INSTITUTO DEL CARDENAL CISNEROS

GUIA DEL BACHILLER.

CIENCIAS.

SEGUNDA ENSEÑANZA.

GUIA
DEL BACHILLER

POR

D. FÈLIX SANCHEZ Y CASADO.

SEGUNDA PARTE:

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.
GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA.
FÍSICA Y QUÍMICA.
FISIOLOGÍA É HIGIENE.
HISTORIA NATURAL.

MADRID.

IMPRENTA Á CARGO DE GREGORIO JUSTE,
Isabel la Católica, 23, 2.º
1874.

ARITMÉTICA

Y

ÁLGEBRA

POR

D. FÈLIX SANCHEZ Y CASADO.

Tercera edicion.

MADRID.

IMPRENTA Á CARGO DE GREGORIO JUSTE,
Isabel la Católica, 23, 2.°
1874.

INTRODUCCION GENERAL.

1. **Magnitud y cantidad.**—Se da el nombre de *magnitud* (1) á todo lo que es susceptible de aumento ó disminucion.

Una region, la cosecha de una heredad, la intensidad del frio ó del calor, la fuerza de las pasiones y hasta los fenómenos morales son magnitudes.

Cantidad (2) es toda magnitud determinable, esto es, que puede ser apreciada, medida ó contada.

La cantidad se divide en *contínua* (3) y *discreta* (4). Cantidades *contínuas* son aquellas cuyas partes están unidas entre sí; y *discretas* son aquellas cuyas partes no tienen entre sí ninguna trabazon, ni enlace: estas se *miden*, aquellas se *cuentan*; las primeras (cuerpos, superficies y líneas) se presentan *unidas* en el *espacio*, y las segundas se presentan *separadas* en el *tiempo*.

Las partes de plata que forman un duro son una cantidad contínua, y un monton de duros es una cantidad discreta.

(1) Del adjetivo latino *magnus*, grande.

(2) Del adjetivo latino *quantus*, cuánto, de qué magnitud?

(3) Del adjetivo latino *continuus*, unido á alguna cosa, que está adherido, que no está interrumpido, seguido, continuo.

(4) Del participio latino *discretus*, derivado de *discerno*, separar diferentes cosas entre sí, dividir, partir, segregar, desatar, desunir, disgregar, despegar.

2. Matemáticas.—La cantidad forma el objeto de las *Matemáticas* (1), las cuales se definen diciendo que son *las ciencias que tratan de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad.*

Las Matemáticas se llaman tambien *ciencias exactas*, por la evidencia de sus principios, por el severo rigor de sus demostraciones y principalmente por la gran exactitud de sus aplicaciones.

La importancia de las matemáticas se echa de ver fácilmente observando que demuestran las leyes generales del entendimiento en las formas generales de la intuicion sensible, por lo cual se ha dicho que el pensamiento es un cálculo interior y el cálculo un pensamiento exterior. Como ciencias formales pueden ser consideradas como una lógica concreta, porque en ellas están unidas, del modo más íntimo, las leyes generales del pensamiento y las formas generales del mundo sensible. Por último estas ciencias no solo ofrecen en sus operaciones fundamentales los ejercicios más sencillos y en su desarrollo un campo ilimitado, sino que tambien por la claridad que acompaña á la pura intuicion del sentido, por la precision de sus conceptos y definiciones, por la exactitud de sus divisiones y por el rigoroso encadenamiento de sus demostraciones son el modelo más acabado y completo de toda ciencia.

La utilidad de las matemáticas es una consecuencia de sus variadas aplicaciones á las ciencias físicas y naturales, á la cronología, á la estadística, á la astronomía, á las artes, tanto bellas como mecánicas, y en fin á la filosofía, pues, dirigiendo la mirada á lo suprasensible, á lo invariable y á la esencia de las cosas, atrae el alma á la verdad pura, y forma el espíritu filosófico; por eso Platon hizo poner en la puerta de su Academia estas palabras:

οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω.

(Que no entre el que no sepa geometría.)

Como la cantidad sólo es susceptible de aumento ó disminucion, las Matemáticas solo podrán *expresar, componer y descomponer las cantidades*: y cuando se ejecuta cualquiera de estas operaciones, se dice que se *calcula* (2).

Cálculo es el conjunto de operaciones que pueden hacerse para resolver una cuestion de aritmética ó álgebra.

3. Division de las Matemáticas.—Se dividen en *puras* y *mixtas*, dándose el primer nombre á las que tra-

---

(1) De la griega *mathesis*, ciencia, la ciencia por excelencia.

(2) De la palabra latina *cálculus*, china, piedrecita; porque cuando no existian caracteres gráficos, los hombres se servian de piedrecitas para expresar el resultado de sus operaciones con las cantidades.

tan de la cantidad con la mayor abstraccion, y el segundo á las que consideran la cantidad en alguna de las propiedades de los cuerpos.

Las matemáticas puras se dividen naturalmente en dos ramas principales: una de las cuales, llamada *Aritmética*, trata de la cantidad discreta, y la otra, llamada *Geometría*, trata de la cantidad contínua; pero como una y otra cantidad están sometidas á leyes generales independientes de su esencia particular, existe otra tercera rama, llamada *Algebra*, que trata de las leyes generales de la cantidad.

Las matemáticas mixtas se subdividen en dos secciones: la primera comprende todas las ciencias, que como la mecánica, la astronomía, la óptica, la acústica, etc., hacen aplicacion de la ciencia de la cantidad abstracta á los objetos de la naturaleza; y la segunda la constituyen la agrimensura, la geodesia, la arquitectura, la navegacion, etc., que se aplican á los objetos de arte.

4. Diversos nombres de las proposiciones usadas en matemáticas.—*Axioma* (1) es una proposicion que expresa una verdad evidente, que no necesita demostracion.

Tales son: 1.° Una cosa es igual á sí misma.

2.° Un todo es igual á la suma de sus partes.

3.° Lo que se hace con el todo, se hace con cada una de sus partes; y lo que se hace con cada una de las partes queda hecho con el todo.

4.° El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

5.° La parte es menor que el todo.

6.° Cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.

7.° Dos cantidades iguales no dejan de serlo porque se les agregue ó porque se les quite una misma cantidad.

8.° Dos cantidades iguales no dejan de serlo aun cuando se las multiplique ó se las divida por una misma cantidad.

9.° Dos cantidades desiguales dan tambien resultados desiguales cuando se las agrega ó se las quita una misma cantidad.

Postulado (2) es una verdad particular de carácter práctico que no puede demostrarse.

---

(1) Del nombre griego *axioma*, autoridad, principio, cosa juzgada.

(2) Del nombre latino *postulatum*, pretension, demanda, peticion.

Teorema (1) es una proposicion especulativa en que se propone una verdad demostrable.

En el teorema hay que considerar el *enunciado* y la *demostracion*.

El enunciado es la mera exposicion de la proposicion que vá á demostrarse. Se compone de *hipótesis* ó *suposicion*, que es lo que se supone cierto y sirve de fundamento á la demostracion, y de *tésis* ó *conclusion*, que es la consecuencia de la hipótesis y el fin de la demostracion.

Ejemplo.—Si un quebrado irreducible es la generatriz de una fraccion decimal exacta (hipótesis), su denominador tiene por únicos factores primos los de 10 (tésis).

Se llama *recíproco* de un teorema otro teorema cuyo enunciado tiene por hipótesis la tésis del primero y por tésis su hipótesis.

El recíproco del teorema anterior es el siguiente: si un quebrado irreducible tiene su denominador compuesto exclusivamente por los factores primos de 10, es la generatriz de una fraccion decimal exacta.

Demostracion es un razonamiento seguido, en que se hace ver que la proposicion enunciada concuerda de tal modo con las verdades más ciertas y evidentes, que no deja duda de su verdad.

Lema (2) es una proposicion preliminar que se prueba para la demostracion de alguna otra proposicion.

Corolario (3) es una proposicion cuya verdad dimana inmediatamente de otra.

Escolio (4) es una proposicion en que se explica ó advierte alguna cosa.

Problema (5) es una proposicion práctica en que se propone determinar una ó más cosas desconocidas, llamadas *incógnitas* (6) por medio de otras conocidas, que se llaman *datos* (7).

---

(1) Del verbo griego *theoreo*. mirar, examinar, considerar atentamente; esto es, *cosa digna de ser examinada y considerada*.

(2) De la palabra griega *lemma*, mayor de un silogismo.

(3) De la palabra latina *corollarium*, dinero para una corona, regalo honorífico, donativo, gratificacion, propina, añadidura; derivado de *corolla*, pequeña corona.

(4) De la palabra griega *scholion*, nota, comentario; derivada de *schole*, vacacion, descanso; porque en un principio no eran más que pequeños apuntes que los lectores ponian al márgen de los manuscritos en sus ratos de ócio.

(5) Del verbo griego *proballo*, exponer, poner en cuestion una cosa.

(6) Del adjetivo latino *incógnitus*, desconocido, compuesto de *in*, no, y *cógnitus*, conocido.

(7) Del participio latino *datus*, cosa dada.

ARITMÉTICA.

Nociones preliminares.

5. Definiciones.—*Aritmética* (1) es la ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad expresada por números.

El orígen de la aritmética es sumamente oscuro. Unos atribuyen su invencion á los egipcios, en tanto que otros afirman que Abraham fué quien se la enseñó en el tiempo que permaneció en aquel país. Tampoco es posible fijar la época en que se inventaron los signos numéricos y los primeros métodos de cálculo.

Es de notar que todos los pueblos, excepto los chinos, han elegido la division decimal, sin duda á consecuencia de la costumbre, contraida desde la infancia, de contar por los dedos.

Los sábios árabes están contestes en confesar que en el siglo X tomaron de los pueblos de la India los caractéres, que nosotros llamamos *cifras árabes*, y ellos llamaban *cifras indias*.

En el siglo XIII la aritmética árabe se propagó por Europa; pero esta ciencia debe su completo desarrollo á los inmensos progresos que ha hecho el álgebra en los dos últimos siglos.

Número (2) es la expresion genuina de la cantidad discreta.

6. Divisiones de los números.—Los números pueden ser: enteros, quebrados ó mixtos.

Número entero es una cosa sola ó la reunion de varias cosas iguales ó semejantes.

Un duro, cuatro libras, seis varas son números enteros.

---

(1) De la palabra griega *arithmos*, número.

(2) Del nombre latino *númerus*, número, derivado del griego *nomos*, lo que está dividido, separado, distribuido.

Unidad es la cantidad que se elige arbitrariamente para servir de medida comun en la comparacion de cantidades de la misma especie.

El duro, la libra, la vara, etc., son unidades.

Número quebrado (1) ó *fraccion* (2) es una parte de la unidad ó la reunion de varias partes de la unidad iguales entre sí.

Medio duro, tres cuartos de libra y dos tercios de vara, son quebrados ó fracciones.

Número mixto es la reunion de un entero y de un quebrado.

Ocho duros y medio es un número mixto.

Los números se dividen tambien en abstractos y concretos:

Número *abstracto* (3) es el que no expresa la especie de unidad á que se refiere.

Tres, cinco céntimos, ocho y diez céntimos son números abstractos.

Número *concreto* (4) es el que expresa la especie de unidad á que se refiere.

Tres pesetas, cinco céntimos de peseta, ocho pesetas y diez céntimos son números concretos.

7. OPERACIONES FUNDAMENTALES (5).—La Aritmética *compone* y *descompone* los números, y las seis *operaciones* que sirven al efecto se llaman *fundamentales*, tres de *composicion*, y tres de *descomposicion*, inversas de las anteriores.

---

(1) Del verbo *quebrar*, derivado por metátesis de *crepare*, romper, estallar con ruido.

(2) Del nombre latino *fractio*, derivado del verbo *frango*, romper, quebrar, hacer pedazos.

(3) Del participio latino *abstractus*, derivado de *abstraho*, separar, quitar.

(4) Del participio latino *concretus*, coagulado, espeso, consistente.

(5) Se las llama fundamentales, porque en ellas se *funda* la composicion y descomposicion de los números.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.	
DE COMPOSICION.	DE DESCOMPOSICION.
Adicion. *Multiplicacion.* *Elevacion á potencias.*	*Sustraccion.* *Division.* *Extraccion de raices.*

8. **Signos usados en la aritmética.**—Para simplificar los razonamientos se usan los siguientes signos:

Signo.	Significacion.	Signo.	Significacion.
$+$	mas.	$=$	igual.
$-$	menos.	$<$	menor que.
$\times$ ó $\cdot$	multiplicado por.	$>$	mayor que.
$:$	dividido por ó partido por.		

Numeracion.

9. **Definicion.**—La *numeracion* es el arte de formar los números y de expresarlos con pocas palabras y escribirlos con un corto número de figuras.

Segun esto, la numeracion es verbal y escrita.

10. **Numeracion verbal** (1).—En el sistema décuplo (2) ó decimal, los diez primeros números se designan con las siguientes palabras:

uno, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, *diez*.

La reunion de diez unidades se considera despues

(1) Del nombre latino *verbum*, palabra

(2) De la palabra latina *décuplus*, diez veces más considerable; porque cada órden de unidades es *diez veces mayor* que el anterior.

como una nueva unidad, que se llama *decena*; y se cuenta por decenas, como por unidades, hasta diez decenas del siguiente modo:

diez, *veinte*, *treinta*, etc.,.... diez decenas ó *ciento*.

Se cuenta igualmente por centenas hasta diez centenas ó *mil*.

Despues por mil, como unidades simples, hasta mil veces mil ó un *millon*, y así sucesivamente.

Por último, los números comprendidos entre dos números consecutivos de decenas, de centenas, de millares, etc., se designan añadiendo al nombre del número que indica las decenas, centenas, millares, etc., los nombres que sirven para denotar los números inferiores á una decena, á una centena, á un millar, etc.

Se llaman unidades de diferente órden la unidad simple, la decena, la centena, el millar, la decena de millar, la centena de millar, el millon, etc. Cada una de estas unidades vale diez del órden inmediato anterior.

Se llaman unidades *principales* ó *ternarias* la unidad simple, el millar, el millon, etc. Cada una de estas unidades vale mil unidades de la clase precedente.

11. NUMERACION ESCRITA.—Para escribir los números nos servimos de diez caractéres, llamados *cifras* (1) ó *guarismos*, que son los siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve,	cero, (2).

El principio convencional, que permite escribir todos los números con estos diez guarismos, es el siguiente: *todo guarismo colocado á la izquierda de otro repre-*

(1) De la palabra árabe *sifr*, que en un principio no designaba más que el cero, pero que más adelante se aplicó á los diez caractéres empleados para designar los primeros números.

(2) De la palabra árabe *zeroh*, círculo.

senta unidades diez veces mayores que aquel. Por lo tanto un guarismo solo representa unidades simples; uno colocado á la izquierda representará decenas, otro colocado á la izquierda representará centenas, y así sucesivamente.

El cero sirve para reemplazar en un número las unidades que pueden faltarle. Así, *doscientos cuatro*, como no tiene decenas, se escribirá 204. Los otros nueve guarismos se llaman cifras significativas.

Para escribir un número al dictado, se escribe cada grupo de tres cifras al paso que se enuncia, reemplazando con ceros las unidades de diferentes órdenes que pueden faltar en el número.

Ejemplos: 1.° El número *trescientos cuarenta*, se escribe 340.
2.° El número *siete mil cincuenta y ocho*, se escribe 7058.
3.° El número *noventa mil seiscientos diez*, se escribe 90610.
4.° El número *doce millones treinta y ocho mil setecientos cuatro*, se escribe 12038704.
5.° El número *quinientos tres mil millones y noventa*, se escribe 503000000090.

12. Valor absoluto y valor relativo de una cifra. —Se da el primer nombre al que tiene un guarismo cuando está aislado, y el segundo al que tiene un número segun el lugar que ocupa.

Añadiendo un cero, dos, tres, etc., á la derecha de un número, se le hace 10, 100, 1000, etc., veces mayor, porque el valor relativo de cada cifra significativa se hace 10, 100, 1000, etc. veces mayor.

13. Regla para leer un número entero cualquiera. —Para esto se enuncian sucesivamente los valores relativos de todas sus cifras significativas, procediendo de izquierda á derecha.

Si el número tiene pocos guarismos esto es fácil. Asi es que el número 1874 que tiene 1 millar, 8 centenas, 7 decenas y 4 unidades se leerá *mil ochocientos setenta y cuatro*.

Pero si el número es complicado se divide en secciones de seis guarismos empezando por la derecha; en la primera separacion se pone un 1, bien en la parte superior, bien en la inferior; en la segunda un 2; en la tercera un 3; etc., despues se divide cada seccion de seis guarismos en dos secciones de tres cifras con una coma; y se empieza leyendo por la izquierda, diciendo *mil* donde se encuentre una coma, y donde se halle un 1, un 2, un 3, etc., *millon*, *billon*, *trillon*, etc.; y al fin se dirá unidades.

Asi el número	468394572057002154300807
se prepara	$468,394_{3}572,057_{2}002,154_{1}300,807$
y se lee. . .	cuatrocientos sesenta y ocho *mil* trescientos noventa y cuatro *trillones* quinientos setenta y dos *mil*, cincuenta y siete *billones*, dos *mil* ciento cincuenta y cuatro *millones* trescientas *mil* ochocientas y siete *unidades*

Adicion.

14. Definicion.—La adicion (1) es una operacion que tiene por objeto reunir varios números en uno solo. Los números dados se llaman *sumandos* (2), el resultado *suma* (3), y el signo de esta operacion es +.

15. Regla.—*Para sumar varios números se colocan unos debajo de otros, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, etc.; se tira despues una raya horizontal por debajo del último sumando; se empieza á sumar por la columna de las unidades, y despues las decenas, centenas, etc.; si la suma de las cifras de cada una de estas columnas no pasa de*

(1) De la latina *addo*, añadir.

(2) Participio de futuro pasivo del verbo *summo*, esto es, lo que ha de ser sumado.

(3) De la palabra latina *summa*, el conjunto, el total, el todo.

nueve, se escribe bajo la columna; pero si contiene algunas unidades de órden superior, se guardan para reunirlas á la columna siguiente, y no se escriben más que las unidades; finalmente, en la última columna se escribe la suma tal como se haya encontrado.

Ejemplo.—Si queremos sumar los números 3572, 696, 57 y 709; los pondremos los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, etc., y trazaremos despues una raya en esta forma:

	Millares.	*Centenas.*	*Decenas.*	*Unidades.*
Sumandos.	3	5	7	2
		6	9	6
			5	7
		7	0	9
Suma.. .	5	0	3	4

Se empieza á sumar por las unidades y se dice: 2 unidades y 6 son 8, y 7 son 15, y 9 son 24; en 24, que son unidades, hay 2 decenas y 4 unidades, coloco las 4 unidades debajo de la columna de las unidades, y guardo las 2 decenas para sumarlas con las de la columna siguiente, en la cual digo: 7 decenas y 2, que llevaba de la suma de las unidades, son 9 decenas, y 9 son 18, y 5 son 23, y 0 son 23; en 23, que son decenas, hay 3 decenas y 2 centenas; por lo cual pongo un 3 debajo de las decenas, y guardo las 2 centenas para sumarlas con las de la columna inmediata, diciendo: 5 centenas y 2, que llevaba, son 7 centenas, y 6 son 13, y 7 son 20: en 20, que son centenas, hay 2 millares justos y ninguna centena; por lo que pongo 0 debajo de las centenas, y guardo los 2 millares para la columna inmediata en que digo 3 y 2 que llevaba son 5, que pongo debajo de los millares, y como ya no hay más guarismos, diremos que la suma de los números propuestos es *cinco mil treinta y cuatro.*

Al sumar cada columna no se necesita ir repitiendo si son unidades, decenas, etc.; pues como por el sistema de numeracion cada diez unidades componen una de especie superior, se suman los guarismos de cada columna como si sólo expresasen unidades, y despues de colocar las unidades sencillas, que resulten, debajo de la columna que se suma, se llevan para la columna inmediata tantas unidades como decenas resultaron en la suma de la columna anterior.

La colocacion de los sumandos unos debajo de otros en columna ordenada se hace por comodidad, porque de este modo se presentan alineados los guarismos que han de entrar en cada suma parcial, lo cual impide que se mezclen en la operacion las de órdenes distintos. El tirar la raya es por claridad, esto es, para que no se confunda la suma con los sumandos. Se empieza por la columna de las unidades, porque asi se facilita la agregacion á su inmediata superior de las decenas que se *guardan* de una suma parcial.

Como en el número que está debajo de la raya están las sumas de todas las unidades, decenas, centenas, etc., esto es, de todas las partes de los sumandos, y como lo que se hace con las partes (Introduccion, axioma 3.º) queda hecho con el todo, se infiere que el número que está debajo de la raya es la suma de todos los sumandos.

La prueba de esta operacion se hace sumando en órden inverso, esto es, de abajo arriba, si al hacer la operacion se ha procedido de arriba abajo.

Sustraccion.

16. Definicion.—La *sustraccion* (1) es una operacion que tiene por objeto descomponer una suma en dos sumandos, siendo uno de estos conocido. La suma se llama *minuendo* (2), el sumando conocido *sustraendo* (3), y el sumando desconocido *resto*, *resta*, *resíduo*, *exceso* ó *diferencia*. El signo de esta operacion es—.

17. Regla.—*Para efectuar esta operacion se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que las unidades del mismo órden se correspondan, se traza por debajo del sustraendo una raya horizontal para separarle del resultado; despues se resta sucesivamente cada cifra del sustraendo de la correspondiente del minuendo, empezando por las de las unidades; se ejecuta lo mismo con las decenas, centenas, etc., y el número que resulte debajo de la raya será la diferencia.*

Ejemplo.—Si de 47835 queremos restar 23512, colocaremos el sustraendo debajo del minuendo, y despues de tirar una raya, diremos: de 2 unidades á 5 unidades van 3, que pondremos debajo de la raya en la columna de las unidades; de 1 decena á 3 van 2, que pondremos debajo de la raya en la columna de las decenas; de 5 centenas á 8 van 3, que pongo debajo; de 3 millares á 7 van 4, que pon-

	Decenas de millar.	Millares.	Centenas.	Decenas.	Unidades.
Minuendo. . . .	4	7	8	3	5
Sustraendo . . .	2	3	5	1	2
Resto.	2	4	3	2	3

(1) De la palabra latina *substraho*, quitar por debajo.
(2) De la palabra latina *minuendus*, el que ha de ser disminuido.
(3) De la palabra latina *substrahendus*, el que ha de ser quitado.

go debajo; de 2 decenas de millar á 4 van 2, que pongo debajo de la columna correspondiente, y tendré que la diferencia entre los dos números propuestos es 24323.

El colocar el sustraendo debajo del minuendo es por comodidad y el tirar la raya por claridad; todo lo demás se reduce á encontrar la diferencia entre las unidades de los números propuestos, la de las decenas, la de las centenas, etc.; y como todas estas diferencias las hemos ido colocando las unas al lado de las otras en sus lugares correspondientes, resulta que su reunion formará (Intr. ax.ª 3.º) la diferencia total.

Al efectuar las restas parciales no se necesita repetir si son unidades, decenas, etc., sino hacer siempre la resta como si fuesen unidades simples.

18. Escolio. En esta operacion sucede con frecuencia que algunos guarismos del minuendo son menores que los correspondientes del sustraendo. En este caso *se toma una unidad del guarismo inmediato de la izquierda del minuendo*, la cual como vale diez respecto del guarismo que se considera, se le añaden á éste, y de su suma se resta el guarismo del sustraendo; y cuando se pasa á la resta parcial inmediata, *se considera el guarismo del minuendo con una unidad ménos;* pero es más análogo con el modo de proceder en las demás operaciones, dejar los guarismos del minuendo como son, y añadir una unidad al correspondiente del sustraendo:

58276
23848
34428

Ejemplo.—Si queremos hallar la diferencia entre 58276 y 23848 los colocaremos como hemos dicho y diremos: de 8 á 6 no puede ser, es decir, que al 8 no le faltan ningunas unidades para convertirse en 6 ó que no puedo quitar 8 al que no tiene más que 6; por lo mismo tomo una unidad del guarismo inmediato 7, que como vale 10 respecto del 6, las sumo y tengo 16, de cuya suma ya puedo restar el 8 diciendo: de 8 á 16 van 8, que pongo debajo; ahora podría considerar el 7 como 6 por haberle quitado una unidad, y decir de 4 á 6 van 2; pero es mejor acostumbrarse á añadir dicha unidad al guarismo del sustraendo; y así, diré: 4 y 1 que llevo son 5, de 5 á 7 van 2, que coloco debajo; paso á la columna inmediata y digo: de 8 á 2 no puede ser, tomaré una unidad del guarismo inmediato, y hallaré que de 8 á 12 van 4, que pongo debajo, y llevo 1; 3 y 1 que llevo son 4, de 4 á 8 van 4, que pongo, y no llevo nada; de 2 á 5 van 3 que pongo debajo, y resulta la diferencia 34428.

Cuando el minuendo termina en ceros ó tiene ceros entre sus guarismos significativos, se deja el minuendo como está y se añade una unidad al guarismo del sustraendo siempre que para restar el anterior se haya tenido que tomar unidad auxiliar.

370480000
35729486
334750514

Ejemplo.—Si de 370480000 queremos restar 35729486, diré: de 6 á 10 van 4, y de 10 llevo 1; 8 y 1 son 9, á 10 vá 1, y de 10 llevo 1; 1 y 4 son 5, á 10 van 5, llevo 1; 1 y 9 son 10, á 10 vá 0, llevo 1; 1 y 2 son 3, á 8 van 5, y no llevo nada; de 7 á 14 van 7, y llevo 1; 1 y 5 son 6, á 10 van 4, y llevo 1; 1 y 3 son 4, á 7 van 3, y no llevo nada; y como del 3, que queda á la izquierda, no tengo nada que restar, le pongo debajo.

La prueba de esta operacion consiste en sumar la diferencia con el sustraendo, y la operacion estará bien hecha si el resultado es igual al minuendo.

Multiplicacion.

19. Definicion.—La *multiplicacion* (1) es una operacion por la cual se repite un número tantas veces como unidades tiene otro. El número que se ha de multiplicar se llama *multiplicando* (2), aquel por quien se multiplica *multiplicador* (3); y el resultado de la operacion *producto* (4). El multiplicando y el multiplicador se llaman juntos *factores* (5) del producto. El signo de esta operacion es . ó × colocado entre los dos factores.

20. Teorema.—*El órden de factores no altera el producto.*

Vamos á demostrar que al multiplicar 5 por 4, el producto será el mismo, bien se multiplique el 5 por el 4 ó el 4 por el 5.

Como la multiplicacion es un caso particular de la suma en que todos los sumandos son iguales, tendremos, que sumando cuatro veces el 5, hallaré el producto que busco; pero si descomponemos á cada 5 en las cinco

---

(1) De la latina *multiplicare*, compuesta de *multus*, mucho, y *plico*, plegar.

(2) Del participio de futuro pasivo *multiplicandus*, el que ha de ser multiplicado.

(3) Del nombre verbal *multiplicator*, el que multiplica.

(4) De la latina *produco*, producir.

(5) De la latina *facio*, hacer, porque sirven para formarle.

unidades de que consta, deberemos sacar el mismo resultado de sumar estas unidades que de sumar los cuatro 5 á que equivalen; por lo mismo indicando y ejecutando la operacion como aquí se vé:

$$\begin{aligned} 5&=1+1+1+1+1\\ 5&=1+1+1+1+1\\ 5&=1+1+1+1+1\\ 5&=1+1+1+1+1\\ \hline 20&=4+4+4+4+4 \end{aligned}$$

Observaremos, que el conjunto de unidades que están á la derecha de los signos de igualdad, equivalen á los cuatro 5 que están en columna; pero estas mismas unidades sumadas equivalen á los cinco 4 que hay debajo de la raya; luego si cuatro 5 equivalen á cinco 4, será cuatro veces un 5 igual á cinco veces un 4; y por lo mismo cuatro veces 5 es igual á cinco veces 4, ó $4\times5=5\times4$.

21. Casos de multiplicacion: 1.° que los dos factores no tengan más que una sola cifra; 2.° que el multiplicando tenga varias cifras y el multiplicador una sola; y 3.° que los dos factores tengan varias cifras.

22. 1.er caso.—No es necesario más que saber la siguiente tabla, llamada *pitagórica* (1).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para formarla se traza una cuadrícula de nueve

(1) Por atribuirse á Pitágoras, uno de los mayores sábios de la antigüedad, que floreció en el siglo VI antes de J. C. y fué contemporáneo de Pisístrato y de Tarquino el Soberbio.

filas con nueve casillas cada una; en cada casilla de la primera fila se escribe uno de los nueve primeros números por su órden correlativo; en cada una de la segunda se escribe la suma del número que está encima con el mismo número; y en cada una de las siguientes, se vá escribiendo la suma de los dos números, que están directamente encima, en la fila primera y en la inmediata anterior.

Para hallar en esta tabla el producto de dos números de una cifra, se busca uno de ellos en la primera fila, y el otro en la primera columna, y enfrente del segundo, justamente debajo del primero, se encuentra su producto.

23. 2.° CASO.—*Para multiplicar un número cualquiera por un número de una sola cifra, se multiplica sucesivamente cada cifra del multiplicando por el multiplicador, comenzando por la derecha; se escriben solamente las unidades de cada producto, y se guardan las decenas para añadirlas al producto siguiente; y finalmente se escribe el último producto parcial tal como se encuentra.*

multiplicando. .	453
multiplicador. .	6
producto. . . .	2718

EJEMPLO.—Para multiplicar 453 por 6, colocaremos el 6 debajo de las unidades del 453; tiraremos debajo una raya, y empezaremos á multiplicar diciendo: 3 por 6 son 18, que son unidades; y como en 18 unidades hay 1 decena y 8 unidades, coloco el 8 debajo de las unidades de los factores, y guardo la decena para añadirla al producto de las decenas, y digo: 5 por 6 son 30, y 1 que llevaba son 31, que son decenas: y como en 31 decenas hay 3 centenas y 1 decena, coloco el 1 debajo de las decenas, y guardo las 3 centenas para añadirlas al producto de la columna siguiente, en la cual digo: 4 por 6 24, 24 y 3 que llevaba, son 27, que son centenas; y como en 27 centenas hay 2 millares y 7 centenas, coloco las 7 centenas, y guardo los 2 millares para añadirlos al producto de la columna siguiente; pero como ya no hay más guarismos en el multiplicando, coloco estos dos millares á la izquierda del 7, y tengo que 453 multiplicado por 6 da 2718 por producto.

La colocacion de los factores es por comodidad, y la raya se tira para claridad. Todo lo demás está reducido á multiplicar las unidades, las de-

cenas, etc., esto es, todas las partes del multiplicando por el multiplicador; y como todos los productos parciales los hemos ido reuniendo en uno solo, resulta que el número que está debajo de la raya es el producto de todas las partes de que se compone el multiplicado por el multiplicador; luego (Intr., ax. 3.º) será el producto total.

Todo número multiplicado por la unidad da por producto el mismo número; y cero multiplicado por cualquier número, da cero por producto.

Segun el sistema de numeracion, un número resulta multiplicado por 10, sólo con añadirle un cero; se le multiplica por 100, con añadirle dos ceros, etc.; y en general, para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, se colocarán á la derecha de dicho número tantos ceros como acompañen á la unidad.

De aquí se infiere que la multiplicacion de un número cualquiera por otro de un guarismo significativo seguido de ceros, se reduce al caso anterior; y para efectuar la multiplicacion se multiplica el número compuesto de varias cifras significativas por el guarismo significativo del multiplicador, y al producto se le añaden tantos ceros como acompañen á la cifra significativa.

24. 3.er CASO.—*Se multiplica sucesivamente el multiplicando por cada cifra significativa del multiplicador, cuidando de escribir los productos parciales unos debajo de otros, de modo que la primera cifra de cada uno esté colocada bajo la cifra del multiplicador que ha dado orígen al producto; tírese una raya, y súmense los productos parciales, y se tendrá el producto total.*

Ejemplo.—Para multiplicar 8237 por 536 tomaré por multiplicador el 536 y le colocaré debajo del multiplicando, y despues de tirar la raya, multiplicaré 8237 por 6 é iré colocando el producto debajo de la raya como en el caso anterior; despues paso á multiplicar todo el

multiplicando. .	8237
multiplicador. .	536
productos parciales. . . .	49422
	24711
	41185
producto total. .	4415032

multiplicando 8237 por el segundo guarismo del multiplicador, que es el 3, y coloco su producto debajo del anterior, corriéndole un lugar hácia la izquierda. Paso despues á multiplicar todo el multiplicando por el tercer guarismo del multiplicador, que es el 5, y coloco su producto debajo del anterior, corriéndole un lugar hácia la izquierda. Tiro despues una raya porque ya no hay más guarismos en el multiplicador; sumo todos estos productos parciales, y tengo en la suma 4415032 el producto de los dos números propuestos.

Se toma por multiplicador el de ménos guarismos porque el órden de factores no altera el producto, y de este modo resulta la operacion con más sencillez; todo lo demás está reducido á multiplicar todo el multiplicando por las unidades del multiplicador; despues todo el multiplicando por las decenas del multiplicador, y se empieza á colocar este producto debajo del guarismo de las decenas del anterior, porque de multiplicar por decenas debe resultar al fin un cero, y los guarismos significativos se deben empezar á colocar debajo de las decenas del primer producto parcial, para poder ejecutar despues la suma; luego, hemos multiplicado por las centenas, y así sucesivamente, hasta haber multiplicado todo el multiplicando por todos los guarismos ó partes del multiplicador; pero todos estos productos los hemos sumado y reunido en un solo número, que es el que resulta debajo de la raya; luego (Intr., ax. 3.º) este número que contiene la suma de los productos del multiplicando por todas las partes del multiplicador contendrá el producto de todo el multiplicando por todo el multiplicador.

La operacion de multiplicar se abrevia cuando uno ó ambos factores terminan en ceros; lo cual se consigue multiplicando únicamente los guarismos significativos, y añadiendo al producto tantos ceros como hay al fin en ambos factores juntos, ó en el uno de ellos, si él solo los llevase.

La prueba de esta operacion se funda en el principio de que el órden de factores no altera el producto, y consiste en tomar el multiplicador por multiplicando y el multiplicando por multiplicador, y la operacion estará bien hecha cuando el producto así obtenido sea idéntico al anterior.

Division.

25. Definicion.—*Division* (1) es la operacion de descomponer un producto en dos factores, siendo uno de estos conocido. El producto que se descompone se llama *dividendo* (2), el factor conocido *divisor* (3), y el factor desconocido *cociente* (4). El signo de esta operacion es (:).

Se dice que la division es *exacta*, cuando el dividendo contiene al divisor un número exacto de veces; é *inexacta*, cuando el dividendo no contiene al divisor un número exacto de veces. En este último caso el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor se llama *cociente entero*, y la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente, se llama *resíduo* (5). En la division pueden ocurrir tres casos:

26. 1.er caso.—*Para dividir un número de una cifra por otro de una cifra, ó uno compuesto de dos cifras por uno de una cifra, que sea mayor que el guarismo de las decenas del dividendo, basta saber la tabla de multiplicar.*

27. 2.º caso.—*Para dividir un número compuesto de varias cifras por otro de una sola, se coloca el divisor á la derecha del dividendo, de modo qne se correspondan en una misma línea, se traza entre los dos una raya de arriba abajo, y otra debajo del divisor. Se toma la cifra de la izquierda del dividendo, se ve cuántas veces contie-*

(1) De la latina *dividere*, dividir, partir.

(2) Del participio de futuro pasivo *dividendus*, el que ha de ser dividido ó repartido.

(3) Del nombre verbal *divisor*, el que divide ó reparte.

(4) De la latina *quoties*, cuántas veces, porque indica el número de veces que el divisor está contenido en el dividendo.

(5) De la latina *residuus*, lo que queda, lo sobrante.

ne al divisor, y se pone este cociente debajo de la raya del divisor: si el primer guarismo del dividendo es menor que el divisor, se toma otra cifra más del dividendo, que se separa de las demás con una coma, y se ve cuantas veces contiene al divisor, el dividendo parcial separado, poniendo por cociente lo que resulte. Despues se multiplica este cociente por el divisor, y se coloca el producto debajo del guarismo ó de los dos guarismos, que se separaron en el dividendo; se traza debajo una raya, y se resta este producto del guarismo ó guarismos separados. Al lado del resto, ó del cero si no hubo ninguno, se baja el guarismo siguiente del dividendo, y con ello se prosigue lo mismo que anteriormente hasta bajar el último guarismo del dividendo.

Ejemplo. — Si se quiere dividir 924 por 7, pondremos el divisor á la derecha del dividendo, separándolos con una raya tirada de arriba abajo y otra debajo del divisor.

dividendo. .	9,2,4	7 *divisor.*
	7	132 *cociente.*
	22	
	21	
	014	
	14	
	00	

Separo con la coma el guarismo 9 de la izquierda del dividendo, y digo: el 7 en 9 ¿cuántas veces está contenido? veo que *una* vez, por lo que pongo 1 debajo de la raya del divisor; multiplico este primer cociente parcial 1 por el divisor 7 diciendo: 1 por 7 es 7, que pongo debajo del dividendo parcial 9; tiro una raya y resto 7 de 9. Al lado del resto 2, bajo el guarismo siguiente 2 del dividendo, le apunto arriba, y digo: el 7 en 22 ¿cuántas veces está contenido? hallo que son 3, y pongo este segundo cociente parcial á la derecha del primero, le multiplico por el divisor 7, su producto 21 le pongo debajo del segundo dividendo parcial 22, y resto. Bajo al lado del resto 1 el guarismo siguiente 4, y digo: 7 en 14 ¿cuántas veces está contenido? veo que son 2, pongo este guarismo en el cociente á la derecha del 3, y le multiplico por el divisor 7; pongo su producto 14 debajo del tercer dividendo parcial, y le resto de él; y como no hay más guarismos que bajar, ni queda resto, resulta que el cociente de dividir 927 por 7 es 132.

La colocacion del dividendo y divisor es por comodidad y las rayas se tiran por claridad; ahora, para hacer ver la exactitud de lo demás de la regla, nos contraeremos al ejemplo anterior, donde observamos que hemos dividido 9 centenas por 7 ó hemos visto 9 centenas entre 7 á como les toca, y hemos hallado que es á 1; pero como el 9 expresa centenas, este cociente es una centena, y por lo mismo despues del 1 debe haber en el cociente otros dos guarismos; en 9 centenas no solo habia lo necesario para que tocase á una centena, sino que habia algo más, y por esto hemos multiplicado el cociente por el divisór y le hemos restado de lo que nos servia de dividendo; á su lado hemos bajado el guarismo inmediato 2, y vemos que estas 22 son decenas y hemos continuado diciendo: el 7 en 22 ¿cuántas veces está contenido? ó 22 decenas entre 7 ¿á cómo les toca? hemos hallado que es á 3, que las coloco á la derecha del 1 que habia de expresar centenas, ahora, para ver si despues de tocarles á 3 decenas quedan aún algunas decenas, se multiplica este segundo cociente por el divisor, y se resta del segundo dividendo parcial 22; el resto 1, que resulta, expresa 1 decena, que junta con las 4 unidades que se bajan, son 14 unidades que entre 7 les toca á 2, que pongo á la derecha del 3 que expresaba decenas; y como he visto cuanto cabe el divisor en todas las partes del dividendo, y tengo reunidos en un solo número todos los cocientes parciales, resulta (Intr., ax. 3.ª) que este es el cociente total.

Al ejecutar esta operacion se debe tener presente:

1.° Que no se puede poner de una vez nada más que 9; porque si se pudiese poner más, lo ménos sería á 10, y la decena no correspondería al cociente parcial que se hallase, sino al anterior, lo que daría á conocer que el anterior era menor de lo que debia ser.

2.° Que cuando se baja un guarismo y en él, junto con el resto, si le hay, no cabe el divisor, se debe poner cero en el cociente, y se baja en seguida el otro guarismo.

3.° Que todo número cabe en sí mismo una vez, ó lo que es lo mismo, que si se tiene que dividir un número por sí mismo, el cociente es uno.

4.° Que todo número dividido por la unidad dá por cociente el mismo número.

y 5.° Que cero dividido por cualquier número siempre dá cero por cociente.

En este caso de la division, cuando se ha adquirido cierta destreza la operacion se ejecuta con mucha brevedad, haciéndola mentalmente sin escribir los restos ni los dividendos parciales.

Ejemplo.—Dividir 45682 por 7.

45682	7
6526	

Se dispone del modo adjunto y hasta puede omitirse el divisor conservándole en la memoria; y el cociente se vá escribiendo debajo del dividendo. Para ejecutarla se dice:

4 entre 7 no puede ser;

45 entre 7 á 6, se pone 6 debajo del 5; y sobran 3, que junto con el guarismo siguiente 6, son:

36 entre 7 á 5, se pone debajo del 6, y sobra 1, que junto con el guarismo siguiente 8, son:

18 entre 7 á 2, se pone debajo del 8, y sobran 4, que junto con el guarismo siguiente 2, son:

42 entre 7 á 6, se pone debajo del 2, y no sobra nada, por lo cual infiero que el cociente es 6526.

28. 3.er caso.—*Para dividir un número de varias cifras por otro tambien de varias cifras, se dispone la operacion como en el caso anterior, se separan de la izquierda del dividendo tantas cifras como tiene el divisor, ó una más, si las primeras no contienen al divisor. Se divide este primer dividendo parcial por el divisor, y se tendrá la primera cifra del cociente; se multiplica esta cifra por el divisor y se resta el producto del dividendo parcial. A la derecha del residuo se escribe la cifra siguiente del dividendo, y se tendrá el segundo dividendo parcial, con el cual se ejecutará la misma operacion que con el anterior. El número formado por todos estos cocientes parciales será el cociente total.*

dividendo	96,6	42 *divisor.*
	94	23 *cociente.*
	12,6	
	12,6	
	00,0	

Ejemplo.—Para dividir 966 por 46, colocaré el divisor 42 á la derecha del dividendo 966; separándolos con una raya en la forma adjunta; y despues de haber tirado otra debajo del divisor, separo á la izquierda del dividendo dos guarismos, y veo cuántas veces está contenido en el primero, que es 9, el primero del divisor, que es 4; hallo que son dos veces, y pongo el guarismo 2 en el cociente; ahora multiplico este cociente 2 por todo el divisor 42, y coloco el producto 84 debajo del dividendo parcial 96, tiro la raya y resto. Al lado del resto 12 bajo el guarismo siguiente 6; y como ahora tengo por segundo dividendo un número que tiene un guarismo más que el divisor, averiguaré cuántas veces en los dos primeros números de este dividendo parcial está contenido el primero del divisor; y así, diré: el 4 en 12 ¿cuántas veces está contenido? veo que son 3, pongo 3 en el cociente á la derecha del 2, multiplico todo el divisor por este 3, y coloco el producto 126 debajo del dividendo parcial 126, tiro una raya y resto; y como no hay más guarismos que bajar, ni queda resto, digo que el cociente de dividir 966 por 42 es 23.

La colocacion del dividendo y del divisor y las rayas se hacen por comodidad y claridad. Despues se toman á la izquierda del dividendo tantos guarismos como se necesitan para que esté contenido el divisor, y hallamos, en el ejemplo anterior, que se necesitan dos guarismos, y que en ellos está contenido el divisor 2 veces, ó que 96 entre 42, que es el divisor les toca á 2; pero como el 96 expresaba decenas, resulta que estas 2 serán decenas. Hago la multiplicacion y resto, para saber, si además de tocarles á 2 decenas, queda aún algo que repartir, como sucede en efecto, pues quedan 12, que son decenas, y bajando el guarismo 6 de las unidades, he visto cuántas veces cabe el 42 en 126, y hallo 3, que como son unidades las coloco á la derecha del 2, que expresaba decenas. Hago la multiplicacion y resta para ver si quedan aún algunas unidades por repartir, y veo que no; y como todos los cocientes que han resultado de dividir todas las partes del dividendo por el divisor, los tengo reunidos en un sólo número, se infiere que este es el cociente total.

Suele suceder que el cociente parcial es mayor de lo que corresponde, por no estar contenido todo el divisor en todo el dividendo parcial tantas veces como el primer guarismo del divisor está en el primero ó en los dos primeros del dividendo parcial. Esta dificultad desaparece al instante, si se atiende á que si el producto que resulte de multiplicar el divisor por el cociente puesto fuese mayor que el dividendo, *está reducido á borrar dicho producto y cociente, y poner en este una unidad ménos. Se procede á la multiplicacion, y si el producto es todavía mayor que el dividendo parcial se vuelve á borrar y se quita otra unidad al cociente, y asi se continúa hasta que encontrando un producto igual ó menor que el dividendo se ejecuta la resta; y siempre que el resto sea menor que el divisor el cociente será el verdadero.*

575,7,2,6,	493
493	1 ~~2~~
0827	1 ~~8~~
~~986~~	~~7~~
493	6 ~~9~~
3342	~~8~~
~~3944~~	7
~~3451~~	
2958	
03846	
~~4437~~	
~~3944~~	
3451	
0395	

Ejemplo.—Si queremos dividir 575726 por 493, los coloco en la forma arriba dicha, separo tres guarismos en el dividendo, y digo: 5 entre 4 á 1, que pongo en el cociente; multiplico y resto. Al lado del resto 82 bajo el guarismo siguiente 7 del dividendo, y digo: 8 entre 4 á 2, que pongo en el cociente y multiplico; y como el producto 986 es mayor que el dividendo parcial 827, infiero que el cociente 2 es mayor de lo que debe ser; borro, pues, el 986 y tambien el 2, y pongo 1 en el cociente, multiplico y resto (porque el producto 493 es menor que el dividendo). Al lado del resto 334 bajo el guarismo siguiente 2, y digo: 33 entre 4 á 8, que pongo en el cociente, y multiplico; y como el producto 3944 es mayor que el dividendo parcial 3342, le borro y tambien el 8; pongo á 7; y como el producto 3451 es aún mayor que el dividendo parcial 3342, los borro y pongo 6; multiplico el divisor por este cociente 6; y como su producto 2958 es menor que el dividendo, tiro la raya y resto. Al lado del resto 384 bajo el 6; y digo: 38 entre 4 á 9; y como el producto del divisor por 9 es mayor que el dividendo los borro, y pongo 8; multiplico, y resulta tambien un producto mayor; le borro y pongo 7; multiplico y resto, lo que da el resto 395; y reuniendo todos los cocientes parciales tendré en total 1167.

Esta operacion de dividir se puede abreviar siempre haciendo la resta al mismo tiempo que la multiplicacion del divisor por el cociente parcial.

57,3,2,7,	46
11 3	1246
02 1 2	
0 2 8 7	
0 1 1	

Ejemplo.—Supongamos que vamos á dividir 57327 por 46. Los colocaré, como se ha dicho arriba, separaré dos guarismos en el dividendo, y diré 4 en 5 cabe 1 vez, y pongo 1 en el cociente; multiplico ahora el divisor 46 por el cociente 1, y en lugar de colocar este producto debajo del dividendo parcial 56, para restar despues, voy ejecutando la resta al mismo tiempo que formo el producto en esta forma: 6 por 1 es 6, de 6 á 7 va 1, que pongo debajo del 7, 4 por 1 es 4, de 4 á 5 va 1, que pongo debajo del 5. Al lado del resto 11 bajo el guarismo siguiente 3, y digo: 4 en 11 está contenido 2 veces; pongo 2 en el cociente, multiplico y resto diciendo: 2 por 6 son 12, de 12 á 13 va

1, y de 13 llevo 1; 2 por 4 son 8, y 1 que llevo son 9, de 9 á 11 van 2, y de 11 llevo 1; de 1 á 1 no va nada, y pongo 0 debajo del último 1. Al lado del resto 21 bajo el guarismo siguiente 2, y digo: 4 en 21 á 5; pero como solo sobra 1 unidad; y en ella junto con el guarismo siguiente 2, no está contenido 5 veces el segundo guarismo 6 del divisor, pondré sólo á 4; multiplico y resto diciendo: 4 por 6 son 24, de 24 á 32 van 8, y de 32 llevo 3; 4 por 4 son 16, y 3 son 19, de 19 á 21 van 2, y de 21 llevo 2, á 2 no vá nada. Al lado del resto 28 bajo el guarismo siguiente 7, y digo: 4 en 28 está 7 veces; pero como no sobra nada, pondré solo á 6, haré la multiplicacion y resta diciendo: 6 por 6 son 36, de 36 á 37 va 1, y de 37 llevo 3; 6 por 4 son 24, y 3 que llevaba son 27, de 27 á 28 va 1, y de 28 llevo 2, de 2 á 2 no vá nada, y pongo 0 debajo del 2, y como no hay más guarismos que bajar, tengo el cociente 1246.

Cuando el dividendo y el divisor, ó sólo el divisor, acaban en ceros, se abrevia la division, pues en el primer caso se borran en los dos tantos ceros como hay en el que tiene ménos, y se hace la division con lo que queda; y en el segundo se separan á la derecha del dividendo tantos guarismos, como ceros hay al fin del divisor, se hace la division de lo que queda á la izquierda, y al lado del resto, si queda, se baja todo lo separado, y se tiene el resto total.

Así es, que si hubiera que dividir 3600 por 900, estaba reducida la operacion á dividir 36 por 9, lo que dá 4 al cociente.

La razon de esto es, que 3600 expresa *treinta y seis centenas* y 900 expresa *nueve centenas*; y como el divisor 9 estará contenido en el dividendo 36 el mismo número de veces, ya sea que este número exprese unidades, decenas, centenas, millares, etc., resulta que por este medio se halla el cociente con más sencillez y con igual exactitud.

Si el dividendo hubiese sido 3647 y el divisor el mismo 900, entonces podríamos descomponer al 3647 en 3600+47; y de dividir 3600 por 900 resulta 4, y además queda el residuo 47.

Tambien se abrevia la division cuando el divisor y el cociente tienen muchas cifras, pues en ese caso se forman aparte los productos del divisor por los nueve números de una cifra, con lo cual se tienen ya los productos del divisor por los cocientes parciales, se hallan estos con prontitud y se convierte la division en una série de sustracciones.

Productos correlativos del divisor.				
			12345,6,7,8,9,	1874
			11244	65878
			1101 6	
1874	1	*El primero*	937 0	
3748	2	*sumado*	1646 7	
5622	3	*con cada*	1499 2	
7496	4	*uno de*	1475 8	
9370	5	*ellos*	1311 8	
11244	6		1640 9	
13118	7	*produce*	1499 2	
14992	8	*el*		
16866	9	*siguiente.*	1417	

Ejemplo.—Dividir 123456789 entre 1874.

El primer dividendo parcial es 12345, que se halla comprendido entre los productos del divisor por 6 y por 7, luego el primer guarismo del cociente es 6; se coloca este guarismo en su sitio del cociente, y el producto del divisor por 6 se pone debajo del primer dividendo parcial para restarlo; se efectúa esta resta, y agregando al resto 1101 el guarismo siguiente 6, se obtiene el segundo dividendo parcial 11016. Con esto se hace lo mismo, así como con los siguientes, y se obtiene el cociente entero 65878 y el residuo 1417.

La prueba de esta operacion se funda en el principio de que el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor; por tanto, la division estará bien hecha cuando multiplicando el cociente por el divisor, el producto sea igual al dividendo. Si la division hubiera sido inexacta, al anterior producto se le agregaría el resíduo.

Propiedades de los números.

29. Nociones preliminares.—Se dice que un número es *múltiplo* (1) de otro ó *divisible* por él, cuando le contiene exactamente cierto número de veces.

(1) De la palabra latina *múltiplus*, multiplicado, reiterado; compuesta de *multus*, mucho, y *plico*, plegar.

Así, por ejemplo, 30 es múltiplo de 2, de 3, de 5, de 6, de 10 y de 15.

Un número se llama *divisor*, *factor*, *parte alícuota* (1) ó *submúltiplo* (2) de otro, cuando está contenido en él exactamente cierto número veces.

Así, 2 y 5 son divisores, factores, partes alícuotas ó submúltiplos de 10.

Para simplificar el discurso haremos alguna vez uso de letras para representar números cualesquiera. En este caso para indicar que los números representados por letras están multiplicados no hay más que juntarlas sin interposicion de signo alguno.

Así, abc quiere decir que el número a se multiplique por el número b y el producto de ambos por c. La cantidad $a : b \times c$ significa que el número a se parta por el número b, y que el cociente se multiplique por el número c. Para indicar que a se divida por el producto $b \times c$, se escribirá $a : (b \times c)$.

Para indicar que un número compuesto de otros varios, unidos por medio de los signos + y —, se ha de someter á una de las cuatro operaciones, se escribe dicho número dentro de un paréntesis.

Así, para indicar que el número $a+b-c$ se ha de multiplicar por el número d, ó por el número $d-e$, se escribirá $(a+b-c)\,d$, ó $(a+b-c)\,(d-e)$; teniendo en cuenta que en este caso la falta de todo signo entre los dos números es el signo de la multiplicacion y no el paréntesis.

Para indicar que el número $20-7$ se ha de multiplicar por el número 9, ó por el número $9-5+8$, se escribirá $(20-7)\times 9$, ó $(20-7)\times(9-5+8)$.

30. Producto de varios factores enteros.—Para multiplicar por un número una suma indicada, se multiplican todos los sumandos por dicho número, y se suman todos los productos parciales.

Así, si el multiplicando es $3+5+7$ y el multiplicador 6, tendremos:

$$(3+5+7)\times 6 = 3\times 6 \times 5 \times 6 + 7 \times 6.$$

Para multiplicar por un número una diferencia in-

---

(1) De la palabra latina *aliquoties*, algunas veces, por estar contenido varias veces en el otro.

(2) De las dos palabras latinas *sub*, debajo y *múltiplus*, múltiplo.

dicada, se multiplica el minuendo y el sustraendo por dicho número, y se restan los dos productos parciales.

Así, si el multiplicando es $9-7$ y el multiplicador 3, digo que

$$(9-7)\times3=9\times3-7\times3.$$

Tanto en este caso como en el anterior conviene á veces escribir los segundos miembros (1) en lugar de los primeros, lo cual se llama *separar un factor comun*. Para esto no hay más que escribir dentro de un paréntesis los multiplicandos parciales, y fuera del paréntesis el factor comun.

Así, si en la cantidad $3\times2+7\times2-2$ queremos separar el factor comun 2, se pondrá $(3+7-1)\times2$:

El valor del producto de varios enteros es independiente del órden de colocacion de los factores.

De esto se infiere: 1.° Que si uno de los factores de un producto indicado se multiplica por un entero, el producto queda multiplicado por el mismo número.

Luego para multiplicar por un entero un producto indicado, basta multiplicar uno cualquiera de sus factores por dicho número.

2.° Si uno de los factores de un producto indicado se divide por un divisor suyo, el producto queda dividido por el mismo divisor.

Luego para dividir un producto indicado por un divisor de cualquiera de sus factores, basta dividir este factor por dicho divisor; y tambien para dividir un producto indicado por uno de sus factores, basta suprimir este factor ó reemplazarle por la unidad.

31. POTENCIAS DE LOS NÚMEROS ENTEROS.—*Potencia* (2) de un número es otro número igual á un producto de varios factores iguales al primero.

---

(1) En toda expresion de la igualdad de dos cantidades, llamada ecuacion, se llama *primer miembro* lo que se escribe á la izquierda del signo $=$, y *segundo miembro* lo que se escribe á la derecha del mismo.

(2) De la palabra latina *potencia*, poder, poderío, autoridad, fuerza.

Así, 36 es una potencia de 6, porque es igual á 6×6.

El modo primitivo de la generacion de potencias es la multiplicacion sucesiva por un mismo factor, y consiste en que si una potencia de un número se multiplica por este mismo número resulta la potencia siguiente.

De aquí se infiere que todo número tiene una série ilimitada de potencias; y que cada una de ellas está determinada por dicho número y por las veces que éste se toma como factor.

Las diversas potencias de un mismo número se ordenan por *grados*, y se indican por medio de *exponentes*.

Grado (1) de una potencia es el número *ordinal* de los factores iguales que la producen.

En el ejemplo anterior 36 es la *segunda* potencia de 6.

Exponente (2) de una potencia es el número *cardinal* de su grado.

En el caso citado el exponente es *dos*.

Para indicar abreviadamente la potencia de un número, se escribe este y á su lado derecho en la parte superior se pone el exponente de la potencia.

Así, la segunda potencia de 6 se escribirá 6^2 y se leerá 6 *elevado á dos*.

Todas las potencias de 1 son iguales á 1; y la potencia de primer grado de cualquier número es el número mismo.

La *segunda* y *tercera potencia* de un número se llaman respectivamente *cuadrado* y *cubo*, porque en Geometría la medida del *cuadrado* se obtiene por medio del *producto de dos fractores iguales* y la del *cubo* por medio de *tres factores iguales*.

32. Divisibilidad de los números. — *Teorema.* Todo divisor de varios números es tambien divisor de su suma.

Sean, por ejemplo, los números 24, 40 y 56, divisibles todos por 8; digo que 8, es divisor de la suma $24+40+56$.

En efecto, $24=3\times8$, $40=5\times8$ y $56=7\times8$;

(1) Del nombre latino *gradus*, paso, escalon, peldaño, grada.

(2) Del verbo latino *expono*, poner á la vista, porque indica el grado de la potencia.

luego $24+40+56=3\times8+5\times8+7\times8;$

separando luego en el segundo miembro el factor comun 8, tendremos;

$$24+40+56=(3+5+7)\times8;$$

lo cual quiere decir que la suma $24+40+56$ contiene exactameute al 8 $3+5+7$ veces; luego 8 es divisor de dicha suma.

Corolario.—Todo número que divide á otro es divisor de cualquiera de sus múltiplos.

33. Teorema.—*Si un número es divisor de otros dos, es tambien divisor de su diferencia.*

34. Teorema.—*El resíduo de la division de dos números no varia por añadir ó quitar al dividendo un múltiplo del divisor.*

En efecto, el resíduo de una division puede obtenerse restando el divisor del dividendo cuantas veces sea posible; y es evidente que no variará porque se añada ó se quite al dividendo una ó muchas veces el divisor.

35. Teorema.—*El resíduo de la division de un número por 2 ó por 5 es igual al resíduo de la division de la cifra de sus unidades por 2 ó por 5.*

Observo primeramente que 10 es divisible por 2 y por 5; luego todo múltiplo de 10 es divisible por 2 y por 5. Esto supuesto, tomemos un número cualquiera, 4639, el cual se puede escribir: $4630+9$; ahora bien, como 4630 es un múltiplo de 2 y de 5, se puede restar del número 4639 sin variar el resíduo de la division de este número por 2 y por 5; luego 4639 y 9 dan el mismo resíduo cuando se los divide por 2 ó por 5.

Corolario I. Para que un número sea divisible por 2 es necesario y suficiente que su última cifra sea 0 ó par (2, 4, 6 ú 8).

Se dice que un número es *par*, cuando es divisible por 2, é *impar* en el caso contrario.

Corolario II. Para que un número sea divisible por 5 es necesario y suficiente que su última cifra sea 0 ó 5.

Escolio. Haciendo notar que $100=4\times25$ se demostraría igualmente que el resíduo de la division de un número por 4 ó por 25 es igual al resto de la division por 4 ó por 25 del número formado por las dos últimas cifras de la derecha.

Corolario I. Todo número, cuyas dos primeras cifras de la derecha sean ceros ó expresen un múltiplo de 4, es divisible por 4.

Corolario II. Todo número, cuyas dos primeras cifras de la derecha sean ceros ó expresen un múltiplo de 25, es divisible por 25.

36. Teorema.—*Todo número entero es igual á un múltiplo de 9, más la suma de los valores absolutos de sus cifras.*

1.° Consideremos primeramente la unidad seguida de un número cualquiera de ceros, por ejemplo, 100000; tendremos:

$$100000=99999+1;$$

ahora bien, 99999 es evidentemente un múltiplo de 9; luego *la unidad seguida de un número cualquiera de ceros es igual á un múltiplo de 9 más 1.*

2.° Tomemos una cifra significativa seguida de ceros, por ejemplo, 40000; tenemos

$$10000=m. \text{ de } 9+1;$$

multipliquemos los dos miembros de esta igualdad por 4, y tendremos

$$40000=m. \text{ de } 9+4;$$

luego *toda cifra significativa seguida de ceros es un múltiplo de 9 más dicha cifra.*

3.° Por último, tomemos un número cualquiera, por ejemplo 52837 tendremos:

$$\begin{aligned} 50000&=m. \text{ de } 9+5\\ 2000&=m \text{ de } 9+2\\ 800&=m. \text{ de } 9+8\\ 30&=m. \text{ de } 9+3\\ 7&=\phantom{m. \text{ de } 9+{}}7 \end{aligned}$$

Sumemos estas igualdades y tendremos:

$$52837=m. \text{ de } 9+5+2+8+3+7.$$

Corolario. Todo número es un múltiplo de 3, más la suma de sus cifras significativas.

Porque siendo 9 divisible por 3, todo múltiplo de 9 es múltiplo de 3; tendremos, pues:

$$52837=m, \text{ de } 3+5+2+8+3+7$$

De este corolario y del teorema anterior resulta que el resíduo de la division de un número por 9 ó por 3 es igual al resíduo de la division por 9 ó por 3 de la suma de los valores absolutos de sus cifras significativas.

Y por tanto, *para que un número sea divisible por 9 ó por 3 es necesario y suficiente que la suma de los valores absolutos de sus cifras sea divisible respectivamente por 9 ó por 3.*

Números primos.

37. Definicion.—Se llama número *primo* (1) ó *simple* el número que no es divisible sino por sí mismo y por la unidad.

Primos son: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

El entero que no es primo se llama *compuesto*.

Compuestos son: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, etc.

38. Regla para averiguar si un número dado es primo ó compuesto.—*Se le divide sucesivamente por los primos 2, 3, 5, 7, etc., y si se llega, sin haber obtenido cociente exacto, á un cociente entero menor que el divisor, el número será primo.*

39. Números primos entre sí.—Se dice que dos números son *primos entre sí* ó *primo el uno con el otro*, cuando no tienen más divisor comun que la unidad.

Los números 8 y 15 son primos entre sí.

Varios números son *primos entre sí* cuando no tienen más divisor comun que la unidad.

Los números 8, 15, 9 y 6, que no tiene más divisor comun que la unidad, son números primos entre sí.

Varios números son *primos entre sí dos á dos*, cuando cada uno de dichos números es primo con cada uno de los demás.

---

(1) Del adjetivo latino *primus*, primero

Así, los números 4, 9, 17, 25, cada uno de los cuales es primo con cada uno de los demás, son primos entre sí dos á dos; pero los números 8, 15, 9 y 6, primos entre sí, no son primos entre sí dos á dos, pues el 8 no es primo con el 6, ni el 15 con el 9, ni con el 6.

Dos números, que se diferencian en una unidad, son primos entre sí.

Máximo comun divisor.

40. Definicion.—Se llama *divisor comun* de varios números un número que los divide á todos exactamente; el mayor de estos divisores comunes se llama *máximo* (1) *comun divisor*; y que se designa abreviadamente con las iniciales *m. c. d.*

Así, 2, 5 y 10 son divisores comunes de 20 y 30; y su *m. c. d.* es 10.

41. Teorema.—*Todo divisor comun del dividendo y del divisor de una division inexacta es divisor del resíduo; y* vice-versa, *todo divisor comun del divisor y del resíduo es divisor del dividendo.*

Sea el dividendo 96 y el divisor 42; el cociente entero es 2 y el resíduo 12: digo que todo divisor de 96 y de 42 es divisor de 12; y que todo divisor de 42 y de 12 es divisor de 92.

En efecto, $96=42\times2+12$; todo divisor de 96 y de 42 es divisor de 42×2 múltiplo de 42; luego tambien será divisor de 12, diferencia entre 96 y 42×2. Todo divisor de 42 y de 12 es divisor de 42×2; luego tambien es divisor de 96, suma de 42×2 y de 12.

Corolario. *El máximo comun divisor de dos números es igual al m. c. d. del menor de los dos números y del resíduo de su division.*

42. Problema.—*Hallar el m. c. d. de dos números.*

Supongamos que deseamos hallar el m. c. d. de 426 y 96.

Si 96 dividiese exactamente á 426, sería el m. c. d.; hago la division, y resulta un resíduo, que es 42. Luego el m. c. d. que se busca es igual al de 96 y de 42.

Divido tambien 96 por 42; y obtengo un resíduo 12; luego la cuestion queda reducida á buscar el m. c. d. de 42 y de 12.

Divido despues á 42 por 12, lo cual da por resíduo 6; por consiguiente el m. c. d. buscado es igual al de 12 y de 6.

Por último, 12 es divisible por 6; luego 6 es el m. c. d. pedido.

(1) Del adjetivo latino *maximus*, el mayor.

43. Regla.—*Para hallar el m. c. d. de dos números, se divide el mayor por el menor, despues el menor por el resíduo obtenido, despues el primer resíduo por el segundo, y asi sucesivamente hasta que se llegue á una division exacta, y el divisor de esta última division es el m. c. d. pedido.*

Las divisiones sucesivas se disponen del siguiente modo:

		4	2	3	2	. . Cocientes.
Dividendo. . .	426	96	42	12	6	. . Divisores.
	42	12	6	0		. . Residuos.

44. Máximo comun divisor de varios números.—Para hallar el m. c. d. de varios números se halla el m. c. d. de dos de ellos, despues se halla el m. c. d. de éste y el de otro de los números dados, y se continúa buscando el m. c. d. del último hallado y el de otro de los números restantes hasta haber operado con todos los números propuestos: el último m. c. d. es el pedido.

Factores simples y compuestos.

45. Descomposicion de un número en sus factores simples.—*Descomponer un número en sus factores simples* es transformar un número en un producto de factores simples.

Sea el número 360: este número es divisible por 2 y el cociente es 180; luego $360=2\times180$. El número 180 es divisible por 2 y el cociente es 90; luego $180=2\times90$; por consiguiente $360=2\times2\times90$. El número 90 es divisible por 2, y el cociente es 45, luego $90=2\times45$, y por consiguiente $360=2\times2\times2\times45$. El número 45 es divisible por 3, el cociente es 15, luego $45=3\times15$, y por consiguiente $360=2\times2\times2\times3\times15$. El número 15 es tambien divisible por 3, el cociente es 5, luego $15=3\times5$, y por consiguiente $360=2\times2\times2\times3\times3\times5$. Como 5 es primo, no puede descomponerse. Queda, pues, descompuesto el número 360 en sus factores simples.

46. Regla para descomponer un número en sus factores simples.—*Se dividen dicho número y los cocientes sucesivos por su menor divisor simple, diferente en la unidad, hasta llegar al cociente 1. Los diferentes divisores hallados son los factores simples del número, el cual es igual al producto de todos ellos.*

La operacion se dispone en la práctica del modo adjunto; escribiendo el número dado y debajo los cocientes sucesivos, separados con una raya de sus respectivos divisores, que se van escribiendo á su derecha; y estos son los factores simples del número dado.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Luego $360=2\times2\times2\times3\times3\times5$ ó

$$360=2^3\times3^2\times5.$$

47. Determinar todos los factores ó sea todos los divisores de un número.—Si este número se descompone en sus factores primos, la cuestion se reduce á determinar los otros factores del número dado, los cuales han de ser necesariamente números compuestos de dichos factores primos, todos ellos quedarán determinados, formando todos los productos posibles con dichos factores primos; y las potencias sucesivas de cada factor primo darán todos los factores compuestos de este cada factor primo.

48. Regla para hallar todos los factores ó divisores de un número.—*Descompóngase el número en sus factores primos, escríbanse la unidad y las potencias sucesivas del primer factor simple, y multiplíquense estos números por la potencias sucesivas del segundo factor simple. Multiplíquense todos los productos obtenidos por las potencias sucesivas del tercer factor simple; y continúense del mismo modo hasta que se empleen las últimas potencias sucesivas del último factor simple: los productos hallados de este modo serán todas los factores ó divisores del número.*

Ejemplo. Hallar todos los factores del número 360. Descompuesto en sus factores simples, resulta $360\times2^3\times3^2\times5$ y la operacion se dispone y ejecuta como se vé á continuacion:

360	2	Potencias de 2 (primer factor primo)...	1, 2, 4, 8
180	2	Sus productos por 3 (segundo factor primo).....	3, 6, 12, 24
90	2	Sus productos por 9 (segunda potencia de 3....	9, 18, 36, 72
45	3		
15	3	Productos de todos los anteriores por 5 (tercer factor primo). .	5, 10, 20, 40
5	5		15, 30, 60, 120
1			45, 90, 180, 360

Mínimo comun múltiplo.

49. DEFINICION.—Se dá el nombre de *mínimo* (1) *comun múltiplo* de varios números al *menor* número que es divisible por todos ellos. Tambien se llama múltiplo más simple y se expresa abreviadamente m. c. m.

Así, el m. c. m. de 3 y de 4 es 12.

50. DETERMINACION DEL MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS.—*Se descompone cada uno en sus factores primos, y se formará el producto de todos los distintos factores primos que se hayan obtenido, dando á cada uno de ellos el mayor exponente de que está afectado en los números propuestos.*

Ejemplos: Para hallar el m c. m. de 90, 126 y 756, se verá desde luego que $90=2\times3^2\times5$ $126=2\times3^2\times7$ y $756=2^2\times3^3\times7$ y por tanto que el m. c. m. de 90, 126 y 756 será:

$$2^2\times3^3\times5\times7=3780.$$

Quebrados.

51. DEFINICIONES.—*Quebrado* ó *fraccion* es una parte de la unidad, ó la reunion de varias partes de la unidad iguales entre sí.

Para expresarlos se emplean dos números separados por una línea horizontal: el inferior se llama *denominador* (2), é indica en cuántas partes iguales está

(1) De la palabra latina *minimus*, el menor.

(2) De la latina *denomino*, nombrar; porque da nombre al quebrado.

dividida la unidad; el superior se llama *numerador* (1), y designa de cuántas partes de la unidad se compone la fraccion. El numerador y denominador juntos se llaman *términos* del quebrado.

Para leer un quebrado se enuncia primero el numerador, y luego el denominador, añadiéndole á continuacion la terminacion *avos*. Exceptúanse los quebrados cuyo denominador es 2, 3, 4,.... hasta 10, los cuales en lugar de enunciar el denominado, se dice medio, tercio, cuarto,... hasta décimo. Así $\frac{3}{5}$ se lee *tres quintos*, y $\frac{8}{15}$ se lee *ocho quinceavos.*

Un quebrado es el cociente de su numerador dividido por su denominador. De lo cual resulta que cuando la division de dos números enteros deja un resíduo, se obtiene el cociente exacto añadiendo al cociente entero un quebrado, cuyo numerador sea el resíduo, y cuyo denominador sea el divisor.

De esto resulta tambien que un quebrado es mayor ó menor que la unidad, segun que el numerador es mayor ó menor que el denominador.

Todo quebrado, cuyo numerador y denominador son iguales, es igual á la unidad.

Para extraer los enteros contenidos en un quebrado mayor que la unidad, se divide el numerador por el denominador. Sea el quebrado $\frac{47}{9}$, tendremos:

$$\frac{47}{9}=47 : 9=5+\frac{2}{9}.$$

52. Propiedades de los quebrados.—Las principales son las siguientes:

(1) De la latina *número*, contar; porque cuenta las partes de la unidad.

1.ª Multiplicando el numerador de un quebrado por un número entero, queda el quebrado multiplicado por dicho número.

2.ª Dividiendo el numerador de un quebrado por un entero, queda dividido el quebrado por dicho número.

3.ª Multiplicando el denominador de un quebrado por un número entero, el quebrado queda dividido por este mismo número.

4.ª Dividiendo el denominador de un quebrado por un número entero, queda el quebrado multiplicado por dicho número.

5.ª Multiplicando los dos términos de un quebrado por un mismo número, no se altera el valor del quebrado.

En este principio se funda la reduccion de quebrados á un comun denominador; *lo cual se hace multiplicando los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás.*

Ejemplo: Sean los quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{7}$; los cuales tomarán la forma $\frac{3\times6\times7}{5\times6\times7}$, $\frac{7\times5\times7}{6\times5\times7}$, $\frac{8\times5\times6}{7\times5\times6}$, ó hechas las multiplicaciones $\frac{126}{210}$, $\frac{245}{210}$, $\frac{240}{210}$.

6.ª Dividiendo los dos términos de un quebrado por un mismo número, no varía de valor.

En este principio se funda la simplificacion de los quebrados, *la cual se hace dividiendo sucesivamente los dos términos de cada quebrado por su máximo comun divisor.*

Ejemplo: Sea el quebrado $\frac{12}{30}$: el máximo comun divisor de 12 y 30 es 6, los cocientes 12 y 30 por 6, son respectivamente 2 y 5, luego el quebrado propuesto reducido á su más simple expresion es $\frac{2}{5}$.

Se llama quebrado irreducible aquel cuyos términos son primos entre sí.

53. Números mixtos. *Para reducir un número mixto á quebrado de la especie que le acompaña, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, á este producto se añade el numerador, y á la suma se le pone por denominador el del quebrado.*

Ejemplo: Sea el número $8+\frac{5}{11}$,

tendremos $8+\frac{5}{11}=\frac{8\times 11+5}{11}=\frac{93}{11}$.

54. Operaciones de los quebrados. *Para sumar varios quebrados que tienen el mismo denominador, se suman los numeradores, y á esta suma se pone por denominador el mismo de los quebrados propuestos.*

Ejemplo: $\frac{7}{8}+\frac{9}{8}+\frac{3}{8}+\frac{6}{8}=\frac{7+9+3+6}{8}=\frac{25}{8}$.

Si tuvieran diversos denominadores, se reducen á un comun denominador, y entonces se efectúa la suma.

Para restar una fraccion de otra, cuando tienen un denominador comun, se toma la diferencia de los numeradores, y se da á esta diferencia el denominador comun.

Ejemplo: $\frac{11}{15}-\frac{7}{15}=\frac{11-7}{15}=\frac{4}{15}$.

Si no tienen el mismo denominador, se reducen á un comun denominador, lo cual reduce la operacion al caso precedente.

Para multiplicar una fraccion por un entero, se multiplica su numerador por este número, conservando el denominador; ó bien se divide su denominador por el entero, conservando el numerador.

EJEMPLOS:

1.° $\frac{4}{5}\times 7=\frac{4\times 7}{5}=\frac{28}{5}$. 2.° $\frac{4}{15}\times 3=\frac{4}{15:3}=\frac{4}{5}$.

Para multiplicar dos quebrados uno por otro, se multiplican los numeradores entre sí, y tambien los denominadores.

EJEMPLO: $\frac{4}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{4\times 5}{7\times 6}=\frac{20}{42}$.

Para dividir una fraccion por un entero, se multiplica el denominador por el número entero, conservando el numerador; ó bien se divide el numerador por el entero, conservando el denominador.

EJEMPLOS:

1.° $\frac{4}{9}:5=\frac{4}{9\times 5}=\frac{4}{45}$. 2.° $\frac{6}{7}:3=\frac{6:3}{7}=\frac{2}{7}$.

Para dividir una fraccion por otra, se multiplican la fraccion dividendo por la fraccion divisor invertida.

EJEMPLO: $\frac{3}{8}:\frac{7}{9}=\frac{3\times 9}{8\times 7}=\frac{27}{56}$.

Para dividir un entero por un quebrado, es preciso mulplicar dicho número entero por la fraccion divisor invertida.

EJEMPLO: $5:\frac{4}{9}=\frac{5\times 9}{4}=\frac{45}{4}$.

Cuando hay que efectuar estas operaciones con números mixtos, se reducen estos á la fraccion correspondiente.

Fracciones decimales.

55. DEFINICIONES. Llámanse *quebrados decimales* ó simplemente *decimales*, aquellos cuyo denominador es la unidad seguida de ceros.

Las partes que contiene el quebrado se llaman respectivamente *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, *diezmilésimas*, etc., segun que el denominador es 10, 100, 1000, 10000, etc.

Como en el sistema ordinário de numeracion cada cifra representa unidades diez veces menores que las que indica la cifra inmediata de la izquierda, se infiere que si se continúa este sistema hácia la derecha de las unidades simples, las cifras 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª, etc., representarán respectivamente décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, etc.; de lo cual resulta que cualquiera fraccion decimal se puede escribir sin denominador, poniendo sólo el numerador y separando de la derecha con una coma tantas cifras como ceros tiene el denominador. Para leer una cantidad decimal escrita sin denominador, se lee primero la parte entera, y despues la parte decimal, como si fuera una cantidad entera, indicando que son unidades del órden de su última cifra. Así, $\frac{8715}{1000}$ se escribe 8,715, y se lee 8 enteros, 715 milésimas.

56. Propiedades de las fracciones decimales. 1.ª Una fraccion decimal no se altera añadiéndole ó quitándole uno ó más ceros á la derecha.

2.ª Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma tantos lugares á la derecha, cuantos sean los ceros que acompañen á la unidad.

3.ª Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma tantos lugares á la izquierda, cuantos sean los ceros que acompañen á la unidad.

57. Operaciones con los decimales.—*Para sumar cantidades decimales se colocan unas debajo de otras, de modo que las cifras del mismo órden se correspondan, lo* *cual se consigue colocando las comas en columna, y en seguida se suman como si fueran enteros, separando despues de la suma tantas cifras decimales cuantas se hallen en el sumando que tenga más.*

Ejemplo. Sumar los números 9,489; 7,9 y 0,0497.

Sumandos.	9,489
	7,9
	0,0497
Suma.. . .	17,4387

Para restar cantidades decimales se colocan de modo que se correspondan las comas; en seguida se hace igual el número de decimales de ámbos, añadiendo ceros al que tenga ménos, y despues se restan como si fueran enteros, colocando en la diferencia la coma, de modo que se corresponda con la de los números propuestos.

Ejemplo. Restar 4,052 de 13,04.

Minuendo. .	13,040
Sustraendo.	4,052
Diferencia..	8,988

Para multiplicar decimales, se prescinde de la coma y se multiplican como enteros, separando despues de la derecha del producto tantas cifras como decimales tengan los dos factores juntos.

Ejemplo. Multiplicar 4,27 por 503.

Multiplicando. . .	4,27
Multiplicador. . .	5 03
Productos parciales.	12 81
	2135
Producto total. .	2147,81

En la division de cantidades decimales pueden ocurrir dos casos:

1.° *Para dividir una cantidad decimal por una en-*

tera, se dividen como si fueran enteros, y de la derecha del cociente se separan con una coma tantas cifras como tenga el dividendo.

Ejemplo: Dividir 3,1968 por 74.

Dividendo 3,1968	74	Divisor.
236	0,0432	Cociente.
148		
00		

2.° *Para dividir una cantidad entera ó decimal por otra decimal, se multiplican dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor; lo cual no altera el cociente, y reduce este caso á la division de enteros ó al caso anterior.*

Ejemplo. Dividir 1 por 0,0625.

Dividendo	10000	0,0625	Divisor.
	3750	16	Cociente.
	000		

58. Reduccion de fracciones ordinarias á fracciones decimales. *Para efectuar esta operacion se imagina el numerador seguido de un número indefinido de ceros, se efectúa la division del numerador, así preparado, por el denominador de la fraccion propuesta, y hácia la derecha del cociente se separan tantos decimales como ceros se hayan empleado.*

Ejemplos: Hallar las fracciones decimales equivalentes á las ordinarias $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$.

1.° 50	8	2.° 20	3	3.° 50	6
20	0,625	20	0,666...	20	0,833
40		20		20	
0					

Luego $\frac{5}{8}=0,625$, $\frac{2}{3}=0,666....$, $\frac{5}{6}=0,833....$

En el primer ejemplo se ha llegado á un cociente exacto, y la fraccion se llama *exacta*; lo cual no ha sucedido en el segundo y tercer ejemplo en que ciertas cifras, llamadas *períodos* se repiten constantemente, por lo cual se llaman generalmente *periódicas,* pero con la diferencia de que en el segundo ejemplo el período empieza desde las décimas, por lo cual se llama *periódica pura*, al paso que en el tercer ejemplo, el período no empieza en las décimas, por lo cual se llama periódica *mixta.*

59. **Relaciones entre las fracciones decimales y sus generatrices.**—1.ª Cuando el denominador de una fraccion ordinaria irreducible no tenga más factores que 2 ó 5, ó solo uno de ellos, la fraccion decimal equivalente será *exacta.*

2.ª Cuando el denominador no contenga el factor 2 ni el factor 5, la decimal equivalente será *periódica pura.*

3.ª Cuando el denominador sea múltiplo de 2 ó 5 y de algun otro, primo con ellos, la fraccion decimal equivalente será *periódica mixta.*

60. **Reduccion de fracciones decimales á ordinarias.** *Para efectuar esta operacion, cuando la fraccion tiene un número limitado de cifras, se toma por numerador la parte decimal, haciendo abstraccion de la coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como decimales haya en la fraccion.*

Ejemplo: $0,625=\frac{625}{1000}=\frac{5}{8}.$

Si la fraccion decimal fuese periódica pura, se escribe por numerador el período y por denominador tantos nueves como cifras tenga el período.

Ejemplo: $0,666\ldots=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$

Si la fraccion decimal fuese periódica mixta, se toma por numerador la parte no periódica seguida del primer periodo, ménos la parte no periódica; y por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras tenga el periodo, y de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

EJEMPLO: $0{,}833\ldots\ldots=\frac{83-8}{90}=\frac{75}{90}=\frac{5}{6}$.

Elevacion á potencias.

61. CUADRADOS Y CUBOS DE LOS NUEVE PRIMEROS NÚMEROS. Son los siguientes:

Números...	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cuadrados.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubos.......	1	8	27	64	125	216	343	512	729

62. CUADRADO DE UN NÚMERO COMPUESTO DE DECENAS Y UNIDADES. Consta de tres partes:

1.ª *Cuadrado de decenas.*

2.ª *Duplo del producto de decenas por unidades.*

3.ª *Cuadrado de unidades.*

EJEMPLO:—El cuadrado de 25, puesto que este número es igual á 20+5, se compondrá:

1.º Del cuadrado de decenas..	$20\times20=400$
2.º Del duplo de decenas por unidades	$2\times20\times\ 5=200$
3.º Del cuadrado de unidades.	$5\times\ 5=\ 25$
TOTAL.	625

63. POTENCIAS DE LOS QUEBRADOS. *Para elevar un quebrado á una potencia se elevan á la misma potencia el numerador y el denominador.*

EJEMPLO: $\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{7^2}{12^2}=\frac{49}{144}$.

Extraccion de raíces.

64. Definiciones. Se llama *raíz* (1) todo número que multiplicado por sí mismo cierto número de veces da otro número que se llama potencia.

Se dice que un número es respecto de otro, la *raíz* 2.ª ó *cuadrada*, la *raíz* 3.ª ó *cúbica*, la *raíz* 4.ª, etc., cuando el primer número figura 2, 3, 4..... veces como factor para dar este otro número.

Así, 7 es la raíz cuadrada de 49, porque $7\times7=49$; 10 es la raíz cúbica de 1000, porque $10\times10\times10=1000$.

Las raíces se llaman *conmensurables* (2) ó *inconmensurables* (3), segun que pueden expresarse ó no por un número enteramente exacto; así la raíz cuadrada de 4 es conmensurable, porque se expresa exactamente por el número 2; en tanto que la raíz cuadrada de 5 es inconmensurable, pues no existe número alguno, que, multiplicado por sí mismo, dé exactamente el número 5.

La *extraccion de raíces* de los números es una de las operaciones fundamentales de la aritmética. Las raíces se designan con el signo $\sqrt{\ }$, que se llama *radical*, poniendo en su parte superior el número que indica el grado de la raíz, el cual se llama *índice* (4); por ejemplo, $\sqrt[3]{1000}$, designa la raíz tercera ó cúbica de 1000. Cuando se trata de raíces segundas ó cuadradas, no se escribe el índice, el cual se sobreentiende, de suerte que $\sqrt{21}$, quiere decir raíz cuadrada de 21.

65. Extraccion de la raíz cuadrada de un número menor que ciento. *Se buscará en la fila que contiene los cuadrados de los nueve primeros números el mayor cua-*

(1) Del nombre latino *radix*, raíz.

(2) De las palabras latinas *cum*, con y *mensura*, medida, esto es, cantidades que pueden ser medidas por una *medida comun*.

(3) De las palabras latinas *in* no, *cum*, con y *mensura*, medida, esto es, cantidades que *no* tienen una *medida comun* con la unidad.

(4) De la latina *index*, indicador.

drado contenido en el número dado, y la raíz de este mayor cuadrado será la raíz pedida en ménos de una unidad. Así la raíz cuadrada de 72 es 8, porque el mayor cuadrado contenido en 72 es 64, que tiene 8 por raíz: esta raíz es exacta en ménos de una unidad, porque estando 72 comprendido entre 64 y 81, su raíz estará comprendida entre 8 y 9, y difiere por tanto de estos números en ménos de lo que ellos difieren entre sí, es decir, en ménos de una unidad. Esta cantidad en que difiere 8 de la raíz cuadrada de 72 no puede ser expresada exactamente en número, y por eso se dice que la raíz cuadrada de 72 es *irracional* (1) é *inconmensurable.*

66. Extraccion de la raíz cuadrada de un número mayor que ciento. *Para esto se divide el número en secciones de dos cifras principiando por la derecha. Se extrae la raíz entera de la primera seccion de la izquierda, y se tendrá la primera cifra de la raíz; despues se resta de la primera seccion el cuadrado de esta cifra.*

A la derecha del resíduo, se coloca la segunda seccion, y se dividen las decenas de este número por el duplo de la cifra hallada; se escribe el cociente á la derecha del divisor, y se multiplica este número por el cociente; si el producto puede restarse del número total obtenido al bajar la segunda seccion, el cociente hallado es la segunda cifra de la raíz, y el resto de esta sustraccion es el resto que servirá para continuar la operacion. Si la sustraccion indicada no es posible, se disminuirá el cociente hallado sucesivamente en una, dos, tres..... unidades hasta que la comprobacion salga bien.

A la derecha del resto se baja la seccion siguiente, y

(1) De las latinas *in*, no, y *ratio*, razon, porque no puede ser expresada exactamente por números enteros, ni por fracciones.

se dividen las decenas del número así obtenido por el duplo de la parte hallada de la raíz; el cociente es la tercera cifra de la raíz ó una cifra excesivamente mayor; se comprueba como anteriormente.

Se continúa del mismo modo hasta que se hayan bajado unas en pos de otras todas las secciones del número dado.

Ejemplo: Hallar la raíz cuadrada de 412164:

	$\sqrt{41,21,64}$	642
	36	Comprobacion de la cifra 4
Primer resto	52,1	124
	49,6	4
Segundo resto.. . . .	2 56,4	496
	2 56,4	
Tercero y último resto. . .	0	

Teniendo el número 412164 seis cifras, la parte entera de la raíz tendrá tres cifras que representarán sucesivamente centenas, decenas y unidades. Se divide el número propuesto en tres secciones: se busca el mayor cuadrado contenido en la primera seccion de la izquierda; este cuadrado es 36, cuya raíz es 6; se escribe este 6, y se resta su cuadrado 36 de la seccion 41; obteniendo así un resíduo 5. Se baja al lado de este resíduo la segunda seccion 21; se tiene así un primer resto 521; se pone una coma á la derecha de 52 decenas de 521, y se divide 52 por 12 duplo de la primera cifra 6 obtenida para la raiz; las 4 unidades del cociente expresan la segunda cifra de la raíz ó una cifra demasiado grande, pero nunca una cifra demasiado pequeña. Para comprobar la cifra 4, se la coloca á la derecha del duplo 12 de 6 primera cifra de la raíz, el resultado 124 se multiplica por 4; y el producto 496 se resta del primer resto 521. Así se obtiene el número 25 al lado del cual se baja la tercera seccion 64, lo cual da 2564; se pone una coma á la derecha de 256 y se procede como anteriormente. Así se halla el número 642, que representa exactamente la raíz cuadrada de 412164.

Para extraer la raíz cuadrada de un número decimal se le agrega un cero á la derecha, cuando el número de sus cifras decimales sea impar; prescindiendo de la coma se extrae la raíz cuadrada del número entero que resulte, separando despues, á la derecha de la raíz hallada, con una coma, la mitad del número de decimales contenidos en el número propuesto.

Así la raíz cuadrada de 41, 2164 será 6,42.

67. Raíces inconmensurables. *Para hallar el valor de una raíz cuadrada inconmensurable en ménos de una parte alícuota de la unidad, se multiplica el número por el cuadrado del denominador de dicha parte alícuota, se* *extrae la raíz cuadrada entera del producto, y esta raíz se divide por el mismo denominador.*

Siempre es preferible hallar en quebrados decimales los valores aproximados de las raíces cuadradas inconmensurables. Para esto, se trasforma el número dado en decimal añadiéndole tantas veces dos ceros como decimales se quieren tener en la raíz, se extrae la raíz del número que resulta, y de la derecha de esta raíz se separan tantos decimales como se haya pedido.

Así $\sqrt{2}$ con una cifra decimal es 1,4; con dos cifras decimales 1,41; con tres cifras decimales 1,414.

68. Extraccion de la raíz cuadrada de los quebrados. *Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado se extrae la raíz cuadrada del numerador, y se parte por la raíz cuadrada del denominador.*

Ejemplo: $$\sqrt{\frac{49}{81}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}}=\frac{7}{9}.$$

Proporciones.

69. Razones (1). Se llama *razon* de dos números el cociente de dichos números.

La razon de dos números 8 y 4 se escribe 8 : 4 y se le lee 8 es á 4.

El primer término de la razon se llama *antecedente* (2), y el segundo *consecuente* (3); y como el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente, del mismo modo el antecedente es igual al consecuente multiplicado por la razon.

70. Proporcion (4). Es la igualdad de dos razones.

Para indicar que cuatro números forman proporcion se escribe 24 : 12 : : 16 : 8; y se lee así: 24 es á 12,

(1) De la latina *ratio*, cuenta, cálculo.
(2) De la latina *antecedo*, ir delante, preceder.
(3) De la latina *consequor*, seguir paso á paso.
(4) De las latinas *pro*, segun, y *portio*, parte.

como 16 es á 8; tambien puede escribirse bajo la forma de dos quebrados unidos por el signo igual, del siguiente modo: $\frac{24}{12}=\frac{16}{8}$.

71. Propiedad fundamental de las proporciones. *El producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.*

De aquí se infiere que conocidos tres términos de una proporcion es fácil calcular el cuarto, si es desconocido. En efecto, si el término desconocido es un extremo, basta dividir el producto de los medios por el extremo conocido; y si el término desconocido fuese medio, no se tendrá más que dividir el producto de los extremos por el medio conocido.

Ejemplos:

1.° $4:3::12:x$; $x=\frac{3\times12}{4}=\frac{36}{4}=9$.

2.° $5:8::x:32$ $x=\frac{32\times5}{8}=\frac{160}{8}=20$.

72. Proporcion continua. Se da este nombre á la proporcion cuyos dos términos medios son iguales; á este término medio se le llama *medio proporcional*; y como el cuadrado del medio proporcional es igual al producto de los extremos, resulta que para hallar un medio proporcional entre dos números no hay más que extraer la raíz cuadrada de su producto.

Ejemplo: Hallar un medio proporcional entre 2 y 18.

$$x=\sqrt{2\times18}=\sqrt{36}=6.$$

73. Propiedades de las proporciones.—1.ª Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, hay proporcion entre ellos; siendo extremos de la proporcion los factores de un producto, y medios los factores del otro.

De lo cual se sigue que se pueden operar con los términos de una proporcion todos los cambios que no alteren la igualdad entre el producto de los extremos ó el de los medios. Así se puede invertir el órden de los extremos ó el de los medios, poner los extremos en lugar de los medios y recíprocamente, y tambien multiplicar ó dividir un extremo y un medio por un mismo número.

EJEMPLO:	7	:	4	::	21	:	12
	7	:	21	::	4	:	12
	12	:	4	::	21	:	7
	12	:	21	::	4	:	7
	21	:	12	::	7	:	4
	21	:	7	::	12	:	4
	4	:	7	::	12	:	21
	4	:	12	::	7	:	21

2.ª Si dos proporciones tienen una razon comun, las otras dos razones forman proporcion.

3.ª En toda proporcion la suma ó diferencia de los dos primeros términos es á la suma ó diferencia de los dos últimos, como el primero es al tercero, ó como el segundo es al cuarto.

4.ª En toda proporcion la suma ó diferencia de los antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

5.ª Si se multiplican ó se dividen dos proporciones por órden, esto es, término á término, los productos ó cocientes que se obtengan, formarán proporcion.

6.ª Si los cuatro términos de un proporcion se elevan á una misma potencia, ó si se extrae de ellos la raíz del mismo grado, las cuatro potencias ó las cuatro raíces formarán proporcion.

NÚMEROS CONCRETOS.

GENERALIDADES.

74. Definiciones.—*Número concreto* es el que expresa la especie de unidad á que se refiere. De lo cual resulta que son necesarias tantas unidades concretas como especies distintas de cantidades se consideren; pero como refiriendo á una sola unidad todas las cantidades de la misma especie, podrían resultar números enteros de muchas cifras, y números fraccionarios muy pequeños, contrarios unos y otros á la claridad de la expresion y á la brevedad del cálculo, por eso ha sido conveniente establecer varias unidades concretas de cada especie para tener siempre una magnitud acomodada á cualquier cantidad. El conjunto de estas unidades constituye el sistema de pesas y medidas de cada país.

En España tenemos que estudiar dos sistemas: el de *pesas y medidas de Castilla*, que aún no está completamente abolido, y el *nuevo sistema métrico*, que aún no está completamente adoptado.

75. Sistema de pesas y medidas de Castilla.

Unidades lineales.

1 legua (comun).	=	20000 piés.
1 estadal..	=	12 piés.
1 vara.	=	3 piés.
1 pié.	=	12 pulgadas.
1 pulgada. . . . , ...	=	12 líneas.
1 línea.	=	12 puntos.

Unidades de superficie ó cuadradas.

1 legua cuadrada.=	20000^2=	400000000 piés cuadrados
1 vara cuadrada..=	3^2=	9 piés cuad.
1 pié cuadrado. .=	12^2=	144 pulgadas cuad.
1 fanega de tierra.=		576 estadales cuad.
1 aranzada. . .=		400 estadales cuad.
1 estadal cuadrado=	12^2=	144 piés cuad.

Unidades de volúmen ó cúbicas.

1 vara cúbica. . . .=	3^3=	27 piés cúbicos.
1 pié cúbico. . . . .=	12^3=	1728 pulgadas cúbicas.

Unidades de capacidad.

para áridos.	*para líquidos.*
1 cahiz. .=12 fanegas.	1 moyo. .=16 cántaras.
1 fanega..=12 celemines.	1 cántara..= 8 azumbres.
1 celemin.= 4 cuartillos.	1 azumbre.= 4 cuartillos.

Unidades de peso.

1 quintal.= 4 arrobas.	1 onza.. .=16 adarmes.
1 arroba .=25 libras.	1 adarme..= 3 tomines.
1 libra. .=16 onzas.	1 tomin. =12 granos.

76. Sistema métrico decimal.—La base de este sistema es el *metro* (1), que es la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano que pasa por París.—Los nombres de las unidades lineales y sus valores con respecto al metro son:

Miriámetro (2).	=10000	metros.
Kilómetro (3).	= 1000	id.
Hectómetro (4).	= 100	id.
Decámetro (5).	= 10	id.

(1) De la griega *metron*, medida.
(2) De las griegas *myria*, diez mil, y *metron*, metro.
(3) De las griegas *chilioi*, mil, y *metron*, metro.
(4) De las griegas *hecaton*, ciento, y *metron*, metro.
(5) De las griegas *deca*, diez, y *metron*, metro.

Decímetro (1).	=	0,1 de metro.
Centímetro (2).	=	0,01 id.
Milímetro (3).	=	0,001 Id.

Las principales unidades de superficie ó cuadradas son:

Kilómetro cuadrado. .	=	1000000 metros cuadrados.
Hectárea (4) ó hect. cd.°.	=	10000 id.
Area ó decámetro cuad.	=	100 id.
Decímetro cuad . . .	=	0,01 de met. cuad.
Centímetro cuad . . .	=	0,0001 id.
Milímetro cuad . . .	=	0,000001 id.

La unidad de volúmen es el *metro cúbico* con sus múltiplos y divisores, los cuales están entre sí en la razon del cubo de las respectivas unidades lineales.

La unidad principal de capacidad es el *litro* (5) (decímetro cúbico) cuyo múltiplo más usual es el *hectólitro* =100 litros.

La unidad principal de peso es el *gramo* que es un peso igual al de un centímetro cúbico de agua pura, pesada en el vacío á la temperatura de 4°. Las unidades más usuales son la *tonelada de peso*=1000000 gramos, el *quintal métrico*=100000 gramos, el *kilógramo*=100 gramos, y los divisores del gramo.

La unidad monetaria segun las últimas disposiciones es la *peseta*.

77. Números complejos é incomplejos. — Número incomplejo (6) es todo concreto referido á una sola uni-

(1) De la latina *decima*, la décima parte, y de la griega *metron*, metro.
(2) De la palabra latina *centesima*, la centésima parte, y *metron*, metro.
(3) De la palabra latina *millesima*, milésima parte, y *metron*, metro.
(4) De la palabra griega *hecaton*, ciento, y de la latina *area*, área.
(5) De la palabra griega *litra*, medida para los líquidos.
(6) De las palabras latinas *in*, *no* y *complexus* complejo.

dad, como 7 dias; y *complejo* (1) es la totalidad de varios concretos referidos á unidades diversas de una misma especie, como 25 dias, 6 horas, 12 minutos, 8 segundos.

Para reducir un incomplejo á otro equivalente de órden inferior, se multiplica el número de sus unidades por el número de veces que su unidad contiene á la de dicho órden inferior.

EJEMPLO: Reducir 422 libras á onzas.

422 libras
16 onzas que tiene una libra.
―――
2532
422
―――
6752 onzas.

Para convertir un número incomplejo en otro equivalente de órden superior, se divide el número de sus unidades por el número de veces que su unidad está contenida en dicho órden superior.

EJEMPLO: Reducir 960 horas á dias.

Horas dadas 96,0 | 24 horas que tiene el dia.
0 0 | 40 dias.

Para reducir un número complejo á incomplejo de su órden inferior, se convierten sus unidades de órden superior en el inferior inmediato, y se suman con las de este órden, se hace lo mismo con esta suma, y así se continúa hasta el órden inferior.

EJEMPLO: Reducir á pulgadas el complejo 82 varas, 2 piés y 7 pulgadas.

---

(1) De la palabra latina *complexus*, participio de *complector*, abarcar; porque abarca varias unidades.

82 varas
3
246 piés
2
248 piés
12
496
248
2976 pulgadas
7
2983 pulgadas.

Para convertir en complejo un número incomplejo del órden inferior de su especie, se convierte el número dado al órden inmediato superior, se hace lo mismo con el cociente entero de la division necesaria para ello, y así se continúa hasta llegar al órden superior, ó á una division que no tenga cociente entero.

Ejemplo: Convertir en complejo el incomplejo 6568 libras.

65,68 lib.	25 libras que tiene 1 arroba		
156	26,2 arrobas	4 arrobas que tiene 1 quintal.	
0 68	2 2	65 quintales.	
18 lib.	2 arrobas.		

Luego 6568 libras=65 quintales, 2 arrobas y 18 libras.

Operaciones fundamentales con los números concretos.

78. Adicion de concretos.—Para que una suma concreta sea de una especie determinada es necesario que todos los sumandos sean de la misma especie.

Si los números que se han de sumar son incomplejos se efectúa la suma como si fueran abstractos. Si fueran complejos, se disponen los sumandos unos debajo de otros, *de manera que las unidades de la misma especie estén en una misma columna; súmense sucesivamente los números contenidos en cada columna empezando por la de las unidades inferiores: si la suma contiene unidades del órden inmediatamente superior, se guardan para añadirlas con las de esta especie, en el caso contrario, se escribe el resultado tal como se haya hallado.*

Ejemplo:	17 quintales	3 arrobas	17 libras	11 onzas.
	25	2	15	12
	45	1	3	15
Suma....	88	3	12	6

79. Sustraccion de concretos.—Es tambien necesario en esta operacion que el minuendo y el sustraendo sean de la misma especie.

Si fueren incomplejos se efectúa la sustraccion como la de los números abstractos. Y si fueren complejos se dispone el cálculo lo mismo que en la adicion, escribiendo el sustraendo debajo del minuendo, y se efectuará la sustraccion por partes, empezando por las unidades de especie inferior; si alguna de las sustraciones parciales fuere imposible, se añadirá al número de que se debe restar una unidad de la especie inmediata superior, aumentándose en la misma unidad el número correspondiente á dicha especie en el sustraendo.

Ejemplo:	25 varas	1 pié	7 pulgadas	8 líneas.
	14	2	4	11
Suma ...	10	2	2	9

80. Multiplicacion de concretos.—En esta operacion siempre se trata de hallar en una especie determinada el valor de un número dado, conociendo en la misma especie el valor de una unidad homogénea con dicho número.

Cuando los factores son incomplejos la operacion se *efectúa como la de los números abstractos. Cuando los dos factores son complejos, se puede convertir el multiplicador en incomplejo del órden á que pertenezca la unidad de su misma especie, cuyo valor es el multiplicando, y este en incomplejo de cualquier órden de su especie, con lo cual queda este caso reducido al anterior.—Si el multiplicador fuese un entero se prefiere dejar al multiplicando en su forma compleja, efectuando separadamente las multiplicaciones de cada incomplejo del multiplicando por el multiplicador, cuidando de extraer de cada producto las unidades que contenga del órden inmediato superior para agregarlas al de este órden.*

Ejemplo: 1 fanega vale 23 reales y 19 maravedises, ¿cuánto valdrán 74 fanegas?

23 rs.	19 mrs.
74	
1743 rs.	12 mrs.

Cuando el multiplicador, convertido al órden de la unidad cuyo valor es el multiplicando, sea fraccionario, se suele efectuar la operacion por el MÉTODO DE LAS PARTES ALÍCUOTAS, *que consiste en considerar descompuesto el multiplicador en un múltiplo de la unidad cuyo valor es el multiplicando, y en varias partes alícuotas, esto es, en partes que sean divisores exactos de esta unidad. Se halla sucesivamente el valor de cada parte del multiplicador, y se suman estos valores.*

Ejemplo: Hallar el precio de $15^3/_4$ libras, costando la libra 190 rs.

Valor de una libra.	190 rs.	
Número de libras.	$15^3/_4$	
Valor de 15 libras.	2850 rs.	
Valor de $^2/_4$ de libra ó sea de $^1/_2$ libra.	95	
Valor de $^1/_4$ de libra.	47	17 mrs.
Suma.	2992 rs.	17 mrs.

81. División de concretos. Cuando el dividendo y el divisor son de la misma especie, la division se efectúa como si fueran abstractos, convirtiéndolos préviamente en incomplejos de igual órden, cuando en su forma primitiva no lo sean.—Cuando el dividendo y el divisor son heterogéneos, el cociente es de la especie del dividendo.

Para efectuar la operacion, se convierte el divisor al órden de unidades cuyo valor se busca; el dividendo, si es complejo, se convierte en incomplejo de cualquier órden de su especie, y despues se dividen como los abstractos.—Cuando el divisor convertido al órden de la unidad cuyo valor se busca, fuere un entero, se prefiere dejar el dividendo en su forma compleja, efectuando separadamente las divisiones de cada incomplejo del dividendo por el divisor, empezando por las unidades superiores, y cuidando de convertir cada resíduo al órden inmediato inferior para que unido á las unidades del mismo órden forme el dividendo respectivo.

Ejemplo: Si un móvil recorre en 10 minutos con movimiento uniforme 34 varas, 2 piés y 2 pulgadas, ¿qué espacio recorrerá en 1 minuto?

	34 varas	2 piés 2 pulgadas	10
	4 varas=12		3 varas.. 1 pié.. 5 pulg.
2.º dividendo .		14 piés	
		4 piés=48 pulgadas	
3.er dividendo		50 pulgadas	
		0	

Cantidades proporcionales.

82. Definiciones. Se dice que dos cantidades variables son *proporcionales*, cuando haciéndose una de ellas 2, 3, 4, ... veces mayor ó menor, la otra se hace al mismo tiempo 2, 3, 4, ... veces mayor ó menor.

Dos cantidades están en razon *directa* cuando duplicada una debe duplicarse su correspondiente; como el *salario* de un obrero y el *tiempo* que emplea en su trabajo.

Dos cantidades están en razon *inversa*, cuando duplicada una, su correspondiente deba ser mitad; como el *volúmen* de un gas y la *presion* que sufre.

83. Regla de tres.—Se llama *regla de tres* la operacion que tiene por objeto hallar el valor de varias unidades, conociendo el de otras varias de las mismas, siempre que exista proporcionalidad entre dichas unidades y sus valores correspondientes.

Regla de tres simple es la que puede resolverse por una sola proporcion. *Regla de tres compuesta* es la que para resolverse necesita dos ó más proporciones.—La regla para hallar el valor de una cantidad, conociendo el que corresponde á otra homogénea, consiste en multiplicar este valor por la razon directa ó por la inversa de dichas cantidades, segun que estas sean directa ó inversamente proporcionales á sus valores correspondientes.—La regla de tres compuesta se resuelve multiplicando el valor conocido por las razones directas de las cantidades que sean directamente proporcionales á la primera, y por las razones inversas de las que sean inversamente proporcionales á la misma.—Todas estas cuestiones se pueden tambien resolver por el *método de reduccion á la unidad*, que consiste en hallar la cantidad correspondiente á una unidad de la especie de las dos homogéneas conocidas, y despues se hallará la incógnita del problema.

84. Reduccion de las medidas y pesos de Castilla á sus equivalentes métricas y al contrario.—Una de las aplicaciones más importantes de la regla de tres es la resolucion de este problema. Las equivalencias aproximadas más comunmente usadas son las siguientes:

51	metros.	.=61	varas.
7	centímetros. . . .	.= 3	pulgadas.
11	kilómetros. . . .	.= 2	leguas.
5	hectólitros. . . .	.= 9	fanegas.
1	litro.	.= 2	cuartillos.
6	kilógramos. . . .	.=13	libras.
7	metros cuadrados. .	.=10	varas cuadradas.
1	metro cuadrado. . .	.=13	piés cuadrados.
2	hectáreas.	.= 3	fanegas superficiales.
1	metro cúbico. . . .	.=46	piés cúbicos.

85. Regla de interés.—Se llama *interés* de un capital la ganancia obtenida por su empleo durante un tiempo determinado.—Se toma como unidad el interés de 100 unidades de dinero en un año, y se llama *tanto por ciento*, expresándose mercantilmente con el símbolo *p* °/₀.—El interés se llama *simple*, cuando las ganancias se perciben en fechas fijas, y se llama *compuesto*, cuando dichas ganancias se van acumulando al capital para que produzcan más ganancia en la unidad de tiempo siguiente.

Cuando se toma por unidad de tiempo el año, la relacion que une al capital con el tanto y el interés es la siguiente:

$$100 : \text{capital} :: \text{tanto por ciento} : \text{interés}. \quad (1)$$

Proporcion que sirve para determinar cualquiera de estas tres cantidades dadas las otras dos.

Cuando la unidad de tiempo es el dia la relacion es:

$$36500 : \text{capital} \times \text{tiempo} :: \text{tanto} : \text{interés}. \quad (2)$$

Cuando el tiempo es cierto número de años la relacion es la siguiente:

$$100 : \text{capital} \times \text{tiempo} :: \text{tanto} : \text{interés}. \quad (3)$$

Ejemplos: 1.° *Hallar el interés anual de 800 pesetas al 5 por 0|0:*

Segun la fórmula (1) tendremos:

$$100 : 800 :: 5 : x, \text{ de donde resulta:}$$

$$x=\frac{5\times800}{100}=\frac{4000}{100}=40 \text{ pesetas.}$$

2.° *Hallar el capital que produce en un año 1200 pesetas á 4 por 0|0.*

Segun la proporcion (1) será:

$$100 : x :: 4 : 1200; \text{ de donde resulta:}$$

$$x=\frac{100\times1200}{4}=\frac{120000}{4}=30000 \text{ pesetas.}$$

3.° *Averiguar el tanto por 0|0 á que estuvieron impuestas 5000 pesetas para producir un interés anual de 300 pesetas.*

Segun la proporcion (1) tendremos:

$$100 : 5000 :: x : 300, \text{ de lo cual resulta:}$$

$$x=\frac{100\times300}{5000}=\frac{30000}{5000}=6$$

4.° *Una persona que ha tomado prestadas 800 pesetas al 5 por 0|0 ¿qué interés tendrá que abonar á los 210 dias?*

Segun la proporcion (2) tendremos.

$$36500 : 800\times210 :: 5 : x, \text{ de donde resultará:}$$

$$x=\frac{800\times210\times5}{36500}=\frac{840000}{36500}=23{,}01 \text{ pesetas.}$$

Las cuestiones de interés compuesto se resuelven por medio de la siguiente fórmula en la que c representa el capital primitivo, r el interés de una unidad de capital, t el número de años, y C el capital total, ó sea el capital primitivo más los intereses devengados.

$$C=c\times(1+r)^t.$$

86. Regla de descuento.—En toda letra ó pagaré á plazo fijo se consideran dos valores: uno, que ellos mismos expresan y no es efectivo hasta el dia de su vencimiento; y otro, el efectivo que les corresponde antes de dicho dia, y que debe ser menor que el anterior. El primero se llama *valor nominal*, el segundo *valor actual*, la diferencia entre ambos es el *descuento*.—Cuando el plazo de la letra es un año, el valor actual de la letra se halla por la proporcion:

$$100+\text{tanto} : \text{valor nominal} :: 100 : \text{valor actual.}$$

Cuando el tiempo es diferente de un año se admite en la práctica que el descuento es proporcional al tiempo; se halla el descuento correspondiente á un año, y despues el correspondiente al plazo fijado por medio de la proporcionalidad entre los descuentos y los tiempos.

87. Regla de compañía.—Se da este nombre al cálculo que tiene por objeto la distribucion de la ganancia ó pérdida de una sociedad entre varios sócios.—Para resolverla es menester saber dividir un número en partes cuyas razones á otros números dados sean iguales, lo cual se hace dividiendo el primero por la suma de los segundos, y el cociente se multiplica por cada uno de estos.

Ejemplo. *Dividir 240 en tres partes proporcionales á los números 2, 3, 5.*

Si designamos estas tres partes desconocidas con las letras x, y, z, tendremos:

$$x=\frac{240}{10}\times 2=48.$$
$$y=\frac{240}{10}\times 3=72.$$
$$z=\frac{240}{10}\times 5=120.$$

Los principios fundamentales de la regla de compañía son los siguientes: para un mismo tiempo las ganancias ó pérdidas son proporcionales á los capitales;—para capitales iguales las ganancias ó pérdidas son proporcionales á los tiempos;—y para capitales y tiempos diferentes, las ganancias ó perdidas son proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos.

Ejemplo: *Tres individuos se han asociado poniendo en fondo, el primero* 500 *pesetas, el segundo* 720 *y el tercero* 300*;y han ganado* 456 *pesetas; y se pregunta: ¿cuánto ha ganado cada uno?*

La ganancia del primero será:

$$\frac{456}{500+720+300}\times 500=\frac{228000}{1520}=150$$

La del segundo será:

$$\frac{456}{500+720+300}\times 720=\frac{328320}{1520}=216$$

La del tercero será:

$$\frac{456}{500+720+300}\times 300=\frac{136800}{1520}=90$$

88. Regla de aligacion.—Se llama así el modo de resolver los dos problemas siguientes: 1.° Dadas las cantidades que se han de mezclar y sus precios respectivos, hallar el precio de la mezcla. 2.° Dados el precio de la mezcla y los de las cantidades que se mezclen, hallar estas cantidades. Al primero se le llama regla de aligacion *directa*, y al segundo regla de aligacion *inversa*.—Para resolver el primero se multiplican las cantidades que se han de mezclar por sus precios respectivos, se suman estos productos, y esta suma se divide por la suma de las cantidades que se mezclen.—Para resolver el segundo problema se toman para cada una de las cantidades tantas unidades como exprese la diferencia entre el precio medio y el de la otra.

Ejemplo de aligacion directa. *Se tiene una mezcla de 4 litros de vino á 0,70 peseta y de 6 litros á 1,20 peseta y se pregunta ¿á cómo se podrá vender el litro?*

4 litros á 0,70	=2,80
6 litros á 1,20	=7,20
luego 10 litros	valen 10,00 pesetas.

de donde se infiere que el litro se puede vender á peseta.

Ejemplo de aligacion inversa. *Teniendo trigo de 14 pesetas de trigo y 11 pesetas se desea saber cuántas fanegas se han de mezclar para que la fanega valga 13 pesetas.*

Como cada fanega de 14 pesetas vendida 13 deja 1 de pérdida y cada fanega de 11 vendida á 13 deja 2 de ganancia, para que ésta compense aquella basta mezclar 1 fanega de 11 con 2 de 14.

ALGEBRA.

NOCIONES PRELIMINARES.

89. Definiciones.—El Algebra (1) es la ciencia que trata de la cantidad en general.

El orígen del álgebra no se puede precisar con exactitnd, y aun cuando parece que fué cultivada en la India, sólo formó una ciencia aparte] desde Diofanto, autor griego de Alejandría en el siglo IV. Se ignora si los árabes a conocieron por los griegos ó por los indios, pero es indudable que el álgebra y su nombre fueron trasmitidos á Europa y particularmente á España por los árabes hácia el año 1100. Cultivada en Italia en el siglo XV, Vieta, sábio francés, la separó por completo de la aritmética. En los dos siglos siguientes Descartes, Leibnitz, Newton, Eulero y Neper la han elevado á su más alto grado y perfeccion.

Los signos de que se vale el Álgebra para expresar lascantidades son las letras del alfabeto (2). Las cantidades conocidas ó que se reputan conocidas (datos) se designan comunmente con las primeras letras del alfabeto, y las desconocidas (incógnitas) con las últimas. Con el empleo de las letras se generalizan las cuestiones, se reducen á fórmulas sencillas, y se pasa sin esfuerzo de la proposicion primera, en la que se ha traducido el enunciado del problema, á la proposicion final que da la incógnita buscada.

Se llama *coeficiente* (3) un número que precede á

---

(1) Palabra debida á los árabes que llamaron á esta ciencia *al djaber al-mogabelah*, esto es, ciencia de las *restauraciones* y de las *reposiciones*, en virtud de la regla por la cual una cantidad positiva se hace negativa pasando al otro miembro de una ecuacion.

(2) Vieta (1540-1603) fué el primero que representó las cantidades por letras, pero usó de letras mayúsculas; el uso de las minúsculas se debe á Tomás Harriot (1623).

(3) De las latinas *cum*, con y *efficio*, hacer.

una letra y que indica cuántas veces está tomada como sumando.

En Algebra no solo se atiende al valor absoluto de las cantidades; sino tambien al modo con que influyen en la cuestion. Cuando se dirigen al fin que nos proponemos se llaman *positivas*; y cuando se dirigen á un fin opuesto, *negativas*. Las primeras se designan con el signo +, y las segundas con el signo — (1). Toda cantidad que no va precedida de ninguno de estos signos se considera como positiva. Se dice que las cantidades negativas son menores que cero, no en un sentido absoluto, sino teniendo en cuenta que una cantidad de esta especie, reunida con otra de la especie contraria, la disminuye en tanto como ella vale.

El signo = se llama de igualdad, se lee *igual* (2); el signo > se llama de superioridad y se lee *mayor que*, el signo <, llamado de inferioridad, se lee *menor que* (3). El signo ± se llama de *anbigüedad* y se lee *mas menos*. En Algebra ab es lo mismo que $a \times b$.

Se llama *término* toda cantidad separada de otras por signos + ó —. Cuando una expresion consta de un solo término se llama *monomio* (4); y cuando consta de más recibe el nombre de *polinomio* (5), recibiendo este en particular el nombre de *binomio* (6), *trinomio* (7), etc., cuando consta de dos, tres., etc., términos.

Se llaman términos semejantes los que constan de

---

(1) El primero que usó los signos + y — para designar respectivamente la adicion y la sustraccion fué el aleman Cristóbal Rudolfs (1524).

(2) Este signo le introdujo el inglés Roberto Ricord (1557).

(3) Los signos > y < son debidos á Harriot.

(4) De las griegas *monos*, uno, y *nome*, division, parte.

(5) De las griegas *polys*, mucho, y *nome*, parte, division,

(6) De la latina *bis*, dos veces, dos, y de la griega *nome*, parte, division.

(7) De la latina *tres*, tres, y de la griega *nome*, parte, division.

los mismos factores literales, elevado cada uno á la misma potencia: $4a^2b$, $5a^2b$ y $7a^2b$ son términos semejantes. Los términos semejantes se pueden simplificar. *Si tienen un mismo signo se suman los coeficientes, y se pone esta suma como coeficiente de los factores literales con el signo comun. Si tienen diverso signo, se restan los coeficientes y se pone la diferencia por coeficiente de la parte literal, con el signo del mayor.*

Así $4a^3+6a^3=10a^3$. $3bc-7bc=-4bc$.

Operaciones algebráicas.

90. Adicion.—Consiste esta operacion en reunir en una sola expresion el valor de dos ó más.—*Para ejecutarla se colocan todos los sumandos unos á continuacion de otros con los mismos signos que llevan, y queda hecha la suma; despues se simplifica, si se puede.*

91. Sustraccion.—Consiste en hallar la diferencia entre dos cantidades.—*Se efectúa la operacion poniendo el sustraendo con signos contrarios á los que lleve, á continuacion del minuendo, simplificando despues el resultado.*

92. Multiplicacion.—Consiste en tomar una cantidad tantas veces como diga otra, y tomarla del modo que diga se debe tomar.

En la multiplicacion pueden ocurrir tres casos: multiplicar un monomio por otro, un polinomio por un monomio, y un polinomio por otro polinomio.

Para multiplicar un monomio por otro, hay que atender á cuatro cosas: á los signos, á los coeficientes, á las letras y á los exponentes.—*Signos iguales dan un producto positivo; signos desiguales dan un producto negativo. Los coeficientes se multiplican por las reglas de aritmética. Las letras, que son diferentes en ambos factores, se ponen unas á continuacion de otras* *sin interposicion de signo alguno. Las letras iguáles se escriben en el producto con un exponente igual á la suma de los exponentes que la misma letra tenia en ambos factores.*

EJEMPLO. $12a^3b^2c \times 7a^2bc^3d = 84a^5b^3c^4d.$

Para multiplicar un polinomio por un monomio se multiplica cada término del polinomio por el monomio.

EJEMPLO. $(a+b-c)\,d = ad+bd-cd.$

Para multiplicar un polinomio por otro se multiplica todo el multiplicando por el primer término del multiplicador, despues todo el multiplicando por el segundo término del multiplicador, despues por el tercero, etc., se van colocando los productos unos á continuacion de otros con los signos con que vayan resultando, y luego se simplifican si se puede.

EJEMPLO. $(a+b)\,(a-b) = a^2+ab-ab-b^2 = a^2-b^2.$

93. DIVISION.—Esta operacion tiene por objeto averiguar cuántas veces contiene una cantidad á otra, y de qué modo la contiene.

Para dividir un monomio por otro hay que atender á cuatro cosas: signos, coeficientes, letras y exponentes. Signos iguales dan cociente positivo; signos desiguales dan cociente negativo. Los coeficientes se dividen segun las reglas de Aritmética: y si no se pueden dividir con exactitud, se simplifican, si es posible. Las letras diferentes que tengan el dividendo y el divisor, se dejan donde están, y las letras que haya comunes, sin exponente ó con uno mismo, se borran en ambos términos. Si las letras comunes tienen exponentes diferentes, se resta el menor del mayor, y queda la letra en el término en que tiene mayor exponente, con un exponente igual á la diferencia hallada.

EJEMPLO. $$\frac{-10a^7b^2c^5def^3}{-5a^4b^2c^3ef}=2a^3c^2df^2.$$

Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio, y reuniendo todos los cocientes parciales se tendrá el cociente total.

Para dividir un polinomio por otro, se empezará por ordenar los términos del dividendo y divisor con arreglo á una letra, para lo cual se verá la letra que más repetida se halle en ambas expresiones, poniendo por primer término aquel en que la letra escogida tenga mayor exponente, despues el que tenga exponente inmediatamente menor, etc. Hecho esto, se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, y se tendrá el primer término del cociente; multiplíquese este cociente por todo el divisor, y réstese el producto de todo el dividendo (lo cual se conseguirá mudando los signos del producto conforme se vaya formando) haciéndose la reduccion posible. Despues se divide el primer término del resíduo por el primero del divisor, lo que dará el segundo término del cociente; luego se ejecutará la multiplicacion y resta, y se continuará del mismo modo hasta que se halle cociente exacto, ó hasta que el mayor exponente de la letra por que se ordena sea en el resíduo menor que el mayor del divisor; entonces no hay cociente exacto y se indica la division del residuo por el divisor.

EJEMPLO.
$$\begin{array}{rrr|l}
6a^4 & -5a^2b^2 & -6b^4 & 2a^2-3b^2 \\
\cline{4-4}
-6a^4 & +9a^2b^2 & & 3a^2+2b^2 \\
\cline{1-2}
& +4a^2b^2 & -6b^4 & \\
& -4a^2b^2 & +6b^4 & \\
\cline{2-3}
& 0 & 0 &
\end{array}$$

94. EXPONENTE CERO Y EXPONENTE NEGATIVO.—En el caso de que los exponentes de una misma letra en el dividendo y en el divisor fuesen iguales, tendríamos:

$$\frac{a^7}{a^7}=a^0.$$

Pero como esta expresion no tendria ningun sentido se ha convenido en atribuirle uno, puesto que el dividendo es igual al divisor, y el cociente es igual á la unidad, y se ha convenido en considerar el símbolo a^0 como igual á la unidad.

Si el exponente del dividendo fuese menor que el del divisor, tendríamos:

$$\frac{a^7}{a^{10}}=a^{-3}$$

expresion que tambien carece de sentido, pero si observamos que

$$\frac{a^7}{a^{10}}=\frac{a^7}{a^{7+3}}=\frac{1}{a^3}$$

tendremos que una letra afectada de un exponente negativo representa la unidad dividida por la misma letra, afectada de un exponente positivo, igual en valor absoluto al precedente.

95. Elevacion á potencias de los monomios. *Para elevar un monomio á una potencia hay que atender á tres cosas: á los signos, á los coeficientes y á los exponentes. Si el exponente de la potencia es par, el signo de la potencia será+; y si es impar, la potencia llevará el mismo signo de la cantidad dada. Los coeficientes se elevan á la potencia indicada. El exponente de la cantidad se multiplica por el de la potencia.*

Ejemplo. $(-5a^2b^4c^3d)^3=-125a^6b^{12}c^9d^3.$

96. Cuadrado y cubo de un binomio.—De las reglas dadas para la multiplicacion de los polinomios resultan las siguientes productos:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2.$$
$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2.$$
$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3:$$
$$(a-b)^3=(a+b)^2(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

97. Extraccion de raíces de los monomios.—*Para extraer la raiz de un monomio hay que atender tambien á los signos, á los coeficientes y á los exponentes. Si el índice del radical es par, la raiz llevará el signo de ambigüedad; y si el índice del radical es impar, la raiz llevará el mismo signo que la cantidad dada. En cuanto á los coeficientes se extrae la raiz del grado indicado; y los exponentes se parten por el índice de la raiz.*

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{16a^8b^{12}c^4}=\pm 2a^2b^3c \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{-27a^3b^6}=-3ab^2.$$

98. Exponentes fraccionarios.—Cuando el exponente de la cantidad que está debajo del radical no es divisible por el índice de la raíz, resulta elevada esa misma cantidad á un exponente fraccionario; de lo cual se deduce que toda cantidad elevada á un exponente fraccionario significa que se debe elevar la cantidad á la potencia indicada por el numerador, y extraerse del resultado una raíz, cuyo índice es igual al denominador.

Así $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$.

Con los exponentes fraccionarios se opera como con los enteros.

99. Cantidades radicales é imaginarias.—Se llaman cantidades *radicales* todas las que están afectas del signo $\sqrt{\quad}$; y reciben el nombre de cantidades *imaginarias*, las radicales de grado par de una cantidad negativa.

$\sqrt[5]{a}$ es una cantidad radical, y $\sqrt{-a}$ es una expresion imaginaria.

Ecuaciones.

100. Definiciones.—Se llama *identidad* (1) la expresion que indica la igualdad de dos números ó de dos cantidades literales, cuando esta igualdad tiene lugar, sean los que fueren los valores de las letras.

Ejemplos. $3\times4=2+6$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Se llama *ecuacion* (2) una igualdad en la cual entran cantidades desconocidas.

Resolver una ecuacion es hallar los valores que, colocados en lugar de las incógnitas, transforman la ecuacion de una identidad.

Se llama *primer miembro* de una ecuacion lo que se escribe á la izquierda del signo $=$, y *segundo miembro* lo que se pone á la derecha del mismo.

Una ecuacion no se altera porque á los dos miembros se les añada ó se les quite la misma cantidad; ni porque se multipliquen ó dividan por una misma cantidad conocida; ni tampoco porque se eleven á la misma potencia, ó se extraiga la raíz del mismo grado.

Cuando una ecuacion ha sido puesta en forma de entero, se llama *grado* de esta ecuacion la suma de los exponentes de las incógnitas, tomada en el término que esta suma es mayor. Así

$$x^2-5x^2y^2+y-3=0.$$

es una ecuacion de cuarto grado con dos incógnitas.

101. Resolucion de una ecuacion de primer grado con una incógnita. Empiécese por hacer que desaparezcan los denominadores, lo cual se consigue multiplicando el numerador de cada término fraccionario por el pro-

(1) De la voz latina *idem*, lo mismo.
(2) Del adjetivo latina *æquus*, igual.

ducto de los denominadores de los demás, y los términos enteros por el producto de todos los denominadores. Efectúense luego las operaciones que hubiese indicadas, despues ejecútense todas las simplificaciones de que sea susceptible la ecuacion resultante, bien sea haciendo las reducciones en los dos miembros, si es que contienen términos semejantes, ó bien dividiendo uno y otro por sus factores comunes si lo tienen. Traspónganse todos los términos afectados de la incógnita á un solo miembro, y todos los que sean independientes al otro; vuélvase á hacer la reduccion de los términos semejantes, lo cual reducirá cada miembro á un monomio, si la ecuacion es numérica; si es literal, póngase la incógnita como factor comun de las cantidades que multiplica, y despéjesela, en fin, de su coeficiente, lo cual se conseguirá dividiendo el segundo miembro por este coeficiente.

EJEMPLO: Sea la ecuacion $2b-\frac{x}{m}-1+x=\frac{1+x}{2}$; quitando denominadores tendremos:

$$4bm-2x-2m+2mx=m(1+x);$$

efectuando las operaciones indicadas resultará:

$$4bm-2x-2m+2mx=m+mx;$$

haciendo la transposicion tomará la forma:

$$2mx-2x-mx=2m+m-4bm;$$

haciendo la reduccion de los términos semejantes:

$$mx-2x=3m-4bm;$$

sacando fuera de un paréntesis los factores x y m:

$$(m-2)x=m(3-4b);$$

y despejando x

$$x=\frac{m(3-4b)}{m-2}.$$

102. MÉTODOS DE ELIMINACION. *Eliminar* (1) una incógnita en dos ecuaciones es deducir de ellas una ecuacion, que, no conteniendo la incógnita eliminada, determine todos los valores de que es susceptible la otra incógnita.

Tres son los principales procedimientos de eliminacion: el de *sustitucion*, el de *coeficientes idénticos* y el de *igualacion.*

Para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones por el primer método, se despeja esta en una ecuacion y se sustituye su valor en la otra, la cual queda reducida á una ecuacion con una sola incógnita.

EJEMPLO. Sean las ecuaciones

$$ax+by=k$$
$$a'x+b'y=k';$$

despejando x en la primera ecuacion, tendremos

$$x=\frac{k-by}{a},$$

y sustituyendo su valor en la segunda, se tendrá la ecuacion

$$a'\frac{k-by}{a}+b'y=k'.$$

Para eliminar una incógnita por el método de coeficientes idénticos, llamado tambien de adicion y sustraccion, se hace que la incógnita que se va á eliminar tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, lo cual se consigue multiplicando los dos miembros de cada ecuacion por el coeficiente de la incógnita en la otra ecuacion; se restan en seguida las dos ecuaciones si los dos términos en que entra la incógnita tienen el mismo signo, y se suman si tienen signos contrarios.

EJEMPLO. Sean las mismas ecuaciones del caso ante-

(1) De la latina *elimino*, poner fuera del umbral de la puerta, expulsar.

rior: multiplicando la primera ecuacion por a' coeficiente de x en la segunda, y la segunda ecuacion por a coeficiente de x en la primera, tendremos:

$$aa'x+a'by=a'k,$$
$$aa'x+ab'y=ak';$$

y restando estas dos ecuaciones por tener el mismo signo los términos en que entra x, se tendrá la ecuacion

$$aa'x-aa'x+a'by-ab'y=a'k-ak',$$

y haciendo la reduccion de términos semejantes:

$$a'by-ab'y=a'k-ak',$$

ecuacion de primer grado con una incógnita.

Para eliminar una incógnita por el método de igualacion se despeja en las dos ecuaciones la incógnita que se quiere eliminar, y se forma una ecuacion con los dos valores hallados.

Ejemplo: Sean las dos ecuaciones anteriores, despejando en ellas x, tendremos:

$$x=\frac{k-by}{a}, \quad \text{y} \quad x=\frac{k'-b'y}{a'},$$

y formando una ecuacion con estos dos valores:

$$\frac{k-by}{a}=\frac{k'-b'y}{a'},$$

ecuacion de primer grado con una incógnita.

103. Ecuaciones de segundo grado. Se llama *ecuacion de segundo grado* aquella en la que el mayor exponente de la incógnita es 2.

En una ecuacion de segundo grado con una incógnita puede haber tres especies de términos, á saber: 1.° términos que contengan el cuadrado de la incógnita; 2.° términos que contengan la primera potencia de la incógnita, y 3.° términos conocidos. Cuando entran estas tres especies de términos, la ecuacion se llama *completa*, y si faltan los de segunda ó de tercera especie, la ecuacion se llama *incompleta*. $ax^2+bx+c=0$ es una ecuacion completa. $ax^2+bx=0$, y $ax^2+c=0$ son ecuaciones incompletas.

Para resolver la ecuacion completa dividámosla por a, coeficiente de x^2, y tendremos:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

Si para mayor sencillez, hacemos $\frac{b}{a}=m$, y $\frac{c}{a}=n$, la ecuacion tomará la forma:

$$x^2+mx+n=0.$$

Haciendo la trasposicion del término conocido n al otro miembro, será:

$$x^2+mx=-n.$$

Añadiendo $\frac{m^2}{4}$ á los dos miembros, para que el primer miembro sea un cuadrado perfecto, la ecuacion tomará la forma:

$$x^2+mx+\frac{m^2}{4}=\frac{m^2}{4}-n.$$

Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros de la ecuacion, tendremos:

$$x+\frac{m}{2}=\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}.$$

Y pasando el término conocido $\frac{m}{2}$ al segundo miembro, será:

$$x=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}.$$

De cuya fórmula resultan para x los valores siguientes:

$$x=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}, \text{ y } x=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}.$$

Progresiones (1).

104. Progresion por diferencia ó aritmética.—Es una série de números tales, que cada uno excede al anterior en una cantidad dada, que se llama *diferencia* de la progresion.

Cuando la diferencia es positiva, la progresion es *creciente*, y cuando es negativa la progresion es *decreciente*.

$\div$ 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . etc., es una progresion creciente, cuya diferencia es 3.

$\div$ 30 . 27 . 24 . 21 . 18 . etc., es una progresion decreciente, cuya diferencia es —3.

Un término cualquiera de una progresion por diferencia es igual al primero más tantas veces la diferencia como términos le preceden.

105. Progresion por cociente ó geométrica.—Es una série de números tales que cada uno de ellos es igual al que le precede multiplicado por una cantidad constante, que se llama *razon* de la progresion.

La progresion es *creciente* ó *decreciente*, segun que la razon es mayor ó menor que la unidad.

$\div\!\div$ 6 : 18 : 54 : etc., es una progresion creciente, cuya razon es 3.

$\div\!\div$ 27 : 9 : 3 : 1 : etc., es una progresion decreciente, cuya razon es $\frac{1}{3}$

Un término cualquiera de una progresion por cociente es igual al primero multiplicado por la razon elevada á una potencia indicada por el número de términos que le preceden.

(1) De la palabra latina *progressio*, derivada de *progredior*, adelantarse

Logaritmos.

106. Definicion.—Se llaman en general *logaritmos* (1) una série de números en progresion por diferencia, que empieza por cero, que se corresponden término á término con otra série de números en progresion geométrica, que empieza por la unidad. Por consiguiente, será logaritmo de un número el término de la progresion por diferencia correspondiente al número que se considera en la progresion por cociente.

El descubrimiento de los logaritmos es debido á Napier (nombre que se pronuncia Neper), matemático escocés del siglo XVII, y sus trabajos fueron completados por Briggs, que diez años más tarde publicó las primeras tablas de base decimal.

La invencion de los logaritmos, reduciendo á breves instantes de trabajo cálculos que exigian meses enteros, ha duplicado por decirlo así, la vida de los astrónomos y ha prestado eminentes servicios al comercio.

107. Propiedades de los logaritmos.—Son las siguientes:

1.ª El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.

2.ª El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo ménos el logaritmo del divisor.

3.ª El logaritmo de una potencia cualquiera de un número es igual al logaritmo del número multiplicado por el exponente de la potencia.

4.ª El logaritmo de la raíz de un número es igual al logaritmo del número dividido por el índice de la raíz.

108. Logaritmos ordinarios.—Cuando entre las progresiones se elige la aritmética, que principiando por 0 sigue despues por la série de los números naturales, y la geométrica que empieza por la unidad, entónces se

(1) De las griegas *logos*, proporcion, y *arithmos*, número; esto es, cuenta de proporciones.

tiene un *sistema de logaritmos;* y como puede elegirse cualquier número para segundo término de la progresion geométrica, de aquí que pueda haber muchos sistemas de logaritmos.

Se llama *base* de un sistema de logaritmos al segundo término de la progresion geométrica, cuyo logaritmo es la unidad.

Como el sistema de numeracion sigue su ley constante de diez en diez, se ha elegido tambien este número para base del sistema de logaritmos más usual, llamados *logaritmos ordinarios*, de modo que las dos progresiones son las siguientes:

$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, \text{etc.}$$

$$\dot{\div}\, 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : \text{etc.}$$

109. Tablas de logaritmos.—Interpolando entre todos los términos de la primera progresion el mismo número de medios diferenciales, y entre todos los de la segunda el mismo número de medios proporcionales, tendremos formadas las *tablas de logaritmos*, que no son otra cosa que un cuadro de dos columnas verticales, en la primera de las cuales se halla la série natural de los números 1, 2, 3, 4, etc. hasta cierto límite, y en la segunda sus logaritmos.

De las progresiones ántes expuestas se infiere que solo los logaritmos de 10, 100, 1000, etc., son enteros, y que los de los números comprendidos entre ellos han de constar de una parte entera (que se llama *característica*) (1), y de una parte decimal (que se llama *mantisa*) (2).

De las mismas progresiones anteriores se infiere que la característica de cualquier número entero consta de tantas unidades como cifras ménos una tiene el número.

(1) De la palabra griega *character*, señal.

(2) De la palabra etrusca *mantisa*, añadidura.

Respecto de la mantisa, es un principio fundamental en el uso de las tablas, que cuando dos números mayores que la unidad están compuestos de las mismas cifras escritas en el mismo órden, y no se diferencian más que por la posicion de la coma, sus logaritmos tienen la misma parte decimal, y solo se diferencian en la característica.

110. Complemento logarítmico.—Se llama complemento de un logaritmo la cantidad que falta al logaritmo para valer 10.

Para hallar el complemento de un logaritmo se restan todas sus cifras de 9, excepto la última significativa de la derecha, que se resta de 10.

Por medio del complemento se puede convertir la operacion de restar un logaritmo de otro en la de sumar.

Así es que *para hallar la diferencia de dos logaritmos, se añade al minuendo el complemento del sustraendo y se resta* 10 *de la suma.*

111. Operaciones por medio de los logaritmos.—Para multiplicar varios números, se hallarán sus logaritmos en las tablas y se sumarán, y la suma será igual al logaritmo del producto; hallando en seguida en las tablas el número correspondiente á este logaritmo, se tendrá el producto.

Para dividir dos números, se hallarán sus logaritmos y se restarán, y el resto será el logaritmo del cociente, hallando en seguida en las tablas el número correspondiente á este logaritmo se tendrá el cociente.

Para elevar un número á una potencia, se halla el logaritmo del número y se multiplica por el exponente de la potencia, y el producto será el logaritmo de la potencia; hallando en seguida el número correspondiente á este logaritmo se tendrá la potencia.

Para extraer una raíz de un número, se halla el logaritmo del número, y se divide por el índice de la raíz, y el cociente será el logaritmo de la raíz; hallando en seguida el número correspondiente á este logaritmo, se tendrá la raíz.

112. Uso de las tablas.—El uso de las tablas se puede referir á la resolucion de los dos problemas siguientes:

1.° *Dado un número hallar su logaritmo.*

A. *Si el número es entero y menor que* 10000 se le hallará fácilmente en una de las columnas de los números y á su lado su logaritmo.

Así, log. 1875=3,2730013.

B. *Que el número sea entero y mayor que* 10000. Sea el número 189367; como este es igual á 1893,67×100, resulta que obtendremos su logaritmo añadiendo 2 unidades al logaritmo de 1893,67. Como este número cae entre 1893 y 1894, su logaritmo ha de estar comprendido entre los de estos dos números. La cantidad x, que hay que añadir á 3,2771506, logaritmo de 1893, para obtener el logaritmo de 1893,67 se halla tomando en las tablas la diferencia 0,0002294 entre el log. de 1893, y el de 1894 y partiendo del principio de que *las diferencias de los números son proporcionáles á las diferencias de sus logaritmos*, tendremos:

1 : 0,67 : : 0,0002294 : x; de donde resulta x=0,0001537.

Añadiendo este valor de x á 3,2771506, log. de 1893, la suma 3,2773043 será el logaritmo de 1893,67; y el logaritmo de 189367 será, pues, 5,2773043.

C. *Si el número es fraccionario*, se resta el logaritmo del denominador del logaritmo del numerador y la diferencia será el logaritmo pedido.

2.° *Dado un logaritmo hallar su número correspondiente.*

Supongamos primeramente que el logaritmo dado corresponda á un número mayor que la unidad.

Cuando se da un logaritmo se vé por su característica cuáles son las unidades superiores del número correspondiente, y se tiene la primera idea de este número. Esto supuesto, si este logaritmo está en las tablas, pertenece á un número entero que dan á conocer estas tablas.

Sea, por ejemplo, el logaritmo 2,54900, siendo 2 su característica, el número correspondiente tendrá centenas y constará de tres guarismos; ahora bien, como se halla en las tablas el logaritmo propuesto, síguese que pertenece al número 354, que está á su lado.

Sea, en segundo lugar, el logaritmo 4,56738 que perteneee á un número que contiene decenas de millar ó 5 guarismos. Como la característica no ofrece nunca dificultades, basta ocuparse de la mantisa; así es que buscaremos en las tablas la mantisa del logaritmo dado y la hallaremos al lado de 3693, cuyo logaritmo es 3,56738; de lo cual inferiremos que con una unidad más en la característica 4,56738 es el logaritmo de 36930.

Sea, en tercer lugar, el logaritmo 1,85944, cuya característica denota un número comprendido entre 10 y 100, no se halla en las tablas con esta característica 1, pues está comprendido entre log. 72 y log. 73; pero si se le busca con la característica 3, se hallará

$$\log. 7235 = 3{,}85944,$$

de lo cual se inferirá que el logaritmo dado 1,85944, que tiene dos unidades ménos en la característica que el precedente, pertenece á un número cien veces menor, es decir, á 72.35.

De aqui resulta la importante observacion de que hay que buscar siempre los logaritmos en la parte de las tablas en que es mayor la característica.

Pasemos ahora al caso en que las tablas no contengan la mantisa del logaritmo dado. Sea, por ejemplo el logaritmo 3,6483216, que pertenece á un número mayor que 1000 y menor que 10000. El logaritmo inmediato menor es 3,6482624, que corresponde al número 4449. Como el logaritmo dado es mayor que este logaritmo, el número que buscamos ha de ser tambien mayor que 4449 La cantidad x, que hay que añadir á este número para tener el número pedido, se halla restando del logaritmo dado su inmediato inferior, la diferencia es 592 diez millonésimas, y admitiendo, como en el problema anterior, que las diferencias de los números son proporcionales á las diferencias de sus logaritmos; como en el caso actual la diferencia de los logaritmos consecutivos que comprenden al logaritmo dado es 976 diezmillonésimas, tendremos:

$$1 : x :: 976 : 592, \text{ de donde } x = 0{,}607;$$

luego $3{,}6483216 = \log. 4449{,}607$.

Supongamos ahora que se nos da un logaritmo cuya característica sea negativa, por ejemplo, $\overline{2},18554$. Para hallar el número correspondiente será preciso agregar á esta característica las unidades suficientes para hacerla positiva, buscar en las tablas el logaritmo modificado, y cuando el número correspondiente á este número es conocido separar tantos decimales como unidades se han agregado á la caracteristica; y entonces se tendrá el número pedido.

Pero como es preferible valerse de los números más elevados de las tablas, se añadirán siempre á la característica negativa tantas unidades como fuere preciso para obtener ×3; asi en el ejemplo dado, añadiremos 5 á la característica—2, y el logaritmo dado será 3,18554.

Ahora bien, este último corresponde á 1533; y como hemos aumentado la característica en 5 unidades, será preciso dividir este número por 100000 lo cual indica por último que $\overline{2},18554$ es el logaritmo de 0,01533.

INDICE.

1878.

CASADO

[G]UIA DEL BACHILLER

CIENCIAS

Madrid

I. del C. C.