

ina

la Arm.
A

Observatorio de San Fernando

BIBLIOTECA

Núm. del Invert. 1268

Secci. Observatorio de Marina

Carp. BIBLIOTECA

Esta. Núm. 237



BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO



A N A L Y S I S

Per Quantitatum

SERIES, FLUXIONES,

A C

D I F F E R E N T I A S :

C U M

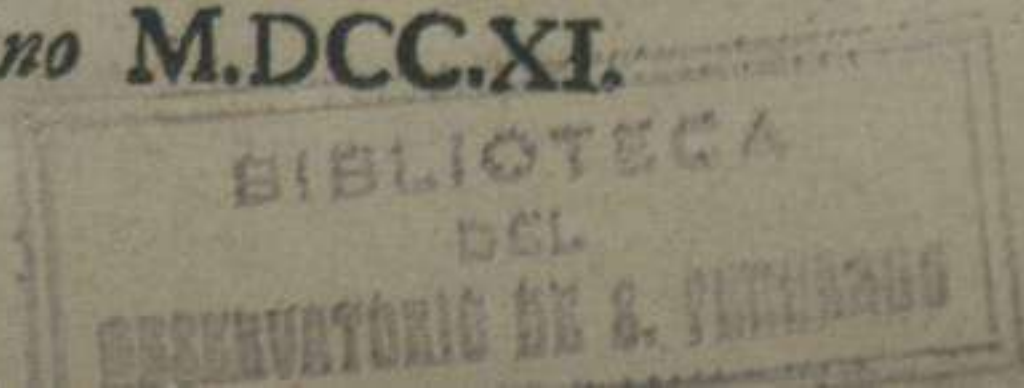
Enumerationem Linearum

TERTII ORDINIS.



L O N D I N I :

Ex Officina PEARSONIANA. Anno M.DCC.XI.





Præfatio Editoris.



Tractatus aliquot Mathematicos Viri Illustrissimi D. Newtoni in lucem edimus, quorum primus & ultimus nunc primum prodeunt, reliqui vero vel à se vel ab aliis ante hac publici juris facti sunt.

Hæc autem Editio casui, sed tamen non sine ipsius consensu prius impetrato, ortum acceptum refert.

Etenim secundus jam agitur annus ex quo scrinia D. Collinsii (qui, uti notum est, amplissimum cum sui sæculi Mathematicis commercium habuit) meas in manus inciderunt; & in illis plurima reperi à cunctis fere totius Europæ eruditis ipsi communicata; & inter ea non pauca, quæ à Viro Cl. D. Newtono scripta fuerunt; quæ cum tantæ molis essent, ut simul Tractatum breviusculum possent conficere, cæpi de iis
a edendis

P R Æ F A T I O.

edendis cogitare. Quum autem animadvertissem scripta ejus quæ jam in lucem prodierunt ferme idem cum hisce argumentum habere, haud operæ pretium me facturum, si typis mandarem, existimavi.

Unus tamen erat brevis de Curvarum Quadratura Tractatus adeo luculenter & concinne scriptus, atque ita accommodatus ad instituendos eos, qui nondum totam istam Methodum perspectam habeant, ut abstinere non potuerim, quominus Auctoris licentiam eundem edendi peterem. Quam Ille non solum summa cum humanitate concessit; sed & insuper veniam dedit reliqua ipsius colligendi, quæ ad idem argumentum spectabant.

Hicce Tractatus, quem D. Collinsii manu exaratum comperi, inscriptus fuit De Analyfi per Æquationes Infinitas, & licet neque Auctoris nomen, neque tempus quo scriptus fuerat ullibi compa-ruerit; multa tamen continere ad D. Newtoni Methodos spectantia statim agnovi, utpote Epistolarum autographo illi ad amussim respondentia, quod antea ipse D. Newtonus ad D. Oldenburgum miserat. Unde suspicabar totum ex eodem fonte emanasse; nihilominus suspenso eram animo, usque dum inventis, inter easdem chartas, Epistolis aliquot D. Barrovii ad D. Collinsium scriptis; tres reperi ad hunc Tractatum

P R Æ F A T I O.

Statum immediate spectantes; ex quibus facile intellexi quomodo D. Collinſius eum obtinuerat.

In una Epistolæ e Collegio S. S. Tr. data 20 Julii 1669, versus finem D. Barrovius hæc scribit.

* Amicus quidam apud nos commorans, qui eximio in his rebus pollet ingenio, nondiustertius chartas quasdam mihi tradidit, in quibus Magnitudinum dimensiones supputandi Methodos, Mercatoris methodo similes, maxime vero Generales, descripsit, simulque Æquationes resolvendi, quæ, ut opinor, tibi placebunt, quas una cum proximis literis ad te mittam.

In hac Epistola narrat argumentum chartarum Amici sui fuisse Computationem dimensionum Magnitudinum, & Æquationum resolutionem, quod cum Tractatus hujus argumento quadrat.

Versus finem alterius Epistolæ ad D. Collinſium e Collegio S. S. Tr. datæ ult. Julii 1669, D. Barrovius ita scribit.

Mitto

* A Friend of mine here, that hath an excellent Genius to these things, brought me the other Day, some Papers, wherein he hath set down Methods of Calculating the Dimensions of Magnitudes, like that of Mr. Mercator, but very general, as also of Resolving Equations, which I suppose will please you, and I shall send you them by the next.

P R Æ F A T I O.

† Mitto quas pollicitus eram Amici char-
tas, quæ uti spero haud parum te oblecta-
bunt. Remittas, quæso, quum eas quantum
tibi visum fuerit perlegeris; id enim postu-
lavit Amicus meus, cum primum eum ro-
gavi, ut eas tecum communicare mihi lice-
ret. Quantocyus igitur, obsecro, te eas
recepisse fac me certiozem, quod illis me-
tuo, quippe qui eas per Veredarium publi-
cum ad te mittere non dubitaverim, quo
tibi morem gererem quam citissime.

*Ex hac Epistola constat D. Barrovium dictum
Librum misisse, ea lege, ut sibi remitteretur. Unde
manifestum est, quare Tractatus, quem inveni, D. Col-
linsii manu scriptus fuit, autographo nempe ipsi
Auctori restituto.*

*In tertia a D. Barrovia ad D. Collinsium Epi-
stola data 20 Augusti 1669, constat D. Newto-
num fuisse, Amicum illum, de quo D. Barrovius in
duabus prioribus Epistolis mentionem fecerat, quod his
verbis consignat.*

Amici

† I send you the Papers of my Friend I promis'd, which I presume will give you much satisfaction; I pray, having perused them so much as you think good, remand them to me, according to his desire when I ask'd him the Liberty to impart them to you; I pray give me notice of your receiving them, with your soonest convenience, that I may be satisfied of their reception; because I am afraid of them, venturing them by the Post, that I may not longer delay to correspond with your desire.

P R Æ F A T I O.

* Amici chartas tibi placuisse gaudeo ;
' est illi nomen *Newtonus*, Collegii nostri So-
' cius, & juvenis, (secundus enim, ex quo
' Artium Magistri gradum cepit, jam agitur
' annus,) et qui, eximio quo est acumine,
' permagnos in hac re progressus fecit. Illas,
' si vis, cum Nobili Domino Vicecomite
' *Brounker*o communica.

*Perspecto jam D. Newtonum hujus Tractatus
Auctorem esse ; ab eo sciscitatus sum num penes se ad huc
esset autographum, quod quidem ille exquirens inve-
nit, & mihi tradidit, cum exemplari Collinsiano
ad verbum usque conveniens.*

*Etiam si vero hic Tractatus ad D. Collinsium
missus fuisset mense Julii 1669, quod aliquantulum
erat posteaquam D. Mercator Logarithmotechniam
suam in lucem ediderat ; manifestum est ex quibus-
dam aliis Epistolis, (quæ itidem inter D. Collinsii
chartas fuerunt,) quod antea scriptus esset, imo quod
D. Newtonus invenisset Methodum investigandi
Magnitudinum Dimensiones per Infinitas Series vel
aliquot annos antequam D. Mercator Librum suum
in vulgus edidit ; ut liquet ex Epistola a Collinsio
b ad*

* I am glad my Friend's Paper gives you so much satisfaction, his Name is Mr. *Newton*, a Fellow of our College, and very young, (being but the second Year Master of Arts,) but of an extraordinary Genius and Proficiency in these things ; you may impart the Papers, if you please, to my Lord *Brounker*.

P R Æ F A T I O.

ad D. Jacobum Gregorium data 25. Novemb.
1669, ubi hæc sunt verba.

* *Barrovius* Provinciam suam Publice præ-
legendi remisit cuidam nomine *Newtono*
Cantabrigiensi, quem tanquam Virum acutissi-
mi ingenii, in Præfatione Prælectionum Op-
ticarum memorat, & qui, antequam edere-
tur *Mercatoris* Logarithmotechnia, Metho-
dum invenerat eandem, eamque ad omnes
Curvas generaliter, & ad Circulum diver-
simode applicârat.

Quinetiam D. *Collinsius* in Epistola ad D.
Strode, data 26. Julii 1672, sic scribit.

† Mense *Septembri* 1668, *Mercator* Loga-
rithmotechniam edidit suam, quæ speci-
men hujus Methodi (i. e. Serierum Infini-
tarum) in unica tantum Figura, nempe,
Quadratura Hyperbolæ continet. Haud
multo postquam in publicum prodiret liber,
exemplar unum Cl. *Wallisio* Oxoniam misi,
qui suum de eo judicium in *Actis Philo-
sophicis* statim fecit: alterum *Barrovio* Can-
tabrigiam, qui quasdam *Newtoni* chartas, qui
jam *Barrovium* in Mathematicis Prælecti-
onibus

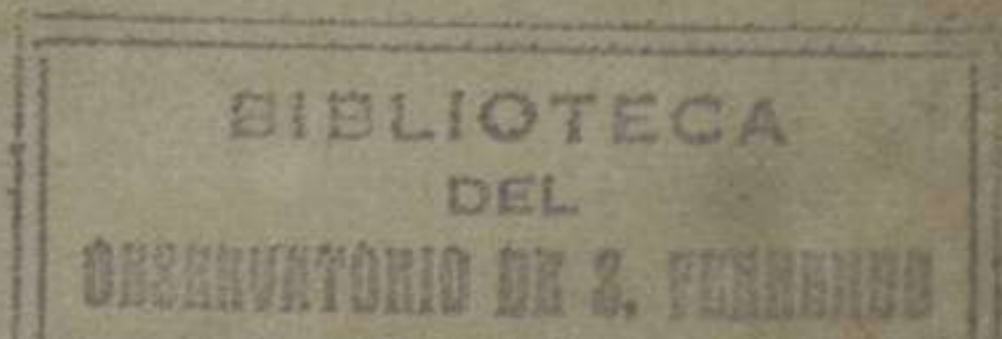
* Mr. *Barrow* hath resign'd his Lecture's Place to one Mr. *Newton* of Cambridge, whom he mentions in his *Optic* Preface as a very ingenious Person; one who hath, before Mr. *Mercator's* Logarithmotechnia was extant, invented the same Method, and applied it generally to all Curves, and divers ways to the Circle.

P R Æ F A T I O.

‘onibus publicis excipit, extemplo remifit :
 ‘Ex quibus & aliis, quæ olim ab Auctore
 ‘cum *Barrovia* communicata fuerant, patet
 ‘illam Methodum a dicto *Newtono* aliquot
 ‘annis ante excogitatam, & modo generali
 ‘applicatam fuiſſe : ita ut ejus ope in quavis
 ‘Figura Curvilinea propoſita, quæ una vel
 ‘pluribus Proprietatibus definitur, Quadra-
 ‘tura vel Area dictæ Figuræ, accurata ſi
 ‘poſſibile ſit, ſin minus infinite propinqua ;
 ‘Evolutio vel Longitudo lineæ Curvæ ; Cen-
 ‘trum gravitatis Figuræ ; Solida ejus rota-
 ‘tione genita, & eorum Superficies ; ſine
 ‘ulla Radicum Extractione obtineri queant.

*Ubi obiter notemus in hac Collinſii historiola,
 methodum argumentandi uſurpatam a D. Newtono
 in Tractatu ſuo De Quadratura Curvarum,
 quaſi digito monſtrari, dum dicit hanc Methodum
 exhibere Quadraturam Figurarum accuratam, ſi
 modo fieri poſſit, ſin minus in infinitum approximan-
 tem,*

† In September 1668, Mr. Mercator publiſh'd his *Logarithmotechnia*, containing a Specimen of this Method, (that is, of Infinite Series) in one only Figure, to wit in the Quadrature of the Hyperbola. Not long after the Book came out, I ſent one of them to Dr. *Wallis* at *Oxford*, who forthwith gave his ſenſe of it in the *Philof. Tranſactions* : another of them I ſent to Dr. *Barrow* at *Cambridge*, who forthwith ſent me up ſome Papers of Mr. *Newton*, who is ſince become the Doctour's Succeſſor in the Mathematical Lectures there. By which, and former communications made thereof from the Author to the Doctour, it appears that the ſaid Method was invented ſome Years before by the ſaid Mr. *Newton*, and generally applied : ſo that thereby in any Curvilinear Figure propoſ'd, that is determin'd by one or more common Properties, by the ſame Method may be obtain'd the Quadrature or Area of the ſaid Figure, accurately when it can be done, but always infinitely near ; the Evolution, or Length of the ſaid Curve Line ; the Centre of Gravity of the Figure ; its round Solids made by Rotation, and their Surfaces ; and all perform'd without any Extraction of Roots.



P R Æ F A T I O.

tem, atque ista omnia fieri sine ulla Extractione Radicum; Hæc enim ipsa est argumentatio in dicto Tractatu observata: & propterea hanc Methodum saltem Anno 1672 coætaneam extitisse non est dubitandum.

Inveni etiam in exemplari Epistolæ, a D. Collinsio ad D. Davidem Gregorium prædicti Jacobi fratrem, datæ 11. Aug. 1676, præter eadem fere quæ D. Strode scripserat, etiam verba sequentia:

* Supradicta Serierum Infinitarum doctrina, a Newtono biennium ante excogitata fuit, quam ederetur Mercatoris Logarithmotechnia, & generaliter omnibus Figuris applicata.

Simulque affirmat se olim cum quibusdam Academicis Parisiensibus hæc eadem scripto communicasse.

Quapropter, cum D. Mercator Librum suum Anno 1668 in lucem ediderit, sequitur eandem Doctrinam Infinitarum Serierum Figuris omnibus generaliter applicatam fuisse Anno 1666.

Denique in Epistola, circa idem tempus ad D. Oldenburgum scripta, asserit Collinsius, Jacobum Gregorium non nisi conspecta aliqua e Seriebus

* The said Doctrine of Infinite Series was invented by Mr. Newton, about two Years before the Publication of Mr. Mercator's Logarithmotechnia, and generally applied to all Curves.

P R Æ F A T I O.

bus Newtoni, quam illi impertierat, in eandem Serierum Methodum incidisse.

Ex Newtoni autem Schedis quibusdam a me visis intellexi, quod is Quadraturam Circuli, Hyperbolæ, & aliarum quarundam Curvarum per Series Infinitas ex Wallisii nostri Arithmetica Infinitorum, per Interpolationem Serierum ejus, primo deduxit, idque Anno 1665; deinde Methodum excogitavit easdem Series per Divisiones & Extractions Radicum inveniendi, quam Anno sequente generalem reddidit.

Et cum scriptus fuerit hic Tractatus, quo tempore hæc recens inventa essent, ideo Cl. Auctor dignatus est multa in eo dilucidare, ad Resolutionem Æquationum per Infinitas Series spectantia, quæ in aliis Libris frustra quæras.

His subjunximus diversa Epistolarum Auctoris fragmenta, quæ ad easdem Doctrinas pertinent, quæq; olim inter Cl. Wallisii Opera in lucem prodire. Epistolas haud dedi integras, ut evitarem repetitionem non necessariam multarum rerum, quæ supra in Tractatu De Analyfi per Æquationes Infinitas traditæ sunt: Quinimo Exempla quædam in iis Epistolis prætermisi ipsius Cl. Auctoris monitu, Regulas suas per se satis claras esse credentis, neque ullam dilucidationem desiderare.

P R Æ F A T I O.

Inter D. Collinfii schedas reperi autographum Epistolæ datæ 8. Novemb. 1676, cujus fragmentum sub finem adjeci, & dignum luce putavi; quoniam in eo memoratur solutio Problematis admodum generalis in Comparatione Curvarum usûs, quæ perficitur in Cor. 2. Prop. 10. Tract. De Quadratura Curvarum: Unde Lector intelligat solutionem illam Auctori jam tum innotuisse.

Hisce Fragmentis annexus est ille ipse Tractatus De Quadratura Curvarum; una cum altero De Enumeratione Linearum Tertii Ordinis, quorum uterque primum typis mandatus est Anno 1704, ad finem Optices eximiæ ejusdem Cl. Auctoris.

Coronidis loco subjicitur Tractatulus, cui titulo est, Methodus Differentialis, quem Cl. Auctoris permissu ex ejus autographo descripsi; Complectitur autem Doctrinam describendi Curvas ex datis Differentiis differentiarum Ordinatarum. Hæc Methodus Differentialis innititur Problemati ducendi Curvam Parabolici generis per data quocunque puncta; de quo Cl. Auctor olim mentionem fecerat in Epistola sua ad D. Oldenburgum 1676 missa; & cujus solutionem dedit in Lem. 5. Lib. 3. Princip. Philos. non tamen prorsus eandem quoad Constructionem cum ea quam impræsentiarum tradimus.

Hujus

P R Æ F A T I O.

Hujus Geometriæ Newtonianæ non minimam esse laudem duco, quod dum per limites Rationum Primarum & Ultimarum argumentatur, æque demonstrationibus Apodicticis ac illa Veterum munitur; utpote quæ haud innititur duriusculæ illi Hypothefi quantitatum Infinite parvarum vel Indivisibilium, quarum Evanescentia obstat quominus eas tanquam quantitates speculemur. Neque parum præcellere videtur, quod tam paucis innixa Propositionibus tam late sese extendat hæc Mathesis, intra se omnia Problemata difficiliora vulgatas Methodos eludentia complectens; siquidem quicquid proponitur poterit Geometricè per alicujus Curvæ Aream effingi; vel per Methodum Universalem Extrahendi Radices ex Æquatione quavis erui; vel ad summum, ducendo Curvam per terminos quantitatum datarum solvi.

W. Jones.



INDEX OPUSCULORUM

Quæ in hoc Libro continentur.

	<i>Pag.</i>
D E Analyfi per Æ quationes Infinitas.	I
<i>Fragmenta Epistolarum.</i> { <i>Ad D. Oldenburgum</i> 13 Jun. 1676.	23
{ <i>Ad D. Oldenburgum</i> 24 Octob. 1676.	31
{ <i>Ad D. Wallifium Anno</i> 1692.	34
{ <i>Ad D. Collinsium</i> Nov. 8. 1676.	38
De Quadratura Curvarum.	41
Enumeratio Linearum Tertii Ordinis.	69
Methodus Differentialis.	93



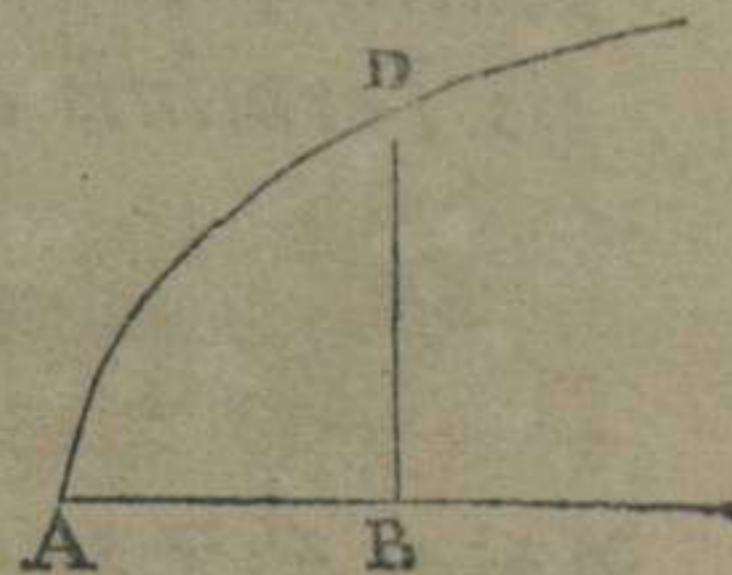
DE ANALYSI

Per Æquationes Numero Terminorum INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonstratam habes.



ASI AB Curvæ alicujus AD, fit Applicata BD perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & sint a, b, c , &c. Quantitates datæ, & m, n , Numeri Integri. Deinde,



Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; Erit $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} = \text{Areæ ABD.}$

Res Exemplo patebit.

1. Si $x^2 (= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc est, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3 = \text{ABD.}$

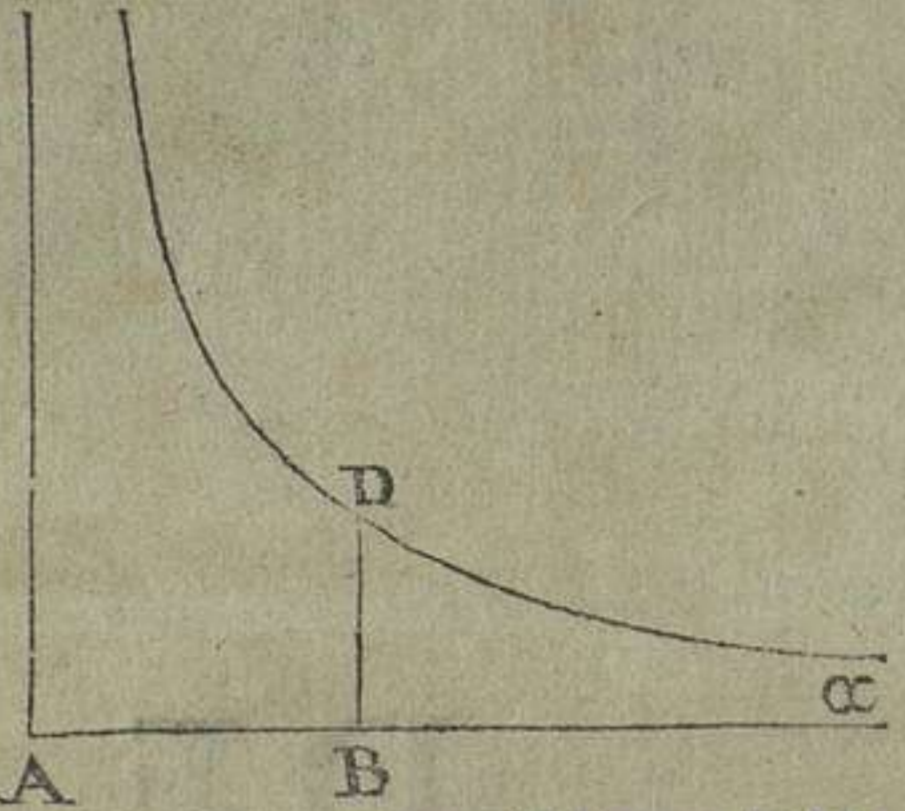
2. Si

2. Si $4\sqrt{x}$ ($= 4x^{\frac{1}{2}}$) = y ; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ($= \frac{8}{3}\sqrt{x^3}$) = ABD.
 3. Si $\sqrt[3]{x^5}$ ($= x^{\frac{5}{3}}$) = y ; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$ ($= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}$) = ABD.
 4. Si $\frac{1}{x^2}$ ($= x^{-2}$) = y , id est, si $a = 1 = n$, & $m = -2$;

Erit $(-\frac{1}{1}x^{-\frac{1}{1}} =) -x^{-1}$ ($= -\frac{1}{x}$) = aBD ,
 infinite versus a protensæ, quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ ($= x^{-\frac{3}{2}}$) = y ; Erit $(-\frac{2}{-1}x^{-\frac{1}{2}} =) \frac{2}{-\sqrt{x}}$
 = BDa .

6. Si $\frac{1}{x}$ ($= x^{-1}$) = y ; Erit $\frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0}x^0 =$
 $\frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0} =$ Infinitæ, qualis est Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.



Compositarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

REGULA II.

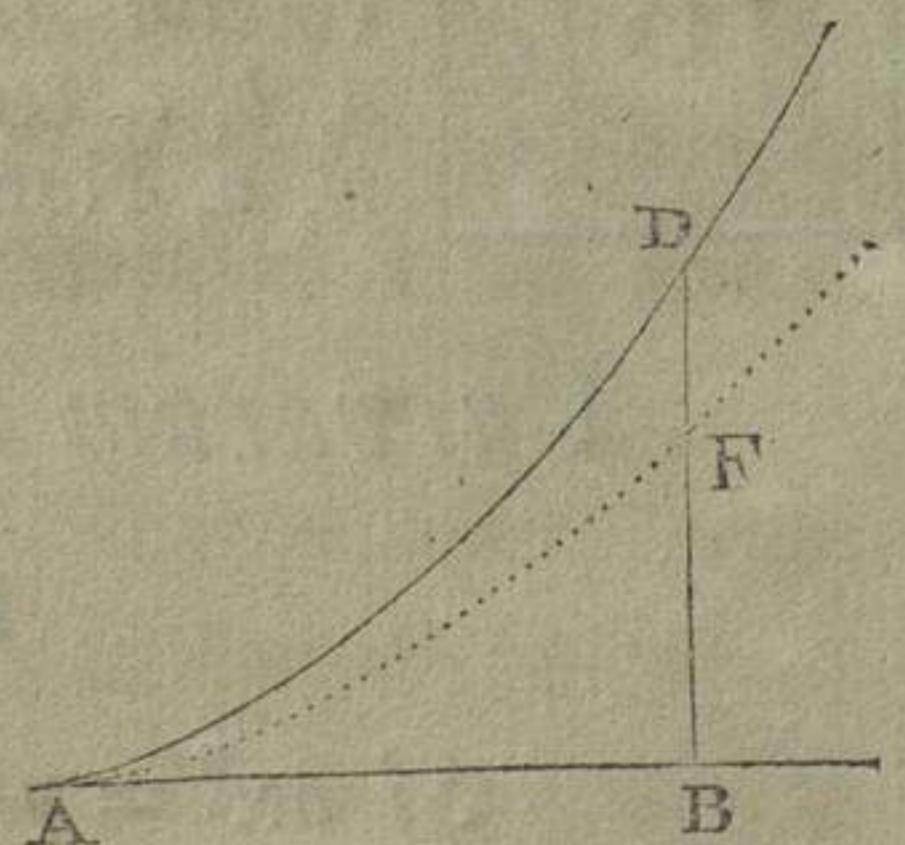
Si valor ipsius y ex pluribus istiusmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a singulis Terminis emanant.

Exempla Prima.

Si $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = ABD$.
 Etenim si semper fit $x^2 = BF$, et $x^{\frac{3}{2}} = FD$,
 erit, ex præcedente Regula, $\frac{1}{3}x^3 =$ superficiæ
 AFB descriptæ per Lineam BF, et $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$
 AFD descriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$
 toti ABD.

Sic si $x^2 - x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = ABD$.

Et si $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$; Erit $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5 = ABD$.

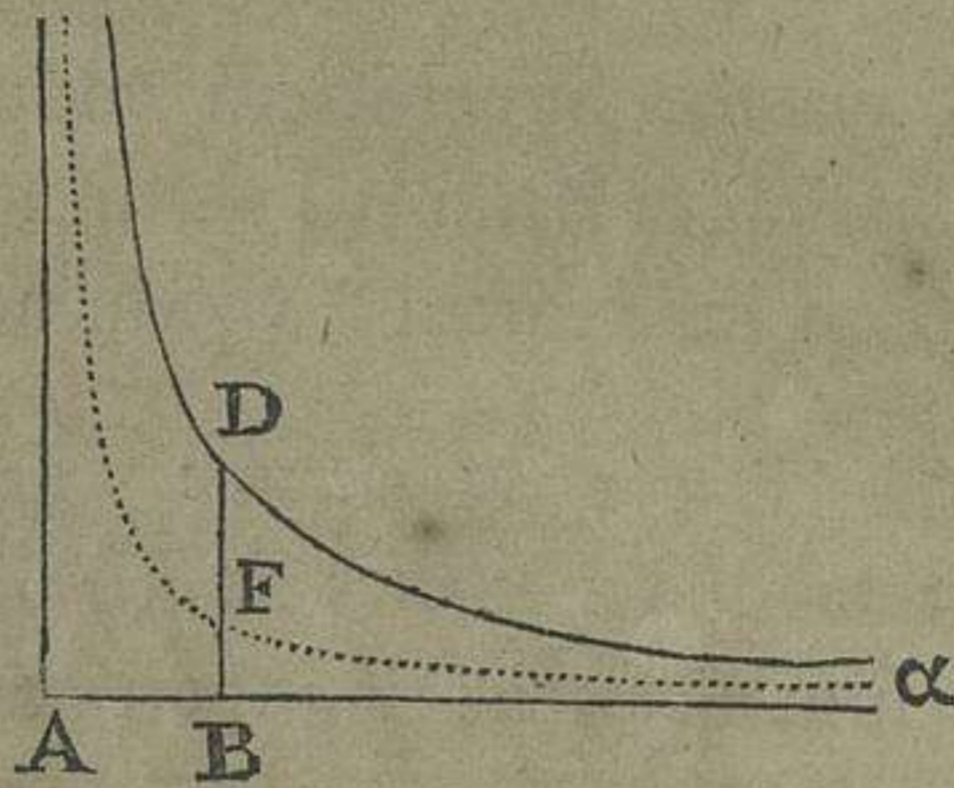


Ex^m

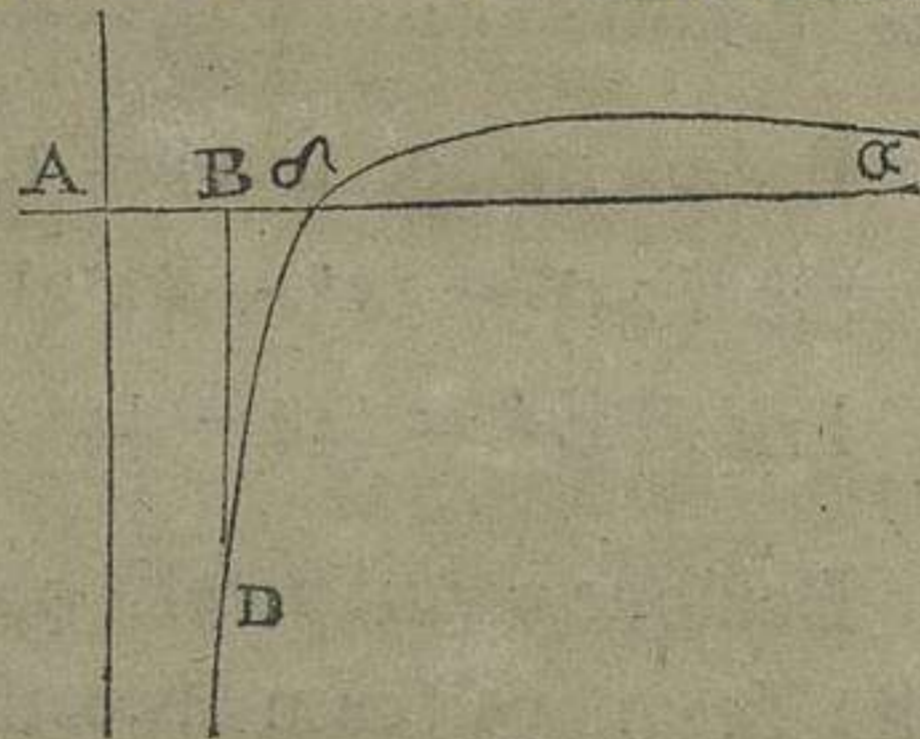
Exempla Secunda.

Si $x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}} = y$; Erit $-x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \alpha BD$. Vel si $x^{-2} - x^{-\frac{3}{2}} = y$; Erit $-x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}} = \alpha BD$.

Quarum signa si mutaveris habebis Affirmativum valorem ($x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ vel $x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}}$) superficiei αBD , modo tota cadat supra basim $AB\alpha$.



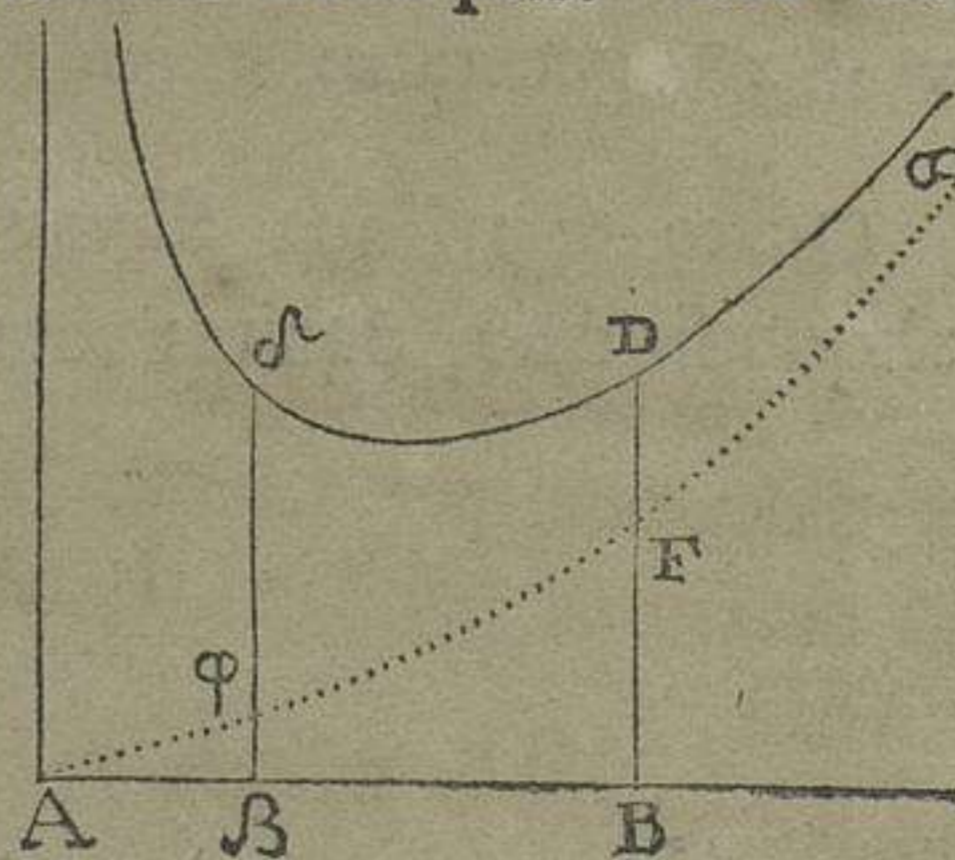
Sin aliqua pars cadat infra (quod fit cum Curva decussat suam Basim inter B et α , ut hic vides in δ ,) ista parte a parte superiori subducta, habebis valorem Differentiæ: Earum vero Summam si cupis, quære utramque Superficiem seorsim, et adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo.



Exempla Tertia.

Si $x^2 + x^{-2} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - x^{-1} =$ Superficiei descriptæ. Sed hic notandum est, quod dictæ Superficiei partes sic inventæ jacent ex diverso latere Lineæ BD.

Nempe, posito $x^2 = BF$, & $x^{-2} = FD$; Erit $\frac{1}{3}x^3 = ABF$ Superficiei per BF descriptæ, & $-x^{-1} = DF\alpha$ Superficiei descriptæ per DF.



Et



Et hoc semper accidit cum Indices ($\frac{m+n}{n}$) rationum Basis x in valore Superficie quæsitæ, sint variis Signis affecti. In hujusmodi Casibus, pars aliqua $BD\delta$ Superficie media (quæ sola dari poterit, cum Superficies fit utrinque infinita) sic invenitur.

Subtrahe Superficiem ad minorem Bafin $A\beta$ pertinentem, a Superficie ad majorem Bafin AB pertinente, & habebis $\beta BD\delta$ Superficiem differentia Bafium insistentem. Sic in hoc Exemplo. (*Vide Fig. Præcedentem.*)

Si $AB = 2$, & $A\beta = 1$; Erit $\beta BD\delta = \frac{1}{6}$:

Etenim Superficies ad AB pertinens (viz. $ABF - DF\alpha$) erit $\frac{8}{3} - \frac{1}{2}$ five $\frac{13}{6}$; et superficies ad $A\beta$ pertinens (viz. $A\phi\beta - \delta\phi\alpha$) erit $\frac{1}{3} - 1$, five $-\frac{2}{3}$; et earum differentia (viz. $ABF - DF\alpha - A\phi\beta + \delta\phi\alpha = \beta BD\delta$) erit $\frac{13}{6} + \frac{2}{3}$ five $\frac{17}{6}$.

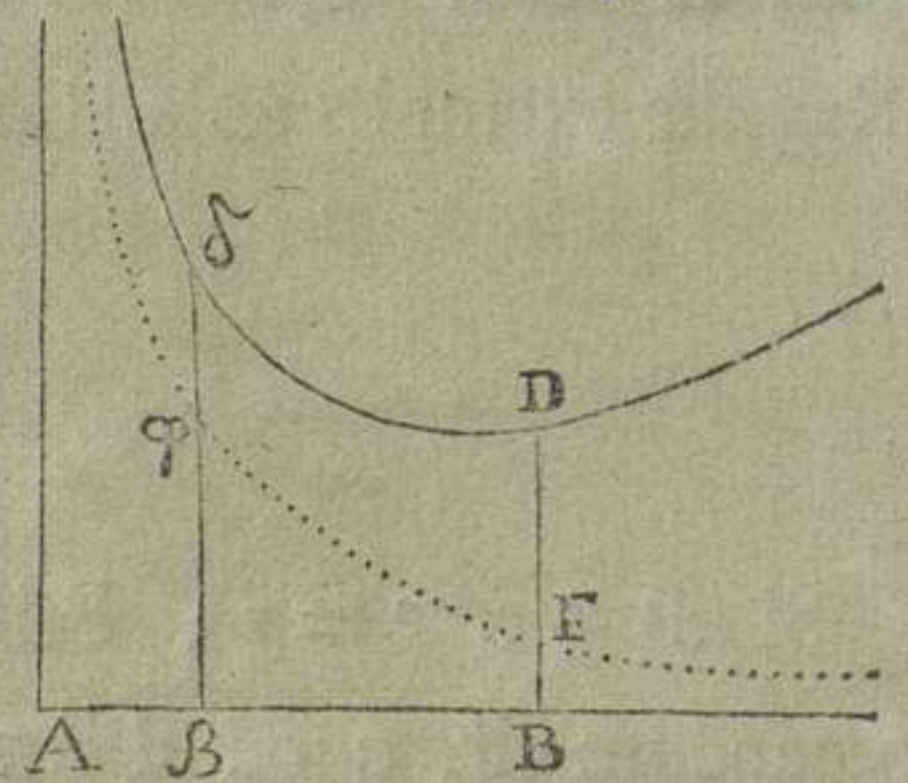
Eodem modo, si $A\beta = 1$, $AB = x$; Erit $\beta BD\delta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$.

Sic si $2x^3 - 3x^5 - \frac{2}{3}x^{-4} + x^{-\frac{3}{2}} = y$, & $A\beta = 1$;

Erit $\beta BD\delta = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{9}x^{-3} + \frac{5}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{49}{18}$.

Denique notari poterit quod si quantitas x^{-1} in valore ipsius y reperiatur, iste Terminus (cum Hyperbolicam superficiem generat) seorsim a reliquis considerandus est.

Ut si $x^2 + x^{-3} + x^{-1} = y$: Sit $x^{-1} = BF$, & $x^2 + x^{-3} = FD$, ac $A\beta = 1$; Et erit $\delta\phi FD = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^{-2}$, utpote quæ ex Terminis $x^2 + x^{-3}$ generatur.



Quare, si reliqua Superficies $\beta\phi FB$, quæ Hyperbolica est, ex Calculo aliquo sit data, dabitur tota $\beta BD\delta$.

Aliarum

Aliarum Omnium Quadratura.

REGULA III.

Sin valor ipsius y, vel aliquis ejus Terminus sit præcedentibus magis compositus, in Terminos Simpliciores reducendus est; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes solvunt; & ex istis Terminis quæsitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.

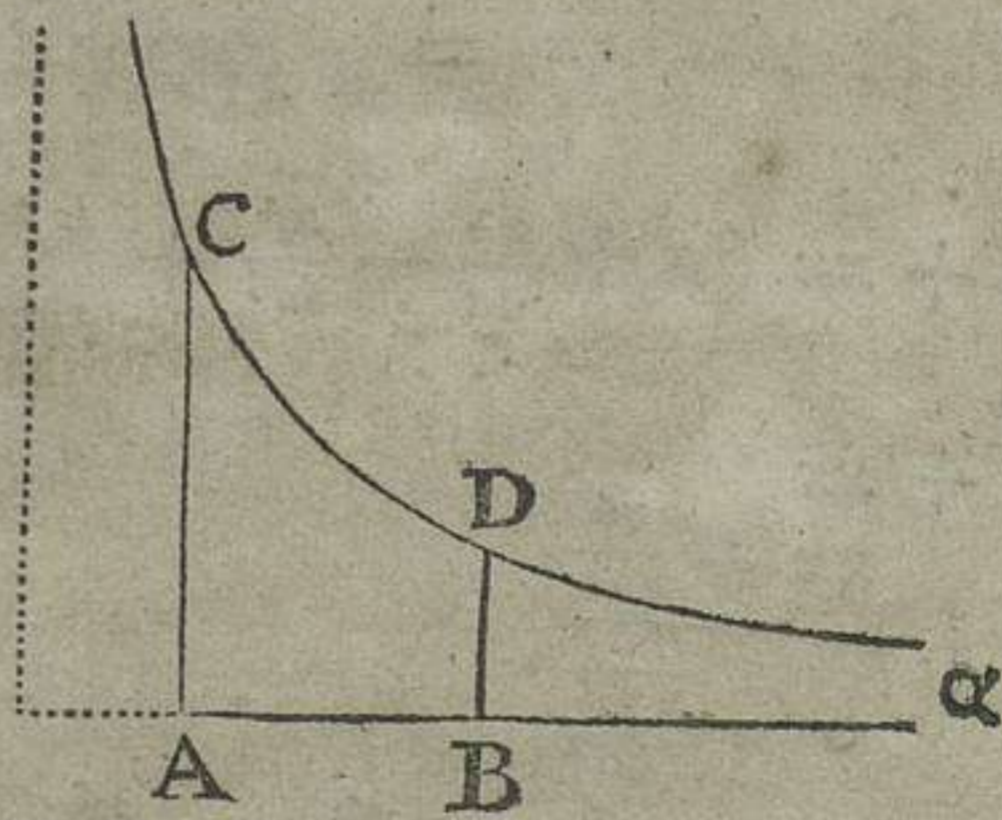
Exempla Dividendo.

Sit $\frac{aa}{b+x} = y$; Curva nempe existente Hyperbola.

Jam ut Æquatio ista a Denominatore suo liberetur, Divisionem sic instituo.

$$b+x) aa + 0 \left(\frac{aa}{b} - \frac{aax}{b^2} + \frac{aax^2}{b^3} - \frac{aax^3}{b^4} \&c. \right.$$

$$\begin{array}{r} aa + \frac{aax}{b} \\ \hline 0 - \frac{aax}{b} + 0 \\ \hline - \frac{aax}{b} - \frac{aax^2}{b^2} \\ \hline 0 + \frac{aax^2}{b^2} + 0 \\ \hline + \frac{aax^2}{b^2} + \frac{aax^3}{b^3} \\ \hline 0 - \frac{aax^3}{b^3} + 0 \\ \hline - \frac{aax^3}{b^3} - \frac{aax^4}{b^4} \\ \hline 0 + \frac{aax^4}{b^4} \\ \hline \&c. \end{array}$$



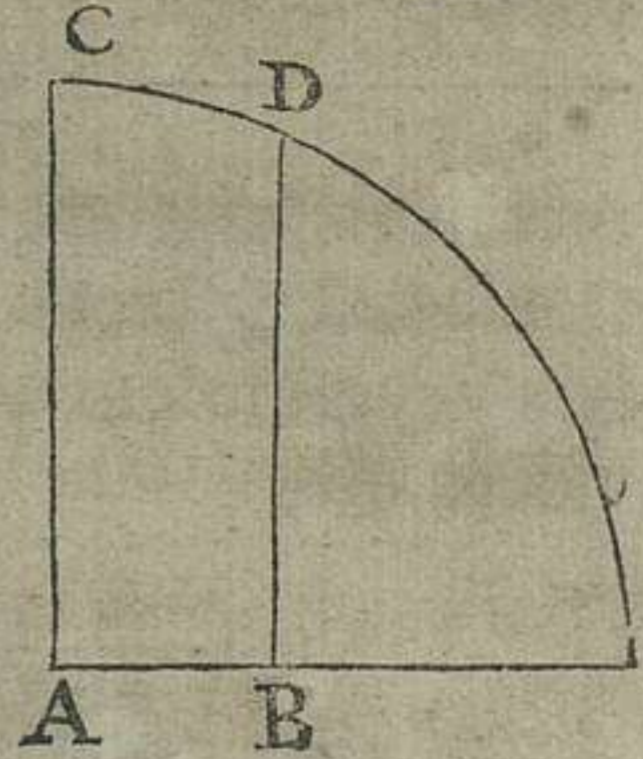
B

Et

Unde, pro Æquatione $\sqrt{aa+xx} = y$, nova producitur, viz.

$$y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \&c. \text{ Et (per Reg. 2.) Area quaesita}$$

ABDC erit = $ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} \&c.$ Et hæc est Quadratura Hyperbolæ.



Eodem modo, si fit $\sqrt{aa-xx} = y$, ejus Radix erit

$$a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \&c.$$

Adeoque Area quaesita ABDC erit

$$\text{æqualis } ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} \&c.$$

Et hæc est Quadratura Circuli.

Vel si ponas $\sqrt{x-xx} = y$; erit Radix æqualis infinitæ seriei

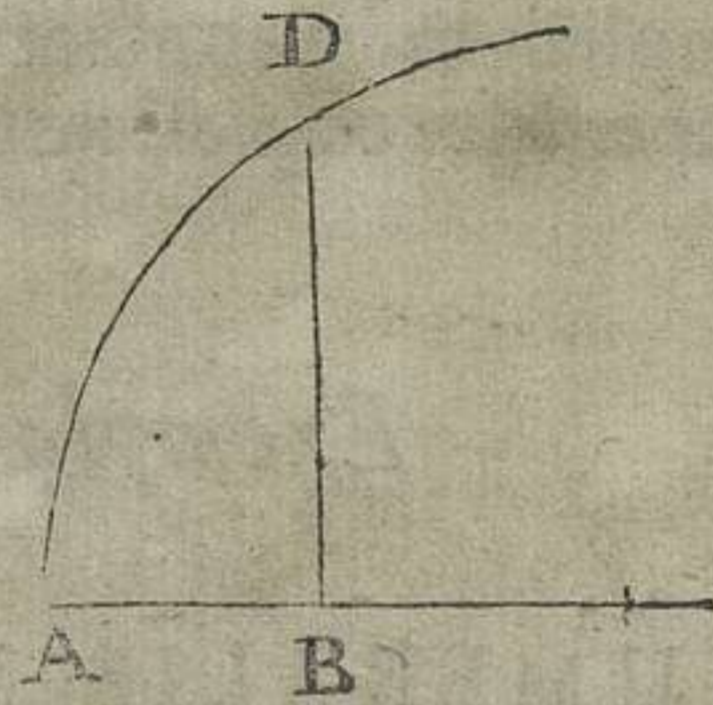
$$x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}} \&c.$$

Et Area quaesita ABD æqualis erit

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}} \&c.$$

five $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5 \&c.$

Et hæc est Areae Circuli Quadratura.



Si $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ Ellipticæ;) Extrahendo radicem utramq; prodit

$$\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{16}a^3x^6 - \frac{5}{128}a^4x^8 \&c.}{1 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 - \frac{5}{128}b^4x^8 \&c.}$$

Et Dividendo, sicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{3}{8}b^2x^4 + \frac{5}{16}b^3x^6 + \frac{35}{128}b^4x^8 \&c. \\ &+ \frac{1}{2}a \quad + \frac{1}{4}ab \quad + \frac{3}{16}ab^2 \quad + \frac{5}{32}ab^3 \\ &\quad \quad - \frac{1}{8}a^2 \quad - \frac{1}{16}a^2b \quad - \frac{3}{64}a^2b^2 \\ &\quad \quad \quad + \frac{1}{16}a^3 \quad + \frac{1}{32}a^3b \\ &\quad \quad \quad \quad \quad - \frac{5}{128}a^4 \end{aligned}$$

Adeoque Aream quaesitam $x + \frac{1}{6}bx^3 + \frac{3}{40}b^2x^5 \&c.$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{6}a \quad + \frac{1}{20}ab \\ &\quad \quad - \frac{1}{40}a^2 \end{aligned}$$

Sed

Sed observandum est, quod Operatio non raro abbreviatur per debitam Æquationis præparationem, ut in allato Exemplo $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$. Si utramque partem fractionis per $\sqrt{1-bxx}$ multiplices prodibit

$\frac{\sqrt{1+\frac{ax^2}{b}-abx^4}}{1+bx^2} = y$, & reliquum opus perficitur extrahendo Radicem Numeratoris tantum, & dividendo per Denominatorem.

Ex hisce, credo, satis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipsius y (quibuscunque Radicibus vel Denominatoribus fit perplexus, ut hic videre est;

$$x^3 + \frac{\sqrt{x - \sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{ax^2+x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^2}}{\sqrt[3]{x+x^2} - \sqrt[2]{2x-x^3}} = y) \text{ in series Infinitas}$$

simplicium Terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæsitæ Superficies cognoscetur.

Exempla per Resolutionem Æquationum,

NUMERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO.

Quia tota difficultas in Resolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primum illustrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, resolvenda: Et sit z , numerus qui minus quam decima sui parte differt a Radice quæsitæ. Tum pono $z + p = y$, & substituo hunc ipsi valorem in Æquationem, & inde nova prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, cujus Radix p exquirenda est, ut quotienti addatur: Nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$, sive $p = 0,1$ prope veritatem est; itaque scribo $0,1$ in quotiente, & suppono $0,1 + q = p$, & hunc ejus valorem, ut prius substituo, unde prodit $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$.

Et cum $11,23q + 0,061$ veritati prope accedit, sive fere fit q æqualis $-0,0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur Figuræ, quot locis primæ Figuræ hujus & principalis quotientis exclusive distant) scribo $-0,0054$ in inferiori parte quotientis, cum negativa fit.

Et

Et supponens $-0,0054 + r = q$, hunc ut prius substituo, & operationem sic produco quo usq; placuerit. Verum si ad bis tot figuras tantum quot in Quotiente jam reperiuntur una dempta, operam continuare cupiam, pro q substituo $-0,0054 + r$ in hanc $6,3q^2 + 11,23q + 0,061$, scilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem suam

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+ 2,10000000$
		$- 0,00544853$
		$+ 2,09455147 = y$
$2 + p = y$	$+ y^3$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$
	$+ 2y$	$- 4 - 2p$
	$- 5$	$- 5$
	Summa	$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p$	$+ p^3$	$+ 0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$
	$+ 6p^2$	$+ 0,06 + 1,2 + 6,0$
	$+ 10p$	$+ 1, + 10,$
	$- 1$	$- 1,$
	Summa	$+ 0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$-0,0054 + r = q$	$+ 6,3q^2$	$+ 0,000183708 - 0,06804r + 6,3r^2$
	$+ 11,23q$	$- 0,060642 + 11,23$
	$+ 0,061$	$+ 0,061$
	Summa	$+ 0,000541708 + 11,16196r + 6,3r^2$
$-0,00004854 + s = r$		

neglecto, & prodit $6,3r^2 + 11,16196r + 0,000541708 = 0$ fere, sive (rejectione $6,3r^2$) $r = \frac{-0,000541708}{11,16196} = -0,00004853$ fere, quam scribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa subducens habeo $2,09455147$ Quotientem quaesitam.

Æquationes plurium dimensionum nihilo secius resolvuntur, & operam sub fine, ut hic factum fuit levabis, si primos ejus terminos gradatim omiseris.

Præterea notandum est quod in hoc exemplo, si dubitarem an $0,1 = p$ veritati satis accederet, pro $10p - 1 = 0$, finxissem $6p^2 + 10p - 1 = 0$, & ejus radices primam figuram in Quotiente scripsissem; & secundam vel tertiam Quotientis figuram sic explorare convenit, ubi in Æquatione ista ultimo resultante quadratum coefficientis penultimi termini, non sit decies majus quam factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi.

C

Imo



Imo laborem plerumque minues præsertim in Æquationibus plurimarum dimensionum, si figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc est extrahendo minorem radicem, ex tribus ultimis terminis Æquationis novissime resultantis) exquiras: Isto enim modo figuras duplo plures qualibet vice Quotienti lucraberis.

Hæc Methodus resolvendi Æquationes pervulgata an sit nescio, certe mihi videtur præ reliquis simplex, & usui accommodata. Demonstratio ejus ex ipso modo operandi patet, unde cum opus sit, in memoriam facile revocatur.

Æquationes in quibus vel aliqui vel nulli Termini desint, eadem fere facilitate tractantur; & Æquatio semper relinquitur, cujus Radix una cum acquisita Quotiente adæquat Radicem Æquationis primo propositæ. Unde Examinatio Operis hic æque poterit institui ac in reliqua Arithmetica, auferendo nempe Quotientem a Radice primæ Æquationis (sicut Analytici notum est) ut Æquatio ultima vel Termini ejus duo tresve ultimi producantur inde. Quicquid laboris hic est, istud in Operatione substituendi quantitates unas pro aliis reperietur: Id quod varie perficias, at sequentem modum maxime expeditum puto, præsertim ubi Numeri Coefficientes constant ex pluribus Figuris.

Sit $p + 3$ substituenda pro y in hanc $y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17 = 0$. Et cum ista possit resolvi in hanc formam

$$\begin{aligned} y - 4 \times y + 5 \times y - 12 \times y + 17 &= 0. \text{ Æquatio nova sic generabitur} \\ p - 1 \times p + 3 &= p^2 + 2p - 3. \text{ et } p^2 + 2p + 2 \text{ in } p + 3 = p^3 + 5p^2 + \\ 8p + 6. \text{ et } p^3 + 5p^2 + 8p - 6 \text{ in } p + 3 &= p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 18. \\ \text{et } p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 1 &= 0, \text{ quæ quærebatur.} \end{aligned}$$

LITERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO.

His in numeris sic ostensis: Sit Æquatio literalis $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$, resolvenda.

Primum inquiri valorem ipsius y cum x fit nulla, hoc est, elicio Radicem hujus Æquationis $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, & invenio esse $+ a$. Itaque scribo $+ a$ in Quotiente, & supponens $+ a + p = y$, substituo pro y valorem ejus, & Terminos inde resultantes ($p^3 + 3ap^2 + 4a^2p$, &c.) margini appono; Ex quibus assumo $+ 4a^2p + a^2x$ terminos utique ubi p & x seorsim sunt minimarum dimensionum, & eos nihilo fere æquales esse suppono, sive $p = -\frac{1}{4}x$ fere, vel $p = -\frac{1}{4}x + q$. Et scribens

— $\frac{1}{4}x$

— $\frac{1}{4}x$ in Quotiente, substituo — $\frac{1}{4}x + q$ pro p ; Et terminos inde resultantes iterum in margine scribo, ut vides in annexo schemate, & inde assumo Quantitates $+ 4a^2q - \frac{1}{16}ax^2$, in quibus utiq; q & x seorsim sunt minimarum dimensionum, & fingo $q = \frac{xx}{64a}$ fere, sive $q = + \frac{xx}{64a} + r$; & adnectens $+ \frac{xx}{64a}$ Quotienti, substituo $\frac{xx}{64a} + r$ pro q ; & sic procedo quo usque placuerit.

$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ $y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} - \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \&c.$		
$+ a + p = y$	$+ y^3$ $+ a^2y$ $+ axy$ $- 2a^3$ $- x^3$	$+ a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$ $+ a^3 + a^2p$ $+ a^2x + axp$ $- 2a^3$ $- x^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p$	$+ p^3$ $+ 3ap^2$ $+ 4a^2p$ $+ axp$ $+ a^2x$ $- x^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$ $+ \frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq + 3aq^2$ $- a^2x + 4a^2q$ $-\frac{1}{4}ax^2 + axq$ $+ a^2x$ $- x^3$
$+ \frac{x^2}{64a} + r = q$	$+ 3aq^2$ $+ 4a^2q$ $-\frac{1}{2}axq$ $+ \frac{3}{16}x^2q$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$	$+ \frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}x^2r + 3ar^2$ $+ \frac{1}{16}ax^2 + 4a^2r$ $-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$ $-\frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}x^2r$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$
$+ 4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a} (+ \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$		

Sin duplo tantum plures Quotienti terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem; Primo termino (q^3) Æquationis novissime resultantis misso, & ista etiam parte ($-\frac{3}{4}xq^2$) secundi, ubi x est tot dimensionum quot in penultimo termino Quotientis; In reliquos terminos ($3aq^2 + 4a^2q, \&c.$) margini

margini adscriptos ut vides, substituo $\frac{x^2}{64a} + r$ pro q ; & ex ultimis duobus terminis $(\frac{15x^4}{4096a} - \frac{1}{128}x^3 + \frac{9}{32}x^2r - \frac{1}{2}axr + 4a^2r)$ Equationis inde resultantis, facta divisione $4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2) + \frac{1}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}$ elicio $+ \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ Quotienti adnectendos.

Denique Quotiens ista $(a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a}, \&c.)$ per Regulam secundam, dabit $ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2} + \frac{509x^5}{81920a^3}, \&c.$ pro Area quaesita, quae ad veritatem tanto magis accedit, quanto x fit minor.

Alius modus easdem Resolvendi.

Sin valor Areae tanto magis ad veritatem accedere debet quanto x fit major; Exemplum esto $y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$. Itaque hanc resoluturus excerpo terminos $y^3 + x^2y - 2x^3$ in quibus x & y vel seorsim, vel simul multiplicatae, sunt & plurimarum, & aequalium ubique dimensionum; & ex iis quasi nihilo aequalibus Radicem elicio. Hanc invenio esse x , & in Quotiente scribo. Vel quod eodem recidit, ex $y^3 + y - 2$ (unitate pro x substituta) Radicem extraho quae hic prodit 1, & eam per x multiplico, & factum (x) in Quotiente scribo. Denique pono $x + p = y$, & sic procedo ut in priori Exemplo, donec habeam Quotientem $x - \frac{a}{4} + \frac{aa}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3}, \&c.$ adeoque Aream $\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4}$

$+ \boxed{\frac{aa}{64x}} - \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2}$, de qua vide exempla tertiae Regulae secundae.

Lucis gratia dedi hoc exemplum in omnibus idem cum priori, modo x & a sibi invicem ibi substituantur, ut non opus esset aliud Resolutionis exemplum hic adjungere.

Area autem $(\frac{xx}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}} \&c.)$ terminatur ad Curvam quae

juxta Asymptoton aliquam in infinitum serpit; & Termini initiales $(x - \frac{1}{4}a)$ valoris extracti de y , in Asymptoton istam semper terminantur; unde portionem Asymptoti facile invenies. Idem semper notandum est cum Area designatur terminis plus plusque divis per x continue, praeterquam quod vice Asymptoti rectae quandoque habeatur Parabola Conica, vel alia magis composita.

Sed

Sed hunc modum missum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem Curvis in orbem ad instar Ellipsoidum flexis; de altero modo per exemplum $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, supra ostenso (scilicet quo demensiones ipsius x in numeratoribus quotientis perpetuo augeantur) annotabo sequentia.

1. Si quando accidit quod valor ipsius y , cum x nullum esse fingitur, sit quantitas surda vel penitus ignota, licebit illam litera aliqua designare. Ut in exemplo, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, si radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3$ fuisset surda vel ignota, finxissem quamlibet (b) pro ea ponendam; et resolutionem ut sequitur perfecissem. Scribens b in Quotiente, suppono $b + p = y$, & istum pro y substituo, ut vides; unde nova $p^3 + 3bp^2$, &c. resultat, rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo sunt æquales, propterea quod b supponitur Radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $-\frac{abx}{3b^2 + a^2}$ quotienti apponendum, et $-\frac{abx}{3b^2 + a^2} + q$ substituendum pro p , &c.

$y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$. Sit $cc = 3b^2 + a^2$.		
$y = b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8} - \frac{a^5bx^3}{c^8} + \frac{a^5b^3x^3}{c^{10}} \&c.$		
$b + p = y$	y^3 $+ axy$ $+ aay$ $- x^3$ $- 2a^3$	$+ b^3 + 3b^2p + 3bp^2 + p^3$ $+ abx + axp$ $+ aab + aap$ $- x^3$ $- 2a^3$
$-\frac{abx}{cc} + q = p$	p^3 $+ 3bp^2$ $+ axp$ $+ ccp$ $- x^3$ $+ abx$	$- \frac{a^3b^3x^3}{c^6} \&c.$ $+ \frac{3a^2b^3x^2}{c^4} - \frac{6ab^2x}{c^2} q \&c.$ $- \frac{a^2bx^2}{c^2} + axq$ $- abx + ccq$ $- x^3$ $+ abx$
$c^2 + ax - \frac{6ab^2x}{cc} \left(\frac{a^4bx^2}{c^4} + x^3 + \frac{a^3b^3x^3}{c^6} \left(\frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8} \right) \&c. \right)$		

Completo opere, sumo numerum aliquem pro a , & hanc $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, sicut de numerali æquatione ostensum supra resolvo; & radicem ejus pro b substituo.

2. Si dictus valor sit nihil, hoc est si in æquatione resolvenda nullus sit terminus nisi qui per x vel y sit multiplicatus, ut in hac $y^3 - axy + x^3 = 0$; tum terminos ($-axy + x^3$) seligo in quibus x seorsim & y etiam seorsim si fieri potest, alias per x multiplicata, sit minimarum dimensionum. Et illi

D

illi dant $+\frac{xx}{a}$ pro primo termino quotientis, & $\frac{xx}{a} + p$ pro y substituendum. In hac $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$, licebit primum terminum quotientis vel ex $-a^2y - x^3$, vel ex $y^3 - a^2y$ elicere.

3. Si valor iste fit imaginarius, ut in hac $y^4 + y^2 - 2y + 6 - x^2y^2 - 2x + x^2 + x^4 = 0$, augeo vel imminuo quantitatem x donec dictus valor evadat realis.

Sic in annexo schemate, cum AC (x) nulla est, tum CD (y) est imaginaria.

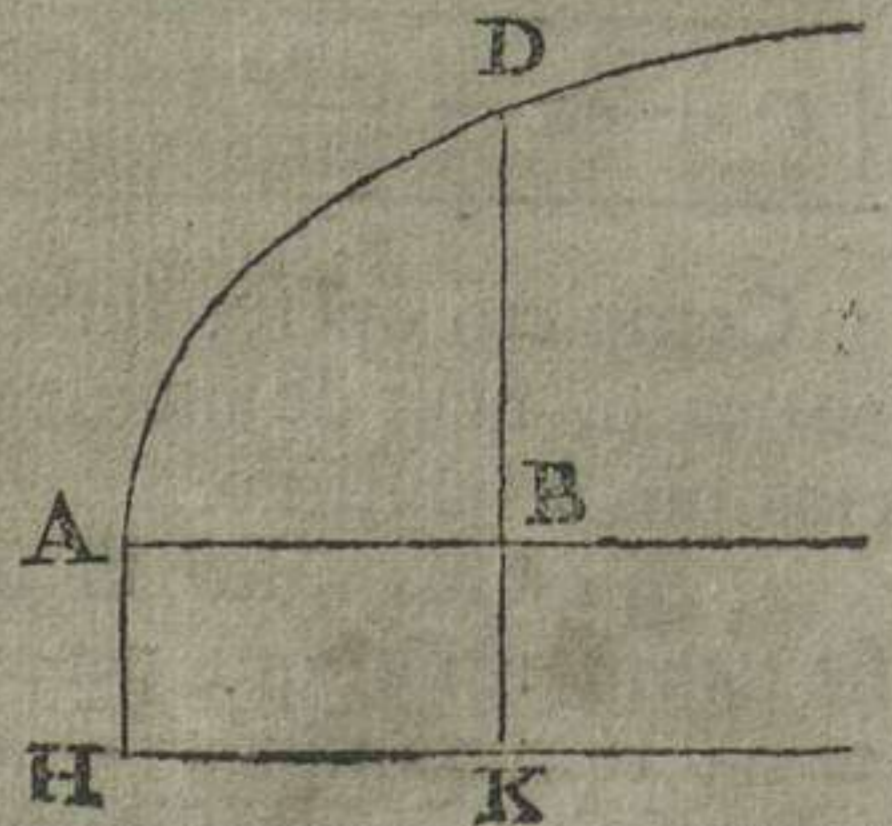
Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x ; tum posito quod BC (x) fit nulla, CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum radicum (CE, CF, CG, vel CH) quælibet potest esse primus terminus quotientis, prout superficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC desideratur. In aliis etiam casibus, si quando hæfitas, te hoc modo extricabis.

Deniq; si index potestatis ipsius x vel y fit fractio, reduco ipsum ad integrum: ut in hoc exemplo $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$. Posito $y^{\frac{1}{2}} = v$, & $x^{\frac{1}{3}} = z$, resultabit $v^6 - z^3v + z^4 = 0$, cujus radix est $v = z + z^3$, &c. five (restituendo valores) $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x$, &c. & quadrando $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}$, &c.

Et hæc de areis curvarum investigandis dicta sufficiant. Imo cum Problemata omnia de curvarum Longitudine, de quantitate & superficie solidorum, deque Centro Gravitatis, possunt eo tandem reduci ut quærat quantitas Superficie planæ linea curva terminatæ, non opus est quicquam de iis adjungere. In istis autem quo ego operor modo dicam brevissime.

Applicatio prædictorum ad reliqua istiusmodi Problemata.

Sit ABD curva quævis, & AHKB rectangulum cujus latus AH vel BK est unitas. Et cogita rectam DBK uniformiter ab AH motam, areas ABD & AK describere; & quod BK (I) fit momentum quo AK (x) & BD (y) momentum quo ABD gradatim augetur; & quod ex momento BD perpetim dato, possis, per prædictas regulas, aream ABD ipso descriptam investigare, five cum AK (x) momento I descripta conferre.

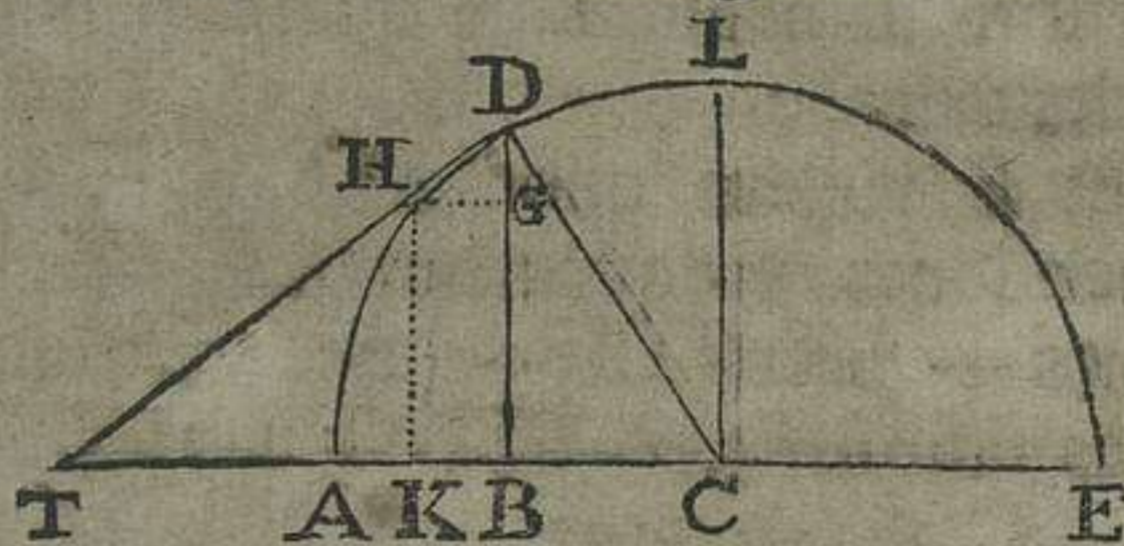


Jam

Jam qua ratione Superficies ABD ex momento suo perpetim dato, per præcedentes regulas elicitur, eadem qualibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior.

Longitudines Curvarum invenire.

Sit ADLE circulus cujus arcus AD longitudo est indaganda. Ducto tangente DHT, & completo indefinite parvo reſtanguſo HGBK, & poſito AE = 1 = 2AC. Erit ut BK five GH, momentum Baſis AB (x), ad HD momentum Arcus AD :: BT : DT :: BD ($\sqrt{x-xx}$) : DC ($\frac{1}{2}$) :: 1 (BK) :



$\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ (DH). Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ five $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$ eſt momentum Arcus AD.

Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}} + \frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

Quare, per regulam ſecundam, longitudo Arcus AD eſt

$$x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{9}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{11}{2}} + \frac{63}{2816}x^{\frac{13}{2}}$$
 &c.

five $x^{\frac{3}{2}}$ in 1 + $\frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 + \frac{63}{2816}x^5$, &c.

Non ſecus ponendo CB eſſe x, & radium CA eſſe 1, invenies Arcum LD eſſe $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c.

Sed notandum eſt quod unitas iſta quæ pro momento ponitur eſt Superficies cum de Solidis, & linea cum de ſuperficiebus, & punctum cum de lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

Nec vereor loqui de unitate in punctis, five lineis infinite parvis, ſi quidem proportionibus ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodis Indivifibilium.

Ex his fiat conjectura de ſuperficiebus & quantitatibus ſolidorum, ac de Centris Gravitatum.

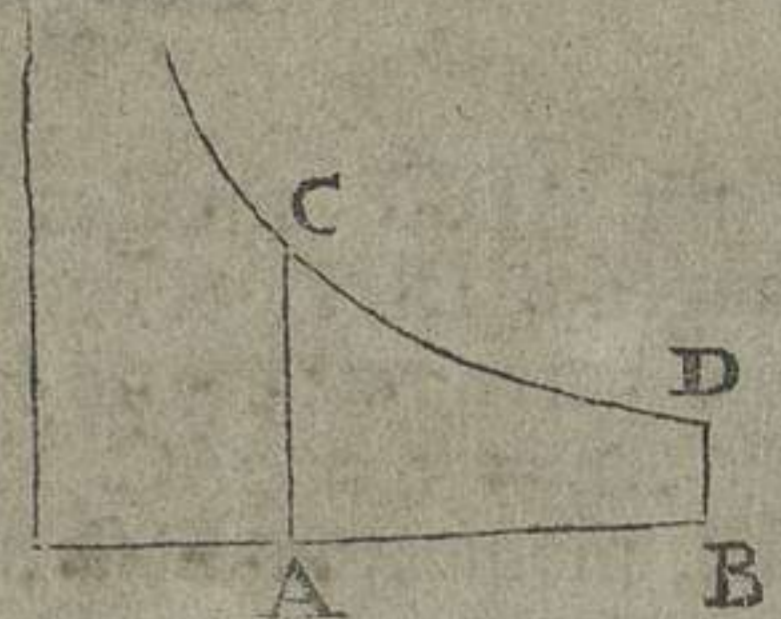
Invenire prædictorum converſum.

Verum ſi e contra ex area vel longitudine &c. Curvæ alicujus data longitudo Baſis AB deſideratur, ex æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur radix de x.

Inven-

Inventio Basis ex Area data.

Ut si ex area ABDC Hyperbolæ ($\frac{1}{1+x} = y$) data, cupiam basim AB investigare, area ista z nominata, extraho radicem hujus z (ABCD) $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis terminis in quibus x est plurium dimensionum quam z in quotiente desideratur.



Ut si vellem quod z ad quinque tantum dimensiones in quotiente ascendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8$, &c. et radicem hujus tantum $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0$ extraho.

$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.		
$z + p = x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5, \text{ \&c.}$
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p, \text{ \&c.}$
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2, \text{ \&c.}$
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+ x$	$+ z + p$
	$- z$	$- z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+ zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5, \text{ \&c.}$
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q, \text{ \&c.}$
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5, \text{ \&c.}$
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$-z p$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+ p$	$+\frac{1}{2}z^2 + q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{20}z^5 \left(\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 \right)$		

Analyfin ut vides exhibui propter adnotanda duo sequentia.

1. Quod inter substituendum, istos terminos semper omitto quos nulli deinceps usui fore prævideam. Cujus rei regula esto, quod post primum terminum ex qualibet quantitate sibi collateraliter resultantem non addo plures terminos dextrorsum quam istius primi termini index dimensionis

ab

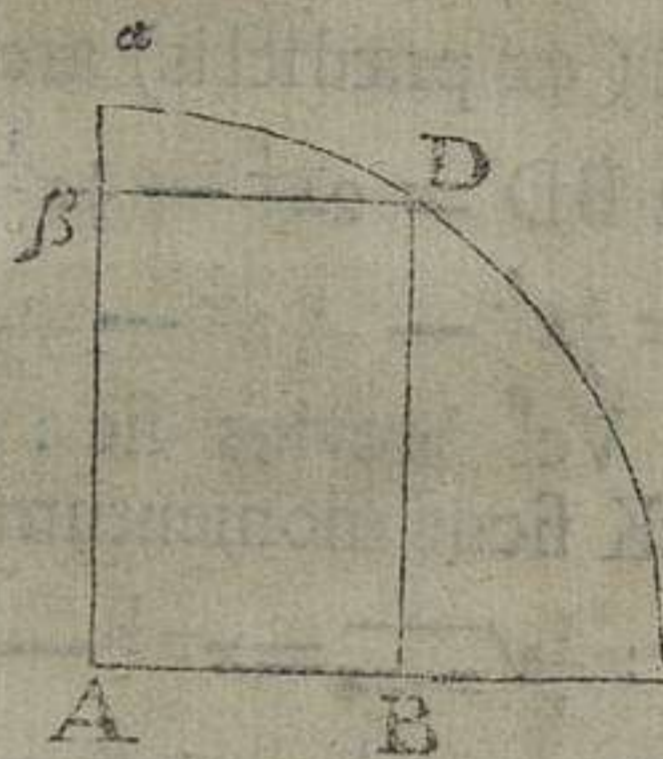
ab indice dimensionis maximæ unitatibus distat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimensio est 5, omisi omnes terminos post z^5 , post z^4 posui unicum, & duos tantum post z^3 . Cum radix extrahenda (x) sit parium ubique, vel imparium dimensionum, hæc esto regula; Quod post primum terminum ex qualibet quantitate sibi collateraliter resultantem non addo plures terminos dextrorsum, quam istius primi termini index dimensionis ab indice dimensionis maximæ binis unitatibus distat; vel ternis unitatibus, si indices dimensionum ipsius x unitatibus ubique ternis a se invicem distant, & sic de reliquis.

2. Cum video $p, q, \text{vel } r, \text{ \&c.}$ in æquatione novissime resultante esse unius tantum dimensionis, ejus valorem, hoc est, reliquos terminos quotienti addendos, per divisionem quæro. Ut hic vides factum.

Inventio Basis ex data Longitudine Curvæ.

Si ex dato arcu aD Sinus AB desideratur; æquationis $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7, \text{ \&c.}$ supra inventæ, (posito nempe $AB = x, aD = z, \text{ \& } Aa = 1,$) radix extracta erit $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9, \text{ \&c.}$

Et præterea si Cofinum $A\beta$ ex isto arcu dato cupis, fac $A\beta (= \sqrt{1-xx}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}, \text{ \&c.}$



De Serie progressionum continuanda.

Hic obiter notetur, quod 5 vel 6 terminis istarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogia observata poteris ad arbitrium producere.

Sic hanc $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5, \text{ \&c.}$ produces dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et hanc $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7, \text{ \&c.}$ per hos $2 \times 3, 4 \times 5, 6 \times 7, 8 \times 9, 10 \times 11, \text{ \&c.}$

Et hanc $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6, \text{ \&c.}$ per hos $1 \times 2, 3 \times 4, 5 \times 6, 7 \times 8, 9 \times 10, \text{ \&c.}$

Et hanc $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7, \text{ \&c.}$ multiplicando per hos $\frac{1 \times 1}{2 \times 3}, \frac{3 \times 3}{4 \times 5}, \frac{5 \times 5}{6 \times 7}, \frac{7 \times 7}{8 \times 9}, \text{ \&c.}$ Et sic in reliquis.

E

Ap-

Applicatio prædictorum ad Curvas Mechanicas.

Et hæc de curvis Geometricis dicta sufficiant. Mechanica fit, methodum tamen nostram nequaquam respuit.

Exemplo fit Trochoides, ADFG, cujus vertex A, & axis AH, & AKH rota qua describitur. Et quærat Superficies ABD. Jam posito $AB = x$, $BD = y$, ut supra, & $AH = 1$; primo quæro Longitudinem ipsius BD. Nempe ex natura Trochoidis est $KD = \text{arcti AK}$. Quare tota $BD = BK + \text{arc. AK}$. Sed est BK ($= \sqrt{x - xx}$) $= x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c.

& (ex prædictis) arcus $AK = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Ergo tota $BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Et (per Reg. 2.) area ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$, &c.

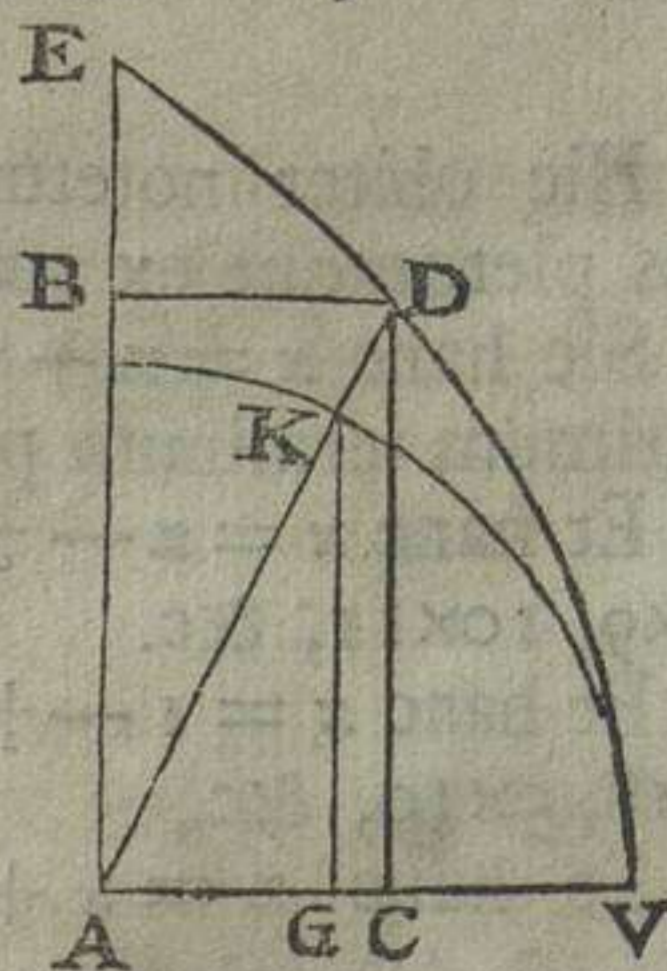
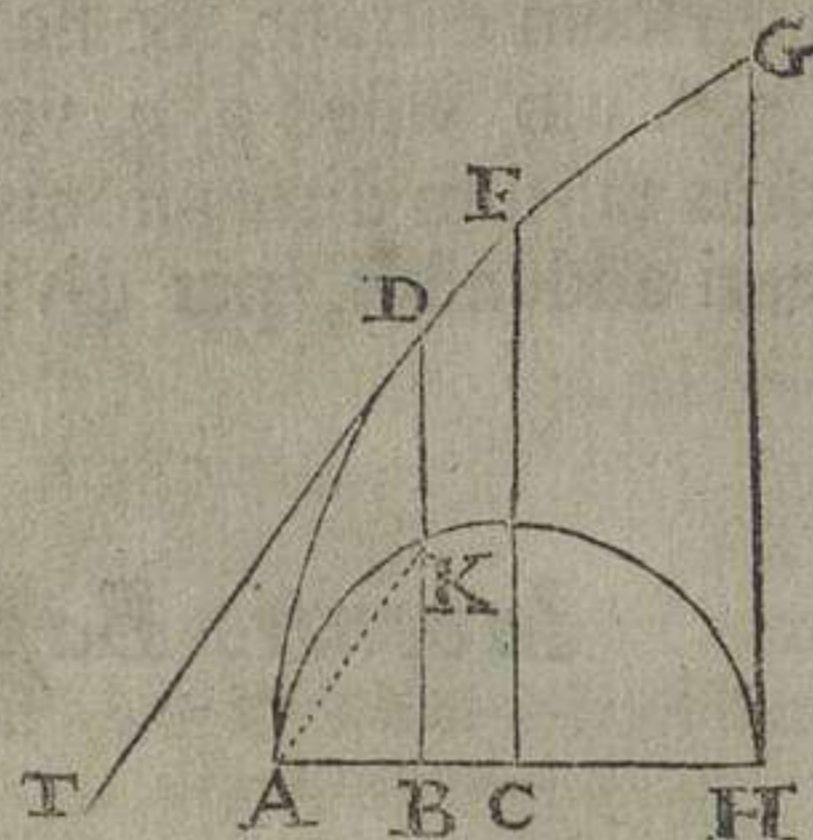
Vel brevius sic: Cum recta AK tangenti TD parallela fit, erit AB ad BK sicut momentum lineæ ABad momentum lineæ BD, hoc est $x : \sqrt{x - xx} ::$

$1 : \frac{1}{x}\sqrt{x - xx} = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Quare (per Reg. 2.) $BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{768}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Et superficies ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{3168}x^{\frac{11}{2}}$, &c.

Non dissimili modo (posito C centro circuli, & $CB = x$) obtinebis aream CBDF, &c.

Sit area ABdv Quadraticis VDE (cujus vertex est V, & A centrum circuli interioris VK cui apponatur) inveniendâ. Ducta qualibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Eritque $KG : AG :: AB (x) : BD (y)$, five $\frac{x \times AG}{KG} = y$. Verum ex natura Quadraticis est BA (= DC) = arcui VK, five $VK = x$. Quare posito $AV = 1$, erit $GK = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, &c. ex supra ostensis, & $GA = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$, &c.

Quinetiam curva etiamfi



Adeoque

Adeoque $y (= \frac{x \times AG}{KG}) = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1}{7 \cdot 2 \cdot 0}x^6}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 0}x^4 - \frac{1}{5 \cdot 0 \cdot 4 \cdot 0}x^6}$ &c. five, divisione facta, $y = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4 \cdot 5}x^4 - \frac{2}{9 \cdot 4 \cdot 5}x^6$, &c. et (per Reg. 2.) area AVDB = $x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 5}x^5 - \frac{2}{6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 5}x^7$, &c.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliore, determinabilis est.

Nec quicquam hujusmodi scio ad quod hæc methodus idque variis modis, sese non extendit. Imo tangentes ad curvas Mechanicas (si quando id non alias fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analyfis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id fit possibile) perficit, hæc per æquationes infinitas semper perficiat: Ut nil dubitaverim nomen Analyfis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa sunt quam in illa, nec æquationes minus exactæ; licet omnes earum terminos, nos homines & rationis finitæ nec designare neque ita concipere possimus, ut quantitates inde desideratas exacte cognoscamus: Sicut radices surdæ finitarum æquationum nec numeris nec quavis arte Analytica ita possunt exhiberi ut alicujus quantitas a reliquis distincta exacte cognoscatur.

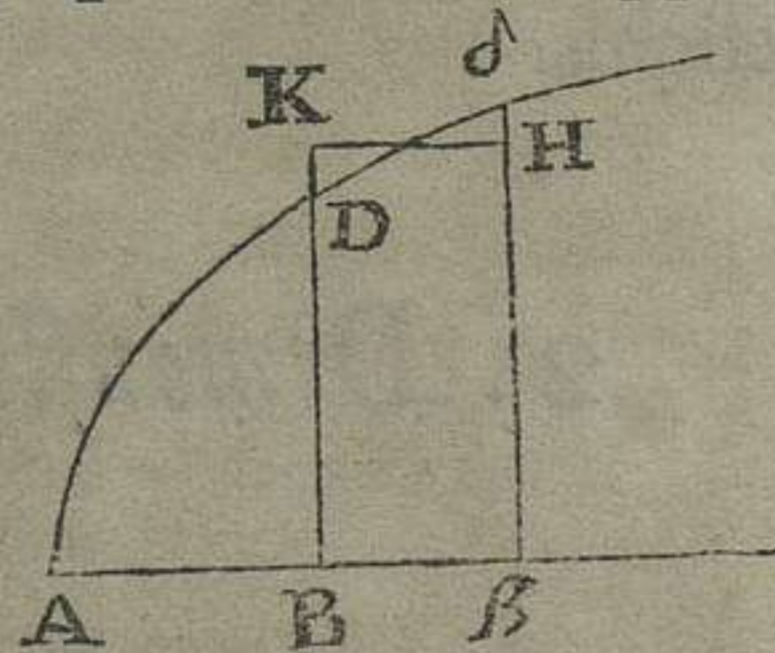
Denique ad Analyticam merito pertinere censeatur cujus beneficio curvarum area & longitudo &c. (id modo fiat) exacte & Geometricè determinentur. Sed ista narrandi non est locus, respicienti duo præ reliquis demonstranda occurrunt.

I. Demonstratio quadraturæ curvarum simplicium in Regula prima.

Præparatio pro Regula prima demonstranda.

Sit itaque curvæ alicujus AD, Basis AB = x, perpendiculariter applicata BD = y, & area ABD = z, ut prius. Item fit Bβ = o, BK = v, & rectangulum BβHK (ov) æquale spatio BβδD.

Est ergo Aβ = x + o, & Aδβ = z + ov. His præmissis, ex relatione inter x & z ad arbitrium assumpta quero y isto, quem sequentem vides, modo.



Pro lubitu sumatur $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, five $\frac{4}{9}x^3 = zz$.

Tum $x + o$ (Aβ) pro x , & $z + ov$ (Aδβ) pro z substitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 =$ (ex natura curvæ) $z^2 + 2zov + o^2v^2$.

Et

Et sublatis ($\frac{4}{9}x^3$ & zx) æqualibus, reliquisque per o divis, restat $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + ov^2$. Si jam supponamus $\beta\beta$ in infinitum diminui & evanescere, five o esse nihil, erunt v & y æquales, & termini per o multiplicati evanescent, quare restabit $\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv$, five $\frac{2}{3}xx (= zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, five $x^{\frac{1}{2}} (= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}) = y$. Quare e contra si $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

Demonstratio.

Vel generaliter, si $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; five, ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, & $m+n=p$, si $cx^{\frac{p}{n}} = z$, five $c^n x^p = z^n$: tum $x + o$ pro x , & $z + ov$ (five, quod perinde est, $z + oy$) pro z , substitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, &c. $= z^n + noyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe terminis, qui tandem evanescerent, omissis. Jam sublatis $c^n x^p$ & z^n æqualibus, reliquisque per o divis, restat $c^n px^{p-1} = nyz^{n-1}$ ($= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}$ five, dividendo per $c^n x^p$, erit $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$ five $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel restituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c , & $m+n$ pro p , hoc est, m pro $p-n$, & na pro pc , fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare e contra, si $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.

Inventio curvarum quæ possunt quadrari.

Hinc in transitu notetur modus quo curvæ tot quot placuerit, quarum areae sunt cognitæ, possunt inveniri; sumendo nempe quamlibet æquationem pro relatione inter aream z & basin x ut inde quæratur applicata y . Ut si supponas $\sqrt{aa+xx} = z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}} = y$. Et sic de reliquis.

2. Demonstratio resolutionis æquationum affectarum.

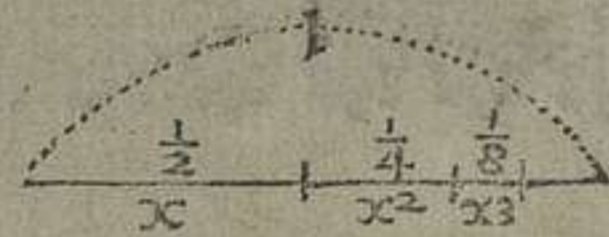
Alterum demonstrandum est literalis æquationum affectarum resolutio. Nempe quod Quotiens, cum x sit satis parva, quo magis producitur eo magis ad veritatem accedit, ut defectus (p, q , vel r , &c.) quo distat ab exacto valore

valore

valore ipsius y , tandem evadat minor quavis data quantitate; & in infinitum producta fit ipsi y æqualis. Quod sic patebit.

1. Quoniam ex ultimo termino æquationum quarum $p, q, r, \&c.$ sunt radices, quantitas illa in qua x est minimæ dimensionis (hoc est, plusquam dimidium istius ultimi termini, si supponis x satis parvam esse) in qualibet operatione perpetuo tollitur: iste ultimus terminus (per I. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quavis data quantitate; & prorsus evanescet si opus infinite continuatur.

Nempe si $x = \frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x + x^2 + x^3 + x^4, \&c.$ et x^2 dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4 + x^5, \&c.$ Itaque si $x \supset \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + x^2 + x^3, \&c.$ et x^2 plusquam dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4, \&c.$ Sic si $\frac{x}{b} \supset \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + \frac{x^2}{b}$



+ $\frac{x^3}{bb}$, &c. Et sic de reliquis. Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque decrescunt perpetuo, vel si quando increscant, tantum opus est ut x aliquoties adhuc minor supponatur.

2. Si ultimus terminus alicujus æquationis continuo diminuatur donec tandem evanescat, una ex ejus radicibus etiam diminuetur donec cum ultimo termino simul evanescat.

3. Quare quantitatibus $p, q, r, \&c.$ unus valor continuo decrescit donec tandem, cum opus in infinitum producitur, penitus evanescat.

4. Sed valores istarum $p, q, \text{vel } r, \&c.$ una cum quotiente eatenus extracta adæquant radices æquationis propositæ (Sic in resolutione æquationis $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, supra ostensa, percipies $y = a + p = a - \frac{1}{4}x + q = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + r, \&c.$) Unde satis liquet propositum quod quotiens infinite producta est una ex valoribus de y .

Idem patebit substituendo quotientem pro y in æquationem propositam. Videbis enim terminos illos sese perpetuo destruere in quibus x est minimarum dimensionum.



F





CUM in Epistolis D. Newtoni, vel in lucem jamdudum editis, vel quæ in manus nostras inciderunt, reperiantur aliqua quæ ad hanc Doctrinam pertinent, ea excerpere & huic Tractatui adjungere visum est.



EXCERPTA

Ex Epistolis D. NEWTONI

Ad Methodum

FLUXIONUM,

ET

SERIERUM INFINITARUM

Spectantibus.

*Fragmentum *Epistola ad D. Oldenburgium 13 Junii 1676 missa.*



Ractiones in Infinitas Series reducuntur per divisionem ; & quantitates radicales per extractionem radicum, perinde instituendo operationes istas in speciebus ac institui solent in decimalibus numeris. Hæc sunt fundamenta harum reductionum ; sed extractiones radicum, multum abbreviantur per hoc *Theorema*.

$$\sqrt[n]{P + PQ} = \sqrt[n]{P} + \frac{m}{n} \frac{AQ}{\sqrt[n]{P}} + \frac{m-2n}{2n} \frac{BQ^2}{\sqrt[n]{P}} + \frac{m-3n}{3n} \frac{CQ^3}{\sqrt[n]{P}} + \frac{m-4n}{4n} \frac{DQ^4}{\sqrt[n]{P}} + \&c.$$

Ubi $P + PQ$ significat quantitatem cujus Radix, vel etiam dimensio quævis, vel radix dimensionis, investiganda est. P , primum terminum quantitatis ejus ; Q , reliquos terminos divisos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem indicem dimensionis ipsius $P + PQ$: Sive dimensio illa integra sit ; sive (ut ita loquar) fracta ; sive affirmativa, sive negativa. Nam, sicut Analystæ, pro aa , aaa , &c. scribere solent a^2 , a^3 , &c. sic ego, pro \sqrt{a} , $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$, &c. scribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{2}}$; & pro $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^5}$, scribo a^{-2} , a^{-3} , a^{-5} .

Et

* Extat Epistola in Tom. 3. Operum Wallisii.

Et sic pro $\frac{aa}{\sqrt{c: a^3 + b^2x}}$ scribo $aa \times \overline{a^3 + b^2x}^{-\frac{1}{2}}$; & pro $\frac{a^2b}{\sqrt{c: a^3 + b^2x \times a^3 + b^2x}}$ scribo $a^2b \times \overline{a^3 + b^2x}^{-\frac{2}{3}}$: In quo ultimo casu, si $\overline{a^3 + b^2x}^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur esse $\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}}$ in Regula; erit $P = a^3$, $Q = \frac{b^2x}{a^3}$, $m = -2$, & $n = 3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in quoto, usurpo A, B, C, D, &c. nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$, B pro secundo $\frac{m}{n}AQ$, & sic deinceps. Cæterum usus Regulæ patebit exemplis.

Exempl. 1. Est $\sqrt{c^2 + x^2}$ (seu $\overline{c^2 + x^2}^{\frac{1}{2}}$) = $c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9}$ &c. Nam, in hoc casu, est $P = c^2$, $Q = \frac{x^2}{c^2}$, $m = 1$, $n = 2$, A (= $P^{\frac{m}{n}} = \overline{cc}^{\frac{1}{2}}$) = c , B (= $\frac{m}{n}AQ$) = $\frac{x^2}{2c}$, C (= $\frac{m-n}{2n}BQ$) = $-\frac{x^4}{8c^3}$, & sic deinceps.

Exempl. 2. Est $\sqrt[5]{c^5 + c^4x - x^5}$ (i. e. $\overline{c^5 + c^4x - x^5}^{\frac{1}{5}}$) = $c + \frac{c^4x - x^5}{5c^4} - \frac{2c^8x^2 + 4c^4x^6 - 2x^{10}}{25c^9} + \text{&c.}$ Ut patebit substituendo in allatam Regulam, 1 pro m , 5 pro n , c^5 pro P, & $\frac{c^4x - x^5}{c^5}$ pro Q. Potest etiam $-x^5$ substitui pro P, & $\frac{c^4x + c^5}{-x^5}$ pro Q, et tunc evadet $\sqrt[5]{c^5 + c^4x - x^5} = -x + \frac{c^4x + c^5}{5x^4} + \frac{2c^8x^2 + 4c^9x + c^{10}}{25x^9} + \text{&c.}$ Prior modus eligendus est, si x valde parvum sit; posterior, si valde magnum.

Exempl. 3. Est $\frac{N}{\sqrt[3]{y^3 - a^2y}}$ (hoc est, $\overline{N \times y^3 - a^2y}^{-\frac{1}{3}}$) æqualis $N \times \frac{1}{y} + \frac{a^2}{3y^3} + \frac{2a^4}{9y^5} + \frac{14a^6}{81y^7} + \text{&c.}$ Nam $P = y^3$, $Q = \frac{-aa}{yy}$, $m = -1$, $n = 3$. A (= $P^{\frac{m}{n}} = y^3 \times^{-\frac{1}{3}}$) = y^{-1} , hoc est $\frac{1}{y}$. B (= $\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{y} \times \frac{-aa}{yy}$) = $\frac{aa}{3y^3}$, &c.

Exempl. 4. Radix cubica ex quadrato-quadrato ipsius $d + e$, (hoc est, $\overline{d + e}^{\frac{4}{3}}$) est $d^{\frac{4}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2e^2}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}} + \text{&c.}$

Nam $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = 4$, $n = 3$, A (= $P^{\frac{m}{n}}$) = $d^{\frac{4}{3}}$, &c.

Exempl. 5. Eodem modo simplices etiam potestates eliciuntur. Ut si quadrato-cubus ipsius $d + e$, (hoc est, $\overline{d + e}^{\frac{5}{2}}$, seu $\overline{d + e}^{\frac{5}{2}}$) desideretur: erit, juxta Regulam, $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = 5$, & $n = 2$; adeoque A (= $P^{\frac{m}{n}}$) = $d^{\frac{5}{2}}$, B (= $\frac{m}{n}AQ$) = $5d^{\frac{3}{2}}e$, & sic C = $10d^{\frac{1}{2}}e^2$, D = $10d^{\frac{1}{2}}e^3$, E = $5de^4$, F = e^5 , & G (= $\frac{m-5n}{6n}FQ$) = 0. Hoc est, $\overline{d + e}^{\frac{5}{2}} = d^{\frac{5}{2}} + 5d^{\frac{3}{2}}e + 10d^{\frac{1}{2}}e^2 + 10d^{\frac{1}{2}}e^3 + 5de^4 + e^5$.

Exem.

Exempl. 6. Quinetiam Divisio, five simplex fit, five repetita, per eandem Regulam perficitur. Ut si $\frac{1}{d+e}$ (hoc est $\overline{d+e}^{-1}$ five $\overline{d+e}^{-\frac{1}{1}}$) in seriem simplicium terminorum resolvendum fit: Erit juxta Regulam $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = -1$, $n = 1$, & $A (= P^m = d^{-1}) = d^{-1}$ seu $\frac{1}{d}$, $B (= \frac{m}{n}AQ = -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d} = -\frac{e}{d^2})$, & sic $C = \frac{ee}{d^3}$, $D = -\frac{e^3}{d^4}$, &c. Hoc est $\frac{1}{d+e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{d^2} + \frac{e^2}{d^3} - \frac{e^3}{d^4} + \&c.$

Exempl. 7. Sic et $\overline{d+e}^{-3}$ (hoc est unitas ter divisa per $d+e$, vel semel per cubum ejus,) evadit $\frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6e^2}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} + \&c.$

Exempl. 8. Et $N \times \overline{d+e}^{-\frac{1}{3}}$, (hoc est N divisum per radicem cubicam ipsius $d+e$,) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2e^2}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}} + \&c.$

Exempl. 9. Et $N \times \overline{d+e}^{-\frac{3}{5}}$ (hoc est N divisum per radicem quadrato-cubicam ex cubo ipsius $d+e$, five $\frac{N}{\sqrt[5]{d^3+3d^2e+3de^2+e^3}}$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12e^2}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}} + \&c.$

Per eandem Regulam Genesis Potestatum, Divisiones per Potestates aut per quantitates radicales, & Extractions radicum altiorum in numeris etiam commode instituuntur.

Extractiones Radicum affectarum in speciebus imitantur earum extractions in numeris, sed methodus *Vietæ* & *Oughtredi* nostri huic negotio minus idonea est: Quapropter aliam excogitare adactus sum. [*Hujus specimen exhibetur in Tractatu præcedente Pag. 8.*]

Quomodo ex æquationibus, sic ad infinitas series reductis, Area & Longitudines curvarum, Contenta & Superficies solidorum, vel quorumlibet segmentorum figurarum quarumvis, eorumque Centra gravitatis determinantur; & quomodo etiam Curvæ omnes Mechanicæ ad ejusmodi æquationes infinitarum serierum reduci possint, indeque Problemata circa illas resolvi perinde ac si Geometricæ essent; nimis longum foret describere, sufficiat specimina quædam talium Problematum recensuisse: Inque iis, brevitatis gratia, literas $A, B, C, D, \&c.$ pro terminis seriei, sicut sub initio, nonnunquam usurpabo.

I. Si ex dato sinu recto, vel sinu verso, Arcus desideretur: Sit radius r , & sinus rectus x : Eritque Arcus $= x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} \&c.$ hoc est, $= x + \frac{1 \times 1 \times x \times x}{2 \times 3 \times r \times r} A + \frac{3 \times 3 \times x \times x}{4 \times 5 \times r \times r} B + \frac{5 \times 5 \times x \times x}{6 \times 7 \times r \times r} C + \frac{7 \times 7 \times x \times x}{8 \times 9 \times r \times r} D + \&c.$

Vel, fit d diameter, ac x finus versus; & erit Arcus æqualis

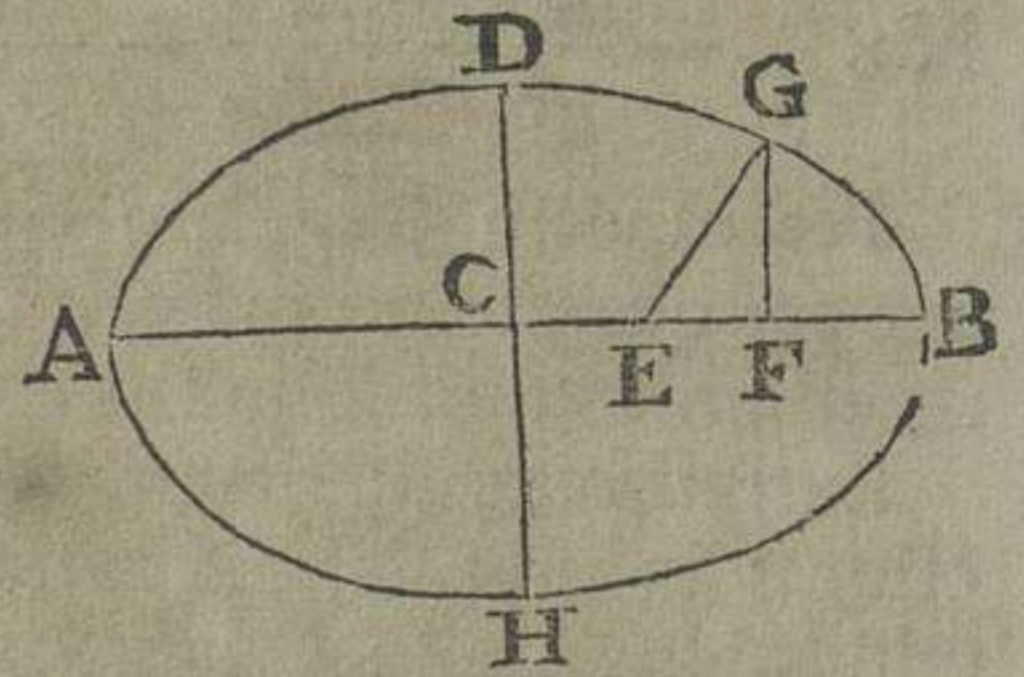
$$d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} + \&c. \text{ hoc est, } = \sqrt{dx} \text{ in}$$

$$1 + \frac{x}{6d} + \frac{3x^2}{40d^2} + \frac{5x^3}{112d^3} + \&c.$$

2. Si vicissim, ex dato Arcu desideretur finus: Sit radius r , & arcus z : Eritque finus rectus $= z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} - \&c.$ hoc est, $= z - \frac{zz}{2 \times 3rr} A - \frac{zz}{4 \times 5rr} B - \frac{zz}{6 \times 7rr} C - \&c.$ Et finus versus $= \frac{z^2}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7} + \&c.$ hoc est, $= \frac{zz}{1 \times 2r} - \frac{zz}{3 \times 4rr} A - \frac{zz}{5 \times r^2} B - \frac{zz}{7 \times 8rr} C - \&c.$

3. Si Arcus capiendus fit in ratione data ad alium Arcum: Esto diameter $= d$, chorda arcus dati $= x$, & arcus quæsitus ad arcum illum datum ut n ad 1; Eritque arcus quæsitæ Chorda $= nx + \frac{1-nn}{2 \times 3dd} xx A + \frac{9-nn}{4 \times 5dd} xx B + \frac{25-nn}{6 \times 7dd} xx C + \frac{36-nn}{8 \times 9dd} xx D + \frac{49-nn}{10 \times 11dd} xx E + \&c.$ Ubi nota, quod cum n est numerus impar, series desinet esse infinita, & evadet eadem quæ prodit per Vulgarem Algebram ad multiplicandum datum angulum per istum numerum n .

4. Si in Axe alterutro AB, Ellipseos ADB (cujus centrum C, & axis alter DH) detur punctum aliquod E, circa quod recta EG occurrens Ellipsi in G, motu angulari feretur; & ex data area sectoris Elliptici BEG, quæratæ recta GF, quæ a puncto G ad axem AB normaliter demittitur: Esto BC = q , DC = r , EB = t , ac duplum areæ BEG = z ;



et erit $GF = \frac{z}{t} - \frac{q}{6r^2t^4} z^3 + \frac{10q^2 - 9qt}{120r^4t^7} z^5 - \frac{280q^3 + 504q^2t - 225qt^2}{5040r^6t^{10}} z^7 + \&c.$ Sic itaque Astronomicum illud *Kepleri* Problema resolvi potest.

5. In eadem Ellipsi, si statuatur CD = r , $\frac{CB^2}{CD} = c$, & CF = x : Erit arcus Ellipticus DG = $x + \frac{1}{6c^2} x^3 + \frac{1}{10rc^3} x^5 + \frac{1}{14r^2c^4} x^7 + \frac{1}{18r^3c^5} x^9 + \frac{1}{22r^4c^6} x^{11} + \&c.$

$$- \frac{1}{40c^4} \quad - \frac{1}{28rc^5} \quad - \frac{1}{24r^2c^6} \quad - \frac{1}{22r^3c^7}$$

$$+ \frac{1}{112c^6} \quad + \frac{1}{48rc^7} \quad + \frac{3}{88r^2c^8}$$

$$- \frac{5}{1152c^8} \quad - \frac{5}{352rc^9}$$

$$+ \frac{7}{2816c^{10}}$$

Hic numerales Coefficientes supremorum terminorum ($\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \&c.$) sunt in Musica progressionē: Et numerales Coefficientes omnium inferiorum in unaquaque columna prodeunt multiplicando continuo numeralem Coefficientem supremi termini per terminos hujus progressionis

$$\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$$

$\frac{1}{2}n-1$, $\frac{3}{4}n-3$, $\frac{5}{6}n-5$, $\frac{7}{8}n-7$, $\frac{9}{10}n-9$, &c. Ubi n significat numerum dimensionum ipsius c in denominatore istius supremi termini. E. g. ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$, numerales coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducoque $\frac{1}{2}$ (numeralem coefficientem ipsius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{1}{2}n-1$, hoc est, in 1; & prodit $\frac{1}{2}$, numeralis coefficientis termini proxime inferioris: dein duco hunc $\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{4}n-3$, five in $\frac{n-3}{4}$, hoc est, in $\frac{3}{4}$; & prodit $\frac{3}{8}$ numeralis coefficientis tertii termini in ista columna. Atque ista $\frac{3}{8} \times \frac{5}{6}n-5$ facit $\frac{5}{3 \cdot 5 \cdot 2}$ numeralem coefficientem quarti termini; & $\frac{5}{3 \cdot 5 \cdot 2} \times \frac{7}{8}n-7$ facit $\frac{7}{2 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 6}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum usque columnis præstari potest: Adeoque valor ipsius DG per hanc Regulam pro lubitu produci.

Adhæc, si BF dicatur x , fitque r latus rectum Ellipseos, & $e = \frac{r}{AB}$; Erit Arcus Ellipticus

$$BG = \sqrt{rx} \text{ in } \left. \begin{array}{l} 1 + 2 \\ - \frac{3}{2}e \\ 3r \end{array} \right\} x \left. \begin{array}{l} - 2 \\ + 3e \\ - \frac{5}{8}e^2 \\ 5r^2 \end{array} \right\} x^2 \left. \begin{array}{l} + 4 \\ - 9e \\ + \frac{23}{4}e^2 \\ - \frac{7}{16}e^3 \\ 7r^3 \end{array} \right\} x^3 \left. \begin{array}{l} - 10 \\ + 30e \\ - \frac{123}{4}e^2 \\ + \frac{91}{8}e^3 \\ - \frac{45}{128}e^4 \\ 9r^4 \end{array} \right\} x^4, + \&c.$$

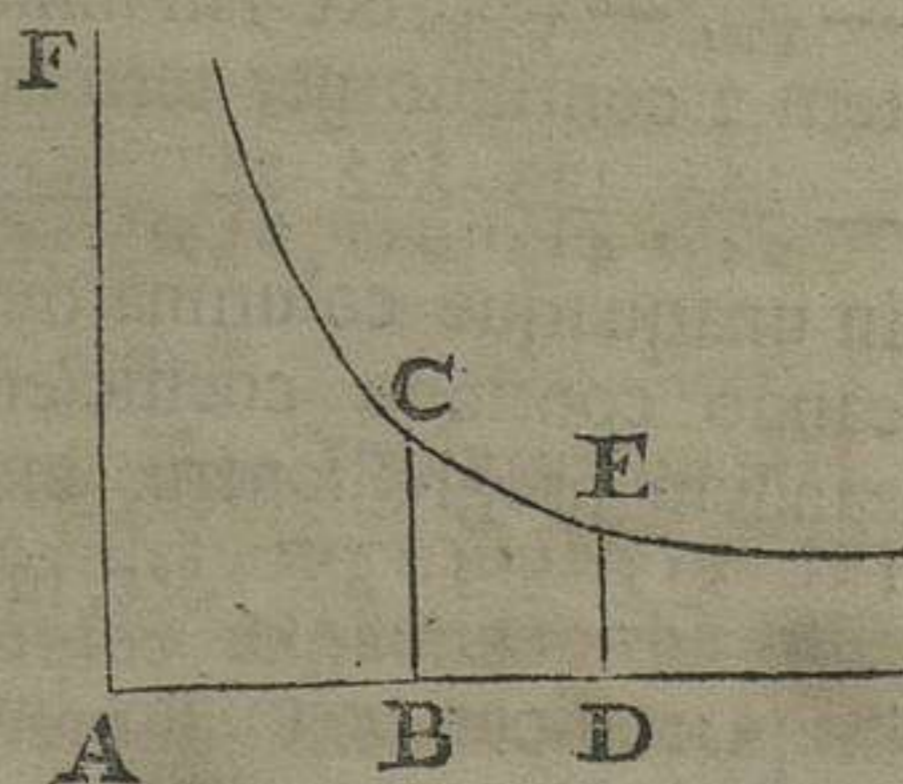
Quare, si ambitus totius Ellipseos desideretur; Biseca CB in F, & quare Arcum DG, per prius Theorema, & Arcum BG per posterius.

6. Si, vice versa, ex dato arcu Elliptico DG, quærat Sinus ejus CF; tum dicto $CD = r$, $\frac{CB^2}{CD} = c$, & arcu illo $DG = z$; Erit

$$CF = z - \frac{1}{6c^2}z^3 - \frac{1}{10rc^3}z^5 - \frac{1}{14r^2c^4}z^7 - \&c. \\ + \frac{13}{120c^4} + \frac{71}{420rc^5} - \frac{493}{5040c^6}$$

Quæ autem de Ellipsi dicta sunt, omnia facile accommodantur ad Hyperbolam; mutatis tantum signis ipsorum c & e ubi sunt imparium dimensionum.

7. Præterea, si sit CE Hyperbola, cujus Asymptoti AD, AF rectum angulum FAD constituent; & ad AD erigantur utcunque perpendiculara BC, DE occurrentia Hyperbolæ in C & E: & AB dicatur a , BC b , & area BCED z ;



Erit

Erit $BD = \frac{z}{b} + \frac{z^2}{2ab^2} + \frac{z^3}{6a^2b^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5} + \&c.$ Ubi coefficientes denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus Arithmeticae progressionis, 1, 2, 3, 4, 5, &c. in se continuo. Et hinc ex Logarithmo dato potest numerus ei competens invenire.

8. Esto VDE *Quadratrix*, cujus vertex est V , existente A centro & AE femi-diametro Circuli ad quem aptatur, & angulo VAE recto: Demissoque ad AE perpendicularo quovis DB , & acta Quadratricis Tangente DT occurrente axi ejus AV in T : Dic $AV = a$, &

$$AB = x; \text{ Eritq; } DB = a - \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5} - \&c.$$

$$\text{Et } VT = \frac{x^2}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} + \&c. \text{ Et Area}$$

$$AVDB = ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} - \&c. \text{ Et Arcus}$$

$$VD = x + \frac{2x^3}{27a^2} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} + \&c.$$

Unde vicissim, ex dato BD , vel VT , aut area $AVDB$, arcuve VD , per resolutionem affectarum æquationum erui potest x seu AB .

9. Esto denique AEB *Sphæroides*, revolutione Ellipseos AEB circa axem AB genita, & secta planis quatuor, AB per axem transeunte, DG parallelo AB , CDE perpendiculariter bisecante axem, & FG parallelo CE : fitque recta $CB = a$, $CE = c$, $CF = x$, & $FG = y$. Et Sphæroideos segmentum $CDGF$ dictis quatuor planis comprehensum,

$$\text{erit } + 2cx y - \frac{x}{3c} y^3 - \frac{x}{20c^3} y^5 - \frac{x}{56c^5} y^7 - \frac{5x}{576c^7} y^9 - \&c.$$

$$- \frac{cx^3}{3a^2} - \frac{x^3}{18ca^2} - \frac{x^3}{40c^3a^2} - \frac{5x^3}{336c^5a^2} - \&c.$$

$$- \frac{cx^5}{20a^4} - \frac{x^5}{40ca^4} - \frac{3x^5}{160c^3a^4} - \&c.$$

$$- \frac{cx^7}{56a^6} - \frac{5x^7}{336ca^6} - \&c.$$

$$- \frac{5cx^9}{576a^8} - \&c.$$

$$- \&c.$$

Ubi numerales coefficientes supremorum terminorum ($2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{56}, -\frac{5}{576}, \&c.$) in infinitum producuntur multiplicando primum coefficientem 2 continuo per terminos hujus progressionis

$$- \frac{1 \times 1}{2 \times 3}, \frac{1 \times 3}{4 \times 5}, \frac{3 \times 5}{6 \times 7}, \frac{5 \times 7}{8 \times 9}, \frac{7 \times 9}{10 \times 11}, \&c. \text{ Et numerales coefficientes terminorum}$$

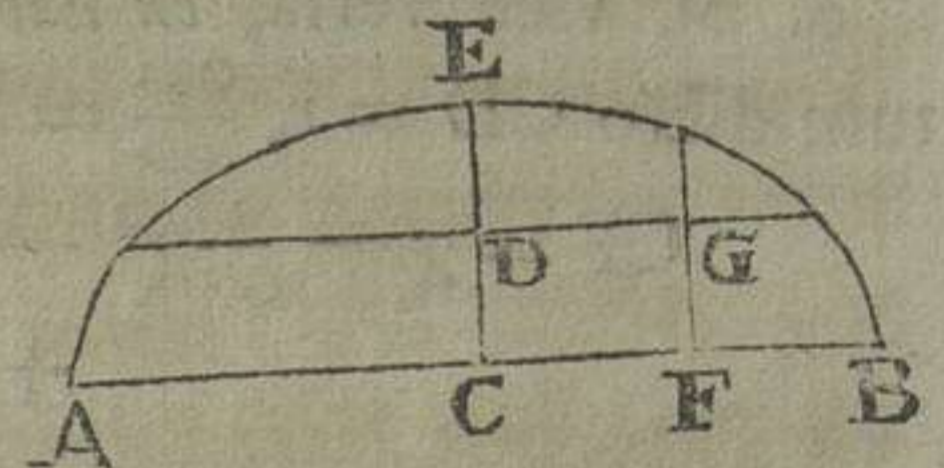
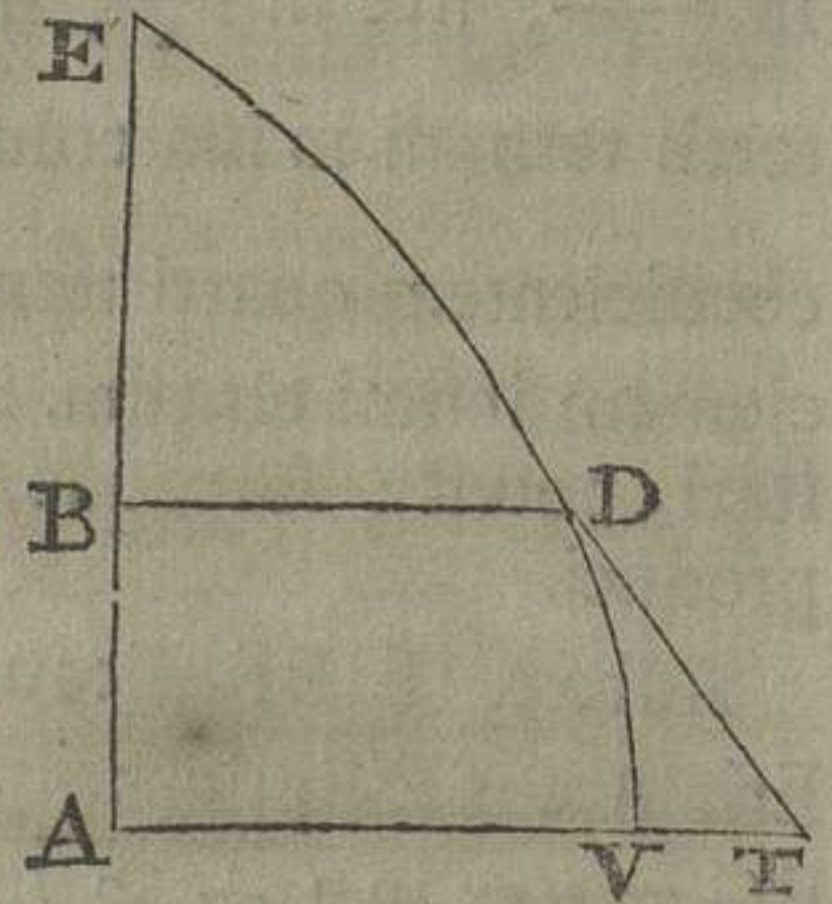
in unaquaque columna descendendum in infinitum producuntur multiplicando continuo coefficientem supremi termini in prima columna per eandem progressionem, in secunda autem per terminos hujus

$$\frac{1 \times 1}{2 \times 3}, \frac{3 \times 3}{4 \times 5}, \frac{5 \times 5}{6 \times 7}, \frac{7 \times 7}{8 \times 9}, \&c. \text{ in tertia per terminos hujus } \frac{3 \times 1}{2 \times 3}, \frac{5 \times 3}{4 \times 5}, \frac{7 \times 5}{6 \times 7}, \frac{9 \times 7}{8 \times 9}, \&c.$$

in quarta per terminos hujus $\frac{5 \times 1}{2 \times 3}, \frac{7 \times 3}{4 \times 5}, \frac{9 \times 5}{6 \times 7}, \&c.$ in quinta per terminos

$$\text{hujus } \frac{7 \times 1}{2 \times 3}, \frac{9 \times 3}{4 \times 5}, \frac{11 \times 5}{6 \times 7}, \&c. \text{ Et sic in infinitum.}$$

Et



Et eodem modo segmenta aliorum solidorum designari, & valores eorum aliquando commode per series quasdam numerales in infinitum produci possunt.

Ex his videre est, quantum fines Analyseos per hujusmodi infinitas æquationes ampliantur: Quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pæne dixerim problemata (si numeralia *Diophanti* & similia excipias) sese extendit.

Non tamen omnino universalis evadit, nisi per ultiores quasdam methodos eliciendi series infinitas. Sunt enim quædam Problemata in quibus non liceat ad series infinitas per divisionem vel extractionem radicum simplicium affectarumve, pervenire. Sed quomodo in istis casibus procedendum sit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere quæ circa reductionem infinitarum serierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parcius scribo, quod hæ speculationes diu mihi fastidio esse cœperint, adeo ut ab iisdem jam per quinque fere annos abstinerim.

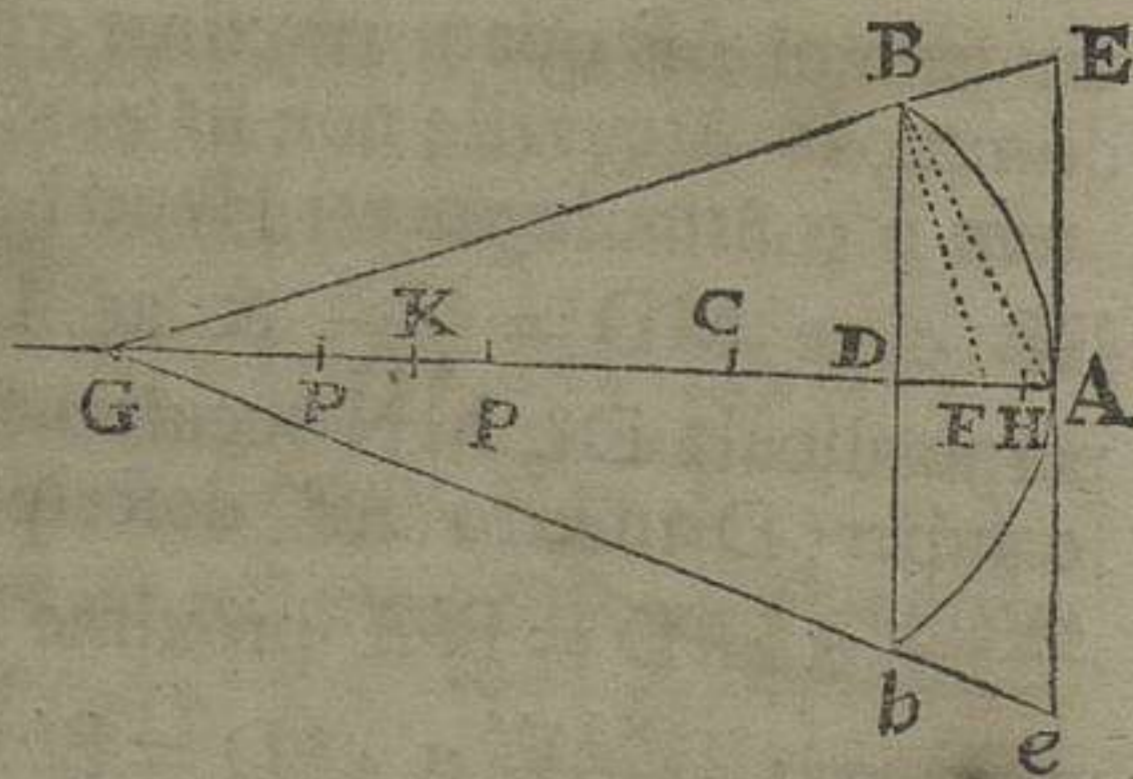
Unum tamen addam: quod postquam Problema aliquod ad infinitam æquationem deducitur, possint inde variæ approximationes in usum Mechanicæ, nullo fere negotio formari; quæ, per alias methodos quæsitæ, multo labore temporisque dispendio constare solent.

Cujus rei exemplo esse possunt *Traçtatus Hugeni* aliorumque de Quadratura circuli. Nam, ut ex data arcus chorda A, & dimidii arcus chorda B, arcum illum proxime assequaris; finge arcum illum esse z, & circuli radium r; juxtaque superiora erit A (nempe duplum sinus dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4 \times 6r^2} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} - \&c.$ Et B $= \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2 \times 16 \times 6r^2} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120r^4} - \&c.$ Duc jam B in numerum fictitium n, & a producto aufer A, & residui secundum terminum (nempe $-\frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6r^2} + \frac{z^3}{4 \times 6r^2}$) eo ut evanescat, pone = 0; indeque emerget n = 8, et erit 8B - A = 3z * $-\frac{3z^5}{64 \times 120r^4} + \&c.$ hoc est $\frac{8B-A}{3} = z$; errore tantum existente $\frac{z^5}{7680r^4} - \&c.$ in excessu. Quod est *Theorema Hugenianum*.

Insuper, si in Arcus Bb, sagitta AD indefinite producta, quæratum punctum G, a quo actæ rectæ GB, Gb abscindant Tangentem Ee quam proxime æqualem Arcui isti: Esto circuli centrum C, diameter AK = d, & sagitta AD = x: Et erit DB (= $\sqrt{dx-x^2}$)

$$= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} - \&c.$$

$$\text{Et AE (= AB)} = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$



H

Et



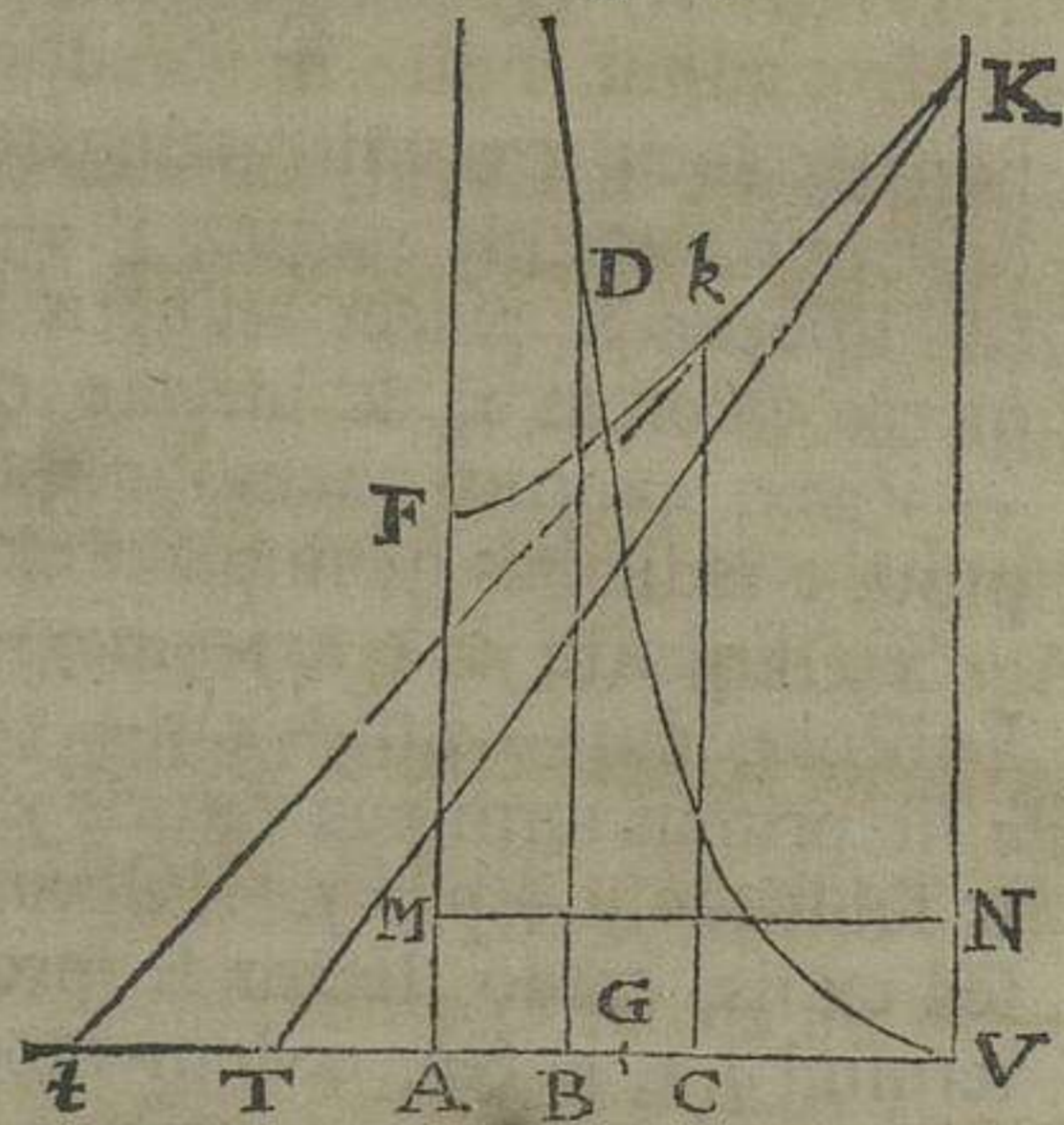
Fragmentum Epistolæ D. Newtoni, ad D. Oldenburgium 24 Octob. 1676 missæ.



Longitudo Cissoïdis sic construitur. Sit VD Cissoïdis, AV Dia-

meter Circuli ad quem aptatur, V vertex, AF Asymptota ejus, ac DB perpendiculare quodvis ad AV demissum. Cum

femi-axe $AF = AV$, & femi-parametro $AG = \frac{1}{3}AV$, describatur Hyperbola Fkk; & inter AB & AV sumpta AC media proportionali, erigantur ad C & V perpendicula Ck, VK Hyperbolæ occurrentia in k & K; Et agantur rectæ KT, kt tangentés Hyperbolam in eisdem K & k, et occurrentes AV in T & t; Et ad AV constituatur rectangulum AVNM æquale spatio TKkt. Et Cissoïdis VD longitudo erit Sextupla altitudinis VN. Demonstratio perbrevis est.



[Quæ sequuntur scripta sunt in explicationem Epistolæ præcedentis.]

Quod vero attinet ad Inventionem terminorum p, q, r , (vide pag. 25 & 8 :) in extractione Radicis affectæ, primum p sic eruo.

Descripto Angulo recto BAC, latera ejus BA, CA divido in partes æquales; & inde normales erigo distribuentes angulare spatium in æqualia parallelograma

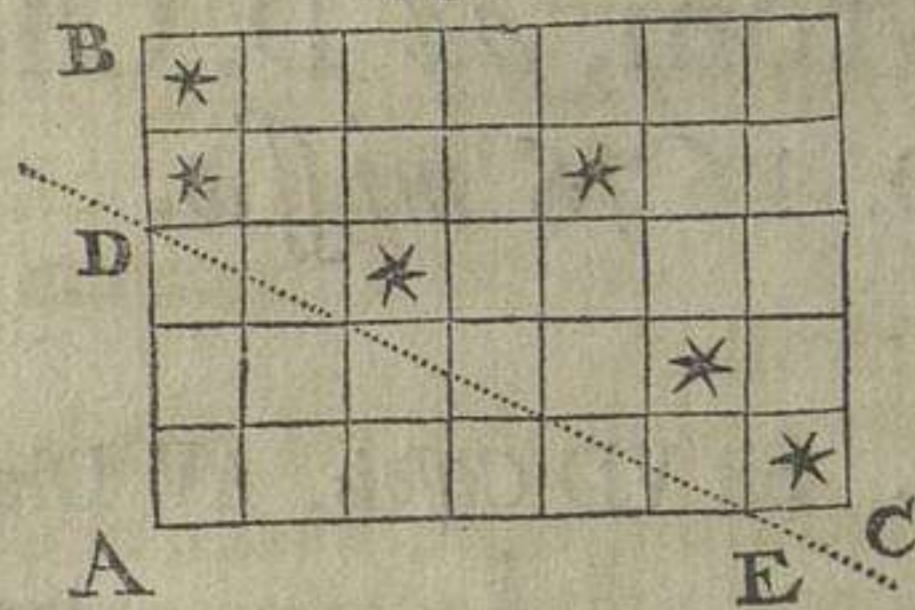
Fig. 1.

x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4
o	y	y^2	y^3	y^4

vel quadrata, quæ concipio denominata esse a dimensionibus duarum indefinitarum specierum, puta x & y , regulariter ascendendum a termino A; prout vides in Fig. 1. inscriptas. Ubi y denotat Radicem extrahendam; et x alteram indefinitam quantitatem, ex cujus potestatibus series conficienda

enda est. Deinde, cum Æquatio aliqua proponitur, parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignio nota aliqua: Et Regula ad duo vel forte plura ex insignitis parallelogrammis applicata; quorum unum sit humillimum in columna sinistra juxta AB, & alia ad Regulam dextrorsum fita, cæteraque omnia non contingentia Regulam supra eam jaceant; Seligo terminos Æquationis per parallelogramma contingentia Regulam designatos, & inde quæro quantitatem Quotientis addendam.

Fig. 2.



Sic ad extrahendam Radicem y , ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis respondentia signo nota aliqua $*$; ut vides in Fig. 2. Dein applico Regulam DE ad inferiorem e locis signatis in sinistra columna; eamque ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio, donec alium similiter vel forte plura e reliquis signatis locis cœperit attingere. Videoque loca sic attacta esse x^3 , x^2y^2 , & y^6 . E terminis itaque, $y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^6$ tanquam nihilo æqualibus (& insuper si placet reductis ad $v^6 - 7v^2 + 6 = 0$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$), quæro valorem y , & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino Quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum est.

Sic Æquatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, quam resolvebam in priori Epistola, dat $-2a^3 + aay + y^3 = 0$, & inde $y = a$ proxime: Cum itaque a sit primus terminus valoris y , pono p pro cæteris omnibus in infinitum, & substituo $a + p = y$. (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ; sed ex iis, credo, lector se proprio Marte extricabit.) Subsequentes vero termini q, r, s , &c. eodem modo ex æquationibus secundis, tertiis, cæterisque eruuntur, quo primus p e prima, sed cura leviori; quia cæteri valores y solent prodire dividendo terminum involventem infimam potestatem indefinitæ quantitatis x per Coefficientem radicis p, q, r , aut s .

Intellexi credo ex superioribus, regressionem ab Areis curvarum ad Lineas rectas, fieri per hanc extractionem Radicis affectæ. Sed duo alii sunt modi quibus idem perficio.

Eorum unus affinis est Computationibus quibus colligebam approximationes sub finem alterius Epistolæ, & intelligi potest per hoc exemplum. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ $z = x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$, &c. Et partibus ejus multiplicatis in se, emergent $z^2 = x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{6}x^5$, &c. $z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$, &c. $z^4 = x^4 + 2x^5$, &c. $z^5 = x^5$, &c. Jam de z aufero $\frac{1}{2}zz$, & restat $z - \frac{1}{2}zz = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{60}x^5$, &c. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$, & fit $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$, &c. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, & restat $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}x^5$, &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 = x$ quamproxime; five $x = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c.

Eodem

Eodem modo, Series de una indefinita quantitate, in aliam transferri possunt. Quemadmodum si posito r radio circuli, x sinu recto arcus z , & $x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} + \&c.$ longitudine arcus istius; atque hanc Seriem a Sinu recto ad Tangentem vellem transferre: Quæro longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr-xx}}$, & reduco in infinitam Seriem $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8r^4} + \&c.$ Vocetur hæc quantitas, t . Colligo potestates ejus $t^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2rr} \&c.$ $t^5 = x^5 + \&c.$ Aufero autem t de z , & restat $z - t = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{10}x^5 - \&c.$ Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z - t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}x^5 + \&c.$ Aufero $\frac{1}{5}t^5$, & restat $z - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = 0$ quamproxime. Quare est $z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \&c.$ Sed siquis in usus Trigonometricos me jussisset exhibere expressionem Arcus per Tangentem; eam non hoc circuitu, sed directa methodo quæsissem.

Per hoc genus Computi colliguntur etiam Series ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus constantes; & Radices affectarum Æquationum magna ex parte extrahuntur. Sed ad hunc posteriorem usum adhibeo potius methodum in altera Epistola descriptam tanquam generaliore, & (Regulis pro Elisione superfluatorum terminorum habitis) paulo magis expeditam.

Pro Regreſſione vero ab Areis ad Lineas rectas, & similibus, possunt hujusmodi *Theoremata* adhiberi.

THEOREMA I. Sit $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5, \&c.$

Et vicissim erit $y =$

$$\begin{aligned} & \frac{z}{a} \\ & - \frac{b}{a^3} z^2 \\ & + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3 \\ & + \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7} z^4 \\ & + \frac{3a^2c^2 - 21ab^2c + 6a^2bd + 14b^4 - a^3e}{a^9} z^5 + \&c. \end{aligned}$$

Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ, $z = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \&c.$ Et substitutis in Regula I pro a , $-\frac{1}{2}$ pro b , $\frac{1}{3}$ pro c , $-\frac{1}{4}$ pro d , & $\frac{1}{5}$ pro e ; vicissim exurgit, $y = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \&c.$

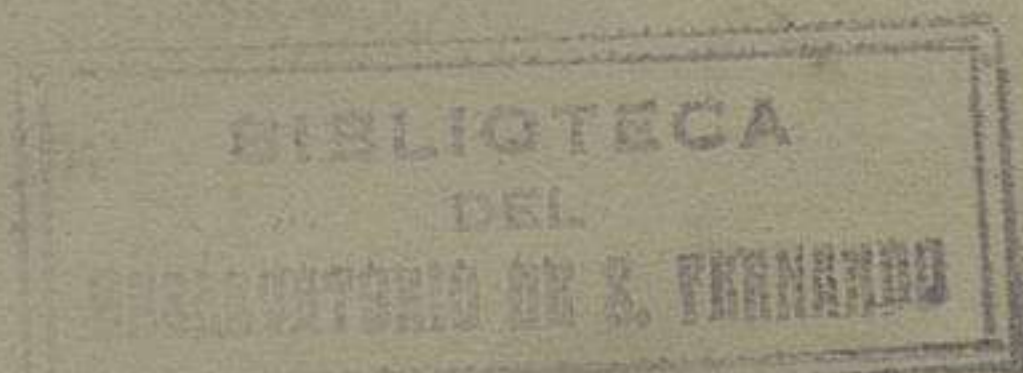
THEOREMA II. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 + \&c.$

Et vicissim erit $y =$

$$\begin{aligned} & \frac{z}{a} \\ & - \frac{b}{a^4} z^3 \\ & + \frac{3b^2 - ac}{a^7} z^5 \\ & + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}} z^7 \\ & + \frac{55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 5a^2c^2 - a^3e}{a^{13}} z^9 + \&c. \end{aligned}$$

I

Exempli



Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Arcum circuli, $z = y + \frac{y^3}{6r}$
 $+ \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \&c.$ Et substitutis in Regula 1 pro a , $\frac{1}{6r^2}$ pro b , $\frac{3}{40r^4}$ pro c ,
 $\frac{5}{112r^6}$ pro d &c; orietur $y = z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \&c.$



*Fragmentum *Epistolæ D. Newtoni, ad
 D. Wallisium Anno 1692, missæ.*

UB finem Epistolæ anni 1676 [*Hæc sunt verba Wallisii*] scribit
 [D. Newtonus] etiam Problema determinandi Curvas per con-
 ditiones Tangentium in sua potestate esse, una cum aliis diffici-
 lioribus; ad quæ solvenda se usum esse dicit duplici methodo,
 una concinniore, altera generaliore; & utramque literis transpositis celat:
 quæ in ordinem redactæ hanc sententiam exhibent. *Una methodus consistit
 in Extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus.
 Altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua
 cætera commode derivari possunt; & in collatione terminorum homologorum
 æquationis resultantis ad eruendos terminos assumptæ Seriei.* Harum methodo-
 rum Secunda ex verbis jam recitatis absque ulteriore explicatione intelligi
 potest; priorem ab Authore jam accepi ut sequitur.

Hæc methodus, ait, ejusdem est generis cum ea pro extrahendo radices
 ex æquationibus affectis superius descripta. Pone quod Problema resol-
 vendum reducatur ad æquationem fluentes quantitates y & z una cum
 earum fluxionibus \dot{y} & \dot{z} involventem, & quod fluxio ipsius z uniformis sit.
 Ut hæc fluxio ex æquatione evanescat, pro ea ponatur unitas, & manebit
 æquatio solas y , z & \dot{y} involvens, quam *Resolvendam* vocat. Proponitur,
 inventio ipsius y in Serie infinita convergente, quæ solam z involvet. Hoc
 in aliquibus æquationibus impossibile est, in aliis præparationem æquatio-
 num requirit, ubi vero directe confici possit resolutio est hujusmodi.

PROBLEMA

* Extat Epistola in Tom. 2. Operum Wallisii.

PROBLEMA.

Ex æquatione fluxionem radicis involvente radicem extrahere.

RESOLUTIO.

Termini omnes, ex eodem æquationis latere consistentes, æquentur nihilo, & ipsarum y & \dot{y} dignitates (si opus sit) exaltentur vel deprimantur, sic ut earum indices nec alicubi negativi sint, nec tamen altiores quam ad hunc effectum requiruntur; & sit kz^λ terminus infimæ dignitatis eorum qui neque per y neque per ejus fluxionem \dot{y} neque per earum dignitatem quamvis multiplicantur. Sit $lz^\mu y^\alpha \dot{y}^\beta$ terminus alius quilibet, & omnes ordine terminos percurrendo collige ex singulis seorsim numerum $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ sic, ut tot habeas ejusmodi numeros quot sunt termini. Horum numerorum maximus vocetur ν , & z^ν erit dignitas primi termini Seriei. Pro ejus coefficiente ponatur a , & in æquatione quæ *resolvenda* dicitur scribe az' pro y , & $\nu az'^{\nu-1}$ pro \dot{y} ; ac termini omnes resultantes in quibus z ejusdem est dignitatis ac in termino kz^λ , sub propriis signis collecti, ponantur æquales nihilo. Nam hæc æquatio debite reducta dabit coefficientem a . Sic habes az' terminum primum Seriei.

OPERATIO SECUNDA.

Pro reliquis omnibus hujus Seriei terminis nondum inventis pone p , & habebis Æquationem $y = az' + p$, & inde etiam Æquationem $\dot{y} = \nu az'^{\nu-1} + p$. In resolvenda, pro y & \dot{y} scribe hos eorum valores & habebis Resolvendam novam, ubi p officium præstat ipsius y : & ex hac Resolvenda primum extrahes terminum Seriei p eodem modo atque terminum primum Seriei totius $y = az' + p$ ex Resolvenda prima extraxisti.

OPERATIO TERTIA ET SEQUENTES.

Dein tertiam Resolvendam eadem ratione invenias atque secundam invenisti, & ex ea terminum tertium Seriei totius extrahes. Et similiter Resolvendam quartam invenies, & ex ea quartum Seriei terminum, & sic in infinitum. Series autem sic inventa erit radix Æquationis quam extrahere oportuit.

EXEMPLUM.

EXEMPLUM.

Ex Æquatione $y^2 \dot{z}^2 - z^2 \dot{y} - d^2 \dot{z} + dz \dot{z}^2 = 0$, extrahenda fit radix y . Pone $z = 1$, & Æquatio evadet $y^2 - z^2 \dot{y} - dd + dz = 0$, quæ est Resolvenda. Jam vero terminus infimus in quo nec y neque \dot{y} reperitur, est dd , qui ipsi kz^λ æquatus dat $\lambda = 0$. Terminis reliquis y^2 , $-z^2 \dot{y}$ pone $lz^\mu y^\alpha \dot{y}^\beta$ æqualem successive, & inde in primo casu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$, in secundo $\mu = 2$, $\alpha = 0$, & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ fit in primo casu 0, in secundo -1 . Unde v est 0, & ax^v & vax^{v-1} sunt a & 0; quarum ultimæ duæ a & 0 in Resolvenda pro y & \dot{y} scriptæ, producunt $aa + oz^2 - dd + dz$; & termini aa & $-dd$, in quibus index dignitatis z est λ seu 0, positi æquales nihilo dant $a = d$. Unde primus Seriei terminus ax^v evadit d .

OPERATIO SECUNDA.

Pro terminis reliquis pone p , & habebis æquationem $y = d + p$, & inde $\dot{y} = \dot{p}$; qui valores in Resolvenda pro y & \dot{y} substituti dant Resolvendam novam $2dp + pp - zxp + dz = 0$, ubi p & \dot{p} vices subeunt ipsarum y & \dot{y} . Terminus unicus in quo nec p neque \dot{p} reperitur est dz , qui cum termino kz^λ collatus dat $\lambda = 1$. Terminis reliquis $2dp$, pp & $-zxp$ pone $lz^\mu p^\alpha \dot{p}^\beta$ æqualem successive; & inde in primo casu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 1$, & $\beta = 0$; in secundo $\mu = 0$, $\alpha = 2$, & $\beta = 0$; & in tertio $\mu = 2$, $\alpha = 0$, & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ evadit primo casu 1, in secundo $\frac{1}{2}$, in tertio 0. Unde v est 1, & ax^v & vax^{v-1} sunt ax & a . Termini duo ultimi ax & a in Resolvenda pro p & \dot{p} respective scripti, producunt $2dax + a^2 z^2 - ax^2 + dz$. Et termini $2dax$ & dz in quibus index dignitatis z est λ seu 1, positi æquales nihilo, dant $a = -\frac{1}{2}$. Unde ax^v terminus primus Seriei p fit $-\frac{1}{2}z$.

OPERATIO TERTIA.

Pro terminis reliquis nondum inventis pone q & habebis æquationem $p = -\frac{1}{2}z + q$, & inde $\dot{p} = -\frac{1}{2} + \dot{q}$: Qui valores pro p & \dot{p} in Resolvenda novissima substituti producunt Resolvendam novam $2dq - zq + qq + \frac{3}{4}zx - zx\dot{q} = 0$. Ubi q & \dot{q} vices suppleunt ipsorum y & \dot{y} . Terminus unicus in quo neque q nec \dot{q} reperitur est $\frac{3}{4}zx$, qui cum kz^λ collatus dat $\lambda = 2$. Terminis reliquis $2dq$, $-zq$, $+qq$, $-zx\dot{q}$ pone $lz^\mu q^\alpha \dot{q}^\beta$ æqualem successive; & inde in primo casu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 1$, & $\beta = 0$; in secundo, $\mu = 1$,

$\mu = 1, \alpha = 1, \beta = 0$; in tertio, $\mu = 0, \alpha = 2, \beta = 0$: in quarto $\mu = 2, \alpha = 0, \beta = 1$: & inde $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ evadit in primo casu 2, in secundo, tertio, & quarto 1. Et hinc ν est 2, vel ax' & $\nu az'^{-1}$ sunt ax^2 & $2ax$: qui valores in Resolvenda pro q & \dot{q} substituti dant $2dax^2 - ax^3 + aax^4 + \frac{3}{4}zx - 2ax^3$; & termini $2daxz + \frac{3}{4}zx$ in quibus index dignitatis z est λ seu 2, positi æquales nihilo, dant $a = -\frac{3}{8d}$. Unde ax' terminus primus Seriei q evadit $-\frac{3zx}{8d}$.

OPERATIO QUARTA.

Pro reliquis Seriei terminis nondum inventis pone r , & habebis æquationes $q = -\frac{3zx}{8d} + r$, & $\dot{q} = -\frac{3z}{4d} + \dot{r}$; & inde resolvendam novam $2\dot{d}r + \frac{9z^3}{8d} - zr + \frac{9z^4}{64dd} - \frac{3zxr}{4d} + rr - z\dot{z}r = 0$; & ex ea per Methodum superiorem habebis $-\frac{9z^3}{16dd}$ terminum primum Seriei r . Et sic pergitur in infinitum.

Est igitur radix extrahenda $y = d + p = d - \frac{1}{2}z + q = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zx}{8d} + r = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zx}{8d} - \frac{9z^3}{16dd} - \&c.$ Et operationem continuando producere licet radicem ad terminos plures.

Et eadem methodo, dicit *Newtonus*, radices æquationum, fluxiones secundas, tertias, quartas, ($\ddot{y}, \ddot{\dot{y}}, \ddot{\dot{\dot{y}}}$) aliasque involventium, extrahi posse. His utitur radicum extractionibus ubi aliæ Methodi nil profunt. Nam in Epistola prædicta anni 1676 docet, quod in Solutione problematum de Tangentibus inverforum, casus aliqui dantur in quibus hæc Methodus generalis non requiritur: & particulariter, si in triangulo rectangulo quod ab ordinata, tangente, & interjacente parte abscissæ constituitur, ratio duorum quorumlibet e lateribus tribus per æquationem quamvis definiatur; Problema absque Methodo hacce generali solvi poterit.

Methodi autem hæ omnes tam particulares quam generales collectim sumptæ, solutionem exhibent secundæ partis problematis, quod *Newtonus* sub initio istius Epistolæ his verbis proposuit. *Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, & vice versa.* Nam tota fluxionum Methodus in hujus directæ & inversæ solutione consistit.

Part of a Letter from Sir *Is. Newton*,
to Mr. *J. Collins*, Novemb. 8. 1676.

THere is no Curve-line express'd by any Equation of three terms, tho' the unknown quantities affect one another in it, or the Indices of their Dignities be surd quantities (suppose $ax^\lambda + bx^\mu y^\sigma + cy^\tau = 0$, where x signifies the Base, y the Ordinate, $\lambda, \mu, \sigma, \tau$ the Indices of the dignities of x and y , and a, b, c known quantities with their signs $+$ or $-$.) I say, there is no such Curve-line, but I can, in less than half a quarter of an hour, tell whether it may be Squar'd, or what are the simplest Figures it may be compar'd with, be those Figures Conic Sections, or others: And then by a direct and short way, (I dare say the shortest the nature of the thing admits of, for a general one,) I can compare them. And so if any two Figures express'd by such Equations be propounded, I can, by the same Rule compare them if they may be compar'd. This may seem a bold assertion, because it's hard to say a Figure may, or may not, be Squar'd, or Compar'd with another; but it's plain to me by the fountain I draw it from, tho' I will not undertake to prove it to others. The same Method extends to Equations of four Terms, and others also, but not so generally.

Fragmentum Epistolæ D. Newtoni ad D. Collinsium,
Novemb. 8. 1676, *Latine redditum.*

Nulla extat Curva cujus Æquatio ex tribus constat terminis, in qua, licet quantitates incognitæ se mutuo afficiant, vel Indices dignitatum sint surdæ quantitates (v. g. $ax^\lambda + bx^\mu y^\sigma + cy^\tau = 0$, ubi x designat Basim, y Ordinatum, $\lambda, \mu, \sigma, \tau$ Indices dignitatum ipsius x & y , & a, b, c quantitates cognitæ una cum signis suis $+$ vel $-$) nulla inquam hujusmodi est Curva, de qua, an Quadrari possit, necne, vel quænam sint Figuræ simplicissimæ quibuscum comparari possit, five sint Conicæ sectiones five aliæ magis complicatæ, intra horæ octantem respondere non possim. Deinde * methodo directæ & brevi, imo methodorum omnium generalium brevissima eas comparare queo. Quinetiam si duæ quævis Figuræ per hujusmodi Æquationes expressæ proponantur, per eandem Regulam, eas, modo comparari possint, comparo.

Affirmatio quidem videri potest temeraria, propterea quod perdifficile sit dictu an Figura Quadrari vel cum alia comparari possit, necne; mihi autem manifestum est, ex eo unde deduxi fonte, quanquam id aliis demonstrare in me suscipere nollem. Eadem methodus Æquationes quatuor terminorum aliasque complectitur, haud tamen adeo generaliter.

* Methodum habes in Coroll. 2. Prop. 10. Tract. sequentis.



TRACTATUS

D E

Quadratura Curvarum.

TRACTATUS

D. E.

Quadragesima



INTRODUCTIO

A D

Quadraturam Curvarum.



Quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero. Lineæ describuntur ac describendo generantur non per appositionem partium sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, solida per motum superficierum, anguli per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, & sic in cæteris. Hæ Geneses in rerum natura locum vere habent & in motu corporum quotidie cernuntur. Et ad hunc modum Veteres ducendo rectas mobiles in longitudinem rectarum immobilium genefin docuerunt reſtangulorum.

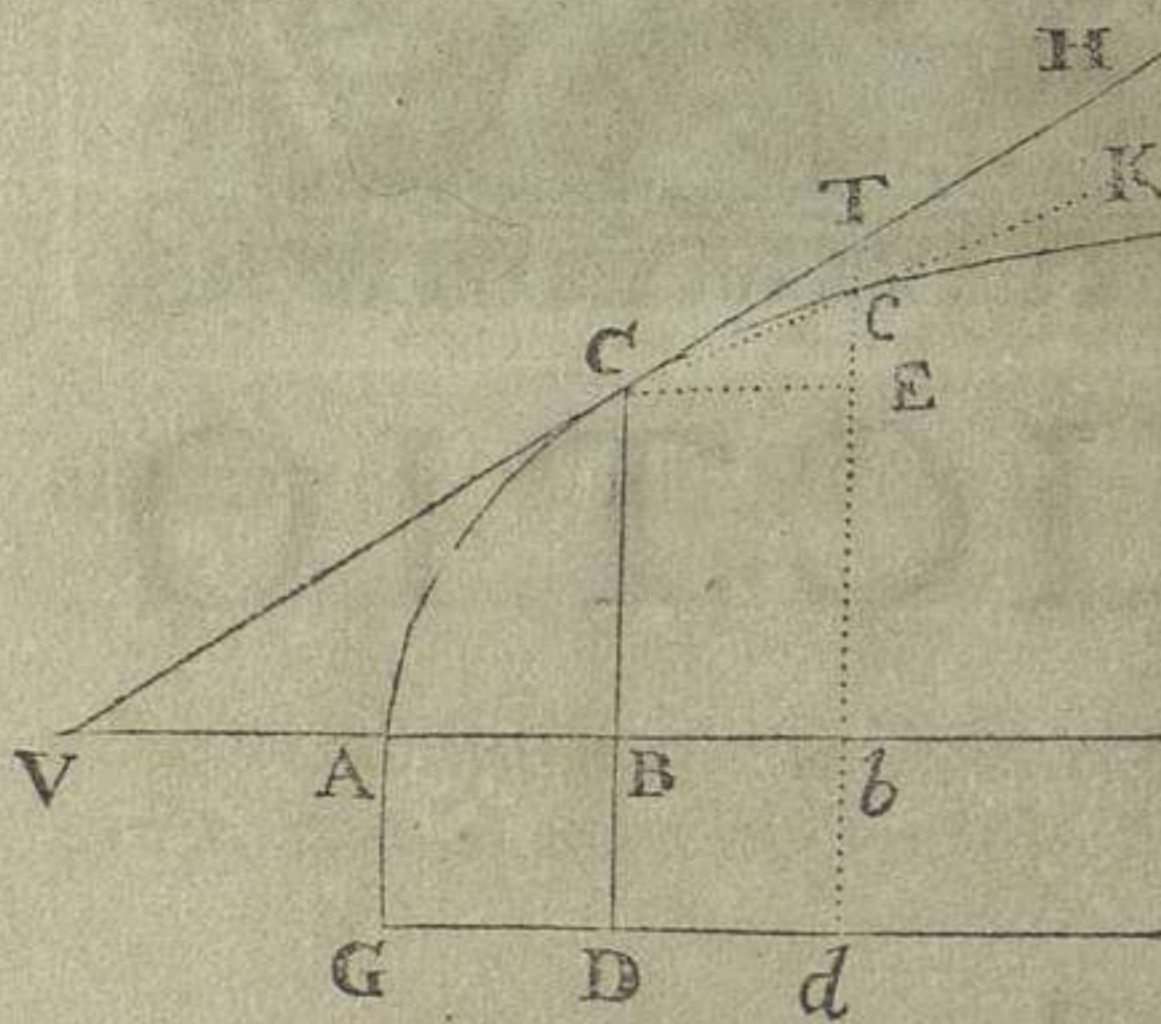
Considerando igitur quod quantitates æqualibus temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori qua crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores; methodum quærebam determinandi quantitates ex velocitatibus motuum vel incrementorum quibus generantur; & has motuum vel incrementorum velocitates nominando *Fluxiones* & quantitates genitas nominando *Fluentes*, incidi paulatim *Annis 1665 & 1666* in Methodum Fluxionum qua hic usus sum in Quadratura Curvarum.

L

Fluxio-

Fluxiones sunt quam proxime ut Fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quam minimis genita, & ut accurate loquar, sunt in prima ratione augmentorum nascentium; exponi autem possunt per lineas quascunque quæ sunt ipsis proportionales.

Ut si areae ABC, ABDG Ordinatis BC, BD super basi AB uniformi cum motu progredientibus describantur, harum arearum fluxiones erunt inter se ut Ordinatae describentes BC & BD, & per Ordinatas illas exponi possunt, propterea quod Ordinatae illæ sunt ut arearum augmenta nascentia.



Progrediatur ordinata BC de loco suo BC in locum quemvis novum bc. Compleatur parallelogrammum BCEb, ac ducatur recta VTH quæ Curvam tangat in C ipsisque bc & BA productis occurrat in T & V: & Abscissæ AB, Ordinatae BC, & Lineæ Curvæ ACc augmenta modo genita erunt Bb, Ec & Cc; & in horum augmentorum nascentium ratione prima sunt latera trianguli CET, ideoque fluxiones ipsarum AB, BC & AC sunt ut trianguli illius CET latera CE, ET

& CT & per eadem latera exponi possunt, vel quod perinde est per latera trianguli confimilis VBC.

Eodem recidit si sumantur fluxiones in ultima ratione partium evanescentium. Agatur recta Cc & producat eadem ad K. Redeat Ordinata bc in locum suum priorem BC, & coeuntibus punctis C & c, recta CK coincidet cum tangente CH, & triangulum evanescens CEc in ultima sua forma evadet simile triangulo CET, & ejus latera evanescentia CE, Ec & Cc erunt ultimo inter se ut sunt trianguli alterius CET latera CE, ET & CT, & propterea in hac ratione sunt fluxiones linearum AB, BC & AC. Si puncta C & c parvo quovis intervallo ab invicem distant recta CK parvo intervallo a tangente CH distabit. Ut recta CK cum tangente CH coincidat & rationes ultimæ linearum CE, Ec & Cc inveniantur, debent puncta C & c coire & omnino coincidere. Errores quam minimi in rebus Mathematicis non sunt contemnendi.

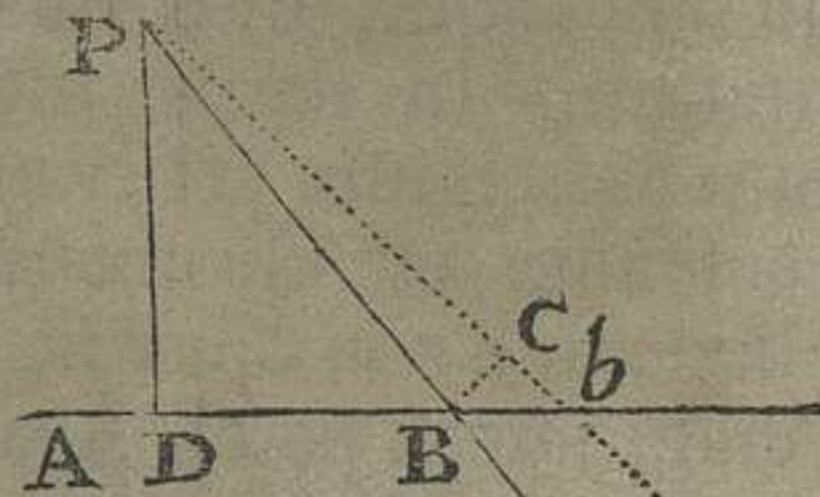
Simili argumento si circulus centro B radio BC descriptus in longitudinem Abscissæ AB ad angulos rectos uniformi cum motu ducatur, fluxio solidi geniti ABC erit ut circulus ille generans, & fluxio superficiei ejus erit ut perimenter Circuli illius & fluxio lineæ curvæ AC conjunctim.

Nam

Nam quo tempore solidum ABC generatur ducendo circulum illum in longitudinem abscissæ AB, eodem superficies ejus generatur ducendo perimetrum circuli illius in longitudinem Curvæ AC. Hujus methodi accipe etiam exempla quæ sequuntur.

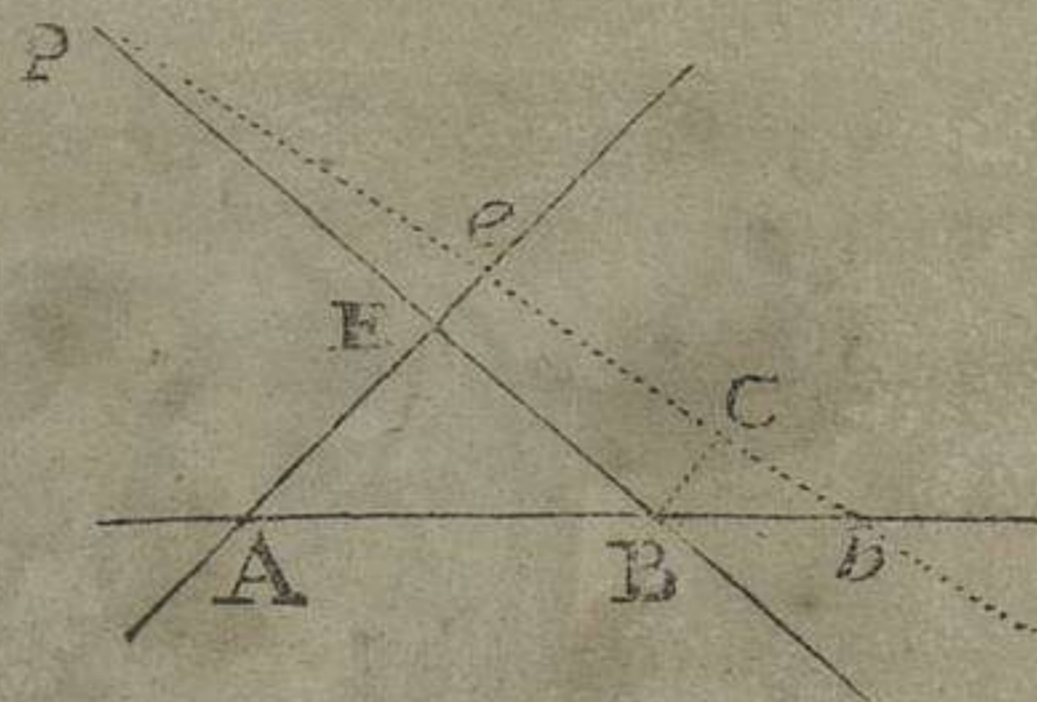
Recta PB circa polum datum P revolvens secet aliam positione datam rectam AB: queritur proportio fluxionum rectarum illarum AB & PB.

Progrediatur recta PB de loco suo PB in locum novum Pb. In Pb capiatur PC ipsi PB æqualis, & ad AB ducatur PD sic, ut angulus bPD æqualis sit angulo bBC; & ob similitudinem triangulorum bBC, bPD erit augmentum Bb ad augmentum Cb ut Pb ad Db. Redeat jam Pb in locum suum priorem PB ut augmenta illa evanescant, & evanescantium ratio ultima, id est ratio ultima Pb ad Db, ea erit quæ est PB ad DB, existente angulo PDB recto, & propterea in hac ratione est fluxio ipsius AB ad fluxionem ipsius PB.



Recta PB circa datum Polum P revolvens secet alias duas positione datas rectas AB & AE in B & E: queritur proportio fluxionum rectarum illarum AB & AE.

Progrediatur recta revolvens PB de loco suo PB in locum novum Pb rectas AB, AE in punctis b & e secantem, & rectæ AE parallela BC ducatur ipsi Pb occurrens in C, & erit Bb ad BC ut Ab ad Ae, & BC ad Ee ut PB ad PE, & conjunctis rationibus Bb ad Ee ut $Ab \times PB$ ad $Ae \times PE$. Redeat jam linea Pb in locum suum priorem PB, & augmentum evanescens Bb erit ad augmentum evanescens Ee ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$, ideoque in hac ratione est fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ AE.



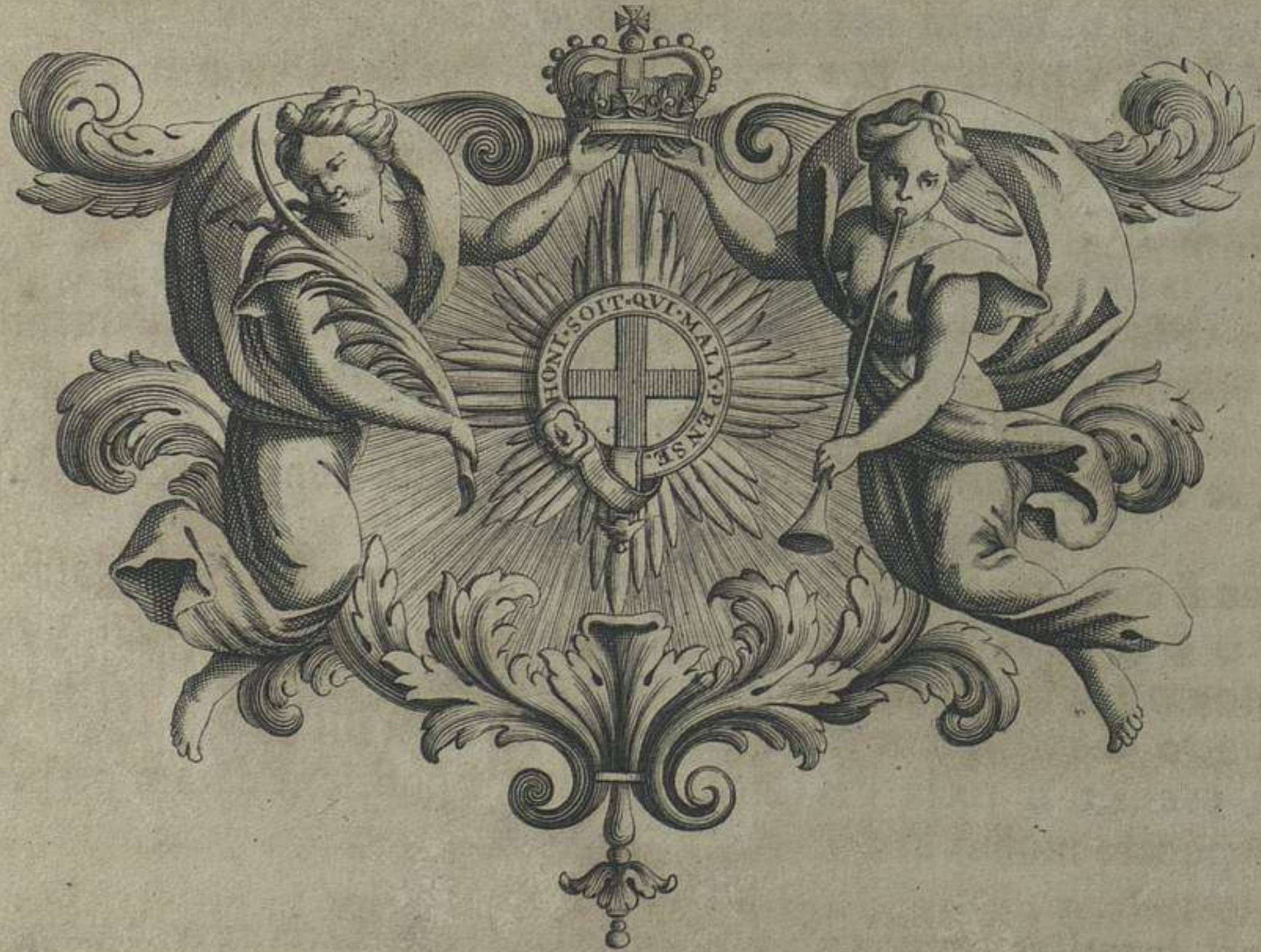
Hinc si recta revolvens PB lineas quasvis Curvas positione datas fecet in punctis B & E, & rectæ jam mobiles AB, AE Curvas illas tangant in Sectionum punctis B & E: erit fluxio Curvæ quam recta AB tangit ad fluxionem Curvæ quam recta AE tangit ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$. Id quod etiam eveniet si recta PB Curvam aliquam positione datam perpetuo tangat in puncto mobili P.

Fluat quantitas x uniformiter & inveniendæ sit fluxio quantitatis x^n . Quo tempore quantitas x fluendo evadit $x + o$, quantitas x^n evadet $x^n + o^n$, id est per methodum serierum infinitarum, $x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&c.$
Et

Et augmenta o & $no x^{n-1} + \frac{nn-n}{2} oo x^{n-2} + \&c.$ sunt ad invicem ut 1 & $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2} ox^{n-2} + \&c.$ Evanescant jam augmenta illa, & eorum ratio ultima erit 1 ad nx^{n-1} : ideoque fluxio quantitatis x est ad fluxionem quantitatis x^n ut 1 ad nx^{n-1} .

Similibus argumentis per methodum rationum primarum & ultimarum colligi possunt fluxiones linearum seu rectorum seu curvarum in casibus quibuscunque, ut & fluxiones superficierum, angulorum & aliarum quantitatum. In finitis autem quantitibus Analyfin sic instituere, & finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigare, consonum est Geometriæ Veterum : & volui ostendere quod in Methodo Fluxionum non opus fit figuras infinite parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen potest Analysis in figuris quibuscunque seu finitis seu infinite parvis quæ figuris evanescentibus finguntur similes, ut & in figuris quæ per Methodos Indivisibilium pro infinite parvis haberi solent, modo caute procedas.

Ex Fluxionibus invenire Fluents Problema difficilius est, & solutionis primus gradus æquipollet Quadraturæ Curvarum ; de qua sequentia olim scripsi.





D E

Quadratura Curvarum.



Quantitates indeterminatas ut motu perpetuo crescentes vel decrescentes, id est ut fluentes vel defluentes in sequentibus confidero, designoque literis z, y, x, v , & earum fluxiones seu celeritates crescendi noto iisdem literis punctatis $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$, Sunt & harum fluxionum fluxiones seu mutationes magis aut minus celeres quas ipsarum z, y, x, v , fluxiones secundas nominare licet & sic designare $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, & harum fluxiones primas seu ipsarum z, y, x, v fluxiones tertias sic $\ddot{\dot{z}}, \ddot{\dot{y}}, \ddot{\dot{x}}, \ddot{\dot{v}}$, & quartas sic $\ddot{\ddot{z}}, \ddot{\ddot{y}}, \ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{v}}$. Et quemadmodum $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$ sunt fluxiones quantitatum $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$, & hæ sunt fluxiones quantitatum primarum z, y, x, v : sic hæ quantitates considerari possunt ut fluxiones aliarum quas sic designabo, $\dot{\dot{z}}, \dot{\dot{y}}, \dot{\dot{x}}, \dot{\dot{v}}$, & hæ ut fluxiones aliarum $\ddot{\dot{z}}, \ddot{\dot{y}}, \ddot{\dot{x}}, \ddot{\dot{v}}$, & hæ ut fluxiones aliarum $\ddot{\ddot{z}}, \ddot{\ddot{y}}, \ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{v}}$. Designant igitur $\ddot{\dot{\dot{z}}}, \ddot{\dot{\dot{y}}}, \ddot{\dot{\dot{x}}}, \ddot{\dot{\dot{v}}}$, &c. seriem quantitatum quarum quælibet posterior est fluxio præcedentis & quælibet prior est fluens quantitas fluxionem habens subsequenter. Similis est series $\sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{az-zz}$, ut & series $\frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}$.

Et notandum est quod quantitas quælibet prior in his seriebus est ut area figuræ curvilinearæ cujus ordinatim applicata rectangula est quantitas posterior & abscissa est z : uti $\sqrt{az-zz}$ area curvæ cujus ordinata est $\sqrt{az-zz}$ & abscissa z . Quo autem spectant hæc omnia patebit in Propositionibus quæ sequuntur.

M

PROP.

PROP. I. PROB. I.

Data æquatione quocumque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones.

Solutio.

Multiplicetur omnis æquationis terminus per indicem dignitatis quantitatis cujusque fluentis quam involvit, & in singulis multiplicationibus mutetur dignitatis latus in fluxionem suam, & aggregatum factorum omnium sub propriis signis erit æquatio nova.

Explicatio.

Sunto a, b, c, d &c. quantitates determinatæ & immutabiles, & proponatur æquatio quævis quantitates fluentes z, y, x &c. involvens, uti $x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0$. Multiplicentur termini primo per indices dignitatum x , & in singulis multiplicationibus pro dignitatis latere, seu x unius dimensionis, scribatur \dot{x} , & summa factorum erit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$. Idem fiat in y & prodibit $-2xy\dot{y}$. Idem fiat in z & prodibit $a^2\dot{z}$. Ponatur summa factorum æqualis nihilo, & habebitur æquatio $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Dico quod hac æquatione definitur relatio fluxionum.

Demonstratio.

Nam fit o quantitas admodum parva & sunt $o\dot{z}, o\dot{y}, o\dot{x}$, quantitatum z, y, x momenta id est incrementa momentanea synchrona. Et si quantitates fluentes jam sunt z, y & x hæc post momentum temporis incrementis suis $o\dot{z}, o\dot{y}, o\dot{x}$ auctæ, evadent $z + o\dot{z}, y + o\dot{y}, x + o\dot{x}$, quæ in æquatione prima pro $z, y,$ & x scriptæ dant æquationem $x^3 + 3x^2o\dot{x} + 3xo^2\dot{x}\dot{x} + o^3\dot{x}^3 - xy^2 - oxy^2 - 2xoy\dot{y} - 2xo^2\dot{y}\dot{y} - xo^2\dot{y}\ddot{y} - xo^3\dot{y}\ddot{y} + a^2z + a^2o\dot{z} - b^3 = 0$.

Subducatur æquatio prior, & residuum divisum per o erit $3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}xox + \dot{x}^3o^2 - xy^2 - 2xy\dot{y} - 2xoy\dot{y} - xoy\ddot{y} - xo^2\dot{y}\ddot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Minuatur quantitas o in infinitum, & neglectis terminis evanescentibus restabit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Q. E. D.

Explicatio

Explicatio plenior.

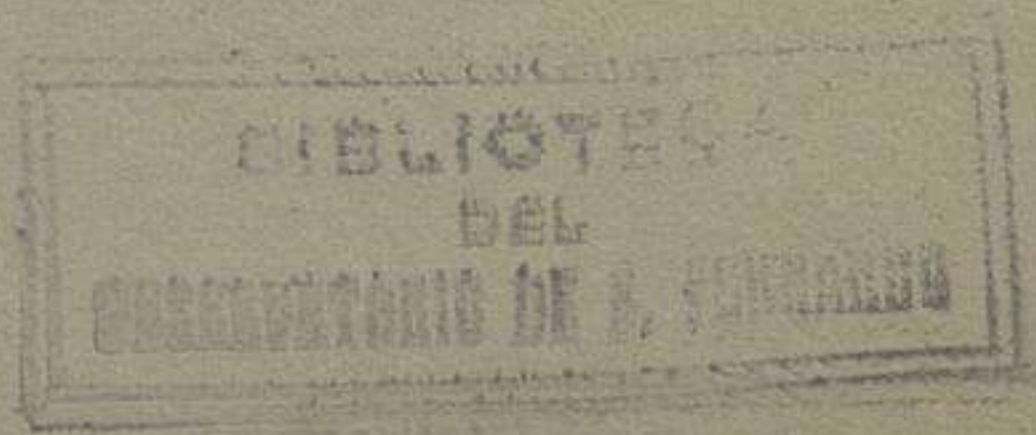
Ad eundem modum si æquatio esset $x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax-yy} - b^3 = 0$,
 produceretur $3x^2\dot{x} - \dot{xy}^2 - 2xy\dot{y} + a^2\sqrt{ax-yy} = 0$. Ubi si fluxionem
 $\sqrt{ax-yy}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax-yy} = z$, & erit $ax - y^2 = z^2$, & (per hanc
 Propositionem) $a\dot{x} - 2y\dot{y} = 2z\dot{z}$ seu $\frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2z} = \dot{z}$, hoc est $\frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2\sqrt{ax-yy}} = \sqrt{ax-yy}$.
 Et inde $3x^2\dot{x} - \dot{xy}^2 - 2xy\dot{y} + \frac{a^3\dot{x} - 2a^2y\dot{y}}{2\sqrt{ax-yy}} = 0$.

Et per operationem repetitam pergitur ad fluxiones secundas, tertias
 & sequentes. Sit æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, & fiet per operationem
 primam $\dot{zy}^3 + 3z\dot{y}y^2 - 4z\dot{z}^3 = 0$, per secundam $\ddot{zy}^3 + 6z\ddot{y}y^2 + 3z\dot{y}y^2 + 6z\dot{y}^2y$
 $- 4\ddot{z}z^3 - 12z^2\dot{z}^2 = 0$, per tertiam $\ddot{zy}^3 + 9z\ddot{y}y^2 + 9z\dot{y}y^2 + 18z\dot{y}^2y + 3z\dot{y}y^2$
 $+ 18z\ddot{y}y + 6z\dot{y}^3 - 4\ddot{z}z^3 - 36z\dot{z}z^2 - 24z^3\dot{z} = 0$.

Ubi vero sic pergitur ad fluxiones secundas, tertias & sequentes, conve-
 nit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare, & pro ejus
 fluxione primam unitatem scribere, pro secunda vero & sequentibus nihil.
 Sit æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, ut supra; & fluat z uniformiter, fitque
 ejus fluxio unitas, & fiet per operationem primam $y^3 + 3z\dot{y}y^2 - 4z^3 = 0$,
 per secundam $6y\dot{y}^2 + 3z\ddot{y}y^2 + 6z\dot{y}^2y - 12z^2 = 0$, per tertiam $9\ddot{y}y^2 + 18z\dot{y}^2y$
 $+ 3z\ddot{y}y^2 + 18z\ddot{y}y + 6z\dot{y}^3 - 24z = 0$.

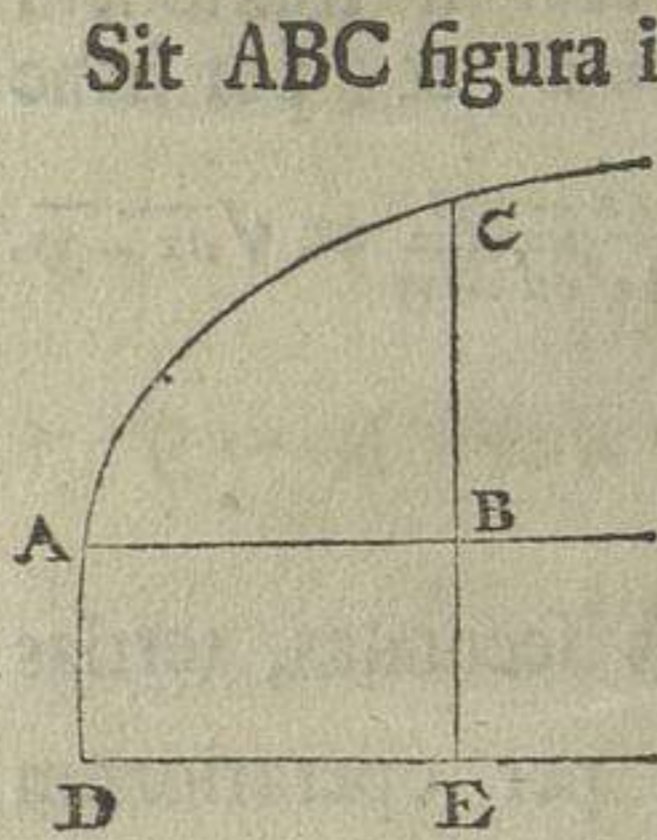
In hujus autem generis æquationibus concipiendum est quod fluxiones
 in singulis terminis sint ejusdem ordinis, id est vel omnes primi ordinis
 \dot{y} , \dot{z} , vel omnes secundi \ddot{y} , \ddot{y}^2 , $\ddot{y}z$, \dot{z}^2 , vel omnes tertii \ddot{y} , $\ddot{y}y$, $\ddot{y}z$, \dot{y}^3 , \dot{y}^2z ,
 $\dot{y}z^2$, \dot{z}^3 , &c. Et ubi res aliter se habet complendus est ordo per subin-
 tellectas fluxiones quantitatis uniformiter fluentis. Sic æquatio novissima
 complendo ordinem tertium fit $9z\ddot{y}y^2 + 18z\dot{y}^2y + 3z\ddot{y}y^2 + 18z\ddot{y}y + 6z\dot{y}^3$
 $- 24z\dot{z}^3 = 0$.

PROP.



PROP. II. PROB. II.

Invenire Curvas quæ quadrari possunt.



Sit ABC figura invenienda, BC Ordinatum applicata rectangula, & AB abscissa. Producat CB ad E ut fit BE = 1, & compleatur parallelogrammum ABED : & arearum ABC, ABED fluxiones erunt ut BC & BE. Assumatur igitur æquatio quævis qua ratio arearum definiatur, & inde dabitur ratio ordinatarum BC & BE per Prop. I. Q. E. I.

Hujus rei exempla habentur in Propositionibus duabus sequentibus.

PROP. III. THEOR. I.

Si pro abscissa AB & area AE seu AB x 1 promiscue scribatur z, & si pro $e + fz^n + gz^{2n} + bz^{3n} + \&c.$ scribatur R : fit autem area Curvæ $z^\theta R^\lambda$, erit ordinatum applicata BC æqualis

$$\frac{\theta e + \theta \times fz^n + \theta \times gz^{2n} + \theta \times bz^{3n} + \&c. \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1}}{+ \lambda n \quad + 2\lambda n \quad + 3\lambda n}$$

Demonstratio.

Nam si fit $z^\theta R^\lambda = v$, erit (per Prop. I) $\theta z^{\theta-1} R^\lambda + \lambda z^\theta R R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Pro R^λ in primo æquationis termino & z^θ in secundo scribe $RR^{\lambda-1}$ & $z z^{\theta-1}$, & fiet $\theta z R + \lambda z R$ in $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Erat autem $R = e + fz^n + gz^{2n} + bz^{3n} + \&c.$ et inde (per Prop. I) fit $\dot{R} = n f z^{n-1} + 2n g z^{2n-1} + 3n b z^{3n-1} + \&c.$ quibus substitutis & scripta BE seu 1 pro z, fiet

$$\frac{\theta e + \theta \times fz^n + \theta \times gz^{2n} + \theta \times bz^{3n} + \&c. \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1}}{+ \lambda n \quad + 2\lambda n \quad + 3\lambda n} = \dot{v} = BC.$$

Q. E. D.

PROP.

PROP. IV. THEOR. II.

Si Curvæ absciffa AB fit z , & fi pro $e + fz^n + gz^{2n} + \&c.$ scribatur R , & pro $k + lz^n + mz^{2n} + \&c.$ scribatur S ; fit autem area Curvæ $z^\theta R^\lambda S^\mu$: Erit ordinatim applicata BC æqualis

$$\begin{array}{l}
 \theta ek + \theta \times f k z^n + \theta \times g k z^{2n} \dots * \dots * \dots * \dots \\
 + \lambda n \qquad \qquad \qquad + 2\lambda n \\
 + \theta \times e l z^n + \theta \times f l z^{2n} + \theta \times g l z^{3n} \dots * \dots * \dots \\
 + \mu n \qquad \qquad \qquad + \lambda n \qquad \qquad \qquad + 2\lambda n \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + \mu n \qquad \qquad \qquad + \mu n \\
 + \theta \times e m z^{2n} + \theta \times f m z^{3n} + \theta \times g m z^{4n} \\
 + 2\mu n \qquad \qquad \qquad + \lambda n \qquad \qquad \qquad + 2\lambda n \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + 2\mu n \qquad \qquad \qquad + 2\mu n
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}} \right\} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$$

Demonstratur ad modum Propofitionis superioris.

PROP. V. THEOR. III.

Si Curvæ absciffa AB fit z , & pro $e + fz^n + gz^{2n} + bz^{3n} + \&c.$ scribatur R : fit autem Ordinatum applicata $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} \times a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n} + \&c.$ & ponatur $\frac{\theta}{n} = r, r + \lambda = s, s + \lambda = t, t + \lambda = v, \&c.$

$$\begin{aligned}
 \text{Erit Area} = & z^\theta R^\lambda \ln + \frac{\frac{1}{n} a}{re} \\
 & + \frac{\frac{1}{n} b - sfA}{r+1xe} z^n \\
 & + \frac{\frac{1}{n} c - \overline{s+1} \times fB - tgA}{r+2xe} z^{2n} \\
 & + \frac{\frac{1}{n} d - \overline{s+2} \times fC - \overline{t+1} \times gB - vbA}{r+3xe} z^{3n} \\
 & + \frac{-\overline{s+3} \times fD - \overline{t+2} \times gC - \overline{v+1} \times bB}{r+4xe} z^{4n} \\
 & + \&c.
 \end{aligned}$$

Ubi $A, B, C, D, \&c.$ denotant totas coefficientes datas terminorum singularum in serie cum signis suis $+$ & $-$, nempe

- A primi termini coefficientem $\frac{\frac{1}{n} a}{re}$
- B secundi termini coefficientem $\frac{\frac{1}{n} b - sfA}{r+1xe}$
- C tertii termini coefficientem $\frac{\frac{1}{n} c - \overline{s+1} \times fB - tgA}{r+2xe}$

Et sic deinceps.

N

Demonstratio

Demonstratio.

Sunto juxta Propositionem tertiam.

CURVARUM ORDINATÆ	AREÆ
1 . $\theta eA + \theta \times fAz^n + \theta \times gAz^{2n} + \theta \times hAz^{3n}, \&c.$	} $\times z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$ {
2 $+ \overline{\theta+\lambda n} \times eBz^n + \overline{\theta+\lambda n} \times fBz^{2n} + \overline{\theta+\lambda n} \times gBz^{3n} \&c.$	
3 $+ \overline{\theta+2\lambda n} \times eCz^{2n} + \overline{\theta+2\lambda n} \times fCz^{3n} \&c.$	
4 $+ \overline{\theta+3\lambda n} \times eDz^{3n} \&c.$	
	} $Az^\theta R^\lambda$
	} $Bz^{\theta+\lambda} R^\lambda$
	} $Cz^{\theta+2\lambda} R^\lambda$
	} $Dz^{\theta+3\lambda} R^\lambda$

Et si summa Ordinarum ponatur æqualis Ordinatæ $a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n} + \&c.$ in $z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$, summa arearum $z^\theta R^\lambda$ in $A + Bz^n + Cz^{2n} + Dz^{3n} + \&c.$ æqualis erit areæ Curvæ cujus ista est Ordinata. Equentur igitur Ordinarum termini correspondentes,

$$\text{et fiet } a = \theta eA,$$

$$b = \overline{\theta+\lambda n} \times fA + \overline{\theta+\lambda n} \times eB,$$

$$c = \overline{\theta+2\lambda n} \times gA + \overline{\theta+\lambda n} \times fB + \overline{\theta+2\lambda n} \times eC,$$

&c.

$$\text{et inde } A = \frac{a}{\theta e}$$

$$B = \frac{b - \overline{\theta+\lambda n} \times fA}{\overline{\theta+\lambda n} \times e}$$

$$C = \frac{c - \overline{\theta+2\lambda n} \times gA - \overline{\theta+\lambda n} \times fB}{\overline{\theta+2\lambda n} \times e}$$

Et sic deinceps in infinitum.

Pone jam $\frac{\theta}{n} = r$, $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, &c. et in area $z^\theta R^\lambda$ in $A + Bz^n + Cz^{2n} + Dz^{3n} + \&c.$ scribe ipsorum $A, B, C, \&c.$ valores inventos, & prodibit series proposita. Q. E. D.

Et notandum est quod Ordinata omnis duobus modis in seriem resolvitur. Nam index n vel affirmativus esse potest vel negativus.

Proponatur Ordinata $\frac{3k-lz}{\sqrt{kz-lz^3+mz^4}}$: Hæc vel sic scribi potest

$$z^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt{3k-lz^2} \times \sqrt{k-lz^2+mz^3}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{vel sic } z^{-2} \times \sqrt{-l+3kz^{-2} \times m-lz^{-1}+kz^{-3}}^{-\frac{1}{2}}$$

In

In casu priore est $a = 3k$, $b = 0$, $c = -l$, $e = k$, $f = 0$, $g = -l$,
 $h = m$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $\theta - 1 = -\frac{1}{2}$, $\theta = -\frac{3}{2} = r$, $s = -1$, $t = -\frac{1}{2}$,
 $v = 0$.

In posteriore est $a = -l$, $b = 0$, $c = 3k$, $e = m$, $f = -l$, $g = 0$,
 $h = k$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $n = -1$, $\theta - 1 = -2$, $\theta = -1$, $r = 1$, $s = 1\frac{1}{2}$,
 $t = 2$, $v = 2\frac{1}{2}$. Tentandus est casus uterque. Et si serierum alterutra
ob terminos tandem deficientes abrumpitur ac terminatur habebitur area
Curvæ in terminis finitis. Sic in exempli hujus priore casu scribendo in
serie valores ipsorum $a, b, c, e, f, g, h, \lambda, \theta, r, s, t, v$, termini omnes
post primum evanescent in infinitum & area Curvæ prodit $-2\sqrt{\frac{k-lx^2+mx^3}{z^3}}$

Et hæc area ob signum negativum adjacet abscissæ ultra ordinatam pro-
ductæ. Nam area omnis affirmativa adjacet tam abscissæ quam ordinatæ,
negativa vero cadit ad contrarias partes ordinatæ & adjacet abscissæ pro-
ductæ, manente scilicet signo Ordinatæ. Hoc modo series alterutra &
nonnunquam utraque semper terminatur & finita evadit si Curva geome-
trice quadrari potest. At si Curva talem quadraturam non admittit, series
utraque continuabitur in infinitum, & earum altera converget & aream
dabit approximando, præterquam ubi r (propter aream infinitam) vel
nihil est vel numerus integer & negativus, vel ubi $\frac{z^n}{e}$ æqualis est unitati.
Si $\frac{z^n}{e}$ minor est unitate, converget series in qua index n affirmativus est :
sin $\frac{z^n}{e}$ unitate major est, converget series altera. Si in uno casu area ad-
jacet abscissæ ad usque ordinatam ductæ, in altero adjacet abscissæ ultra
ordinatam productæ.

Nota insuper quod si Ordinata contentum est sub factore rationali \mathcal{Q}
& factore surdo irreducibili R^π & factoris surdi latus R non dividit facto-
rem rationalem \mathcal{Q} ; erit $\lambda - 1 = \pi$ & $R^{\lambda-1} = R^\pi$. Sin factoris surdi
latus R dividit factorem rationalem semel, erit $\lambda - 1 = \pi + 1$ & $R^{\lambda-1}$
 $= R^{\pi+1}$: si dividit bis, erit $\lambda - 1 = \pi + 2$ & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+2}$: si ter,
erit $\lambda - 1 = \pi + 3$, & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+3}$: & sic deinceps.

Si Ordinata est fractio rationalis irreducibilis cum denominatore ex
duobus vel pluribus terminis composito: resolvendus est denominator in
divisores suos omnes primos. Et si divisor sit aliquis cui nullus alius est
æqualis, Curva quadrari nequit: Sin duo vel plures sint divisores æquales,
rejiciendus est eorum unus, & si adhuc alii duo vel plures sint sibi mutuo
æquales & prioribus inæquales, rejiciendus est etiam eorum unus, & sic
in aliis omnibus æqualibus si adhuc plures sint: deinde divisor qui relin-
quitur vel contentum sub divisoribus omnibus qui relinquuntur, si plures
sunt, ponendum est pro R , & ejus quadrati reciprocum R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$,
præterquam ubi contentum illud est quadratum vel cubus vel quadrato
quadratum, &c. quo casu ejus latus ponendum est pro R & potestatis in-
dex 2 vel 3 vel 4 negative sumptus pro λ , et Ordinata ad denominatorem
 R^2 vel R^3 vel R^4 vel R^5 &c. reducenda. Ut



Ut si Ordinata fit $\frac{z^5 + z^4 - 8z^3}{z^5 + z^4 - 5z^3 - z^2 + 5z - 4}$; quoniam hæc fractio irreducibilis est & denominatoris divisores sunt pares, nempe $z - 1$, $z - 1$, $z - 1$ & $z + 2$, $z + 2$, rejicio magnitudinis utriusque divisorem unum, & reliquorum $z - 1$, $z - 1$, $z + 2$ contentum $z^3 - 3z + 2$ pono pro R & ejus quadrati reciprocum $\frac{1}{R^2}$ seu R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$. Dein Ordinatum ad denominatorem R^2 seu $R^{1-\lambda}$ reduco, & fit $\frac{z^6 - 9z^4 + 8z^3}{z^3 - 3z + 2|^2}$, i.e. $z^3 \times 8 - 9z + z^3 \times 2 - 3z + z^3|^{-2}$. Et inde est $a = 8$, $b = -9$, $c = 0$, $d = 1$, &c. $e = 2$, $f = -3$, $g = 0$, $h = 1$, $\lambda - 1 = -2$, $\lambda = -1$, $n = 1$, $\theta - 1 = 3$, $\theta = 4 = r$, $s = 3$, $t = 2$, $v = 1$. Et his in serie scriptis prodit area $\frac{z^4}{z^3 - 3z + 2}$, terminis omnibus in tota serie post primum evanescentibus.

Si denique Ordinata est fractio irreducibilis & ejus denominator contentum est sub factore rationali \mathcal{Q} & factore surdo irreducibili R^π , inveniendi sunt lateris R divisores omnes primi, & rejiciendus est divisor unus magnitudinis cujusque & per divisores qui restant, siqui sint, multiplicandus est factor rationalis \mathcal{Q} : & si factum æquale est lateri R vel lateris illius potestati alicui cujus index est numerus integer, esto index ille m , & erit $\lambda - 1 = -\pi - m$, & $R^{\lambda-1} = R^{-\pi-m}$.

Ut si Ordinata fit $\frac{3q^5 - q^4x + 9q^2x^2 - q^2x^3 - 6x^3}{q^2 - x^2 \times q^3 + q^2x - qx^2 - x^3|^{\frac{1}{3}}}$, quoniam factoris surdi lateris R seu $q^3 + q^2x - qx^2 - x^3$ divisores habet $q + x$, $q + x$, $q - x$ qui duarum sunt magnitudinum, rejicio divisorem unum magnitudinis utriusque & per divisorem $q + x$ qui relinquitur, multiplico factorem rationalem $q^2 - x^2$. Et quoniam factum $q^3 + q^2x - qx^2 - x^3$ æquale est lateri R , pono $m = 1$, & inde, cum π fit $\frac{1}{3}$, fit $\lambda - 1 = -\frac{4}{3}$. Ordinatum igitur reduco ad denominatorem $R^{-\frac{4}{3}}$, & fit

$x^0 \times 3q^6 + 2q^5x + 8q^4x^2 + 8q^3x^3 - 7q^2x^4 - 6qx^5 \times q^3 + q^2x - qx^2 - x^3|^{\frac{4}{3}}$
Unde est $a = 3q^6$, $b = 2q^5$ &c. $e = q^3$, $f = q^2$ &c. $\theta - 1 = 0$, $\theta = 1 = n$, $\lambda = -\frac{4}{3}$, $r = 1$, $s = \frac{2}{3}$, $t = \frac{1}{3}$, $v = 0$. Et his in serie scriptis prodit area $\frac{2q^2x + 3x^3}{q^3 + q^2x - qx^2 - x^3|^{\frac{1}{3}}}$, terminis omnibus in serie tota post tertium evanescentibus.

PROP. VI. THEOR. IV.

Si Curvæ abscissa AB fit z , & scribantur R pro $e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} + \&c.$ & S pro $k + lz^n + mx^{2n} + nx^{3n} + \&c.$ fit autem Ordinatum applicata $z^{\lambda-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$ in $a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n} + \&c.$ et si terminorum, $e, f, g, h, \&c.$ et $k, l, m, n, \&c.$ rectangula sint

$$\begin{array}{cccccc} ek & fk & gk & hk & \&c. \\ el & fl & gl & hl & \&c. \\ em & fm & gm & hm & \&c. \\ en & fn & gn & hn & \&c. \end{array}$$

Et

Et si rectangulorum illorum coefficientes numerales sint respective

$$\frac{\theta}{n} = r. \quad r + \lambda = s. \quad s + \lambda = t. \quad t + \lambda = v. \quad \text{\&c.}$$

$$r + \mu = s'. \quad s + \mu = t'. \quad t + \mu = v'. \quad v + \mu = w'. \quad \text{\&c.}$$

$$s' + \mu = t''. \quad t' + \mu = v''. \quad v' + \mu = w''. \quad w' + \mu = x''. \quad \text{\&c.}$$

$$t'' + \mu = v'''. \quad v'' + \mu = w'''. \quad w'' + \mu = x'''. \quad x'' + \mu = y'''. \quad \text{\&c.}$$

Area Curvæ erit hæc

$$\begin{aligned} z^\theta R^\lambda S^\mu \text{ in } &+ \frac{\frac{1}{n}a}{rek} \\ &+ \frac{\frac{1}{n}b \begin{matrix} -sfkA \\ -s'el \end{matrix}}{r+1 \times ek} z^\mu \\ &+ \frac{\frac{1}{n}c \begin{matrix} -s+1 \times fkB \\ -s'+1 \times el \end{matrix} \begin{matrix} -t gk A \\ -t'fl \\ -t''em \end{matrix}}{r+2 \times ek} z^{2\mu} \\ &+ \frac{\frac{1}{n}d \begin{matrix} -s+2 \times fkC \\ -s'+2 \times el \end{matrix} \begin{matrix} -t+1 \times gkB \\ -t'+1 \times fl \\ -t''+1 \times em \end{matrix} \begin{matrix} -vbk A \\ -v'gl \\ -v''fm \\ -v'''en \end{matrix}}{r+3 \times ek} z^{3\mu} \\ &+ \text{\&c.} \end{aligned}$$

Ubi A denotat termini primi coefficientem datam $\frac{1}{n}a$ cum signo suo $+$ vel $-$, B coefficientem datam secundi, C coefficientem datam tertii, & sic deinceps. Terminorum vero, $a, b, c, \text{\&c.}$ $e, f, g, \text{\&c.}$ $k, l, m, \text{\&c.}$ unus vel plures deesse possunt.

Demonstratur Propositio ad modum præcedentis, & quæ ibi notantur hic obtinent. Pergit autem series talium Propositionum in infinitum, & progressio seriei manifesta est.

PRO P. VII. THEOR. V.

Si pro $e + fz^n + gz^{2n} + \text{\&c.}$ scribatur R ut supra, & in Curvæ alicujus Ordinata $x^{\theta \pm n\sigma} R^{\lambda \pm \tau}$ maneant quantitates datae $\theta, n, \lambda, e, f, g, \text{\&c.}$ et pro σ ac τ scribantur successive numeri quicunque integri: & si detur Area unius ex Curvis quæ per Ordinatas innumeras sic prodeunt designantur si Ordinatae sunt duorum nominum in vinculo radicis, vel si dentur Areae duarum ex Curvis si Ordinatae sunt trium nominum in vinculo radicis, vel Areae trium ex Curvis si Ordinatae sunt quatuor nominum in vinculo radicis, & sic deinceps in infinitum: dico quod dabuntur Areae curvarum omnium.

O

Pro

Pro nominibus hic habeo terminos omnes in vinculo radicis tam deficientes quam plenos quorum indices dignitatum sunt in progressionem arithmetica. Sic Ordinata $\sqrt{a^4 - ax^3 + x^4}$ ob terminos duos inter a^4 & $-ax^3$ deficientes pro quinquinomio haberi debet. At $\sqrt{a^4 + x^4}$ binomium est, & $\sqrt{a^4 + x^4} = \frac{x^8}{a^4}$ trinomium, cum progressio jam per majores differentias procedat. Propositio vero sic demonstratur.

C A S. I.

Sunto Curvarum duarum Ordinatae $px^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ & $qz^{\theta+n-1}R^{\lambda-1}$, & Areae pA & qB , existente R quantitate trium nominum $e + fz^n + gz^{2n}$. Et cum per Prop. 3. fit $z^\theta R^\lambda$ area Curvae cujus Ordinata est $\theta e + \theta + \lambda n \times fz^n + \theta + 2\lambda n \times gz^{2n}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, subduc Ordinatas & Areas priores de Area & Ordinata posteriori, & manebit $\theta e - p + \theta \times f - q \times z^n + \theta \times gz^{2n} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ Ordinata nova Curvae, et $z^\theta R^\lambda - pA - qB$ ejusdem Area. Pone $\theta e = p$, & $\theta f + \lambda n f = q$, & Ordinata evadet $\theta + 2\lambda n \times gz^{2n} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, & Area $z^\theta R^\lambda - \theta e A - \theta f B - \lambda n f B$. Divide utramque per $\theta g + 2\lambda n g$, & Aream prodeuntem dic C , & assumpta utcunque r , erit rC Area Curvae cujus Ordinata est $rz^{\theta+2n-1}R^{\lambda-1}$. Et qua ratione ex Areae pA & qB Aream rC Ordinatae $rz^{\theta+2n-1}R^{\lambda-1}$ congruentem invenimus, licebit ex Areae qB & rC Aream quartam puta sD , Ordinatae $sz^{\theta+3n-1}R^{\lambda-1}$ congruentem invenire, & sic deinceps in infinitum. Et par est ratio progressionis ab Areae B & A in partem contrariam pergentis. Si terminorum θ , $\theta + \lambda n$, & $\theta + 2\lambda n$ aliquis deficit & seriem abruptit, assumatur Area pA in principio progressionis unius & Area qB in principio alterius, & ex his duabus Areae dabuntur Areae omnes in progressionem utraque. Et contra, ex aliis duabus Areae assumptis fit regressus per Analysin ad Areas A & B , adeo ut ex duabus datis caeterae omnes dentur. Q. E. O.

Hic est casus Curvarum ubi ipsius z index θ augetur vel diminuitur perpetua additione vel subtractione quantitatis n . Casus alter est Curvarum ubi index λ augetur vel diminuitur unitatibus.

C A S. II.

Ordinatae $px^{\theta-1}R^\lambda$ et $qz^{\theta+n-1}R^\lambda$, quibus Areae pA et qB jam respondeant, si in R seu $e + fz^n + gz^{2n}$ ducantur ac deinde ad R vicissim applicentur, evadunt $pe + pfz^n + pgz^{2n} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, et $qez^n + qfz^{2n} + qgz^{3n} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.

Et (per Prop. 3.) est $az^\theta R^\lambda$ area Curvae cujus Ordinata est $\theta ae + \theta + \lambda n \times afz^n + \theta + 2\lambda n \times agz^{2n} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, et $bz^{\theta+n}R^\lambda$ area Curvae cujus

cujus Ordinata est $\overline{\theta+n} \times be z^n + \overline{\theta+n+\lambda n} \times bf z^{2n} + \overline{\theta+n+2\lambda n} \times bg z^{3n} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$.

Et harum quatuor Arearum summa est $pA + qB + az^{\theta} R^{\lambda} + bz^{\theta+n} R^{\lambda}$, & summa respondentium Ordinatarum

$$\begin{array}{l} \overline{\theta+n} \times ae + \overline{\theta+\lambda n} \times af z^n + \overline{\theta+2\lambda n} \times ag z^{2n} + \overline{\theta+n+2\lambda n} \times bg z^{3n} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1}. \\ + pe + \overline{\theta+n} \times be \quad + \overline{\theta+n+\lambda n} \times bf \quad + 1 \times qg \\ \quad + 1 \times pf \quad \quad + 1 \times pg \\ \quad + 1 \times qe \quad \quad + 1 \times qf \end{array}$$

Si terminus primus tertius & quartus ponantur seorsim æquales nihilo, per primum fiet $\theta ae + pe = 0$, seu $-\theta a = p$, per quartum $-\theta b - nb - 2\lambda nb = q$, & per tertium (eliminando p & q) $\frac{2ag}{f} = b$. Unde secundus fit $\frac{\lambda n a f f - 4\lambda n a g e}{f}$, adeoq; summa quatuor Ordinatarum est $\frac{\lambda n a f f - 4\lambda n a g e}{f} z^{\theta+n-1} R^{\lambda-1}$, & summa totidem respondentium Arearum est $az^{\theta} R^{\lambda} + \frac{2ag}{f} z^{\theta+n} R^{\lambda} - \theta a A + \frac{2\theta+2n+4\lambda n}{f} ag B$. Dividantur hæ summæ per $\frac{\lambda n a f f - 4\lambda n a g e}{f}$, & si Quotum posterius dicatur D , erit D Area curvæ cujus Ordinata est Quotum prius $z^{\theta+n-1} R^{\lambda-1}$. Et eadem ratione ponendo omnes Ordinatæ terminos præter primum æquales nihilo potest Area Curvæ inveniri cujus Ordinata est $z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$. Dicatur Area ista C , & qua ratione ex Areis A & B inventæ sunt Areae C ac D , ex his Areis C ac D inveniri possunt aliæ duæ E & F Ordinatis $z^{\theta-1} R^{\lambda-2}$ et $z^{\theta+n-1} R^{\lambda-2}$ congruentes, & sic deinceps in infinitum. Et per Analyfin contrariam regredi licet ab Areis E & F ad Areas C ac D , & inde ad Areas A & B , aliasque quæ in progressionem sequuntur. Igitur si index λ perpetua additione vel subtractione augeatur vel minuat, & ex Areis quæ Ordinatis sic prodeuntibus respondent duæ simplicissimæ habentur; dantur aliæ omnes in infinitum. Q. E. O.

C A S. III.

Et per casus hosce duos conjunctos, si tam index θ perpetua additione vel subtractione ipsius n , quam index λ perpetua additione vel subtractione unitatis, utcunque augeatur vel minuat, dabuntur Areae singulis prodeuntibus Ordinatis respondentes. Q. E. O.

C A S. IV.

Et simili argumento si Ordinata constat ex quatuor nominibus in vinculo radicali & dantur tres Arearum, vel si constat ex quinque nominibus & dantur quatuor Arearum, & sic deinceps: dabuntur Areae omnes quæ addendo

dendo vel subducendo numerum n indici θ vel unitatem indici λ generari possunt. Et par est ratio Curvarum ubi Ordinatae ex binomiis conflantur, & Area una earum quae non sunt Geometricae quadrabiles datur. Q. E. O.

PROP. VIII. THEOR. VI.

Si pro $e + fz^n + gz^{2n} + \&c.$ et $k + lz^n + mz^{2n} + \&c.$ scribantur R & S ut supra, & in Curvae alicujus Ordinata $z^{\theta \pm n^r} R^{\lambda \pm r} S^{\mu \pm v}$ maneant quantitates datae $\theta, n, \lambda, \mu, e, f, g, k, l, m, \&c.$ et pro $\sigma, \tau, \& \upsilon,$ scribantur successive numeri quicumque integri: & si dentur Areae duarum ex curvis quae per Ordinatas sic prodeunt designantur si quantitates R & S sunt binomia, vel si dentur Areae trium ex curvis si R & S conjunctim ex quinque nominibus constant, vel Areae quatuor ex curvis si R & S conjunctim ex sex nominibus constant, & sic deinceps in infinitum: dico quod dabuntur Areae curvarum omnium.

Demonstratur ad modum propositionis superioris.

PROP. IX. THEOR. VII.

Aequantur Curvarum Areae inter se quarum Ordinatae sunt reciproce ut fluxiones Abscissarum.

Nam contenta sub Ordinatis & fluxionibus Abscissarum erunt aequalia, & fluxiones Arearum sunt ut haec contenta.

COROL. I.

Si assumatur relatio quavis inter Abscissas duarum Curvarum, & inde per Prop. I. quaeratur relatio fluxionum Abscissarum, & ponantur Ordinatae reciproce proportionales fluxionibus, inveniri possunt innumerae Curvae quarum Areae sibi mutuo aequales erunt.

COROL. II.

Si enim Curva omnis cujus haec est Ordinata $z^{\theta-1} \times \sqrt[e + fz^n + gz^{2n} + \&c.]{\lambda}$, assumendo quantitatem quamvis pro v , & ponendo $\frac{n}{v} = s$, & $z^s = x$, migrat in aliam sibi aequalem cujus Ordinata est $\frac{v}{n} x^{\frac{v\theta-n}{n}} \times \sqrt[e + fx^v + gx^{2v} + \&c.]{\lambda}$.

COROL.

COROL. III.

Et Curva omnis cujus Ordinata est $z^{\theta-1} \times \overline{a + bz^n + cz^{2n} + \&c.} \times \overline{e + fz^n + gz^{2n} + \&c.} |^{\lambda}$, assumendo quantitatem quamvis pro v & ponendo $\frac{n}{v} = s$, & $z^s = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{v}{n} x^{\frac{v\theta-n}{n}} \times \overline{a + bx^v + cx^{2v} + \&c.} \times \overline{e + fx^v + gx^{2v} + \&c.} |^{\lambda}$.

COROL. IV.

Et Curva omnis cujus Ordinata est $z^{\theta-1} \times \overline{a + bz^n + cz^{2n} + \&c.} \times \overline{e + fz^n + gz^{2n} + \&c.} |^{\lambda} \times \overline{k + lz^n + mx^{2n} + \&c.} |^{\mu}$, assumendo quantitatem quamvis pro v , & ponendo $\frac{n}{v} = s$, & $z^s = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{v}{n} x^{\frac{v\theta-n}{n}} \times \overline{a + bx^v + cx^{2v} + \&c.} \times \overline{e + fx^v + gx^{2v} + \&c.} |^{\lambda} \times \overline{k + lx^v + mx^{2v} + \&c.} |^{\mu}$.

COROL. V.

Et Curva omnis cujus Ordinata est $z^{\theta-1} \times \overline{e + fz^n + gz^{2n} + \&c.} |^{\lambda}$, ponendo $\frac{1}{z} = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{1}{x^{\theta+1}} \times \overline{e + fx^{-n} + gx^{-2n} + \&c.} |^{\lambda}$ id est $\frac{1}{x^{\theta+1+n\lambda}} \times \overline{f + ex^n} |^{\lambda}$ si duo sunt nomina in vinculo radicis, vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2n\lambda}} \times \overline{g + fx^n + ex^{2n}} |^{\lambda}$ si tria sunt nomina; & sic deinceps.

COROL. VI.

Et Curva omnis cujus Ordinata est $z^{\theta-1} \times \overline{e + fz^n + gz^{2n} + \&c.} |^{\lambda} \times \overline{k + lz^n + mx^{2n} + \&c.} |^{\mu}$, ponendo $\frac{1}{z} = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{1}{x^{\theta+1}} \times \overline{e + fx^{-n} + gx^{-2n} + \&c.} |^{\lambda} \times \overline{k + lx^{-n} + mx^{-2n} + \&c.} |^{\mu}$ id est $\frac{1}{x^{\theta+1+n\lambda+n\mu}} \times \overline{f + ex^n} |^{\lambda} \times \overline{l + kx^n} |^{\mu}$ si bina sunt nomina in vinculis radicis, vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2n\lambda+n\mu}} \times \overline{g + fx^n + ex^{2n}} |^{\lambda} \times \overline{l + kx^n} |^{\mu}$ si tria sunt nomina in vinculo radicis prioris ac duo in vinculo posterioris: & sic in aliis.

P

Et

Et nota quod Areae duae aequales in novissimis hisce duobus Corollariis jacent ad contrarias partes Ordinatarum. Si Area in alterutra Curva adjacet Abscissae, Area huic aequalis in altera Curva adjacet Abscissae productae.

COROLL. VII.

Si relatio inter Curvae alicujus Ordinatum y & Abscissam z definiatur per aequationem quamvis affectam hujus formae,

$$y^{\alpha} \times e + fy^{\beta} z^{\delta} + gy^{2\beta} z^{2\delta} + by^{3\beta} z^{3\delta} + \&c. = z^{\beta} \times k + ly^{\beta} z^{\delta} + my^{2\beta} z^{2\delta} + \&c.$$

haec Figura assumendo $s = \frac{n-\delta}{n}$, $x = \frac{1}{s} z^s$, & $\lambda = \frac{n-\delta}{\alpha\delta - \beta n}$, migrat in aliam sibi aequalem cujus Abscissa x , ex data Ordinata v , determinatur per aequationem non affectam $\frac{1}{s} v^{\alpha\lambda} \times e + fv^{\beta} + gv^{2\beta} + \&c. |^{\lambda} \times k + lv^{\beta} + mv^{2\beta} + \&c. |^{-\lambda} = x$.

COROLL. VIII.

Si relatio inter Curvae alicujus Ordinatum y & Abscissam z definitur per aequationem quamvis affectam hujus formae,

$$y^{\alpha} \times e + fy^{\beta} z^{\delta} + gy^{2\beta} z^{2\delta} + \&c. = z^{\beta} \times k + ly^{\beta} z^{\delta} + my^{2\beta} z^{2\delta} + \&c. \\ + z^{\gamma} \times p + qy^{\beta} z^{\delta} + ry^{2\beta} z^{2\delta} + \&c.$$

haec Figura assumendo $s = \frac{n-\delta}{n}$, $x = \frac{1}{s} z^s$, $\mu = \frac{\alpha\delta + \beta n}{n-\delta}$, & $\nu = \frac{\alpha\delta + \gamma n}{n-\delta}$, migrat in aliam sibi aequalem cujus Abscissa x ex data Ordinata v determinatur per aequationem minus affectam $v^{\alpha} \times e + fv^{\beta} + gv^{2\beta} + \&c. = s^{\mu} x^{\mu} \times k + lv^{\beta} + mv^{2\beta} + \&c. \\ + s^{\nu} x^{\nu} \times p + qv^{\beta} + rv^{2\beta} + \&c.$

COROLL. IX.

Curva omnis cujus Ordinata est

$$\pi z^{\theta-1} \times \overline{ve + v + n f z^n + v + 2n g z^{2n} + \&c.} \times \overline{e + f z^n + g z^{2n} + \&c.} |^{\lambda-1} \text{ in}$$

$a + b \times \overline{e z^{\nu} + f z^{\nu+n} + g z^{\nu+2n} + \&c.} |^{\tau} |^{\omega}$, si fit $\theta = \lambda \nu$, & assumantur

$$x = \overline{e z^{\nu} + f z^{\nu+n} + g z^{\nu+2n} + \&c.} |^{\pi}, \quad \sigma = \frac{\pi}{\lambda}, \quad \& \quad \mathfrak{D} = \frac{\lambda - \pi}{\pi},$$

migrat in aliam sibi aequalem cujus Ordinata est $x^{\mathfrak{D}} \times a + b x^{\sigma} |^{\omega}$. Et nota quod Ordinata prior in hoc Corollario evadit simplicior ponendo $\lambda = 1$, vel ponendo $\tau = 1$, & efficiendo ut radix dignitatis extrahi possit cujus index est ω , vel etiam ponendo $\omega = -1$, & $\lambda = 1 = \tau = \sigma = \pi$, ut alios casus praeteream.

COROLL.

COROL. X.

Pro $\overline{ez^v + fz^{v+n} + gz^{v+2n} + \&c.}$ $\overline{vez^{v-1} + v + n fz^{v+n-1} + v + 2n gz^{v+2n-1} + \&c.}$
 $\overline{k + lz^n + mx^{2n} + \&c.}$ et $\overline{nlz^{n-1} + 2nmz^{2n-1} + \&c.}$ scribantur $R, r, S \& s$
 respective, & Curva omnis cujus Ordinata est $\overline{\pi Sr + \phi Rs} \times R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$
 $\times \overline{aS^v + bR^r} |^\omega$, si fit $\frac{\mu - v\omega}{\lambda} = \frac{v}{\tau} = \frac{\phi}{\pi}$, $\frac{\tau}{\pi} = \sigma$, $\frac{\lambda - \pi}{\pi} = \vartheta$, & $R^\pi S^\phi = x$,
 migrat in aliam fibi æqualem cujus Ordinata est $x^\vartheta \times \overline{ax + bx^\sigma} |^\omega$. Et nota
 quod Ordinata prior evadit simplicior, ponendo unitates pro τ, v , & λ vel
 μ , & faciendo ut radix dignitatis extrahi possit cujus index est ω , vel po-
 nendo $\omega = -1$ vel $\mu = 0$.

PROP. X. PROB. III.

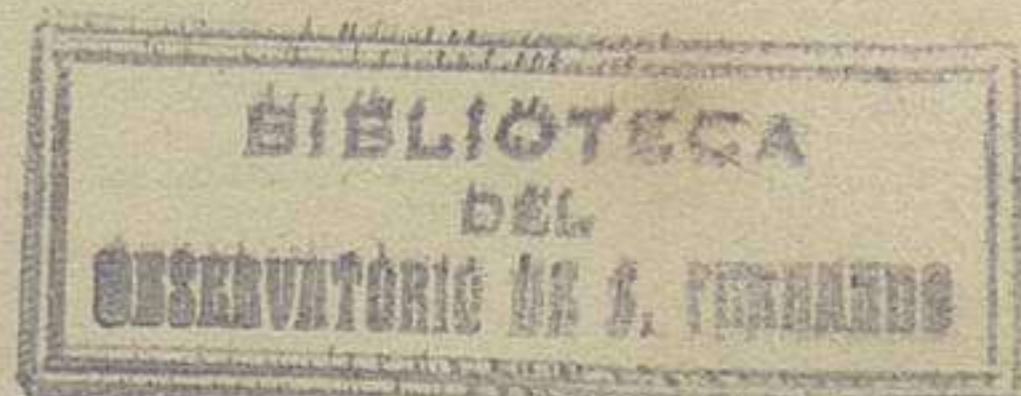
*Invenire Figuras simplicissimas cum quibus Curva quæ-
 vis Geometrice comparari potest, cujus Ordinatum appli-
 cata y per æquationem non affectam ex data Abscissa z
 determinatur.*

CAS. I.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}$, & Area erit $\frac{1}{\theta} az^\theta$, ut ex Prop. 5. ponendo
 $b = 0 = c = d = f = g = h$, & $e = 1$, facile colligitur.

CAS. II.

Sit Ordinata $az^{\theta-1} \times \overline{e + fz^n + gz^{2n} + \&c.} |^{\lambda-1}$, et si Curva cum Figuris
 rectilineis Geometrice comparari potest, quadrabitur per Prop. 5. ponendo
 $b = 0 = c = d$. Sin minus convertetur in aliam Curvam fibi æqualem
 cujus Ordinata est $\frac{a}{n} x^{\frac{\theta-n}{n}} \times \overline{e + fx + gx^2 + \&c.} |^{\lambda-1}$ per Corol. 2, Prop. 9.
 Deinde si de dignitatum indicibus $\frac{\theta-n}{n}$ & $\lambda - 1$ per Prop. 7. rejiciantur
 unitates



unitates donec dignitates illæ fiant quam minimæ, devenietur ad Figuras simplicissimas quæ hac ratione colligi possunt. Dein harum unaquæque per Corol. 5, Prop. 9. dat aliam quæ nonnunquam simplicior est. Et ex his per Prop. 3. & Corol. 9, & 10, Prop. 9. inter se collatis, Figuræ adhuc simpliciores quandoque prodeunt. Denique ex Figuris simplicissimis assumptis factò regressu computabitur Area quæsitæ.

C A S. III.

Sit Ordinata $z^{\theta-1} \times \overline{a + bz^n + cz^{2n} + \&c.} \times \overline{e + fz^n + gz^{2n} + \&c.}^{\lambda-1}$, & hæc Figura si quadrari potest, quadrabitur per Prop. 5. Sin minus, distinguenda est Ordinata in partes $z^{\theta-1} \times a \times \overline{e + fz^n + gz^{2n} + \&c.}^{\lambda-1}$, $z^{\theta-1} \times bz^n \times \overline{e + fz^n + gz^{2n} + \&c.}^{\lambda-1}$, &c. et per Cas. 2. inveniendæ sunt Figuræ simplicissimæ cum quibus Figuræ partibus illis respondentes comparari possunt.

Nam Areæ figurarum partibus illis respondentium sub signis suis + & — conjunctæ component Aream totam quæsitam.

C A S. IV.

Sit Ordinata $z^{\theta-1} \times \overline{a + bz^n + cz^{2n} + \&c.} \times \overline{e + fz^n + gz^{2n} + \&c.}^{\lambda-1}$ in $\overline{k + lz^n + mz^{2n} + \&c.}^{\mu-1}$; et si Curva quadrari potest, quadrabitur per Prop. 6. Sin minus, convertetur in simpliciolem per Corol. 4, Prop. 9. ac inde comparabitur cum Figuris simplicissimis per Prop. 8. et Corol. 6, 9 & 10, Prop. 9. ut fit in Casu 2 & 3.

C A S. V.

Si Ordinata ex variis partibus constat, partes singulæ pro Ordinatis curvarum totidem habendæ sunt, & Curvæ illæ quotquot quadrari possunt, figillatim quadrandæ sunt, earumque Ordinatæ de Ordinata tota demendæ.

Dein

Dein Curva quam Ordinata pars residua designat seorsim (ut in Casu 2, 3 & 4,) cum Figuris simplicissimis comparanda est cum quibus comparari potest. Et summa Arearum omnium pro Area Curvæ propositæ habenda est.

C O R O L. I.

Hinc etiam Curva omnis cujus Ordinata est radix quadratica affecta æquationis suæ, cum Figuris simplicissimis seu rectilineis seu curvilineis comparari potest. Nam radix illa ex duabus partibus semper constat quæ seorsim spectatæ non sunt æquationum radices affectæ.

Proponatur æquatio $a^2y^2 + z^2y^2 = 2a^3y + 2z^3y - z^4$, & extracta radix erit $y = \frac{a^3 + z^3 + a\sqrt{a^4 + 2az^3 - z^4}}{aa + zz}$, cujus pars rationalis $\frac{a^3 + z^3}{aa + zz}$ & pars irrationalis $\frac{a\sqrt{a^4 + 2az^3 - z^4}}{aa + zz}$ sunt Ordinata curvarum quæ per hanc Propositionem vel quadrari possunt vel cum Figuris simplicissimis comparari cum quibus collationem Geometricam admittunt.

C O R O L. II.

Et Curva omnis cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur quæ per Corol. 7. Prop. 9. in æquationem non affectam migrat, vel quadratur per hanc Propositionem si quadrari potest, vel comparatur cum Figuris simplicissimis cum quibus comparari potest. Et hac ratione Curva omnis quadratur cujus æquatio est trium terminorum. Nam æquatio illa si affecta sit, transmutatur in non affectam per Corol. 7. Prop. 9. ac deinde per Corol. 2. & 5. Prop. 9. in simplicissimam migrando, dat vel quadraturam Figuræ si quadrari potest, vel Curvam simplicissimam quacum comparatur.

C O R O L. III.

Et Curva omnis cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur quæ per Corol. 8. Prop. 9. in æquationem quadraticam affectam migrat; vel quadratur per hanc Propositionem & hujus Corol. I. si quadrari potest, vel comparatur cum Figuris simplicissimis cum quibus collationem Geometricam admittit.

Q

SCHO.



SCHOLIUM.

Ubi quadranda sunt Figurae; ad Regulas hasce generales semper recurrere nimis molestum esset: praestat Figuras quae simpliciores sunt & magis usui esse possunt semel quadrare & quadraturas in Tabulam referre, deinde Tabulam consulere quoties ejusmodi Curvam aliquam quadrare oportet. Hujus autem generis sunt Tabulae duae sequentes, in quibus z denotat Abscissam, y Ordinatum rectangulam, & t Aream Curvae quadranda, & d, e, f, g, h, n sunt quantitates datae cum signis suis $+$ & $-$.

TABULA	
CURVARUM SIMPLICIORUM QUAE QUADRARI POSSUNT	
CURVARUM FORMAE	CURVARUM AREAE
I	$dz^{n-1} = y$ $\frac{d}{n} z^n = t$
II	$\frac{dz^{n-1}}{e^2 + 2efz^n + fz^{2n}} = y$ $\frac{dz^n}{ne^2 + nefz^n} = t, \text{ vel } \frac{-d}{nef + nf^2z^n} = t$
III	1 $dz^{n-1} \sqrt{e+fz^n} = y$ $\frac{2d}{3nf} R^3 = t, \text{ existente } R = \sqrt{e+fz^n}$
	2 $dz^{2n-1} \sqrt{e+fz^n} = y$ $\frac{-4e + 6fz^n}{15nf^3} dR^3 = t$
	3 $dz^{3n-1} \sqrt{e+fz^n} = y$ $\frac{16e^2 - 24efz^n + 30f^2z^{2n}}{105nf^3} dR^3 = t$
	4 $dz^{4n-1} \sqrt{e+fz^n} = y$ $\frac{-96e^3 + 144e^2fz^n - 180ef^2z^{2n} + 210f^3z^{3n}}{945nf^4} dR^3 = t$
IV	1 $\frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^n}} = y$ $\frac{2d}{nf} R = t$
	2 $\frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^n}} = y$ $\frac{-4e + 2fz^n}{3nf^2} dR = t$
	3 $\frac{dz^{3n-1}}{\sqrt{e+fz^n}} = y$ $\frac{16e^2 - 8efz^n + 6f^2z^{2n}}{15nf^3} dR = t$
	4 $\frac{dz^{4n-1}}{\sqrt{e+fz^n}} = y$ $\frac{-96e^3 + 48e^2fz^n - 36ef^2z^{2n} + 30f^3z^{3n}}{105nf^4} dR = t$

John Senex sculp.

In Tabulis hisce, series Curvarum cujusque formæ utrinque in infinitum continuari potest. Scilicet in Tabula prima, in numeratoribus Arrearum formæ tertiæ & quartæ, numeri coefficientes initialium terminorum (2, -4, 16, -96, 868, &c.) generantur multiplicando numeros -2, -4, -6, -8, -10, &c. in se continuo, & subsequentium terminorum coefficientes ex initialibus derivantur multiplicando ipsos gradatim, in Forma quidem tertia, per $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{8}, -\frac{11}{10},$ &c. in quarta vero per $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, -\frac{9}{10},$ &c. Et Denominatorum coefficientes 3, 15, 105, &c. prodeunt multiplicando numeros 1, 3, 5, 7, 9, &c. in se continue.

In secunda vero Tabula, series Curvarum formæ primæ, secundæ, quintæ, sextæ, nonæ, & decimæ ope solius divisionis, & formæ reliquæ ope Propositionis tertiæ & quartæ, utrinque producuntur in infinitum.

Quinetiam hæ series mutando signum numeri n variari solent. Sic enim e. g. Curva $\frac{d}{z} \sqrt{e + fz^n} = y,$ evadit $\frac{d}{z^{\frac{1}{2}n + 1}} \sqrt{f + ez^n} = y.$

PROP. XI. THEOR. VIII.

Sit ADIC Curva quævis Abscissam habens AB = z, & Ordinam BD = y, & sit AEKC Curva alia cujus Ordinata BE æqualis est prioris areæ ADB ad unitatem applicatæ, & AFLC Curva tertia cujus Ordinata BF æqualis est secundæ Areæ AEB ad unitatem applicatæ, & AGMC Curva quarta cujus Ordinata BG æqualis est tertiæ areæ AFB ad unitatem applicatæ, & AHNC Curva quinta cujus Ordinata BH æqualis est quartæ Areæ AGB ad unitatem applicatæ, & sic deinceps in infinitum. Et sunt A, B, C, D, E, &c. Areæ Curvarum Ordinatas habentium y, zy, z²y, z³y, z⁴y, &c. et Abscissam communem z.

Detur Abscissa quævis AC = t, fitque BC = t - z = x, & sunt P, Q, R, S, T Areæ Curvarum Ordinatas habentium y, xy, x²y, x³y, x⁴y &c. et Abscissam communem x.

Terminentur autem hæ Areæ omnes ad Abscissam totam datam AC, nec non ad Ordinam positione datam & infinite productam CI:

Et erit Arrearum sub initio positarum

Prima ADIC = A = P,

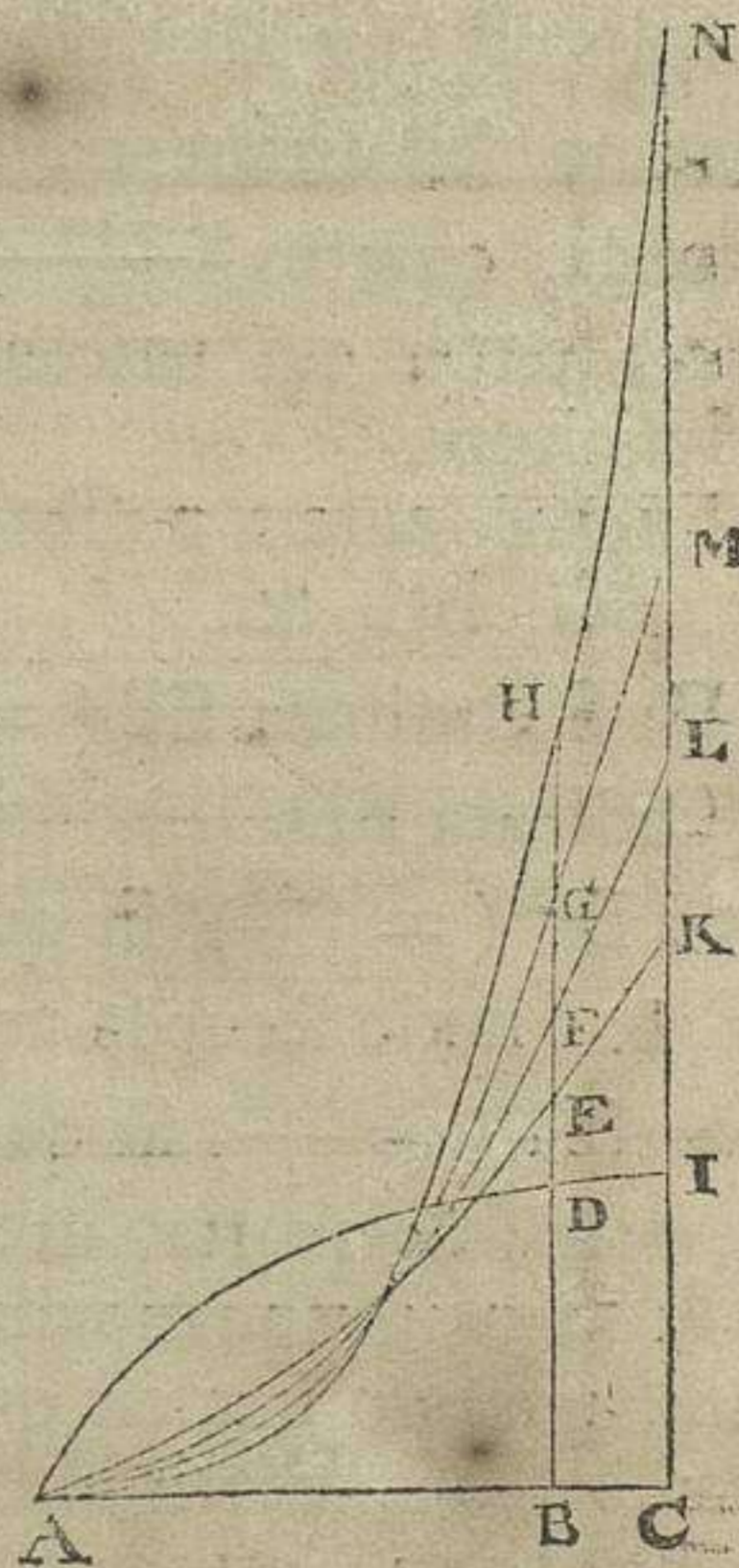
Secunda AEKC = tA - B = Q.

Tertia AFLC = $\frac{t^2 A - 2tB + C}{2} = \frac{1}{2} R.$

Quarta AGMC = $\frac{t^3 A - 3t^2 B + 3tC - D}{6} = \frac{1}{6} S.$

Quinta AHNC = $\frac{t^4 A - 4t^3 B + 6t^2 C - 4tD + E}{24} = \frac{1}{24} T.$

COROL.



COROL.

Unde si Curvæ quarum Ordinatæ sunt y , zy , z^2y , z^3y , &c. vel y , xy , x^2y , x^3y , &c. quadrari possunt, quadrabuntur etiam Curvæ ADIC, AEKC, AFLC, AGMC, &c. et habebuntur Ordinatæ BE, BF, BG, BH, Areis Curvarum proportionales.

SCHOLIUM.

Quantitatum fluentium Fluxiones esse primas, secundas, tertias, quartas, aliasque diximus supra. Hæ Fluxiones sunt ut termini serierum infinitarum convergentium.

Ut si z^n fit quantitas fluens & fluendo evadat $\overline{z + o}^n$, deinde resolvatur in seriem convergentem $z^n + noz^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ooz^{n-2} + \frac{n^3-3nn+2n}{6}o^3z^{n-3} + \&c.$ terminus primus hujus seriei z^n erit quantitas illa fluens, secundus noz^{n-1} erit ejus incrementum primum seu differentia prima cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio prima, tertius $\frac{nn-n}{2}ooz^{n-2}$ erit ejus incrementum secundum seu differentia secunda cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio secunda, quartus $\frac{n^3-3nn+2n}{6}o^3z^{n-3}$ erit ejus incrementum tertium seu differentia tertia cui nascenti Fluxio tertia proportionalis est, & sic deinceps in infinitum.

Exponi autem possunt hæ Fluxiones per Curvarum Ordinatas BD, BE, BF, BG, BH, &c.

Ut si Ordinata BE ($= \frac{ADB}{1}$) fit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BD.

Si BF ($= \frac{AEB}{1}$) fit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BE, & Fluxio secunda ut Ordinata BD.

Si BH ($= \frac{AGB}{1}$) fit quantitas fluens, erunt ejus Fluxiones prima, secunda, tertia & quarta, ut Ordinatæ BG, BF, BE, BD respective.

Et hinc in æquationibus quæ quantitates tantum duas incognitas involvunt, quarum una est quantitas uniformiter fluens & altera est Fluxio quælibet quantitatis alterius fluentis, inveniri potest fluens illa altera per quadraturam Curvarum. Exponatur enim Fluxio ejus per Ordinatam BD, & si hæc fit Fluxio prima, quærat Area ADB = BE × 1, si Fluxio secunda, quærat Area AEB = BF × 1, si Fluxio tertia, quærat Area AFB = BG × 1, &c. et Area inventa erit exponens fluentis quæsitæ.

Sed

Sed & in æquationibus quæ fluentem & ejus fluxionem primam sine altera fluente, vel duas ejusdem fluentis fluxiones, primam & secundam, vel secundam & tertiam, vel tertiam & quartam, &c. sine alterutra fluente involvunt: inveniri possunt fluentes per quadraturam Curvarum.

Sit æquatio $aa\dot{v} = av + vv$, existente $v = BE$, $\dot{v} = BD$, $z = AB$, & $\dot{z} = I$, & æquatio illa complendo dimensiones Fluxionum, evadet $aa\dot{v} = av\dot{z} + vv\dot{z}$, seu $\frac{aa\dot{v}}{av + vv} = \dot{z}$.

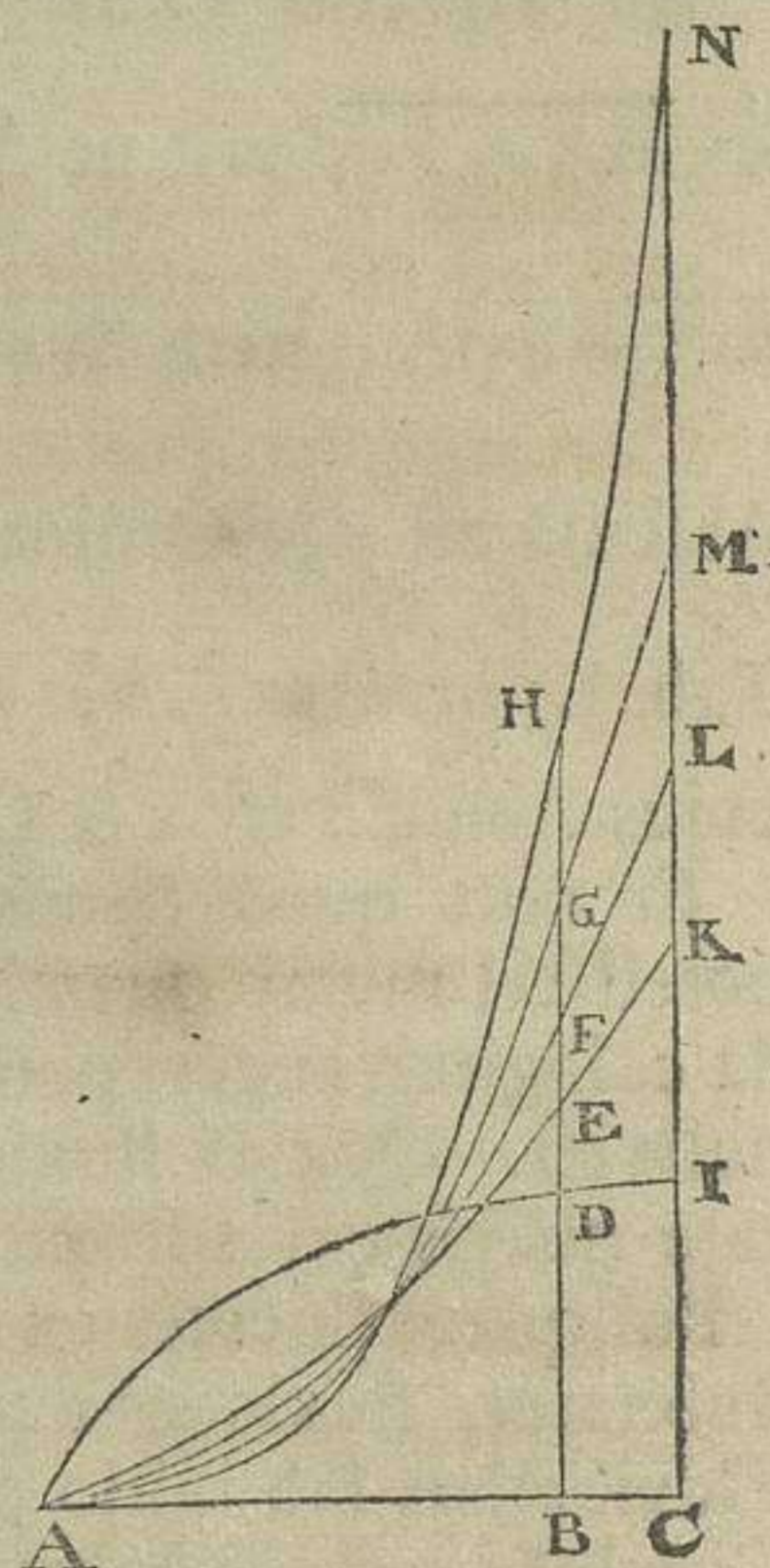
Jam fluat v uniformiter, & fit ejus Fluxio $\dot{v} = I$, & erit $\frac{aa}{av + vv} = \dot{z}$, & quadrando Curvam cujus Ordinata est $\frac{aa}{av + vv}$ & Abscissa v , habebitur fluens z .

Adhæc fit æquatio $aa\ddot{v} = a\dot{v} + v\ddot{v}$, existente $v = BF$, $\dot{v} = BE$, $\ddot{v} = BD$, & $z = AB$, & per relationem

inter \ddot{v} & \dot{v} seu BD & BE invenietur relatio inter AB & BE , ut in exemplo superiore. Deinde per hanc relationem invenietur relatio inter AB & BF quadrando Curvam AEB .

Æquationes quæ tres incognitas quantitates involvunt aliquando reduci possunt ad æquationes quæ duas tantum involvunt, & in his casibus fluentes invenientur ex fluxionibus ut supra. Sit æquatio $a - bx^m = cxy^n y + dy^{2n} \ddot{y}$, ponatur $y^n y = \dot{v}$, & erit $a - bx^m = cx\dot{v} + d\dot{v}\dot{v}$. Hæc æquatio quadrando Curvam cujus Abscissa est x & Ordinata \dot{v} dat Aream v ; & æquatio altera $y^n y = \dot{v}$, regrediendo ad fluentes, dat $\frac{1}{n+1} y^{n+1} = v$: Unde habetur fluens y .

Quinetiam in æquationibus, quæ tres incognitas involvunt, & ad æquationes quæ duas tantum involvunt, reduci non possunt, fluentes quandoque prodeunt per quadraturam Curvarum. Sit æquatio $ax^m + bx^n |^p = rex^r - 1y^s + sex^r y^s - 1 - fyy^t$, existente $x = 1$; Et pars posterior $rex^r - 1y^s + sex^r y^s - 1 - fyy^t$, regrediendo ad fluentes, fit $ex^r y^s - \frac{f}{t+1} y^{t+1}$, quæ proinde est ut Area Curvæ cujus Abscissa est x & Ordinata $ax^m + bx^n |^p$, & inde datur fluens y .



R.

Sit.



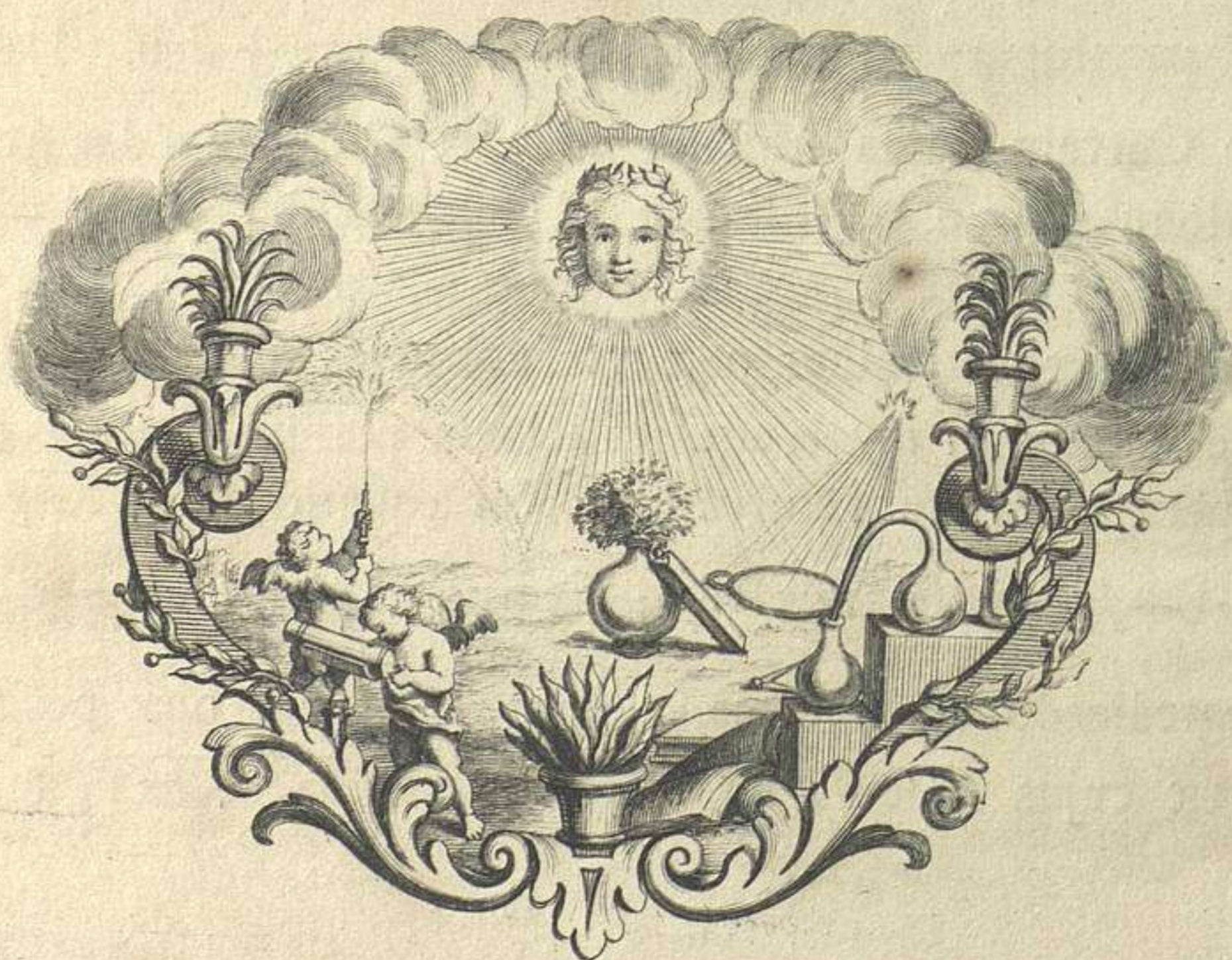
Sit æquatio $x \times \sqrt{ax^m + bx^n}^p = \frac{dy^{n-1}}{\sqrt{e+fy^n}}$, Et fluens cujus Fluxio est $\sqrt{ax^m + bx^n}^p$ erit ut Area Curvæ cujus Abscissa est x & Ordinata est $\sqrt{e+fy^n}$. Item fluens cujus Fluxio est $\frac{dy^{n-1}}{\sqrt{e+fy^n}}$ erit ut Area Curvæ cujus

Abscissa est y & Ordinata $\frac{dy^{n-1}}{\sqrt{e+fy^n}}$, id est (per Casum 1. Formæ quartæ Tab. I.) ut Area $\frac{2d}{nf} \sqrt{e+fy^n}$. Pono ergo $\frac{2d}{nf} \sqrt{e+fy^n}$ æqualem Area Curvæ cujus Abscissa est x & Ordinata $\sqrt{ax^m + bx^n}^p$, & habebitur fluens y .

Et nota quod fluens omnis, quæ ex Fluxione prima colligitur, augeri potest vel minui quantitate quavis non fluente. Quæ ex Fluxione secunda colligitur, augeri potest vel minui quantitate quavis cujus Fluxio secunda nulla est. Quæ ex fluxione tertia colligitur, augeri potest vel minui quantitate quavis cujus fluxio tertia nulla est. Et sic deinceps in infinitum.

Postquam fluentes ex fluxionibus collectæ sunt, si de veritate Conclusionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum vicissim colligendæ sunt, & cum Fluxionibus sub initio propositis comparandæ. Nam si prodeunt æquales, Conclusio recte se habet: sin minus, corrigendæ sunt fluentes sic, ut earum Fluxiones fluxionibus sub initio propositis æquentur. Nam & fluens pro lubitu assumi potest, & assumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis assumptæ æqualem Fluxioni propositæ, & terminos homologos inter se comparando.

Et his principiis via ad majora sternitur.



ENUMERATIO

LINEARUM

TERTII ORDINIS.



LIBRARY

UNIVERSITY OF TORONTO



ENUMERATIO
 LINEARUM
 TERTII ORDINIS.

I. *Linearum Ordines.*



Inæ Geometricæ secundum numerum dimensionum æquationis qua ratio inter Ordinatas & Abscissas definitur, vel (quod perinde est) secundum numerum punctorum in quibus a linea recta secari possunt, optime distinguuntur in Ordines. Qua ratione linea primi Ordinis erit Recta sola, eæ secundi five quadratici Ordinis erunt sectiones Conicæ & Circulus, & eæ tertii five cubici Ordinis Parabola Cubica, Parabola *Neiliana*, Cissois veterum, & reliquæ quas hic enumerare suscepimus. Curva autem primi Generis, (siquidem recta inter Curvas non est numeranda) eadem est cum Linea secundi Ordinis, & Curva secundi Generis eadem cum Linea Ordinis tertii. Et Linea Ordinis infinitesimi ea est quam recta in punctis infinitis secare potest, qualis est Spiralis, Cyclois, Quadratrix, & linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

S

II. *Pro*

II. *Proprietates Sectionum Conicarum competunt Curvis superiorum Generum.*

Sectionum Conicarum proprietates præcipuæ a Geometris passim traduntur. Et confirmiles sunt proprietates Curvarum secundi Generis, & reliquarum, ut ex sequenti proprietatum præcipuarum enumeratione constabit.

1. *De Curvarum secundi generis Ordinatis, Diametris, Verticibus, Centris, Axibus.*

Si rectæ plures parallelæ & ad Conicam sectionem utrinque terminatæ ducantur, recta duas earum bisecans bisecabit alias omnes, ideoque dicitur *Diameter* figuræ & rectæ bisectæ dicuntur *Ordinatim applicatæ* ad *Diametrum*, & concursus omnium *Diametrorum* est *Centrum* figuræ, & interseccio *Curvæ* & *diametri Vertex* nominatur, & *diameter illa Axis* est cui *Ordinatim applicatæ* insistant ad angulos rectos. Et ad eundem modum in *Curvis* secundi Generis, si rectæ duæ quævis parallelæ ducantur occurrentes *Curvæ* in tribus punctis: recta quæ ita secat has parallelas ut summa duarum partium ex uno secantis latere ad *Curvam* terminatarum æquetur parti tertiæ ex altero latere ad *curvam* terminatæ, eodem modo secabit omnes alias his parallelas *curvæ*que in tribus punctis occurrentes rectas, hoc est, ita ut summa partium duarum ex uno ipsius latere semper æquetur parti tertiæ ex altero latere. Has itaque tres partes quæ hinc inde æquantur, *Ordinatim applicatas*, & rectam secantem cui *Ordinatim* applicantur *Diametrum*, & interseccionem *diametri* & *Curvæ Vertex*, & concursus duarum *Diametrorum Centrum* nominare licet. *Diameter* autem ad *Ordinatas* rectangula si modo aliqua sit, etiam *Axis* dici potest, & ubi omnes *Diametri* in eodem puncto concurrunt, istud erit *Centrum generale*.

2. *De Asymptotis & earum proprietatibus.*

Hyperbola primi generis duas *Asymptotos*, ea secundi tres, ea tertii quatuor & non plures habere potest, & sic in reliquis. Et quemadmodum partes lineæ cujuscvis rectæ inter *Hyperbolam Conicam* & duas ejus *Asymptotos* sunt hinc inde æquales: sic in *Hyperbolis* secundi Generis si ducatur

ducatur recta quævis secans tam Curvam quam tres ejus Asymptotos in tribus punctis, summa duarum partium istius rectæ quæ a duobus quibusvis Asymptotis in eandem plagam ad duo puncta Curvæ extenduntur, æqualis erit parti tertiæ quæ a tertia Asymptoto in plagam contrariam ad tertium Curvæ punctum extenditur.

3. De Lateribus rectis & transversis.

Et quemadmodum in Conicis sectionibus non Parabolicis quadratum Ordinatum applicatæ, hoc est, rectangulum Ordinatarum quæ ad contrarias partes Diametri ducuntur, est ad rectangulum partium Diametri quæ ad Vertices Ellipseos vel Hyperbolæ terminantur, ut data quædam linea quæ dicitur *Latus rectum*, ad partem Diametri quæ inter Vertices jacet & dicitur *Latus transversum*: sic in Curvis non Parabolicis secundi Generis parallelepipedum sub tribus Ordinatis applicatis est ad parallelepipedum sub partibus Diametri ad Ordinatas & tres Vertices figuræ abscissis, in ratione quadam data: in qua ratione si sumantur tres rectæ ad tres partes diametri inter vertices figuræ fitas, singulæ ad singulas, tunc illæ tres rectæ dici possunt *Lateræ rectæ* figuræ, & illæ partes Diametri inter Vertices *Lateræ transversæ*. Et sicut in Parabola Conica quæ ad unam & eandem diametrum unicum tantum habet Verticem, rectangulum sub Ordinatis æquatur rectangulo sub parte Diametri quæ ad Ordinatas & Verticem abscinditur & recta quadam data quæ *Latus rectum* dicitur: sic in Curvis secundi Generis quæ non nisi duos habent Vertices ad eandem Diametrum, parallelepipedum sub Ordinatis tribus æquatur parallelepipedo sub duabus partibus Diametri ad Ordinatas & Vertices illos duos abscissis & recta quadam data quæ proinde *Latus rectum* dici potest.

4. De Ratione contentorum sub Parallelarum segmentis.

Denique sicut in Conicis sectionibus ubi duæ parallelæ ad Curvam utrinque terminatæ secantur a duabus parallelis ad Curvam utrinque terminatis, prima a tertia, & secunda a quarta, rectangulum partium primæ est ad rectangulum partium tertiæ ut rectangulum partium secundæ ad rectangulum partium quartæ: sic ubi quatuor tales rectæ occurrunt Curvæ secundi Generis, singulæ in tribus punctis, parallelepipedum partium primæ rectæ erit ad parallelepipedum partium tertiæ, ut parallelepipedum partium secundæ ad parallelepipedum partium quartæ.

5. De



5. De Cruribus Hyperbolicis & Parabolicis & eorum plagis.

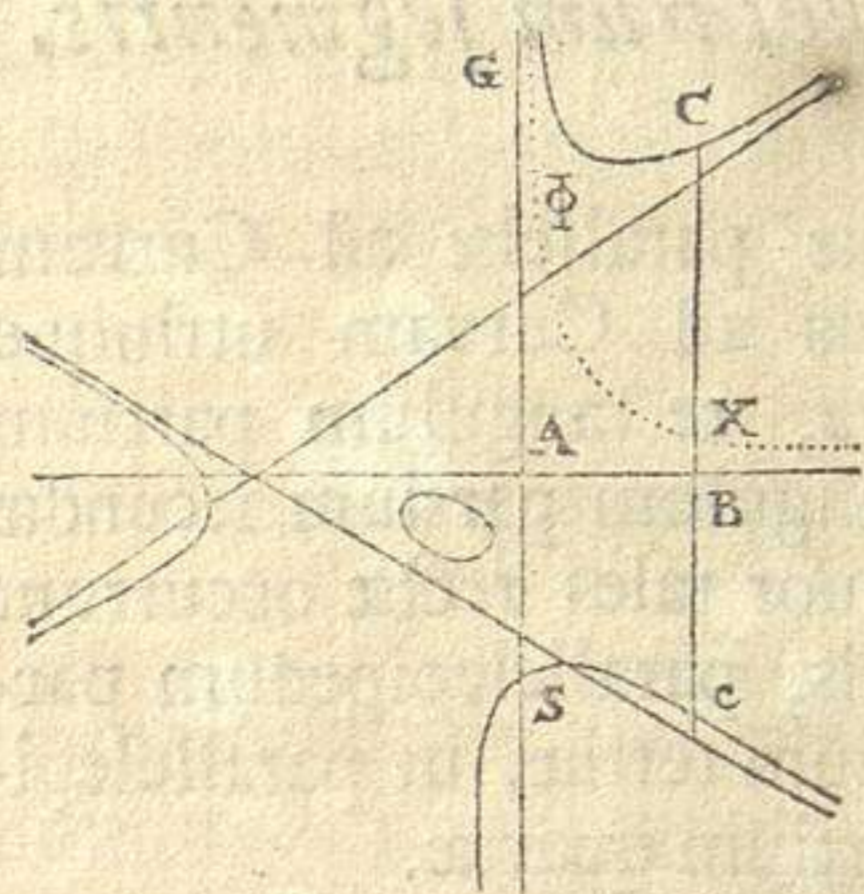
Curvarum secundi & superiorum Generum æque atque primi crura omnia in infinitum progredientia vel *Hyperbolici* sunt generis vel *Parabolici*. Crus *Hyperbolicum* voco quod ad Asymptoton aliquam in infinitum appropinquat; *Parabolicam* quod Asymptoto destituitur. Hæc crura ex Tangentibus optime dignoscuntur. Nam si punctum contactus in infinitum abeat, Tangens cruris Hyperbolici cum Asymptoto coincidat, & Tangens cruris Parabolici in infinitum recedet, evanescet & nullibi reperietur. Invenitur igitur Asymptotos cruris cujusvis quærendo Tangentem cruris illius ad punctum infinite distans. Plaga autem cruris infiniti invenitur quærendo positionem rectæ cujusvis quæ Tangenti parallela est ubi punctum contactus in infinitum abit. Nam hæc recta in eandem plagam cum crure infinito dirigitur.

III. Reductio Curvarum omnium Generis Secundi ad æquationum casus quatuor.

Lineæ omnes Ordinis primi, tertii, quinti, septimi & imparis cujusque duo habent ad minimum crura in infinitum versus plagas oppositas progredientia. Et lineæ omnes tertii Ordinis duo habent ejusmodi crura in plagas oppositas progredientia in quas nulla alia earum crura infinita (præterquam in Parabola *Cartesiana*) tendunt.

C A S. I.

Si crura illa sint Hyperbolici generis, fit GAS eorum Asymptotos, & huic parallela agatur recta quævis CBc ad Curvam



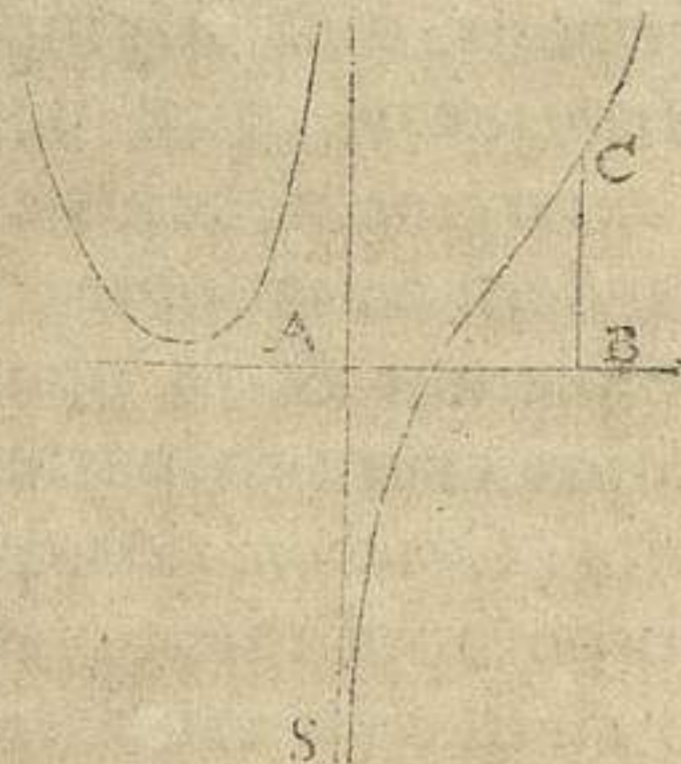
utrinque (si fieri potest) terminata, eademque bisecetur in puncto X, & locus puncti illius X erit Hyperbola Conica (puta $X\phi$) cujus una Asymptotos est AG. Sit ejus altera Asymptotos AB, & æquatio qua relatio inter Ordinatum BC & Abscissam AB definitur, si AB dicatur x , & BC y , semper induet hanc formam $xyy + ey = ax^2 + bxx + cx + d$. Ubi termini, e, a, b, c, d , designant quantitates datas signis suis $+$ & $-$ affectas, quarum quælibet deesse possunt modo

ex earum defectu figura in sectionem Conicam non vertatur. Potest autem Hyperbola illa Conica cum Asymptotis suis coincidere, id est punctum X in recta AB locari: & tunc terminus $+ ey$ deest. CAS.

C A S. II.

At si recta illa CBc non potest utrinque ad Curvam terminari, sed Curvæ in unico tantum puncto occurrit : age quamvis positione datam rectam AB Asymptoto AS occurrentem in A, ut & aliam quamvis BC Asymptoto illi parallelam Curvæque occurrentem in puncto C, & æquatio qua ratio inter Ordinatam BC & Abscissam AB definitur, semper induet hanc formam,

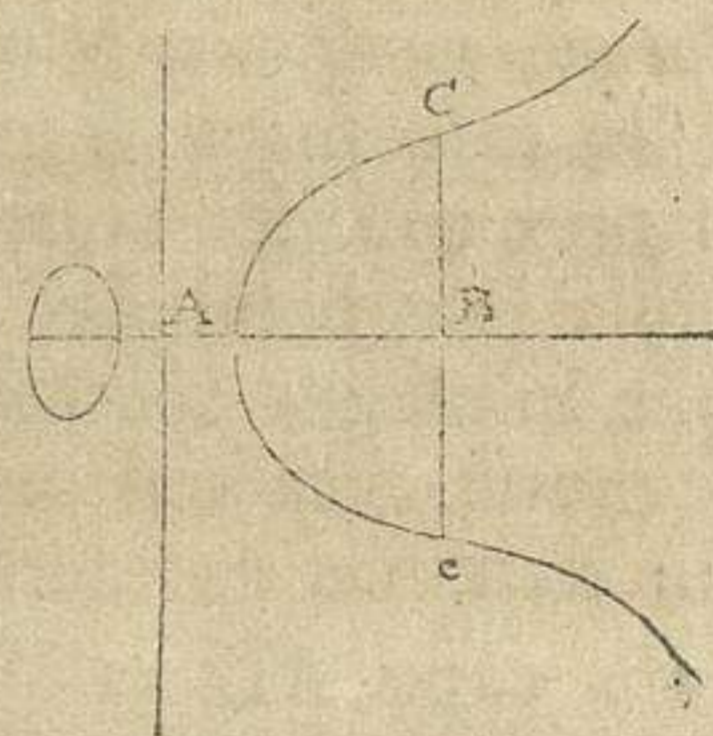
$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



C A S. III.

Quod si crura illa opposita Parabolici sint generis, recta CBc ad Curvam utrinque, si fieri potest, terminata in plagam crurum ducatur & bisecetur in B, & locus puncti B erit Linea recta. Sit ista AB, terminata ad datum quodvis punctum A, & æquatio qua ratio inter Ordinatam BC & Abscissam AB definitur, semper induet hanc formam,

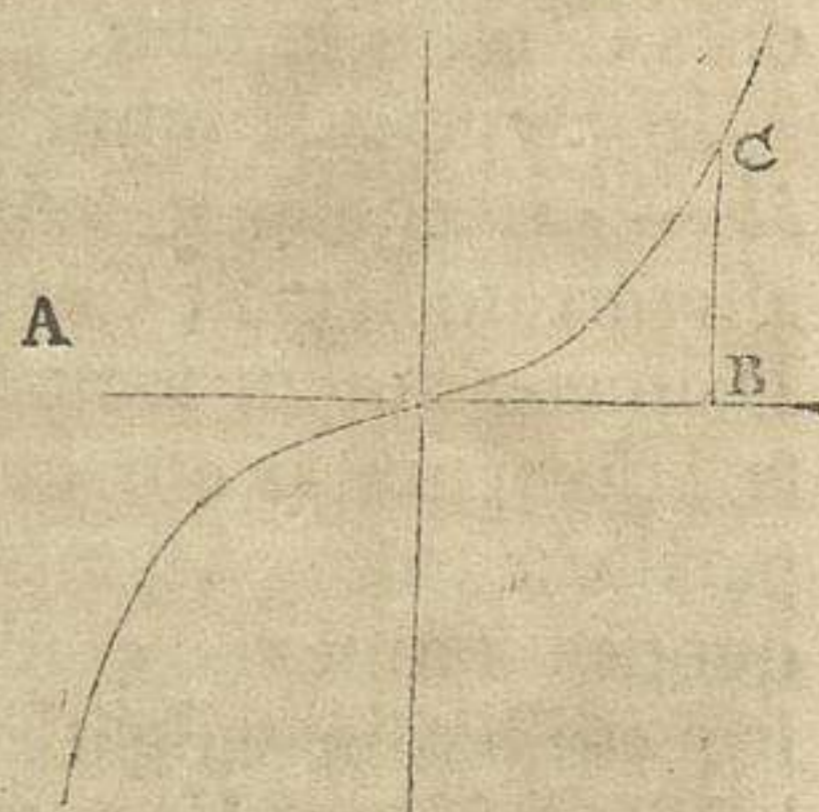
$$yy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



C A S. IV.

At vero si recta illa CBc in unico tantum puncto occurrat Curvæ, ideoque ad Curvam utrinque terminari non possit : sit punctum illud C, & incidat recta illa ad punctum B in rectam quamvis aliam positione datam & ad datum quodvis punctum A terminatam AB : & æquatio qua ratio inter Ordinatam BC & Abscissam AC definitur, semper induet hanc formam,

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



T

No-

Nomina formarum.

Enumerando Curvas horum casuum, Hyperbolam vocabimus, *Inscriptam*, quæ tota jacet in Asymptoton angulo ad instar Hyperbolæ conicæ; *Circumscriptam*, quæ Asymptotos secat & partes Abscissas in sinu suo amplectitur; *Ambigenam*, quæ uno crure infinito inscribitur & altero circumscribitur; *Convergentem*, cujus crura concavitate sua seinvicem respiciunt & in plagam eandem diriguntur; *Divergentem*, cujus crura convexitate sua seinvicem respiciunt & in plagas contrarias diriguntur; *Cruribus Contrariis præditam*, cujus crura in partes contrarias convexa sunt & in plagas contrarias infinita; *Conchoidalem*, quæ vertice concavo & cruribus divergentibus ad Asymptoton applicatur; *Anguineam*, quæ flexibus contrariis Asymptoton secat & utrinque in crura contraria producit; *Cruciformem*, quæ conjugatam decussat; *Nodatam*, quæ seipsam decussat in orbem redeundo; *Cuspidatam*, cujus partes duæ in angulo contactus concurrunt & ibi terminantur; *Punctatam*, quæ conjugatam habet Ovali infinite parvam id est punctum; & *Puram*, quæ per impossibilitatem duarum radicum Ovali, Nodo, Cuspide & Puncto conjugato privatur. Eodem sensu Parabolam quoque *convergentem*, *divergentem*, *cruribus contrariis præditam*, *cruciformem*, *nodatam*, *cuspidatam*, *punctatam* & *puram* nominabimus.

In casu primo si terminus ax^3 affirmativus est, Figura erit Hyperbola triplex cum sex cruribus Hyperbolicis quæ juxta tres Asymptotos quarum nullæ sunt parallelæ, in infinitum progrediuntur, binæ juxta unamquamque in plagas contrarias. Et hæ Asymptoti si terminus bx^2 non deest, se mutuo secabunt in tribus punctis triangulum (Dd δ) inter se continentes, sin terminus bx^2 deest, convergent omnes ad idem punctum. In priori casu cape $AD = \frac{-b}{2a}$, & $Ad = A\delta = \frac{b}{2\sqrt{a}}$, ac junge Dd, D δ , & erunt Ad, Dd, D δ tres Asymptoti. In posteriori duc Ordinam quamvis BC, Ordinam principali AG parallelam, & in ea utrinque producta cape hinc inde BF & Bf sibi mutuo æquales & in ea ratione ad AB quam habet \sqrt{a} ad 1, jungeque AF, Af & erunt AG, AF, Af tres Asymptoti. Hanc Hyperbolam vocamus *Redundantem*, quia numero crurum Hyperbolicorum Sectiones Conicas superat.

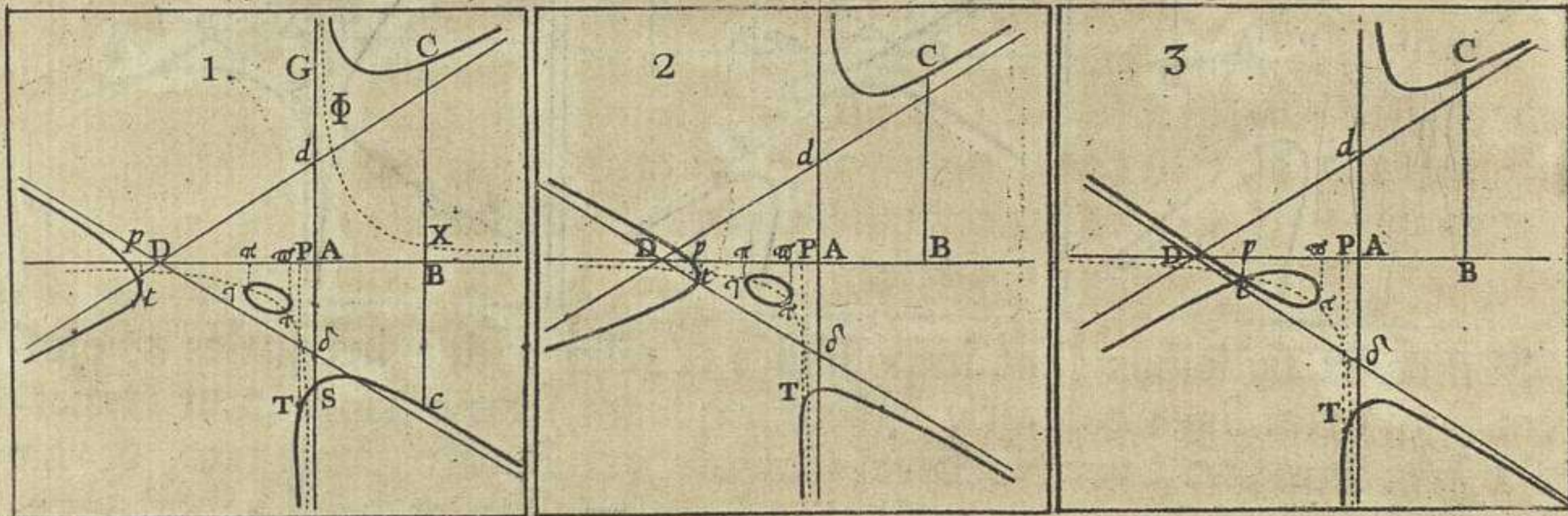
In Hyperbola omni Redundante, si neque terminus ey desit, neque sit $bb - 4ac$ æquale $\pm ae\sqrt{a}$, Curva nullam habebit Diametrum, sin eorum alterutrum accidit Curva habebit unicam Diametrum, & tres si utrumque. Diameter autem semper transit per intersectionem duarum Asymptoton, & bifecat rectas omnes quæ ad Asymptotos illas utrinque terminantur & parallelæ sunt Asymptoto tertiæ. Estque Abscissa AB diameter Figuræ quoties terminus ey deest. *Diametrum* vero absolute dictam hic & in sequentibus in vulgari significato usurpo, nempe pro Abscissa, quæ passim habet Ordinatam binas æquales ad idem punctum hinc inde insistentes.

IV. *Enu-*

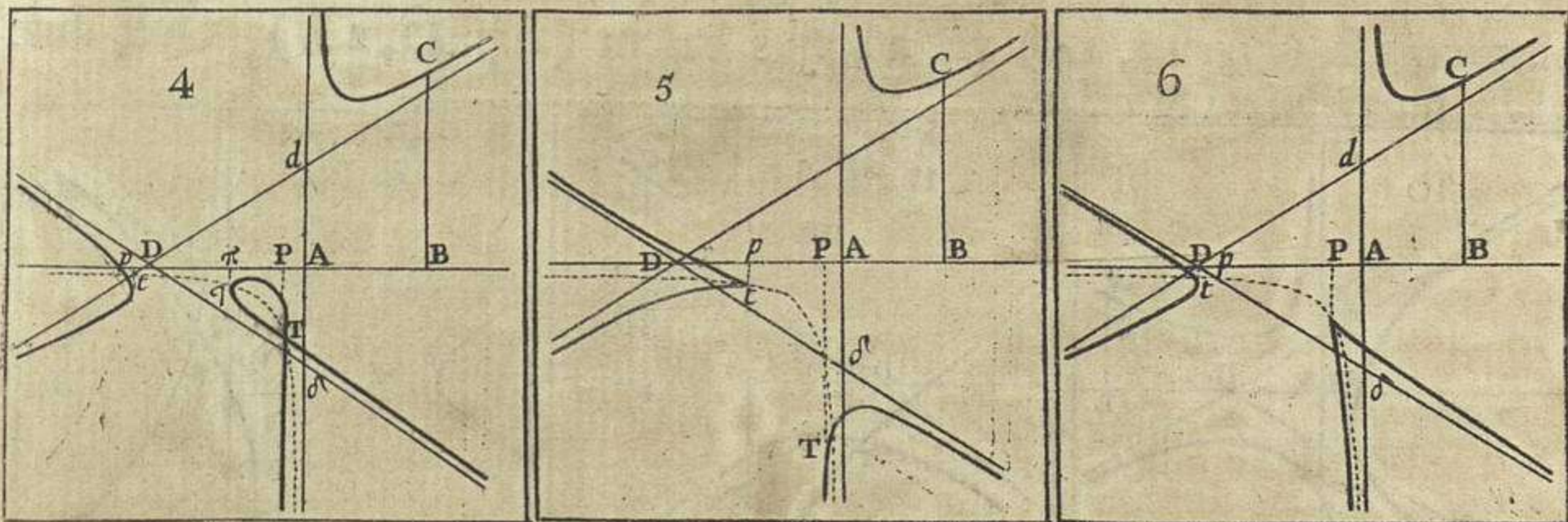
IV. Enumeratio Curvarum.

I. De Hyperbolis novem redundantibus quæ diametro destituuntur & tres habent Asymptotos triangulum capientes.

Si Hyperbola redundans nullam habet diametrum, quærantur *Æquationis* hujus $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ radices quatuor seu valores ipsius x . Eæ sunt $AP, A\pi, A\tau, Ap$. Erigantur Ordinatae $PT, \pi\tau, \pi l, pt$, & hæc tangent Curvam in punctis totidem T, τ, l, t , & tangendo dabunt limites Curvæ per quos Species ejus innotescet.



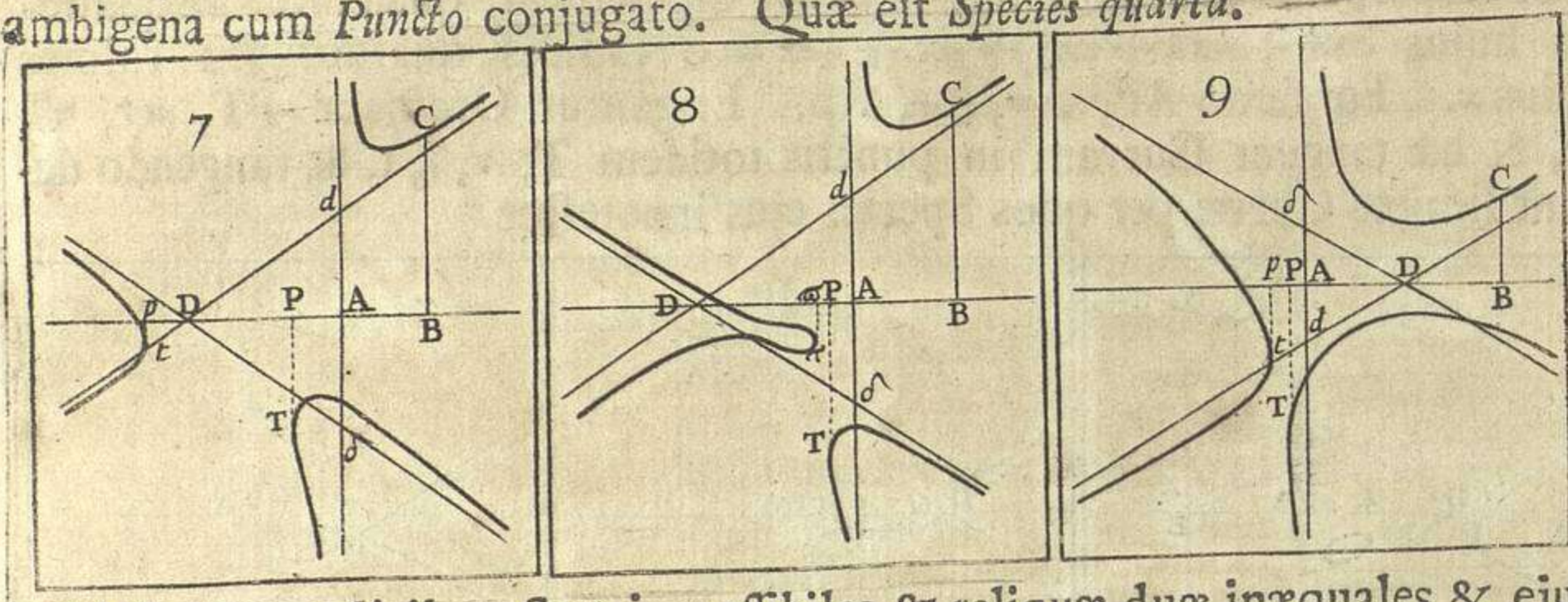
Nam si radices omnes $AP, A\pi, Ap$, (*Fig. 1, 2.*) sunt reales, ejusdem signi & inæquales, Curva constat ex tribus Hyperbolis, (inscripta, circumscripta & ambigena) cum *Ovali*. Hyperbolarum una jacet versus D , altera versus d , tertia versus δ , & *Ovalis* semper jacet intra *Triangulum* $Dd\delta$, atque etiam inter medios limites l & τ , in quibus utique tangitur ab Ordinatis πl & $\pi\tau$. Et hæc est *Species prima*.



Si e radicibus duæ maximæ $A\pi, Ap$, (*Fig. 3.*) vel duæ minimæ $AP, A\pi$ (*Fig. 4.*) æquantur inter se, & ejusdem sunt signi cum alteris duobus, *Ovalis* & *Hyperbola* circumscripta sibi invicem junguntur coeuntibus earum punctis contactus l & t vel T & τ , & crura *Hyperbolæ* sese decussando in *Ovalem* continuantur, figuram *Nodatam* efficientia. Quæ *Species est secunda*. Si

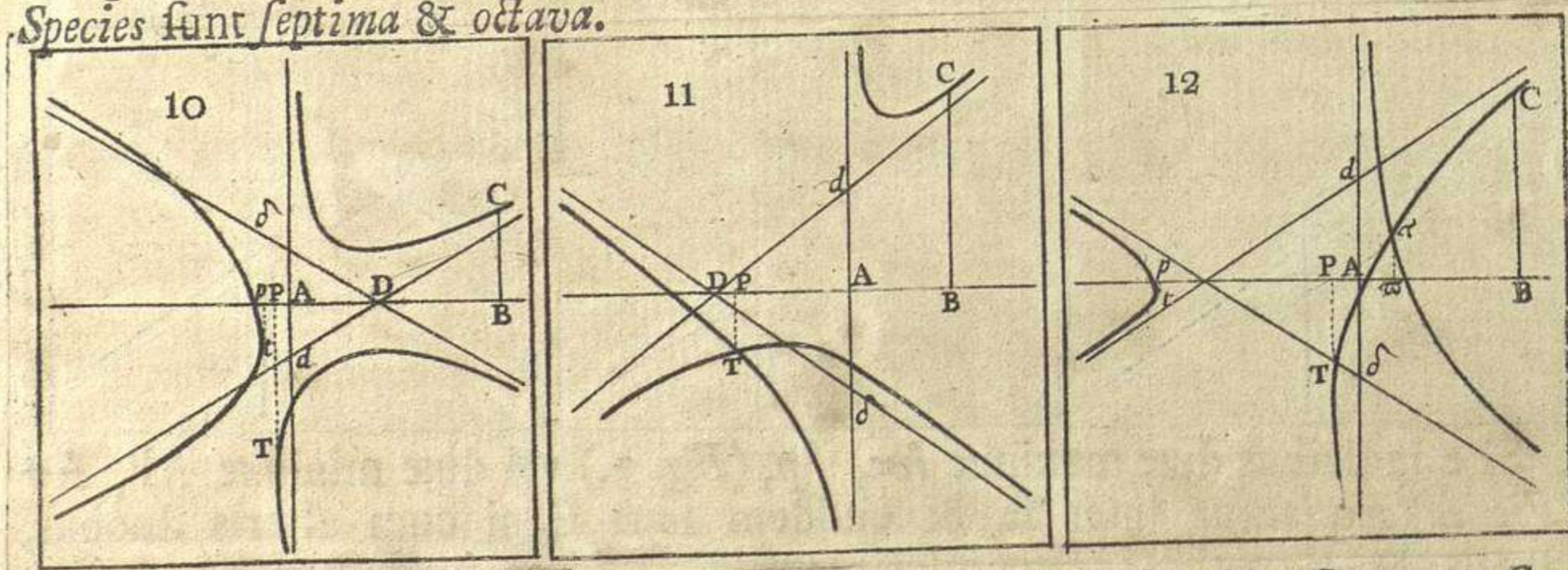
Si e radicibus tres maximæ Ap , $A\pi$, $A\varpi$, (Fig. 5.) vel tres minimæ $A\pi$, $A\varpi$, AP (Fig. 6.) æquantur inter se, Nodus in *Cuspidem* acutissimum convertetur. Nam crura duo Hyperbolæ circumscriptæ ibi in angulo contactus concurrent & non ultra producentur. Et hæc est *Species tertia*.

Si e radicibus duæ mediæ $A\varpi$ & $A\pi$ (Fig. 7.) æquantur inter se, puncta contactus τ & γ coincidunt, & propterea Ovalis interjecta in punctum evanuit, & constat figura ex tribus Hyperbolis, inscripta, circumscripta & ambigena cum *Puncto* conjugato. Quæ est *Species quarta*.



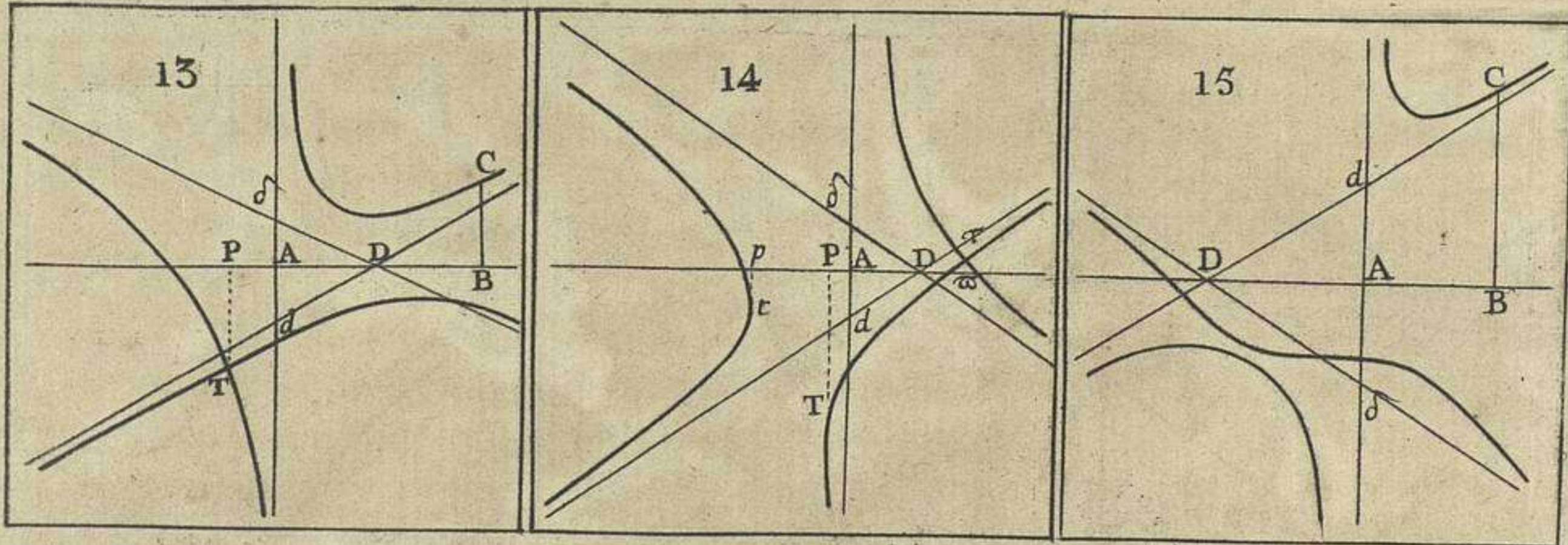
Si duæ ex radicibus sunt impossibiles & reliquæ duæ inæquales & ejusdem signi (nam signa contraria habere nequeunt,) *Puræ* habebuntur Hyperbolæ tres sine Ovali vel Nodo vel Cuspide vel Puncto conjugato, & hæc Hyperbolæ vel ad latera trianguli ab Asymptotis comprehensi vel ad angulos ejus jacebunt; & perinde *Speciem* vel *quintam* (Fig. 7. 8.) vel *sextam* (Fig. 9, 10.) constituent.

Si e radicibus duæ sunt æquales & alteræ duæ vel impossibiles sunt (Fig. 11. 13.) vel reales (Fig. 12. 14.) cum signis quæ a signis æqualium radicum diversa sunt, figura *Cruciformis* habebitur, nempe duæ ex Hyperbolis seinvicem decussabunt idque vel ad verticem trianguli ab Asymptotis comprehensi (Fig. 13, 14.) vel ad ejus basem (Fig. 11, 12.) Quæ duæ *Species* sunt *septima* & *octava*.



Si denique radices omnes sunt impossibiles (Fig. 15.) vel si omnes sunt reales & inæquales (Fig. 16.) & earum duæ sunt affirmativæ & alteræ duæ negativæ, tunc duæ habebuntur Hyperbolæ ad angulos oppositos duarum Asymptoton cum Hyperbola *Anguinea* circa Asymptoton tertiam. Quæ *Species* est *nona*. Et

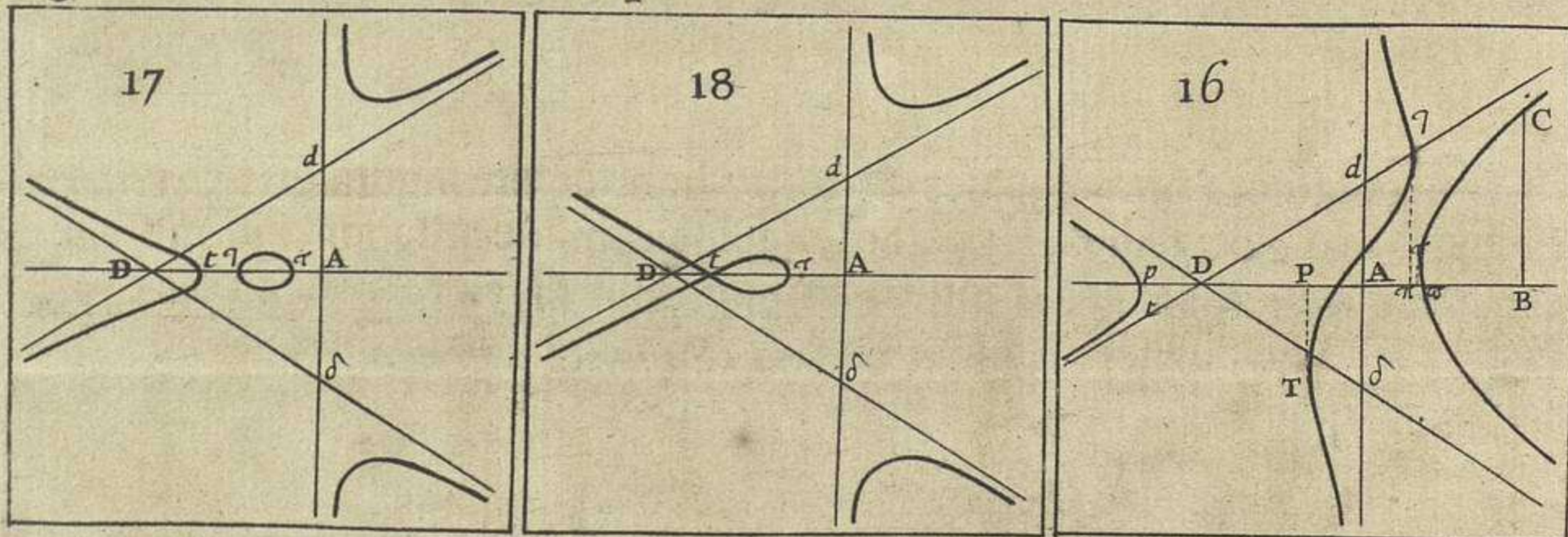
Et hi sunt omnes radicum casus possibiles. Nam si duæ radices sunt æquales inter se, & aliæ duæ sunt etiam inter se æquales, Figura evadet Sectio Conica cum Linea recta.



2. De Hyperbolis duodecim redundantibus unicam tantum Diametrum habentibus.

Si Hyperbola redundans habet unicam tantum Diametrum, fit ejus Diameter Abscissa AB, & æquationis hujus $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ quærentes tres radices seu valores x .

Si radices illæ sunt omnes reales & ejusdem signi, Figura constabit ex Ovali intra triangulum Ddδ (Fig. 17.) jacente & tribus Hyperbolis ad angulos ejus, nempe Circumscripta ad angulum D & Inscriptis duabus ad angulos d & δ. Et hæc est Species decima.



Si radices duæ majores sunt æquales & tertia ejusdem signi, crura Hyperbolæ jacentis versus D (Fig. 18.) sese decussabunt in forma Nodi propter contactum Ovalis. Quæ Species est undecima.

Si tres radices sunt æquales, Hyperbola ista fit Cuspidata sine Ovali, (Fig. 19.) Quæ Species est duodecima.

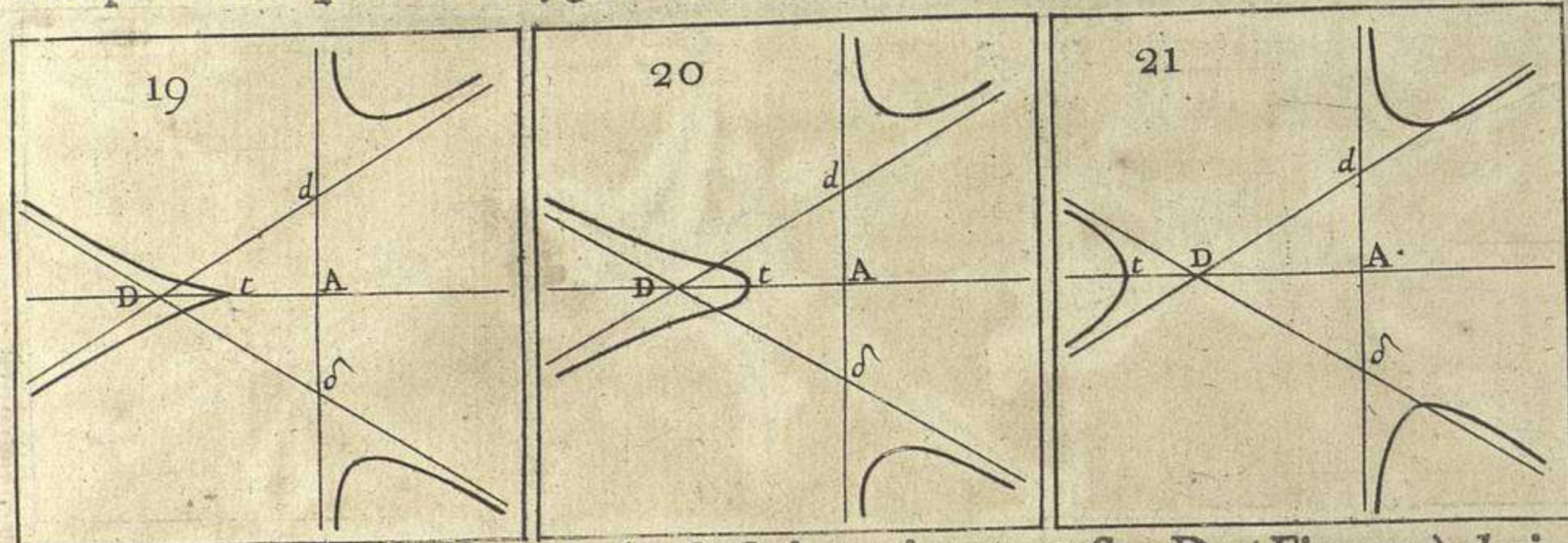
Si radices duæ minores sunt æquales & tertia ejusdem signi, Ovalis in Punctum evanuit, (Fig. 20.) Quæ Species est decima tertia.

In speciebus quatuor novissimis Hyperbola quæ jacet versus D, Asymptotos in sinu suo amplectitur, reliquæ duæ in sinu Asymptoton jacent.

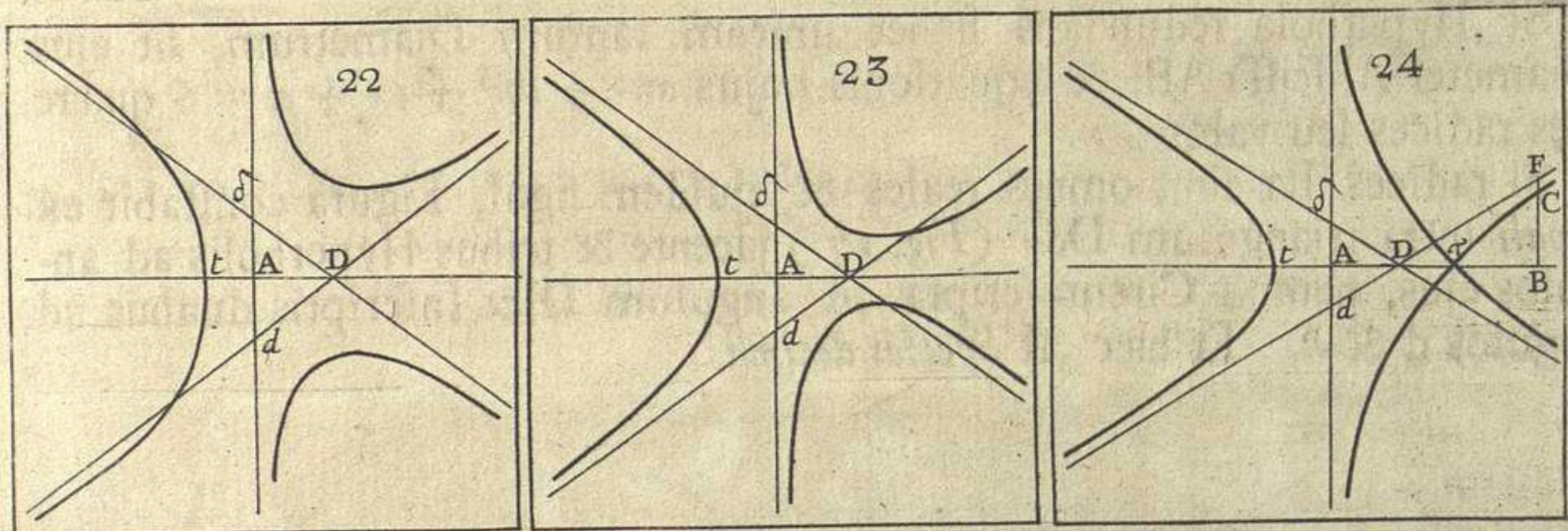
U

Si

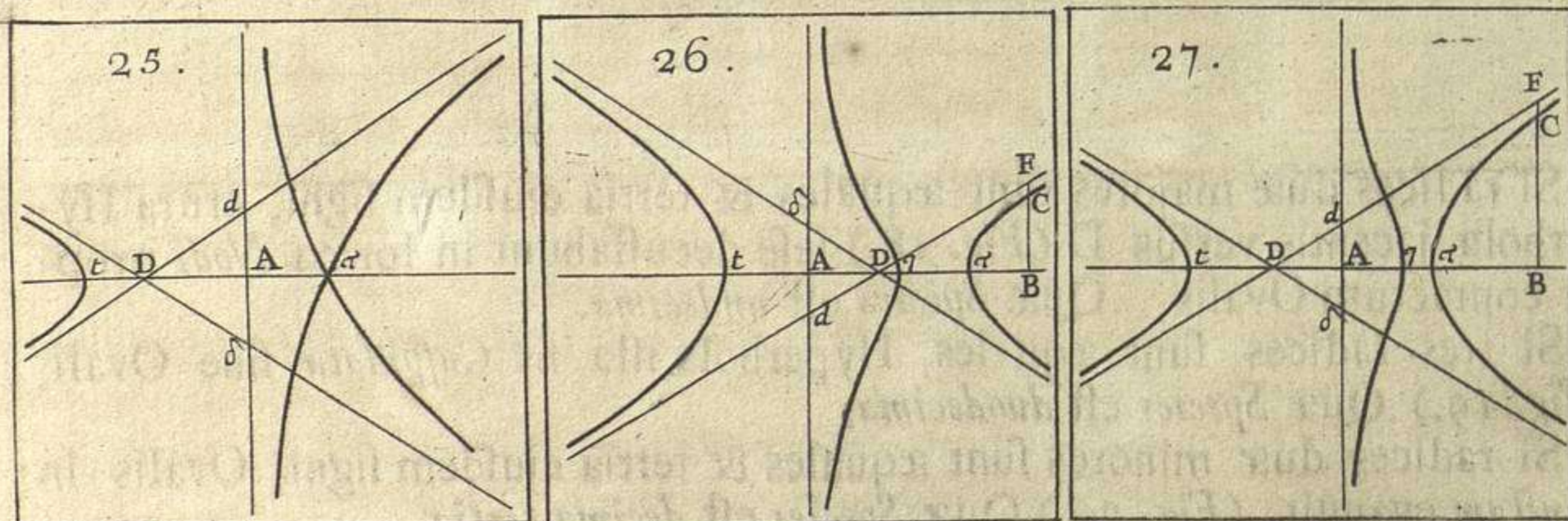
Si duæ ex radicibus sunt impossibiles habebuntur tres Hyperbolæ *Puræ* sine Ovali decussatione vel cuspide, Et hujus casus *Species* sunt quatuor: nempe *decima quarta* si Hyperbola Circumscripta jacet versus D, (*Fig. 20.*)



& *decima quinta* si Hyperbola Inscripta jacet versus D, (*Fig. 21.*) *decima sexta* si Hyperbola Circumscripta jacet sub basi $d\delta$ trianguli $Dd\delta$, (*Fig. 22.*) & *decima septima* (*Fig. 23.*) si Hyperbola inscripta jacet sub eadem basi.

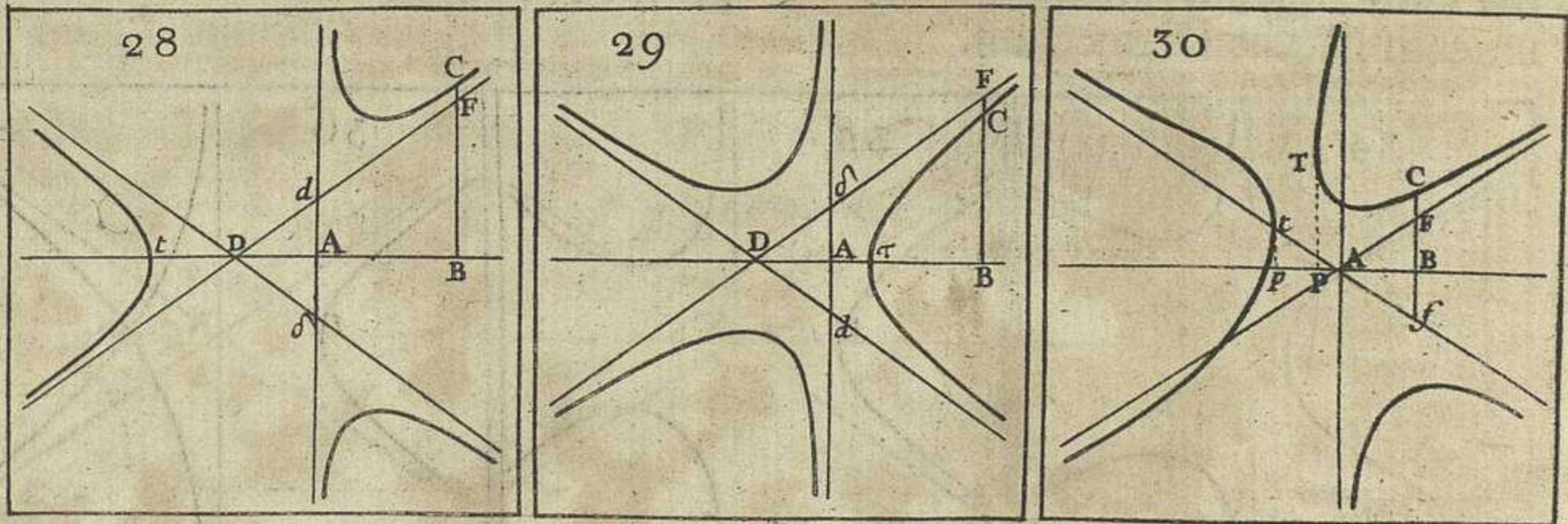


Si duæ radices sunt æquales & tertia signi diverfi figura erit *Cruciformis*. Nempe duæ ex tribus Hyperbolis seinvicem decussabunt idque vel ad verticem trianguli ab Asymptotis comprehensi (*Fig. 24.*) vel ad ejus basem, (*Fig. 25.*) Quæ duæ *Species* sunt *decima octava*, & *decima nona*.



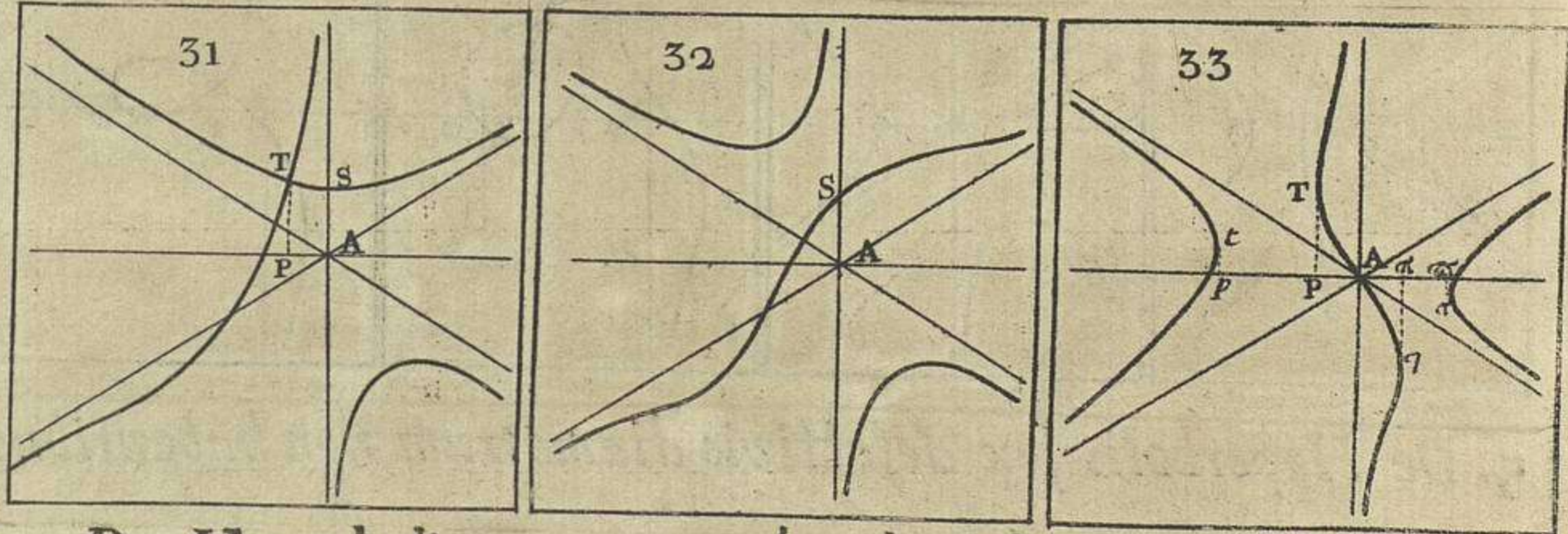
Si duæ radices sunt inæquales & ejusdem signi & tertia est signi diverfi, duæ habebuntur Hyperbolæ in oppositis angulis duarum Asymptoton cum
Con-

Conehoidali intermedia. *Conchoidalis* autem vel jacebit ad easdem partes Asymptoti suæ cum triangulo ab Asymptotis constituto, (*Fig. 26.*) vel ad partes contrarias, (*Fig. 27.*) Et hi duo casus constituunt *Speciem vigesimam & vigesimam primam.*



3. De Hyperbolis duabus redundantibus cum tribus Diametris.

Hyperbola redundans quæ habet tres diametros, constat ex tribus Hyperbolis in sinibus Asymptoton jacentibus, idque vel ad angulos trianguli ab Asymptotis comprehensi (*Fig. 28.*) vel ad ejus latera (*Fig. 29.*) Casus prior dat *Speciem vigesimam secundam*, & posterior *Speciem vigesimam tertiam.*

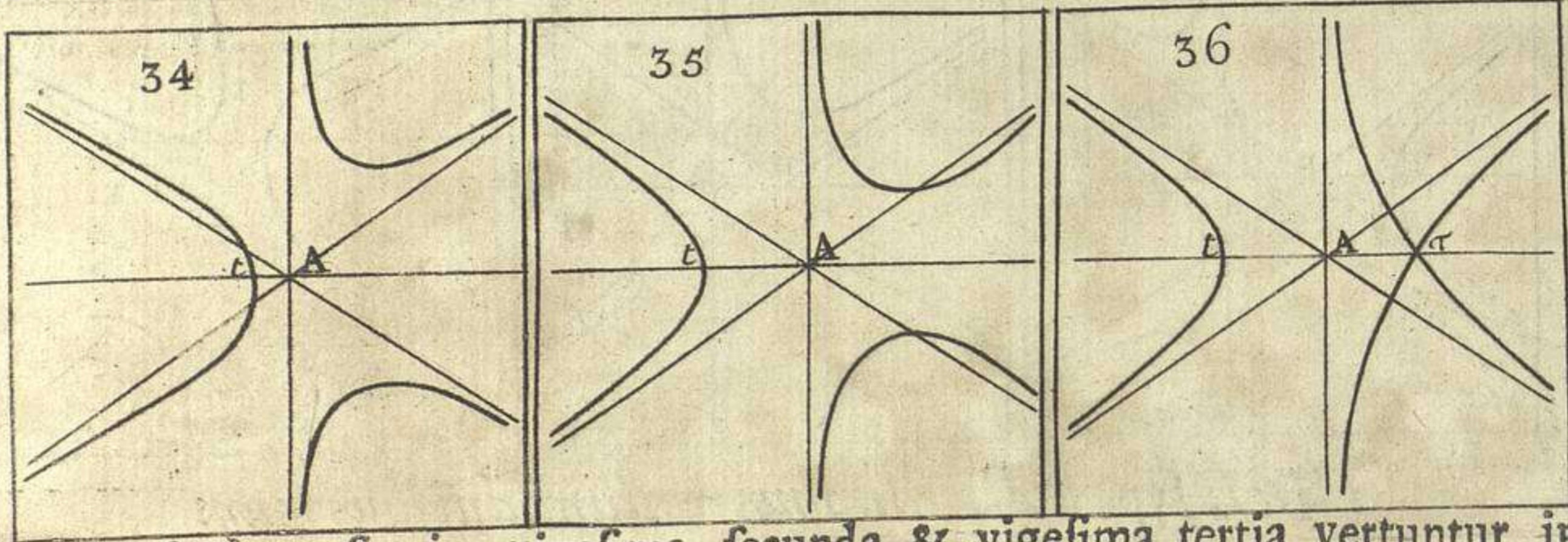


4. De Hyperbolis novem redundantibus cum Asymptotis tribus ad commune punctum convergentibus.

Si tres Asymptoti in puncto communi se mutuo decussant, vertuntur species quinta & sexta in *vigesimam quartam*, (*Fig. 30.*) septima & octava in *vigesimam quintam*, (*Fig. 31.*) & nona in *vigesimam sextam* (*Fig. 32.*) ubi Anginea non transit per concursum Asymptoton, & in *vigesimam septimam* ubi transit per concursum illum, (*Fig. 33.*) quo casu termini *b* ac *d* defunt, & concursus Asymptoton est Centrum figuræ ab omnibus ejus partibus oppositis æqualiter distans. Et hæ quatuor species diametrum non habent.

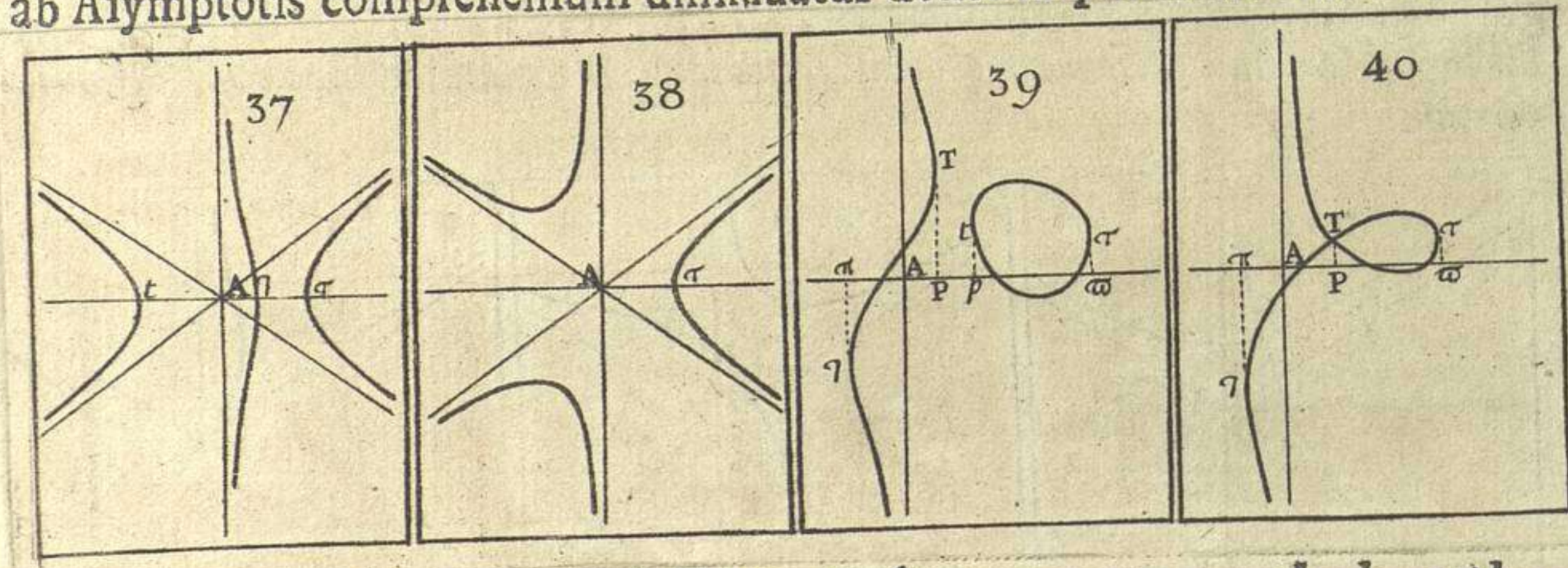
Ver.

Vertuntur etiam Species decima quarta ac decima sexta in vigesimam octavam, (Fig. 34.) decima quinta ac decima septima in vigesimam nonam, (Fig. 35.) decima octava & decima nona in tricesimam, (Fig. 36.) & vigesima cum vigesima prima in tricesimam primam, (Fig. 37.) Et hæ species unicam habent Diametrum.



Ac denique species vigesima secunda & vigesima tertia vertuntur in Speciem tricesimam secundam cujus tres sunt Diametri per concursum Asymptoton transeuntes. (Fig. 38.)

Quæ omnes conversiones facillime intelliguntur faciendo ut triangulum ab Asymptotis comprehensum diminuatur donec in punctum evanescat.



§. De Hyperbolis sex defectivis diametrum non habentibus.

Si in primo æquationum casu terminus ax^3 negativus est, Figura erit Hyperbola defectiva unicam habens Asymptoton & duo tantum crura Hyperbolica juxta Asymptoton illam in plagas contrarias infinite progredientia. Et Asymptotos illa est Ordinata prima & principalis AG. Si terminus ey non deest figura nullam habebit Diametrum, si deest habebit unicam. In priori casu species sic enumerantur.

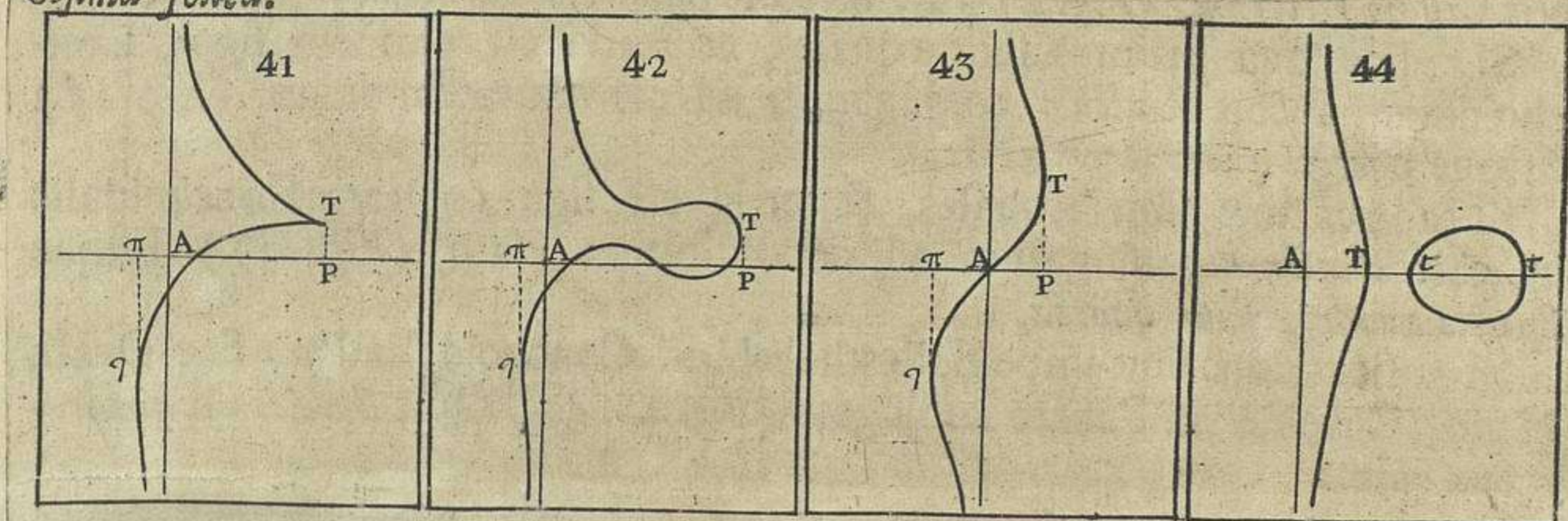
Si æquationis hujus $ax^4 = bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$ radices omnes $A\pi$, AP , Ap , $A\varpi$, (Fig. 39.) sunt reales & inæquales, Figura erit Hyperbola Anguinea asymptoton flexu contrario amplexa, cum Ovali conjugata. Quæ Species est tricesima tertia.

Si

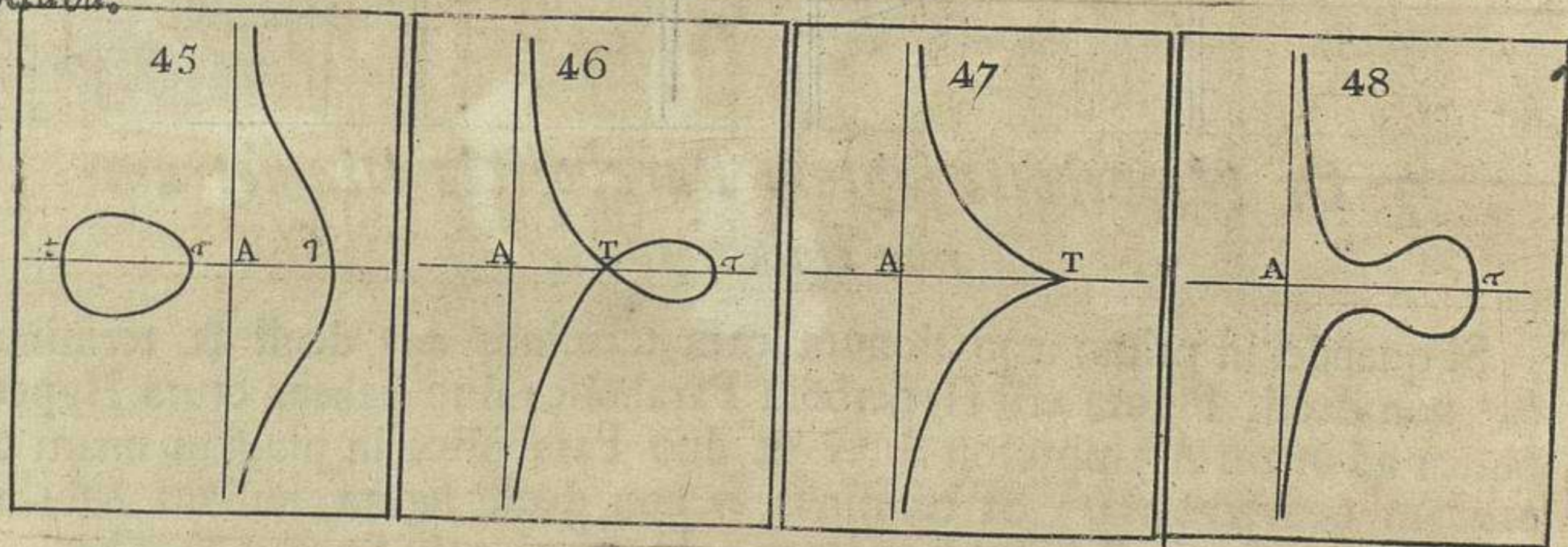
Si radices duæ mediæ AP & Ap (Fig. 40) æquentur inter se, Ovalis & Anguinea junguntur sese decussantes in forma *Nodi*. Quæ est *Species tricesima quarta*.

Si tres radices sunt æquales, Nodus vertetur in *Cuspidem* acutissimum in vertice Anguineæ, (Fig. 41) Et hæc est *Species tricesima quinta*.

Si e tribus radicibus ejusdem signi duæ maximæ Ap & A ∞ (Fig. 43) sibi mutuo æquantur, Ovalis in *Punctum* evanuit. Quæ *Species* est *tricesima sexta*.



Si radices duæ quævis imaginariæ sunt, sola manebit Anguinea *Pura* sine Ovali, Decussatione, Cuspide vel Puncto conjugato. Si Anguinea illa non transit per punctum A (Fig. 42) *Species* est *tricesima septima*; si transit per punctum illud A (id quod contingit ubi termini *b* ac *d* desunt,) punctum illud A erit centrum figuræ rectas omnes per ipsum ductas & ad Curvam utrinque terminatas bifecans, (Fig. 43.) Et hæc est *Species tricesima octava*.



6. De Hyperbolis septem defectivis diametrum habentibus.

In altero casu ubi terminus *ey* deest & propterea figura Diametrum habet, si æquationis hujus $ax^3 = bx^2 + cx + d$ radices omnes AT, Ar, A τ , (Fig. 44) sunt reales, inæquales & ejusdem signi, figura erit Hyperbola Conchoidalis cum Ovali ad convexitatem. Quæ est *Species tricesima nona*.

X

Si



Si duæ radices sunt inæquales & ejusdem signi & tertia est signi contrarii, *Ovalis* jacebit ad concavitatem *Conchoidalis*, (Fig. 45.) Estque *Species quadragesima*.

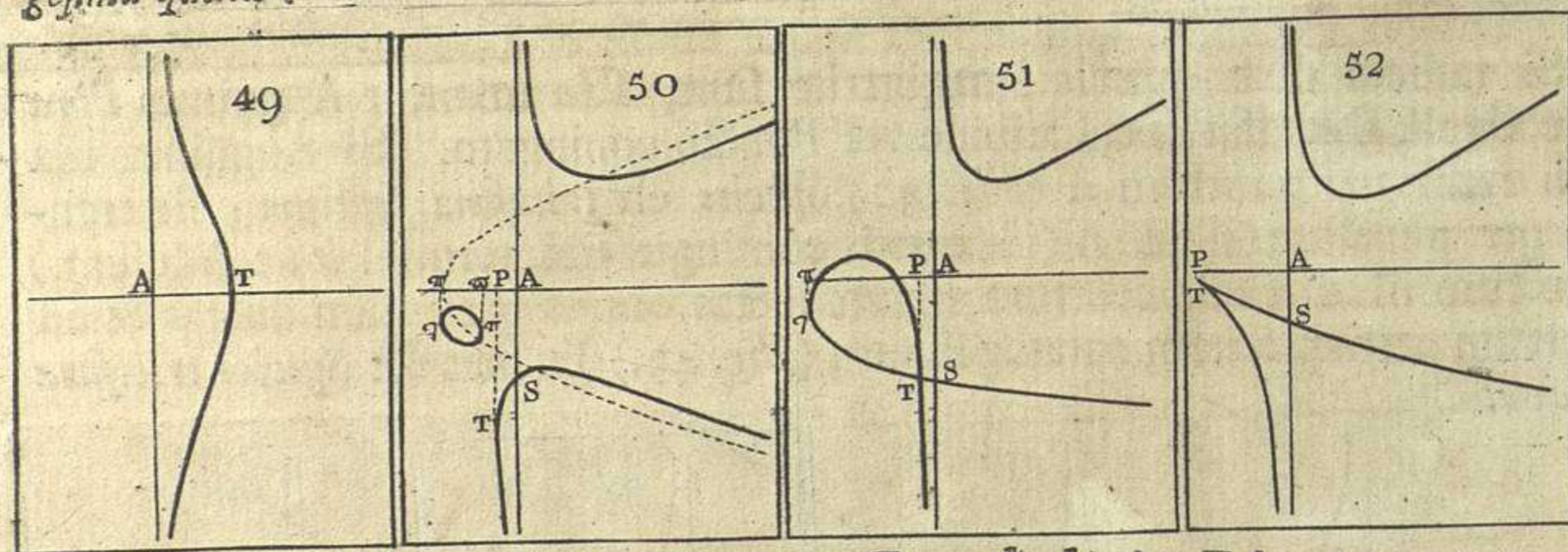
Si radices duæ minores AT , At , (Fig. 46) sunt æquales, & tertia $A\tau$ est ejusdem signi, *Ovalis* & *Conchoidalis* jungentur sese decussando in modum *Nodi*. Quæ *Species* est *quadragesima prima*.

Si tres radices sunt æquales, *Nodus* mutabitur in *Cuspide*, & figura erit *Cissois Veterum*, (Fig. 47.) Et hæc est *Species quadragesima secunda*.

Si radices duæ majores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi, *Conchoidalis* habebit *Punctum* conjugatum ad convexitatem suam, (Fig. 49.) Estque *Species quadragesima tertia*.

Si radices duæ sunt æquales, & tertia est signi contrarii *Conchoidalis* habebit *Punctum* conjugatum ad concavitatem suam, (Fig. 49.) Estque *Species quadragesima quarta*.

Si radices duæ sunt impossibiles habebitur *Conchoidalis Pura* sine *Ovali*, *Nodo*, *Cuspide* vel *Puncto* conjugato (Fig. 48. 49.) Quæ *Species* est *quadragesima quinta*.



7. De Hyperbolis septem Parabolicis Diametrum non habentibus.

Si quando in primo æquationum casu terminus ax^3 deest & terminus bx^2 non deest, Figura erit Hyperbola Parabolica duo habens crura Hyperbolica ad unam Asymptoton SAG & duo Parabolica in plagam unam & eandem convergentia. Si terminus ey non deest figura nullam habebit diametrum, sin deest habebit unicam. In priori casu Species sunt hæc.

Si tres radices AP , $A\pi$, $A\tau$ (Fig. 50.) æquationis hujus $bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{2}ee = 0$ sunt inæquales & ejusdem signi, figura constabit ex *Ovali* & aliis duabus *Curvis* quæ partim Hyperbolicæ sunt & partim Parabolicæ. Nempe crura Parabolica continuo ductu junguntur cruribus Hyperbolicis sibi proximis. Et hæc est *Species quadragesima sexta*.

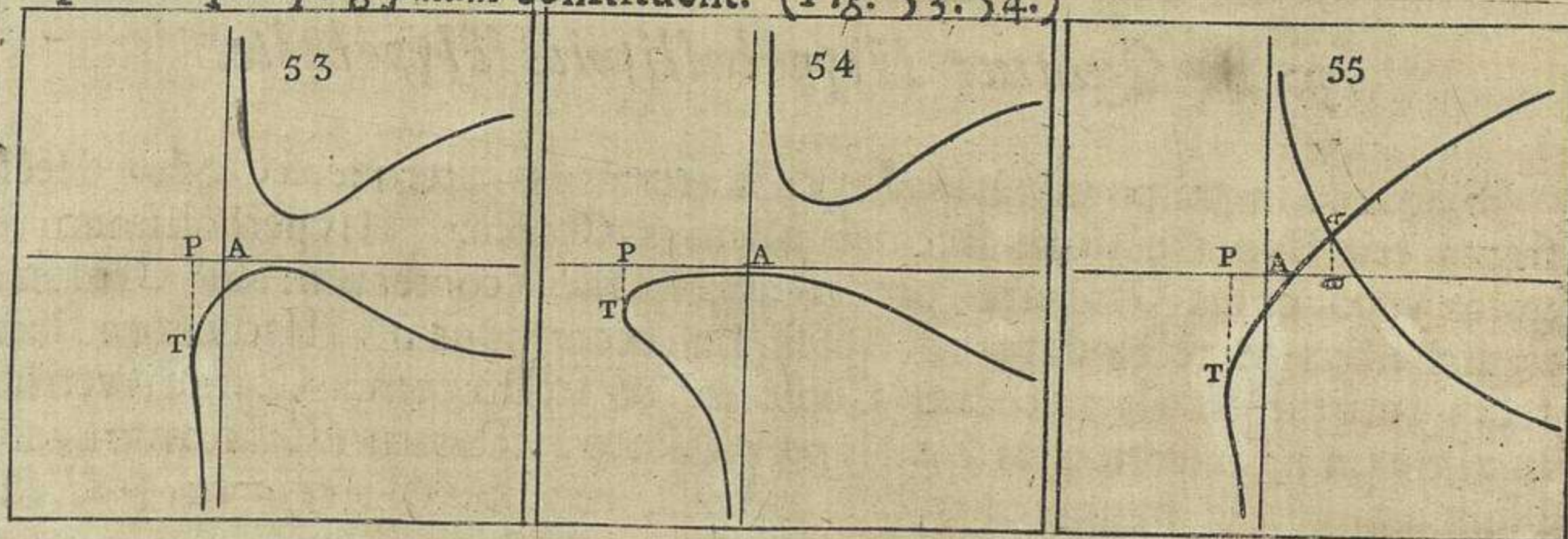
Si radices duæ minores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi, *Ovalis* & una *Curvarum* illarum *Hyperbolo-Parabolicarum* junguntur & se decussant in formam *Nodi* (Fig. 51.) Quæ *Species* est *quadragesima septima*.

Si

Si tres radices sunt æquales, Nodus ille in Cuspidem vertitur (Fig. 52.) Estque Species quadragesima octava.

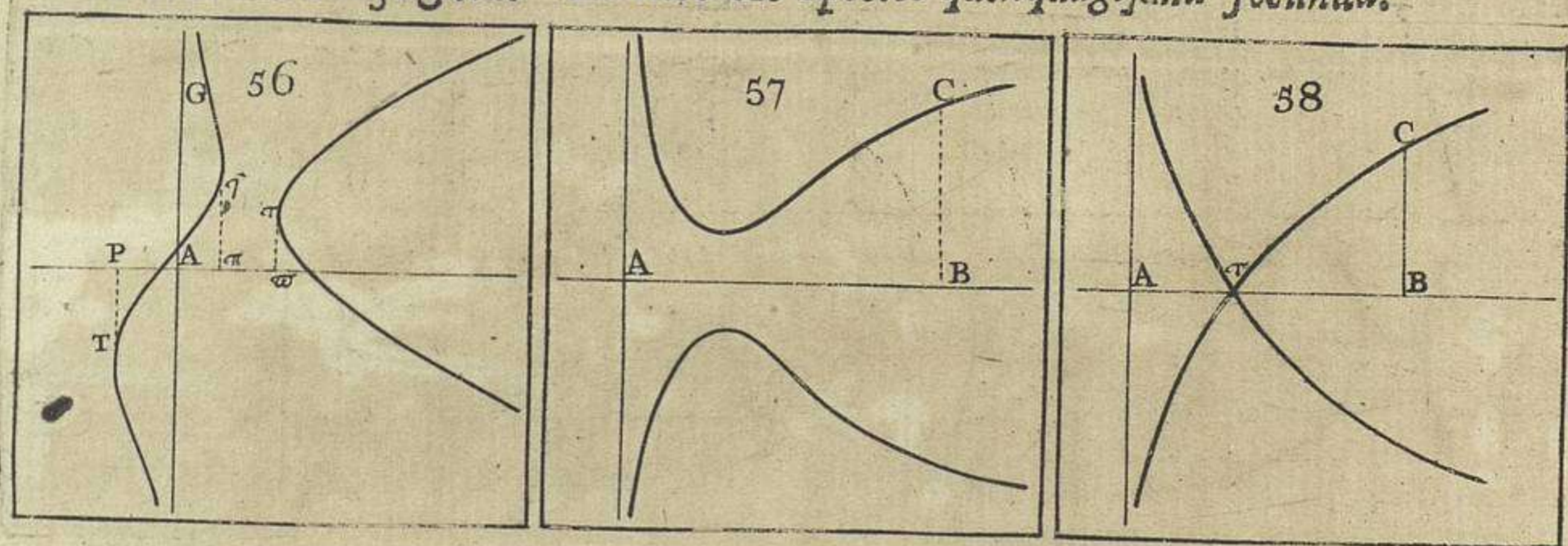
Si radices duæ majores sunt æquales & tertia est ejusdem signi, Ovalis in Punctum conjugatum evanuit (Fig. 53.) Quæ Species est quadragesima nona.

Si duæ radices sunt impossibiles, manebunt Puræ illæ duæ curvæ Hyperbolo-parabolicæ sine Ovali, Decussatione, Cuspide vel Puncto conjugato; & Speciem quinquagesimam constituent. (Fig. 53. 54.)



Si radices duæ sunt æquales & tertia est signi contrarii, Curvæ illæ Hyperbolo-parabolicæ junguntur sese decussando in morem crucis (Fig. 55.) Estque Species quinquagesima prima.

Si radices duæ sunt inæquales & ejusdem signi & tertia est signi contrarii, figura evadet Hyperbola Anguinea circa Asymptoton AG, (Fig. 56) cum Parabola conjugata. Et hæc est Species quinquagesima secunda.



8. De Hyperbolis quatuor Parabolicis Diametrum habentibus.

In altero casu ubi terminus *ey* deest & figura Diametrum habet, si duæ radices æquationis hujus $bx^2 + cx + d = 0$ sunt impossibiles, duæ habentur figuræ Hyperbolo-parabolicæ a Diametro AB (Fig. 57.) hinc inde æqualiter distantes. Quæ Species est quinquagesima tertia.

Si æquationis illius radices duæ sunt impossibiles, Figuræ Hyperbolo-parabolicæ junguntur sese decussantes in morem crucis; & Speciem quinquagesimam quartam constituunt. Fig. 58.

Si

Si radices illæ sunt inæquales & ejusdem signi, habetur Hyperbola Conchoidalis cum Parabola ex eodem latere Asymptoti (Fig. 59.) Estque Species quinquagesima quinta.

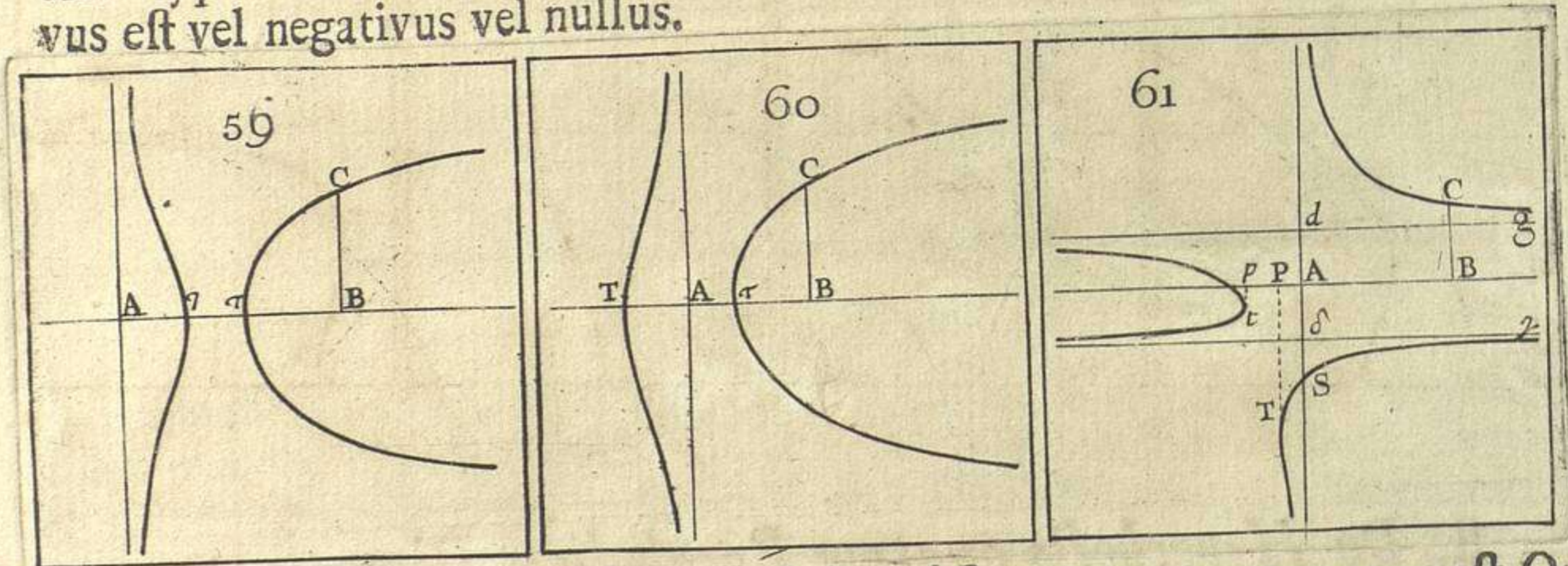
Si radices illæ sunt signi contrarii, habetur Conchoidalis cum Parabola ad alteras partes Asymptoti (Fig. 60.) Quæ Species est quinquagesima sexta.

9. De Quatuor Hyperbolismis Hyperbolæ.

Si quando in primo æquationum casu terminus uterque ax^3 & bx^2 deest, figura erit Hyperbolismus sectionis alicujus Conicæ. Hyperbolismus figuræ voco cujus Ordinata prodit applicando contentum sub Ordinata figuræ illius & recta data ad Abscissam communem. Hac ratione linea recta vertitur in Hyperbolam Conicam, & sectio omnis Conica vertitur in aliquam figurarum quas hic Hyperbolismos sectionum Conicarum voco. Nam æquatio ad figuras de quibus agimus, nempe $xy^2 + ey = cx + d$, dat

$$y = \frac{e \pm \sqrt{ee + 4dx + 4cxx}}{2x} \text{ quæ generatur applicando contentum sub Ordina-}$$

nata sectionis Conicæ $\frac{e \pm \sqrt{ee + 4dx + 4cxx}}{2m}$ & recta data m , ad curvarum Abscissam communem x . Unde liquet quod figura genita Hyperbolismus erit Hyperbolæ, Ellipseos vel Parabolæ, perinde ut terminus cx affirmativus est vel negativus vel nullus.

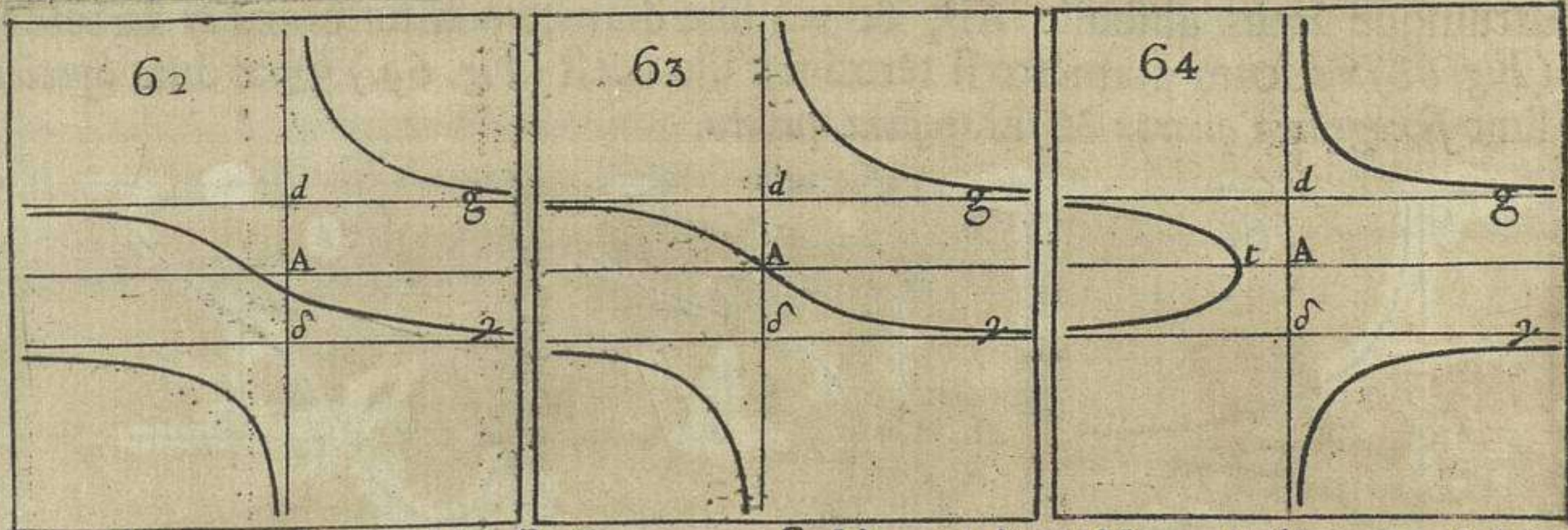


Hyperbolismus Hyperbolæ tres habet Asymptotos, quarum una est Ordinata prima & principalis Ad , alteræ duæ sunt parallelæ Abscissæ AB , ab eadem hinc inde æqualiter distant. In Ordinata principali Ad , cape Ad , A^d hinc inde æquales quantitati \sqrt{c} ; & per puncta d ac δ age dg , $\delta\gamma$ Asymptotos Abscissæ AB parallelas.

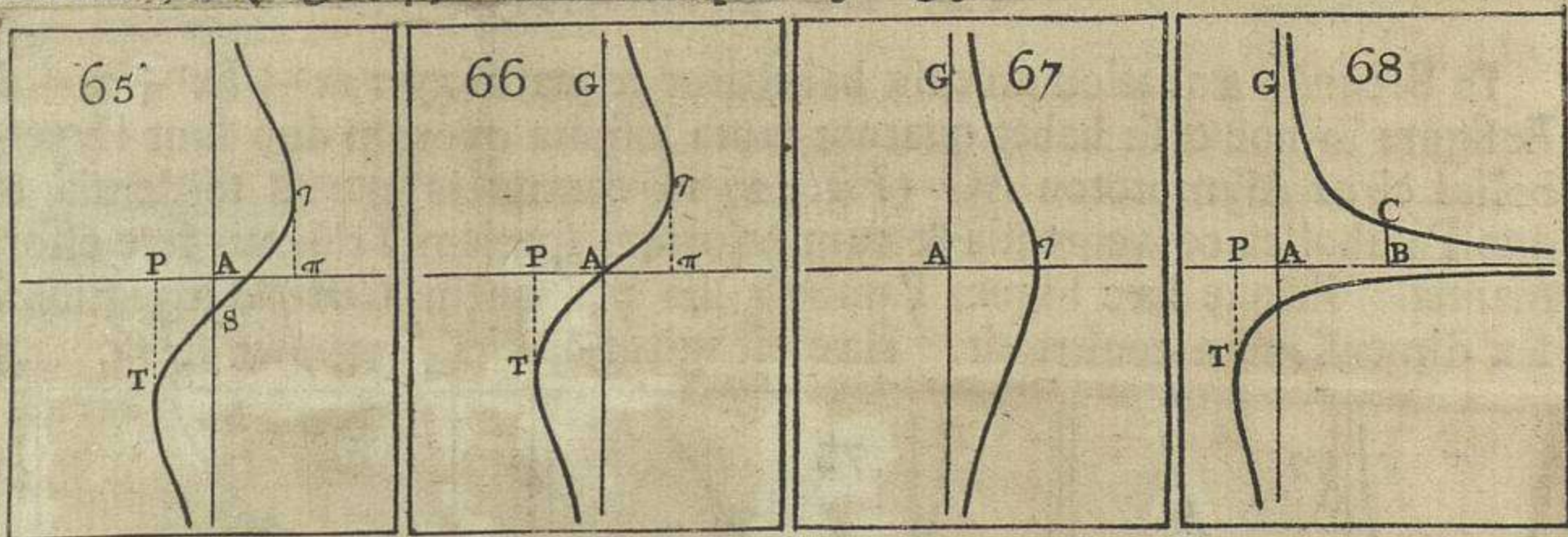
Ubi terminus ey non deest figura nullam habet diametrum. In hoc casu, si æquationis hujus $cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ radices duæ AP , Ap (Fig. 61) sunt reales & inæquales (nam æquales esse nequeunt nisi figura sit Conica sectio) figura constabit ex tribus Hyperbolis sibi oppositis quarum una jacet inter Asymp-

Asymptotos parallelas & alteræ duæ jacent extra. Et hæc est *Species quinquagesima septima.*

Si radices illæ duæ sunt impossibiles, habentur Hyperbolæ duæ oppositæ extra Asymptotos parallelas & Anguinea Hyperbolica intra easdem. Hæc figura duarum est specierum. Nam centrum non habet ubi terminus d non deest (*Fig. 62;*) sed si terminus ille deest punctum A est ejus centrum (*Fig. 63.*) Prior *Species est quinquagesima octava,* posterior *quinquagesima nona.*



Quod si terminus ey deest, figura constabit ex tribus Hyperbolis oppositis, quarum una jacet inter Asymptotos parallelas & alteræ duæ jacent extra ut in specie quinquagesima quarta, & præterea diametrum habet quæ est Abscissa AB (*Fig. 64.*) Et hæc est *Species sexagesima.*



10. De tribus Hyperbolismis Ellipseos.

Hyperbolismus Ellipseos per hanc æquationem definitur $xy^2 + ey = cx + d$, & unicam habet Asymptoton quæ est Ordinata principalis Ad (*Fig. 65.*) Si terminus ey non deest, figura est Hyperbola Anguinea sine diametro, atque etiam sine centro si terminus d non deest. Quæ *Species est sexagesima prima.*

At si terminus d deest, figura habet centrum sine diametro, & centrum ejus est punctum A (*Fig. 66.*) *Species vero est sexagesima secunda.*

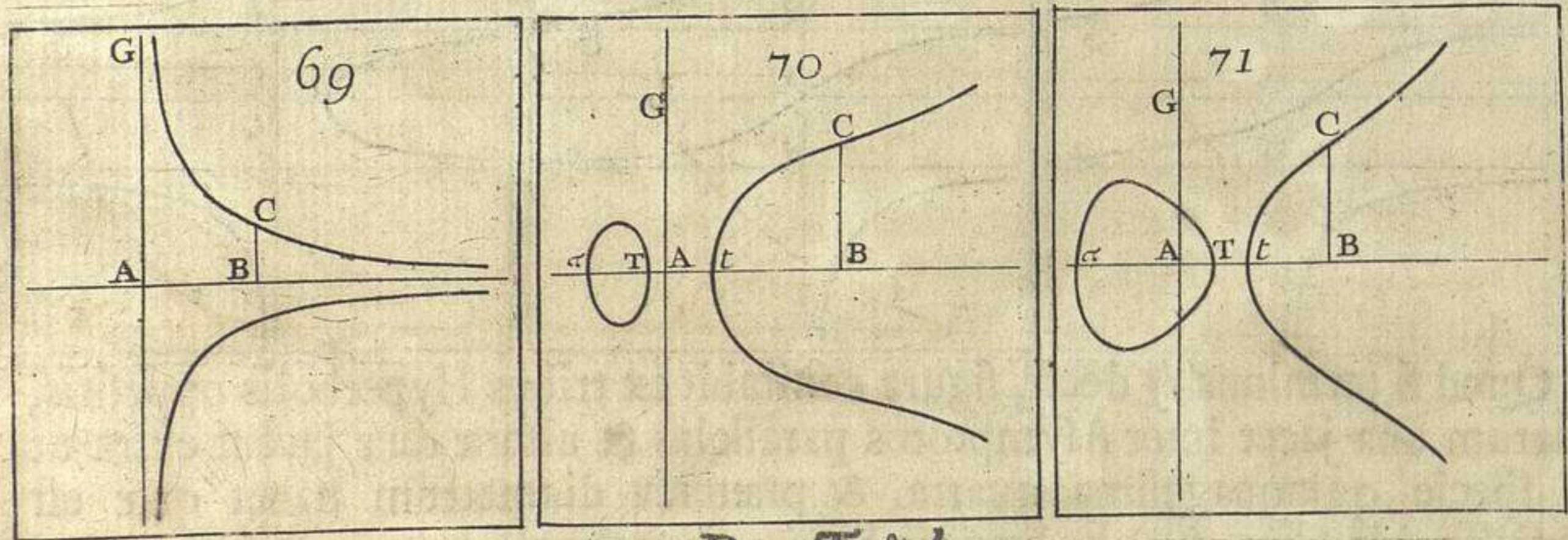
Et si terminus ey deest, & terminus d non deest, figura est Conchoidalis ad Asymptoton AG (*Fig. 67,*) habetque diametrum sine centro, & diameter ejus est Abscissa AB. Quæ *Species est sexagesima tertia.*

Y

11. De

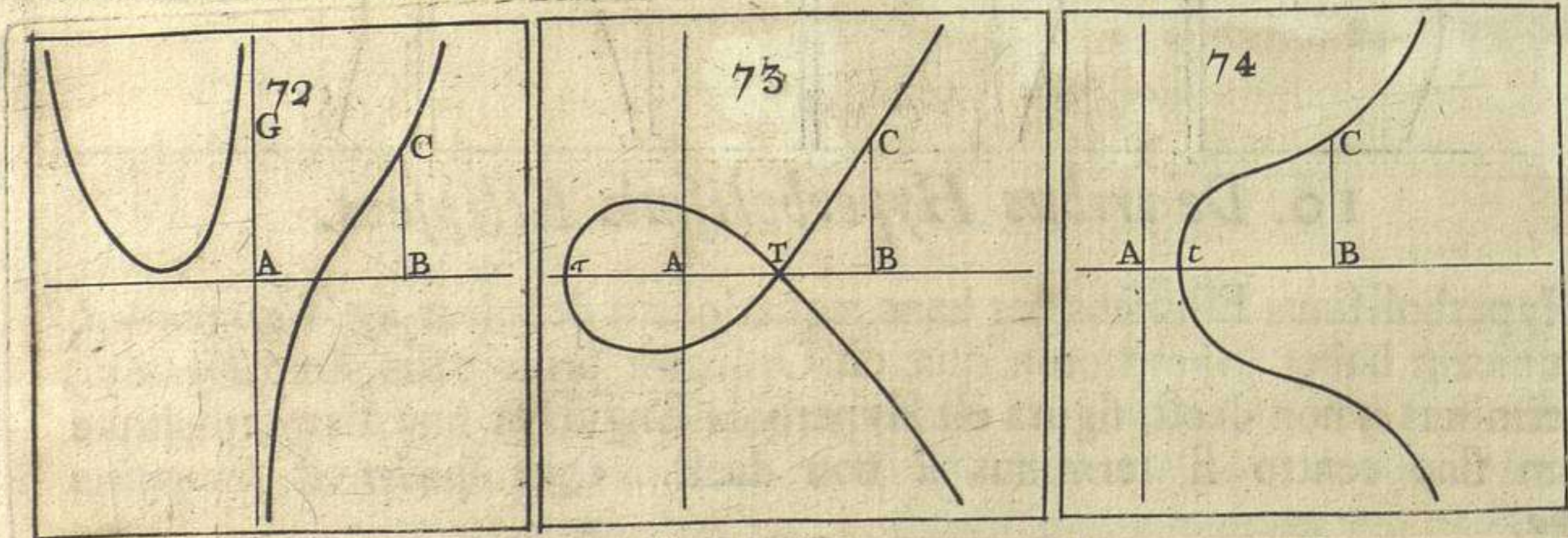
11. De duobus Hyperbolismis Parabolæ.

Hyperbolismus Parabolæ per hanc æquationem definitur $xy^2 + ey = d$; & duas habet Asymptotos, Abscissam AB & Ordinam primam & principalem AG. Hyperbolæ vero in hac figura sunt duæ, non in Asymptoton angulis oppositis sed in angulis qui sunt deinceps jacentes, idque ad utrumque latus abscissæ AB, & vel sine diametro si terminus ey habetur, (Fig. 68) vel cum diametro si terminus ille deest (Fig. 69.) Quæ duæ Species sunt sexagesima quarta & sexagesima quinta.



12. De Tridente.

In Secundo æquationum casu habebatur æquatio $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Et figura in hoc casu habet quatuor crura infinita quorum duo sunt Hyperbolica circa Asymptoton AG (Fig. 72) in contrarias partes tendentia & duo Parabolica convergentia & cum prioribus speciem Tridentis fere efformantia. Estque hæc Figura Parabola illa per quam Cartesius æquationes sex dimensionum construxit. Hæc est igitur Species sexagesima sexta.



13. De Parabolis quinque divergentibus.

In Tertio casu æquatio erat $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, & Parabolam designat cujus crura divergunt ab invicem & in contrarias partes infinite progrediuntur. Abscissa AB est ejus diameter & Species ejus sunt quinque sequentes.

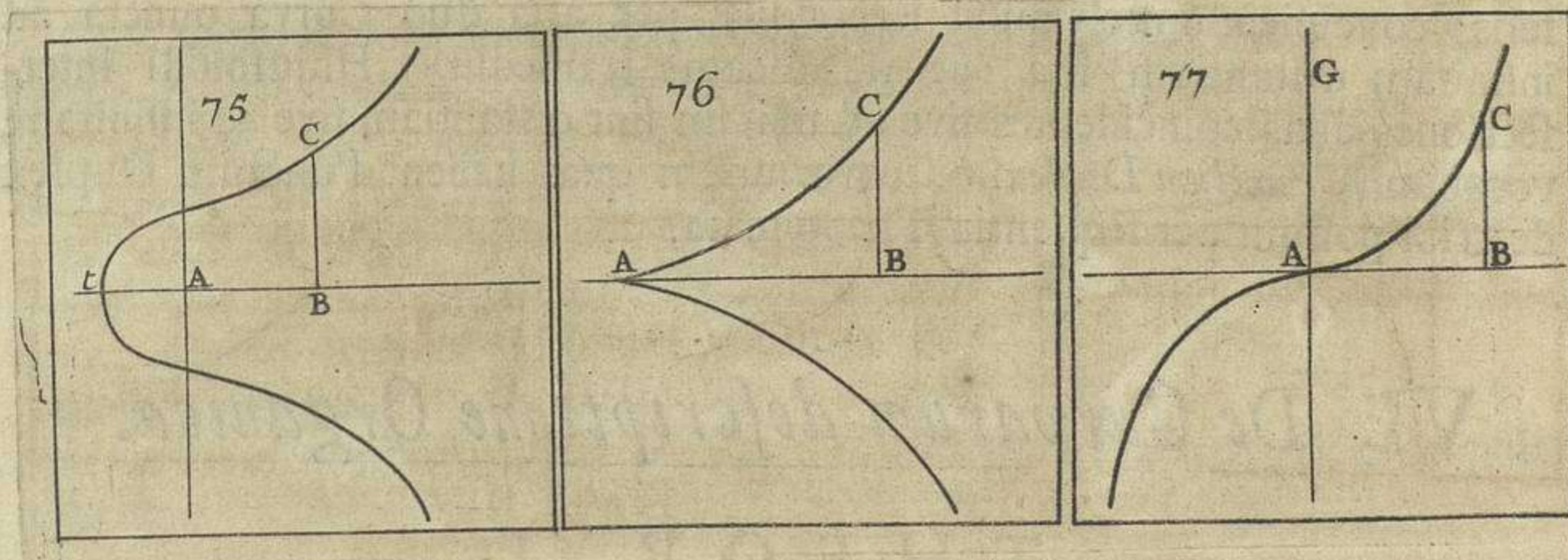
Si

Si æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, radices omnes $A\tau$, AT , At sunt reales & inæquales, figura est Parabola divergens Campaniformis cum Ovali ad verticem (Fig. 70, 71.) Et Species est sexagesima septima.

Si radices duæ sunt æquales, Parabola prodit vel *Nodata* contingendo Ovalem (Fig. 73,) vel *Punctata* ob Ovalem infinite parvam (Fig. 74.) Quæ duæ Species sunt sexagesima octava & sexagesima nona.

Si tres radices sunt æquales Parabola erit *Cuspidata* in vertice (Fig. 76.) Et hæc est Parabola *Neiliana* quæ vulgo *Semicubica* dicitur. Et est Species septuagesima.

Si radices duæ sunt impossibiles, habetur Parabola *Pura* campaniformis. (Fig. 74, 75,) Speciem septuagesimam primam constituens.



14. De Parabola Cubica.

In Quarto casu æquatio erat $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, & hæc æquatio Parabolam designat quæ crura habet contraria & *Cubica* dici solet (Fig. 77.) Et sic Species omnino sunt septuaginta duæ.

V. Genesis Curvarum per Umbras.

Si in planum infinitum a puncto lucido illuminatum umbræ figurarum projiciantur, umbræ Sectionum Conicarum semper erunt Sectiones Conicæ, eæ Curvarum secundi Generis semper erunt Curvæ secundi Generis, eæ Curvarum tertii Generis semper erunt Curvæ tertii Generis, & sic deinceps in infinitum.

Et quemadmodum Circulus umbram projiciendo generat Sectiones omnes Conicas, sic Parabolæ quinque divergentes umbris suis generant & exhibent alias omnes secundi Generis Curvas; & sic Curvæ quædam simpliciores aliorum Generum inveniri possunt quæ alias omnes eorundem Generum Curvas umbris suis a puncto lucido in planum projectis formabunt.

De



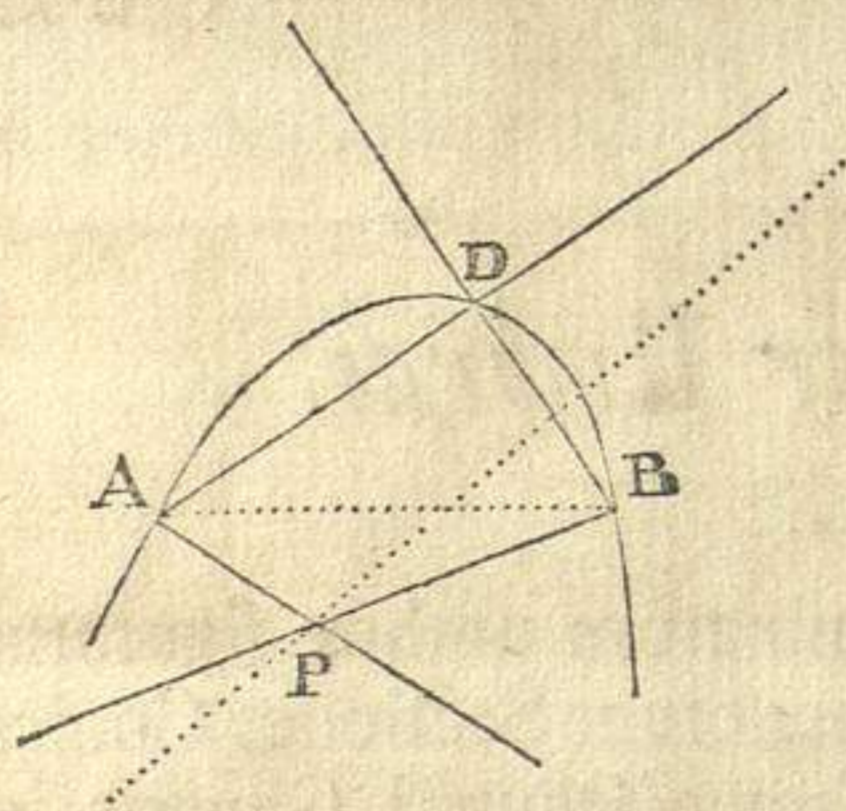
De Curvarum Punctis duplicibus.

Diximus Curvas secundi Generis a Linea recta in punctis tribus secari posse. Horum duo nonnunquam coincidunt. Ut cum Recta per Ovalem infinite parvam transit vel per concursum duarum partium Curvæ se mutuo secantium vel in cuspidem coeuntium ducitur. Et si quando Rectæ omnes in plagam cruris alicujus infiniti tendentes Curvam in unico tantum puncto secant, (ut fit in ordinatis Parabolæ Cartesianæ & Parabolæ cubicæ, nec non in rectis Abscissæ Hyperbolicorum Hyperbolæ & Parabolæ parallelis) concipiendum est quod Rectæ illæ per alia duo Curvæ puncta ad infinitam distantiam sita (ut ita dicam) transeunt. Hujusmodi intersectiones duas coincidentes sive ad finitam sint distantiam sive ad infinitam, vocabimus *Punctum Duplex*. Curvæ autem quæ habent Punctum Duplex describi possunt per sequentia Theoremata.

VI. De Curvarum descriptione Organica.

T H E O R. I.

Si Anguli duo magnitudine dati PAD, PBD circa polos positione datos



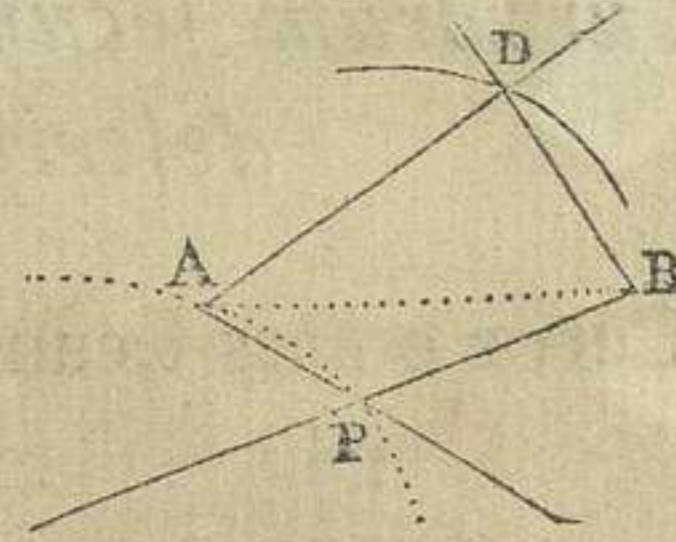
A, B rotentur, & eorum crura AP, BP concursu suo P percurrant Lineam rectam; crura duo reliqua AD, BD concursu suo D describent Sectionem Conicam per polos A, B transeuntem: præterquam ubi Linea illa recta transit per polorum alterutrum A vel B,

vel anguli BAD, ABD simul evanescunt, quibus in casibus punctum D describet Lineam rectam.

T H E O R. II.

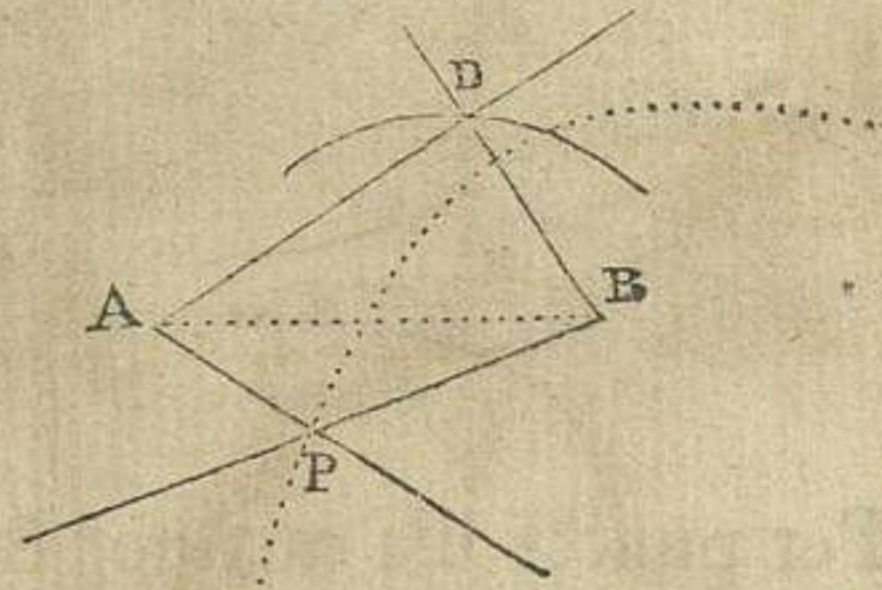
Si crura prima AP, BP concursu suo P percurrant Sectionem Conicam per polum alterutrum A transeuntem, crura duo reliqua AD, BD concursu

si suo D describent Curvam secundi Generis per polum alterum B transeuntem & Punctum duplex habentem in polo primo A, per quem sectio Conica transit: præterquam ubi anguli BAD, ABD simul evanescunt, quo casu punctum D describet aliam sectionem Conicam per polum A transeuntem.



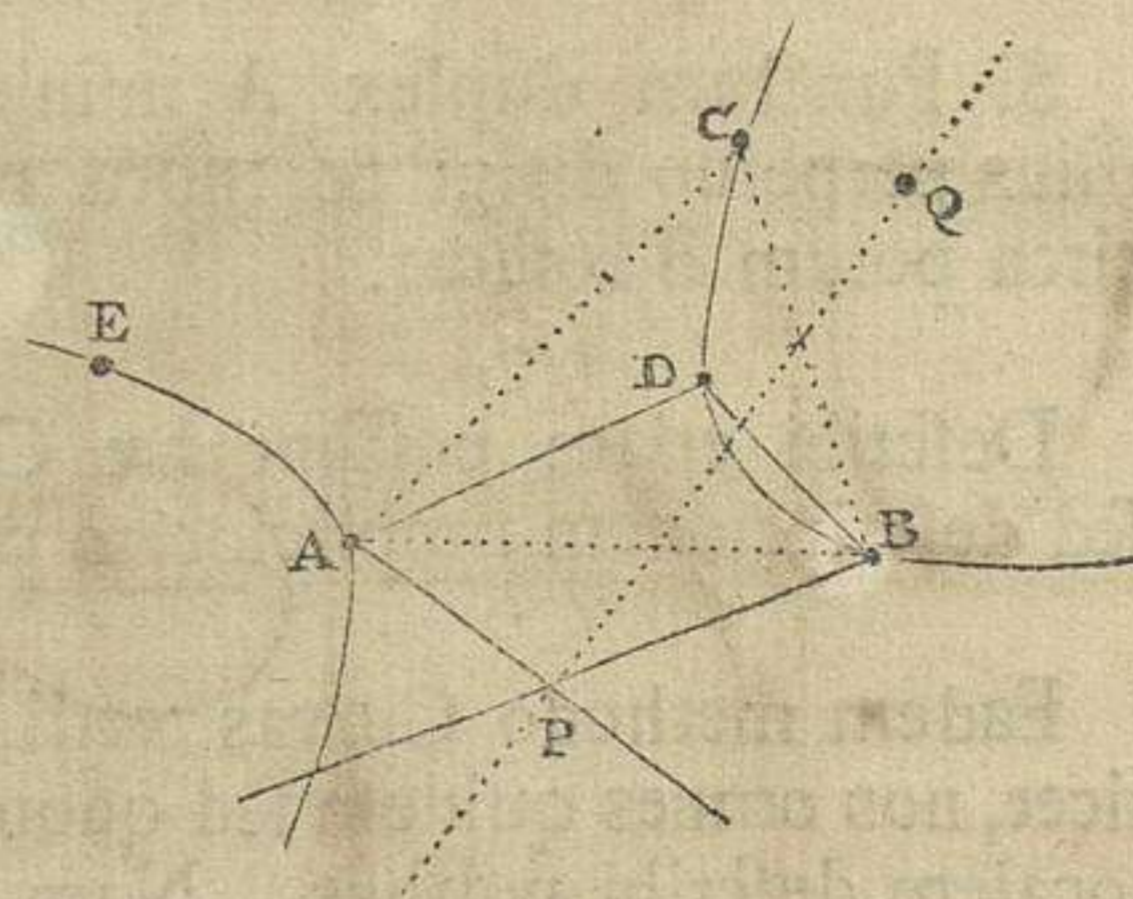
THEOR. III.

At si sectio Conica quam punctum P percurrit transeat per neutrum polorum A, B, punctum D describet Curvam secundi vel tertii generis Punctum duplex habentem. Et Punctum illud duplex in concursu crurum describentium, AD, BD invenietur ubi anguli BAP, ABP simul evanescunt. Curva autem descripta secundi erit Generis si anguli BAD, ABD simul evanescunt, alias erit tertii Generis & alia duo habebit Puncta duplicia in polis A & B.



Sectionum Conicarum descriptio per data quinque puncta.

Jam sectio Conica determinatur ex datis ejus punctis quinque & per eadem sic describi potest. Dentur ejus puncta quinque A, B, C, D, E. Jungantur eorum tria quævis A, B, C, & trianguli ABC rotentur anguli duo quivis CAB, CBA circa vertices suos A & B, & ubi crurum AC, BC intersectio C successive applicatur ad puncta duo reliqua D, E, incidat intersectio crurum reliquorum AB & BA in puncta P & Q. Agatur & infinite producat recta PQ, & anguli mobiles ita rotentur ut intersectio crurum AB, BA percurrat rectam PQ, & crurum reliquorum intersectio C describet propositam sectionem Conicam per Theorema primum.



Z

Cur-

VII. Constructio æquationum per descriptionem Curvarum.

Curvarum usus in Geometria est ut per earum intersectiones Problemata solvantur. Proponatur æquatio construenda dimensionum novem

$$x^9 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + k = 0.$$

+ m

Ubi $b, c, d, &c.$ significant quantitates quasvis datas signis suis + & - affectas. Assumatur æquatio ad Parabolam cubicam $x^3 = y$, & æquatio prior, scribendo y pro x^3 , evadet

$y^3 + bxy^2 + cy^2 + dx^2y + exy + my + fx^3 + gx^2 + hx + k = 0,$
æquatio ad Curvam aliam secundi Generis. Ubi m vel f deesse potest vel pro lubitu assumi. Et per harum Curvarum descriptiones & intersectiones dabuntur radices æquationis construendæ. Parabolam cubicam semel describere sufficit.

Si æquatio construenda per defectum duorum terminorum ultimorum bx & k reducatur ad septem dimensiones, Curva altera delendo m , habebit Punctum Duplex in principio Abscissæ, & inde facile describi potest ut supra.

Si æquatio construenda per defectum terminorum trium ultimorum $gx^2 + bx + k$ reducatur ad sex dimensiones, Curva altera delendo f evadet sectio Conica.

Et si per defectum sex ultimorum terminorum æquatio construenda reducatur ad tres dimensiones, incidetur in constructionem *Wallisianam* per Parabolam cubicam & Lineam rectam.

Construi etiam possunt æquationes per Hyperbolismum Parabolæ cum diametro. Ut si construenda sit hæc æquatio dimensionum novem termino penultimo carens,

$$a + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + bx^7 + kx^8 + lx^9 = 0;$$

+ m

Assumatur æquatio ad Hyperbolismum illum $x^2y = 1$, & scribendo y pro $\frac{1}{xx}$, æquatio construenda vertetur in hanc

$ay^3 + cy^2 + dxy^2 + ey + fxy + mx^2y + g + bx + kx^2 + lx^3 = 0,$
quæ curvam secundi Generis designat cujus descriptione Problema solvetur. Et quantitatum m ac g alterutra hic deesse potest, vel pro lubitu assumi.

Per



Per Parabolam cubicam & Curvas tertii Generis construuntur etiam æquationes omnes dimensionum non plusquam duodecim, & per eandem Parabolam & Curvas quarti Generis construuntur omnes dimensionum non plusquam quindecim; Et sic deinceps in infinitum. Et Curvæ illæ tertii, quarti & superiorum Generum describi semper possunt inveniendò eorum puncta per Geometriam planam. Ut si construenda sit æquatio

$$x^{12} * + ax^{10} + bx^9 + cx^8 + dx^7 + ex^6 + fx^5 + gx^4 + hx^3 + ix^2 + kx + l = 0,$$

& descripta habeatur Parabola Cubica; fit æquatio ad Parabolam illam Cubicam $x^3 = y$, & scribendo y pro x^3 , æquatio construenda vertetur in hanc

$$\begin{array}{ccccccc} y^4 + axy^3 + cx^2y^2 + fx^2y + ix^2 = 0, \\ + b & + dx & + gx & + kx \\ + e & + b & + l \end{array}$$

quæ est æquatio ad Curvam tertii Generis cujus descriptione Problema solvetur. Describi autem potest hæc Curva inveniendò ejus puncta per Geometriam planam, propterea quod indeterminata quantitas x non nisi ad duas dimensiones ascendit.





METHODUS DIFFERENTIALIS.

PROP. I.



I figuræ curvilinæ Abscissa componatur ex quantitate quavis data A, & quantitate indeterminata x, & Ordinata constet ex datis quocunque quantitatibus b, c, d, e, &c. in totidem terminos hujus progressionis Geometricæ $x, x^2, x^3, x^4, &c.$ respective ductis, & ad Abscissæ puncta totidem data erigantur Ordinatum applicatæ: dico quod Ordinarum differentiæ primæ dividi possint per earum intervalla, & differentiarum sic divisarum

A a

sarum

farum differentia dividendi possint per Ordinatarum binarum intervalla, & harum differentiarum sic divisarum differentia dividendi possint per Ordinatarum ternarum intervalla, & sic deinceps in infinitum.

Etenim si pro Abscissæ parte indeterminata x ponantur quantitates quævis datæ $p, q, r, s, t, &c.$ successive, & ad Abscissarum sic datarum terminos erigantur Ordinatae $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, &c.$ Hæ Abscissæ & Ordinatae & Ordinatarum differentiae divisæ per Abscissarum differentias (quæ utique sunt Ordinatarum intervalla) & quotorum differentia divisæ per Ordinatarum alternarum differentias, & sic deinceps, exhibentur per Tabulam sequentem.

Abcissæ	Ordinatae
$A + p$	$A + bp + cp^2 + dp^3 + ep^4 = \alpha$
$A + q$	$A + bq + cq^2 + dq^3 + eq^4 = \beta$
$A + r$	$A + br + cr^2 + dr^3 + er^4 = \gamma$
$A + s$	$A + bs + cs^2 + ds^3 + es^4 = \delta$
$A + t$	$A + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 = \epsilon$
Divisor. Diff. Ord.	Quoti per divisionem prodeuntes.
$p - q) \alpha - \beta$	$b + c \times \overline{p + q} + d \times \overline{pp + pq + qq} + e \times \overline{p^3 + p^2q + pq^2 + q^3} = \zeta$
$q - r) \beta - \gamma$	$b + c \times \overline{q + r} + d \times \overline{qq + qr + rr} + e \times \overline{q^3 + q^2r + qr^2 + r^3} = \eta$
$r - s) \gamma - \delta$	$b + c \times \overline{r + s} + d \times \overline{rr + rs + ss} + e \times \overline{r^3 + r^2s + rs^2 + s^3} = \theta$
$s - t) \delta - \epsilon$	$b + c \times \overline{s + t} + d \times \overline{ss + st + tt} + e \times \overline{s^3 + s^2t + st^2 + t^3} = \kappa$
$p - r) \zeta - \eta$	$c + d \times \overline{p + q + r} + e \times \overline{pp + pq + qq + pr + qr + rr} = \lambda$
$q - s) \eta - \theta$	$c + d \times \overline{q + r + s} + e \times \overline{qq + qr + rr + qs + rs + ss} = \mu$
$r - t) \theta - \kappa$	$c + d \times \overline{r + s + t} + e \times \overline{rr + rs + ss + rt + st + tt} = \nu$
$p - s) \lambda - \mu$	$d + e \times \overline{p + q + r + s} = \xi.$
$q - t) \mu - \nu$	$d + e \times \overline{q + r + s + t} = \pi.$
$p - t) \xi - \pi$	$e = \sigma.$

PROP.

P R O P. II.

Iisdem positis, & quod numerus terminorum $b, c, d, e, \&c.$ sit finitus, dico quod Quotorum ultimus æqualis erit ultimo terminorum $b, c, d, e, \&c.$ et quod per Quotos reliquos dabuntur termini reliqui $b, c, d, e, \&c.$ et his datis dabitur Linea Curva generis Parabolici quæ per Ordinatarum omnium terminos transibit.

Etenim in Tabula superiore Quotus ultimus σ æqualis erat termino ultimo e . Et hic terminus ductus in summam datam $p + q + r + s$, & ablatu de Quoto ξ relinquit terminum penultimum d . Et quantitates jam datæ $d \times p + q + r + e \times pp + pq + qq + pr + qr + rr$, si auferantur de Quoto λ , relinquent terminorum antepenultimum c . Et quantitates jam datæ $c \times p + q + d \times pp + pq + qq + e \times p^3 + ppq + pqq + q^3$, si auferantur de Quoto ζ , relinquent terminum b . Et simili computo si plures essent termini, colligerentur omnes per Quotorum Ordines totidem. Deinde quantitates datæ $bp + cpp + dp^3 + ep^4$, si subducantur de Ordinata prima a , relinquent Abscissæ terminum primum A . Et quantitas $A + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$ est Ordinata Curvæ generis Parabolici quæ per Ordinatarum omnium datarum terminos transibit, existente Abscissa $A + x$.

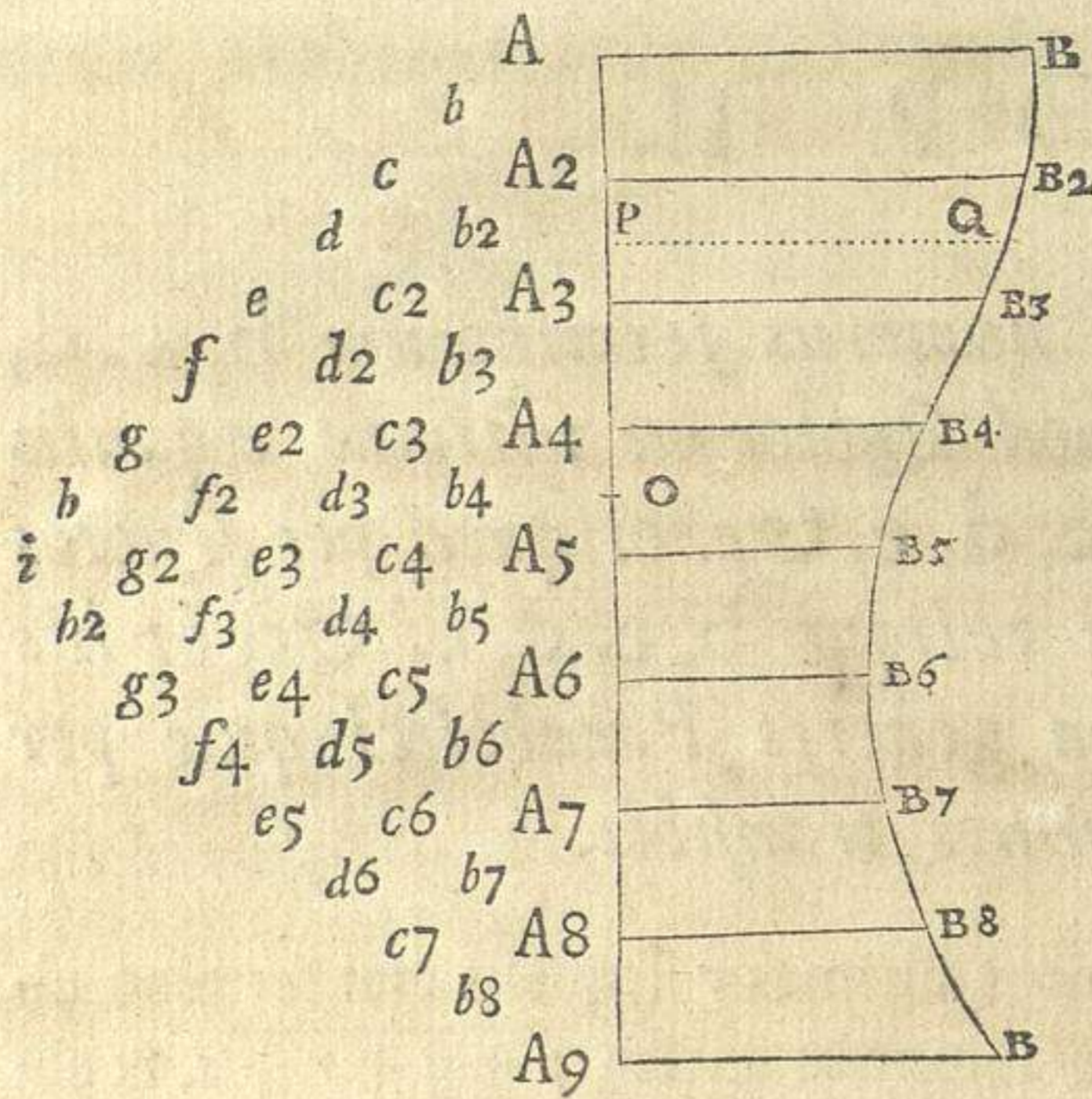
Ex his Propositionibus quæ sequuntur facile colligi possunt.

P R O P. III.

Si Recta aliqua AA_9 in æquales quotcunque partes $AA_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, \&c.$ dividatur, & ad puncta divisionum erigantur parallelæ $AB, A_2B_2, A_3B_3, \&c.$ Invenire curvam Geometricam generis Parabolici quæ per omnium erectarum terminos $B, B_2, B_3, \&c.$ transibit.

Erectarum $AB, A_2B_2, A_3B_3, \&c.$ quære differentias Primas, $b, b_2, b_3, \&c.$ Secundas $c, c_2, c_3, \&c.$ Tertias $d, d_2, d_3, \&c.$ et sic deinceps usque dum veneris ad ultimam differentiam, quæ hic fit i .

Tunc



Tunc incipiendo ab ultima differentia excerpere medias differentias in alternis Columnis vel Ordinibus differentiarum, & Arithmetica media inter duas medias reliquarum, Ordine pergendo usque ad Seriem primorum terminorum AB, A₂B₂, A₃B₃, &c. sint hæc *k, l, m, n, o, p, q, r, s, &c.* quorum ultimus significet ultimam differentiam; penultimus medium Arithmeticum inter duas penultimas differentias; antepenultimus mediam trium antepenultimarum differentiarum, & sic deinceps usque ad primum

quod erit vel medius terminorum A, A₂, A₃, &c. vel Arithmeticus medius inter duos medios. Prius accidit ubi numerus terminorum A, A₂, A₃, &c. est impar; posterius ubi par.

C A S. I.

In Casu priori, fit A₅B₅ iste medius terminus, hoc est, A₅B₅ = *k*, $\frac{b_4 + b_5}{2} = l$, $c_4 = m$, $\frac{d_3 + d_4}{2} = n$, $e_3 = o$, $\frac{f_2 + f_3}{2} = p$, $g_2 = q$, $\frac{b + b_2}{2} = r$, $i = s$.

Et erecta Ordinatum applicata PQ, dic A₅P = *x*; & duc terminos hujus Progressionis

$$1 \times \frac{x}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x^2 - 1}{3x} \times \frac{x}{4} \times \frac{x^2 - 4}{5x} \times \frac{x}{6} \times \frac{x^2 - 9}{7x} \times \frac{x}{8} \times \frac{x^2 - 16}{9x} \times \frac{x}{10} \times \frac{x^2 - 25}{11x} \times \frac{x}{12} \times \frac{x^2 - 36}{13x} \text{ \&c.}$$

in se continuo; & orientur termini

$$1. x. \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^3 - x}{6} \cdot \frac{x^4 - x^2}{24} \cdot \frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{120} \cdot \frac{x^6 - 5x^4 + 4x^2}{720} \cdot \frac{x^7 - 14x^5 + 49x^3 - 36x}{5040} \text{ \&c.}$$

per quos si termini seriei *k, l, m, n, o, p, &c.* respective multiplicentur, aggregatum factorum $k + xl + \frac{x^2}{2}m + \frac{x^3 - x}{6}n + \frac{x^4 - x^2}{24}o + \frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{120}p + \text{\&c.}$ erit longitudo Ordinatum applicatæ PQ.

C A S. II.

In Casu posteriori, sint A₄B₄, A₅B₅ duo medii termini, hoc est, fit $\frac{A_4B_4 + A_5B_5}{2} = k$, $b_4 = l$, $\frac{c_3 + c_4}{2} = m$, $d_3 = n$, $e_2 + e_3 = o$, $f_2 = p$, $\frac{g + g_2}{2} = q$, & $b = r$.

& $b = r$. Et erecta Ordinatum applicata PQ, bifeca A_4A_5 in O, & dicto $OP = x$, duc Terminos hujus Progressionis

$1 \times \frac{x}{1} \times \frac{xx - \frac{1}{4}}{2x} \times \frac{x}{3} \times \frac{xx - \frac{9}{4}}{4x} \times \frac{x}{5} \times \frac{xx - \frac{25}{4}}{6x} \times \frac{x}{7} \times \frac{xx - \frac{49}{4}}{8x}$, &c. in se continuo; et orientur termini $1. x. \frac{4xx-1}{8}. \frac{4x^3-x}{24}. \frac{16x^4-40x^2+9}{384}$. &c. per quos si termini series k, l, m, n, o, p, q , &c. respective multiplicentur, aggregatum factorum $k + xl + \frac{4x^2-1}{8}m + \frac{4x^3-x}{24}n + \frac{16x^4-40x^2+9}{384}o + \&c.$ erit Longitudo Ordinatum applicatæ PQ.

Sed hic notandum est quod intervalla AA_2, A_2A_3, A_3A_4 , &c. hic supponantur esse unitates, & quod differentia colligi debent auferendo inferiores quantitates de superioribus, A_2B_2 de AB , A_3B_3 de A_2B_2 , b_2 de b , &c. et faciendo ut sint $AB - A_2B_2 = b$, $A_2B_2 - A_3B_3 = b_2$, $b - b_2 = c$, &c. adeoque quando differentia illæ hoc modo prodeunt negativæ signa earum mutanda sunt.

PROP. IV.

Si recta aliqua in partes quotcunque inæquales $AA_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$, &c. dividatur, & ad puncta divisionum erigantur parallelæ AB, A_2B_2, A_3B_3 , &c. Invenire Curvam Geometricam generis Parabolici quæ per omnium erectarum terminos B, B_2, B_3 , &c. transibit.

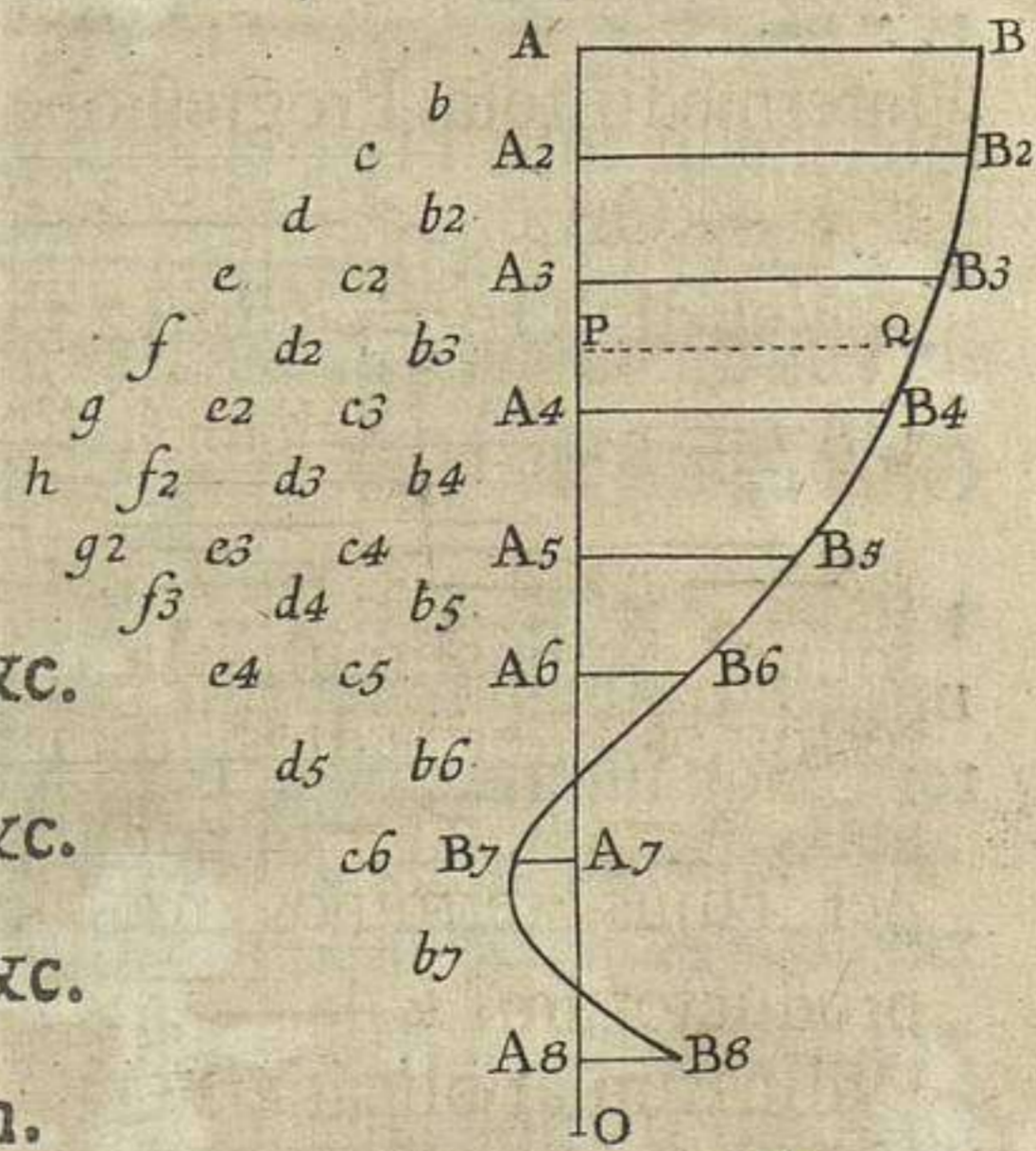
Sunto puncta data $B, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$, &c. et ad Abscissam quamvis AA_7 demitte Ordinatas perpendiculariter BA, B_2A_2 , &c.

Et fac $\frac{AB - A_2B_2}{AA_2} = b, \frac{A_2B_2 - A_3B_3}{A_2A_3} = b_2,$
 $\frac{A_3B_3 - A_4B_4}{A_3A_4} = b_3, \frac{A_4B_4 - A_5B_5}{A_4A_5} = b_4,$
 $\frac{A_5B_5 - A_6B_6}{A_5A_6} = b_5, \frac{A_6B_6 - A_7B_7}{A_6A_7} = b_6,$
 $\frac{A_7B_7 - A_8B_8}{A_7A_8} = b_7.$

Deinde $\frac{b - b_2}{AA_3} = c, \frac{b_2 - b_3}{A_2A_4} = c_2, \frac{b_3 - b_4}{A_3A_5} = c_3, \&c.$
 Tunc $\frac{c - c_2}{AA_4} = d, \frac{c_2 - c_3}{A_2A_5} = d_2, \frac{c_3 - c_4}{A_3A_6} = d_3, \&c.$
 Et $\frac{d - d_2}{AA_5} = e, \frac{d_2 - d_3}{A_2A_6} = e_2, \frac{d_3 - d_4}{A_3A_7} = e_3, \&c.$

Sic pergendum est ad ultimam differentiam.

B b



Differen-

Differentiis fit collectis & divisis per intervalla Ordinatum applicatarum; in alternis earum Columnis five Seriebus vel Ordinibus excerpe medias, incipiendo ab ultima, & in reliquis Columnis excerpe media Arithmetica inter duas medias, pergendo usque ad seriem primorum terminorum, AB, A₂B₂, &c. Suinto hæc $k, l, m, n, o, p, q, r, \&c.$ quorum ultimus terminus significet ultimam differentiam; penultimus medium Arithmeticum inter duas penultimas; antepenultimus mediam trium antepenultimarum, &c. Et primus k erit media Ordinatum applicata, si numerus datorum punctorum est impar; vel medium Arithmeticum inter duas medias, si numerus eorum est par.

C A S. I.

In Casu priori, fit A₄B₄ ista media Ordinatum applicata, hoc est, fit A₄B₄ = k , $\frac{b_3 + b_4}{2} = l$, $c_3 = m$, $\frac{d_2 + d_3}{2} = n$, $e_2 = o$, $\frac{f + f_2}{2} = p$, $g = q$. Et erecta Ordinatum applicata PQ, & in Basi AA₅ sumpto quovis puncto O, dic OP = x , & duc in se gradatim terminos hujus Progressionis

$$1 \times \overline{x - OA_4} \times \overline{x - \frac{OA_3 + OA_5}{2}} \times \overline{\frac{x - OA_3 \times x - OA_5}{x - \frac{1}{2}OA_3 + OA_5}} \times \overline{\frac{OA_2 + OA_6}{2}} \times \&c.$$

et ortam Progressionem afferva; vel quod perinde est duc terminos hujus Progressionis

$$1 \times \overline{x - OA_4} \times \overline{x - OA_3} \times \overline{x - OA_5} \times \overline{x - OA_2} \times \overline{x - OA_6} \times \overline{x - OA} \times \overline{x - OA_7} \times \&c.$$

in se gradatim, & terminos exinde ortos duc respective in terminos hujus Progressionis

$$1. \overline{x - \frac{+OA_3 + OA_5}{2}}. \overline{x - \frac{+OA_2 + OA_6}{2}}. \overline{x - \frac{+OA + OA_7}{2}}, \&c. \text{ et orientur termini}$$

intermedii tota Progressione existente

$$1. \overline{x - OA_4}. \overline{x^2 - \frac{+OA_3 + 2OA_4 + OA_5}{2}x + \frac{OA_3 + OA_5}{2} \times OA_4}, \&c.$$

Vel dic OA = a , OA₂ = β , OA₃ = γ , OA₄ = δ , OA₅ = ϵ , OA₆ = ζ , OA₇ = η : $\frac{OA_3 + OA_5}{2} = \theta$, $\frac{OA_2 + OA_6}{2} = \chi$, $\frac{OA + OA_7}{2} = \lambda$. Et ex Progressione

$1 \times \overline{x - \delta} \times \overline{x - \gamma} \times \overline{x - \epsilon} \times \overline{x - \beta} \times \overline{x - \zeta} \times \overline{x - a} \times \overline{x - \eta}$ &c. collige terminos quibus multiplicatis per $1. \overline{x - \theta}$, $\overline{x - \chi}$, $\overline{x - \lambda}$, &c collige alios terminos intermedios, tota serie prodeunte

$1, \overline{x - \delta}, \overline{x^2 - \delta + \theta x + \delta\theta}, \overline{x^3 - \delta + 2\theta x^2 + \gamma\epsilon + 2\delta\theta x - \gamma\delta\epsilon}, \&c.$
per cujus terminos multiplica series $k, l, m, n, o, \&c.$ Et aggregatum productorum $k + \overline{x - \delta} \times l + \overline{x^2 - \delta + \theta x + \delta\theta} \times m + \&c.$ erit longitudo Ordinatum applicatæ PQ.

C A S.

C A S. II.

In Casu posteriori, sint $A_4B_4; A_5B_5$ duæ mediæ Ordinatum applicatæ, hoc est, $\frac{A_4B_4 + A_5B_5}{2} = k, b_4 = l, \frac{c_3 + c_4}{2} = m, d_3 = n, \frac{e_2 + e_3}{2} = o, f_2 = p, \&c.$ Et alternorum $k, m, o, q, \&c.$ Coefficientes orientur ex multiplicatione terminorum hujus Progressionis in se

$1 \times x - OA_4 \times x - OA_5 \times x - OA_3 \times x - OA_6 \times x - OA_2 \times x - OA_7 \times x - OA \times x - OA_8 \&c.$
Et reliquorum Coefficientes ex multiplicatione horum per terminos hujus Progressionis

$$x - \frac{+OA_4 + OA_5}{2}, x - \frac{+OA_3 + OA_6}{2}, x - \frac{+OA_2 + OA_7}{2}, x - \frac{+OA + OA_8}{2}, \&c.$$

Hoc est, erit $k + x - \frac{+OA_4 + OA_5}{2} \times l + x^2 - OA_4 + OA_5 x + OA_4 \times OA_5 \times m, \&c.$
Ordinatim applicata PQ,

$$\text{vel } PQ = k + \frac{x \times l}{-\frac{1}{2}OA_4 - OA_4 - OA_5} + \frac{x \times m}{-OA_4 - OA_5 - \frac{1}{2}OA_3 - \frac{1}{2}OA_6} + \dots + x \times n \&c.$$

$$\text{Sive dic } x - \frac{+OA_4 + OA_5}{2} = \pi, \quad x - OA_4 \times x - OA_5 = \rho,$$

$$\rho \times x - \frac{+OA_3 + OA_6}{2} = \sigma, \quad \rho \times x - OA_3 \times x - OA_6 = \tau,$$

$$\tau \times x - \frac{+OA_2 + OA_7}{2} = \upsilon, \quad \tau \times x - OA_2 \times x - OA_7 = \phi,$$

$$\phi \times x - \frac{+OA + OA_8}{2} = \chi, \quad \phi \times x - OA \times x - OA_8 = \psi,$$

$$\text{Et erit } k + \pi l + \rho m + \sigma n + \tau o + \upsilon p + \phi q + \chi r + \psi s = PQ.$$

PROP. V.

Datis aliquot terminis seriei cujuscunque ad data intervalla dispositis, invenire terminum quemvis intermedi-um quamproxime.

Ad rectam positione datam erigantur termini dati in dato angulo, interpositis datis intervallis, & per eorum puncta extrema, per Propositiones præcedentes, ducatur linea Curva generis Parabolici. Hac enim continget terminos omnes intermedios per seriem totam.

PROP.

P R O P. VI.

Figuram quamcunque Curvilineam quadrare quamproxime, cujus Ordinatæ aliquot inveniri possunt.

Per terminos Ordinatarum ducatur linea Curva generis Parabolici ope Propositionum præcedentium. Hæc enim figuram terminabit quæ semper quadrari potest, et cujus Area æquabitur Area figuræ propositæ quamproxime.

S C H O L I U M.

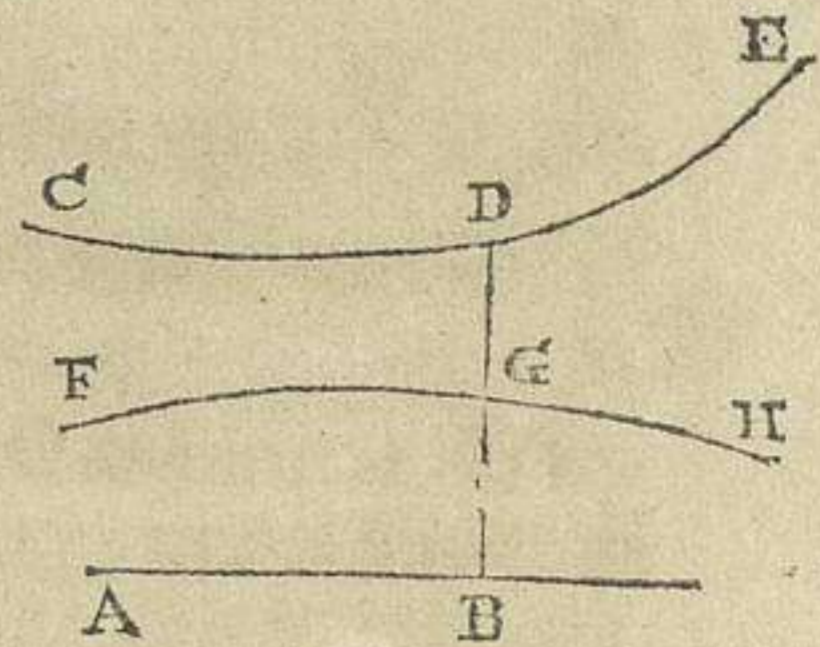
Utiles sunt hæ Propositiones ad Tabulas construendas per interpolationem Serierum, ut & ad solutiones Problematum quæ a quadraturis Curvarum dependent, præsertim si Ordinatarum intervalla & parva sint & æqualia inter se, & Regulæ computentur, & in usum reserventur pro dato quocunque numero Ordinatarum. Ut si quatuor sint Ordinatæ ad æqualia intervalla sitæ, sit A summa primæ & quartæ, B summa secundæ & tertiæ, & R intervallum inter primam & quartam, & Ordinata nova in medio omnium erit $\frac{9B-A}{16}$, & Area tota inter primam & quartam erit $\frac{A+3B}{8} R$.

Et nota quod ubi Ordinatæ stant ad æquales ab invicem distantias, sumendo summas Ordinatarum quæ ab Ordinata media hinc inde æqualiter distant, & duplum Ordinatæ mediæ, componitur Curva nova cujus Area per pauciores Ordinatas determinatur, & æqualis est Area Curvæ prioris quam invenire oportuit. Quinetiam si pro Ordinatis novis sumantur summa Ordinatæ primæ & secundæ, et summa tertiæ & quartæ, et summa quintæ & sextæ, & sic deinceps; vel si sumantur summa trium primarum Ordinatarum, & summa trium proximarum, & summa trium quæ sunt deinceps; vel si sumantur summæ quaternarum Ordinatarum, vel summæ quinarum: Area Curvæ novæ æqualis erit Area Curvæ primo propositæ. Et sic habitis Curvæ quadrandæ Ordinatis quocunque quadratura ejus ad quadraturam Curvæ alterius per pauciores Ordinatas reducetur.

Per

Per data vero puncta quotcunque non solum Curvæ lineæ generis *Parabolici*, sed etiam Curvæ aliæ innumeræ diversorum generum duci possunt.

Sunto CDE, FGH Curvæ duæ Abscissam habentes communem AB, et Ordinatas in eadem recta jacentes BD, BG; & ratio inter has Ordinatas definiatur per æquationem quamcunque. Dentur puncta quotcunque per quæ Curva CDE transire debet, & per æquationem illam dabuntur puncta totidem nova per quæ Curva FGH transibit. Per Propositiones superiores describatur Curva FGH generis *Parabolici* quæ per puncta illa omnia nova transeat, & per æquationem eandem dabitur Curva CDE quæ per puncta omnia primo data transibit.



F I N I S.



T A B U L A

CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ CUM ELLIPSI ET HYPERBOLA COMPARARI POSSUNT.

Sit jam aGD vel PGD vel GDS Sectio Conica cujus Area ad Quadraturam Curvæ propositæ requiritur, sitq; ejus Centrum A, Axis Ka, Vertex a, Semiaxis conjugatus AP, datum Abfcisæ principium A vel a vel α , Abfcisæ AB vel aB vel $\alpha B = x$, Ordinata rectangula BD = v , et Area ABDP vel aBDG vel $\alpha B D G = s$, existente αG Ordinata ad punctum α . Jungantur KD, AD, aD; ducatur Tangens DT occurrens Abfcisæ AB in T, & compleatur parallelogrammum ABDO. Et siquando ad quadraturam Curvæ propositæ requiruntur Areae duarum Sectionum Conicarum, dicatur posterioris Abfcisæ ξ , Ordinata r , et Area σ . Sit autem \div differentia duarum quantitatum ubi incertum est utrum posterior de priori an prior de posteriori subduci debeat. Et in Forma sexta scribatur p pro $\sqrt{ff - 4eg}$.

CURVARUM FORMÆ	SECTIONIS CONICÆ			CURVARUM AREAÆ	
	Abfcisæ	Ordinata			
I.	1	$z^\eta = x$	$\frac{d}{e+fx} = v$	$\frac{1}{\eta} s = t = \frac{\alpha GDB}{\eta}$. Fig. 1.	
	2	$z^\eta = x$	$\frac{d}{e+fx} = v$	$\frac{d}{\eta f} z^\eta - \frac{e}{\eta f} s = t$.	
	3	$z^\eta = x$	$\frac{d}{e+fx} = v$	$\frac{d}{2\eta f} z^{2\eta} - \frac{de}{\eta f^2} z^\eta + \frac{e^2}{\eta f^2} s = t$.	
II.	1	$\sqrt{\frac{d}{e+fx^\eta}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f} x^2} = v$	$\frac{2xv \div 4s}{\eta} = t = \frac{4}{\eta} ADGa$. Fig. 3.4.	
	2	$\sqrt{\frac{d}{e+fx^\eta}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f} x^2} = v$	$\frac{2d}{\eta f} z^{\frac{1}{2}\eta} + \frac{4es - 2cxv}{\eta f} = t$.	
	3	$\sqrt{\frac{d}{e+fx^\eta}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f} x^2} = v$	$\frac{2d}{3\eta f} z^{\frac{3}{2}\eta} - \frac{2de}{\eta f^2} z^{\frac{1}{2}\eta} + \frac{2e^2xv - 4e^2s}{\eta f^2} = t$.	
III.	1	$\frac{1}{z^\eta} = x^2$	$\sqrt{f + ex^2} = v$	$\frac{4de}{\eta f} \times \frac{v^3}{2ex} - s = t = \frac{4de}{\eta f}$ in aGDT, vel in APDB \div TDB Fig. 2.3.4.	
	vel sic	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{8de^2}{\eta f^2} \times s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{4e} + \frac{f^2v}{4e^2x} = t = \frac{8de^2}{\eta f^2}$ in aGDA + $\frac{f^2v}{4e^2x}$ Fig. 3.4.	
	2	$\frac{1}{z^\eta} = x^2$	$\sqrt{f + ex^2} = v$	$-\frac{2d}{\eta} s = t = \frac{2d}{\eta} APDB$ seu $\frac{2d}{\eta} aGDB$. Fig. 2.3.4.	
	vel sic	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{4de}{\eta f} \times s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{2e} = t = \frac{4de}{\eta f} \times aGDK$. Fig. 3.4.	
3	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$-\frac{d}{\eta} s = t = \frac{d}{\eta} \times aGDB$ vel BDPK . Fig. 4.		
4	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{3dfs - 2dv^3}{6\eta e} = t$.		
IV.	1	$\frac{1}{z^\eta} = x^2$	$\sqrt{f + ex^2} = v$	$\frac{4d}{\eta f} \times \frac{1}{2}xv \div s = t = \frac{4d}{\eta f}$ in PAD vel in aGDA . Fig. 2.3.4.	
	vel sic	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{8de}{\eta f^2} \times s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{4e} = t = \frac{8de}{\eta f^2}$ in aGDA . Fig. 3.4.	
	2	$\frac{1}{z^\eta} = x^2$	$\sqrt{f + ex^2} = v$	$\frac{2d}{\eta e} \times s - xv = t = \frac{2d}{\eta e}$ in POD vel in AODGa . Fig. 2.3.4.	
	vel sic	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{4d}{\eta f} \times \frac{1}{2}xv \div s = t = \frac{4d}{\eta f}$ in aDGa . Fig. 3.4.	
3	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{d}{\eta e} \times 3s \div 2xv = t = \frac{d}{\eta e}$ in aDGa \div ΔaDB . Fig. 3.4.		
4	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{10dfxv - 15dfs - 2dex^2v}{6\eta e^2} = t$		

Iohan. Senex sculp!

F. B. I.

SECRET

BIBLIOTECA
DEL
SECRETARÍO DE ESTADO

RESIDUUM TABULÆ CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ CUM ELLIPSI ET HYPERBOLA COMPARARI POSSUNT

CURVARUM FORMÆ	SECTIONIS CONICÆ		CURVARUM AREA			
	Abfcissa	Ordinata				
V	$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$ vel sic	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{g} + \frac{f^2-4eg}{4g^2}x^2} = v$	$\frac{xv-2s}{n} = t$		
		$\sqrt{\frac{dz^{2n}}{e+fz^n+gz^{2n}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{e} + \frac{f^2-4eg}{4e^2}x^2} = v$	$\frac{2s-xv}{n} = t$		
2	$\frac{dz^{2n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{g} + \frac{f^2-4eg}{4g^2}x^2} = v$	$\frac{d\sigma + 2fs - fxv}{2ng} = t$		
		$fz^n + gz^{2n} = \xi$ $\frac{1}{e+\xi} = \gamma$	$\frac{1}{e+\xi} = \gamma$			
VI	$\frac{dz^{2n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{2dg}{f-p+2gz^n}} = x$	$\sqrt{d + \frac{f+p}{2g}x^2} = v$	$\frac{2xv-4s-2\xi r+4\sigma}{np} = t$		
		$\sqrt{\frac{2dg}{f+p+2gz^n}} = \xi$	$\sqrt{d + \frac{f-p}{2g}\xi^2} = \gamma$			
2	$\frac{dz^{2n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{2dez^n}{fz^n-pz^n+2e}} = x$	$\sqrt{d + \frac{f+p}{2e}x^2} = v$	$\frac{4s-2xv-4\sigma+2\xi r}{np} = t$		
		$\sqrt{\frac{2dez^n}{fz^n+pz^n+2e}} = \xi$	$\sqrt{d + \frac{f-p}{2e}\xi^2} = \gamma$			
VII	1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$ $\frac{1}{z^n} = \xi$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$ $\sqrt{g+f\xi+e\xi^2} = \gamma$	$\frac{4de^2\xi r + 2defr - 2dfgxv + 4degv - 8de^2\sigma + 4dfgs}{4neg - \eta ff} = t$	
	2	$dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{d}{n}s = t = \frac{d}{n} \times \alpha GDB$. Fig. 2.3.4.	
	3	$dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{d}{3ng}v^3 - \frac{df}{2ng}s = t$	
	4	$dz^{3n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{6dgx-5df}{24ng^2}v^3 + \frac{5df^2-4deg}{16ng^2}s = t$	
VIII	1	$\frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{8dgs-4dgxv-2dfv}{4neg-\eta f^2} = t = \frac{8dg}{4neg-\eta f^2} \times \alpha GDB \pm \Delta DBA$. Fig. 2.4.	
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{-4dfs+2dfxv+4dev}{4neg-\eta f^2} = t$	
	3	$\frac{dz^{3n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{3dffs-2dffxv-2defv}{4deg^2+\eta f^2g} = t$	
	4	$\frac{dz^{4n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{36defg^2s+8deg^2x^2v+10dffxv+10deffv}{-15df^2s-2df^2xv-28defg^2xv-16de^2g^2v} = t$	
IX	1	$\frac{dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{df}{h} + \frac{eh-fg}{h}x^2} = v$	$\frac{4fgs-2fgxv+2df\frac{v}{x}}{\eta fh} = t$	
	2	$\frac{dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{df}{h} + \frac{eh-fg}{h}x^2} = v$	$\frac{4eghs-2eghxv+\frac{2}{3}dh\frac{v^3}{x^3}-2dfg\frac{v}{x}}{\eta fh^2} = t$	
X	1	$\frac{dz^{n-1}}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{df}{h} + \frac{eh-fg}{h}x^2} = v$	$\frac{2xv-4s}{\eta f} = t = \frac{4}{\eta f} \alpha DGA$. Fig. 3.4.	
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{df}{h} + \frac{eh-fg}{h}x^2} = v$	$\frac{4gs-2gxv+2d\frac{v}{x}}{\eta fh} = t$	
XI	1	$dz^{-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} = y$	$\sqrt{g+hz^n} = x$ $\sqrt{h+gz^{-n}} = \xi$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h} + \frac{f}{h}x^2} = v$ $\sqrt{\frac{fg-eh}{g} + \frac{e}{g}\xi^2} = \gamma$	$\frac{2dxv^3z^{-n}-4dfs-4de\sigma}{\eta fg-\eta eh} = t$	
	2	$dz^{n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} = y$	$\sqrt{g+hz^n} = x$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h} + \frac{f}{h}x^2} = v$	$\frac{2d}{\eta h}s = t$	
	3	$dz^{2n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} = y$	$\sqrt{g+hz^n} = x$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h} + \frac{f}{h}x^2} = v$	$\frac{dhxv^3-\frac{3dfg}{\eta fh}s}{\eta fh^2} = t$	

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. ISIDORO

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

Observed
BIB

Núm.

Observed
BIB

o de Marina
BIBLIOTECA

NEW FOM

ANALYS



Observatorio de la Armada
BIBLIOTECA

00237

M.E.C.D. 2017