...)$ que satisfacen á un sistema de ecuaciones $F_1 = 0, ..., F_n = 0$, por los valores $u_0, v_0, ...$ de $u, v, ...$ llevando á la relación de dependencia de n funciones, como consecuencia de la anulación idéntica del determinante funcional.

El *cambio de variables* y la *eliminación de constantes y de funciones arbitrarias* inician al alumno en las transformaciones funcionales, ya por medio de relaciones propuestas, ya por medio del procedimiento restrictivo de la diferenciación, que particularizando por el aumento de relaciones, permite hacer latentes ó adherentes dichas constantes ó funciones arbitrarias. Y de aquellas transformaciones ofrece uno de los casos más sencillos el procedimiento de Newton para hacer explícita la variable implícita que después ha constituido el problema de la *reversión de las funciones y de las series.*

Por último, se ve cómo los teoremas de Laplace y de Lagrange constituyen dos desarrollos en series, los más importantes de la matemática clásica, el segundo de los cuales envuelve en su generalidad al fundamental teorema de Taylor.

El segundo tomo de la obra está destinado á los *Principios generales de la teoría de las funciones.* En él se estudian las funciones bajo sus *formas* de series é integrales, según sus *propiedades,* tales como su regularidad en el entorno de un punto, las discontinuidades, las singularidades, sus oscilaciones, saltos, la condición de integrabilidad señalada por Riemann y dada también por la coincidencia de sus dos modos de aproximarse al límite, mediante la consideración de la frontera en la teoría de los conjuntos, según su *carácter* de algebraicas, con sus singularidades características que permite su distribución en ciclos, según la teoría de Puiseux y la ordenación de los valores en lazos fundamentales.

Por último, según sus *representaciones*, conforme á las teorías de Cauchy y de Riemann, como funciones de variables complejas en el plano de Cauchy, la esfera de Neumann, y la superficie de Riemann y aun en las representaciones más complejas del *Analysis situs*.

Cierto es que el tomo tercero, *Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas*, hace perder el carácter analítico á la obra, para conducirnos por los campos de la Geometría y del Algebra ó Geometría analítica, si bien esto satisface á una costumbre en la enseñanza que desvía la teoría pura hacia las aplicaciones, por lejanas que sean, del dominio propiamente analítico. Pero se vé que la Geometría sobre una curva algebraica condujo á Clebsch á una integración geométrica por medio de los conexos. Además la teoría invariantiva constituye una propiedad general que se infiltra en todas las teorías matemáticas y es precedente de los invariantes diferenciales en las ecuaciones, así como las envolventes representan las integrales singulares y más tarde se encuentran en las transformaciones de contacto; y el concepto de invariante, por último, tiene importancia capital en la teoría de los grupos continuos.

El tomo cuarto, *Cálculo integral*, de carácter eminentemente práctico, ofrece un aspecto irregular, sin que se vea otro lazo de unidad que el procedimiento de la integración, realizado con sus artificios especiales propios del período clásico de la Matemática, dominando más los rasgos individuales de la inventiva del genio que el espíritu sistemático de una ciencia perfecta.

Este tomo es, por tanto, un conglomerado de problemas resueltos á imitación de los problemas de la Geometría elemental, cuyos procedimientos dependen, no de la unidad de un método, sino de la sagacidad y conocimientos de cada matemático, del modo especialísimo de combinar verdades dispersas en el tejido de todas ellas.

El tomo quinto, *Aplicación del Análisis infinitesimal á las figu-*

ras en el espacio, parece desviarse también hacia el campo de la Geometría, separándose del carácter analítico; pero pronto vuelve á su dominio propio, al constituirse la *Geometría infinitesimal,* que, por otra parte, ofrece conexiones con la teoría de las ecuaciones diferenciales, ya que las integrales tienen su representación natural por familias de curvas y de superficies. Y, especialmente, las superficies de curvatura constante y superficies mínimas tienen una generación infinitesimal.

III. La enseñanza en su aspecto subjetivo

Atendiendo exclusivamente al objeto, dos métodos pueden seguirse: el *sintético* y el *analítico.*

En la *enseñanza matemática,* el método sintético ha sido el predominante, es decir, el predominio del libro, la sujeción á una pauta previamente establecida. Por el método sintético, el alumno se preocupa del orden de las teorías, de la disposición en series ó encadenamientos lineales de las verdades, de la prelación de las unas sobre las otras; el modo de adquisición de la Ciencia por los tratados es artificial; somete la inteligencia á convencionalismos *formales* y aleja de la realidad. El método analítico imita á la Naturaleza, donde todo existe relacionado por vínculos *colaterales;* la síntesis es el artificio que separa lo coexistente, para colocarlo en formas simétricas y sinópticas, abreviadas ó compendiosas para facilitar como los *vade-mecum,* el empleo de aquello á cuya posesión nos ha conducido el análisis. Ha separado como resíduos ó escorias aquello que no ha servido directamente para nuestras finalidades de entre lo existente en el orden real, como el químico forma un cuerpo con elementos, en proporciones definidas, que se hallaban involucrados con otros elementos en su modo de existencia efectiva, anterior á la depuración sufrida.

De la integración clásica de las ecuaciones diferenciales trato exclusivamente en el tomo titulado: *Teoría de las ecuaciones diferenciales.* Libro primero, *integración clásica.*

Difícil es dar idea completa de este capital problema de la Matemática y de su teoría por medio de un tratado puramente doctrinal.

La exposición, por perfecta que sea, adolecerá del artificio impuesto por mis puntos de vista especiales, ó en cualquier caso, por los de cada autor. La Ciencia está reflejada en espejos de distinta curvatura que la deforman variamente, imprimiéndole el sello particularísimo de cada individualidad. Y el fin de la enseñanza ha de estribar en descartar ese coeficiente personal que adultera en cierto modo la contextura íntima del organismo ideal, tal cual es de una manera absoluta, de la que siempre nos hallaremos distanciados, pero siempre aproximándonos, mediante nuevas edificaciones, sobre la base de las antiguas.

Además del punto de vista individual, hay que tener presente en una exposición didáctica las deficiencias intelectuales del alumno y someter á ellas el orden expositivo. Atendiendo á éstas hemos adoptado, siguiendo la corriente general, la distribución siguiente:

CAPITULO I. *Ecuaciones diferenciales de primer orden.* En este capítulo se ofrecen los procedimientos más sencillos, tales como la separación de variables, la reducción á ecuaciones homogéneas, el método de la variación de constantes arbitrarias, fijando la atención en ecuaciones especiales, tales como las de Bernoulli, de Jacobi, de Riccati y de Clairaut, la de Lagrange, con el procedimiento por diferenciación é integración, la asimilación de las ecuaciones diferenciales de órdenes superiores al primero con las ecuaciones algebraicas, en las que la incógnita es el coeficiente diferencial, llegando al conocimiento de la variedad de integrales, singular, particular y general y acudiendo, como instrumento y medio general de proceder, en este problema, á la teoría del factor integrante. Y como primer resultado general terminamos este orden de investigaciones que se refieren casi exclusivamente á las ecuaciones de primer orden, en el *cálculo aproximado* de la integral.

A las ecuaciones diferenciales de primer orden, siguen las ecuaciones de diferenciales *totales* de primer orden y las ecuaciones diferenciales simultáneas, con sus enlaces fundamentales que la permiten referirse mutuamente y sustituirse en el estudio de sus conexiones analíticas, haciendo resaltar la importancia de los multiplicadores.

Por último, respecto á las ecuaciones diferenciales ordinarias, el capítulo culminante se halla constituído por la teoría de las ecuaciones lineales de orden cualquiera.

Análogamente, á como en la teoría de las ecuaciones algebraicas, los Descartes y los Newton hasta Lagrange y Sturm, en la de las ecuaciones diferenciales, especialmente desde Lagrange, se cuentan numerosas, no ya tentativas, lentas y tardías, como aquella serie de procedimientos que llegaron hasta la aproximación de las raíces de las ecuaciones numéricas, que constituye la aritmética elemental de esta parte del Algebra, sino que, en la teoría de las ecuaciones diferenciales, Lagrange, en primer término, y Laplace para el caso difícil de las ecuaciones con coeficientes variables, en cuyas investigaciones entra muy principalmente, para la integración, el empleo de las integrales definidas, llegan á señalar el punto culminante que alcanzó la integración *formal* de las ecuaciones diferenciales, hasta que Cauchy, partiendo del teorema de la *existencia* de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, comienza el período moderno que cambia la faz del problema y lleva á esta teoría, en particular, y á la Matemática en general, por nuevos derroteros.

Pero antes de llegar á este momento, aun tenemos en el periodo clásico, un momento brillante que señala la transición de estos períodos de la Matemática.

La teoría de las ecuaciones de derivadas parciales de primer orden es el modelo más acabado de rigor, la teoría mejor constituída por su eficacia y la perfección de los detalles; y en ella vemos laborar, desde Lagrange, Ampère y Monge, hasta Jacobi, Pfaff y Cauchy.

El método de Ampère revela una perspicacia sutil é ingeniosa que le guía en las intrincadas relaciones de la diferenciación, según las funciones y los parámetros, para llegar de un modo elegante, entre otros resultados, á la ecuación que conserva su nombre, llegando á las sistematizaciones á que han dado la última mano los ilustres geómetras M. Darboux y Goursat.

Pero Jacobi dió un carácter sistemático á estas investigaciones con sus determinantes funcionales, realzadas por la capital importancia del multiplicador que, en la obtención del último multiplicador, se identifica con el procedimiento reductor de Pfaff en la teoría de las ecuaciones de diferenciales totales.

Desde este momento comienza una tendencia combinatoria, expresada por los sistemas jacobianos y los sistemas completos de Clebsch, con las notaciones de los paréntesis y corchetes de Poisson y notaciones de Donkins y de Hámilton.

En otro sentido, de carácter representativo, tenemos las primeras representaciones de las funciones de variables imaginarias de Cauchy, que, extendiendo la integración geométrica de Monge, llega á la integración por medio de las *características* que llevó al más amplio desarrollo Lie, en las *transformaciones de contacto* y que hoy da una capital importancia al problema de la integración de las ecuaciones de derivadas parciales en la teoría de las superficies.

La Matemática que, en otro sentido, se desenvuelve estableciendo la teoría de las funciones transcendentes y extendiendo las ideas de Puiseux acerca de los ciclos de raíces y del *Analysis situs* de Riemann, desenvuelve las teorías de las funciones con auxilio de las curvas y superficies analíticas, las hiperelípticas, armónicas, etc.

Además, finalmente, la teoría de los grupos continuos de Lie prepondera y admite, en la región de las ecuaciones diferenciales, una generalización de los resultados de Lagrange y de Galois en las ecuaciones algebraicas.

Pero estos últimos resultados, cuyo comienzo encontramos en el teorema acerca de la existencia de la integral de Cauchy, corresponde al período moderno, que tan sólo se inicia en mi publicación, limitada al período clásico, y cuyos últimos resultados se expresan por los métodos de Jacobi, Mayer y Pfaff, en las ecuaciones derivadas parciales y de diferenciales totales.

En el *Tratado de Análisis* me propuse reunir las más varias teorías, métodos y procedimientos que aparentemente ofrecen cierto desorden, repeticiones de un mismo asunto, entrecruzamiento de puntos de vista, cierta confusión causada por el cúmulo de materias. Y, sin embargo, este desorden y confusión es un estimulante para llegar al orden y á la unidad orgánica de la síntesis.

La exposición sintética es como la diferenciación que borra toda huella de la constante ó función arbitraria, conduciendo á una sola diferencial.

Marca los rails del razonamiento y lleva á una consecuencia necesaria, como tal causa implica tal efecto. La derivada tiende á un límite como la deducción á un fin.

El análisis, por el contrario, se eleva á multitud de finalidades, según la complejidad que se ha elegido, para llegar, en cada una de multitud de combinaciones, á resultados distintos.

La síntesis es deductiva, cierra los caminos distintos del elegido y ahoga la iniciativa ante la necesidad de las conclusiones.

El análisis señala muchas posibilidades en los caminos que se ofrecen, como combinaciones admisibles del discurso; es como la integración que puede llevar á cada una de la infinidad de integrales particulares que constituyen la integral general que, en esta comparación, representa toda la posibilidad inventiva.

Y de paso diremos que el método lógico es el verdadero, genuino y riguroso medio deductivo, es el propio de la Matemática que fija cada eslabón en la cadena de las consecuencias que conduce á la demostración. El Matemático no abandona, en su ejercicio, la contemplación del objeto y de las transformaciones á que lo somete, á no ser que delegue en el lenguaje.

El método psicológico se ejerce, no sobre los objetos, sino sobre los conceptos generales á que éstos se someten. Cuando tratamos de la combinatoria, del simbolismo, de la normalización, discurrimos en un campo distinto del de las combinaciones, las clases algebraicas, las ecuaciones diferenciales, reducidas á su forma normal; éstas son las especies, aquellos conceptos son sus géneros abstractos. Al razonar por ellos, razonamos por una doble abstracción ó por una abstracción generalizada.

Estos conceptos generales se desenvuelven en el campo de la Crítica.

Ya hemos observado muchas veces que, salvo en los comienzos de cada ciencia, y en su interior, la elección del camino ó del punto de partida puede ser muy varia, pues basta el haber definido ó conocer los objetos sobre los cuales vamos á investigar por esa indiferencia natural de los conceptos y de las propiedades que, en la Matemática, son relaciones entre objetos comunes á muchas ramas, puesto que se construyen todos con los mismos elementos.

Pero también el método psicológico se desenvuelve en la Matemática, aplicada al estudio de la Naturaleza; y con mayor amplitud de miras, puesto que las formas cristalinas, las ecuaciones de la Química en las que entra la expresión de la energía actual ó potencial, bajo la forma de desprendimiento ó pérdida de calor, la transmisión de la energía bajo la forma de corrientes, la determinación de las diversas unidades de longitud, tiempo y las propias de cada teoría, sea de la luz, del calor, de la electricidad ó del sonido, constituyen la matemática eminentemente intuitiva que se intelectualiza, cuando se han traducido en números y ecuaciones puramente matemáticas los fenómenos de la experiencia. Y las dos matemáticas descendente y ascendente se prestan mutuamente sus auxilios por esa correlación íntima que existe entre los fenómenos psíquicos y los experimentales que hacen del mundo intelectual un reflejo del experimental, ya que aun en la región más abstracta, tal cual es el Análisis matemático, emplean las representaciones de las líneas y superficies analíticas como cuerpo visible de las relaciones abstractas, así como, por otra parte, las impresiones brutas de los sentidos adquieren el carácter científico, por la idealidad que les comunican los conceptos matemáticos.

Colocada la Matemática entre la Metafísica ó Filosofía racional y la Física y Química ó Filosofía natural, se halla en el punto más ventajoso para realizar todo orden de progreso.

Al lado de las obras puramente matemáticas en la que se destaca el razonamiento, con unidad y sencillez sumas, de las que son modelos el tratado de análisis de Meray y el de las ecuaciones de derivadas parciales de M. Riquier, tenemos en una dirección, las obras filosóficas de los Sres. Borel, Enriques, Peano, Poincaré, Tannery, etc., y en otra dirección las de los Sres. Duhem, Laar, Ostwald, etc., á las que podemos agregar las de Economía social desde Cournot hasta Laurent, cuyo conjunto influye en las diversas tendencias de la vida especulativa y práctica y cuyas lecturas son provechosas en cursos diversos, para llegar á conocimientos de conjuntos utilísimos para la general cultura.

CAPÍTULO III

El nuevo método de enseñanza

I. Mi curso de divulgación matemática

Ya en la página XXIV de este trabajo, presento una breve enumeración de las materias que habían de constituir este curso libre, del cual, por contrariedades que no hay para qué detallar, tan sólo pude explicar las cuatro primeras lecciones, á saber: *Carácter de la Matemática en la antigüedad y en los tiempos presentes*, *Los métodos matemáticos*, *Los conceptos matemáticos*, *Las tres matemáticas*. Las otras lecciones anunciadas habían de versar acerca de la *Metodología*, la *Crítica*, el *simbolismo* y el *Nuevo método*.

Bastará, para suplir esta deficiencia, el reseñar las ideas culminantes, algunas de las cuales comenzaron á publicarse en la revista: *La Escuela Española*.

Respecto al *carácter de la Matemática en la antigüedad y en los tiempos modernos* bastará decir que distinguimos tres períodos: El del *individualismo*, dominante desde Pitágoras, Euclides, Arquímedes y Apolonio, caracterizado por el planteo de los primeros grandes problemas de la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del arco.

Señalamos el comienzo de una generalización que comienza con las ideas de perspectiva, involución, el *exagramma misticum* de Pascal, la Geometría de Descartes y el desarrollo del Algebra, desde Vieta hasta llegar al considerable impulso que dieron á la Matemática, los creadores de la Escuela Politécnica de París, Lagrange, Laplace y Monge, que termina con el *cálculo de variaciones*, preliminar de la hoy predominante teoría del *Cálculo funcional*.

En la segunda lección, *los métodos matemáticos,* traté del carácter esencialmente *determinativo* de los métodos geométrico y algebráico, poniendo de relieve la tendencia hacia una clasificación de las cuestiones geométricas, implicada en los porismas de Euclídes y el encadenamiento recíproco, característico del análisis geométrico.

Señalé la intuición y la lógica como los dos medios de investigación y demostrativo, que describen y fijan las relaciones y el predominio de uno ú otro en las obras de los grandes matemáticos, las representaciones gráficas, por medio de series de puntos, curvas ó superficies analíticas, representaciones de Riemann, Schwarz, etc., y especialmente la serie de determinaciones graduales en los procedimientos seguidos desde Newton, de Gua y Cramer hasta Puiseux, en la determinación de las singularidades de las curvas. Por otro lado, los artificios empleados en el campo del Análisis, por medio de los lazos fundamentales, las conexiones, las transformaciones del *Analysis situs,* y en fin, la serie de dominios, campos, regiones, etc., en que se verifican otras series de desigualdades de valores numéricos ó funcionales, cuyo conjunto constituye el método sintético, esencialmente constructivo, que lleva á la consideración de los elementos irreducibles, sean números, ecuaciones ó curvas, para constituir sistemas sin omisión ni repetición y con correspondencia unívoca.

Y así vemos cómo el análisis que constituye la resolución de los problemas, lleva á la síntesis constituída por encadenamientos de teoremas, fundados en construcciones de entidades ó sistemas propios de cada clase de cuestiones, por lo que se consigue hacer explícitas las cantidades implícitas en las ecuaciones, por cierto desplegamiento de lo que está involucrado en ellas mediante cantidades constantes, variables ó paramétricas.

La tercera lección, *los conceptos matemáticos,* consistió en una explanación de lo expuesto en el Congreso de Zaragoza, en la Memoria: *Ensayo de clasificación de los conceptos matemáticos* y en otras publicaciones sucesivas. Indiqué el carácter subjetivo de la *combinatoria* y *simbolismo* en que predomina la *acción,* el carácter objetivo de la *cantidad* y los *sistemas,* el de relación de las *correspondencias, correlaciones* y *representaciones,* el cualitativo de las *singularidades* y la *normalización* y el de mutación de las *transformaciones.*

Y estos conceptos han dominado en las antiguas disciplinas de un modo secundario y, predominantemente, en las modernas teorías. Así vemos que en las clásicas disciplinas: Aritmética, Geometría, Algebra, cálculo diferencial, etc., especies de moldes artificiales del saber matemático, domina el carácter substantivo que reside en el número, la figura, la ecuación y la función, objetos propios y exclusivos de cada acción en las relaciones combinatorias, proyectivas y transformaciones de toda especie. Los varios conceptos se disgregan para constituir teorías tales como la de los grupos, los invariantes y covariantes, las probabilidades, etc. El número, las figuras, las ecuaciones, pasan á constituir el carácter ó las propiedades numéricas, geométricas, algebráicas ó analíticas de nuevos objetos tales como las funciones, los procedimientos y en general, á calificar los modos diversos de toda suerte de relaciones. Así tenemos, por ejemplo, los dominios de integridad y de racionalidad, los números y las funciones algebráicos, la integrabilidad y derivabilidad, la irracionalidad, la transcendencia, como base de múltiples géneros de funciones.

La cuarta lección: *Correspondencias matemáticas en la Ciencia,* tuvo por objeto presentar, frente á la Matemática teórica, otra Matemática realizada en la Naturaleza, con sus formas geométricas ó cuerpos cristalizados, con sus ecuaciones químicas que determinan asociaciones y disociaciones, relacionadas por los cambios de energía potencial y cinética, las funciones potencial, la entropia, las transformaciones en los varios dominios de la luz, el calor, las corrientes eléctricas, de las acciones mecánicas, etc. y las Matemáticas aplicadas que se refieren á las varias finalidades de la vida social, realizadas en el comercio, la industria y las ciencias de observación.

Las demás lecciones anunciadas se referían, como adelanté en la página XXIV á la *abstracción* y el *esquematismo* á la *Lógica matemática*, á la *Metodología* y al *Nuevo método*.

Y respecto de las materias contenidas en dicho curso de divulgación, bastará manifestar que, en su conjunto, constituyen un bosquejo del *nuevo método*, cuyos trazos principales son objeto del capítulo siguiente.

II. El nuevo método

El nuevo método consiste en utilizar aquéllo de común que se observa en los procedimientos y métodos seguidos por los matemáticos creadores y aplicarlo á todo género de cuestiones.

Así, tenemos el concepto de *adherencia* que expresa el estado de objetos que permanecen latentes, cuando se han eliminado de las relaciones que los contenían explícitamente, el de *adjunción*, propio de objetos que se han agregado á objetos de un sistema para constituir otro sistema más amplio, el de *construcción* que crea ó forma objetos por definición ó por combinación de propiedades varias, el de *ajuste*, correspondiente á los métodos directo é inverso (desarrollo y plegadura); puesto que las ecuaciones y las figuras por construir son *moldes* á que se han de ajustar los elementos fijos con los que conservan cierta indeterminación, mediante la cual es posible dicho ajuste; y los conceptos arriba señalados y enunciados por vez primera en el Congreso de Zaragoza, intervienen en todas las relaciones de la Matemática y muy especialmente en su moderno desenvolvimiento.

El nuevo método consiste pues, en referirse principalmente á estos modos generales de considerar todos los objetos y sus relaciones, relegando á lugar secundario los objetos matemáticos en sí, según se hacía en el período clásico, en el cual predominaba el objeto y los resultados útiles y prácticos sobre los conceptos; y teóricamente, en sustituir una preponderancia subjetiva al predominio objetivo.

Además, el nuevo método tiende á esta objetividad, pero de un modo teórico. No aspira exclusiva y principalmente á los resultados en sí, sino á la potencialidad para obtenerlos. No pretende llegar aislada, inconscientemente y como por adivinación genial á tales ó cuales resultados, sino á obtenerlos sistemáticamente, no á la manera como se resolvía un problema de geometría elemental, buscando algún elemento doble ó superabundante que permitiera enlazar otros elementos á él ligados, para permanecer adherente ó latente en la nueva relación, sino á obtener la capacidad de llegar á ellos por combinaciones discursivas, como resultado de un arte de discurrir reflexivo, basado en un conocimiento crítico y razonado, no ciego y espontáneo.

Más bien que á llegar al conocimiento objetivo, el nuevo método aspira á educar la inteligencia en la ciencia de discurrir y alimentar su potencialidad en este sentido.

En el orden objetivo, no es su objeto inmediato, como antes, los números, las figuras, las ecuaciones, etc., sino las relaciones que ligan á objetos, sean cuales fueren y el modo de combinarlos para obtener nuevos objetos, incesantemente creados por definiciones adecuadas, para obtener nuevos teoremas ó resolver nuevos problemas.

III. La práctica del nuevo método

Tenemos en primer lugar el uso del *esquema*. En Geometría, por ejemplo, se puede *trazar todas las figuras de una teoría para que el alumno recorra, con su auxilio, las correspondencias, relaciones* y *sustituciones*, mediante las cuales se formulan los teoremas que las unen. En el Algebra de las clases, las propiedades combinatorias se expresan por símbolos, así como generalmnete todas las relaciones de las diferentes especies de álgebras, constituyendo el lenguaje simbólico un intermediario entre la acción subjetiva y la interpretación que, en cada caso, se da á los símbolos; en Análisis, las representaciones de Cauchy, de Riemann y de Schwarz son esquemas de las relaciones analíticas, así como los sistemas de líneas superficies y espacios analíticos.

Los *bloques de ideas* ó sea *síntesis* tales como, en la teoría de los números, la construcción de los mismos, las relaciones proyectivas en Algebra y Geometría, las construcciones de los números por series uniformemente convergentes y otros innumerables capítulos de la Matemática son interesantes en sumo grado para ejercer constantemente el análisis, método creador por excelencia, pues por él se llega á la síntesis, que es su resultado natural.

Y así como en la Naturaleza los séres coexisten, funcionando bajo la acción de innumerables concausas, de igual modo los objetos matemáticos coexisten en indefinido número de correlaciones entre lo que la inteligencia puede dar como fijo y lo que deja de arbitrario, para obtener siempre el ajuste de las realidades, durante cada momento de su existencia ó su libre cambio ó movilidad, dentro de lo que se ha dejado indeterminado ó arbitrario.

Por esta razón se nota una *compenetración de conceptos* que domina sobre los objetos á ellos subordinados, como el efecto lo está á la causa.

A esta compenetración de conceptos corresponde, en las universidades más adelantadas, la práctica consistente en reducir las llamadas asignaturas, que son partes artificiales de la Ciencia, á *capítulos elegidos* de ésta, en los que puede dar relieve á las teorías y conceptos fundamentales; habiéndose sabido elegir artificios y direcciones más ó menos felices en el indefinido fondo de entidades, sistemas y relaciones, y entre los mismos, aquéllos que han resultado adecuados para satisfacer las finalidades buscadas, ya por definiciones, construcciones y creaciones, á veces abstractas, simbólicas y ficticias, ya por deducciones y otros artificios implicados en los preceptos de la Lógica, ya con auxilio de intuiciones ó representaciones concretas de las ideas, como hicieron Gauss, Cauchy, Riemann, Schwarz, ya por medio de simbolismos analíticos ó geométricos ó puramente subjetivos, á la manera de los Weierstrass, Dedekind, Plücker, Chasles, Staudt, Laguerre, Boole, Jevons, Schroeder, etc.

Solamente el estudio comparativo de los métodos de Lagrange, Laplace, Ampère, Jacobi, Mayer, etc., expresan cuán rico é inagotable es el filón por explotar de las relaciones matemáticas, mediante el diverso papel que desempeñan las cantidades enlazadas en cada cuestión como números, variables, funciones ó parámetros arbitrarios, variando convenientemente las relaciones de su dependencia.

Este conocimiento sintético, comparativo y crítico se adquiere por medio de *lecturas* de obras importantes, ilustradas con las reflexiones de un buen profesor, lo que no puede conseguirse por medio de la rutina y el dogmatismo que impone el empleo constante é invariable de un sólo libro, según se hacía antaño ó en las naciones que no han entrado en la práctica de los progresos pedagógicos; y puesto que el espíritu científico sólo puede resultar de la crítica y de la comparación de los diversos procedimientos inventados y de los que pueden crearse, mediante nuevas combinaciones de los conceptos y de nuestra potencialidad inventiva.

Sobre esta práctica de las *lecturas* y crítica de los conocimientos adquiridos está el *plan de estudios* ó sea el conjunto de las varias disciplinas que se enseñan en cada centro docente, las cuales deben tener cierta independencia, ya que la flexibilidad del pensamiento se presta á presentarlas bajo muy diversa forma en sus relaciones, según distintas combinaciones en mutuas dependencias.

A los obligados cursos de la Aritmética, Algebra, Geometría, Teoría de los números, Cálculo diferencial é integral, etc., suplen hoy regiones parciales desprendidas de aquéllos, tales como la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, de derivadas parciales, funciones de variables, reales ó complejas ó elípticas, etc., geometrías proyectiva, diferencial, de los números, teorías de superficies, de funciones algebráicas de las funciones abelianas, fuchsianas, thetafuchsianas, eulerianas, etc., todo lo que es una *disgregación regeneradora* de las antiguas disciplinas, por cuanto, de los conceptos englobados en estado naciente, brotan nuevas ramas del árbol de la Ciencia.

Y como complemento á estos cursos preeminentemente doctrinales hoy se imponen, como auxilio de las fuerzas intelectuales que han de equilibrarse con el cúmulo de ramas y de teorías creadas, los *estudios histórico, crítico* y *bibliográfico*, cuyo conjunto se realiza bajo la dirección pedagógica, encaminada á formar los futuros maestros, mediante una acción *psicológica*, armonizada con la dirección lógica y el auxilio del lenguaje matemático, hoy constituído por combinaciones ordenadas y sistemáticas de los signos que expresan los varios algoritmos ó por las reglas que rigen la constitución de los sistemas geométricos, puesto que en la *transmisión* ó comunicación de la Ciencia hay que ejercitar todas las aptitudes de la inteligencia.

IV. Recapitulacion

Este párrafo tiene por objeto indicar, cómo desde hace muchos años he escrito, según el espíritu del nuevo método, cuya práctica acaso hubiera sido provechosa en las universidades españolas, ya que dicho método tiene la ventaja de fomentar las aficiones científicas, por efecto de que es grato á la inteligencia, cuanto la libre de un dogmatismo excesivamente rígido y árido y porque facilita la posesión de los conocimientos, al presentarse en el momento de su generación y no como resultado inmutable y cristalizado de lo obtenido por los maestros de la Ciencia, dejando á las inteligencias de los alumnos algo libre ó posible que ejercite su espíritu de investigación.

Los grandes matemáticos inventaron, porque estaban en posesión del método que les conducía á sus admirables descubrimientos. Pero hoy se impone una *vulgarización de las ideas que la crítica encuentra en el fondo de sus investigaciones*; porque urge hallar medios supletorios para economizar el esfuerzo y llegarse pronta y fácilmente á vencer las dificultades crecientes que el inmenso caudal de nuevas teorías ofrece á su adquisición.

Por esta razón, durante varios años me he esforzado en *romper con dichas rutinas* y *dogmatismos* exagerados, dispuestos más bien para aprender con pasividad que para asimilarse con actividad ó personalidad; propia y sucesivamente dí á mis obras, arriba enumeradas, el carácter que he señalado en la práctica del nuevo método.

Así, en la Aritmética y la Geometría insistí en una tendencia predominante hacia el esquematismo (en Aritmética al lado de la demostración ordinaria expongo otra esquemática) ó la sinópsis, bastando leer los enunciados de los capítulos en la Geometría, para notar dicha tendencia.

En mi obra *Problemas de Aritmética y Algebra* hay una tendencia á la clasificación de los problemas, á reunir, desde puntos de vista comunes, los que tienen ciertas analogías; en el *Algebra elemental* hay una tendencia eminentemente sintética que permite llegar á los algoritmos de las series, de las factoriales y de las operaciones generales, hasta las aplicaciones á los cuaternios y las ideas de Grassmann; y en el tomo publicado del Algebra superior, subordiné todo su contenido á los dos conceptos de combinación y de continuidad, lo que me permitió exponer, por un lado, las nociones fundamentales de las teorías de Cauchy sobre las funciones de variables complejas y por otro lado, las teorías combinatorias de las sustituciones, invariantes, covariantes, etc.

La Geometría general es una síntesis de las diferentes especies de geometría hasta llegar á las de Lobatschewsky y de Riemann.

Y así como en las ramas elementales sigo un orden predominantemente sintético, en mi *Tratado de Análisis*, que comprende desde el *Cálculo diferencial* hasta la *Teoría de las ecuaciones diferenciales*, sigo una tendencia especialmente analítica, diversidad de tendencias justificada, porque en la enseñanza elemental, el trabajo analítico ó de investigación ha de ser casi nulo y el de adquisición y ordenación de los conceptos en forma sinóptica y asequible, ha de ser proporcionado al escaso desarrollo intelectual, mientras que en la enseñanza superior, los artificios sinópticos que facilitan el dar el relieve á cada teoría ó serie de conocimientos, deben sustituirse por un análisis profundo é investigador.

Ese relieve artificial que suple, en los primeros pasos, la debilidad intelectual, se suple más tarde por el esfuerzo que debe ahondar en la compenetración de verdades y de conceptos, de la cual deben surgir nuevas combinaciones de relaciones que constituyen algo de inventivo ó de personal y propio en los trabajos y estudios.

Por esta razón, mi *Tratado de Análisis*, publicado sólo hasta el tomo 6.º, puesto que hube de cesar en su continuación, por falta de recursos materiales para completar tan monumental obra, como era la publicación de la *Nueva Enciclopedia matemática*, de la que sólo pude publicar siete tomos, pudiera aparecer á primera vista un conglomerado abigarrado de teorías, donde éstas se presentan repetidas en formas diversas y á veces en artificioso desorden, impuesto por el cúmulo de todas ellas.

Pero si se atiende al fin educativo, que al publicar tal obra me propuse, el lector ó alumno encontrará un arsenal de conocimientos, un rico filón de teorías y de métodos, una acumulación de procedimientos ideados por los grandes maestros que sirven de ocasión y de acicate para que sobre tan variado fondo se destaquen los conceptos predominantes señalados en la página 43 y en diversas notas ú obras publicadas, y que luego permiten encontrarlos en cualquiera obra matemática, pues en todas se hallan diversamente combinados y permiten seguir los encadenamientos teóricos de cada autor. Es como una especie de *buscador*, de los que usan los astrónomos para enfocar los grandes telescopios.

Y además del fin educativo que me propuse, con la publicación del *Tratado de Análisis*, un fin enciclopédico, condensando en sólo seis tomos, que fueron los publicados, teorías muy variadas que es muy difícil reunir aun en las grandes bibliotecas, pues no poco trabajo cuesta el seleccionar lo esencial de lo contenido en obras magistrales con diversas finalidades y puntos de vista.

Obras como el *Tratado de Análisis* facilitan la lectura de las obras magistrales. Y este fué otro de mis propósitos, que realmente quedaron truncados al no haberme sido posible siquiera el completar el tratado de la *integración clásica*, que constituye el tomo sexto, con la integración moderna, para cuyo fin hay que consultar las numerosas obras de los matemáticos actuales que han llegado hasta las ecuaciones integrales y al cálculo funcional, para cuyo estudio son extremadamente útiles las monografías publicadas bajo la dirección de M. Borel y especialmente, para abarcar el conjunto de los descubrimientos modernos, la *Encyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften* que comprende la parte técnica, crítica, histórica y bibliográfica de la Matemática, tal cual existe en su actual estado de desenvolvimiento.

Estas indicaciones bastan para justificar cómo he seguido durante algunos años las tendencias del *nuevo método* que se reduce á hacer manifiesto y explícito lo que se encontraba latente ó implícito en las obras matemáticas, *especie de inversión* que nos hace ver el fondo común de las diversas manifestaciones externas y que nos permite enlazar, referirlas unas á otras y combinarlas en modos distintos.

En los dos capítulos de este folleto he resumido mi modo de sentir durante varios años que ahora facilitaría el llegar á la práctica de dicho método fundado, como se ve, en la *crítica de los conceptos* y su adaptación á las diversas teorías, dándoles capital importancia sobre la realidad objetiva de las verdades adquiridas.

Creer, como entre nosotros se ha creído, que la Matemática es un sistema de conocimientos intangibles, porque sus resultados siempre son exactos, es un error y conduce á la rutina.

La Matemática, como las demás ciencias, se halla en contínuo estado de formación y de perfeccionamiento, aunque sus resultados sean siempre exactos ó verdaderos; pues sobre las verdades adquiridas se fundan nuevas verdades y todas ellas, sin dejar de serlo, admiten siempre nuevos perfeccionamientos en sus relaciones mutuas y en su modo de depender, lo que hace variar el contenido, calidad y forma de sus teorías. Entre infinidad de caminos para llegar á un fin, cabe la posibilidad de muchas direcciones; y éstas son las que han alterado los sabios más ó menos felizmente.

Por tal razón no basta el encasillar la Matemática ó reducirla á una serie de reglas útiles en las ciencias de aplicación según un criterio mezquino que ha perjudicado nuestro progreso durante muchos años y nos ha cerrado las puertas de los nuevos adelantamientos, sin planes generales progresivos, sin reformas trascendentales que nos sacaran del antiguo modo de ser, justificado hace medio siglo, pero no en la actualidad; pues no hay que detenerse tan sólo en la parte útil de la Ciencia, sino hay que cultivarla para satisfacción de la inteligencia y por la honra del espíritu humano, como dijo Jacobi á Legendre con motivo de una frase de Fourier.

No se si he acertado en la exposición de lo que llamo *nuevo método de enseñanza*. El lector juzgará. Y las últimas manifestaciones sirven tan sólo para justificar el término forzoso que doy á mi serie de publicaciones matemáticas, orientadas siempre en la dirección del *método* que hemos de considerar todos como un auxiliar necesario que compense la indiferencia general sentida hacia los estudios matemáticos, siempre pospuestos á otros estudios, no tan eficaces como éstos para la cultura nacional.

Y una prueba de nuestro aserto la da la pobreza de nuestra bibliografía matemática, el escaso número de adeptos á estos estudios y la falta de propaganda y divulgación.

Parece que la falta de protección justifica la falta de progreso y que ésta justifica aquélla. Un círculo vicioso en que muchos se encasillan sin riesgos y con provecho.

Sin embargo, debemos consignar que el Congreso de Cambrige ha despertado gran interés. Allí asistirán algunas comisiones españolas. Y además he de manifestar que la *Junta de Ampliación de estudios* me favoreció durante el período de mi delegación.

V. Conclusion

Mi deseo habría sido el completar esta exposición teórica con desarrollos prácticos especiales del nuevo método en cualquier disciplina matemática, pues dicho método lleva en sí un nuevo estilo en la expresión y un nuevo orden en la ilación del pensamiento que puede sustituir ventajosamente á la rutina y el lenguaje amanerado que se usa en las aulas en sustitución del antiguo *ergotismo*, especies de muletillas, meros auxiliares de razonamientos incoherentes y borrosos que acusan la falta de claridad en los conceptos.

Pero no es posible teorizar demasiado ni insistir en lo ya siquiera bosquejado.

Contentémonos con apuntar la idea y que otros la desarrollen, pues, el terreno está preparado y el espírtu pedagógico hoy domina universalmente á fin de aminorar el esfuerzo intelectual para adquirir el cúmulo cada vez más considerable de ideas y de teorías.

Entre nosotros las teorías matemáticas se hacen camino trabajosamente, luchando con infinidad de obstáculos; y el sacrificio capaz de superarlos tiene que ser inmenso. Prueba de ello, el *Progreso matemático, La Gaceta de las Matemáticas elementales*, la *Revista trimestral*, fracasados, lo mismo que la *Nueva Enciclopedia matemática* que hubo de suspenderse sin apenas haber llegado á la exposición de las teorías que constituyen la *Matemática contemporánea*, con sus recientes desarrollos sobre las funciones analíticas, el cálculo funcional, las ecuaciones integrales, etc.

Además, otros obstáculos que no hay para qué señalar aquí impiden un trabajo de concentración de las fuerzas que disipan sus energías al dispersarse, por esa fatal manía de fundar nuevas bases, cuando se podía edificar sobre bases ya establecidas y sumar esfuerzos, en vez de neutralizar sus acciones por tender á finalidades antagónicas.

Y ahora, ya que me es imposible el desarrollar extensa y prácticamente el método cuyas ideas principales he diseñado en el actual trabajo, porque no es posible luchar en terreno desfavorable, contra dificultades materiales y morales no vencidas, sin auxilios que se prestan á .empresas más sencillas, sin medio ambiente propicio para realizar tal propósito, no insistiendo más en mi labor infructuosa, me limitaré á implantar en los programas de mis cursos el nuevo espíritu de la enseñanza matemática que, sin el éxito apetecido, he tratado de implantar en pró de las tendencias teóricas de la ciencia pura, de las cuales luego brotan infinidad de aplicaciones.

Imponiéndose la necesidad de terminar brevemente lo que debiera ser materia de extensa labor, pues falta la aplicación práctica de este nuevo orden de ideas á las diversas disciplinas matemáticas, lo que exigiría gastos no recompensados y resistencias al cambio de procedimientos, por hallarse tenazmente arraigados los hasta ahora seguidos y adaptados á vetustos planes de enseñanza que permanecen fijos á pesar del progreso realizado, especialmente desde hace medio siglo, voy á resumir mis trabajos que fueron preparatorios para la obra magna que al fin queda en proyecto ó como estimulante para ser realizada en tiempos más propicios.

En varios congresos y revistas he presentado trabajos referentes al nuevo método.

Relacionadas con éste leí en el Congreso de Valencia, como delegado de la Subcomisión española, además del *discurso inaugural*, otro cuyo tema era: *Principales cuestiones de enseñanza matemática*, dirigida especialmente á la subcomisión española, como cuestionario que convenía dejar solucionado.

Presentaba como primer problema, el de la *reivindicación de la Ciencia* ó más claro, de los estudios incluídos en las Facultades de Ciencias, citando con este motivo el fracaso de nuestras revistas matemáticas, *El Progreso matemático*, el *Archivo de matemáticas*, etc., citando El *Boletín de crítica, enseñanza y bibliografía matemática* que por entonces publicaba para atender, en lo posible, á los trabajos de la delegación.

El segundo problema señalado: *la relación entre la Ciencia y la energía intelectual*, conduce preferentemente á la fase *educativa* cuya realización aumenta las energías intelectuales en proporción á las dificultades por vencer y á aquilatar el don de *saber elegir* que abrevia y disminuye las dificultades que ofrece lo indiscernible en la exuberancia de la producción y que llegará á colocar cada idea en el lugar y gerarquía que le corresponde en el porvenir, oponiendo á la acción productora indefinida la acción educadora que crea fuerza intelectual por la eficaca de los métodos.

¿Cómo y en qué medida y forma debe realizarse el fin educativo? Esta es la parte práctica de la cuetión, y que conduce á estudiar la *nueva distribución que deba hacerse para el máximo de aprovechamiento.*

Otro problema es el de la *intelectualidad.*

Tenemos las dos tendencias: al progreso de las teorías y al de sus aplicaciones, correspondiendo el desenvolvimiento matemático á las facultades de Ciencias. Y el indefinido desarrollo de las diversas teorías exige una *selección de las materias, conocimiento de los métodos* que conduzcan con *rapidez* á multiplicidad de aplicaciones y una *educación intelectual* que eleve gradualmente á las aptitudes de *asimilación* y *creación científicas.*

Tenemos además que examinar la proporción en los medios educativos é instructivos en cada edad, los medios de producir el *máximo* de resultado y también, aparte de la cantidad y preferentemente el *modo*, todo lo que constituye los resortes de la educación intelectual. Y en la parte científica ó instrumental, hay que tener presente el claro-oscuro de los conocimientos, la prelación y preferencia de los unos sobre los que pueden quedar á la sombra.

Finalmente, los modos especiales de estudiarse las matemáticas en cada uno de los organismos del Estado, finalidad, extensión, calidad y cantidad, las relaciones entre la Matemática, la Filosofía y las ciencias de aplicaciones son cuestiones apuntadas en este trabajo.

Especialmente, acerca del nuevo método, insistí en el Congreso científico de Granada y de Filosofía de Bologna con notas referentes al mismo, así como en la *Revista de la Sociedad matemática española.*

Muchas reglas pueden citarse como conducentes al fin educativo, tales son, por ejemplo:

La economía del esfuerzo, la selección de materias, la preferencia de los conceptos generales sobre los objetos especiales, el simultanear las vistas de conjunto con los detalles, el buscar diversidad de métodos ó de procedimientos, las correlaciones de las ideas y la substitución de los conceptos ó de cuestiones equivalentes, señalar el esqueleto ó trazos generales de las demostraciones complicadas ó extensas, para fijar la concatenación de las ideas, el graduar las cuestiones para despertar el espíritu de inventiva, etc.

Conocidos son entre nosotros los fracasos de cuantas tentativas se han realizado para consolidar la afición hacia las ciencias matemáticas y su progreso.

Las causas de estos fracasos son muy complejas y exigirían largas disgresiones para especificarlas.

Una de ellas es la *lucha de clases en la Ciencia*, pues los campos de la ciencia teórica y la de las aplicaciones, no están bien deslindados. La mayoría aboga porque se relegue á lugar secundario el *estudio de la Ciencia por la Ciencia.*

Y sólo en las naciones más adelantadas, ó cuya vida científica está bien definida, se consigue establecer el equilibrio entre las dos tendencias.

Otra de las causas es el público. Allí donde se ha mantenido la influencia de los grandes matemáticos, la ciencia teórica se ha impuesto inmediata y directamente, sin necesidad de usar artificios en la forma y estilo para crear un público, cuando éste no existe.

Y en tal terreno, la Matemática lucha desventajosamente con los estudios literarios que tienen un poder más sugestivo que los estudios de pura razón, y medios más variados de divulgación y especialmente, cuando en nuestros planes de enseñanza abundan cursos inútiles, anticuados que fatigan sin resultado apreciable, causando tedio é indiferencia, relegando á segundo término disciplinas tan vivificadoras del espíritu y ricas en aplicaciones, como el *Cálculo infinitesimal* que llega tardíamente y mermado á las inteligencias.

La tendencia hacia la burocracia anula las tendencias de la ciencia desinteresada, que al fin debe ocupar un lugar preponderante como medio de cultura que lleva latentes los medios de producción útil.

El dogmatismo exagerado y la rutina matan las iniciativas intelectuales y la capacidad para el trabajo personal y propio, no constantemente reflejado ó calcado sobre modelos invariables.

La protección excesiva hacia lo que pertenece al pasado, perjudica lo que conviene para el presente y lo porvenir. Hay que preocuparse más de lo que somos y seremos, que de lo que hemos sido. Hoy estamos en el *siglo de las ciencias;* y éstas son medios de vida, para cualquier otro orden de estudios especulativos. Y no seguiremos en este terreno que nos llevaría más allá de nuestros propósitos.

Este último trabajo es como el resumen é índice de otros anteriores. Por esta razón, no me son necesarios realizar nuevos esfuerzos que acaso serían estériles ó contraproducentes.

Al publicar algunos folletos en estos últimos años, sólo me propuse dos objetos: el cumplimiento de un deber, publicando algo acerca de la enseñanza matemática, ya que esto ha sido el objeto de la *Commission internationale de l'enseignement mathématique,* y el facilitar los estudios matemáticos, presentándolos despojados del laconismo que los hace repulsivos ó difíciles á algunas inteligencias.

Y con ello termino mi tarea que muchos juzgarán acaso con razón, demasiado insistente é infructuosa.

FIN