Compet 1 ...

ORONTII FINAEI DELPHINATIS, REGII

Mathematicarum Lutetiæ professoris,

DE ARITHMETICA PRACTICA libri quatuor: Ab ipso authore uigilanter recogniti, multísque accesśionibus recèns locupletati.

LVTETIAE PARISIORVM,
apud Michaëlem Vaſcoſanum,

1555.

EX PRIVILEGIO REGIS.

Vireſcit uulnere uirtus

PRIVILEGII SENTENTIA.

CAVTVM est auctoritate Henrici II Francorum Regis, ne quis alius præter Vascosanũ, hosce Orontij Finæi de Arithmetica practica libros quatuor, recẽns ab ipso & recognitos & locupletatos, ante decennium imprimat, néue uendat. Qui secus fecerit, libris, & pœna in sanctione ęstimata, mulctabitur. Lutetiæ Parisiorũ VII Idus Februarij. M. D. LIII.

Ex mandato Regis, D. Renato Baillet, libellorum supplicũ in Regia magistro, pręsente.

Mahieu.

ORONTII FINAEI DELPHInatis, in ſequentes Arithmeticæ practicæ libros, PRAEFATIO,

Ad Reuerendum, ſimul & eruditum Patrem, Do. Antonium Leufredum, Vrſicampi Abbatem digniſſimum.

SI QVIDQVAM in uniuerſa rerum offendatur natura (Pater obſeruandiſſime) quod abſq; materia ſubſiſtere nullo modo poſſit, & nihilominus extra materiam ipſam ſit intelligibile: maximè uidetur eſſe unitas, & qui ex ipſa unitate procreatur numerus. Clarum eſt enim, numerum tam per ſeſe, quàm in rebus materialibus, indifferenter poſſe cõſiderari. Simplex autẽ & abſoluta uidetur eſſe numeri contẽplatio, cùm naturales, & propriæ ipſius numeri diſquirũtur proprietates: an uidelicet par, uel impar datus fuerit numerus: primus item, uel compoſitus: perfectus inſuper, uel abundãs, ſeu diminutus: & quæ ſunt huiuſcemodi. In ipſa porrò materia cõſiderari dicitur numerus, cùm per artificioſam ſupputandi rationem, humanis, ciuilibúſue coaptatur negotiationibus. Hinc duæ ſuboriuntur Arithmeticæ partes, Theorica uidelicet, & Practica. Theorica nanque, præter numerorũ dignitatem, atque certitudinem: illorum uirtutes, propriáſque paſſiones, & accidentia perſcrutatur.

Practica uerò, materiales (ut ſic loquar) numerorũ reſpicere uidetur applicationes: hoc eſt, illorum utilitatem, uſúmue artificialiter explicat. Inter liberales itaque diſciplinas, quæ Mathematicæ uocantur, Arithmetica primas ſibi uendicat partes: tum ob ſimplicem ipſius artis traditionem, tum ob diuinam utilitatũ illius amplitudinem. Nulla ſiquidem ars, adeò pura & utilis, adeò frequens & neceſſaria uidetur eſſe, uel quæ aliis minùs ſubdita ſit artibus, quantum ipſa Arithmetica. De hac itaque Arithmeticæ praxi, libros quatuor aliquãdo conſcripſimus: quos in communem ſtudioſorum omnium gratiam, & utilitatem, quater iam curauimus impreſſos, & in enchiridij formam redactos, tibi demum conſecrauimus: idque bono iure. Nam præter id quòd Græcam, ac Hebraicam linguam, in ipſa ſenectute perdiſcere nõ grauatus es: in ſacris literis, & mathematicis diſciplinis adeò fęliciter uerſatus es, ut de illis, etiam abditiſſimis, tuum poſſis efferre iudicium. Quãtum inſuper tibi debeam, norunt quamplurimi: qui tua humanitate & clementia, non aſpernãdis beneficiis, & me, & meos, ſæpiſſime donaſti, aduerſis potiſſimũ temporibus: adeò ut nos perpetuò tibi deuinctos reddideris. Non poteram itaq; minus facere, quàm tuã erga nos liberalitatem, hoc quãtumuis exiguo munuſculo apertè recognoſcere, ipſámque poſteris commẽdare. Verumenimuerò ſucceſſu factum eſt temporis, ut ipſa quoq; editio

quarta

quarta fuerit tandem distributa. Vt igitur nullam officij nostri partem omitteremus, quintā libuit addere castigationem: multis quidem accessionibus, atque in melius factis commutationibus auctam & emendatam. Quam in hanc mediocrem uoluminis formam cōmodissimè reuocatam, sub tuo rursum edidimus nomine. Quæcunque igitur ad ueram, atq; facilem tum integrorum, tum fractorum numerorum praxim censuimus fore necessaria: ea pura, & admodum facili traditione, his quatuor Arithmeticæ libris perstrinximus: uulgarium negotiationum inexplicabilibus, & curiosis potiùs quàm utilibus Labyrinthis de industria prætermissis. Vt Mathematicis in primis, hoc est, purioris philosophiæ discipulis, dein studiosis omnibus, satis hac in parte fecisse uideamur. Reliquū est igitur, Venerande Pater, ut hanc postremam Arithmeticæ nostræ recognitionem, & exhaustos inde labores, grato suscipias animo: expectésque propediem eam Arithmeticæ partē, quæ de surdis (ut aiunt) irrationalibúsue numerorum commixturis pertractat, tuæ dignitati iamdudum consecratam.

Vale, Præsulum decus rarissimū: Lutetiæ Parisiorum, mense Ianuario, M. D. L V.

Authoris Octostichon, ad Lectorem.

Cùm natura sagax numero, mensuque crearit
Singula, ponderibus clauserit inde suis:
Disce (precor) numeros primis tractare sub annis,
Si Mathesin recta poscis adire uia:
Si cupis & rerum proprias discernere causas,
Artibus humanis uel dare subsidium.
Hoc uelis à brutis saltem differre, quòd inter
Viuentes poßis uel numerare. Vale.

IOANNES FINAEVS ORONtianus, de suo patre: Ad ornatißimũ uirum, Do. Antonium Leufredum, Vrsicampi Abbatem dignißimum.

Non ego, quòd pater est, mihi gratulor: at magè quòd sit
Arte mathematica clarus, & ingenio.
Cuius ubique uigent perdocta uolumina: uiuunt
Conatus: uiuit gloria: uiuit honor.
Viuet & iste liber, magno sudore paratus:
Qui quod per numeros quæritur, ecce docet.
Dinumerat paucis, quod uulgus nescit: & unus
Expetit astronomus motibus inuigilans.
Quicquid id est, genitor tibi, Præsul, sacrat & offert:
Ceu ueteris quoddam pignus amicitiæ.
Id quod ubi à tanto factum genitore notaui,
Hos ibi uersiculos scribere nil puduit.
Non quòd ego ijsce putem patris uirtutibus addi
Quidquam: sed nati munus id esse sciens.
In quo uirtutis si quæ scintilla paternæ
Viuit, eam studijs extimulare parat.
Quòd melius faciet, si tu illi, Præsul, adesse
Digneris, solita pro pietate tua.

INDEX SVMMARIVS CAPITVM,

singulis huiusce Arithmeticæ practicæ libris contentorum: in quo punctũ unicum post foliorum numerum, primam indicat paginam: duo uerò puncta, secundam.

PRIMI LIBRI CAPITA.

LIBRI SECVNDI CAPITA.

LIBRI TERTII CAPITA.

QVARTI LIBRI CAPITA.

INDICIS

FINIS.

ORONTII FINAEI DELPHINATIS, REGII MATHEmaticarum Lutetiæ professoris, Arithmeticæ practicæ Liber primus: In quo de integris, hoc est, eiusdem speciei, uel denominationis numeris pertractatur.

De numero, elementis, limitibus, & artificio numerandi. Caput I.

NVMERVS (ut ab illius ordiamur diffi- *Numerus*
nitione) est datarum unitatum inuicem *quid.*
compositarum multitudo: ut duo, tria, qua-
tuor, quinque, decem, uiginti, &c. unde &
numerus numerans, seu mathematicus ap-
pellatur. Vnitas uerò est, qua unaquæque *Vnitas.*
res tam corporea, quàm expers corporis, di-
citur una: ut unus angelus, unus homo, unus lapis, unus dies,
ab unitate dicitur unus. Plures autem angeli, uel homines,
aut lapides, siue dies, multitudinem efficiunt, quæ numerus
numeratus, seu physicus dicitur. Vnitas igitur, nõ est nume- *Vnitatis pro-*
rus, sed principiũ & origo numeri: utpote quæ per sese mul- *prietates.*
tiplicata, uel diuisa, in seipsam absque cremento resoluitur.
Est insuper unitas, cuiuslibet numeri pars quota, ab ipso nu-
mero denominata: utpote, binarij pars altera, ternarij tertia,
quaternarij quarta, &c. Naturalis porrò series numerorũ est, *Naturalis or-*
quæ à binario, continuum unitatis obseruat incrementum. *do numerorũ.*
Quanuis igitur in numerorum resolutione, deueniatur ad
minimum: nunquam tamen in numerorum augmẽtatione,
ad maximũ licet peruenire numerũ, cùm semper addi possit
2 unitas. Numerorum autem (quantum ad susceptum uide-
tur spectare negotiũ) alius digitus, alius articulus, alius de-
mum compositus nominatur. Digitus est, qui inter unitatem *Nu. digitus.*

& denarium continetur numerum, & nouem non excedit unitates: ut duo, tria, quatuor, quinque, ſex, ſeptem, octo, nouem. Articulus uerò dicitur numerus, qui ex decem unitatibus, uel binariis, aut ternariis, aliiſue decuplatis conſurgit numeris: cuiuſmodi ſunt decē, uiginti, triginta, quadraginta, quinquaginta, centū, mille, & ſimiles numeri, in ipſa naturali ſerie numerorum articulatim diſtributi. Cōpoſitus demum, ſiue mixtus appellatur numerus, qui inter duos quoſuis proximos articulos cōprehēditur, & ex priore articulo, & aliquo digitorum reſultat: ueluti quindecim, uiginti ſex, triginta ſeptem, quinquaginta octo, centum & ſexaginta nouem, &c.

Numerus articulus.

Num. compoſitus.

3 In expreſsione porrò numerorum, duo ueniunt potiſsimè conſideranda: figuræ uidelicet arithmeticæ, quæ uocantur elementa, & ipſorum elementorum loca, ſiue limites. Elementa ſunt decem, nouem quidem ſignificatiua, quæ in hunc modum figurantur ab Arithmeticis, & talem habent qualem ſubſcripſimus ualorem:

Elemēta numeralia.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
unum.	duo.	tria.	quatuor.	quinq;.	ſex.	ſeptē.	octo.	nouē.

Et unum non ſignificatiuum, ad ſolam occupationem limitum, & ſignificatiuorum elementorum tranſpoſitionem excogitatum: quod tziphra propriè dicitur, & inſtar circuli hoc modo figuratur, o.

4 Limites autem elemētorum, ſunt illorum ſedes, à dextra uerſus læuam in infinitum progredientes, & decupla ratione, ſiue poteſtate ſeſe inuicem continuè ſuperantes. In quolibet igitur numero, tot occupantur limites, quot in eo ſunt elementa. Vnumquodque propterea elementorū ſignificatiuorum, in primo limite conſtitutum, ſuas tātum repræſentat unitates: in ſecundo, decuplas: in tertio, centuplas: in quarto, millecuplas: in quinto, decies millecuplas: & ſic conſequenter, denæ, centenæ, millenæ, quantumlibet iterata nomēclatura. Exempli gratia, binarius in primo limite duo tantùm præfigurat: in ſecundo, duas denas, hoc eſt, uiginti: in tertio, bis

Elementorum limites, in numeris.

bis cẽtum: in quarto, bis mille: in quinto, uigesies, seu bis decies mille: & sic consequenter. Idem pendenter uelim intelligas, de cæteris elementis significatiuis. Contrahit itaque numerus ab ipsis elementis significatiuis, unitatum multitudinem: ab ipsis uero limitibus, eorundem elementorum denariam, centenariam, seu millenariam, aut aliam quanuis, pro dati numeri multitudine iteratam nomenclaturam. Quasi elementa ipsa sint numeratores, limites uerò denominatores, earum quæ in dato numero sunt unitatum. Velut ex subscripta potes elicere figura.

Elemẽtorum, & limitum officium.

Sinistra pars infinita.	*Millenæ millenæ millenarũ.*	*Cẽtenæ millenæ millenarũ.*	*Denæ millenæ millenarum.*	*Millenæ millenarum.*	*Centenæ millenarum.*	*Denæ millenarum.*	*Millenæ.*	*Centenæ.*	*Denæ unitatum.*	*Vnitates.*	*Limitum siue locorum denominationes.*	*Digitorum nomenclaturæ.*	*Pars dextra, principiũ numerorum.*
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	*Nouenarius.*		
	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	*Octonarius.*		
	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	*Septenarius.*		
	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	*Senarius.*		
	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	*Quinarius.*		
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	*Quaternarius.*		
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	*Ternarius.*		
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	*Binarius.*		
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	*Vnitas.*		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*Tziphra.*		
	Decimus.	*Nonus.*	*Octauus.*	*Septimus.*	*Sextus.*	*Quintus.*	*Quartus.*	*Tertius.*	*Secundus.*	*Primus limes.*	*Ordo limitum, siue locorum.*		

5 Numerare igitur, est datum quemuis numerum, per propria & loca & elementa decenter repręsentare: ut quantus sit ipse numerus, facilè ualeamus exprimere. Quibus autem elementis, & limitibus, id absoluendum fuerit: ipse propositus te docebit numerus. Vbicunque enim fuerint

De numeratione.

Numerationis artificium notandum.

duæ numeri dictiones, quarum prima aduerbialiter, altera uerò nominaliter exprimitur: prima docet quo elemento, secunda uerò quo limite datus exprimendus sit numerus. Vtpote, si uolueris arithmeticè repræsentare bis mille, nonies centum, uiginti quatuor: dictio bis denotat binarium elementum, mille autem illud esse locandum in quarto limite, qui est millenarum: dictio quoque nonies elementum nouenarium, centum autem denotat illud ponendum esse in tertio limite, qui est centenarum: porrò uiginti cùm duas denas significent, per binarium in loco denarum, utpote, secundo limite: quatuor autem unitates, per quaternariū in primo limite positum exprimentur elementum: ut uides hic 2 9 2 4. Hinc patet, expreſsionem numeri, à limitibus potentia maioribus ad subtiliores, hoc est, à sinistra uersus dextram esse pronuntiandam. Vt si hūc uelles exprimere numerum, 8 5 3 4: nominabis in primis 8 & suum limitem, postea 5 & suū limitem, & sic de cæteris. Dices igitur, ipsum numerum 8 5 3 4, continere octies mille, quinquies centū, triginta quatuor. Si datus itaq; numerus fuerit digitus, proprio designabitur elemēto: Si articulus, aut compositus fuerit, duobus ad minus exprimetur elementis. Sed articulus, in primo limite semper habebit tziphram, ut 20, 50, 100: cōpositus uerò, elementum aliquod significatiuum, ut 12, 15, 26, 138. Vides igitur, quàm pulchrè ipsa decem elemēta, unà cum ipsorum limitum cōtinuè decuplata ratione, ad omniū quorumcūque numerorū repræsentationem sint satis. Item, qualiter expreſsio numerorum, à limitibus potentia groſsioribus commodiùs absoluatur, quàm è diuerso. Hinc factum est, ut illa cōtinuè decuplata limitum potestas, à dextra uersus læuam necessariò distribuenda fuerit: ut singulæ uidelicet unitatum denæ ex quolibet insurgentes limite, per solam unitatem in proximo limite læuorsum repræsententur. Sed hæc, de numeratione, & eius artificio, sint satis.

Numeri qualiter exprimendi.

Recollectio notanda.

De inte-

De integrorum numerorum additione. Cap. 2.

1 ADdere in integris est, duos aut plures integrorũ numeros, in unum componere numerũ: ut summarius, uel inde resultans numerus dignoscatur. Absoluitur autẽ ipsa integrorum additio, in hunc qui sequitur modum. Subscribantur inuicem propositi & addendi eorundem integrorum numeri, pro singulorum & limitum & elementorũ ordine: sic quidem, ut unitates unitatibus, denæ denis, centenæ centenis, & reliqua reliquis directè respondeant. Sub quibus transuersalis quędam subscribatur lineola, quæ summarium ab ipsis addendis separet numerum. His præparatis, congregentur in primis unitates: & si resultans inde numerus fuerit digitus, is sub eisdem unitatibus & interposita lineola proprio signetur elemẽto: Si autem collectus ipse numerus fuerit articulus, illum reseruabis, & subscribes tziphram o: At si præfatus numerus fuerit ex digito & articulo compositus, obseruetur rursum articulus, & subnotetur digitus. Postmodùm colligantur denæ, & inde resultanti numero tot addantur unitates, quot fuerint denæ in retento nuper articulo: & consurgens inde numerus rursum consideretur, an fuerit digitus, articulus, aut compositus. Si fuerit digitus, is sub denis proprio exprimatur elemento: Si articulus, is reseruetur, & subscribatur tziphra o: Si autem ex digito & articulo compositus extiterit, subnotetur digitus, & reseruetur iterum articulus. Deinde congregentur millenæ: idẽmque discursus, ac elementorum subnotatio priori similis obseruetur, ex cẽtenis ad millenas, atque reliquos progrediẽdo limites, donec ad ultimum peruentum fuerit ipsorum numerorum ordinem.

Additionis integrorum Regula.

2 Memineris tamẽ, cùm ad ultimã perueneris additionem, ipsum articulum (si retentum forsitan habueris) in proximum limitem læuorsum esse transferendum, & illic per congruum subnotandum elementum, tot quidem repręsentãs unitates, quot denas habuerit idem articulus. Item, quoties in primo, aut aliquo intermediorum limitũ ordine, tziphræ absque significatiuo concurrerint elemento (cùm nihil

Documenta particularia in additione seruanda.

ex illarum additione consurgat) subnotabis tziphrã, quæ illum saltem designet limitem: ni forsitan habueris articulum ex proxima collectione reseruatum, qui loco tziphræ tunc subnotandus erit. Facilitabit etiam plurimùm additionem, si maiores numeros minoribus in primis subscripseris: & priùs maiora, quàm minora inuicem composueris elementa. Pendet igitur totum additionis artificium, ex ipsa limitum decuplata potestate. Vt enim limes quilibet (excepto primo) decuplus est limitis dextrorsum immediatè præcedentis: sic pro singulis cuiuslibet limitum denis, unitas in proximè succedentem uersus læuam reponitur ordinem.

Vnde pẽdeat additionis artificium.

3 Additionis exempla.

In faciliorem eorum quæ diximus intelligentiam, subscriptas additionum contemplare formulas. In quarum prima, hi numeri 2450, 1334, 423, hunc conficiunt numerũ 4207. In secunda uerò formula, hic numerus 126200, ex istorum numerorum 95080, 23090, 8030, additione consurgit.

Numeri addendi.		2	4	5	0		9	5	0	8	0
		1	3	3	4		2	3	0	9	0
Lineola interiecta.			4	2	3			8	0	3	0
Addendorum summa.	4	2	0	7		1	2	6	2	0	0

De subtractione eorundem integrorum, Cap. 3.

De quibus numeris intelligatur subtractio.

SVbtrahere autem est, datum numerum à maiori numero artificialiter auferre: ut residuus tandem innotescat numerus. Nam æqualem ab æquali demere, superuacaneum est: & maiorem à minore, imposibile. In subtractionis ergo principio, duo tantùm occurrunt numeri: subtrahẽdus uidelicet, & is à quo facienda est subtractio. Vnde si plures numeros ab eodem numero, uel pluribus numeris subducere fuerit operæpretium: utrunque ordinem in unum priùs coaceruabis numerum. Subtractio igitur (ut rem acu tangamus) cõtraria est additioni: idcirco per contrariam additionis operationem, in hunc modum facienda est. Subscribatur numerus subtrahendus ei numero, à quo subducẽdus est, obseruato limitum ordine, uti proximo dictum est capite, &

Notandum.

2 Ars subtrahẽdi minorẽ numerum, à maiori numero.

te,& sub utroque protracta lineola, quæ relictum ex subtractione distinguat numerum. Quibus absolutis, auferãtur in primis inferiores unitates à superioribus unitatibus, postea denæ à denis, deinde cẽtenæ à centenis, & reliqua subtrahẽdi numeri elementa à reliquis numeri superioris elementis, quousque ad ultimum ipsius numeri subtrahẽdi perueneris ordinem: subnotetúrq; infra lineolam, ex singulis subtractionibus relicti numeri, qui semper erunt digiti. Vbi autẽ nihil ex subtractione relinquetur, subnotetur 0: excepto loco ultimo, quem in uanum occuparet, cùm nullum significatiuũ
3 subsequatur elementũ. Quoties porrò aliquod elementum subtrahendi numeri, fuerit maius superiore (quod sæpius accidit) aufer ipsum elementum à 10, & residuum iũge ipsi elemento superiori, ac inde resultantem subscribe numerum, qui unico semper exprimetur elemẽto: uel ipsum immediatè subscribe residuum, si idem supernum elementũ fuerit 0. Ratione autem ipsius denæ (quæ à læuo & proximo numeri superioris elemento potentia mutuata est) addenda erit unitas elemento subtrahendi numeri læuorsum immediatè succedenti, & resultans inde numerus à respondenti numeri superioris elemento consequenter auferendus: uel ipsa tantùm unitas, si 0 sequentem locum occupauerit, aut fuerit ipsius
4 numeri subtrahendi locus postremus. In exemplum esto numerus 34657, à quo hunc oporteat auferre numerum 26584. In primis igitur 4 dempta ex 7, relinquunt 3: quæ subnotantur. Deinde 8 subducta ex 10, relinquunt 2: quæ unà cum 5, efficiunt 7, subscribenda. Iungitur itaque unitas sequenti quinario subtrahendi numeri: fiunt 6: quæ detracta à 6, nihil relinquunt: ideo subscribitur 0. Postea tolluntur 6, à 10, relinquuntur 4: quæ unà cum superiore quaternario, faciũt 8, subscribenda. Tandem sequenti binario iungitur unitas, fiunt 3: quæ dempta à 3, nihil relinquunt. nihil ergo subscribitur, cum limes sit ultimus. Concludendum igitur, 26584, subtracta à 34657, relinquere hunc numerum 8073.

Documẽtum, cum elementa inferiora, sunt maiora superioribus.

Subtractionis exemplum.

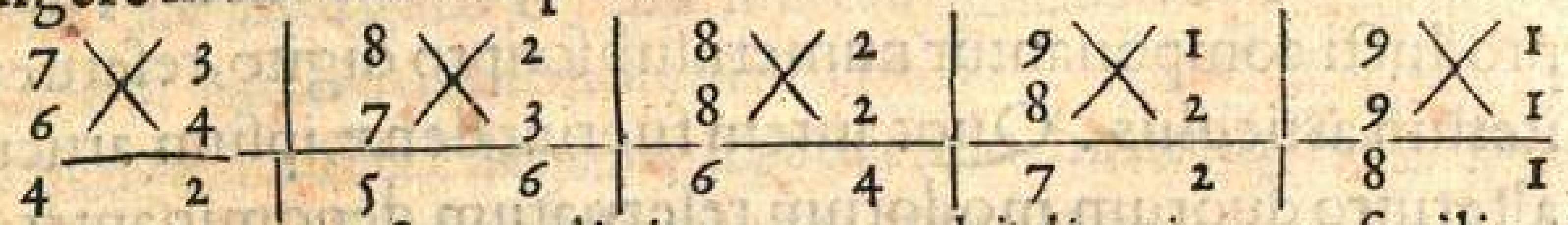
Nu. à quo fit ſubtractio.	3	4	6	5	7
Numerus ſubtrahendus.	2	6	5	8	4
Lineola interpoſita.					
Numerus reſiduus.		8	0	7	3

In maiorem artis expreſsionem, ſuccedentia examinentur ſubtractionis exempla.

3	7	4	8	0	0	7	9	0	0	0	0
		8	5	4	7	5	0	0	4	7	9
3	6	6	2	5	3	2	8	9	5	2	1

De ipſorum integrorum multiplicatione, Cap. 4.

Multiplicationis diffinitio. MVltiplicare eſt, duobus oblatis numeris, ex altero toties ſumpto quot ſunt unitates in reliquo, procreatũ inuenire numerũ. In ipſa ergo multiplicatione, duo proponuntur numeri: multiplicandus ſcilicet, qui pro unitatum alterius multitudine uenit iterandus: & multiplicãs, qui alium metitur numerum, & ſemper aduerbialiter exprimitur. *Nu. multiplicandus. Multiplicans.* Quanuis autem duo numeri ſeſe adinuicem multiplicantes, producant numeros inuicem æquales: faciliùs tamen, maiorem numerum per minorem, quàm è diuerſo multiplicamus. 2 Multiplicantur autem numeri, aut digiti per digitum: aut articuli per digitum, uel articulum: aut denique compoſiti per digitum, articulum, aut compoſitum numerum. *Quot modis fiat multiplicatio.* Digitorum itaque multiplicatio, in promptu ſemper habenda eſt: ſi reliquas uolueris perficere multiplicationes. *De mutua digitorum multiplicatione.* Hęc autem digitorum multiplicatio, tum uſu naturali, tum exercitio acquiritur: utpote, quæ ſtatim nota, uel admodum facilis eſt, potiſsimum ubi multiplicans 5 uel 6 nõ excedit unitates. Quòd ſi digitus multiplicans 5 uel 6 ſuperauerit unitates: in hunc modum ipſorum digitorum multiplicationem alleuiabis. *Regula ubi multiplicans digitus, maior eſt 5 uel 6 unitatibus.* Duc unius differentiam à denario numero, in differentiam alterius: & productum ſubſcribe. Deinde, ſubtrahe unius differentiam ab altero: & relictum numerum, in denarum reponito ordinem, aut prioribus (ſi adfuerint) denis adiungas. Conſurget enim numerus, ex ipſorum digitorum mulrum multiplicatione procreatus. Vt ex sequẽtibus exemplis, colligere haud difficilè potes.



Poteris etiam, prę fatam digitorum multiplicationem faciliorem reddere, ubi alter fuerit par: si per illius dimidiũ multiplicaueris reliquum, & productum duplaueris numerum. Vt si proponãtur 9, per 8 multiplicanda, duces 9 in 4, fient 36: quę bis sumpta, cõficiunt 72. Haud aliter facito de cęteris. *Notandum.*

Sed consulo, cum laboriosam uolueris effugere talium digitorũ multiplicationẽ, ut præ oculis habeas obiectam tabellam. In cuius alterutro lateralium digitorum ordine, si multiplicandum acceperis digitũ, in reliquo uerò multiplicãtem: offendes ad utriusque concursum, numerum ex ipsorum digitorum multiplicatione productum. Vtpote, si acceperis 8 in uertice, 7 uerò in ordine læuo: sese offerent ad cõmunem angulum 56, quæ ex ductu 8 in 7 procreantur. *Alia digitorũ multiplicatio, per propriam tabellam.*

Tabella multiplicationis digitorum numerorum.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

3 His præmissis, docendũ est qualiter numerus compositus, uel articulus, per ipsum digitum multiplicetur. Et in primis compositus. Subscribatur ergo digitus multiplicans, sub primo compositi & multiplicãdi numeri elemento siue limite: unà cum lineola, sub utroq; transuersaliter interiecta. Deinde multiplicentur singula ipsius compositi numeri elementa, per ipsum digitum, ab unitatibus exordiendo: & considerentur sigillatim producti ex qualibet multiplicatione numeri, an uidelicet fuerint digiti, articuli, aut ex digito & articulo compositi. Si primum acciderit: subscribantur ipsi digiti, sub lineola trãsuersali, & pro- *Vt multiplicandus compositus numerus, per digitum.*

prio limite. Si autem fuerint articuli: subscribatur tziphra 0, & seruetur articulus. Si demum ex digito & articulo, iidem producti componantur numeri: subscripto digito, reseruetur iterum articulus. Quot autem fuerint denæ, ipsum articulũ alterutro duorum modorum reseruatum denominantes: tot adiiciantur unitates proximè sequenti multiplicationi, aut in eodem proximè sequẽti reponantur limite, ubi tziphra eundem occupauerit limitem, uel ad ultimum multiplicãdi numeri peruentum fuerit elementũ. Cùm enim unusquisq; limes, decuplus sit limitis dextrorsum immediatè præcedentis: quotlibet decẽ unitates dextri, per solam unitatẽ in proximo limite uersus læuã (ut in additione) repræsentantur. Multiplicatio nanque, additio quædam esse uidetur: hoc solùm excepto, quoniam in additione inuicem addendi proponuntur numeri, in ipsa autem multiplicatione simul procreantur & adduntur. Ex hac itaq; numeri compositi per digitum multiplicatione, omnem (etiam quantumuis difficilem) absoluimus numerorum multiplicationem. Ea autem pẽdet ex prima secundi elementorum Euclidis: nam digitus multiplicãs, est ueluti quædam linea indiuisa: compositus autem & multiplicandus numerus, instar lineæ in quotcunque segmenta diuisæ, utpote in unitates, denas, centenas, millenas, &c. Qui igitur ex ipso digito, & quolibet ordine uel elemento multiplicãdi procreantur numeri: æquales sunt ei, qui ex eodem digito & toto multiplicando producitur numero. Sit uerbi gratia, hic numerus 25038, per 5 multiplicandus. Dispositis (ut prædiximus) numeris, 8 in primis ducta in 5, faciunt articulum 40: subscribitur ergo 0, & seruãtur 4 articuli denæ. Deinde 3 in 5 ducta, efficiunt 15, quibus adduntur 4, reseruatum denominantia articulum, consurgunt 19: subscribitur itaque digitus 9, & reseruatur articuli dena. In sequenti ergo limite, reponitur 1: cùm tziphra 0, ipsum occupet limitem. Postmodùm 5 per 5 multiplicata, efficiunt 25: subscribitur ergo digitus 5, & reseruantur 2, ipsum denominantia articulum, scilicet duas denas.

De ratione supradictæ multiplicationis.

Vnde pendeat supradicta ratio multiplicandi.

Exemplum multiplicationis cõpositi numeri, per digitum.

Tandem

Tandem 2 in 5, faciunt 10, quibus adduntur 2, conſurgunt 12: quæ ſuis elementis & limitibus ſubnotantur, ipſam denam in ſuccedentem traducendo limitem. Reſultabunt ergo ex ipſa multiplicatione, 125190.

	2	5	0	3	8
					5
1	2	5	1	9	0

4 Si autem multiplicandus numerus fuerit articulus, cuius primi limites tziphris tantùm occupantur: utcunque alleuiabitur ipſa multiplicatio. Nam multiplicatis per ipſum digitũ reſiduis elementis articuli numeri (à primo ſignificatiuo exordio ſumpto) uti nunc expreſsimus: eædem tziphræ dextrorſum ueniunt anteponendæ. Vt ſi uelles multiplicare 25000, per 7, potes multiplicare ſeorſum 25, per 7, producentur enim 175: quibus ſi anteposueris 000 ipſius multiplicandi numeri, conſurgent tandem 175000. Tantus eſt numerus, ex præfata multiplicatione procreatus. *Multiplica. articuli, per digitum.* *Exemplum.*

5 Ex his facilè colligitur multiplicatio compoſiti numeri per articulum, uel ipſius articuli per articulum: de articulo uelim intelligas, ubi tziphræ ſolas primas occupant ſedes. Vtpote, ſi propoſitum fuerit multiplicare 173, per 20: multiplicabis 173 per 2, fient 346, quibus antepones articuli tziphram 0, conſurgent 3460. Hinc patet eundem numerum 173, per 200 multiplicatum, conficere 34600. Item ſi numerus 1730, per eundem articulum 20 offeratur multiplicandus: duces in primis ſeorſum 173 per 2, fient rurſum 346, quibus geminas antepones tziphras, alteram quidem ex parte multiplicandi, alteram uerò ex parte multiplicantis numeri: conſurgent 34600. Vel ſi eundem numerum 1730, per 200 ſupradicto modo multiplicaueris: producentur tandem 346000. Haud alienum habeto indicium, de quibuſcunque ſimilibus, ſimiliterque propoſitis numeris. *De compoſiti per articulũ, uel ipſius articuli per articulum multiplicatione.*

6 Reliquum eſt, oſtendere qualiter compoſitus, per compoſitum numerũ multiplicetur: quæ multiplicatio, omniũ uidetur eſſe difficillima. Hanc ergo multiplicationem, ex præmiſſa compoſiti numeri per digitum multiplicatione, haud dif- *Multiplicatio numeri compoſiti, per compoſitum.*

ficilè colligere licet. Subſcripto nanque multiplicante ipſi multiplicando numero, pro ratione limitū, & elementorum ordine, unà cum lineola in tranſuerſum de more poſita: ducantur ſingula ipſius multiplicandi numeri, in ſingula multiplicantis elementa, & ſinguli ſubſcribantur productorum numerorum ordines, ueluti nuper demonſtrauimus. ſic tamen, ut quemadmodum numerus ex unitatum multiplicatione procreatus, ab ipſis unitatibus inchoatur: haud aliter, qui ex denarum multiplicatione producitur, ab ipſis denis initietur: & qui ex centenis, à centenis: & qui ex millenis, à millenis: & ſic cōſequenter. Omnes enim limitum digiti excepto primo, articulum repræſentāt numerum: & articulum à denis expreſſum unica præcedit tziphra o, articulum uerò à centenis denominatum duæ oo, & à millenis tres ooo, & ſic deinceps. Idem ergo fit, ac ſi per denarium, centenarium, aut millenarium, &c. propoſitus multiplicaretur numerus. Quoties tamen tziphra o, intermedium aliquem numeri multiplicantis occupauerit limitem: illum ſola tziphra pendenter occupabis, & ad ſequentem (ſi occurrit) accedes multiplicationem. His autem productis numeris, ſubſcribes rurſum lineolam tranſuerſalem: ſub qua, ipſius additionis officio, in unum tandem ueniunt coaceruandi numerum. Is enim erit, qui ex propoſita numerorum multiplicatione reſultat. Obiiciatur, exempli cauſa, hic numerus 5423, per hunc numerum 1304 multiplicandus. Multiplicatis itaque ſingulis elemētis ipſius numeri 5423, per 4 unitates multiplicantis: producentur 21692. Et quoniam ſequentem numeri multiplicantis limitem, occupat o: ſubſcribitur pendenter o, quæ ſecundum producti numeri itidem occupet limitem. Deinde multiplicato eodem numero 5423 per 3, hoc eſt, tres centenas multiplicantis, fiunt 16269, à loco centenarū, uerſus læuā diſtribuenda: utpote, quæ poteſtate hunc repræſentant numerū 1626900. Tandē multiplicato præfato numero per 1, idē redit numerus 5423, à millenis læuorſum ſub-

Exemplū multiplicationis compoſiti numeri, per compoſitum.

ſum ſubſcribēdus: nam poteſtate hunc repræſentat numerum, 5423000. Subſcripta demum lineola, hi omnes producti, in unū coaceruētur numerū, quem offendes eſſe 7071592. Tantus eſt igitur numerus, ex propoſita multiplicatione reſultans.

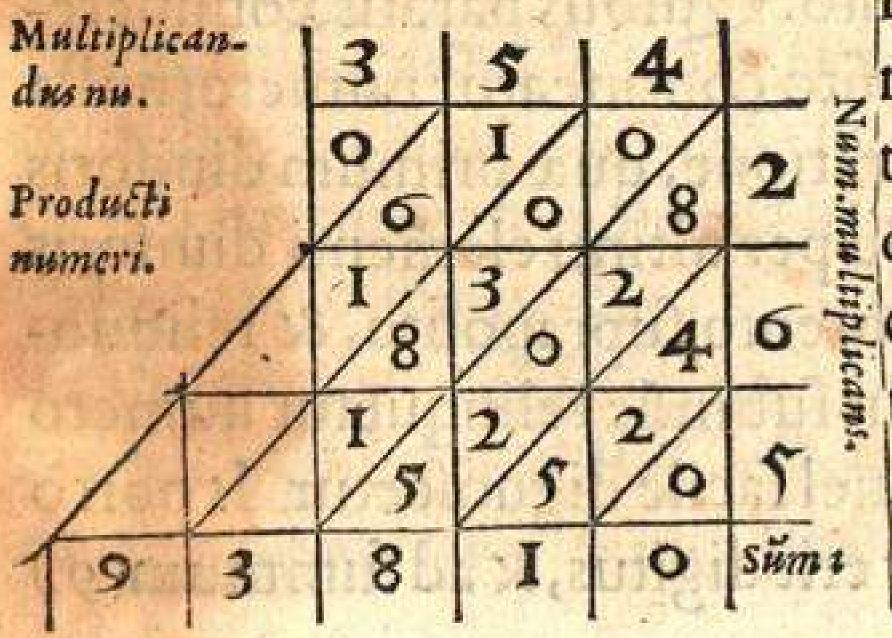
			5	4	2	3
			1	3	0	4
		2	1	6	9	2
1	6	2	6	9.	0	
5	4	2	3			
7	0	7	1	5	9	2

Poteris in maiorem artis expreſsionem, duo ſuccedentia diſcurrere multiplicationis exēpla. In quorum primo, 20507 per 4510 multiplicata, producūt 92486570. In ſecundo uerò, hic numerus 93810, ex multiplicatione 354, per 265 generatur. *Alia multiplicationis exempla.*

			2	0	5	0	7
				4	5	1	0
		2	0	5	0	7	0
1	0	2	5	3	5		
8	2	0	2	8			
9	2	4	8	6	5	7	0

		3	5	4
		2	6	5
	1	7	7	0
2	1	2	4	
7	0	8		
9	3	8	1	0

7 His addere iuuat aliū multiplicādi modū, quo nullus reſeruatur articulus: iis qui laborant memoriæ labilitate, admodū gratum. Parādus eſt in primis abacus (ut rem ipſam acu tangamus) lineis inuicem parallelis in quadrangula diſtinctus: unoquoque quadrangulo, per lineolas tranſuerſales diagonaliter ſubdiuiſo. Supraſcripto poſtmodū multiplicando numero: ipſius multiplicantis elemēta dextrorſum, inſtar gnomonis, pro quadrangulorum ordine diſtribuātur. Tandem ſingula multiplicandi numeri, in ſingula multiplicantis elementa ducantur: & producti numeri, in communi locentur quadrangulo: digiti quidem infra diagonalem, articuli uerò ſupra. Componantur tandem ſingulorum numerorum ordines, ſub ipſis diagonalibus lineis trāſuer- *Alius multiplicandi modus, omnium facillimus.*



ſaliter comprehenſi, à dextro & omnium infimo quadrãgulo, exordio ſumpto. Reſultabit enim numerus, ex propoſita multiplicatione generatus. Vt ex proximo, & de induſtria repetito, cõſpicere licet exemplo: in quo numerus 354, per 265 multiplicatus, producit rurſum 93810.

De diuiſione prædictorum integrorum. Cap. 5.

1 *Diuiſionis diffinitio.* Diuidere eſt, oblatis duobus numeris inæqualibus, maiorem ipſi minori ęqualiter diſtribuere: uel ipſum minorem numerum, à maiori quoties fieri poteſt artificialiter auferre: diuiſio enim, ſubtractio quædã eſſe uidetur. Diuidere nanq; numerum æqualem per æqualem, uanũ: & minorem per maiorem, eſt impoſsibile. Maior itaque numerus, diuidẽdus: minor uerò, diuiſor appellatur. qui autem ex diuiſione procreatur, quotus nõ iniuria dicitur: oſtẽdit enim quoties diuiſor in ipſo diuidendo contineatur numero, ſiue quotam partem maioris numeri unicuique ſingulari minoris competentem.

Nu. diuidendus. *Diuiſor.* *Nu. quotus.*

2 *Summarium diuiſionis artificium.* Generalis itaque, & omnium fidiſsimus diuidendi modus eſt talis, ut ſequitur. Subſcribantur ipſi diuidendo numero æquidiſtãtes lineolæ, & ſub illis uerſus læuam diuiſor collocetur numerus: ſic uidelicet, ut illius ultimum elementum, ultimo ipſius diuidendi læuorſum reſpõdeat elemento, & reliqua reliquis ſuo ordine. ni forſitan numerus ipſi diuiſori reſpõdens (qui eſt pars diuidẽdi) ſeorſum conſideratus, eodem numero diuiſore minor offendatur: tũc enim ultimum ipſius diuiſoris elementũ, ſub penultimo diuidendi locandum eſt elemento. Quibus paratis, conſideretur quoties diuiſor in ſuprapoſito contineatur numero (nulla eorum elementorum habita ratione, quæ primum diuiſoris antecedunt elementum) quod per ultimi elementi diuiſoris numeri, cum numero uel elemento ſuprapoſito, & reliquorum elementorum cum eo qui ſubinde relinquetur numero diligentem comparationem, uel facilè dignoſcetur. Is porrò numerus quotus (qui ſemper erit digitus, & ad ſummum 9)

inter

inter ęquidiſtantes lineolas,ſuper primū diuiſoris elemētum collocetur.deinde per ſingula diuiſoris elemēta multiplicetur:& productus ex qualibet multiplicatione numerus, à ſupra reſpondenti ſubtrahatur numero,reſiduo (ſi adfuerit)debitè ſupranotato,deletis priùs elementis,à quibus ſubtractio facta eſt.Hoc primo diſcurſu peracto,renouetur diuiſor,proximè relictum diuidēdi præoccupando limitem,& diſcurſus priori ſimilis iteretur: ídq; toties continuetur, quatenus primum diuiſoris elementum, primo diuidendi numeri reſpōdeat elemento.At ſi contingat ipſum diuiſorem,maiorē forſitan eſſe reſpondenti à primo eius elemento uerſus lęuā numero:ſubſcribatur o, loco ipſius quoti digiti,& diuiſor ipſe (priore cancellato)uelut antea renouetur.Quòd ſi operatio- *De reſiduo numero.*
ne finita,aliquid ex diuiſione relinquatur: id operæpretium eſt eſſe minus diuiſore(nam ſi ſecus acciderit,erratum eſt) & ab illo, ſub interiecta lineola poſito denominari. Ex his ſe- *Notandum.*
quitur diuiſionem tanto faciliorem eſſe,quanto diuiſor paucioribus exprimetur elementis ſignificatiuis,aut ſiniſtra elementa ſignificatiua dextris habuerit maiora:tunc enim digi-
3 tus quotus faciliùs elicitur. Proponatur,exempli gratia,hic *Diuiſionis exemplum.*
numerus 12960, per 32 diuidendus. Subſcriptis itaq; parallelis,cùm duo ipſius diuiſoris elementa maiorē efficiant numerum,quàm duo ultima numeri diuidendi: collocādus eſt diuiſor ſub 29, cui ſupra reſpondebunt 129. Et quoniā 3 in 12,atq; 2 in 9 quater inueniuntur:euidens eſt,diuiſorem ſub ipſis 129 quater contineri. Scribantur ergo 4 ſupra 2, pro priùs inuēto numeri quoti digito. Poſtmodùm auferātur ter 4 à 12,nihil relinquetur:deleantur ergo 12. Auferantur cōſequenter bis 4,hoc eſt 8,à 9, relinquetur unitas: quæ ſupra, 9 priùs deletis, annotetur. Renouato poſtea diuiſore per unicum limitem uerſus dextram, illi reſpondebunt tantummodò 16: ſcribatur ergo o, loco digiti quoti, & renouetur iterum diuiſor. Quo facto, illi reſpondebunt 160. Et quoniam 3 in 16 quinquies, & 2 in relicto numero (qui erit 10) quinquies itidem reperiuntur: patet illico, diuiſorem

quinquies in 160 contineri. Scribantur ergo 5 inter parallelas. & tollantur ter 5, utpote 15, ab eisdem 16: relinquetur 1. Auferantur deinde bis 5, à relictis 10: nihil tādē relinquetur. Cācellatis igitur diuidendi numeri relictis elementis, colligentur pro quoto & optato numero 405, ostendentia diuisorē ipsum 32, quinquies & centies quater in proposito numero diuidendo contineri. Contemplentur in maiorem singulorum euidentiā, duo sequentia diuisionis exempla. In quorū primo 359040, diuisa per 320, producunt 1122. In secundo autem exēplo, procreantur 2750, ex diuisione 1468524, per 534: relictis ex diuisione 24, quæ $\frac{24}{534}$ dicenda sunt. & breuiùs per $\frac{12}{267}$ repræsentantur.

		1	1	
1	2	9	6	0
		4	0	5
	3	2	2	2
		3	3	

Alia diuisionis exempla.

		1			
	3	7	6		
3	5	9	0	4	0
		1	1	2	2
3	2	0	0	0	0
	3	2	2	2	
		3	3		

			1			
		2	6			
		5	9	2	$\frac{24}{534}$	
		0	0	7		
1	4	6	8	5	2	4
			2	7	5	0
	5	3	4	4	4	4
		5	3	3	3	
			5	5		

4 Alium porrò diuidendi modum, tibi demum excogitauimus: quo laboriosas (dum occurrerint) faciliores reddere poteris numerorum diuisiones. Scribātur ergo seorsum nouem elementa significatiua, ab 1 in 9 descendendo distributa. Deinde ad læuam unitatis regionem, diuisor ipse collocetur. hic postea dupletur: & productus numerus, subscribatur è regione binarij. Cui duplato numero, ipse diuisor addatur: & inde consurgens numerus, è regione ternarij constituatur. Huic rursum numero, idem adiiciatur diuisor: & qui resultabit, è læua regione quaternarij collocetur. Et sic deinceps, donec ad nouenarium peruentum sit elementum. Vt de numero 54, ex sequenti formula exemplum capere

Facilior ac expeditior diuidendi modus.

pere uel facilè potes:cuius adminiculo, datus quiuis numerus,per ipſum numerum 54 promptiſsimè diuidi poterit. Eſto in exemplum datus numerus 78418, per ipſum numerum 54 diuidendus. Subſcriptis igitur 54, ipſis 78 ultimis numeri diuidendi elementis:notetur 1 ſuper 4, inter lineas parallelas (nam 54 in 78 ſemel contineri, prima fronte fit manifeſtum) & ſubductis ſemel 54 ab ipſis 78, relinquētur 24, quæ ſupra notētur,& deleātur 78. Poſtea renouetur diuiſor (priore cācellato) cui ſupra reſpōdebunt 244, quæ non ſunt in diuiſoris formula: accipiatur ergo proximè minor numerus 216,& 4 è dextra illius regione,pro quoto digito inter lineolas collocando. Et detractis 216, à 244,relinquētur 28: quibus ſupra notatis, & deletis 244, renouetur iterū ſolito more diuiſor. Cui reſpondebunt 281,quæ non ſunt in ipſa diuiſoris formula:accipiatur ergo proximè minor numerus 270, & ad dextram illius regionem 5,pro quoto digito.Subtractis autem 270 ab ipſis 281,relinquentur 11: deleantur ergo 28, & notetur 1 ſuper 8. Tandem conſtituto diuiſore ſub reſiduis 118, accipiatur ex præfata formula proximè minor numerus,utpote 108, & 2 ad dextrā pro quoto digito: quo notato,ſubtrahantur 108 ab ipſis 118, relinquētur 10, quæ poſita ſuper 54 efficient $\frac{10}{54}$. Concludendum igitur, 78418, diuiſa per 54, procreare 1452, relictis. $\frac{10}{54}$, quæ breuiùs per $\frac{5}{27}$ repræſentantur. Haud aliter facito de cæteris quibuſcunque numerorum diuiſionibus.

Exemplū diuiſionis per ſecundū modum.

Diuiſor	54	1	Digiti pro quoto numero ſumendi.
Nu. ex continua diuiſoris additione producti.	108	2	
	162	3	
	216	4	
	270	5	
	324	6	
	378	7	
	432	8	
	486	9	

	~~2~~	~~1~~		$\frac{10}{54}$
~~2~~	~~4~~	~~8~~		0
~~7~~	~~8~~	~~4~~	1	~~8~~
	1	4	5	2
~~5~~	~~4~~	~~4~~	~~4~~	4
	~~5~~	~~5~~	5	

De eorundem integrorum reductione. Cap. 6.

1 REducere eſt,numerum potentia groſsiorem, in ſubtiliorem,aut è diuerſo reuocare. Groſsiores potentia dicuntur numeri,qui extrinſecam denominationem ſor-

Reductionis diffinitio.

titi ſunt maiorẽ:Subtiliores uerò,qui minorẽ. Vt in monetis, franci dicuntur maiores duodenis: & duodeni,turonis itidẽ maiores. Idem habeto iudiciũ, de quibuſcunque ſimilibus.

2 *Reductio groſſiorum in ſubtiliora.* Fit autẽ reductio numeri potẽtia groſsioris in ſubtiliorem, per multiplicationẽ,in hunc qui ſequitur modũ. Cõſideretur quot ſingularia ſubtilioris cõtineat unũ ſingulare groſsioris, & per numerũ quotum reducendus multiplicetur numerus: ꝓducetur enim numerus groſsioris,in ſubtiliorẽ reuocatus.

Exemplum. Vt in monetis(uerbi gratia)ſi proponãtur 150 franci,in duodenos reducẽdi,multiplicẽtur 150 per 20,producentur 3000: tãtus eſt francorũ in duodenos reductus numerus. Quòd ſi eoſdem 3000 duodenos,reducere iuuet ad turonos, multiplicentur 3000 per 12: reſultabunt 36000 turoni. Francus enim,continet 20 duodenos: & unus duodenus,turonos 12. Horum exemplorum,ſubſcriptas libet addere formulas.

Franci reducendi.	150	*Duodeni reducendi.*	3000
Duodeni 1. franci.	20	*Turoni 1.duodeni.*	12
Duodeni reducti.	3000	*Turoni reducti.*	36000

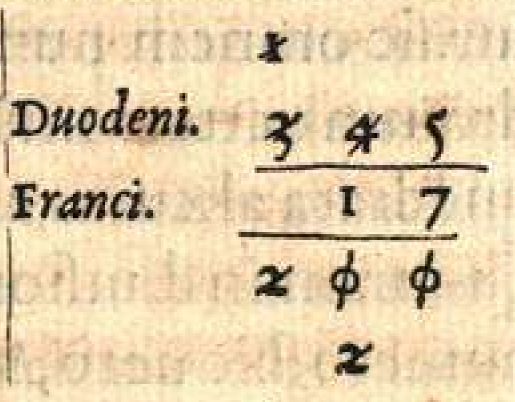
3 *Reductio ſubtiliorum in groſsiora.* Reductio uerò numeri ſubtilioris, in numerum potentia groſsiorem: officio diuiſionis ſic abſoluitur. præſcrutandum eſt in primis,quot ſingularia ſubtilioris cõficiant unum ſingulare groſsioris numeri. Nam ſi per quotum numerũ, ſubtilior & reducendus partiatur numerus:procreabitur numerus,ex ipſa diuiſione proueniẽs.

Exemplum. Vt ſi præfatos 36000 turonos,uertere libuerit in duodenos, diuidendi ſunt ipſi 36000 turoni per 12:prodibunt 3000 duodeni.Quos ſi expediat ad francos reuocare, diuidendus eſt idem numerus 3000 per 20: prouenient enim franci 150. Quoniam 12 turoni, efficiunt 1 duodenum: & 20 duodeni, 1 francum.Sequuntur prædictorum exemplorum formulæ.

			1
Turoni reducendi.	36000	*Duodeni reducendi.*	3000
Duodeni reducti.	3000	*Franci reducti.*	150
Turoni 1. duodeni.	12222	*Duodeni 1. franci.*	2000
	111		22

Porrò

4 Porrò ſi aliquid ex ipſa diuiſione (ut plerunque fit) relinquatur: id à reducendo, aut diuiſore denominandum eſt numero. Vtpote, ſi 345 duodenos, ad francos reducere fuerit operæpretium: abſoluta diuiſione 345 per 20, fient pro quoto numero 17 franci, relictis 5 duodenis, qui unius franci $\frac{5}{20}$, uel $\frac{1}{5}$ conficere uidentur. *De reſiduo poſt diuiſionem.*

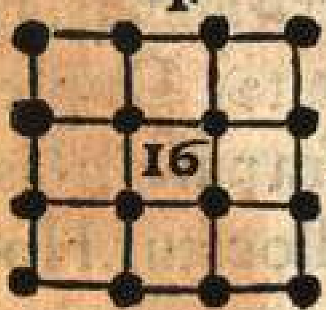


5 Reductio itaque numerorum ſpecie plurimum inuicem diſtantium, per continuatam intermediorum & proximè ſuccedentium numerorum reductionem abſoluenda eſt. Commodiùs enim reducuntur fräci ad duodenos, & duodeni poſtmodum ad turonos: quàm franci immediate ad turonos, aut è diuerſo. Quod autem hic de monetis in exemplum reuocauimus: de ponderibus, menſuris, atque ſimilium rerum, uel magnitudinum inuicem reducibilibus partibus, pendenter & cenſendum & operandum eſſe uelim intelligas. Sed hæc ſatis. *Notandum.*

De inuentione quadratæ radicis in numeris integris. Cap. 7.

1 Quadratus numerus eſt, qui ex ductu alicuius numeri in ſeipſum producitur: ad ſimilitudinẽ quadrati geometrici, quod per motum lineæ rectæ, iuxta propriam longitudinem, abſtractiuè figuratur. Radix uerò quadrata, ſiue latus quadrati numeri, eſt numerus per ſuiipſius multiplicationem quadratum efficiens numerum. Vt obiecta numeri 16, uidetur exprimere figura: cuius latus quodlibet, ſiue radix eſt 4, area uerò 16 unitatibus contexta. Quadratã igitur radicẽ dati extrahere numeri, eſt numerũ artificialiter inuenire, qui in ſeipſum ductus præfatũ reſtituat numerũ ſi fuerit quadratus: uel q̃ maximũ poterit quadratũ, in eodẽ numero cõtẽtũ. Omnis itaq; numerus, alicuius numeri quadrata uidetur *Quadrati numeri diffinitio.* *Radix quadrata.* *Quid inuenire radicem quadratam.*

4



4

Quadratè multiplicare. eſſe radix:tametſi non omnes numeri,ſint quadrati. Ducere igitur numerũ in ſeipſum,& quadratè multiplicare,idẽ ſunt. Sicut tandem omnis figura rectilinea,in quadratum reſoluitur:ſic omnem numerum,per extractionem radicis, in quadratum uertere nitũtur Arithmetici. Inuenitur autem radix quadrata alicuius numeri,per uiam diuiſionis: hoc excepto, quoniam in diuiſione diuiſor ipſe cum diuidẽdo proponitur numero,hic uerò,& diuiſor, & quota radix ſimul inueſtigã-

2 tur. Vt igitur inuentionis quadratæ radicis artificium, clariùs intelligi poſsit,artem ipſam, cum exemplo ſimul diſcurrere eſt operæpretium. Sit igitur (ut ad rem ipſam deueniamus) datus hic numerus 5308416, cuius quadratã oporteat inuenire radicem. Huius itaque numeri bina elementa, intercidentibus lineolis, à dextris ſiniſtrorſum progrediẽdo ſeparentur:nec curandũ eſt,an lęua & ultima diſtinctio,unicum,uel duo cõprehendat elemẽta. Duæ poſtmodùm (ut in diuiſione) ſubſcribantur parallelæ,futuram radicem,ut quotum in ipſa diuiſione contenturæ. Erũt igitur tot radicis elementa,ſiue limites, quot in ipſo numero dato acciderint di-

Ars inueniendi quadratam oblati numeri radicem.

Primæ radicis diſcurſus. ſtinctiones. Et quoniã numerus unico uel duobus elementis expreſſus,radicem habet unius duntaxat elementi, & ex læua & ultima diſtinctione 5 ſolummodò relinquũtur, quæ non faciunt quadratum numerum: accipiendus eſt igitur numerus quadratus proxime minor, utpote 4, cuius radix eſt 2, ſcribenda ſub 5 intra parallelas. Et

```
1
5 | 3 0 | 8 4 | 1 6
2
―――――――――――――――――――
    4
```

ſubtractis 4 ab ipſis 5, reliqua ſupra notetur unitas. Dupletur tandem ipſe radicis digitus, fient 4: quæ infra parallelas, ſub 3, hoc eſt, immediatè præcedenti limite collocẽtur. Hoc igitur modo, primus radicis digitus, ex ſola nouem digitorum in ſeſe facta multiplicatione dignoſcitur: quam in expeditiorem omnium inuentionem, obiecta perſtrinximus tabella.

	Digiti.	Quadrati.
Semel	1	1
Bis	2	4
Ter	3	9
Quater	4	16
Quinquies	5	25
Sexies	6	36
Septies	7	49
Octies	8	64
Nonies	9	81

tabella. Continet enim ipsa tabella, singulos numeros quadratos, ex nouem digitis quadratè multiplicatis resultantes: qui cæteris etiã quæsitæ radicis poterunt inseruire digitis. Secundus autem radicalis digitus, in hunc modum consequenter inueniendus est. Diuidantur 13, quæ duplato respõdent numero, per ipsum duplatum, utpote per 4, prouenient 3: quæ ducta in ipsa 4, faciunt 12, quibus si addatur quadratum ipsorum 3, utpote 9, consurgent 129, quæ possunt auferri à 130. Scribantur ergo 3 intra parallelas sub 0, hoc est, dextro elemento proximis lineolis comprehenso. Et ducantur 3 in 4, fient 12: quæ tollantur à supra respondentibus 13, relinquetur unitas, notanda super 3, deletis eisdem 13. Postea ducantur 3 radicis in sese, fient 9: quæ tollantur à 10, relinquetur iterum unitas, quæ notetur super 0, ipsis 10 priùs deletis. Duplentur tandem 23, inuenta scilicet radicis elementa, fient 46: quæ sub 18, ab immediatè præcedenti limite uersus læuam, infra parallelas (deleto priori duplato) ueniunt annotanda, ut hæc ostendit numerorum formula.

Secundus radicis discursus.

~~1~~ ~~1~~ 1
~~1~~ | 3 ~~0~~ | 8 4 | 1 6
2 3
~~4~~ 4 6

Et quoniam super ipsa 46, respondent tantum 18, quæ per eadem 46 diuidi non possunt: idcirco abundaret unitas, pro tertio radicis digito. Scribenda est igitur 0, intra parallelas, sub 4, loco digiti radicalis, quæ ipsum radicis occupet limitem. Id autem toties obseruetur, quoties duplatus numerus maior fuerit suprapo sito. Deletis postmodùm ipsis 46, duplentur rursum 230, hoc est, inuenta radicis elemẽta, cõsurgẽt 460: quæ infra parallelas

Tertius radicis discursus notandus.

~~1~~ ~~1~~ 1
~~1~~ | ~~3~~ ~~0~~ | 8 4 | 1 6
2 3 0
~~4~~ ~~4~~ ~~6~~ 6 0
4

de more collocentur, o quidem ſub 1, & reliqua ſuo uerſus læuam ordine: ut præcedens habet numerorũ formula. Ad quarti demum & ultimi digiti radicalis inuentionem accedendo, diuidatur numerus 1841, ſupra 460 duplatum occurrens numerum, per ipſa 460, fient pro quoto numero 4: quæ ducta in 460 efficiunt 1840, unde relinquetur unitas, quæ unà cum 6 faciet 16, à quibus quadratum ipſorum 4 poterit auferri (ſi autem non poſſet auferri, accipiendus eſſet digitus unitate minor) Scribantur ergo 4 ſub 6, intra parallelas. Poſtea ducantur ipſa 4, in 4 numeri duplati, fient 16: quæ tollantur à 18, relinquentur 2 notanda ſuper 8, deletis priùs eiſdem 18. Ducãtur rurſum eadem 4 in 6, fient 24: hæc ſubducta à ſupra reſpondentibus 24, nihil relinquunt. deleantur ergo 24: & ducantur tandem 4 radicis in ſeſe, fient 16, ſubducenda à reliquis 16, & nihil demũ relinquetur. Vnde præaſſumptus numerus 5308416, eſt quadratus: & eius latus, ſiue quadrata radix 2304.

Quartus radicis diſcurſus.

~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~2~~			
~~5~~	~~3~~	0	~~8~~	~~4~~	~~1~~	~~6~~
2		3		0		4
	~~4~~	~~4~~	~~6~~	~~6~~	~~6~~	
			~~4~~			

3 Quòd ſi forſitan (ut frequenter accidit) aliquis tandem relinquatur numerus: oblatus in primis numerus nõ erit quadratus, tantóque magis à quadrato diſtabit, quanto reſiduum ipſum fuerit maius. Debet autem idem reſiduum, ſi fecerit numerum imparem, à duplata radice (inſtar fractionis) denominari: uel ipſius dimidiũ ab ipſa radice, ubi parem fecerit numerum: & integræ radici tandem ſuperaddi. Hoc enim modo collecta radix, ſatis erit propinqua ueritati. Velut ex ſubſcriptis elicere poteris exemplis, in maiorem eorũ quæ diximus elucidationem adiunctis. In quorũ primo, numeri 204315, radix integra eſt 452: relictis 11, quæ $\frac{11}{904}$ dicẽda ſunt: bis enim 452, efficiunt 904. In ſecundo autem exẽplo, numeri 291612 quadrata radix, eſt 540: relictis 12, quorum dimidium (utpote 6) poſitũ ſupra radicem, facit $\frac{6}{540}$, quæ breuius per $\frac{3}{270}$, uel $\frac{1}{90}$ repræſentantur. Nunquam tamen, in non quadratis numeris, ueram habebis radicem: & data

Notandũ pro numeris non quadratis.

Alia extractionis quadratæ radicis exempla.

quan-

quantumuis præcisa, semper tamen præcisior dabitur, ut ex sequentibus deprehendere uel facilè licebit.

4	1 8	1	4		
2 0	4 3	1 5	2 9	1 6	1 2
4	5	2 $\frac{11}{904}$	5	4	0 $\frac{6}{540}$
8	9	0	1 0	0 8	
				1	

Procedimus autem in quadratarum radicum inuẽtione, per binas elemẽtorum dati numeri separationes, & duplationes inuentorum digitorum ipsius radicis: quoniã ad procreationem numeri quadrati, duo similes & æquales cõcurrunt numeri, ex quorũ multiplicatione idem quadratus fit numerus. Radix enim quadrata in seipsam ducta, binos tales uidetur repræsentare numeros: quasi bis sumpta, altera per alteram multiplicetur. 4 Alium libet adiungere modum inueniendarum nõ quadratorum numerorum radicum, longè quidẽ præcisiorem cæteris: idq; per fractiones sexagenarias (de quibus libro tertio) Mathematicis familiares. Dato itaq; numero, cuius radix quadrata utcũq; præcisa desideretur, antepone dextrorsum quotquot uolueris tziphrarum binarios, utpote, 00, aut 0000, uel 000000. Resultãtis inde numeri, quadratã (uti nuper docuimus) extrahe radicẽ, neglecto si abũdauerit residuo. Tolle postmodùm ab ipsa radice tot elementa dextra, quotus est dimidius antepositarum tziphrarum numerus: & reliqua uersus læuam occurrentia, pro integra seruato radice. Detracta consequenter elementa, multiplica per 60: & à producto numero, tolle rursum tot elemẽta dextra, quot sunt adiunctarum tziphrarum binarij: occurrentem autẽ ad læuam numerum, reponito in primorum minutorum ordinem. Ipsa rursum elementa subtracta, duc in 60, & à producto numero aufer tot, quot priùs elemẽta dextra: & relictum ad læuam numerum, fac secundam eiusdem integræ radicis fractionem, ab ipsis secũdis minutis denominatam. Id autem toties continuetur, quousque solæ detrahantur tziphræ. Hoc enim modo, radicem integram, unà cum minutis & secun-

Notandum.

Radices non quadratorum numerorum, præcisiores inuenire.

Notandum. dis,uel ultra(si libuerit) satis præcisam obtinebis. Quot igitur tziphrarum anteposueris binarios, tot habebis fractionũ genera: & proinde tanto præcisiorẽ radicem. Item si læuum subductorum elementorum fuerit tziphra, illud erit abiiciẽdum:sed prima fractio tunc erit secundorum, absq; minutis.

Exemplũ secũdi modi inueniendarum radicũ quadratarum.

5 Esto propositum,inuenire quadratam radicem numeri 28. huic anteponantur,in exemplum,quatuor tziphræ:cõsurget hic numerus 280000. Cuius radix,per antecedẽtem doctrinam est 529, relictis 159 minimè curandis:ut subiecta habet formula. Tollantur ergo 29 (nam duo tziphrarum binarij antepositi sunt) relinquentur 5, pro integra radice. Ducantur postmodum 29 in 60,fient 1740:tollantur rursum 40, & ipsa 17 reponantur in primum minutorũ ordinem. Multiplicentur consequenter 40 per 60, producentur 2400:auferãtur 00, relinquentur 24, quæ secunda minuta dicentur. Et quoniam ultimò detracta elementa sunt 00,non est ultra progrediendũ. Radix ergo quadrata numeri 28, est 5 integrorum,unà cum 17 minutis primis integri,& 24 secundis unius minuti. Poterunt(si uolueris) ipsa 29, in denariam fractionis rationem immediatè reuocari:sic ut 2 significẽt $\frac{2}{10}$ unius integri,& ipsa 9,unius decimæ $\frac{9}{10}$, quæ fere $\frac{3}{10}$ conficiunt, qualem fractionem haberes per primum extrahendi modum.

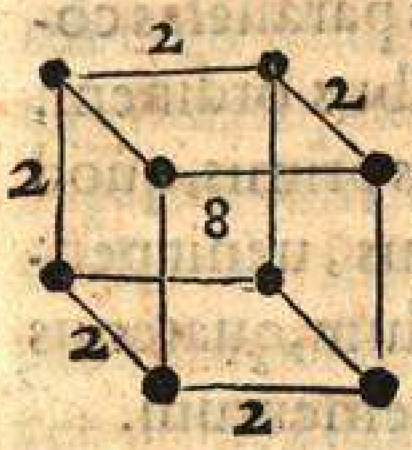
Notandum.

De Cubicæ radicis inuentione, Cap. 8.

Nu. cubus. *Radix cubica.* *Cubicè multiplicare.* *Cubicam extrahere radicem quid.*

1 CVbum solemus appellare numerum, qui ex ductu alicuius numeri in seipsum, & rursum in productum generatur. Radix porrò cubica,siue latus cubicum,est ipse numerus supradicto modo multiplicatus,cubum efficiens numerum. Cubicè ergo multiplicare, est datum numerũ in seipsum,& rursum in productũ ducere. Et proinde cubicam extrahere radicem,est numerum artificialiter colligere: qui ductus

ductus in se cubicè, datum efficiat numerum, si fuerit cubus, uel maximum cubum in ipso numero dato comprehensum.



Imaginatur ergo numerus cubus, instar corporis regularis Geometrici, sex quadratis superficiebus terminati, solidus: qualẽ obiecta ipsius octonarij & cubi numeri uidetur repræsentare figura, cuius latus siue radix cubica est 2. *Exemplum numeri cubi.*

2 Vt igitur ad cubicæ radicis inuentionem paucis accedamus: animaduertendum est in primis, ad cubi numeri procreationem, tres similes & inuicem æquales concurrere numeros. quorum primus ductus in secundum, facit quadratum: qui tandem per tertium multiplicatus numerum, restituit cubum. quos quidẽ numeros, radix ipsa cubica ter sumpta repræsentat. Quæcũque igitur per binarium, & unicam multiplicationem in quadratis absoluimus numeris: per ternarium, & geminam siue cubicam multiplicandi rationem, in cubis pendenter uenit obseruandum. Inuentio itaque radicis cubicæ, haud multum dissimilis est ei, quam de quadratis nuper tradidimus numeris: hoc in primis excepto. Quoniam dati numeri elementa, à primo uersus læuam intercidentibus lineolis trina separantur: & sub dextro cuiuslibet ordinis elemento, radicales constituuntur digiti, qui tot semper erunt, quot & ipsorum elementorum distinctiones. Inuentus autem & sub ultimo elementorum ordine constitutus primus radicis digitus, cubicè multiplicatur: & subtracto illius cubo à superiori numero, ipse digitus triplatur, productíque numeri primum elementum, sub medio proximi ordinis elemento, infra lineas æquidistantes collocatur, cæteris læuorsum ordine distributis. Secundus deinde radicis digitus, unà cum priùs inuento, in triplatum ducitur numerum: & productus inde numerus, per ipsum digitum (quod nõ fit in quadratis) rursum multiplicatur. Facta postmodùm producti subtractione, à numero supra triplatum posito: is tandem digitus cubicè multiplicatur, & resultans cubus à re- *Summaria cubicarum radicum adinuentio.*

E

ſiduo tollitur numero. Ambo demum reperti digiti triplantur:& conſurgentis numeri primum elementum, ſub medio rurſum proximi ordinis elemento, infra lineas parallelas cõſtituitur, cæteris uerſus læuam ſuum obſeruãtibus ordinem. Idem cõſequenter de tertio digito cum duobus primis, quod de ſecundo cum ipſo primo faciendũ iuſsimus, uenit pendenter obſeruandum: atque toties continuandum, quatenus ad primum oblati numeri peruentum fuerit elementum.

3 *Expedita digitorum radicalium adinuentio.* Tota ergo difficultas artis, ex ipſa radicalium digitorum inuentione pendere uidetur. Primum itaque digitum, & ex ſingulis digitis in ſeſe cubicè multiplicatis procreatos numeros, ex hac potes elicere tabella: ſumpto ad læuam digito, & ad dextram eius cubo. Reliquos autem digitos ab ipſo primo, hoc examinabis artificio. Decupla iam inuentum radicis numerum, ſolam anteponendo tziphram: & inde reſultãtem numerum duc in triplatum, & per productum diuide numerum ipſi triplato ſuperpoſitum. Quotus enim ex diuiſione procreatus digitus, erit pro radicali ſumendus: dum modo à reſiduo, & unà cum dextro elemento conſurgente numero, cubus ipſius digiti ſubtrahi poſsit. Secus enim eueniẽte, digitus ipſe ſola unitate uel ad ſummum binario minorandus erit. Hinc patet, quoties numerus triplato ſuprapoſitus, per decuplum inuentæ radicis numerum diuidi minimè poterit, tziphram o loco digiti radicalis eſſe notandam: atque ipſam radicem, ex eadem o & priùs inuentis digitis reſultantem, eſſe triplandam, & triplatum ipſum numerum ſub lineis parallelis ſupraſcripto modo diſtribuendum.

	Digiti.		Cubi.
Semel	1	*ſemel,*	1
Bis	2	*bis,*	8
Ter	3	*ter,*	27
Quater	4	*quater,*	64
Quinquies	5	*quinquies,*	125
Sexies	6	*ſexies,*	216
Septies	7	*ſepties,*	343
Octies	8	*octies,*	512
Nonies	9	*nonies,*	729

4 *Exemplũ extractionis cubicæ radicis.* Sit datus in exemplum numerus 40001688, cuius radix cubica deſideretur. Separatis igitur (uti nunc diximus) elementis, & ſubſcriptis de more parallelis

rallelis

rallelis,offendentur in extremo ordine 40. Cubus autẽ maximus in eo cõtentus numero, eſt 27: cuius radix eſt 3. notẽtur ergo 3, ſub 40: & ab illis detrahantur 27, relinquẽtur 13. Quibus ſupranotatis: triplẽtur 3, fient 9, infra lineas, ſub medio proximi ordinis (ſcilicet 0 0 1) elemento, ut in hac uides formula, notãda.

~~1~~	~~3~~						
~~4~~	~~0~~	0	0	1	6	8	8
	3						
			9				

Poſtea, decuplentur 3, fient 30: quæ ducta in 9, efficiunt 270. Diuidantur ergo 1300, per 270: prodibunt 4, relicto ſatis copioſo numero. Scribantur ergo 4 ſub 1, & ducantur 34 in 9, fient 306: quæ rurſum multiplicata per 4, reddunt 1224. His detractis ex 1300, relinquentur 76: quæ notabis ſuper 00, deletis 13. Cubus autem ipſorum 4, eſt 64: quo ſubtracto ex reſiduo numero, ſcilicet 761, relinquentur 697, ſcribenda ſuper 761. Triplentur tandẽ 34, fient 102, infra parallelas, ſub 768 (ut hic uides) diſtribuenda: deleto priùs triplato numero.

Diſcurſus ſecundi radicalis digiti.

		6	9				
~~1~~	~~3~~	~~7~~	~~6~~	7			
~~4~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	6	8	8
	3			4			
			~~9~~	1	0	2	

His abſolutis, decuplentur 34, fient 340: quæ ducta in 102, efficiunt 34680. diuidantur ergo 69768, per 34680; prouenient 2: quæ locentur ſub primo totiùs numeri elemento, intra lineas parallelas. Ducantur poſtmodùm 342, in 102, fient 34884: hæc rurſum per 2 multiplicentur, conſurgent 69768. quæ dempta ex ſupra reſpondentibus 69768, nihil relinquũt: deletis ergo 69768, detrahatur cubus ipſius 2 (utpote 8) à reliquis 8, nihil tandem relinquetur. Concludes igitur, præaſſumptũ numerum 40001688 eſſe cubum: & cubicam illius radicem, 342.

Tertius radicis diſcurſus.

		~~6~~	~~9~~				
~~1~~	~~3~~	~~7~~	~~6~~	~~7~~			
~~4~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~6~~	~~8~~	~~8~~
	3			4			2
			~~9~~	~~1~~	~~0~~	~~2~~	

5 Cùm autem extracta radice, aliquis (ut ferè ſemper accidit) remanſerit numerus: is à triplata radice, uel tertia illius pars

Notandum de numeris non cubis.

(aut tertiæ parti propinqua) ab ipſa radice denominetur. Quanto porrò idem reſiduũ maius fuerit, tanto plus numerus datus diſtabit à cubo numero, ex integra radice procreato, & magis accedet ad proximè ſuccedentẽ numerũ cubum.

Alia inuẽtionis cubicæ radicis exẽpla. In exemplum horũ reſiduorũ, ſequentes numerorũ libuit annectere formulas. In quarũ prima, numeri 15638 radix cubica eſt integrorum 25: relictis 13, quæ $\frac{13}{75}$ dicenda ſunt, ter enim 25 efficiunt 75. In ſecunda porrò formula, numeri 8120613 cubica radix eſt 201: relictis 12, quorum tertia pars eſt 3, quibus ſubſcribenda eſt ipſa radix in hunc modũ $\frac{3}{201}$. Radix ergo cubica primi numeri, eſt 25 & $\frac{13}{75}$: ipſius uerò ſecundi numeri cubica radix, 201 unà ferè cum $\frac{3}{201}$.

	~~7~~		~~1~~	1	3	
~~1~~	~~5~~	~~6~~	~~3~~		~~8~~	
	2				5	$\frac{13}{75}$
				~~6~~		

						2	
~~8~~	~~1~~	~~2~~	~~0~~	~~6~~	1	~~3~~	
2			0			1	$\frac{3}{201}$
		~~6~~		~~6~~	~~0~~		

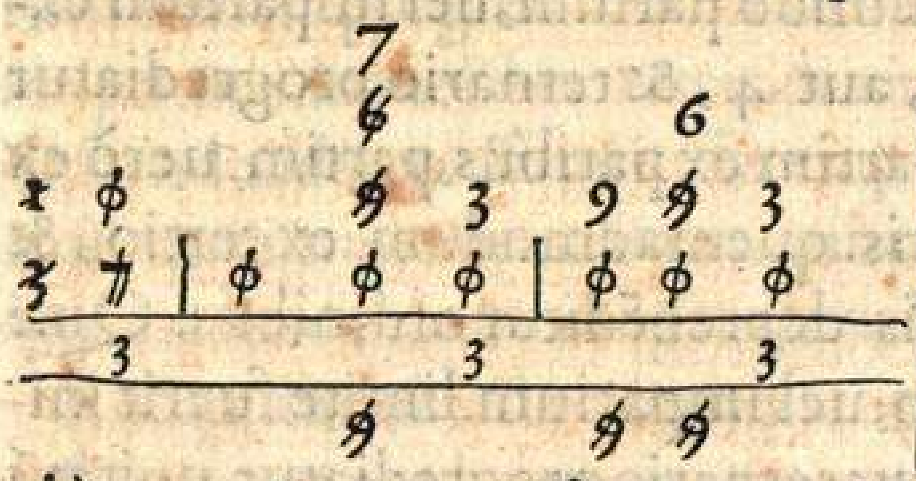
Non ſunt tamen ueræ radices: nam in numeris minimè cubis (ſicut & in non quadratis numeris) nunquam dabilis eſt radix quantumuis propinqua ueritati, quin liceat inuenire præciſiorem. Nec te prętereat, in naturali ſerie numerorum, ab 1 uſque ad 1000000, pro decem numeris quadratis unicum occurrere cubum.

6 *Ars inueniendi radices cubicas præciſiores.* IVVAT ET ALIVM tradere modum, quo radix non cubi numeri, præciſa magis extrahitur: ídque rurſum per ſexagenarias Aſtronomorum fractiones, quæ uniuerſis rerum ſupputationibus indifferenter accõmodari poſſunt. Anteponantur igitur dato numero tot tziphrarum ternarij, quot libuerit habere fractionum differentias, præter radicem integram: utpote 000, uel 000/000, aut 000/000/000, & ſic quantumlibet, ternario ſemper adiuncto tziphrarum numero. Conſurgentis inde numeri cubica radix extrahatur, uti nunc præcepimus: neglecto, ſi contigerit, reſiduo. Tollantur poſtmodùm ab ipſa radice tot elementa dextra, quot fuerint antepoſitarum tziphrarum ternarij: quæ autem ad læuam relinquentur elementa, pro integra radice ſumantur.

tur. Detracta consequenter elementa, ducantur in 60: & à producto numero tot dextra subtrahantur elementa, quot dempta sunt ab ipsa radice: relictus autem ad læuam numerus, in primum minutorũ redigatur ordinem. Subtracta rursum elementa dextra, per eundem numerum 60 multiplicentur: & à producto numero, tot quot priùs subducãtur elementa dextra: numerus autem læuorsum derelictus, pro secundis minutis accipiatur. Idque deinceps cõtinuetur, quatenus detracta elementa sint omnino tziphræ: quæ rursum in uanum per sexagenarium multiplicarentur numerum.

Quãto plures igitur anteposueris tziphrarum ternarios, tanto plures fractionum colligentur differentiæ: & radix proinde cubica tanto percisior. Memineris tamen (ut in quadratis) si detractorum ab ipsa radice elementorum sinistrum fuerit tziphra 0, illud esse reiiciendum: túncque nulla radicis pro- *Notandum.*

7 creari minuta, sed immediatè secunda. Esto propositum inuenire radicem cubicam numeri 37: huic (exempli gratia) duo præponantur tziphrarũ ternarij, consurgẽt 37000000. Quorum radix cubica, per antecedentem doctrinam adinuenta, est 333: relictis 73963, quæ nullo modo curanda sunt. *Exemplum secũdi modi extrahendarum cubicarum radicum.*



Tollantur ergo duo prima elementa scilicet 33 (nam duo tziphrarum antepositi sunt ternarij) relinquentur ad læuam 3, pro radice integra. Ducantur postmodùm 33 in 60, consurgent 1980. à quibus duo prima similiter detrahantur elementa, utpote 80: nam relicta 19, erunt prima minuta, post integram radicem collocanda. Multiplicentur rursum 80 per 60, producentur 4800: sublatis ergo duabus tziphris 00, ipsa 48 in secundorum minutorũ redigantur ordinem. Et quoniam elementa detracta sunt 00, non est ultra procedendum. Radix ergo cubica numeri 37, comprehendit integra 3, prima minuta 19, secunda 48, quæ ferè conficiunt unum integri tertium.

De progreſsione eorundem integrorum numerorum. Cap. 9.

1 *Progreſsionis diffinitio. Progreſsio duplex.*

PRogreſsio eſt, numerorum ſecũdum æquales unitatum differentias, aut proportionatas differẽtiarum rationes, ordinata ſucceſsio. Quæ per æquales progreditur unitatum differentias, arithmetica dicitur: quæ autem differentiarum proportiones obſeruat, geometrica progreſsio nuncupatur. Vtraque tamen ab unitate, aut dato quouis numero quantũlibet progrediendo continuatur: nunquam enim dabitur maximus oblatæ progreſsionis numerus: cùm numeri progrediantur in infinitum. In primis igitur de arithmetica dicẽdum.

2 *De arithmetica progreſsione.*

Progreſsio quæ arithmetica dicitur, aut omnino inter pares, aut omnino inter impares, aut partim inter pares, partim uerò inter impares alternatim ſuccedentes offenditur numeros. Si à naturali numerorum ordine ab unitate in infinitum progrediente, pares ſeparentur numeri: conſurget parium, & relinquetur imparium numerorum progreſſio prima, ex continuata binarij reſultans additione. Vt oſtẽdunt duo primi numerorum ordines, ſuccedẽtis deſcriptionis. Quòd ſi progreſsio à ſecundo parium, uel imparium exordiatur limite, utpote à 3, aut 4, & ternario progrediatur unitatum incremento: ea partim ex paribus, partim uerò ex imparibus conſtabit numeris. quemadmodum ex tertio, & quarto præfatæ deſcriptionis deprehẽditur ordinibus. Quæ ſi à tertio eorundem parium, uel imparium limite fuerit initiata, ſcilicet à 5, uel 6, & quaternaria progrediatur unitatũ ſucceſsione: quæ à pari exordietur numero, paribus: quæ uerò ab impari, imparibus conflabitur numeris. Veluti quintus & ſextus ordo, eiuſdem deſcriptionis oſtendunt. Progreſsio rurſum à quarto parium, uel imparium procedens limite, utpote à 7, uel 8, & quinario unitatum progreditur augmento: partim rurſum paribus, partim uerò imparibus conſtabit numeris. Quemadmodum ſeptimus, & octauus ordo præfatæ deſcriptionis, apertè manifeſtãt. Et ſic deinceps quantumlibet:

libet: nunc parium, aut imparium numerorum, nũc uerò parium & imparium ſimul alternatim iteratis progreſsionibus.

Tabula progreſsionum tam parium uel imparium, quàm parium & imparium ſimul numerorum.

2 <	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	Impares.
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	Pares.
3 <	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	> Pares & impares.
	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	
4 <	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	Impares.
	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	Pares.
5 <	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	> Pares & impares.
	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	
6 <	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	Impares.
	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	Pares.

Omnes autem ſupradictæ & ſimiles quæcunque progreſsiones, continuæ uocitantur. Eſt enim progreſsio continua, in qua eadem unitatum continuatur differentia. Progreſsio autem, quæ ſub duabus, aut pluribus comprehenditur differentiis, alternatim intercalatis, diſcontinua dicitur. Cuiuſmodi ſunt omnes progreſsionum ordines ipſius antecedentis deſcriptionis, à quolibet uerticalium & imparium numerorum deſcendendo coaſſumpti. Exempli gratia, ordo initiatus à 3, & finitus in 16, nũc unitatis, nunc uerò binarij alternatim reſumpta ſucceſsione progreditur. Et ſic de cæteris.

Progreſsio cõtinua.

Diſcontinua.

3 Reliquum eſt, oſtendere qualiter numeri arithmetica ſucceſsione progredientes (præter traditum additionis artificiũ) in unum componantur numerum. Multa enim abſconſa, & penè incredibilia (ut alibi oſtendemus) utriuſque progreſsionis diſſoluuntur adminiculo. Compone igitur extremos datæ cuiuſcunque progreſsionis arithmeticę numeros, etſi parẽ efficiant numerum, per ipſius numeri dimidiũ multiplicentur ipſorum progreſsionalium numerorum ordines, ſiue limites: cõſurget enim eorundem numerorum ſumma. Si autẽ ex ipſa extremorum additione, impar conſurgat numerus, is

Progreſsionis Arithmetica regula notanda.

in dimidiam limitum ſeu progreſsionalium numerorum ducatur multitudinem: reſultabit enim eorūdem numerorum, ſub data progreſsione contentorū ſumma. Accipiantur in primæ partis exemplum, antecedentis primæ progreſsionis ipſorum pariū extremi numeri, ſcilicet 2 & 22. hi ſimul iuncti efficiunt 24 parem numerum, cuius dimidiū eſt 12: progreſsionalium autem numerorum limites ſunt 11, quæ ducta in 12 efficiūt 132. Tanta eſt progreſsionis ſumma. In ſecundæ uerò partis exemplum, accipiatur ordo progreſsionis diſcontinuæ à ternario initiatus, & finiens in 16. Igitur cùm 16 & 3 efficiant imparem numerum, ſcilicet 19, & limitum multitudo ſit 10, quorum dimidium eſt 5: ducenda ſunt 19 in 5, fient 95. Tantum reddunt ipſi numeri diſcōtinuè progreſsionales ſimul iuncti.

Exemplum. 1. *Exemplum. 2.*

4 *De geometrica progreßione.*

PROGRESSIO autem geometrica, ex impariū numerorū linea potiſsimùm colligitur. Duo enim primi numeri, ſcilicet 1 & 3, conficiunt primū quadratū, utpote 4: Tres uerò primi numeri, uidelicet 1, 3, 5, ſecundū quadratū conſtituunt numerū, utpote 9: Quatuor autē primi numeri, utpote 1, 3, 5, 7, tertium quadratū ſimul iuncti reſtituunt, nempe 16: Et ſic deinceps, uno adiuncto numero, ſuccedens quadratus numerus generatur. Præterea ſecundus & tertius impar numerus, utpote 3 & 5, conficiunt primum cubum uidelicet 8: Tres uerò ſequentes numeri, ſcilicet 7, 9, 11, ſecundum efficiunt cubum, utpote 27: Quatuor deinde ſuccedētes numeri, uidelicet 13, 15, 17, 19, tertium cubum reſtituūt numerum, utpote 64. Et ſic deinceps, uno ſuperaddito numero, ſuccedēs cubus reſultat numerus. Omnis porrò quadratus numerus, eſt medius proportionalis inter radicem & ſuum cubū: cuiuſmodi ſunt 8/4/2, 27/9/3, 64/16/4, & ſic de cæteris. Adde, quòd in omni progreſsione geometrica, primus numerus poſt unitatem eſt radix, ſequens quadratus, & ſuccedēs cubus In maiorem omnium elucidationem, ſubſcriptas numerorum libuit addere progreſsiones: Quarum prima ſub ratione dupla, ſecunda ſub tripla, tertia ſub quadrupla, quarta

quarta uerò ſub ratione quintupla, progreſsionem geometricam obſeruat.

Pro-	*dupla*	2	4	8	16	32	64	128
greßio	*tripla*	3	9	27	81	243	729	2187
	quadrupla	4	16	64	256	1024	4096	16384
	quintupla	5	25	125	625	3125	15725	78625

5 Cùm uolueris autem numeros geometrica progreſsione proportionatos, in unum colligere numerũ: ſic facito. Multiplica maximum & extremum datę progreſsionis numerum, per numerum à quo ratio ipſius progreſsionis, ſiue proportio denominatur (utpote per binarium ſi dupla, aut ternariũ ſi tripla &c.) & à producto numero tolle alterum extremum, hoc eſt, minimum ipſius progreſsionis numerum, reliquum tandem numerum diuide per numerum unitate minorem eo numero, à quo præfata ratio progreſsionis denominatur: prodibit enim tandem datorum numerorum progreſsionalium ſumma. Sub dupla itaq; ratione proportionatis numeris, ſufficit maiorem extremum duplare numerum, & à producto auferre minorem: fruſtra enim reliquus per unitatẽ diuideretur, quæ eſt dimidium binarij, à quo dupla ratio denominatur. Sub tripla autẽ ratione progredientibus numeris, idem extremus & maior numerus triplandus eſt: & detracto à producto minore numero, reliquus per 2 uenit diuidendus. Et ſi quadrupla fuerit progreſsionis ratio, præfatus numerus quadruplandus eſt: & ſubducto primo numero, reliquus per 3 diuidendus. Et conſequenter ita de cæteris.

Geometricæ progreßionis regula.

Exempli gratia, in prima ſupradictarum progreſsionũ geometricarum, quæ ſub ratione dupla proportionatur, duplabis 128, fient 256: à quibus auferes 2, relinquẽtur 254. Tanta eſt ipſorum numerorũ ſumma. Item in ſecunda progreſsione, quæ ſub ratione tripla proportionatur, ſi triplaueris 2187, conſurgent 6561: à quibus tollenda ſunt 3, & relinquẽtur 6558, quæ diuiſa per 2, reſtituunt 3279. Tanta eſt igitur eorundem progreſsionalium numerorũ ſumma. Haud alienum habeto iudicium de cæteris.

Exemplum regulæ.

De uero supradictarum operationū examine. Cap. 10.

1 *Qua ratione supradicta capita ueniunt examinanda.* SI iuuet demum antecedētibus capitibus traditas operationes examinare, & commissum forsitan errorē dignoscere, id facies per mutuam reciprocámue contrariarum operationum subministrationem: nō autem (ut uulgares tradunt Arithmetici) per nouenariam unitatum subtractionē, quolibet elemento absq; ratione limitis seorsum cōsiderato: neque per septenariam, & binatim coniunctorum elemētorum earundem unitatum (aut alio quouis modo factam) detractionem. Tales nanq; examinandi rationes, supponunt id quod quęritur, utpote, singula fideliter absoluta fuisse: quemadmodum ex arithmeticis unde pendent regulis, uel facilè colligere licet. *Nouenariæ ac septenariæ probationis reprobatio.* Possunt autem ipsi numeri, per ipsius 0, uel 9, aut 7 superfluā additionē, aut omissionē, trāspositionémue, de industria, uel ex errore cōmissam falsificari: & nihilominus eiuscemodi probandi rationes, fideles (contra rei ueritatem) uiderentur promittere numeros. His ergo prętermissis, & curiosis magis, quàm ueris numerorū amatoribus derelictis probationibus: ad facillimas, omníque erroris scrupulo carentes examinādi rationes fœliciter accedamus, & singula iuxta præcedentium capitum discurramus ordinem.

2 *Additionis examen.* ADDITIO inprimis per subtractionem sic examinetur. Subtrahātur à numerorum addendorū summa, quotlibet addendi numeri, unico dempto: cui si residuus æqualis fuerit numerus, bene additum est: secus eueniente, malè. Collectus enim ex ipsa additione numerus, addendos comprehendere debet numeros: & per subtractionem disgregatus, singulos ordine restituere.

3 *Vt probanda subtractio.* SVBTRACTIO, uersa uice, per additionē examinanda est. Si enim addatur relictus ex subtractione numerus ipsi numero subtrahendo: colligi debet numerus, à quo subtractio facta est. Quòd si plus, aut minus ex additione resultet: perperam subtractum est. Numerus enim à quo facta est subtractio, & subtrahendum & residuum cōtinet numerum: is igitur consurgere debet, ex additione residui cum subtrahendo

hendo numero. Eorum autem quæ nunc diximus, ſubſcriptas accipe formulas.

Additio.

```
 3 7 5 2 1
 1 8 9 2 4
 ---------
 5 6 4 4 5
```

Subtractio.

```
 5 6 4 4 5
 1 8 9 2 4
 ---------
 3 7 5 2 1
```

Mutuæ probationis prædictarũ operationum exempla.

4 MVLTIPLICATIO autem per diuiſionẽ pendenter examinabitur. Cùm enim productus ex multiplicatione numerus, toties contineat numerum multiplicãdum, quot ſunt unitates in ipſo multiplicãte: neceſſum eſt, ut idem productus numerus per multiplicantem diuiſus, reſtituat præciſè multiplicandum, ſi debitè multiplicatio fuerit abſoluta. Vbi autem quotus numerus, à multiplicando diſcrepauerit: iteranda uenit ipſa multiplicatio. *Multiplicationis examẽ.*

5 DIVISIO conſequẽter, officio multiplicationis uerſa uice probanda eſt. Nam ſi diuiſor per quotum numerum, autè diuerſo multiplicetur, & producto numero reſiduum (ſi adfuerit) addatur: conſurget præciſè diuidẽdus numerus. Quod ſi ſecus acciderit, diuiſio perperam facta eſt: & ideò rurſum diſcurrenda. Diuiſor enim à diuidendo toties detractus eſt numero, quot ſunt unitates in ipſo numero quoto. Non poteſt itaque diuiſio fideliùs, quàm per ipſam multiplicationem, & è diuerſo comprobari. Veluti ſuccedentia multiplicationis, & diuiſionis confirmare uidentur exempla: quorum alterum, alterius eſt examen. *Vt probanda diuiſio.*

Multiplicatio.

```
     2 0 7
       2 3
 ---------
     6 2 1
   4 1 4
 ---------
   4 7 6 1
```

Diuiſio.

```
     1   2
 4   7   6   1
 -------------
     2   0   7
 -------------
 2   3   3   3
     2   2
```

Supradictarũ probationum exempla reciproca.

6 QVADRATAE autẽ radicis adinuentio, per quadratam radicis multiplicationem uenit examinanda. Nam ſi datus in primis numerus fuerit quadratus: inuenta radix in ſeipſam ducta, eundem quadratũ (modò non erraueris) producet numerum. Velut ex ſubſcripto numero 54756 depre- *Vt examinãda quadratæ radicis adinuentio.*

hendere potes, cuius radix quadrata est 234 : quæ in seipsam ducta, restituit eundem numerum 54756.

Quadratæ radicis inuentio.						*Probatio per radicis multiplicationem.*
	1	2				2 3 4
1	2	8	1			2 3 4
5 |	4	7 |	5	6		9 3 6
2		3		4		7 0 2
	4	4	6			4 6 8
						5 4 7 5 6

7 At si datus numerus minimè fuerit quadratus, ducenda est nihilominus radix in seipsam, sed producto numero addendum est residuum integrum, priùs quàm uidelicet ex illo fractio à duplata radice, uel ex ipsius radicis dimidio ab eadẽ radice denominata conficiatur: consurget enim numerus datus, ni forsitã colligẽdo radicem ipsam peccaueris. Quemadmodum ex sequentibus licebit deprehendere formulis. In quarum prima, numeri 637 quadrata radix est 25: relictis 12, quæ uel $\frac{12}{50}$, aut $\frac{6}{25}$ dicentur. In secunda uerò, ipsa radix 25 in seipsam ducta, facit 625 : quibus in tertia formula adduntur relicta 12, consurgit demum idem numerus 637.

De radice numerorum non quadratorũ.

Exemplum.

Quadratæ radicis inuentio.				*Probatio per multiplicationem:*	*Et additionem residui.*
				2 5	
2	1	2	*residuum.*	2 5	6 2 5
6 |	3	7		1 2 5	*residuum* 1 2
2		5		5 0	6 3 7
	4			6 2 5	

Notandum. Si autem duceretur radix integra unà cum ipsa fractione in sepsam, iuxta doctrinam sexti capitis succedẽtis libri secundi: productus numerus abundaret $\frac{36}{625}$, hoc est, numero ex ductu fractionis in seipsam procreato.

8 CVBICAE demum radicis inuentionem, per cubicam ipsius radicis multiplicationem, consequenter examinare est operæpretium. Igitur si datus numerus fuerit cubus, radix eius cubicè multiplicata, eundem (modò non erraueris) restituet numerum. Veluti si numeri 12167 cubicam radicem (quæ est 23) cubicè multiplicaueris, eundem numerum 12167 procreabis: quemadmodum subscriptæ indicant

Exemplum.

cant operationum formulæ.

Inuentio cubicæ radicis.	*Probatio per cubicam multiplicationem.*	
4 2	2 3	5 2 9
1 2 | 1 6 7	2 3	2 3
2 3	6 9	1 5 8 7
6	4 6	1 0 5 8
	5 2 9	1 2 1 6 7

9 Quòd si datus numerus non fuerit cubus, tunc aliquis extracta radice relinquetur numerus. Ipsa ergo radice cubicè multiplicata, producto numero integrum ipsum addendum est residuum: ante quàm scilicet ex illo fractio constituatur, à triplata radice, uel ex tertia parte eiusdem residui ab ipsa radice denominata: resultabit enim ipse numerus datus, ni forsitan in extrahenda radice peccaueris. Exẽpli gratia, numeri 12179 radix cubica est 23: relictis 12, quæ uel $\frac{12}{69}$, aut $\frac{4}{23}$ ueniunt appellanda. Porrò 23 cubicè multiplicata, efficiunt 12167: quibus si addantur relicta 12 integra, consurget oblatus ipse numerus 12179. Vti subscriptæ monstrant formulæ. *De radice non cuborum numerorum.* *Exemplum.*

Cubicæ radicis inuentio.	*Probatio per multiplicationem radicis cubicam:*	*Et additionem residui.*
1		
4 3 2	2 3	5 2 9
1 2 | 1 7 9	2 3	2 3
2 3	6 9	1 5 8 7
6	4 6	1 0 5 8
	5 2 9	1 2 1 6 7
		residuum. 1 2
		1 2 1 7 9

Si autem multiplicaretur radix ipsa cum fractione cubicè, utpote 23 cum $\frac{4}{23}$: longè aberraret productus numerus, à uera ipsius dati numeri quantitate, uelut ipse te docebit calculus. *Notandum.*

10 RELIQVVM EST, de progresionum examine pauca subiungere. In primis itaque si progresio fuerit arithmetica, & extremi illius numeri simul iuncti parem fecerint numerum, diuidẽda est summa progresionis, per ipsius numeri dimidium: prodibit enim numerus limitum, siue terminorum ipsius progresionis. Si autem iidem extremi numeri *De arithmeticæ progreßionis examine.*

imparem confecerint numerum, diuidenda est eadem progressionis summa, per dimidium ipsorum limitum numerũ: procreabitur enim præfatus numerus, ex ipsa extremorum additione resultans. Quòd si neutrum horũ acciderit, peccatum est in colligẽda progressionis summa. Exẽplo nõ uideris indigere, si prædicta in memoriam reuocare non graueris.

11 *Geometricæ progreßionis examen.* GEOMETRICA uerò progressio, in hunc modũ examinanda est. Ducatur in primis summa progressionis in numerum sola unitate minorem eo, à quo ratio progressionis denominatur, & producto addatur minimus ipsius progressionis numerus: cõsurgens inde numerus, diuidatur per ipsum numerum à quo præfata ratio progressionis denominatur: Prodibit enim tãdem maximus ipsius oblatæ progressionis numerus, si illius summa fuerit debitè congregata. Si progressio igitur sub ratione dupla proportionetur, nulla opus erit multiplicatione: Si autẽ sub ratione tripla progrediatur, multiplicatio per 2, diuisio autem per 3 uenit absoluenda, & sic pendenter de cæteris. *Exemplum.* Resumatur in exemplum, obiecta progressio sub ratione tripla proportionata, cuius minor numerus est 3, maximus uerò 2187, & omnium summa 3279. Hæc igitur summa per 2 multiplicanda est, fiunt 6558: quibus addantur 3, consurgent 6561. Hæc autem diuisa per 3 (à quibus ratio tripla denominatur) reddunt pro quoto numero 2187, quantus uidelicet est maximus ipsius datæ progressionis numerus.

2	1	8	7
	7	2	9
	2	4	3
		8	1
		2	7
			9
			3
3	2	7	9

Hæc igitur de probationibus, examinandisue antecedentium capitum arithmeticis operationibus (quæ succedentibus duobus libris, poterunt cõsequenter accõmodari) sint satis. Consulimus tamen, non alio utendum esse probationis examine, quàm singularũ operationum sepiùs iterato discursu, cùm ipsi numeri maneant ob oculos expositi: dẽptis ad summum radicibus, quæ difficilioris utcunque uidentur inuestigationis.

ARITHMETICAE PRACTICAE LIB. I. FINIS.

LIBER SECVNDVS IPSIVS ARITHMETICAE PRActicæ, De uulgatis integrorum fractionibus, eorundémue partibus quotis.

De origine, expresſione, & ualore fractionum. Caput 1.

1 ABSOLVTA, qua potuimus eruditione, numerorum integrorum praxi, ſub uniuerſalibus antecedentis primi libri tradita capitibus: operæpretium eſt, ut de minutis, ſiue quotis eorundem integrorũ partibus (quas uulgares appellant fractiones) conſequenter diſſeramus.

Quicquid igitur in rerum cõſiſtit natura, uel abſtractum ad continuam, diſcretámue refertur quantitatem, & ab unitate denominatur: nomen, ſiue rationẽ adipiſcitur integri. Omne porrò integrum, in tot partes inuicem æquales deſcendendo diuiditur, quot ſunt numeri ab unitate ſurſum aſcendendo procreati: utpote in duas, quarum quælibet una ſecunda, uel dimidia pars ipſius uocatur integri: aut in tres, & quælibet una tertia eiuſdem integri dicitur. Et deinceps in quartas, quintas, ſextas, ſeptimas, & ſuccedentes quotas partes, à reliquis numeris denominatas, quantumlibet progrediendo diſtribuitur. Quas quidem partes quotas, uulgares ob id ſolent appellare fractiones, quòd magis uulgatæ ſint, uel ipſis uulgarium rerum ſupputationibus familiares. Eſt igitur fractio, partis aut partium integri, iuxta numerum datum aſſignata diſtributio, ſiue repræſentatio.

Quid ſit integrum. *Integri diuiſio.* *Fractionis diffinitio.*

2 Ad ipſarum autem fractionum expreſsionem, duo cõcurrunt numeri: utpote, numerator talium partiũ indicans multitudinem, & denominator qualitatis earũdem partium exprimẽs nomenclaturam. Numerator ſupra denominatorem,

Quibus numeris exprimantur fractiones.

interpoſita uirgula, ſemper collocatur: & uterq; per rectum (ſed in primis numerator) exprimitur. *Exemplum.* Vtpote, ſi uolueris repræſentare duo integri tertia, facies in hunc modũ $\frac{2}{3}$: tria uerò quarta, ſic $\frac{3}{4}$. Et ſi hanc uolueris exprimere fractionem $\frac{5}{7}$ dices illam repræſentare quinque integri ſeptima. *Fractiones ſimplices.* Tales itaque fractiones, ad ipſum integrum immediatè referuntur: & principales, ſimplicéſque nuncupantur, unico propterea numeratore, atque denominatore contentæ.

3 *De ſecundarijs, ſiue mixtis fractionibus.*

Nam ſi aliqua prædictarum partium, utpote $\frac{1}{2}$, uel $\frac{1}{3}$, aut $\frac{1}{4}$, rationem ſubeat integri, & in ſimiles (ut ipſum integrum) ſubdiuidatur fractiones: hæ ſecundariæ, ſiue mixtæ, fractionẽſue fractionum, ueniunt appellãdæ. In quarum expreſsione, duo concurrunt numeratores atq; denominatores, quorum priores per rectum, poſteriores uerò per obliquum (inſtar integri) ueniunt exprimendi: idcirco nulla inter poſteriorem numeratorẽ, & denominatorẽ ponitur uirgula. *Exemplum.* Exẽpli gratia, duo tertia unius quarti integri hoc modo repræſentantur $\frac{2}{3}$ $^{1}{}_{4}$: & tria quarta unius ſecundi ſic, $\frac{3}{4}$ $^{1}{}_{2}$. Quæ igitur per obliquum exprimitur, ad ipſum immediatè refertur integrum. *Fractiones mixtæ fugiendæ.* Tales porrò fractiones, ueluti peſtes Arithmeticæ, fugiendæ ſunt: & ſi quas inuitus offenderis, eas ad ſimplicem reuocabis fractionem, & ſimplicem ipſam (ſi id patiatur) ad integra, quemadmodum infra demonſtrabitur. Reliquum eſt, ut de ualore fractionum iudicare doceamus.

4 *De ualore fractionum.*

Simplicium itaque fractionum ualorem, his deprehendes regulis. *Regula 1.* In primis, quoties numerator denominatori fuerit æqualis, talis fractio unum præciſè ualet integrũ: Cuiuſmodi ſunt $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, &c. *Regula 2.* At ſi numerator, denominatore ſit maior, huiuſcemodi fractio tot ualet integra, quoties numerator integrum denominatorem comprehendit: atque tot inſuper eiuſdem nominis partes, quot in ipſo numeratore abũdauerint unitates, denominatorem integrare minimè ualẽtes. Velut hæc fractio $\frac{4}{3}$, unum continet integrum, ac unum præterea integri tertium: hæc autem $\frac{9}{4}$, duo integra, & unũ integri quartum. *Tertia regula.* Cùm autem numerator minor fuerit denomina-

nomina-

nominatore, talis fractio nunquam facit integrum: sed tot solummodò integri partes, quot in ipso numeratore sunt unitates. Vt $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, hoc est, duo tertia, tria quarta, quatuor quinta, &c. Solis ergo fractionibus, quę minores sunt integro (si fractiones ipsæ prorsus euitari non poßint) utendum esse uelim non ignores: cæteræ enim, ad integra quoad fieri potest reuocandæ sunt. De fractione demum, quæ alterius fractionis est fractio (ad quam, uelut ad suum referenda est integrum) idem consequenter iudicabis.

De fractionũ æqualitate, & inæqualitate.

Regula I.

Quæ demum inter supradictas, & inuicem cōparatas fractiones sint æquales, maiores, aut minores: ex subscriptis rursum poteris elicire regulis. Omnes in primis fractiones, quæ similem inter numeratores & suos denominatores uidentur obseruare rationem: potestate sunt æquales, hoc est, eandem integri partem (sed aliter expressam) repræsentantes. Veluti sunt $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, in quibus rationem duplam: uel $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, in quibus sesqualteram: aut $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{15}$, in quibus triplam denominatores ad numeratores simul obseruant rationem. Quælibet enim primarum fractionum, unum integri dimidium: sequentium uerò, duo tertia: & succedentium, unum solummodò tertium eiusdem integri repræsentat.

Secunda regula.

Inter fractiones autem, quæ eundem habuerint numeratorem, denominatores uerò diuersos: quæ à minori denominātur numero, cæteris sunt maiores. Quòd si numeratores fuerint diuersi, sed idem uersa uice denominator: quæ per maiorem exprimentur numeratorem, maiores erunt reliquis. Harum enim (uerbi gratia) fractionem, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, prima est maior secunda, & secunda tertia, atque tertia ipsa quarta maior: Idem iudicabis de his $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, & similibus quibuscunque fractionibus.

Tertia regula.

Quæ demum diuersos habent numeratores atque denominatores, sunt de necessitate inuicem inæquales: ut $\frac{2}{3}$, & $\frac{4}{5}$. Datis porrò duabus fractionibus inæqualibus, si uolueris agnoscere quænam illarum sit potestate maior, duc numeratorē unius in denominatorem alterius: nam ea cuius numerator maiorem procreauerit numerum, maior erit reliqua. Proponantur in exemplum, præfata $\frac{2}{5}$, & $\frac{4}{7}$. duc igitur 2 in 5, fient 10: & 4 in 3, consurgent 12. Concludes igitur $\frac{4}{7}$ maiorem integri partem continere, quàm ipsa $\frac{2}{5}$: quoniam 12, sunt maiora 10. Idem habeto iudicium de cæteris.

$$\begin{array}{ccc} 10 & & 12 \\ \frac{2}{5} & \times & \frac{4}{7} \end{array}$$

De reductione prædictarum fractionum. Cap. 2.

Fractionũ reductio, cur cæteris anteponenda capitibus.

Reductio uulgarium fractionum, totius negotij uidetur esse fundamentum: utpote, sine qua cæteræ fractionum operationes, commodè tractari non possunt. Semper enim fractionum fugienda est multitudo: quod absque reductione, fieri non facilè potest. Reducere igitur est, integra in liberam fractionem, uel è diuerso: datámue fractionem, in alterius denominationem conuertere: plurésue fractiones, in unam reuocare fractionem. Vniuersum itaque reductionis artificium, quinque generalibus regulis perstringemus: quarum duæ primæ, reductionẽ integrorum ad fractionem simplicem, aut è diuerso, iuxta sexti capitis antecedentis libri primi traditionem, paucis absoluere docebunt.

Reductionis diffinitio.

1 Cùm igitur datum integrorum numerum, ad liberam uolueris reducere fractionem, duc ipsum integrorum numerũ, in propositæ fractionis denominatorem: productus enim numerus, quæsitũ numeratorẽ ostẽdet, super ipsum denominatorem (interiecta de more uirgula) collocandũ. Proponãtur exempli causa 4 integra, ad septima reducenda. Ducantur ergo 4 in 7, fient 28, locanda supra 7, in hunc modum $\frac{28}{7}$: Concludes itaq;, 4 integra reduci ad $\frac{28}{7}$. Eodem modo, 15 integra ad $\frac{165}{11}$ reducentur: undecies enim 15, efficiunt 165.

Prima regula, de integrorũ reductione, ad fractionẽ simplicem.

Exemplum.

2 Si autem è diuerso, simplicem aliquam fractionem, cuius uidelicet numerator maior est denominatore (nã de talibus fractionibus solùm intelligẽda est regula) ad integra reducere fuerit operæpretium, diuidatur numerator, per ipsius fractionis denominatorẽ: numerus enim quotus, indicabit quot integra in ipsa fractione continentur. At si aliquid ex diuisione relinquatur: id erit fractio minor integro, à reducenda fractione

Secunda regula, de reuocãda fractione simplici, ad integra.

ctione denominata. Sint in exẽplum $\frac{28}{7}$, ad integra reducenda. Diuidãtur ergo 28 per 7, fient pro quoto numero 4: pronunciabis igitur, $\frac{28}{7}$ ad 4 integra reuocari. Quòd si $\frac{29}{4}$, ad integra reducenda proponantur: diuides 29 per 4, prodibunt 7 integra, relicto $\frac{1}{4}$, hoc est, unius integri quarto. *Exemplum.*

3 Tertiò, si fractionem simplicẽ, in aliam itidem simplicem libuerit conuertere fractionem: animaduertes in primis, non omnem fractionem in aliam quanuis indifferenter esse reducibilem, sed potentia grossiores in subtiliores, & in eam solummodò denominationem, cuius ipsius fractionis denominator est pars quota. Reduces itaque facilè secũda in quarta, sexta, octaua, decima, uel duodecima: similiter & tertia in sexta, nona, duodecima, uel quindecima, &c. Cùm autẽ denominatores, solam habuerint unitatem partem communẽ: nunquam uertes unam fractionem in alteram, absq; relicta fractione fractionis, quę modis omnibus fugienda est. Vtpote, tertia in quarta, uel quarta in quinta, aut quinta in sexta uel septima, non possunt absq; fractione fractionis reuocari: idcirco tales reductiones, prorsus euitandæ sunt. Reliquũ est, ostendere qualiter fractio simplex, in eam fractionẽ simplicẽ, ad quam reducibilis est, conuertatur. Dictum fuit primo huius libri capite, fractiones quarum denominatores suis numeratoribus sunt proportionales, potestate esse inuicẽ æquales: quærendus est itaque numerator, ad quem denominator propositus eandem habeat rationem, quam reducendæ fractionis denominator ad suũ numeratorem. Id autem absoluetur iuxta tenorem regulæ quatuor proportionalium (quã infra tkrálemus) ducendo propositũ denominatorem in numeratorem reducendæ fractionis, & productum numerum per ipsius fractionis denominatorem diuidendo: procreabitur enim reductæ fractionis numerator, supra denominatorem propositum de more collocandus. Esto propositum in exemplum, uertere $\frac{2}{3}$ ad sexta. ducantur ergo 6 in 2, fient 12: quæ diuisa per 3, dant pro quoto numero 4, scribenda super 6, in hunc modum $\frac{4}{6}$. Concludes igi-

Tertia regula, ut simplex fractio, in aliam simplicem conuertatur.

Tenor ac origo regulæ.

Exemplum.

tur, $\frac{2}{3}$ uerti in $\frac{4}{6}$, quæ tantam integri partem, quantam & ipsa $\frac{2}{3}$ repræsentant. Haud disimiliter, $\frac{3}{4}$ reducetur in $\frac{9}{12}$: ter enim 12 efficiunt 36, quæ diuisa per 4, reddunt 9.

Alia eiusdem regulæ praxis notanda.

Poteris & alia uia, talium fractionum absoluere reductionem. Vide quotam partē efficiat minor denominator ipsius maioris, diuidendo eundem maiorem per minorem: & per numerum quotum, multiplica tam numeratorem, quàm denominatorem eiusdem reducendæ fractionis. Eo nanq; modo, reducendam & à minori numero denominatam, in rationem maioris & multiplicis denominatoris uel facilè conuertes.

Exemplum.

Resumantur exempli gratia $\frac{2}{3}$, ad sexta reducenda. Cùm igitur 3 minor denominator, bis contineatur in maiori, utpote senario: multiplicabis 2 per 2, fient 4: & rursum 3 per 2, fient 6, scribenda sub 4, in hunc modum $\frac{4}{6}$. Hac igitur uia, $\frac{2}{3}$ uertuntur ad $\frac{4}{6}$. Similiter & ipsa $\frac{3}{4}$, ad 9 duodecima. Cùm enim 4, in 12 ter contineantur: si ducantur 3 in 3, fient 9: & 4 per eadem 3 multiplicata, reddunt 12: scribenda sub 9, ut hic $\frac{9}{12}$. Est igitur hic reducendi modus perfacilis, & summopere notandus.

Quarta regula, de mixtarū fractionum reductione, ad fractionem simplicem.

4 Sequitur reductio fractionis mixtæ (quæ alterius fractionis est fractio) ad contingentem fractionem simplicem: quæ in hunc modum absoluenda est. Multiplicentur numeratores adinuicem, & reductæ fractionis procreabitur numerator: Idem fiat de ipsis denominatoribus, & ipsius reductæ fractionis denominator resultabit, sub ipso numeratore collocādus. Si plures autem duobus fuerint in data fractione numeratores & denominatores, primus ducendus est in secundum, & productus numerus in sequentem tertiū, & sic deinceps, pro contingente numeratorum & denominatorū multitudine.

Exemplum.

Sint uerbi gratia $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$, ad simplicem reuocāda fractionem. Multiplicentur ergo 2 per 1, fient 2 pro reductæ fractionis numeratore: deinde 3 in 4, fient 12 sub ipso binario pro denominatore reponenda, in hunc modum $\frac{2}{12}$. Ergo $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ reducuntur ad $\frac{2}{12}$ integri, quæ breuiùs per $\frac{1}{6}$ repræsentātur. Proponantur rursum $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{6}$, ad simplicem reducenda fra-

fractionẽ. Ducantur ergo 2 in 3, fient 6, & 6 in 1, redibunt 6: tantus est numerator. Deinde 3 per 4 multiplicentur, fiẽt 12, & rursum 12 per 6, consurgent 72: tantus est denominator, sub ipso reductæ fractionis numeratore collocandus, in hunc modum $\frac{6}{72}$. Concludes igitur $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{6}$, reduci ad $\frac{6}{72}$ integri, quæ breuiùs exprimuntur per $\frac{1}{12}$. Qualiter autẽ fractiones abbreuientur, proximo dicemus capite.

5 Cùm porrò duæ simplices & diuersæ denominationis fractiones, ad unam simplicem fractionem proponentur reducendæ: in hunc facito modum. Multiplicentur in primis denominatores adinuicem, & communis insurget denominator, illius scilicet fractionis, ad quam ambæ fractiones datæ communiter sunt reducibiles. Ducatur postmodùm numerator unius in alterius fractionis denominatorem, fient particulares utriusque fractionis numeratores: quos si in unum composueris numerum, cõsurget communis ipsius reductæ fractionis numerator, super ipsum denominatorẽ solito more collocandus. Exempli gratia, proponãtur $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, ad unã simplicem reducenda fractionem. Ducantur igitur 3 in 5, fient 15: prædictæ ergo fractiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, uertentur ad integri quindecima. Ducantur consequenter 2 in 5, fient 10: & 4 in 3, fient 12. quæ simul iuncta conficiunt 22, scribenda super 15, in hunc modum $\frac{22}{15}$. Concludes igitur, $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ reduci ad $\frac{22}{15}$ integri: quorum 10 fiunt ex $\frac{2}{3}$, reliqua uerò 12 ex $\frac{4}{5}$. Ipsa porrò $\frac{22}{15}$, per secundam regulam ad 1 integrum, & $\frac{7}{15}$, integri tandem reuocanda sunt. Haud dissimili uia, $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$ uertentur in $\frac{41}{28}$: quæ per eandem secundam regulam, ad 1 integrum, & $\frac{13}{28}$ integri reducentur.

Quinta regula, de reducẽdis duabus fractionibus, ad unam fractionem simplicem.

Exemplum.

$$\overset{22}{\overset{10\quad\ 12}{\tfrac{2}{3}\times\tfrac{4}{5}}}_{\ 15} .\ \tfrac{12}{15}\ \text{uel}\ 1\ \tfrac{7}{15} \qquad\Big|\qquad \overset{41}{\overset{21\quad\ 20}{\tfrac{3}{4}\times\tfrac{5}{7}}}_{\ 28} .\ \tfrac{41}{28}\ \text{uel}\ 1\ \tfrac{13}{28}$$

6 Quòd si plures duabus, atque dissimiles fractiones, ad unam communem & simplicem fractionem proponãtur reducendæ: talis reductio, adminiculo proximæ regulæ, in hũc modum absoluenda est. Reducantur in primis duæ primæ

Sexta regula, ut plures quã duæ fract. ad unam reuocentur simplicem.

fractiones,ad unam fractionem ſimplicem, uti proxima docuimus regula: & inde collecta fractio, cum ſequenti tertia, ad unam pariter ſimplicem fractionem:atq; inde conſurgens fractio,unà cum ſuccedenti quarta,ad unam rurſum fractionem ſimplicem reducatur: & ſic deinceps,pro datarum fractionum multitudine.Nec refert,quam datarum fractionum primam,aut ſecũdam,ſeu tertiam feceris.Hac igitur arte,fractio colligetur,quæ datas fractiones poteſtate repræſentabit.

Exemplum. Offerantur exẽpli cauſa, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ad unam ſimplicẽ reuocanda fractionem. In primis ergo,per antecedẽtis quintæ regulæ traditionem, $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$ uertuntur ad $\frac{7}{6}$. Ipſa porrò $\frac{7}{6}$ cum $\frac{3}{4}$, efficiunt $\frac{46}{24}$. Concludendum ergo $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, reuocari tandem ad $\frac{46}{24}$, quæ 1 ualent integrum, & $\frac{22}{24}$, ſiue $\frac{11}{12}$ integri. Aut (ſi uolueris) tolle priùs à $\frac{7}{6}$ integrum, relinquetur $\frac{1}{6}$: quod unà cum $\frac{3}{4}$, reducetur ad præfata $\frac{22}{24}$, quæ breuiùs exprimuntur per $\frac{11}{12}$. Vti ſubſcriptæ prædictarum reductionum monſtrant formulæ.

$$\begin{array}{ccc} & 7 & \\ 3 & & 4 \\ \frac{1}{2} & \times & \frac{2}{3} \\ & 6 & \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{ccc} & 46 & \\ 28 & & 18 \\ \frac{7}{6} & \times & \frac{3}{4} \\ & 24 & \end{array} \;.\; \frac{46}{24} \text{ uel } 1\,\frac{22}{24}\,. \quad \Bigg| \quad 1 \quad \begin{array}{ccc} & 22 & \\ 4 & & 18 \\ \frac{1}{6} & \times & \frac{3}{4} \\ & 24 & \end{array}$$

Debent igitur integra, ex duarum quarumcunque fractionum reductione conſurgentia, ab ipſis priùs detrahi fractionibus,quàm ad ſuccedentem reductionem, aut aliam quanuis operationem deueniatur.

7 *Corollariũ de cæteris integrorũ & fractionum commixtis, ad unam fract. ſimplicem reducendis.*

Ex ſupradictis autem regulis facilè colligitur, qualiter integra cũ fractione ſimplici, uel fractione fractionis, ſimpléxue fractio cum fractione fractionis,aut duæ,pluréſue fractiones fractionum,& reliquæ demum tum integrorũ cum ſimplicibus,aut mixtis fractionibus, tum ipſarum ſimpliciũ, aut mixtarum fractionum combinationes: ad unam ſimplicem reducantur fractionem.Reductis enim integris ad fractionẽ ſimplicem, per primam regulam, & fractione fractionis ad ſimplicem itidem reuocata fractionẽ, per ſecundã:occurrentes fractiones ſimplices ad unã fractionem ſimplicem, iuxta præcedentis quintæ,aut ſextæ regulæ traditionem, uel facilè conuer-

conuertes. Quarum reductionũ exempla tradere, esset priùs dicta, atque sufficienter declarata, præter necessitatem refricare: de his ergo satis. Transeundũ est consequenter, ad prolixarum fractionum abbreuiationem, quæ non infimam in supputationibus uidetur obtinere partem.

De abbreuiandis fractionibus, & partium quotarum inuentione. Cap. 3.

1 TVrpe autẽ est in Arithmetica, & artis plurimũ impediẽs facilitatẽ: cùm reductę fractiones per numeros inuicem cõmunicantes, hoc est, aliis partibus, quàm sit unitas, inuicem cõmensurabiles repræsentantur. Quoties igitur ipsæ fractiones in tales excreuerint numeros, operæpretiũ est illarum numeratores atque denominatores (detractis priùs, & ad læuam positis integris) ad eos statim reuocare numeros, quos inuicem primos appellant, quorum uidelicet nulla est pars quota communis, præter unitatem: tales nanque numeri sunt omnium minimi, qui eandem rationem habent cum eis. Et proinde reddunt fractiones minùs onerosas, & quàm maximas possunt integri partes repræsentantes. Commodissimũ ergo duximus hoc loco prædocere, qualiter eiuscemodi fractiones sint abbreuiandæ, & per eosdem numeros adinuicem primos exprimendæ: quo facilior pateat aditus, ad reliquas fractionum operationes.

Numeri inuicem communicantes.

Numeri inuicem primi.

2 Quærendus est itaq; numerus, qui utriusq; & numeratoris & denominatoris, sit pars quota communis & maxima: in hunc qui sequitur modũ. Partire denominatorẽ ipsius oblatæ fractionis, per numeratorem: etsi nihil ex diuisione relinquatur, ipse numerator quęsitus erit numerus. Si autẽ aliquis ex diuisione relinquatur numerus, diuide priorẽ diuisorem per ipsum residuum numerum: Idque deinceps continuato, quatenus ex ipsa diuisione nihil relinquatur. Nam huiuscemodi diuisor ultimus, datorum numerorum erit pars quota maxima. Per hunc igitur numerum, si diuiseris tandem numeratorem, atq; denominatorẽ ipsius abbreuiandæ fractio-

Maximã communicantium numerorum partem quotã inuenire.

Abbreuiationis fractionũ regula.

nis: quotus numerus ex numeratoris diuisione procreatus, erit numerator: ex diuisione autẽ denominatoris, ipsius abbreuiatæ fractionis denominator generabitur. *Exemplũ primæ partis.* Proponatur exempli gratia, huiuscemodi fractio $\frac{324}{432}$, ad breuissimos reuocanda numeros. Diuidantur igitur 432, per 324: procreabitur tantùm 1, relictis 108. Partiantur rursum 324, per 108: fient pro quoto numero 3, nullo superabundante residuo. Ipse igitur numerus 108, est is qui desideratur. Quoti autem ex diuisionibus procreati numeri, nullo modo curandi sunt: sufficit enim ad eum peruenire diuisorem, per cuius diuisionem nihil tandem relinquatur.

	0 1 ~~2~~ 8		
Denominator.	~~4~~ ~~3~~ ~~2~~	*Numerator.*	~~3~~ ~~2~~ ~~4~~
	1		3
Numerator.	3 2 4	*Residuum.*	~~1~~ 0 8

Secundæ partis exemplum. Si diuiseris igitur 324, per 108: fient pro quoto numero 3, pro reducto numeratore sumenda. Ex diuisione autem 432, per eundem numerum 108: prouenient 4, eisdem 3 pro denominatore subscribenda, ut hic $\frac{3}{4}$. Præfata itaq; $\frac{324}{432}$ ad breuiorem non possunt reuocari fractionem, quàm ad $\frac{3}{4}$: nam 3 & 4 nullam habent partem quotam cõmunem, præter unitatem. Sequuntur ipsarum diuisionum formulæ.

~~3~~ ~~2~~ ~~4~~	~~4~~ ~~3~~ ~~2~~	3 *numerator*
3	4	*abbreuiatus.*
~~1~~ ~~0~~ ~~8~~	~~1~~ ~~0~~ ~~8~~	4 *denominator*

Corollarium notandum. Cùm igitur numerator abbreuiandæ fractionis, fuerit pars quota denominatoris: tunc oblata fractio ad quam breuissimos redigetur numeros, utpote, quoniam in locum numeratoris sola subrogatur unitas.

3 Possunt nonnunquam oblatæ fractiones, potissimum quæ per numeros pariter pares, aut similes communicantes exprimuntur: absque præfatæ quotæ partis maximæ & utrique communis inquisitione, ad breuissimos sic reuocari numeros. *Alius abbreuiandi modus, facilior præcedente.*

ros. Accipiatur utriusque & numeratoris & denominatoris dimidium, & rursum utriusq; numeri dimidium, aut tertia, uel alia pars quota, prout simul occurrent diuisibiles: ídq; toties continuetur, quatenus uterque simul & eodem modo non poſsit ampliùs subdiuidi. Vltimi nanque numeri, erunt minimi ad quos oblata fractio reuocari poteſt. Verbi gratia, propositæ fractionis $\frac{36}{48}$, uterque numerus habet dimidium, scilicet 18, & 24, & rursum uterq; dimidium, utpote 9 & 12, quorũ uterq; tertiam uidetur habere partem, nempe 3 & 4, qui numeri non poſſunt similem ampliùs obseruare diuisionẽ: proposita itaq; fractio $\frac{36}{48}$, in primis uertitur ad $\frac{18}{24}$, deinde ad $\frac{9}{12}$, tandem ad $\frac{3}{4}$, omniũ fractionum sub eadẽ ratione consiſtentium breuiſsimam. Tantam igitur integri portionẽ repræsentant $\frac{3}{4}$, quantam $\frac{9}{12}$, aut $\frac{18}{24}$, seu $\frac{36}{48}$: partes enim & æquè multiplicia sunt inuicem proportionalia, & quæ proportionales sunt fractiones eandem integri partem (ueluti primo dictum eſt capite) repræsentant. *Exemplum.*

4 QVANTVM ad secundũ, utpote, quot partes quotas, & à quibus numeris denominatas, oblatus habuerit numerus: succedentia documenta notentur. Omnis in primis numerus par, habet secundam siue dimidiam partem: impar uerò numerus, caret partibus quotis, ab ipso numero pari denominatis. par enim numerus, quouis modo multiplicatus, parem semper efficit numerum. *De cognitione partium quotarum dati cuiuſuis numeri.* *1. documentum.*

Cùm aliquis numerus alium metitur numerum, qui rursum alium numerum (& sic deinceps quantumlibet) metitur, qui dati numeri eſt pars quota: quilibet ipsorum numerorum, eſt pars quota eiusdem numeri dati. Exempli gratia, 3 metiuntur 9, & ipsa 9 metiuntur 27, partem quotã numeri 54: aio itaque 3 & 9, quemadmodum ipsa 27, partem efficere quotam eiusdem numeri 54: nempe 3 decimãoctauam, 9 autem sextam, & 27 dimidiam siue secundam. *2. documentum.* *Exemplum.*

Numerus, alium metiri, seu numerare dicitur numerum (si forsitan exciderit) cùm aliquoties sumptus, eundem numerum integrè reſtituit: ut 5 ter sumpta, efficiunt 15, similiter *Qualiter numerus alium metiatur numerum.*

& quinquies 3: idcirco 5 per ternarium, uel 3 per quinariũ, ipſum numerũ 15 metiri dicuntur. Item, cùm aliquis numerus eſt quota pars alterius numeri: quotus numerus eiuſdem numeri pars erit quota, à priori denominata numero. Exempli gratia, 5 faciunt tertiam partẽ numeri 15: & 3 igitur uerſa uice quintam: ter enim 5, uel quinquies 3, reſtituũt 15.

3. documentum.

5 Ex his, ſuccedentia deducuntur corollaria. Omnis in primis numerus carens tertia parte, caret & ſexta, atque nona: & quicunque numerus habet nonam, habet uerſa uice tertiam. Rurſum, quilibet numerus carens quarta, caret conſequenter octaua: & qui habet octauam, habet etiam quartam & dimidiam, uelut habens quartam, ipſam quoque dimidiam partem obtinet. Omnis inſuper numerus carens quinta parte, caret pendenter decima: & è diuerſo, numerus habens decimam, habet etiam quintam, atque dimidiam. Item, quicunque numerus par habet nonam, is habet & tertiam & ſextam, atque cæteras eiuſcemodi quotas partes numeri paris: ut numerus 36, cuius nona eſt 4, tertia 12, ſexta 6, quarta 9, altera ſeu dimidia 18, & duodecima 3. Si autem id impari acciderit numero, habebit ſolummodò tertiam: ut numerus 27, cuius nona eſt 3, & tertia 9. Nullus itaque numerus habet tertiam partem, niſi quem metitur 3: aut quartam, præter eum quem metitur 4: neque quintam uel ſextam, niſi metiatur à 5, uel 6: & conſequenter in hunc modum de ſeptima, octaua, nona, & reliquis ſuccedentibus partibus quotis. Quòd ſi numerus par diuidatur per 9, & relinquãtur ex diuiſione 6: talis numerus carebit nona parte, ſed habebit tertiam & ſextam. Porrò ſi idem par numerus diuidatur par 8, & ſuperabundent 4: huiuſmodi numerus carebit octaua parte, ſed habebit quartam, hoc eſt, partem quotam ab ipſo reſiduo denominatam, dummodo ipſum reſiduum ſit pars ipſius diuiſoris, uel ex illius reſultans partibus. Omnis tandem numerus, quem non metitur aliquis digitorum (excepta unitate, quæ communis omnium numerorum eſt menſura) non habet partem quotam, præter ab

Corollaria notanda.

ter ab aliquo imparium & compositorum numerorum denominatam, quos sola metitur unitas, & primos appellare solemus: cuiusmodi sunt 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, &c.

Regula generalis.

Si uolueris igitur agnoscere, an propositus numerus habeat partem quotam, à dato quouis numero denominatam: sic facito. Diuide numerum datum, per denominatorē propositum: & si nihil ex diuisione relinquatur, is habebit partem quotam, à proposito diuisore denominatam: secus autem eueniente, nullam talis nomenclaturæ partem obtinebit. Talis autem pars, semper est numerus quotus ex ipsa diuisione procreatus. Exemplum habes de numero 54, quem offendes habere tertiam partem, scilicet 18, aut sextam utpote 9: nunquam autem quintam uel septimam, uti subscriptæ monstrant diuisionum formulæ, in maiorem omnium expresionem adiunctæ.

Exemplum.

~~2~~			5
~~5~~ ~~4~~	~~5~~ ~~4~~	~~5~~ 4	~~5~~. ~~4~~
1 8	9	1 0	7
~~3~~ ~~3~~,	~~6~~	~~5~~ 5	7

De ipsarum uulgarium fractionum additione. Cap. 4.

Additio uulgarium fractionum, altero duorum modorum absoluenda est. Aut enim oblatæ & inuicem addendę fractiones eiusdem sunt denominationis, uel in eandē cōuertibiles denominationē. Aut tales habent denominatores, ut una in alterā non posit immediatè trāsmutari.

Prima additionis fractionum regula.

1 In primis itaque, si inuicem addendæ fractiones (ut rem ipsam acu tangamus) eiusdem fuerint nomenclaturæ, uel in eandem facilè reducibiles denominationem: componendi tantummodò sunt earūdem fractionum numeratores adinuicem, & subinde resultante numeratore, communis denominator subscribēdus. Exempli gratia, sint eiusdē nominis fragmenta $\frac{3}{8}$, & $\frac{5}{8}$, atque $\frac{7}{8}$, in unam summam colligēda.

Primum exemplum.

Componatur igitur 3 & 5 & 7, consurgent 15: quibus subscribantur 8, resultabunt $\frac{15}{8}$. Tanta est propositarũ fractionum inuicem additarum summa. Sint rursum $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{6}$ & $\frac{7}{12}$, inuicem addenda. Cùm igitur tertia & sexta facilè uertantur in duodecima, propterea quòd 3 & 6, sint partes quotæ ipsius duodenarij numeri: reducantur in primis $\frac{2}{3}$ ad duodecima, fient $\frac{8}{12}$: deinde $\frac{5}{6}$ itidem ad duodecima reuocētur, prodibunt $\frac{10}{12}$, per tertiam antecedentis secũdi capitis regulam. Componantur demum ipsi numeratores, utpote 7, 8, 10, adinuicem, consurgent 25: quibus subscribantur 12, in hunc modum $\frac{25}{12}$. Ergo $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{6}$ & $\frac{7}{12}$, simul iuncta, conficiunt $\frac{25}{12}$.

Secundum exemplum.

Notandum.

Et quoniam nulla utendum est fractione, quæ integrum uel integra comprehendat: reuocanda sunt igitur præfata $\frac{15}{8}$, similiter & ipsa $\frac{25}{12}$, ad integra, per secundam eiusdem secundi capitis regulam, diuidendo numeratorem per denominatorem. Colligetur itaque ex $\frac{15}{8}$ unum integrum, & $\frac{7}{8}$ integri: ex ipsis autem $\frac{25}{12}$, integra 2, & $\frac{1}{12}$, hoc est, unũ integri duodecimum. Quod semel dictum uolumus: ne toties iterata monitione, chartam citra necessitatem ampliare uideamur.

Secunda ad dendarũ fractionum regula.

2 Si contingat autem, easdem fractiones inuicem addendas talibus constare uel exprimi denominatoribus, ut nulla possit in alterius denominationem absque fractione fractionis (quæ summopere fugienda est) immediatè reuocari: hæ ueniunt in unam simplicem fractionem reducendæ, per quintã aut sextam regulam ipsius antecedentis secundi capitis. Omnis nanque fractionum additio, est earundem fractionum in unam simplicem fractionem reductio: at nõ omnis reductio, additio uersa uice censenda est. Offerantur exempli gratia, $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{5}$ inuicem componenda. Manifestum est, nullam istarum fractionum in alicuius reliquarum denominationẽ posse conuerti: reducãtur igitur $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$ ad unam fractionem simplicem, fient $\frac{7}{6}$, quæ 1 ualēt integrum, & $\frac{1}{6}$ integri. Subducto igitur integro, reducantur consequenter $\frac{1}{6}$ & $\frac{3}{5}$, ad unam fractionem simplicem: cõsurgent tandem $\frac{23}{30}$. Ergo $\frac{1}{2}$, & $\frac{2}{3}$, & $\frac{3}{5}$, simul iuncta, conficiunt 1 integrum & $\frac{23}{30}$ integri: uti

gri:uti ſubſcriptæ monſtrant reductionum formulæ.

$$\overset{7}{\underset{6}{\overset{3}{\tfrac{1}{2}} \times \overset{4}{\tfrac{2}{3}}}} .\ \tfrac{7}{6},\ \text{uel } 1\ \&\ \tfrac{1}{6} \quad \Big| \quad \overset{23}{\underset{30}{\overset{5}{\tfrac{1}{6}} \times \overset{18}{\tfrac{3}{5}}}} .\ \tfrac{23}{30},\ \text{ergo } 1\ \&\ \tfrac{23}{30}.$$

Quoties igitur plures,& diuerſæ denominationis fractio- *Corollariũ de reliquis fractionum mixturis inuicem addendis.*
3 nes,aut fractiones fractionum(quæ mixtæ nuncupãtur)tum inter ſeſe,tum coniunctim proponentur addẽdæ, uel ipſa integra cum ſimplicibus aut mixtis fractionibus addere fuerit operæpretium: recurrendum erit in primis ad reductionum præcepta,ſecundo huius libri expreſſa capite: deinde per alterutram antecedentium regularum,additio cõplenda. Nullam enim offendes in eiuſcemodi fractionum additione difficultatem,ſi reductionis artẽ ſedula mente notaueris. Quoniam addere in eiuſcemodi fractionibus, nihil aliud(uti nuper diximus)eſſe uidetur,quàm plures fractiones in unã ſimplicem colligere uel reducere fractionem.

De ſubtractione prædictarum fractionum. Cap. 5.

1 SVbtractio autem dictarum fractionum,quemadmodum & illarum additio, duabus abſoluitur regulis. In primis enim, aut duæ fractiones propoſitæ eiuſdẽ ſunt denominationis,aut diuerſæ,ſed quarũ altera in reliquæ denominationem reuocari poteſt:aut talibus exprimuntur denominatoribus, ut altera in alterius nomẽclaturam reduci non facilè poſsit. Nam duæ tãtummodò,in ſubtractione fractiones occurrũt:& minor,ſemper à potentia maiore ſubtrahitur. quoniam æqualis ab æquali,fruſtra:maior autem à minore,nunquam ſubducitur, ueluti de integrorum ſubtractione dictum eſt. Quæ autem æquales,aut maiores,aut minores potentia dicantur fractiones:primo huius libri capite,ſufficienter declarauimus. *Subtractionis fractionum præambula.*

2 Cùm igitur ſubtrahenda & minor fractio,eiuſdem fuerit nominis cum ea,à qua ſubtractio facienda eſt,ſiue id à principio, ſeu per reductionem tandem acciderit:auferendus eſt numerator ipſius minoris & ſubtrahendæ fractionis,à ſolo numeratore maioris,& reſiduo numero *Prima ſubtractionis fractionum uulgarium regula.*

alterutrius fractionis denominator ſubſcribẽdus: is enim exprimet, relictam ex præfata ſubtractione fractionem. Dentur in exemplum $\frac{2}{5}$, à $\frac{3}{5}$ ſubducenda. Detrahantur itaque 2 à 3, relinquetur 1, cui ſubſcribantur 5, in hunc modum $\frac{1}{5}$: relinquetur igitur ex ipſa ſubtractione $\frac{1}{5}$. Proponantur rurſum $\frac{3}{5}$, à $\frac{7}{10}$ auferenda. Reducantur in primis $\frac{3}{5}$ ad decima, per tertiam regulam ſecundi capitis huius libri: fient $\frac{6}{10}$. Tollantur poſtmodùm 6, à 7: relinquetur $\frac{1}{10}$. Haud diſſimiliter, ſi $\frac{5}{9}$ à $\frac{2}{3}$ proponantur auferenda, reduces in primis $\frac{2}{3}$ ad nona, fient $\frac{6}{9}$: à quibus ſi tollantur $\frac{5}{9}$, relinquetur $\frac{1}{9}$.

Exempla.

3 Quòd ſi altera propoſitarum fractionum, non poſsit in alterius reduci denominationem: utraque ad unam ſimplicem & communem fractionem reducenda eſt, per quintam eiuſdem ſecũdi capitis regulam. Deinde, minor fractio à maiori fractione, hoc eſt, minoris fractionis numerator, à numeratore maioris auferendus: reſiduo ſuper utriuſq; communi denominatore collocato. Vtpote, ſi uolueris ſubtrahere $\frac{2}{3}$, à $\frac{4}{5}$: reduces in primis ipſa $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ ad unam cõmunem & ſimplicem fractionem, utpote, ad quindecima, ex quibus 10 fiẽt à $\frac{2}{3}$, & reliqua 12 à $\frac{4}{5}$: uelut obiecta reductionis formula monſtrat. Auferes itaque 10, à 12, more integrorum: relinquentur 2, hoc eſt, $\frac{2}{15}$.

Secunda eiuſdem ſubtractionis regula.

Exempla.

10		12		reſiduum.
$\frac{2}{3}$	X	$\frac{4}{5}$	.	$\frac{2}{15}$
	15			

Eodem modo $\frac{4}{5}$, ſubducta ex $\frac{5}{6}$, relinquent $\frac{1}{30}$: nam ipſæ fractiones reducuntur ad trigeſima, quorum 24 fiunt à $\frac{4}{5}$, & reliqua 25 ab ipſis $\frac{5}{6}$: & 24 ſubducta ex 25, relinquunt 1. Cuius ſubtractionis atque reductionis, obiectam habes formulam.

24		25		reſiduum.
$\frac{4}{5}$	X	$\frac{5}{6}$	.	$\frac{1}{30}$
	30			

4 Et proinde manifeſtum eſt, ſi fractio aliqua, ab integro uel integris proponatur auferenda, uertẽdum eſſe priùs integrũ in fractionem ſimplicem, eiuſdem cum data fractione denominationis, per primam eiuſdem ſecundi capitis regulã: deinde abſoluẽdam eſſe ſubtractionem, uti ſupradictum eſt. Et quoniam numerator reducti integri, idem ſupponitur cum ſubtrahendæ fractionis denominatore: ſufficit ipſius fractionis nu-

Primum corollarium, de ſubtractione fractionis ab integrorum numero.

nis numeratorem à proprio ſubtrahere denominatore,& reſiduum ipſi denominatori ſupraſcribere,detracta tandē unitate ab ipſo integrorum numero. Vtpote, ſi libeat auferre $\frac{5}{7}$, à tribus integris:tollantur 5 à 7, relinquētur 2, quibus ſubſcribantur 7, in hunc modum $\frac{2}{7}$, & tollatur 1 ab ipſis 3 integris.Relinquentur ergo 2 integra,& $\frac{2}{7}$ integri.

Exemplum.

5 Item,ſi plures fractiones ſimplices,aut mixtæ(quæ fractionum fractiones appellātur)à pluribus ſimplicibus,aut mixtis fractionibus, uel mixtas adinuicē, integráue cum datis quibuſcunq; fractionibus,à ſolis integris, aut ſimul cum oblatis fractionum cōmixturis, ſubtrahere fuerit operæpretium:clarum eſt reducenda fore prius ſingula fractionū genera, cum ipſis integris,ad unam fractionē ſimplicem,per ipſius antecedentis ſecundi capitis regulas,tam uidelicet eorum à quibus ſubtractio facienda eſt, quàm eorum quæ proponuntur ſubtrahenda: deinde ſubtractionem ipſam,per alterutram duarum antecedentium regularum,fore demum abſoluendam. Vides igitur, totam fractionum ſupputationem, ab ipſa reductione pendere.

Secundum corollarium, de reliquis integrorum & fractionum commixturis, inuicem ſubtrahendis.

De earundem fractionum multiplicatione. Cap. 6.

MVltiplicatio non minorē uidetur obtinere partem in fractis,quàm in integris numeris:quæ aut inter eaſdē ſolūmodò cadit fractiones, aut ſimul cū ipſis tractatur integris.
1 Fractiones in primis, etiā qualeſcunq; fuerint, hoc modo inter ſeſe ueniunt multiplicandæ.Ducantur oblatarum fractionum numeratores, atq; denominatores adinuicem,tam per rectum quàm per obliquum expreſsi:& reſultātis inde fractionis numerator, atq; denominator producetur.Hanc porrò multiplicationem,ſic faciendā eſſe uelim intelligas: ut primus tam numerator q̃ denominator ducatur in ſequentem, & productus numerus in ſuccedentem, & ſic deinceps uſq; ad ultimū. Detur primùm fractio ſimplex, per ſimplicem multiplicanda fractionem:utpote $\frac{4}{5}$, per $\frac{2}{3}$. Ducantur igitur 4 in 2, fient 8: & 5 in 3, fient 15.Conſurgent

Regula generalis, de fractionum inter ſeſe multiplicatione.

Primum exemplum.

Secundū exemplum. igitur ex proposita multiplicatione, $\frac{8}{15}$. Proponatur insuper fractio fractionis, per fractionis itidem fractionem multiplicanda: uerbi gratia $\frac{2}{3}\ \frac{1}{4}$, per $\frac{3}{5}\ \frac{1}{2}$. Ducantur ergo 2 in 1, fient 2: & rursum 2 in 3, fient 6, quæ tandem per 1 multiplicata non augētur. Productæ itaque fractionis numerator, erit 6. Ducantur consequenter 3 in 4, fient 12: & rursum 12 in 5, fient 60: & ipsa demum 60 in 2, consurgent 120. Tātus est ipsius productæ fractionis denominator, sub ipso numeratore reponendus. Producentur ergo ex ipsa multiplicatione $\frac{6}{120}$, quæ breuiùs per $\frac{1}{20}$ repræsentantur. *Tertium exemplum.* Eodem modo fractio simplex, per fractionē fractionis, aut è diuerso multiplicabitur. Vtpote, si $\frac{4}{5}\ \frac{1}{3}$, per $\frac{3}{4}$, uel è conuerso multiplicare fuerit operæpretium: ducenda sunt in primis 4 in 1, fiēt 4: & rursum 4 in 3, fient 12. Tantus est productæ fractionis numerator. Ducantur postmodum 5 in 3, fient 15: & rursum 15 in 4, consurgent 60, pro denominatore ipsi numeratori subscribenda. Ex ipsa ergo multiplicatione, resultabunt $\frac{12}{60}$: quæ ad breuiorem reducta fractionem, faciūt $\frac{1}{5}$. Haud alienum habeto iudicium, de cæteris quibuscunq; tam simplicibus, quàm mixtis fractionibus, aut datis quibusuis earundem fractionum commixturis inuicem multiplicandis.

Notandū circa fractionū multiplicationem. In fractionum itaque multiplicatione, producta fractio potestate minor est utraque & multiplicanda & multiplicante: cuius contrarium, integrorum uidetur accidere multiplicationibus. Quoniam ab unitate (quæ rationem habet integri) numeri sursum ascendendo, per continuam ipsius unitatis multiplicationem in infinitum semper augentur: ab eadem uerò unitate in quotcūque partes suprascripto modo fracta, ipsarum partium distributio continuè descendendo potestate minoratur. Hinc fit, ut quemadmodum integra inuicem multiplicata, producunt numerum utroque integrorum numero maiorem: sic in fractionū multiplicatione, fractio utraque minor generetur. Vt ex primo colligere licet exemplo: nam $\frac{8}{15}$ minora sunt $\frac{4}{5}$, aut $\frac{2}{3}$. Idem censeto de cæteris quibuscunque, & eodem modo productis fractionibus.

DEVE-

2 DEVENIENDVM est conſequenter, ad eas fractionum multiplicationes, quæ unà cum ipſis fiunt integris: quas in quatuor differētias redigemus, & ſuo declarabimus ordine. In primis ergo, ſi data fractio per integrorū numerū proponatur multiplicanda: ducēdus erit ipſius fractionis numerator, in datum integrorum numerum, & inde producto numeratori eiuſdem fractionis denominator ſubſcribēdus. At ſi data fractio, fuerit alterius fractionis fractio: ea primùm uertatur in fractionem ſimplicem, per quartam regulam antecedentis ſecundi capitis: dein abſoluatur, uti nunc expreſsimus, ipſa multiplicatio. In hac itaque fractionis per integra multiplicatione, ſolus fractionis numerator pro datorum integrorū augetur multitudine: at non è diuerſo. quod & aſtronomicis, hoc eſt, ſexagenariis probabis accidere fractionibus, ſiue minutis. Dentur in exemplum $\frac{3}{7}$, per 4 integra multiplicanda. Ducantur igitur 3 in 4, fient 12: quibus ſubſcribantur 7, conſurgent ex ipſa multiplicatione $\frac{12}{7}$, quæ ad 1 integrum, & $\frac{5}{7}$ integri tandem reuocantur. Sint rurſum $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$, per 5 integra multiplicanda. Reducantur in primis ipſa $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ ad fractionem ſimplicem, utpote ad $\frac{2}{6}$. deinde multiplicentur 2 per 5, fient 10: quibus ſubſcribantur 6, reſultabūt $\frac{10}{6}$, quæ 1 ualent integrum, & $\frac{2}{3}$, hoc eſt, duo integri tertia.

De multiplicatione fractionis, per integra, regula ordine ſecūda.

Notandum.

Exempla.

3 Secundò, ſi data fractio, per integra cum fractione proponatur multiplicanda: ducendus erit in primis numerator ipſius datæ fractionis, in integrorum numerum, & productum ipſi denominatori ſupraſcribendum, uti nunc expreſsimus: Deinde fractio in fractionem multiplicanda eſt, per primam huius capitis regulam: Tandem ambæ fractiones in unā ſimplicem reducendæ ſunt, aut per tertiam, aut per quintam ipſius ſecūdi capitis regulam, detractis ſemper (quoties excreuerint) integris. Sint uerbi gratia $\frac{2}{3}$, per 5 integra & $\frac{1}{2}$ multiplicanda. Ducantur igitur 2 in 5, fient 10, quæ $\frac{10}{3}$ dicentur: Deinde multiplicentur ipſa $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$, fient $\frac{2}{6}$, quæ breuiùs per $\frac{1}{3}$ repræſentantur, quod unà cum $\frac{10}{3}$ efficit $\frac{11}{3}$: Tollantur poſtmodū integra ab $\frac{11}{3}$, relinquētur $\frac{2}{3}$. Ex hac itaq;

De multiplicatione fractionis per integra cū fract. Regula 3.

Exemplum.

multiplicatione, consurgent 3 integra, & 2 integri tertia.

4 Tertiò, si fractio cum integris, per integra multiplicanda proponatur: ducēda sunt priùs integra adinuicem, per quartum caput libri primi: deinde fractio per integra multiplicanda, per secundam huius capitis regulam: & à consurgente fractione, subducenda sunt integra, & prioribus adiungenda. Exempli causa, sint 5 integra & $\frac{2}{3}$ integri, per 4 integra multiplicanda. Ducantur in primis 5 in 4, fient 20 integra: deinde $\frac{2}{3}$ in eadem 4 integra, consurgent $\frac{8}{3}$, à quibus 2 subtrahi possunt integra, relictis $\frac{2}{3}$. hæc autem 2 integra, unà cū ipsis 20, conficiunt integra 22. Ex ipsa ergo multiplicatione, resultant integra 22, & 2 insuper integri tertia.

De multiplic. fract. cum integris, per integra. Regula 4.

Exemplum.

5 Quartò & ultimò, si fractio cum integris, per integra cum fractione occurrat multiplicanda: in hunc facito modum. Multiplicentur in primis integra per integra, iuxta quarti capitis libri primi traditionem: Deinde fractio multiplicanda, ducatur in integra multiplicantia, similiter & fractio multiplicans, in integra multiplicanda, per secundam huius capitis regulam: & inde generatæ fractiones (detractis priùs integris) ad unam simplicem reducantur fractionem. Tandem altera fractionum per reliquam multiplicetur, per primam huiusce capitis regulam, & inde resultans fractio, per primā regulam antecedentis quarti capitis, priori adiungatur fractioni, cum qua eiusdem semper erit nominis: quæ si creuerit ad integri ualorem, tollatur integrum, & prioribus addatur integris. Consurget enim demum, integrorum, unà cum fractione, aut sine fractione, numerus, ex præfata multiplicatione productus. Offerantur exempli gratia, 5 integra & $\frac{1}{3}$, per 4 integra & $\frac{2}{7}$ multiplicanda. Ducantur ergo primùm 5 integra in 4, fient integra 20: deinde $\frac{1}{3}$ in 4 integra, fient $\frac{4}{3}$, quæ 1 ualent integrum, & $\frac{1}{3}$ integri. Ducantur consequenter $\frac{2}{7}$ in 5 integra, fient $\frac{10}{7}$, quæ rursum 1 ualent integrum, & $\frac{3}{7}$ integri. Colligentur ergo 2 integra, ipsis 20 integris adiungenda: consurgent integra 22. Reducantur postmodùm $\frac{1}{3}$ & $\frac{3}{7}$, ad unam fractionem simplicem, utpote ad

De multiplicatione fract. cum integris, per integra cum fractione, regula 5.

Exemplum.

te ad

te ad $\frac{16}{21}$. Tandem multiplicetur $\frac{1}{3}$ per $\frac{2}{7}$, fient $\frac{2}{21}$: quæ unà cùm $\frac{16}{21}$, conficiunt $\frac{18}{21}$. Resultabunt itaque ex præassumpta multiplicatione integra 22, unà cum $\frac{18}{21}$, quæ reducuntur ad $\frac{6}{7}$: Hæc autē omnia, præsens ostendit formula.

Integra.	Fractiones.		
5	$\frac{1}{3}$ · $\frac{4}{3}$, *id est* 1, & $\frac{1}{3}$	7	16
4	$\frac{2}{7}$ · $\frac{10}{7}$, *id est* 1, & $\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{7}$	9
20	2.		21
2	$\frac{16}{21}$ & $\frac{2}{21}$, *quæ faciunt* $\frac{18}{21}$		
22, $\frac{18}{21}$.	*Summa ex multiplicatione producta.*		

6 Poteris autem has quatuor fractionū cum integris, & similes quascūq; multiplicationes, per ipsam primam & generalem absoluere regulam: reductis priùs integris ad fractionem simplicem, eiusdem cum data fractione nominis. Tunc enim numeratores erunt inter sese multiplicādi, similiter & denominatores: ut producta ex ipsa multiplicatione fractio consurgat, ex qua rursum coalescentia detrahere poteris integra. Resumantur in exemplū præfata 5 integra cum $\frac{1}{3}$, per 4 integra & $\frac{2}{7}$ multiplicāda. Reducantur itaq; primùm 5 integra, ad tertia, fient $\frac{15}{3}$: quæ unà cū $\frac{1}{3}$, faciūt $\frac{16}{3}$. Deinde 4 integra ad septima reducta, faciunt $\frac{28}{7}$: quæ unà cū $\frac{2}{7}$ cōficiunt $\frac{30}{7}$. Ducātur ergo $\frac{16}{3}$ in $\frac{30}{7}$, iuxta præfatā regulā uniuersalē, fiēt $\frac{480}{21}$: quæ tandē ad integra reuocata, exhibēt integra 22, relictis $\frac{18}{21}$ siue $\frac{6}{7}$. Haud alienum habeto indicium, de cæteris quibuscunque integrorum, & fractionum tam simplicium, quàm mixtarum oblatis, & inuicem multiplicandis ordinibus, siue commixturis.

4. antecedentium regularum, ad primam & uniuersalem notanda reductio.

Exemplum.

De diuisione prædictarum fractionum. Cap. 7.

1 Diuisio, quemadmodum & multiplicatio, aut inter ipsas tantùm accidit fractiones, aut simul cum ipsis tractatur integris. Si fractio, per qualemcunque fractionem diuidenda proponatur: hanc generalem obseruato regulam. Ducito numeratorem ipsius diuidendę fractionis, in denominatorem diuidentis: & productum numerum, generatæ fractionis facito numeratorem. Quòd si denominator eiusdem fractionis diuidendæ, in ipsius diuidentis

Regula generalis, de diuisione fractionis per fractionem.

numeratorem ducatur: conſurget ipſius procreatæ fractionis denominator, ſub præfato numeratore collocandus.

Notandum. Cùm igitur fractio potentia maior, per minorem diuiditur fractionem: fractio quota demonſtrat, quoties eadem minor in ipſa maiore & diuidenda fractione contineatur. At ſi minor per maiorem fractionem diuidi iubeatur: producta fractio tunc indicat, quotam partem ſiue partes eadem minor ipſius maioris fractionis comprehendit.

Exemplum.1. Dentur in exemplum $\frac{2}{3}$, per $\frac{1}{2}$ diuidenda. Ducantur ergo 2 in 2, fient 4: deinde 3 in 1, fient ſolummodò 3, ſub ipſis 4 de more notanda. Prouenient igitur ex ipſa diuiſione, $\frac{4}{3}$. Et quoniam 4 continent 3 ſemel, & 1 præterea tertium: concludes $\frac{2}{3}$ continere ſemel $\frac{1}{2}$, & 1 inſuper ipſius $\frac{1}{2}$ tertium. Quòd ſi uerſa uice $\frac{1}{2}$, per $\frac{2}{3}$ ſupradicto modo diuidantur: fient $\frac{3}{4}$, denominatore in numeratorē, & è diuerſo tranſmutato: quæ fractio, indicabit ipſum $\frac{1}{2}$, efficere tria quarta eorundem $\frac{2}{3}$.

Exemplum.2. Sint rurſum $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$, per $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$ diuidenda. Duces igitur 2 in 1, fient 2: & hæc in 4, fient 8: quæ tandem multiplicata per 5, faciunt 40. Tãtus eſt numerator generatę fractionis. Poſtea, duc 3 in 4, fient 12: & hæc rurſum in 3, fient 36: quæ per 1 multiplicata, non augētur. Tantus eſt denominator, ſub eiſdem 40 notandus, in hunc modum $\frac{40}{36}$. Aut (ſi uelis) reduc utranque mixtam fractionem, ad fractionem ſimplicem: utpote $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ ad $\frac{2}{12}$ & ipſa $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$ ad $\frac{3}{20}$, per quartam regulam ſecundi capitis huius libri. Deinde multiplica 2 per 20, fient 40: & 12 per 3, fiēt 36. Habes igitur utroq; modo, $\frac{40}{36}$, quæ reuocantur ad $\frac{10}{9}$: ut ſequentes monſtrant formulæ.

$$\frac{2}{3}\ \ \frac{1}{4} \overset{40}{\underset{36}{\times}} \frac{3}{4}\ \ \frac{1}{5} \quad\Big|\quad \frac{2}{12} \overset{40}{\underset{36}{\times}} \frac{3}{20}.\ \ \frac{40}{36},\ \text{uel}\ \ \frac{10}{9}.$$

Et quoniam 10, continent 9 ſemel, & $\frac{1}{9}$: concludes propterea, $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ continere ſemel $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$, & nonam inſuper illorum partem. Quòd ſi è conuerſo diuiſeris eadem $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$, per ipſa $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$: procreabis uerſa uice $\frac{36}{40}$, ſiue $\frac{9}{10}$, denotantia eadem $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$, efficere $\frac{9}{10}$ ipſorum $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$. Non aliter fractionē

ſimplicem

ſimplicem per fractionem fractionis, aut è diuerſo diuidere poteris: datáſue quotcunque fractiones, per quaſcunque uolueris fractionum commixturas.

Ex ipſa itaque fractionum diuiſione proueniens fractio, diuidenda ſemper eſt maior: cuius contrarium, ex integrorum uidetur accidere partitione. Cùm enim unitas ſit ueluti medium quoddam, inter numeros ex ipſius unitatis multiplicatione creſcendo reſultantes, & partes quotas eiuſdem unitatis fractæ, diminuendo poteſtate deficientes: fit, ut integrorum numerus per integra diuiſus, reddat numerũ ipſi unitati propiorem quàm ſit diuidendus, & proinde minorẽ: Et fractio ſimiliter per fractionẽ diuiſa, procreet fractionem eidem unitati quàm ſit diuidenda propiorem, & potentia conſequenter maiorem. Quanto enim partes integri, magis ab ipſo diſtant integro: tanto potentia ſunt minores, tametſi à maiori denominentur numero. *Notandũ circa fractionũ diuiſionem.*

2 CVM AVTEM integra, per ſimplicem fractionẽ proponentur diuidenda: ſic facito. Duc fractionis denominatorẽ in ipſa integra, & rurſum productum numerũ in ipſum denominatorem: nam quotæ fractionis ex ipſa diuiſione procreatæ numeratorem habebis. Quòd ſi eiuſdem fractionis denominatorem, per ipſum numeratorem multiplicaueris: naſcetur eiuſdem quotæ fractionis denominator. *De diuiſione integrorum, per fractionẽ ſimplicem, regula 2.* Sint gratia exempli 5 integra, diuidenda per $\frac{3}{4}$. Duc igitur 4 in 5, fient 20: & hæc rurſum in 4, conſurgent 80. tantus eſt procreatæ fractionis numerator. Duc poſtmodùm 4 in 3, fient 12. tantus eſt eiuſdẽ quotæ fractionis denominator, ſub ipſo numeratore reponendus. Naſcentur ergo ex ipſa diuiſione $\frac{80}{12}$, quæ breuiùs per $\frac{20}{3}$ repræſentantur. Et quoniam 20 continent 3 ſexies, & $\frac{2}{3}$: concludes præfata 5 integra continere $\frac{3}{4}$ ſexies, & $\frac{2}{3}$ præterea ipſorum trium quartorum. *Exemplum.*

3 Verùm ſi è diuerſo, fractionem aliquam ſimplicẽ, per integra diuidere fuerit operæpretium: multiplicandus eſt denominator ipſius fractionis per integra, & productus numerus ſub eiuſdem fractionis numeratore collocandus. *De diuiſione fractionis per integra, regula 3.*

Proponantur in exemplum eadē $\frac{3}{4}$, per ipsa 5 integra diuidenda. Duces igitur 4 in 5, fient 20, scribenda sub 3 in hūc modum $\frac{3}{20}$. Ergo ex ipsa diuisione, procreabuntur $\frac{3}{20}$: indicantia præfata $\frac{3}{4}$, tantā partem efficere ipsorū 5 integrorum.

De diuisione integrorū cum fract. per integra cum fractione. Regula 4.

4 Si autem integra cum fractione, per integra itidem cum fractione diuidenda proponantur: hanc accipe regulam, per quam reductio simul atq; diuisio absoluitur. Duc unius fractionis denominatorem, in denominatorem alterius: & productum numerum, communem facito denominatorē. Multiplica deinde ipsum communem denominatorem, per integra diuidenda: & producto adde numerum, qui ex ductu numeratoris diuidendæ fractionis, in denominatorem diuidentis generatur. Nam inde cōsurgens numerus: ipsius quotæ fractionis numerator uenit appellandus, ex parte diuidēda procreatus. Ducito postmodum præfatum communem denominatorem, in integra diuidētia: & producto adiungito numerum, ex ductu numeratoris ipsius fractionis diuidentis, in denominatorem diuidendæ procreatum. Nam inde collectus numerus: pro quoto denominatore uenit accipiendus, ex reductione partis diuidentis proueniens.

Exemplum. Obijciātur exempli gratia, 3 integra & $\frac{1}{3}$, per 2 integra & $\frac{1}{4}$ diuidenda. Duc itaque 3 in 4, fient 12, quæ uocentur cōmunis denominator. Deinde multiplica 12 per 3 integra, fient 36: quibus adde 4, ex ductu 1 in 4 resultantia, prouenient 40. Tātus est numerator procreatæ fractionis. Duc consequenter ipsa 12 in 2 integra, fiēt 24: quibus adde 3 ex ductu 1 in 3 prouenientia, resultabunt 27. Tantus est denominator, sub præfatis 40 reponendus. Ex hac igitur diuisione procreantur $\frac{40}{27}$, quæ ualent 1 integrum & $\frac{13}{27}$. De quibus iudicabis, ut supra.

Antecedentiū trium regularum, ad pri-

5 Sed omnes istæ posteriores, & similes quotcunque regulæ, adminiculo reductionis, per primam & uniuersalem regulam absolui uel facilè possunt: imò & aliæ quæcunque cum

cum ſimplicibus fractionibus, uel fractionibus fractionum inuicem diuidendæ commixturæ. Reductis enim priùs integris, atque fractionum fractionibus ad fractiones ſimplices: cætera iuxta tenorem ipſius primæ regulæ, ueniunt adimplenda. In cuius rei gratiam, proximum iterum diſcurrere iuuat exemplum. Sint igitur rurſum 3 integra cum $\frac{1}{3}$, per 2 integra & $\frac{1}{4}$ diuidenda. Reducantur in primis 3 integra ad tertia, fient $\frac{9}{3}$: quæ unà cum $\frac{1}{3}$, efficiunt $\frac{10}{3}$. Reducantur conſequenter 2 integra ad quarta fient $\frac{8}{4}$: quibus ſi addatur $\frac{1}{4}$ reſultabunt $\frac{9}{4}$. Diuidantur ergo $\frac{10}{3}$ per $\frac{9}{4}$, iuxta tenorem primæ & uniuerſalis regulæ: naſcentur pro quota fractione $\frac{40}{27}$, quæ rurſum 1 integrum, & $\frac{13}{27}$ integri repræſentant. Haud aliter facito, de quibuſcunque ſimilibus.

mam & uniuerſalem notanda reuocatio.

Exemplum.

De inuenienda radice quadrata, earundem fractionum uulgarium. Cap. 8.

1 RAdices autem in fractionibus uulgaribus, ſemper erũt duplices. Cùm enim ad ipſarum fractionum expreſſionem, duo concurrant numeri, utpote numerator, & denominator: utriuſq; radix quadrata, per alterutrum duorum modorum ſeptimi capitis libri primi, ſeorſum accipienda eſt. Quoniam radix numeratoris, erit numerator: & ipſius denominatoris radix, denominator quadratæ radicis eiuſdem oblatæ fractionis. Sit in primis fractio, cuius uterque numerus ſit quadratus: utpote $\frac{4}{9}$, quorum radicem iubearis habere quadratam. Radix itaque numeratoris, eſt 2: ipſius uerò denominatoris, 3. Scribe ergo 2 ſuper 3, in hũc modum $\frac{2}{3}$: tanta eſt radix quadrata ipſorum $\frac{4}{9}$. Sit rurſum fractio, cuius neque numerator neq; denominator ſit quadratus: utpote $\frac{5}{11}$. Per primum itaque modum præallegati ſeptimi capitis libri primi, radix numeratoris erit 2 & $\frac{1}{4}$: ipſius uerò denominatoris, 3 & $\frac{1}{3}$. Vnde collecta & ueritati admodùm propinqua radix ipſorũ $\frac{5}{11}$, erit $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$. Per ſecundum autem eiuſdem ſeptimi capitis modum (ſi præciſiorem optaueris radicem) antepoſitis utrique & numera-

Duplex radix in fractionibus accipienda.

Exemplum in quadrata fractione.

Exemplum de fractione nõ quadrata.

tori & denominatori tribus tziphrarum binariis: radix numeratoris erit 2236, ipsius uerò denominatoris 3316, quæ simul faciunt $\frac{2236}{3316}$. Hæc autem per sexagenariam fractionis rationem (ut eodem admonuimus capite) distributa: reddũt tandem pro radice numeratoris 2 integra, prima minuta 14, secunda 9, tertia uerò 36, quæ non faciunt omnino 2 & $\frac{1}{4}$: pro denominatoris autem radice, 3 integra, prima minuta 18. secunda 57, tertia uerò 36, quæ non complent 3 & $\frac{1}{3}$.

2 ALIVM IVVAT annectere modum inueniendarũ quadratarum radicum, in gratiam nõ quadratarum fractionum principaliter excogitatum. Proposita igitur quacunque fractione, cuius quadratam iubearis inuenire radicem: mutuato quencunque uolueris numerum, & illum multiplica per oblatæ fractionis denominatorem, productúmque futuræ radicis denominatorem facito. Ipsum deinde mutuatũ numerum ducito in seipsum, & quadratum eiusdem ducito in ipsius datæ fractionis denominatorem, rursúmq; productum per numeratorem eiusdẽ fractionis multiplicato: consurgentis demum numeri quadratam extrahito radicẽ, per primam partẽ ipsius præallegati septimi capitis libri primi. nam ea erit numerator ipsius oblatæ radicis, supra denominatorem solito more notandus. Repetantur in exemplũ, præfata $\frac{4}{9}$: sitque mutuatus numerus 60. Duc igitur 60 in 9, fient 540: tãtus est futuræ radicis denominator. Duc postmodùm 60 in sese, fiet 3600: quæ ducta in 9, reddũt 32400: & rursum per 4 multiplicata, conficiunt 129600. Quorum radix quadrata, est 360: tantus est numerator, super eadem 540 in hunc modum collocandus $\frac{360}{540}$. Hæc autem $\frac{360}{540}$, reducuntur ad $\frac{2}{3}$: tanta est radix ipsorum $\frac{4}{9}$, quantã iuxta primum modum nuper adinuenimus. Resumantur iterum, ipsa $\frac{5}{11}$: sitque idem mutuatus numerus 60. Si duxeris ergo 60 in 11, fiet 660: quæ pro futuræ radicis denominatore seruabis. Ducatur postmodum quadratũ ipsorum 60, hoc est, numerus 3600 in eadem 11, fient 39600: quæ rursum per 5 multiplicata, reddunt 198000. Quorum radix quadrata est prope-

Modus inueniendi radicẽ quadratam, fractionibus peculiaris.

Exemplum.1.

Exemplum.2.

propemodũ 445: quæ ſuper ipſa 660 pro numeratore locabis, in hunc modum $\frac{445}{660}$. Hæc autem $\frac{445}{660}$, reducuntur ad $\frac{89}{132}$, quæ ualent $\frac{2}{3}$ & unum ferè quartum unius tertij: quantam uidelicet nuper offendimus quadratam radicem ipſorũ $\frac{5}{11}$. Quanto igitur mutuatus numerus fuerit maior, tanto præciſiorem radicem nõ quadratarũ fractionum obtinebis. *Corollarium.*

Non aliter & iudicandum, & faciendum eſſe exiſtimato de cæteris quibuſcunque fractionibus: hoc ſolùm adiuncto, quòd ſi data fractio fuerit alterius fractionis fractio, ea priùs in ſimplicem uenit reducenda fractionem: Etſi fractioni cohæreant integra, ea ſimul cum fractione ad unã ſimplicem fractionem fore reuocanda. *Notandum.*

De cubica præmiſſarum fractionum radice. Cap. 9.

1 Haud diſsimili uia, datæ cuiuſcunque fractionis ſimplicis, cubicæ ſunt extrahendæ radices, altera quidem numeratoris, altera uerò denominatoris ipſius oblatæ fractionis: Idque per alterutrum modum, octauo capite libri primi declaratum. Quoniam radix cubica numeratoris, erit numerator: & cubica radix denominatoris, ipſius cubicæ & optatæ radicis erit denominator. quemadmodum proximo capite, de quadratis earundem fractionum prædictum eſt radicibus. *Primus modus extrahendi cubicam fract. radicẽ.*

Sit in primis oblata fractio, cuius uterque numerus ſit cubus: utpote, $\frac{8}{27}$. Radix itaque numeratoris eſt 2, & ipſius denominatoris 3, quæ ſimul faciunt $\frac{2}{3}$: tanta eſt cubica radix ipſorum $\frac{8}{27}$. *Exemplum. 1.*

Eſto rurſum fractio, cuius neuter numerus ſit cubus: utpote, $\frac{10}{29}$. Per primum itaque modũ eiuſdem octaui capitis libri primi, radix numeratoris eſt 2 & $\frac{1}{3}$: ipſius autem denominatoris, 3 & $\frac{2}{9}$, quæ ſimul faciunt $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{9}$: tanta eſt radix cubica propinqua ueritati ipſorum $\frac{10}{29}$. *Exemplum. 2. pro non cubis fractionibus.* Per ſecundum porrò eiuſdem octaui capitis modum, ſi utrique & numeratori & denominatori geminos antepoſueris tziphrarum ternarios, & tenorem præcepti ad unguem obſeruaueris: offendes radicem cubicam numeratoris eſſe 215, ipſius uerò denominatoris 307, quæ ſimul faciũt $\frac{215}{307}$. Hæc autem per sexagenarium articulum solito more distributa, dant pro radice cubica numeratoris 2 integra, & 9 sexagesima, siue prima minuta, quæ non faciunt omnino 2 & $\frac{1}{3}$: pro ipsius uerò denominatoris radice 3 integra, & prima minuta 4, secunda uerò 12, quæ non faciunt præcisè 3 & $\frac{2}{9}$, per primum modum adinuenta.

2 ALIVM, uelut in quadratis, libet subiungere modum: quo tam cubicæ, quàm non cubicæ fractionis, radix præcisè admodum extrahitur. Data itaque fractione simplici, cuius radix cubica desideretur, mutuetur rursum (ut in quadratis) aliquis numerus, per quem oblatæ fractionis denominator in primis multiplicetur: nam productus numerus, erit ipsius quotæ radicis denominator. Ipse postea mutuatus numerus ducatur in sese cubicè, & inde generatus cubus per ipsius datæ fractionis denominatorem cubicè rursum multiplicetur, & productus tandem numerus in eiusdem fractionis numeratorem ducatur, atq; resultantis inde numeri cubica radix extrahatur, per primam partem ipsius octaui capitis præallegati libri primi: nam ipsa erit numerator eiusdem optatæ radicis. Resumantur in exemplum, data nuper $\frac{8}{27}$: sitque mutuatus numerus 6. Duc itaque 27 in 6, fient 162: tantus erit futuræ radicis denominator. Postea ducito 6 in sese cubicè, fient 216, quæ ducta in 27, efficiũt 5832, & rursum per eadem 27 multiplicata, reddunt 157464, quæ tandẽ multiplicata per 8, cõficiunt 1259712, quorum radix cubica est 108: tantus est eiusdem radicis numerator, super ipsa 162, in hunc modum reponendus $\frac{108}{162}$. Hæc autem $\frac{108}{162}$, reducũtur ad $\frac{2}{3}$: tanta est radix cubica ipsorum $\frac{8}{27}$, quantam uidelicet per primum modum nuper offendimus. Proponantur rursum præfata $\frac{10}{29}$: sitque idem mutuatus numerus 6. In quem ducantur in primis 29, fient 174: tantus est futuræ radicis denominator. Ducantur postmodùm 6 in sese cubicè, fient 216, quæ multiplicata per 29, efficiũt 6264, & rursum ducta in eadem 29, reddunt 181656, quæ ducta tandem in 10, conficiunt 1816560, quorum radix cubica est 122: tantus est ipsius

Alius modus ualde notandus.

Exemplum. 1.

Exemplum. 2.

est ipsius cubicæ radicis numerator, super eadem 174 collocandus, ut hic $\frac{122}{174}$. Hæc autem $\frac{122}{174}$, reducuntur ad $\frac{61}{87}$, quæ paulo maiora sunt $\frac{2}{3}$: Radix ergo cubica ueritati proxima, ipsorum $\frac{10}{29}$, est $\frac{61}{87}$. Quanto igitur numerus mutuatus *Corollarium.* fuerit maior: tanto præcisiorem radicem cubicā, in non cubicis offendes fractionibus. Porrò ubi data fractio fuerit *Notandum.* alterius fractionis fractio, aut cum ipsa fractione data adfuerint integra: reducenda erit in primis ipsa fractio mixta, similiter & integra cum data fractione, ad unicam fractionem simplicem. Quemadmodum in cæteris prædictarū fractionum operationibus iussimus obseruandum.

SECVNDI LIBRI FINIS.

EIVSDEM ARITHMETICAE PRACTICAE LIBER Tertius: De fractis secundum Astronomos numeris, siue minutis integrorum sexagenariis.

De ratione numeri sexagenarij, ac inde deductis integrorum fractionibus. Cap. I.

1 NON mediocrem supputationibus astronomicis causare uidetur facilitatē: si data integra per cōmodiorum numerorū frangantur distributiones. Cùm igitur nume- *Cur numerus 60. ab Astronomis electus sit.* rus sexagenarius, cæteris omnibus intra centenarium comprehensis numeris, tum partium quotarum multitudine, tum expedita multiplicandi atque diuidendi facilitate (ut suo loco fiet manifestū) aliisque nominibus longè præstare uideatur: hunc propterea inter cæteros numeros elegerunt Astronomi, utpote, quem in frangendis illorum integris, & supputandis cælestiū motuū

atque temporum reuolutionibus, præuiderunt aptisſimum.

Circularium siue astronomicarum fractionũ origo. Præterea, cùm cælorum motus ſit circularis, & circularibus congenitus orbibus: is nõ potuit commodiùs, quàm per circuli partes, in certum aliquem redigi calculum. Elegerũt itaque circulum Solis, cæteris tum dignitate, tum neceſsitate præferendum, utpote, ad quem reliquorum ſyderum motus referuntur: quem circulum, appellant Zodiacum, ad proprium Solis motum, ſingulo anno, 365 dies naturales, & 6 ferè horas complectente, deſcriptum.

Zodiacus circulus.

2 Hunc itaque Zodiacum circulum, diuidunt imprimis in 12 partes inuicem æquales, 12 anni menſibus propemodum reſpõdentes: quæ ſigna, hoc eſt, inſigniores circuli partes appellantur, ſub quibus diſcurrẽte Sole, hæc inferiora ſignanter mutari conſpicimus. Quodlibet inde ſignum, in 30 partes inuicẽ pariter æquales diuidunt, numero dierũ unius menſis ferè reſpõdentes: quæ ipſius circuli (ut dies naturales ipſius temporis) integra dicuntur, & peculiari nomine uocitentur gradus. Vnumquenque porrò gradum, in ſexagenarias minutorum ſubdiuidunt diſtributiones. Vnde quælibet ſexageſima pars ipſius gradus, unum primum nuncupatur minutum: quælibet autem minuti pars ſexageſima, unum ſecundum: & quælibet ſexageſima pars ipſius ſecũdi, unum tertium: & deinceps hoc modo, quantumlibet ultra progrediendo. Hæ autem graduum ſiue integrorum per ſexagenarium numerum obſeruatæ diſtributiones, fractiones appellantur aſtronomicæ: quarum quæ à maiori denominãtur numero, potẽtia ſunt minores, quemadmodum de uulgaribus dictum eſt fractionibus. Hanc præterea ſignorũ, graduum, atque fractionum ſexagenariam partitionem: obſeruant & alij quicunque circuli, ad ipſius Zodiaci & primarij circuli imitationem. Sed eiuſdem Zodiaci ſigna, proprias habent nomenclaturas (de quibus capite ſecundo, libri ſecundi Sphæræ noſtræ ſiue Coſmographiæ, abundè dictum eſt) cæterorum uerò circulorum ſigna, ſolis exprimuntur numeris, ab 1, in 12 diſtributis.

12. zodiaci signa.

Signi gradus 30.

Graduum fractiones sexagenariæ.

De cæteris circulis à Zodiaco.

Haud

3 Haud dissimiliter, integra temporis, hoc est, dies singulos naturales, in 60 partes inuicem æquales nonnulli diuidūt Astronomi, quæ dierum prima uocantur minuta: & minutum quodlibet in 60 secunda: & deinceps in tertia, quarta, quinta, &c. Sed ipsi dies naturales, communiter diuiduntur in 24 horas æquales: & hora quælibet, in 60 prima minuta: & minutum quodlibet, in 60 secunda: & sic consequenter, sexagenaria quantumuis cōtinuata distributione. Idē quoque fit de horis, quæ inæquales appellātur. Adde, quòd partes linearum rectarum, in circulo subtēsarum (quæ chordæ, uel sinus recti nuncupantur) hanc sexagenariam fragmentorum partitionem consequenter obseruant: & alia quamplurima rationem subeuntia integrorum, quæ sigillatim recensere longum esset.

De temporum aliarúmue rerum fractionibus sexagenariis.

4 Quemadmodum præterea à circuli gradibus uel integris, eiusdem circuli fractiones per continuam diuisionem sexagenariam potestate decrescunt: sic ex eisdem gradibus sursum ascendendo, sexagenariæ nonnunquam obseruantur signorum recollectiones, tanto quidem potestate maiores, quanto plus distant ab ipsis gradibus. Ex 60 nanq; gradibus, unum in primis colligitur signum maius, duo communia comprehendens signa: ex 60 uerò signis primis, unum signum secundum, & ex 60 secundis, unum tertium. & sic deinceps quantumlibet ascendendo. Haud dissimiliter in temporis partitione, ex 60 diebus unum primum maius colligitur: & ex 60 primis unum secundum: & sic deinceps quantumlibet, sed raro transcenditur quartum. Id autem fit, ut sub breuissimis numeris, multæ circulationes, temporúmue reuolutiones includantur: atque ut sexagenarij numeri commoditas, supputando continuetur. Quemadmodum in plerisque tabulis astronomicis, cuiusmodi sunt Alphonsinæ, uidemus obseruatum.

Recollectiones, itidem sexagenariæ: quæ fractiones maiores appellantur.

5 AD IPSARVM autem fractionum astronomicarum expressionem deueniendo, illud in primis uniuersaliter obseruandū est: ut quæ potentia sunt maiores læuorsum, mino-

Documēta, de fract. astronomicarū expressione notāda.

res uerò dextrorſum, congruis repræſententur elementis, & ſuo diſtribuantur ordine, unaquaque fractionis differentia proprio inſignita titulo. Et ſi duos, aut plures earundem fractionum ordines ſimul oporteat exprimere (ut in ſequentibus continget operationibus) obſeruetur earum, quæ eiuſdẽ ſunt nominis, debita concordia: ſic quidem, ut ſigna prioribus ſubſcribantur ſignis, & gradus gradibus, atque minuta minutis, & reliqua reliquis ſuo ordine. Quòd ſi forſitan aliqua fractionum intermediarum ſpecies, exprimenda minùs occurrerit, utpote, minuta cum tertiis, nullis intercidentibus ſecundis: locus illius unica, aut gemina tziphra uenit occupandus. Adde, quòd ſigna communia, in maiora ſigna colligenda ſunt, & relicti gradus pauciores 60, unà cum occurrentibus gradibus ſuo loco notandi priùs, quàm operationẽ aliquam per ſexagenariam aggrediaris ſupputãdi rationem: Finito enim calculo, ipſa maiora, hoc eſt, ſexagenaria ſigna, in communia (quæ 30 ſolummodò gradibus conſtant) reuocare de neceſsitate licebit.

De fractionum aſtronomicarum additione. Cap. 2.

ADditionem, atque reliquas ſuccedentes aſtronomicarum fractionum operationes, haud diſsimili uia docebimus abſoluere, quæ de integris libro primo tradita eſt: idem ſcilicet de ſingulis obſeruãdo fractionum differentiis, quod illic de ſolis elementis faciendum admonuimus.

1 Diſpoſitis itaque addendarum fractionum ordinibus, uti proximo iuſsimus capite: à dextris & ſubtilioribus additio uenit initianda, & ſpeciatim uerſus læuam proſequẽda, ſingularum fractionum unitates, poſtea denas, ſolito more colligendo. Quoties autem alicuius fractionis denæ, in plures 5 reſultauerint: pro quibuſlibet 6 denis, unitas proximè ſuccedenti uerſus læuam ordini, ſiue ſpeciei uenit adiicienda, & reliquus ſubſcribendus numerus, qui nunquã excedat 59. Cùm porrò deuentum fuerit ad gradus, pro quibuſlibet 30 gradibus unum commune ſignum colligatur: uel ex 60 gradibus

Additionis fract. aſtronomicarũ ſummaria regula.

dibus 1 signum maius, ubi sexagenariam operæpretiũ erit cõtinuare distributionem. Etsi additione finita, collecta signa circulum exuperauerint: tollẽdæ sunt integræ circuli reuolutiones, quoties id fieri permittetur, ni forsitan operationis canon contrariũ obseruare compellat. In horariis porrò temporum fractionibus, cùm ad ipsas peruentum fuerit horas, pro quibuslibet 24 horis, unus dies colligendus est, & reliquis diebus addẽdus: à quibus quidem diebus, quemadmodum & rectarum linearum partibus, siue integris, nihil erit detrahendum. *Integræ circuli reuolutiones tollendæ.*

2 Proponãtur in exemplum, tres subscripti fractionum astronomicarum ordines, à uulgaribus signis (quorum quodlibet, 30 complectitur gradus) usque ad tertia distributi: sub quibus, transuersalis designetur lineola. Et componantur in primis ipsa tertia, instar integrorũ, fient 73: à quibus tollantur 60, relinquentur 13, sub tertiorũ ordine notanda. Coaceruentur postmodũ secunda, & inde resultanti numero addatur 1, pro detractis nuper 60 tertiis, consurgent secunda 93: à quibus auferantur rursum 60, relinquentur 33, scribenda sub secũdorum titulo. Ratione autem ipsorum 60 secundorum, addatur consequenter 1 primis minutis inuicem compositis, resultabunt minuta 132: à quibus possunt auferri bis 60, relictis 12. Quibus subscriptis, congregentur gradus, & producto numero addantur 2, pro nuper detractis bis 60 minutis primis, consurgent gradus 68: à quibus possunt auferri bis 30 (quæ 2 efficiunt communia signa) relictis 8 gradibus. Subscribantur ergo 8, & addantur 2 ipsis signis inuicẽ collectis, resultabũt signa 17: à quibus subducãtur 12, integrũ efficiẽtia circulũ, relinquentur 5. Quibus subscriptis, cõsurgent ex præfata trium ordinum additione signa 5, gradus 8, prima minuta 12, secunda 32, & 13 tertia. *Exemplum additionis fract. astronomicarum.*

Signa.	Gradus.	Minuta.	Secũda.	Tertia.
8	25	36	53	30
5	23	45	00	27
2	18	50	39	16
5	8	12	33	13

3 In maiorem singulorum expressionem subscriptam libet addere formulam: in qua totidem fractionum temporis pro- *Aliud exẽplũ, de tẽporis fra. inuicẽ addẽdis.*

ponuntur ordines, ab ipsis diebus (quorum quilibet, 24 cōplectitur horas) usque ad tertia distributi. Quorum additio in hoc solùm discrepat à proxima, quoniam pro quibuslibet 24 horis unus colligitur dies: & ipsi dies tandem reuocãtur in menses. Habes igitur ex hac additione proposita, dies 63, horas 8, minuta 31, secunda 20, tertia 54.

Dies.	Horæ.	Minuta.	Secũda.	Tertia.
27.	19.	50.	56.	28.
19.	16.	39.	41.	17.
15.	20.	00.	43.	9.
63.	8.	31.	20.	54.

Notandum. Quòd si forsitan signa fuerint maiora, in 60 gradus distributa, uel ipsi dies in 60 minuta frangantur: continuanda erit additio, pro ratione sexagenarij numeri, ut in ipsis graduum & horarum obseruatur fractionibus.

De subtractione prædictarum fractionum. Cap. 3.

1 *Subtractionis fractionum astronomicarũ, regula generalis.* SVbtractio autem fractionum astronomicarum, in hunc modum consequenter absoluenda est. Disponantur in primis utriusq; ordinis fractiones, uti proximis dictum est capitibus: sic tamen, ut subtrahendus ordo inferiorem locum obtineat. Duo enim tantùm in subtractione concurrũt fractionum ordines, utpote, is à quo facienda est subtractio, & subtrahendus: sub quo, linea recta de more producenda est. Deinde, à minima fractionum exordiendo differentia, subtrahantur singulæ fractiones inferiores, à singulis superioribus & eiusdem generis fractionibus, ueluti capite tertio libri primi, de integrorum dictum est subtractione: subnotatis infra lineam transuersalem residuis numeris.

2 *Quando inferior fractio à superiore non potest auferri.* Cùm porrò denæ subtrahẽdarum fractionum, à superioribus denis auferri non poterunt: tollantur ex 60, & residuũ unà cum sursum occurrentibus denis subscribatur. Ratione autem numeri 60, à proximè maiori fractione potẽtia mutuati, iungenda est unitas proximè maioris & subtrahendæ fractionis unitatibus: & cõsurgens inde numerus, à superiori solito more tollendus. *De gradibus signorum cõmunium.* Vbi autem ad gradus perueneris, & signa fuerint communia: tolles huiuscemodi denas inferioris numeri à 30, & residuũ cum superiore subscribes numerum,

merum, addésq; signis ipsius ordinis subtrahendi unitatem.

At si fractiones ipsæ fuerint nõ circuli, sed temporis, & inferiores horæ à superioribus auferri non posint: hæ subducẽdæ sunt ex 24, & residuus horarum numerus cum suprascripto infra lineam annotandus, addita tunc unitate ipsis diebus subtrahendis. Itẽ, quoties in supputationibus astronomicis, maior signorum numerus (ut plerũque fit) à minori proponetur auferendus: mutuanda erit integra reuolutio circuli, 6 maiora, uel 12 minora signa comprehendens (quæ in additione reiicitur) & facta subtrahendorum signorũ detractione, residua infra lineam transuersalẽ sunt annotanda. *De horis dierum.* *De signorum subtractione, notandum.*

3 Offerantur exempli gratia, 8 signa communia, gradus 21, prima minuta 12, secunda 25, tertia 37: auferenda à 6 signis itidem communibus, gradibus 15, minutis primis 4, secundis 30, & 49 tertiis. Tollantur itaque primùm 37 tertia, à 49 tertiis: relinquentur 12, directè subscribenda. Auferãtur deinde 25 secunda, à 30 secundis: relinquentur 5, suo loco infra lineam designãda. Postea, quoniam 12 minuta prima non possunt auferri à suprascriptis 4 minutis: tollantur igitur ex 60, relinquentur 48, quæ unà cùm ipsis 4 efficiunt 52. Subscribantur ergo 52: & ratione mutuati numeri 60, adde 1 subtrahendis gradibus, fient gradus 22. qui cùm nõ posint auferri à 15: tollantur à 30, relinquentur 8, qui unà cum ipsis 15 efficiunt 23. Subscribantur ergo 23: & addatur 1 subtrahendis signis, fient 9. quæ rursum non possunt auferri à 6: subducantur igitur ex 12, relinquentur 3, quæ unà cum ipsis 6 efficiunt 9, sub signorum scribenda titulo. Relinquentur igitur ex proposita subtractione, signa cõmunia 9, gradus 23, prima minuta 52, secunda 5, & 12 tertia. *Exemplum subtractionis fract. astrono.*

Signa.	Gradus.	Minuta.	Secũda.	Tertia.
6	15	4	30	49
8	21	12	25	37
9	23	52	5	12

Examinetur in maiorem omnium fidem, succedens fractionum temporis formula. In qua dies 67, horæ 20, minuta prima 39, secunda 36, tertia 54: auferũtur à diebus 154, *Aliud exemplum, in temporis fract.*

horis 15, minutis primis 30, ſecundis 48, tertiis uerò 27: & relinquunt dies 86, horas 18, minuta 51, ſecunda 11, tertia denique 33. Ad ſubtractionem itaque horarum 21 (nam ex 60 primis minutis, reſumenda eſt hora 1) mutuantur horæ 24: à quibus ſubductis 21, remanent 3, quæ unà cum 15 efficiunt 18. Cætera uero à præmiſſa ſubtrahendi ratione non diſcordant.

Dies.	Horæ.	Minuta.	Secũda.	Tertia.
154.	15.	30.	48.	27.
67.	20.	39.	36.	54.
86.	18.	51.	11.	33.

De earundem fractionum multiplicatione. Cap. 4.

1 MVltiplicatio, atque diuiſio eiuſcemodi fractionum aſtronomicarum, quemadmodum & integrorum numerorum, præcipuas in ſupputationibus uidentur obtinere partes: utpote, quoniam aſtronomici canones, ex quatuor proportionalium numerorum regula pendentes, partim multiplicationis, partim uerò diuiſionis abſoluuntur officio. Duo autem, in fractionum aſtronomicarum multiplicatione ueniunt conſideranda. Primum eſt, denominatio producti ex duarum quarumuis fractionum multiplicatione numeri: alterum eſt ipſe diuidendi modus, quem duplici uia facilem reddere nitemur.

Inuentio denominationis productarum fractionum.

2 In expeditam primi adinuentionem, ſequentem ordinauimus tabellã: In cuius medio gradus, uelut integra, & circa eoſdem gradus, maiores atque minores fractiones collocantur: in hunc quippe modum, ut ipſæ maiores fractiones minoribus ex aduerſo reſpondeant, utpote, prima minuta primis ſignis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis, &c. Si tabellã itaq; lateraliter ingrediaris, hoc eſt, ſi denominatorem multiplicandæ fractionis in uertice, multiplicantis uerò in læuo & extremo latere, aut è diuerſo ſumpſeris: offendes ad communem utriuſque angulum, ipſius productæ fractionis denominationem. Vt ſi libeat agnoſcere, qualis fractio genere-

generetur ex ductu tertiorum minutorum in quarta, accepta quartorum denominatione ad ipsius tabellæ uerticem, ipsorum uerò tertiorum denominatione in ordine læuo: offendes ad communem utriusque angulum 7, hoc est septima. Concludes igitur, tertia per quarta, aut è diuerso multiplicata, efficere septima. Haud dissimiliter, quarta minora, ducta in prima maiora, reddere tertia minora: & sic de cæteris.

Tabella denominationis fractionum, ex multiplicatione productorum.

	s.4.	s.3.	s.2.	s.1.	gra.	m.1.	2.	3.	4.	5.
s.4.	s.8.	s.7.	s.6.	s.5.	s.4.	s.3.	s.2.	s.1.	gra.	m.1.
s.3.	s.7.	s.6.	s.5.	s.4.	s.3.	s.2.	s.1.	gra.	m.1.	2.
s.2.	s.6.	s.5.	s.4.	s.3.	s.2.	s.1.	gra.	m.1.	2.	3.
s.1.	s.5.	s.4.	s.3.	s.2.	s.1.	gra.	m.1.	2.	3.	4.
gra.	s.4.	s.3.	s.2.	s.1.	gra.	m.1.	2.	3.	4.	5.
m.1.	s.3.	s.2.	s.1.	gra.	m.1.	2.	3.	4.	5.	6.
2	s.2.	s.1.	gra.	m.1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
3.	s.1.	gra.	m.1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
4.	gra.	m.1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
5.	m.1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

Cùm igitur fractio maior, per maiorem, minórue per minorem fractionē multiplicatur: fractio producitur, ab utriusque denominatoribus simul iunctis denominata. Dū porrò fractio minor, per maiorem multiplicatur: fit minor itidem fractio, cuius denominator ex subtractione denominatoris ipsius maioris à minoris denominatore causatur. Et è cōuerso: quia si nihil ex subtractione relinquatur, fiunt integra. Ex graduum autē per gradus multiplicatione, proueniunt gradus. Idem cēseto, de rectarum linearum partibus. Cùm porrò gradus, aut partes, per fractionem aliquam multiplicātur: eiusdem nomenclaturæ fractio producitur.

3 QVANTVM ad ſecundum, contingit in primis, unam fractionem in alteram tantùm, aut plures fractionum differentias, per unam, aut plures fore multiplicandas: Et utraque multiplicatio, duobus modis abſoluitur, mediante ſcilicet reductione, & abſque reductionis artificio.

Primus modus multiplicandi unam fractionẽ per alteram.

Si iuxta primam uiam multiplicationem exercere libuerit, & una tantùm fractio per aliam multiplicanda proponatur: id facies more integrorum, per doctrinam quarti capitis libri primi, coadiuuante ſexto eiuſdem libri capite, dempta producti numeri denominatione, quæ ex ſecunda huiuſce capitis parte colligitur. Vt ſi uolueris exempli gratia, multiplicare 50 prima minuta, per 40 ſecunda: producentur 2000, quæ tertia minuta dicentur. nam denominator primorum minutorum eſt 1, ſecundorum uerò 2: qui ſimul iuncti conficiunt 3. Quòd ſi eadem 2000 tertia, per 60 diuiſeris: ea ad 33 ſecunda, & 20 tertia reuocabis.

Exemplum.

De multiplicatione pluriũ fractionũ adinuicem, iuxta pri. modũ.

4 At ſi plures, diuerſorúmque nominum fractiones inuicem proponantur multiplicandæ: reduces in primis utrunque & multiplicandum & multiplicantem fractionum ordinem, ad minimæ fractionis denominationẽ, quæ in utroque continetur ordine: per ſexagenariam uidelicet multiplicationem, iuxta ipſius ſexti capitis libri primi traditionẽ. Deinde multiplicabis unum reſultantium numerorum, in reliquum, animaduertéſque producti denominationem: ipſum autem productum ex multiplicatione numerum, per obſeruatam rurſum ſexagenariam partitionem, in ſuas fractionum poteris reuocare differentias. Proponantur in exemplum, minuta 15, ſecunda 20: per tertia 10, & 12 quarta multiplicanda. Duc itaque minuta 15, in 60, fient ſecunda 900: quæ unà cum 20, efficiunt 920. Ducantur ſimiliter 10 tertia, in 60, fient 600 quarta: hæc autem 12 quartis adiuncta, conficiunt 612. Multiplicentur ergo 920 ſecunda, per 612 quarta: producentur 563040 ſexta, nam ſecunda minuta ducta in quarta, efficiunt ſexta. Quòd ſi eadem

Exemplum.

dem 563040 sexta, eatenus per 60 diuiseris, quatenus relictus ex diuisione numerus sit minor 60: colliges ex proposita fractionum multiplicatione tertia 2, quarta 36, & quinta 24. sic facito de similibus.

De secundo multiplicandi modo prædictas fractiões astronomic.

ALIVM PORRO multiplicandi libet describe-
5 re modum, quo easdem fractiones sexagenarias, absque reductione, celeriùs ferè, quàm integros poteris multiplicare numeros: per tabulam uidelicet proportionalem appellatã, omnibus astronomicis supputationibus indifferenter adcõmodam, quam tibi ad finem huius capitis fideliter supputauimus, & ob oculos exposuimus. De cuius ratione, ac usu generali, nonnulla præfari est operæpretium.

De ratione ac usu sequentis tabulæ proportionalis.

Intelligenda est ergo tabula ipsa, ueluti rectangulum quoddam quadrilaterum, sub duobus sexagenariis lateribus comprehensum: sed propter angustiam cartæ dissectum in sex ordines, & ordo quilibet bifariam distributus. Ipsius porrò tabulæ numeri, alij laterales, alij uerò areales nuncupantur.

Numeri laterales.

Laterales uocantur ij, qui circa illius continentur latera: quorum duo sunt ordines principales, scilicet qui partim in frontispicio, supræmóue latere ipsius tabulæ, à sinistra uersus dextram ordinantur: partim uerò in læuo eiusdem tabulæ latere, à summo deorsum distributi sunt, & utrobique in sexagenarium coextenduntur numerum.

Numeri areales.

Areales uerò dicuntur numeri, qui ipsius quadrilateri rectanguli, totiúsue tabulæ occupant aream: & ex singulorum lateralium numerorum, ab 1 usque ad 60, inuicem facta multiplicatione producuntur.

Ingressus tabulæ duplex.

Contingit itaque, tabulam cum duobus intrari numeris: ídque lateraliter, aut areatim.

Lateralis.

Lateraliter intratur tabula, cùm uterque introitualium numerorum in ipsis lateribus, & optatus numerus in area coassumitur.

Arealis.

Areatim uerò, cum alter prædictorum numerorum in altero laterum, reliquus uerò in ipsa capitur area, & quæsitus numerus in reliquo latere colligitur. Per lateralẽ igitur ingressum, productum ex lateralium multiplicatione: per arealem autem, quotum ex diuisione ipsius arealis per alterum lateralium, solemus inuestigare numerum.

6 Cùm igitur fractionem aliquam sexagenariam, per aliam multiplicare fuerit operæpretium, intrabis lateraliter congruam tabulæ partem siue faciem, cum ipsis multiplicandarum fractionum numeris: offendes enim ad communem & arealem angulum, productũ ex ipsa multiplicatione numerum, sed gemino distinctum ordine: quorum dexter, illius semper est denominationis, quam inuicem multiplicatę fractiones producere natæ sunt: sinistri autem quælibet unitas, 60 repræsentat unitates ipsius dextri, & ideò proximè maioris est denominationis ipso dextro. Vt si proponantur exempli gratia, 15 tertia, per 10 quarta multiplicanda, intrabis lateraliter tertiam ipsius tabulæ paginam, sumptis 15 in illius uertice, & 10 in læuo atque descendenti latere: occurrent enim ad communem angulum 2/30, hoc est, 2 sexta & 30 septima. Nam tertia per quarta multiplicata, reddunt septima: quam denominationem retinet dexter numerus, sinister autem proximè maiorem. Ergo 15 tertia, per 10 quarta multiplicata, producunt 2 sexta, & 30 septima. Item si uolueris multiplicare 48 secũda, per 39 tertia, intrabis rursum lateraliter octauam tabulæ faciẽ, sumptis 39 in supremo latere, & 48 in ordine læuo: sese offerent enim ad communem & arealem angulum, 31/12, quæ 31 quarta, & 12 quinta dicentur. Quoniam secunda minuta ducta in tertia, uel è diuerso, efficiunt quinta: & ipsa quinta, sequuntur immediatè quartorum ordinem.

Qualiter una fractio, per aliam multiplicetur.

Exemplum.1.

Exemplum.2.

7 Quoties autem plures & diuersæ fractiones, per unicam, aut plures fractiones sese offerent multiplicandæ: sic facito. Disponantur in primis ipsi fractionum numeri, pro ratione denominationum, ordine multiplicante sub ipso multiplicando constituto, unà cum subscripta in transuersum lineola. Postmodùm à dextris & minoribus fractionibus exordiendo, quælibet fractio ordinis multiplicandi, ducatur in quamlibet

Vt diuersæ fractiones, per unam, aut plures facilè multiplicentur.

quamlibet ordinis multiplicantis, per lateralem ingressum in congruam ipsius tabulæ partem: & collecti ad communes angulos numeri, ex particularibus singularum fractionum multiplicationibus prodeuntes (quos uirgulis inuicem colligare poteris) sub propriæ denominationis reponantur titulis, dando semper dextro & areali numero eam denominationem, quam oblatæ fractiones inuicem multiplicatæ producunt. Singulæ demum ex particularibus fractionum multiplicationibus procreatæ fractiones sub interiecta rursum lineola, in unum colligantur fractionum ordinem: is enim indicabit productos ex ipsa multiplicatione fractionum numeros. Vt igitur integrorum multiplicatio, ex ductu pendet elementorum suis limitibus distributorum: sic ipsa multiplicatio plurium fractionum per plures fractiones, ex particulari fractionũ multiplicatione, & propriæ denominationis obseruantia pendenter colligitur. *Notandum.*

Sint in exemplum 27 gradus, 18 minuta, & 25 secunda, multiplicanda per gradus 10, minuta 25, & secunda 13. His ut præmonitum est ordinatis, ducantur in primis, per lateralem ingressum in ipsam tabulam, 25 secunda in secunda 13: fient 5 tertia, & 25 quarta, sub propriis scribenda titulis. Ducantur consequenter 18 minuta, in ipsa 13 secunda: producentur 3 secunda, & 54 tertia. Tandem 27 gradus, per eadem 13 secunda multiplicati, conficiunt 5 minuta, & secunda 51. Secundò, ducantur rursum præfata 25 secunda, in minuta 25: producentur 10 secunda, & 25 tertia. Ducantur postmodum 18 minuta, in eadem 25 minuta: prodibunt 7 minuta, & 30 secunda. Quòd si ducantur finaliter 27 gradus, in eadem 25 minuta: prouenient gradus 11, unà cum 15 minutis. Tertiò, ducenda sunt eadem 25 secunda, in 10 gradus: consurgent minuta 4, & secunda 10. Et 18 minuta, per ipsos 10 gradus multiplicata: reddunt 3 solũ modò gradus. *Exemplum. 1. multipl. fract. circularium.*

	Sign.	gra.	mi.	secũ.	ter.	quarta.	
		27,	18,	25,			ordo multiplicãdus
		10,	25,	13,			ordo multiplicans.
				3	5—	25	
Producti			5—	51	54		
numeri.			7	10—	25		
		11—	15	30			
		3	4—	10			
	4—	30	0				*Productorum summa.*
	4,	44,	32,	45,	34,	25.	

Si demum gradus 27, ducantur in præfatos 10 gradus: fient 4 signa maiora, unà cũ 30 gradibus. Quibus omnibus debitè subscriptis, & sub interposita lineola in unum ordinẽ, per secũdum caput huius libri, coaceruatis: prodibunt ex hac multiplicatione 4 signa maiora, gradus 44 (quæ in 9 signa communia, & 14 gradus reuocãtur) minuta 32, secunda 45, tertia 34, & 25 quarta. Haud aliter intelligito, & facito de cæteris.

Exemplum. 2. de multiplic. fractionum rectilinearium.

Sit rursum in maiorem artis expressionem, propositus sinus rectus, partium 36, minutorum 39, secundorum 50: multiplicãdus per sinum rectum partium 30, minutorum 22, secundorum 37. Ducenda est igitur unaquæq; species siue differentia ordinis multiplicandi, in quãlibet ordinis multiplicantis, per ingressum lateralem in præfatam tabulam proportionalem: & singuli producti numeri suis locis inscribendi, & demum in unum componẽdi ordinem. Producentur itaq; ex præfata sinuum multiplicatione, 18 partes maiores instar signorum maiorum collectæ (quarum quælibet 60 partes comprehendit) simplices uerò partes 33, minuta 44, secunda 12, tertia 53, & quarta 50. Si autem ignoraueris quidnam uocemus sinum rectum: cõsule libros, quos de rectis in circulo subtensis conscripsimus: atque libros nostros canonum astronomicorum, in quibus similes eorundem sinuum rectorum pasim sese offerunt multiplicationes, atque diuisiones.

	Partes collectæ.	Partes.	Min.	Secũ.	Tertia.	Quarta.	
		36,	39,	50,			Sinus multiplicãdus
		30,	22,	37,			Sinus multiplicans.
				24	30—	50	
Producti			22—	12	3		
numeri.			14	18—	20		
		13—	12	18			
		19	25—	0			
	18—	0	30				*Productorum summa.*
	18,	33,	44,	12,	53,	50.	

In maio-

In maiorem artis multiplicatoriæ ſupradictarum fractionum aſtronomicarum elucidationem, ſequentem iuuat addere formulam. In qua dies (qui rationem quodammodo uidẽtur habere integrorum) unà cum ſexagenariis ipſorum dierum collectionibus, inſtar ſignorum maiorum ſeorſum collocatis, atque minutis itidem ſexagenariis eorundem dierum fractionibus, inuicem multiplicantur. Ex qua quidem partium temporis multiplicatione, ſeu multiplicationis formula (quæ amplıori non uidetur indigere dilucidatione) ſingula productarum ex ipſa multiplicatione fractionū denominationem ſiue nomẽclaturam reſpicientia, elicere uel facilè potes: quæ numero, ſeu documento ſecundo huiuſce libri quarti fuere ſigillatim expreſſa.

	4.	3.	2.	*prima dierū.*	*Dies nales*	*Min. dierū.*	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Partes multiplicandæ.			2.	3.	25.	37.	18.	20.	30.				
Partes multiplicantes.			1.	2.	19.	22.	30.	35.	15.				
							0	6	9	4	5	7	30
						0	30	45	15	15	30	0	
Producti ex ſingularibus multiplicationibus numeri.						1	14	21	10	11	17	30	
					1	10	45	35	35	30	40		
					1	12	18	9	10	15	0		
				1	0	30	30	30	0	0			
				1	9	13	6	7	11	0			
			0	44	6	10	34	36	20				
			0	7	11	5	6	9	30				
		0	38	57	55	43	42	20					
		0	0	1	0	0	1	0					
	0	4	6	50	14	36	40						
Productorum ſumma.	2.	3.	25.	37.	18.	20.	30						
	2.	8.	12.	19.	58.	4.	59.	40.	21.	16.	32.	37.	30.

TABVLA PRO-

Late- | Late- rales. | Quadrati

Qua.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0. 1	0. 2	0. 3	0. 4	0. 5	0. 6	0. 7	0. 8	0. 9	0.10
2	0. 2	0. 4	0. 6	0. 8	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
3	0. 3	0. 6	0. 9	0.12	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.30
4	0. 4	0. 8	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32	0.36	0.40
5	0. 5	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
6	0. 6	0.12	0.18	0.24	0.30	0.36	0.42	0.48	0.54	1. 0
7	0. 7	0.14	0.21	0.28	0.35	0.42	0.49	0.56	1. 3	1.10
8	0. 8	0.16	0.24	0.32	0.40	0.48	0.56	1. 4	1.12	1.20
9	0. 9	0.18	0.27	0.36	0.45	0.54	1. 3	1.12	1.21	1.30
10	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	1. 0	1.10	1.20	1.30	1.40
11	0.11	0.22	0.33	0.44	0.55	1. 6	1.17	1.28	1.39	1.50
12	0.12	0.24	0.36	0.48	1. 0	1.12	1.24	1.36	1.48	2. 0
13	0.13	0.26	0.39	0.52	1. 5	1.18	1.31	1.44	1.57	2.10
14	0.14	0.28	0.42	0.56	1.10	1.24	1.38	1.52	2. 6	2.20
15	0.15	0.30	0.45	1. 0	1.15	1.30	1.45	2. 0	2.15	2.30
16	0.16	0.32	0.48	1. 4	1.20	1.36	1.52	2. 8	2.24	2.40
17	0.17	0.34	0.51	1. 8	1.25	1.42	1.59	2.16	2.33	2.50
18	0.18	0.36	0.54	1.12	1.30	1.48	2. 6	2.24	2.42	3. 0
19	0.19	0.38	0.57	1.16	1.35	1.54	2.13	2.32	2.51	3.10
20	0.20	0.40	1. 0	1.20	1.40	2. 0	2.20	2.40	3. 0	3.20
21	0.21	0.42	1. 3	1.24	1.45	2. 6	2.27	2.48	3. 9	3.30
22	0.22	0.44	1. 6	1.28	1.50	2.12	2.34	2.56	3.18	3.40
23	0.23	0.46	1. 9	1.32	1.55	2.18	2.41	3. 4	3.27	3.50
24	0.24	0.48	1.12	1.36	2. 0	2.24	2.48	3.12	3.36	4. 0
25	0.25	0.50	1.15	1.40	2. 5	2.30	2.55	3.20	3.45	4.10
26	0.26	0.52	1.18	1.44	2.10	2.36	3. 2	3.28	3.54	4.20
27	0.27	0.54	1.21	1.48	2.15	2.42	3. 9	3.36	4. 3	4.30
28	0.28	0.56	1.24	1.52	2.20	2.48	3.16	3.44	4.12	4.40
29	0.29	0.58	1.27	1.56	2.25	2.54	3.23	3.52	4.21	4.50
30	0.30	1. 0	1.30	2. 0	2.30	3. 0	3.30	4. 0	4.30	5. 0

Areales numeri.

Areales numeri.

PORTIONALIS.

Late- rales.

Late-rales	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
31	0.31	1. 2	1.33	2. 4	2.35	3. 6	3.37	4. 8	4.39	5.10
32	0.32	1. 4	1.36	2. 8	2.40	3.12	3.44	4.16	4.48	5.20
33	0.33	1. 6	1.39	2.12	2.45	3.18	3.51	4.24	4.57	5.30
34	0.34	1. 8	1.42	2.16	2.50	3.24	3.58	4.32	5. 6	5.40
35	0.35	1.10	1.45	2.20	2.55	3.30	4. 5	4.40	5.15	5.50
36	0.36	1.12	1.48	2.24	3. 0	3.36	4.12	4.48	5.24	6. 0
37	0.37	1.14	1.51	2.28	3. 5	3.42	4.19	4.56	5.33	6.10
38	0.38	1.16	1.54	2.32	3.10	3.48	4.26	5. 4	5.42	6.20
39	0.39	1.18	1.57	2.36	3.15	3.54	4.33	5.12	5.51	6.30
40	0.40	1.20	2. 0	2.40	3.20	4. 0	4.40	5.20	6. 0	6.40
41	0.41	1.22	2. 3	2.44	3.25	4. 6	4.47	5.28	6. 9	6.50
42	0.42	1.24	2. 6	2.48	3.30	4.12	4.54	5.36	6.18	7. 0
43	0.43	1.26	2. 9	2.52	3.35	4.18	5. 1	5.44	6.27	7.10
44	0.44	1.28	2.12	2.56	3.40	4.24	5. 8	5.52	6.36	7.20
45	0.45	1.30	2.15	3. 0	3.45	4.30	5.15	6. 0	6.45	7.30
46	0.46	1.32	2.18	3. 4	3.50	4.36	5.22	6. 8	6.54	7.40
47	0.47	1.34	2.21	3. 8	3.55	4.42	5.29	6.16	7. 3	7.50
48	0.48	1.36	2.24	3.12	4. 0	4.48	5.36	6.24	7.12	8. 0
49	0.49	1.38	2.27	3.16	4. 5	4.54	5.43	6.32	7.21	8.10
50	0.50	1.40	2.30	3.20	4.10	5. 0	5.50	6.40	7.30	8.20
51	0.51	1.42	2.33	3.24	4.15	5. 6	5.57	6.48	7.39	8.30
52	0.52	1.44	2.36	3.28	4.20	5.12	6. 4	6 56	7.48	8.40
53	0.53	1.46	2.39	3.32	4.25	5.18	6.11	7. 4	7.57	8.50
54	0.54	1.48	2.42	3.36	4.30	5.24	6.18	7.12	8. 6	9. 0
55	0.51	1.50	2.45	3.40	4.35	5.30	6.25	7.20	8.15	9.10
56	0.56	1.52	2.48	3.44	4.40	5.36	6.32	7.28	8.24	9.20
57	0.57	1.54	2.51	3.48	4.45	5.42	6.39	7.36	8.33	9.30
58	0.58	1.56	2.54	3.52	4.50	5.48	6.46	7.44	8.42	9.40
59	0.59	1.58	2.57	3.56	4.55	5.54	6.53	7.52	8.51	9.50
60	1. 0	2. 0	3. 0	4. 0	5. 0	6. 0	7. 0	8. 0	9. 0	10. 0

Areales numeri.

Areales numeri.

TABVLA PRO-

Lateraales.

Late- / Quadrati	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20
2	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.36	0.38	0.40
3	0.33	0.36	0.39	0.42	0.45	0.48	0.51	0.54	0.57	1. 0
4	0.44	0.48	0.52	0.56	1. 0	1. 4	1. 8	1.12	1.16	1.20
5	0.55	1. 0	1. 5	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40
6	1. 6	1.12	1.18	1.24	1.30	1.36	1.42	1 48	1.54	2. 0
7	1.17	1.24	1.31	1.38	1.45	1.52	1.59	2. 6	2.13	2.20
8	1.28	1.36	1.44	1.52	2. 0	2. 8	2.16	2.24	2.32	2.40
9	1.39	1.48	1.57	2. 6	2.15	2.24	2.33	2.42	2.51	3. 0
10	1.50	2. 0	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50	3. 0	3.10	3.20
11	2. 1	2.12	2.23	2.34	2.45	2.56	3. 7	3.18	3.29	3.40
12	2.12	2.24	2.36	2.48	3. 0	3.12	3.24	3.36	3.48	4. 0
13	2.23	2.36	2.49	3. 2	3.15	3.28	3.41	3.54	4. 7	4.20
14	2.34	2.48	3. 2	3.16	3.30	3.44	3.58	4.12	4.26	4.40
15	2.45	3. 0	3.15	3.30	3.45	4. 0	4.15	4.30	4.45	5. 0
16	2.56	3.12	3.28	3.44	4. 0	4.16	4.32	4.48	5. 4	5.20
17	3. 7	3.24	3.41	3.58	4.15	4.32	4.49	5. 6	5.23	5.40
18	3.18	3.36	3.54	4.12	4.30	4.48	5. 6	5.24	5.42	6. 0
19	3.29	3.48	4. 7	4.26	4.45	5. 4	5.23	5.42	6. 1	6.20
20	3.40	4. 0	4.20	4.40	5. 0	5.20	5.40	6. 0	6.20	6.40
21	3.51	4.12	4.33	4.54	5.15	5.36	5 57	6.18	6.39	7. 0
22	4. 2	4.24	4.46	5. 8	5.30	5.52	6.14	6 36	6.58	7.20
23	4.13	4.36	4.59	5.22	5.45	6. 8	6.31	6.54	7.17	7.40
24	4.24	4.48	5.12	5.36	6. 0	6.24	6.48	7.12	7.36	8. 0
25	4.35	5. 0	5.25	5.50	6.15	6.40	7. 5	7.30	7.55	8.20
26	4.46	5.12	5.38	6. 4	6.30	6.56	7.22	7.48	8.14	8.40
27	4.57	5.24	5.51	6.18	6.45	7.12	7.39	8. 6	8.33	9. 0
28	5. 8	5.36	6. 4	6.32	7. 0	7.28	7.56	8.24	8.52	9.20
29	5.19	5.48	6.17	6.46	7.15	7.44	8.13	8.42	9.11	9.40
30	5.30	6. 0	6.30	7. 0	7.30	8. 0	8.30	9. 0	9.30	10. 0

Late- rales. Quadrati. Areales numeri.

Areales numeri.

PORTIONALIS.

Late- rales.

Laterales	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
31	5.41	6.12	6.43	7.14	7.45	8.16	8.47	9.18	9.49	10.20
32	5.52	6.24	6.56	7.28	8. 0	8.32	9. 4	9.36	10. 8	10.40
33	6. 3	6.36	7. 9	7.42	8.15	8 48	9.21	9.54	10.27	11. 0
34	6.14	6.48	7.22	7.56	8.30	9. 4	9.38	10.12	10.46	11.20
35	6.25	7. 0	7.35	8.10	8.45	9.20	9.55	10.30	11. 5	11.40
36	6.36	7.12	7.48	8.24	9. 0	9.36	10.12	10.48	11.24	12. 0
37	6.47	7.24	8. 1	8.38	9.15	9.52	10.29	11. 6	11.43	12.20
38	6.58	7 36	8.14	8.52	9.30	10. 8	10.46	11.24	12. 2	12.40
39	7. 9	7.48	8.27	9. 6	9.45	10.24	11. 3	11.42	12.21	13. 0
40	7.20	8. 0	8.30	9.20	10. 0	10.40	11.20	12. 0	12.40	13.20
41	7.31	8.12	8.53	9.34	10.15	10.56	11.37	12.18	12.59	13.40
42	7.42	8.24	9. 6	9.48	10.30	11.12	11.54	12.36	13.18	14. 0
43	7.53	8.36	9.19	10. 2	10.45	11.28	12.11	12.54	13.37	14.20
44	8. 4	8.48	9.32	10.16	11. 0	11.44	12.28	13.12	13.56	14.40
45	8.15	9. 0	9.45	10.30	11.15	12. 0	12.45	13.30	14.15	15. 0
46	8.26	9.12	9.58	10.44	11.30	12.16	13. 2	13.48	14.34	15.20
47	8.37	9.24	10.11	10.58	11.45	12.32	13.19	14. 6	14.53	15.40
48	8.48	9.36	10.24	11.12	12. 0	12.48	13.36	14.24	15.12	16. 0
49	8.59	9.48	10.37	11.26	12.15	13. 4	13.53	14.42	15.31	16.20
50	9.10	10. 0	10.50	11.40	12.30	13.20	14.10	15. 0	15.50	16.40
51	9.21	10.12	11. 3	11.54	12.45	13.36	14.27	15.18	16. 9	17. 0
52	9.32	10.24	11.16	12. 8	13. 0	13.52	14.44	15.36	16.28	17.20
53	9.43	10.36	11.29	12.22	13.15	14. 8	15. 1	15.54	16.47	17.40
54	9.54	10.48	11.42	12.36	13.30	14.24	15.18	16.12	17. 6	18. 0
55	10. 5	11. 0	11.55	12.50	13.45	14.40	15.35	16.30	17.25	18.20
56	10.16	11.12	12. 8	13. 4	14. 0	14.56	15.52	16.48	17.44	18.40
57	10.27	11.24	12.21	13.18	14.15	15.12	16. 9	17. 6	18. 3	19. 0
58	10.38	11.36	12.34	13.32	14.30	15.28	16 26	17.24	18.22	19.20
59	10.49	11.48	12.47	13 46	14.45	15.44	16.43	17.42	18.41	19.40
60	11. 0	12. 0	13. 0	14. 0	15. 0	16. 0	17. 0	18. 0	19. 0	20. 0

Areales numeri.

Areales numeri.

Late- rales.

TABVLA PRO-

Late- rales.

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30
2	0.42	0.44	0.46	0.48	0.50	0.52	0.54	0.56	0.58	1. 0
3	1. 3	1. 6	1. 9	1.12	1.15	1.18	1.21	1.24	1.27	1.30
4	1.24	1.28	1.32	1.36	1.40	1.44	1.48	1.52	1.56	2. 0
5	1.45	1.50	1.55	2. 0	2. 5	2.10	2.15	2.20	2.25	2.30
6	2. 6	2.12	2.18	2.24	2.30	2.36	2.42	2.48	2.54	3. 0
7	2.27	2.34	2.41	2.48	2.55	3. 2	3. 9	3.16	3.23	3.30
8	2.48	2.56	3. 4	3.12	3.20	3.28	3.36	3.44	3.52	4. 0
9	3. 9	3.18	3.27	3.36	3.45	3.54	4. 3	4.12	4.21	4.30
10	3.30	3.40	3.50	4. 0	4.10	4.20	4.30	4.40	4.50	5. 0
11	3.51	4. 2	4.13	4.24	4.35	4.46	4.57	5. 8	5.19	5.30
12	4.12	4.24	4.36	4.48	5. 0	5.12	5.24	5.36	5.48	6. 0
13	4.33	4.46	4.59	5.12	5.25	5.38	5.51	6. 4	6.17	6.30
14	4.54	5. 8	5.22	5.36	5.50	6. 4	6.18	6.32	6.46	7. 0
15	5.15	5.30	5.45	6. 0	6.15	6.30	6.45	7. 0	7.15	7.30
16	5.36	5.52	6. 8	6.24	6.40	6.56	7.12	7.28	7.44	8. 0
17	5.57	6.14	6.31	6.48	7. 5	7.22	7.39	7.56	8.13	8.30
18	6.18	6.36	6.54	7.12	7.30	7.48	8. 6	8.24	8.42	9. 0
19	6.39	6.58	7.17	7.36	7.55	8.14	8.33	8.52	9.11	9.30
20	7. 0	7.20	7.40	8. 0	8.20	8.40	9. 0	9.20	9.40	10. 0
21	7.21	7.42	8. 3	8.24	8.45	9. 6	9.27	9.48	10. 9	10.30
22	7.42	8. 4	8.26	8.48	9.10	9.32	9.54	10.16	10.38	11. 0
23	8. 3	8.26	8.49	9.12	9.35	9.58	10.21	10.44	11. 7	11.30
24	8.24	8.48	9.12	9.36	10. 0	10.24	10.48	11.12	11.36	12. 0
25	8.45	9.10	9.35	10. 0	10.25	10.50	11.15	11.40	12. 5	12.30
26	9. 6	9.32	9.58	10.24	10.50	11.16	11.42	12. 8	12.34	13. 0
27	9.27	9.54	10.21	10.48	11.15	11.42	12. 9	12.36	13. 3	13.30
28	9.48	10.16	10.44	11.12	11.40	12. 8	12.36	13. 4	13.32	14. 0
29	10. 9	10.38	11. 7	11.36	12. 5	12.34	13. 3	13.32	14. 1	14.30
30	10.30	11. 0	11.30	12. 0	12.30	13. 0	13.30	14. 0	14.30	15. 0

Late- trales.

Areales numeri.

Qua- drati.

Areales numeri.

PORTIONALIS.

Late- rales.

Late- rales.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	10.51	11.22	11.53	12.24	12.55	13.26	13.57	14.28	14.59	15.30
32	11.12	11.44	12.16	12.48	13.20	13.52	14.24	14.56	15.28	16. 0
33	11.33	12. 6	12.39	13.12	13.45	14.18	14.51	15.24	15.57	16.30
34	11.54	12.28	13. 2	13.36	14.10	14.44	15.18	15.52	16.26	17. 0
35	12.15	12.50	13.25	14. 0	14.35	15.10	15.45	16.20	16.55	17.30
36	12.36	13.12	13.48	14.24	15. 0	15.36	16.12	16.48	17.24	18. 0
37	12.57	13.34	14.11	14.48	15.25	16. 2	16.39	17.16	17.53	18.30
38	13.18	13.56	14.34	15.12	15.50	16.28	17. 6	17.44	18.22	19. 0
39	13.39	14.18	14.57	15.36	16.15	16.54	17.33	18.12	18.51	19.30
40	14. 0	14.40	15.20	16. 0	16.40	17.20	18. 0	18.40	19.20	20. 0
41	14.21	15. 2	15.43	16.24	17. 5	17.46	18.27	19. 8	19.49	20.30
42	14.42	15.24	16. 6	16.48	17.30	18.12	18.54	19.36	20.18	21. 0
43	15. 3	15.46	16.29	17.12	17.55	18.38	19.21	20. 4	20.47	21.30
44	15.24	16. 8	16.52	17.36	18.20	19. 4	19.48	20.32	21.16	22. 0
45	15.45	16.30	17.15	18. 0	18.45	19.30	20.15	21. 0	21.45	22.30
46	16. 6	16.52	17.38	18.24	19.10	19.56	20.42	21.28	22.14	23. 0
47	16.27	17.14	18. 1	18.48	19.35	20.22	21. 9	21.56	22.43	23.30
48	16.48	17.36	18.24	19.12	20. 0	20.48	21.36	22.24	23.12	24. 0
49	17. 9	17.58	18.47	19.36	20.25	21.15	22. 3	22.52	23.41	24.30
50	17.30	18.20	19.10	20. 0	20.50	21.40	22.30	23.20	24.10	25. 0
51	17.51	18.42	19.33	20.24	21.15	22. 6	22.57	23.48	24.39	25.30
52	18.12	19. 4	19.56	20.48	21.40	22.32	23.24	24.16	25. 8	26. 0
53	18.33	19.26	20.19	21.12	22. 5	22.58	23.51	24.44	25.37	26.30
54	18.54	19.48	20.42	21.36	22.30	23.24	24.18	25.12	26. 6	27. 0
55	19.15	20.10	21. 5	22. 0	22.55	23.50	24.45	25.40	26.35	27.30
56	19.36	20.32	21.28	22.24	23.20	24.16	25.12	26. 8	27. 4	28. 0
57	19.57	20.54	21.51	22.48	23.45	24.42	25.39	26.36	27.33	28.30
58	20.18	21.16	22.14	23.12	24.10	25. 8	26. 6	27. 4	28. 2	29. 0
59	20.39	21.38	22.37	23.36	24.35	25.34	26.33	27.32	28.31	29.30
60	21. 0	22. 0	23. 0	24. 0	25. 0	26. 0	27. 0	28. 0	29. 0	30. 0

Areales numeri.

Areales numeri.

TABVLA PRO-

Late- rales. Late- rales.

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40
2	1. 2	1. 4	1. 6	1. 8	1.10	1 12	1.14	1.16	1.18	1.20
3	1.33	1.36	1.39	1.42	1.45	1.48	1.51	1.54	1.57	2. 0
4	2. 4	2. 8	2.12	2.16	2.20	2.24	2.28	2.32	2.36	2.40
5	2.35	2.40	2.45	2.50	2.55	3. 0	3. 5	3.10	3.15	3.20
6	3. 6	3.12	3.18	3.24	3.30	3.36	3.42	3.48	3.54	4. 0
7	3.37	3.44	3.51	3.58	4. 5	4.12	4.19	4.26	4.33	4.40
8	4. 8	4.16	4.24	4.32	4.40	4.48	4.56	5. 4	5.12	5.20
9	4.39	4.48	4.57	5. 6	5.15	5.24	5.33	5.42	5.51	6. 0
10	5.10	5.20	5.30	5.40	5.50	6. 0	6.10	6.20	6.30	6.40
11	5.41	5.52	6. 3	6.14	6.25	6.36	6.47	6.58	7. 9	7.20
12	6.12	6.24	6.36	6.48	7. 0	7.12	7.24	7.36	7.48	8. 0
13	6.43	6.56	7. 9	7.22	7.35	7.48	8. 1	8.14	8.27	8.40
14	7.14	7.28	7.42	7.56	8.10	8.24	8.38	8.52	9. 6	9.20
15	7.45	8. 0	8.15	8.30	8.45	9. 0	9.15	9.30	9.45	10. 0
16	8.16	8.32	8.48	9. 4	9.20	9.36	9.52	10. 8	10.24	10.40
17	8.47	9. 4	9.21	9.38	9.55	10.12	10.29	10.46	11. 3	11.20
18	9.18	9.36	9.54	10.12	10.30	10.48	11. 6	11.24	11.42	12. 0
19	9.49	10. 8	10.27	10.46	11. 5	11.24	11.43	12. 2	12.21	12.40
20	10.20	10.40	11. 0	11.20	11.40	12. 0	12.20	12.40	13. 0	13.20
21	10.51	11.12	11.33	11.54	12.15	12.36	12.57	13.18	13.39	14. 0
22	11.22	11.44	12. 6	12.28	12.50	13.12	13.34	13.56	14.18	14.40
23	11.53	12.16	12.39	13. 2	13.25	13.48	14.11	14.34	14.57	15.20
24	12.24	12.48	13.12	13.36	14. 0	14.24	14.48	15.12	15.36	16. 0
25	12.55	13.20	13.45	14.10	14.35	15. 0	15.25	15.50	16.15	16.40
26	13.26	13.52	14.18	14.44	15.10	15.36	16. 2	16.28	16.54	17.20
27	13.57	14.24	14.51	15.18	15.45	16.12	16.39	17. 6	17.33	18. 0
28	14.28	14.56	15.24	15.52	16.20	16.48	17.16	17.44	18.12	18.40
29	14.59	15.28	15.57	16.26	16.55	17.24	17.53	18.22	18.51	10.90
30	15.30	16. 0	16.30	17. 0	17.30	18. 0	18.30	19. 0	19.30	22. 0

Areales numeri.

Areales numeri.

PORTIONALIS.

Late- Late- Qua- drati- rales. rales.

Qua.	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
31	16. 1	16.32	17. 3	17.34	18. 5	18.36	19. 7	19.38	20. 9	20.40
32	16.32	17. 4	17.36	18. 8	18.40	19.12	19.44	20.16	20.48	21.20
33	17. 3	17.36	18. 9	18.42	19.15	19.48	20.21	20.54	21.27	22. 0
34	17.34	18. 8	18.42	19.16	19.50	20.24	20.58	21.32	22. 6	22.40
35	18. 5	18.40	19.15	19.50	20.25	21. 0	21.35	22.10	22.45	23.20
36	18.36	19.12	19.48	20.24	21. 0	21.36	22.12	22.48	23.24	24. 0
37	19. 7	19.44	20.21	20.58	21.35	22.12	22.49	23.26	24. 3	24.40
38	19.38	20.16	20.54	21.32	22.10	22.48	23.26	24. 4	24.42	25.20
39	20. 9	20.48	21.27	22. 6	22.45	23.24	24. 3	24.42	25.21	26. 0
40	20.40	21.20	22. 0	22.40	23.20	24. 0	24.40	25.20	26. 0	26.40
41	21.11	21.52	22.33	23.14	23.55	24.36	25.17	25.58	26.39	27.20
42	21.42	22.24	23. 6	23.48	24.30	25.12	25.54	26.36	27.18	28. 0
43	22.13	22.56	23.39	24.22	25. 5	25.48	26.31	27.14	27.57	28.40
44	22.44	23.28	24.12	24.56	25.40	26.24	27. 8	27.52	28.36	29.20
45	23.15	24. 0	24.45	25.30	26.15	27. 0	27.45	28.30	29.15	30. 0
46	23.46	24.32	25.18	26. 4	26.50	27.36	28.22	29. 8	29.54	30.40
47	24.17	25. 4	25.51	26.38	27.25	28.12	28.59	29.46	30.33	31.20
48	24.48	25.36	26.24	27.12	28. 0	28.48	29.36	30.24	31.12	32. 0
49	25.19	26. 8	26.57	27.46	28.35	29.24	30.13	31. 2	31.51	32.40
50	25.50	26.40	27.30	28.20	29.10	30. 0	30.50	31.40	32.30	33.20
51	26.21	27.12	28. 3	28.54	29.45	30.36	31.27	32.18	33. 9	34. 0
52	26.52	27.44	28.36	29.28	30.20	31.12	32. 4	32.56	33.48	34.40
53	27.23	28.16	29. 9	30. 2	30.55	31.48	32.41	33.34	34.27	35.20
54	27.54	28.48	29.42	30.36	31.30	32.24	33.18	34.12	35. 6	36. 0
55	28.25	29.20	30.15	31.10	32. 5	33. 0	33.55	34.50	35.45	36.40
56	28.56	29.52	30.48	31.44	32.40	33.36	34.32	35.28	36.24	37.20
57	29.27	30.24	31.21	32.18	33.15	34.12	35. 9	36. 6	37. 3	38. 0
58	29.58	30.56	31.54	32.52	33.50	34.48	35.46	36.44	37.42	38.40
59	30.29	31.28	32.27	33.26	34.25	35.24	36.23	37.22	38.21	39.20
60	31. 0	32. 0	33. 0	34. 0	35. 0	36. 0	37. 0	38. 0	39. 0	40. 0

Areales numeri.

Areales numeri.

N

TABVLA PRO-

Late- rales.

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50
2	1.22	1.24	1.26	1.28	1.30	1.32	1.34	1.36	1.38	1.40
3	2. 3	2. 6	2. 9	2.12	2.15	2.18	2.21	2.24	2.27	2.30
4	2.44	2.48	2.52	2.56	3. 0	3. 4	3. 8	3.12	3.16	3.20
5	3.25	3.30	3.35	3.40	3.45	3.50	3.55	4. 0	4. 5	4.10
6	4. 6	4.12	4.18	4.24	4.30	4.36	4.42	4.48	4.54	5. 0
7	4.47	4.54	5. 1	5. 8	5.15	5.22	5.29	5.36	5.43	5.50
8	5.28	5.36	5.44	5.52	6. 0	6. 8	6.16	6.24	6.32	6.40
9	6. 9	6.18	6.27	6.36	6.45	6.54	7. 3	7.12	7.21	7.30
10	6.50	7. 0	7.10	7.20	7.30	7.40	7.50	8. 0	8.10	8.20
11	7.31	7.42	7.53	8. 4	8.15	8.26	8.37	8.48	8.59	9.10
12	8.12	8.24	8.36	8.48	9. 0	9.12	9.24	9.36	9.48	10. 0
13	8.53	9. 6	9.19	9.32	9.45	9.58	10.11	10.24	10.37	10.50
14	9.34	9.48	10. 2	10.16	10.30	10.44	10.58	11.12	11.26	11.40
15	10.15	10.30	10.45	11. 0	11.15	11.30	11.45	12. 0	12.15	12.30
16	10.56	11.12	11.28	11.44	12. 0	12.16	12.32	12.48	13. 4	13.20
17	11.37	11.54	12.11	12.28	12.45	13. 2	13.19	13.36	13.53	14.10
18	12.18	12.36	12.54	13.12	13.30	13.48	14. 6	14.24	14.42	15. 0
19	12.59	13.18	13.37	13.56	14.15	14.34	14.53	15.12	15.31	15.50
20	13.40	14. 0	14.20	14.40	15. 0	15.20	15.40	16. 0	16.20	16.40
21	14.21	14.42	15. 3	15.24	15.45	16. 6	16.27	16.48	17. 9	17.30
22	15. 2	15.24	15.46	16. 8	16.30	16.52	17.14	17.36	17.58	18.20
23	15.43	16. 6	16.29	16.52	17.15	17.38	18. 1	18.24	18.47	19.10
24	16.24	16.48	17.12	17.36	18. 0	18 24	18.48	19.12	19.36	20. 0
25	17. 5	17.30	17.55	18.20	18.45	19.10	19.35	20. 0	20.25	20.50
26	17.46	18.12	18.38	19. 4	19.30	19.56	20.22	20.48	21.14	21.40
27	18.27	18.54	19.21	19.48	20.15	20.42	21. 9	21.36	22. 3	22.30
28	19. 8	19.36	20. 4	20.32	21. 0	21.28	21.56	22.24	22.52	23.20
29	19.49	20.18	20.47	21.16	21.45	22.14	22.43	23.12	23.41	24.10
30	20.30	21. 0	21.30	22. 0	22.30	23. 0	23.30	24. 0	24.30	25. 0

Areales numeri.

Late- rales.

Areales numeri.

Late

PORTIONALIS.

Late- rales:

Qua- drati.

Areales numeri.

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	21.11	21.42	22.13	22.44	23.15	23.46	24.17	24.48	25.19	25.50
32	21.52	22.24	22.56	23.28	24. 0	24.32	25. 4	25.36	26. 8	26.40
33	22.33	23. 6	23.39	24.12	24.45	25.18	25.51	26.24	26.57	27.30
34	23.14	23.48	24.22	24.56	25.30	26. 4	26.38	27.12	27.46	28.20
35	23.55	24.30	25. 5	25.40	26.15	26.50	27.25	28. 0	28.35	29.10
36	24.36	25.12	25.48	26.24	27. 0	27.36	28.12	28.48	29.24	30. 0
37	25.17	25.54	26.31	27. 8	27.45	28.22	28.59	29.36	30.13	30.50
38	25.58	26.36	27.14	27.52	28.30	29. 8	29.46	30.25	31. 2	31.40
39	26.39	27.18	27.57	28.36	29.15	29.54	30.33	31.12	31.51	32.30
40	27.20	28. 0	28.40	29.20	30. 0	30.40	31.20	32. 0	32.40	33.20
41	28. 1	28.42	29.23	30. 4	30.45	31.26	32. 7	32.48	33.29	34.10
42	28.42	29.24	30. 6	30.48	31.30	32.12	32.54	33.36	34.18	35. 0
43	29.23	30. 6	30.49	31.32	32.15	32.58	33.41	34.24	35. 7	35.50
44	30. 4	30.48	31.32	32.16	33. 0	33.44	34.28	35.12	35.56	36.40
45	30.45	31.30	32.15	33. 0	33.45	34.30	35.15	36. 0	36.45	37.30
46	31.26	32.12	32.58	33.44	34.30	35.16	36. 2	36.48	37.34	38.20
47	32. 7	32.54	33.41	34.28	35.15	26. 2	36.49	37.36	38.23	39.10
48	32.48	33.36	34.24	35.12	36. 0	36.48	37.36	38.24	39.12	40. 0
49	33.29	34.18	35. 7	35.56	36.45	37.34	38.23	39.12	40. 1	40.50
50	34.10	35. 0	35.60	36.40	37.30	38.20	59.10	40. 0	40.50	41.40
51	34.51	35.42	36.33	37.24	38.15	39. 6	39.57	40.48	41.39	42.30
52	35.32	36.24	37.16	38. 8	39. 0	39.52	40.44	41.36	42.28	43.20
53	36.13	37. 6	37.59	38.52	39.45	40.38	41.31	42.24	43.17	44.10
54	36.54	37.48	38.42	39.36	40.30	41.24	42.18	43.12	44. 6	45. 0
55	37.35	38.30	39.25	40.20	41.15	42.10	43. 5	44. 0	44.55	45.50
56	38.16	39.12	40. 8	41. 4	42. 0	42.56	43.52	44.48	45.44	46.40
57	38.57	39.54	40.51	41.48	42.45	43.42	44.39	45.36	46.33	47.30
58	39.38	40.36	41.34	42.32	43.30	44.28	45.26	46.24	47.22	48.20
59	40.19	41.18	42.17	43.16	44.15	45.14	46.13	47.12	48.11	49.10
60	41. 0	42. 0	43. 0	44. 0	45. 0	46. 0	47. 0	48. 0	49. 0	50. 0

Areales numeri.

rales.

TABVLA PRO-

Late-rales.	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	1.00
2	1.42	1.44	1.46	1.48	1.50	1.52	1.54	1 56	1.58	2. 0
3	2.33	2.36	2.39	2.42	2.45	2.48	2.51	2.54	2.57	3. 0
4	3.24	3.28	3.32	3.36	3.40	3.44	3.48	3.52	3.56	4. 0
5	4.15	4.20	4.25	4.30	4.35	4.40	4.45	4.50	4.55	5. 0
6	5. 6	5.12	5.18	5.24	5.30	5.36	5.42	5.48	5.54	6. 0
7	5.57	6. 4	6.11	6.18	6.25	6.32	6.39	6.46	6.53	7. 0
8	6.48	6.56	7. 4	7.12	7.20	7.28	7.36	7.44	7.52	8. 0
9	7.39	7.48	7.57	8. 6	8.15	8.24	8.33	8.42	8.51	9. 0
10	8.30	8.40	8.50	9. 0	9.10	9.20	9.30	9.40	9.50	10. 0
11	9.21	9.32	9.43	9.54	10. 5	10.16	10.27	10.38	10.49	11. 0
12	10.12	10.24	10.36	10.48	11. 0	11.12	11.24	11.36	11.48	12. 0
13	11. 3	11.16	11.29	11.42	11.55	12. 8	12.21	12.34	12.47	13. 0
14	11.54	12. 8	12.22	12.36	12.50	13. 4	13.18	13.32	13.46	14. 0
15	12.45	13. 0	13.15	13.30	13.45	14. 0	14.15	14.30	14.45	15. 0
16	13.36	13.52	14. 8	14.24	14.40	14.56	15.12	15.28	15.44	16. 0
17	14.27	14.44	15. 1	15.18	15.35	15.52	16. 9	16.26	16.43	17. 0
18	15.18	15.36	15.54	16.12	16.30	16.48	17. 6	17.24	17.42	18. 0
19	16. 9	16.28	16.47	17. 6	17.25	17.44	18. 3	18.22	18.41	19. 0
20	17. 0	17.20	17.40	18. 0	18.20	18.40	19. 0	19.20	19.40	20. 0
21	17.51	18.12	18.33	18.54	19.15	19.36	19.57	20.18	20.39	21. 0
22	18.42	19. 4	19.26	19.48	20.10	20.32	20.54	21.16	21.38	22. 0
23	19.33	19.56	20.19	20.42	21. 5	21.28	21.51	22.14	22.37	23. 0
24	20.24	20.48	21.12	21.36	22. 0	22.24	22.48	23.12	23.36	24. 0
25	21.15	21.40	22. 5	22.30	22.55	23.20	23.45	24.10	24.35	25. 0
26	22. 6	22.32	22.58	23.24	23.50	24.16	24.42	25. 8	25.34	26. 0
27	22.57	23.24	23.51	24.18	24.45	25.12	25.39	26. 6	26.33	27. 0
28	23.48	24.16	24.44	25.12	25.40	26. 8	26.36	27. 4	27.32	28. 0
29	24.39	25. 8	25.37	26. 6	26.35	27. 4	27.33	28. 2	28.31	29. 0
30	25.30	26. 0	26.30	27. 0	27.30	28. 0	28.30	29. 0	29.30	30. 0

Late-rales. Areales numeri. Late-rales.

Areales numeri

PORTIONALIS.

Late- Late- rales.

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
31	26.21	26.52	27.23	27.54	28.25	28.56	29.27	29.58	30.29	31. 0
32	27.12	27.44	28.16	28.48	29.20	29.52	30.24	30.56	31.28	32. 0
33	28. 3	28.36	29. 9	29.42	30.15	30.48	31.21	31.54	32.27	33. 0
34	28.54	29.28	30. 2	30.36	31.10	31.44	32.18	32.52	33.26	34. 0
35	29.45	30.20	30.55	31.30	32. 5	32.40	33.15	33.50	34.25	35. 0
36	30.36	31.12	31.48	32.24	33. 0	33.36	34.12	34.48	35.24	36. 0
37	31.27	32. 4	32.41	33.18	33.55	34.32	35. 9	35.46	36.23	37. 0
38	32.18	32.56	33.34	34.12	34.50	35.28	36. 6	36.44	37.22	38. 0
39	33. 9	33.48	34.27	35. 6	35.45	36.24	37. 3	37.42	38.21	39. 0
40	34. 0	34.40	35.20	36. 0	36.40	37.20	38. 0	38.40	39 20	40. 0
41	34.51	35.32	36.13	36.54	37.35	38.16	38.57	39.38	40.19	41. 0
42	35.42	36.24	37. 6	37.48	38.30	39.12	39.54	40.36	41.18	42. 0
43	36.33	37.16	37.59	38.42	39.25	40. 8	40.51	41.34	42.17	43. 0
44	37.24	38. 8	38.52	39.36	40.20	41. 4	41.48	42.32	43.16	44. 0
45	38.15	39. 0	39.45	40.30	41.15	42. 0	42.45	43.30	44.15	45. 0
46	39. 6	39.52	40.38	41.24	42.10	42.56	43.42	44.28	45.14	46. 0
47	39.57	40.44	41.31	42.18	43. 5	43.52	44.39	45.26	46.13	47. 0
48	40.48	41.36	42.24	43.12	44. 0	44.48	45.36	46.24	47.12	48. 0
49	41.39	42.28	43.17	44. 6	44.55	45.44	46.33	47.22	48.11	49. 0
50	42.30	43.20	44.10	45. 0	45.50	46.40	47.30	48.20	49.10	50. 0
51	43.21	44.12	45. 3	45.54	46.45	47.36	48.27	49.18	50. 9	51. 0
52	44.12	45. 4	45.56	46.48	47.40	48.32	49.24	50.16	51. 8	52. 0
53	45. 3	45.56	40.45	47.42	48.35	49.28	50.21	51.14	52. 7	53. 0
54	45.54	46.48	47.42	48.36	49.30	50.24	51.18	52.12	53. 6	54. 0
55	46.45	47.40	48.35	49.30	50.25	51.20	52.15	53.10	54. 5	55. 0
56	47.36	48.32	49.28	50.24	51.20	52.16	53.12	54. 8	55. 4	56. 0
57	48.27	49.24	50.21	51.18	52.15	53.12	54. 9	55. 6	56. 3	57. 0
58	49.18	50.16	51.14	52.12	53.10	54. 8	55. 6	56. 4	54. 2	58. 0
59	50. 9	51. 8	52. 7	53. 6	54. 5	55. 4	56. 3	57. 2	58. 1	59. 0
60	51. 0	52. 0	53. 0	54. 0	55. 0	56. 0	57. 0	58. 0	59. 0	60. 0

Areales numeri. Areales numeri.

Qua- drati.

Late- rales

De ipſarum fractionum aſtronomicarum diuiſione. Cap. 5.

Conſiderãda in fract. aſtronomic. diuiſione.

1 IN DIVISIONE prædictarum fractionum aſtronomicarum, quemadmodum & in ipſa multiplicatione, duo ueniunt conſideranda. Primũ eſt denominatio quotæ fractionis, ex particulari unius per alterã diuiſione procreatæ: ſecundum autem, ipſe diuidendi modus, quem rurſum duplici uia conſequenter abſoluere docebimus.

Inuentio denominationũ procreatarum in diuiſione fractionum.

2 In expeditam primi adinuentionem, ſubſcriptam ordinauimus tabellam. In quam ſi lateraliter ingrediaris, cũ utraq; & diuidendæ & diuidentis fractionis denominatione, diuidendæ quidem ad uerticem tabulæ, & diuidentis in læuo & extremali ordine ſemper coaſſumpta: offendes ad cõmunem utriuſq; angulum, ipſius quotæ fractionis denominatorem.

Tabella denominationis productarum ex diuiſione fractionum.

	s̃.4.	s̃.3.	s̃.2.	s̃.1.	gra.	m̃.1.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.
s̃.4.	gra.	m̃.1.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.	7̃.	8̃.	9̃.
s̃.3.	s̃.1.	gra.	m̃.1.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.	7̃.	8̃.
s̃.2.	s̃.2.	s̃.1.	gra.	m̃.1.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.	7̃.
s̃.1.	s̃.3.	s̃.2.	s̃.1.	gra.	m̃.1.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.	6̃.
gra	s̃.4.	s̃.3.	s̃.2.	s̃.1.	gra.	m̃.1.	2̃.	3̃.	4̃.	5̃.
m̃.1.	s̃.5.	s̃.4.	s̃.3.	s̃.2.	s̃.1.	gra.	m̃.1.	2̃.	3̃.	4̃.
2̃.	s̃.6.	s̃.5.	s̃.4.	s̃.3.	s̃.2.	s̃.1.	gra.	m̃.1.	2̃.	3̃.
3̃.	s̃.7.	s̃.6.	s̃.5.	s̃.4.	s̃.3.	s̃.2.	s̃.1.	gra.	m̃.1.	2̃.
4̃.	s̃.8.	s̃.7.	s̃.6.	s̃.5.	s̃.4.	s̃.3.	s̃.2.	s̃.1.	gra.	m̃.1.
5̃.	s̃.9.	s̃.8.	s̃.7.	s̃.6	s̃.5.	s̃.4.	s̃.3.	s̃.2.	s̃.1.	gra.

Exemplum.

Vt ſi uolueris in exemplum agnoſcere, qualis fractio generetur ex diuiſione quintorum minutorum per tertia, accepta denominatione quintorum ad uerticem tabulæ, & tertiorum in ordine læuo: ſeſe offerent ad communem utriuſq; angulum 2̃, hoc eſt ſecunda, generatã ex propoſita diuiſione fractionem denominantia.

Corollaria notanda.

Cùm igitur fractio maior per maiorem, ſeu minor per minorem diuiditur fractionem, & diſsimilis

dissimilis fuerint nomēclaturæ: procreatur fractio ab eo denominata numero, qui subtracto minori denominatore à maiori relinquitur. Vt in præassumpto exemplo, quinta per tertia diuisa, generant secunda: quoniam subductis 3 à 5, relinquuntur 2. Quòd si fractio siue maior, siue minor, per similem diuidatur fractionē, utpote, secunda per secunda, tertia per tertia &c, fiēt semper gradus: sicuti gradus per gradus diuisi, dant pariter gradus. Quoties autem fractio maior per minorem, uel è contrario diuiditur, fit fractio ab illarum denominatoribus simul iunctis denominata: sic tamē, ut penes ordinem diuidendæ, cōsurgentis inde fractionis denominatio referenda sit. Vtpote, cùm signa secunda, per minuta prima diuiduntur, consurgunt signa tertia. Et uersauice, ubi eadem prima minuta, diuidentur per signa secūda, fient minuta tertia. Si fractio demum, etiam qualiscunque fuerit, per gradus diuidatur, fractio eiusdem nominis restituetur.

3 AD SECVNDVM principale deueniendo, contingit huiuscemodi fractiones duobus modis posse diuidi: ubi maximè plures, & diuersæ fuerint nomenclaturæ. In primis, per quintum caput libri primi, facta singularum specierum, tam diuidentium, quàm diuidendarum fractionum reductione, ad minimam denominationem, quę in illis continetur, non obmissa productæ fractionis denominatione, quæ ex prima huius capitis parte deprehenditur.

Primus modus diuidendi fract. astron. per reductionem.

Exemplum.

Vt si uolueris in exemplum diuidere 9 gradus, & 35 minuta, per minuta 30, & 40 secunda: uertes in primis 30 minuta, ad 1800 secunda: quæ unà cum secundis 40, efficiunt secunda 1840. Deinde reduces 9 gradus, ad 540 minuta: quæ unà cum 35 minutis, conficiunt minuta 575. Hæc autem non possunt diuidi per 1840: reduces igitur ipsa 575 minuta, per sexagenariam multiplicationē ad secunda, fient 34500, quæ diuides tandem per 1840 secunda: nascentur enim pro quoto numero, 18 gradus (nam fractio per similem diuisa fractionem, reddit gradus) relictis 1380 secundis. quæ multiplicabis per 60, fient 82800 tertia, diuidenda rursum per eadem 1840 secunda: prouenient minuta 45, nam tertia diuisa per secunda, restituũt minuta. Habes igitur ex proposita diuisione, gradus 18, minuta 45. Haud aliter facito, ubi plures duabus fractionibus in utroque fuerint ordine.

Notandũ circa fract. astro. diuisionem atque multiplicationem.

In his itaque fractionum diuisionibus, numerus quotus plerunque maior est diuisore, aut diuidendo numero: & in ipsa fractionum multiplicatione, productus numerus utroq; & multiplicante & multiplicando numero minor: Quemadmodum sexto, atque septimo capite antecedentis secundi libri, de uulgatis prædictum est fractionibus. Debent enim sexagenariæ fractiones, cum eisdem uulgaribus ex omni parte conuenire: nam prima minuta sunt ueluti fractiones integri simplices, secunda uerò, & tertia, unà cum reliquis, ueluti fractionum fractiones, ad suas principales (ueluti primariæ ad integra) referendæ.

4 *Secundus modus diuidendi fractio. astro. per tabulam proportionalem.*

Qualiter una uel duæ fractio. per unam diuidantur fractionem.

DEVENIENDVM EST consequenter ad diuidẽdi modum, qui fit absq; reductione: per ipsam uidelicet sexagenariam, & proportionalem tabulam. Et in primis, qualiter una fractio, uel duæ, per unicam diuidantur fractionem. Intrabis itaq; areatim congruam tabulæ partem, prout commodiùs acciderit, sumpto in supremo lateralium ordine, in ipso uidelicet tabulæ uertice, diuidentis fractionis numero: sub quo directè progrediendo, numerum diuidendę fractionis in eadem inuestigabis colũna. Quem si præcisum offenderis, ad læuam ipsius numeri, in descendenti quidem lateralium ordine, quotæ fractionis reperies numerum, quæ illius erit denominationis, quam propositæ & inuicem diuidendæ fractiones procreare sunt natæ.

Notandum.

Quoties uerò sub diuidente, ipsam diuidendam non inueneris fractionem: accipito proximè minorem, & quotam (uti nunc dictum est) elicito fractionem. Tolle postmodùm eandem proximè minorem fractionem, ab ipsa diuidenda, & differentiam rursum sub eadem diuidente animaduertito, & quotæ fractionis in præfato descendenti latere secundum accipito numerum: idq; deinceps continuato, quatenus præcisum tandem

tandem offendas numerum. Obtenta autem primi numeri denominatione, reliquorum denominationes suum uersus dextram seruant ordinem: ídque nedum in ipsa diuisione, sed in cæteris fractionum obseruatur operationibus. Pendet autem procreatæ fractionis denominatio, ubi duæ, uel plures fuerint in ordine diuidendo, atque diuidente, fractionum differentiæ: à læua, & potẽtia maiori fractionum utriusque ordinis differentia. Dentur in primis in exemplum 56 minuta, per 14 tertia diuidenda. Sumptis igitur 14 in uertice tertiæ paginæ ipsius tabulæ, offendes in quarta linea, ad dextram quidem illius partem 56: è recta autem regione ipsorum, 56, in descendenti lateralium ordine 4, quæ secunda dicentur. Concludes ergo, 56 minuta diuisa per 14 tertia, reddere pro quoto numero 4 secunda. Quòd si iubearis diuidere 50 minuta, per 15 tertia: acceptis rursum 15 in eodẽ uertice tabulæ, occurrent in tertia linea, pro numero proximè minori 45, & ad læuum ipsius tabulæ latus 3, quæ rursum dicentur secunda. Deinde subductis 45 ex 50, relinquentur 5: quæ rursum inuestigabis sub ipsis 15, in eodem uertice sumptis. offendes autẽ ea, in uigesima linea ab ipsis 15, & in ordine læuo: ad ipsius uerò lineæ finem, in latere scilicet descendenti 20, quæ tertia ueniunt appellãda. Ergo 50 minuta, diuisa per 15 tertia: reddunt pro quoto numero 3 secunda, & 20 tertia. Haud aliter, duas quascunq; inuicem succedentes fractiones, per unicam poteris diuidere fractionem: Vtpote, si diuidere oporteat 12 gradus & 30 minuta, per minuta 15. Acceptis enim 15 in uertice quartæ paginæ eiusdem tabulæ proportionalis, si ab ipsis 15 deorsum rectissimè descendas, offendes tandem ipsa 12, 30: à quibus si ad læuam recto perrexeris tramite, occurrent tibi in latere læuo 50, ex ipsa diuisione prouenientia. hæc autem 50, à minutis denominanda sunt: pendet enim ipsius quotæ fractionis denominatio, ab ipsis gradibus potentia maioribus, qui per minuta diuisi restituunt minuta. At si minuta 17, secunda 28, per eadem 15 minuta proponantur diuidenda: accipies 15 in

Notandum, de quotarum fractionũ denominationibus.

Exempla diuisionis unius fractionis per unicam.

Exempla diuisionis duarum fract. per unicam.

latere supremo tabulæ,& in sequenti linea, & dextro numerorum ordine tantummodò 15, numerum uidelicet diuidēdo proximè minorem. Occurrentem autem ad læuum tabulæ latus colliges unitatem, à gradibus quidem denominandam: diuidūtur enim minuta per minuta,quæ generant gradus. Subductis postmodū 15,ab ipsis 17 minutis: relinquuntur 2. Quæres igitur sub eisdem 15 in ipso tabulæ uertice sumptis,ipsa 2 minuta & 28 secunda. occurrent autē in nona eiusdem columnæ linea tantummodò 2/15: & in sinistro latere ad ipsius lineæ terminū 9, quæ minuta dicentur. Subductis rursum 2/15, ab ipsis 2, 28, relinquuntur secunda 13. Acceptis igitur præfatis 15 minutis, in ipso latere supremo, quæres sub illis 13. quæ tandem reperies in læuo(in quem cadunt)numerorum ordine: & è recta regione ipsorum 13, occurrent in sinistro latere 52,quæ secūda ueniunt consequēter appellanda. Habes igitur ex diuisione 17 minutorū & 28 secundorum,per minuta 15, gradū 1,minuta 9,& secunda 52.

Vt duæ uel tres fract. per duas simul fractiones eiusdē tabulæ diuidātur officio.

5 Cùm autem duas,trésue succedentes fractiones, per duas simul fractionum differentias diuidere fuerit operæpretium: commodiùs erit ob tabulæ distributionem, in hunc procedere modum. Accepto in sinistro latere utroque diuidentium fractionum numero, & à quolibet dextram uersus recta progrediēdo uia, comparentur adinuicem singulorum numerorum ordines,in eadem columna siue distātia ab ipso læuo & descendenti latere, è dextra regione cuiuslibet diuidentium occurrentes,iungendo uidelicet dextrū & grossiori fractioni respondentem numerū, sinistro numero eius ordinis qui subtiliori fractionum numero respondet: quatenus diuidendas uideas integrari fractiones. Nam capitalis eiusdem columnæ in transuersali seu capitali latere simul occurrens numerus,pro quoto uenit accipiēdus numero: qui illius semper erit denominationis,quam fractiones potentia grossiores inuicem diuisæ procreare sunt natæ. Quòd si diuidendas pręcisè non ualeas conficere fractiones:cōpones saltē proximè minores, & quotum rursum de more colliges numerum.

Notandū, pro numeris non præcisè reperibilibus.

merum. Acceptis postmodùm ipsarum diuidendarũ fractionum, & earundem proximè minorum differentiis: quæratur rursum è regione diuidentium fractionum ipsi differentiarũ numeri supradicto modo cõiuncti, residuas fractiones conficientes, sumatúrque de more secundus numerus quotus, ad ipsius columnę uerticem, & in ipso uorticali latere simul occurrens: similisque rursum cum differentia ipsius differentiæ (si opus fuerit) discursus iteretur. Verùm si inter fractiones diuidentes, species aliqua intermittatur, utpote, si proponantur minuta cum tertiis, uel gradus cum secundis: non iunges numerum dextrum cum sinistro sequentis, sed unusquisque suum seruet ordinem.

Documentum particulare, admodũ notandum.

Haud alienum habeto iudicium, ubi plures duabus in utroq; & diuidẽdo & diuidente ordine adfuerint fractionum species: maiore nanque solùm opus erit animaduertentia, & plurium numerorum habenda consideratio. Idem enim de singulis propositarum fractionũ speciebus, adminiculo præfatæ tabulæ proportionalis facere est operæpretium: quod de singulis integrorum numerorum elementis, capite quinto libri primi iussimus obseruãdum. Quemadmodum ex subscriptis deprehendere licebit exemplis.

De generali datarũ quotcunque fract. per datas quotcunque fractiones diuisione.

6 Proponantur in exemplum gradus 4, minuta 41, secunda 14, diuidenda per minuta 25, secunda 34. Compertis itaq; 25 & 34 in latere læuo, offendentur è regione ipsorum 25, in tertia uidelicet tabulæ pagina, & prima illius columna 4/35, & sub his in pagina quarta è regione 34, huiusmodi numeri 6/14: qui suprascripto modo coniuncti, efficiũt 4/41/14, diuidẽdarum fractionum numeratores. Ad ipsius igitur colũnæ uerticem, colliges 11 pro quota fractione, quæ minuta dicentur: gradus enim per minuta diuisi, restituunt minuta.

Exemplum. 1. diuisionis triũ fractionũ per duas.

Esto rursum propositum diuidere gradus 6, minuta 40, secunda 25, per minuta 10, secunda 20. Sumptis itaque 10 & 20, in præfato latere læuo septimæ paginæ, offendentur è regione ipsorũ 10, proximè minores numeri, utpote 6/20, & sub ipsis è regione 20, atq; in eadẽ colũna, 12/40: quę præ-

Secundũ exẽplum diuisionis triũ fract. per duas.

miſſo modo coniuncta, efficiũt gradus 6, minuta 32, ſecunda 40. In ipſius ergo colũnæ uertice, concurrent 38, pro primo quotæ fractionis numero, quæ minuta dicentur. Differentia autem ipſorum 6/40/25, ab ipſis 6/32/40, eſt minutorum 7, & ſecundorum 45. Hæc igitur rurſum quæres ſub ipſis 10, & 20, in eodem ſiniſtro latere coaſſumptis: offendes igitur ad dextram ipſorum 10, hos numeros 7/30, & ſub his è regione 20, in eadem colũna 15/0: quæ ſæpius expreſſo more coniuncta, efficiunt præfata 7 minuta, & 45 ſecunda. Colliges igitur pro ſecunda fractione quota, cõcurrentia in ſupremo latere 45 ſecũda. Habes igitur ex propoſita diuiſione, minuta 38, ſecunda 45. Dentur tandem gradus 42, prima minuta 5, ſecunda 2, tertia 9, quarta uerò 45: diuidenda per 4 gradus, 5 minuta, & 3 ſecunda. His ordine diſtributis, geminæ ſubſcribantur parallelæ, quotas ex diuiſione fractiones recepturæ: ſub quibus 4 gradus ordinis diuidendi in directũ ipſorum 42 graduum in primis collocentur, & 5 minuta ſub 5 minutis, atque 3 ſecunda ſub duobus ſecundis. Et notatis in ſiniſtro primæ paginæ latere, ipſius diuiſoris numeris, utpote 4/5/3: accipiantur è dextra illorum regione, & in eadem colũna, diuidendi fractionum numeri ipſi diuiſori ſuprapoſiti. Qui cùm præcisè non offendantur, colligendi ſunt numeri proximè minores: utpote 0/40 è regione ipſorum 4, & 0/50 ſub ipſis ad dextram ipſorum 5, atque 0/30 è regione ipſorum 3. Ad quorum uerticem occurrent in trãſuerſali latere 10 gradus, pro prima quoti numeri fractione: gradus enim diuiſi per gradus, reſtituunt gradus. Scribantur ergo 10 intra lineas parallelas, ſub ipſorum graduum ordine: & ſubductis præfatis numeris 40/50/30, ab ipſis 42 gradibus, 5 minutis, & duobus ſecundis, ſupranotentur reliqui, utpote gradus 1, minuta 14, & 32 ſecunda, deletis tandem, quorum facta eſt ſubtractio numeris. His abſolutis, renouẽtur ſinguli diuiſoris numeri, per unicum ordinẽ uerſus dextram anticipati, ponendo gradus ſub minutis, & minuta ſub ſecundis, & ſic cõſequenter de cæteris: priori diuiſore deleto. Et rur-

Exemplũ generale diuiſionis pluriũ fractionum, per plures fractionum differentias.

Et rurſum ſub eiſdem numeris 4/5/3, in præfato latere ſini-ſtro, ſed in tertia tabulæ pagina coaſſumptis, ſuprapoſiti, & ex proxima diuiſione relicti, inueſtigētur numeri. At quoniā ad dextram ipſorū 4, unus gradus & 14 minuta præciſè non occurrunt: ſumendi ſunt numeri proximè minores, utpote 1/12, & in eadem colūna è regione ipſorū 5 & 3, ſimul occurrentes numeri, ſcilicet 1/30, & 0/54. Ad quorū uerticem ſeſe offerunt in ſupremo latere 18, quæ minuta prima dicentur,

Gradus. Minuta. Secunda. Tertia. Quarta.	
~~1~~ — ~~1~~—~~1~~ ~~5~~—~~4~~ ~~5~~ 1 1 1 5 ~~1~~—~~1~~ ~~3~~—~~3~~ ~~0~~—~~5~~ ~~4~~ 1 1 4 3 2 ~~4~~ ~~0~~—~~5~~ ~~0~~—~~3~~ ~~0~~ 42 . 5 . 2 . 9 . 45.	*Fractiones ſub diuidentibus occurrentes, unà cum relictis ex ſubtractionibus fractionum numeris.* *Fractiones diuidendæ.*
10 . 18 . 15 .	*Fractiones quotæ.*
~~4~~——~~5~~— ~~3~~ / ~~3~~ / ~~3~~ ~~4~~— ~~5~~ ~~5~~ 4 /	*Fractiones diuidentes.*

ſcribenda poſt 10 gradus intra parallelas. Ipſi porrò numeri ſub diuiſoribus reperti, ſæpius expreſſo more coniuncti conficiunt 1/13/30/54, quæ notanda ſunt ſuper 1 gradum, 14 prima minuta, 32 ſecunda, & 9 tertia: atque ab eiſdem ſolito more ſubducenda. Relinquetur igitur 1 primum minutū, 1 pariter ſecūdum, unà cum 15 tertiis, & 45 quartis. Quibus decenter ſupranotatis, & deletis prioribus numeris: renouentur iterum dextram uerſus ipſi diuiſores numeri, & ad dextrā illorum, in præfato latere ſiniſtro coaſſumptis, iidem reſidui numeri ſigillatim inueſtigentur. Ad dextram ergo ipſorum 4 occurrent 1/0, & ipſorum 5 in eadem colūna 1/15, ſub ipſis autem & è regione ipſorū trium 0/45: quæ ſimul de more coniuncta, conficiunt præciſè ipſos nuper relictos numeros. Accipiendus eſt igitur in ſupremo latere, ſimul occurrēs numerus, utpote 15, & intra lineas parallelas ſub titulo ſecūdorum reponendus. Supraſcriptis tandem in hūc modum collectis numeris, & illorum à præfatis residuis sigillatim facta subtractione:nihil prorsus relinquetur. Prouenient igitur ex præmissa diuisione, gradus 10, minuta 18, & secunda 15. Nec te prætereat, ipsum diuisorem non fore de necessitate renouandum:sed manendum suo loco semel designatum.

Vt exequenda antecedentis exempli diuisio, absque tabula proportionali. Quòd si prædictarum fractionum diuidendarum ordinem, per ipsos numeros diuisores, iuxta primum diuidendi modum, proximo numero tertio sufficienter expressum, diuidere forsitan iuuet: uterque ordo ad minimam fractionis speciem in primis reuocandus est, per continuam uidelicet multiplicationem sexagenariam, collectis semper in unum eiusdem nomenclaturæ numeris. Ordo itaque diuidendus, quatuor multiplicationibus & totidem additionibus, ad 54540778 5 quarta reducetur: diuisor autē, duabus tantum multiplicationibus & totidem additionibus, ad secunda 14703. Diuidenda sunt igitur, per doctrinam quinti capitis libri primi, ipsa 545407785 quarta, per eadē 14703 secunda: prodibunt enim ex ipsa diuisione, secunda 37095. Quæ rursum duabus diuisionibus sexagenariis, ad præfatos 10 gradus, & 18 minuta, atque 15 secunda reuocabuntur.

7 *Aliud diuisionis exemplū, per ipsam tabulam.* In clariorem diuisionis harum fractionum astronomicarum, & secundi numeri siue documenti huiusce capitis intelligentiam:succedentem contemplare formulam. In qua, signa prima 15, gradus 33, & minuta 49/33/29/5/52/30, per gradus 45, & minuta 20/36/15, diuidenda proponūtur: per arealem uidelicet ingressum in præfatam proportionalem tabulam. Ex qua tandem partitione, prosiliunt gradus 20, & minuta 35/40/18. Quod si iuuet officio reductionis eandem absoluere diuisionem, ordo diuidendus, septē multiplicationibus, in hæc minuta sexta conuertetur, 43568-58436515 0: ex diuidente autem ordine, per trinam multiplicationem (sexagenariam uelim semper intelligas) prodibunt minuta tertia 9794175. Atqui præfata 4356858-4365150, diuisa per 9794175, reddunt pro quoto numero 4448418, quæ minuta tertia dicenda sunt. Hæc autem

tem per triplicem diuiſionem ſexagenariam, reuocãtur tandem in priùs inuentos 20 gradus, & minuta 35/40/18.

Sig. gra. m. 2. 3. 4. 5. 6	
13—36—10—53—30 13. 36. 10. 52. 30—13—44 10—0 30. 27. 20. 20 26—27—1—5—45 26. 57. 28. 29. 15—6—52—5—0 15. 33. 49. 33. 29. 5. 52. 30	Numeri, è regione ſingulorum diuidentiũ occurrentes: unà cũ reſiduis ſubtractionũ numeris. Ordo diuidendus.
20. 35. 40. 18. Numerus quotus	
45—20—36—15/15/15 15 45—20—36 36/36/ 45—20/ 20 45/	Ordo fract. diuidentiũ.

Longè itaque facilior, ac expeditior eſſe uidetur præfatus diuidendi modus, qui adminiculo ipſius tabulæ proportionalis abſoluitur, ipſo diuiſionis artificio, quod per reductionem adimpletur.

Vt earundem fractionum quadrata radix extrahenda ſit. Cap. 6.

1 DEueniendum eſt conſequenter, ad quadratæ & cubicæ radicis earundem fractionum aſtronomicarum inueſtigationem. Quãtum igitur ad quadratam uidetur ſpectare radicem: ea duplici, iuxta præmiſſam diuiſionis traditionem, colligitur artificio. In primis, facta ſingularum ſpecierum ad minimam denominationem reductione: ipſa radix quadrata non aliter elicienda eſt, quàm ſeptimo capite libri primi, de integrorum tradidimus radicibus. Sed operæpretium eſt, ſingula fragmenta particularia ad eam tandem reducere fractionem, quæ ab aliquo parium denominetur numero, cuiuſmodi ſunt quarta, ſexta, octaua, &c. nam radix ipſa, à dimidia parte ipſius numeri

Primus modus extrahendi quadratã fract. aſtronom. radicem.

paris commodisſimè denominabitur: quæ tandem uia reductionis, in ſuos fractionum ordines (ſi ſexagenarium exuperauerit numerum) reuocanda eſt.

Exemplũ primi modi. Proponãtur in exemplum, 2 ſigna communia, 25 gradus, 37 minuta, 27 ſecunda, 2 tertia,& 24 quarta:quorum quadratam iubearis inuenire radicem. Duo itaque ſigna communia, repræſentant gradus 60: qui unà cum 25 gradibus, conficiunt 85.Ipſi porrò 85 gradus,per 60 multiplicati, reddunt minuta 5100: quæ unà cum 37 minutis,efficiunt minuta 5137. Quæ rurſum ducta in 60, uertuntur in ſecunda 308227: unà cum 27 ſecundis,hunc ſecundorum conficientia numerum 308247.Ex quibus,unà cum ipſis duobus tertiis,eliciũtur tertia 18494822.Hæc autem in quarta de more reuocata,& ipſis 24 adiuncta quartis, conficiunt tãdem quarta 1109689344.Horũ porrò 1109689344 quartorum radix quadrata, iuxta ipſius ſeptimi capitis libri primi traditionem, offenditur eſſe 33312: uti ſubiecta deſcriptio monſtrat.

1 1
2 7 3 1
2 2 0 8 9 3 2
1 1 | 0 9 | 6 8 | 9 3 | 4 4 *Numerus quartorum datus.*

3 3 3 1 2 *Radix quadrata ſecundorum.*

6 6—6 6—6 6 — 2 *Radices duplatæ.*
6 6—6

Hæc autem 33312, ſecunda dicentur: ſola enim ſecũda per ſeſe multiplicata,reſtituunt quarta. *Notandum.* Oportet enim non ſolum ipſam radicem per ſeſe multiplicatã, eum conficere numerum cuius eſt radix: ſed & eiuſdem radicis denominatorem per ſeſe itidem multiplicatum,eiuſdem numeri nomenclaturam ſimul reſtituere.Ipſa demum 33312 ſecunda diuiſa per 60,reddunt minuta 555: relictis ſecundis 12. Ex quibus 555 minutis,colliguntur 9 gradus: relictis 15 minutis. Ergo radix quadrata præaſſumptarum fractionum, habet 9 gradus,15 minuta,unà cum ſecundis 12.

EAN-

2 EANDEM quoque radicem, adminiculo præfatæ tabulæ proportionalis, longè faciliùs, ac expeditiùs multò, licebit inuestigare. Notabis igitur, singulos areales tabulæ numeros, in prima, tertia, quinta, octaua, decima atque duodecima ipsius tabulæ facie contentos, & in diagonalem totius tabulæ ordinem (si unica facie cōtineretur) distributos, quos differentię gratia rubro annotauimus, esse quadratos. Quod igitur præfato capite septimo libri primi, de singulis elemētis faciendum esse docuimus: hic de singulis fractionum speciebus pendēter obseruare est operæpretium. Debes autem ab ipsis gradibus (quoties occurrerint) primariam ipsius radicis deducere nomenclaturam: utpote, qui primariam circuli uidentur constituere partitionem, & integra propterea uocitantur: signa enim nihil aliud sunt, quàm eorūdem graduum collectiones. Resumantur facilioris intelligentiæ gratia, præfata 2 signa communia (quæ 1 signum maius reprę sentant, ex 60 cōstans gradibus) gradus insuper 25, minuta 37, secunda 27, tertia 2, & quarta demum 24. His igitur ordine distributis, unà cum subscriptis lineis parallelis: uide an inter ipsos quadratos tabulæ numeros, offendantur 1/25. Occurrent autem in prima tabulæ facie 1/21, proximè minores numeri, 1 signum, & 21 gradum reprę sentantes. Hos igitur super 1/25 scribito, atque ab eisdem 1/25 subducito: relinquentur tandem gradus 4. Quibus supra notatis, & deletis prioribus numeris: accipito uerticalem ipsius columnæ numerum, utpote 9, scribēdum intra lineas parallelas sub ipsis 25 gradibus. Hos demum 9 gradus duplica, fient gradus 18: quos reponito sub eisdem 9 gradibus, infra lineas parallelas. Hac prima radicis specie reperta, accipe 18 in læuo tertiæ faciei latere, à quibus recta progrediēdo uia, offendes tādem 4/30/ proximè minores numeros: qui unà cum quadrato numero in eadem occurrente columna, scilicet 3/45, solito more coniuncti, efficiunt 4/33/45. Quibus suprascriptis, & à residuis numeris ordine detractis: relinquētur 3 prima minuta, & 42 secūda, deletis prioribus numeris sursum

Secundus & facilior modus extrahēdarum radicū quadratarū, in fract. astro.

Exemplū, secundi modi, extrahendarum radicum quadratarū.

Prima radicis species.

Secūda radicis species.

annotanda. Pro ſecunda autem radice, ſumenda ſunt 15, ad ipſius columnæ uerticē, in tranſuerſo latere, ſuper dictos occurrentia numeros: & intra lineas, poſt 9 gradus ſubſcribenda. Hæc demum 15 minuta duplabis, fiēt 30, ſub eiſdem annotanda parallelis. *Notandum.* Verùm ſi minuta duplata, creſcerent in 60: pro eodem ſexagenario numero, iungendus eſſet unus gradus præfatis 18 gradibus, reliquis minutis ſuo loco dimiſſis. Quod & in cęteris duplatis fractionū numeris, pendenter obſeruandum eſſe uelim intelligas. *Tertia radicis ſpecies.* Rurſum è recta regione ipſorum 18 & 30, in eodem lateralium ordine coaſſumptis, perquirantur numeri in eadem columna cum ſupraſcripto quadrato ſimul occurrentes, & ſæpius expreſſo more cōiuncti reſiduos cōficientes fractionum numeros. Offendes itaq; in tertia tabulæ facie, ad dextram ipſorum 18 graduū 3/36, & ſub his è regione 30 minutorum 6/0, & quadratum in eadem columna ſimul occurrentem 2/24: quæ ut obiecta monſtrat formula, cōficiunt 3/42/2/24, hoc eſt, reliqua 3 minuta, 42 ſecunda, 2 tertia, & 24 quarta. Quibus ſupraſcriptis, & detractis: nihil tandem relinquetur. Accipiantur igitur ad ipſius columnæ uerticem, pro tertia radicis ſpecie, 12: quæ ſecunda minuta dicentur, ſcribenda poſt 15 minuta, intra lineas parallelas.

3.	36		
	6.	0	
		2.	24
3.	42.	2.	24

Signa maiora.	Gradus.	Minuta.	Secunda.	Tertia.	Quarta.	
		3—	42—	2—	24	
	4	3.	42			
	4.	33—	48			
1—2	1					
1.	28.	37.	27.	2.	24	Numeri dati.
	9.	15.	12.			Radix quadrata.
	18.	30				Radices duplatæ.

Concludes igitur, præaſſumptum fractionum ordinem eſſe quadratum: & illius radicem habere 9 gradus, 15 prima minuta, & 12 ſecunda, qualē uia reductionis nuper adinuenimus. Concurrunt igitur in eadem tabulæ columna, ipſi radicales

cales numeri, & producti ex singulis duplatis per eandem radicem multiplicatis, unà cum ipsius radicis quadrato numero: quos alioqui tædioso admodum & prolixo discursu, colligere esset operæpretium.

3 Alium iuuat subnectere modū recèns excogitatum, quo radix dati cuiuslibet numeri non quadrati admodū propinqua uèritati reperitur: partim uidelicet per doctrinam sexti capitis antecedentis libri primi, quæ de integrorum tradita est numeris: partim uerò ipsius tabulę proportionalis adminiculo, iuxta nunc expressum, & exemplo declaratum artificiū. *Alius modus extrahendi quadratā radicem ualde notandus.*

Sit igitur (ut rem acu tangamus) datus integrorum numerus 5687. Extrahatur itaq; primùm radix integra quadrati numeri, qui dato numero proximus extitit, per ipsum caput sextum libri primi. Hæc autem radix, erit integrorum 75, relictis 62: ut ex hac potes elicere formula. Ipsa porrò 75, faciunt 1 signū maius, & 15 integra, scribenda intra duas parallelas. Residuus autem numerus, utpote 62, tanquam 1 signū itidem maius, & 2 integra, supra dictas parallelas pendenter uenit annotandus: designatis uersus dextram futurarum radicum fractarum limitibus. Duplanda est postmodùm ipsa radix integra, utpote 1 signum, & 15 integra: fient 2 signa & integra 30, sub præfatis parallelis de more notanda. Colligantur deinde, ex quinta facie tabulæ, & quarto arealium numerorum ordine, è regione quidē binarij 0.48, è regione autem trigenarij 12.0, atq; simul occurrens in eodem ordine quadratus numerus 9.36: quæ solito more coniuncta, efficiunt 1.0.8.36, hoc est, 1 signum, 8 prima minuta, & secūda 36, à relicto numero scilicet 1.2.0.0. subducenda, supra-notatis de more residuis numeris. Capitalis autem ad ipsius columnæ uerticem sese offerēs numerus, utpote 24, pro secunda radice, sub primorum minutorum limite, intra parallelas collocandus est: isque duplandus, fient 48. Quibus subscriptis inuenienda sunt reliqua propositæ radicis fragmen-

	2		
	7	6	2
5	6	8	7
	7		5
	1	4	

ta, quantumuis minutim distributa: colligendo singulos numeros, è regione cuiuslibet duplati numeri, in eadem areali columna simul occurrentes: qui unà cum eiusdem columnæ quadrato, relictum, uel eo proximò minorem conficiant numerum: Veluti proximo traditum est documento, & subscripta monstrat formula. Ex qua fit manifestum, radicem uniuersalem (satis quidem præcisam) ipsius oblati numeri 5687, fore integrorum 75, & minutorum 24/44/19/12/feré.

Sig.ĩ. Integra. m.ĩ. 2̃. 3̃. 4̃. 5̃. 6̃.	
30. 4. 1. 59	*Numerus datus*
47—18—39—88—1	5687.
0. 48. 15. 44.	
1—80—38—44—16	
1. 51. 24.	
1 0—8—36	
1. 2. 0. 0. 0. 0. 0. 0.	*Residuũ numeri dati*
1. 15. 24. 44. 19. 12.	*Radix quæsita*
2—30. 48 28—38 49	*Radices duplatæ.*

Idem faciendum esse uelim intelligas, de quauis alia integrorum multitudine, quibus annexa fuerint quotquot acciderint unius integri minuta.

De cubica prædictarum fractionum astronomicarum radice. Cap. 8.

1 *Primus modus extrahẽdi cubicam fractionum astro. radicem.*

RELiquum est, ut cubicæ radicis inuentionem datarum quarumque fractionum astronomicarum, paucis edoceamus: quanquàm ea raro ueniat in usum. Hæc igitur, ueluti quadrata radix, duobus modis extrahitur. In primis, reductis singulis fractionũ speciebus, ad minutioris fractionis denominationem: sed ad eam, cuius denominator in tres partes inuicem æquales diuidi uel facilè posit, cuiusmodi sunt tertia, sexta, nona, duodecima, &c. Nam eadem radix cubica, ab ipsius denominatoris tertia parte, in quem datus

conuersus

conuersus est numerus, semper uenit denominanda. Facta igitur præfata reductione, ipsa radix cubica, iuxta tenorem octaui capitis ipsius primi libri, prorsus extrahenda est.

Offerantur exēpli gratia, 27 gradus, 55 minuta, 3 secunda, 44 tertia, 21 quarta, 6 quinta, & 1 sextum: quorū omniū, cubica radix extrahenda proponatur. Hæc igitur omnia, per sexagenariam multiplicationem resoluas in sexta: consurgēt autem ex ipsa reductione, sexta 1302528459961. Quorum radix cubica, per ipsius octaui capitis libri primi traditionem supputata, habet 10921: uti subscripta mōstrat formula. Hæc autem 10921 (ut semel dictū atq; obseruatū sit) *Exemplū primi modi.*

```
          3
    7     4 8 7
  0 8     2 9 9     7 7 1
1 | 3 0 2 | 5 2 8 | 4 5 9 | 9 6 1.   Nu. sextorum datus.
1     0       9       2       1      Ra. cubica secundorum.
   3.    3 0. 3 2 7.  2 7 6          Radices triplatæ.
           3
```

secunda ueniunt appellanda: sola enim secunda cubicè multiplicata, efficiunt sexta, ad quæ propositus fractionum reductus est numerus. Quòd si præfata 10921 secunda, per 60 diuidantur, prodibunt minuta 182, unico relicto secundo. Ex ipsis autem 182 minutis, tres colligentur gradus, relictis duobus secūdis, Et proinde cubica radix ipsius propositi fractionum numeri, habet 3 gradus, 2 minuta, & 1 secundum.

2 SI IVVET autem cubicam ipsius oblati numeri radicem, officio tabulæ proportionalis tandem inuestigare: id facies, de singulis fractionum speciebus idem pendenter obseruando, quod præfato capite octauo libri primi, de singulis integrorum numerorum elementis tradidimus. Memineris tamē, sex tantummodò cubos numeros in ipsa tabula bis cōtineri, tum supra quadratos, tum infra sparsim distributos, quos rubro colore, maioris euidentiæ gratia, distinximus. *Secūdus modus extrahēdi cubicā radicem, fract. astronom.* *De cubis in tabula contentis.*

Resumantur ergo, ad maiorem artis expresionem, præfati 27 gradus, 55 minuta, 3 secūda, 44 tertia, 21 quarta, 6 quin- *Exēplū inuētionis primæ radicis, &c. iuxta secundū modum.*

ta,& 1 ſextum. His ſolito more coordinatis, unà cum ſubſcriptis parallelis: accipe cubum numerum proximè minorẽ numero dato, in prima quidem facie tabulę utpote 0/27, ſolos 27 gradus repræſentãtem. Quo ſupraſcripto, & detracto ab eiſdem 27 gradibus: ſumantur 3, in tranſuerſo latere, ad uerticem eiuſdem columnæ concurrentia, pro primo radicis numero, quæ gradus dicentur: nam gradus quadratè uel cubicè multiplicati, reddunt ſemper gradus. Scribe ergo 3 gradus, intra parallelas: quos poſtmodùm triplica, fient gradus 9, ſub eiſdem gradibus infra parallelas annotandi. His abſolutis, accipe 27 gradus in læuo tabulæ latere: & è dextra illorum regione inueſtiga numerum relicto proximè minorem, hunc experieris eſſe 54 minuta, ſcribenda ſuper 55: ad quorum uerticem offendes 2, quæ prima minuta dicentur, collocanda poſt 3 gradus, intra parallelas, pro ſecundo radicis numero. Hic autem numerus 54 (ut rem acu tangamus) eſt, qui generatur ex ductu 3 graduum radicis in 9 triplatos, & multiplicatione producti per ipſa 2 prima minuta. Reliquum eſt igitur, ut multiplices ipſa 2 prima minuta radicis, per 9 gradus triplatos, & productum numerũ ducas rurſum in eadem prima 2 minuta, per lateralem uidelicet ingreſſum in ipſam tabulam proportionalem: conſurgent enim ſecunda 36, ſuper 3 ſecunda conſequenter annotanda. Accipiendus eſt tãdem numerus cubus, in eadem columna cum ipſis 54 minutis occurrens: utpote 0/8, hoc eſt, 8 tertia, ex cubico eorundem duorum primorum minutorum ductu prouenientia, ſcribenda ſuper tertia 44. Auferantur deniq; ipſa 54 prima minuta, 36 ſecunda, & 8 tertia, ab ipſis 55 primis minutis, 3 ſecundis, & 44 tertiis: relinquentur ſecunda minuta 27, tertia 36. Quibus annotatis, & deletis prioribus numeris: triplabis ipſa 2 prima minuta radicis, fient 6, quæ ſub ipſis parallelis tandem ueniunt annotanda. Rurſum accipito præfatos 27 gradus in eodem latere ſiniſtro, & ad dextram ipſorum regionem perquirito numerum relicto ſecundorum numero æqualem, is erit 27, in prima occurrens tabulæ

Secundæ radicis inquiſitio.

Tertiæ radicis adinuentio notanda.

bulæ facie, atque columna, quem scribes supra 27 secunda. in cuius columnæ uertice, sese offeret unitas, quæ 1 dicetur minutum secundum, pro tertia radicis specie post 2 minuta prima reponendum. Est autem huiusmodi numerus 27, qui ex ductu 3 graduum radicis in 9 triplatos, & producti multiplicatione per idem secundum minutum generatur. Reliquum est igitur, ducere præfatos 3 gradus, 2 prima minuta, & 1 secundum radicis, in 6 minuta triplata, & ipsa 2 tantũmodò minuta prima, & 1 secundum, in 9 gradus triplatos, per lateralem uidelicet ingressum in ipsam tabulã: fient enim prima minuta 36, secunda 21, tertia 6: quæ rursùm per 1 secundum radicis multiplicata uertentur in 36 tertia, 21 quarta, & 6 quintæ: uelut obiecta numerorum formula monstrat. His iungatur cubus numerus, ex uno secundo minuto radicis generatus: utpote 1 sextum, secũda enim cubicè multiplicata producunt sexta. Quòd si hoc modo collectos fractionum numeros, à relictis subduxeris numeris: nihil tandem relinquetur.

g.	m.	2.	3	4.	5
3.	2.	1			
9.	6.				
	18.	12.	6		
	18.	9.			
	36.	21.	6		
				1	
		36.	21.	6.	1.

Grad.	Min. pri.	Secũ.	Tertia.	Quarta.	Quinta.	Sexta.	
		27 — 36					
		27. 36.	21 — 6 — 1				
27.	84 — 36 — 8						Numerus datus, cubus.
27.	88.	3.	44.	21.	6.	1	
3.	2.		Radix cubica.				
9	6		Radices triplatæ.				

Concludes igitur, præassumptum fractionum numerum esse cubum: & illius cubicam radicem habere 3 gradus, 2 prima minuta, & 1 secundum: quantam uidelicet per primum modum, uia reductionis nuper offendimus. Habes itaq; primo intuitu ex ipsa tabula, adminiculo primi cubi ex prima radice procreati, radicem succedentem, unà cum numero ex ipsa prima radice in triplum eiusdem radicis, atque rursum per ipsam radicem facta multiplicatione producto. Cætera autem, iuxta uiam multiplicationis, conformiter ad ea quæ octauo capite libri primi, de integrorum tradidimus radicibus, pendenter absoluuntur.

3 Poterit etiam præfata radix cubica, datæ cuiuslibet multitudinis integrorum, etiam ubi simul adfuerint minuta, ut de quadrata radice proximo admonuimus capite, pendenter inueniri: Partim scilicet per doctrinam septimi capitis ipsius antecedentis libri primi, partim uerò ipsius tabulæ proportionalis officio, iuxta nunc traditum, & exemplo dilucidatũ artificium. At quoniam radix ipsa cubica rarò uenit in usum, sitque inuentu difficillima: consulimus, ut primum insequaris modum, quem præuia reductione faciendum esse demonstrauimus. Hæc igitur de fractionum astronomicarum praxi, sint satis.

LIBRI TERTII ARITHMETICAE PRACTICAE FINIS.

LIBER QVARTVS PRAEFATAE ARITHMETICAE

practicæ: De ratione, atque proportione numerorum, & præstãtioribus eorundem numerorum inuicem proportionalium regulis.

De rationis, atque proportionis diffinitione, & utriusq; speciebus & differentiis. Cap. I.

1 RELIQVVM EST, hoc libro quarto de rationibus, atq; proportionibus numerorum, (& proinde rationalium, ad numerósue relatarum magnitudinum) déque præstantioribus eorundem numerorũ inuicem proportionaliũ regulis, cuiuis arithmetico, geometræ, uel astronomo necessariis, summatim pertractare: Vt trium antecedentium librorum capita, tum in Mathematicarum, tum in ciuilium rerum usum, tandem reuocare doceamus.

2 Ratio igitur (ut ad rem ipsam deueniamus) est duarum quantitatum eiusdem speciei adinuicem comparatarũ habitudo. De quantitatibus uelim intelligas, quæ sub cõmunem quotæ partis dimensionem cadunt, & commensurabiles, rationalésque nuncupantur: & rationem habent adinuicem, quam numerus ad numerum. Sunt enim numeri, omnes, & ad numeros relatæ quantitates, commẽsurabiles, & proinde rationales. Habitudo autem incommensurabilium & irrationalium quantitatũ, quæ tum nobis, tum ipsi naturæ ignota est, & surda uocitatur, hoc est, quæ nec exprimi, nec consequenter audiri potest, ratio non uenit appellanda: cùm ratio, sit propriè commensurabilium & rationalium quantitatum inuicem comparatarum, siue numerorum habitudo.

Rationis diffinitio.

De surda irrationalium quantitatum habitudine.

Rationũ porrò, alia æqualitatis, alia uerò inæqualitatis dicitur. Aequalitatis ratio, numerorum, uel quantitatum inui-

Rationis subdiuisio.

cem æqualium uocitatur habitudo: inæqualitatis uerò, quæ inter inæquales uidetur accidere quantitates. Aequalitatis ratio, ab unitate denominatur: inęqualitatis autem, ab ipſis numeris, ad numeros adinuicem, uel unitatem relatis. Hinc fit, ut æqualitatis ratio nullam admittat differentiam: inæqualitatis autem ratio, in infinitũ uelut ipſe numerus progrediatur.

Inæqualitatis ratio duplex. Inæqualitatis præterea ratio, aut maioris inæqualitatis dicitur, cùm ſcilicet maior quantitas minori cõparatur: aut minoris inæqualitatis ratio nũcupatur, quoties uidelicet minoris ad maiorem quantitatem fit comparatio. Tot igitur ſunt rationum ſpecies, & differentiæ maioris, quot & ipſius minoris inæqualitatis.

4 *Quinque rationũ inæqualitatis ſpecies.* Species autem rationũ maioris inæqualitatis, ſunt quinq;: tres quidẽ ſimplices, utpote, multiplex, ſuperparticularis, & ſuperpartiẽs: & duæ ex illis compoſitæ, quæ multiplex ſuperparticularis, & multiplex ſuperpartiens appellantur.

Ratio multiplex. Multiplex itaq; ratio dicitur, cùm maior quantitas minorem pluries quàm ſemel præciſè comprehendit: cuius differẽtiæ ſunt infinitæ, nẽpe tot, quot & ipſi numeri unitati cõparati, utpote, dupla, tripla, quadrupla, quintupla, ſextupla, &c.

Superparticularis ratio. Superparticularis autẽ ratio nominatur, cùm maior quantitas ſemel continet ipſam minorem, & quotam præterea eiuſdem minoris partem. Et quoniam tot ſunt partium quotarum nomina, quot & numeri: infinitæ igitur erunt ſuperparticularis rationis differentiæ, utpote, ſeſqualtera ueluti 3 ad 2, ſeſquitertia ut 4 ad 3, ſeſquiquarta ut 5 ad 4, &c.

Numeri ſuperparticulares. Generantur autem ſuperparticulares numeri, ſi linea naturalis numerorum à ternario inchoata proponatur, & illi ſubſcribatur eadem linea, ſed à binario initiata numero, & ſuperiores numeri inferioribus comparentur.

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

5 *Ratio ſuperpartiens.* Superpartiens uerò dicitur ratio, quoties maior quantitas minorem ſemel comprehẽdit, & partem ipſius minoris non quotam, ſed ex quotis illius partibus reſultantẽ. Quę rurſum

tum ex

tum ex parte numeri, tũ ex parte denominationis earundem partium quotarum ipſam partem non quotam efficientium, infinitas recipit differentias: utpote, bipartientem tertias, ut 5 ad 3: tripartientem quartas, ueluti 7 ad 4: quadripartiẽtem quintas, ut 9 ad 5, &c. Procreabis autẽ numeros ſuperpartiẽtes, ſi lineam imparium numerorum à quinario initiatam ordinaueris, & illi ſubnotaueris naturalem numerorum ſeriem à ternario exordientem: nam ſuperiores inferioribus comparati, ſuperpartientes offendentur.

Numeri ſuperpartientes.

5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

6 Quòd ſi maior quantitas, minorem pluries quàm ſemel comprehendat, & partem inſuper eiuſdem minoris quotam: talis ratio, multiplex ſuperparticularis appellatur. Vnaquæq; igitur differentia multiplicis, ſingulas recipit differentias ipſius rationis ſuperparticularis. Alia enim dupla ſeſqualtera dicitur, ut 5 ad 2: alia dupla ſeſquitertia, ueluti 7 ad 3: & ſic conſequenter. Idẽ intelligas uelim de tripla, quadrupla, & cæteris differentiis multiplicis. Si igitur inferiorẽ lineã ſuperparticulariũ ſuperiori coniunxeris, & productos eiſdẽ inferioribus numeris ſupraſcripſeris: cõficies omnes differẽtias multiplicis ſuperparticularis, ſub ratione dupla cõprehẽſas.

Multiplex ſuperparticularis ratio.

Numeri multiplices ſuperparticulares.

5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Et ſi rurſum hoc modo procreatorum numerorum inferiores ſuperioribus compoſueris, ac eiſdem inferioribus reſultantes cõparaueris numeros: cõſurgent eiuſdẽ multiplicis ſuperparticularis differẽtiæ, ſub ratione tripla concurrentes.

7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Et ſic deinceps quantumlibet, per continuam additionem inferiorum numerorum cum productis ſuperioribus: reliquas multiplicis ſuperparticularis differentias, ſub cæteris multiplicibus comprehenſas, ordine procreabis.

Si deniq; maior quantitas, minorem rurſum pluries quàm ſemel comprehendat, & partem non quotam ipſius minoris:

Ratio multiplex ſuperpartiens.

eiuſcemodi ratio, multiplex ſuperpartiens nũcupatur. Hinc fit, ut unaquæque multiplicis differentia, ſingulas differentias ipſius rationis ſuperpartientis indifferenter admittat. Erit enim, aut dupla bipartiens tertias, ut 8 ad 3: aut dupla tripartiens quartas, ut 11 ad 4: uel quadripartiẽs quintas, ut 14 ad 5: & ſic de cæteris. Fient autem ſingulæ multiplicis ſuperpartientis differentiæ, ſub ratione dupla comprehenſæ: ſi infimum ſuperpartientium numerorum ordinem, ſuperiori ſingulatim adiunxeris, & reſultantes inde numeros eiſdem inferioribus comparaueris. ut hic.

Numeri multiplices ſuperpartientes.

8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Et ſi hoc modo procreatis ſuperioribus numeris, infimos iterum coniunxeris numeros, ac eiſdẽ inferioribus numeris conſurgentes inde numeros ſuperſcripſeris: conficientur ſingulæ multiplicis ſuperpartientis differentiæ, quæ ſub tripla ratione continentur. Quarum ſubſequitur exemplum.

11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Et in hunc modum conſequenter (ut de multiplicibus ſuperparticularibus nunc præcepimus) ſingulas multiplicis ſuperpartientis differentias, ſub cæteris multiplicibus rationibus concurrentes pendenter procreare licebit. Si demum unicuique prædictarum ſpecierum, & differẽtiarum, ſiue rationum maioris inæqualitatis, hanc ſyllabam ſub adieceris: eas in minoris inæqualitatis rationes uel facilè conuertes.

Notandum.

7 HIS prælibatis, dicendum eſt conſequenter de proportione, eiúſq; differentiis, & illationibus. Proportio eſt, contingens inter comparatas adinuicem quantitates rationum ſimilitudo. Quantitates igitur, inter quas ſimiles offendũtur rationes, proportionales appellantur. Cuiuſmodi ſunt hi numeri, 8/4, 6/3: ſicut enim 8 ad 4, ſic 6 ad 3, utrobiq; enim ratio dupla. Exceſſuum autem, ſiue differentiarum æqualitas, progreſsio dicitur: Et quantitates inter quas idem offenditur exceſſus ſiue differentia, progreſsionales nuncupantur. de quibus,

Proportio.

Progreſsio.

de quibus, capite nono libri primi abūdè dictum est. Tribus porrò datis numeris, si maximus ad minimū eandem habuerit rationem, quam differētia ipsius maximi supra medium, ad differentiam eiusdē medij supra minimū: eiuscemodi rationū similitudo, harmonia propriè uenit appellāda. Qualis inter hos uidetur accidere numeros, quorum differentiæ, sunt 2 & 1: sicut enim 6 ad 3, sic 2 ad 1. *Harmonia.*

| 6 . 4 . 3 |
| 2 1 |

Sed de his & similibus harmoniis, latiùs in Musica nostra disseruimus. Proportionum igitur, alia cōtinua, alia uerò discontinua uocitanda est. Continuam appellamus proportionem, rationum similitudinem, inter ordinatim comparatas quantitates accidentem: cùm uidelicet intermediæ quantitates, antecedentis & consequentis funguntur officio. Qualem obseruāt hi numeri, 8/4/2/1: ut enim 8 ad 4, sic 4 ad 2, atq; 2 ad 1, ubique enim ratio dupla. *Cōtinua proportio.* Hæc igitur proportio cōtinua, inter ea solùm reperitur, quæ eiusdem sunt speciei: & in tribus terminis, ad minus cōsistere uidetur. *Cōtinuè proportionalium cōditiones notandæ.* Quantitatum insuper cōtinuè proportionalium æquè multiplices, aut submultiplices, continuè itidem, ac in eadem ratione sunt proportionales: similiter & illarum differentiæ. Vt ex præassumptis, sub ratione dupla continuè proportionalibus, potes elicere numeris: quorum æquè multiplices utpote tripli, atque illorum differentiæ, sub eadem ratione dupla continuè itidē proportionantur.

24	12	6	3	*Aequè multiplices, tripli.*
8	4	2	1	*Numeri continuè proportionales.*
	4	2	1	*Differentiæ eorundem numerorū.*

Discōtinua uerò proportio, est discontinuè comparatarum quantitatum, rationum similitudo: cùm uidelicet antecedentes, suis tantùm consequentibus sub eadem ratione colligantur. *Proportio discontinua.* Qualem obseruare comperiuntur hi numeri, 8/4, 6/3: ut enim 8 ad 4, sic 6 ad 3, sed non 4 ad 6. Reperitur autem proportio discontinua, tam inter ea quæ sunt eiusdem speciei, quàm ea quæ specie uidentur esse diuersa: & in quatuor ad minus terminis necessariò cōstituitur. *Discontinuè proportionalium conditiones.* Præterea, si quantitatū discontinuè proportionaliū antecedentes æquè multiplicentur, similiter & consequentes:

consurgent quantitates, discontinuè itidem proportionales. Idem habeto iudicium, de simili modo sumptis, tam antecedentium, quàm etiam consequentium æquè multiplicibus: sed tunc eadem quæ inter datas quantitates: non obseruatur rationum similitudo. Vti subscriptæ præassumptorum numerorum ostendunt formulæ.

24	8	18	6	*Multiplices diuersi.*	24	12	18	9	*æquè multiplices.*
8	4	6	3	Numeri dati.	8	4	6	3	*numeri dati.*

Ex eadẽ proportione, diuersas suboriri proportiones.

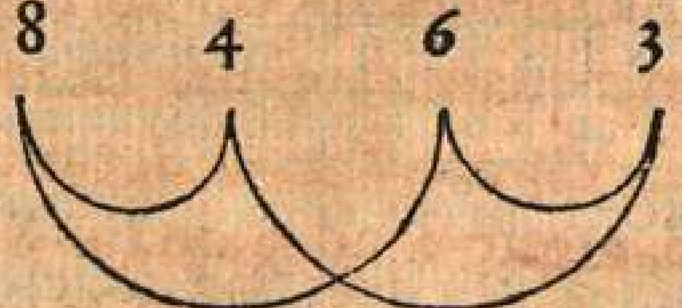
6 EX continua demũ, aut discontinua quatuor quantitatũ (eiusdẽ speciei uelim intelligas) proportione: uariæ subinferuntur proportiones, pro diuersa uidelicet antecedentium & consequentium adinuicem facta cõparatione subsequentes: tanta est ipsorum quatuor proportionalium uis, atq; ubertas.

Cõuersa proportio.

In primis, nascitur cõuersa proportio: cùm uidelicet rationes maioris inæqualitatis, in rationes minoris, aut è diuerso, per cõuersam terminorum adinuicem factam comparationẽ transmutamus. Vtpote, si fuerit ut 8 ad 4, sic 6 ad 3: erit & è conuerso, ut 4 ad 8, sic 3 ad 6: consequentes enim numeri, in antecedentium conuertuntur officium, & è diuerso.

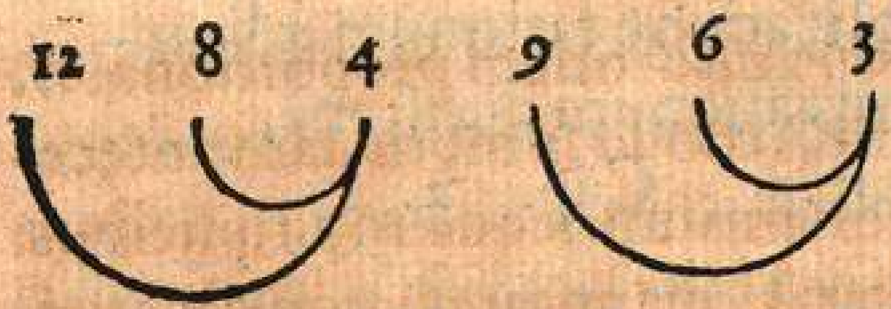
Permutata proportio.

Secundò, elicitur proportio, quę permutata, siue reciproca nuncupatur. Dicuntur autem permutari rationes, cùm prima tertiæ, & secunda quartæ comparatur: sic enim consequẽs primæ rationis fit antecedens secundæ, & antecedens secundæ consequens ipsius primæ. Vt datis rursum numeris 8⁄4, 6⁄3, sub ratione dupla discontinuè proportionatis: erit permutatim, ut 8 ad 6, sic 4 ad 3: utrobiq; enim offenditur ratio sesquitertia.



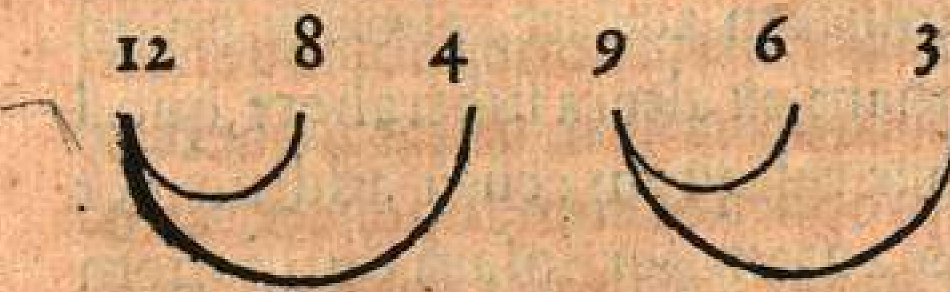
Proportio cõposita.

Subinfertur & alia proportio, quæ à terminorum compositione, composita dicitur: in qua uidelicet antecedentis cum consequente, ad ipsum consequens fit comparatio: quæ à diuisis, ad coniuncta nominatur assumptio. Vtpote si fuerit ut 8 ad 4, sic 6 ad 3, & subinferamus: ergo erit ut 12 ad 4, sic 9 ad 3. si componantur enim 8 & 4, fiunt 12: & 6 cum 3, faciunt 9. habent autem 12 ad



12 ad 4 eãdem rationẽ,quã 9 ad 3. Huic contraria eſt diuiſa proportio. Eſt enim comparatio differentiæ cuiuſlibet antecedentis ſupra ſuum conſequens, ad ipſum conſequens. Exempli gratia,ſi 12 ad 4 eandem habeant rationem, quam 9 ad 3, & ſubinferamus: ergo 8 ad 4 ſe habent, ut 6 ad 3. excedunt enim 12 ipſa 4,per 8: & 9 ipſa 3, per 6. *Diuiſa proportio.*

Colligitur & euerſa ſiue reflexa proportio,quæ conuerſio rationis dicitur. Fit autem, cùm antecedẽtia ſuis cõparantur differentiis,quibus ſua excedunt conſequentia. Vt ſi rurſum *Euerſa proportio.*



12 ad 4 eandem habeãt rationẽ,quã 9 ad 3: erit ut 12 ad 8,ſic 9 ad 6.differũt enim 12 & 4,per 8:atq; 9 à 3,per 6.

In conuerſa igitur atque permutata proportione, tam antecedentes , quàm etiam conſequentes termini , permanent ſubſtantialiter iidem: in compoſita autem , & diuiſa , atque euerſa proportione minimè,ſed alterantur , tametſi nihil aſſumatur extrinſecum. His addunt æquam proportionem, quæ ex duobus quantitatum ordinibus , æquali multitudine diſtributis, & ſub eiſdem rationibus binatim ſumptis ordinatè uel inordinatè proportionatis naſcitur:cùm uidelicet in primo ordine prima ad ultimam ſe habet , ut prima ad ultimam in ſecundo,aut (ſi mauis)ſubtractis intermediis,extremæ quantitates ſub eadem ratione proportionales exiſtunt. *Notandum.* *Aequa proportio.*

Vtpote,ſi 9 ad 6 eandem habeant rationem,quam 12 ad 8, atque 6 ad 3 ,quam 8 ad 4, & ſubinferamus:ergo erit ut 9 ad 3, ſic 12 ad 4. Vel ſic,ſi fuerit ut 8 ad 4,ſic 6 ad 3, atq; ut 3 ad 2, ſic 12 ad 8 : erit rurſum ut 12 ad 4,ſic 6 ad 2. ut obiectæ numerorum indicant formulæ.

De additione, seu multiplicatione rationum adinuicem: atque earundem rationum diuisione, uel subtractione. Cap. 2.

1 POst rationum, atque proportionum pręmissam traditionem, consentaneum esse uidetur, ut de productione rationis, ex duabus quibusuis rationibus inuicem adiunctis & subtractis, seu multiplicatis & diuisis generatæ, pertractemus: Id enim haud parum iis uidetur conducere, qui circa harmonias, aliásque secretiores Mathematicarum uersantur excogitationes. *Notandum.* Idem est igitur (ne te longiori detineamus ambage) duas rationes inuicem addere, quod & unam per alteram multiplicare: ac unam ex altera subtrahere, quod illarum maiorem diuidere per reliquam: cùm additio per multiplicationem, subtractio autem per ipsam diuisionem in rationibus absoluatur.

2 *Vt duæ rationes, in unam rationem componantur.* Quantum igitur ad rationum spectat compositionẽ, duo sese offerunt inuestiganda: primum est, productæ seu cõsurgentis inde rationis denominator: secundũ autem, numeros colligere sub eadem generata ratione constitutos. Primum *Regula generales.* igitur (ut paucis expediamus) sic absolues. Duc unius rationis denominatorem, in denominatorem alterius: fiet enim generatæ, seu compositæ rationis denominator. Secundum porrò, in hunc modum obtinebis. Multiplica datarum rationum antecedentes numeros adinuicem, similiter & consequentes: Nam ex antecedentiũ multiplicatione, nascetur antecedens: ex consequentiũ autem multiplicatione, consequẽs eiusdẽ rationis, quæ ex ipsis duabus inuicem cõpositis generatur. *Notandum.* Hæc autẽ uelim intelligas, ubi ambæ rationes datæ, simul maioris, aut simul minoris fuerint inæqualitatis. Nã si una maioris, altera uerò minoris inæqualitatis extiterit: tunc ea ratio quæ à maiori denominatur quantitate, per reliquam diuidenda est: ut infra de subtractione rationũ exprimetur.

3 *Exemplũ in multiplicibus.* Demus in exemplũ triplam rationem, inter hos numeros 9/3, & duplam inter istos 4/2, cõsistentem. Duc igitur 3 denomina-

nominatorem triplæ, in 2 ipsius duplæ rationis denominatorẽ: fient 6. aio itaque, ex tripla & dupla ratione, confici sextuplam. Quod ex ipsis confirmatur numeris. Si ducantur enim 9 in 4, fient 36: & 3 in 2, fient 6. Atqui 36, ad 6 rationem habent sextuplã, qualẽ ex ipsis collegimus denominatorib9.

Tripla.	9—3
Dupla.	4—2
Sextupla.	36—6

Dentur rursum in exemplum duæ rationes superparticulares: utpote, sesqualtera quam habent 3 ad 2, & sesquitertia quæ est inter 4 & 3. Duces igitur $1\frac{1}{2}$ sesqualteræ rationis denominatorem, in $1\frac{1}{3}$ denominatorẽ sesquitertiæ, per doctrinam sexti capitis libri secundi: fient 2, à quibus dupla ratio denominatur. Pronunciabis igitur, ex sesqualtera & sesquitertia, generari duplã. Idem quoque ex ipsis datis colligitur numeris. Si multiplicaueris enim antecedentes adinuicem, utpote 3 in 4, fiẽt 12: & consequentes 2/3 pariter adinuicem prodibunt 6. Atqui 12, ad 6 rationem habent duplam. *Exemplum in superparticularibus.*

Sesqualtera.	3—2
Sesquitertia.	4—3
Dupla.	12—6

Cùm igitur consonantia quæ diapente uocatur, in sesqualtera ratione consistat, diatessaron autem in ratione sesquitertia: euidens relinquitur, cur præfatæ cõsonantiæ diapason efficiant, quam duplam appellant. *Corollarium notandum.* Addamus & exemplum in superpartientibus rationibus: sitque bipartiens tertias, addenda tripartienti quartas, hoc est, ratio quam obseruãt 5 ad 3, ei quæ est 7 ad 4. Denominator bipartientis tertias est $1\frac{2}{3}$, ipsius uerò tripartientis quartas $1\frac{3}{4}$: quæ inuicem multiplicata, reddũt 2 & $\frac{11}{12}$, à quibus dupla undecupartiẽs duodecimas nominatur. Ergo ex bipartiente tertias, & tripartiẽte quartas, conficitur ratio dupla undecupartiens duodecimas. Hanc quoque rationem, cõstituunt & ipsi dati numeri. Nam si antecedentes 5 & 7 inuicem multiplicaueris, prodibunt 35: ex cõsequentium autem multiplicatione, utpote 3 in 4, fiunt 12. Continent autem 35, ipsa 12 bis, unà cum $\frac{11}{12}$. *Exemplum in superpartientibus.*

Bipartiens tertias.	5—3
Tripartiens quartas.	7—4
Dupla undecupartiens duodecimas.	35—12

Reliquum est, unicum exemplum exhibere, ubi altera ra- *Notandum.*

tionum maioris, altera uerò minoris est inęqualitatis. Sit igitur subdupla, componenda cum sesqualtera: utpote ratio quam habet 1 ad 2, cum ratione 3 ad 2. Subdupla ratio à binario denominatur, nempe ab eodem numero quo & ipsa dupla: sesqualtera autem ab $1\frac{1}{2}$, quæ minora sunt 2. Diuidātur ergo 2 per $1\frac{1}{2}$, per septimum caput ipsius libri secundi, prodibunt $1\frac{1}{3}$: consurget igitur ex propositis rationibus, ratio subsesquitertia. nam diuidenda, minoris est inæqualitatis: & procreata ratio, sequitur in hac parte rationem ipsam diuidendam. Si per ipsos autem numeros hoc idem experiri iuuet: scribe 1/2 super 3/2, & duc 1 in 3, fient 3, ad læuam subnotanda: postea 2, in 2, fient 4, subnotanda dextrorsum. habent autem 3 ad 4, præfatam rationem subsesquitertiam.

Subdupla.	1—2
Sesqualtera.	3—2
Subsesquitertia.	3—4

Qualiter plures duabus, inuicem componantur.

4 Vbi denique plures duabus rationibus, inuicem componendæ proponentur: resultantem ex duabus primis compones cum ipsa tertia, & inde procreatam rationem cum succedenti quarta, & sic deinceps quantumlibet. Proponantur in exemplum hi numeri 4/3/2/3/1. Ex rationibus igitur 4 ad 3, & 3 ad 2, fit dupla: quæ diuisa per sequentem subsesqualteram 2 ad 3, restituit sesquitertiam: hæc autem ducta in triplam 3 ad 1, conficit demum quadruplam, quam habent 4 ad 1.

Exemplum.

Corollaria notanda.

Ex duabus itaque rationibus maioris inæqualitatis inuicem compositis, ratio itidem maioris inæqualitatis, & utraque maior generatur. Ex duabus consequenter minoris inæqualitatis rationibus, minoris inæqualitatis ratio, & utraque minor producitur. Ex una porrò maioris, & altera minoris inæqualitatis ratione: fit ratio talis, qualis est ea quæ à maiori denominatur numero. Ratio autem æqualitatis, cum maioris inæqualitatis ratione, eandem maioris inæqualitatis rationem producit: & minoris inæqualitatis ratione, cum ratione minoris inæqualitatis. Sola igitur

igitur æqualitatis ratio in ſeipſam ducta, rationem producit æqualitatis.

De ſubtractione, ſiue diuiſione rationum.

5 CVM AVTEM rationem à ratione ſubtrahere fuerit operæpretium, & relictam inde cognoſcere rationem: id facies (ut prædiximus) per uiam diuiſionis. Non omnem autem rationem, à qualibet indifferenter ſubtrahendam eſſe uelim intelligas: ſed minorem tantùm à maiori, ſiue utraque maioris, uel utraque minoris, aut una maioris & altera minoris fuerit inæqualitatis. Maiorem appellamus rationem, quæ à maiori: minorem autem, quæ à minori quantitate ſeu numero denominatur.

Regulæ generales.

6 Abſoluitur itaque præfata ſubtractio, ſiue diuiſio rationum, duobus modis: quemadmodum de earundem rationum compoſitione, nuper expreſsimus. In primis enim, diuidendo maioris rationis denominatorem, per denominatorem ipſius minoris: generabitur relictæ, ſeu procreatæ rationis denominator. Secundò, per numeros ſub datis rationibus conſtitutos: in hunc qui ſequitur modum. Conſtituantur ipſi numeri maioris & diuidendæ rationis, ſupra numeros ipſius minoris. Deinde multiplicetur antecedens diuidendæ rationis, per conſequentem numerum ipſius diuidentis: fiet enim ipſius relictæ, ſeu procreatæ rationis antecedens. Et per multiplicationem conſequentis eiuſdem rationis diuidendæ, per antecedentem ipſius diuidentis: naſcetur conſequens eiuſdem relictæ, ſiue procreatæ rationis. Conuenit igitur hic diuidendi modus, cum diuiſione fractionum uulgarium: quaſi prædictarum rationum antecedentes numeri diuidendam imitentur fractionem, conſequentes uerò reliquam.

Exemplum in multiplicibus.

7 Demus in primis exemplum in multiplicibus: ſitque ratio dupla, ex tripla ſubducenda. Diuides itaque 3 denominatorem triplæ, per 2 ipſius duplæ rationis denominatorem: fient $1\frac{1}{2}$, à quibus ſeſqualtera ratio denominatur. Procreabitur igitur ex hac diuiſione, ſeſqualtera. Sint rurſum numeri in tripla ratione conſtituti, 9/3: & in dupla,

4/2. Multiplicētur ergo 9 per 2, fient 18: & 3 in 4, fient 12. Habent autem 18, ad 12 rationem sesqualteram: qualem ex ipsis collegimus denominatoribus.

Tripla.	9	3
Dupla.	4	2
Sesqualtera.	18 —	12

Exemplum in superparticularibus. Rursum exponatur ratio superparticularis, à superparticulari similiter auferēda: utpote, sesquitertia, à sesqualtera. Diuides igitur 1 $\frac{1}{2}$ sesqualteræ denominatorē, per 1 $\frac{1}{3}$ denominatorē sesquitertiæ, per doctrinā septimi cap. antecedētis lib. sec. fiēt 1 $\frac{1}{8}$, unde sesquioctaua ratio denominatur. Relinquitur igitur ex proposita subtractione, ratio sesquioctaua. Proponātur cōsequenter numeri sub eisdē rationibus constituti: utpote, 3 ad 2 in sesqualtera, & 4 ad 3 in ratione sesquitertia. Duces igitur 3 in 3, fient 9: & 4 in 2, fient 8. Atqui 9, ad 8, promissam à denominatoribus sesquioctauam rationē obseruant.

Sesqualtera.	3	2
Sesquitertia.	4	3
Sesquioctaua.	9 —	8

Exemplum in superpartientibus. Addamus & in superpartiētibus unicum exemplū: sitque bipartiens tertias, à tripartiente quartas auferēda. Diuides itaque 1 $\frac{3}{4}$, per 1 $\frac{2}{3}$: nascentur 1 $\frac{1}{20}$, à quibus sesquiuigesima ratio denominatur. Hanc etiam prestabunt numeri, sub præfatis rationibus colligati: cuiusmodi sunt 7 ad 4, & 5 ad 3. Nam si multiplicaueris 7 per 3 fient 21: & 5 per 4, prodibūt 20. Et manifestum est, 21 ad 20, sesquiuigesimā obseruare rationē. Ex subtractione itaq; bipartientis tertias, à tripartiente quartas, relinquitur sesquiuigesima. Haud alienum habeto iudicium, de quibuscūque similibus & similiter propositis rationum subductionibus.

Tripartiēs quartas.	7	4
Bipartiens tertias.	5	3
Sesquiuigesima.	21—	20

Corollaria notanda. Ex diuisione igitur rationis maioris inæqualitatis, per rationem maioris, cùm dissimiles fuerint: nascetur ratio itidē maioris inæqualitatis, utraque minor. Idem pendenter censeto, de dissimilibus minoris inæqualitatis rationibus: fiet enim ratio minoris inæqualitatis, utraque pariter minor. At si ambæ rationes fuerint simul aut maioris, aut minoris inæqualitatis, & similes adinuicem, hoc est, si data ratio per seipsam diuidatur: prodibit ratio æqualitatis. Si demū una maioris,

ioris, & altera minoris inæqualitatis extiterit: procreabitur ratio, pendens in hac parte ab ipsa ratione diuidēda, quæ per maiorem uidelicet exprimitur numerum.

8 Quòd si rationem subtrahendam, alteri suprascripseris, & præmissam obseruaueris multiplicandi rationem, conuersa ratio producetur: nam primus numerus, minor erit secundo. Et isto modo procreata ratio, erit sola differentiæ ratio, qua minor superatur ab ipsa maiore: quoniā maiorem à minori subducere, uel minorem per maiorem diuidere rationem, est imposibile. Hoc autem ex subscriptis præmissorum exemplorum numeris deprehendere uel facilè licebit: quorum hæ sunt formulæ. *Notandum.*

Dupla. *Tripla.*	4 ╳ 2 9 ╳ 3	*Sesquitertia.* *Sesqualtera.*	4 ╳ 3 3 ╳ 2	*Bipartiens tertias.* *Tripartiens quartas.*	5 ╳ 3 7 ╳ 4
Subsesqualtera.	12 — 18	*Subsesquioctaua.*	8 — 9	*Subsesquiuigesima.*	20 — 21

Qualiter duobus numeris datis, tertius, aut medius proportionalis inueniatur. Cap. 3.

PRæstat consequenter, ad proportionales descendere regulas, quibus uniuersæ ferè tum mathematicæ, tum ciuiles pertractantur negotiationes.

1 A minimo itaq; terminorum continuè proportionalium exordiendo numero: si duobus numeris datis, tertiū oporteat in eadem ratione subiungere proportionalem, sic facito. Multiplicetur is numerus qui futurus est secūdus in seipsum, & productus inde numerus diuidatur per primum: nascetur enim ipse tertius & proportionalis numerus. *Duobus numeris datis, inuenire tertium proportionalem.*

Proponātur in exemplum hi numeri, 27 & 9: sitque operæpretium inuenire numerum tertium, ad quem 9, eandem obseruent rationem, quam 27 ad 9. Multiplicabis ergo 9 per sese, fiet 81: quæ diuides per 27, prodibunt 3. Tantus est ipse tertius & proportionalis numerus: nam 27, ad 9 eandem habent rationem, quam 9 ad 3, utpote triplam. Quòd si multiplicētur 27 per seipsa, fient 729: quæ diuisa per 9, dant pro quoto numero 81. Erit itaq; *Exemplum.*

numerus 81, primus trium proportionalium numerorum, eisdem numeris datis anteponendus: nam 81 ad 27 eandem rationem obseruant, quam idem numerus 27 ad 9.

2 Cùm autem duobus oblatis numeris, medium proportionalem operæpretium fuerit inuenire numerum: colliges illũ hac arte. Multiplicabis ipsos datos numeros adinuicē: & producti numeri quadratã supputabis radicem: nam ea erit numerus medius, ad quem primus eãdem habebit rationē, quã ipse medius ad ultimũ. Dentur in exemplũ hi duo numeri 27/3, inter quos oporteat mediũ constituere proportionalē. Duces igitur 27 in 3, fient 81: quorum radix quadrata est 9. Tantus est ipse medius, & proportionalis numerus: habent enim 27 ad 9 eandem rationem, quam ipsa 9 ad 3.

Duobus oblatis numeris, medium proportionalem supputare.

Exemplum.

3 Pendet autem eiuscemodi operandi ratio, ex prima parte uigesimæ propositionis septimi libri elementorum Euclidis: quæ sic habet. Si tres numeri cõtinuè proportionales fuerint, qui sub extremis inuicem multiplicatis gignitur numerus, ęqualis est ei qui à medio in seipsum ducto procreatur. Hinc fit, ut is qui ex medio procreatur numero, si per primum diuidatur, nascatur tertius: aut si idem numerus diuidatur per tertium, generetur ipse primus. Haud dissimiliter, eius numeri qui sub extremis inuicem multiplicatis resultat quadrata radix, ipsum medium proportionalem exprimit numerum. Cùm enim duo numeri inuicem multiplicantur, si productus inde numerus per alterum eorum diuidatur: procreatur de necessitate reliquus. Quod & in sequenti quatuor proportionalium numerorum regula, haud dissimiliter obseruatur.

Prædictorum ratio mathematica.

Notandum.

De aurea quatuor proportionalium numerorum regula, qua tribus datis, quartus innotescit numerus: déq; illius usu multiplici. Caput 4.

1 TAnta est uis, adeóq; indissolubilis fraternitas ipsorum quatuor numerorum inuicem proportionaliũ, & tam uariæ ex illis emergunt rationũ proportiones: ut omnia

De potestate 4. numerorũ proportionalium.

ferè

ferè cum ciuilia, tum mathematica negotia, eorundem numerorum proportionalium tractetur ac dissoluantur officio. Huius itaque regulæ scopus, est datis quatuor numeris inuicem proportionalibus, si quispiam illorum ignoretur, ipsum, trium cognitorum adminiculo, reddere notum.

Finis regulæ 4 proportio. numerorum.

Ostensum est itaque decimanona propositione septimi elementorū Euclidis, si quatuor numeri proportionales fuerint: qui ex primo & quarto fit numerus, æquus est ei qui ex secundo & tertio. Hinc fit, ut ignoto altero extremorū, multiplicandi sint intermedij numeri adinuicem, & productus inde numerus, per notum extremum diuidendus: uel altero intermediorum ignoto, unus extremorum ducatur in reliquum, & productus inde numerus per notum intermedium diuidatur: ut ipse medius, uel extremus, & ignotus procreetur numerus. Cùm enim quispiam numerus per aliū multiplicatur: fit numerus, qui diuisus per alterū multiplicantiū, producit de necessitate reliquum. Multiplicātur ergo extremi numeri, in suffragium intermediorum: quia tantum producunt numerum, quantū & ipsi intermedij: atq; è diuerso.

Origo eiusdē regulæ.

Hypothesis notanda.

Debent nihilominus ipsi numeri, in usum practicum eo modo reuocari, ut ignotus & optatus numerus quartum possideat ordinem: ac ipse primus, re & nomine conueniat cum ipso tertio, secundus autem cum acquisito quarto. Id enim requirunt proponendæ, ac per ipsam proportionalium regulam dissoluendæ quæstiones.

Conditio regulæ animaduertenda.

3 Dentur in huiusce regulæ generalē expressionem, hi numeri 15/10/12/8, sub ratione sesqualtera discōtinuè proportionati: sicut uidelicet 15 ad 10, sic 12 ad 8. Et supponatur in primis ignorari numerus quartus, utpote 8. Multiplicabis igitur 12 per 10, fient 120: quæ diuisa per 15, reddunt 8, quantus est ipse quartus & proportionalis numerus. At si primus desideretur numerus, scilicet 15: illū rediges in quartum limitem. Cùm enim sit ut 15 ad 10, sic 12 ad 8: erit à cōuersa ratione, per corollariū quartæ propositionis quinti elementorum Euclidis, ut 8 ad 12, sic 10 ad 15. Ducantur ergo

Exemplū generale ipsius regulæ.

Quando nu. quartus ignoratur.

Cùm primus ignoratur nu.

10 in 12, fient rursum 120: quæ diuisa per 8, reddunt ipsa 15.

Quando secũdus nu. ignoratur. Supponatur consequenter ignorari secũdus numerus, utpote 10. Antepones igitur, duos ultimos numeros ipsi primo, secundámue rationem ipsi primæ: in hunc modum, 12/8/15. Cùm enim sit, ut 15 ad 10, sic 12 ad 8: erit igitur ut 12 ad 8, sic 15 ad 10. Multiplicabis ergo 15 per 8, consurgẽt iterum 120: quæ diuides per 12, prodibunt 10. *Dum tertius ignoratur numerus.* Quòd si tertius forsitan ignotus fuerit numerus, utpote 12: cõuertes rursum antecedentes numeros in cõsequentes, & è diuerso. Erit igitur ut 10 ad 15, sic 8 ad 12. Multiplicentur itaque 8 per 15, consurget præfatus numerus 120: qui si diuidatur per 10, restituet pro quoto numero 12. Haud aliter intelligendum, ac faciendum uelim intelligas, de quibuscunque similibus, ac similiter propositis numeris.

4 *Documenta specialia in praxi regulæ seruanda.* Vbi autem absoluta diuisione ipsius producti per primum & diuisorem numerum, aliquis remãserit numerus ipso diuisore minor: is in subtiliorem resoluendus est numerũ, pro ratione ac qualitate siue specie unius singularis eiusdem primi aut tertij numeri, atq; productus inde numerus per ipsum primum iterum diuidendus: idque toties continuandũ, quatenus ex ipsa diuisione nihil tãdem relinquatur. Præterea, si primus trium numerorũ solis integris, tertius uerò fractis cõstiterit numeris, aut è diuerso: debes prius, quàm per ipsam opereris regulam, alterum prædictorum numerorum in alterius reuocare denominationem. Oportet enim primũ numerum, cùm ipso tertio re ac nomine seu qualitate conuenire. Quemadmodum ex succedentibus exemplis particularibus, uidebis sæpius obseruatum. *Exceptio notanda.* Excipimus tamen fractiones astronomicas, sexagenaria ratione distributas: quæ per tabulam proportionalem, sub uariis speciebus (uti proximo libro docuimus) absq; resolutione tractari uel facilè possunt.

Vt probanda regulæ ueritas. Cùm autem periculum facere libuerit, an optatum per ipsam regulam consecutus fueris numerum: id ex præallegata decimanona septimi elementorum Euclidis, absoluere uel facilè licebit. Si multiplicaueris enim primum numerum in ipsum

ipſum quartum, idem procreabitur numerus, qui ex ductu ſecundi in tertium generatur, ſi debitè ſupputaueris: Si autem præfati numeri fuerint inæquales, peccatum eſt, & calculus propterea reiterandus.

Exempla, ſeu quæſtiones particulares, uſum regulæ clarificantes.

5 VT AVTEM ipſius regulæ inexplicabilis commoditas, & ſemper admiranda clareſcat amplitudo, & in quarūcunque rerum propoſitarum, ſub rationem atque proportionem cadentium, adcommodetur uſum: ciuiles aliquot, atq; mathematicas iuuat ſuperaddere quęſtiones, ac ipſas in aliarum exemplū per eandem proportionaliū diſſoluere regulā.

1 In primis igitur, ſi quis emerit (uerbi gratia) quatuor ulnas panni, pretio 15 librarum, & optauerit ſcire, quanti ementur ulnæ 25 eiuſdem panni: proponuntur tunc numeri quatuor inuicem proportionales, quorum quartus & ignotus eſt numerus pretij eiuſdem rei emendæ, ad quem neceſſum eſt 25 eandem habere rationem, quam ipſa 4 ad 15. Multiplicentur ergo 25 per 15, fient 375: quæ diuidenda ſunt per 4, prodibunt franci 93, relictis tribus francis, qui non poſſunt diuidi per 4. reſoluantur itaque in ſolidos, ſiue duodenos turonenſes, per ſextum caput libri primi, reſultabūt duodeni 60: quos rurſum diuidere oportet per ipſa 4, producentur 15. Optatus itaque numerus quartus, continebit francos 93, & duodenos 15: Tanti igitur ementur, ipſæ 25 ulnæ eiuſdem panni propoſiti.

De agnoſcendo pretio rei emendæ, quæ ſub menſuram cadit.

2 Secundò, ſi libræ 100 olei oliuarum ualeant francos 7 & $\frac{1}{4}$, & iuuet agnoſcere quanti ementur eiuſdē olei libræ 2350: reſolues in primis francos 7 & $\frac{1}{4}$, ad duodenos turonenſes, fient duodeni 145. Deinde iuxta regulæ tenorem multiplicabis 2350, pēr 145, conſurgent 340750: quæ diuides per 100, prouenient duodeni 3407, relictis 50, qui non poſſunt diuidi per 100. hos itaque relictos 50 duodenos, reſolues in turonos, iuxta traditionem ipſius ſexti capitis antecedentis libri primi, fient turoni 600: quos diuides per 100, naſcen-

De eodē pretio dignoſcendo in rebus pondere diſtributis.

tur 6. Erit igitur numerus pretij desideratus, duodenorum 3407, & turonorum 6: quæ reducuntur ad libras turonenses 170, & duodenos 7, unà cum eisdem 6 turonis. Tanti ergo ementur, ipsæ 2350 libræ olei supradicti.

3 *De lucro rei emptæ, sub data ratione constituendo.* Tertiò, si pannus sericus emptus fuerit francis 180, & uolueris scire quanti oporteat ipsum uendere, ut lucreris francos 16 pro quolibet centenario francorum numero: subsumendi sunt tūc quatuor proportionales numeri, iuxta ipsius quæstionis propositionem. Tu enim uis 100, uerti in 116: dic igitur, si 100 dent 116, quantum dabunt 180? Multiplicabis itaque 180, per 116, fient 20880: quæ diuisa per 100, dant pro quoto numero francos 208, & duodenos 16. Tantundem igitur uendas oportet ipsum pānum sericum, si ad propositam lucri uolueris deuenire rationem.

Notandum. Quòd si eandem summam 208 francorum & 16 duodenorum, diuiseris per numerum ulnarum eiusdem panni: nascetur pretium cuiuslibet ulnæ, ad præfatam lucri rationem seorsum distribuendæ. Vt supposito quòd idem pannus contineat ulnas 32: diuides 208 francos & 16 duodenos per 32, prouenient franci 6, duodeni 10, unà cum 6 turonis pro qualibet ulna. Haud aliter facito de quibuscunque similibus, & similiter propositis quæstionibus.

4 *Ex uenditione & lucro dato, pretium emptionis elicere.* Quartò, si è diuerso quæstio forsitan proponatur, utpote, est pannus sericus uenundatus pretio 208 francorū, & duodenorum 16, & lucratum est ad rationem 16 pro 100, & quæratur quanti fuerit emptus idem pannus: cùm 116 prouenerint ex 100, propones in hunc modum numeros ipsos proportionales. Si 116 franci, proueniant ex 100: ex quo francorum numero, prodierunt franci 208, unà cum 16 duodenis? Deinde multiplicabis 208 francos & 16 duodenos per 100, consurgent franci 20880: quos diuides per 116, nascentur franci 180. Tanti fuerat emptus idem pannus sericus. Hinc si præfatos 180 francos per numerum ulnarum eiusdem panni diuiseris: singulare pretium cuiuslibet ulnæ seorsum obtinebis.

Quintò,

5 Quintò, poteſt & ipſa quæſtio in hunc proponi modum. Eſt pannus (uerbi gratia) ſericus emptus pretio 180 francorum: ſi is uenundetur francis 208, unà cum 16 duodenis, ad quam rationem pro centena lucrum ipſum perducetur. Proponantur ſic tres primi numeri proportionales. Si 180 franci ſummæ principalis, dent francos 208 unà cum 16 duodenis principalis & lucri, quantum principalis & lucri dabũt 100. Duc igitur francos 208 cum 16 duodenis in 100, producẽtur franci 20880: quos diuide per 180, fiẽt pro quoto numero 116: à quibus tolle 100, relinquẽtur 16. Ipſum ergo lucrũ, erit ad rationem 16, pro centenario francorum numero. *Ex pretio emptionis & uẽditionis, lucri rationem pro centena colligere.*

6 Sextò, cùm medimnus tritici, uænit (exempli gratia) duodenis 34, & confectus ex illo panis 6 denariorũ turonen. obſeruat põdus 12 unciarum: ſi idem medimnus tritici, uenerit ad pretium 28 duodenorum, quæritur quot unciarũ formandus erit idem panis 6 denariorũ? In hac & ſimilibus quæſtionibus, locandus eſt numerus ſecũdi ualoris ſiue pretij in primo ordine: datus uerò ponderis numerus in ſecundo: primi deniq; ualoris ſiue pretij numerus in tertio: quæſtionẽ ipſam, in hunc qui ſequitur modum proponendo. quot unciæ prodibunt ex 28, ſi 12 unciæ proueniant ex 34. hoc autẽ ideò fit, quoniam minuto pretio frumenti augmentatur pondus ipſius panis: & è conuerſo. Duc itaq; 34 in 12, fient 408: quæ diuide per 28, prodibunt 14 & $\frac{4}{7}$. Totidem unciarum formandus eſt panis, ubi medimnus tritici deſcenderit ad pretiũ 28 duodenorum. Haud diſsimilem operãdi rationem obſeruabis, in minuendo pondere ipſius panis, ubi pretium eiuſdem menſuræ frumentariæ fuerit augmentatum. *Vt proportionanda panis pondera, pro ratione pretij frumentarij.*

7 Septimò, deſcendendum eſt ad eas quæſtiones, quæ per liberam numerorum ſoluuntur poſitionem, hoc eſt, per ſubſumptionem duorum numerorum proportionalium, cum propoſito numero tertio. Si quis igitur optauerit ſcire, à quo numero deducta tertia parte relinquuntur 50: is in hunc modum dignoſcetur. Supponatur aliquis numerus habens tertiam partem, utpote 15, cuius tertia pars eſt 5, & reſiduum *Data parte quota, & reſiduo, quæſitum inuenire numerum.*

(eadem tertia parte dēpta) eſt 10. Dic igitur, ſi 10 relinquantur ex 15, ex quo numero relinquentur 50? Multiplicētur itaque 50 per 15, fient 750: quæ diuiſa per 10, dant pro quoto numero 75. Tantus eſt numerus, à quo dempta tertia parte (quæ eſt 25) relinquuntur 50.

8 Octauò, eſto numerus, cuius $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ cum $\frac{1}{4}$ ſimul iuncta, conficiunt 60: quæritur quantus eſt ipſe numerus? Supponatur aliquis numerus habens $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, qualis eſt numerus 12, cuius dimidium eſt 6, tertium uerò 4, & quartum 3, quæ ſimul iuncta conficiunt 13: & in hunc modum quæſtio proponatur. Si 13 dent 12, quem numerum dabunt 60? Multiplicētur ergo 60 per 12, fient 720: quæ diuide per 13, producentur 55, unà cum $\frac{5}{13}$. Tantus eſt numerus optatus. Nam dimidium ipſorum 55 $\frac{5}{13}$, eſt 27 $\frac{9}{13}$, tertium uerò 18 $\frac{6}{13}$, & quartum 13 $\frac{11}{13}$: quæ ſimul iuncta, conficiunt 60.

Ex quotarum ſumma, numerũ, cuius ſunt quotæ partes, colligere.

9 Nonò, oſtendendum eſt, qualiter ipſa regula ſocietatum quæſtiones non minus facilè diſſoluat. Supponantur itaque tres homines inuicem conueniſſe, quorum primus expoſuerit francos 350, ſecundus 400, tertius uerò 450: Et facta rerum emptarum uenditione, ſuperlucrati ſint 1000 francos. Quæritur quanta debet eſſe pars lucri competēs unicuique, pro ratione pecuniæ expoſitæ? In hac & ſimilibus quæſtionibus, adgregatum ex ſummis particularibus ſe habet ad totũ lucrum, ut quælibet ſumma particularis ad partē lucri proportionalem. Componãtur igitur 350/400/450, fient 1200: quæ facies primum & diuiſorē numerũ, ſecundũ uerò 1000, tertium autem numerũ, quamlibet ſummam particularem. Duc igitur 1000 in 350, poſtea in 400, tandem in 450: & productos inde numeros diuide per 1200. Offendes enim competere ipſi primo, francos 291, duodenos 13, & turonos 4: ſecundo autem, francos 333, duodenos 6, & turonos 8: tertio denique, francos 375 præciſè: quæ ſimul iuncta, conficiunt præfatos 1000 francos ipſius lucri propoſiti.

Pro ratione expoſitarum pecuniarum, lucri partem in ſocietatibus proportionare

10 Decimò, exponatur ſumma 150 francorum, diſtribuenda tribus hominibus: ea tamen ratione, ut primus ſit habiturus dimi-

De ſumma denariorũ di-

uersis diuersimodè distribuenda.

dimidiam partem, ſecundus tertiam, tertius uerò quartam. Quæritur, quãta erit unaquæque prædictarum partium? Inueniatur rurſum numerus habens dimidiam, & tertiam, & quartam partem: utpote 12, cuius $\frac{1}{2}$ eſt 6, tertiũ 4, & quartum 3: quæ ſimul iuncta, conficiunt 13. Deinde ac ſi primus expoſuerit 6, ſecũdus 4, & tertius 3: ſic proponito quæſtionem. Si 13 dent 6: uel 4, aut 3, quantum dabunt 150? Et factis iuxta regulæ tenorem multiplicationibus, atque diuiſionibus: offendes partem ipſius primi eſſe francorum 69, & $\frac{3}{13}$, ſecundi 46 & $\frac{2}{13}$, tertij uero 34, unà cum $\frac{8}{13}$: quæ ſimul iuncta, conficiunt præfatos 150 francos.

De proportionando lucro, pro temporis & pecuniæ diuerſitate.

11 Vndecimò, ſint rurſum tres homines, ſub hac conditione conuenientes, ut primus expoſuerit francos 350 per menſes 12, ſecundus francos 400, per menſes 10, tertius uerò francos 450, per menſes 8: & lucrati ſint francos 1000. Quæritur quantum debetur unicuique, pro ratione temporis & ipſius expoſitæ pecuniæ. Multiplicetur quælibet ſumma pecuniæ per ſuum tempus: utpote, 350 per 12, fient 4200: deinde 400 per 10, conſurgent 4000: tandem 450 per 8, producentur 3600. Hæc autẽ ſimul iuncta, conficiunt 11800, ex ipſis pecuniarum ſummis, & datis temporibus reſultantia. Hunc itaque numerum 11800, fac primum proportionalem, & 1000, francos lucri ſecundum: in tertio autem ordine ponito ſingulos numeros ex ſumma qualibet francorum & ſuo tempore reſultantes, & quæſtio ipſa in hunc proponatur modum. Si 11800 dent 1000, quantum dabunt 4200, dein 4000, tandem 3600? Et factis ut ipſa poſtulat regula, & proximo exemplo nono traditum eſt, multiplicationibus, atque diuiſionibus: offendes deberi primo francos 355 & $\frac{55}{59}$, ſecundo francos 338 & $\frac{58}{59}$, tertio uerò francos 305, & $\frac{5}{59}$ unius franci. Hæc autem omnia ſimul iuncta, conficiunt præfatos 1000 francos lucri propoſiti.

De mathematicis quæſtion.

12 Duodecimò (ut ad mathematica deſcendamus exempla) Si planeta, proprio motu, pertranſeat de circulo Zodiaco in tribus diebus 5 gradus (qualium totus circulus eſt 360) quot

ſimiles gradus perambulabit in diebus 60? Multiplicabis igitur 60 per 5, fient 300: quæ diuides per 3, prodibũt 100. Tot igitur gradus idem planeta pertranſibit intra dies 60. Haud alienum habeto iudicium de quibuſcunque ſimilibus, & ſimiliter propoſitis quæſtionibus mathematicis. Omnes ſiquidem geometrici uel aſtronomici canones, huius regulæ abſoluuntur beneficio. Sẽper enim occurrunt duo triangula ſimilia, hoc eſt, æquiangula, habentiáque circum ęquales angulos latera, & proinde 4 inuicem proportionalia: quorum tria ſupponuntur nota, & illorum adminiculo quartum innoteſcit. Vt ex ea parte geometriæ colligitur, quæ longitudinum dimenſiones per radij uiſualis obſeruationem cum inſtrumentis oſtendit. Idem ſimiliter & in ſinuum rectorum, hoc eſt, rectarum in circuli quadrante ſubtenſarum uidetur accidere demonſtrationibus. Nam ſæpiùs 4 ſeſe offerunt ſinus recti, inuicem proportionales: quorum tres itidem noti ſupponuntur, ipſum quartum iuxta regulę tenorem manifeſtantes. Innumeræ itaque ac penè incredibiles, cùm ciuiles, tum mathematicæ quæſtiones, per eãdem 4 proportionaliũ numerorum regulam indifferenter diſſoluentur: dummodò eorundem 4 proportionalium numerorum ordinem debitè noueris obſeruare, aut illos (ſi expediat) congruè ſupponere. Quemadmodũ ex præcedẽtibus abundè clareſcit exemplis.

Nota de canonibus geometricis & aſtronomicis.

Qualiter eadẽ obſeruetur regula, in proportionandis tabularum aſtronomicarũ numeris, ſiue numerorum differentiis, per ipſam tabulam proportionalem.

IVVAT demum uires huius regulæ, in proportionandis tabularum aſtronomicarum numeris, ſiue differentiis, ſexagenaria ratione diſtributis, per ipſam tabulam proportionalem demonſtrare: qua opitulante, numerus quartus proportionalis mira facilitate colligitur.

Duplex tabularum ingreſſus.

Cõtingit itaq; eiuſmodi tabulas aſtronomicas, quẽadmodũ & ipſam tabulã proportionalẽ, lateraliter uel areatim ingredi: & neutro plerunq; congreſſu, propoſiti offendũtur numeri. Quid autẽ ſit lateraliter, uel areatim intrare tabulã, numero

mero 5, quarti capitis, antecedẽtis libri tertij diffinitum eſt.

13 Cùm igitur lateraliter intratur tabula, & præciſi non occurrunt laterales numeri, quærenda eſt pars proportionalis differentiæ arealium numerorũ, inter quos optatus cadit numerus, iuxta rationem minutorũ partibus integris adiacentium, ad minuta 60: tuncq; primus numerus eſt 60, ſecũdus prædictorum minutorum numerus, tertius uerò ipſa numerorum arealium differentia, quorũ unus reſpondet partibus integris proximè minoribus, alter uerò proxime maioribus ipſius numeri dati. Hæc igitur pars proportionalis, per ſolum ingreſſum lateralem in ipſam tabulã proportionalem, cum ipſa differentia & minutis datis, illico manifeſtatur: abſoluendo ſcilicet multiplicationem ſecũdi numeri in tertiũ, uel è diuerſo, iuxta doctrinam numeri 6 eiuſdem quarti capitis ipſius libri tertij, abſq; diuiſione producti per 60: utpote, quæ per ipſius tabulæ conſtructionem ſuppletur. *Regula generalis, pro ingreſſu laterali.*

14 Sit exempli gratia, arealis differentia ſecundorum 24: de qua ſumenda ſit pars proportionalis in ea ratione, qua ſe habent 60 minuta ad minuta 55. Sumptis itaque 55 in læuo ſextæ faciei latere, & ipſis 24 in latere ſupremo: offendes ad communem angulum 22/0, hoc eſt, ſecunda 22. Ducuntur enim minuta in ſecunda, & fiunt tertia: quæ diuiſa per minuta: reddunt ſecunda. Se habent igitur 22 ſecunda, ad minuta 55: ueluti ſecunda 24, ad minuta 60. *Exemplum.*

Eſto rurſum arealis differẽtia ſecundorum 20, tertiorum 30: de qua ſit operæpretium habere partem proportionalem in ea ratione, quã obſeruant minuta 35, ad minuta 60. Sumptis ergo 35 in latere ſupremo, atq; 20, & 30 in læuo ſeptimæ faciei latere: occurrent ad cõmunem angulũ è regione quidẽ ipſorum 20, ſecũda 11, tertia 40: ipſorum autem 30, tertia 17, quarta 30. Quæ debito, & ſæpius expreſſo more coniuncta, efficiũt ſecũda 11, tertia 57, & quarta 30. *Aliud exemplum.*

Secunda.	Tertia.	Quarta.
11	40	
	17	30
11/	57/	30

Tãta eſt pars proportionalis, ſiue quartus numerus optatus. Cęteras porrò introitualium numerorũ differentias, ex eodẽ capite quarto præcedentis libri tertij (in quo de eiuscemodi numerorũ agitur multiplicatione) colligendas remittimus.

15 *Regula generalis pro ingressu areali.* CVM porrò areatim intratur aliqua tabula, & præcisi in area non sese offerunt numeri: accipitur tunc pars proportionalis numeri 60 (qui est differentia duorũ lateralium numerorum immediatè succedentiũ, & minuta unius gradus, aut unius minuti secũda repræsentat) in ea quidem ratione, qua se habet differentia ipsius oblati numeri, & numeri proximè minoris, ad differẽtiam eiusdem proximè minoris, atq; proximè maioris numeri arealis, inter quos propositus coincidit numerus. Primus itaq; numerus, est ipsa maior differẽtia: secundus, differentia minor (quę est pars ipsius maioris) tertius uerò, ipse numerus 60. Ea ergo pars proportionalis, siue numerus quartus, per solum arealem ingressum in eandẽ tabulam proportionalẽ, cum duobus primis numeris obtinetur: diuidendo scilicet numerum secundum per primum, absque eiusdem secundi multiplicatione per tertium, utpote, quæ sub ipsius tabulæ constructionem comprehenditur.

16 *Exemplum.* Esto, uerbi gratia, arealis differẽtia maior, minutorũ 45 minor autem minutorum 12: sitq; propositum accipere partem proportionalem de 60 minutis lateralibus, in ea quidem ratione, qua se habent ipsa 12 ad 45. Acceptis igitur 45 in frontispicio nonæ faciei ipsius tabulæ proportionalis: perquirito 12 inter areales numeros, sub ipso quidem numero 45. Quibus tandem in hunc modum sese offerentibus 12.0: occurrent tibi ad sinistrum latus 16, quæ minuta dicentur, eandem habentia rationem ad 60, quam 12 ad 45. *Aliud exemplum.* Sit rursum operæpretium, accipere partem proportionalem de præfatis 60 minutis, in ea ratione, qua se habent 15 minuta & 24 secunda, ad minuta 28. Sumptis itaq;, iuxta doctrinam numeri 4, quinti capitis antecedẽtis libri tertij, 28 in latere supremo sextæ faciei eiusdẽ tabulæ proportionalis: sub ipsis 28 rectissimè descendendo, offendes tandem 15,24 præcisè: à quibus si læuorsum directè progrediẽdo in laterales perueneris numeros: occurrent illic minuta 33, quæ eandẽ rationem obseruant ad

uant ad 60,quã minuta 15,& 24 ſecunda,ad ipſa 28 minuta.

Quòd ſi plures in diuiſore concurrerint fractionũ ſpecies, uel ipſæ diuidendæ fractiones in area tabulæ præciſè non reperiãtur: obſeruabis ea documẽta ad huiuſcemodi fractionũ diuiſionem ſpectantia, quæ præfato numero 4, ipſius quarti capitis præcedentis libri tertij, ſigillatim annotauimus. *Notandum.*

Qualiter duobus numeris inæqualibus datis, duo intermedij reperiantur numeri, ſub eadem ratione continuè proportionales. Cap. 5.

1 NON importunum tandem, uel inutile duximus, hoc loco ſummatim perſtringere, qua ratione duobus numeris inæqualibus datis, duo medij numeri ſub eadẽ ratione continuè proportionales inueniãtur: Tametſi primo librorum noſtrorum, quos de rebus mathematicis hactenus deſideratis conſcripſimus, de huiuſmodi numeris, atq; lineis proportionalibus, ampliſſimè tractauerimus: Vtpote ſine quibus figurarũ tam planarum quàm etiã ſolidarũ augmentationes atq; diminutiones, ſub quauis ratione data propoſitas, earundémque figurarum perutiles tranſmutationes, facere eſt impoſsibile: quemadmodũ ex præfatis libris, & noſtra Geometriæ praxi, deprehendere uel facile poteris. *Propoſitæ regulæ miranda utilitas.*

2 Oblatis igitur duobus quibuſcunque numeris inæqualibus, inter quos operæpretiũ ſit duos medios inuenire numeros, ſub eadem ratione continuè proportionales: ſecũdum in primis, hac arte colligito numerũ. Duc unum datorum numerorum in reliquum, & productum inde numerum duc rurſum in eum prædictorum numerorum quem uis efficere primum, conſurgentis inde numeri cubicam extrahito radicem: nam ea erit optatus numerus ſecũdus. Quòd ſi præfatũ numerum, ex eorundem oblatorum numerorum multiplicatione procreatum, in reliquum numerum, hoc eſt, ultimũ multiplicaueris, & producti cubicam itidem acceperis radicem: ea erit tertius numerus proportionalis. Erit igitur ut primus numerus ad ſecundum: ſic idem ſecundus ad ipſum *Regulæ ſumma.*

T

Notandum. tertium, atque idem tertius ad numerum quartum. Verùm ubi ex supradictis multiplicationibus procreati numeri non fuerint cubi, ueras illorum radices inuenire est impossibile: eas tamen, per secundam partem octaui capitis antecedentis libri primi, adeò præcisas obtinere licebit, ut à ueris & surdis radicibus (etiam in quemcunque reuocentur usum) differre nullo modo uideantur.

3 *Exemplum.* Dentur in exemplum hi duo numeri, 81, 3: inter quos expediat duos inuenire numeros, sub eadem ratione continuè proportionales. Multiplicabis igitur 81 per 3, fient 243: quæ rursum duces in 81, consurgent 19683. quorum radix cubica est 27: tantus est secũdus numerus proportionalis. Quòd si multiplicaueris eundem numerum 243 per 3, fient 729: quorum radix cubica est 9, tantus est numerus tertius: nam ipsi numeri 81/27/9/3, sub ratione tripla continuè proportionantur. *Notandum.* Poteris & obtento secundo numero, inuenire tertium: uel ipso tertio supputato colligere secũdum, per antecedentis primi capitis traditionem. Si enim multiplicaueris 27 per 3, fient 81: quorum radix quadrata est 9. Aut si duxeris 81 in 9, producentur 729: quorum radix quadrata est 27. Haud aliter facito de quibuscunque similibus.

4 *Aliud exemplum.* Dentur rursum in exemplum hi duo numeri 72, 21 $\frac{1}{3}$. Multiplicabis ergo 72 per 21 $\frac{1}{3}$, fient 1536: quæ rursum duces in 72, consurgent 110592: quorum radix cubica est 48: tantus est secundus & proportionalis numerus. Quòd si eundem numerum 48 multiplicaueris per 21 $\frac{1}{3}$, fiẽt 1024: quorũ radix quadrata est 32, tantus est ipse numerus tertius.

Notandum. Ex his autem 4 numeris continuè proportionalibus, uariæ ac non inutiles eliciuntur proportionum diuersitates: Quas tum ex supradictis numero 6, antecedentis primi capitis huius libri, & ex libro quinto elementorum Euclidis (in quo de proportionibus uniuersaliter pertractatur) tum ex præfato uolumine nostro De rebus mathematicis hactenus desideratis, colligendas, data remittamus opera.

De regula

De regula sex quantitatum inuicem proportionalium, eiúsque differentiis, & usu multiplici. Cap. 6.

1 DEMONSTRAVIT Ptolemæus, capite duodecimo libri primi suæ magnæ constructionis (quam uocant Almagestum) & nos similiter ex duarum rectarum inter datas extremas continuè proportionalium, collegimus demonstratione (quas multis modis, etiã mathematice inuenire docuimus) dabiles esse sex quantitates sic adinuicem proportionatas, ut ratio primæ ad secundam componatur ex rationibus tertiæ ad sequentem quartam, & ipsius quintæ ad sextam. Hinc orta est illa sex quantitatum proportionalium regula, qua nulla præstantior inuenitur ad cælestium motuum, aliarúmque rerum secretarum inuestigationem: & proinde quæ ad ipsius magnæ constructionis intelligentiam, adeò uideatur esse necessaria. In cuius regulæ fundamentum, subscriptos, & quàm minimos potuimus in datis rationibus, tibi selegimus numeros; utpote 1/2/3/4/6/9, iuxta ipsius regulæ tenorem inuicem proportionatos. Ratio enim 1 ad 2, quæ est subdupla, constat ex ratione 3 ad 4, quæ est subsesquitertia, & subsesqualtera ratione ipsorum 6 ad 9. Vti subiecta compositionis earundem rationum indicat formula, iuxta præcedentis secundi capitis traditionem conscripta: fit enim ratio 18 ad 36, quæ eadem est rationi ipsius 1 ad 2.

Ptolemæus.

De origine ac utilitate regulæ 6 quantitatum.

Exẽplares numeri iuxta regulam inuicẽ proportionati.

Subsesquitertia.	3—4
Subsesqualtera.	6—9
Subdupla, ut 1 ad 2.	18—36

2 Ex hac autem primaria & ueluti radicali eiusdem rationis compositione, 17 suboriũtur rationum compositiones, siue compositionũ ordines, inter eosdem sex numeros 1/2/3/4/6/9/ pendenter accidentes: qui unà cum ipso primo & radicali, sunt numero 18. Quos omnes sub hac succedenti perstrinximus tabulæ contextura.

17 rationum compositiones, ex prima suborta.

Summaria tabulæ dilucidatio.

In prima itaq; & læua ipsius tabulæ columna, primi locantur numeri, ad numeros secūdæ columnæ sigillatim comparandi: quorum ratio constat ex ratione numerorum tertiæ columnæ ad numeros quartæ, & ratione numerorum succedētis quintæ colūnæ ad numeros ipsius sextę. Hinc facilè liquet, qui numeri inter eosdem 6 proportionales, ipsius primi aut secundi, quíue tertij & quarti, seu quinti demū & sexti fungantur officio. Cæterę autē rationes inter eosdē accidentes numeros (quę sunt tantūmodò sex, utpote primi ad quartū uel sextū, secundi ad tertium uel quintum, atq; tertij ad eundem quintum, & ipsius tandem quarti ad sextum) ex cæterorum numerorū rationibus nullo modo componuntur.

TABVLA 18 MODORVM, *quibus inter præfatos 6 numeros, ratio duorum primorum, constat ex rationibus reliquorum quatuor.*

Modi compositionum poßibiles.	*Ordo numerorum.* Primus.	Secundus.	Tertius.	Quartus.	Quintus.	Sextus.
Primus modus.	1	2	3	4	6	9
secundus.	1	2	3	9	6	4
Tertius.	1	3	2	4	6	9
Quartus.	1	3	2	9	6	4
Quintus.	1	6	2	9	3	4
Sextus.	1	6	2	4	3	9
Septimus.	2	4	1	3	9	6
Octauus.	2	4	1	6	9	3
Nonus.	2	9	1	3	4	6
Decimus.	2	9	1	6	4	3
Vndecimus.	3	4	1	2	9	6
Duodecimus.	3	4	1	6	9	2
Decimustertius.	3	9	1	2	4	6
Decimusquartus.	3	9	1	6	4	2
Decimusquintus.	4	6	2	1	3	9
Decimussextus.	4	6	2	9	3	1
Decimusseptimus.	6	9	1	2	4	3
Decimusoctauus.	6	9	1	3	4	2

Præfata 18 rationum cōpositiones, suo ordine exemplariter dilucidata.

3 Horum autem 18 modorum formulas, siue rationum compositiones, inter eosdem 6 numeros, iuxta tenorem ipsius antecedentis secundi capitis accidentes, in maiorem omnium expreßionem, superaddere: illósque suo ordine distribuere, non duximus incommodum.

Primus & radicalis modus: in quo ratio primi numeri ad secūdum, componitur ex ratione tertij ad quartum, & ratione quinti ad sextum.

Secūdus cōpositionis modus: in quo ratio eiusdē primi numeri ad secundū, cōstat ex ratione tertij ad sextum, atq; ratione quinti ad quartum.

Subses-

Subſeſquitertia.	3—4	Subtripla.	3—9
Subſeſqualtera.	6—9	Seſqualtera.	6—4
Subdupla.ut 1 ad 2.	18—36	Subdupla,ut 1 ad 2.	18—36

Tertius modus: in quo ratio primi numeri ad tertium, conſtat ex ratione ſecundi ad quartum, & ratione quinti ad ipſum ſextum.

Quartus modus: in quo ratio eiuſdem primi numeri ad tertium, conficitur ex ratione ſecundi ad ſextum, & ratione ipſius quinti ad quartum.

Subdupla.	2—4	Subquadrupla ſeſqualtera.	2—9
Subſeſqualtera.	6—9	Seſqualtera.	6—4
Subtripla,ut 1 ad 3.	12—36	Subtripla,ut 1 ad 3.	12—36

Quintus modus: in quo ratio ipſius primi numeri ad quintum, componitur ex ratione ſecundi ad ſextum, atq; ipſius tertij ad quartum.

Sextus modus: in quo ratio eiuſdē primi numeri ad ipſũ quintũ, conſtat ex rationibus ſecundi ad quartum, & tertij ad ipſum ſextum.

Subquadrupla ſeſqualtera.	2—9	Subdupla.	2—4
Subſeſquitertia.	3—4	Subtripla.	3—9
Subſextupla,ut 1 ad 6.	6—36	Subſextupla ut 1 ad 6.	6—36

Septimus modus: in quo ratio ſecũdi numeri ad quartum, reſultat ex binis rationibus, ipſius quidem primi ad tertium, & ſexti ad quintum numerum.

Octauus modus: in quo ratio eiuſdem ſecundi numeri ad ipſum quartum, conficitur ex ratione primi ad quintum, atque ſexti ad ipſum tertium.

Subtripla.	1—3	Subſextupla.	1—6
Seſqualtera.	9—6	Tripla.	9—3
Subdupla,ut 2 ad 4.	9—18	Subdupla,ut 2 ad 4.	9—18

Nonus modus: in quo ratio præfati numeri ſecũdi ad ſextum, conſtat ex rationibus primi ad tertium, & quarti ad ipſum numerum quintum.

Decimus modus: in quo ratio eiuſdē ſecundi numeri ad ipſum ſextũ, cõficitur ex ratione primi ad quintũ, atq; rõe quarti nũeri ad ipſum tertiũ.

Subtripla.	1—3	Subſextupla.	1—6
Subſeſqualtera.	4—6	Seſquitertia.	4—3
Subquadrupla ſeſqualtera, ut 2 ad 9	4—18	Subquadrupla ſeſqualtera, ut 2 ad 9.	4—18

Vndecimus modus: in quo ratio tertij numeri ad quartũ, cõstat ex rationibus primi quidem ad secundum, & sexti ad ipsum numerum quintum.

Subdupla.	1 — 2
Sesqualtera.	9 — 6
Subsesquitertia, ut 3 ad 4.	9 — 12

Duodecimus modus: in quo ratio eiusdẽ tertij numeri ad ipsum quartũ, resultat ex rationib⁹ primi ad quintũ, & ipsius sexti ad secundũ numerũ.

Subsextupla.	1 — 6
Quadrupla sesqualtera.	9 — 2
Subsesquitertia, ut 3 ad 4.	9 — 12

Decimustertius: in quo ratio præfati numeri tertij ad sextũ, componitur ex ratione primi ad secundum, & ipsius quarti ad numerum quintum.

Subdupla.	1 — 2
Subsesqualtera.	4 — 6
Subtripla, ut 3 ad 9.	4 — 12

Decimusquartus: in quo eadẽ ratio numeri tertij ad ipsũ sextũ, cõstat ex rationibus primi inquã numeri ad quintũ, & quarti ad secundũ numerũ.

Subsextupla.	1 — 6
Dupla.	4 — 2
Subtripla, ut 3 ad 9.	4 — 12

Decimusquintus: in quo ratio quarti numeri ad quintũ, conficitur ex rationibus secũdi numeri ad primum, & tertij ad ipsum numerum sextum.

Dupla.	2 — 1
Subtripla.	3 — 9
Subsesqualtera, ut 4 ad 6.	6 — 9

Decimussextus: in quo eadẽ ratio numeri quarti ad ipsum quintum, cõstat ex ratione secundi ad sextum, & ipsius tertij ad primum numerum.

Subquadruplasesqualt.	2 — 9
Tripla.	3 — 1
Subsesqualtera, ut 4 ad 6.	6 — 9.

Decimusseptimus: ubi ratio quinti numeri ad sextum, componitur ex ratione primi ad secundum, & quarti numeri ad ipsum tertium.

Subdupla.	1 — 2
Sesquitertia.	4 — 3
Subsesqualtera, ut 6 ad 9.	4 — 6

Decimusoctauus & ultim⁹: in quo præfata ratio quinti ad numerũ sextũ, cõstat ex rationibus primi inquã ad tertiũ, & quarti ad secundum numerũ.

Subtripla.	1 — 3
Dupla.	4 — 2
Subsesqualtera, ut 6 ad 9.	4 — 6

Corollarium notandum.

Hinc facilè patet, qualiter hic senarius ordo numerorũ, in quaternariũ utiliter redigatur. Ex ipsis enim quatuor ultimis numeris, duo cõficiũtur numeri, cũ duob⁹ primis sub eadẽ rõe ꝓportionales: unde singuli sex quãtitatũ canones, in q̃tuor ꝓportionaliũ numerorũ regulã, uel facilè tandẽ conuertentur.

RELI-

4 RELIQVVM est, ostēdere qualiter oblatis sex numeris, sic inuicē colligatis, ut ratio duorū quorūuis constet ex rationibus cæterorū quatuor: si quispiā illorū ignoretur, is reliquorū adminiculo dignoscatur. In primis igitur, ubi sextus numerus ignorabitur, multiplicabis secūdū in tertiū, & productum diuides per primum: quotū rursum ex diuisione numerorum duces in quintū, productúmq; diuides per quartū: habebis enim præfatum numerū sextū. Resumantur exēpli gratia, præassumpti sex numeri 1/2/3/4/6/9, iuxta primū & radicalē modum distributi: sitq; numerus 9 ignotus. Duc igitur 2 in 3, fiēt 6: quæ diuide per 1, redibunt 6. hæc rursum ducito in 6 (quintum uidelicet numerum) cōsurgent 36: quæ diuisa per 4, dabunt pro quoto & optato numero 9.

Regula, siue praxis earundem 6 quantitatum.

Vbi sextus ignoratur numerus.

Secundò, ubi quintus ignorabitur numerus, duc primum in quartum, & productum diuide per tertiū: quod ex hac autem diuisione procreatur, duc rursum in numerum sextum, & productum diuide per secūdum: & eundem quintum obtinebis numerū. Exempli causa, ignoretur numerus 6. Duc itaque 1 in 4, redibunt 4: quæ diuide per 3, prouenient 1 & $\frac{1}{3}$. Hæc rursum multiplica per 9, consurgent 12: quæ diuisa per 2, generant 6, quantus est ipse numerus quintus.

Dum quintus ignotus est numerus.

Tertiò, ubi quartus numerus incognitus fuerit: ducendus est secundus in tertiū, & productum diuidendū per primum. quotus inde numerus, per quintū multiplicādus est: & is qui resultabit, diuidēdus per ipsum numerū sextū. Vtpote, si numerus 4 ignoretur, multiplicabis 2 in 3, fient 6: quæ diuides per 1, redibunt 6. Hæc per 6 numeri quinti rursum multiplicabis, cōsurgent 36: quæ si diuidantur per 9, dabūt pro quoto & optato numero 4. Quartò, si tertius numerus desideretur, hunc sic curabis inuentū. Duc primum numerū in quartum, productúmq; diuide per secundū: prouenietem autē ex ipsa diuisione, duc rursum in sextum, & procreatū inde numerū diuide per quintū. Ignoretur enim numerus 3. Duces igitur 1 in 4, redibunt 4: quæ diuides per 2, proueniēt 2. hæc iterum multiplicabis per 9, consurgent 18: quæ diuides tan-

Dū ipse quartus optatur numerus.

Vbi tertius numerus ignoratur.

dem per 6,prodibunt 3, quantus est ipse numerus tertius.

Vbi secundus ignotus est numerus. Quintò, ubi secundum operæpretiũ fuerit habere numerum, sic facito. Duc primum in quartum, & productum inde numerum diuide per tertium: quotũ rursum numerũ ducito in sextum, productúmq; diuidito per ipsum quintum. Nam inter præassumptos numeros, secundus est 2. Duc igitur 1 in 4, fient solummodò 4: quæ diuide per 3, nascentur 1 & $\frac{1}{3}$. Hæc rursum ducito in 9, resultabunt 12: quæ diuisa per 6, generabunt ipsum optatum numerum secundum, utpote 2.

Quando primus numerus desideratur. Sextò & ultimo, si primus ignotus fuerit numerus, is in hunc modũ supputetur. Ducatur secũdus in tertiũ, & productus inde numerus per quartum diuidatur: quotus autem ex ipsa diuisione per quintũ rursum multiplicetur, productúsq; numerus diuidatur per ipsum sextum: relinquetur enim primus. In primum numerũ subrogauimus unitatem: quæ supponatur ignota, & in hunc modum colligatur. Multiplicẽtur 2 in 3, fient 6: quæ diuisa per 4, dant 1 & $\frac{1}{2}$. Hæc rursum multiplicata per 6, producunt 9: quæ per 9, hoc est, sextum diuisa numerũ, restituunt 1. *Corollarium.* Haud dissimiliter, datũ quẽuis horum sex numerorũ, iuxta quanuis reliquarũ 18 rationum cõpositionem distributorũ, curabis inuẽtum: necnõ & oblatorum quorumcunq; sex numerorũ ignotũ, similibus rationum cõmixturis siue proportionibus inuicem colligatorũ.

Conclusio. Hæc sunt, candide ac studiose lector, quæ de absoluta numerorum tam integrorũ, quàm uulgari & astronomica ratione partium distributorum praxi, in aliarum disciplinarũ introductionem, & communem studiosorum omnium utilitatem, nobis conscribenda & edenda uidebantur.

Quarti & ultimi libri Arithmeticæ practicæ, ex Orontij Finæi Delphinatis, Regij mathematici recens emendata traditione,

FINIS.

Virescit uulnere uirtus.

fr. Ram
Barr

ORONTII
FINEI
ARITHME[illegible]E
PRATICA