SOLDEVILLA

CURSO
ELEMENTAL
DE
TOPOGRAFIA

CURSO
ELEMENTAL DE TOPOGRAFÍA.

OBRAS DE LOS SEÑORES SOLDEVILLA.

	PRECIOS. Madrid.	PRECIOS. Provincias.
Tratado de las Acotaciones. (2.ª edicion.)—Un tomo en 4.º en rústica. Consta de 53 páginas y 8 láminas con 106 figuras, hechas con todo esmero. ...	14	16
Tratado de Topografía (2.ª edicion.)—Dos tomos en 4.º en rústica, cada uno con su atlas por separado, compuestos de láminas perfectamente dibujadas y litografiadas, á saber:		
Tomo 1.º Planimetría.—Consta de 747 páginas y un atlas que contiene 56 láminas con 751 figuras....................................	80	84
Tomo 2.º Nivelacion.—Consta de 354 páginas y un atlas que contiene 24 láminas y 255 figuras	50	54
Curso elemental de Topografía. (2.ª edicion.)—Un tomo en 4.º que consta de 286 páginas y 14 láminas con 292 figuras perfectamente dibujadas y litografiadas....................................	34	36

Todas estas obras se hallan de venta en las principales librerías y en casa de los autores, calle de Toledo, núm. 59, cuarto principal, Academia preparatoria para todas las carreras especiales civiles y militares. Se sirven los pedidos de provincias á vuelta de correo, remitiendo el importe anticipado en letras ó libranzas sobre correos, á favor de D. Isidro Giol y Soldevilla.

NOTAS.

1.ª Un número encerrado entre paréntesis, así (25), da á conocer que la materia de que se trata está fundada en lo dicho en el párrafo 25, el que se deberá tener presente para la mejor inteligencia.

2.ª Las citas de Matemáticas se refieren á los tratados y ediciones siguientes de la obra elemental del Sr. D. Juan Cortázar, y en su defecto á cualquiera de las posteriores:

Aritmética, 19.ª edicion.
Álgebra, 16.ª edicion.
Geometría, 13.ª edicion.
Trigonometría, 10.ª edicion.

3.ª Las citas de Acotaciones se refieren á nuestro Tratado publicado en 1861.

4.ª Los que necesiten estudiar algunas teorías con mayor latitud, podrán consultar el Tratado extenso que hemos publicado, en el cual se hallan tambien los desarrollos de muchos cálculos, que en una obra como la presente no puede hacerse más que indicarlos.

5.ª Los párrafos que llevan esta señal * pueden suprimirse en una primera lectura.

CURSO ELEMENTAL

DE

TOPOGRAFÍA,

POR EL ILMO. SEÑOR

DON ISIDRO GIOL Y SOLDEVILLA,

Caballero de la Cruz de primera clase de la órden civil de María Victoria, y Vocal de la Asamblea de la misma, Caballero de la Real y Militar órden de San Fernando, Jefe honorario de Administracion de primera clase, Director de Caminos vecinales y Canales de riego, Profesor de Matemáticas, Arquitectura, Dibujo y Comercio, Vocal de uno de los Tribunales de oposiciones á las cátedras de Matemáticas vacantes en los Institutos, y Catedrático libre de Acotaciones y Topografía en el Instituto de San Isidro de Madrid,

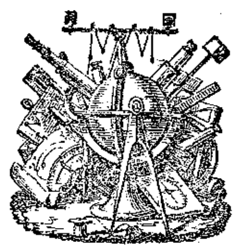
Y

DON JOSÉ GOYANES Y SOLDEVILLA,

Director de Caminos vecinales y Canales de riego.

Obra declarada de texto en primer lugar en todas las ternas, por el Real Consejo de Instruccion pública, y adoptada en casi todas las Escuelas especiales facultativas, civiles y militares.

SEGUNDA EDICION.



MADRID

CÁRLOS BAILLY-BAILLIERE

Plaza de Topete (antes de Santa Ana), número 10.

1873.

PRÓLOGO.

En la primera edicion de esta obra poníamos el siguiente:

«Cuando publicamos nuestro extenso *Tratado de Topografía*, á pesar del esmero con que nos dedicamos á su ejecucion, lo hicimos con aquella desconfianza propia de los que escriben por primera vez, y tienen que competir con un gran número de obras pertenecientes al mismo objeto y que circulan con general aceptacion. Necesario era por lo tanto hacer un trabajo que, por su originalidad en el método, su sencillez y claridad, á la par que su extension y rigor, pudiera obtener del público una marcada preferencia. Y así ha sucedido en efecto; la favorable acogida que le ha dispensado y que acreditan las innumerables cartas de personas dignísimas pertenecientes á todas las facultades, y que obran en nuestro poder, su adopcion expontánea como texto en Establecimientos del Gobierno, donde se estudia con toda extension y profundidad esta ciencia, y que por su brillante organizacion figuran como los primeros, los elogios que de él han hecho pública y privadamente distinguidos y laboriosos profesores, dan á conocer que hemos conseguido el objeto que nos propusimos.

»Expondremos solamente á continuacion, como una de las pruebas favorables de la opinion pública, los artículos que los ilustrados redactores del periódico *La Revista de Obras Públicas*, Ingenieros de caminos y canales, han publicado en sus columnas.

»En el número 16 del 15 de Agosto de 1864, con motivo de la publicacion del tomo primero, se lee lo siguiente:

«Tratado de Topografía, por D. Isidro Giol y Soldevilla, y D. José Goyanes y Soldevilla.—Tomo I.—Planimetría.

»En anteriores números hemos anunciado á nuestros lectores la publicacion de esta obra, cuyo primer tomo acaba de terminarse. Constituye un tratado completo de planimetría, ilustrado con un atlas de 56 láminas perfectamente dibujadas y litografiadas; examinándose en las 747 páginas del Tratado, con gran extension, claridad y buen método todas las materias relativas á esta importante parte de la Topografía Han puesto sobre todo sus autores especial cuidado en lo que comprende el conocimiento y uso de los instrumentos, entrando en detalles que no se encuentran por lo general aun en los tratados mas extensos de Topografía hasta el dia publicados. El de los señores Giol y Goyanes está á la altura de su objeto, y no olvida ninguno de los adelantos hechos en la materia, siendo el mas completo de todos los que conocemos. Por esta razon no vacilamos en recomendarlo á nuestros lectores, que hallarán en él cuanto puedan necesitar para la resolucion de los variados problemas topográficos, tan interesantes hoy por la importancia que van adquiriendo nuestras obras públicas, y la necesidad de la formacion del Catastro.

»Para dar una idea del método y de la extension con que están tratadas todas las diferentes materias, insertamos á continuacion una reseña de los 20 capítulos que comprende el primer tomo:

»Cap. 1.º Nociones de Trigonometría rectilínea.—2.º Definicion de la Topografía. Del globo terrestre y líneas principales que en él se consideran.—3.º De la superficie terrestre y de su representacion geométrica.—4.º Nociones de Optica. Anteojos.—5.º De los instrumentos en general y de sus partes principales.—6.º Instrumentos angulares. Brújula. Declinatoria.—7.º Plancheta.—8.º Escuadra.—9.º Grafómetro. Pantómetra.—10. Teodolito. Círculo repetidor.—11. Goniómetros y Goniógrafos fundados en las propiedades de la luz.—12. Construccion de los ángulos obtenidos con los Goniómetros.—13. Alineaciones. Trazado y medicion de las líneas en el terreno.—14. Instrumentos para la medida indirecta de las distancias.—15. Levantamiento de los planos topográficos. Problemas preliminares.—16. Levantamiento de los planos de terrenos de corta extension.—17. Levantamiento de los planos de terrenos de mediana extension.—18. Levantamiento de los planos de terrenos de grande extension. Triangulaciones.—19. Cálculo de las superficies.—20. Planímetros.

»Concluiremos felicitando á los Sres. Giol y Goyanes por su excelente trabajo, que sin duda encontrará muy buena acogida entre todos los que tienen, por su profesion, que ocuparse de las cuestiones topográficas, y excitándoles á completarlo con el segundo tomo, que contendrá el Tratado de Nivelacion.»

En el número 16 del 15 de Agosto de 1865, con motivo de la publicacion del tomo segundo y último, despues de exponer el título de la obra, dice así:

«En el número 15 de Agosto de 1864 de nuestra Revista, dimos noticia de la publicacion del tomo primero de la obra, cuyo título encabeza estas líneas, recomendándola eficazmente á nuestros lectores. El tomo segundo, que comprende los conocimientos de topografía relativos á la nivelacion, es un extenso tratado de esta clase de operaciones, y completa y cierra dignamente la obra de los Sres. Giol y Goyanes. Haremos, como respecto del primer tomo, un ligero extracto del índice del segundo, por el cual se podrá formar idea de las materias que contiene y del órden con que están presentadas:

»Capítulo 1.º Ideas generales.—2.º Nivelacion por alturas.—Instrumentos.—3.º Problemas de nivelacion.—4.º Práctica de la nivelacion por alturas.—5.º Perfiles.—6.º Trazado de las curvas horizontales.—7.º Nivelacion por pendientes.—8.º Nivelacion barométrica.—9.º Medida de alturas ó altimetría.—10. Representacion del terreno.—11. Copia y reduccion de planos y perfiles.

»Acompaña al Tratado un atlas de 24 láminas, donde se representa con suma claridad y detalle en 255 figuras, los instrumentos y la marcha que se sigue en las diferentes operaciones de nivelacion.

»Concluimos felicitando á los Sres. Giol y Goyanes por su excelente trabajo, que prueba una vez más su inteligencia y celo por los progresos científicos.»

«Otros periódicos, entre ellos *El Diario Español*, en su número 3846 del 10 de Diciembre de 1864, han dedicado tambien largos artículos al elogio de nuestra obra, y por todos cuantos la examinan y estudian es considerada en general como *obra de consulta*, á causa de su mucha extension y de la multitud de conocimientos que encierra. Esta circunstancia es causa por otra parte, de que no pueda servir de texto en la mayor parte de los Establecimientos públicos y particulares, donde solo se explica un curso limitado de Topografía; lo que nos ha obligado á ofrecer al público el presente *Curso elemental*, con el indicado objeto, el que por las novedades que encierra y el nuevo plan á que hemos tenido que sujetarle para abrazar en un corto volúmen todos los conocimientos más esenciales de la Topografía, es una verdadera obra nueva, y no un simple compendio de nuestra obra grande, como á primera vista pudiera creerse.

»Esperamos confiadamente que este nuevo trabajo alcanzará del público el favor que el primero, quedando así recompensados cumplidamente nuestros desvelos.»

En esta segunda edicion, se han hecho varias adiciones y correcciones, para corresponder al favor que nos ha dispensado el público ilustrado, el cual no invocábamos en vano en nuestra primera edicion. La importancia de esta obra es de tal naturaleza, que se recomienda por sí misma, y el Gobierno nos dispensó la honra de declararla de texto en primer lugar, para recompensarnos el servicio prestado á la pátria llenando un vacío que existia indudablemente, con la falta de una obra especial de Topografía, escrita con arreglo á los adelantos del dia, en una época en que esta clase de estudios es indispensable para multitud de profesiones, y de tan inmensa utilidad, pues es evidente, que en la imperiosa necesidad de la formacion del Catastro y del fomento de las Obras públicas, como son los ferro-carriles, los puertos y carreteras de todas clases, los caminos vecinales, los canales de navegacion y de riego y las conducciones de aguas potables, todas estas importantes obras tienen por base principal la *Topografía*, en las dos partes de que se compone, *Planimetría* y *Nivelacion*, y es indudable, que dichas obras son los prodigiosos agentes de la industria, de la agricultura y del comercio, estando en razon de su desarrollo el grado de la riqueza pública y particular, y por consiguiente el engrandecimiento de las naciones.

Para que este *Curso elemental de Topografía* tenga completa aplicacion á la *Agrimensura*, que es tambien punto tan esencial, llamamos la atencion de nuestros lectores sobre los dos capítulos II y III del libro V que tratan de la *Transformacion y division de los polígonos*, cuyas operaciones tienen inmensas aplicaciones en la *Agrimensura* y se hallan expuestas de una manera general y sencilla, como no se encuentran en ninguna otra obra.

LIBRO PRIMERO.

Nociones preliminares.

CAPITULO PRIMERO.

Definiciones é ideas generales

1. **Definicion de la Topografía** —Se llama *Topografía* á la ciencia que se ocupa de la representacion geométrica de una parte de la superficie terrestre.

Cuando se trata de representar una porcion muy extensa de esta superficie, recibe el nombre de *Geodesia* la ciencia que de ello se ocupa; el de *Geomorfia* cuando comprende una provincia ó un estado cualquiera; y de *Navegacion* si representa una porcion de la superficie del globo cubierta por las aguas, y sirve para determinar el punto que en un momento dado ocupa un buque y el rumbo que ha de tomar para dirigirse á otro punto determinado.

La Topografía enseña á determinar las posiciones relativas de varios puntos de la superficie de la tierra, á calcular las distancias que entre ellos median y á representarlos sobre un plano en posiciones análogas á las que realmente ocupan.

2. **Figura y dimensiones principales del globo terrestre** —La tierra, convexa como lo acredita la sombra que proyecta sobre la luna en los eclipses de este astro, la observacion de un buque que se aleja de la costa por la ocultacion sucesiva del casco, los palos con sus velas y los topes, ó desde el buque en que los últimos objetos que dejan de percibirse son las veletas de las torres y las cimas de las montañas, y lo han confirmado hasta la evidencia los viajes marítimos, es un cuerpo redondo, aislado en el espacio y dotado de un *movimiento de rotacion*, en virtud del cual afecta la forma de un *elipsóide de revolucion, aplanado*

Las observaciones astronómicas de Huyghens y Newton, y las mediciones ejecutadas por otros muchos sábios, entre los que se cuentan los españoles D. Jorge Juan y D. Antonio Ulloa, han determinado las siguientes dimensiones de los ejes que corresponden á la elipse generatriz de nuestro planeta:

Rádio ó semi-eje mayor del elipsóide .... 6376159m.
Rádio ó semi-eje menor.................. 6356234m

El aplanamiento del globo, que es el cociente que resulta de dividir por el semi-eje mayor la diferencia de ambos rádios, es $\frac{1}{320}$, ó próximamente de $\frac{1}{309}$, como se ha empleado con éxito satisfactorio en la formacion de la carta de Francia.

3. **Forma que se atribuye á la tierra en las aplicaciones** —A pesar del aplanamiento del globo terrestre, no hay inconveniente en considerarle como *esférico*, toda vez que el cálculo ha dado á conocer que la separacion del *círculo osculador* de uno de sus puntos es próximamente de 0,mm04 á la distancia de un miriámetro del punto de contacto. El error que de esta consideracion pueda resultar es de todo punto inapreciable en las aplicaciones ordinarias de la Topografía.

Se ha adoptado para rádio de esta esfera el término medio 6366200m entre los semi-ejes del elipsóide (2).

4. Las desigualdades que presenta la superficie terrestre no influyen en la forma general que afecta: puesto que si tratásemos de representar sobre un globo de 1 m de rádio la altura del Dawalagiri, que es el más elevado de los picos de Himalaya en Asia, y la mayor de las alturas conocidas, llegando á tener cerca de 8000 metros, la proporcion

$$6366200 : 8000 :: 1 : x = 0{,}00126,$$

nos daría á conocer que desigualdades que apenas exceden de milímetro y cuarto, no alteran la forma general de una esfera que tiene un metro de rádio; sucediendo una cosa análoga con la superficie de nuestro globo.

5. **Secciones y líneas principales que se consideran en el globo terrestre.**—El diámetro NS (fig. 1ª) alrededor del cual gira la tierra en su movimiento diurno, se llama *eje de la tierra*, y es el eje menor del elipsóide. Su punto medio C es el centro de la misma, y los extremos N y S son los *polos*; uno de los cuales, el N, recibe el nombre de polo *norte* ó *boreal*, y el otro S, el de polo *sur* ó *austral*.

6. Toda seccion NMSQ causada por un plano que pasa por el eje es un círculo máximo, que se llama *meridiano* ó *seccion meridiana*. El plano secante es llamado *plano meridiano*.

7. Se llama *ecuador* al círculo máximo OMEQ perpendicular al eje de la tierra y que pasa por su centro C. Cuando el plano secante es perpendicular á NS en otro punto cualquiera, la seccion recibe el nombre de *paralelo* por serlo al ecuador. Este último divide el globo en dos partes iguales llamadas *hemisferios*, que se distinguen entre sí por el nombre de su polo respectivo.

8. *Horizonte sensible* ó *aparente* de un punto A (fig 2) de la superficie terrestre, es el plano tangente en él á la misma superficie. *Horizonte racional* es la seccion BDG producida por un plano que pasa por el centro C y es paralelo al horizonte sensible.

9 **Línea vertical** —Se da el nombre de *vertical* de un punto cualquiera m (fig. 2) á la recta mC, indefinidamente prolongada, que este punto determina con el centro de la tierra. El extremo Z de la vertical es el *zenit* de todos los puntos de la vertical considerada, y el N′ el *nadir* de los mismos

Por un punto del espacio sólo puede pasar una vertical; pues cualquiera otra que se considerase tendria dos puntos comunes con la primera.

10 Dos verticales cualesquiera V, V′ (fig. 3), cortándose en el centro de la tierra, determinan un plano, cuya interseccion con la superficie terrestre es una circunferencia máxima. El desarrollo del arco PSP′ de esta circunferencia, comprendido entre dichas verticales, se llama la *distancia geográfica* entre los puntos P y P′, y es el arco correspondiente al ángulo de las verticales

11. Aun cuando las verticales todas concurren sensiblemente, se consideran como paralelas, atendiendo á la gran distancia de su punto de encuentro, relativamente á lo que distan entre sí en los límites que comprenden las operaciones topográficas. Para hacer ver que es bastante grande la distancia que entre dos puntos de la superficie terrestre debe mediar para que el ángulo a de sus verticales alcance á valer 1′ por ejemplo, llamando x á la distancia PP′ que buscamos, y R al rádio terrestre, se tendrá en el triángulo isósceles PCP′ la proporcion

$$\text{sen } b : \text{sen. } a :: \text{R} : x = \frac{\text{R sen } a}{\text{sen. } b} \qquad [1];$$

y sustituyendo por R su valor 6366200 (3), por sen. a el 0,0002909 que dan las tablas de líneas trigonométricas naturales, y observando que se tiene

$$\text{sen. } b = \text{sen } \frac{180^\circ - a}{2} = \text{sen } \frac{180^\circ - 1'}{2} = 0.9999999\,,$$

ó próximamente sen. $b = 1$, sustituyendo en la fórmula [1] resultará

$$x = 6366200 \times 0.0002909 = 1851,^{\text{m}}93.$$

Empleando el cálculo logarítmico se tendría:

$$\log\ x = \log.\ 6366200 + \log.\ \text{sen. } 1' - 10 = 3,2676063;$$

que corresponde á un valor $x = 1852$ m

12 **Determinacion de la vertical —Perpendículo —Plomada** —La línea vertical se determina en la práctica por la direccion que toma un cordon c (fig 4) sujeto por uno de sus extremos y unido por el

otro á un cono de metal *p*, que atraido hácia el centro de la tierra por la accion de la gravedad hace tomar al cordon la posicion de la vertical que tiende á recorrer en su caida. El sencillo aparato que el cordon y el peso constituyen se llama propiamente *perpendículo;* y cuando le acompaña un cilindro *n* (fig. 5), llamado *nuez*, cuya altura es igual al diámetro de la pesa *p*, recibe el nombre de *plomada* Con frecuencia se suele llamar tambien plomada al perpendículo.

13. **Plano vertical**. —Todo plano que pasa por una vertical (9) se llama *plano vertical*.

14. Por una vertical pueden pasar infinitos planos, que todos serán verticales (13).

15 **Determinacion del plano vertical**. —Un plano vertical se determina:

1.º *Por una vertical y un punto fuera de ella.*—Porque el plano que estos elementos geométricos determinan, es vertical (13).

2.º *Por una vertical y otra recta cualquiera que la corte*.—Porque el plano de ambas rectas es tambien vertical (13).

3.º *Por dos verticales cualesquiera* —(10).

16. El plano vertical que pasa por un punto dado *a* (fig. 6) y por la vertical marcada por la plomada *bc*, se determina en la práctica dirigiendo una visual *da* de manera que el cordon de la plomada cubra el punto *a*. La visual determina con la vertical *bc* el plano pedido (15—2.º)

El plano vertical que pasa por dos puntos dados *a*, *e* se determina haciendo pasar el cordon de la plomada por uno de ellos *e*, y queda reducido al caso anterior. Otro perpendículo que quede cubierto por el primero, constituirá una nueva vertical del mismo plano; en el que tambien se hallará otra recta cualquiera ó un punto, que queden igualmente cubiertos.

17. *La interseccion de dos planos verticales es una vertical*.—Porque pasando ambos planos por el centro de la tierra (13), su interseccion pasa tambien por este punto, y es por lo tanto vertical (9).

18. **Línea horizontal**.—Toda recta *ab*, *cd* (fig 2) perpendicular á una vertical se llama *horizontal*.

19. **Plano horizontal**.—El plano que las horizontales *ab*, *cd*.... (fig. 2) de un mismo punto determinan, perpendicular á la vertical del mismo, se llama *plano horizontal*. El horizonte sensible y todos los planos paralelos á él son tambien planos horizontales.

20. Para la determinacion del plano horizontal, basta tener dos rectas horizontales que se corten.

21. **Rectas y planos inclinados**.—*Recta inclinada y plano inclinado* son estos elementos geométricos cuando no son horizontales ni verticales.

22. **Determinacion de la horizontal**.—Una recta horizontal se determina en la práctica con auxilio de los instrumentos llamados *niveles*.

23. **Nivel de perpendículo ó de albañil**.—Se compone este instrumento de dos reglas de madera exactamente iguales *ab*, *ac* (fig 7) en-

sambladas formando un ángulo, que generalmente es recto, y provistas de cantoneras metálicas en el vértice a y en los extremos b y c. Un travesaño ef paralelo á la recta bc que determinan las cantoneras extremas, está dividido en su punto medio por una hendidura n, y del punto m pende el cordon de un perpendículo p. Cuando el cordon de este perpendículo coincide con la señal n, la bisectriz mn del ángulo bac es vertical, y la recta bc, perpendicular á ella por la propiedad del triángulo isósceles, ocupa la posicion horizontal.

24. Para marcar la línea de fé se coloca el instrumento sobre una regla inclinada r (fig. 8), señalando el punto d' en que el cordon toca al travesaño ef. Invirtiendo despues el instrumento de modo que cambie la posicion de las cantoneras b, c, con lo que se hallará en las mismas condiciones que si hubiese girado alrededor de as, perpendicular á bc, el punto d' irá á ocupar la posicion d'' simétrica de la primera con relacion al eje del giro; marcando el punto que ocupa el cordon en el travesaño y dividiendo en dos partes iguales la recta $d'\,d''$, el punto medio d así obtenido marcará la verdadera línea de fé.

En efecto, concibiendo la horizontal h, el ángulo n que forma con la regla será igual al m, por ser as perpendicular á bc y h á la vertical ap (17). Haciendo entónces girar á la regla r hasta que el ángulo m se haga nulo, su igual n se anulará tambien y la regla ocupará la posicion horizontal.

25. **Nivel de aire.**—Este nivel, llamado tambien de ampolla ó de burbuja y debido á Thévenot, se compone de un tubo ab (fig. 9), de longitud variable y ligeramente convexo en su parte superior, lleno de agua ó de alcohol, á excepcion de una pequeña porcion m ocupada por una ampolla ó burbuja de aire, y otras veces por el vapor del mismo líquido, que se ha hecho hervir á la lámpara dentro del tubo, y que al disminuir de volúmen despues de cerrado este, ha ocupado el vacío producido por el enfriamiento del líquido. Son preferibles los niveles de alcohol, por resistir sin congelarse las temperaturas más bajas de nuestros climas. El líquido está generalmente coloreado para que se destaque más la burbuja.

El tubo que hemos descrito está encerrado en una guarnicion metálica ab (fig. 10), descubierta por su parte superior, y fija por medio de los soportes s á una regla metálica AB perfectamente plana.

26. **Nivel esférico.**—El nivel de aire, cuando su tubo es un casquete esférico, y señala la posicion horizontal de su base por hallarse la ampolla en el punto más distante de ella, se llama *nivel esférico*.

27. **Teoría del instrumento y señalamiento de los índices.** — Se funda el nivel de aire en la propiedad física que poseen dos fluidos de densidades diferentes contenidos en una misma capacidad de colocarse de modo que el menos denso ocupa la parte superior, y en la propiedad geométrica de que la tangente á un arco vertical en su punto más elevado es horizontal.

Disponiendo el tubo sobre una regla inclinada AC (fig. 11), la ampolla ocupará la parte superior n' en virtud del primer principio, y por el segundo la tangente t á su punto medio será horizontal. La normal b del punto n' será vertical y por consiguiente perpendicular á la horizontal AB que se concibe tirada por el punto A. Marcando el n' ó mejor los extremos de la burbuja, é invirtiendo los extremos del tubo, lo que equivaldrá á haberle hecho girar alrededor de la normal r á su punto medio m, la señal n' irá á parar á n; marcando el punto medio de la parte ocupada por la burbuja y dividiendo en dos partes iguales el arco $n'n$ se tendrá conocida la verdadera posicion del punto medio del tubo. Haciendo girar despues á la regla AC hasta que el centro de la burbuja ocupe el punto m así obtenido, el ángulo c se habrá hecho nulo, así como su igual s, y la regla AC en que el tubo se apoya será horizontal.

28. Los dos puntos n', n, ó los cuatro que resultarian de haber marcado los extremos de la burbuja en ambas posiciones, sirven para fijar la posicion de los índices i, i (fig. 10) ó las divisiones simétricas respecto del punto medio del tubo, que se hacen en él por medio de un diamante. En el uso del instrumento la regla AB estará horizontal cuando los extremos de la ampolla equidisten de los índices ó de divisiones simétricas.

29. **Límite de la curvatura del tubo.** —Un tubo perfectamente cilíndrico determinaria la posicion horizontal cuando la burbuja ocupase la generatriz superior; y se comprende que la más leve inclinacion haria marchar á la burbuja á uno de los extremos del tubo, y de aquí la dificultad de hallar en la práctica la posicion que se trata de determinar. Esta excesiva sensibilidad del instrumento desaparece por la curvatura indicada (25), que tampoco debe pasar de cierto límite. Para determinar el rádio de la curvatura del tubo, que ha de suministrar la sensibilidad que en las aplicaciones conviene dar al nivel, observaremos que el arco mn' (figura 11), á que llamaremos a, y que suponemos sea el recorrido por la burbuja para pasar de la posicion AB á la AC de la regla recorriendo el arco s igual á c, y es de $1''$, tiene un desarrollo expresado por

$$a = \frac{2\pi r}{360 \times 60 \times 60} = 0{,}000004848 \times r \qquad [2],$$

siendo π la relacion conocida 3,1416 y r el rádio de curvatura del tubo.

Despejando r se tendrá

$$r = 206265 \times a \qquad [3],$$

que da para r un valor de $61,^{m}88$ si el arco recorrido mn' es de $0,^{mm}3$.

La mayor parte de los niveles que acompañan á los instrumentos topográficos tienen un rádio menor, y sólo en instrumentos de gran precision, como los usados en los observatorios, se encuentran niveles cuyo rádio de curvatura excede de 60^{m}.

30. **Determinacion de un plano horizontal.** —Se coloca el nivel de perpendículo sobre el plano que se trata de horizontar, al cual se hace mover hasta que el nivel marque la horizontal ab (fig. 12).

Colocándole en direccion de otra recta *cd*, generalmente perpendicular á la primera, horizontándola tambien, se habrá conseguido la horizontalidad del plano (20).

Del mismo modo se emplea el nivel de aire.

31 **Propiedades de las rectas y los planos horizontales y verticales.**—La posicion vertical de una recta ó un plano es *absoluta*, toda vez que tiene que satisfacer á la condicion de pasar por el centro de la tierra, y se comprende que existen infinitas rectas y planos que no pueden satisfacerla. La horizontalidad de estos elementos geométricos es *relativa* (18 y 19) á una vertical, y de aquí el que un plano, por ejemplo, sea al mismo tiempo horizontal con respecto á una vertical determinada, é inclinado con relacion á otra vertical distante. Con el objeto de evitar la vaguedad que de estas consideraciones pudiera resultar, y ciñéndonos siempre á la corta extension que la Topografía considera en la mayor parte de los casos, llamaremos *verticales* á las rectas que sean paralelas á una vertical determinada, en lo que por otra parte no hay error de consideracion (11), y referiremos á ellas la *horizontalidad* ó la *inclinacion* (21) de las rectas y de los planos.

32. Partiendo de las definiciones que acabamos de establecer, podremos aplicar á las rectas y los planos que consideramos las propiedades geométricas de estos elementos, y establecer, entre otros, los siguientes principios de que se hace uso en la demostracion de algunos procedimientos de la Topografía, y que á su vez se demostrarian sin dificultad.

33. *Toda recta perpendicular á un plano horizontal es vertical.*

34. *Dos planos horizontales cualesquiera son paralelos.*

35. *Por un punto cualquiera del espacio puede pasar un solo plano horizontal.*

36 *Toda recta situada en un plano horizontal es horizontal.*

37 *Por una recta horizontal puede pasar un plano horizontal.*

38 *La vertical de un punto situado en un plano vertical está contenida en el plano.*

39. *Todo plano perpendicular á una horizontal es vertical.*

40. *Toda recta perpendicular á un plano vertical es horizontal.*

41. *Por un punto cualquiera de un plano inclinado ó vertical puede pasar una horizontal situada en el plano.*

42. *Corolario.—Un plano inclinado ó vertical puede contener muchas horizontales, que serán paralelas entre sí.*

43. *Dos horizontales paralelas determinan la posicion de un plano que puede ser vertical, horizontal ó inclinado.*

44. *Toda recta paralela á una recta ó á un plano horizontal es horizontal.*

45. *Corolario.—Toda recta que tiene dos puntos á igual altura de otra recta ó de un plano horizontal es horizontal.*

46 **Medida de la inclinacion de las rectas y de los planos.**—La *inclinacion* ó *pendiente* de una recta, es el ángulo que forma con su proyeccion sobre el plano horizontal que corresponde á uno de sus pun-

tos (35), el cual tiene por medida su tangente trigonométrica, que es la relacion entre el desnivel d, que existe entre dos puntos cualesquiera de la recta, y la longitud l de la proyeccion horizontal correspondiente á la recta que los une Llamando p á esta pendiente se tendrá (Acots. 25) la relacion

$$p = \frac{d}{l} \qquad [4]$$

La pendiente de un plano es la que corresponde á la línea de máxima pendiente de uno cualquiera de sus puntos.

47. **Líneas de máxima pendiente de los planos y de la superficie del terreno.**—La línea de máxima pendiente que corresponde á un punto de un plano dado de posicion, tiene las propiedades siguientes:

1.ª Es la que forma con la vertical del punto dado un ángulo menor que el correspondiente á otra recta que pase por el mismo punto en el plano Si queremos determinar en virtud de esta propiedad la línea de máxima pendiente que corresponde al punto a (fig. 13) situado en el plano P, se tirará desde un punto c de la vertical ca correspondiente al punto dado una perpendicular cb al plano, y la proyeccion ab de la vertical sobre el plano será la línea de máxima pendiente pedida (Geom. Teor. 134). Si la perpendicular cb al plano estuviese determinada de antemano, bastaria hacer pasar por uno de sus puntos c el cordon de una plomada, y unir el punto a, en que el extremo inferior de la plomada encuentra al plano, con el pié de la perpendicular.

2.ª Es perpendicular á las horizontales del plano (Acots. 41). Bastará levantar en el punto dado a la perpendicular ab á la horizontal mn del mismo (41)

3.ª Es la direccion que recorreria un punto material abandonado á su peso sobre el plano. La línea de máxima pendiente se hallaría, fundándose en esta propiedad, fijando en b el extremo del cordon de una plomada; con lo que el peso del perpendículo haría tomar al cordon la posicion ab de la línea de máxima pendiente

48. La línea de máxima pendiente de una superficie curva, como es en general la de la tierra, es la del plano tangente en este punto á la superficie (Acots. 108).

49. **Meridiana astronómica.**—Se llama *meridiana* de un punto A (fig. 2) de la superficie terrestre, á la interseccion ab del *plano meridiano* (6) y el *plano horizontal* (19) que corresponden á dicho punto.

50. **Trazado de la meridiana.**—1.º *Por la sombra arrojada.*—La meridiana se determina por la sombra mínima de las que un objeto vertical arroja sobre un plano horizontal, en cierto espacio de tiempo próximo á las doce del dia Esta sombra corresponde á la elevacion máxima del sol sobre el horizonte, ó á su paso por el meridiano Para determinarla se elige un punto a (fig. 14) situado en un plano, lo más horizontal que

sea posible y haciendo centro en él se trazan hácia el Norte varios arcos concéntricos, ó bien varias circunferencias completas: se fija despues en *a* una varilla *ab* de hierro ó de madera, á la cual se da una posicion perfectamente vertical (17) valiéndose de la plomada, con la que debe quedar cubierta en dos posiciones distintas, que determinan con la varilla dos planos verticales cuya interseccion será esta recta. Observando entonces la sombra que arroja sobre el plano, se verá que á la salida del sol se dirige al Occidente y tiene una longitud indefinida; que á medida que el sol se eleva sobre el horizonte, la sombra se dirige hácia el Este, precisamente en sentido contrario á la marcha del sol, pero sin dejar de ser occidental, y que va sucesivamente disminuyendo de longitud; que llegará un caso en que el extremo de la sombra tocará á la primera curva en un punto *n*, el cual se marcará con cuidado; despues irá pasando por las demás circunferencias, y los puntos *o*, *p* en que las corta se marcan tambien del mismo modo. Al medio dia la sombra llega como hemos dicho á tener su longitud mínima, en un momento que pasa desapercibido para el observador: despues vuelve á crecer, haciéndose oriental, y su extremo va tocando sucesivamente á las mismas circunferencias en los puntos *q*, *r*, *s*, que se tiene cuidado de marcar con la posible exactitud. Dividiendo despues cada uno de los arcos *ns*, *or*, *pq* en dos partes iguales, y uniendo los puntos de division, la recta *am* que los une será la meridiana del punto *a*.

51. 2.º *Por las proyecciones de un rayo de luz sobre un plano horizontal.*—Se dispone un plano P (fig. 15), de manera que esté perfectamente horizontal (30). Este plano debe estar provisto de un soporte *c* terminado en un disco *b* con un taladro sumamente pequeño destinado á dar paso á la luz solar, y dispuesto de manera que pueda recibirla en una posicion próximamente perpendicular á un rayo de luz al medio dia. Se determina por medio de una plomada la proyeccion *a* del taladro de la placa sobre el plano P, y desde *a* como centro se trazan en el plano varios arcos como en el caso anterior. El problema está reducido entónces á marcar los puntos *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *s*, en los cuales el rayo de luz toca sucesivamente á los arcos trazados, y unir por medio de una línea *am* los puntos medios de estos arcos.

52. Siguiendo los procedimientos indicados, se obtiene la recta *am* que se aproxima á la verdadera meridiana lo suficiente para la aplicacion que de ella se hace á la Topografía; pero no se la obtiene con exactitud, en razon á que el sol no describe en su movimiento aparente círculos paralelos al ecuador, sino arcos de eclíptica: de donde resulta que cuando las sombras son iguales, lo son tambien las alturas del sol sobre el horizonte; pero no sus distancias al meridiano, y por consiguiente tampoco lo son los ángulos que las direcciones de las sombras forman con la meridiana. Si se la quiere obtener con mayor exactitud, debe trazarse en los solsticios; porque en esta época la declinacion del sol, que va á mudar de sentido, puede considerarse como nula sin error sensible.

53. 3.º *Por el orto y ocaso del sol.*—Se fija una plomada *ab* (fig. 15), determinando su proyeccion *a* sobre un plano P dispuesto horizontal-

mente (30), así como la *n* correspondiente á una segunda plomada, que se coloca (16) en el plano vertical determinado por el cordon de la primera y por la visual dirigida por él al centro del disco solar al aparecer en su salida sobre el horizonte. Determinando del mismo modo la proyeccion *s* de otra plomada cubierta por la *ab* al ponerse el sol, la bisectriz *am* del ángulo de las rectas *an* y *as* determinará la meridiana pedida.

Esta recta se obtiene con mayor exactitud repitiendo la operacion de la mañana, y dividiendo en dos partes iguales el ángulo que la nueva direccion obtenida forma con la recta *as*. La direccion media entre ambas bisectrices obtenidas será la meridiana mejor determinada.

54. 4.° *Por la observacion de la estrella polar.*—La estrella polar se determina por medio de la constelacion *abcd* (fig 16) conocida con el nombre de *Osa mayor*, y vulgarmente con el de *el carro*; la cual se compone de siete estrellas muy brillantes, cuatro de las cuales forman un cuadrilátero, que constituye por su semejanza el cuerpo de la osa ó la caja del carro, y las otras tres una línea quebrada, semejante tambien á la cola de la osa ó á la lanza del carro.

Considerando tirada una recta por las estrellas *a* y *b* del cuadrilátero que se hallan más distantes de la lanza *cd*, la prolongacion de la recta *ab* pasa muy cerca de la estrella *polar* P, la cual termina otra constelacion llamada la *Osa menor*, compuesta tambien de siete estrellas y semejante en su forma á la primera, pero colocada en una situacion contraria. La estrella polar es la mas brillante de la constelacion de que forma parte, y parece estar fija en un mismo punto del cielo, y que las demás giran alrededor de ella, describiendo circunferencias tanto mayores cuanto mas distantes se hallan de la polar, y en sentido de oriente á occidente.

Si, como aparece á primera vista, la estrella polar ocupase exactamente el punto alrededor del cual parecen girar las estrellas, estaría en la prolongacion del eje terrestre, y entonces trazaríamos la meridiana de un punto *m*, haciendo pasar por él una plomada *p* y determinando el plano vertical que pasa por ella y la estrella polar (15), el cual lo estará por el cordon de la plomada y la visual *e*P. Este plano, pasando por la vertical de *m* pasará por el centro de la tierra (9), y como además pasa por P, que segun hemos visto está en la prolongacion del eje, contendrá al eje terrestre; luego será el plano meridiano del punto *m* (6).

Colocando otra plomada *p′*, cuyo cordon quede cubierto por el de la primera, se hallará tambien en este meridiano, y la recta *mn* que une las proyecciones de estas plomadas sobre el plano horizontal de *m*, será la meridiana *mn* de este punto (49).

55. La estrella polar, no hallándose situada exactamente en la prolongacion del eje de la tierra, describe alrededor del polo una pequeña circunferencia, que comprende una amplitud de 1° 33′, y por lo tanto, la operacion explicada debe hacerse al paso de la estrella por el meridiano, el cual se verifica 13′ despues del momento en que la polar y la *c* de la *Osa mayor* determinan una recta que queda cubierta por la plomada *p*. Observando la hora en que esta circunstancia tiene lugar y dejando pa-

sar 13' se situará la plomada p' en el plano que determinan la vertical p y la polar P.

56. **Magnetismo terrestre.—Polos, eje y meridiano magnéticos.**—El fluido magnético que existe en el globo terrestre tiene su máximo de intensidad en dos puntos variables de posicion, próximos á los polos, á los cuales se les da el nombre de *polos magnéticos*, así como el de *eje magnético* á la recta que los une. El plano que este eje determina con un punto cualquiera de la superficie terrestre, recibe tambien el nombre de *meridiano magnético* del mismo punto.

57. **Meridiana magnética.—Aguja imantada.**—La interseccion del plano meridiano magnético con el plano horizontal de un punto cualquiera es la *meridiana magnética* de este punto. Se la determina por medio de la *aguja imantada*, que es una lámina *ab* (fig. 17) de acero templado, en forma de un rombo muy prolongado, á la que artificialmente se ha hecho adquirir las propiedades de un iman natural. Está provista de una armadura *c* con una piedra ágata en su interior, en la que está practicada una cavidad cónica, cuyo vértice, que corresponde al centro de gravedad de la aguja, se apoya sobre el extremo aguzado de un estilo vertical *cd*. La accion que la tierra ejerce sobre los imanes que pueden moverse libremente, hace que los extremos *a* y *b* de la aguja se dirijan á los polos magnéticos N y S, determinando así la meridiana magnética. El extremo *a* que se dirige al Norte, y conserva el color azul del temple del acero, se llama *polo norte* ó *boreal* de la aguja; y el *b*, *polo sur* ó *austral*.

58. **Declinacion de la aguja magnética.**—El ángulo *d* (fig. 18) que la aguja magnética *ns* situada en un punto A forma con la meridiana astronómica NS del mismo, ha recibido el nombre de *declinacion de la aguja magnética*. Como las rectas NS y N'S' son perpendiculares (18) á la vertical del punto A, interseccion de los planos meridianos, el ángulo *d* que forman es la medida del diedro de los planos.

59. La declinacion, variable de un tiempo á otro, es oriental ú occidental, segun que el extremo *n* de la aguja se dirige al este ó al oeste de la meridiana astronómica. En 1580 era oriental y de 11° 30'; en 1663 era nula, y despues se hizo occidental, creciendo hasta 1814 en que era de 22° 34'. A partir de esta máxima desviacion, la declinacion, occidental siempre, ha disminuido, siendo actualmente en Madrid pe 19° 20' al Oeste.

60. Trazada la meridiana de un punto A (fig. 18), puede conocerse la declinacion disponiendo en él la aguja magnética y observando el ángulo *d* que forma con ella. Recíprocamente, conocida la declinacion, se obtendrá la meridiana astronómica trazando una recta, que forme con la direccion de la aguja y al Este de la misma el ángulo *d*.

61. **Longitudes y latitudes geográficas.**—*Longitud geográfica* de un punto de la superficie terrestre es la distancia de su meridiano á otro determinado de posicion y llamado *primer meridiano*, la cual se cuenta de 0 á 180° del ecuador ó de un paralelo cualquiera. En España se considera como primer meridiano el que pasa por el Observatorio astronómico de Madrid, ó por el de la isla de Hierro en las Canarias.

La longitud es oriental ú occidental, segun que se cuente al Este ó al Oeste del primer meridiano. Todos los puntos de este tienen longitud *cero*.

62. *Latitud geográfica* es la distancia al ecuador, contada en grados de meridiano La latitud es *norte* ó *boreal, sur* ó *austral*, segun el hemisferio á que corresponde el punto de cuya latitud se trata Los puntos del ecuador tienen latitud *cero* y los polos la de 90°.

*63 **Determinacion de la longitud geográfica de un punto.** —Dando la tierra una revolucion completa alrededor de su eje en el espacio de 24 horas, y estando divididos los paralelos y el ecuador en 360°, en el espacio de una hora pasan por delante del sol 15° de paralelo ó de ecuador; luego una hora de tiempo equivale á 15° de longitud.

De aquí se deducen los medios de determinar la longitud de un punto con relacion á otro del primer meridiano ó de longitud conocida Redúcense á determinar la hora que señala un cronómetro en cada uno de los dos puntos en el momento de verificarse un fenómeno físico que desde ambos pueda observarse. Este fenómeno puede ser natural, como un eclipse por ejemplo, ó artificial, como la inflamacion de una cantidad de pólvora en un paraje elevado que pueda ser visto desde los dos puntos de observacion.

Multiplicando la diferencia de horas que den los cronómetros por 15, se tendrá la diferencia de longitud de ambos puntos; estando mas al Este aquel cuyo cronómetro marque una hora mas avanzada.

Si entre los dos puntos existe una línea telegráfica directa, pueden observarse los cronómetros en el momento de recibir en una de las estaciones una señal telegráfica hecha en la otra, pues el tiempo de trasmision es casi inapreciable.

Ejemplo —El cronómetro de un punto que llamaremos A señala las 8 y 15′ de la mañana, en el mismo instante en que el de otro punto B señala las 10 y 27′ de la mañana; la diferencia de horas será

$$10^h\,27' - 8^h\,15' = 2^h\,12',$$

que reducida á minutos, será 132′.

La diferencia de longitudes se hallará por la proporcion

$$60' : 15^\circ :: 132' : x = 33^\circ.$$

Si el punto dado A está en el primer meridiano, la longitud de B será de 33° *Este*. Si la de A fuese 20° 36′ *Este*, la de B resultaria de 53° 36′ *Este*.

64 Cuando los accidentes del terreno, ó la falta de línea telegráfica directa impiden la aplicacion de los procedimientos indicados, se señalan puntos intermedios, cuyas diferencias sucesivas se determinan; la suma de las diferencias obtenidas será la de los puntos extremos.

*65. **Determinacion de la latitud geográfica.** —Se observan los ángulos que forman con el horizonte sensible del punto de observacion las visuales dirigidas á la estrella polar á su paso por el meridiano (55), que tendrá lugar de observarse dos veces eligiendo para ello una larga noche de invierno La semisuma de los ángulos así obtenidos será la latitud del citado punto de observacion.

Se funda este procedimiento en que el polo está tan elevado respecto del horizonte racional de un punto de la superficie terrestre, como este punto lo está respecto del ecuador. Así es que en el ecuador se observaría la estrella polar en el horizonte; y caminando hácia el polo se la vería elevarse hasta ocupar el zenit del observador cuando este llegase al polo

La diferencia que resulta de tomar para la observacion el horizonte sensible por el racional, produce un error de *paralaje*, inapreciable en los instrumentos usados ordinariamente en Topografía, á causa de la pequeña distancia que media entre ambos horizontes relativamente á aquella en que se encuentran respecto al polo celeste.

66. Puede tambien hallarse la altura del sol al medio dia sobre el horizonte; y añadiendo á esta altura la *declinacion del sol* ó su depresion respecto al ecuador en otoño é invierno, ó restándola cuando es la elevacion que constituye la declinacion en primavera y verano, se tendrá un valor angular, cuya diferencia á 90° será la latitud pedida. La declinacion para cada dia del año se encuentra en los anuarios de los observatorios astronómicos y en los almanaques náuticos.

67. Cuando los accidentes del terreno no determinan bien el horizonte sensible, se pueden hallar las distancias angulares de la polar ó del sol al zenit del observador, y restándola de 90° se tendrán sus alturas sobre el horizonte para aplicar los procedimientos anteriores.

68. **Determinacion geográfica de un punto de la superficie terrestre** —Conocida la longitud de un punto puede trazarse el meridiano en que se encuentra, y por medio de su latitud el paralelo en que tambien se halla: la interseccion de ambas circunferencias será la situacion del mismo punto en la superficie.

*69. **Distancia geográfica entre dos puntos de la superficie terrestre** —Conocidas las longitudes y latitudes de dos puntos A, B (fig. 19) de la superficie terrestre, podemos hallar la distancia geográfica (10) entre estos puntos

En efecto, la diferencia de las longitudes correspondientes á estos puntos es el arco *mn*, que mide al ángulo plano *nom*, correspondiente al diedro de los planos meridianos y tambien al ángulo C del triángulo esférico ABC, que forma el polo norte C con los puntos dados Los arcos *a* y *b* son los complementos de las latitudes *nB*, *mA*, de los mismos puntos; y por lo tanto en el triángulo esférico ABC conocemos dos lados *a*, *b* y el ángulo comprendido C, y podremos hallar el valor del tercer lado *c*, que es el arco AB que tratamos de conocer.

Supongamos que A tiene la longitud 0, y 40° 25′ de latitud *Norte*, que corresponden á Madrid; y B tiene la longitud 6° 21′ *Este* y la latitud 39° 34′ *Norte* de Palma de Mallorca; vamos á hallar la distancia geográfica entre estos dos puntos.

Tendremos en el triángulo ABC

$$a = 90^\circ - 39^\circ\, 34' = 50^\circ\, 26';$$
$$b = 90^\circ - 40^\circ\, 25' = 49^\circ\, 35';$$
$C = 6^\circ\, 21'$, que es la diferencia de longitudes.

Hallaremos el valor de c que buscamos (Trig. 54 Primer caso), llamando φ á un ángulo auxiliar, cuyo valor se deduce de la ecuacion

$$\text{tang. } \varphi = \text{tang. } a \text{ cos. } C \qquad [5],$$

y sustituyendo el valor obtenido para φ en la ecuacion

$$\text{cos. } c = \frac{\text{cos. } a \text{ cos. } (b - \varphi)}{\text{cos. } \varphi} \qquad [6].$$

Sustituyendo valores en la fórmula [5], será

$$\text{tang } \varphi = \text{tang. } (50^\circ\, 26') \text{ cos. } (6^\circ\, 21') = 1{,}20280,$$

que corresponde en las tablas al ángulo de $50^\circ\, 16'$: luego será

$$\varphi = 50^\circ\, 16'.$$

Sustituyendo valores en la fórmula [6] resultará

$$\text{cos } c = \frac{\text{cos } (50^\circ\, 26') \text{ cos. } (49^\circ\, 35' - 50^\circ\, 16')}{\text{cos } 50^\circ\, 16'} = 0{,}99643,$$

observando que se tiene

$$\text{cos. } (49^\circ, 35' - 50^\circ\, 16') = \text{cos. } (-0^\circ, 41') = \text{cos } (0^\circ, 41')$$

El valor hallado para log. cos. c corresponde á $c = 4^\circ\, 51'$.

Para hallar el desarrollo x del arco c, observaremos que el de un grado de la superficie terrestre es

$$\frac{2\,\pi\,R}{360} = \frac{3{,}1415926 \times 6366200}{180} = 111111{,}^{m}2 \qquad [7]$$

y el valor de c reducido á fraccion de grado

$$\frac{4 \times 60 + 51}{60} = \frac{291}{60} = 4{,}85;$$

por lo que se tendrá

$$x = 111111{,}^{m}2 \times 4{,}85 = 538889{,}^{m}32$$

cerca de 539 kilómetros.

CAPITULO II.

De la superficie terrestre y de su representacion geométrica.

70. **Relieve y aspecto general del terreno.**—La configuracion de un terreno accidentado parece á primera vista un agrupamiento confuso de montañas y una série de llanuras, surcadas todas por rios y arroyos ramificados sin sujecion á ley alguna determinada; pero una observacion detenida da á conocer ciertas leyes, que rigen en la forma que presenta el terreno, y son consecuencias de las que han presidido á su formacion. Tambien se echa de ver la posibilidad de someter los accidentes que caracterizan su forma á una fácil clasificacion y nomenclatura.

Al mar afluyen los grandes rios, que recogen las aguas de cuencas separadas entre sí por las cordilleras de primer órden.

La línea tirada por las cimas y depresiones de la cordillera, es una divisoria de primer órden. A veces la divisoria está formada por una llanura, ó propiamente dicho, una *paramera*, que sustituye á la série de cimas y depresiones de la cordillera.

Los rios de que acabamos de hacer mencion, atraviesan las grandes llanuras. A ellos van á reunir sus aguas los de segundo órden, entre cada dos de los cuales hay una divisoria de segundo órden.

Los rios de este órden reciben á su vez las aguas de los de tercero, los cuales tienen su correspondiente divisoria; y así continuando hasta un número indefinido de estos órdenes, los últimos de los cuales están constituidos por las pequeñas corrientes que forman las aguas pluviales en las mas pequeñas quebradas del terreno.

Haremos, sin embargo, mas palpable esta clasificacion partiendo de dos rios ó arroyos A, A′ (fig. 20) de un mismo órden cualquiera, situados á uno y otro lado de una cordillera, que presenta la *cresta ó divisoria* DD, formada por una série alternativa de cimas y de depresiones.

De estas depresiones parten las corrientes de segundo órden a, a'. El terreno comprendido entre dos de estas corrientes es una cordillera de segundo órden, cuya cresta ó divisoria dd parte de la cima comprendida entre las depresiones en que nacen los arroyos a y a'.

Las cordilleras de segundo órden reciben por lo general el nombre de *ramales* ó *estribaciones* de la principal, y siguen una direccion próximamente normal á esta; observándose que se acercan tanto más á serlo, cuanto ménos inclinada al horizonte es la divisoria principal.

De cada una de las divisorias de segundo órden dd, $d'd'$.... parten las divisorias y las corrientes de tercer órden, próximamente normales á las respectivas divisorias y corrientes del segundo; de las de tercero se deriban las de cuarto órden; y así continuando hasta los órdenes inferiores

71 Las dos vertientes L, L' de una misma divisoria DD, llevan el nombre de *laderas*; y las dos laderas L' y L'' correspondientes á dos divisorias contiguas DD, D'D' de un mismo órden, forman la cuenca del rio ó arroyo A, el cual viene á ser la interseccion de las dos vertientes ó laderas, y recibe el nombre de *valle* ó *talweg*; palabra tomada del aleman y que significa *camino del valle*

La ladera L'' se llama *derecha* con respecto al arroyo A, y la L' es la *ladera izquierda* del mismo arroyo; denominaciones referidas á la posicion de sus márgenes, respecto á un observador que las recorriese en la direccion de la corriente.

Lo que acabamos de establecer es general para todas las corrientes, cualquiera que sea el órden á que pertenezcan.

72. Los *talwegs* de los órdenes primeros forman los lechos de los rios y arroyos de aguas constantes; los de los órdenes medios los arroyos que sólo las tienen en invierno; y los de los últimos solamente conducen las procedentes de las lluvias.

73. La reunion de las divisorias de todos los órdenes constituye el *sistema orográfico* de la region ó terreno que se describe topográficamente, y la de los *talwegs* el *sistema hidrográfico* de la misma.

La determinacion y representacion de los dos sistemas en sus posiciones relativas da á conocer por completo la forma de la superficie terrestre en la extension que se considera.

74 **Representacion de una parte de la superficie terrestre** —El sistema que se sigue en la Geometría descriptiva para la representacion de los cuerpos por medio de dos proyecciones no es aplicable á la superficie del terreno, cuya variada forma debe aparecer cual es á primera vista, sin tener que detenerse en la consideracion de las distintas proyecciones de los infinitos puntos que la componen. Como además el empleo de los dos planos de proyeccion en los cuales se han de representar las proyecciones horizontales y verticales en la misma relacion, haría muy confusas las verticales por las pequeñas diferencias de altura de la mayor parte de los puntos de terreno con relacion á su distancia horizontal, se ve desde luego la imposibilidad de representar su forma por este medio.

Pudiera seguirse un método geométrico, y bajo tal punto de vista exacto, cual era el de suprimir las proyecciones verticales, representándolas por números que indicasen sus cotas, para saber sus distancias relativas al plano horizontal de proyeccion, escribiendo dichas cotas al lado de los puntos destinados á la representacion de las proyecciones horizontales El plano horizontal sobre el cual se consignan las dos proyecciones de la manera indicada se llama *plano acotado*. Este medio, pues, tan sencillo como exacto, es el adoptado para conseguir con prontitud formarse idea de las ondulaciones caprichosas y variadas formas de la superficie del terreno; si bien es necesario advertir la manera de hacer uso de él para lograr el objeto que nos proponemos.

Es cierto, en efecto, que para representar el terreno, cuanto mayor sea el número de sus puntos que acotemos, mayor será la exactitud de la operacion, y bajo el punto de vista teórico este método es tan completo cual pudiera desearse; pero en la práctica no sería posible poner en obra las indicaciones de la teoría, no bastando el plano á contener tantos números, y este infinito número de cotas produciría tal confusion, que léjos de formarnos idea de la figura en conjunto del terreno, no lo podríamos lograr ni aun de la más pequeña de sus partes. Será, pues, necesario modificar este sistema, no acotando todos los puntos, sino aquellos de más importancia, y tales que al figurar en el plano las líneas de diferentes formas determinadas por ellos, logremos, no solo la claridad, sino tambien hacernos cargo del terreno al primer golpe de vista, tal cual nos le presenta la naturaleza con sus infinitos accidentes, sus variadas ondulaciones y caprichosas formas.

Este objeto se consigue por el método de las secciones horizontales (Acots 103), que es el adoptado para la representacion del terreno, presentando en las curvas proyectadas un sistema de puntos acotados, que puede servir para determinar (Acots. 113 y 114) cualquier otro punto que no forme parte del sistema. La fig. 20 representa el terreno con arreglo al método que nos ocupa.

75 **Division de la Topografía en Planimetría y Nivelacion y objeto que se propone cada una de estas partes.** — De todo lo dicho acerca de la representacion del terreno, se deduce que para lograr ésta es necesario dividir las operaciones en dos partes bien distintas: una que tiene por objeto la determinacion de las posiciones que guardan entre sí las proyecciones horizontales a, b, c, d, e (fig. 21) de los puntos A, B, C, D, E mas notables del terreno que se trata de representar, para obtener su proyeccion horizontal $abcde$, y que se llama *Planimetría*; y la otra, que se ocupa de hallar las distancias respectivas ó cotas de los mismos puntos relativamente al plano horizontal PN de proyeccion, y que se distingue con el nombre de *Nivelacion* ó *Altimetría*.

76 *Objeto de la Planimetría.* —Si la figura del terreno fuese un triángulo, se sabe que sus tres vértices determinan un plano, que llamaremos el plano de los objetos situados en dichos vértices; pero si así no fuese, como sucede generalmente, imaginando unidos por medio de rectas los puntos A, B, C, D, E, resultará un polígono ABCDE, cuyos lados no están en general situados en un mismo plano, y sería por lo tanto muy difícil y casi imposible coordinar sobre el papel operaciones efectuadas sobre planos de diferente inclinacion; esta es una de las razones por qué en la Planimetría se ha convenido en considerar las proyecciones de los vértices de los polígonos sobre un plano horizontal determinado de antemano. Estas proyecciones, unidas por rectas, nos dan tambien las proyecciones horizontales de los lados del polígono.

En efecto, si proyectamos todos los vértices A, B, C, D, E sobre un plano horizontal PN, situado por debajo de todos ellos, el polígono *abcde* será la proyeccion del ABCDE. Los puntos *a*, *b*, *c*.... serán las de los puntos notables que se quiere determinar, las rectas *ab*, *bc* ... las de las distancias AB, BC ... entre estos puntos, y los ángulos *a*, *b*, *c*, *d*, *e* serán tambien las proyecciones horizontales de los A, B, C, D, E, ó los ángulos planos correspondientes á los diedros que forman entre sí los planos verticales que pasan por las rectas AB, BC, CD, DE y AE, lados del polígono, y cuyas aristas son las verticales correspondientes á los puntos A, B, C, D, E.

Además de la razon expuesta para sólo considerar la proyeccion horizontal del terreno, hay tambien la de que no influye en la valoracion de su superficie el tomar por esta su proyeccion horizontal; pues en la agricultura se tiene en cuenta la circunstancia de que en un terreno inclinado AB (fig. 22) no aparecen los árboles en direcciones *a*, *b*, *c* ... perpendiculares á la línea inclinada AB; sino que tienen las posiciones verticales *a'*, *b'*, *c'* .... perpendiculares á la proyeccion horizontal AC, llamada *base productiva* de la línea inclinada AB: por consiguiente, la superficie real de un terreno no producirá mayor número de árboles ó plantas mayores que su proyeccion horizontal, aun cuando esta es menor; pues si bien un terreno inclinado contiene en más cantidad las mieses, yerbas y plantas rastreras que su correspondiente proyeccion horizontal, la experiencia ha probado que la diferencia es bien pequeña; si bien en los casos que convenga puede tenerse en cuenta. Por otra parte, un terreno inclinado tiene las desventajas de ser arrastradas por las lluvias la tierra vegetal y las simientes, ser más costoso el labrarlas, más penoso para el ganado, que padece mucho por las violentas posturas en que va con frecuencia fuera de su aplomo; y estos terrenos, unas veces sin bañarles el sol, otras abrasados por herirles de plano, no son ciertamente más á propósito que aquellos que se aproximan á ser planos situados en posiciones horizontales.

Los franceses llaman *cultelacion* á la operacion que tiene por objeto sustituir á la superficie inclinada AB, la horizontal correspondiente AC; porque parece en efecto que se ha cortado la superficie inclinada con un cuchillo.

Consideraremos por lo tanto en Planimetría la proyeccion horizontal *abcde* (fig. 21) del polígono ABCDE del terreno, trazada sobre el plano PN; y como no sería posible presentar esta proyeccion en su verdadera magnitud, se trata de hallar sobre el plano, representado por el papel *pmno*, una figura *a'b'c'd'e'* semejante á la proyeccion horizontal *abcde* del polígono ABCDE del terreno. Este es el objeto que se propone la Planimetría.

77. *Objeto de la nivelacion.*—Por medio de las operaciones de que se ocupa esta parte de la Topografía, se determinan las alturas A*a*, B*b*, C*c* ... de los puntos A, B, C, D, E sobre el plano horizontal PN, refiriéndolas á una misma unidad, obteniendo de este modo las cotas de dichos puntos. (Acots 3.) Estas cotas escritas al lado de las proyecciones horizontales *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, nos manifiestan las diferentes alturas de los vértices del po-

lígono, dándonos una completa idea de la forma del terreno que se quiere representar; para lo cual se escriben dichas cotas en los puntos a', b', c', d', e' de la figura semejante construida en el papel.

78 **Plano geométrico ó topográfico.**—La figura $a'\ b'\ c'\ d'\ e'$, que así se obtiene, semejante á la proyeccion horizontal del terreno é igualmente acotada, se llama su *plano geométrico ó topográfico.*

Las proyecciones acotadas de los lados que constituyen la proyeccion del terreno sirven para la determinacion de las curvas de nivel, que representan por completo la superficie que se considera. (Acots. 129.)

79 **Límites de los planos topográficos.**—La Topografía limita el terreno de cuya representacion se ocupa á una extension en la cual no es preciso tener en cuenta la esfericidad de la tierra, para obtener la debida exactitud. Cuando la extension del terreno que debe representarse es tal, que no puede prescindirse de tener en consideracion la forma de la tierra sin cometer graves errores, las operaciones, que exigen además el empleo de instrumentos de mayor precision, y que conducen á cálculos superiores á los conocimientos elementales de Matemáticas, entran en el dominio de la *Geodesia*.

En las operaciones geodésicas se refiere la posicion de los puntos notables del terreno á la superficie de las aguas tranquilas del Océano; pero en la corta extension que ha de comprender un plano topográfico, se sustituye sin error sensible á la superficie oceánica el plano tangente á la misma.

En efecto, partiendo de la hipótesis de que la tierra es esférica y de que su rádio es 6366200^m (3), propongámonos hallar los valores de la tangente QQ′ (fig. 3), y de la cuerda PP′ correspondientes al arco de círculo máximo comprendido entre los puntos P y P′, en la suposicion de que este arco es de 1°. En el triángulo rectángulo QSC se tiene

$$QS = SC \times \text{tang.}\ \frac{a}{2} \qquad [8],$$

que da

$$QS = 6366200 \times \text{tang.}\ 0^\circ\ 30' = 55557,$$

y QQ′ = 111114.

En el triángulo PLC se tiene

$$PL = PC \times \text{sen.}\ \frac{a}{2} \qquad [9],$$

que da igualmente

$$PL = 6366200 \times \text{sen.}\ 0^\circ\ 30' = 55555,$$

y PP′ = 111110.

Comparando los valores hallados para QQ′ y PP′ con el desarrollo 111111^m que corresponde (69) al arco de 1°, se ve que la mayor diferencia es de 3^m, la cual tiene lugar cuando se toma la tangente por el arco, y es inferior á los errores inherentes á los medios de apreciacion de las distancias en las operaciones topográficas, que por otra parte están encerrados entre límites ménos extensos.

80. **Señales para marcar en el terreno los lados y ángulos de los polígonos.**—Sirven para este objeto los *piquetes*, *jalones* y *banderolas*.

81. **Piquetes**.—Se llaman así unas estacas de madera que generalmente no llegan á medio metro de longitud, y de cuatro á seis centímetros de grueso, y aguzadas por un extremo, si bien es mejor armar uno de estos con un regaton de hierro terminado en punta para introducirla en el terreno, y el otro extremo lleva un cincho ó anillo de hierro á fin de que no se hienda á los golpes del mazo que se usa para clavarla. Otras veces se usan tambien clavos grandes de hierro; y cuando el terreno es duro, para clavar unos y otros hasta lograr enterrarlos, se le remueve por medio del zapapico, se clava el piquete con el mazo, y se apisona despues la tierra que le rodea, colocando encima, ó á su inmediacion si se ha enterrado todo, un monton de tierra, piedras ó ladrillos para poder encontrarle cuando sea necesario. El uso de estos piquetes es para fijar de una manera estable los extremos de las líneas, y colocados en los vértices de los polígonos fijan tambien sus ángulos.

82. **Jalones**.—Enterrados los piquetes ó sobresaliendo muy poco del terreno, no serian visibles á cierta distancia; por lo cual se usan, cuando se opera, otros de forma cilíndrica y de mayor longitud, la cual ordinariamente es de dos metros, y se colocan en los puntos donde se hallaban los piquetes. Para hacerlos aun más visibles se les pone en la parte superior una tablilla pintada de colores ó bien un pedazo de tela encarnada (fig. 23): los ejes de los jalones, cuando estos se han colocado bien verticalmente, determinan la vertical del punto del terreno en que se clavan.

83. **Banderolas**.—Cuando la altura de los jalones excede de los dos metros, reciben el nombre de *banderolas*, y sirven para colocarlas en los puntos que se hallan tan bajos que no puede el observador distinguir punto alguno de la vertical determinada por un jalon. Muchas veces hay necesidad en la práctica de empalmar unos con otros los jalones y banderolas.

84. Plantar en el terreno un jalon ó una banderola ab (fig. 23), es clavarle en tierra verticalmente: lo que puede comprobarse por medio de la plomada haciendo que quede cubierto por el cordon en las dos posiciones $a'b'$, $a''b''$ del cordon: porque ab será entónces la interseccion de los planos verticales $aba'b'$, $aba''b''$ (15—2.º), y por consiguiente vertical (17).

85. **Reduccion de las distancias al horizonte.**—La distancia de un punto A (fig. 24) á otro B, medida con la inclinacion que tiene la recta AB que los une, debe reducirse, como hemos dicho (76), á su proyeccion horizontal. Suponiendo el plano horizontal que pasa por A, y bajando desde B una perpendicular á él, el pié C de esta perpendicular será la proyeccion de B, y la AC la proyeccion de AB. En el triángulo rectángulo ABC tenemos entónces

$$AC = AB \cos. A$$

Llamando l á la distancia medida, x á su proyeccion, y p al ángulo A, que AB forma con el horizonte, y que es por tanto (Acots. 25) la pendiente de AB, la fórmula anterior se convertirá en

$$x = l \cos. p. \qquad [10].$$

Sea $l = 120^{m},4$ y $p = 10^{\circ}\ 26'$; se tendrá

$$x = 120^{m},4 \times \cos.\ 10^{\circ}\ 26' = 118,41,$$

apreciando hasta centímetros.

Cuando se hace uso de las líneas trigonométricas naturales, suele tomarse el coseno con cuatro ó cinco cifras decimales, aumentando una unidad á la del último órden decimal cuando la siguiente es 5 ó mayor que 5.

86. Empleando el cálculo logarítmico, restableceríamos el rádio en la fórmula [10] y tendríamos, tomando logaritmos,

$$\log\ x = \log.\ l + \log\ \cos.\ p - 10 = 2,0733860$$
$$y\ x = 118,4093 \text{ ó } 118^{m},41.$$

87. Para la reduccion de las distancias al horizonte, se ha calculado tambien haciendo uso de la fórmula [10] una tabla que insertamos á continuacion, y que da la distancia á que se reduce la longitud constante de 100 metros para las pendientes de grado en grado desde 0° hasta 45°

TABLA de reduccion al horizonte de una longitud de 100 metros para las inclinaciones que varían de grado en grado desde 0° hasta 45°.

Grados de inclinacion.	Distancia reducida.	Grados de inclinacion.	Distancia reducida.	Grados de inclinacion.	Distancia reducida.
1	99,985	16	96,126	31	85,717
2	99,940	17	95,631	32	84,805
3	99,863	18	95,106	33	83 867
4	99,757	19	94,552	34	82,904
5	99,619	20	93 969	35	81,915
6	99,452	21	93,358	36	80,902
7	99,255	22	92,718	37	79,863
8	99,027	23	92,051	38	78,801
9	98,769	24	91,354	39	77,347
10	98,481	25	90,631	40	76,604
11	98,163	26	89,881	41	75,470
12	97,815	27	89,101	42	74,314
13	97,437	28	88,295	43	73 135
14	97,030	29	87,462	44	71,934
15	96,593	30	86,600	45	70,710

Esta tabla no pasa de 45°, pues hasta este límite alcanzan las pendientes que el terreno presenta más comunmente.

Tambien se observa que á medida que la pendiente aumenta, disminuye la longitud de la proyeccion de la recta dada.

88. Para el uso de esta tabla distinguiremos dos casos:

1.° *Que la pendiente dada sea un número exacto de grados.*

2.° *Que esté expresada en grados y minutos.*

Si tenemos por ejemplo $l = 120^m,4$ y $p = 10°$, observaremos que siendo las distancias reducidas proporcionales á las distancias medidas, para una misma pendiente, hallaremos el valor de l para el ángulo de 10°, estableciendo la proporcion general

$$100 : 98,481 :: l : x; \quad \text{de donde resulta}$$

$$x = \frac{98,481 \times l}{100} = 0,98481 \times 120,4 = 118^m,571124.$$

En el segundo caso se empleará la proporcion anterior, despues de haber calculado la proyeccion de 100 metros para el ángulo dado.

Si suponemos, pues, $l = 120^m,4$, y $p = 10°\,26'$, admitiremos que las diferencias de los ángulos son proporcionales á las diferencias de las proyecciones para la longitud constante de 100^m; principio que no es exacto, pero que puede admitirse en la práctica sin error sensible. En su consecuencia hallaremos la diferencia 0,318 que existe entre las proyecciones de dicha longitud constante, correspondientes á las inclinaciones de 10° y 11°, que comprenden en las tablas á la inclinacion dada 10° 26'; y llamando z á la diferencia entre la proyeccion correspondiente á 10°, que dan las tablas, y la que resulta para 10° 26', hallaremos su valor por medio de la proporcion

$$60' : 0,318 :: 26' : z = 0,1378$$

Siendo esta cantidad la diferencia entre la reducida de 10° que conocemos, y la de 10° 26' que se busca, y debiendo ser ésta menor, restaremos 0,1378 de la reducida correspondiente á 10°, y obtendremos 98,343 para la que corresponde á 100 metros con la pendiente de 10° 26'.

89. Cuando no se conoce la pendiente y sí el desnivel BC $= d$ (fig. 24) entre los extremos de la recta, se tendrá en el triángulo rectángulo ABC

$$x = \sqrt{l^2 - d^2} \qquad [11].$$

Para la aplicacion de esta fórmula se emplean ventajosamente las tablas de cuadrados de los números enteros de 1 á 1000 que se publican en París todos los años en el *Carnet de l'Ingenieur*. Tambien son muy útiles las tablas de reduccion de D. Jacinto La Rua.

Descomponiendo en factores la cantidad subradical de la fórmula hallada, se convierte en

$$x = \sqrt{(l + d)\,(l - d)} \qquad [12],$$

mejor dispuesta para el cálculo logarítmico. Aplicándola al caso de ser $l = 41^m,9$ y $d = 8^m,3$ se tendrá

$$\log. x = \frac{\log\ 50,2 + \log\ 33,6}{2} = 1,6135215,$$

que corresponde á $x = 41^m,07$.

*90. Tambien puede hallarse la reducida que se busca, determinando la pendiente de la recta dada por la relacion

$$\text{sen}\ A = \frac{d}{l} = \frac{8,3}{41,9} = 0,1980907,$$

que corresponde á un valor de $A = 11^\circ\ 25'$; y por medio de la fórmula [10] se obtendrá $x = 41^m,07$.

91. **Reduccion de los ángulos al horizonte.**—Tres puntos A, B, C (fig. 25) del terreno, determinan un plano, en general inclinado al horizonte. Supongamos conocida la longitud de los tres lados de este triángulo, y medido el ángulo BAC ó S, formado en el plano de los objetos A, B y C por las rectas AB y AC. Concibiendo un plano horizontal que pase por A, y hallando las proyecciones respectivas B′ y C′ de los puntos B y C sobre este plano, las rectas AB′, AC′, que unen estas proyecciones con el punto A, formarán un ángulo s, el cual será la proyeccion del ángulo S medido.

La determinacion del ángulo s, deducida del ángulo observado, es lo que se llama la *reduccion de un ángulo* S *al horizonte*. Para llevarla á cabo es preciso conocer de antemano los ángulos m y n que los lados del ángulo dado forman con el horizonte (46).

La resolucion de los triángulos rectángulos ABB′, ACC′, nos dará á conocer los lados AB′, BB′ y AC′, CC′. Considerando la paralela CD á C′B′, se obtendrá el valor de BD, diferencia entre BB′ y CC′; con lo cual podrá resolverse el triángulo CBD y obtener el valor de CD = C′B′. Conociendo entónces los tres lados del triángulo AC′ B′, podrá obtenerse el valor de s.

Las resoluciones indicadas pueden ejecutarse gráficamente ó por el cálculo.

Para hacer aplicacion de este último á un ejemplo particular supongamos que se tiene:

$$AB = 140^m,2; \qquad S = 62^\circ\ 25';$$
$$AC = 119,4; \qquad m = 20^\circ\ 16';$$
$$BC = 135,7; \qquad n = 14^\circ\ 40'.$$

Se tendrá desde luego:

$$AB' = 140,2 \times \cos\ 20^\circ\ 16' = 131,5;$$
$$BB' = 140,2 \times \text{sen}\ 20^\circ\ 16' = 48,56;$$
$$AC' = 119,4 \times \cos\ 14^\circ\ 40' = 115,5;$$
$$CC' = 119,4 \times \text{sen}\ 14^\circ\ 40' = 30,23:$$

de cuyos valores se deducirá

$$BD = 48,6 - 30,2 = 18,4.$$

Calcularemos el lado DC haciendo

$$DC = \sqrt{135,7^2 - 18,4^2} = \sqrt{18075,93} = 134,4.$$

Por último tendremos el valor de

$$\cos s = \frac{131,5^2 + 115,5^2 - 134,4^2}{2 \times 131,5 \times 115,5} = \frac{12569,2}{30376,5} = 0,4137803;$$

que corresponde á un ángulo $s = 65^\circ\ 33'$.

92. Cuando uno de los lados del ángulo S es superior y otro inferior al plano horizontal de su vértice (35), el lado BD del triángulo que da el valor de CD es la suma de los catetos verticales CC′ y BB′ calculados como en el caso anterior.

*93. Tambien se puede resolver este problema, considerando la vertical del punto A (fig. 26) y los ángulos b y c, que forman con ella las líneas AC y AB. Estos ángulos son los complementos respectivos de los m y n que las mismas líneas forman con el horizonte, y los cuales deben haberse determinado préviamente.

Los arcos a, b y c, trazados con igual rádio, y cada uno en el plano de las dos rectas que forman el ángulo correspondiente, serán los lados de un triángulo esférico cuyo vértice estará en A.

El ángulo opuesto al lado a, será el ángulo P que tiene la misma medida que el diedro cuya arista es AV, y cuyas caras son los planos CAV, BAV. Por otra parte, la medida de este ángulo diedro es el ángulo s, puesto que siendo AV perpendicular al plano de los lados del ángulo s, será perpendicular á estos lados.

Tendremos por lo tanto (Trig., párrafo 54. Tercer caso.—Fórmula [d']

$$\cos.\ \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a)}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}} \qquad [13]$$

en la cual se ha hecho

$$a + b + c = 2p. \qquad [14]$$

Resolviendo por este método el problema anterior, se tendrá

$$S = a = 62^\circ\ 25';$$

$$b = 90^\circ - m = 90^\circ - 20^\circ\ 16' = 69^\circ\ 44';$$
$$c = 90^\circ - n = 90^\circ - 14^\circ 40' = 75^\circ\ 20';$$

y haciendo uso de la fórmula [14],

$$p = \frac{62^\circ 25' + 69^\circ 44' + 75^\circ 20'}{2} = 103^\circ\ 44'\ 30''.$$

Restableciendo en la [13] el rádio de las tablas trigonométricas, pasándole al segundo miembro é introduciéndole bajo el radical, sustituyendo valores y tomando logaritmos, se tendrá

$$\log.\ \cos.\ \frac{s}{2} = \frac{\log.\mathrm{sen.}\ 76^\circ\ 15'30'' + \log.\ \mathrm{sen.}\ 41^\circ\ 19'\ 30'' + \mathrm{cto.}\ \log.\ \mathrm{sen.}\ 69^\circ\ 44' + \mathrm{cto.}\ \log.\ \mathrm{sen.}\ 75^\circ\ 20'}{2}$$

El cálculo se dispondrá de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\log.\ \mathrm{sen}\ 76^\circ\ 15'\ 30'' &= 9{,}9873877 \\
\log.\ \mathrm{sen}\ 41^\circ\ 19'\ 30'' &= 9{,}8197607 \\
\mathrm{c.^{to}}\ \log.\ \mathrm{sen}\ 69^\circ\ 44' &= 0{,}0277552 \\
\mathrm{c.^{to}}\ \log.\ \mathrm{sen}.\ 75^\circ\ 20' &= 0{,}0143871 \\
\hline
\text{Suma.....} &= 19{,}8492907,
\end{aligned}$$

resultando

$$\log.\ \cos.\ \frac{s}{2} = \frac{19{,}8492907}{2} = 9{,}9246453\,,$$

que corresponde á $\frac{s}{2} = 32^\circ\ 47'$; y finalmente, $s = 65^\circ\ 34'$.

94. **Escalas**.—Debiendo ser el plano una figura semejante al polígono considerado en el terreno (76), se tendrá en la fig. 21 la série de razones iguales

$$\frac{a'b'}{\mathrm{AB}} = \frac{b'c'}{\mathrm{BC}} = \frac{c'd'}{\mathrm{CD}} = \dots\dots = \frac{m}{\mathrm{M}} \qquad [15],$$

representando por M la unidad de medida empleada para las líneas del terreno, y por m la magnitud adoptada para representar á M en el plano.

95. **Escala numérica**.—La *razon numérica* $\frac{m}{\mathrm{M}}$, expresion constante de la relacion que existe entre una línea gráfica cualquiera y su homóloga en el terreno, se llama *escala numérica* ó simplemente *escala*.

Esta relacion puede ser incomensurable cuando se toma para m una magnitud arbitraria; pero es mas conveniente que sea conocida su relacion con M. Tomando por ejemplo un decímetro para representar en el plano al metro tomado como unidad para las líneas del terreno, la relacion será

$$\frac{m}{\mathrm{M}} = \frac{0{,}1}{1} = \frac{1}{10}\,,$$

que se llama *escala de* 1 *por* 10.

Las relaciones $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$..... son tambien las *escalas decimales de* 1 *á* 100, *de* 1 *á* 1000... é indican del mismo modo que la magnitud real

4

de un metro tomada en el plano representa 100, 1000 .. metros en el terreno.

Las fracciones $\frac{1}{250}$, $\frac{3}{5}$ .... son tambien escalas. En la primera de ellas el metro en el plano representa 250 del terreno; y respecto á la segunda es preciso concebir al metro dividido en cinco partes iguales, y que de ellas se han tomado tres para representar la unidad lineal en el plano.

96. Concretándonos á las escalas generalmente adoptadas, que son las que tienen por numerador la unidad y de preferencia á las decimales, y llamando l á la magnitud real de una recta cualquiera del plano, L á su homóloga en el terreno, y M al denominador de la escala, la série [15] nos dará la proporcion

$$\frac{l}{L}=\frac{1}{M} \qquad [16],$$

de la que se deducen las igualdades

$$l=\frac{L}{M} \qquad [17], \qquad \text{y} \qquad L=lM \qquad [18].$$

Estas igualdades nos sirven para determinar la magnitud real de una línea cualquiera del plano, conocida su homóloga del terreno y el denominador de la escala; y recíprocamente, la línea del terreno, conocida su homóloga gráfica.

Ejemplo 1.º—Averiguar la longitud de una *línea gráfica*, sabiendo que su homóloga *natural* vale 236 metros, y que la *escala* es de $\frac{1}{1000}$. La fórmula [17] nos da el valor

$$l=\frac{236}{1000}=0^m,236.$$

Ejemplo 2.º—Averiguar la longitud de una *línea natural*, sabiendo que su homóloga *gráfica* vale $0^m,236$ en la misma escala.

La fórmula [18] nos da

$$L=0,236\times1000=236 \text{ metros.}$$

97. **Escalas gráficas**.—La expresion gráfica de la *escala* (94) se obtiene dividiendo una recta en partes iguales, que representa la unidad de medida adoptada para las rectas del terreno y que se hallan con esta en la razon numérica adoptada. Por medio de la escala gráfica se pueden apreciar con el auxilio del compás las distancias del plano.

La construccion de una escala exige el conocimiento de la magnitud real que ha de representar en el plano la unidad lineal adoptada para las rectas del terreno. Para hallar en general esta magnitud, dada la escala $\frac{m}{M}$, se dividirá la magnitud real del metro en M partes iguales, y se tomará el numero m de ellas para la unidad lineal en el plano. En las escalas decimales se pondrá en forma de entero la razon numérica dada, y se obtendrá:

$$\frac{1}{10}=0,1;\quad \frac{1}{100}=0,01;\quad \frac{1}{250}=0,004;\quad \frac{1}{1000}=0,001:$$

lo que da á entender en el primer caso, que el tamaño natural de un decímetro en el papel representa un metro del terreno; en el segundo caso que un centímetro en el papel representa un metro en el terreno; en el tercero, que 4^{mm} representan un metro, y así sucesivamente.

Conocida esta magnitud, nada más fácil que la construccion de la escala.

Para construir, por ejemplo, la escala de $\frac{1}{1000}$, se formarán las equivalencias siguientes de las rectas del plano y del terreno:

1^m	1000;
$0^m,1$	100;
$0^m,01$	10;
$0^m,001$	1;

y marcando con *cero* el punto A (fig. 27) de una recta indefinida, se toma la magnitud AB de un decímetro exacto para representar 100 metros: repitiendo de B á la derecha esta magnitud se tendrian los hectómetros de la escala. Dividiendo cada uno de ellos en 10 partes iguales se tendrán los decámetros que se señalarán con los números 10, 20, 30... Tomando por último un centímetro de A á C y dividiéndole en 10 partes iguales, se obtendrán segun las equivalencias que preceden, los metros de la escala, cada uno de los cuales tendrá la magnitud real de un milímetro.

98. La construccion de las escalas decimales se facilita mucho con el uso del papel cuadriculado, dividido en decímetros, centímetros y milímetros. Tambien se emplean con este objeto los *dobles decímetros* divididos que acompañan á los estuches de matemáticas, y las *escalas de metal, de boj* ó *de marfil*. Estas escalas constituyen por lo regular juegos completos, presentando convenientemente divididas y numeradas las escalas en las relaciones más comunmente usadas. La figura 28 representa una de estas escalas, y comprende la AB de 1 á 2500, en la que cada decímetro contiene 250 metros de la escala y toda ella alcanza hasta 500 metros, y la CD de 1 á 5000, que comprende hasta 1000 metros.

99. **Escala de transversales**.—Cuando se quiere llevar la apreciacion de las distancias más allá de lo que permite la escala gráfica descrita, se empieza por construir esta sobre una recta AB (fig. 29), despues de determinar como hemos dicho (97) la magnitud de 2^{cm} que corresponde á 100 metros para la escala de 1 á 500; y levantando en los puntos A y B perpendiculares á la AB, se llevará sobre ellas á partir de los mismos puntos A y B diez veces una magnitud arbitraria, y se unirán los últimos puntos de division C y D, por medio de una recta CD, la cual se dividirá

del mismo modo que la AB. Se tiran despues paralelas á la AB por los puntos de division de las AC y BD que se numeran, y tambien se trazan por último transversales desde los puntos de division de la parte CR á los de la AM como se ve en la figura. Por el empleo de las transversales se aprecian exactamente en esta escala hasta los metros que comprende una distancia cualquiera.

Para mayor inteligencia en la construccion, demostracion y uso de las escalas ordinarias y de transversales, véanse los párrafos 16, 17 y 18 de nuestro Tratado de Acotaciones.

* 100. **Trasformacion de las antiguas escalas de piés en escalas métricas.** —Dada una escala, por ejemplo de $2\frac{1}{4}$ pulgadas por 100 varas, se transforma en escala métrica reduciendo los números dados á una misma unidad, y hallando su razon numérica. Reduciendo á pulgadas tendremos

$$\frac{2,25}{3600} = \frac{1}{1600};$$

y no habrá que hacer otra cosa que construir la escala de 1 á 1600 (97).

101. Cuando en la escala de un plano solo se halla indicado *escala de piés*, y no se puede hallar desde luego la relacion entre las líneas del plano y las del terreno, se tomará con el compás la longitud de una línea del plano, se llevará esta longitud sobre la escala del mismo, y supongamos que señale 30 piés: reduciendo estos 30 piés á metros, se hallará $8^{m},359$, y se formará la proporcion

$$8^{m},359 : 30 :: 100^{m} : x = 358,9$$

Este valor 358,9 indica que habrá que tomar con el compás la longitud de 358,9 piés en la escala de piés del plano, para tener en el papel el valor de 100 metros en el terreno. Una vez conocida la longitud de los 100 metros, se formará la escala métrica ordinaria ó la de transversales.

102. **Orientacion de los planos.** —La determinacion del polígono de que nos hemos ocupado (76) da á conocer tan solo la *posicion relativa* de cada uno de sus vértices con respecto á los demás. Para obtener *su posicion absoluta*, es necesario conocer la direccion de una de las rectas del plano. En efecto, si solo se expresase en él que el punto a (fig. 30) es la esquina Sur de una casa A del terreno, este punto estaría completamente determinado: y no estándolo la direccion del lado AB, el polígono podria ocupar distintas posiciones, correspondientes á las AB′, AB″... del lado AB en las cuales los demás vértices no ocuparian las posiciones absolutas que les corresponden.

La posicion de AB quedaría determinada, si además de conocer A, se supiese que B estaba en línea recta con A y otro punto determinado; por ejemplo, un árbol G notable por cualquier circunstancia.

Generalmente la posicion de AB se determina por el ángulo m que forma con la meridiana NS del punto A, contando desde dicha línea AB hasta la AN que se dirige al Norte.

La orientacion puede hacerse con relacion á la meridiana astronómica (49) ó á la magnética (57) : si bien se acostumbra señalar en el plano las direcciones de ambas.

103. Cuando se ha determinado la direccion de AB, ó se ha trazado la meridiana, se dice que el plano está *orientado*, y esta operacion se conoce con el nombre de *orientacion del plano*.

Al trazar en el papel la figura *abcdef* semejante á la proyeccion horizontal del polígono del terreno ABCDEF (fig. 30), hay la costumbre de dividir en dos partes iguales por medio de la recta NS (fig 31) el rectángulo *mopn* que representa el papel en que el plano ha de dibujarse. Esta recta señala la direccion del meridiano; y la OE, perpendicular á ella en su punto medio sirve para determinar con NS los cuatro puntos cardinales *Norte*, *Sur*, *Este* y *Oeste* en las posiciones en que ordinariamente se consideran.

Hecho esto, se situará la línea *ab* homóloga de la AB de manera que forme con la meridiana NS un ángulo *m'* igual al *m*; y una vez situada esta línea, la construccion sobre ella de la figura semejante á la proyeccion del terreno, nos dará determinada la *posicion absoluta* del polígono *abcdef*.

Generalmente se borran despues las líneas NS y OE (fig. 31) y solamente se traza una recta *ns* paralela á la NS en uno de los ángulos del papel, que regularmente suele ser en el que indicamos en la figura, y que representa la direccion de la meridiana. Se la suele dar la figura de una flecha, siendo la punta *n* la que se dirige al Norte.

Este convenio de representacion tiene la ventaja de dar á conocer la situacion de los diferentes elementos geométricos del plano, con relacion á los puntos cardinales del globo.

Al dibujo así obtenido acompaña siempre la escala que ha servido para la construccion del plano, disponiéndola en su parte inferior.

CAPITULO III.

Nociones de Óptica —Anteojos

104. **Definicion y propiedades generales de la luz**.—La *luz* es un agente físico que produce en nosotros la vision de los objetos, presentando en la retina sus imágenes, producidas por los rayos luminosos emitidos directamente por los cuerpos en ignicion ó reflejados por los opacos. Así es, que siempre vemos los objetos en la direccion del rayo luminoso que nos trae su imágen. *Óptica* es la ciencia que se ocupa de las propiedades de la luz. Las que nosotros debemos tener en consideracion son las siguientes:

105. 1.ª La luz se propaga en línea recta en un medio homogéneo.

106. 2.ª La intensidad de la luz es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco de que proviene. Consecuencia de propagarse segun los rayos de una esfera cuyo centro ocupa el indicado foco de luz.

107. 3.ª Al llegar á las superficies opacas y pulimentadas se *refleja* formando el ángulo de reflexion igual al de incidencia, con respecto á la normal del punto del contacto, hallándose todas estas rectas en un mismo plano normal á la superficie reflectante. Cuando el rayo incidente es normal á esta superficie, el rayo reflejo se confunde con él.

108. 4.ª Al pasar de un medio transparente á otro, de diferentes densidades, se *refracta* ó separa de la direccion que llevaba, formando con la normal al punto en que encuentra á la superficie de separacion de ambos medios, un ángulo de refraccion diferente del de incidencia. Los rayos normales á la misma superficie no experimentan desviacion alguna.

109. 5.ª Para unos mismos medios *los senos de los ángulos de incidencia y de refraccion* correspondientes á distintas inclinaciones del rayo incidente, *se hallan en una relacion constante*, que se representa en general por n, y que se llama *índice de refraccion*.

El valor de n es $\frac{3}{2}$ para la luz que pasa del aire al cristal, y $\frac{2}{3}$ cuando pasa del cristal al aire. Dado el ángulo de incidencia $i = 25^\circ\ 16'$ puede calcularse el de refraccion por la fórmula

$$\frac{\text{sen. } i}{\text{sen. } r} = \frac{2}{3} \qquad [19],$$

en el segundo caso de los que hemos considerado, la cual dará

$$\log.\ \text{sen}\ r = \log.\ 3 + \log\ \text{sen.}\ 25^\circ\ 16' - \log.\ 2 = 9{,}8063481,$$

que corresponde á $r = 39^\circ\ 49'$.

110. Cuando la luz pasa de un medio á otro de mayor densidad, el ángulo de refraccion es mayor que el de incidencia; y cuando el primero llega á valer 90°, el de incidencia es 41° 49', si la luz pasa del cristal al aire, y recibe el nombre de *ángulo límite*, porque cuando pasa de 41° 49' la inclinacion del rayo incidente, la refraccion se convierte en reflexion.

111. 6.ª Algunos cuerpos cristalizados, entre ellos el cristal de roca, poseen una *doble refraccion*, originada por dos rayos refractados para uno solo incidente: uno de ellos, llamado *rayo ordinario*, sigue las leyes generales de la refraccion (109); y el otro da lugar á un índice de refraccion diferente, y se conoce con el nombre de *rayo extraordinario*.

112. **Imágenes producidas por la reflexion.**—Un rayo luminoso Ac (fig. 32) emitido del punto A (105), situado delante de un espejo MN, se reflejará en este punto tomando la direccion ch, que forma con la normal al espejo en el punto c el ángulo r igual al i (107). Tirando por A la perpendicular Ad á MN, prolongándola así como hc hasta que se encuentren en a, los triángulos rectángulos Acd y dca, que tienen el la-

do dc comun y $m = n'$ por ser estos ángulos iguales al n, serán iguales, y darán $Ad = da$, y como lo mismo demostraríamos respecto de otro rayo cualquiera Ac', los rayos emitidos por el punto A, concurriendo en a, formarán en él la imágen de A, simétrica de este punto con relacion al espejo. El punto B formará tambien su imágen en b, y una cosa análoga tendria lugar para los puntos intermedios. La imágen de un objeto cualquiera será por lo tanto *directa* y *simétrica* respecto de la superficie reflectante.

De aquí se deduce que cuando el espejo forma con el horizonte un ángulo de 45°, la imágen de un objeto vertical es horizontal, y al contrario.

113. **Propiedades de la luz doblemente reflejada.**—*Si un rayo de luz se refleja sucesivamente en dos espejos, el ángulo que forma el rayo incidente de la primera reflexion con el reflejo de la segunda es doble del que forman los espejos.*—En efecto, este ángulo t (fig. 33) es igual á $a + c$ (Geom. Teor. 14. Cor. 1.°); y como se tiene $a = 180° - (m + m') = 180° - 2m'$, y de un modo análogo $c = 180° - 2n$, se obtendrá

$$t = 360° - 2(m' + n) \qquad [20].$$

Tambien se tiene

$$s = 180° - (m' + n) \qquad [21];$$

y de las expresiones [20] y [21] resulta evidentemente $t = 2s$, conforme al principio enunciado.

114. *Caso particular.*—Si el espejo B (fig. 34) fuese normal al rayo reflejo AB de la primera reflexion, la segunda tendria lugar segun esta misma línea en el sentido BA (107).

Entónces el ángulo $(i + r)$ de los rayos NA y AB es, como en el caso anterior, doble del s que forman los espejos. En efecto, se tiene

$$i + r = 180° - 2a;$$

y en el triángulo rectángulo ABC,

$$s = 90° - a;$$

luego será

$$i + r = 2s$$

115. *Si dos espejos* A, B (fig. 35) *son paralelos, el rayo incidente de la primera reflexion y el reflejo de la segunda son tambien paralelos.*—En efecto, se tiene (Geom. Teor. 3. Cor. 2.°)

$$a + m + c = a' + n + c' \qquad [22];$$

y como tambien es $a = c$, $a' = c'$ en virtud de las leyes de la reflexion, y $c = a'$ (Geom. Teor. recíp. del 7), resulta tambien $a = c'$. La ecuacion [22] dará entonces $m = n$; lo que nos dice (Geom. Teor. 7) que las rectas MA y Bv son paralelas.

Si los espejos son muy pequeños y están muy próximos, las rectas MA y Bv se confunden sensiblemente, y la imágen M' de un objeto M visto desde v, por la luz que este objeto emite, doblemente reflejada por los espejos A y B, coincide con el mismo objeto visto directamente.

116. Recíprocamente, *cuando la imágen M′ de un objeto M visto directamente y por la reflexion de dos espejos coincide con el mismo objeto, los espejos son paralelos.*

117. **Fenómenos causados por la refraccion.—Refraccion atmosférica.**—La luz, al atravesar la atmósfera que nos rodea, compuesta de capas de diferente densidad y por consiguiente de *refrangibilidad* distinta, pasa siempre de una capa á otra más densa, acercándose cada vez á la normal á la superficie de separacion de dos capas consecutivas en el punto en que la corta, describiendo así una *trayectoria curvilínea cóncava hácia la tierra*, que nos hace ver el objeto luminoso ó iluminado que la emite en la prolongacion del último elemento de la curva, que es la tangente á la misma en el punto de observacion, y por consiguiente *más elevado* de lo que en realidad se halla dicho objeto. En nuestros climas la refraccion eleva los astros medio grado sobre el horizonte.

118. **Refraccion á través de los medios diáfanos terminados por superficies planas.**—*Si un rayo de luz se refracta al atravesar un medio de caras planas paralelas, al salir tomará una direccion paralela á la que llevaba ántes de penetrar en el segundo medio.*—En efecto, la refraccion que experimenta la luz al pasar del segundo medio para salir de nuevo al primero, tiene lugar en sentido inverso al que correspondia (109) para la primera refraccion; resultando de aquí la igualdad

$$\frac{\text{sen. } i}{\text{sen. } r} = \frac{\text{sen. } r'}{\text{sen. } i'};$$

pero los ángulos r é i' son iguales por alternos internos entre las caras del medio atravesado; de donde resulta la igualdad de los i y r', que forman con estas caras el rayo incidente y el emergente, los cuales son por lo tanto paralelos. Cuando el medio es de poco espesor, estos rayos se consideran en prolongacion uno de otro.

119. **Refraccion en los prismas.**—Suponiendo la seccion recta de un prisma trasparente y conociendo la inclinacion i del rayo incidente respecto á la cara de incidencia, se hallará fácilmente (109) por medio del ángulo r la direccion que toma al atravesar el prisma. El ángulo i' formado por esta direccion con la segunda cara del prisma se hallará por la ecuacion $i' = s - r$, siendo s el ángulo que forman las dos caras y que se llama *ángulo refringente del prisma.* Conocido i', nada más fácil que determinar el r', que da la direccion del rayo emergente. En virtud de esta construccion se ve que *los objetos vistos á través de un prisma aparecen desviados hácia el vértice del ángulo refringente.*

120. En el caso particular de que la seccion ABC (fig. 36) del prisma es un triángulo isósceles, rectángulo en C, el rayo normal ab atravesará la cara AB sin experimentar refraccion (108); al llegar á c formará con la normal n un ángulo de 45°, mayor que el ángulo límite 41° 49′ (110) y se

reflejará por lo tanto siguiendo la direccion cd; en d se reflejará por la misma razon, segun de, paralela á ab, atravesando de nuevo la cara AB sin refractarse.

121. **Refraccion en las lentes.**—Se da el nombre de *lentes* á unos discos de cristal, terminados por superficies esféricas ó por una esférica y otra plana. Son *convergentes* ó *divergentes*, segun tienen mayor espesor en el centro que en los bordes, ó al contrario. La refraccion en las lentes es análoga á la de los prismas (119) y se determina del mismo modo la marcha del rayo de luz, refiriéndola á los rádios tirados á los puntos de incidencia.

122. **Eje principal.—Centro óptico.**—Se llama *eje principal* de una lente L (fig. 37) la recta CC′, que une los centros C, C′ de curvatura de las superficies que terminan la lente. En esta línea se encuentra un punto o, que se llama *centro óptico*, y que goza de una propiedad notable: todo rayo luminoso que pasa por él, no experimenta desviacion angular; es decir, que el rayo emergente ó refractado es paralelo al rayo incidente. Para demostrar á la existencia de este punto en una lente bi-convexa, tiremos los rádios paralelos Cc $C'b$. Las tangentes t y t' en b y c á las superficies serán tambien paralelas, así como los elementos b y c de las curvas. La refraccion se verifica entonces como un medio terminado por caras planas, y por tanto, los rayos luminosos ab y cd son paralelos (118).

Para determinar el centro óptico, los triángulos semejantes Coc, $C'ob$ dan la proporcion

$$Cc - Co : C'b - C'o :: Cc : C'b; \qquad \text{ó bien}$$

$$oh' : oh :: Cc : C'b:$$

que nos dice, que *las distancias del centro óptico á las superficies de la lente son proporcionales á los correspondientes rádios de curvatura.*

Si estos rádios son iguales, resulta

$$oh = oh',$$

y por tanto el eje óptico se halla en el punto medio de la parte del eje principal interceptada por las caras de la lente.

123. **Focos en las lentes.**—Foco es el punto en que van á concurrir despues de refractarse en una lente, los rayos emitidos por un punto luminoso ó iluminado. Los rayos paralelos al eje principal (122), como los de la luz solar recibida por una lente ordinaria convenientemente situada, van á concurrir sensiblemente á un punto, que se llama *foco principal de la lente*, y que en general coincide con su centro de curvatura. La distancia entre este punto y la lente es la *distancia focal principal*.

124. *Focos conjugados.*—Cuando el punto luminoso se halla en L (fig. 38), situado en el eje principal y más distante que F de la lente, el rayo Lm forma con la normal un ángulo mayor que en el caso de ir á pa-

rar á *m* en direccion paralela al eje principal: el ángulo de refraccion será tambien mayor; y siguiendo como hemos indicado (121) la marcha del rayo luminoso, observaríamos que iba á cortar al eje en un punto *l* más distante de la lente que el foco principal F′. Los demás rayos emitidos de L irían tambien á parar á *l*, que será por lo tanto el foco conjugado de L, en razon á que si el punto luminoso estuviese en *l* su foco sería recíprocamente L.

A medida que L se acerca á la lente, *l* se separa de F′; y el foco se formaría en el infinito cuando L ocupase el punto F; propiedad recíproca de la indicada (123).

125. *Foco virtual.*—Cuando el punto luminoso pasa á L′ entre el foco principal y la lente, el rayo refractado no corta al eje principal: su prolongacion lo verifica en un punto *l′*, al cual se llama *foco virtual*.

126. **Ejes secundarios.**—El foco de un punto luminoso situado fuera del eje principal, se forma en la recta que une este punto con el centro óptico de la lente, á cuya recta se da el nombre de *eje secundario*. Este eje no experimenta desviacion angular (122) al atravesar la lente.

127. **Imágenes de los objetos vistos á través de las lentes.** —La imágen de un punto es el foco de los rayos de luz, que partiendo de él han atravesado la lente. La imágen de un objeto es el conjunto de los focos de sus distintos puntos. Si los focos son reales, la imágen es real; y virtual, si lo son los focos.

128. *Imágen real.*—Sea el objeto AB (fig. 39) situado á mayor distancia de la lente que el foco principal F′. Si consideramos tirado el eje secundario A*o*, todo rayo A*c*, emitido del punto A, irá á concurrir á un punto *a* (126) que será el foco conjugado de A y constituirá su imágen. De un modo análogo se formará en *b* la imágen de B con relacion al eje secundario B*o*, y en *e* la de E sobre el eje principal.

Un observador colocado á mayor distancia de la lente que la imágen *ab*, recibirá la impresion de los rayos luminosos emitidos de A y B como si proviniesen de *a* y *b*. Verá pues el objeto invertido, situado en *ab* delante del foco principal F, y de una magnitud muy pequeña con relacion á la que realmente tiene el objeto.

129. *Imágen virtual.*—Si el objeto AB (fig. 40), está entre el foco F y la lente, el rayo de luz A*cde* cortará al eje secundario A*o* en la prolongacion *ed* (125), en un punto *a*, que será el foco virtual de A. La imágen del objeto AB será *ab*; y observada desde *e*, se reconocerá que *es virtual, directa y amplificada* con relacion al objeto AB.

La lente biconvexa, empleada con el objeto de obtener estas imágenes, recibe el nombre de *microscópio simple.*

*130. *Relacion entre las distancias de un objeto y de su imágen á las caras de una lente biconvexa, los rádios de curvatura de estas caras, y el índice de refraccion que corresponde á la sustancia de que está formada.*

Representando por *d* la distancia del objeto L (fig. 38) á la lente; por *d′* la de su imágen *l* á la misma lente; por R y R′ los rádios de curvatura de las caras de la lente cuyos centros son F y F′ y por *n* el índice de refraccion $\frac{3}{2}$ hallado (109) para la luz que pasa del aire al cristal, se tiene la ecuacion

$$(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=\frac{1}{d}+\frac{1}{d'} \qquad [23],$$

que establece la relacion enunciada.

Si hacemos $d=\infty$, d' será la distancia focal principal, y representándola por f, la fórmula [23] se convertirá en

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) \qquad [24].$$

131. Comparando las fórmulas [23] y [24], resulta

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{d}+\frac{1}{d'} \qquad [25];$$

bajo la cual se considera comunmente la relacion de la distancia focal principal de la lente con las distancias focales del objeto y de su imágen

132. Cuando la imágen es virtual, d' cambia de signo, y la fórmula [25] se convierte en

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{d}-\frac{1}{d'} \qquad [26].$$

133. *Aumento de la lente.*—Este aumento, que es la relacion entre el tamaño de la imágen y el del objeto, tiene por medida la $\frac{d'}{d}$ entre sus distancias respectivas á la lente, segun se deduce de los triángulos semejantes oab, oAB (fig. 40). Para hallar el valor de esta relacion se recurre á la ecuacion [26], de la cual se deduce

$$\frac{d'}{d}=\frac{f}{f-d} \qquad [27],$$

y en la que se ve claramente que la relacion $\frac{d'}{d}$ aumenta á medida que f disminuye, es decir, á medida que aumenta la curvatura de la lente; y que aumenta tambien cuando crece d, lo que tiene lugar cuando el objeto AB se acerca al foco F.

134. **Descomposicion de la luz.—Acromatismo.**—Un rayo de luz solar se descompone al atravesar los prismas y las lentes en otros rayos elementales diversamente coloreados; lo cual es debido á su diferente refrangibilidad. Estos rayos rodean las imágenes de los objetos vistos á través de los prismas y de las lentes, de una *irisacion*, que ofusca la percep-

cion distinta de sus contornos; y para evitar este inconveniente se emplean en los instrumentos de óptica *lentes acromáticas;* entendiéndose por *acromatismo* el fenómeno de la refraccion de la luz sin *dispersion*.

Una lente acromática se compone de dos lentes, la una cóncavo-convexa y la otra bi-convexa.

135. **Instrumentos de óptica.—Anteojo astronómico.**—El anteojo astronómico es un instrumento de óptica destinado á producir la imágen perfectamente determinada de un objeto lejano. Se compone de un tubo cilíndrico A (fig. 41) en el cual entra á frotamiento otro tubo B, que lleva una lente convergente *o*, llamada el *ocular* del anteojo. Este segundo tubo, abierto por uno de sus extremos, está cerrado por el otro, por medio de una placa en la que hay practicado un taladro *a*, por el cual se dirigen las visuales.

Otro tubo C, provisto de una lente acromática O, que se llama *objetivo*, por hallarse del lado de los objetos que se miran, puede moverse á lo largo del tubo A para hacer variable la distancia entre las lentes.

El movimiento del tubo C se verifica por el tornillo exterior M, que lleva en el eje un piñon *m*, cuyos dientes engranan con los de una barra dentada *b* unida al tubo C.

El interior de los tubos está recubierto de un barniz negro y mate, con objeto de que sea absorbida la luz que llega á él y no haga confusas las imágenes. Al extremo del tubo C suele adaptarse á frotamiento una pieza cilíndrica, que impide á la luz solar herir al objetivo, molestando la vista del observador é impidiendo la percepcion distinta de las imágenes.

136. *Ocular de Ramsden.*—Este ocular se compone de dos lentes plano-convexas, que tienen por objeto evitar la confusion que produce en la imágen una sola lente, en razon á que los rayos luminosos se cortan en puntos próximos al determinado teóricamente (129), produciendo unas superficies brillantes llamadas *cáusticas por refraccion*, fenómeno que se conoce en Física con el nombre de *aberracion de refrangibilidad*. Es el ocular que generalmente se emplea en los anteojos topográficos.

137. **Retículo.**—El *retículo*, cuya seccion en sentido del eje del anteojo, está representada en *r*, se compone de una pieza metálica circular *a* (fig. 42) con un taladro concéntrico, en el cual y en la direccion de dos diámetros perpendiculares entre sí, se hallan colocados dos hilos metálicos sumamente delgados, ó bien dos hilos de tela de araña ó filamentos de seda. Estos hilos se llaman *cerdas* ó *hilos del retículo*.

La pieza *a* puede moverse con los hilos lateralmente, aflojando uno de los tornillos *t* y apretando el opuesto; y de un modo análogo puede subir ó bajar por medio de los *t'*. Todos estos tornillos tienen sus tuercas en el tubo *b* del anteojo, que con este objeto suele ensancharse á las inmediaciones del retículo.

Muchos retículos modernos tienen sólo un tornillo lateral; ocupando el lugar del otro un resorte, que oprimido cuando se aprieta el tornillo, obra por su fuerza elástica moviendo la pieza *a* cuando el tornillo se afloja. El inferior *t'* está sustituido análogamente por otro resorte.

138 **Formacion de las imágenes en el anteojo astronómico** —Colocado un objeto AB (fig 43) á gran distancia delante del objetivo L de un anteojo astronómico, se formará en ab (128), una imágen, *real*, *invertida*, situada más allá del foco F de la lente objetivo y tanto más próxima á él cuanto mayor sea la distancia á que se halla el objeto. La imágen de un astro se forma en el foco mismo (123). Situada la imágen ab entre el ocular L′ y su foco F′, tendrá lugar (129) la formacion de una nueva imágen $a'\,b'$, *amplificada, directa* con respecto á ab, é *invertida* con relacion al objeto. Esta imágen $a'b'$ es la que se observa desde m con el auxilio del anteojo.

139. **Anteojo terrestre.**—El anteojo terrestre tiene además del ocular y el objetivo, dos lentes convergentes, cuyo objeto es presentar las imágenes directas con relacion á los objetos que se miran á través del anteojo.

En Topografía se emplean anteojos de las dos clases que hemos mencionado. La ventaja que el terrestre presenta de dar las imágenes directas, está compensada en el astronómico por la claridad que produce el menor número de lentes que la luz atraviesa; y la extrañeza causada en las observaciones por la inversion de las imágenes es un inconveniente que desaparece á los pocos dias de práctica.

140. **Distancia variable entre el ocular y el objetivo.—Tiro del ocular.**—La aplicacion del anteojo á las operaciones topográficas exige que la imágen del objeto se obtenga con toda claridad, y que se forme exactamente en el plano del retículo. La primera circunstancia se obtiene (135) por el movimiento del tornillo que hace correr al tubo del objetivo y coloca á esta lente á la distancia conveniente del ocular; la segunda por lo que se llama *tiro del ocular*, el cual varía con la vista del observador, pero en los límites ordinarios es independiente de las distancias variables á los distintos puntos que se observen. Cuando la imágen ab (fig 44) no se forma en el plano R del retículo, las visuales tiradas desde los puntos o, o', o'' situados delante del taladro que presenta el tubo T del ocular presentan al cruzamiento C de las cerdas del retículo cubriendo sucesivamente á los puntos m, h, h' de la imágen. Cuando por el tiro del ocular coincida ab con R el punto C cubrirá al m en todas las posiciones del ojo del observador.

141. **Eje óptico del anteojo.—Direccion de la visual.**—*Eje óptico* del anteojo es el eje principal comun á ambas lentes, y contiene en su prolongacion al punto del objeto observado, cuya imágen se forma en él. El eje óptico coincide sensiblemente con el de figura del tubo del anteojo, y es la recta que determina la *direccion de la visual*, que se emplea en las observaciones topográficas.

142. **Centracion del retículo.**—Para la determinacion exacta de la visual es indispensable que el cruzamiento de las cerdas del retículo se halle precisamente en el eje óptico (141). Si por el contrario se halla en la posicion a (fig 45), fuera del eje óptico BA, la visual sería ao para la posicion o del objetivo, y ao' para la o', yendo á parar á distintos puntos

A′, A″ del objeto, diferentes de A, que se halla en el eje óptico, y en el que concurririan todas las visuales, cuando el centro del retículo estuviese en *c*, cualquiera que fuese la posicion del objetivo en su movimiento á lo largo del tubo del anteojo.

Para centrar el retículo se dirige la visual á un objeto que presente una recta bien determinada *rs* (fig. 46), que se hace cubrir con la cerda *mm*, moviendo convenientemente el anteojo. Si suponemos que está fuera del centro de la seccion circular del tubo del anteojo, será una cuerda de igual magnitud en todas sus posiciones, y equidistará del centro. Dando una semirevolucion exacta al tubo irá á ocupar la posicion simétrica *m′m′*; y para hacer que la cerda ocupe la posicion *ab* de un diámetro será preciso aflojar el tornillo *c* y mover el *d* hasta que equidiste de *mm* y *m′m′*, que pueden haberse señalado en un reglon, así como la paralela equidistante *ab*.

Haciendo despues coincidir el otro hilo con la misma recta *rs*, puede llevársele á ocupar la posicion del diámetro *cd*. Entonces el punto de interseccion de los hilos estará en el centro de la seccion del tubo y por consiguiente en su eje de figura.

Así, durante una revolucion completa ó un número cualquiera de revoluciones del anteojo, el cruzamiento de las cerdas cubrirá un mismo punto de observacion.

CAPITULO IV.

Instrumentos en general y partes principales de que se componen.

143. **Instrumentos topográficos.**—Los instrumentos empleados en la Planimetría son unos aparatos destinados á la determinacion de las longitudes, y de los ángulos que forman entre sí las rectas que unen puntos determinados del terreno.

Para la medida de la recta que une dos de estos puntos se emplea otra magnitud lineal determinada, que se elige por unidad. Cuando esta puede aplicarse sobre dicha recta en el sentido de toda su longitud, la medida se llama *directa*.

Existen tambien instrumentos, conocidos con el nombre general de *telémetros*, palabra griega que significa *medida á lo léjos*, por medio de los cuales pueden obtenerse las medidas de una manera *indirecta*, es decir, sin la aplicacion directa de una unidad lineal cualquiera.

Los instrumentos que se emplean para hallar *gráficamente* los valores de los ángulos, se conocen con el nombre de *goniógrafos*; y se llaman *go-*

niómetros los que dan dichos valores expresados en grados y sus divisiones.

Unos instrumentos angulares dan los valores de los ángulos reducidos á su proyeccion horizontal, y otros los dan en el plano de los objetos. En este último caso será preciso reducirlos al horizonte (91).

144. **Partes principales de los instrumentos.—Limbos.**—Se da el nombre de *limbo* en todo instrumento angular á un disco metálico, ó á la superficie lateral de un tronco de cono de muy poca altura, destinados á contener la division geométrica que sirve para la apreciacion de los grados y fracciones de grado de un ángulo dado AOM (fig. 47).

Los limbos que acompañan á algunos instrumentos son semicirculares; y en algunos solo comprenden la sesta, octava... parte del círculo, y se llaman *sestantes*, *octantes*...

145. **Diferentes graduaciones de los limbos.**—Los limbos están generalmente divididos en grados y cada grado en dos ó en tres partes iguales, siendo 30′ ó 20′ los correspondientes límites de apreciacion angular que proporcionan. En algunos instrumentos se extiende á 10′, estando el grado dividido en seis partes.

El sentido de la graduacion es en general de *izquierda á derecha*, y algunas veces presenta la direccion contraria ó ambas; y se refiere á la lectura de la numeracion á partir del cero y suponiendo que se observa desde el centro del limbo. Esta numeracion señala los grados de diez en diez; las divisiones que entre las numeradas corresponden á los cinco grados van señaladas con un trazo más largo que las que indican las demás; siendo menores aun las que señalan las fracciones de grado.

Los limbos semicirculares están á veces numerados de manera que presentan la graduacion completa, repitiendo la numeracion á partir desde el cero y en el mismo sentido, con los números 180, 190, 200....

146. **Alidadas.**—Se da el nombre de *alidada* á la parte de un instrumento destinada á determinar la direccion de la visual, en las distintas posiciones que deben ocupar las rectas que determinan los ángulos en el terreno (76).

Las alidadas son *fijas*, cuando ocupan una posicion invariable con relacion á las demás partes del instrumento que entran á constituir, y en los demás casos *variables* ó *giratorias*, y pueden ser de varias clases.

147. **Alidada de pínulas.**—Se compone de una regla de metal AB (fig. 48), ordinariamente de 0m,55 de longitud, en cuyos extremos se elevan perpendicularmente á ella otras dos reglas P, P′, cuya altura suele ser 0m,2, llamadas *pínulas*, las cuales se hallan unidas á la AB por las charnelas *c* y *c′*. Unas clavijas *t* y *t′* sirven para mantener las pínulas en la posicion perpendicular á la regla AB, oprimiendo los rebordes *a*, *a′* en que terminan.

Dando un cuarto de revolucion á las clavijas, dejan de oprimir los rebordes respectivos, y entonces las pínulas pueden unirse á la regla AB, doblándolas por las charnelas *c*, *c′*. En esta disposicion se prestan á encerrarse cómodamente en una caja rectangular, lo que facilita el trasporte de la alidada.

Las pínulas tienen por objeto determinar la direccion de las visuales que deben tirarse á los extremos de los lados de los ángulos que se han de medir; para lo cual, cada una de ellas presenta una hendidura longitudinal bastante estrecha, e, e' y un rectángulo vaciado r, r' y dividido en dos partes iguales por una cerda, la cual se halla en prolongacion de la hendidura practicada en la misma pínula de manera que ambas forman una misma recta.

El rectángulo r de una de las pínulas corresponde á la hendidura e' de la otra, y el r' de esta á la hendidura e de la primera.

Para dirigir las visuales se toma siempre como *ocular* la hendidura de la pínula que se halla del lado del observador, y como *objetivo* la cerda que se le opone en la otra pínula.

Las pínulas deben tener bastante altura para distinguir los puntos muy elevados ó muy deprimidos con respecto al plano de la regla. Esta debe ser más estrecha en la parte mn, hácia la cual presenta un canto rebajado, con objeto de trazar cómodamente por ella líneas de lápiz sobre el plano en que la alidada debe insistir, cuando se hace uso de ella para la medida de los ángulos.

La recta determinada por la hendidura y la cerda de cada una de las pínulas debe ser perpendicular al plano de la regla. De aquí se deduce que ambas son paralelas y determinan un plano, perpendicular tambien al de la regla, llamado *plano de colimacion*, el cual debe contener á la recta mn, llamada tambien *línea de fé* ó *de colimacion*

El canto rebajado de la regla suele tener grabada una escala, y á muchas alidadas acompaña un nivel de aire fijo á la regla AB para que pueda dársele la posicion horizontal (30).

148. **Alidada de anteojo** —La alidada de anteojo está dispuesta de modo que sobre la regla AB (fig. 49) se eleva un soporte perpendicular á ella, al extremo del cual gira alrededor de su eje de figura y dentro de una anilla un eje paralelo á AB, á cuya extremidad puede el eje óptico del anteojo m describir un plano perpendicular á la regla. El plano descrito es el que hemos llamado (147) de colimacion.

149 **Empleo de los limbos y las alidadas en la determinacion de los valores angulares** —Situado el centro del limbo en el vértice O (fig. 47) del ángulo, y dirigiendo al punto A una visual por las pínulas fijas situadas en la recta que une las divisiones 0 y 180 del limbo, cuyas pínulas constituyen entónces una alidada fija (146), y otra al M por medio de otra alidada, giratoria alrededor del centro O del limbo, la amplitud angular m obtenida en la graduacion de éste será el valor en grados del ángulo AOM Cuando el limbo esté horizontal (30), el ángulo obtenido será el de los objetos reducido al horizonte.

150. Para determinar gráficamente el valor de este ángulo se horizonta un tablero Q (fig 50), y marcando en él un punto O se dirige por las pínulas de la alidada AB, dispuesta de manera que el canto de su línea de fé

pase por dicho punto, una visual tirada por ab y cd al punto M; trazando despues una recta por el canto de la línea de fé. Haciendo lo mismo respecto al punto N, el ángulo AOA′ que resulta trazado en el tablero, será el ángulo plano correspondiente al diedro que forman los planos determinados por las verticales V, V′ y el punto O, cuya interseccion es la vertical OP de este punto.

151. **Tornillos empleados en los instrumentos.**—Además de los tornillos que sólo se emplean para unir las diferentes piezas entre sí y facilitar el desarmarlas, hay otros que sirven para variar convenientemente sus posiciones relativas y se llaman *tornillos de correccion*; así como otros que tienen por objeto modificar los movimientos de las partes giratorias del instrumento, con relacion á las que están destinadas á permanecer fijas en posiciones determinadas.

152. **Tornillos de presion, y de ajuste ó coincidencia.**—El movimiento de una pieza N (fig. 51), que puede girar alrededor de un eje, apoyándose siempre sobre otra L destinada á permanecer en una posicion invariable, puede impedirse apretando un tornillo a que oprime entre sí, y contra la pieza L á dos placas proyectadas en p: una de las cuales, invariablemente unida á N imposibilita su movimiento. El tornillo a se llama *de presion* por lo que acabamos de indicar; ó de *movimiento rápido*, porque aflojándole puede girar la pieza N libremente.

El tornillo a entra generalmente á formar parte de un sistema adecuado de movimientos, con otro tornillo c, llamado de *ajuste* ó *coincidencia*, y tambien de *movimiento lento*, en razon á la disposicion del sistema. Por ella, una vez oprimido el tornillo a, se hace girar al c, que avanzando en su tuerca practicada en una esfera dispuesta en la placa superior p, lleva consigo á la pieza b y á la N invariablemente unida á ella. El movimiento que les comunica es muy lento en razon á que el paso del tornillo es muy pequeño con relacion al rádio de su cabeza, á la que se aplica la fuerza que le hace girar.

La disposicion explicada varía en los instrumentos alemanes, en los cuales el movimiento lento se efectúa moviendo un tornillo, que se halla en contacto con una pieza unida á la parte móvil del instrumento y la oprime contra un resorte que obra en sentido contrario.

153. **Nonius ó Vernier.**—Se da este nombre á una parte de los instrumentos, que tiene por objeto llevar la apreciacion de las longitudes y de los valores angulares más allá de lo que permite la que puede obtenerse por las divisiones de la unidad lineal ó del limbo de un instrumento.

La invencion de este ingenioso método de apreciacion es debida al español Nuñez, de quien ha tomado el nombre, y modificada y generalizada por Vernier, matemático francés.

154. **Nonius recto.**—Sea AB (fig. 52) una regla dividida en centímetros y milímetros: tomando otra regla ab de 9^{mm}, y dividiéndola en 10 partes iguales, cada division de esta regla, que constituye el nonius, es $\frac{9}{10}$

de milímetro y se diferencia de la menor division de AB en $\frac{1}{10}$ de milímetro. Haciendo correr al nonius en el sentido *ab* de la graduacion hasta que coincida la division 1 del nonius con la 1 de la regla, el canto *a* del primero se hallará separado del A de la segunda en $\frac{1}{10}$ de milímetro; y del mismo modo se hallarian estos cantos separados en $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ de milímetro, cuando coincidiesen las divisiones 2, 3 ... de ambas reglas.

155. *Usos del nonius recto.—1.° Dada una longitud cualquiera, determinar su valor.*

Para hacer aplicacion del nonius á la medida de una longitud, supongamos que se trata de la de un objeto CD (fig. 53), la cual además de tener 3 centímetros y 6 milímetros de la regla que se toma por unidad, contenga una fraccion *ra* de milímetro que se trata de valuar. Si á continuacion de dicho objeto y en contacto suyo y de la regla se coloca el nonius *ab*, que tambien suele hallarse dispuesto de modo que pueda correr á lo largo de la regla AB, no habrá mas que examinar con cuidado cuál de las divisiones del nonius coincide con una de las de AB; y si fuese la octava por ejemplo, entonces la division 6 de la regla unidad AB, que podemos suponer hace veces de línea cero, se hallará separada de la línea cero del nonius la distancia de $\frac{8}{10}$ de milímetro, y este será el valor de la fraccion *ra* de milímetro que se trataba de valuar; de modo que en el ejemplo actual la longitud del objeto CD es $0^{m},0368$.

156. 2.° *Determinar el valor de una longitud cualquiera en la medida adoptada, para referirla ó tomarla despues en el terreno ó en el plano.*

Sea la distancia $0^{m},0368$ la que queramos fijar en la regla unidad. Haremos correr al nonius á lo largo de la regla AB (fig. 53, sin el cuerpo CD) hasta que el cero del nonius coincida con la division 6 milímetros del cuarto centímetro, y tendremos desde el punto A de la regla hasta esta division, la distancia $0^{m},036$; para tomar además los $\frac{8}{10}$ de milímetro, haremos correr al nonius en el sentido AB hasta que coincida la division 8 del mismo con la primera que encuentre de la regla, y la parte *ra* será el valor de la fraccion $\frac{8}{10}$ de milímetro que queríamos apreciar; con lo que se habrá determinado la longitud A*a* de $0^{m},0368$.

157. **Nonius circular.**—Haciendo aplicacion de lo dicho (154) á los valores angulares, supongamos el limbo L (fig. 51) dividido en grados y medios grados, y tratemos de apreciar fracciones de medio grado ó del arco

de 30′, que es el límite de apreciacion del limbo Si se toman 29 de las menores divisiones del limbo, y se divide en 30 partes iguales el arco que comprenden, la diferencia entre una division del limbo y una de las del nonius N será $\frac{1}{30}$ de 30′, y el nonius apreciará de minuto en minuto. Así cuando coincida con una division cualquiera del limbo la 1.ª, 2.ª, 3.ª..... del nonius, la fraccion que se trata de apreciar valdrá 1′, 2′, 3′.....

158. *Usos del nonius circular.*—Aplicando á la medida del ángulo AOM (fig 47) el procedimiento explicado (149), suponiendo que la alidada móvil va provista de un nonius cuyo *cero* se halla en el plano de colimacion de la alidada (147), y coincide con el del limbo en su posicion primera OA, el arco recorrido por el cero del nonius para pasar á la segunda OM y apreciado con auxilio del nonius, será el valor del arco *m* con ménos error que 1′. Supongamos, en efecto, que el indicado cero ocupa entónces la posicion *s* (fig. 51): observaremos que ha pasado de la division correspondiente á 62° 30′, y que esta es la apreciacion que el limbo proporciona; para conocer el valor del arco que media entre la division considerada en el limbo y el cero del nonius, no habrá más que buscar la division del nonius que coincide exactamente con una de las del limbo, y que en el caso que consideramos es la 17, para obtener como hemos indicado el valor 62° 47′ del arco recorrido.

Cuando aparecen coincidiendo dos ó más divisiones, á causa de la excesiva pequeñez del arco que comprenden, se elige la que ocupa la mitad del arco en que dichas divisiones se confunden á la vista.

159. Recíprocamente, para resolver el problema análogo al indicado (156), se haria coincidir primeramente el cero del nonius con la division del limbo que señala los 62° 30′, oprimiendo entonces el tornillo *a* de presion, y moviendo el *c* hasta que la division 17 del nonius coincida exactamente con la primera que encuentre del limbo, marchando en el sentido de la graduacion.

160. *Disposiciones particulares que presenta el nonius.*—Algunas veces el nonius se halla dividido en dos partes iguales, que se hallan á uno y otro lado del cero (fig. 54), estando ambas numeradas en el sentido de la graduacion. Esta disposicion permite dar al nonius una forma simétrica respecto del cero.

Cuando el limbo á que acompaña el nonius presenta dos divisiones, el nonius se halla doblemente graduado, ó repetido en sentidos contrarios; y debe tenerse presente que en la apreciacion de un ángulo cualquiera, se emplea el nonius que está graduado en el mismo sentido que la graduacion de que se hace uso en el limbo.

161. **Apreciacion de los nonius en general.**—Si representamos por d el valor de la menor division de la regla ó limbo, por x la diferencia entre una division d de la regla ó limbo y una del nonius, $d - x$ será el valor de esta última division. Llamando además n al número de divisiones del nonius, el valor de la longitud *ab* (fig. 52) ó del arco *sr* (fig. 51) será

$(d - x)\,n$. El mismo arco en la regla ó limbo estará expresado por $d\,(n-1)$ y podremos establecer la ecuacion

$$(d - x)\,n = d\,(n - 1) \qquad [28];$$

de la que resulta

$$x = \frac{d}{n} \qquad [29].$$

Para hallar por lo tanto lo que el nonius aprecia, bastará *dividir el valor de la menor division del limbo por el número de divisiones del nonius.*

162. Aplicando á varios ejemplos la fórmula [29], obtendremos los resultados siguientes:

1.° Si $d = 0{,}5$ y $n = 5$, se tendrá $x = \dfrac{0{,}5}{5} = 0{,}1$.

2.° Si $d = 60'$ y $n = 30$, resultará $x = \dfrac{60'}{30} = 2'$.

3.° Si $d = 20'$ y $n = 60$, se hallará $x = \dfrac{20'}{60} = \dfrac{1200''}{60} = 20''$.

163 **Aparatos de union de los instrumentos con los piés en que se apoyan**.—La parte que principalmente constituye un instrumento se une al pié sobre que se dispone en las operaciones, por medio de aparatos, que tienen además por objeto disponer convenientemente el plano ó limbo que se emplea en la determinacion de los valores angulares (149 y 150), así como el eje principal de rotacion.

Estos aparatos son de varias clases.

164. **Cubos ó mangos huecos.**—Se da este nombre á una pieza cónica, hueca interiormente é invariablemente unida al instrumento, destinada á ajustarse por medio de un tornillo de presion p (fig. 55) á una espiga sólida de la misma forma, en la cual termina el pié sobre que aquel ha de disponerse.

165. **Rodillas**.—Los mangos ó cubos, cuando van acompañados de articulaciones que permiten colocar el plano del limbo en varias posiciones, se llaman *rodillas*.

166 *Rodillas de nuez.*—El mango m (fig. 56) va atravesado en su parte superior por un tornillo T, que sujeta dos piezas esféricas cóncavas p en forma de conchas, las cuales abrazan una esfera que lleva el limbo del instrumento en su parte inferior: esta esfera se puede mover dentro de las *conchas* en todos sentidos, deteniendo este movimiento para colocar el plano del limbo en la posicion conveniente, por medio de la presion que ejerce el tornillo T.

167 *Rodilla de cilindros ó de Cugneau.*—Se compone de dos cilindros que forman un solo cuerpo, y cuyos ejes, perpendiculares entre sí y proyectados en z y z' (fig. 57), proporcionan una doble articulacion, del cuerpo de los cilindros alrededor de z, y de la parte del instrumento á que se hallan unidos alrededor de z'; por la cual se mueve el plano del limbo en dos sentidos diferentes

168. **Plataformas.**—Las plataformas son unos aparatos de union, que permiten dar una posicion horizontal al plano del instrumento de que forman parte, por medio de tornillos ó de la combinacion de éstos con charnelas ó con muelles. Decribiremos las más comunmente usadas.

169. *Plataforma de cuatro tornillos.*—Se compone de una placa circular AB (fig. 58) en la cual se hallan las tuercas s, s' correspondientes á los tornillos t, t', y que se une por medio de un pasador á la espiga que constituye el eje del instrumento. Los tornillos apoyan sus cabezas en la placa inferior CD, fija al pié del mismo. Cuando se hace girar á dos tornillos t, diametralmente opuestos, se obliga á las tuercas á recorrer los pasos de la rósca, y elevan ó deprimen á la placa AB juntamente con la espiga y toda la parte superior del citado instrumento. La espiga suele terminar en una superficie esférica, que roza suavemente con las paredes interiores de la pieza E, la cual forma parte de la placa inferior.

El centro de la superficie esférica es un punto constantemente fijo de posicion, para todas las que se den á la placa AB.

170. Por el movimiento sucesivo de cada par de tornillos, puede darse á la placa AB (fig. 59) la posicion horizontal valiéndose del nivel de aire (25), colocándole primero en la direccion tt, y horizontando esta línea por los tornillos t, y despues en la $t't'$, que se horizonta del mismo modo por los t'. Entónces el eje de rotacion del instrumento, que es por construccion perpendicular á la placa AB, habrá tomado la posicion vertical (33).

171. La plataforma de cuatro tornillos está dispuesta otras veces de modo que estos ocupan una posicion horizontal, disposicion casi abandonada hoy por defectuosa.

Tambien se ha modificado empleando dos tornillos, que con el auxilio de dos charnelas ó de dos resortes opuestos, proporcionan asimismo el movimiento del limbo en dos sentidos perdiculares entre sí. La figura 60 es la proyeccion horizontal de la plataforma de resortes r, r', que determinan con los tornillos respectivamente opuestos las rectas rt, $r't'$ en sentido de las cuales tiene lugar el indicado movimiento.

172. *Plataforma de tres tornillos.*—En la plataforma de tres tornillos, el eje m (fig. 61) del instrumento de que forma parte, es perpendicular á la vez al plano A y á la pieza de tres brazos B, en cuyos extremos se hallan practicadas las tuercas de los tornillos T, T′, T″, los cuales apoyan sus extremidades en el platillo C fijo al pié del instrumento.

Por medio de los tornillos T, T′ (fig. 62) la inclinacion del plano de la pieza B, y por consiguiente la de su paralelo A, puede variar en el sentido de la recta TT′ que une estos tornillos, y por el T″, en el sentido de la T″h, determinada por el pié del tornillo y el punto medio de la TT′.

173. **Piés de los instrumentos.**—Se llaman *pies de los instrumentos* los aparatos destinados á sostenerlos á una altura conveniente, para poder manejarlos y servirse de ellos con comodidad en las operaciones. El pié de un instrumento está formado algunas veces de un simple *baston* ó *chuzo*, terminado en su parte inferior por un regaton aguzado de hierro, y

provisto en la superior de una espiga destinada á recibir el mango hueco de los instrumentos (164).

174. **Trípodes.**—El más sencillo de todos se compone de un prisma triangular terminado por una espiga. A cada una de las caras del prisma se adapta el extremo superior de un pié de madera por medio de un perno de rosca, y se asegura por una tuerca móvil. Los piés terminan en regatones de hierro armados de puntas, que se introducen en los terrenos blandos y se adhieren perfectamente á las rocas.

En los trípodes generalmente empleados hoy, cada pié se compone de dos piezas longitudinales unidas por travesaños, y en vez de espiga tienen un taladro en el centro de la meseta M (fig. 63) por el cual pasa una varilla *v* terminada en rosca por su extremo superior *r*, con su correspondiente tuerca *t* para que se apoye en la parte superior de la meseta. Un resorte en espiral contenido en el cilindro *c*, oprime á la tuerca contra la meseta cuando se atornilla la rosca *a* al cilindro; y se eleva la varilla por el mango *m* á fin de introducir el tornillo *r* en una segunda tuerca, practicada en la parte inferior de la plataforma del instrumento.

175. El *trípode cónico* de los instrumentos ingleses, llamado así por la forma que toma cuando está cerrado con objeto de proporcionar un cómodo transporte, tiene armados los piés de regatones de hierro que juntos forman un cono *c* (fig. 64), y por la parte superior llevan unas piezas de cobre *p* sujetas por medio de tornillos y terminadas en espigas, las cuales entran en otras piezas unidas á un platillo ó meseta *m*, formando una articulacion ó juego de charnela. Sobre el platillo va la rosca *r* que se introduce en la correspondiente tuerca de que va provista la parte inferior de la plataforma del instrumento.

Para que la rosca *r* no reciba golpes que la inutilicen cuando no se usa el trípode, hay otra tuerca practicada en una pieza adicional *s*, llamada *sombrerete*, la cual se atornilla á la rosca *r*. Tres anillas de metal de diferentes diámetros a, a', a'', sirven para mantener unidos los piés.

CAPITULO V.

Medida y repeticion de los ángulos

176. **Clasificacion de los ángulos que se consideran en Topografía.**—Las proyecciones horizontales de los ángulos, obtenidas directamente (149 y 150) ó por el cálculo (91), reciben el nombre de *ángulos azimutales*; y el de *rumbos ó azimuts* cuando son los que forman las rectas consideradas con la meridiana magnética (57), que tambien pueden referirse á la astronómica (49).

177. Los ángulos azimutales y los rumbos se cuentan generalmente desde 0 á 360°, cuando se emplea un limbo de círculo entero, determinando así por un valor angular perfectamente definido la direccion de cada una de las rectas, que pueden considerarse en una *vuelta* entera *de horizonte* alrededor del punto de observacion. Los ángulos azimutales así determinados se llaman *ángulos de direccion*. El valor del ángulo de dos de las rectas consideradas se obtiene hallando la diferencia de sus correspondientes ángulos de direccion.

178. Los ángulos situados en planos verticales se llaman *ángulos de elevacion* ó *altura* cuando se refieren á la horizontal OM (fig. 65) del vértice O y el otro lado ON va por encima de ella, como el NOM. El ángulo MOP, que forma con la misma horizontal la visual tirada al punto inferior P, es un *ángulo de depresion*.

El ángulo ZON, que forma la visual ON con la vertical ZO, y que es complemento del ángulo de elevacion MON, se llama *ángulo zenital*.

Si quisiéramos referir la direccion de la visual OP á la vertical OZ, la determinaríamos por el ángulo ZOP cuyo exceso sobre ángulo ZOM es el ángulo de depresion MOP.

Observaremos, que para referir á la vertical un ángulo de elevacion MON, basta restarle de 90°, y resultará el ZON; y si el ángulo es el de depresion MOP, se deben añadir 90° á su valor para obtener el ZOP.

179. Si cuando los lados del ángulo no tienen las posiciones indicadas movemos el plano sobre que insiste la alidada, hasta tanto que los extremos de los lados de dicho ángulo se hallen en la prolongacion del mismo plano, el ángulo resultará determinado en el plano de los objetos.

180. **Divisiones de la circunferencia.** —Los limbos de la mayor parte de los instrumentos y las tablas de líneas trigonométricas ó de sus logaritmos están arreglados á la division *sexagesimal*. Cuando aquellos lo están á la *centesimal* se reducen fácilmente á la primera, pues la relacion

$$\frac{360}{400} = \frac{9}{10},$$

nos indica que bastará restar del número dado su décima parte.

Ejemplo. Reducir 28°,061729 de la division centesimal á grados de la division sexagesimal.

Número dado	28°061729;
quitando su décima parte,	2,806173,
se obtiene	25°,255556.

Convirtiendo las decimales en minutos y segundos resulta por último 25° 15′ 20″ próximamente.

181. Si por el contrario, tuviéramos que reducir estos grados á la division centesimal, no habría más que añadir su novena parte, despues de reducir los minutos y segundos á decimales, y se tendría:

	25°,255556 ;	
añadiendo la novena parte,	2,806173 ,	
se obtiene	28°,061729 ,	

ó 28° 6′ 17″,29 centesimales.

182. **Medida de los ángulos azimutales.—Error de colimacion.**—Ya hemos indicado (149) la manera de obtener los ángulos azimutales y los situados en el plano de los objetos; y lo dicho entonces supone que el plano de colimacion de la alidada giratoria coincide exactamente con el de la fija, ó tiene por traza sobre el plano del limbo la línea (0—180°) de su graduacion. Cuando no sucede así, el ángulo aCm (fig. 66) que entónces forman es el *error de colimacion*. Este error no influye en la determinacion del valor de un ángulo cualquiera: pues haciendo coincidir esta línea de fé con la (0—180°) del limbo, y dirigiendo la visual al punto A, al mover despues la alidada para dirigirla al B, el arco mn recorrido por la visual es exactamente igual al ab que ha recorrido la línea de fé, y que mide el valor del ángulo; pues todos los puntos que giran alrededor de un eje comun describen arcos del mismo número de grados.

183. **Medida de los ángulos excéntricos.—Alidada tangente.**—Cuando la alidada es tangente al limbo, se mide el ángulo ACB (fig. 67) dirigiendo la visual por la alidada a al punto A, habiendo hecho coincidir préviamente su línea de fé con el cero de limbo; se fija este, y dirigiendo la alidada al punto B, el cero de su línea de fé habrá recorrido el arco ab. Si despues se hacen coincidir otra vez los ceros, se dirige la alidada en una nueva posicion a' al punto A, y fijo el limbo, se la lleva de nuevo al punto B, el arco recorrido ahora será el $a'\,b'$. Para deducir de estos arcos la verdadera medida del ángulo ACB, que es el mn, observaremos que el arco ab obtenido corresponde al ángulo aCb=ASO por tener el mismo suplemento; y que los triángulos ASO, OCB, que tienen iguales los ángulos en O, dan la ecuacion

$$S+\frac{A}{2}=C+\frac{B}{2} \qquad [30]$$

De un modo análogo se obtiene con los ACP y BPT

$$T+\frac{B}{2}=C+\frac{A}{2} \qquad [31]$$

De estas ecuaciones se deduce, sumándolas,

$$C=\frac{S+T}{2};$$

y poniendo en vez de los ángulos los arcos que dan su medida, en virtud de lo que hemos indicado al principio, se tiene

$$mn=\frac{ab+a'b'}{2} \qquad [32]$$

184. **Alidada excéntrica.—Doble nonius.**—Cuando la alidada no gira exactamente alrededor del centro O (fig 68) del limbo, sino del punto d, y coincide además con la recta que une estos puntos, como sucede en la posicion AB, el arco CB será exactamente la medida del ángulo COB de las visuales En otra posicion cualquiera A′B′ de la alidada, el arco CB′ que se obtiene con la lectura del nonius, difiere del Cb' correspondiente al ángulo COb', que se hubiera obtenido en O sin la excentricidad del eje de rotacion, en una cantidad B′b' que es el *error de excentricidad* para la posicion en que consideramos á la alidada. Este error está en su máximum B″b'' cuando ocupa la A″B″ perpendicular á AB; pues la separacion dO de A″B″ y el diámetro $a''b''$ es mayor (Geom. Teor 20) que la *ed* que media entre A′B′ y $a'b'$, ó en otra posicion intermedia

185 El error de excentricidad puede eliminarse cuando la alidada está provista de dos nonius diametralmente opuestos, como sucede en la mayor parte de los instrumentos angulares. En efecto, observando la fig. 68, se tendrán las igualdades

$$Cb' = CB' + B'b' \qquad y \qquad Da' = DA' - A'a';$$

de las que resulta, en virtud de ser $Cb' = Da'$ y $B'b' = A'a'$,

$$2Cb' = CB' + DA' = CB' + (CA' - 180^\circ),$$

y por último

$$Cb' = \frac{CB' + (CA' - 180^\circ)}{2} \qquad [33].$$

Bastará por lo tanto *restar* 180° *del arco* CA′ *obtenido por el nonius* A′, *y hallar la semisuma entre este resultado y el arco* CB′ *observado en el nonius* B′

* 186 Cuando el instrumento tiene cuatro nonius se atenúan además los errores de construccion ó las imperfecciones debidas al uso, determinando el valor de un ángulo por el término medio entre las lecturas obtenidas en cuatro nonius. Empezaremos por determinar el error que pueden producir las posiciones ocupadas por los ceros de los nonius. Se hace coincidir uno de ellos con el del limbo, y se observa la graduacion marcada por el segundo; que debe ser la division 90°, y supongamos que marca 90° 3′: esta cantidad 3′ será un error por exceso, que representaremos en general por e, y el valor señalado por este segundo nonius será 90° + e Si señalase 89° 53′; el error sería de 7′ por defecto, y el valor señalado seria de 90° — e Del mismo modo el tercer nonius señalaria un arco de 180 $\pm e'$, y el del cuarto 270 $\pm e''$.

Suponiendo todos los errores por exceso, hagamos recorrer al cero del primer nonius un arco a, y observemos las graduaciones m, m', m'' marcadas además respectivamente por los ceros de los otros tres

El arco recorrido estará representado para cada uno de ellos por las expresiones

$$\begin{aligned} &a\,; \\ &m - (90^\circ + e)\,; \\ &m' - (180^\circ + e')\,; \\ &m'' - (270^\circ + e'')\,; \end{aligned}$$

y el ángulo verdadero x por la cuarta parte de la suma de estas cantidades; será por lo tanto

$$x = \frac{a + m + m' + m'' - 540^\circ - (e + e' + e'')}{4} \qquad [34]$$

La cantidad $(e + e' + e'')$ se obtiene desde luego en la primera posicion dada á los nonius, y es constante para todos los ángulos que se observen; y una vez hallado este valor, no habrá más que sustituir en la fórmula las lecturas a, m, m' y m'' dadas por los nonius.

Si alguno de los errores e, e', e'' fuese por defecto, habria que considerarle como negativo al calcular el valor $(e + e' + e'')$.

187. **Medida del error de excentricidad**.—El error de excentricidad para una posicion dada A′B′ (fig. 68) de la alidada, se obtiene por la igualdad

$$CA' = CB' + B'b' + 180^\circ + A'a',$$

de la cual se deduce

$$B'b' = \frac{CA' - 180^\circ - CB'}{2} \qquad [35],$$

que da el error $Bb' = A'a'$, en funcion de los ángulos CA′ y CB′.

188. **Reduccion de los ángulos al centro de la estacion.**—En el curso de las operaciones topográficas ocurre á veces tener que hallar el valor de un ángulo cuyo vértice es inaccesible, en el cual no pueden establecerse por lo tanto los instrumentos topográficos para ejecutar las operaciones necesarias; pero que estando perfectamente determinado este vértice y prestándose por su disposicion á ser observado con facilidad desde otros puntos, es de la mayor importancia su eleccion para figurar entre los principales del plano. Tales son las veletas de las torres y los picos elevados que presentan las cordilleras.

Sea, por ejemplo, C (fig. 69) uno de estos puntos, y supongamos que tratamos de hallar el valor del ángulo que forman en él las rectas CA, CB, tiradas á otros dos puntos A, B, del terreno, los cuales ocupan posiciones ya determinadas. Trazaríamos una recta DP que marcase la direccion del punto elegido á otro punto fijo distante P, midiendo además el ángulo m que forma con el lado CB en que se encuentra el punto D. Determinando el D′ en que la recta DP corta al otro lado del ángulo C, se pasa á medir el ángulo m' que con este lado forma la misma recta DP. La diferencia

$m - m'$ de los ángulos observados da el valor del ángulo en el centro. En efecto, considerando tirada por D' la D'E paralela á CB, se tiene

$$c = c' = s - m' = m - m'.$$

189 Este medio de resolver el problema dista mucho de la exactitud que proporciona el cálculo en el empleo del procedimiento siguiente: Sea c (fig. 70) el ángulo que se trata de conocer por medio del ADB $= m$, obtenido desde el punto D, que se ha elegido para la observacion y es diferente del vértice C en el que no puede hacerse. La posicion de los ángulos que en la figura aparecen da á conocer (Geom. Teor 14. Cor. 1.°) las igualdades

$$\mathrm{M} = c + n' = m + n,$$

de las que se deduce

$$c = m + n - n' \qquad [36].$$

Los valores de n y de n' se deducen de la relacion conocida entre los lados de un triángulo y los senos de los ángulos opuestos, que da

$$\operatorname{sen} n = \frac{d \operatorname{sen} s}{a}; \qquad \operatorname{sen} n' = \frac{d \operatorname{sen} t}{b}.$$

190 La ecuacion [36] resuelve el problema y nos dice: que *para hallar el valor del ángulo en el centro, habrá que añadir al ángulo observado* m, *el ángulo* n *bajo el cual se veria desde el extremo* B *del lado* CB *del ángulo en el centro más próximo al punto de estacion la distancia entre este y el centro del ángulo, y restando de esta suma el ángulo* n' *bajo el cual se veria la misma distancia desde el extremo* A *del otro lado del ángulo en el centro.*

* 191 **Casos particulares.—Correccion nula.**—El punto elegido para la observacion puede hallarse en el interior del ángulo verdadero c. Entonces se tiene $s > 180°$, contándole de DC á DB y segun la graduacion de izquierda á derecha; sen. s cambiará de signo, conservando el mismo sen. t, y la fórmula se convertirá en

$$c = m - n - n'$$

192. Si está en el interior del ángulo opuesto al vértice de c, se tendrá $t > 180°$, y

$$c = m + n + n'.$$

193. Si D se encuentra en uno de los lados del ángulo ó en su prolongacion, será $s > 180°$ y $t = 180°$; ó $s > m$ y $t = 0$. Las fórmulas respectivas serán entonces

$$c = m - n; \qquad c = m + n.$$

194. En el caso particular de ser $n = n'$, el punto D está en la circunferencia que determinan los A, B, C (fig. 71). En efecto, los ángulos iguales n y n', teniendo sus vértices respectivos B y A en la circunferencia, serán ángulos inscritos; y como además sus lados se cortan dos á dos,

en virtud de la construccion que se hace para reducir el ángulo al centro de la estacion, y es evidente que dos de ellos lo verifican en el punto C, el D en que los otros dos se cortan pertenecerá tambien á la misma circunferencia.

Entonces la correccion es nula: pues el ángulo m observado es igual al c del centro de la estacion, toda vez que ambos tienen la misma medida. (Geom. Teor. 50.) Esto resulta tambien de la fórmula [36]; pues siendo $n = n'$, se reduce á $c = m$.

La condicion de ser D un punto de la circunferencia puede siempre conseguirse midiendo el ángulo t, si no se conoce por observaciones ó cálculos anteriores, y buscando por tanteos un punto D tal, que las rectas tiradas desde él á los puntos A y C formen un ángulo $t' = t$.

195. **Aplicaciones de la fórmula general.**—Supongamos que conocidos los valores de $CB = a$; $CA = b$ (fig. 70), medidos directamente el lado $CD = d$, así como los ángulos t y m, y deducido $s = m + t$, se trate de hallar el valor de c. Sean:

$$CB = 300^m,2\ ;\ CA = 284^m,8\ ;\ CD = 15^m,3\ ;$$
$$t = 66^\circ\ 44'\ ;\ m = 61^\circ\ 11'\ ;\ s = 127^\circ\ 55'$$

Empezaremos por calcular los valores de n y n' (189), para lo que tendremos:

$$\log\ \text{sen}\ n = \log.\ 15,3 + \log\ \text{sen}\ 52^\circ\ 5' + C.^{\text{to}} \log.\ 300,2 - 10\ ;$$
$$\log\ \text{sen}.\ n' = \log.\ 15,3 + \log\ \text{sen}\ 66^\circ\ 44' + C.^{\text{to}} \log.\ 284,8 - 10\ ;$$

de estas expresiones se deduce

$$\log\ \text{sen}.\ n = 8,6043056\ ; \qquad \log\ \text{sen}.\ n' = 8,6933139;$$

que corresponden á los ángulos

$$n = 2^\circ\ 18'\ ;\quad n' = 2^\circ\ 50'.$$

Aplicando entonces la fórmula [36] resultará

$$c = 61^\circ\ 11' + 2^\circ\ 18' - 2^\circ\ 50' = 60^\circ\ 39'$$

196. En la resolucion del problema que nos ocupa suele ser difícil la determinacion del ángulo t y de la distancia d, cuando no se divisa desde D (fig. 70) el punto C, y no se puede llegar al pié de la vertical de este punto. Sea por ejemplo C (fig. 72) el centro de una torre redonda invisible desde D. Midiendo los ángulos z y z' de las tangentes á la torre con la visual DA se tendrán desde luego las expresiones

$$t = z - x\ ;\quad t = x + z' \qquad [37],$$

de las que resulta

$$t = \frac{z + z'}{2} \qquad [38].$$

197. La distancia d se obtiene añadiendo á DH el rádio r de la torre, que se deduce de la ecuacion

$$r = \text{ED tang. } x = \text{ED tang } \frac{z - z'}{2} \qquad [39],$$

en la que el valor de x se deduce (196) de la ecuacion $z - x = x + z'$.

El rádio puede obtenerse tambien midiendo la circunferencia, ó tomando la mitad de la distancia que media entre los piés de dos tangentes á la torre, perpendiculares á una recta cualquiera trazada en el terreno.

198. La distancia total $CD = d$ se deduce de la relacion conocida (Geom. Teor. 76) DH : ED : : ED : DG, de la que resulta

$$DG = \frac{\overline{ED}^2}{DH} = 2r + DH;$$

y despejando,

$$r = \frac{\overline{ED}^2 - \overline{DH}^2}{2DH}.$$

Conocido el valor del rádio, se tendrá:

$$d = DH + \frac{\overline{ED}^2 - \overline{DH}^2}{2DH} = \frac{\overline{DH}^2 + \overline{ED}^2}{2DH}.$$

199. Si el centro C (fig. 73) estuviese en la interseccion de las diagonales de un rectángulo ó de un cuadrado, elegiriamos un punto D, desde el cual se pudiesen ver los extremos de una misma diagonal, y mediriamos el ángulo EDF y los lados DE y DF.

Estos datos determinarían el triángulo DFE; resolviéndole, hallariamos el valor del ángulo DFC y el del lado FE.

El triángulo DCF sería tambien conocido, pues sabemos el valor de DF obtenido directamente, el del ángulo DFC por la resolucion del triángulo DFE, y el de CF igual á la mitad de FE. Resolviendo este triángulo, hallariamos $CD = d$, y el ángulo CDF; añadiendo á este ángulo el FDA medido directamente, se tendrá el valor de t.

200. **Medida de los ángulos múltiplos ó repeticion de los ángulos.** —Con los limbos de círculo entero se puede ejecutar la operacion llamada *repeticion de los ángulos*, debida al matemático francés Bordá. Para la repeticion del ángulo AOM (fig. 47), medido como hemos indicado (149), se fija la álidada al limbo y se repite la operacion que hemos dado á conocer, llevando el limbo y la alidada unidos hasta que esta última se halle dirigida al punto A: fijando entonces el limbo y dirigiendo la alidada á M se hallará un ángulo doble del primero; pudiendo obtenerse del mismo modo el triplo y los demás múltiplos sucesivos.

201. La repeticion de los ángulos corrige en general los errores que provienen de la excentricidad de la alidada (184) y de los defectos que siempre tienen las graduaciones de los limbos, por esmerada que sea su construccion. Sirve además para llevar la apreciacion de los ángulos más

allá de lo que permite el nonius del instrumento En efecto, el valor de un ángulo de $16^\circ 5' 30''$, que no puede dar un nonius que aprecia minutos, se obtendría hallando la mitad del arco de $32^\circ 11'$, que puede obtenerse por la repeticion

Llamando en general A al arco total obtenido se obtendrá el valor a del correspondiente al ángulo que se mide, dividiendo A por n; siendo n el número de repeticiones Si la aproximacion del ángulo simple se puede obtener con un error $\frac{1}{d}$, siendo d el valor de la menor division del nonius, el del ángulo simple sería $\frac{n}{d}$ á las n repeticiones, como límite máximo, y se tendría

$$A = an + \frac{n}{d} \quad \text{ó} \quad A = an - \frac{n}{d},$$

segun que los errores tuviesen lugar por exceso ó por defecto. De estos valores se deduciría respectivamente,

$$a = \frac{A}{n} - \frac{1}{d} \quad \text{ó} \quad a = \frac{A}{n} + \frac{1}{d},$$

expresiones del verdadero valor del ángulo

202. **Empleo de dos alidadas en la repeticion de los ángulos**.—Cuando el limbo va provisto de dos alidadas, que supondremos céntricas para la explicacion de este segundo método de repeticion, se coloca en coincidencia el cero de la alidada superior con el de la graduacion del limbo, y en esta disposicion se le hace girar alrededor de su centro C (fig. 74) hasta que la visual tirada por dicha alidada ss vaya á parar al punto A de la izquierda, fijando entonces el limbo y dirigiendo la alidada inferior ii al punto B, fijándola del mismo modo. En esta disposicion se mueve todo el aparato alrededor de C hasta que la alidada inferior quede dirigida al punto A (fig. 75); y llevando entonces á la superior de la posicion ss que ocupa á la $s's'$ en direccion de B, el arco ss' recorrido será el *duplo* del que corresponde al ángulo ACB. Repitiendo despues toda la operacion que acabamos de explicar, para lo cual habrá que empezar por dirigir la alidada $s's'$, moviéndola juntamente con el limbo, al punto A y la ii al B independientemente, se obtendrá el *cuádruplo* y los demás múltiplos pares de ACB, ejecutándose la repeticion con doble rapidez que cuando solo se emplea una alidada.

* 203. **Correccion de excentricidad de las alidadas tangentes en la repeticion de los ángulos**.—Cuando la alidada inferior es tangente, como sucede en muchos instrumentos, es necesario corregir del *error de excentricidad* que se origina los valores angulares observados en la repeticion Supongamos dirigida la alidada superior D (fig. 76) al punto A y la inferior E al B: haciendo girar al aparato como hemos

dicho (202), hasta que E tome la posicion E′ recorriendo el arco EE′, D irá á parar á D′, recorriendo el DD′ del mismo número de grados; y llevando D′ á D″ el arco D′DD″ que recorre, y que representaremos por m, sería el duplo del correspondiente á ACB sin la excentricidad de la alidada inferior. Se trata ahora de hallar la diferencia entre m y $2x$: para lo cual se tiene entre los ángulos de la figura la igualdad

$$E'CD'' = E'CE + ECB\,;$$

y observando que es $E'CE = D'CD = m - x$, sustituyendo en la expresion anterior, se tendrá

$$E'CD'' = m - x + ECB.$$

Por otra parte, se tiene tambien

$$E'CD'' = E'CA + x\,;$$

de donde resulta

$$m - x + ECB = E'CA + x\,;$$

y mudando los signos y trasponiendo,

$$2x - m = ECB - E'CA \qquad [40]$$

Para hallar los valores de ECB y E′CA, observaremos que los triángulos rectángulos ECB, ACE′ dan las relaciones angulares

$$ECB = 90^\circ - B = 90^\circ - \text{sen B}; \quad E'CA = 90^\circ - A = 90^\circ - \text{sen A},$$

en razon á que siendo A y B muy pequeños se diferencian muy poco de sus senos respectivos; y poniendo en vez de sen. B y sen A las fracciones $\dfrac{e}{L' \text{sen. } 1''}$ y $\dfrac{e}{L \text{ sen } 1''}$, que expresan sus valores en segundos, y en los que e es la excentricidad EC del anteojo inferior y L, L′ las longitudes de los lados del ángulo que se mide, se tendrá

$$ECB = 90^\circ - \frac{e}{L' \text{ sen } 1''}, \quad \text{y} \quad E'CA = 90^\circ - \frac{e}{L \text{ sen. } 1''}\,;$$

cuyos valores sustituidos de la ecuacion [40], darán la fórmula de correccion

$$2x - m = \frac{e}{L \text{ sen. } 1''} - \frac{e}{L' \text{ sen } 1''} \qquad [41]$$

El valor que se halle para el segundo miembro habrá que sumarle con m ó restarle de él, segun resulte positivo ó negativo.

204. La diferencia que así se obtiene expresada en segundos, disminuye á medida que crecen L y L′ y que e es más pequeño; siendo nula para la suma de los ángulos de un mismo triángulo. En efecto, si representamos por a, b, c los lados opuestos á los ángulos A, B, C, las correcciones respectivas de estos últimos serán

$$\frac{e}{b \operatorname{sen} 1''} - \frac{e}{c \operatorname{sen} 1''}; \quad \frac{e}{c \operatorname{sen} 1''} - \frac{e}{a \operatorname{sen} 1''}; \quad \frac{e}{a \operatorname{sen} 1''} - \frac{e}{b \operatorname{sen} 1''};$$

cuya suma es igual á cero.

205. **Reiteracion de los ángulos.**—En las vueltas de horizonte (177) se repiten los ángulos que las diferentes rectas que se consideran forman entre sí, por el método de la reiteracion, que consiste en repetir las vueltas partiendo para cada una de ellas un punto distinto, y dividir el valor obtenido para cada ángulo en cada una de las *radiaciones* ó *vueltas de horizonté* por el número de ellas. Tratándose de un solo ángulo se reitera midiéndole sucesivamente á partir de las graduaciones 30, 60, 90 ... ó equidiferentes en mayor número de grados si se ha de repetir un corto número de veces, y dividiendo por el número de repeticiones la suma de los valores obtenidos.

206. **Medida y repeticion de los ángulos situados en planos verticales.**—Los ángulos de elevacion y depresion (178) se cuentan á partir del cero del limbo, con el que debe coincidir el del nonius cuando la direccion de la visual en la alidada es perfectamente horizontal, cualquiera que sea el error de colimacion (182).

207. Los ángulos zenitales se obtienen del mismo modo y referidos á la vertical del centro del limbo, por hallarse el cero de su graduacion dispuesto de manera que coincide con el de la alidada cuando la visual es vertical.

208. La repeticion de los ángulos zenitales se obtiene disponiendo el limbo vertical á la izquierda del observador con respecto al instrumento y dirigiendo la visual por la alidada vm' (fig. 77) al objeto a, con los ceros en coincidencia: dando despues una semirevolucion al aparato así constituido alrededor de la vertical zc del centro c del limbo, la alidada tomará la posicion mc; y llevándola de nuevo al objeto a, el arco mm' recorrido en sentido de la graduacion, igual al recorrido por el cero del nonius, será el duplo del ángulo zenital zca. Repitiendo la operacion á partir del valor angular hallado se tendrán los múltiplos pares del ángulo zenital. Si la graduacion del limbo estuviese dirigida en sentido contrario, se empezarían las operaciones disponiendo el limbo á la derecha.

209. Con los instrumentos cuyo limbo vertical está dispuesto (206) para la medida de los ángulos de elevacion y depresion, pueden hallarse por la repeticion indicada (208) cuando el limbo gira libremente y con ambas clases de movimiento; el complemento del ángulo zenital obtenido será (178) el de elevacion ó depresion que se trataba de conocer.

CAPITULO VI.

Generalidades acerca de las verificaciones y correcciones de los instrumentos.

210. **Consideraciones preliminares.**—Las operaciones que tienen por objeto asegurarse de que cada una de las partes de un instrumento está convenientemente dispuesta para los usos á que se le destina, toma el nombre de *verificacion* ó *comprobacion*; y el de *correccion* la que se emplea en disponerlas convenientemente cuando no lo están.

Nos ocuparemos por ahora en exponer indistintamente los principios generales en que se fundan las correcciones de las mencionadas partes, ya considerándolas aisladas, ya como entrando en la formacion de los instrumentos.

211. **Verificaciones y correcciones de los limbos y de los nonius.**—Antes de emplear un instrumento debe observarse: 1.° Si las divisiones del limbo son exactamente iguales entre sí, así como las del nonius; lo que puede tantearse con el auxilio de un compás.

2.° Si en varias posiciones del nonius coinciden sus divisiones extremas con otras del limbo, siendo una más las del primero (157).

3.° Si las cerdas todas de las alidadas fija y móvil (149) se hallan en un mismo plano vertical, ó se cubren exactamente colocando el observador su vista en el plano de dos de ellas. Cuando no es así, se origina un *error de colimacion*, que segun hemos dicho (182) no influye en la determinacion de los ángulos.

4.° Si el limbo está bien centrado, así como la alidada giratoria (149). Se verifica esta circunstancia midiendo todos los ángulos de un triángulo ó los de direccion (177) que forman entre sí los lados de un polígono, y viendo si su suma es igual respectivamente á 2R ó á 2R $(n - 2)$ para un polígono de n lados (Geom. Teor. 26); ó bien resulta un error menor que n veces el límite de apreciacion angular.

212. **Verticalidad del eje de rotacion de un nivel de aire.**—Cuando un nivel n (fig. 78) está sujeto á girar alrededor de un eje ab perpendicular por construccion á un plano que contiene á la recta cd, se le hace girar hasta que se halle en el plano de estas dos rectas y se le da la posicion horizontal n; dándole despues una semirevolucion vendrá á ocupar la posicion simétrica n': haciéndole tomar despues una intermedia m, que corresponde á la bisectriz del ángulo nan', quedará paralelo á cd, y moviendo todo el sistema hasta que el ángulo z se haga nulo, que será cuando la ampolla marque la posicion horizontal, tambien se habrá hecho nulo el ángulo $r = z$, y cd será horizontal (27).

213. Si el eje ab (fig 79) es perpendicular por construccion dá un plano P, que contiene á la recta cd, haciendo girar al nivel hasta que sea paralelo segun n' á la ef, perpendicular á cd en el plano, bastará hacer girar al sistema de las rectas ab, n', ef alrededor de cd hasta que el nivel acuse la horizontalidad; en cuyo caso el eje ab será vertical (33).

214. Cuando el nivel es excéntrico, se le coloca sucesivamente en las posiciones n y n' (fig. 80), diametralmente opuestas y paralelas á cd, corrigiendo la desviacion del nivel por mitades: primero con respecto á n y cd, y en seguida con n' y cd (212); despues se colocará el nivel paralelamente á ef, para dar al eje ab la posicion vertical (213).

215. **Paralelismo del eje del nivel con su eje de rotacion.**—Cuando el nivel mn (fig. 81) está sujeto á girar alrededor de un eje ab, que le es exactámente paralelo, ocupa en el giro las distintas posiciones de la generatriz de una superficie cilíndrica, cuyo eje es ab, siendo por lo tanto paralelas y horizontales (44); la ampolla ocupará por esta razon en todas ellas el punto medio del tubo. Pero si el eje del nivel es oblícuo al de rotacion la superficie engendrada es un *hiperbolóide de revolucion* de una hoja, y la ampolla variará continuamente de posicion durante el giro, variando tambien la inclinacion de la generatriz.

216. **Verificacion y correccion del nivel de aire.**—Consiste en el paralelismo que debe existir entre el eje del nivel y la regla sobre que insiste; lo cual exige que la altura de los soportes sea variable, á fin de poder hacer que sean iguales (45), y se consigue dando al nivel la disposicion que presenta la fig 82. Para hacer la verificacion se observa si colocado el nivel sobre un plano y horizontada la burbuja, conserva ésta la posicion horizontal despues de dar al tubo una semirevolucion, invirtiendo la situacion de sus extremos. Cuando se observa una desviacion, se corrige su mitad moviendo el tornillo t para hacer el eje del nivel paralelo á la regla, y la otra mitad moviendo ésta para disponer horizontalmente las líneas paralelas (212).

217. **Verificacion y correccion del nivel de perpendículo.**—Se observa si en las dos posiciones opuestas que se le dan para marcar la línea de fé (24), y sin mover la regla, el cordon de la plomada coincide con esta línea. Si no, se marca su verdadera situacion como hemos dado tambien á conocer.

218. **Paralelismo de una recta con un plano dado de posicion.**—Para obtener una recta paralela á un plano T (fig. 83), de posicion dada, como por ejemplo la horizontal (30), se emplea el anteojo b, llamado *de verificacion*, cuyo tubo s está invariablemente situado entre dos cubos metálicos c, c' perfectamente iguales. Dirigiendo la visual por este anteojo á un objeto a' lejano y bien determinado, é invirtiéndole despues de modo que las caras superiores de los cubos vayan á ocupar la posicion inferior, se observará el punto a'' en que generalmente va á parar la visual; y moviendo los tornillos del retículo hasta que termine en a, equidistante de a' y a'' (142), la posicion ba del eje óptico del anteojo será (45) la paralela al plano que tratábamos de determinar. Cuando

en ambas posiciones la visual va á parar al mismo punto, como sucederia si desde luego el eje óptico ocupase la posicion *ba*, no hay que mover el retículo.

219 **Horizontalidad perfecta de una de las cerdas del retículo.**—Centrado el anteojo *b* (fig 83) como acabamos de indicar (218), si le hacemos girar apoyándose constantemente en el plano sobre que insiste, el cruzamiento de las cerdas irá cubriendo sucesivamente los puntos c, c', c'' (fig. 84) de una horizontal cubierta constantemente por una de las cerdas del retículo si es tambien perfectamente horizontal; pero si no, solo cubrirá al punto c en la posicion oblícua df en que ahora suponemos á la cerda, y en las sucesivas $d'f'$, $d''f''$ dejará descubierto á dicho punto. En este último caso se hace mover el tubo del retículo alrededor de su eje ó todo el tubo s si es posible alrededor de su eje de figura, hasta una posicion en que el punto c quede cubierto sucesivamente por los de la indicada cerda miéntras se halle en el campo del anteojo moviendo á éste como hemos dicho.

210 **Horizontalidad de una recta sujeta á girar alrededor de una vertical.**—Sea xz (fig 85) el eje de rotacion, at la horizontal de t, y bc la recta inclinada que se trata de horizontar: se dirige por ella la visual á un renglon vertical Aa' y se marca el punto a' en que termina. Dando una semirevolucion, tomará la alidada la posicion $b'c'$ simétrica de la primera con relacion á xz, resultando iguales los ángulos m, m' como complementos de los iguales $c'tx$, xtc; y por consiguiente tambien lo son los m y m''. Los triángulos rectángulos taa', taa'' resultan tambien iguales, y dan $aa' = aa''$: bastará por lo tanto dirigir la visual al punto a equidistante de los a', a'' observados en las dos posiciones de la alidada, para dar á ésta la posicion horizontal.

221. La altura Aa de este punto medio sobre el pié A del reglon se halla en funcion de las alturas Aa' Aa'', observando que se tiene

$$Aa = Aa' - aa' ; \quad Aa = Aa'' + a''a ;$$

que sumadas dan $2Aa = Aa' + Aa''$, en virtud de ser $aa' = aa''$; deduciéndose de aquí

$$Aa = \frac{Aa' + Aa''}{2} \qquad [42]$$

222 La horizontalidad que nos ocupa (220) puede obtenerse hallando el verdadero valor del ángulo que forma con la horizontal del punto de observacion t (fig 86) la visual dirigida á otro distante P. Bastará medir el ángulo vertical m que la visual tP forma con la posicion ab de la alidada en que coinciden los ceros del limbo vertical y de su nonius; y dando una semirevolucion exacta al aparato alrededor de la vertical vt, toma-

á ab la posicion simétrica $a'b'$, y en ambas posiciones formará (220) ángulos iguales con la horizontal th, resultando las igualdades

$$x = m + r\ ; \quad x = m' - r';$$

de las que se deduce

$$x = \frac{m + m'}{2} \qquad [43]:$$

y haciendo que ab forme con tP el ángulo hallado x, tomará la posicion horizontal th.

223. Cuando es preciso observar desde los extremos de la recta de comparacion tt' (fig. 87), se miden igualmente los ángulos m y m', que con ella forman las posiciones ab, $a'b'$ de la alidada, simétricas respecto de la vertical v' (222), suponiendo trasladados paralelamente de t á t' el limbo y la alidada: entonces resultarán como antes iguales los ángulos r y r', obteniéndose las mismas relaciones que en el caso anterior y la misma fórmula [43] para calcular el valor de x.

El defecto de paralelismo que realmente existe (10) entre las verticales v y v' no puede influir en la exactitud de esta correccion, puesto que es siempre inferior al límite de apreciacion del nonius; necesitándose que tt' tuviese 2000 metros de longitud para que el error llegase á ser de 1′ (11), y de 620 á 670^{m} cuando el límite de apreciacion angular fuese de 20″: distancias que exceden con mucho á las que en esta operacion se emplean ordinariamente.

24. **Perpendicularidad de una recta con respecto á su eje de rotacion.**—Cuando una recta ab (fig. 88) es oblícua con respecto á su eje de rotacion cd, describe en su movimiento alrededor de él una superficie cónica y al cabo de una semirevolucion exacta ocupa una posicion simétrica $a'b'$, resultando iguales los ángulos m y m', y siendo por lo tanto el $a'tb$ doble del complemento de uno de ellos, y su bisectriz zx la direccion perpendicular que ha de darse á la recta dada ab. Esto podrá conseguirse marcando los puntos r' y r'' en las direcciones de las posiciones simétricas ab y $a'b'$ y á igual distancia de t, y señalando el punto r, medio de r' y r'', que determinará con el t la direccion de la bisectriz.

225. Si cd es la recta que gira alrededor de xz, se puede hacer que ab coincida con el eje de rotacion, empleando el mismo procedimiento.

226. La disposicion de ab en ambos casos puede adoptarse, cualquiera que sea la posicion del eje cd, ya vertical, horizontal ó inclinada.

227. Tratándose de la alidada correspondiente á un limbo cualquiera, se pone en coincidencia con su cero el del nonius y se dirige la visual á un objeto r' (fig. 88); dando despues una semirevolucion exacta al nonius la alidada ocupará la posicion simétrica $a'b'$, y el arco correspondiente al ángulo $a'tb$, y que la alidada recorre para pasar de nuevo á la posicion ab, es el duplo del que tendria que recorrer para tomar la direccion zx perpendicular á cd.

228 Cuando la alidada es excéntrica, despues de establecer la coincidencia de los ceros se dirige por ella la visual á un punto muy lejano A (fig. 89) en dos posiciones diametralmente opuestas B y D, observando en el nonius si ha dado una semirevolucion exacta, en cuyo caso la alidada será perpendicular á su eje de rotacion; porque hallándose entonces sensiblemente DC en prolongacion de CB, y siendo el ángulo *m* muy pequeño por serlo tambien la base DB del triángulo isósceles ABD, los ángulos iguales ACB y ACD son sensiblemente rectos, y la alidada por lo tanto perpendicular á su eje de rotacion De no verificarse la condicion expresada, se corrige la posicion de la alidada haciéndola girar hasta que el nonius señale la mitad de la diferencia á 180° observada (227) por exceso ó por defecto, variando la posicion de la visual en la alidada hasta que vaya á parar de nuevo al punto A de observacion.

Si por ejemplo la lectura del arco recorrido es 181° 26′ se hará que el nonius marque para la correccion 180° 43′ Si es 179° 14′ se hará que señale 179° 37′

229. El procedimiento que acabamos de dar á conocer puede aplicarse como una modificacion del anterior (227).

230. **Verticalidad del plano descrito por una recta que gira alrededor de otra á la cual es perpendicular.**—Dispuesta la alidada *ab* (fig, 90) perpendicularmente á su eje de rotacion *cd* (224) es preciso que describa en su movimiento un plano vertical; lo que tendrá lugar cuando dirigida una visual por ella á la vertical *v*, y haciéndola girar alrededor de su eje vaya la visual á terminar á los distintos puntos del cordon de la plomada; variando en caso contrario la posicion de *cd* hasta que se verifique la circunstancia de que nos ocupamos El plano descrito por la visual será vertical (13), y horizontal el eje de rotacion (40).

231. **Verificaciones y correcciones de la alidada de pínulas**.—1.ª *Que el canto* mn (fig. 48) *de la regla sea una línea recta.*—(Geom. 33.)

2.ª *Que las cerdas de las pínulas sean perfectamente verticales cuando la regla* AB (fig. 48) *está sobre un plano horizontal* (30). Basta observar si cubren á la vez exactamente al cordon de una plomada en su posicion de equilibrio.

3.ª *Que el plano de colimacion* (147) *tenga por traza sobre el plano de la regla la línea de fé* mn (fig. 48). Se observa si la visual pasa á la vez por las cerdas y el cordon de una plomada distante en dos posiciones opuestas de los extremos de la regla, en las cuales coincide la recta *mn* con otra trazada préviamente en el plano horizontal en que insiste la alidada. De no suceder así, existe un *error de colimacion* (182), que no influye en la determinacion gráfica de los ángulos (150), siempre que se tenga cuidado de señalar una de las pínulas para que sirva constantemente de ocular.

232. Cuando la alidada no cumple con todas las verificaciones á que debe satisfacer, es necesario recurrir á un constructor si ha de

emplearse ventajosamente el instrumento en las operaciones sucesivas.

233 **Verificaciones y correcciones de la alidada de anteojo.**—1.ª Es la misma que en la alidada de pínulas (231).

2.ª *Que el eje óptico del anteojo* V (fig. 83) *sea perpendicular á su eje de rotacion.*—Se verifica como hemos dicho (225) viendo si antes y despues de una semirevolucion del anteojo entre sus collares la visual va á terminar á un mismo punto r (fig. 88). En caso contrario será preciso mover el retículo por los tornillos que mueven la cerda vertical (137), hasta que termine la visual en r á igual distancia de los puntos r' y r'' observados en las dos posiciones indicadas del tubo del anteojo.

Si el anteojo no puede girar dentro del collar ó abrazadera en que se encuentra, y sí dar una semirevolucion completa alrededor de cd, se invierte despues de dársela al aparato, de modo que cambien de posicion los extremos c y d de este eje, y se ejecuta la misma verificacion y correccion.

3.ª *Que el plano descrito por el eje óptico del anteojo sea vertical.*—Se verifica como hemos dicho (230), y se dispone verticalmente una de las cerdas moviendo el anteojo dentro del collar, hasta que cubra exactamente la cerda al cordon de la plomada.

4.ª *Que el plano vertical que describe la alidada tenga por traza sobre el plano de la regla la línea de fé.*—Se ejecuta como hemos dicho (231—3.ª) teniendo en cuenta que al dirigir la segunda visual es preciso volver el ocular al lado del observador. El error de colimacion á que puede dar lugar la posicion del retículo, no influye en la apreciacion gráfica de los valores angulares.

5.ª *Que el eje óptico del anteojo sea horizontal cuando coincide el cero del nonius con el del arco vertical* sz (fig. 49).—La visual Va (fig. 83) será paralela al tablero T ó al eje ba del anteojo s de verificacion, dentro del límite de apreciacion del nonius, cuando concurra con ellos en un punto a situado á una distancia suficientemente grande. En efecto, llamando x á esta distancia, d á la altura dr, y m al ángulo rad, se tendrá $d = x$ tang. m; de donde se deduce la ecuacion

$$x = \frac{d}{\text{tang. } m} \qquad [44]$$

Si suponemos por ejemplo $d = 0^{m},3$ y $m = 1'$, resultará $x = 1031^{m}$.

Por consiguiente, tomando el punto a á una distancia mayor, el ángulo m no llegará á valer $1'$, y el error será inapreciable en el instrumento. Todos los ángulos de elevacion y de depresion que se observen en lo sucesivo, estarán afectados de este error inapreciable.

LIBRO SEGUNDO.

Planimetria.

CAPITULO PRIMERO.

Instrumentos angulares empleados en las operaciones elementales de la Planimetria.

234. **Brújula**.—Se compone de una aguja magnética *ns* (fig. 91), que se apoya en un estilo situado en el centro de un limbo graduado y contenido en una caja cuadrada de madera (A', A'). En el fondo de esta caja se hallan trazadas dos rectas NS, EO, perpendiculares entre sí y paralelas á sus costados, representando la NS la meridiana astronómica, y N, E, S, O los puntos cardinales. La meridiana magnética lo está tambien por la recta C*a*, que forma con NS un ángulo igual á la *declinacion* de la aguja (58).

Lleva el limbo una sola graduacion completa de izquierda á derecha en grados y medios grados, y está un poco elevado sobre el fondo de la caja, á fin de que la aguja enrase perfectamente con él, y sea más fácil la apreciacion de las divisiones. El cero de la graduacion corresponde al norte N, y las divisiones 90°, 180°, 270° respectivamente al este, sur y oeste de la caja. El cero se marca ordinariamente con el número 360.

El limbo se cubre con un cristal para evitar los movimientos que el viento imprime á la aguja; y el cristal se sujeta con un aro circular de cobre, que en virtud de su fuerza elástica oprime las paredes de un pequeño resalto de la misma forma, que presenta la caja, é impide que el cristal se levante.

Una palanca acodada *m* sirve para separar la aguja del estilo sobre que se apoya, y sujetarla contra el cristal; con lo cual se evita el desgaste del extremo del estilo cuando no se opera con la brújula.

La palanca tiene su punto de apoyo cerca del extremo *b* de la caja, y descansa por su propio peso sobre el fondo de la misma cuando una pequeña pieza metálica *c*, que se mueve dentro de una cavidad practicada en la caja, deja descubierto dicho extremo; pero cuando se la mueve hácia este extremo hasta oprimirle, la palanca gira alrededor de su punto de apoyo, y el otro extremo que abraza el estilo, se eleva sujetando la aguja contra el cristal A fin de que entonces no pueda caer la aguja, el cristal se halla elevado sobre el extremo del estilo que la sostiene, en una cantidad menor que la altura que tiene la armadura de la misma aguja Una tapa de madera cubre la caja A, entrando en unas ranuras que esta presenta al efecto.

En uno de los costados paralelos á la línea NS hay una alidada de madera, sujeta á girar alrededor de un eje *d*.

El instrumento puede moverse alrededor de otro eje *e*, que forma cuerpo con la placa *r*, y fijarse al pié del instrumento por el tornillo de presion *t* (152).

El pié es una rodilla de juego de nuez (166), provista de un tornillo *t'*, que sirve para sujetarle á la espiga de un trípode ordinario (174).

235. En algunas brújulas el limbo es susceptible de un pequeño movimiento alrededor de su eje de figura, por medio de un tornillo que se halla á la parte inferior de la caja, y está provisto de un piñon cuyos dientes engranan con los que lleva una parte del limbo. La amplitud del giro se mide por el arco recorrido ante un estilo que corresponde exactamente al punto N.

236. **Uso de la brújula**.—La brújula sirve para determinar el *rumbo* (176) de la recta que une dos puntos dados A y B (fig. 92): para lo cual se la coloca de modo que el centro del limbo se halle en la vertical de uno de ellos A, y se horizonta la caja haciendo que enrase la aguja con el limbo por ambos extremos en dos posiciones distintas de la caja, con lo que se hallará la brújula *en estacion* Dirigiendo entonces la visual por la alidada al punto B, la graduacion *z* que marque el extremo azul será el rumbo de la recta AB.

Los rumbos pueden apreciarse en el limbo á simple vista hasta tercios ó cuartos de grado: el mayor error que puede cometerse por lo tanto en la observacion provendrá de tomar un tercio de grado por un cuarto, ó al contrario, fracciones que se diferencian en $20' - 15' = 5'$, que es el *límite de apreciacion*.

237. **Error de excentricidad**.—El rumbo hallado para AB (fig. 92) como acabamos de indicar, está determinado por el arco N*z*, correspondiente al ángulo NA*z*, igual al BMN', que es el rumbo de la visual CB, y diferente del BAN', que es el que se trata de determinar. La diferencia $NAr = B$ es el *error de excentricidad*, cuyo valor puede determinarse en cada caso resolviendo el triángulo ABC, cuando se conoce el valor de la recta AB y el de la excentricidad constante AC de la alidada; pues se tiene la relacion

$$\text{sen. } B = \frac{AC}{AB} \qquad [1]$$

283. El error de excentricidad puede eliminarse separando la visual á

la derecha del punto observado en una cantidad igual á la excentricidad AC; lo cual puede conseguirse marcando con un color vivo en el pié del jalon que ha de colocarse en B, la excentricidad indicada, con objeto de juzgar por comparacion á las diferentes distancias la cantidad en que debe separarse la visual.

239. **Comprobacion de los rumbos.—Observaciones directas y observaciones inversas.**—Trasladando la brújula al punto B (fig 92), y observando desde él el rumbo de la recta AB, se ve si el que entónces señala el extremo sur de la aguja es el mismo que se obtuvo por la observacion directa.

240 **Verificaciones y correcciones** —1.ª *Que la aguja en todas sus posiciones sea un diámetro del limbo*; lo que exige que el estilo sea perfectamente perpendicular al plano del limbo, y que el punto de suspension y los extremos de la aguja estén en una misma línea recta.

Cuando el estilo es perpendicular al plano del limbo, la proyeccion de su extremo sobre este plano es precisamente el centro del limbo; entonces todas las posiciones de la aguja serán diámetros del mismo, y la diferencia de las lecturas hechas con los extremos de la aguja será constantemente de 180°

Pero si el estilo no es perpendicular á dicho plano y se proyecta segun Od (fig. 68), existe una sola posicion AB, en la cual la aguja ocupa la de un diámetro, que es la de la proyeccion dO; y en esta sola posicion la diferencia de las lecturas es exactamente 180°. A partir de ella, la lectura de un rumbo cualquiera A′ B′ está afectada de un error B′b' tanto mayor cuanto más se separa de la posicion AB, y que está en su máximun en la A″ B″ perpendicular á la AB (184).

En virtud de esto, cuando en dos posiciones perpendiculares entre sí la aguja no marque rumbos que se diferencien exactamente en 180°, estará descentrada, y se corregirá dando al estilo la posicion perpendicular al plano del limbo por medio de unas pinzas, cuando á la vista parece que no la tiene, ó rectificando cuidosamente la aguja con un mazo

241. Puede tambien evitarse esta correccion (185) tomando el rumbo medio de los marcados en cada posicion de la aguja, despues de corregir en 180° la lectura dada por el extremo blanco de la misma. Sean por ejemplo $a = 36°\,45'$ y $b = 215°45'$ las lecturas observadas en una de las posiciones inexactas: se tendrá para el verdadero rumbo

$$r = \frac{36°\,45' + (215°\,45 - 180°)}{2} = \frac{72°\,30'}{2} = 36°15'.$$

Si se tiene $a = 274°\,30'$ y $b = 93°\,15'$, resultará $r = 273°\,52'$, aplicando el método anterior despues de añadir 180° al rumbo 93° 15′ observado con el extremo blanco de la aguja.

242. 2.ª *Que el eje de la alidada sea perpendicular á su eje de rotacion.*—Se efectua la verificacion como hemos indicado (228); observando

los rumbos a y b' que marcan respectivamente en la primera posicion y en la segunda de la alidada el extremo azul y el blanco de la aguja, que son exactamente iguales cuando existe la perpendicularidad que se busca. En caso contrario se corrige hallando la semisuma de los rumbos obtenidos, moviendo la caja hasta que la aguja marque el rumbo así deducido, y llevando el cruzamiento de las cerdas á cubrir de nuevo al punto observado, por medio del movimiento de la cerda vertical del retículo.

De no ser posible alterar la direccion de la visual, como sucede con la alidada de pínulas descrita (234), habrá necesidad de obtener en lo sucesivo los rumbos por la doble observacion y la semisuma, que acabamos de dar á conocer.

243. 3.ª *Que la línea norte-sur de la caja sea paralela al plano de la visual.*—Cuando esta circunstancia tiene lugar, los rumbos están referidos exactamente al meridiano magnético (57) y se dice entonces que la brújula está *orientada*.

Cuando la línea norte-sur del limbo no es paralela á la direccion de la visual, el ángulo de estas líneas, que se mide por el que forma la norte-sur con una paralela á la otra, es el error de declinacion: el cual no influye en la posicion relativa de las líneas del plano, pues tiene siempre lugar en el mismo sentido, como el error de colimacion (182); pero sí en la posicion absoluta, y desaparece con la orientacion definitiva del plano (103.)

244. **Orientacion de la brújula.**—Para conocer si una brújula está orientada, se traza la meridiana astronómica (50) y se observa si el rumbo de esta recta (236) es de 340° 40′ que señala la direccion de la citada meridiana para la declinacion media actual (59). Si marca otro rumbo, su diferencia al que debe señalar será el *error de declinacion*, que será preciso añadir ó restar de todos los rumbos que se observen en lo sucesivo, segun haya resultado por defecto ó por exceso.

245. Cuando la brújula es de limbo móvil puede orientarse con relacion al meridiano astronómico, haciendo girar al limbo (235) hasta que el estilo señale la graduacion 19° 20′ que marca la declinacion.

246. Cuando sólo se quiere conocer la diferencia de orientacion de dos ó más brújulas, basta tomar con todas ellas el rumbo de una misma recta del terreno. Toda brújula que dé un rumbo mayor que la elegida para término de comparacion, la cual es conveniente que sea una brújula orientada, indicará un error al oeste, y será preciso restar este error de orientacion de todos los rumbos que con ella se observen. Si por el contrario, el rumbo de una brújula es menor, el error será al este, y será preciso añadirle á los rumbos observados.

247. **Aplicacion de la brújula á la resolucion de algunos problemas.**—La brújula se emplea en la orientacion de los planos (102) determinando (236) el rumbo de una de las rectas que en él se consideran.

Haciéndola girar de este á oeste á partir de la posicion *cero* de la aguja, en que determina la direccion de la meridiana, las divisiones del limbo que van enrasando con su extremo azul en el sentido de la graduacion, dan los rumbos de cuantas rectas quieran considerarse en una *vuelta de horizonte* (177).

La diferencia de los rumbos de dos rectas da el ángulo que forman entre sí, afectado de un error de excentricidad (184), que es inferior al límite de apreciacion del instrumento (236).

248. **Límites del empleo de la brújula.**—*Límite mínimo*.—El conocimiento de que el error de excentricidad disminuye á medida que aumenta la longitud de la recta cuyo rumbo queremos hallar, nos permite fijar la distancia á que corresponde un error de 5′, que es el mayor que resulta de la lectura de los rumbos (236). Para distancias mayores, el error de excentricidad será inapreciable; y para ellas no hay necesidad de la correccion indicada (238). Despejando AB en la fórmula [1] (237), y haciendo en ella B $=0°\,5'$, y AC $=0^{m},11$, que es la excentricidad de las brújulas ordinarias, resultará

$$AB=\frac{0,11}{\text{sen. } 0°\,5'}=\frac{0,11}{0,0014544}=75,63.$$

La longitud 75 ^{m}, 63 es pues el *límite mínimo* que corresponde á la *longitud* que debe tener la recta cuyo rumbo queremos hallar.

249. *Límite máximo*.—El límite de apreciacion (236) da lugar tambien á un error de desviacion en la construccion de los planos, que depende de la escala en que cada uno de estos se construye, y no debe exceder en la práctica de la distancia 0,^{mm} 2, la cual se considera como límite inferior de las que la vista puede apreciar. La desviacion indicada es un cateto de un triángulo rectángulo que tiene por ángulo opuesto el valor 5′ como límite máximo, y cuya hipotenusa x, que es la longitud máxima de las rectas en el plano, se halla por la expresion

$$x=\frac{0,0002}{\text{sen } 0°\,5'}=\frac{0,0002}{0,0014544}=0,1375.$$

Este valor de x representa en la escala de $\frac{1}{1000}$ la longitud de 137,^{m}5, que es la mayor que debe tomarse para una recta cualquiera del plano referida á la meridiana por medio de la brújula. En las escalas de $\frac{1}{5000}$ y $\frac{1}{20000}$, los límites correspondientes son 687,^{m}5 y 2750,^{m}0.

La magnitud real de 0,^{m}1375, límite de las rectas en el plano, es poco diferente de la que tiene la aguja magnética en las brújulas ordinarias.

250. **Brújula del limbo zenital.**—Esta brújula difiere de la explicada (234) en la pieza de union con el trípode, que es una plataforma de tres tornillos (172): lleva además fijo á la caja un nivel n (fig. 93) con sus tornillos de correccion b, un limbo dividido (l, l') susceptible de un

pequeño movimiento por el tornillo de correccion r, que está á la parte posterior del instrumento representada en L, alrededor de un eje perpendicular á él, y fijo á la caja perpendicularmente á uno de sus costados. El tornillo r, semejante á los de ajuste ó coincidencia (152), gira sin avanzar en la pieza k unida al limbo, y su rosca se introduce en una tuerca fija invariablemente á la caja. Un segundo nivel (m, m') unido á la parte posterior del limbo, tiene su tornillo de correccion s, igualmente dispuesto que el r, estando una de sus esferas fija al limbo y la otra al tubo del nivel. Ambos tornillos se ponen en movimiento por medio de una llave.

La alidada de esta brújula es un anteojo astronómico (135) sujeto por las abrazaderas (h, h') á una pieza de metal que gira alrededor del eje del limbo (l, l'), y la cual lleva tambien los nonius v. El movimiento de la alidada puede ser á voluntad rápido ó lento por el sistema de los tornillos de presion a y de coincidencia c (152).

Todo el instrumento puede girar alrededor de una espiga fija á la plataforma, con movimiento rápido que puede impedirse por un tornillo de presion, ó bien puede hacerse el movimiento rápido ó lento á voluntad por el sistema de los a' y c'.

Los tornillos t de la plataforma descansan en la meseta del trípode (174).

251. El limbo zenital está dividido en medios grados, y el nonius aprecia minutos (157). El cero del limbo se halla en la parte superior del mismo; lo que no es un inconveniente para la medida de los ángulos de elevacion y depresion (182): Las graduaciones son dos, simétricas á partir del cero: la que está hácia la parte del ocular sirve para la apreciacion de los ángulos de elevacion, y la de la parte del objetivo para los de depresion. Cuando el eje del anteojo es horizontal, el cero del nonius coincide con el del limbo zenital.

Otras brújulas dan directamente los ángulos zenitales, que pueden deducirse (178) en la explicada. En ellas está el cero dispuesto de modo que el eje del anteojo es vertical cuando los ceros coinciden.

252. **Usos de la brújula de limbo zenital.**—Con el instrumento de que nos ocupamos puede obtenerse á la vez el rumbo y la pendiente de una línea AB (fig. 94) del terreno. Para esto se coloca la brújula en estacion en el extremo A de dicha línea, disponiendo verticalmente el eje de rotacion del instrumento; para lo cual se hace girar á la brújula alrededor de este eje, hasta que el nivel n (fig. 93) se halle en direccion de dos tornillos de la plataforma, y moviendo éstos hasta que la ampolla acuse la horizontalidad: se coloca despues en la direccion del tercer tornillo de la plataforma, horizontándole por el movimiento de este solo tornillo: se repite la misma operacion hasta que el nivel permanezca horizontal en ambas posiciones, con lo que el eje será vertical (33). La operacion de disponer verticalmente el eje de rotacion se llama en general *horizontar el instrumento*.

Dirigiendo la visual al pié de un jalon situado en B, para lo que se hace uso del movimiento del instrumento alrededor de su eje vertical y del de la alidada por medio de los tornillos a y c (152), se obtendrá (236) el rumbo de AB: para hallar su pendiente se dirigirá la visual á un punto *b* elevado sobre B en una cantidad igual á la altura Aa del instrumento; y el ángulo de elevacion *m* que se leerá entonces en el limbo zenital será la pendiente de AB (Acots. 34), á causa del paralelismo de *ab* y AB (Geometría. Teor. 30).

253. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Se coloca el nivel paralelamente á dos tornillos de la plataforma y se horizonta por ellos, dándole despues una semirevolucion hasta que quede paralelo á los mismos tornillos y corrigiendo la desviacion que puede haber en la burbuja, mitad por los tornillos *b* (fig. 93) de correccion del nivel, y mitad por los indicados de la plataforma: se le lleva despues á su posicion primera, repitiendo la misma operacion anterior hasta que la ampolla no acuse desviacion alguna en dos de sus posiciones sucesivas, con lo que el nivel estará corregido (214) Disponiéndole despues paralelamente á la recta determinada por el tercer tornillo de la plataforma y el punto medio de la que une los dos primeros, se le horizonta por el solo movimiento del tercero, y el eje de rotacion del instrumento será vertical (213)

254. 2.ª *Que la aguja en todas sus posiciones sea un diámetro de limbo.*—(240)

255. 3.ª *Que el eje del anteojo sea perpendicular á su eje de rotacion.*—(242).

256. 4.ª *Orientacion de la brújula.*—(243 y 244).

257. 5.ª *Que el plano descrito por el eje óptico del anteojo sea vertical.*—Esta verificacion es la explicada (230). La correccion se hace en algunas brújulas por el movimiento de unos tornillos que unen el limbo vertical á la caja de la brújula.

258. 6.ª *Que el eje óptico del anteojo sea horizontal, cuando se halla en coincidencia el cero del limbo zenital con el del nonius correspondiente.*—Se establece la coincidencia de los ceros en el limbo zenital y se observa el punto en que termina la visual dirigida á un objeto vertical lejano, dando despues una semirevolucion exacta á la alidada y otra al instrumento, para dirigir la visual al objeto observado primeramente y ver si va á parar al mismo punto: moviendo en caso contrario todo el limbo por su tornillo *r* (fig. 93) de movimiento general hasta que ocupe una posicion equidistante de los dos puntos observados (220 y 221). Despues se horizonta el nivel (m, m') por su tornillo *s* de correccion particular, á fin de que pueda dar á conocer en lo sucesivo las descorrecciones del limbo.

259. Esta correccion puede hacerse tambien observando de un modo análogo la pendiente de la visual dirigida á un objeto lejano en dos posiciones diametralmente opuestas de la alidada, dando á esta la posicion correspondiente á la pendiente media (222) y dirigiendo de nuevo la visual al punto observado, por el movimiento del tornillo *r*.

260. **Brújula de arco zenital.**—Consta de un arco vertical de rádio bastante grande, dividido en cuartos de grado. El nonius lo está en 15 partes, por lo cual aprecia minutos (161). El anteojo unido á la pieza del

nonius, gira con ella alrededor del eje proyectado en *m* (fig. 95), con movimiento rápido ó lento por el sistema de los tornillos *a* y *c*. El *t* sirve para mover el sistema constituido por el arco y la alidada, y el *r* es el de correccion particular del nivel *n*.

261. Las verificaciones y correcciones son las mismas que en la brújula de limbo zenital, á excepcion de la de éste (258), que en virtud de la disposicion que presenta, se obtiene hallando (223) la pendiente media entre las observadas para una misma recta desde cada uno de sus extremos, y moviendo el limbo por el tornillo *t* hasta que la visual tenga la pendiente media, de un modo análogo al explicado (259). Despues de esta correccion es preciso horizontar el nivel *n* por medio del tornillo *r*, en el caso de hallarse unido al arco zenital como en el modelo que hemos descrito.

En esta correccion no tiene influencia alguna la falta de paralelismo entre las verticales de los puntos de estacion (223).

262. **Brújula de Kater.**—La aguja *ns* (fig. 96) de esta brújula forma cuerpo con un limbo de metal sumamente ligero, de graduacion completa, dividido en grados y medios grados; el cero corresponde al extremo Sur de la aguja, y la graduacion va de Sur á Norte pasando por el Oeste. El estilo sobre que se apoya la aguja está en el fondo de una caja cilíndrica (c, c'), la cual se halla provista de una pínula exterior (p, p'). Diametralmente opuesto á la pínula hay un prisma triangular de metal (a, a') que encierra otro de cristal, cuya cara inferior es convexa; el primero presenta una ranura (b, b') que sirve de ocular. Esta ranura y la cerda de la pínula, que es el objetivo, determinan un plano que pasa por el centro del limbo. El pasador (m, m') mueve la palanca que sujeta á la aguja contra el cristal que cubre la caja. El boton *n* que está en contacto con una placa elástica interior, sirve para detener el movimiento oscilatorio de la aguja y el limbo, oprimiéndoles ligeramente. La caja puede girar alrededor de un eje dentro de una espiga que forma parte de la rodilla *r*.

La pínula y el prisma del ocular pueden aplicarse, la primera al cristal que cubre la caja, y el segundo al costado de ésta; lo que permite que pueda darse al instrumento una forma muy cómoda para su trasporte.

Los números de la graduacion se graban invertidos á fin de que aparezcan directos á la vista por la refraccion en el prisma.

263. Para tomar el rumbo de una recta del terreno se hace estacion en uno de sus extremos, y teniendo la brújula en la mano ó bien descansando sobre un trípode, se dirige la visual por la ranura que acompaña al prisma hasta que la cerda de la pínula opuesta cubra exactamente á un jalon situado en el otro extremo de la recta cuya direccion se determina: se observa entonces la division del limbo que en virtud de la inclinacion de una de las caras del prisma (112) aparece en prolongacion de la cerda, ó se acerca más á estarlo, y la cual da el rumbo pedido.

264. **Brújula de reflexion.**—Dispuesta en todo lo demás como la

que acabamos de dar á conocer, difiere tan sólo en que la imágen de la graduacion que señala el rumbo de una recta, aparece en posicion vertical por reflejarse en un espejo inclinado en 45° al horizonte y situado delante de la ranura que sirve de ocular.

265. **Brújulas de suspension.**—Son las explicadas, cuando su limbo puede hallarse situado horizontalmente en todas las posiciones que ocupa la caja ó la armadura de que se hallan suspendidas, en virtud de la disposicion particular de dos ejes, los que se apoyan en anillos concéntricos y constituyen el *sistema de suspension de Cardan*, que se emplea en las brújulas marinas.

266. **Declinatoria.**—Se compone de una caja rectangular de madera, en cuyo interior y hácia los lados menores se hallan dos arcos divididos m, m' (fig. 97): los ceros de ambas divisiones corresponden á los puntos medios de los arcos, y determinan una recta paralela á los lados mayores de la caja. La graduacion de cada uno de los arcos se extiende hasta 40 ó 45° á uno y otro lado del cero. En el centro a comun á los dos arcos se halla un estilo que sostiene á la aguja magnética ns. La letra N indica la parte á que ha de corresponder el extremo n de la aguja, y sirve para colocar el instrumento orientado siempre de la misma manera.

El error de declinacion de que el costado cb de la caja puede hallarse afectado, no influye como hemos visto (243) en la determinacion de las posiciones relativas de las rectas cuyos rumbos se tomen con el auxilio de este instrumento.

267. **Usos de la declinatoria.**—Se emplea para hallar la declinacion de la aguja, y para trazar en un plano la meridiana magnética ó la astronómica. Para hallar la declinacion, es preciso que se tenga trazada en un plano la meridiana astronómica (50): se hace coincidir con esta línea el canto bc de la caja de la declinatoria, y entonces el extremo n de la aguja marca la declinacion.

Para trazar la meridiana magnética basta mover la caja hasta que la aguja coincida con la línea de los ceros, y trazar una línea por el canto bc de la caja.

La meridiana astronómica se traza moviendo la caja hasta que la aguja señale el ángulo de declinacion, que se supone conocido, quedando el punto N al este del estremo n de la aguja: la línea trazada por el canto bc será la meridiana pedida.

268. **Plancheta.**—La *plancheta* es un goniógrafo por medio del cual se obtiene desde luego, representada en una hoja de papel, la proyeccion horizontal del polígono semejante al del terreno. Se compone de un tablero mm' (fig. 98) rodeado de un marco metálico para que no se alabée y destinado á que se coloque sobre él el papel en que ha de hacerse el dibujo del plano; y para cuando éste ha de tener mucha longitud lleva el tablero en su parte inferior unos cilindros r, r' dispuestos de modo que puedan girar alrededor de su eje en un solo sentido, y cuyo movimiento puede detenerse á voluntad, manteniéndolos en la posicion en que se

quiera; en uno de ellos va arrollada una tela fina, á la cual se pegan de antemano, unos á continuacion de otros, los pliegos de papel necesarios. De esta manera cuando el dibujo no puede estar contenido en el papel que ocupa el tablero, se arrolla en uno de los cilindros, y queda sobre el tablero el papel en blanco que se desarrolla en el otro.

En el marco suele estar señalada la graduacion de la circunferencia en que puede suponerse inscrito el cuadrado ó rectángulo de la plancheta.

El tablero descrito es susceptible de un *movimiento de traslacion* en la direccion de la recta *mm'*, deslizándose una ranura longitudinal del reglon *pp'*, que forma cuerpo con él por medio de los tornillos *t*, *t'*, á lo largo de un reborde saliente de las piezas *oo'* que le forma con la parte inferior del instrumento. El movimiento de traslacion puede ser rápido ó lento por el sistema de los tornillos M y E (152). Toda la parte superior ya descrita es susceptible de un *movimiento de rotacion*, que puede impedirse apretando el tornillo de presion F. El instrumento que nos ocupa puede tener una posicion cualquiera, ya horizontal, vertical ó inclinada, por el juego de la rodilla de Cugnot (167) que le une á un trípode cónico (175). La rodilla se sustituye á veces por una plataforma de tres ó de cuatro tornillos (172 y 169).

269. La plancheta más generalmente usada se compone sencillamente de un tablero susceptible del movimiento de rotacion indicado (268) con auxilio de una espiga metálica, que se introduce en un cilindro hueco provisto de un platillo circular metálico y terminado por una esfera, la cual forma parte del juego de nuez (166) de la rodilla que une el instrumento á un trípode de tres brazos (174) El movimiento de rotacion que hemos indicado puede impedirse por medio de un tornillo de presion, que entonces sujeta el tablero al disco mencionado También puede darse á este tablero una posicion cualquiera, por el movimiento de la esfera dentro de las conchas de la rodilla.

270. *Partes accesorias*.—Al instrumento descrito acompaña un nivel de aire (25) destinado á horizontar el tablero, una declinatoria (266), la alidada de pínulas (147), ó la de anteojo (148), y además una pieza curva de acero llamada *compás curvo* ó *compás de espesor*, provista en su parte inferior de una plomada, y en la superior de un pequeño taladro circular *c* (fig. 99), en prolongacion del cordon de la plomada.

271. **Verificaciones y correcciones.**—Están reducidas á las del nivel (216), y de la alidada (231 ó 233), ejecutando esta última sobre el tablero dispuesto horizontalmente (30).

272. **Orientacion de la plancheta.**— Se dice que se orienta la plancheta, cuando dada una línea en el terreno, y trazada su homóloga en el papel del tablero, se coloca éste en estacion de modo que uno de los extremos de la línea trazada en él se halle en la vertical del extremo correspondiente de su línea homóloga del terreno; hallándose además toda la línea del tablero situada en el plano vertical de la del terreno. Para conseguirlo, se colocará la plancheta en el extremo A (fig. 100) de

modo que el punto a se halle próximo á la vertical del A, disponiendo tambien el tablero á ojo próximamente horizontal por medio de los piés del trípode, y rectificando despues la horizontalidad con el nivel de aire. Hecho esto, se coloca el compás de espesor de modo que su taladro se halle coincidiendo con a, y la alidada de manera que el canto de la línea de fé se ajuste exactamente á la recta trazada ab.

Valiéndose despues de los movimientos de rotacion y traslacion del tablero, se hace que la plomada caiga exactamente sobre el punto A, y que la visual vaya á parar á un jalon situado préviamente en el extremo B de la línea del terreno, sin que el compás de espesor ni la alidada dejen de ocupar en el tablero la posicion que se les habia dado. Para lograr que todas estas circunstancias se verifiquen hay necesidad de varios tanteos, teniendo que mover á veces t do el instrumento, en lo que suele emplearse mucho tiempo. Cuando se ha conseguido, se dice que la plancheta se halla *en estacion y orientada*.

273. Disponiendo la declinatoria sobre la recta ab (fig. 100) trazada en la plancheta, y moviendo su caja hasta que la aguja coincida con la línea *norte-sur*, se traza una recta por uno de sus lados mayores, con lo que se tendrá en el plano la direccion de la meridiana (267) y la plancheta estará orientada con respecto al meridiano magnético. Trasladando la plancheta á otro punto de estacion, haciendo que coincida uno de los lados mayores de la citada caja con la meridiana trazada en el tablero, y dando á éste el movimiento de rotacion hasta que la aguja marque la graduacion cero, las rectas trazadas en el tablero ocuparán posiciones paralelas á las que tenian en la primitiva

274. **Uso de la plancheta**.—Se emplea este instrumento en la determinacion gráfica de los ángulos (150), orientando la plancheta (272) con respecto al vértice O (fig. 50) y á uno de sus lados OM, y dirigiendo despues la alidada al extremo N del otro lado. Del mismo modo que para M y N podrían determinarse las direcciones de O á otros puntos en una vuelta de horizonte (177) A veces basta obtener una orientacion aproximada, con el objeto de evitar los tanteos que hemos indicado; originándose un error de excentricidad, que no tiene influencia apreciable en el valor del ángulo, atendiendo al corto espacio en que puede tener lugar relativamente á la longitud de las rectas que en el terreno se consideran.

275. Disponiendo verticalmente el tablero de la plancheta y una recta trazada en él con el auxilio de la plomada, pueden obtenerse tambien los ángulos zenitales y deducirse los de elevacion y depresion (178).

276. **Escuadra ó cartabon**.—Se llama *escuadra* ó *cartabon* á un instrumento que tiene por objeto determinar en el terreno alineaciones perpendiculares entre sí De las varias disposiciones que se dan á este instrumento, las más usadas son la *escuadra prismática* (fig. 101) y la cilíndrica (fig. 102) Consta la primera de una prisma octogonal regular, con pínulas opuestas que determinan dos planos perfectamente perpendiculares entre sí, llamados *planos de colimacion*. Las caras laterales del prisma situadas entre las que van provistas de pinulas, lo están de unas

hendiduras longitudinales, determinando así los planos bisectores de los ángulos diedros formados por los primeros; pudiendo obtenerse por lo tanto con la escuadra ángulos de 90, de 45 y de 135°.

Cuando la escuadra lleva en su parte superior una brújula, ésta se halla dispuesta de modo que la línea norte-sur de la caja está en el plano vertical de dos pínulas opuestas.

La escuadra cilíndrica está igualmente dividida por planos que pasan por el eje de figura del instrumento, así como lo está otra escuadra de forma *esférica*, que tambien se usa, por planos que son meridianos de la superficie y que forman entre sí los mismos ángulos que en las otras escuadras.

Un mango hueco une el instrumento á la espiga de un baston ó chuzo, que puede clavarse en el terreno.

Sería conveniente que la escuadra se moviese independientemente del mango: lo que se consigue en las escuadras modernas haciendo que el cuerpo de la escuadra se una con el mango por medio del tornillo *t* (fig. 55), que está fijo á la parte superior *m* de este último; y unido como acabamos de indicar puede girar con la pieza *m* alrededor de un eje *rs*, que forma cuerpo con la pieza inferior *n* del mango, la cual se puede afirmar á la espiga del chuzo ó á la de un trípode por el tornillo de presion *p*.

277. **Problemas que se resuelven con la escuadra**.—Con las escuadras se pueden resolver los dos problemas siguientes:

1.° *Formar un ángulo recto en un punto dado de una recta ó levantar una perpendicular á esta última.*

Se fija el instrumento verticalmente en el punto dado C (fig. 103), moviéndole alrededor de su eje hasta que el plano de colimacion determinado por la hendidura *b* y la cerda *a* se halle en el plano vertical de AB; lo que tendrá lugar cuando la visual vaya á parar exactamente al punto A. Se mirará despues por la hendidura *m* y se hará colocar un jalon D que quede cubierto por la cerda *n*; haciendo señas á izquierda y derecha hasta conseguirlo, en cuyo caso con una nueva seña se mandará clavar el jalon de modo que se halle vertical: con lo cual los puntos C y D pertenecerán á la perpendicular pedida, por ser AB y CD las trazas sobre el terreno de los planos de colimacion de la escuadra, perpendiculares entre sí por construccion.

De un modo análogo se obtiene el ángulo de 45°.

2.° *Desde un punto dado fuera de una recta tirar otra que forme con ella un ángulo recto, ó bajarle una perpendicular.*

Se busca por tanteos un punto C de la recta AB desde el cual las visuales dirigidas sucesivamente desde *b* y *m* vayan á parar exactamente á los jalones situados en los puntos A y D.

278. Puede además determinarse el rumbo de la recta AB, en la que se halla el cero *a* del limbo de la brújula, observando el valor del arco *as* (236).

279. **Verificaciones y correcciones**.—Consisten las verificaciones en cerciorarse de que los planos verticales de las pínulas, así como los

de las hendiduras, se cortan á ángulo recto; y si además los ocho ángulos que estos planos forman entre sí son de 45°.

Para lo primero se observará con la escuadra, que supondremos descorregida, un punto r' (fig. 88), y haciendo (279) que la alidada ab tome la posicion de la cd, para lo cual tiene que recorrer el arco m, esta última pasará á ocupar la $a'b'$ recorriendo el arco $m' = m$ y la visual irá á parar á otro punto distinto r''. Podrá entonces corregirse la alidada si la disposicion del instrumento lo permite, haciendo (224) que $a'b'$ pase á la posicion xz, ó de no ser así será preciso hallar el punto r equidistante de r' y r'', que determinará con el de estacion t la perpendicular á cd.

Cuando la visual termina en el mismo punto en ambas posiciones de la escuadra, los planos de colimacion son exactamente perpendiculares entre sí.

280. El procedimiento que acabamos de emplear para la correccion sirve además para resolver el problema 1.° (277) con una escuadra descorregida.

281. Puede tambien bajarse análogamente una perpendicular á una recta desde un punto dado exterior á ella, aplicando el procedimiento explicado (277—2.°), haciendo coincidir sucesivamente con la recta los dos planos de colimacion y hallando el punto medio de la porcion de recta comprendida entre los dos puntos así determinados, el cual será el pié de la perpendicular pedida.

282. Con respecto á las hendiduras que determinan los ángulos de 45° puede trazarse un ángulo recto con las pínulas ya rectificadas, tomar longitudes iguales en sus lados; y colocando en uno de sus extremos el cartabon, orientarle con un jalon situado en el vértice del ángulo recto, y ver si la visual tirada por las hendiduras próximas va á parar á un segundo jalon dispuesto en el extremo de la otra distancia medida.

283. **Escuadra de reflexion.**—Se compone de una caja (c, c') (figura 104), de fondo plano, cuyas paredes están formadas por una pieza curva de metal, elástica, y sujeta al fondo por una de sus extremidades. La otra extremidad es suceptible de cierto movimiento en virtud de su elasticidad, por medio del tornillo de correccion t, que tiene su tuerca en una pieza z fija al fondo de la caja. Este movimiento sirve para hacer que formen constantemente un ángulo dado dos espejos (A, A') (B, B') que ocupan la parte interior de las paredes de la caja; la parte superior de las mismas presenta unas ventanillas n, por las cuales pueden verse directamente los objetos.

En la parte inferior del instrumento hay un mango m, que sirve para tener la escuadra en la mano durante las observaciones.

284. Para comprender el uso de esta escuadra en la resolucion de los problemas, supongamos que los espejos de la escuadra sean los A y B (fig. 34), que forman un ángulo s de 45°, y que en el punto A de la recta MA, queremos levantar una perpendicular á esta recta. Colocaremos la escuadra en A de modo que por las ventanillas veamos directamente desde A el objeto M, que señala el extremo de la recta dada; fijo el instru-

mento en esta posicion, se hará mover un jalon hasta que ocupe una posicion N, en la cual su imágen doblemente reflejada por los espejos aparezca en el B, en prolongacion del objeto M visto directamente. Entonces el ángulo MAN, doble del que forman los espejos (114) será un ángulo recto, y la recta que une el punto N con el A determina por lo tanto la perpendicular pedida.

Dado un punto N desde el cual se quiere bajar una perpendicular á la recta MA, bastará hallar por tanteos un punto A de esta recta, desde el cual se observe el extremo M de la misma, visto directamente, en prolongacion de la imágen del N formada en el espejo B por la doble reflexion.

Si el ángulo de los espejos es de 90° sirve la escuadra para determinar un punto que se halle en línea recta con otros dos dados, empleándose como la descrita (283).

285. La verificacion de estas escuadras consiste en asegurarse de que los espejos forman el ángulo constante que hemos asignado á cada una de ellas para la resolucion de los problemas á que se les destina: para lo cual bastará colocar el instrumento en el vértice A (fig. 34) de un ángulo de 45° determinado con la escuadra (277) y dirigir una visual al extremo M, viendo si entonces coincide con él la imágen del otro extremo N; en cuyo caso la escuadra estará convenientemente dispuesta. De lo contrario se hará mover el espejo B por el tornillo de correccion hasta que tenga lugar la coincidencia.

286. **Grafómetro.**—Es un goniómetro por medio del cual se obtiene la *amplitud*, ó el valor en grados, de los ángulos formados por las líneas que se consideran en las operaciones topográficas. Consta de un limbo semicircular (l, l') (fig. 105) de doble graduacion en grados y medios grados. Dos pínulas (a, a') (b, b') fijas á las estremidades de la regla m, constituyen con ella una alidada fija. Otra alidada (n, n'), giratoria alrededor del centro del limbo, lleva en las extremidades de su regla los nonius, que aprecian minutos (157). Cada uno de los nonius sirve solo para una de las graduaciones del limbo.

A este último acompaña una brújula, cuyo limbo está ordinariamente dividido de 2 en 2°; y algunos grafómetros llevan además uno ó dos niveles situados en prolongacion del plano del limbo.

La parte inferior del instrumento es una rodilla de juego de nuez.

287. **Usos del grafómetro.**—El grafómetro se emplea para la medicion de los ángulos en el plano de los objetos (179), y tambien para la de los ángulos azimutales (176), y los de elevacion y depresion; pudiéndose deducir de estos últimos los ángulos zenitales (178).

Los ángulos se miden en el plano de los objetos colocando el grafómetro en estacion en el vértice, y moviendo á la vez el limbo por medio del juego de la rodilla, y la alidada móvil alrededor de su punto medio, hasta que la visual tirada por cada una de las pínulas vaya á parar á uno de los puntos en que terminan los lados del ángulo que se mide: leyendo despues su valor en la primera ó en la segunda graduacion (145), segun que la alidada fija esté dirigida al objeto de la izquierda ó al de la derecha del observador.

Para la medida de los ángulos azimutales se dispone el limbo horizontalmente por medio de los niveles que le acompañan, ó por un nivel de mano (30) en caso contrario. En la práctica es suficiente la horizontalidad que proporciona la aguja de la brújula (236); procediendo en lo demás como hemos dicho (149).

Los ángulos de elevacion y depresion se obtienen dando al plano del limbo una posicion vertical por el movimiento de la rodilla, y haciendo al mismo tiempo que la línea (0° — 180°) del mismo sea horizontal; todo lo cual se habrá conseguido cuando el centro C del limbo (fig 106) y la division 90° queden cubiertos á la vez por el cordon de una plomada *p*, que se coloca delante del primero.

Con la plomada se juzga al mismo tiempo, de la verticalidad dada al limbo, mirando á este de canto, y observando si el cordon de la plomada queda paralelo á su plano.

Haciendo girar á la alidada móvil *ab* hasta dirigirla al punto M, estremo de la recta CM cuya pendiente se quiere determinar, el arco *ma* dará esta pendiente, que no es otra cosa que el ángulo de elevacion MC*n*. El ángulo de depresion *n*CN, estaría medido por el arco *nr*.

288 Tambien puede emplearse el grafómetro para hallar una linea que forme un ángulo dado con otra línea tambien dada. Bastará para ello colocarle en el punto de ésta que ha de ser vértice del ángulo, dirigir la alidada fija al extremo de la misma línea, y tomar en el limbo (159) el ángulo dado. Un jalon colocado en la direccion que tiene entonces la alidada móvil determina con el punto de estacion la línea pedida.

Cuando el ángulo así determinado es de 90°, la segunda recta es perpendicular á la primera; y cuando es de 180°, se hallan en prolongacion una de otra.

289. **Verificaciones y correcciones**.—Las verificaciones y correcciones son las explicadas para los limbos (211), las cuales tienen en el grafómetro una aplicacion completa.

290. **Límite del empleo del grafómetro**.—Supongamos que el arco *rs* (fig. 107) es el límite 1′ de la apreciacion de los ángulos. Es evidente que en el espacio angular que comprenden las líneas *ar*, *as* indefinidamente prolongadas existen infinitos puntos, tales como el *c*, que determinan con *a* una recta *ac*, cuyo ángulo con *ab* no puede obtenerse con exactitud.

En efecto, el valor de este ángulo estará dado por el arco *mr* ó el *ms*, cometiéndose un error *rt* ó *ts*, que tienen por límite máximo 1′. Este error produce una desviacion en la direccion de la recta *ac*, que crece con la distancia, y vamos á determinar el límite máximo de la que puede mediar entre los puntos *a* y *c* en el terreno, para que al transportar el ángulo en una escala dada, la desviacion *dc* en el plano sea menor que el límite $0,^{m}0002$ de las longitudes apreciables á la vista.

Para conseguirlo, supongamos que el triángulo adc es rectángulo, y tendremos:

$$ac = \frac{dc}{\text{tang } 1'} = \frac{0^{\text{m}},0002}{0,00029} = 0,^{\text{m}}68965 \qquad [2]:$$

magnitud que corresponde á 3450 ó á 7000$^{\text{m}}$ próximamente en las escalas respectivas de $\frac{1}{5000}$ ó $\frac{1}{10000}$.

291. **Pantómetra**.—Este instrumento, conocido tambien con el nombre de *goniasmómetro*, y debido á Fouquier, se compone de un cilindro (fig. 108) semejante al de la escuadra, y dividido en dos partes: la inferior está unida al trípode por medio de una rodilla de juego de nuez, y presenta en su superficie el limbo, que está dividido generalmente en grados, de derecha á izquierda; una hendidura corresponde al cero del mismo, y una ventanilla con su cerda á la 180, constituyendo ambas la alidada fija como en el grafómetro. Esta parte del instrumento se mueve alrededor de su eje de figura dentro de las conchas de la rodilla, y se fija por el tornillo de presion de ésta. La parte superior del cilindro gira alrededor del mismo eje, é independientemente de la que lleva el limbo, por medio del tornillo t, fijo á esta parte, y provisto de un piñon, cuyos dientes engranan con los de una rueda fija interiormente al cilindro superior. Este lleva el nonius n, y está provisto tambien de dos niveles tangentes en la base superior, y de una brújula dispuesta como la de la escuadra. Otra alidada cuya hendidura corresponde al cero del nonius, sirve de alidada móvil, y dos hendiduras determinan un plano perpendicular al de colimacion de esta última alidada. El nonius está dividido en 30 partes, por lo que aprecia de 2 en 2′ (162).

La pantómetra presenta otras disposiciones más sencillas que la que acabamos de describir, las cuales consisten en la supresion de los niveles ó de la brújula; y la más elemental se compone tan solo de los cilindros y la rodilla.

292. **Usos, verificaciones y correcciones**.—Este instrumento se emplea para la medida de los ángulos azimutales, disponiendo verticalmente el eje del cilindro por medio de los niveles y el juego de la rodilla: despues se dirige la alidada fija al objeto de la derecha y la móvil al de la izquierda, observando el arco comprendido entre el cero del limbo y el del nonius, y que expresará el valor del ángulo (182).

Las verificaciones y correcciones son análogas á las del grafómetro (289).

293. **Límites del empleo de la pantómetra**.—Introduciendo en la fórmula [2] el valor de la tangente del arco de 2′, se obtienen análogamente (290) los límites de 1700 y 3500$^{\text{m}}$.

294. **Sextante**.—El sextante es un goniómetro de reflexion, que se compone de un sector circular de ébano ó de metal, provisto en su centro de un espejo M (fig. 109) perpendicular al plano del sector, y arma-

do en una pieza circular giratoria alrededor de su centro: con ella gira una alidada que termina en el nonius n, correspondiente á la graduacion del arco ab, con movimiento rápido ó lento á voluntad, por un sistema c de tornillos de presion y de coincidencia. La inclinacion del espejo M sobre el plano del sector puede variar por los tornillos s. Otro espejo N, tambien perpendicular al mismo plano, tiene azogada su mitad inferior y trasparente la superior para ver directamente los objeto á través de ella. Este segundo espejo es tambien susceptible del mismo movimiento que el primero por un sistema de tornillos igual al s, y la pieza en que se apoya puede moverse lateralmente por los tornillos r. Cuatro cristales de colores oscuros, armados en unas piezas x giratorias alrededor de charnelas, pueden colocarse delante del espejo M y otros dos z delante del N, para debilitar la fuerza de la luz en las observaciones solares.

Un anteojo d, que se introduce á rosca en el collar e, está dirigido al espejo N, sin serle perpendicular, y la cerda horizontal de su retículo debe cubrir á la línea que separa la parte trasparente de la azogada en el espejo; para lo cual el anteojo es susceptible de moverse paralelamente al plano del sector por un tornillo que pone en movimiento al collar. Este tornillo no se ve en la figura. Un tubo abierto por uno de sus extremos, y provisto en el otro de un pequeño taladro destinado á servir de ocular, puede sustituir al anteojo para las observaciones de objetos claramente perceptibles á la simple vista. Los rádios del sector están unidos por un travesaño que da consistencia al instrumento, y en cuya mitad se halla una tuerca que recibe la rosca en que termina un mango destinado á tener el sextante en la mano durante las observaciones.

El limbo de sextante está dividido en tercios de grados, y el nonius presenta 40 divisiones, apreciando por lo tanto de 30 en 30′ (161).

295. Cuando el arco ab es un cuadrante, el instrumento toma el nombre de *cuadrante de reflexion*, y el de *octante* cuando es la octava parte de la circunferencia.

296. **Verificaciones y correcciones**.—Las circunstancias que debe reunir este geniómetro para los usos á que se le destina, son las siguientes:

1.ª *Que los espejos M y N sean perpendiculares al plano del limbo.*

2.ª *Que ambos espejos sean paralelos entre sí cuando coincide el cero del nonius con el de la graduacion del sector.*

3.ª *Que el eje óptico del anteojo sea paralelo al plano del limbo.*

Para asegurarse de que el espejo M es perpendicular al plano del limbo, se dispone delante de él un prisma metálico perfectamente construido, que suele acompañar al instrumento, y se observa si la cara superior del prisma aparece en el mismo plano que su imágen formada en el espejo; para lo cual se coloca la visual en este plano. Si la imágen aparece elevada con relacion á la cara del prisma, el espejo estará inclinado hácia adelante, y lo estará en sentido contrario si dicha imágen aparece deprimida: en cualquiera de estos casos se moverá el espejo en el sentido conveniente por los tornillos s.

297. Para obtener la perpendicularidad del espejo N, se dirige la visual por el anteojo á un objeto bien determinado, y se mueve la alidada hasta que en la parte azogada del mismo espejo N aparezca la imágen del objeto despues de reflejada en el otro. Si el objeto y su imágen coinciden exactamente, el espejo N es perpendicular al plano del limbo; pero si se encuentran en una misma perpendicular á este plano, sin hallarse en contacto, se mueve el espejo por el tornillo análogo al *s* hasta que tenga lugar el indicado contacto.

298. Si haciendo la coincidencia de los ceros y dirigiendo la visual por la parte clara del espejo á un objeto lejano, se ve coincidir exactamente con él su imágen doblemente reflejada, los espejos serán paralelos, segun la propiedad establecida (116); pero no siendo así, se hace variar la posicion del espejo N con respecto al M, por medio de los tornillos *r*, hasta lograr la coincidencia.

299. El paralelismo del eje del anteojo y el plano del limbo se obtiene por medio de un anteojo de verificacion (218), cuando el del sextante tiene tornillos de correccion para el retículo; pero regularmente existe el paralelismo por construccion.

300. **Usos del sextante**.—El sextante, así como el cuadrante y el octante, se destina á la medida de los ángulos en el plano de los objetos, y tambien á la de los ángulos verticales de elevacion y de depresion.

Para lo primero, se hace la coincidencia exacta del cero de nonius con el del arco graduado, se dispone el plano del sector aproximadamente en el de los objetos y se le mueve en él, dirigiendo la visual por el anteojo hasta que el objeto A (fig. 110) visto directamente por la parte trasparente del espejo N, aparezca coincidiendo con su imágen A′, vista en la parte azogada por la doble reflexion del rayo luminoso AC en los espejos, formando ángulos iguales con las normales *n* y *n′* á ambos; circunstancia que siempre puede tener lugar por el paralelismo de los espejos (115). Fijo en esta posicion el sector, se afloja el tornillo de presion de la alidada y se la pone en movimiento, con lo que desaparecerá la imágen A′, continuando el movimiento de la alidada hasta que esta imágen se halle reemplazada por la del objeto B de la derecha. Se fija entonces el tornillo de presion, y se emplea el de coincidencia para que esta segunda imágen coincida con el objeto A, que sigue viéndose directamente. El espejo M y la alidada ocuparán entonces la posicion *mb*, en la cual la imágen de B se verá por la doble reflexion del rayo BC en ambos espejos, segun las normales *n″* y *n′*.

El arco *ab* recorrido por el nonius, y que es la medida del ángulo que forman los espejos, es tambien mitad del A′DB que forma el rayo incidente BC de la primera reflexion con el reflejo ND de la segunda (113), é igual al ACB que se trataba de medir.

A fin de evitar la duplicacion del ángulo observado para obtener el de las visuales, las graduaciones del limbo tienen numeracion correspondiente á un arco de doble magnitud.

301. **Hemos dicho que se dirija la visual al objeto de la izquierda A, á**

fin de que la alidada se mueva en el sentido de la graduacion del limbo: hay casos, sin embargo, en que conviene empezar la operacion por el objeto B de la derecha, para lo cual se invertirá el instrumento, de modo que los espejos queden por la parte inferior.

En general conviene dirigir la primera visual al objeto ménos iluminado, para facilitar la percepcion de la imágen del otro, que tiene que experimentar mayor pérdida de luz en las reflexiones sobre los espejos.

302 El sextante se emplea tambien para la medida de la altura angular de un astro sobre el horizonte, cuando se percibe el del mar, colocando el limbo en el plano vertical del punto ocupado por el centro del astro, y haciendo coincidir su imágen doblemente reflejada con el punto de interseccion de dicho plano vertical con la línea del horizonte, cuyo punto se ve directamente por el anteojo á través de la parte trasparente del espejo N.

Esta observacion puede hacerse tambien en tierra, disponiendo horizontalmente un espejo plano, y haciendo coindidir con la imágen del objeto vista directamente y producida por la reflexion sobre el horizonte artificial, la producida por la doble reflexion en los espejos del instrumento. El ángulo obtenido es doble del de elevacion que se trataba de conocer.

CAPITULO II.

Goniómetros de precision.

303. **Teodolito**.—Es un instrumento que se emplea en las operaciones geodésicas y en las topográficas que exigen precision, para la medida de los ángulos azimutales y los de elevacion y depresion; pudiendo deducirse de estos últimos los ángulos zenitales, aun cuando algunos permiten su determinacion inmediata. Difiere en general del grafómetro y la pantómetra en la mayor apreciacion angular y en los detalles de construccion, que hacen del teodolito un goniómetro más á propósito que aquellos para los usos á que se les destina. Describiremos los teodolitos más importantes y más generalmente usados hoy en las operaciones topográficas y geodésicas.

304. **Teodolito de Troughton**.—El teodolito más sencillo de este constructor se compone de dos placas superpuestas b (fig. 111): en la inferior está el limbo azimutal, y en la superior dos nonius n en unos rebajos practicados en el borde de la plancha, los cuales forman una superficie cónica, que es prolongacion de la lateral del limbo que tiene la misma forma; esta disposicion hace más cómoda la observacion de las divisiones, que se facilita con la ayuda de una lente (129).

La plancha inferior forma cuerpo con una columna cilíndrica d, perpendicular á ella; esta columna es hueca y recibe en su interor otra tambien cilíndrica dispuesta perpendicularmente á la plancha superior, y en el centro de la misma; pudiendo así girar ambas planchas alrededor de un eje comun, ya unidas, ya independientemente la una de la otra, y en ambos casos con movimiento rápido ó lento á voluntad Para que giren unidas se aprieta el tornillo de presion a', y se hace uso del sistema de tornillos a y c (152): este movimiento puede tambien servir para hacer girar á la placa inferior independientemente de la otra, aflojando préviamente el tornillo a'; pero esto se ejecuta raras veces, y no es indispensable para los usos á que se destina el teodolito.

Fijo el tornillo a, se puede hacer girar á la plancha superior por el sistema de los a' y c'.

Sobre la plancha superior, y participando de todos sus movimientos, se halla una brújula cuyo centro está en el eje de rotacion de las planchas, dos niveles de aire cuyos ejes son perpendiculares entre sí, y los cuales se hallan provistos de tornillos de correccion particular, así como tambien dos caballetes sobre los que se apoyan los extremos de un eje paralelo al plano de la plancha Alrededor de este eje gira un limbo semicircular graduado, perpendicular á él en su punto medio. El canto exterior de este limbo que sirve para la determinacion de los ángulos de elevacion y depresion, es dentado y engrana con un piñon que da movimiento al limbo. Este piñon, que está oculto en la proyeccion vertical y se proyecta horizontalmente en v, se apoya en una pieza h, en la cual está tambien el nonius del limbo zenital. La plancha del nonius puede correr lateralmente cierto espacio, aflojando los tornillos que la sujetan; con este objeto las ranuras por las cuales pasan estos tornillos son bastante prolongadas lateralmente.

Paralelamente al diámetro (0 — 180°) del limbo zenital é invariablemente unida á él, se halla una regla f sobre la cual se elevan dos soportes que terminan en los collares de un anteojo astronómico, el que puede girar dentro de ellos alrededor de su eje de figura; los collares se cierran por unas clavijas g.

El retículo del anteojo en el teodolito tiene por lo regular tres cerdas; una está destinada á ocupar la posicion horizontal, y las otras dos forman un ángulo agudo, cuya bisectriz es perpendicular á la primera cerda.

Un nivel m unido al anteojo por su parte superior, y más generalmente por la inferior como representa la figura, puede variar de inclinacion con respecto á él por el movimiento de los tornillos r: otros tornillos z, dobles para cada extremo del tubo del nivel, sirven para hacer variar lateralmente la direccion de su eje

La columna d termina por su parte inferior en una placa paralela á la plancha del limbo azimutal. Esta placa es á la vez la superior de una plataforma de cuatro tornillos t (169): la placa inferior de la misma se atornilla á la rosca en que termina el trípode (175).

La caja en que se trasporta el intrumento encierra además un segundo ocular con lentes azules para las observaciones solares, la plomada, un destornillador, y una palanca para mover los tornillos de correccion.

305. Los teodolitos de mayores dimensiones que el modelo descrito tienen un tercer sistema de tornillos de presion y de coincidencia destinado á los movimientos del limbo zenital, en vez del engranaje que lleva el citado modelo; y en los más modernos la plataforma es de tres tornillos (172). Un segundo anteojo, llamado *de prueba*, puede fijarse á la columna *d* ó girar alrededor de ella, por un sistema de tornillos de presion y de coincidencia. Tiene además cada anteojo un segundo ocular que le convierte en anteojo terrestre (139). Un segundo microscópio está dispuesto para la lectura de las divisiones del limbo y nonius zenitales.

306. *Graduacion del instrumento.*—Los limbos ázimutal y zenital están divididos en grados y medios grados, y los nonius correspondientes aprecian minutos (157), ó en tercios de grado con una apreciacion de 20″ (162)

El sentido de la graduacion es el de izquierda á derecha; y el limbo zenital presenta dos graduaciones que parten del cero situado en la parte inferior, y crecen á derecha é izquierda hasta 90°.

En la parte posterior del limbo zenital hay otra graduacion que da la *diferencia entre la hipotenusa* AB (fig. 24) *y la base* AC del triángulo rectángulo que forman estas líneas con la vertical BC, cuando la primera tiene una longitud de 100 metros.

307. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Que el eje óptico del anteojo coincida con su eje de figura ó de rotacion dentro de los collares.*—Se sujetan todos los tornillos para que el anteojo no pueda tener otro movimiento que el de rotacion dentro de los collares, y se corrige la posicion de la cerda horizontal y de la bisectriz de las inclinadas, como hemos explicado (142).

308. 2.ª *Que el eje de rotacion del instrumento sea vertical.*—Se sigue un procedimiento análogo al que hemos dado á conocer (253), disponiendo uno de los niveles de la plancha superior en direcciones parálelas á la recta que determinan dos tornillos opuestos de la plataforma y corrigiendo las desviaciones de la burbuja, mitad por los tornillos de correccion particular del nivel y mitad por los que ántes hemos considerado en la plataforma. Colocando despues el mismo nivel en la direccion de los otros dos, se le horizonta por ellos, con lo que el eje de rotacion será vertical (213) Hecho esto, se hace desaparecer la desviacion que puede existir en el segundo nivel de la plancha superior, empleando para ello el solo movimiento de sus tornillos de correccion particular.

Si el instrumento está provisto (305) de un tornillo de aproximacion para el movimiento del limbo zenital, puede empleársele ventajosamente para la aplicacion del procedimiento anterior observando el nivel unido al anteojo, y corrigiendo despues particularmente los de la plancha superior.

309. 3.ª *Paralelismo del eje del nivel superior y el eje óptico del anteojo.*—Se da á este último la posicion horizontal (220), dirigiendo la visual á un punto, sacando el anteojo de los collares para colocarle de nuevo en

ellos invertido, dándole una semirevolucion alrededor del eje vertical, y observando el punto en que va á parar la visual en la vertical del primero; despues se mueve el anteojo por el tornillo v (304) ó por el de coincidencia del limbo zenital (305), hasta que vaya á cubrir al equidistante de los dos primeros, en cuyo caso será horizontal: entonces se lleva la ampolla del nivel á su mitad por los tornillos r de correccion particular

Por la correccion hecha sólo se consigue situar el nivel en un plano paralelo al eje del anteojo; pero entonces puede ó no serle perfectamente paralelo, considerados los ejes en el espacio: nos cercioraremos de que lo es dando al anteojo dentro de los collares todo el giro que permita observar la burbuja del nivel, y viendo si equidista constantemente de las marcas del tubo (215); corrigiendo en caso contrario la posicion del eje del nivel por los tornillos z que le mueven lateralmente.

310 El paralelismo de los ejes á que nos referimos puede obtenerse ántes de la verticalidad del eje colocando el plano del limbo zenital en la direccion de dos tornillos de la plataforma, horizontando por ellos el nivel y viendo si la ampolla marca la horizontal, despues de haber sacado el anteojo de los collares y haberle colocado de nuevo en ellos invertido con relacion al collar que ocupaba cada uno de sus extremos en la posicion primera: la correccion necesaria si el nivel no queda horizontal, se efectúa con sus tornillos de correccion particular y los que hemos considerado en la plataforma. Se funda este procedimiento en lo que hemos expuesto (216).

311 4.ª *Que el plano descrito por el eje óptico del anteojo sea perpendicular al eje de rotacion del limbo zenital.*—Esta circunstancia exige que el eje de rotacion sea horizontal, lo que tendrá lugar cuando sea paralelo á las planchas de los nonius (44). Nos aseguraremos de que sí se verifica dirigiendo la visual á una plomada, haciendo que el cruzamiento de las cerdas del retículo cubra uno de sus puntos, y viendo si cubre á los demás girando en el plano que describe alrededor del eje de rotacion á que nos referimos (230). La correccion, que es innecesaria generalmente por la esmerada construccion del instrumento, solo puede tener lugar en algunos teodolitos en que los soportes del eje del limbo zenital están dispuestos sobre una placa, que puede variar de posicion relativamente á la plancha superior, con el auxilio de unas roldanas de tuerca que se ponen en movimiento por medio de una palanqueta.

312. 5.ª *Que el cero del nonius coincida con el del limbo zenital cuando el nivel, y por consiguiente el eje óptico del anteojo, sea horizontal.*—Si hechas las correcciones anteriores no existe la coincidencia de los ceros, se aflojan los tornillos que sujetan la plancha del nonius, y se la corre hasta lograr la coincidencia exacta, apretándolos de nuevo. Si no puede hacerse esta correccion, se tiene en cuenta el error de desviacion al apreciar los ángulos verticales; sumándole ó restándole de todos ellos, segun el sentido de la misma y el del ángulo que se lee.

Si el nonius marca, por ejemplo, 12′ subiendo cuando el nivel está horizontal, será preciso restar esta cantidad de todos los ángulos de elevacion y aumentarla á todos los de depresion Lo contrario habria que hacer si el ángulo de error fuese bajando.

313 **Usos del teodolito**.—El teodolito se emplea para la medida de los ángulos azimutales, horizontándole por los tornillos *t* (fig 111); para lo cual se dispone cada uno de los niveles de la plancha superior paralelamente á la direccion de dos tornillos opuestos, y se horizonta alternativamente cada nivel por los tornillos que determinan la indicada direccion paralela: con lo que las planchas quedan horizontales (170). La plataforma de tres tornillos se horizonta como hemos dicho (252) moviendo alternativamente los dos que son paralelos á uno de los niveles de la plataforma y el tercero que sirve para la horizontalidad del otro nivel; sin tener que dar giro alguno á las planchas del teodolito. Para medir un ángulo (149) se hace la coincidencia del cero de uno de los nonius con el del limbo azimutal, y en esta disposicion se dirige primeramente la visual al objeto de la izquierda, empleando para ello el sistema de tornillos a, c y el piñon que mueve el limbo zenital, ó bien el sistema análogo dispuesto para el movimiento de la alidada: fijo el limbo entonces por el tornillo de presion a, se afloja el a' para dirigir la alidada con la plancha de los nonius al objeto de la derecha, empleando ahora el sistema de tornillos a' y c' juntamente con los de movimiento del limbo zenital.

Puede tambien obtenerse la medida del ángulo sin la prévia coincidencia de los ceros (177), y con más exactitud en caso necesario, tomando el término medio de las lecturas obtenidas en los nonius (185 y 186).

Se comprueban aproximadamente los ángulos por medio de los rumbos, y se orientan las líneas, valiéndose de la brújula; para todo lo cual se debe disponer el anteojo entre los collares de modo que el objetivo esté á la parte que corresponde al norte en el limbo de la brújula

314 Medido el ángulo, y aflojando el tornillo de presion a puede dirigirse de nuevo la alidada al objeto de la izquierda, exactamente lo mismo que cuando los ceros coincidan y obtenerse (200) el duplo y los demás múltiplos del ángulo Y cuando el instrumento tiene anteojo de prueba se puede aplicar el procedimiento de los múltiplos pares (202).

Con el teodolito se obtienen tambien las vueltas de horizonte (177) y la reiteracion de los ángulos (205), sirviendo el anteojo de prueba para dirigirle á un punto fijo lejano en cada posicion del limbo, y asegurarse de que no ha tenido este movimiento alguno durante los que se dan á la alidada para dirigirla á los diferentes puntos de observacion.

313. La aplicacion de la fórmula [41] (203) á la correccion de excentricidad, exige el conocimiento de esta última, que se halla dirigiendo visuales por ambos anteojos á un punto muy lejano, colocando una plomada en la direccion de cada visual, y hallando la distancia entre los cordones de ambas plomadas

316. Los ángulos verticales se obtienen como con la brújula de limbo zenital (252), leyendo los ángulos de elevacion en la graduacion que está á la parte del ocular, y los de depresion en la que se halla á la del objetivo del anteojo; apreciando siempre los minutos en la gra-

duacion que se halla en el sentido de la correspondiente del limbo (160).

317 *Reduccion de las distancias al horizonte.*—Puede obtenerse esta reduccion observando la graduacion posterior del limbo zenital. Supongamos que la recta dada tiene 120,m4 de longitud, y que su pendiente es 10° 26′ (88): observando la graduacion indicada, veremos que marca 1,52 próximamente; hallaremos entonces la diferencia correspondiente á la distancia dada por la proporcion

$$100 : 1{,}52 :: 120{,}4 : x = 1{,}830;$$

y restando este resultado de la distancia medida, se obtiene tambien 118,57 para la reducida al horizonte.

318. **Límites del empleo del teodolito.**—Hallando la tangente de 20″ que es 0,00009696, y sustituyéndola en la fórmula [2] (290), resulta para la escala de $\frac{1}{5000}$ la distancia de 10313,m5, y la de 20627m para la de $\frac{1}{10000}$, cuando el nonius aprecia de 20 en 20″. Respecto á la apreciacion de minutos, los límites son los mismos del grafómetro.

319. **Teodolito excéntrico de Gambey.**—El limbo azimutal l, (fig. 112) de este teodolito y la pieza de sus correspondientes nonius están dispuestos en coronas concéntricas, que giran en un mismo plano perpendicular por construccion al eje de rotacion de todo el instrumento. El sistema de los tornillos a y c sirve para los movimientos del limbo, y el de los a' y c', para la corona interior que lleva los nonius. Un anteojo de prueba está fijo á la plataforma, y solo tiene un pequeño movimiento lateral por el tornillo de ajuste ó coincidencia x.

Con la corona de los nonius gira toda la parte superior del instrumento: la columna d termina en una horquilla h, en la que se apoya uno de los extremos del eje e de rotacion del limbo zenital l': el otro extremo de este eje descansa sobre un tornillo t, que tiene su tuerca en la regla b; por el movimiento de este tornillo se hace girar al eje alrededor de la charnela que relaciona con la horquilla h el extremo correspondiente del mismo eje, haciendo así variable su inclinacion con respecto á la regla.

El limbo zenital l' es susceptible de los mismos movimientos alrededor del eje e, que el limbo l alrededor del suyo, por el sistema de tornillos de presion r y de coincidencia s, sistema que une el limbo al eje e por medio de la pieza k. La que lleva los nonius está igualmente dispuesta que en el limbo azimutal, y se mueve alrededor del mismo eje, por los tornillos a'' y c'', llevando consigo al anteojo superior. Tanto en este como en el de prueba, el retículo está centrado por construccion; pero puede moverse en su plano alrededor del mismo centro, por dos tornillos que tienen sus tuercas en unos prismas fijos á uno de los rebordes del tubo del anteojo, y cuyos extremos se ponen en contacto con los de un prisma metálico, situado en prolongacion del plano del retículo. Un contrapeso *p* fijo al extremo de la barra *b* equilibra al limbo zenital y á las partes relacionadas con él.

El nivel *n*, provisto de un tornillo de correccion *z*, se coloca tambien sobre el eje *e* por medio de dos horquillas, y se sujeta con otra *h'*, la cual impide que el nivel se mueva lateralmente, pero no el que pueda levantarse para colocarle invertido.

Otro nivel *n'* está situado sobre el mismo eje *e*, perpendicularmente á su longitud, y puede corregirse por el tornillo *v*.

320. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Puede hacerse por cualquiera de los niveles, empleando el tornillo correspondiente de correccion particular y los de la plataforma (253.)

2.ª *Paralelismo del eje* e *con el del nivel* n.—Se horizonta dicho nivel por el tornillo *t*, se levanta para colocarle de nuevo despues de haber invertido la posicion de sus extremos, y se hace desaparecer la desviacion que puede existir, por medio de los tornillos *t* y *z* (212).

El limbo zenital queda entonces en posicion vertical, porque es perpendicular al eje *e* por construccion.

3.ª *Horizontalidad de la visual cuando coinciden los ceros de la graduacion zenital.*—Se obtiene como en la brújula de limbo zenital (258), haciendo uso de los tornillos *r* y *s*.

4.ª *Verticalidad de una de las cerdas del retículo.*—Se ejecuta esta verificacion sirviéndose de una plomada (233.—3.ª), y moviendo convenientemente el plano del retículo en caso necesario.

321. **Usos del teodolito excéntrico.**—Los ángulos azimutales se miden con este instrumento como hemos dado á conocer (183), empleando los sistemas de tornillos *a* y *c*, *a'* y *c'*, *a''* y *c''* como en el teodolito de Troughton (313). Igualmente se obtienen los ángulos de elevacion y depresion (316); pero es preferible seguir la marcha indicada (208), estableciendo la coincidencia de los ceros por los tornillos *a''* y *c''*, dirigiendo la visual al punto de observacion con el auxilio de los *r* y *s* para cada una de las posiciones que se dan al limbo zenital, y de los *a'* y *c'* para disponerle en el mismo plano vertical que dicho punto de observacion.

322. **Círculo repetidor.**—La mayor parte de los instrumentos explicados pueden servir como hemos visto para la repeticion de los ángulos; pero el *círculo repetidor* es llamado así por ser el instrumento repetidor por excelencia.

Un limbo B (fig. 113) dividido generalmente de izquierda á derecha en tercios ó cuartos de grado, aun cuando puede llegar á estarlo de 5 en 5', y dos anteojos A, A', el uno superior y el otro inferior, pueden girar alrededor de un mismo eje, perpendicular al plano del limbo é invariablemente unido á él. El anteojo superior A forma cuerpo con la armadura C, que lleva cuatro nonius *m*, y ambos pueden fijarse al limbo ó girar rápida ó velozmente á voluntad por el sistema de tornillos *a* y *c* (152). El anteojo inferior es tambien susceptible de fijarse al eje del limbo, ó de girar con los indicados movimientos, por medio de los tornillos a' y c': paralelamente al eje de este anteojo, é invariablemente fijo á su tubo se halla un nivel n'. Otro nivel n lo está á la columna que envuelve al eje de rotacion del limbo, y puede variar de inclinacion con respecto á él por un tornillo de correccion particular auxiliado de un muelle de acero. Dicha columna termina en un tambor b, el cual encierra un ensanche del eje de rotacion indicado, al que se da movimiento por el sistema de tornillos de presion p y de coincidencia r.

Los tornillos r están unidos á un piñon cuyos dientes engranan con los que presenta el extremo del ensanche mencionado.

El tambor b tiene plomo en su interior para equilibrar al peso del limbo y de las partes unidas á él.

El eje de rotacion del limbo puede girar tambien alrededor de otro eje, que forma cuerpo con la columna que envuelve al primero, y se apoya en las extremidades superiores de los brazos de una horquillla h. El primero de estos ejes, arrastrando en su movimiento al limbo y los anteojos, describe por medio del sistema de tornillos q y z un plano perpendicular al segundo, al cual se da el nombre de *eje de la horquilla*. Los arcos recorridos por el de rotacion del limbo en virtud de este movimiento, se miden en el arco s, que fijo invariablemente al eje de la horquilla participa del mismo movimiento, observando el índice i trazado en una pieza dispuesta en uno de los brazos de la horquilla.

Esta horquilla forma cuerpo con una columna hueca d, la cual envuelve á un cilindro fijo en el centro del limbo l, que es el *limbo azimutal*. La columna d gira alrededor del cilindro, cuyo eje es el de *rotacion general del instrumento*, por el sistema de tornillos de movimiento general x, v, dispuesto á la extremidad de una alidada unida invariablemente á la columna d. En la otra extremidad hay un boton k, al que se aplica la mano para dar cómodamente el movimiento rápido al instrumento. En la misma alidada se halla el nonius correspondiente al limbo azimutal l.

Este limbo forma cuerpo á su vez con los tres brazos de la plataforma, en cuyos extremos se hallan los tornillos de nivelacion t, los cuales descansan en cilindros metálicos fijos á la meseta de un trípode muy resistente.

Está dispuesto el limbo azimutal de modo que el cero de la graduacion corresponde á uno de los tornillos de la plataforma, y por lo tanto la recta que une las divisiones 90 y 270 es paralela á la que determinan los otros dos. Cada tornillo tiene una placa graduada perpendicular á su eje, que sirve para apreciar el movimiento dado al tornillo, por un índice fijo al brazo correspondiente de la plataforma.

Dos microscopios facilitan la apreciacion de los valores angulares marcados por los nonius de la armadura C.

La disposicion del instrumento que describimos permite al plano del limbo ocupar en el espacio todas las posiciones imaginables, girando alrededor de los tres ejes mencionados: el de rotacion del limbo, el de la horquilla y el de rotacion general del instrumento.

323. **Verificaciones y correcciones.**—Antes de proceder á la

medida de los ángulos, conviene disponer las diferentes partes del instrumento de una manera propia para facilitar las operaciones. Para ello es preciso que se verifique:

1.° *Que los ejes de ambos anteojos sean paralelos al plano del limbo.* — Se dispone el limbo horizontalmente por medio de los tornillos *q* y *z* observando el sector *s*, y paralelamente al plano del limbo el eje de un anteojo de verificacion (218); haciendo despues cubrir al punto observado los cruzamientos de las cerdas en ambos anteojos A y A′ por medio de los tornillos de sus correspondientes retículos.

324. 2.° *Que el eje de rotacion de todo el instrumento sea vertical.* — Se da al limbo una posicion vertical, colocándole paralelamente á la recta determinada por dos tornillos de la plataforma, y se horizonta el nivel *n′* por los tornillos *a′* y *c′* de movimiento del anteojo inferior: se da una semi-revolucion exacta al instrumento: se corrige la mitad de la desviacion que entonces se observe en el nivel, como hemos dicho (253); pero es más exacto y más pronto hacer desaparecer toda la desviacion por uno solo de dichos tornillos de la plataforma, observando en la placa graduada que le acompaña el número de divisiones recorridas para conseguirlo, moviéndole despues en sentido contrario la mitad de este número de divisiones, y acabando de horizontar el nivel por su tornillo de coincidencia, *c′*. Corregido el nivel, se da un cuarto de revolucion al limbo azimutal, y se horizonta aquel por el movimiento del tercer tornillo de la plataforma.

Pudiera hacerse la misma operacion con el nivel *n*, empleando el tornillo *z* del sector y los de la plataforma.

325. 3.° *Que el plano del limbo pueda disponerse verticalmente.* — Para dar al limbo la posicion vertical se emplea un aparato auxiliar representado en la fig. 114, y compuesto de una varilla cilíndrica de metal *ab*, en cuyas extremidades se hallan dos índices por los cuales debe pasar el hilo del perpendículo *p*, cuando la varilla es vertical y el aparato está convenientemente dispuesto: uno de los índices es fijo, y el otro movible lateralmente por los tornillos de correccion *t*. Dos brazos *d* fijos á la varilla, terminan en unas piezas por medio de las cuales se fija esta al limbo *l* con los tornillos *c*. La línea determinada por los índices debe ser exactamente paralela al plano del limbo. Para hacer esta verificacion y colocar á la vez el limbo en la posicion vertical, se fija á él la varilla de modo que el índice que lleva los tornillos *t* ocupe la parte superior, y se pone el limbo en movimiento por los tornillos del tambor y los del sector, hasta que la plomada coincida con los índices. Fijo el limbo, se aflojan los tornillos *c* y se invierte la posicion de la varilla: si entonces la plomada coincide aún con los índices, la varilla será paralela al limbo, y éste será vertical (13). Pero si no coincide, se hace desaparecer la mitad de la desviacion moviendo el limbo por el tornillo de coincidencia del sector, y la otra mitad por los tornillos *t* de correccion del índice.

La demostracion de este procedimiento es la misma que hemos dado siempre que se ha tratado del paralelismo de dos líneas determinadas (212).

En esta correccion el eje del limbo toma la posicion horizontal (40). Horizontando el nivel n por su tornillo de correccion particular, servirá para indicarnos en lo sucesivo la posicion horizontal de dicho eje.

Corregida la varilla, puede disponerse verticalmente el limbo en las operaciones sucesivas con sólo la primera posicion que hemos dicho se debe dar á la varilla.

Esta última verificacion es tan sólo necesaria cuando se trata de medir ángulos situados en planos verticales.

326 **Usos del círculo repetidor**.—Este instrumento se emplea en la medida de los ángules en el plano de los objetos (179), y se le puede disponer tambien (325) para medir los zenitales.

327. **Medida y repeticion de los ángulos en el plano de los objetos**.—Para lo primero, se empieza por hacer coincidir el cero de uno de los nonius m (fig. 113) con el del limbo B, valiéndose para ello como ya sabemos de los tornillos a y c. Despues es preciso colocar el limbo en el plano de los objetos, para lo cual se afloja el tornillo v, y por el boton k se da el movimiento general al instrumento, con lo que el *eje de la horquilla*, perpendicular al vertical de rotacion, describirá un plano horizontal: se continúa este movimiento hasta que la direccion del eje de la horquilla vaya á cortar á la recta que une los objetos que determinan los extremos del ángulo, ó á su prolongacion: en cuyo caso, teniendo dos puntos en el plano de los objetos, estará contenido en él: se fija entonces el tornillo de presion v, y se afloja el q para hacer girar á la parte superior del instrumento alrededor del eje de la horquilla; deteniendo el movimiento cuando el limbo aparece á la vista situado en dicho plano, y apretando entonces el tornillo q.

Conseguido esto, se afloja el tornillo p, y se mueve el limbo hasta que la visual tirada por el anteojo superior A esté dirigida lo mejor que sea posible al objeto de la izquierda, apretando entonces dicho tornillo. Igualmente se dirige el anteojo inferior al objeto de la derecha. Dispuesto así el instrumento, la posicion de los cruzamientos de los retículos con respecto á los puntos que deben cubrir exactamente indicará los movimientos que aún es preciso dar á sus distintas partes, los cuales se efectúan con los tornillos de coincidencia correspondientes á los de presion que se han empleado para los movimientos rápidos.

Así dispuesto el aparato, y dirigiendo el anteojo superior al objeto de la derecha, por el sistema de tornillos a y c, el arco recorrido por el cero del nonius que se puso en coincidencia con el del limbo, marcará el valor del ángulo que se trataba de conocer. El anteojo inferior, despues de haber servido para colocar el limbo en el plano de los objetos, hace las veces de anteojo de prueba (314).

Para atenuar los errores de construccion ó las imperfecciones debidas al uso, es conveniente determinar el valor de un ángulo por el término medio entre las lecturas obtenidas en los cuatro nonius (186).

328. Dispuesto el círculo repetidor como hemos indicado al determinar el valor del ángulo simple, puede hacerse la repeticion de los ángulos

por el método espuesto (202), empleando los tornillos *a, c, a', c', p* y *r*.

Es conveniente recordar que para las operaciones de precision se necesita hacer la correccion de excentricidad de que nos hemos ocupado (203).

329. **Medida y repeticion de los ángulos zenitales.**—Se sigue un procedimiento análogo al que hemos dado á conocer (208): dispuesto el limbo verticalmente (325), se establece la coincidencia del cero de uno de los nonius con el del limbo y aflojando el tornillo *v* (fig. 113) de presion del limbo azimutal, se hace girar al instrumento alrededor del eje vertical hasta que el limbo y el punto de observacion se hallen próximamente en un mismo plano; despues apretando el tornillo *v* y aflojando el *p* del tambor, se mueve el limbo hasta que dicho punto se encuentre en el campo del anteojo superior, y próximamente cubierto por el cruzamiento de las cerdas del retículo; acabando de obtener exactamente esta circunstancia por los tornillos de coincidencia *x* y *r*. Entonces se mueve el anteojo inferior alrededor del eje del limbo hasta que su nivel se halle próximamente horizontal, y apretando el tornillo de presion que ha permitido este movimiento, se le acaba de horizontar exactamente por el de coincidencia *c'*. Es conveniente observar si en este último movimiento ha variado la posicion dada al limbo y al anteojo, viendo si el punto de observacion queda aun cubierto por el cruzamiento de las cerdas; y en caso contrario se emplean los tres tornillos de coincidencia á que acabamos de referirnos para hacer que el eje del anteojo superior y el nivel del inferior ocupen exactamente las posiciones indicadas.

Aflojando el tornillo de presion *v* del círculo azimutal, se da una semirevolucion al instrumento alrededor del eje vertical hasta que el limbo se encuentre tambien en un mismo plano vertical con el punto de observacion, se afloja el tornillo de presion *a* del anteojo superior, y se mueve éste hasta que el punto de observacion se halle en el campo del anteojo. Entonces es preciso que el cruzamiento de las cerdas del anteojo superior cubra exactamente al punto de observacion, y que el nivel del inferior esté perfectamente horizontal; todo lo cual se consigue por los movimientos de los tornillos de coincidencia *x* del círculo azimutal, *c* del anteojo superior y *r* del tambor. En esta segunda posicion del limbo se emplean los tornillos del tambor para horizontar el nivel del anteojo inferior, á fin de no variar la posicion del eje del nivel respecto al plano del limbo: de esta manera cuando se horizonta el nivel, la vertical á que se refiere el ángulo zenital está determinada por el mismo diámetro del limbo que en la primera.

El arco recorrido por el cero del nonius en las operaciones indicadas es doble, como ya sabemos, del ángulo zenital. Llevando el limbo á su posicion primera se repite la misma operacion, como cuando los ceros se hallaban en coincidencia, y teniendo presente que el nivel se horizonta siempre por el tornillo del tambor, se obtendrá el cuádruplo y los demás múltiplos pares del arco zenital.

El sentido de la graduacion indicará como en el teodolito de Gambey, si se debe disponer el limbo á la derecha ó á la izquierda del observador al dar principio á la operacion.

330. *Aplicacion de la medida de los ángulos en un plano vertical á la determinacion del valor que corresponde á las divisiones del nivel de aire.* —Dispuestos verticalmente el eje de rotacion del instrumento (324) y el limbo (325), se pone en coincidencia el cero del limbo con el de su nonius, se mueve el instrumento hasta que el limbo y el nivel del anteojo inferior se hallen en una direccion paralela á la recta determinada por uno de los tornillos de la plataforma y el punto medio de la distancia entre los otros dos: se mueve despues el limbo hasta que el cruzamiento de las cerdas del anteojo superior cubrá exactamente á un punto bien determinado. Se horizonta despues con exactitud el nivel del anteojo inferior, y se mueve el primero de los indicados tornillos de la plataforma, hasta que la burbuja haya recorrido un número exacto de divisiones, cuyo valor se ha determinado de antemano: aflojando el tornillo de presion del anteojo superior, se le dirigirá de nuevo al mismo punto de observacion: el arco recorrido por el cero del nonius será la medida de la inclinacion dada al eje del nivel. En este estado puede repetirse el ángulo para obtenerle con mayor exactitud, conservando la coincidencia del cero del nonius con la graduacion del ángulo medido, dirigiendo la visual por el movimiento del limbo al punto de observacion, y repitiendo la operacion que acabamos de indicar.

Dividiendo el valor de las divisiones del nivel por el ángulo medido, se obtendrá el arco recorrido para la inclinacion de 1''. Si suponemos que cada division del nivel es un milímetro, que hemos hecho recorrer al nivel 12 divisiones, y que el ángulo obtenido es de 40'', el arco recorrido para la inclinacion de 1'' será

$$\frac{12^{mm}}{40} = 0,^{mm}3,$$

valor que hemos supuesto en el ejemplo que propusimos (29).

CAPITULO III.

Trazado y medicion de las alineaciones.

331. **Definiciones** —Se llama alineacion al plano que determina las verticales de dos puntos dados A y B (fig. 115). La línea ondulada AEFB, interseccion del plano vertical de los puntos A y B con la superficie del terreno, constituyendo su perfil (Acot.—124) es la *distancia natural* en-

tre A y B. La recta AB que los une, su *distancia geométrica*, y es la intersección del plano vertical con uno cualquiera de los inclinados que pueden pasar por ellos. La *distancia horizontal* está representada por una de las horizontales AC ó BD tirada por uno de los extremos de AB hasta su encuentro con la vertical que pasa por el otro extremo; ó bien por una cualquiera GH paralela á las anteriores. Estas líneas son las intersecciones del plano vertical indicado con los horizontales que pasan por A, B, y otro punto cualquiera H.

La distancia horizontal es la proyeccion comun á la natural y á la geométrica. Estas últimas deben reducirse siempre á su proyeccion horizontal (85), considerando á la distancia natural como compuesta de elementos rectilíneos, cuyas pendientes deben conocerse.

Tambien se considera muchas veces en las operaciones de nivelacion la distancia BC del punto B al plano horizontal que pasa por el punto inferior A, ó su igual AD, que va desde este último al plano horizontal de B.

332. **Trazado de las alineaciones.**—Se obtiene disponiendo verticalmente jalones (84) en cada uno de los puntos que la determinan, y que pueden ser los extremos de la recta ó dos puntos cualesquiera de ella. Supongamos primero que los puntos A y E (fig. 116) sean los extremos de una línea AE situada en un terreno horizontal ó próximamente horizontal: se dispondrán en dichos puntos los jalones a' y e', con lo cual se tendrá determinada la alineacion; para trazar la linea ó marcar otros puntos intermedios en el terreno, se plantará otro jalon c' de manera que la visual a' e', dirigida desde uno de ellos a' al otro, pase por un punto del jalon c', con lo cual éste se hallará en el plano vertical de los a' y e' y se obtendrá el punto C del terreno. En efecto, los planos verticales A$Cc'a'$ y C$Ee'c'$, que tienen comunes la recta Cc' y la visual $a'e'$, son un solo y mismo plano vertical A$Ee'a'$.

Valiéndonos despues de dos cualesquiera de los jalones dispuestos en la alineacion, podremos determinar mayor número de sus puntos. Las visuales dirigidas á derecha é izquierda del jalon que se halla á las inmediaciones del observador deben ser tangentes á todos ellos para que la alineacion esté bien trazada.

333. Cuando los accidentes del terreno ó la mucha distancia entre los puntos A y E impide el que se perciba desde uno de estos puntos el jalon dispuesto en el otro, se colocan dos observadores con jalones en dos puntos 1 y 2, proyecciones horizontales de dos puntos del terreno situados entre A y E, los cuales se proyectan en a y e. El primer observador, que debe ver el jalon fijo en e, hará que el segundo mueva el jalon 2 hasta que entre en línea con los 1 y e; con lo que vendrá á ocupar la posicion 3. Este hará á su vez que el primero mueva el jalon 1 hasta entrar en línea con los 3 y a en la posicion 4; y así se continúa hasta que los jalones ocupen las posiciones b y d tales, que dirigiendo la visual desde el b á e, el jalon d se halle en línea recta con ellos, y lo mismo se verique con el b respecto á los d y a'. Entonces los cuatro jalones a, b, d, e, que se proyectan ver-

ticalmente en a', b', d', e', estarán en un mismo plano vertical, por ser comunes á los planos $ADd'a'$ y $BEe'b'$ las verticales Bb' y Dd'.

Si no se hallan dos puntos intermedios desde los cuales puedan verse los jalones colocados en los extremos de la línea, habrá necesidad de trazarla por tanteos con mayor número de jalones.

Este mismo procedimiento se sigue cuando el operador se halla entre los extremos de la línea AE no pudiendo trasladarse á ninguno de ellos.

334 Cuando el terreno presenta una elevacion como sucede de E á K ó una hondonada, hay necesidad de colocar jalones muy próximos como f' respecto á e' ó banderolas e'', k'' en vez de jalones para conseguir el alcance de las visuales. Tambien pueden fijarse los $g'h'$ como hemos indicado (333).

335 **Empleo de los instrumentos angulares**.—La determinacion de los puntos intermedios en el trazado de una recta cuyos extremos son dados se facilita extraordinariamente, y se hace con más exactitud empleando cualquiera de los instrumentos angulares que tienen un anteojo susceptible de moverse en un plano vertical, como la brújula de limbo zenital, el teodolito y la alidada de anteojo cuando se hace uso de la plancheta. Para ello se coloca el instrumento en estacion en uno de los puntos extremos de la alineacion, se dirige la visual al otro, é impidiendo todo movimiento que no sea el del anteojo en sentido vertical, se colocan en la alineacion á partir de este segundo extremo y haciendo señales convenidas de antemano al auxiliar de la operacion, los jalones intermedios que sean necesarios; haciendo que sus piés coincidan sucesivamente con la direccion de la visual.

Tambien puede resolverse este problema con la escuadra de reflexion (284), y con las alidadas de pinulas cuando la alineacion es de corta extension.

336. **Prolongacion del trazado**.—Supongamos ahora que se tienen dos puntos de la recta, y se trata de prolongar el trazado de la misma en uno de los sentidos de su alineacion ó en ambos. Sean los puntos A y B (fig. 116): se colocarán los jalones a' y b', y por medio de ellos el c' en la alineacion que determinan: valiéndose despues de los b' y c' para alinear el d', y así sucesivamente hasta llegar á E donde cambia el terreno, como en el ejemplo actual en que empieza á elevarse, en cuyo punto se fijará el jalon e' ó la banderola e'' y otro f' próximo al e', continuando del mismo modo hasta donde vuelva á cambiar el sentido de la inclinacion del terreno. Para comprobar el trazado se dirigirá desde un jalon g', por ejemplo, situado en la cumbre una visual que pase por el e' ó la banderola e'', y si pasa tambien por un punto de un jalon d' del terreno llano, los dos planos verticales $AEe'a'$ y $EGg'e'$, que tienen comunes la visual y la línea Ee', serán un solo plano vertical $AGg'a'$.

Con los instrumentos angulares, se hará estacion en B, y dirigiendo la visual á un jalon colocado en A, se hará girar 180° al eje óptico del anteojo, para continuar la alineacion segun C, D... como hemos dicho (335).

337. **Interseccion de dos alineaciones**.—Trazadas en el terre-

no dos líneas que se cortan, se halla su interseccion colocándose el observador en un punto extremo de una de ellas; y valiéndose de los jalones que la determinan ó de la alidada de un instrumento, esperará el momento en que un peon, caminando en la direccion de la otra alineacion primera entre en la línea; trasladándose el observador entonces á un extremo de la otra, hará disponer de la misma manera el jalon en esta línea. Se repetirá la observacion continuando del mismo modo hasta asegurarse de que dicho jalon ocupa una posicion que corresponde á ambas alineaciones Colocados dos observadores, uno en cada alineacion, resolverían con más facilidad este problema, obedeciendo el peon alternativamente á las señales que le hiciesen

338. **Medida de las líneas.**—Para la medida directa de una alineacion se emplean las *cadenas*, las *cintas* y los *reglones*; no siendo todos ellos otra cosa que múltiplos de la unidad lineal, que es el metro, y tienen por objeto abreviar la operacion y facilitar la apreciacion de las longitudes que se miden.

339. **Cadena**.—Se compone de eslabones de alambre de hierro no muy grueso, unidos por anillas de lo mismo, á fin de que no sea muy pesada La longitud *bc* (fig. 117) de cada eslabon es de dos decímetros, comprendida entre los centros de las anillas que los unen, y de cinco en cinco eslabones las anillas *d'* son de laton para que se distingan los metros; á cada cinco de estos últimos hay unas medallas, tambien de laton, en las que va marcado el número de ellos que hay á partir de un extremo de la cadena. La mitad de la longitud de ésta se señala por un medio eslabon que pende de la anilla correspondiente, ó con una medalla de mayor tamaño que las que señalan los metros. Terminan las cadenas en ambos extremos por agarraderos dispuestos de manera que la distancia *ab* de su extremo al centro de la primera anilla, compone los dos decímetros que segun hemos dicho hay igualménte entre *b* y *c*. La longitud total de la cadena es ordinariamente de 10 ó de 20 metros Tambien las hay de metal de estas dimensiones; unas y otras tienen estuches de cuero para el trasporte.

Acompaña á la cadena un juego de diez agujas formadas del mismo alambre que la cadena, y de una longitud variable de 0,m35 á 0,m40, y de 0,m004 de diámetro, aguzadas por un extremo, y terminadas en el otro por una anilla de 0,m03 á 0,m04 de diámetro

340. *Verificaciones y correcciones de la cadena.*—El uso hace que la cadena aumente de longitud, por alargarse las anillas que unen los eslabones, ó disminuya encorvándose éstos por los golpes que suelen recibir; variando tambien en virtud de las influencias atmosféricas

Para comprobar su longitud se marca con toda precision en un terreno llano, y mejor en el suelo ó en un muro de un edificio, la longitud exacta que deba tener la cadena, y se compara ésta de cuando en cuando con el marco ó patron establecido. Para corregirla si ha aumentado de longitud, se cerrarán bien las anillas que unen los eslabones, y si no es suficiente se encorvarán ligeramente uno ó algunos de éstos. Si ha disminuido la longitud, se recorrerán todos los eslabones para rectificar los que hayan podido torcerse.

341. **Uso de la cadena.**—Para medir una línea AB (fig. 118), que supondremos en un terreno llano y próximamente horizontal, son necesarios dos peones; despues de contadas las agujas, rectificada la cadena, y quitados todos los nudos que se suelen formar al extenderla, cogen los dos peones la cadena por sus agarraderos, colocándose todo lo posible en la alineacion; para lo cual el más inteligente, que marchará detrás dirigiendo la medida, despues de haber entregado al otro las diez agujas, coloca el extremo de la cadena en el punto A, y hace señas al segundo para que entre en la línea: bien tendida la cadena horizontalmente, el segundo peon clava verticalmente en el terreno una aguja que enrase con el extremo de aquella.

Hecho esto, y levantando ambos la cadena con el objeto de no tropezar á la aguja, dan un paso á derecha ó izquierda de la línea, y siguen marchando en direccion de aquella hasta que el primer peon llega á la aguja clavada; entonces coloca el agarradero de la cadena de modo que enrase con ella y teniendo cuidado de no moverla, hace entrar en línea al segundo peon; clava éste la segunda aguja como hemos dicho, y cogiendo el primer peon la primera teniendo siempre cuidado de no cogerla hasta que el otro haya puesto la suya, se continuará la operacion de la misma manera, hasta que el segundo peon haya clavado las diez agujas, cuidando de no levantar la última para no perder el punto donde concluye la medida; y debiendo tener recogidas el primero diez agujas, resulta que segun que la cadena es un decámetro ó dos se habrán medido uno ó dos hectómetros.

El primer peon apunta en un cuaderno la medida, entrega despues al segundo las diez agujas, y se repite de nuevo la operacion explicada, hasta llegar al extremo B de la línea. En la última *tirada* ó *cadenada,* despues de contadas las agujas recogidas por el primer peon, se verá el número de eslabones comprendidos entre la última y otra que el segundo peon clava donde termina la línea, para añadir al número de hectómetros, los decámetros, metros y dobles decímetros que resulten. Si además hubiese una fraccion de eslabon, se apreciaría por medio de un doble decímetro (98).

La importancia que la medicion de las líneas tiene en las operaciones topográficas, exige que la cadena esté siempre bien tirante, perfectamente alineada, y que se lleve mucho cuidado con la cuenta de las *cadenadas,* contando tambien de tiempo en tiempo las agujas; pues la pérdida de una de ellas anularía la medida de toda la alineacion.

342. *Ejemplo de una medicion.*—Supongamos que en la medida de una línea se haya empleado la cadena de longitud de un decámetro, que el peon que va detrás haya recogido y apuntado cuatro veces las diez agujas, y que al final tenga tres, habiendo además una fraccion de cadena compuesta de cuatro eslabones y una parte de eslabon valuada en $0{,}^{m}13$; resultará para el valor de la línea.

$100^m \times 4 + 10^m \times 3 + 0,^m2 \times 4 + 0,^m13 = 430,^m93.$

343. *Medida de las rectas inclinadas*.—Puede obtenerse midiendo segun la inclinacion de la recta dada AD, (fig. 119), aplicando la cadena al terreno, y reducirla (85) á su proyeccion A′D; pero puede tambien obtenerse desde luego esta proyeccion disponiendo horizontalmente la cadena segun A*b*, y bajando desde *b* una plomada ó dejando caer verticalmente una aguja, se halla el punto B en que termina la porcion AB de la recta inclinada, que se proyecta horizontalmente segun A*b* ó su igual A′B′; repitiendo la misma operacion desde B, se determinará igualmente la proyeccion B′C′ de BC. La suma de las proyecciones que resulten será la total A′D que se trataba de conocer.

Cuando la pendiente es muy rápida ó se quiere evitar el error que proviene del pandeo de toda la cadena, se emplea una fraccion de ella en la medicion indicada.

344. **Cinta metálica**.—Es un resorte de acero empavonado de la longitud de 10 ó de 20 metros, siendo su ancho de 0,m016, y su grueso y temple tales que se la puede arrollar con facilidad para el trasporte, no presentando inflexiones ni dobleces cuando hay que extenderla para hacer uso de ella. Se hallan señalados los metros con discos *l* (fig. 120) de metal amarillo, de 0,m015 de diámetro, unidos á la cinta, siendo sus centros, que se hallan bien marcados, los puntos de division, para señalar los dobles decímetros lleva otros discos *e* de 0,m008 de diámetro, y los decímetros se marcan tambien por medio de unos agujeros pequeños *d* taladrados en la misma cinta y de 0,m002 de diámetro. Una plancha *s* en figura de rombo indica con la interseccion de sus diagonales, que debe estar bien marcada, el punto medio de la cinta.

El agarradero (*m*,*m*′) en que termina por cada uno de sus extremos, forma parte del último doble decímetro, de modo que la longitud total de la cinta, inclusos los agarraderos, es la que le hemos asignado desde luego. En las caras extremas de estos agarraderos, y en sentido de su longitud y latitud, lleva dos canales semicilíndricas perpendiculares entre sí, y cuyo diámetro es igual al de las agujas que acompañan tambien á la cinta. La longitud del primer doble decímetro se hace variable por medio de un tornillo de paso muy pequeño que une el agarradero con la cinta, y que se puede fijar invariablemente cuando se quiera por medio de una tuerca *t*.

345. *Uso, verificaciones y correcciones*.—Se verifica como la cadena (340), comparando su longitud con el patron elegido de antemano, y se corrige por los tornillos, alargando ó acortando segun convenga los dobles decímetros extremos, y apretando fuertemente las tuercas.

El uso de la cinta es el mismo que el de la cadena, ajustando las canales de los agarraderos á la aguja, para evitar el error que por el grueso de esta última resulta en la medida cuando se hace uso de la cadena

346. **Rodete**.—Es una cinta de hilo, de longitud variable, barnizada y dividida en metros, decímetros y centímetros, con la expresion de los

números que indican las divisiones de los metros y decímetros. El primer decímetro se halla dividido en milímetros, y antes de él hay un pequeño trozo que está en blanco y termina por una sortija de metal. La cinta está arrollada dentro de una caja cilíndrica de cuero (c, c') (fig. 121) alrededor de un eje metálico e, que pasa por el centro de la caja y lleva en su extremo un pequeño manubrio (m, m'), el cual sirve para arrollar la cinta introduciéndola en la caja por una abertura lateral que presenta el canto de la misma; sirviendo para desarrollarla la anilla (a, a'), que no puede pasar por la abertura.

Esta unidad de medida se emplea lo mismo que la cadena y cinta de acero: es más cómoda, pero tiene grandes inconvenientes por su poca duracion, sus más frecuentes variaciones en sentido longitudinal, y la imposibilidad de usarla en terrenos algo húmedos, que quitándola el barniz y borrando la numeracion la inutilizan por completo.

347 **Reglones.—Aparato de Mr. Clerc.**—La medida de las alineaciones se ejecuta con mayor exactitud por medio de dos reglones divididos, que se colocan alternativamente en prolongacion uno de otro y dirigidos siempre segun la alineacion que se mide; pero en las operaciones topográficas muy importantes se emplea con ventaja el aparato de Mr. Clerc que pasamos á describir. Se compone de dos reglas (r, r') (fig. 122) de forma rectangular, de madera fuerte y resistente, que se barnizan despues de impregnadas en aceite hirviendo; su longitud es ordinariamente de 5 metros, y se pueden doblar por su mitad en virtud de charnelas (c, c'): una plancha de hierro se asegura á cada regla por cuatro tornillos de union e cuando ha de hacerse uso de ella, formando entonces una sola pieza. Están divididas en metros, decímetros y centímetros, y en una de sus extremidades b llevan un semi-cilindro de acero de generatrices horizontales, y en la otra el d de generatrices verticales, con el objeto de que al colocar ambas reglas en una misma línea, el cilindro horizontal de una de ellas sea perpendicular al vertical de la otra, y el contacto tenga lugar en un punto. El cilindro vertical va unido á una lengüeta dividida en milímetros, que se ve en la proyeccion horizontal, la cual se introduce en la regla, y puede moverse en sentido horizontal aflojando el tornillo (t, t'), fijándola cuando convenga con solo apretar el mismo tornillo: de este modo al colocar las reglas se puede dejar un pequeño intérvalo, y se establece el contacto por el movimiento del cilindro vertical y su lengüeta, evitando así el choque de las reglas, que pudiera separarlas de la posicion que deben ocupar. Los mismos cilindros tienen unas ranuras en sentido de la generatriz más saliente, destinadas á dar paso al cordon de una plomada, á fin de que pueda colocarse el extremo de la regla en la vertical que pasa por el punto medio de un piquete de los que marcan la direccion de la línea; para más exactitud en la medida pudiera ir provista la lengüeta de su correspondiente nonius. La longitud de 5 metros asignada á cada regla se cuenta entre las generatrices extremas de ambos cilindros, cuando se halla introducida en la regla toda la lengüeta que acompaña al vertical.

Las reglas pueden correr en sentido de su longitud entre unas dobles cajas (a, a'), y fijarse á ellas por los tornillos de presion s, así como pueden tambien correr los piés p en sentido de su longitud, y fijarse á las cajas por los tornillos (z, z'). Por medio de estos movimientos independientes, y de un nivelito de aire n que se coloca sobre las reglas, se disponen estas perfectamente horizontales Las reglas tienen marcados los números 1 y 2, y los piés derechos llevan unos regatones cilíndricos de hierro teminados en punta, para que solo esta se introduzca en el terreno; teniendo en uno de sus lados el estribo k, que sirve para apoyar el pié y sujetar el aparato cuando se quiere elevar la regla. Pueden tambien sostenerse los piés derechos y mantenerse con mayor estabilidad en la posicion vertical, valiéndose de trípodes ó caballetes.

Sobre las reglas, y en sentido de su longitud, se pueden disponer dos pínulas ó un anteojo con movimiento vertical, y valerse de los jalones que marcan la direccion de la línea, para la colocacion de las reglas en sentido de ésta; ó bien se tiende una cuerda de un jalon á otro con el mismo fin.

348. *Uso del aparato.*—Marcada la línea y bien determinada su direccion, son necesarios cinco hombres para verificar la medida; el que dirige la operacion, dos peones que se encargan de la regla núm. 1, y otros dos de la regla núm. 2. Los que llevan la primera la colocan en sentido de la longitud de la línea, de manera que el extremo que lleva el cilindro movible se halle próximo al punto de partida A (fig. 123), en el cual se ha clavado un piquete cuyo centro se halla señalado por un clavo de cabeza cónica El que dirige la operacion la hace entrar en línea, valiéndose de cualquiera de los medios explicados; y despues de puesta horizontal, hace mover el cilindro vertical, hasta que el vértice de la plomada coincide con el del clavo del piquete

Se dispone un estado ó registro con tres columnas; en la primera se coloca el núm. 1 de la regla, en la segunda el núm. 5 que indica la longitud de la misma, y en la tercera la fraccion señalada por la lengüeta, que suponemos es 0,m025. Durante esta operacion los dos peones que llevan la regla núm. 2 la colocan en sentido de la línea á continuacion de la núm. 1 y algo separada de ésta: el que dirige la operacion pasa á ponerla en línea y horizontal, y mueve el cilindro vertical hasta su contacto con el horizontal de la núm 1, que han de sostener perfectamente en su posicion primitiva los dos peones encargados de ella. Hecha la lectura y escrito en la primera columna del registro el núm 2, dejando en blanco la segunda columna por ser constante la longitud de la regla, y poniendo en la tercera la fraccion 0,04 que señala la lengüeta, el que dirige la operacion da un empuje hácia atrás á la regla núm. 1, para separarla de la número 2 sin tocar á ésta, despues de haber introducido la lengüeta; volviendo despues á colocar del mismo modo la primera regla á continuacion de la segunda, y siguiendo así hasta llegar al otro extremo B de la alineacion, en cuyo caso se anota en el registro la lectura 0,m056 obtenida en la lengüeta, así como la fracion de regla 2,m658 comprendida entre el cero

1	5	0,025
2	”	0,040
1	”	0,034
2	”	0 012
1	2,658	0,056
		0,167

de la regla y la division en que enrasa el cordon de una plomada que señala la vertical del punto B. El registro dispuesto al márgen y referente á la medida de AB (fig. 123), se emplea fácilmente para averiguar la longitud de su proyeccion (343), sumando las lecturas de las lengüetas y ejecutando el sencillo cálculo que indica la igualdad

$$5^{m} \times 4 + 2,^{m}658 + 0,^{m}167 = 22,^{m}825.$$

Cuando el terreno es inclinado puede suceder que al disponer una de las reglas no se pueda colocar el cilindro vertical en contacto con el horizontal de la anteriormente colocada, por lo elevada que ésta se halla, como tiene lugar en la segunda posicion de la regla núm. 1; entonces se hace el contacto del cilindro de la lengüeta con una plomada pendiente del extremo a de la regla anterior.

Si á pesar de hallarse el extremo de la regla horizontal en contacto con el terreno, uno de los piés derechos b no llegase al suelo por la mucha pendiente, se aproximará todo lo necesario al otro hasta que descanse en el terreno, valiéndose como ántes de la plomada para el contacto de los cilindros.

* 349. *Correccion de la longitud de las reglas.*—Las reglas metálicas varían de un modo apreciable con la temperatura, y puede hallarse fácilmente su verdadera longitud x, en el momento de la operacion, y en funcion de la temperatura t observada entonces y del coeficiente constante de dilatacion k correspondiente al metal de que la regla está formada, que suponemos ahora de platino, por la fórmula

$$x = l\,(1 + kt) \qquad [3]$$

Suponiendo $k = 0,000008845$; $t = 12^{\circ}$, y $l = 5^{m}$, longitud de la regla á 0°, se tendrá

$$x = 5\,(1 + 0,000008845 \times 12) = 5,0005307$$

350. **Instrumentos empleados en la medida indirecta de las alineaciones.**—**Estadia.**—Un anteojo astronómico, con un retículo de dos cerdas paralelas, fijas ó de distancia variable, constituye este *telémetro* (143), para cuya explicacion supongamos que sea AB (fig. 124) un objeto, cuya imágen ab se forma en el foco de la lente objetivo L, y que en los puntos a y b se proyectan los hilos del retículo, situados en un diafragma. Sean además d y d' las distancias del objeto y de su imágen al centro óptico o de la lente, y m el ángulo micrométrico formado por los ejes secundarios (126) de los extremos del objeto. La semejanza de los triángulos oAB, oab nos dará AB : ab : : d : d'; de la que se deduce

$$d = \frac{d'}{ab} \times AB,$$

Si suponemos constante á la relacion $\frac{d'}{ab}$, lo que tiene lugar sensiblemente para los objetos muy lejanos, no habrá mas que multiplicar esta razon por la magnitud AB interceptada en la mira para tener la distancia que se busca.

Sea por ejemplo 0,m004 la separacion de los hilos del micrómetro, y 0, 4 la distancia d'; se tendrá

$$d = 100 \times AB \qquad [4];$$

y para una longitud de 2,m37 por ejemplo interceptada en la mira, la distancia que se trata de medir será de 237m.

351. La aplicacion de esta fórmula está muy lejos de ser exacta, dependiendo del valor de d', cantidad variable (124) con la distancia al objeto AB.

Para atenuar el error en lo posible, se gradúa la mira colocándola á una distancia media de las que su longitud permite apreciar con el micrómetro.

352 Además de esta causa de error, hay otra que proviene de que el ángulo visual ó micrométíco varía con el tiro del ocular (140); y como este es diferente por lo general para dos observadores que traten de hallar la longitud de una misma distancia, claro es que no deberá nunca emplearse la estadia sin haber dispuesto convenientemente las cerdas del retículo si son variables de posicion, ó de haber dividido la regla en caso contrario.

Para lo primero, despues de haber medido exactamente en un terreno horizontal una alineacion de 100 metros por ejemplo, se observa con la estadia desde uno de sus extremos una regla dispuesta verticalmente en el otro, y se marca la parte interceptada en ella por las cerdas, la cual se divide en 100 partes iguales, cada una de las cuales corresponderá á un metro de distancia horizontal.

Para lo segundo se hará la misma observacion, haciendo uso de una regla dividida, y moviendo el tornillo que separa ó acerca una de las cerdas del retículo á la otra, hasta que el ángulo visual intercepte en la regla la distancia que en ella marca los 100 metros. Esta distancia puede ser la magnitud real del metro, en cuyo caso cada centímetro de la regla corresponde á un metro de la distancia horizontal; y apreciando en la regla los milímetros, se llevará hasta decímetros la apreciacion de las distancias.

353. **Uso de la estadia y reduccion de las distancias al horizonte.**—Se disponen en los extremos de la alineacion la estadia y la regla como hemos indicado para la correccion (352), y la simple lectura de

la parte interceptada en el reglon dará (350) la medida de la distancia entre ambos extremos.

Cuando la recta que se trata de medir es inclinada como la AB (figura 125), sería preciso colocar la mira en una posicion Bc, perpendicular á ella; pero como sería difícil conseguirlo con la prontitud y la exactitud necesarias, se la coloca verticalmente, obteniendo una lectura Bb que designaremos por M. Esta lectura no es la verdadera, Bc ó m, la cual se obtiene observando que en razon á que el ángulo dcB es poco diferente de 90° por la pequeñez del ángulo micrométrico d en el triángulo dcB, resulta en el Bbc

$$m = \mathrm{M} \cos a \qquad [5],$$

siendo a el ángulo formado por las dos posiciones de la regla, igual al ABC que indica la pendiente de la recta dada, por tener el mismo complemento.

Si representamos ahora respectivamente por L y l la recta AB y su proyeccion CB, se tiene tambien

$$l = \mathrm{L} \cos a;$$

y poniendo en vez de L su valor representado por m en la ecuacion [5], se tendrá

$$l = \mathrm{M} \cos^2 a \qquad [6]$$

* 354. **Anteojo micrométrico de Rochon.**—Se compone de un anteojo, dentro del cual, en sentido de su longitud y por medio de un tornillo exterior, se mueve un prisma de cristal de roca cuya seccion es el rectángulo $rpr'p'$ (fig 126), formado de dos prismas triangulares p, p', cuyas caras de contacto constituyen el plano diagonal rr' del prisma total, y en virtud de poseer el cristal la doble refraccion (111) pueden obtenerse dos imágenes ab, bb' de un mismo objeto AB, estando dispuesto el aparato micrométrico de los prismas de manera que cuando ambas imágenes se hallan en contacto como se indica en la figura, el *ángulo micrométrico* BoA está marcado en una graduacion exterior que lleva el tubo del anteojo, por un índice que se mueve con el tornillo indicado para el movimiento del prisma. Tambien se encuentra grabado al lado de la indicacion de cada valor angular el de su cotangente, y con mayor extension en una tabla que acompaña generalmente al instrumento de su caja. La apreciacion angular es de 30 en 30″; y el nonius, dividido en cinco partes, aprecia décimos de minuto (161).

Representando por v el ángulo micrométrico BoA, por m la magnitud del objeto AB y por d la distancia oA del punto de estacion al objeto, se tendrá la relacion

$$\operatorname{cotg} v = \frac{d}{m} \qquad [7],$$

la cual se considera como exacta para las distancias mayores que 100 metros, y sirve para resolver los siguientes problemas:

355. 1.° *Conocida la distancia* 5500m *á que se halla de un buque una torre de la costa, hallar desde él la altura de la torre.*—Supongamos que al contacto de las imágenes el ángulo v sea de $5'$: buscando en la tabla el valor de la relacion $\dfrac{d}{m}$, ó la cotangente de $5'$, encontraremos 687,55 y la fórmula [7] vendrá á ser en este caso

$$687{,}55 = \frac{5500}{m},$$

de la que se deduce $m = 8^{m}$ próximamente.

2.° *Hallar la distancia á que se encuentra del observador un hombre, suponiéndole la altura media* $1{,}^{m}55$ —Sea $5',7$ el valor obtenido en la graduacion del micrómetro al contacto de las imágenes: se buscará en la tabla el valor de $\dfrac{d}{m}$ en el renglon correspondiente á los $5'$ y en la columna encabezada con la notacion $0',7$ el cual es 603. La fórmula [7] da entonces

$$603 = \frac{d}{1{,}55}$$

de la que resulta $d = 935^{m}$ próximamente.

3.° *Determinar la distancia á que se encuentra del observador un objeto de magnitud desconocida.*—Se observan los ángulos micrométricos v y v' (fig. 127) desde los extremos de una recta $cd = l$, medida en direccion del objeto, y representando por x la distancia del punto d al objeto ab, se tendrán (354) en los triángulos abd, abc, las relaciones

$$ab = \frac{x}{\text{cotg. } v}; \qquad ab = \frac{l + x}{\text{cotg. } v'};$$

de las que se deduce

$$x = \frac{l \times \text{cotg. } v}{\text{cotg. } v' - \text{cotg. } v} \qquad [8]$$

CAPITULO IV.

Problemas de Planimetría.

356. **Generalidades.**—La medida de los ángulos y el trazado y medicion de las alineaciones suministran medios para la resolucion de muchos problemas, importantes los unos como auxiliares en el levantamiento de los planos, y los otros como destinados á la determinacion geométrica de los puntos del terreno. Nos ocuparemos por lo tanto de los más principales, indicando los procedimientos diferentes y los distintos instrumentos con cuyo auxilio pueden resolverse. Advertiremos que en todos ellos se suponen medidos horizontalmente los ángulos, así como las alineaciones, ó bien reducidos por el cálculo (85 y 91) á sus proyecciones horizontales.

357. **Por un punto de una alineacion, trazar otra que forme con la primera un ángulo dado.**—Bastará medir el ángulo azimutal (287), si no es conocido su valor, y construirle desde el punto dado (288). Con la brújula se halla tambien su amplitud (247); y determinando desde dicho punto el rumbo de la alineacion (236), se mueve la caja en el sentido conveniente, hasta que haya pasado por debajo de la aguja el número de grados que marca el valor del ángulo que se trata de obtener.

358. Con la escuadra, se mide una distancia cualquiera AD (fig. 128), así como la perpendicular DE á esta recta en el punto D. Tomando desde el punto dado A′ y en la recta dada A′C′ la magnitud $A'D' = AD$, así como la $D'E' = DE$ en la perpendicular á la A′D′ en su extremo D′, la alineacion A′ E′ = determinará el ángulo pedido. Si el ángulo dado es obtuso se construirá su suplemento. Cuando se tiene en grados el ángulo $A = 27^\circ\ 13'$ que se trata de formar en A′, se tomará una magnitud dada $A'D' = 10^m$, por ejemplo, y se calculará la perpendicular por la ecuacion

$$D'E' = A'D' \times \text{tang } 27^\circ\ 13' = 10 \times 0{,}5143 = 5{,}^m143,$$

cuya longitud se tomará en ella desde D′ para obtener el punto E′ que unido con A′ resuelve el problema.

La misma fórmula se empleará para hallar el valor del ángulo A, si no es conocido numéricamente, midiendo AD y DE, sustituyendo sus valores en la fórmula y despejando tang A.

359. Se resuelve este problema con solo el auxilio de una cuerda y tres piquetes, clavando éstos en el vértice A (fig. 128) y en otros dos puntos D, E, tomado cada uno de ellos en uno de los lados del ángulo; y rodeándolos de una cuerda tirante, se determinará así el triángulo ADE y por consiguiente al ángulo A. Señalando los puntos en que la cuerda to-

ca á los piquetes y transportando el triángulo al punto A′ en que se quiere construir el ángulo, en el cual se clava el piquete A, se fija el D con la cuerda tirante en D′ que corresponde á la alineacion dada A′ C′; y atirantando las porciones A′E′ y D′E′ de la misma, se fija la posicion del piquete E en E′, que determinará con el A′ la nueva alineacion

360. **Levantar una perpendicular en un punto dado de una alineacion.**—Este problema es un caso particular del anterior (357), que se resuelve haciendo que la graduacion del instrumento marque para las alidadas el ángulo de 90°. Con la plancheta bastará orientarla con la alineacion (272) y levantar por una construccion geométrica una perpendicular á su homóloga en el tablero por el punto homólogo al del terreno; colocando despues jalones en la direccion de la visual dirigida por la alidada, cuya línea de fé se hace coincidir con la perpendicular trazada en el tablero.

361. Ya hemos dicho (277.—1.°) el modo de resolver este problema con la escuadra.

362. La cuerda, ó mejor la cadena, se emplea tomando las distancias AB, AC y BC (fig. 129), de las longitudes respectivas 4 metros, 3 y 5, con las que se formará un triángulo rectángulo en A á causa de ser (Geom. Teor. 71) $CB^2 = CA + AB^2$ ó $5^2 = 3^2 + 4^2$. El punto A se coloca en el punto en que se ha de levantar la perpendicular, y AB en la línea dada.

Tambien se puede resolver tomando á ámbos lados del punto dado D (fig. 130) las distancias iguales AD y DB, y fijando en A y B los extremos de una cuerda, que se pone tirante cogiéndola por su punto medio C, en el que se clava un piquete. Este punto da, unido con el D, la perpendicular pedida; que se determina mejor marcando análogamente el punto C′.

363. **Trazar una perpendicular á una alineacion dada, desde un punto exterior á ella.**—Puede resolverse hallando por tanteos, con las alidadas dispuestas como en el problema anterior (360), el pié de la perpendicular, como se dijo para la escuadra (277.—2.°); pero es preferible medir la distancia del punto dado C (fig. 131) á un punto cualquiera B de la alineacion, medir el ángulo CBA y determinar la distancia de B al pié de la perpendicular por la relacion

$$DB = CB \times \cos. B;$$

tomando el valor en la alineacion AB, se tendrá el punto D que determina con C la perpendicular pedida.

364. Tambien se aplica este procedimiento á la plancheta, orientando con la alineacion AB su homóloga trazada en el tablero (272), dirigiendo la alidada por el punto de esta recta que se halla en la vertical de A al punto dado C, y trazando una línea de lápiz por el canto de la línea de fé. Midiendo la recta AC se tomará su magnitud con arreglo á escala en la recta acabada de trazar, determinando así el punto homólogo de C: bastará bajar desde él una perpendicular á la recta del tablero orientada con AB, medir la distancia del pié de la perpendicular al punto que se corres-

ponde verticalmente con A, y tomarla desde este punto en la alineacion, con lo que se tendrá el pié D de la perpendicular.

365. Con la brújula podrá tomarse el rumbo de AB, y estacionando el instrumento en C, marcar con jalones la direccion del rumbo que forma un ángulo de 90° con el hallado para AB.

366. Tratándose de la escuadra hemos dicho ya (277—2.°) el modo de resolver este problema; pero cuando el punto C no es visible desde el paraje hácia el cual debe resultar el pié de la perpendicular, se levanta en C una perpendicular CA á la recta que une este punto con uno cualquiera B de los de la alineacion conocida, determinando su interseccion A con esta alineacion y midiendo los lados AB y CB: entonces podrá determinarse la posicion del pié D de la perpendicular, calculando BD por la proporcion conocida (Geom. Teor. 70—1.°)

$$AB : BC :: BC : BD = \frac{\overline{BC}^2}{AB}.$$

Si se quiere conocer además la longitud de la perpendicular CD, se la deducirá de la proporcion

$$AD : CD :: CD : BD.$$

367. Con la cuerda ó cadena, se afianzará en el punto dado C (fig. 130) el punto medio de una porcion ACB de ella; despues se extenderán las dos partes AC y CB hasta que sus extremos terminen en la EF en dos puntos A y B, que se señalarán en el terreno; se dividirá despues la distancia AB en las dos partes iguales AD y DB, lo que se puede siempre ejecutar marcando con un piquete D el punto medio de una cuerda igual á AB: los piquetes C y D determinarán la perpendicular.

La division de la recta AB en dos partes iguales se puede ejecutar cogiendo la cuerda ó cadena por el punto medio C, estando sujeta por sus extremos en los A y B, transportando el punto C al C′, y clavando el piquete C′ de modo que la cadena quede bien tirante; la recta CC′ determina la perpendicular, y divide además á la AB en dos partes iguales.

Si el punto dado fuese el extremo A de la línea AB (fig. 132), que no se puede prolongar á la izquierda de A, se elegirá un punto C, en el cual se clavará un jalon; tomando despues una cuerda de la longitud CA se llevará de C á D, y en sentido de la alineacion CD se tenderá la misma cuerda de C á E; los puntos A y E determinarán la perpendicular (Geom. Teor. 50.—Corol. 2.°), por ser CD = CA = CE.

368. **Por un punto dado fuera de una alineacion, trazar otra paralela á la primera.**—Si mide el ángulo BFE (fig. 133) que forma con la alineacion dada AB la que determina uno de sus puntos F con el exterior dado E; y trasladándose á este último punto se trazará una alineacion EC, que forme con la FE un ángulo FEC = BFE, la cual será la paralela pedida. (Geom. Teor. 7.)

369. Con la plancheta se resuelve este problema gráficamente siguiendo el mismo procedimiento.

370. Empleando la brújula, bastará trazar desde E una alineacion del mismo rumbo que el obtenido préviamente para AB.

371. Con la escuadra se bajaría una perpendicular desde el punto dado D (fig. 134) á la alineacion AB, se levantaría otra á esta recta desde uno cualquiera G de sus puntos, y tomando en ella desde G una magnitud GE igual á la longitud de la primera perpendicular, se determinaría el punto E, que unido con D daría la paralela pedida.

372. Haciendo uso de la cadena, trácese desde el punto dado E (figura 133) una oblícua EF á la recta dada AB; por un punto G tomado en esta recta, y por O medio de EF tírese la GH, tomando con la cadena ó cuerda OH = OG, y los puntos E y H determinarán la paralela CD.

373. **Dividir una recta dada en un cierto número de partes iguales ó proporcionales.** —Sea la recta AB (fig. 135): por los extremos A y B de esta recta se tiran las paralelas indefinidas AC y BD, sobre las cuales se toman á partir de A y B tantas partes de igual magnitud como expresa el número en que se ha de dividir la AB, colocando jalones en los puntos de division. Estos jalones determinarán un sistema de rectas paralelas entre sí, cuyas intersecciones a, b... con la AB resuelven el problema.

Cuande solo se trata de dividir una recta en dos partes iguales, se puede conseguir por una perpendicular (367).

374. Esta misma marcha se sigue para dividir una recta en partes proporcionales. En el caso en que haya que dividirla en dos, proporcionales á números dados, 3 y 5 por ejemplo, se toman estos mismos números de partes iguales en las paralelas AC y BD (fig. 136), uniendo despues los puntos C y D. La interseccion M de CD con la recta dada divide á ésta en la proporcion pedida.

375. **Dadas dos rectas que se cortan en un punto, trazar por otro invisible desde él la recta que los une.** —Tírese por el punto dado D (fig. 137) la línea arbitraria BC, que cortará á las rectas dadas en los puntos B y C; tómese en la BD otro cualquiera b, y determínese el c por la proporcion

$$BD : DC :: Db : Dc;$$

en el punto b fórmese el ángulo $Dbb' = DBA$, y en el c el $Dcc' = DCA$: el punto de interseccion a de las rectas bb' y cc' pertenecerá á la recta DA; pudiéndose determinar del mismo modo los puntos que se quiera.

376. Con la escuadra se resolvería tirando desde el punto dado D (figura 137) perpendiculares á las rectas dadas, las que se dividirian como hemos indicado para los segmentos BD y DC, y levantando perpendiculares á las primeras por los puntos de division, que determinarían con su punto de encuentro la alineacion pedida.

377. **Dividir un ángulo en dos partes iguales.** —Se mide el án-

gulo CAB (fig. 138), y tomando su mitad en el instrumento haciendo con precision la coincidencia del nonius, se asegura la alidada móvil en esta posicion y se coloca un jalon D en la direccion de la visual. Este jalon determina con el punto de estacion la direccion de la bisectriz del ángulo. Para comprobar se dirige la alidada fija al punto D, y si la visual tirada entonces por la móvil va á parar á B, el ángulo estará bien dividido. En el caso contrario, se dirige esta última al punto B, y se planta otro jalon por la alidada fija. Un tercer jalon equidistante de los dos que se han situado dará el punto de la bisectriz, que puede comprobarse como en el primer caso.

Aplicando el mismo procedimiento á cada una de las mitades halladas, se tendrá dividido el ángulo BAC en cuatro partes iguales; y así sucesivamente en 8 ... 16 ..... 32 ....

378. Se resuelve gráficamente este problema con la plancheta siguiendo la misma marcha.

379. Con la cuerda ó cadena, tómense á partir del vértice A (fig. 138), en los lados del ángulo las distancias iguales AB, AC, y hállese despues el punto medio D de la BC, el cual, unido con el A, da la direccion de la bisectriz del ángulo BAC.

380. **Aplicacion de los problemas precedentes al trazado y medicion de las alineaciones**.—Muchas veces se hace imposible la aplicacion de los procedimientos explicados en el capítulo anterior para el trazado y medicion de las alineaciones, ya por ser inaccesible alguno de los puntos que las determinan, ya por obstáculos que las interceptan, impidiendo recorrerlas en toda su extension, ó bien ocultando á la vista las señales que determinan sus diferentes puntos. Es preciso entonces obtenerlas de una manera indirecta con el auxilio de los problemas que acabamos de resolver. Pasemos á la exposicion de los casos que con más frecuencia ocurren en la práctica.

381. **Medida indirecta de una alineacion interceptada por un obstáculo ó inaccesible por uno de sus extremos**.—Se determina la magnitud de AB (fig. 139) eligiendo un punto exterior C y resolviendo el triángulo ABC, despues de haber medido el ángulo C y los lados AC y CB; ó bien el lado AC y los ángulos adyacentes A y C, si el lado CB no puede medirse porque algun obstáculo lo impida. El mismo procedimiento se seguiria con la brújula determinando los ángulos como hemos dicho (247).

382. Con la plancheta, despues de medida una línea cualquiera EF (fig. 140) homóloga de la *fe* que se toma con la escala, y tomados con la plancheta en *f* y *e* los ángulos DFE y DEF, se verá el valor de *de* en la escala adoptada para la transportacion de la EF á la plancheta, y se tendrá la medida indirecta de la parte interceptada DE.

383. Con la escuadra pueden emplearse los procedimientos siguientes:

1.° Para determinar la YL (fig. 141) se levantará en L una perpendicular LN, que se medirá, otra perpendicular MN á la YN, y se hallará su punto de interseccion M con la LM: midiendo esta última línea se tendrá la proporcion

$$ML : NL :: NL : YL;$$

que nos dará la medida indirecta de la YL.

2.º Para la OQ (fig. 142) se puede tambien trazar una recta OP y sobre esta la perpendicular PQ; se medirán OP y PQ, y el triángulo rectángulo OPQ dará

$$OQ = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2}.$$

Si el obstáculo fuese de tal naturaleza que no permitiese trazar la OP, se bajarían las perpendiculares OO′ y QP′ sobre otra base O′P′, y midiendo estas tres líneas se tendría:

$$OQ = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{\overline{O'P'}^2 + (QP' - OO')^2}.$$

3.º Para medir la RZ (fig. 143) se levantará en R una perpendicular RT, y en T otra TX á la RT; trazando la alineacion que pasa por Z y el punto medio S de la RT, y prolongándola hasta que encuentre á la perpendicular TX, los triángulos iguales RZS y STX darán TX que se podrá medir, y se tendrá el valor de su igual RZ. Puede hacerse á XT la parte alícuota cualquiera de RZ que ST lo sea de SR.

4.º Tambien puede buscarse por tanteos un punto S (fig. 143) desde el cual se divisasen R y Z por las alidadas que forman el ángulo de 45º; con lo que resultaría RS = RZ.

384. Por alineaciones, supongamos que se trata de conocer la longitud de QR (fig. 144): tómese en la parte accesible y en su prolongacion una longitud cualquiera QP, y trácese á arbitrio en direccion y magnitud la PZ; por el punto S medio de la PZ y por el Q trácese la QSX tomando SX igual á QS, y se tendrán los puntos X y Z para trazar una recta ZXT hasta que encuentre á la RS prolongada en el punto T; los triángulos iguales STX y SQR dan TX = QR.

385. **Medidas de las alineaciones completamente inaccesibles.**—Para hallar la longitud de una recta AB (fig. 145) completamente inaccesible, se mide en el terreno accesible una base CD, cuyos extremos sean visibles entre sí y se vean desde ambos los puntos A y B. Mídanse además los ángulos ACD, BCD, CDA, CDB, que forman con la base las visuales tiradas á los extremos de AB. Resolviendo los triángulos ADC, BDC se hallarán los valores de los lados CA, CB y el del ángulo comprendido ACB = ACD — BCD; con lo que podrá resolverse el triángulo ACB y obtener el valor de AB. Supongamos que ha resultado CD = 394,m82; BCD = 28º 40′ 50″; ACD = 75º 28′ 40″; CDA = 41º 10′ 30″ y CDB = 83º 11′ 20″. Se obtendrá AC = 290,m74; CB = 422,m37; ACB = 46º 48′, y AB = 307,m89.

386. La construccion geométrica de los triángulos, nos daría para los datos tomados con los goniómetros, y con la brújula construyendo los

rumbos, la medida gráfica de la alineacion; la cual se obtiene directamente con la plancheta trazando en ella la base cd (fig. 146) y construyendo los ángulos (274) haciendo estacion sucesivamente en los extremos c y d de la base medida en el terreno: las intersecciones de las rectas que los determinan, darán la ab homóloga de AB, y podremos apreciar su longitud en la escala elegida para trazar la base cd.

387. La escuadra puede tambien emplearse en la resolucion del problema que nos ocupa. Sea AB (fig. 147) la recta dada: se elegirá una base CD en la parte del terreno en que se pueda operar libremente, y se bajarán sobre ella desde los puntos A y B las perpendiculares AC y BD que se prolongarán hasta su encuentro en los puntos E y F con las líneas AF y BE, trazadas por los puntos A y B y el medio O de la base CD. Se trazará y medirá la EF, que es igual y paralela á la AB. En efecto, los triángulos rectángulos iguales AOC y ODF dan AC = DF, y los BOD y COE tambien iguales dan CE = BD; de donde se deduce AE = BF, siendo además paralelas estas rectas por ser perpendiculares á CD; luego ABFE es un paralelógramo.

Si el terreno no permite operar con esta extension, se toman Oc y Od iguales á las mitades de OC y OD, se levantan las perpendiculares ac y bd á la CD prolongándolas hasta su encuentro con AO y OB tambien prolongadas, y resultará ab igual á la mitad de AB, por la semejanza de los triángulos Oca y OCE, Obd y ODF, de la que resulta la de Oab y OEF ó su igual OAB. Los puntos c y d pueden ser en caso necesario otra parte alícuota cualquiera de OC ó de su igual OD.

Tambien puede resolverse haciendo que OB y OA (fig. 147) sean perpendicures entre sí, y eligiendo los puntos E y F, que formen ángulos de 45°, con lo que se tendrá

$$OA = OE \text{ y } OB = OF \qquad (383 - 4.°)$$

y por lo tanto

$$AB = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}$$

388. Por alineaciones, se trazarán desde el punto C (fig. 148) dos rectas CD y CE, y se dirigirán las alineaciones CA y CB, así como las DA y BE desde los puntos D y E; tomando Cm y Cn que sean respectivamente la misma parte alícuota de CD y CE, y tirando por m y n las paralelas am y nb á las AD y BE (372) y uniendo los puntos a y b por una recta, esta será la misma parte alícuota de AB. Midiendo por lo tanto la ab, no habrá mas que multiplicar el resultado por el número que indique las veces que deba estar contenida en la AB, y se tendrá el valor de esta recta.

389. **Determinacion de puntos intermedios de una línea cuyos extremos son invisibles entre sí.** —Sean A y B (fig. 149) los extremos de la alineacion: se hará estacion en un punto C desde el cual se vean estos extremos; se medirán el ángulo ACB y las líneas AC y BC, y se calculará el ángulo BAC del triángulo ACB para conocer la direc-

cion de AB: marcando con jalones una línea indefinida cualquiera Cd, se medirá el ángulo ACd, con lo cual se podrá calcular el lado CD del triángulo ACD; y tomando en Cd una parte igual á CD, el punto D pertenecerá á la línea AB; pudiéndose determinar del mismo modo otro punto cualquiera E.

Si no se hallase un punto de estacion desde el cual pudieran verse los A y B, se elegirá uno C desde el cual puede verse uno de los extremos B, y otro F desde el cual se vean el otro extremo A de la recta y el punto de estacion C. Se medirán las distancias AF, FC, BC y los ángulos AFC y FCB: se calcularán el lado AC y el ángulo ACF del triángulo AFC, y como entonces tendremos conocidos en el triángulo ACB los lados AC y BC y el ángulo $ACB = BCF - ACF$, se reducirá la cuestion al caso anterior.

La resolucion del triángulo ACB nos dará la medida indirecta de AB. Si el ángulo A fuese de 45°, y la BC perpendicular á la AC, se tendría

$$AC = BC, \text{ y } AB = \sqrt{2\overline{AC}^2}.$$

390. Con la brújula se trazan desde A las rectas AD y AC (fig 150) anotando sus correspondientes rumbos, y trasladando la brújula al punto B, trácense tambien líneas del mismo rumbo en el sentido conveniente para que corten á las primeras, determinando los puntos de interseccion D y C, con lo cual se tendrá el paralelógramo ACBD. Trazando la diagonal CD, su punto medio E pertenecerá á la recta AB; dividiendo en dos partes iguales las BC y DB, se trazarán por sus puntos medios H y F las rectas CF y DH, se hallará su interseccion G y este será otro punto intermedio de la recta AB. Conocidos los puntos E y G y colocando en ellos jalones se podrá trazar la recta AB.

391. Para hacer uso de la escuadra elíjase un punto C (fig. 134) desde el cual se descubran los extremos A y B de la recta, y trácense las CA y CB; en los puntos D y E medios de AC y BC colóquense jalones que servirán para trazar una recta HM, que será paralela á AB, sobre la cual se bajarán las perpendiculares AH y BM, que medidas deben resultar iguales; levantando despues en los puntos D y E perpendiculares á la HM y tomando en ella las partes DF y EG iguales á AH ó BM, tendremos los puntos intermedios F y G de la recta AB, que nos servirán con los A y B para completar el trazado á derecha é izquierda del obstáculo.

La medida de la HM nos dará la longitud de AB.

392. Por alineaciones se pueden determinar las partes AF y GB (figura 134) de la línea AB tomando un punto C en el terreno desde el cual se vean los extremos accesibles A y B; se trazarán y medirán las AC y CB, y tomando las EC y CD iguales á la mitad de CB y CA, y trazando la DE, no habrá más que tirar á esta por A y B las paralelas AF y GB, que estarán en la alineacion AB. Midiendo además la DE, la proporcion

$$DC : CA :: DE : AB$$

nos dará la medida indirecta de la alineacion AB.

393 **Caso en que la extension de la línea es considerable.** —Si la naturaleza del terreno ó de los obstáculos no permite descubrir uno de los extremos desde el otro, ni hallar puntos intermedios desde donde se descubran los A y E (fig. 151) de la alineacion AE, se envia un peon á uno de los extremos E de la recta, con el fin de que á una hora dada haga una señal, bien disparando una arma de fuego ó haciendo una hoguera. El otro peon que se halla en A ó próximo á este punto, coloca un jalon A, y otro a de modo que se halle en la direccion probable de la señal, y por medio de ellos irá estableciendo los demás jalones c, d.... procurando que las visuales tiradas en sentido perpendicular á la alineacion aproximada Aabc.... que se va trazando y midiendo al mismo tiempo, salven los obstáculos. Cuando se llegue á un punto desde el cual se descubra el E, se bajará con la escuadra una perpendicular Ee á la AB que se medirá, concluyendo tambien la medida de la base Ae. Falta solamente rectificar las posiciones de los jalones a, b, c.... para lo cual se levantarán en los puntos a, b, c.... las perpendiculares indefinidas aa', bb'.... moviendo en sentido de la línea AB cualquier jalon d desde el cual la perpendicular dd' no salve el obstáculo, y haciéndole tomar una nueva posicion d' para levantar la perpendicular d'' d'''; entonces por medio de las proporciones

$$\mathrm{A}e : \mathrm{E}e : : \mathrm{A}a : aa' \quad [9];$$
$$\mathrm{A}e : \mathrm{E}e : : \mathrm{A}b : bb';$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

se tendrán hallados los puntos a', b'.... de las perpendiculares donde se habrán de trasladar los jalones a, b, c.... debiendo examinar despues si se hallan colocados en el mismo plano vertical.

Lo mismo resultaría teniendo la Ee una posicion oblícua á la AB, trazando las aa', bb'.... paralelas á la Ee.

La operacion se simplifica y basta solo la primera proporcion [9] cuando al establecerse los jalones a, b.... se pueden colocar de 50 en 50 ó de 100 en 100 metros, de modo que $\mathrm{A}a = ab = bc = ...$ pues entonces se tiene $\mathrm{A}b = 2\mathrm{A}a$, y $bb' = 2aa'$; $\mathrm{A}c = 3\mathrm{A}a$ y $cc' = 3aa'$.... y así sucesivamente.

La medida indirecta de la recta AE se obtendrá, despues de medir Aa', por la proporcion $\mathrm{A}a : \mathrm{A}e : : \mathrm{A}a' : \mathrm{AE}$.

394. **Prolongacion de las alineaciones á través de un obstáculo.**—Puede conseguirse por medio de resolucion de triángulos de un modo análogo al que hemos indicado (389), y tambien se puede prolongar la AB (fig. 152) sin resolver el triángulo BEC: formando un ángulo cualquiera CBE y tomando un punto E á arbitrio en la BE se hará el ángulo BEC = ABE — CBE; tomando CE = BE y haciendo en C el ángulo BCE = EBC ó ECD = ABE, se tendrá la CD prolongacion de la AB. Para la mayor exactitud conviene tomar el punto E á bastante distancia de la AB.

Si se quiere además conocer la longitud de la BC se podrá resolver por el cálculo ó por la geometría el triángulo BEC. Tambien se podrá evitar la resolucion de este triángulo haciendo el ángulo CBE de 45°, y trazando la CE perpendicular á la BE; pues entonces resulta CE=BE, hallando BC como se ha dicho ya (389).

395. Con la brújula trácese un triángulo BFC (fig. 153) y una recta FD que vaya á parar al otro lado del obstáculo. Mídanse las BF y CF y tómense los puntos medios *b* y *c*, por medio de los cuales se trazará la *bcd* determinando su punto de interseccion *d* con la FD; tómese D*d* = F*d*, hállese el rumbo de la AB, y trasladando la brújula al punto D se establecerán jalones en direccion de la visual que forme el mismo rumbo. Midiendo la *cd* y doblando su valor se tendrá la medida indirecta de la parte CD interceptada por el obstáculo.

396. En el caso particular de hallarse en la alineacion un objeto muy elevado como la veleta de una torre M, se suspende el trazado en un punto C antes del obstáculo, y trasladando la brújula al otro lado se busca por tanteos otro D desde el cual la visual dirigida á M tenga el rumbo hallado, prolongándola con el mismo rumbo. Este procedimiento es expedito cuando no se trata de conocer la magnitud CD interceptada por el obstáculo.

397. Haciendo uso de la escuadra para prolongar la AF (fig. 134), se levantará en el punto F una perpendicular FD á esta línea, dándole la longitud necesaria para que la perpendicular DE á ella resulte trazada fuera del obstáculo. Se elige despues un punto E de esta última de modo que satisfaga tambien á la condicion de que la perpendicular EG á DE salve el obstáculo; y haciendo EG =FD, se tirará por el punto G la perpendicular GB á EG, la cual resultará en prolongacion de AF. En efecto, siendo AF y GB paralelas entre sí por serlo ambas á la DE, distando igualmente de ésta y hallándose situadas en la misma region del plano con respecto á ella, no son mas que una sola y misma recta AB. Tambien se puede resolver este problema levantando en A y F las perpendiculares iguales AH, DF, trazando la alineacion HD, y levantando perpendiculares á ella en los puntos E y M de su prolongacion. Haciendo EG = MB = DF, los puntos G, B así obtenidos determinarán la prolongacion pedida.

398. Este problema se aplica en las poblaciones á la rectificacion de las calles tortuosas, y al establecimiento de las líneas de fachada de los edificios con arreglo al plano de las alineaciones préviamente establecido.

399. Tambien se puede hacer uso de la escuadra levantando en B (figura 154) una perpendicular BC á la alineacion dada AB y la CD á la AC; los triángulos semejantes ABC y ACD dan la proporcion

$$AB : BC :: AC : CD;$$

y se obtendrá el punto D, pudiéndose hallar otro nuevo punto del mismo modo

La medida de la BD se obtendrá por la proporcion

AB : BC : : BC : BD,

que resulta de los triángulos ABC y BCD, semejantes tambien.

400. Con el auxilio de las alineaciones, se prolongará AB (fig. 155) trazando dos rectas AE y BE, que se encuentren en un punto E desde el cual se vea la parte que se halla al otro lado del obstáculo; se tomarán las EF y EG que sean la misma parte alícuota de las AE y BE, y los jalones colocados en los puntos F y G servirán para el trazado de la FL, que será paralela á la AD. Se trazarán las EC y ED en una direccion cualquiera al otro lado del obstáculo, se hallarán sus puntos de interseccion H y L con la FL, y en la série de razones iguales

EF : EA : : EG : EB : : EH : EC : : EL : ED

se podrán conocer EC y ED, y por lo tanto los puntos C y D de la prolongacion, supuesto que todas las demás líneas se pueden medir.

El valor de BC se determinará por la proporcion

EG : GH : : EB : BC.

401. **Prolongacion de una recta completamente inaccesible.**—Si AB (fig 156) ha de prolongarse en el terreno accesible, se podrá hallar otro punto cualquiera E de la prolongacion, resolviendo como auxiliar el problema de medir la AB con los goniómetros ó con la plancheta (385), y al resolver el triángulo ABH con este fin, hallaremos tambien el ángulo ABH, y entonces como el HBE es igual á 180° — ABH y el BHM se puede medir, se conocerá en el triángulo BHE la base BH y los ángulos adyacentes; resolviéndole para hallar HE, se tomará esta distancia horizontal en el terreno, se formará en el punto E el ángulo DEH, suplemento de la suma de los otros dos, y se tendrá la prolongacion DE de la recta AB.

402. **Problemas acerca de la determinacion de rectas y de ángulos inaccesibles.—Medir un ángulo horizontal cuyo vértice es inaccesible.**—Sea el ángulo ABC (fig. 157) en cuyo vértice no es posible colocar el instrumento; se levantarán en uno de sus lados AB dos perpendiculares de igual magnitud *mn*, *m'n'*, y por los puntos *n* y *n'* se trazará la *ab*, que será paralela á AB, y midiendo el ángulo *ab*C se tendrá conocido su igual ABC.

Haciendo uso de la brújula no hay necesidad de establecer primero la paralela á uno de sus lados; pues bastaría tomar los rumbos de los AB y BC, de los que se deduciría (247) el valor del ángulo ABC.

Tambien se resuelve este problema con mucha facilidad estableciendo una base AB (fig 158), y hallando el valor de los ángulos A y B, cuya suma, restada de 180°, da el valor del ángulo inaccesible C.

403. **Medir un ángulo horizontal en que el vértice y uno de los lados son inaccesibles.**—Sea el ángulo ABG (fig 156) siendo

solo accesible el lado BG en su extremo G: elíjase un punto H desde el cual sean visibles los A, B y G; determínese la base GH, y háganse las mismas operaciones que para medir la recta inaccesible AB; y al resolver el triángulo AGB se hallará el valor del ángulo ABG que se buscaba.

404. **Medir un ángulo horizontal completamente inaccesible.**—Supongamos primero que el ángulo ACB (fig. 159) sea saliente: se elegirán en el terreno accesible dos puntos D y E visibles y accesibles entre sí, tales que desde el punto D sean visibles los B, C y E, y que además dicho punto D se halle en el plano vertical que pasa por BC; debiendo reunir tambien el punto E las mismas condiciones respecto á los A, C y D. Mídanse los ángulos horizontales CDE y CED, y restando de 180° la suma de estos ángulos se tendrá el valor del DCE ó de su igual ACB.

Tambien puede hallarse en su caso más general, averiguando la magnitud de los tres lados del triángulo determinado por los puntos A, B y C (385), con lo que podrá resolverse el triángulo y hallar el valor del ángulo que se necesita conocer.

405. **Dada una recta AB** (fig 160) **accesible solamente por uno de sus extremos B, determinar la direccion y magnitud de la perpendicular DC, bajada á dicha recta desde un punto accesible C.**—Mídase el ángulo horizontal ABC, y suponiendo trazada la CD se conocerá el ángulo BCD del triángulo rectángulo DCB; fórmese este ángulo en el punto C y se conocerá la direccion de la CD. Midiendo la distancia horizontal BC se podrá resolver dicho triángulo, y se tendrá la magnitud de la CD.

Las partes BD y AD se pueden conocer tambien: la primera por el triángulo BCD, y la segunda resolviendo el ADC en el cual se conoce DC, el ángulo recto ADC y el ACD, que es igual al ángulo horizontal ACB que se puede medir, menos el DCB que ya se conoce.

406 **Dada una recta AB** (fig. 160) **accesible solamente por uno de sus extremos B, determinar la magnitud de la perpendicular DC, bajada á la misma desde un punto inaccesible C.**—Tómese otro punto E desde el cual se descubran los A, B y C, y sea visible y accesible el punto B: midiendo la base horizontal BE, háganse las mismas operaciones que si se tratase de medir la AC que tiene sus extremos inaccesibles. Cuando se tenga resuelto el triángulo ABC se determinará la magnitud de la CD y tambien se podrán hallar las partes AD y DB.

407. **Dada una recta inaccesible AB** (fig. 145), **tirarle una paralela por un punto accesible C.**—Elíjase un punto D desde el cual sean visibles los A, B y C: tomando la CD como base, háganse las mismas operaciones que si se tratase de medir la AB, y en el triángulo ABC determínese el ángulo ABC, por medio del cual se podrá tirar en el punto C la paralela CE (368).

408. **Hallar la bisectriz de un ángulo inaccesible.**—Tírese una línea cualquiera AB (fig. 158) determinando sus intersecciones con

los lados del ángulo, y mídanse los ángulos CAB y CBA, teniéndose entonces

$$CAB + CBA = 180^o - C.$$

Para determinar el punto D que satisfaga á la condicion de ser CA = CD, será preciso calcular el valor del ángulo CAD ó de su igual CDA; pero en el triángulo isósceles ADC se tiene que verificar la ecuacion

$$2CAD = 180^o - C;$$

y de las dos ecuaciones halladas resulta entonces

$$CAD = \frac{CAB + CBA}{2};$$

formando este ángulo en el punto A, se tendrá la verdadera direccion de la AD y se podrá hallar su interseccion con la CD. Dividiendo la AD en dos partes iguales, su punto medio E determinará con C la bisectriz pedida. Si C no es visible desde E se podrá tirar una paralela á la AD desde otro punto cualquiera de la CA, y se hallará su punto medio que con el E dará la direccion de la bisectriz.

409. **Determinacion geométrica de los puntos del terreno.** —Un punto del terreno se determina con relacion á otros dos dados de posicion:

1.° *Por la medicion de dos rectas perpendiculares entre sí.*—Bajando una perpendicular desde el punto dado C (fig. 161) á la recta AB que une los puntos dados, y midiendo la distancia BC′ de uno de ellos B al pié de la perpendicular y la de esta línea C′C. Es necesario indicar á qué region del plano con relacion á AB corresponde la posicion de C, para no confundir este punto con su simétrico respecto de AB. Esta recta toma el nombre de *eje* ó *directriz*, BC′ el de *abscisa*, y C′C el de *ordenada* del punto C.

2.° *Por sus distancias á dos ejes.*—Bajando desde C perpendiculares á dos rectas AB, BD que se cortan á ángulo recto, sus longitudes CC′, CC″, respectivamente iguales á BC′ y BC″, determinan las distancias del punto de encuentro B de las rectas dadas á los piés C′ y C″ de las perpendiculares. Estos puntos así determinados servirán para levantar en ellos perpendiculares á las rectas AB y BD, y el encuentro de estas perpendiculares dará la posicion del punto C. Tambien en este caso será C′B la *abscisa* del punto C, tomada en AB, que se llama por esta razon *eje de abscisas*, y BC″ = CC′ su *ordenada* en el *eje* BD *de las ordenadas*. Estas líneas reciben el nombre comun de *coordenadas rectangulares* en el caso que consideramos.

Cuando los ejes no forman ángulo recto, se miden las distancias de B á los piés de las perpendiculares, las cuales determinan por su interseccion el punto C.

3.° *Por las distancias del punto á los extremos de la recta dada.*—Se medirán estas distancias CA, CB (fig. 162), con lo que quedará determinado el triángulo ABC: trazando una recta *ab* que represente con arreglo á una escala á la AB del terreno, y trazando desde *a* y *b* con los rádios *ac* y *bc*, tomados en la misma escala en representacion de AC y BC, dos arcos que se corten hácia la region del plano que representa la que en el terreno ocupa C relativamente á AB, su punto de interseccion determinará el *c* homólogo de C en el terreno. (Geom. Teor. 61.) De no tener en cuenta hácia qué parte debe corresponder el punto en cuestion, habría otra solucion *c'* y la posicion de C quedaría indeterminada en el plano. La posicion absoluta de los puntos A, B y C, quedaría determinada completamente por la orientacion de la recta AB (247). La indicacion de que C se hallaba hácia el norte de la alineacion AB, haría cesar toda indeterminacion en el caso que consideramos; pues orientada la recta *ab*, veríamos que *c'* se hallaba á la parte sur, y que *c* era por consiguiente la única solucion admisible.

4.º *Por la distancia del punto á uno de los extremos de la recta dada, y el ángulo que forma con esta última la alineacion que se mide.*—Conocida la AB, bastará medir CA y el ángulo CAB para determinar el punto C; pues construyendo en *a* homólogo de A el ángulo *bac* = CAB, y tomando en la recta así determinada una magnitud *ac* que represente á AC con arreglo á escala, se hallará el punto *c* homólogo de C. (Geom. Teor. 59.)

Con la brújula se resolverá este problema midiendo AC y tomando su rumbo, en la suposicion de que AB y *ab* están orientadas; y con la plancheta bastaría orientar la recta *ab* del tablero con AB del terreno, dirigir la alidada por A al punto C, marcar en el plano la direccion de *ac* y tomar su magnitud con arreglo á escala.

5.º *Por los ángulos que forman con la recta dada en sus extremos las visuales al punto que se trata de determinar.*—Se miden los ángulos BAC, ABC, ó se determinan los rumbos de AC y BC, ó bien se trazan gráficamente sus direcciones en la plancheta (274). La interseccion de las dos rectas determinadas por la construccion de los ángulos *bac* = BAC, y *abc* = ABC fija la posicion del punto *c* homólogo de C. (Geom. Teor. 60.) Este procedimiento se llama en la práctica *método por interseccion.*

6.º *Por el ángulo que forma una de las visuales con la recta dada, y el de las visuales entre sí.*—Midiendo los ángulos ABC, BCA (fig. 163) se habrá determinado tambien la posicion de C (Geom. Teor. 60); y para hallar su homólogo *c* en el plano, se construirá en *b* el ángulo *abc'* = ABC, y en un punto cualquiera *c'* de la recta acabada de determinar el *bc'a'* = BCA; y tirando por el otro extremo *a* de la recta homóloga de AB una paralela *ac* á *a'c'*, su punto de interseccion *c* con *bc'* será el homólogo de C (Geom. Probl. 7). Este método se conoce con el nombre de *método por doble interseccion.*

410. Cuando uno de los extremos B (fig. 164) de la alineacion conocida es completamente inaccesible, y el A no se presta cómodamente á estacionar en él un instrumento, se determina el punto C midiendo los ángulos ADC, ACD, DCB desde los puntos D y C en que se puede hacer estacion; se construirá en el papel y en un punto cualquiera *d'* de la *ab* el ángulo

$ad'c' = ADC$; en otro c' de $d'c'$ se construyen los ángulos $d'c'a'$, $d'c'b'$ respectivamente iguales á los DCA, DCB; y tirando por a y b paralelas á los lados así determinados, su interseccion c será la proyeccion de C.

411. **Determinacion de la posicion de un punto con relacion á tres puntos dados. —Problema de la Carta.**—Este problema, llamado por los autores franceses *problema de la Carta*, porque se aplica á la determinacion de un punto con relacion á tres situados en sus posiciones relativas y absolutas en una carta ó plano topográfico, se resuelve tambien cuando se trata de conocer la posicion de un punto accesible D (fig. 165) referida á la de otros tres A, B, C, visibles desde el primero.

Resolucion gráfica.—Mídanse los ángulos $ADB = m$ y $BDC = n$, y construyendo sobre la recta ab homóloga de la AB del terreno, el ángulo $hab = m$, se traza sobre ella el arco capaz de este ángulo (Geom. Probl. 19) tirando la ao, perpendicular en a á la ah, y la perpendicular en el punto medio de ab; ambas perpendiculares determinan en su interseccion o el centro del arco citado. Trazando despues sobre bc el arco capaz del ángulo n, la interseccion d de estos arcos será la representacion en el plano del punto D del terreno. Es, en efecto, el único punto que satisface á la condicion de que las rectas tiradas desde él á los puntos dados a, b y c, forman los ángulos consecutivos m y n, como tiene lugar en el terreno para D con relacion á los puntos A, B y C.

Si se unen los a y c, y se construye sobre la recta así determinada el arco capaz del ángulo $adc = m + n$, este tercer arco pasará tambien por d, lo cual puede servir de comprobacion.

Cuando las circunferencias descritas tienen hácia d muchos puntos comunes, se halla el verdadero punto de instersección tirando desde b una perpendicular be á la línea oo' que une los centros, y prolongándola hasta los arcos. En efecto, la recta que une los puntos de interseccion b y d es perpendicular á la que une los centros. (Geom. Teor. 45.)

412. *Caso excepcional.*—Puede suceder que las dos circunferencias se confundan: entonces todos los puntos de la que así resulta satisfacen á la doble condicion exigida, y el d (fig. 166) corresponde á la circunferencia que pasa por a, b y c, y queda indeterminado; se ve en la figura que d' satisface á las mismas condiciones que d. (Geom. Teor. 50.) Se recurre entonces á un nuevo punto, cuya posicion respecto á dos de los dados primitivamente sea conocida, fijando la de d con relacion á los tres acabados de mencionar; y en el caso de no existir el cuarto punto fijo á que nos referimos, se elige en su lugar otro cualquiera, determinándole con relacion á los tres primeros.

413. Con la brújula se hallan desde D (fig. 165) los rumbos de las rectas DA, DB, DC como observaciones inversas (239); y trazando desde a, b y c estos rumbos directamente, su interseccion d será el punto homólogo de D. La de solos dos rumbos bastaría para determinar la proyeccion d; pero no tan completamente.

414. Haciendo uso de la plancheta, sobre la cual se suponen determinados en sus posiciones relativas los puntos a, b y c, se coloca sobre

el tablero un papel trasparente, se halla con el auxilio del compás curvo (270) el punto que se corresponde en la vertical de D, y se trazan las direcciones de las visuales tiradas desde él á los A, B y C Trasladando el papel al sitio del tablero en que se hallan las proyecciones a, b, c de estos puntos se le mueve hasta hallar una posicion en que cada una de las rectas trazadas en él pase por el que le corresponde; calcando entonces el punto de interseccion de las rectas, con lo que se habrá determinado la posicion del punto d homólogo de D. Cuando haya más de una posicion en que se verifique la circunstancia acabada de indicar, estaremos en el caso de indeterminacion de que ya nos hemos ocupado.

*415. **Resolucion analítica** —El problema de la Carta se resuelve tambien calculando los valores de las rectas AD, BD y CD (fig. 165) á fin de determinar d en el plano por las homólogas de estas rectas: para lo cual es preciso hallar los de los ángulos x é y, que con los m, n, y los lados k = AB y l = BC determinan los triángulos ABD, DBC de que forman parte las rectas cuyos valores se necesita conocer. Se tendrá desde luego

$$x + y = 360^\circ - (\mathrm{B} + m + n) \qquad [10].$$

Para calcular $x - y$ se tienen las proporciones

$$\begin{aligned} \text{sen } m &: \text{sen. } x :: k : \mathrm{DB}\,; \\ \text{sen. } n &: \text{sen. } y :: l : \mathrm{DB}\,; \end{aligned}$$

despejando DB en ambas, igualando sus valores y dividiendo por l ambos miembros resulta

$$\frac{k \text{ sen } x}{l \text{ sen. } m} = \frac{\text{sen } y}{\text{sen. } n} \qquad [11];$$

y haciendo $\dfrac{k \text{ sen. } n}{\text{sen. } m} = p$, despejando k en esta expresion y sustituyendo en la anterior [11] se obtiene la proporcion $l : p :: \text{sen } x : \text{sen. } y$. De ella resulta (Trig. — 20)

$$\text{tg } \frac{x - y}{2} = \frac{(l - p) \text{ tg } \dfrac{x + y}{2}}{l + p} \qquad [12];$$

que da el valor de $x - y$. Conocida la suma y la diferencia de los ángulos, se deducen estos fácilmente (Alg —105). Al resolver esta ecuacion debe observarse que el ángulo x será mayor que el y cuando el segundo miembro de la misma resulte positivo; en el caso contrario será y mayor que x, y habrá que cambiar el signo de ambos miembros de la ecuacion antes de ejecutar los cálculos.

Ejemplo.—Sean : $k = 2925{,}^{m}31$; $l = 3126^{m}04$; $\mathrm{B} = 130^\circ\,40'$; $m = 42^\circ\,43'$; $n = 40^\circ\,17'$. Se tendrá desde luego [10],

$$x + y = 146^\circ\,20'.$$

Aplicando despues el cálculo logarítmico á la determinacion de p se tendrá $p = 2788,^{m}16$; y por último, de la fórmula [12] se deducirá

$$\frac{x-y}{2} = 10^{\circ}41'40''$$

Se tendrá entonces $x - y = 21^{\circ}23'20''$. Conocida la suma y la diferencia de x é y, resultará $x = 83^{\circ}51'40''$; $y = 62^{\circ}28'20''$.

416. *Caso excepcional.*—Cuando el punto de estacion d (fig. 166) se halla en la circunferencia que pasa por los puntos dados, se tiene evidentemente (Geom. — Teor. 50) $b + m + n = 180^{\circ}$

CAPITULO V.

Levantamiento de planos.

417. **Ideas generales.**—El polígono semejante á la proyeccion horizontal del terreno que se trata de representar, ó su *plano topográfico* (78) se determina por medio de los instrumentos ya descritos, y siguiendo varios procedimientos; cada uno de los cuales es más á propósito que los demás en circunstancias dadas para cada caso particular, segun la mayor ó menor extension del terreno, sus condiciones de invisibilidad ó inaccesibilidad, la naturaleza de los instrumentos que hayan de emplearse y la importancia de los resultados que se trata de obtener. Cuando se desea mucha exactitud se emplean los goniómetros de precision; haciéndose uso de la brújula, la plancheta y el grafómetro para las operaciones de un órden inferior ó los detalles de un plano; y de la escuadra, la cadena ó cuerda y jalones en los terrenos de muy corta extension, como sucede por ejemplo en los planos de las tierras de labor.

Respecto al uso de la brújula, solo diremos que los resultados obtenidos con ella se pueden considerar tan aproximados como los que dan la plancheta y el grafómetro, atendiendo á que las variaciones seculares (59), las anuales y las diarias que tambien experimenta la aguja, no influyen en el resultado de las operaciones topográficas atendiendo al límite de apreciacion del instrumento (236), á la duracion de las indicadas operaciones y á la corta extension relativa en que se hallan comprendidas. Las perturbaciones á que se halla expuesta por la aproximacion á masas ferruginosas se hacen claramente perceptibles á causa de la mayor duracion y amplitud de las oscilaciones que proceden á la posicion de equilibrio en que debe fijarse.

Pasemos á la exposicion de los diferentes métodos de *levantamiento de planos*.

418. **Método de las coordenadas.**—Para levantar el plano del polígono de corta extension ABCDEFG (fig 167) con el auxilio de la escuadra ó cartabon (276), suponiendo el terreno despejado y accesible, se fijan con estacas, jalones ó piquetes los vértices del polígono, los cuales se eligen de manera que las rectas que los unen se acerquen á confundirse con los elementos correspondientes de la curva, que limita generalmente la porcion de terreno que se considera. Despues se elige como *base* una diagonal AE, la cual se procura que ocupe el centro del polígono en sentido de su longitud, bajando perpendiculares á ella (277.—2.º) desde los demás vértices B, C .... Hallando el rumbo 257º 30′ de la base AE para la orientacion del plano (102), y midiendo las *abscisas* AH, AY..... para lo que pueden determinarse al medir la base AE las distancias de los puntos H, Y .... al orígen A, asi como las *ordenadas* HB, YG.... afectándolas en un registro de los signos algébricos + y — segun se hallen á uno ú otro lado de la base, se tendrán todos los datos necesarios para la formacion del plano (409.—1.º)

419. **Cróquis y registro**.—El *croquis* es un dibujo hecho á la vista del terreno en el que se señala el contorno del polígono, la situacion de los vértices en posiciones análogas á las que ocupan las del terreno con relacion á la base, las líneas de operacion y los números que expresan las longitudes de las rectas que se hayan medido y los signos que expresan su situacion respectiva. Conviene tambien dibujar los senderos, arroyos, linderos y otras líneas que comprenda el terreno, así como una série de curvas horizontales (Acots. 106) que den á conocer aproximadamente su relieve, en el caso en que haya de quererse expresar esta circunstancia.

420. El *registro* es un estado compuesto de varias columnas en el que se anotan ordenadamente los datos tomados en el terreno. El modelo que á continuacion presentamos se refiere á la operacion indicada, designando los vértices por las mismas letras que tienen en la figura.

Registro del contorno del polígono ABCDEFG.

RUMBO DE LA BASE AE=257º 30′.

Abscisas á partir del punto A 1	Ordenadas 2	Vértices á que corresponden. 3	Designacion de los vértices. 4	Observaciones 5
0	0	A	Jalon	
19,5	—27,6	B	Arbol	
41,0	+31,7	G	”	
62,0	—38,0	C	”	
85,4	+24,0	F	”	
95,3	—23,4	D	”	
107,0	0	E	”	

En la casilla de observaciones se expresan las que merezcan consignarse, para que concurran á evitar las dudas que por cualquier causa pudieran presentarse despues en la construccion; así como las noticias ó circunstancias que se quiera tener presentes por su interés, sean de localidad, de situacion, calidad del terreno ú otras cualesquiera.

421. **Casos de inaccesibilidad ó invisibilidad de los vértices.**—Si el terreno es despejado, pero no se puede penetrar en el interior del polígono, como al tratarse, por ejemplo, del plano de una laguna, se circunscribe un rectángulo MNPQ (fig 168) levantando por M y N (277.—1.°) perpendiculares á la alineacion MN, y por P la PQ que lo sea á NP, y sirviéndose de las abscisas MA'..... y de ordenadas correspondientes A'A..... para la determinacion de los puntos A..... del contorno (409.—1.°)

422. Cuando pueden observarse desde dos bases AB, BD (fig. 161) perpendiculares entre sí todos los vértices del polígono, se determinan éstos, como el C por ejemplo, por la interseccion de las perpendiculares C'C, C''C levantadas á los ejes desde los piés de las préviamente bajadas á ellos desde C (277.—2.°). Algunas veces se necesita trazar tres ejes, ó darles inclinaciones entre sí de 135 ó de 45° (276.)

423. **Métodos de la descomposicion en triángulos.**—El método preferible para el levantamiento de un plano cuando solo puede hacerse uso de la cadena, consiste en dividirle en triángulos por medio de diagonales tiradas desde un vértice G (fig. 169) á todos los demás y medir los lados de todos los triángulos: pues de esta manera queda determinado el polígono, marcando cuidadosamente en el croquis la disposicion que los triángulos guardan entre sí.

424. **Método de rodeo.**—Consiste este método en medir (149) todos los *ángulos de direccion* (177) YAB, ABC..... (fig. 170) dirigiendo la alidada fija al punto Y para la medida del primer ángulo A y la móvil al B; anotando en el croquis y en el registro el valor 55° 45' obtenido en el sentido de la graduacion, así como los que resultan en el mismo sentido para todos los demás. Antes de abandonar el terreno deben sumarse los valores de todos los ángulos para ver si la suma es con bastante aproximacion igual (211.—4.°) á 2R $(n-2)$. Midiendo además todos los lados se tendrán tres datos más de los suficientes para la determinacion del polígono; los que sirven sin embargo de comprobacion.

Cuando se hace uso de instrumentos de precision, deben repetirse los ángulos (200) para obtener sus valores con mayor exactitud; y si la alidada es excéntrica debe tenerse presente lo dicho (183 y 203).

425. **Ángulos de comprobacion.**—Además de los ángulos del contorno conviene medir los *oab*, *oba* ..... (fig. 171), que forman con los lados del polígono las visuales tiradas á un punto interior *o*; así como los *abe*, *ebd*, por ejemplo, que pueden servir para comprobar la posicion de *b* respecto de *a*, *e* y *d* por el problema de la carta (411).

426. **Empleo de la brújula y de la plancheta.**—Con la brújula se hallarán los rumbos *r*, *r'*..... (fig. 170) de los distintos lados AB, BC.....

los cuales se cuentan desde la recta que se arrumba hasta la aguja en el sentido de la graduacion del limbo (237). Los rumbos pueden comprobarse tomando desde B al hacer estacion en este punto el rumbo BA como *observacion inversa*, el CB desde C.... (239) y así sucesivamente. Empleando la plancheta se obtiene ya el plano construido en el tablero, trazando en él la recta homóloga de AB y reduciéndola á escala, y orientando en B con respecto á AB la recta trazada, para determinar la direccion BC á fin de obtener gráficamente el valor del ángulo B (150). Tomando entonces en el lado homólogo de BC y con arreglo á escala la recta que ha de representarla, se pasa al vértice C á hacer estacion en él, y así se continúa hasta volver al punto A.

Del mismo modo que las de los lados, pueden determinarse con la brújula y la plancheta las direcciones de las visuales de comprobacion (425).

El plano resulta orientado (244) con la brújula si ésta lo está; y se le puede orientar por medio de la declinatoria (267) cuando se hace uso de la plancheta.

427. **Método de interseccion**.—Midiendo la base AB (fig. 172) y hallando el rumbo que le corresponde, se hará estacion en uno de sus extremos A para medir los ángulos EAB, FAB.... que forma la base con las visuales tiradas á los demás vértices, ó los rumbos de estas rectas cuando se hace uso de la brújula. Pasando despues á hacer estacion en el otro extremo B de la base, se miden tambien los ángulos ABE, ABF.... que forman con ella las visuales á los vértices exteriores, ó los rumbos de estas líneas, con lo que quedarán determinados de posicion (409.—5.°) los puntos E, F, G, D y C. Eligiendo otro punto cualquiera en la misma base, el cual se determinaría por su distancia á uno de los extremos, se miden tambien los ángulos con AB, ó se toman los rumbos de las visuales, las cuales deben concurrir en los respectivos puntos de interseccion de las primeras; estando así determinada y comprobada la posicion de cada vértice exterior por la interseccion de tres rectas, como tiene lugar para los F, E, B, C (fig. 173) referidos por la brújula á la base AD, y comprobados por los rumbos de las visuales dirigidas á dichos puntos desde el punto de comprobacion O, el cual se determina por la distancia OD.

Los lados EF, FG.... (fig. 172) determinados por el método que nos ocupa, pueden servir á su vez de base para la determinacion de otros puntos H, Y, L, invisibles desde los diferentes puntos de la primera.

428. Con la plancheta se determinan por interseccion los vértices exteriores como se hizo para los puntos A y B (fig. 146) en la resolucion del problema (386) de hallar su distancia inaccesible.

429. **Método de doble interseccion**.—La mayor exactitud que se obtiene en el valor de un ángulo que en la medida de una alineacion, ó los obstáculos que esta última operacion puede presentar, sugieren naturalmente la idea de medir una sola recta *ab* (fig. 171) que se toma como base, y hallar, además de los ángulos *eab*, *abc*... del polígono, los que forman como el *bca* en cada vértice las visuales tiradas á los extremos de la base; con lo que cada vértice exterior á ella lo será de un triángulo en

que se conocerá la base y dos ángulos, uno adyacente y otro opuesto, y quedará por lo tanto completamente determinado (409.—6.º)

430. **Método de radiacion.**—Consiste en medir los ángulos *aob*, *boc*..... (fig. 171) formados en un punto interior *o* por las visuales tiradas desde él á los vértices del polígono, y las rectas *oa*, *ob*, que unen á *o* con *a*, *b* ... lo que determinará (Geom. Teor. 15) los triángulos en que por estas rectas queda dividido el polígono propuesto.

431. Fácilmente se comprenderá la aplicacion de este método con la brújula y la plancheta; pudiéndose obtener con solo la cadena (423), midiendo además de los lados del polígono las alineaciones *oa*, *ob*.....

432. **Detalles de los planos.**—Todos los puntos notables exteriores al perímetro del polígono principal, los caseríos, bosques y otros objetos naturales ó productos del arte que el mismo polígono encierra, los ríos, arroyos, caminos ó lindes que le cruzan, deben figurar en el plano, refiriéndolos á los lados cuya posicion se ha determinado. Los puntos que se consideran en el contorno se determinan como los 6 y 5 (fig. 169) por abscisas y ordenadas sobre el lado GF (409.—1.º), lo que tambien puede conseguirse por interseccion (427) como se indica en la misma figura para los 1, 2, 3 y 4. El edificio R (fig. 174) lo está por perpendiculares á una base auxiliar MN, lado de un triángulo MNF que contiene el ángulo F del polígono principal y que puede determinarse por cualquiera de los procedimientos dados á conocer en el capítulo anterior. El polígono que encierra al caserío P se refiere directamente por abscisas y ordenadas al lado CD, y el arroyo que atraviesa el polígono á la línea quebrada SLYHG, cuyo plano se levanta por el método de rodeo haciendo que forme parte de la línea poligonal el segmento BS de AB, á fin de determinar la posicion del punto de partida S. Cuando el instrumento angular de que se dispone es el cartabon, puede tomarse el primer elemento poligonal SL perpendicular á AB, y elegir para los demás los ángulos de 45, de 90 ó de 135°, que vayan proporcionando las direcciones que más se acerquen á la línea sinuosa que se trata de situar en el plano. Conviene medir para comprobacion la distancia GE de la interseccion G de la línea poligonal con el lado FE del polígono al vértice E más próximo.

433. Tratándose de una línea sinuosa muy extensa, como un rio ó camino cuyo plano se quiere levantar aisladamente, es preciso medir todos los lados y determinar por medio de los ángulos ó los rumbos las direcciones de las rectas que constituyen la base poligonal *abcd*.... (fig. 175), así como las de las visuales *ao*, *bo*.... dirigidas á puntos elevados que deban figurar como detalles en el plano, ó que se señalan con el solo objeto de que sirvan para corregir como hemos dado á conocer (425) y se representa en la figura, los errores de las medidas de los lados; que acumulándose, alterarían considerablemente la forma y la extension del rio ó camino. Cuando se crea que va á perderse de vista el punto *o*, se dirigirán además desde dos vértices *c* y *d* por lo ménos visuales á otro nuevo punto *p* de comprobacion.

434. **Planos de las poblaciones.**—Se empieza por rodear la po-

blacion de un polígono cuyos vértices se señalan de una manera estable, eligiéndolos de manera que desde cada uno de ellos se vean los dos contiguos y además la veleta de una torre céntrica ú otra señal perceptible desde todos ellos, la cual sirve de punto interior de comprobacion (425) y descompone al polígono en triángulos, cuya resolucion suministra la perfecta determinacion de la situacion relativa que los vértices guardan entre sí. Partiendo despues de puntos determinados en este contorno poligonal se establecen transversales que atraviesan al polígono en toda su extension, yendo á parar á puntos fijos del contorno, y le dividen á su vez en polígonos cuyos vértices pueden comprobarse de posicion á fijarse con señales permanentes, como por ejemplo marcas hechas á pico en las aceras. Nuevas transversales dividen á cada uno de los polígonos de primer órden en otros de segundo por transversales que se fijan de una manera análoga en el contorno del de primer órden en que se hayan comprendido; continuando así hasta haber circunscrito todas las manzanas de casas, cuyos vértices entrantes ó salientes se determinan con relacion á la línea poligonal más próxima por cualquiera de los métodos que conocemos, siendo preferible el de las abscisas y ordenadas, ó cuando distan de una manera notable por intersecciones de visuales dirigidas desde puntos fijos en la citada línea.

435. Los planos interiores de los edificios y jardines públicos ó particulares, de las huertas ó cercados comprendidos en el interior del polígono se levantan por el procedimiento que parezca más á propósito entre los que hemos dado á conocer en este capítulo, siendo en general preferible para la planta de los edificios medir dos lados contiguos de las diferentes habitaciones cuando son rectangulares, ó los lados y diagonales en todo otro caso para poder construir su plano por triángulos (423). Los gruesos de los muros se miden fácilmente cuando están atravesados por puertas ó ventanas; ó en otro caso se deducen combinando las dimensiones halladas interiormente para las habitaciones y los otros muros á lo largo de una línea de fachada con la longitud que esta presenta al exterior.

436. **Reconocimientos é itinerarios.** — Las operaciones topográficas detalladas y extensas, exigen un reconocimiento prévio y la formacion de un croquis del terreno en la extension que han de comprender, con expresion aproximada de las disposiciones relativas de los distintos puntos que han de figurar en el plano, á fin de elegir el sistema más conveniente para su levantamiento definitivo y la marcha que debe seguirse en las operaciones. Se emplean para conseguirlo precedimientos expeditos y se hace uso de instrumentos sencillos.

Cuando el terreno que ha de representarse se puede recorrer en toda su extension, se elige lo más céntrica que sea posible una base AB (figura 172), procurando que se halle en un terreno despejado y alto, á fin de extender el horizonte visible y aumentar el número de puntos que se han de fijar desde ella. La orientacion de la base se obtiene por la brújula ó la declinatoria cuando las circunstancias no permiten aplicar los procedimientos generales indicados (102), y su longitud puede obtenerse midiéndola directamente á pasos, empleando los telémetros (350), ó por la aplicacion de la fórmula $e = vt$, en la cual e es la longitud de la base, v la distancia andada en 1′ por el observador á pié ó á caballo, y t el número de minutos empleados en recorrerla: ó bien multiplicando por 337m, velocidad del sonido en 1″, el número de segundos que un observador situado en uno de los extremos de la base averigua que median desde la percepcion del fogonazo á la detonacion de una arma de fuego disparada en el otro extremo; siendo más exacto el término medio entre dos observaciones recíprocas y consecutivas.

Desde los extremos de AB se determinan por intersecciones (427) todos los demás puntos principales del terreno en la extension que se considera. Para la eleccion de estos puntos conviene tener en cuenta los que presentan bastante elevacion y se determinan fácilmente por un árbol, una roca ú otra señal cualquiera, á fin de evitar la confusion que puede introducir en el trabajo la adopcion de aquellas cimas que no presenten señales marcadas, y que puedan variar de aspecto con los distintos puntos de vista.

Para determinar la direccion de las visuales pueden emplearse la brújula de Kater, los instrumentos de reflexion, y tambien la *plancheta de reconocimientos*, que se compone de un tablero formado de listones unidos por una tela fuerte ó por un hule, los que disponen en un plano por medio de dos reglas que giran por uno de sus extremos alrededor de charnelas, y se fijàn por el otro á los listones con unas aldabillas. Cuando no ha de usarse, puede el tablero plegarse y transportarse muy cómodamente. La alidada es un prisma triangular de madera: una de sus aristas inferiores es la línea de fé, que tambien puede llevar grabada la escala, y la superior sirve para dirigir las visuales, que se determinan mejor clavando en ella dos agujas. La plancheta puede orientarse por la declinatoria, y tambien á falta de esta puede serlo aproximadamente, trazando en el tablero las direcciones de la sombra de un estilo á las distintas horas del dia, para disponerla en los siguientes del mismo modo, observando la hora cada vez que se ponga en estacion, y haciendo girar al tablero hasta que la sombra del estilo tenga la direccion ya determinada.

Parar referir los detalles á los puntos principales fijos de posicion como acabamos de indicar, pueden emplearse los distintos medios que hemos dado á conocer (432), determinando los ángulos con los goniómetros que acabamos de indicar, con los telémetros las distancias que han de observarse, midiendo á pasos las que han de recorrerse y dibujando á ojo los detalles menos importantes, que pueden sin embargo contribuir á la perfeccion del trabajo.

437. En circunstancias dadas, solo se tiene el auxilio de las noticias que pueden suministrar los naturales del país, y entonces se forma una escala de leguas, de kilómetros ó de horas de camino, se elige como base la distancia entre dos pueblos notables del interior, tomándola en el plano con arreglo á la escala segun las noticias adquiridas, de las cuales se deduce

tambien la orientacion aproximada que corresponde al camino que conduce de una á otra poblacion. Los demás pueblos, caseríos y puntos notables más inmediatos á los que determinan la base se fijan por sus distancias aproximadas á estos puntos; y para hacer desaparecer la indeterminacion que por este método resulta al situar el punto de que se trata, sirve la orientacion que para las mismas distancias se conoce por las noticias adquiridas. Fijos así cierto número de puntos notables, se refieren á ellos del mismo modo las posiciones de otros más distantes, continuando del mismo modo hasta llegar á los límites que el plano debe tener.

438. En los itinerarios sirve de base de las operaciones el plano del camino, que puede levantarse como hemos indicado (433), haciendo uso de los instrumentos y empleando los procedimientos descritos (436), y refiriendo á la misma base todos los objetos situados á sus inmediaciones como caseríos, bosques, cerros... en una zona más ó menos extensa segun la naturaleza del terreno y las instrucciones recibidas, detallando cuidadosamente los que forman parte del camino mismo, como puentes, vados, desfiladeros, las porciones expuestas á inundaciones, caudal de los rios y arroyos que se atraviesan, su velocidad media, puntos á que llegan en las avenidas, así como todo aquello que pueda tener importancia en atencion al objeto del itinerario. Tambien debe detallarse en muchos casos el estado de conservacion del camino y de sus obras, los materiales de que puede disponerse para su reparacion, con expresion de las distancias á que se encuentran, y los medios de conduccion con que puede contarse.

Cuando el camino que se sigue está acompañado de una línea telegráfica ó de árboles plantados á distancias iguales, bastará conocer la equidistancia de los palos telegráficos ó de los árboles, y contar su número para obtener aproximadamente las distancias recorridas. En las carreteras pueden fijarse las posiciones de los distintos puntos notables por su distancia al último poste kilométrico, desde cada uno de los cuales debe empezarse la medicion parcial aproximada; logrando así rectificar esta y evitar la acumulacion de los errores.

CAPITULO VI.

Construccion y replanteo de los planos.

439. **Generalidades.**—La construccion del polígono que constituye el plano (78) está reducida á la *transportacion* de los ángulos y de las alineaciones, medidos unos y otras en el terreno horizontalmente, ó reducidos por el cálculo al horizonte. Ya hemos indicado (290) la manera de determinar un límite de la magnitud que las rectas medidas en el terreno deben tener para que la desviacion de su punto extremo en el plano sea inferior al límite de apreciacion á la vista, dada la escala en que ha de

construirse. Para conocer el error de que la misma distancia puede estar afectada, observaremos que haciendo á $l = 0{,}0002$, límite de las longitudes apreciables á la vista, y $M = 5000$, denominador de la fraccion que representa la escala dada, la fórmula [18] (96) da $L = 1^m$, lo que nos dice que las distancias deben medirse con este grado de aproximacion, siendo innecesario para la construccion del plano apreciar con exactitud en el terreno las fracciones de metro, toda vez que no pueden tomarse gráficamente en la escala ordinaria: sin embargo, con la escala de transversales (99) se puede llevar la aproximacion gráfica hasta $0{,}^m5$, siendo inútil llevarla más allá en el terreno. En la escala de 1 por 10000 puede ir en este último caso hasta 1^m.

440. La resolucion del problema recíproco, que toma el nombre de *replanteo del plano*, exige que acompañe á éste la indicacion numérica de los valores más aproximados que hayan podido obtenerse en las operaciones del levantamiento con el auxilio de los instrumentos, ó se hayan deducido despues por el cálculo: puesto que, para una escala de 1 por 5000 por ejemplo, el error cometido en la apreciacion gráfica de una distancia puede acortar ó prolongar en el terreno su homóloga natural, en un metro ó en $0{,}^m5$ segun la naturaleza de la escala del plano, y desviar en otro tanto la posicion de su extremo á causa de la apreciacion angular; siendo dobles estas desviaciones para la escala de 1 por 10000.

441. **Transportacion de las líneas y de los ángulos.** —Para transportar las alineaciones se hace uso de la escala; y para los ángulos, de un instrumento llamado *transportador*, que consiste en un semicírculo ó un círculo entero de talco, de metal ó de papel, en los que van grabadas graduaciones enteramente iguales á las que hemos dado á conocer para los limbos (145). Los transportadores más completos tienen una alidada giratoria en el centro y provista de su nonius correspondiente, cuya apreciacion conviene que sea la misma que la del instrumento empleado en el levantamiento del plano que se transporta.

Para transportar un ángulo cuyo valor es conocido numéricamente, se coloca el transportador de modo que su centro O (fig. 47) coincida con el punto en que ha de hallarse el vértice, y el diámetro en que va el cero de la graduacion con la recta OA que representa la direccion del lado conocido, haciendo despues que la alidada marque el valor angular dado, se señala el punto á que corresponde, el cual determinará con O la direccion del otro lado del ángulo.

442. **Transportacion de los ángulos por las cuerdas y las tangentes.** —Existen tablas calculadas de las cuerdas correspondientes á los arcos que crecen de minuto en minuto, y referidas á un rádio de valor determinado; con cuyo auxilio pueden construirse los ángulos valiéndose solamente de la escala y el compás. Las de Francœur lo están para el rádio 10000: y para construir el ángulo de $6^o 20'$ por ejemplo, se hallará en las tablas para la cuerda correspondiente el valor 1105: despues se toma en una recta indefinida la longitud AC (fig. 176) de 10000 partes tomadas en la escala de transversales, y se traza desde C con este rádio un arco in-

definido AB. Tomando despues una magnitud de 1105 de estas partes, y haciendo centro en A, se traza otro arco que cortará al primero en un punto B, el cual unido con el C determina el ángulo ACB de 6° 20′

Si el arco dado encierra segundos, se hallará su cuerda por una proporcion análoga á la empleada (88), admitiendo que *las diferencias de las cuerdas son proporcionales á las diferencias de los arcos correspondientes*.

Cuando por el contrario se tiene un ángulo ACB trazado en el papel, y se quiere conocer su valor en grados, se hace centro en el vértice con un rádio igual á 10000 y se describe el arco AB, averiguando despues en la escala el valor de la cuerda de este arco.

443. Haciendo uso de una tabla de tangentes se puede aplicar á la resolucion gráfica de este problema el procedimiento dado á conocer (358) para construir los ángulos con la escuadra en el terreno.

444. **Construccion de un plano por abscisas y ordenadas.**—Se toma sobre una recta indefinida una magnitud *ae* (fig. 167) que represente en la escala adoptada la AE medida en el terreno, señalando los puntos extremos *h*, *i*..... de las distancias al orígen *a* homólogas de las AH, AY..... medidas en el terreno. Este método es preferible al de tomar las distancias sucesivas homólogas de las AH, HY, en razon á que por este último los erres se acumulan alterando la magnitud total de la base: y siguiendo el que indicamos como preferible se aislan los errores, facilitando estremadamente la correccion de un error cualquiera cometido en la apreciacion de una distancia. Levantando despues las perpendiculares á la base en el sentido que marca el signo correspondiente á cada una, tomando en ella la longitud de la ordenada y uniendo por rectas los puntos *a*, *b*, *c*..... así determinados se tendrá construido el polígono. El contorno (432) se determina de una manera enteramente análoga, y se orienta el plano formando en *ae*, á partir de esta línea y en el sentido de la graduacion de la brújula, el ángulo 257° 30′ hallado en el terreno.

Para los procedimientos que tambien han podido seguirse (422), se construyen los ejes, se toman en ellos las abscisas, y la interseccion de las ordenadas correspondientes á cada uno de los puntos determina su posicion en el plano.

445. **Construccion por triángulos.**—Para el método de descomposicion seguido (423) basta construir sucesivamente los triángulos en la misma disposicion que los trazados en el terreno, y con las líneas homólogas de los lados AH, HG..... (fig. 169), con lo que resultará un polígono semejante al del terreno (Geom. Teor. 65).

446. **Construccion por el método de rodeo.**—La construccion del plano levantado por este método (424) consiste en la transportacion sucesiva de los lados y de los ángulos (441) del polígono, sirviendo de comprobacion la circunstancia de que el último punto determinado de esta manera coincida con el de partida, en el caso de que el contorno poligonal sea cerrado, á lo cual se llama *cerrar el polígono*; lo que nunca se consigue exactamente sin alterar ligeramente la longitud ó la direccion de al-

guno ó algunos de sus lados. Si la alteracion necesaria para conseguirlo es muy grande, indica que se han cometido errores en las operaciones del terreno ó en la construccion del plano, que será necesario rectificar. Se evita este inconveniente en gran parte por medio de los ángulos de comprobacion (425): en efecto, si suponemos en la medida del lado *bc* (fig. 171) un error cc'' ó cc', por exceso ó por defecto, que alteraría notablemente la forma del polígono é imposibilitaría el que cerrase, construyendo en c'' ó c' un ángulo igual al *acb* medido en el terreno, no habria mas que tirar por *o* una paralela á $o^{IV}c''$ ó á $o'''\,c'$, para determinar con mayor aproximacion el punto *c*.

447. Para la construccion de que nos ocupamos pueden seguirse varios métodos cuando se ha hecho uso de la brújula. Consiste uno de ellos en elegir un punto A (fig. 170) para designar el punto de partida, trazar por él una recta cualquiera que represente la direccion de la meridiana, indicando por una punta de flecha el extremo de esta que representa el norte: colocar despues un transportador *graduado en sentido contrario* al del limbo de la brújula, de modo que su centro coincida con el punto A, y que la division 0° se halle en un punto de la meridiana y á la parte norte de esta última, y señalar el punto que marca en la graduacion del transportador el rumbo 171° 15′, cuyo punto determina con el A la direccion del lado AB del polígono. Tomando despues la magnitud de este lado con arreglo á escala, y tirando por su extremo B una paralela á la primitiva meridiana, se construye del mismo modo que *r* el rumbo $r' = 138°\ 30'$, continuando así hasta cerrar el polígono. Puede conseguirse otro procedimiento más conforme con la manera de operar en el terreno con la brújula, y empleando un transportador dividido tambien en el mismo sentido que el limbo de este instrumento: para lo cual se le dispone de manera que hallándose su centro en A coincida con la parte norte de la meridiana la graduacion que señale el rumbo conocido 171° 15′, con lo que el cero de la misma graduacion determinará con A la direccion de AB.

448. Los errores que pueden cometerse y acumularse en el paralelismo de las meridianas sucesivas, se aislan y se disminuyen notablemente disponiendo el transportador de graduacion inversa en medio del papel que ha de contener al plano y de modo que su centro coincida con un punto marcado préviamente en él: señalando con lápiz el que marca la graduacion *cero* y determina la direccion de la meridiana, así como los que corresponden á los distintos rumbos obtenidos en las operaciones sobre el terreno, y escribiendo al lado de cada punto el valor angular á que se refiere, las rectas tiradas del centro á estos puntos señalarán los distintos rumbos, que pueden trasladarse por paralelas á los vértices A, B, C.... La meridiana puede serlo igualmente al paraje en el cual se quiera que aparezca trazada en el plano. Este método es preferible al que primeramente hemos dado á conocer.

449. Los errores de desviacion angular tienden á acumularse por la construccion sucesiva de los ángulos (441); por lo que en la práctica se prefiere deducir por el cálculo los rumbos de los diferentes lados del polígono, y aplicar cualquiera de los procedimientos empleados para construir los

planos levantados con la brújula (447). Por otra parte, cuando solo se conocen estos rumbos, puede necesitarse saber los valores de los ángulos que las líneas arrumbadas forman entre sí. Uno y otro problema se resuelven fácilmente con el auxilio de fórmulas que pasamos á deducir.

Supongamos conocidos los ángulos ABC, BCD.... (fig. 177) así como el rumbo r del lado AB, necesario para la orientacion del plano, y tratemos de hallar el r' del lado BC: tendremos desde luego

$$r' = 360^\circ - m'' = 360^\circ - (ABC - m') = 360^\circ - (ABC - m),$$

y como se tiene tambien $m = r - 180^\circ$, sustituyendo en la expresion anterior, y ejecutando las operaciones sucesivamente indicadas, se obtiene la fórmula general

$$r' = r + 180^\circ - ABC \qquad [13],$$

la cual nos servirá para hallar el valor de cualquier rumbo, conocido que sea el de la línea anterior y el valor del ángulo de direccion que las dos forman entre sí.

Recíprocamente, conocidos todos los rumbos, se tendrá para el ángulo en B, suma de m' y m'', observando que es $m' = r - 180^\circ$ y $m'' = 360^\circ - r'$, que bastará sumar estos valores y hacer las reducciones que se presenten, para obtener la fórmula general,

$$ABC = r + 180^\circ - r' \qquad [14],$$

la cual da á conocer que para hallar el valor del ángulo de direccion B, se sumará con el rumbo r de la línea AB de la izquierda del observador colocado en el vértice del ángulo la cantidad 180°, y de esta suma se restará el valor del rumbo r' de la línea BC de la derecha. Cuando se obtenga un rumbo negativo, se hallará el positivo correspondiente añadiendo al primero 360°.

Las fórmulas [13] y [14] que acabamos de hallar, pueden comprobarse aplicándolas á los valores numéricos de los ángulos y rumbos del polígono ABC..... (fig. 170), numéricamente conocidos.

450. **Construccion por intersecciones.**—Trazada la línea homóloga de la base de un polígono determinado por el método de las intersecciones, bastará construir en sus extremos y en el punto ó puntos de comprobacion si los hay, los ángulos ó los rumbos de las rectas que han de representar la direccion de las visuales, empleando para ello procedimientos análogos á los indicados para el método de rodeo, y las intersecciones respectivas de las visuales darán los vértices homólogos de los determinados del mismo modo en el terreno (427).

451. **Construccion por doble interseccion.**—Se hallará como en el método de rodeo la direccion del lado bc (fig. 171), y construyendo en uno cualquiera c'' de sus puntos el ángulo $bc''r$ igual al bca medido en el terreno, no habrá mas que tirar por a una paralela á rc'' para determinar el vértice c (429).

452. Fácilmente se comprenderá despues de lo expuesto la construccion de los planos por el método de radiacion, la de los detalles y transversales, y la aplicacion á los planos de las poblaciones y edificios (430 y siguientes).

453. **Replanteo de los planos.**—La reproduccion de los puntos notables de un plano en el terreno, no puede ofrecer dificultad en cuanto á la manera de proceder á ejecutarle, conocidas las operaciones de su levantamiento y construccion: consiste en reproducir con la cadena y los goniómetros las operaciones ejecutadas sobre el papel con la escala y el transportador; y tan solo debe tenerse presente la marcada y desfavorable influencia que los errores cometidos en la apreciacion gráfica de los elementos geométricos ejercen al ser trasportados al terreno (440). Para atenuar en lo posible los errores, debemos preferir el hacer uso de los valores numéricos obtenidos en las operaciones del levantamiento, y empezar por determinar y comprobar por cuantos medios estén á nuestro alcance, las posiciones de varios puntos principales en toda la extension que han de comprender las operaciones del replanteo, á los cuales deben referirse las de todos los demás puntos; para lo cual será muy conveniente dividir en varios trozos el trabajo á fin de poder determinar más fácilmente las posiciones relativas de los comprendidos en cada uno de ellos, y comprobarlos por las relaciones que los diferentes trozos guarden entre sí y con los puntos principales préviamente elegidos.

LIBRO TERCERO.

Nivelacion.

CAPITULO PRIMERO.

Ideas generales

454. **Definiciones.**—Se da el nombre de *Nivelacion* á la parte de la Topografía que tiene por objeto (77) hallar la diferencia de alturas de dos ó más puntos del terreno respecto á una superficie dada, que se designa con el de *superficie de nivel* ó *de comparacion*. Estas diferencias, que se llaman *desniveles*, son las que existen entre las *cotas* ó alturas de los distintos puntos considerados respecto á la superficie de comparacion elegida.

En la hipótesis adoptada para considerar la forma del globo terrestre (3) las superficies esféricas concéntricas con la de la tierra son *superficies de nivel*, que la naturaleza nos presenta en los lagos tranquilos, en los mares, si prescindimos de los movimientos causados por los vientos y las mareas, y en general en la superficie de un líquido cualquiera libremente solicitado por la accion de la gravedad. Estas superficies, consideradas en una extension poco considerable, se confunden sensiblemente con el plano tangente á la superficie esférica, el cual puede adoptarse entonces como plano de comparacion (77) al que se refieren las cotas de los diferentes puntos cuya representacion geométrica nos ocupa.

Entre las distintas superficies de nivel, se ha convenido por los geógrafos en elegir como superficie general de comparacion para que los resultados de distintas nivelaciones sean comparables, la del Occéano, considerada en su altura media entre las que corresponden á la mayor y la menor de las mareas vivas, suponiéndola prolongada por debajo de los continentes. El rádio de esta esfera es de 6366200 metros (3).

En este supuesto, la cota del punto A (fig. 178) es su altura A*m* respecto á la superficie occéanica *nsm*. La cota negativa de un punto B sería la distancia B*n*. Las cotas á que acabamos de referirnos se pueden materializar concibiendo bajada desde A una plomada de longitud A*m*, ó elevando desde B un flotador acompañado de un cordon B*n*. En Topografía se ha adoptado tambien la misma superficie de comparacion; si bien puede ser esta arbitraria en operaciones aisladas ó de poca importancia.

El desnivel entre dos puntos A y D es la diferencia Am' de sus distancias Am, Ds á la superficie nsm ó á otra cualquiera concéntrica con ella.

455 **Diferencia del nivel aparente al verdadero.**—En virtud de las definiciones que acabamos de establecer, el desnivel de los puntos A y B (fig. 179) de la superficie terrestre es la diferencia BN′ — AN de sus distancias á una superficie cualquiera de nivel NN′; pero no siéndonos posible en la práctica la determinacion de esta superficie, nos valemos del plano tangente NH, en uno de sus puntos N; plano que tenemos medios de obtener (30), pues es el plano horizontal del mismo punto (19). Todos los de la superficie NN′ están *de nivel verdadero* con N; y *de nivel aparente* con el mismo punto los del plano horizontal NH. La vertical de B encuentra á las superficies de nivel verdadero y de nivel aparente en los N′ y H, cuya distancia N′ H es lo que se llama *diferencia de nivel aparente al verdadero*. Designándola por x, puede hallarse su valor en funcion de la distancia horizontal NH $= l$ y del rádio terrestre R, pues se establece fácilmente (Geom. Teor. 76) la proporcion

$$2R + x : l :: l : x,$$

de la cual, suponiendo el primer término igual á 2R, en lo que no hay error de consideracion por excesiva pequeñez de x respecto á 2R, despejando x, y sustituyendo en vez de R su valor numérico, resulta

$$x = \frac{l^2}{2R} = \frac{l^2}{12732400} = 0{,}0000000785 \times l^2 \qquad [1]$$

456. **Error debido á la refraccion atmosférica.**—La elevacion causada por la refraccion atmosférica (117), hace que el punto H observado desde N como de nivel aparente con él, sea la imágen de otro cierto punto M inferior al plano de nivel, y producida por la trayectoria MN, de la cual es NH la tangente al último elemento. El valor de la elevacion MH, á que llamaremos r, varía con la temperatura y el estado higrométrico del aire, y con otras circunstancias, lo que hace que no pueda conocerse exactamente al tiempo de ejecutar las operaciones; pero en nuestros climas y en circunstancias atmosféricas ordinarias se ha deducido de repetidas experiencias que es por término medio la fraccion 0,16 de la diferencia N′H de nivel aparente al verdadero. Se tendrá por lo tanto (455)

$$r = 0{,}16 \times x = 0{,}00000001256 \times l^2 \qquad [2].$$

457. **Correcciones del desnivel entre dos puntos dados.**—Para calcular el desnivel exacto BN′ —AN (455) entre los puntos A y B (fig. 179), será necesario medir directamente la altura AN y deducir por el cálculo la BN′, para la cual se tiene

$$BN' = BM + MH - HN' = BM - (HN' - MH),$$

y hallando la diferencia entre los valores [1] y [2] de HN′ y de MH, será por último

$$BN' = BM - 0{,}0000000 \times l^2,$$

y restando AN de ambos miembros

$$BN' - AN = BM - AN - 0{,}000000066 + l^2 \qquad [3]$$

Esta fórmula presenta reunidas en una sola las correcciones de los errores cuya existencia hemos dado á conocer (455 y 456), bastando medir en cada caso la distancia horizontal que separa las verticales de los puntos dados, para multiplicar su cuadrado por el número constante 0,000000066, y restar este producto de la diferencia de alturas realmente obtenidas AN y BM.

458. **Casos particulares.—Correccion nula y correccion parcial.**—Cuando el plano de nivel aparente HN (fig. 180) es tangente en un punto N equidistante de las verticales de A y B, resulta N′H′ = N″H por ser diferencias entre oblícuas iguales y rádios de un mismo círculo, asi como tambien H′M′ = HM, fracciones iguales (456) de N′H′ y N″H; luego el desnivel exacto entre A y B será (457)

$$BN'' - AN' = BM - AM',$$

diferencia de las alturas observadas desde N.

459. Si el plano tangente se halla entre los puntos A y B, pero no equidista de ellos, hay necesidad de aplicar la fórmula [3]; observando tan solo que en vez de la distancia total entre ambos se debe sustituir por l la diferencia de las que median entre el punto de tangencia y los A y B.

460. **Tabla de correccion.**—Por medio de la fórmula [3] se ha calculado una tabla, que insertamos á continuacion, la cual da la cantidad en que ha de disminuirse para un valor dado de l el hallado para la diferencia de alturas de los extremos de esta distancia.

Para hacer aplicacion de la tabla, supongamos que hemos hallado los valores AN = $0^m{,}758$; BM = $5^m{,}346$ y $l = 1800^m$; buscando en la segunda columna de las tablas el valor correspondiente al número 1800 de la primera, se tendrá para el desnivel z entre A y B (fig. 179),

$$z = 5{,}346 - 0{,}758 - 0{,}214 = 4^m{,}374.$$

Observando la tabla se ve que cuando la distancia no llega á 120^m, el error es inferior á un milímetro, límite de las alturas apreciables por los medios que ordinariamente se emplean en las operaciones de *nivelacion*.

461. **Division de la nivelacion con respecto á los procedimientos que se emplean para obtener los desniveles.**—El desnivel entre dos puntos puede determinarse:

1.° Por sus distancias á un plano horizontal.

2.° Por la pendiente y la longitud de la recta que los une.

3.° Por observaciones hechas con los instrumentos de Física llamados *barómetro* y *termómetro*.

TABLA

para la correccion de los errores debidos á la diferencia de nivel aparente al verdadero, y á la refraccion atmosférica.

Distancias 1	Altura del punto observado sobre el nivel verdadero 2	Distancias 1	Altura del punto observado sobre el nivel verdadero 2
m	m.	m	m.
0	0,0000	780	0,0401
20	0,0000	800	0,0422
40	0,0001	820	0,0444
60	0,0002	840	0,0465
80	0,0004	860	0,0488
100	0.0007	880	0,0511
120	0,0009	900	0,0534
140	0,0013	920	0,0558
160	0,0017	940	0,0583
180	0,0021	960	0,0608
200	0,0026	980	0,0634
220	0,0032	1000	0,0660
240	0,0038	1100	0,0798
260	0 0045	1200	0,0950
280	0,0052	1300	0,1115
300	0,0059	1400	0,1273
320	0,0067	1500	0,1484
340	0,0076	1600	0,1689
360	0.0085	1700	0,1907
380	0,0095	1800	0,2137
400	0,0106	1900	0,2382
420	0,0116	2000	0 2639
440	0,0128	2500	0,4123
460	0,0140	3000	0,5938
480	0,0152	3500	0,8082
500	0,0165	4000	1,0556
520	0 0178	4500	1,3360
540	0,0192	5000	1,6493
560	0 0207	5500	1,9957
580	0,0222	6000	2,3750
600	0,0237	6500	2,7874
620	0,0254	7000	3,2327
640	0,0270	7500	3,7110
660	0,0287	8000	4,2223
680	0,0305	8500	4,7666
700	0,0323	9000	5,3438
720	0,0342	9500	5,9541
740	0,0361	10000	6,5973
760	0,0381		

Atendiendo á estos diferentes procedimientos, la nivelacion se divide en *nivelacion por alturas*, *nivelacion por pendientes*, y *nivelacion barométrica*.

462 Para la *nivelacion por alturas* se emplean los *niveles* y las *miras*. *Nivel* es todo instrumento destinado á proporcionar una recta NH (fig. 179), que girando alrededor de una vertical á la cual es perpendicular, determina con sus distintas posiciones un plano horizontal (19), al cual se refieren en direccion vertical las distancias AN ó BH de los distintos puntos A, B ... que en el terreno se consideran.

Mira es una regla dividida, que puesta á plomo sobre un punto B del terreno da el valor de la distancia BH de dicho punto al plano de nivel NH. En realidad, la distancia obtenida, que se llama *altura de mira*, es la BM determinada por el *punto de mira* M, que aparece como situado en H á causa de la refraccion atmosférica (456).

463 *La nivelacion por pendientes* ó *nivelacion trigonométrica* tiene por objeto hallar el desnivel entre dos puntos dados, resolviendo el triángulo rectángulo ABC (fig. 94), que constituye la recta AB que los une, con la vertical BC del punto más elevado y la horizontal AC del otro, conociendo la pendiente ó inclinacion de AB (Acot. 25) y la longitud de la misma recta ó de su proyeccion horizontal AC. La pendiente puede obtenerse en grados (252); para lo cual se hará uso de cualquiera de los instrumentos de planimetría provistos de limbo zenital, como el teodolito (304) y la brújula descrita (250), que tambien se llama por esta razon *brújula eclímetro* ó *brújula nivelante*; ó bien que tienen un limbo susceptible de disponerse verticalmente, como el círculo repetidor (325) y el grafómetro (287)

Otros instrumentos, llamados *eclímetros*, están destinados exclusivamente á la determinacion de las pendientes por la relacion entre el desnivel BC y la proyeccion horizontal AC (Acot 25). Esta relacion es la tangente trigonométrica del ángulo de elevacion ó depresion correspondiente.

464 **Tabla de reduccion de las pendientes á los ángulos á que corresponden.**—En la resolucion de los problemas de que vamos á ocuparnos, es necesario muchas veces conocer la relacion que expresa la tangente del ángulo de elevacion ó depresion obtenido con un goniómetro de limbo zenital, y otras conviene saber el valor angular correspondiente á la relacion dada por un eclímetro. Esta consideracion nos ha conducido á insertar la tabla que exponemos á continuacion. En la primera columna se hallan las pendientes por ciento, que indican el desnivel 0,^{m}1, 0,^{m}2 ... que corresponde á la distancia horizontal de 100 metros para la linea á que esta pendiente se refiere: la segunda contiene los valores angulares que á las mismas pendientes corresponden expresados con arreglo al límite de apreciacion 20'', que ordinariamente presentan los teodolitos; pudiendo tambien aplicarse á los que solo aprecian minutos, para lo que bastará despreciar los segundos cuando son 20, ó añadir una unidad á los minutos cuando la tabla dá 40.

TABLA

de reduccion de las pendientes á los ángulos á que corresponden.

Pendientes por ciento. 1	Angulos á que corresponden 2.	Pendientes por ciento. 1	Angulos á que corresponden. 2.
0,1	0° 3′ 20″	1,8	1° 2′ 0″
0,2	0 7 0	2,0	1 8 40
0,3	0 10 20	3,0	1 43 0
0,4	0 13 40	4,0	2 17 20
0,6	0 20 40	5,0	2 51 40
0,8	0 27 40	6,0	3 26 0
1,0	0 34 20	7,0	4 0 20
1,2	0 41 20	8,0	4 34 20
1,4	0 48 0	9,0	5 8 40
1,6	0 55 0	10,0	5 42 40

Para hallar el valor de una pendiente, 2,7 por ejemplo, que no esté en las tablas, se establece la relacion

$$\frac{2,7}{100} = \frac{\text{tang } x}{r}$$

siendo x el ángulo que se busca y r el radio de las tablas: tomando logaritmos, se tendrá

$$\log. \tan. x = 10 + \overline{2},4313638 = 8,4313638 ,$$

que en las tablas de Callet corresponde á un ángulo de 1° 32′ 48″, y que atendiendo á la apreciacion del instrumento cuando es de 20″ se marcará en él por 1° 32′ 40″; y por 1° 33′ en el caso más general de apreciacion, considerado anteriormente (157).

CAPITULO II.

Instrumentos de nivelacion.

465. **Mira de corredera ó de tablilla**. Está formado este instrumento de dos reglas de madera a y b (fig. 181), la primera de las cuales puede deslizarse á todo lo largo de la otra, en virtud de los cortes por que están enlanzadas, que permiten este movimiento y están representados por las porciones a' y b' en la seccion trasversal s de la regla total. Se sujetan ambas reglas por medio del tornillo de presion t', que tiene su tuerca en la pieza metálica c' unida invariablemente á la regla a. Cuando esta regla se halla en el punto más bajo de su carrera y oprimida contra la otra por medio del tornillo t', ambas constituyen una sola regla, que puede ser recorrida en toda su extension por una armadura metálica c, y detenerse en un punto cualquiera, fijándola por el tornillo t, análogamente dispuesto que el t'. Formando cuerpo con la armadura está la *tablilla* de hierro (m, m'), cuyo frente se presenta dividido en cuatro rectángulos, dos de los cuales, opuestos en sentido de una de las diagonales del rectángulo que constituye la tablilla, están pintados de negro ó de rojo y los otros dos de blanco para dintinguirlos bien á larga distancia, destacar la mira de los objetos que la rodean, y señalar bien las rectas de separacion de los rectángulos y su punto de interseccion, que es el *punto de mira* (462).

466. **Graduacion**.—La cara posterior de la regla b está dividida á partir del pié en metros, decímetros y centimetros, continuando la graduacion en una de sus caras laterales y tambien de abajo arriba. A estas graduaciones corresponden *escalas* de un centímetro dividido en milímetros con el cero en la parte superior, dispuestas convenientemente en las armaduras c y c'.

467. **Uso de la mira**.—Unidas las reglas formando un solo cuerpo como hemos indicado (465), se corre la tablilla hasta que el punto de mira se halle en el plano horizontal determinado por un nivel (462): la altura marcada por el cero de la escala en la armadura c será la altura de mira que se trataba de obtener. La tablilla puede subir así hasta alcanzar una cierta altura, 1,^{m}770 en la que representa la figura, á la cual la detiene un tope, dispuesto en un resorte metálico sujeto á la extremidad superior de la regla a. Cuando esto se verifica, es indispensable que el cero de la armadura inferior c' coincida exactamente con la línea inferior que marca la misma altura en la division lateral de la regla; debiéndose de lo contrario tener en cuenta el error para corregir las alturas de mira cuando se haga uso en lo sucesivo de la escala inferior. Si aun no ha llegado el

punto de mira al plano de nivel, se afloja el tornillo t' y se hace subir á la regla a, cuidando el portamira de oprimir con el pié un estribo metálico que la otra regla tiene en su parte inferior. Llegado el punto de mira á la altura conveniente, se hace la lectura en la escala de la armadura c' siendo de 1,m 961 en la disposicion que presenta la figura. Si el cero de la escala no coincidiese exactamente con una division de la regla, se obtendría el número de milímetros que sería necesario añadir, contando de arriba abajo los que median entre el cero de la escala y la division inmediatamente inferior á él en la regla. En el ejemplo propuesto suponemos que es la primera de la escala á partir del cero (466).

468. **Mira parlante**.—Se compone esta mira de tres cuerpos de caoba a, b, c (fig. 182); el primero, de una altura exacta de 1,m500, recibe en su interior otro segundo cuerpo b, que puede correr á lo largo de él hasta tanto que se verifica el ajuste de un boton, que lleva dispuesto el b por su parte inferior en un resorte metálico, con el taladro circular z que la cantonera superior del cuerpo a presenta en su parte posterior. La porcion de regla que entonces sobresale del cuerpo inferior tiene una longitud exacta de 1, m400: análogamente dispuesto se halla el tercer cuerpo constituido por una regla c, de igual altura que el segundo, alcanzando así una altura total de 4,m300.

469. **Divisiones de la mira**.—La escala métrica de este instrumento se halla grabada en el papel convenientemente preparado y dispuesto en uno de los frentes de las reglas. Las líneas de division que comprenden todo el ancho de la regla señalan una altura exacta de decímetros, cuya lectura se obtiene por el número rojo que se encuentra debajo de la línea y marca los metros, y el negro que está por encima y señala los decímetros. Esta disposicion varía en otras miras; y es conveniente antes de usarlas, penetrarse del sistema de representacion y de la manera de hacer la lectura. Algunas miras presentan invertidas las cifras para usarse con los instrumentos de anteojo astronómico.

Los centímetros que cada decímetro comprende están marcados por rectángulos alternativamente blancos y negros, de manera que leyendo de abajo arriba, los negros ocupan los lugares pares. A la mitad exacta de cada decimetro hay un círculo negro, cuyo centro está á la altura de la línea de separacion de los centímetros quinto y sexto. Respecto á los milímetros se aprecian á ojo, para lo que se necesita alguna práctica. Algunas miras están divididas hasta dobles milímetros por trazos gruesos alternando tambien de blanco y negro, y dispuestos al lado de las divisiones que marcan los centímetros.

470. **Uso y lectura de la mira parlante**.—Puesta verticalmente la mira en el punto cuya distancia al plano de nivel se quiere determinar, procederá el portamira á sacar el segundo cuerpo, si el primero no basta para alcanzar al plano citado; dándole toda su altura, para lo que se tendrá cuidado con el ajuste del boton correspondiente, que tendrá lugar al llegar á la altura conveniente, en virtud de la fuerza elástica del resorte. En caso necesario se hará uso del tercer cuerpo, para lo que será conveniente

introducir el segundo á fin de no separar á la mira de su aplomo, y sacar sucesivamente el tercero y segundo, cuidando siempre del ajuste sucesivo de ambos botones

La division de la mira en que se proyecte el plano de nivel dará la altura pedida, obteniéndose su valor por la lectura de los metros y decímetros que comprenda, y la apreciacion de los centímetros y milímetros. Como ejemplos de lectura, se representan en la figura las alturas siguientes, que corresponden á otras tantas posiciones en que se supone situado el plano de nivel: $m = 0$, $^{m}300$; $n = 0^{m},470$; $p = 0^{m},730$; $q = 1^{m},084$, $r = 1^{m},150$

471. **Niveles —Nivel de perpendículo y límite de su empleo.** —Este sencillo instrumento, descrito ya (23) representado en la figura 7, se emplea para la nivelacion horizontando por él una regla ó un plano (24 y 30) á los que se refieren las alturas de mira (462); pero solo se emplea en operaciones de poca importancia ó cuando se puede operar á muy cortas tiradas En efecto, representando por $S = 0,^{m}001$ la separacion dd' (figura 8), que la plomada puede experimentar respecto de la verdadera bisectriz $ad = l$, por x la distancia horizontal á que puede corresponder un desnivel $D = 0,^{m}01$, que se considera como el error límite de los que pueden tolerarse para la inclinacion de la regla, se tendrá la proporcion

$$S : l : : D : x = \frac{l \times D}{S} = \frac{0^{m},3 \times 0,01}{0,001} = 3^{m},$$

límite de las distancias á que puede operarse sin cometer errores que lleguen á valer un centímetro, suponiendo que la altura ad es la que ordinariamente tiene de tres decímetros.

472 Este nivel N (fig 183) se usa tambien dispuesto de modo que se desliza libremente por la cuerda ab en la cual se apoya por las anillas c, d, e. Cuando el cordon coincide con la línea de fé, los puntos a y b están de nivel entre sí, y las distancias Aa, Bb, marcan las alturas de la horizontal ab sobre los puntos A y B del terreno.

473 **Nivel de agua.** —Se compone de un tubo de hoja de lata ó de laton, encorvado á sus extremos y terminado en ellos por dos frascos de cristal, del mismo diámentro, unidos al tubo por un mastic conpletamente impermeable, constituyendo así lo que en Física se llama un *tubo de brazos comunicantes* En su parte media tiene un mango cónico hueco, que se introduce en la espiga de un trípode ordinario; todo como representa la figura 184 Lleno el tubo de agua hasta unos dos tercios de la altura de los frascos, y libre de aire interpuesto el líquido, para lo cual se inclina el tubo hasta que el agua llene uno de los frascos, que se tapa con el dedo, y se continúa elevando por el otro extremo hasta observar que ha cesado el desprendimiento de las burbujas de aire, las superficies del líquido estarán en un mismo plano horizontal, en virtud de un principio que se demuestra en Hidrostática.

El agua que llena el tubo conviene que esté mezclada con vino para destacar más las superficies de nivel, y en invierno debe contener mayor cantidad de alcohol para evitar la congelacion del líquido.

474. **Errores debidos á la capilaridad y á la diferencia de diámetro de los frascos.**—En virtud de una *accion capilar*, que se estudia en Física, y consiste en la mayor atraccion del cristal para las moléculas más próximas del líquido, las superficies de nivel en vez de ser planas, presentan al exterior superficies cóncavas, que á cierta distancia aparecen como zonas de un cierto espesor, por el cual experimenta la direccion de la visual una indeterminacion que puede llegar á producir en ella un desnivel de un milímetro para la longitud del instrumento, y que aumenta proporcionalmente á la distancia.

El diferente diámetro de los tubos impide que girando ó invirtiendo su posicion se conserve á una altura constante el nivel del líquido. En efecto, cuando los tubos tienen el mismo diámetro, representando por s la seccion del tubo, por a y a' las alturas repectivas de la columna líquida encerrada en cada uno de ellos, y por v, v' los volúmenes, se tendrá desde luego $v = s \times a$ y $v' = s \times a'$; de donde se deduce

$$v + v' = s\,(a + a') \qquad [4];$$

y siendo $v + v'$ y s cantidades evidentemente constantes, tambien lo será la suma de alturas para cualquier posicion del nivel, así como la semisuma de estas alturas, bases en el trapecio que la horizontal del nivel constituye con el tubo y los frascos, y que es la distancia constante del punto medio del mismo tubo de comunicacion al plano de nivel. Cuando por el contrario, el diámetro de los tubos es diferente, varía la indicada suma de las alturas; pues al pasar el tubo de comunicacion de una posicion á otra no se establece el equilibrio necesario sin que parte del líquido pase de un frasco á otro, elevando cuando pasa del de mayor diámetro al otro ó deprimiendo la superficie de nivel cuando sucede lo contrario, en razon á variar tambien la seccion correspondiente á la porcion de tubo que tiene que ocupar; no proporcionando por lo tanto un solo plano horizontal para la comparacion de las alturas.

475. **Uso del nivel de agua.**—Se emplea este instrumento para hallar el desnivel entre dos puntos A y B (fig. 184), poniéndole en estacion en un punto C próximamente equidistante de los puntos dados, sin que sea necesario que este punto corresponda á la alineacion AB, y de la manera que hemos dicho (473), cuidando de que el tubo de comunicacion esté lo más horizontal que sea posible juzgar á la vista, y se le hace girar alrededor de su espiga hasta que los frascos se hallen en un plano vertical con una mira de tablilla colocada en uno de los puntos A. Dirigiendo entonces la visual tangentemente á los anillos formados por las superficies del líquido, se lleva el punto de mira á la altura de la visual, como hemos indicado (467) y se lee el valor de la altura Aa: trasladando la mira á B se obtiene del mismo modo la Bb, y la diferencia

Bb-Aa es el desnivel verdadero entre A y B (458) Cuando C diste muy desigualmente de A y B conviene aplicar la correccion á que nos hemos referido para este caso (459).

476. **Límite del empleo del nivel de agua.**—La indeterminacion de la visual (474) puede producir un error límite e á una cierta distancia x, que se calcula, sabiendo que crece con ella, y que á la semilongitud l del tubo de comunicacion es 0,^{m}001 por la proporcion

$$0{,}^{m}001 : \frac{l}{2} : : e : x = 500 \times e \times l \qquad [5].$$

Suponiendo que el error no ha de pasar de 0,^{m}1 y que la longitud del tubo es 1,^{m}2, resulta $e = 60$ ^{m}, distancia que se considera en la práctica como el límite máximo.

477. **Niveles de aire con anteojo.**—El nivel de aire que construyen en la actualidad los instrumentistas franceses, es el inventado por Mr. Chézy y modificado ventajosamente por Mr. Egault.

Se compone de un anteojo astronómico AB (fig. 185) (135), el cual descansa entre los collares b en que terminan unos soportes fijos á la regla metálica CD, uno de los cuales es susceptible sin embargo de subir ó bajar convenientemente en una cierta cantidad, por medio del tornillo s movido por una llave, haciendo así variable la inclinacion del eje del anteojo con respecto al plano de la regla. El anteojo puede sacarse de los collares y colocarse de nuevo en ellos invertido: para lo cual se aflojan los tornillos b, que permiten girar á unas aldabillas para dar paso al nivel, las que se vuelven á cerrar cuando el anteojo está colocado de nuevo, oprimiendo los tornillos, los cuales no le permiten entonces otro movimiento que el giro alrededor de su eje de figura dentro de los collares. Puede determinarse una de las infinitas posiciones que en virtud de este giro puede ocupar el tubo del anteojo, moviendo el tornilo a, que atraviesa un cilindro ó tambor metálico c fijo al soporte, hasta el tope de su extremo con un prisma saliente invariablemente unido al tubo del anteojo: de esta manera, puede hacérsele volver cuando sea necesario en lo sucesivo á la posicion así determinada, moviéndole hasta que tenga lugar el contacto del prisma y el tornillo.

Sobre la regla CD se halla el nivel n, provisto de su tornillo r de correccion particular é invariablemente unido á ella, y en su parte inferior el eje de rotacion del instrumento, relacionado con una plataforma de tres tornillos t (172), con otro de presion para impedir el giro del instrumento cuando se le aprieta con alguna fuerza. El trípode es el segundo de los descritos (174).

Algunos niveles tienen en vez del tornillo de presion un sistema de tornillos de presion y de coincidencia (152); pero esta disposicion no es absolutamente necesaria, por no ser preciso fijar con exactitud la posicion de la cerda vertical del retículo en el anteojo.

478. **Uso del nivel de aire con anteojo.**—Se emplea de una manera enteramente análoga al nivel de agua (475), horizontado el nivel

como en la brújula (252), y haciendo uso por lo general de la mira parlante.

479. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Centracion de la cerda horizontal.*—Se hace coincidir esta cerda con la imágen de una recta cualquiera, que puede ser la horizontal de la tablilla de una mira, y se continúa como hemos dicho para la centracion del retículo (142) Cuando se hace uso de la mira, se toman las alturas correspondientes á ambas posiciones, se marca la altura media, y se lleva á ella la cerda por el movimiento de los tornillos del retículo.

Puede corregirse tambien la otra cerda del mismo modo, con lo que resultará centrado el anteojo; lo que no es preciso en los niveles, aunque puede ser conveniente para emplear la cerda vertical despues de haberla hecho describir un cuarto de revolucion, en el caso de haberse inutilizado la cerda horizontal.

480. 2.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Es la misma que hemos explicado (253), corrigiendo por los tornillos *t* y por el *r* de correccion particular del nivel.

481. 3.ª *Horizontalidad del eje óptico del anteojo.*—Se ejecuta lo mismo que la verificacion y correcion análogas (309), dirigiendo la visual á una mira colocada á 200 ó 300^m del punto de estacion, y marcando la altura correspondiente á la graduacion que cubre la cerda horizontal del anteojo; sacándole despues de los collares para colocarle de nuevo en ellos invertido, y dando una semirevolucion al instrumento para dirigir la visual á la mira y ver si marca la misma altura Si no, se corrige por la altura media de la mira y el tornillo *s* que mueve el soporte *b* del anteojo.

482. 4.ª *Determinacion de la posicion perfectamente horizontal de una de las cerdas del retículo.*—Se hace girar al anteojo alrededor de su eje de figura dentro de los collares, hasta que la cerda sea horizontal á la vista, y se mueve el instrumento alrededor de su eje de rotacion hasta que el cruzamiento de las cerdas cubra un punto bien determinado: continuando el mismo movimiento, se observa si los demás puntos de la cerda horizontal van cubriendo sucesivamente al punto observado, durante todo el tiempo que permanece en el campo del anteojo, en cuyo caso la cerda será perfectamente horizontàl. Cuando esta circunstancia no se verifique, se moverá el anteojo dentro de los collares en el sentido conveniente, hasta hallar una posicion en la cual la cerda cubra constantemente al mismo punto, fijando esta posicion por el movimiento del tornillo *a* (figura 185) hasta el contacto indicado (477) Conviene asegurarse de este contacto en las observaciones, para tener seguridad en la horizontalidad perfecta de la cerda correspondiente del retículo

483 **Límite del empleo del nivel de aire.**—Sea AC (fig. 11) la regla sobre que está colocado un nivel de aire y mn' la separacion de la burbuja, que suponemos de 0,^{m}001 como límite máximo; la tangente del ángulo c será sensiblemente la razon $mn' : r$, siendo r el rádio b de curvatura del tubo, y la del ángulo $s = c$ tendrá por exprexion $e : x$,

siendo e el error máximo que puede tolerarse en el desnivel y corresponde á una distancia x, cuyo valor se trata de determinar. La igualdad de las razones $mn' : r$ y $e : x$ dará, suponiendo que el rádio r es de 20 metros,

$$x = \frac{r \times e}{0{,}001} = 1000 \times r \times e = 20000 \times e \qquad [6]$$

Dando á e valores sucesivos $0^m,1$, $0^m,01$.... resultarán para x 2000^m, 200^m.... y teniendo en cuenta que el error de desviacion de la burbuja que hemos supuesto es bastante exajerado, en razon á que la simple vista puede apreciar una desviacion mucho menor, y que el radio de curvatura es mayor que 20^m en los niveles que generalmente se emplean, pueden considerarse como exactas las alturas de mira observadas á una distancia de 200^m en las aplicaciones ordinarias de la nivelacion. Este límite da á conocer la indisputable ventaja de este nivel sobre los anteriormente explicados.

Cuando no se conoce el valor del radio r de curvatura del tubo para aplicar la fórmula [6], se le puede hallar midiendo una distancia l de dicho nivel á un punto cualquiera en el que se coloca una mira, y viendo el camino e recorrido por la visual en ella para dos posiciones sucesivas de la ampolla en las que ha dado una separacion $s = mn'$, por la proporcion

$$e : l :: s : r = \frac{l \times s}{e} \qquad [7]$$

484. **Nivel de Dollond.** —El tubo del nivel de ampolla está unido en este instrumento, debido al constructor inglés cuyo nombre lleva, al anteojo terrestre AB (fig. 186), descrito ya (139), por medio de una charnela, que permite variar la posicion relativa del eje óptico del anteojo y el del nivel, moviendo por medio de una pequeña palanca unas roldanas de tuerca, que recorriendo la longitud del tornillo r fijo al tubo del anteojo hacen subir ó bajar la pieza metálica en que termina el del nivel. Tambien en este instrumento puede girar el anteojo con el nivel unido á él alrededor de su eje de figura dentro de los collares en que descansa; y éstos pueden abrirse ó cerrarse con auxilio de las clavijas c, permitiendo así el que pueda sacarse el anteojo de los collares para colocarle de nuevo en ellos invertido.

El eje del anteojo puede variar de inclinacion con respecto á la regla CD en que se elevan los soportes b, por medio de las roldanas de tuerca y el tornillo s.

La regla CD se ensancha en su parte media para dar cabida á una brújula pequeña a dividida en grados, y cuya línea norte-sur se halla en direccion de la longitud de la regla. La parte descrita se une al trípode (175) por medio de una plataforma de cuatro tornillos t (169).

Para hacer uso de las roldanas y los tornillos r y s, se afloja la tuerca superior, se da movimiento á la inferior hasta lograr la posicion que se desee, oprimiendo entonces ambas tuercas para conservarla. En vez de las roldanas *s*, tienen algunos niveles un tornillo que se pone en movimiento por medio de una llave, ó bien que tiene cabeza fija; esta última disposicion es la más desventajosa por la facilidad con que al operar puede tocarse á la cabeza del tornillo y descorregir el instrumento.

485. *Uso del nivel de Dollond.*—Es el mismo que el del nivel de Chézy (478), horizontando la ampolla en direccion de dos tornillos de la plataforma, colocándole despues en la direccion de los otros dos y horizontándole por ellos, y continuando así hasta que en ambas posiciones la ampolla marque la horizontalidad.

486. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Centracion del anteojo.*—Es la explicada (479).

487. 2.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Se sigue el procedimiento que hemos dado á conocer (253) colocando el nivel en direccion paralela á dos tornillos opuestos de la plataforma, dándole una semirevolucion, y haciendo desaparecer la desviacion que la burbuja haya podido experimentar, mitad por el tornillo *s* (fig. 186) y mitad por los mismos de la plataforma, hasta que desaparezca toda desviacion: dándole despues un cuarto de revolucion y horizontándole por los otros dos.

488. 3.ª *Horizontalidad de la visual.*—Se ejecuta del modo indicado (481), empleando para la correccion el mismo tornillo *s* que en la anterior. Como en este movimiento la ampolla habrá variado, se la horizonta de nuevo por su tornillo *r* de correccion particular, y en caso necesario se hace que su eje sea exactamente paralelo al eje óptico del anteojo por los tornillos laterales de correccion del nivel (309).

489. **Nivel de Troughton.**—El tubo *n* (fig. 187) de la ampolla de aire está empotrado invariablemente en el del anteojo, el cual descansa sobre unos soportes que se apoyan en la regla metálica *c*. La inclinacion del eje del anteojo respecto á esta regla puede variar por medio de un doble sistema de tres tornillos *s*, dispuesto á la parte inferior de cada uno de los soportes, al cual se hace subir ó bajar moviendo los tornillos laterales del sistema correspondiente, despues de haber aflojado el del centro, que se vuelve á apretar para fijar la posicion del sistema cuando se ha colocado el soporte á la altura conveniente. Para el uso de los tornillos *s* es preciso dejarlos al descubierto, separando una armadura metálica, que los cubre con objeto de librarlos de algun golpe que pudiera descorregir el instrumento.

Una brújula *b* descansa sobre cuatro columnas en la regla *c*, la cual se une á la plataforma de cuatro tornillos *t* por medio de una roldana *m*, que girando independientemente de la plataforma á que está unida, permite á una rosca que forma cuerpo con ella el que se atornille en la tuerca fija en una pieza metálica *a*, que en su mitad tiene la regla *c*.

El pequeño tubo que lleva la lente ocular puede ser reemplazado por otro, el cual tiene esta lente en su parte superior y un espejo inclinado 45° al horizonte: esta disposicion hace aparecer á la mira situada horizontalmente (112) y vista de arriba abajo, lo cual hace más cómodas las observaciones.

490 **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Que el eje de rotacion sea vertical.* —Se ejecuta de la manera que hemos dado á conocer (487), corrigiendo en caso necesario la posicion de la burbuja por los tornillos *s* y los de la plataforma.

491 2.ª *Que la visual sea paralela al plano horizontal descrito por el eje del nivel.* —Se coloca el nivel en un punto que equidiste exactamente de otros dos A y B (fig. 188), y hallando las alturas de mira en estos puntos, su diferencia será el desnivel exacto $Ap = d$, aun cuando la visual esté muy inclinada al horizonte, lo que se demostraría de un modo análogo al empleado (458) para el error de la refraccion y de la diferencia de nivel aparente al verdadero. Conocido este desnivel, se pasará á hacer estacion en otro punto D lo más cerca del B que sea posible, en atencion á que pueda leerse claramente con el anteojo la altura de mira Bm, dada por la visual que suponemos inclinada segun cm; tomando despues la altura An de la otra mira, se observa si la diferencia de las alturas An y Bm es igual á d, en cuyo caso la visual sería horizontal. Pero si no sucede así, como en el que nos ocupa, añadiendo á la altura Bm el desnivel Ap, se obtiene la altura An' de la horizontal que pasa por m; y moviendo los tornillos del retículo hasta que la mira señale esta altura, la visual habrá tomado la posicion cn', que se acerca más que cn á la horizontal del punto c. Dirigiendo de nuevo la visual á la mira más próxima se tendría la altura Bm', y añadiéndola el desnivel d se obtendría para la correccion del rectículo la altura Ar de la horizontal que pasa por m'; llevando la visual á r por los tornillos del retículo, se acercaría más que antes á la horizontal de c, y al cabo de algunos tanteos, la diferencia de alturas sería igual al desnivel dado, con un error menor que el límite de apreciacion de las alturas de mira, en cuyo caso la posicion de la visual estará corregida. Conviene que la mira A se halle todo lo distante que permita el alcance del anteojo.

Cuando se puede disponer de una tabla de aguas tranquilas, como un estanque grande, un lago .... se clavan dos ó tres estacas de modo que queden sus cabezas á flor de agua, determinando así una línea horizontal, á la que puede referirse la correccion del nivel. En efecto, colocando miras sobre las estacas y disponiendo el instrumento en estacion á desiguales distancias de ellas, se corrige la posicion de la cerda horizontal del retículo por medio de sus tornillos, empleando tanteos análogos á los que hemos indicado en el método precedente, hasta lograr que marque iguales alturas en las miras.

492 **Nivel de reflexion.**—Este sencillo instrumento, debido á Mr. Burel, se compone de un espejo e (fig. 189), azogado por las dos caras en su mitad de la izquierda, barnizada la de la derecha en una de ellas de negro y en la otra de rojo para distinguirlas, y dispuesto en una armadura metálica c. Esta armadura termina por su parte inferior en una varilla y el perpendículo p, que tiene la forma de un tronco de cono cortado por un

diano en uno de sus lados, la cual permite variar la posicion del centro de gravedad del peso *p*, haciéndole subir ó bajar á lo largo de la varilla, que termina con este objeto en una rosca; para lo cual se aflojan los tornillos *t*, apretándolos despues que se ha dado á *p* la posicion conveniente. El tornillo *s* puede hacer ligeramente variable la inclinacion del espejo relativamente á la armadura.

La parte que hemos descrito del instrumento puede girar alrededor de un eje fijo á la armadura, y cuyos estremos se apoyan en una caja cilíndrica de metal. Esta caja es interior y de seccion concéntrica con la *ab*, la cual está dividida en dos partes: la inferior *b*, que se halla invariablemente unida á la interior, y la superior *a*, que se tiene en la mano durante las observaciones, y que puede ir provista de una anilla para suspender el instrumento de un caballete. Fija la parte *a*, la *b* puede girar 180° alrededor del eje de figura comun de las cajas, llevando consigo al eje de la armadura y á los espejos, los cuales pueden así presentarse alternativamente á la vista del observador. El giro de 180° está determinado por lo que permite la disposicion de la ranura y el tope del tornillo que se ven en *r*.

Para evitar la accion del viento sobre el perpendículo, se atornilla á la caja *b* otra que le recubre, cerrada por su extremo inferior, quedando sólo descubierto entonces del espejo *e*. Para el transporte se le cubre por medio de una tapa cilíndrica que se corre moviendo la roldana en que termina por su parte superior la caja *a*.

493. *Uso del nivel de reflexion.*—Suspendida de un caballete la parte *a* de la caja cilíndrica ó teniéndola en la mano, de modo que obre libremente el peso *p*, el espejo *e* toma la posicion vertical. Colocándose delante de él el observador de modo que vea directamente una mira colocada en el punto cuyo desnivel con el de estacion se trata de determinar, al mismo tiempo que la imágen *o′* (fig. 190) de la pupila *o* de uno de sus ojos, causada por la reflexion en el espejo, hará subir ó bajar la tabla de la mira hasta que el punto de mira *m* esté en la recta determinada por los puntos *o* y *o′* La diferencia entre la altura de mira observada y la distancia vertical de *o* al punto de estacion será el desnivel buscado. En efecto, la recta *oo′* perpendicular al plano del espejo (112), que es vertical por hipótesis, será una horizontal (40).

En la práctica se halla el desnivel entre dos puntos haciendo estacion en otro cualquiera, desde el cual se observan como hemos dicho las alturas de mira correspondientes á los primeros: la diferencia de estas alturas será el desnivel entre ellos.

494. *Verificacion y correccion.*—El uso de este instrumento exige que cuando el perpendículo obre libremente, el espejo sea perfectamente vertical: lo que tendrá lugar cuando despues de haberle hecho girar 180°, la visual vaya á parar al mismo punto de mira *m* que en la primera posicion; variando en caso contrario la posicion del espejo hasta que se verifique esta circunstancia: lo que puede conseguirse en parte por el tornillo *s* (figura 189); pero es preferible hacer toda la correccion por el movimiento

del peso como hemos indicado (492), apretando despues los tornillos t para fijar la posicion del espejo

495. **Eclímetros.—Eclímetro de perpendículo.**—Es el nivel de perpendículo que hemos citado (471), y cuyo travesaño está dividido en partes iguales, cada una de las cuales es la centésima parte de la distancia bn (fig. 191) comprendida entre el punto b y el medio n del travesaño. Este instrumento se corrige como el nivel de perpendículo (217), llevando en cuenta el error de que puede llegar á estar afectado por el uso

Para hallar la pendiente de una recta AB se le dispone sobre ella como el nivel de perpendículo, y se observa el número de divisiones que señala la parte nr del travesaño comprendida entre el cero n de la graduacion y la division r que coincide con el cordon del perpendículo.

La semejanza de los triángulos rectángulos ABC, brn, que tienen el ángulo b igual al B (24), da la relacion

$$\frac{AC}{CB} = \frac{nr}{bn} = \frac{nr}{100}. \qquad [8].$$

Así, cuando nr comprende 1......2......3 ...... divisiones, la pendiente de AB será de 1...... 2...... 3...... por 100.

496. **Eclímetro de pínulas.**—Este instrumento está formado de una regla metálica CD (fig. 192), que termina por pínulas P, P′ perpendiculares á ella, y lleva un nivel provisto de su tornillo t de correccion particular. Está unida la regla á un trípode ordinario por medio de una plataforma de resortes (171), sirviendo los tornillos proyectados en h para establecer la union entre esta plataforma y la regla. Cada una de las pínulas está provista de una abertura cuadrada con dos cerdas que se cruzan á ángulo recto, y de un taladro cónico ó esférico, que da paso á la luz por un agujero de muy pequeño diámetro. Este agujero y el cruzamiento de las cerdas, deben estar á la misma altura en ambas pínulas con respecto á la cara superior de la regla del instrumento, para lo cual se disponen en una de ellas P en un tablero móvil á lo largo de la pínula, por el juego de un tornillo s y de un resorte en espiral: la otra pínula P′ es mucho más elevada y está formada por un bastidor fijo a (fig. 193), dentro del cual puede subir y bajar con movimiento rápido el tablero T cuando se afloja el tornillo de presion z, y se pone en movimiento el tablero cogiéndole por el boton d. Apretando el tornillo z forma cuerpo el tablero con el cilindro b, y haciendo girar á la cabeza de tornillo x, el cilindro sube ó baja con movimiento lento por la rosca c llevándose consigo al tablero.

497. *Graduaciones del instrumento.*—El larguero de la derecha del bastidor a está dividido con arreglo al metro, y el de la izquierda se refiere á toesas. La unidad en la division métrica tiene una altura de 3,^{mm}25, que es la centésima parte de la longitud 0,^{m}325 de la regla CD (fig. 192) contada entre los planos exteriores de las pínulas, y está dividida en dos partes, siendo por lo tanto de $\frac{1}{2}$ por 100 la menor division de la escala,

Para evitar confusion solo se enumeran generalmente las divisiones correspondientes á los números pares de unidades, como indica la figura 193.

El nonius *m* que lleva el tablero T se ha formado de cuatro de las menores divisiones de la escala y se ha dividido en 5 partes iguales, apreciando por lo tanto, $\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{10}$, ó décimas partes de la unidad (162 — 1.º). Las pendientes podrán apreciarse por la relacion entre un número de unidades y décimas de unidad y el número constante 100. La apreciacion de la pendiente en la posicion m' del nonius será de $17^m,2$ por 100, siendo la division 2 del nonius la que coincide con una de las de la escala. En la posicion m'' la pendiente será de 24,7 por 100, apreciando las décimas por la media division comprendida entre la division 24 de la escala y el cero del nonius, aumentada con las 2 décimas que da la coincidencia de su cero con una de las divisiones de la escala.

498. **Verificaciones y correcciones**.—1.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento*.—Es la que hemos indicado (480), corrigiendo por el tornillo *t* (fig. 192) y los de la plataforma.

499. 2.ª *Horizontalidad de la visual cuando coincide el cero del nonius con el cero de la escala.*—Se establece la coincidencia exacta de los ceros, y se emplea en la verificacion y correccion el método expuesto (481), corrigiendo por el solo movimiento del tornillo *s* de la pínula pequeña.

500. **Uso del eclímetro de pínulas**.—Se coloca el instrumento en estacion (252) en el punto A (fig. 194), despues de haberle corregido perfectamente, y de modo que el ocular de la pínula menor se halle próximamente en la vertical del mismo punto, y se lleva la mira al punto B con la altura $Bm = Aa$, moviendo el tablero de la pínula mayor como hemos indicado (496) hasta que la visual vaya á parar exactamente al punto de mira *m*, observando despues la altura *cb* marcada como hemos dicho (497) por el cero del nonius en la pínula grande. Los triángulos rectángulos semejantes *acb*, ACB (252) darán la proporcion

$$ac : cb :: AC : CB,$$

en la que *ac* es el número constante 100; *cb* la lectura observada en la graduacion de la pínula grande; AC la proyecion horizontal de AB, y CB el desnivel que se busca.

Cuando se trata de una pendiente bajando, la operacion se hace del mismo modo, sirviendo de ocular la pínula grande.

CAPITULO III.

Nivelacion por alturas

501. **Generalidades**.—Hemos visto en el uso de los distintos niveles, que el desnivel entre dos puntos se obtiene por una sola estacion del instrumento, cuya manera de operar toma el nombre de *nivelacion simple*; pero cuando el mucho desnivel ó la gran distancia que media entre los puntos que se consideran, obliga á obtenerle por una série de estaciones simples, recibe la operacion el de *nivelacion compuesta*.

Las estaciones diferentes que constituyen una nivelacion compuesta, se distinguen entre sí por un número de órden, que se refiere á aquel en que han tenido lugar. A cada estacion se refieren asimismo todas las operaciones que en ella hayan sido ejecutadas.

502. **Marcha que se sigue en las operaciones de la nivelacion compuesta**.—Para hallar por medio del nivel de perpendículo (471) ó por el nivel sencillo de aire (25) el desnivel entre dos puntos A y D (fig. 119), bastará horizontar por su medio un reglon Ab en el punto de partida, y en las posiciones sucesivas Bc, Cd, y medir con auxilio de otro reglon vertical ó de la cinta las alturas Bb, Cc, Dd, cuya suma dará el desnivel AA′ que se trataba de conocer.

503. Haciendo uso para la resolucion de este problema del nivel de agua ó de los de anteojo, se hará estacion en un punto M (fig. 195. Lám. 10), colocando una mira en el A de partida y otra en un nuevo punto B, cuyo desnivel con A pueda hallarse por medio de una nivelacion simple. La diferencia de alturas a y a' dará el desnivel entre A y B. Trasladando el instrumento á otro punto de estacion N, se observarán del mismo modo las alturas b y b' correspondientes al punto B y á otro C elegido con relacion á B con las mismas condiciones que este con respecto á A en la primera estacion. Así se continuará, tomando desde cada punto de estacion del instrumento la altura correspondiente á la última mira colocada en la estacion anterior y la de otro nuevamente elegido, hasta llegar á una estacion Q, en la que el punto que en ella ha de elegirse pueda ser el E, cuyo desnivel con el de partida se pretende hallar.

Observando la marcha que acabamos de indicar, notaremos que á cada estacion corresponden dos alturas de mira, una de las cuales está tomada dirigiendo la visual á la mira que el observador ha dejado á su espalda para buscar el punto en que ha hecho estacion, y otra que corresponde á un nuevo punto, que elige para colocar la mira segunda en la direccion de aquel en que la operacion ha de terminar. La primera se denomina en la práctica *mira de espalda ó nivelada atrás*; la segunda *mira de frente ó nivelada adelante*. Se ve por lo tanto que las alturas a, b, c, d, que ocupan los lugares impares en el sentido AE en que suponemos ejecutada la operacion son niveladas atrás; y niveladas adelante las a', b', c', d', de lugar par. Tambien pudieran llamarse *niveladas primeras ó primeros términos* á las alturas de mira de lugar impar, y *niveladas segundas ó segundos términos* á las de lugar par.

La diferencia de nivel que resulta de cada estacion ó de cada nivelacion simple de las que constituyen una nivelacion compuesta, se halla siempre por la diferencia aritmética entre las alturas de mira correspondientes.

504. Para relacionar entre sí estas diferencias de manera que podamos obtener fácilmente y siguiendo una regla general el desnivel entre los puntos dados, supondremos que el punto de partida es el más bajo, y llamaremos tambien *diferencias subiendo* á aquellas en que la mira de espalda sea mayor que la de frente, como sucede á las que corresponden á las estaciones M y Q, en las que el terreno sube yendo de A á E, que es el sentido en que suponemos ejecutada la operacion; y *diferencias bajando* á aquellas en que se verifique lo contrario, como en las estaciones N y P.

Hechas estas hipótesis, si todas las diferencias fuesen subiendo, es evidente que sumándolas encontraríamos la diferencia total; y que en el caso de hallar una diferencia bajando, habrá que restarla de la suma ya obtenida.

Así, el punto B estará más elevado que A en una cantidad igual á la diferencia $a-a'$ de las alturas observadas en la primera estacion; el punto C más bajo que B en la diferencia $b'-b$, y más elevado que A en la cantidad

$$(a-a')-(b'-b)$$

Desde la estacion P se observará que el punto D está más bajo que C en la diferencia $c'-c$, y como C estaba más alto que A en una cantidad igual á $(a-a')-(b'-b)$, D respecto de A estará más alto en la cantidad

$$(a-a')-(b'-b)-(c'-c).$$

En la estacion Q en que podremos observar la mira d' en el punto E en que ha de concluir la operacion, tendremos que estando E más alto que D la cantidad $d-d'$, y habiendo visto que D está más alto que A en la

$$(a-a')-(b'-b)-(c'-c),$$

E estará más alto que A en la

$$(a-a')-(b'-b)-(c'-c)+(d-d'),$$

que será el desnivel que buscamos.

Verificando las operaciones algébricas indicadas en esta expresion, se tendrá sucesivamente

$$a-a'-b'+b-c'+c+d-d';$$
$$(a+b+c+d)-(a'+b'+c'+d');$$

pero $a + b + c + d$ es la suma de las miras de espalda, y $a' + b' + c' + d'$ la de las miras de frente; luego *la diferencia de nivel que existe entre los puntos extremos de una nivelacion compuesta se obtiene hallando la suma de las miras de espalda, así como la de las miras de frente, y restando la segunda de la primera.*

Si la primera suma es mayor que la segunda, la diferencia será positiva, é indicará que el punto E está más alto que el de partida A, conforme á la hipótesis hecha para establecer la relacion que resuelve el problema.

Si las sumas son iguales, A y E serán puntos de nivel.

Si es mayor la segunda, la diferencia es negativa, é indica que el punto de término está más bajo que el de partida.

505. **Acotacion de los puntos del terreno.**—Para referir las alturas de los puntos del terreno á un *plano de comparacion* (Acot.—4), se sigue la marcha que acabamos de indicar para la nivelacion compuesta, teniendo en cuenta que es preciso colocar la mira en todos aquellos puntos cuya cota se quiere conocer, aun cuando así no lo exigiera la marcha establecida para la resolucion del problema general; y anotar cuidadosamente cada uno de estos puntos, para no confundir las cotas que han de corresponderles.

Halladas las alturas de mira a, a', b, b'.... (fig. 195), siendo A, B, C ... los puntos cuyas cotas tratamos de determinar, la cota que corresponde al punto de partida A es en general arbitraria, y conviene elegirla de manera que el plano de comparacion pase por debajo ó por encima de todos los puntos del terreno que tratamos de acotar, con objeto de que todas las cotas resulten de un mismo signo (Acot.—7). Bastará para conseguirlo asignar al punto A una cota mayor que la diferencia calculada, ó que se juzgue debe haber entre este punto y el más bajo, en caso de que el plano de comparacion haya de ser inferior á los puntos dados. Cuando hubiese de ser superior á ellos, se tendría en cuenta el desnivel de A con el más elevado. Si en el curso de las operaciones resultase una cota negativa, se obviaría este inconveniente añadiendo á todas las cotas ya calculadas una misma cantidad, que para mayor facilidad debe ser un múltiplo de 10.

Otras veces el plano de comparacion está dado por las condiciones del problema, como cuando las cotas han de referirse al nivel del mar (454).

Sea AA′ la cota arbitraria del punto de partida. Para hallar la que corresponde al punto B, tendremos la expresion

$$BB' = AA' + BF;$$

y para los siguientes:

$$CC' = BB' - BG; \; DD' = CC' - CH; \; EE' = DD' + EL.$$

Observando estas expresiones, deduciremos que *para hallar la cota de un punto cualquiera no hay más que añadir á la cota del punto anterior ó restar de ella el desnivel que existe entre ambos puntos, segun que este desnivel resulte subiendo ó bajando en el sentido de la marcha de la operacion.*

506. **Cróquis y registro de la nivelacion.**—El *croquis* de la nivelacion consiste en dibujar á mano para cada estacion una línea de derecha á izquierda, que representa la horizontal del nivel, y tirar por sus extremos perpendiculares que representárán las alturas de mira; estas perpendiculares se cortan por una recta inclinada en el mismo sentido que la que representa del terreno. Las alturas de mira observadas se anotan al lado de las líneas que las representan y en el órden con que se han obtenido; resultando para cada mira dos alturas, de las cuales la de la izquierda es la altura de frente de una estacion, y la de la derecha es la de espalda en la estacion que sigue. Las distancias que median entre los puntos nivelados se escriben sobre la horizontal del nivel cuando se han medido horizontalmente, y al lado de las rectas inclinadas correspondientes si se han medido con la pendiente que tienen en el terreno.

El registro se dispone como el modelo que insertamos en la pág. 156. Se principia por anotar en la casilla núm. 1 la letra A con que hemos designado el punto de partida, en la número 10 y en el mismo renglon la cota arbitraria 85 m,000 que le hemos atribuido, y en la número 11 la indicacion del sitio que ocupa.

El segundo renglon se destina á las anotaciones que se refieren al punto B, el cual se anota en la primera casilla; en la segunda se escribe la letra M que designa la estacion desde la cual se han tomado las alturas $\alpha = 3^m{,}528$ y $\alpha' = 0^m{,}837$, que han de dar el desnivel entre A y B, y las cuales se anotan respectivamente en las casillas 6 y 7. La distancia AB que media entre ambos puntos se anota tambien en el mismo renglon, ocupando la casilla núm. 3 ó la núm. 4, segun se haya medido con la pendiente que tiene en el terreno, ó bien horizontalmente.

La estacion N se anota en el renglon siguiente, así como el punto C y los valores de b y b' en las casillas correspondientes; continuando del mismo modo hasta llegar al punto E en que termina la nivelacion. La casilla núm. 3 se deja en blanco, como en todos los casos en que la cota del punto C no es importante, y es uniforme la pendiente en el sentido de la alineacion BD.

507. **Cálculo de las cotas, y reduccion de las distancias al horizonte.**—Anotados en el terreno los datos que acabamos de indicar, se procede á calcular las diferencias de las alturas de mira de cada estacion, inscribiéndolas en la casilla núm. 8 del registro cuando resultan subiendo, que será siempre que la mayor altura ocupe la casilla núm. 6; y se anotará en la núm. 9 cuando resulte bajando, lo que se conocerá en que la mayor altura de mira está en la sétima casilla.

Añadiendo despues á la cota de A la diferencia 2,691 que corresponde á B, se obtendrá la cota 87,691 de este punto: restando de ésta la diferencia 1,188 se hallará la cota 86,503 del punto C, y así sucesivamente.

El desnivel entre dos puntos cualesquiera de los A, B, C..... que hemos considerado, se calculará por la diferencia de sus cotas (Acot.—6). Así la que resulta para los A y E es el desnivel $1^m{,}650$, obtenido por la nivelacion general.

Cuanto hemos dicho supone que el plano de comparacion es inferior; si fuese superior, se referirían las cotas de los puntos á este plano, restando de la cota anterior la diferencia que hubiese resultado subiendo, ó sumándola si fuese bajando.

508. Por medio del desnivel hallado 2,691 entre los puntos A y B y la longitud $177^m,57$ de la recta AB que los une, se puede hallar su proyeccion horizontal AF (fig. 195), haciendo uso de la fórmula [12] que hemos establecido (89). Para la reduccion de BD se sumarán los desniveles BG y CH, que darán 2,874 en razon á que la pendiente de sus segmentos BC y CD es la misma.

Las distancias al orígen se calculan sumando con cada una de ellas la distancia reducida siguiente.

509. **Comprobacion de los cálculos**.—Para cerciorarnos de que no hemos cometido equivocaciones en el cálculo de las diferencias y las cotas, se ejecuta una operacion que sirve para comprobarle, y consiste en sumar las cantidades escritas en cada una de las columnas 6, 7, 8 y 9, y ver si la diferencia de las dos primeras sumas es igual á la que existe entre las dos segundas, en cuyo caso las diferencias están bien calculadas. Para comprobar las cotas se halla la diferencia entre las cotas extremas, y se ve si es igual á las diferencias anteriores. En caso de que todas no fuesen iguales, sería necesario proceder á calcular nuevamente los números insertos en las casillas 8, 9, y 10.

Cuando se ha escrito por equivocacion una diferencia subiendo en la columna núm. 9 ó al contrario, se comete un error en el desnivel total que es igual al doble de la expresada diferencia, y que las comprobaciones indicadas dan necesariamente á conocer. De aquí la imprescindible necesidad de ejecutarlas siempre que se quiera tener confianza en el resultado de las operaciones.

Las distancias al orígen se comprueban viendo si la última de ellas es igual á la suma de las reducidas en la columna 4.

510. **Observacion general acerca de los puntos que deben acotarse.**—Puede ocurrir que tratándose de hallar las cotas de los puntos A, B, D, E (fig. 195) las operaciones de nivelacion nos conduzcan como en el ejemplo resuelto (506) á la determinacion de la que corresponde á un punto C.

Esta cota puede suprimirse en un estado general de las que corresponden á los puntos dados. Tambien se acostumbra suprimir la designacion de los puntos que se hallan en las mismas condiciones que C, llamados *puntos intermedios*, indicando con lápiz los resultados del cálculo de todas las cotas hasta que se han comprobado, y pasando despues con tinta únicamente las que corresponden á los puntos dados. La distancia se mide tambien de B á D (506).

511. **Comprobacion de las operaciones de nivelacion**.—Se comprueba una nivelacion repitiéndola á fin de comparar su resultado con el obtenido primeramente, ejecutando las operaciones del terreno con el mismo cuidado, así como los cálculos necesarios para la determinacion

REGISTRO DE NIVELACION.

Puntos nivelados	Estaciones	DISTANCIAS.			MIRAS.		DIFERENCIAS.			OBSERVACIONES.
		Parciales.	Reducidas.	Al origen.	De espalda.	De frente.	Subiendo.	Bajando.	Cotas.	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
A	»	»	»	0,00	»	»	»	»	85,000	Esquina N de la Ermita de*
B	M	177,57	177,55	177,55	3,528	0,837	2,691	»	87,691	
C	N	»	»	»	1,216	2,404	»	1,188	86,503	
D	P	283,86	283,85	461,40	0,842	2,528	»	1,686	84,817	
E	Q	170,03	170,02	631,42	3,057	1,224	1,833	»	86,650	Punto en el andén del puente de*, marcado con esta señal (×).
			631,42		8,643	6,993	4,524	2,874		
					6,993		2,874			
					1,650		1,650		1m,650	

del desnivel. Si éste difiere del primeramente hallado en una cantidad insignificante, podrá adoptarse el término medio. De lo contrario habría que proceder á una tercera nivelacion, que bastará en general para averiguar el verdadero desnivel.

Algunos prácticos ejecutan una doble nivelacion, cambiando de sitio el instrumento en cada estacion y tomando nuevamente las alturas de las miras extremas, con lo cual se evita el recorrer de nuevo la línea nivelada; pero este mismo objeto puede conseguirse por un método muy ingenioso, debido al Ayudante de Obras públicas D. José Ricord, é inserto en el número 9 del Boletin de la Asociacion del Cuerpo, por cuyo método se hacen á la vez tres nivelaciones, sin necesidad de cambiar de sitio el instrumento en cada estacion, con solo hacer uso á la vez de tres miras. Tiene además la ventaja de localizar el error que pueda cometerse en la apreciacion de una altura de mira.

Cuando se han acotado algunos puntos en la primera operacion, se conocerán los desniveles que existen entre ellos, y de esta manera se subdivide la nivelacion en otras nivelaciones parciales. La comprobacion puede entonces referirse á estos puntos, que estando bien determinados, darán á conocer en la mayor parte de los casos dónde se han cometido las equivocaciones, y solo habrá que repetir la nivelacion entre aquellos puntos cuyos desniveles parciales no hubiesen dado el mismo resultado en ambas operaciones.

Si la nivelacion debe terminar en el punto de partida, los puntos acotados ó de referencia determinan un polígono, y la comprobacion se reduce entonces á observar si el desnivel total es cero ó difiere muy poco de él; ó bien si la cota final hallada es la misma que la asignada al punto de partida. Haciendo extensiva la circunstancia análoga en la transportacion del plano de un polígono (446), se dice que éste *cierra por nivelacion*.

512. **Observaciones generales acerca de la práctica de la nivelacion y obstáculos que pueden presentarse.**—Es preciso que las miras estén dispuestas en posicion perfectamente vertical; su inclinacion produce un error que crece con la altura de mira para una inclinacion constante v; pues en la fórmula

$$x = l \times \cos\ v \qquad [9],$$

que representa en funcion de la altura l correspondiente á la inclinacion v el valor x de la verdadera altura de mira, crece este valor con l cuando v permanece constante. La altura x es la menor de las que pueden observarse cuando el viento agita la mira. Cuando se nivela por terrenos fuertemente accidentados y se hace uso de la mira parlante (468), conviene disminuir el número de estaciones ganando lo posible en desnivel; para lo cual se *empalmarán* las miras colocando una de ellas sobre la cantonera metálica en que termina el primer cuerpo de la otra, y se tendrá la altura correspondiente añadiendo á la lectura hecha la altura $1^m,500$ de dicho primer cuerpo. Conviene que la última mira de una estacion permanezca inmóvil en el punto en que se halla colocada, para servir de mira de espalda en la estacion siguiente y no alterar el resultado final de la operacion.

513. Respecto al uso de los niveles, observaremos que al hacer estacion debe procurarse que la altura á que se coloca el plano de nivel alcance al pié de la mira si está más elevada que el instrumento, ó no pase por encima de toda su altura si está más baja: de lo contrario, habría que cambiar de estacion el nivel perdiéndose un tiempo á veces considerable.

Al trasladar el nivel de agua de una á otra estacion, se evita que el líquido se derrame, tapando uno de los frascos, que se tiene cuidado de destapar al hacer la nueva estacion.

En los terrenos pantanosos conviene disponer las miras y los piés del trípode sobre piedras de grano, que se adhieren y quedan sujetas en el fango por la compresion que sobre él ejercen al ser introducidas. Para las miras se hace uso tambien de clavos de hierro con cabeza esférica armados de tres ó cuatro puntas, que en virtud de su forma se fijan bastante bien al terreno.

514. Uno de los obstáculos que con más frecuencia se presentan en la práctica de la nivelacion es un escarpado de mayor desnivel que el que puede obtenerse con las miras: se dispone entonces una de ellas invertida, cuyo pié se coloca á la altura del punto más elevado y otra directa en el más bajo, siendo el desnivel entonces la suma de las distancias respectivas del cero al plano del nivel; y cuidando de anotar esta circunstancia en el registro y de dibujarla en el croquis. Al mismo medio se recurre cuando una cerca B (fig. 196, lám. 9) impide por su elevancion colocar el plano del nivel más elevado que ella á fin de observar la mira siguiente al otro lado de la cerca. El desnivel entre A y B será entonces $a + a'$. Cuando las dos miras deben colocarse invertidas como sucede de B á C, entonces el desnivel será $b - b'$ como si estuviesen naturalmente colocadas. Las alturas de la cerca en B y C sobre el terreno serán sus desniveles BP y CQ sobre P y Q.

515. **Métodos particulares para la determinacion del desnivel entre dos puntos.**—En muchos casos, y especialmente cuando se trata de salvar un barranco de laderas inaccesibles, ocurre tener que dirigir visuales á miras muy distantes, estacionando el nivel á distancias muy desiguales de ellas; lo que puede originar errores de consideracion por poca que sea la descorreccion que el nivel haya podido experimentar en el transcurso de las operaciones, y es conveniente en todo caso asegurarse de la exactitud de las observaciones hechas. Daremos á conocer por lo tanto los métodos que se emplean generalmente en este caso.

516. **Método de nivelacion recíproca.**—Sean Aa, Bb (figura 197) las alturas de mira observadas desde el punto de estacion M para las colocadas en los puntos A y B, y Aa', Bb' las observadas desde N. El desnivel entre A y B será la diferencia de las semisumas que se obtienen en las miras colocadas en dichos puntos.

Consideremos los puntos m y n que satisfacen á la condicion de dar las alturas medias enunciadas, y vamos á demostrar que la recta mn que los une es una horizontal. En efecto, la horizontal $r's'$ del instrumento colocado en N nos dará

$$r'm = \frac{r'a' + r'a}{2} = \frac{r'a' + ra + rr'}{2},$$

en virtud de la suposicion que hemos hecho de ser $am = ma'$; y por ser tambien $b'n = nb$,

$$s'n = \frac{s'b + s'b'}{2} = \frac{s's + sb + s'b'}{2};$$

pero en estas expresiones se tiene tambien, á causa de la inclinacion constante de la visual, $r'a' = sb$ por la igualdad de los triángulos $r'a'o'$ y sbo, así como $ra = s'b'$ por la de los rao, $s'b'o'$; y además $rr' = ss'$ por ser la diferencia de alturas de los planos horizontales rs, $r's'$; luego los quebrados que expresan los valores de $r'm$ y $s'n$ son iguales, y lo mismo se verifica con estas alturas, por lo que mn es una horizontal (45) El desnivel BC será igual á Bn — Am, y sustituyendo por estas cantidades sus valores, se tendrá por último

$$BC = \frac{Bb + Bb'}{2} - \frac{Aa + Aa'}{2}.$$

517. **Método de Egault.** —El procedimiento de Mr. Egault se aplica no solo al caso á que se refiere el método anterior, sino que tambien se emplea para obtener las verdaderas alturas de mira cuando se hace uso de un nivel descorregido, no solamente en la posicion de la ampolla, sino tambien en la inclinacion de la visual con respecto al eje de figura del anteojo. Consiste en hacer una sola estacion de nivel y tomar en una mira A, colocada en uno de los puntos cuyo desnivel se trata de conocer, la altura de mira a, dando una semirevolucion al anteojo dentro de sus collares y tomando la nueva altura a', á fin de obtener por la semisuma de a y a' una altura corregida de la descentracion que el anteojo haya podido experimentar, y pasando despues á hacer iguales observaciones en la mira colocada en el otro punto. Sacando entonces el anteojo de los collares y colocándole de nuevo invertido en ellos, se hallan del mismo modo que antes en la primera mira las alturas a'' y a''' y se hace la semisuma de a'' y a''': se tendrá entonces para la altura x corregida de la inclinacion de la visual (221)

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{a + a'}{2} + \frac{a'' + a'''}{2}\right] = \frac{a + a' + a'' + a'''}{4} \qquad [10]$$

Del mismo modo se hallará la altura corregida en la otra mira, y la diferencia de las alturas así determinadas dará el desnivel entre los puntos que las miras ocupan.

CAPITULO IV.

Nivelacion por pendientes.

518. **Generalidades.**—El problema general de la nivelacion puede resolverse con el auxilio de los *eclímetros*, comos hemos manifestado anteriormente (463), ya por una ó por varias estaciones, constituyendo en el primer caso una *nivelacion simple* y en el otro una *nivelacion compuesta*. Sus procedimientos se fundan en el conocimiento de la pendiente de una recta y de su longitud ó la de su proyeccion horizontal.

519. **Nivelacion simple.—Con los goniómetros de limbo zenital.**—Sean A y B (fig. 94) los puntos dados: haciendo estacion en A y tomando en la mira la magnitud Bb igual á la altura Aa del instrumento, se hallará el valor de la pendiente m (252). Resolviendo el triángulo ABC, llamando d al desnivel BC, y representando por $L = AB$ ó por $l = AC$ la recta medida, se tendrá en cada caso una de las fórmulas

$$d = L \times \text{sen } m \qquad [11];$$
$$d = l \times \text{tang } m \qquad [12];$$

que resuelven el problema y nos dicen que *el desnivel entre dos puntos se obtiene multiplicando la longitud de la recta que los une por el seno de la pendiente de la misma recta, ó la distancia horizontal por la tangente que á la misma pendiente corresponde.*

Estas reglas se aplican igualmente al caso en que la pendiente se obtiene por un ángulo de depresion

Para hacer aplicacion de las fórmulas, supongamos que se tenga $AB = 120^m,4$; $m = 10^\circ\ 26'$: la proyeccion horizontal de AB será (85) $118^m,41$. Aplicando la fórmula [11] se tendrá

$$d = 120^m,4 \times \text{sen. } 10.^\circ\ 26' = 21^m,804.$$

Empleando la fórmula [12] se tendría:

$$d = 118^m,41 \times \text{tang. } 10^\circ\ 26' = 21^m,799.$$

520. Cuando la pendiente se obtiene por un ángulo zenital (178) se hace uso del coseno ó de la cotangente en reemplazo del seno ó la tangente

521. **Con los eclímetros.**—*Eclímetro de perpendículo.*—La proporcion que hemos establecido (495) nos sirve para hallar el desnivel entre los puntos A y B (fig. 191), pues despejando AC que es el desnivel pedido, se tendrá la fórmula

$$AC = \frac{CB + nr}{100} \qquad [13].$$

Si suponemos que se tiene BC = 25,m8 y nr = 18 divisiones, resultará AC = 4,m644.

522 **Empleo del eclímetro de pínulas**.—Hallada la pendiente como hemos dicho (500), no habrá más que despejar CB en la proporcion allí establecida y resultará la fórmula

$$CB = \frac{AC \times cb}{100} \qquad [14].$$

523. **Nivelacion compuesta**.—Cuando no basta una sola estacion del instrumento para hallar el desnivel entre dos puntos, se divide la operacion en nivelaciones parciales, sumando despues los desniveles que resulten subiendo, los cuales corresponden á los ángulos de elevacion ó á los zenitales menores que 90°, como tambien los que resulten bajando, que corresponden á los ángulos de depresion ó á los zenitales mayores que 90°. La diferencia de estas sumas dará el desnivel entre los puntos dados (504) y el sentido en que tiene lugar.

Cuando la nivelacion tiene por objeto la acotacion de cierto número de puntos, se sigue una marcha análoga á la empleada para la nivelacion por alturas, haciendo estacion en el punto A de partida (fig. 198) y colocando en B una mira con la altura Bm de a sobre el terreno, se obtendrá por medio de un ángulo de elevacion el desnivel subiendo entre A y B (519); pasando á hacer estacion en este último punto se determina por medio de un ángulo de depresion observado desde b el desnivel bajando entre B y C, continuando del mismo modo hasta el punto en que debe terminar la operacion.

524. **Acotacion de los puntos del terreno**.—Hallados los desniveles entre los distintos puntos A, B... (fig. 198) que se trate de acotar, se obtendrán sus cotas AA', BB'... del mismo modo que en la nivelacion por alturas (505).

525. **Croquis y registro**.—Análogamente al que hemos explicado para la nivelacion por alturas (506) debe llevarse un croquis de la operacion, en el cual se expresa el valor del ángulo de elevacion ó de depresion que á cada recta corresponde, y debajo la distancia medida entre sus puntos extremos; algunas veces se da además el signo positivo á los valores de los ángulos de elevacion y el negativo á los de depresion.

El registro se dispone como el modelo inserto en la página 163, llenando en el terreno las casillas números 1, 2, 3, 6 y 7 con los datos tomados en él. Las reducidas de la casilla núm. 4 se calculan como sabemos (85) por medio de la distancia medida y el coseno de la pendiente que le corresponde en la núm. 6 ó 7. Los desniveles multiplicando cada reducida por la tangente, ó la medida por el seno del mismo ángulo (519), y escribiéndola en la casilla 8 ó en la 9 segun resulte de un ángulo de elevacion ó de depresion. Las casillas 5 y 10 se llenan del mismo modo que en el registro de la nivelacion por alturas (508 y 505). Los cálculos están tambien sujetos á las mismas comprobaciones (509).

526. **Obstáculos que suelen presentarse en la práctica de la nivelacion por pendientes.**—Cuando la forma del terreno ó algun obstáculo intercepta la visual paralela á la línea AM (fig 199) que une los términos de la estacion, es preciso elevar la tablilla de la mira hasta la altura C′ necesaria para alcanzar á la visual que salva el obstáculo. El ángulo de elevacion m así obtenido dará por la aplicacion de una de las fórmulas [11] ó [12] (519) el desnivel $HC' = BA'$, en virtud de la igualdad del triángulo CHC' con el ABA' que resulta de tirar por A la paralela AA' á la visual CC'; y para hallar el desnivel verdadero BM que existe entre A y M, observaremos que se puede establecer la ecuacion

$$BM = BH + HM;$$

y como se tiene $BH = AC$ y $HM = HC' - MC'$, sustituyendo en ella resultará

$$BM = AC + HC' - MC':$$

llamando x al desnivel BM buscado, a á la altura AC del instrumento, observando que se tiene $HC' = l \times \text{tang.}\ m$, representando por h la altura de mira MC' y sustituyendo en la expresion anterior, se halla la ecuacion

$$x = l \times \text{tang}\ m + a - h \qquad [15];$$

que nos dice que el desnivel se halla en el caso que nos ocupa, añadiendo al valor obtenido por la aplicacion directa de la fórmula [12] para el ángulo de elevacion m la altura del instrumento, y restando de esta suma la observada en la mira.

Para un ángulo de depresion se tiene desde luego

$$a + x = l \times \text{tang}\ m + h =,$$

de la que resulta

$$x = l \times \text{tang}\ m + h - a \qquad [16].$$

527. **Correcciones de los desniveles obtenidos por la aplicacion de las fórmulas —Correccion de la altura del instrumento** —Cuando no se hace uso de la mira para determinar el desnivel entre dos puntos, como sucede al tratarse de hallar la cota de un punto distante de la base de operaciones ó de otro cualquiera inaccesible para el porta-mira, la aplicacion de las fórmulas establecidas (519) da el desnivel Bc (fig 94), porque entonces se dirige la visual al punto B. Se ve por lo tanto que será necesario añadirle la altura del instrumento $Aa = cC$ para obtener el verdadero BC. Cuando el ángulo observado es de depresion hay que restar del desnivel calculado la altura del instrumento.

REGISTRO DE LA NIVELACION POR PENDIENTES.

Puntos nivelados	Estaciones	DISTANCIAS.			ÁNGULOS		DIFERENCIAS.			OBSERVACIONES.
		Parciales.	Reducidas.	Al origen.	De elevacion.	De depresion.	Subiendo.	Bajando.	Cotas.	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
A	»	»	»	0,00	»	»	»	»	40,308	
B	1	98,25	90,14	90,14	23° 26′	»	39,067	»	79,375	
C	2	94,16	78,04	168,18	»	21° 59′	»	31,505	47,870	
D	3	106,24	100,94	269,12	18° 10′	»	33,118	»	80,988	
			269,12				72,185	31,505	40,680	
							31,505			
							40,680			

528. **Correccion de la diferencia del nivel aparente al verdadero y de la refraccion** —Recordando lo que acerca de esta correccion hemos dicho (457) se ve fácilmente que se obtendría el verdadero desnivel entre dos puntos A y M (fig, 200) sumando con la diferencia DH el desnivel HR $= l +$ tang. m, y restando de esta suma la elevacion MR causada por la refraccion. La fórmula de correccion sería entonces

$$x = 0{,}000000066\, l^2 + l \times \text{tang. } m \qquad [17].$$

Para los ángulos de depresion se obtiene de un modo análogo

$$x = 0{,}000000066\, l^2 - l \times \text{tang. } m \qquad [18].$$

529. **Causas de error en la resolucion del problema de la nivelacion por pendientes.**—Estas causas son: *El defecto de verticalidad del limbo zenital*, y el de *paralelismo de las verticales de los puntos extremos* de una nivelacion simple. El cálculo hace ver que para que el primero de estos defectos dé un error superior al límite de apreciacion del limbo zenital, es preciso que la inclinacion de este sea tal, que pueda apreciarse á simple vista ó por la comparacion con una plomada, por medio de la cual se puede corregir tambien esta inclinacion en caso necesario.

Respecto á la falta de paralelismo ya hemos dicho (223) la distancia á que puede operarse sin que el error sea apreciable en el instrumento.

530. **Métodos particulares de la nivelacion por pendientes. —Nivelacion recíproca** —Tambien se puede resolver este problema (516) por pendientes, hallando los valores m y n de los ángulos de elevacion y depresion BCF y GBC (fig. 201), tomados en los puntos C y B cuyo desnivel BD se trata de conocer y referir á las horizontales CF y BG de los mismos puntos. Se tendrá desde luego ABC = BCD á causa del paralelismo de las cuerdas AB y CD, así como GBA = FCD (Geom. Teor. 51): sumando por lo tanto estas dos igualdades y sustituyendo valores, se tendrá

$$n = m + \text{FCD} + \text{FCD} = m + 2\text{FCD}.$$

El triángulo BCD, que sin error sensible se puede considerar como rectángulo en D, dará entonces el desnivel BD $= x$, para lo que habrá que calcular el valor del ángulo BCD en funcion del FCD, que se deduce de la igualdad anterior; siendo por lo tanto

$$\text{BCD} = \text{BCF} + \text{FCD} = m + \frac{n-m}{2} = \frac{2m+n-m}{2} = \frac{m+n}{2};$$

y llamando además l á la distancia horizontal CD, se tendrá por último

$$x = l \times \text{tang. } \frac{m+n}{2} \qquad [19].$$

*531. **Aplicaciones de la nivelacion recíproca á la determinacion del ángulo y del índice de refraccion.**—El ángulo de refraccion γ (fig. 200) se puede deducir por medio de la nivelacion recíproca. Llamando m y n á los ángulos observados en dos puntos C y B (figura 201), z y z' á los ángulos verdaderos, y r al de refraccion, se tendrá para el ángulo de elevacion (fig. 200) $z = m - r$, y para el de depresion se tendrá $z' = n + r$; de donde se deduce la expresion

$$z' - z = n - m + 2r \ ;$$

y observando que se tendría (fig. 201), $z' = 90^{\circ} - CBO$; y $z = 90^{\circ} - CBO - O$, á causa de ser ACB = CBO + O (Geom Teor. 14. Cor. 1.°), sustituyendo en la expresion anterior, simplificando y despejando r, resultaría por último

$$r = \frac{O + m - n}{2} \qquad [20].$$

Conocido el ángulo de refraccion, se halla el *índice* N que es la razon de r al ángulo en el centro, dividiendo por O ambos miembros de la fórmula anterior: será por lo tanto

$$N = \frac{r}{O} = \frac{O + m - n}{2 \times O} \qquad [21].$$

Por este medio se ha calculado el índice 0,16 de que hemos hecho mencion en el capítulo 1.° (456).

532. **Método de las estaciones alternadas**.—Consiste en colocarse en estacion en un punto sí y en otro no de los que se trata de acotar, y tomar desde cada punto de estacion la pendiente á los inmediatamente anterior y posterior, teniendo cuidado de que la primera de estas observaciones es inversa, y debe anotarse en el registro como de depresion todo ángulo de elevacion observado, y al contrario: la segunda observacion es directa y debe anotarse el ángulo tal como se haya obtenido.

Es digno de tenerse en cuenta el que para facilitar las operaciones se puede dar á la mira una altura constante, que debe ser la altura media que ordinariamente alcanza el instrumento, sin que esto produzca error alguno en el resultado final de la operacion; dando lugar tan sólo á una pequeña diferencia en las cotas de los puntos de estacion.

Este método puede aplicarse tambien al levantamiento de un plano con la brújula por el método de rodeo (426), cuando se quiere operar con rapidez, y prescindir de la comprobacion de los rumbos que se obtiene siguiendo el método general.

CAPITULO V.

Nivelacion barométrica

533 **Generalidades.**—El desnivel entre dos puntos puede obtenerse (461) por medio de observaciones barométricas y termométricas ejecutadas haciendo estacion en los puntos dados, y aplicando sus resultados á fórmulas destinadas á suministrar en funcion de ellos los valores correspondientes á las alturas que se trata de conocer.

La nivelacion barométrica da resultados bastante exactos cuando se hacen cuidadosamente las observaciones y el cálculo de las alturas; lo que es debido al grado de precision que se ha conseguido dar á las fórmulas que se emplean, teniendo en cuenta las muchas causas que pueden influir en el resultado de las observaciones.

Empezaremos por la descripcion de los instrumentos de que en la nivelacion barométrica se hace uso.

534. **Termómetro.**—Se da el nombre de *termómetro* á un instrumento destinado á medir las temperaturas de los cuerpos y á manifestar las variaciones que pueden experimentar. *Temperatura* de un cuerpo es el estado de calórico sensible en que se encuentra. La cantidad absoluta de calor necesaria para obtener una misma temperatura en varios cuerpos, es para cada uno de ellos diferente en general de la de los otros, segun su capacidad calorífica.

En las operaciones de la nivelacion barométrica se emplea el termómetro de mercurio, que es un tubo capilar de cristal *ab* (fig 202), herméticamente cerrado por su parte superior, y soldado por la inferior á una esfera ó á un cilindro *c* de la misma materia. Esta cavidad está llena de mercurio, que ocupa tambien parte del tubo: el resto de este último está lleno del vapor del mercurio sin contener cantidad alguna de aire. En el tubo hay grabada una escala que comprende 100 partes iguales, entre el punto *r* marcado con el *cero* de la misma y el *s* que señala 100 grados termométricos. La graduacion se prolonga un corto número de grados á la parte superior de *s* y debajo del cero. Algunos termómetros están fijos á una armadura de madera y tienen la escala grabada en una regla metálica fija tambien á la misma armadura. Los primeros son preferibles en las observaciones de que nos ocupamos. El punto de la escala á que en un momento dado llega el extremo superior de la columna del mercurio, es el que marca la temperatura del medio en que el instrumento se encuentra situado.

535. **Reduccion á la escala centesimal de las temperaturas señaladas en la de Réaumur.**—Una de las escalas termométricas

más usadas es la de Réaumur, en la cual el espacio comprendido entre los puntos fijos de que hemos hablado está dividido en 80 partes iguales, teniéndose por lo tanto la equivalencia 100C = 80R, que simplificada se reduce á

$$5 \times C = 4 \times R \qquad [22].$$

Dado un número de grados, por ejemplo 17°,5 de la escala de Réaumur, se reducirán á la escala centesimal, observando que de la equivalencia [22] se deduce $R = \frac{5}{4} C$, lo que quiere decir que un grado de Réaumur es los $\frac{5}{4}$ de un centígrado; luego multiplicando por $\frac{5}{4}$ el número dado se tendrá el valor que se busca

$$x = 17,^{r}5 \times \frac{5}{4} = 21,^{c}9.$$

536. **Barómetro.**—El *barómentro* es un instrumento destinado á la medida de la presion atmosférica en un punto dado de la superficie terrestre La existencia de esta presion y la posibilidad de medirla se evidencian por el experimento de Torricelli, que consiste en llenar completamente de mercurio un tubo de cristal cerrado por uno de sus extremos, cubriendo despues con el dedo la abertura de modo que no quede aire alguno dentro del tubo; si en esta posicion se le invierte introduciéndole por la parte cubierta en una cubeta llena tambien de mercurio, destapándole despues, se observará que parte del que contiene el tubo pasa á la cubeta, quedando un espacio vacío en su parte superior, llamado comunmente la *cámara barométrica*; el resto continúa ocupado por una columna de mercurio, sostenida por la presion que ejerce el aire en la superficie libre del líquido contenido en la cubeta. Cuando la presion atmosférica aumenta, la columna no puede equilibrarla, y entonces el exceso de presion obliga á pasar al tubo parte del mercurio de la cubeta, lo que hace aumentar la altura de la columna Si por el contrario disminuye la presion, pasa una porcion del mercurio del tubo á la cubeta, disminuyendo la altura de la columna.

En virtud de lo que acabamos de exponer, la presion ejercida al nivel del mar, en que la columna barométrica tiene una altura de $0,^{m}76$ en las circunstancias atmosféricas ordinarias, sobre una superficie de un centímetro cuadrado, por ejemplo, será el peso de una columna de mercurio de 76 centímetros cúbicos; y como cada uno de estos pesa 13, gr. 6, por ser su densidad 13,6 respecto á la del agua destilada, la presion que tratamos de hallar será de $13,^{gr}6 \times 76 = 1033,^{gr}6$, ó lo que es lo mismo de $1^{kilg.}33,^{gr}6$.

En consecuencia de lo que acabamos de establecer, la presion atmosférica se mide por la altura de la columna de mercurio en el barómetro. Esta altura es independiente de la seccion del tubo, y no influyen por lo tanto en ella las dilataciones ó contracciones del mismo La altura barométrica se mide por una escala dividida en centímetros y milímetros, ó en pulgadas y décimas de pulgada, que conviene reducir á la division decimal. La pulgada española equivale á $23,^{mm}21955$; la francesa á $27,^{mm}06995$, y la inglesa á $25,^{mm}3994$.

537. **Correccion de la altura barométrica.**—Por medio del termómetro que acompaña al barómetro pueden reducirse las alturas observadas á una temperatura única; correccion indispensable para que los resultados obtenidos sean comparables. Para reducir á 0° una altura, que representaremos por H á la temperatura t, se hace uso de la fórmula

$$H' = \frac{5550 \times H}{5550 + t} \qquad [23]$$

Ejemplo.—Supongamos que á la temperatura de 13° centesimales se ha observado una altura barométrica de $0,^{m}765$: se hallará

$$H' = \frac{5550 \times 0,^{m}765}{5550 + 13} = \frac{4245,75}{5563} = 0,^{m}763.$$

538. **Barómetros más comunmente empleados.—Barómetro de Fortin.**—El tubo a (fig. 203), que contiene la columna de mercurio destinada á medir la presion atmosférica, está encerrado en un estuche de cobre, que deja en sentido de su longitud dos aberturas opuestas para permitir la observacion de las variaciones de la columna barométrica. A uno de los lados del tubo está grabada la escala de centímetros y milímetros ó de pulgadas y décimas; cuyo cero debe corresponder al nivel superior del mercurio en la cubeta de cristal c, contenida en una caja unida por tres columnas metálicas á la pieza en que termina por su parte inferior la armadura del tubo. Esta disposicion permite observar el nivel del mercurio en la cubeta. Un termómetro t fijo á la misma armadura sirve para apreciar la temperatura del mercurio, y el resalto r para disponer el instrumento en un trípode de varillas metálicas. La pieza móvil n corre á lo largo de la armadura, y va provista de un nonius, que aprecia décimas partes de la menor division de la escala, y cuyo cero se lleva á la altura del extremo de la columna barométrica, haciendo que éste se halle en el plano superior del reborde k. En los barómetros modernos el nónius está dispuesto en un bastidor que se hace correr á lo largo del tubo, por medio de un boton y en virtud del engranaje de un piñon con los dientes practicados en el tubo metálico. El cero se halla en el canto inferior del bastidor, que se lleva para las observaciones á la altura del extremo de la columna de mercurio.

539. *Situacion del cero de la escala.*—Las variaciones de altura de la columna barométrica hacen variable el nivel del mercurio contenido en la cubeta, que debería estar siempre á la altura del *cero* de la escala. El error que esta circunstancia produce es inapreciable cuando el diámetro de la cubeta es muy grande con relacion al del tubo; pero la forma del instrumento le haría entonces incómodo para el transporte; y á fin de obviar este inconveniente se halla dispuesto un tornillo de presion x, por me-

dio del cual se hace subir ó bajar una piel de gamuza en que termina la cubeta por su parte inferior, hasta que la superficie del mercurio llega á estar en contacto con el extremo de un estilo fijo á la cubierta de la cubeta; lo que tendrá lugar cuando dicho extremo coincida exactamente con su imágen reflejada en la superficie del mercurio. La comunicacion de la cubeta con el aire exterior se establece á través de una gamuza dispuesta sobre la placa que recubre la cubeta.

Para transportar el instrumento se mueve el tornillo x hasta que el mercurio llena completamente la cubeta, con objeto de impedir el paso del aire exterior.

540 **Barómetro de Gay-Lussac.**—El *barómetro de sifon* de Gay-Lussac consiste en un tubo de cristal a (fig 204) encorvado de manera que presenta dos ramas desiguales, reunidas por un tubo capilar: la rama más alta tiene en su parte superior la cámara barométrica (536) y debajo la columna que equilibra el peso de la atmósfera; la otra hace las veces de cubeta y presenta una pequeña abertura lateral que da paso al aire atmosférico. Dos escalas e, e' divididas en sentidos contrarios á partir de un cero comun situado hácia el punto a, sirven para apreciar la altura de la columna barométrica, que es la suma de las graduaciones que marcan los ceros de los nonius dispuestos en las piezas móviles n, n'. Cuando las escalas están graduadas en el mismo sentido á partir de un cero inferior á ambas, se tomará la diferencia de las alturas. El termómetro t tiene el mismo uso que en el instrumento acabado de citar. El barómetro de Gay-Lussac puede disponerse tambien en un trípode para la práctica de las operaciones de nivelacion.

541. **Empleo de los instrumentos en la determinacion del desnivel entre dos puntos.**—Para hacer uso del barómetro y el termómetro en la determinacion del desnivel que existe entre dos puntos dados, es preciso determinar con respecto á cada uno de ellos la altura barométrica, la temperatura que señala el termómetro unido al barómetro, la cual indica la que tiene el mercurio en este instrumento, y la de la atmósfera, que se mide por un termómetro libre. Con el resultado de estas observaciones se emplean en la determinacion del desnivel que se busca fórmulas de más ó ménos fácil aplicacion, ó tablas calculadas con este objeto: vamos á ocuparnos de las que entre las primeras se han empleado con más frecuencia en la práctica de la nivelacion barométrica.

542. **Fórmulas de la nivelacion barométrica.**—Cuando sólo se trata de conocer aproximadamente el desnivel entre dos puntos y éste no llega á 100 metros, puede aplicarse la fórmula

$$x = 18312 \ (\log. H - \log. h) \qquad [24],$$

en la que son H y h las alturas barométricas correspondientes á los puntos más bajo y más elevado de la altura que se trata de conocer. Esta fórmula ha sido deducida por Laplace, partiendo de la consideracion de que para alturas que crecen en progresion aritmética, los pesos de la atmósfera y las columnas de mercurio que los miden decrecen en progresion geométrica; siendo las primeras por lo tanto logaritmos de las que corresponden á las columnas barométricas. El coeficiente 18312^{m} fué deducido de repetidas observaciones.

Para hacer aplicacion de la fórmula [24] supongamos que sea $H = 0,^{m}763$ y $h = 0,^{m}7437$: se tendrá para el desnivel que existe entre los puntos de observacion $x = 203,^{m}752$. Tambien puede obtenerse sin el uso de los logaritmos, multiplicando el número constante $10,^{m}467$ por la diferencia 19,3 de las alturas dadas reducida á milímetros.

543. La fórmula [24] seria ventajosamente aplicable por su sencillez á la medicion de las alturas, si numerosas causas de error debidas á la temperatura del aire y á su estado higrométrico, la diferente accion de la gravedad sobre el aire atmosférico y el mercurio, la influencia de la latitud del lugar de la observacion y otras causas que han podido apreciarse, no hubieran sugerido á los físicos el establecimiento de otras fórmulas de más exactos resultados, entre las que citaremos las más generalmente empleadas.

544. **Fórmula de Babinet.**—Cuando el desnivel que se ha de medir no llega al límite 1000^{m}, se emplea la fórmula:

$$x = 16000^{m}\left(\frac{H - h}{H + h}\right)\left(1 + \frac{2(T + t)}{1000}\right) \qquad [25],$$

debida á Babinet, y que tiene la ventaja de no exigir el empleo del cálculo logarítmico. Para hacer aplicacion de ella á la determinacion del desnivel entre dos puntos, supongamos que haciendo estacion en el más bajo de ellos, la altura barométrica corregida (537) es de 763^{mm} y la temperatura del termómetro libre 13° de la division centesimal; y que en el más elevado la temperatura es de 0° y la altura barométrica, corregida en el caso de que la temperatura del termómetro unido al barómetro sea diferente de cero, es de $743,^{mm}7$; se tendrá entónces:

$$H = 0,^{m}763; \; h = 0,^{m}7437; \; T = 13; \; t = 0:$$

é introduciendo estos valores en la fórmula, obtendremos

$$x = 16000^{m} \times 0,01281 \times 1,026 = 210,^{m}289.$$

545. **Fórmula de Laplace modificada por Ramond.**—Esta fórmula, de más exacta aplicacion que las anteriores, es

$$x = 18393^{m}\left(1 + \frac{2(T + t)}{1000}\right)(\log H - \log. h) \qquad [26],$$

y aplicada al problema anterior da para x un valor de 209, 974, que debe mirarse tambien como más exacto que los anteriores.

546. *Correccion de latitud.*—Si se quisiera introducir en el valor hallado la correccion de latitud, no habrá más que multiplicar el valor de x por el factor $(1 - 0,00323 \cos 2L)$; se tendrá entonces para la altura corregida x', suponiendo que la que se trata de conocer se refiere á dos puntos situados en las inmediaciones de Madrid, cuya latitud es de 40° 24′ 30″,

$$x' = 209^m,974 \times 0,9994845 = 209^m,866$$

547 **Aplicacion de la nivelacion barométrica á la medida de las distancias.**—Despejando l en la fórmula [19] establecida (530) para la nivelacion recíproca, se hallará (Trig. 13)

$$l = x \times \cot g \frac{m+n}{2} \qquad [27],$$

en la que x se determina como sabemos por observaciones barométricas.

548. **Práctica de las operaciones de nivelacion barométrica.**—*Estacion barométrica.*—Es conveniente elegir para estacionar los instrumentos un punto bien determinado, y libre si es posible de las fuertes corrientes de aire: el barómetro y el termómetro libre se disponen de modo que permanezcan en una situacion fija, á la sombra, y perfectamente rodeados de un ambiente despejado, que les permita apreciar debidamente las influencias atmosféricas.

549 *Práctica de las observaciones.*—No debe nunca procederse á la observacion de las alturas barométrica y termométrica sin haber dejado pasar 30 ó 40 minutos de la colocacion de los instrumentos, á fin de que hayan adquirido el equilibrio de temperatura con los objetos que les rodean. Es necesario además asegurarse de que las columnas no experimentan oscilaciones.

Las horas en que deben hacerse las observaciones no son tampoco indiferentes: pues parece que desde las diez de la mañana hasta las dos de la tarde, las columnas barométrica y termométrica están ménos sujetas á variaciones, que alteran la apreciacion de la temperatura y de la presion atmosférica. Durante el tiempo marcado, las observaciones se repiten de cuarto en cuarto de hora, tomando despues un término medio de las alturas corregidas; con lo que se tendrán las alturas medias del dia. Repitiendo esta operacion por espacio de uno ó dos meses, el término medio entre todos los hallados de esta manera, dará los valores que es preciso introducir en las fórmulas para averiguar el que corresponde al desnivel que se busca.

Las operaciones deben suspenderse en los dias de tormenta ó de fuertes vientos.

550 —**Diferentes maneras de obtener los desniveles por medio de la nivelacion barométrica.**—*Por observaciones simultáneas próximas.*—Se emplean entónces dos barómetros, uno en cada extremo de la recta cuyo desnivel se trata de conocer, y cuyas indicaciones estén perfectamente acordes. La circunstancia de tener lugar las observaciones al mismo tiempo lleva consigo la probabilidad de ejecutarlas en iguales condiciones atmosféricas. Conviene tomar un término medio entre observaciones repetidas.

551. *Por observaciones simultáneas distantes.*—Cuando la distancia entre los puntos de estacion es muy grande, de 5 á 6 leguas en adelante, es cuando se debe seguir con mayor escrupulosidad la repeticion

de las observaciones, que suelen prolongarse hasta seis ó más meses.

552. *Por observaciones sucesivas.*—En este método se emplea un solo barómetro, estacionándole en el punto más bajo, y trasladándole al más elevado para obtener una segunda observacion, que con los datos tomados en la primera, podrá servir para calcular el desnivel que entre ambos puntos existe. Volviendo despues al más bajo, se hace una tercera observacion, que con la segunda dará un nuevo valor del mismo desnivel.

553. *Por observaciones aisladas.*—Se emplea un solo barómetro en la determinacion de la presion atmosférica y la temperatura media del lugar de la observacion: y sabiendo que al nivel del mar se ha obtenido la altura barométrica 0,^{m}7629 á la temperatura de 12°,8 del termómetro centígrado y en la latitud de 50° sexagesimales, se hará aplicacion de la fórmula [26] (545), haciendo la correccion de latitud (546) si se quiere mayor precision, y se tendrá la *cota* absoluta del punto de estacion ó su *altura sobre el nivel del mar*.

CAPITULO VI.

Problemas de nivelacion.

554. **Generalidades.**—Se reducen estos problemas á la aplicacion de los procedimientos generales de la nivelacion á la determinacion de puntos de un mismo plano horizontal ó de un desnivel dado, de rectas de pendiente determinada, y de alturas verticales cuyos valores se necesita conocer aisladamente ó bien relacionados con las operaciones de una nivelacion.

555. **Hallar un punto cuyo desnivel con otro dado sea igual á una cantidad determinada.**—Se hace uso de un nivel que se estaciona convenientemente, y se halla la altura de mira que corresponde al punto dado: marcando entonces en la mira una altura igual á la obtenida más ó ménos el desnivel conocido, segun se quiera que el nuevo punto resulte más bajo ó más elevado que el primero, no habrá más que colocar sucesivamente la mira en varios puntos del terreno, sin variar la altura marcada en ella, hasta que la visual dirigida segun el plano horizontal del nivel señale esta altura: el punto del terreno en que la mira esté situada entonces es el punto pedido. En estos tanteos cuidará el portamira de elegir puntos más altos ó más bajos que el que ocupa segun el sentido en que le indique el observador por medio de señas convenidas.

Cuando el desnivel fuese mayor que la altura total de la mira, se resolvería este problema por una nivelacion compuesta, anotando los desniveles parciales hasta que faltase para el total pedido una cantidad menor que la altura de la mira. En este caso se marca el punto siguiente de manera que satisfaga á la condicion del problema. Si por ejemplo el segundo punto hubiese de estar 14,m8 más elevado que el primero, y despues de tres estaciones se ha obtenido un desnivel de 12,m5, se determinará el punto pedido haciendo que resulte 2,m3 más alto que el pié de la mira anterior.

556. Con los eclímetros se resuelve este problema marcando en ellos la pendiente *cero*, y usándolos como niveles de la manera que acabamos de dar á conocer.

557. **Dado un punto de la superficie del terreno, hallar otro que esté de nivel con el primero.**—Este problema es el caso particular del anterior en que el desnivel dado es cero. Colocada una mira en el punto dado A (fig. 205) y puesto el nivel en estacion en M, se toma la altura de mira en A, y con ella se busca por tanteos un punto del terreno en el cual colocada la mira sin variar la altura marcada en ella, la visual termine exactamente en el punto que la señala. El pùnto B ocupado por el pié de la mira, estará de nivel con A, ó mejor dicho, se hallará en el mismo plano horizontal que este último.

558. **Trazar en el terreno una línea cuyos puntos se hallen en un mismo plano horizontal.**—Determinados como en el problema anterior los puntos A y B (fig. 205), se pasa á estacionar el nivel en otro punto N, y se marca la altura B*s* de la nueva visual en la mira que ha debido permanecer en el punto B. Con esta altura se determina como en el problema anterior el punto C, que estará en el plano horizontal de B; y por consiguiente los tres puntos A, B, C, serán de nivel ó estarán en un mismo plano horizontal. Dejando colocada la última mira C y pasando á hacer una nueva estacion con el nivel, se podrá determinar otro punto del mismo plano, y así sucesivamente.

La altura *rs* es la diferencia de las que corresponden á los planos de nivel aparente determinados por la visual en las estaciones sucesivas del instrumento; diferencia que no influye en el resultado de la operacion, en razon á que se hace variar en la misma cantidad la altura de mira al mudar de estacion el nivel. Cuando desde una misma estacion se pueden determinar tres ó más puntos, no hay necesidad de variar la altura de mira al pasarla de uno á otro.

Los puntos A, B, C,... determinados, están en la superficie del terreno y pertenecen por lo tanto á la interseccion de éste con un plano horizontal. La curva *abc*... que une las proyecciones *a*, *b*, *c*... de dichos puntos será una de las secciones horizontales que pueden considerarse en la superficie del terreno para su representacion geométrica (Acot.—106). Los puntos *m*, *n*... son las proyecciones de los de estacion M, N, y las rectas *ma*, *mb*, *nb*, *nc*... las de las visuales dirigidas á las miras A, B, C...

559. **Hallar la pendiente de la recta que une dos puntos dados del terreno.**—Empleando los goniómetros de limbo zenital y los eclímetros, puede obtenerse esta pendiente como ya sabemos (252 y 500).

Con un nivel bastará dividir el desnivel entre los puntos dados por la proyeccion horizontal de la recta que los une (Acot —25).

560. **Dado un punto del terreno, hallar otro tal, que la recta que los une tenga una pendiente dada.**—Haciendo estacion en el punto dado, se hace que el nonius del limbo zenital marque la pendiente asignada (150), ó el eclímetro la relacion del tanto por ciento ó por unidad (497), y en el sentido que haya de tener la pendiente; se toma en una mira la altura del centro del limbo zenital sobre el punto de estacion, y se busca por tanteos un punto del terreno, en el cual colocada la mira con la altura marcada en ella, la visual tirada por el anteojo vaya á parar exactamente al punto de mira, de la misma manera que hemos indicado (555)

561. Para trazar una recta de pendiente dada con un nivel, se halla (555) un punto cuyo desnivel con el dado sea igual al numerador del quebrado que expresa la pendiente dada, haciendo al mismo tiempo que la distancia horizontal entre ambos puntos sea de 100 metros. Para la pendiente de 3 por 100, se hará que el desnivel sea de 3 metros

562. **Trazar en el terreno una línea de pendiente dada.**—Se resuelve este problema determinando cada uno de sus elementos sucesivos por el problema anterior, como se dijo para la línea poligonal de elementos horizontales (558), con respecto al que le precede (557).

563. **Medida de alturas ó altimetría**—En este problema pueden considerarse en general dos casos distintos, segun sea ó no visible y accesible el pié de la altura. Consideraremos sucesivamente estos dos casos.

564. **Medida de alturas, cuyo pié es accesible, y están situadas en terreno horizontal.**—Sea AE (fig. 206) la altura de una torre cuyo valor se trata de conocer: mídase una base AB, y poniendo el instrumento en estacion de modo que su centro C esté en la vertical del extremo B de la base, diríjase la visual horizontal CD y tómese el ángulo de elevacion DCE; con lo cual se podrá resolver el triángulo rectángulo DCE, en el que se conocen dos ángulos y el cateto $CD = AB$, y se tendrá el valor de DE. Añadiendo á este valor la altura AD, igual á la BC del instrumento, se tendrá el de la altura AE que se trataba de conocer.

Ejemplo.—Sea $AB = CD = 85,^{m}24$; $BC = 1,^{m}15$ y $DCE = 44^{o}\ 26'$: resultará $AE = 84^{m},72$.

565. Conviene saber á qué distancia debe colocarse el observador, para que el error e que se cometa al medir el ángulo $DCE = a$, produzca el menor error posible en el cálculo de la parte DE de la altura AE, que se quiere determinar. Observaremos con este objeto que el triángulo EGC da las igualdades

$$\frac{EG}{\text{sen } e} = \frac{EC}{\text{sen } EGC} = \frac{EC}{\text{sen } DGC};$$

y como DGC es el complemento del $DCG = a - e$, y además en el triángulo EDC se tiene $EC = \dfrac{ED}{\text{sen } a}$, sustituyendo valores en la última expresion, resultará

$$\frac{EG}{\text{sen } e} = \frac{ED}{\text{sen. } a \cos (a - e)};$$

cambiando de lugar los medios en esta proporcion, multiplicando por 2 ambos términos de la segunda razon, poniendo en vez de cos. $(a - e)$, cos. a que difiere muy poco de él, y teniendo presente la transformacion de 2sen a cos. a (Trig 17), resultará por último

$$\frac{EG}{ED} = \frac{2\text{sen. } e}{2\text{sen. } a \cos. a} = \frac{2\text{sen. } e}{\text{sen } 2a} \qquad [28].$$

Esta proporcion da á conocer que el error EG será, con relacion á la altura total ED, tanto menor cuanto mayor sea sen. $2a$, y que se obtendrá el menor error cuando se tenga $2a = 90^{\circ}$ ó $a = 45^{\circ}$, en cuyo caso ED es igual á CD, ó lo que es lo mismo, á la base AB trazada en el terreno.

566. Haciendo uso de la plancheta, se trazará en el papel del tablero una línea de lápiz mn (fig 207) paralela al canto rs, y se colocará el tablero en la posicion vertical por medio de una plomada y de modo que rs quede horizontal, lo que se conseguirá valiéndose del nivel sencillo de aire Se marcará en la línea mn el punto C que se halle en la vertical del extremo B de la base AB, medida de antemano, y clavando una aguja en dicho punto, se hará girar á la alidada alrededor de ella para tomar el ángulo DCE, y se trazará la Cr en la plancheta. Hecho esto, y teniendo cuidado de examinar si el instrumento no ha variado de su posicion primitiva, se tomará la Cd que represente en la escala elegida el valor de la base AB, se levantará en el punto d la perpendicular de, y ésta representará en la escala el valor de DE; al cual se añadirá el valor de la altura CB = AD para obtener la AE.

567. Con la cuerda ó cadena y los piquetes ó jalones, se medirá la altura AH (fig 208) disponiendo un jalon BD y otro CE en el plano vertical de la altura, y el BD de manera que la distancia BC sea poco más ó ménos igual á la diferencia EF de dichos jalones, y que la visual DE dirigida por las cabezas de éstos vaya á parar al punto H. Se medirá la base AB =DG, que se diferenciará tambien poco de HG, y los triángulos semejantes HFD y EFD nos darán la proporcion

$$DF : EF :: DG : HG = \frac{EF \times DG}{DF};$$

y añadiendo al valor de HG el de GA igual á la altura del jalon menor BD, se tendrá la AH Si FE = FD, resultará GH = AB.

568. Por medio de las sombras puede determinarse una altura vertical, cuyo valor representaremos por x, hallando la longitud S de la som-

bra que la altura proyecta en un terreno horizontal, así como la s de un jalon h vertical, cuya altura se mide tambien: entonces se deducirá x de la proporcion

$$s : h : : S : x = \frac{S \times h}{s}.$$

Esta proporcion se funda en el paralelismo de los rayos de luz que limitan las sombras.

569. La proporcion anterior puede establecerse tambien valiéndose de un espejo plano situado horizontalmente en el terreno y de un jalon vertical, determinando el punto del espejo por el cual pasa la recta tirada desde el extremo del jalon al espejo y en prolongacion de la imágen del extremo superior del objeto. Midiendo la altura del jalon y las distancias del punto determinado en el espejo al pié de la altura y al del jalon, se tendrán los tres términos conocidos de la proporcion.

570. **Medida de una altura cuyo pié es accesible y está situada en terreno pendiente ó muy accidentado.**—Se hace estacion en un punto A (fig. 209) y se miden los ángulos verticales FCD, DCB, con los cuales y la distancia CD, proyeccion horizontal de AB, que se obtiene directamente ó se deduce de la pendiente de la misma recta (85), se podrán hallar por la fórmula [12] (519) los valores de los catetos FD y DB, cuya suma es la altura pedida.

Cuando la pendiente es subiendo, y los extremos de la altura están ambos por encima de la horizontal del limbo zenital, se aplicará el mismo procedimiento, restando de la mayor la menor de las alturas obtenidas.

571. Haciendo uso de la cadena ó cinta y los jalones, se fijan en el terreno dos de estos últimos AC y EH (fig. 209) de modo que la visual que pase por sus cabezas pase tambien por el extremo superior F de la altura BF, y se miden las distancias horizontales CD y CY de los puntos A y B, A y H; y para señalar en el jalon EH el punto G donde le corta la visual CB, se plantará un piquete HG en contacto con el jalon EH, de modo que la visual CB pase por su extremo superior G: con lo cual se podrá medir la parte GE del jalon EH. Tendremos entonces que los triángulos semejantes CEG y CBF nos darán (Geom. Teor. 67)

$$CY : EG : : CD : BF = \frac{CD \times EG}{CY}.$$

Si la pendiente de AB (fig. 210) es subiendo, se dispondrá un jalon AC y otro HE en el plano vertical de AC y BF, de modo que los puntos C, E y F correspondan á la misma visual: y como GE es la diferencia de altura á que se hallan las cabezas de los jalones, que ya se conoce de antemano ó que se puede medir, se medirán las rectas AB y AH iguales á CD y CG, y se tendrá la porporcion

$$CG : : GE : : CD : DF;$$

que dará el valor de DF, y se hallará despues

$$BF = DF + BD = DF + AC.$$

572. **Medicion de las alturas en los casos de ser invisibles ó inaccesibles sus extremos inferiores.**—Cuando la disposicion de la altura ó algun obstáculo que el terreno presenta impiden llegar con la medida al pié de la altura, se elige una base CD (fig. 211) en un terreno horizontal y situada en un plano vertical que contenga á la altura AB, ó lo que es lo mismo, que pase por su extremo visible A. Se miden despues los ángulos de elevacion AEG y AFG que forman las AE y AF con la horizontal GF, y se conocerá tambien el ángulo AEF suplemento del AEG. Mídase tambien la distancia CD = EF; y como en el triángulo AEF se conoce un lado y los dos ángulos adyacentes, se podrá resolver y se tendrá la magnitud de la recta AE. Ahora, el triángulo rectángulo AGE, en el que se conoce la hipotenusa y un ángulo agudo, se podrá resolver tambien y se tendrá el valor de AG, al cual se añadirá GB igual á la altura del instrumento EC ó FD; con lo que resultará la AB que tratábamos de hallar.

Ejemplo.—Sean CD = EF = 8,^{m}47; AEG = 49° 20′ 40″; AFG = 39° 17′ 20″; y la altura EC del instrumento 1,^{m}15. Se hallará AE = 30,^{m}72 y AB = 24,^{m}46.

Como se puede medir del mismo modo la altura vertical A′B′ de otro otro punto A′ de la montaña con relacion al mismo plano horizontal que pasa por B, resulta que AB — A′B′ = AG′, diferencia de estas alturas, es la medida de la distancia entre los dos planos horizontales correspondientes á los puntos A y A′; que como ya sabemos es lo que se llama la *diferencia de nivel* entre dichos dos puntos.

573. Valiéndose de la cadena y los jalones se resuelve este problema, situando dos de ellos HC, YD (fig. 212) de modo que la visual HY dirigida por sus cabezas pase por el punto A, y otros dos EL y MG, iguales á los primeros, en la misma alineacion y de modo tambien que la visual ML pase por el punto A. Hecho esto, se tomará una parte EF igual á CD y se concebirán trazadas la horizontal MS, la perpendicular FN á la CG y la LN que será paralela é igual á la HY. Midiendo la distancia DG = MY, y hallando el valor de MN, así como la diferencia HR = LP de los jalones, los triángulos semejantes MNL y MAY en los que MN y MY son las bases y LP y AS las alturas, nos darán (Geom. Teor. 67) la proporcion

$$MN : MY :: LP : AS = \frac{MY \times LP}{MN};$$

y añadiendo á AS la altura DY = BS del jalon menor, se tendrá el valor de AB.

574. Cuando no es posible ó no conviene tomar la base en el plano vertical de la altura, se establece en una direccion cualquiera CD (fig. 213), midiéndola, así como los ángulos AFE, AEF, con lo que podrá resolverse el triángulo AEF y hallar el valor de AE, que con el ángulo de elevacion

AEL determina el triángulo rectángulo ALE. Resolviéndole (519) [11], se hallará en valor de AL, al cual habrá que añadir la altura EC. Este procedimiento supone el empleo de un gafómetro ú otro instrumento que dé los ángulos en el plano de los objetos. En caso de que no sea así, se hará que que la base CD sea horizontal, para lo cual bastará determinar D en el plano horizontal de C (557), y midiendo entonces esta base, así como los ángulos azimutales LFE, LEF, se podrá resolver el triángulo LEF y hallar el valor de EL cateto del triángulo rectángulo ALE, que con el ángulo de elevacion, que tambien se mide, determina el triángulo, y se podrá hallar el cateto AL haciendo aplicacion de la fórmula [12] (519).

575. Con los jalones se resuelve este último problema eligiendo por tanteo una base CD (fig. 213) de modo que plantando dos jalones EC y FD en sus extremos, los dos ángulos AEF y AFE sean cada uno de 60°, lo que se conseguirá fácilmente valiéndose de un triángulo formado con tres reglas de madera de igual longitud, y entonces midiendo la base CD=EF se tendrá el valor de AE. Plántese un nuevo jalon YG en el plano vertical del punto A y del jalon EC de modo que su cabeza G enrase con la visual AE, y concíbase trazada la horizontal EL. Hecho esto, como la GH es igual á la diferencia GY — EC de los jalones, midiendo además la distancia YC = HE, se obtendrá la GE por la ecuacion

$$GE = \sqrt{GH^2 + HE^2} \;;$$

luego en la proporcion

$$GE : GH :: AE : AL,$$

que se obtiene por los triángulos semejantes GHE y EAL, se conocen los tres primeros términos y se podrá hallar el valor del cuarto AL, al que se añadirá BL, igual á la altura del jalon EC, para obtener el de la altura AB.

Si al mismo tiempo se pudiese hacer uso de un triángulo rectángulo isósceles formado con reglas de madera para tomar el ángulo AEL de 45°, se evitaría la proporcion; porque se tendría

$$\overline{AE}^2 = 2\overline{AL}^2 \;;$$

de donde resultaría

$$AL = \frac{AE}{\sqrt{2}}, \text{ y } AB = AL + EC.$$

576. En los casos en que la base se halle muy elevada ó muy por debajo del pié de la altura, se hallan las distancias de sus extremos al plano de la base, ó del instrumento, obteniendo entonces el valor de la altura por la suma ó la diferencia de estas distancias, de un modo análogo al que hemos indicado (570) para el caso de ser accesible el pie de la altura.

577. **Aplicacion de la medicion de las alturas á la determinacion de las cotas de puntos inaccesibles.**—Conocidas por cualquiera de los métodos de nivelacion las cotas de los vértices a, b, c.... (fi-

gura 175) de una base poligonal, pueden determinarse fácilmente las que corresponden á los puntos exteriores *o*, *p*.... generalmente inaccesibles, con sólo medir las pendientes de las visuales dirigidas á los mismos puntos. En efecto, conocida por ejemplo la pendiente de la visual que se proyecta segun *ao*, y obteniendo la proyeccion de esta visual en la construccion del plano, no habrá más que hallar su valor en la escala de este último, y determinar el desnivel entre *a* y *o* por la fórmula [12] (519), el cual se añadirá á la cota de *a*, ó se restará de ella, segun el sentido de la pendiente, para hallar la que al punto *o* corresponde. Será conveniente para mayor exactitud, hacer la correccion de la altura del instrumento (527). La cota de *o* puede comprobarse calculándola además por la pendiente y la proyeccion de la visual *co*. Del mismo modo puede hallarse la de *p* refiriéndola á los vértices *c* y *f*, así como tambien las de los demás puntos exteriores á la base de las operaciones.

CAPITULO VII.

Perfiles y sondeos.

578. **Ideas generales.** —Se llama *perfil* de un terreno (Acot —124 y siguientes) en la direccion marcada por varios de sus puntos, á la interseccion de su superficie con la que engendraría una recta vertical, que recorriese la línea determinada por los mencionados puntos. La superficie así engendrada sería un plano vertical si los puntos que determinan la directriz de la superficie correspondiesen á una misma alineacion: una superficie quebrada, de elementos planos, cuando los puntos de la directriz son los vértices de una línea poligonal: una superficie cilíndrica si la directriz es una curva contínua: y mista de elementos planos y curvos, cuando es mista tambien la directriz. Los puntos de esta línea se señalan generalmente en el terreno con estacas numeradas.

579. **Operaciones que deben ejecutarse á fin de obtener los datos necesarios para la determinacion de un perfil.** —Para la formacion del perfil se ejecuta una nivelacion cuidadosa, teniendo en cuenta que es necesario acotar (505) todos los puntos estacados, y además todos aquellos que, estando comprendidos entre dos estacas y en la línea que los une, influyen en la configuracion del terreno en sentido vertical. Tambien se miden las distancias llevando el croquis y el registro de que hemos hecho mencion (506), ejecutando despues los cálculos y reducciones (507), así como las comprobaciones (509) necesarias para obtener

las *distancias al orígen* y las *cotas* que figuran en las casillas números 5 y 10 del registro (pág. 156), y son los datos necesarios para construir el perfil.

Las operaciones de la nivelacion por pendientes suministran tambien estos datos (525) y pueden emplearse del mismo modo.

580. **Construccion del perfil.**—Se traza una línea recta en la que se marca un punto A′ (fig. 195) como proyeccion del de partida en el terreno, y es el orígen desde el cual se toman como *abscisas* y en la escala de horizontales (Acots.—19) las distancias A′B′, A′D′..., cuyos valores 177,m55..., 461,m40..., se hallan inscritos en la casilla núm. 5 del registro. Se levantan despues perpendiculares en los puntos A′, B′, D′... y se toman en ellas como *ordenadas* y en la escala adoptada para las verticales los valores 85,m000..., 87,691..., 84,817... contenidos en la casilla núm. 10: uniendo despues por rectas ó por medio de una curva contínua los extremos A, B, D de estas ordenadas se tendrá la representacion del perfil.

Para el trazado de las perpendiculares puede levantarse una por un procedimiento geométrico (Geom. Probls. 1 y 2) y tirar paralelas á ella con las plantillas por los puntos de division del eje de abscisas; y como es posible que este paralelismo sufra alguna alteracion, conviene repetir de trecho en trecho la construccion geométrica indicada, á fin de comparar con ella la direccion de las ordenadas inmediatas.

581. **Perfiles considerados en varias direcciones.—Perfil longitudinal y perfiles transversales.**—Las aplicaciones de la nivelacion exigen muchas veces además de la determinacion de un perfil en el sentido de una línea, ya recta, curva ó mista, como la hemos considerado (578), la de otros perfiles dirigidos segun nuevas líneas, cada una de las cuales tiene un punto comun con la primera. El primero de ellos, que sigue *la base* de las operaciones, se llama *perfil longitudinal*, y los segundos reciben el nombre de *perfiles transversales*. Por lo general éstos son normales al perfil longitudinal, y en todo caso las trazas de todos los perfiles se relacionan entre sí por los procedimientos explicados en la Planimetría.

582. **Determinacion de los perfiles transversales y su referencia al plano general de comparacion.**—Los perfiles transversales se consideran divididos, á partir del punto de interseccion de su traza con la del perfil longitudinal, en dos partes llamadas *de la derecha* y *de la izquierda*. El *punto del eje*, que con este nombre se conoce en la práctica el de interseccion á que acabamos de referirnos, es el orígen de que parten las operaciones para cada una de las dos secciones en que hemos considerado dividido el perfil; y por lo tanto las distancias se considerarán referidas al mismo punto para cada una de ellas, de la manera que hemos dicho (508). Calculando igualmente las cotas (507), á partir tambien de la que corresponde al eje con respecto al plano de comparacion elegido para el perfil longitudinal, resultarán *referidas al mismo plano* las correspondientes á los puntos que determinan el perfil transversal.

583 El registro de los perfiles transversales se dispone con el mismo encasillado que el del longitudinal, con sólo la variacion de que la casilla núm. 1 se destina á la numeracion de los perfiles, señalando en ella cada uno de éstos con el número ó la letra del eje. El resto del registro se repite á uno y otro lado de una columna central, que encierra la cota del eje de cada perfil en el mismo renglon que el número ó letra que le designa. La repeticion que acabamos de indicar tiene por objeto anotar á distinto lado de las cotas del eje la porcion de perfil de la izquierda y la de la derecha en cada uno de ellos. Se construyen tambien como el perfil longitudinal (580), y á partir del eje, orígen comun de ambas secciones del perfil transversal

584. **Problemas que pueden resolverse con los perfiles construidos.**—Construido un perfil y anotadas en él las cotas y las distancias al orígen, la distancia horizontal entre dos puntos dados del perfil es la diferencia entre las distancias al orígen que les corresponden, y el desnivel la que existe entre las cotas. Con los perfiles puede hallarse además (Acots.—23) la cota de un punto situado entre dos de los que determinan el perfil; la proyeccion de un punto situado entre otros dos, y cuya cota es dada (Acots.—24); la distancia entre dos puntos dados del perfil (Acots.—22); y la pendiente de la recta que los une (Acots.—25).

585 **Determinacion de las proyecciones horizontales de los puntos del perfil, que tienen cota entera.**—Se resuelve este problema tirando paralelas á la recta que representa el plano de comparacion, equidistante un metro en la escala de las verticales, y proyectando sobre la misma línea los puntos en que encuentra á la del perfil (Acots.—127)

586. **Sondeos.**—La línea de un perfil puede atravesar corrientes de agua, y es necesario muchas veces determinar la seccion de la corriente. El perímetro de esta seccion se determina por lo general en la época de aguas bajas, sin descuidar la apreciacion de los puntos que corresponden á las altas aguas ordinarias y á las de grandes avenidas. Para obtener el perímetro de bajas aguas, se halla el desnivel de los puntos extremos de la porcion de línea del perfil comprendida por la superficie del agua, refiriendo á esta línea la *sonda* ó distancia vertical de cada uno de varios puntos determinados del fondo. Los perímetros de altas aguas ordinarias y extraordinarias, se obtienen marcando los puntos á que en una y otra orilla han llegado las aguas en las épocas mencionadas. Para fijar estos puntos sirven de guía en muchas ocasiones señales más ó menos duraderas que quedan en las orillas, ó bien las marcas hechas por los propietarios de las inmediaciones en las cercas y paredes de sus heredades. Si no existen estas señales, y en todo caso como medio de comprobacion, se recurre á las noticias que pueden suministrar los habitantes de la ribera.

Las *sondas* pueden observarse con el nivel cuando la corriente es pequeña y el arroyo poco profundo, hallando las alturas de mira correspondientes, que dan los reglones, y restando de cada una de ellas la altura de mira observada en la orilla; pero ordinariamente se observan por un peon inteligente las alturas marcadas en los reglones por la superficie del agua, anotando tambien las distancias de reglon á reglon, para lo que puede hacerse uso de una cuerda dividida por medio de cintas de colores vivos para distinguirlas con facilidad, las cuales se anudan á distancias de 2 á 2, de 3 á 3 metros ó á equidistancias mayores, segun las circunstancias de los perfiles y el grado de exactitud que se desea obtener.

Cuando la profundidad y la corriente son mayores que en el caso que hemos considerado, puede hacerse uso de balsas ó barcas, á las que se hace recorrer la alineacion, colocando una persona desde ellas los reglones en los puntos convenientes y observando otra las alturas; ó bien se emplea la *sonda marina*, que no viene á ser otra cosa que una plomada cuyo cordon está dividido, y que termina en su parte inferior por un peso algo mayor que en las ordinarias.

587. **Operaciones de sondeo en los rios, lagos y puertos.**— Estos sondeos pueden tener por objeto no tan sólo conocer las formas y accidentes que presenta el terreno cubierto constante ó alternativamente por las aguas, sino tambien los cambios que puede experimentar por el efecto de los movimientos de las aguas y los arrastres de arena y piedras que ocasiona el oleaje, ó bien la corriente ordinaria ó las extraordinarias de avenidas.

Cuando se trata del sondeo de un rio, ó de una ria que en las horas de la marea baja presenta un cauce no muy ancho y poco profundo ó se divide en varios ramales, se empieza por trazar en el terreno libre de avenidas una *base de operaciones* cuyos vértices se señalan generalmente con las letras del alfabeto. Las situaciones relativas de estas estacas entre sí se determinan por los procedimientos generales de la Planimetría, orientando el plano de esta base para lograr la posicion absoluta de los puntos que la constituyen; y para obtener las cotas de estos mismos puntos se ejecuta una nivelacion detallada y cuidadosa, que sirve además para la formacion del perfil longitudinal.

En cada vértice se determina la traza de un perfil transversal, constituido por una sola alineacion determinada por la condicion de ser normal á uno de los elementos de la base, ó bisectriz del ángulo formado por los elementos contíguos en el vértice de que se trata; ó bien en una direccion propia para cortar á la corriente en el sentido que parezca convenir más al objeto de la operacion, y que se determina por el rumbo que la corresponde ó por el ángulo que forma con uno de los elementos de la base. Otras veces el perfil transversal sigue tambien una línea quebrada, cuyo plano se levanta como hemos indicado para el longitudinal, con el cual debe relacionarse.

588. Los perfiles transversales se señalan tambien por medio de estacas colocadas en los puntos cuyas cotas han de influir al parecer en la forma del perfil, y se miden y anotan cuidadosamente las distancias que median entre ellas, á fin de volver á encontrar los puntos en caso de que las estacas desaparezcan. Estas se señalan con la letra que tiene la del eje de

cada perfil transversal, y con un número de órden, que las determina en él completamente.

Los perfiles transversales se obtienen como hemos indicado (582), aplicando los procedimientos expuestos (586) para la parte cubierta por las aguas. Además de los determinados por las estacas en los perfiles transversales, es necesario acotar los puntos de mayor profundidad en cada uno de ellos, así como otros que no hayan podido ser estacados. Estos últimos no pueden determinarse en general por los métodos explicados, y es necesario en muchos casos enfilar la barca desde tierra, por las señales que hace un observador situado con un instrumento en la alineacion que se sondea (335).

589. *Lagos, lagunas y pantanos.*—Se determina un punto de sonda m (fig. 214), disponiendo jalones a, b, alineados con él y los puntos fijos respectivos A y B. Para determinar el punto de sonda n se colocarán los a' y b'.

En los registros deben anotarse los números de órden de las sondas, á fin de evitar la indeterminacion de los diferentes puntos de sonda y los errores consiguientes. La sonda m se anotará con el número 1, así como los jalones a y b, los que llevarán además la indicacion del punto á que se han enfilado. Los puntos n, a', b' se marcarán con el número 2, y así sucesivamente. Los a, a' ... b, b' ... se dejarán marcados con estacas préviamente numeradas y señaladas, de que deben ir provistos los observadores. Este método se aplica solamente á lagunas ó pantanos de corta extension.

590. Tambien pueden determinarse las proyecciones de los puntos de sonda, eligiendo una base ABC (fig. 215) rectilínea, ó formando un ángulo obtuso, alineando con A, B y C y con el punto m los jalones a, b, c.., estacando estos puntos y poniéndoles la marca del número 1 correspondiente á la primera sonda; procediendo del mismo modo para las sondas sucesivas, que se designarán por su número de órden respectivo.

La referencia del punto de sonda puede hacerse desde el bote mismo, empleando los instrumentos de reflexion en la determinacion de los ángulos r y s, que servirán para referir la posicion de m á los puntos fijos A, B, C (411). Sirviéndose de la brújula de Kater (262) se determinan por observaciones inversas los rumbos de las visuales mA, mB, mC, con lo que se habrá fijado la posicion de m (413).

591. *Puertos.—Costas.*—Las operaciones del sondeo se ejecutan desde un bote, que debe estar dispuesto para anclar en los puntos en que conviene observar la profundidad de las aguas, y á veces tambien la naturaleza del fondo; para lo que se puede cubrir de una capa de grasa ó de otra sustancia conveniente el peso en que termina la plomada de sondear, al cual se adhieren entonces las arenas, el cascajo .. si existen en el fondo. Cuando se quiere conocer mejor su naturaleza, se emplea la *barrena ó tienta-aguja*, cuyo ástil está compuesto de piezas de hierro, que se atornillan las unas á las otras, con objeto de darle la longitud necesaria para alcanzar al fondo, en el cual se introduce la barrena haciéndola girar por

su extremo superior por medio de una palanca: elevándola despues, las materias que se han introducido en la rosca de la barrena dan á conocer la naturaleza de las distintas capas que ha atravesado.

Las proyecciones de los puntos de sonda se pueden determinar desde el bote como hemos dicho (590), ó desde la costa midiendo desde los vértices de una base poligonal los ángulos formados con sus elementos por las visuales tiradas al bote en el momento de izar en él una bandera al arrojar la sonda.

CAPITULO VIII.

Trazado de las curvas horizontales.

592. **Generalidades.**—Las *curvas horizontales*, llamadas impropiamente por algunos *curvas de nivel*, determinan la forma del terreno por las secciones que resultarían (Acots.—106) de cortarle por un cierto número de planos horizontales, equidistantes en sentido vertical; método debido á Felipe Buache, geógrafo francés. Pasemos á ocuparnos de la aplicacion que se hace de los niveles al trazado directo de estas curvas en el terreno, y á la determinacion de sus proyecciones sobre un solo plano.

593. **Trazado directo de las curvas horizontales.**—Partiendo de un punto dado A (fig. 205) en el terreno que se trata de representar, se traza (558) la curva horizontal proyectada en *abc*...; y determinando á continuacion otro punto (555) cuyo desnivel con uno cualquiera de los de la curva trazada sea igual á la equidistancia adoptada para los planos secantes, se podrá trazar la curva horizontal que le corresponde, continuando del mismo modo hasta haber trazado todas las curvas que encierra la porcion de terreno considerada. Cuando dentro de este límite las curvas cierran, sirve de comprobacion el volver con el trazado al punto de partida de cada una de ellas: pero si hay una diferencia de algunos centímetros ó más, conviene rectificar la posicion de los últimamente hallados hasta llegar á uno en que coincidan ambos trazados. Tratándose de una ladera continuada en la que las curvas no cierran, pueden determinarse varios perfiles, partiendo de distintos puntos de una curva horizontal determinada cuidadosamente en toda la extension de la ladera. Estos perfiles se trazan á distancias algo grandes, haciendo uso del problema (555) y tomando por tipo del desnivel la equidistancia de los planos secantes. De esta manera las curvas trazadas despues encuentran muchos puntos de comprobacion.

594. Los puntos hallados para las distintas curvas, se señalan con estacas marcadas por una letra comun á todas las de una misma curva, y además por el número de órden que en ella les corresponde; con lo que quedan perfectamente determinadas.

595. **Dificultades que puede presentar el trazado de una curva horizontal.**—Cuando al trazar una curva horizontal se encuentra un obstáculo, como una casa, un escarpado de rocas, un corte vertical, ú otro cualquiera que impida la aplicacion del método general que hemos dado á conocer en los párrafos precedentes, se continúa trazando la curva hasta llegar á un punto lo más inmediato que sea posible al obstáculo que se trata de salvar, y desde él se sigue nivelando por un camino cualquiera hasta salvarle: hallando entonces por el procedimiento que hemos dado á conocer (555) un nuevo punto, cuyo desnivel con el determinado por la operacion auxiliar sea igual al de éste último con el de la curva, pero en sentido contrario, se tendrá el punto desde el cual puede continuar el trazado

Cuando el obstáculo ha de interrumpir el trazado de varias de las curvas, pueden irse determinando al mismo tiempo dos puntos de cada una de ellas; uno en la nivelacion auxiliar de subida, y otro en la de bajada.

596. **Observaciones generales acerca del trazado directo de las curvas.**—En la resolucion de este problema pueden emplearse todos los niveles explicados en el capítulo II, inclusos los instrumentos de Planimetría usados como niveles, así como las miras de las dos clases explicadas en el mismo. La mira parlante se usa anotando la altura de mira correspondiente á la primera de cada estacion, y buscando en las posiciones sucesivas de la mira durante la estacion del nivel en un mismo punto, las que dan la misma lectura. En la mira de tabla se fija ésta á la altura del primer punto en cada estacion, y se conserva invariable hasta tanto que haya necesidad de variar el punto de estacion del nivel.

597. **Levantamiento del plano de las curvas trazadas.**—El levantamiento del plano tiene por objeto determinar las posiciones relativas de las proyecciones correspondientes á los puntos estacados, y se ejecuta con los instrumentos descritos en la Planimetría, y siguiendo los métodos que en ella hemos dado tambien á conocer. Cuando se levanta el plano de cada curva por el método de rodeo (424), es necesario además levantar el de varias transversales, cada una de las cuales debe pasar por una estaca de cada curva, á fin de relacionarlas entre sí. La direccion de cada una de las transversales en los casos de que cierren las curvas en la extension de terreno que comprenden las operaciones, debe ser la que tiende á un punto de concurso para todas ellas A veces conviene fijar una ó varias bases, relacionadas entre sí, á las que se refieren por abscisas y ordenadas (418) ó por intersecciones (427) los diferentes puntos estacados

598 **Trazado y levantamiento simultáneo de las curvas de nivel.**—Empleando la *brújula nivelante* ó de limbo zenital (250), puede levantarse el plano al mismo tiempo que se trazan las curvas. Dispuesto el instrumento de modo que la visual sea horizontal (258), á fin de emplearle como nivel, se le coloca en estacion en punto m (fig. 205), y se sigue el procedimiento explicado (593), para determinar los puntos de nivel a y b cuidando de observar los rumbos de las alineaciones ma, mb, en el momento en que se fijan estos puntos, observando el primero con el ex-

tremo blanco de la aguja como observacion inversa (239), y el segundo con el azul como directa; trasladándose despues á *n* para hallar un tercer punto *c* de la curva y observar del mismo modo que antes los rumbos de *nb* y *nc*. Midiendo además las longitudes de las líneas arrumbadas, se podrá levantar su plano por el método de rodeo (426); procedimiento expedito que puede aplicarse con la brújula al levantamiento de un plano en general, cuando no hay inconveniente en prescindir de la comprobacion que da la doble observacion de los rumbos en los extremos de cada una de las rectas arrumbadas.

599. **Trazado directo de las curvas en un terreno determinado por puntos acotados.**—Sean A, B, C... (fig. 216) los vértices de un polígono del terreno, y M un punto interior de comprobacion, y supongamos conocidas (505) las cotas de todos estos puntos por las operaciones de nivelacion que se han practicado con este objeto. Partiendo del punto más bajo B por ejemplo, cuya cota es 16, se determina en cada una de las alineaciones BA, BM, BC, si es posible, el punto que se halla 4 metros más elevado que B (555), obteniendo así tres puntos que corresponderán al plano horizontal de cota 20. Entre C y D se determinará del mismo modo el punto de cota 30, suponiendo que la equidistancia de los planos secantes ha de ser de 10m, continuando del mismo modo hasta llegar al vértice F que es el más elevado. Desde este punto se determina el que en la alineacion FG está 8m más bajo que F y se obtendrá un punto de cota 80; bajando 10m se tendrá en la misma alineacion el de cota 70, y así se continuará hasta llegar al punto A. Fijos así muchos de los que pertenecen á las curvas horizontales, se trazan éstas directamente por cualquiera de los distintos métodos que hemos dado á conocer, y se procede despues al levantamiento del plano de las curvas como tambien hemos dicho.

600. **Construccion de las curvas en los planos acotados.**—Levantado y construido un plano, pueden trazarse en él las curvas de nivel que completan la representacion del terreno comprendido, siempre que se hayan determinado por las operaciones de la nivelacion las cotas que corresponden á los distintos vértices del polígono, así como las de los demás puntos notables que figuran en el plano. Sea ABCD... (fig. 216) el de un polígono en el que se ha determinado el punto interior M, que ha servido para la comprobacion de las operaciones de la Planimetría, y supongamos conocidas las cotas de todos estos puntos. El problema está reducido (Acot.—129) á determinar las *escalas dependiente* (Acot.—30) de las rectas que constituyen el plano, y unir por medio de curvas continuas las proyecciones de los puntos de cota 20... 30... 40... múltiplas de la equidistancia 10m adoptada. Para hacer aplicacion á la recta BC por ejemplo, se tomarán sobre la BR, arbitraria de direccion y de longitud indefinida, las partes iguales á una magnitud tambien arbitraria y en número igual á la diferencia de las cotas de B y de C; uniendo el último punto de division con el vértice C por medio de una recta, y tirando á ésta una paralela desde el punto 20 de BR, se determinará en el lado BC el punto de cota 20 cor-

respondiente á una de las curvas. Una construccion análoga se empleará en la determinacion de los demás que han de resultar con cotas múltiplas de la equidistancia de los planos secantes.

601. **Representacion de las curvas en el plano de una poblacion.**—Las curvas horizontales en los planos de las poblaciones sólo tienen por objeto dar á conocer la forma y los accidentes del suelo sobre que está edificada, prescindiendo de las alteraciones, que en virtud de las construcciones ejecutadas ha tenido que experimentar necesariamente. Se trazan del mismo modo que en los demás casos (599 y 600) sirviéndose de los vértices (434) acotados en el plano.

Sería muy conveniente dejar señalados en las aceras de la poblacion, ó referidos á puntos fijos los vértices del plano, así como los puntos obtenidos para las curvas; sobre todo cuando las construcciones deban someterse á una alineacion y á una rasante determinadas; y tambien para facilitar los estudios de distribucion de aguas en la poblacion, ú otros en que tenga influencia la forma del terreno y las variaciones que ha introducido en ella la construccion de los edificios.

602. **Determinacion de las curvas por medio de los perfiles construidos segun las rectas de un plano.—Perfiles auxiliares.**—Las curvas horizontales pueden trazarse en un plano, deduciéndolas de los perfiles construidos (585) siguiendo las distintas rectas que constituyen su levantamiento. Las proyecciones así obtenidas se trasladan á la línea correspondiente del canevás, reduciéndolas préviamente á la escala del plano si es distinta de la que corresponde á las horizontales del perfil, y uniendo despues por curvas contínuas los puntos de igual cota.

Los perfiles no siempre siguen las líneas del plano: algunas veces se trazan y se obtienen perfiles auxiliares por perpendiculares á una de dichas líneas; otras se determinan siguiendo una base de operaciones (Acot.—129), que no es otra cosa que una transversal del plano, cuya proyeccion se relaciona con él, y levantando perfiles transversales (581) en los vértices de esta base, cuyos planos se refieren tambien al del polígono.

603. **Deduccion de perfiles segun direcciones dadas en el plano.**—Determinada la representacion de un terreno por medio de las curvas horizontales, puede deducirse de ella el perfil de la superficie representada, dada la traza ó directriz del perfil. Cuando esta directriz es una recta trazada en el plano (Acot.—125), está reducido el problema á determinar (Acot.—123) la interseccion de la superficie con el plano vertical cuya traza es la recta dada, levantando perpendiculares á esta traza desde las proyecciones acotadas, hasta que encuentren á las trazas de los planos horizontales de igual cota. La línea que une los puntos de interseccion así obtenidos, es el perfil que se pretende hallar.

Tambien puede construirse el perfil (Acot.—126) cuando la directriz es una línea curva ó mista.

Este problema, recíproco del que hemos dado á conocer (602), sirve para dar una idea completa del relieve del terreno en todas direcciones, y tiene una aplicacion muy importante en las variaciones que sin recurrir á nuevas operaciones en el campo puede hacerse experimentar á un proyecto de canal, de un camino, ó de otra obra análoga cualquiera; deduciendo del plano mismo todos los datos que sin su auxilio hubiera sido necesario tomar de nuevo en el terreno.

LIBRO CUARTO.

Representacion del terreno.

CAPITULO PRIMERO.

Triangulacion

604. **Consideraciones generales.**—Conocidas aisladamente por las teorías que preceden las operaciones de Planimetría y de Nivelacion, los instrumentos de que en ellas se hace uso, con sus verificaciones y correcciones, y los problemas que con ellas se relacionan, solo nos falta dar á conocer de qué manera contribuyen simultáneamente á la determinacion de los datos necesarios para la completa representacion geométrica del terreno; objeto, como ya hemos indicado, de la Topografía. Comprenderemos por lo tanto en este capítulo el conjunto de las operaciones topográficas necesarias para conseguir debidamente la representacion de que nos ocupamos, recorriéndolas en el órden en que deben ser ejecutadas.

Los métodos de levantamiento de planos que hemos dado á conocer anteriormente son insuficientes cuando se trata de la representacion de terrenos muy extensos, en los que es necesario fijar con exactitud cierto número de puntos á los que han de referirse los demás; evitando así la acumulacion de los errores á que inevitablemente conduce su determinacion sucesiva por los procedimientos ordinarios de la Topografía. El objeto que nos proponemos se consigue por el método de la *triangulacion*, que consiste en considerar unidos por medio de rectas cierto número de puntos convenientemente elegidos, constituyendo estas rectas una red de triángulos, cuyos ángulos se miden con toda la precision á que es posible llegar, así como uno de los lados el cual es la *base de la triangulacion*. Por medio de los datos así adquiridos se resuelve el triángulo ó triángulos de que forma parte la base, obteniendo con esto el valor de los otros lados que sirven para el cálculo de nuevos triángulos; procediendo del mismo modo hasta haber determidado todos los elementos de los demás triángulos. Hallando tambien las pendientes de los lados de todos ellos, podremos determinar (519 y 524) las cotas de los vértices. Las proyecciones acotadas de todos los demás puntos pueden referirse entonces fácilmente á las de los vértices de la triangulacion.

605. **Clasificacion de las triangulaciones en diferentes órdenes.**—Una sola triangulacion no es en general suficiente para la determinacion de un terreno de extension muy considerable: en efecto, si es corto el número de los triángulos, lo que disminuye la acumulacion de los errores en las observaciones y en los cálculos, los lados tienen mucha longitud, y no se prestan fácilmente á la determinacion de los detalles que á ellos deben referirse; sucediendo lo contrario si es grande el número de los triángulos. A fin de obviar los inconvenientes que presentaría la adopcion absoluta de uno cualquiera de estos dos sistemas, se forma una primera red de triángulos cuyos lados tienen una longitud algo considerable, de 10 á 30 kilómetros, y que determinan con bastante precision las posiciones de los puntos más principales, constituyendo la *triangulacion de primer órden*. Otra segunda red, de lados más pequeños, y muchos de cuyos vértices coinciden con los de la primera ó se relacionan con ellos, forma la *triangulacion de segundo órden*; continuando si es necesario en el establecimiento de nuevos ordenes, cada uno de los cuales se apoya en el anterior y encuentra en él muchas comprobaciones, hasta llegar á aquel en que la magnitud de sus lados se presta con facilidad á la determinacion de los detalles. La longitud de las rectas que constituyen cada órden depende del grado de exactitud que se trata de obtener y de los instrumentos empleados en la medida de los ángulos. Por lo general sólo se consideran dos órdenes, sirviendo el segundo para la referencia de los detalles; razon por la cual se establecen algunos de los vértices de este último en puntos que corresponden á las líneas extensas que cruzan el terreno, como las divisorias, los caminos, los linderos de los bosques y de las grandes propiedades, los rios y los arroyos de importancia; líneas á que se refieren inmediatamente la situacion de los detalles.

606. **Reconocimientos y tanteos.—Eleccion de la base y de los puntos principales.**—A las demás operaciones de la triangulacion debe preceder un reconocimiento detallado del terreno en toda la extension que ha de comprender el plano, midiendo al mismo tiempo una base con la cadena, y refiriendo á ella la situacion de los puntos mas notables por el procedimiento que conocemos (427), ó bien por otros más expeditos (436), construyendo el plano del reconocimiento, á fin de servirse de él para la eleccion de la *base* de la triangulacion definitiva, y señalar los puntos que han de ser vértices de las triangulaciones de los diferentes órdenes, teniendo en cuenta la forma que conviene dar á los triángulos que han de constituirlas. Los tanteos sirven tambien para la designacion de todos aquellos puntos que han de figurar en el plano para que sea completa la representacion del terreno que se recorre, indicando provisionalmente, en vista de su posicion absoluta y de la que ocupan relativamente á puntos inmediatos, si han de ser vértices de la triangulacion ó se han de determinar con relacion á ellos; y para formarse idea de la naturaleza y del órden de sucesion en que han de tener lugar las operaciones topo-

gráficas que han de seguirse, á fin de conseguir de la manera más pronta y más exacta el objeto á que están destinadas.

607. La base debe satisfacer en lo posible á las condiciones siguientes:

1.ª Que se establezca en la parte más céntrica del terreno que se trata de triangular. Esta condicion tiende á evitar la acumulacion de los errores en la parte más distante de aquella en que se hubiese establecido la base, en el caso de no poder satisfacer á la indicada condicion.

2.ª Que se elija para su establecimiento un terreno descubierto y poco accidentado, á fin de facilitar las operaciones de la medicion y procurar la exactitud tan necesaria para asegurar el éxito de los cálculos que en ella se fundan.

3.ª Que sus extremos permitan descubrir el mayor número de puntos notables.

608. *Eleccion de los vértices*.—Los puntos que han de ser vértices de los triángulos deben satisfacer á la doble condicion de estar perfectamente determinados y de poder ser vistos á gran distancia, al mismo tiempo que deben servir para colocar en ellos los instrumentos en estacion. Las agujas de los campanarios y de las cúpulas cumplen generalmente con la primera de estas condiciones á expensas de la segunda; y las señales artificialmente dispuestas evitan la reduccion de los ángulos al centro de la estacion; pero no son en general tan claramente perceptibles. Deben situarse estas señales en puntos elevados, y si es posible de manera que se destaquen en el horizonte, á fin de que se descubran más fácilmente, y determinar su posicion relativamente á puntos fijos (409 y 411) para reponerlas en caso de que desaparezcan.

Varias son las formas adoptadas para la construccion de estas señales, y pueden hacerse con largas perchas empotradas verticalmente en una pequeña obra de mampostería ó de ladrillo, y terminadas en su extremo superior por una pirámide ó un cono algo prolongados. La altura de estas perchas se ha determinado por los ingenieros geógrafos de Francia empleando la fórmula

$$H = 0,00015 \times D \qquad [1],$$

siendo D la distancia máxima á que deben ser observadas.

609. **Forma de los triángulos**.—En la eleccion de los vértices debe procurarse que los triángulos resulten próximamente equiláteros. Para demostrar la conveniencia de esta forma, supongamos que en el triángulo ABC (fig. 217) se tiene un ángulo B muy agudo: un error muy pequeño cometido en la apreciacion del ángulo en A producirá otro muy notable B*m* en el lado opuesto BC; error que aumenta á medida que el ángulo B adquiere valores B′, B″... cada vez más pequeños, y que estará reducido por consiguiente á su menor expresion cuando B sea un *máximo*: y como lo mismo se verifica respecto á los ángulos A y C, resulta que no hay razon para que ninguno sea menor que los otros, y el triángulo debe por lo tanto ser equilátero. Observaremos tambien, que aun

cuando la interseccion mejor determinada corresponda al caso en que las líneas que la producen se cortan á ángulo recto, no se emplea el triángulo rectángulo; porque dicha interseccion no puede tener lugar sin perjudicar á las del tercer lado con los que forman el ángulo recto.

Otra de las ventajas del triángulo equilátero consiste en que los errores cometidos inevitablemente en la medida de los ángulos, pueden llegar á hacerse nulos. En efecto, se tiene la relacion conocida

$$b \operatorname{sen.} A = a \operatorname{sen} B:$$

sean e, e' los errores que provienen de la observacion de los ángulos A y B, y propongámonos determinar el error x que producirán e y e' en la determinacion del lado a, y supongamos que todos ellos resultan por defecto. Sustituyendo en vez de a, A y B los verdaderos valores que les corresponden en virtud de la hipótesis que acabamos de hacer, se tendrá

$$b \operatorname{sen} (A + e) = (a + x) \operatorname{sen} (B + e').$$

Desarrollando en esta fórmula (Trig — 15) sen $(A + e)$ y sen. $(B + e')$, efectuando las operaciones indicadas, teniendo despues en cuenta que por ser e y e' muy pequeños, se pueden sustituir los senos por los arcos y considerar los cosenos como iguales á la unidad, observando que el término $xe' \cos. B$ es muy pequeño por el poco valor de sus factores x y e', y suprimiendo por último las cantidades iguales b sen. A y a sen. B, se obtiene la fórmula

$$b\, e \cos. A = x \operatorname{sen.} B + a\, e' \cos B;$$

sustituyendo en ella el valor de $b = \dfrac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen.} A}$, quitando denominadores, y despejando x, poniendo en vez de los quebrados que resultan sus iguales cot A y cot B (Trig.—13), y sacando a como factor comun, se encuentra

$$x = a\,(e \cot. A - e' \cot. B) \qquad [2].$$

El valor de x depende del factor binomio del segundo miembro, el cual disminuye cuando A y B tienden á ser iguales al mismo tiempo que e y e', y será nulo en el caso de que estas igualdades se verifiquen.

La forma que atribuimos á los triángulos no puede casi nunca obtenerse por completo: se procurará que se acerquen á ella todo lo posible, no admitiendo nunca ángulos menores de 30° en las triangulaciones de segundo y tercer órden; límite á que no se debe llegar en las del primero.

610. **Medida, nivelacion y orientacion de la base de las operaciones.**—Fijos los extremos de la base elegida (607), se mide horizontalmente la distancia comprendida entre ellos con las precauciones indicadas (348), observando las temperaturas de los momentos en que se observan las longitudes de los reglones, á fin de hacer en lo sucesivo la

correccion necesaria (349). En la medida de la base de la triangulacion de primer órden, operacion geodésica de la más alta importancia, se emplean instrumentos y se recurre á medios científicos y á cálculos cuya exposicion nos llevaría más allá de los límites de un curso elemental de Topografía. La base para la triangulacion de España ha sido ejecutada en estos últimos años con sumo acierto y precision, por la Comision geográfica que se ocupa en la actualidad de la triangulacion de primer órden. La base de una triangulacion del segundo ó tercero puede medirse con reglones ó con el aparato descrito (347).

Además de la medida de la base, es preciso obtener la altura de uno de sus extremos sobre el nivel del mar, por medio de observaciones barométricas (553), ó mejor aun las de ambos extremos, con el objeto de hallar el desnivel que existe entre ellos y compararle con el de la nivelacion por alturas, cuidadosamente ejecutada y comprobada con un buen nivel de aire; la cual dará además los desniveles entre los distintos puntos de la base, cuando por los accidentes del terreno es una línea ondulada. En caso de que tuviese una pendiente uniforme, bastaria determinar el desnivel de que tratamos por la nivelacion recíproca (530) haciendo uso de los ángulos zenitales que han de observarse en los extremos de la base al obtener los de la triangulacion, y de la proyeccion horizontal de la base. Cuando esta línea se mide por trozos de distintas inclinaciones, es preciso determinar la pendiente de cada uno de ellos para reducirlos á su proyeccion horizontal.

Es preciso tambien orientar la base, trazando con la posible exactitud la meridiana astronómica (54), y midiendo cuidadosamente el *ángulo azimutal* entre estas líneas, ó el *rumbo* de la base, que es tambien como ya sabemos el ángulo que forma con la meridiana. Puede resolverse este problema con el teodolito, para lo cual no habrá más que fijar el limbo cuando hallándose los ceros en coincidencia con la visual va á parar de uno á otro de los extremos de la base, y dirigir la alidada á la estrella polar, siguiendo su movimiento aparente y fijándola al paso de la estrella por el meridiano (55). El ángulo azimutal recorrido será la orientacion de la base y del plano.

611. **Influencia y límite admisible del error que se comete en la medida de la base.**—La dependencia que tienen de la base el cálculo y las construcciones, hace ver desde luego la necesidad imprescindible de obtener su medida con todo el grado de precision á que pueda aspirarse; agregándose á esta razon la circunstancia de que los errores se van acumulando en los triángulos sucesivos, no compensándose nunca y pudiendo llegar en cada lado al doble del que afecta á la base del triángulo correspondiente.

En efecto, supongamos que en la base c (fig. 217) del triángulo ABC se ha cometido un error e: al calcular el lado a por medio de dicha base, resultará un error que representaremos por x, y se tendrá la proporcion

$$(a + x) \text{ sen. } C = (c + e) \text{ sen. } A;$$

de la que resulta

$$x = \frac{c \operatorname{sen} A + e \operatorname{sen} A - a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} C};$$

y observando que se tiene $c \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} C$, se halla por último

$$x = e \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} \qquad [3]$$

Si se tiene $C = 30°$, y $A = B = 75°$, resulta sen $A = 1$ con corta diferencia y $\operatorname{sen} C = \frac{1}{2}$, lo que da $x = 2e$ conforme habíamos indicado.

612. La longitud de la base y de los lados de los triángulos depende de la extension que ha de comprender el plano, de la escala en que debe construirse y de la mayor ó menor apreciacion del instrumento que ha de emplearse en la medida de los ángulos. Sea ABC (fig. 218) un triángulo equilátero, AB su base, y n el error cometido en la apreciacion del ángulo A, el cual producirá en el lado opuesto una desviacion CD. La medida del ángulo B hecha con el mismo instrumento dará con corta diferencia el mismo error, y el vértice resultará situado en C', desviado del verdadero C en una cantidad CC' que llamaremos e. El triángulo CAC' dará entonces

$$CC' : AC :: \operatorname{sen} n : \operatorname{sen} AC'C;$$

pero CC' es el error e, $AC = b = c$, y

$$\operatorname{sen} AC'C = \operatorname{sen} \left[180° - \left(\frac{C}{2} + n \right) \right] = \operatorname{sen} \left(\frac{C}{2} + n \right);$$

y observando además que siendo muy pequeño el valor de n se tiene sensiblemente $\operatorname{sen} \left(\frac{C}{2} + n \right) = \operatorname{sen} \frac{C}{2} = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, la proporcion anterior dará la fórmula

$$e = 2\, c \operatorname{sen} n \qquad [4];$$

de la que se deduce cualquiera de las tres cantidades e, c, n, dadas las otras dos.

1.º Dado el límite de apreciacion, 10″ por ejemplo, del instrumento angular que ha de emplearse en la triangulacion de primer órden, y atribuyendo á e el límite $0{,}^{m}0002$ de las distancias apreciables á la vista, se tendrá

$$c = \frac{e}{2 \operatorname{sen} n} = \frac{0{,}0001 \times R}{\operatorname{sen} 10''} \qquad [5],$$

despues de haber restablecido el rádio de las tablas con objeto de aplicar el cálculo logarítmico; con lo que se tendrá sucesivamente:

$$\log c = \log 0{,}0001 + C.^{to} \log \operatorname{sen} 10'' = +\,4{,}3144251 - 4 = 0{,}3144251;$$

$c = 2{,}062$, que en la escala de $\frac{1}{10000}$ equivale á más de veinte kilómetros, límite máximo de la base en el terreno.

2.º Si medida la base de una triangulacion de segundo órden, y fijo el límite $0{,}^m0002$ del error e, se quiere hallar la apreciacion del instrumento que ha de emplearse en la medida de los ángulos, se hallará

$$\operatorname{sen} n = \frac{e}{2c} = \frac{0{,}0001}{c} \quad [6]$$

Siendo los lados de los triángulos próximamente de 3000 metros de longitud, se tendria $c = 0{,}3$ en la escala de $\frac{1}{10000}$, y por consiguiente

$$\operatorname{sen} n = \frac{0{,}0001}{0{,}3} = 0{,}0003;$$

que corresponde próximamente al arco de $1'$, el cual señala el límite de apreciacion angular.

3.º Medida la base, y siendo preciso emplear un goniómetro de graduacion dada, puede hallarse la desviacion c que debe tener el vértice del triángulo segun la escala adoptada: no habrá más que aplicar la fórmula [4]. Si se tiene como ántes $c = 0{,}3$ y $n = 1'$, resultará $e = 0{,}0002$ próximamente. En el caso de que hubiese resultado un error mayor que el límite apreciable á la vista, sería necesario variar la escala del plano, lo que se conseguiria determinando la longitud que en él debe tener c para que con la misma apreciacion angular se reduzca el error á 0,0002, aplicando con este objeto la fórmula [5], y viendo la escala en que la base estaría representada por una longitud igual ó menor que c

613. **Determinacion de una base por el cálculo.**—Cuando hay varios órdenes de triangulacion se obtiene como hemos indicado (610) la medida de la base de uno de ellos, deduciendo las demás por el cálculo de cierto número de triángulos relacionados con ella. Daremos un ejemplo en las triangulaciones á que en los párrafos anteriores nos hemos referido. Medida directamente la base AB (fig. 219) de la triangulacion de segundo órden, puede deducirse la AK del primero resolviendo el triángulo ABM, lo que dará el lado AM, que sirve á su vez para resolver el AMP y determinar el valor del lado AP de la triangulacion de primer órden. La resolucion de ABH da tambien el lado AH de la misma triangulacion. Por el conocimiento de los lados AP y AH se pueden resolver entonces los triángulos AKP, AKH, obteniendo el valor del lado comun AK por dos operaciones independientes entre sí, á partir de una misma base AB. Si la diferencia es insignificante, se toma el término medio para valor de la base de la triangulacion de primer órden; en el caso contrario será preciso repetir los cálculos, ó las operaciones en el terreno si los primeros resultan bien ejecutados.

614. **Triangulacion de primer órden.— Medida de los ángulos correspondientes al doble canevás ó red trigonométrica de la Planimetría y de la Nivelacion.**—Las operaciones necesarias para la completa representacion del terreno exigen una *doble triangulacion*, que comprende los ángulos azimutales ó situados en el plano de los objetos, procurando medir el mayor número de ellos que sea posible, y obtener por lo menos dos de los que corresponden á cada uno de los triángulos que se han de resolver; evitando en lo posible las reducciones al centro de la estacion y no omitiendo la observacion de todos los ángulos en los vértices accesibles, aun cuando no sean absolutamente necesarios para la resolucion de los triángulos, toda vez que pueden suministrar comprobaciones importantes al efectuar los cálculos sucesivos. Además de los ángulos referentes á la proyeccion horizontal del canevás, se miden los ángulos zenitales ó de elevacion y depresion, para aplicar los procedimientos de la nivelacion por pendientes á la determinacion de los desniveles que existen entre los vértices del canevás trigonométrico y las cotas que á estos puntos corresponden. Los ángulos del canevás referente á la nivelacion sirven tambien de elementos para la reduccion al horizonte de los ángulos y de las distancias.

615. Los instrumentos que en esta operacion se emplean son los teodolitos de precision, y el círculo repetidor, perfectamente corregidos. Con los teodolitos se obtienen generalmente los ángulos azimutales y los de elevacion ó depresion. Los primeros son susceptibles de repeticion (200 y 202), cuidando de aplicar el procedimiento indicado (183) ó hacer uso en otro caso de la correccion necesaria (203), cuando la alidada es excéntrica; pero es preferible obtener por el método de *reiteracion* (205) todos los que se forman en el vértice en que se hace estacion, ejecutando varias vueltas de horizonte á partir de diversos puntos, y dividiendo por el número de ellas la suma de los valores obtenidos para cada ángulo, los cuales deben haberse dispuesto por su órden y con toda claridad en un registro. Con el teodolito excéntrico de Gambey y el círculo repetidor se pueden obtener los ángulos zenitales por el método de repeticion expuesto (208), y con el último de estos instrumentos se miden y se repiten los ángulos en el plano de los objetos (327).

616. **Bases de comprobacion.**—Terminadas las observaciones de los ángulos, se mide uno de los lados del canevás trigonométrico más distante de la base, con las mismas precauciones y cuidados, el cual sirve en lo sucesivo de comprobacion de los cálculos, comparando el valor obtenido directamente con el que de los cálculos resulta. El valor de la base de comprobacion puede tambien hallarse con el auxilio de la nivelacion barométrica (547).

617. **Triangulaciones de órden inferior.**—La base de cada triangulacion de órden inferior, se obtiene eligiendo la que ha servido con su medida obtenida directamente (613) para calcular la del órden inmediatamente superior, ó tomando en uno de sus lados una parte determinada por dos puntos, cuyas distancias á los extremos de este lado son conoci-

das, ó ya fijando cada uno de los de la nueva base con relacion á tres vértices del canevás anterior, haciendo uso del problema de la Carta (411).

En la determinacion de los ángulos se emplean los teodolitos y se ejecutan tan sólo una ó dos repeticiones. Para obtener las cotas de los vértices se hallan tambien los ángulos zenitales ó de elevacion y depresion, cuidando de hallar por medio de la nivelacion trigonométrica (519) el desnivel entre uno de ellos y otro que corresponda á la triangulacion del órden inmediatamente superior.

Desde los vértices de estas triangulaciones se toman tambien los ángulos que marcan las direcciones de las visuales dirigidas á los puntos principales que no son vértices del canevás, pero que conviene situar en el plano por intersecciones de visuales (409—5.º). Al mismo tiempo se observa desde un vértice á lo ménos el ángulo vertical que ha de servir para determinar la cota del punto exterior observado.

618. **Detalles de la triangulacion.**—Constituyen estos detalles los rios, arroyos, caminos.... y los polígonos que con estas transversales se forman, así como los planos parciales de las poblaciones y de los bosques: todos los cuales se obtienen por los procedimientos generales que hemos dado á conocer en la determinacion de las proyecciones y las cotas de sus puntos notables, y se refieren al canevás trigonométrico fijando muchos de sus puntos (409 y 411) á los de las triangulaciones de los distintos órdenes, que deben estar relacionados entre sí.

Todas estas operaciones pueden ejecutarse con los teodolitos, ó la brújula de limbo azimutal, ó bien con cualquiera de limbo zenital (250), si se quiere determinar las direcciones de los elementos poligonales del seguimiento por el sólo conocimiento de los rumbos. Cuando no se emplea un instrumento provisto de limbo zenital, se ejecuta la nivelacion por alturas, acotando (505) todos los vértices de la línea poligonal y todos aquellos que en el sentido de la misma influyen en la forma del terreno.

619. Para una completa representacion de los accidentes que presenta, es preciso conducir las transversales por todos los caminos, los senderos de los bosques, los canales, rios, arroyos, talwegs, divisorias; otras veces se faldean las laderas, marcando las direcciones de todas las divisorias y los talwegs que corta el seguimiento. Es conveniente llegar con estas operaciones de nivelacion á las cimas de los pequeños cerros aislados, que no han sido determinados por las operaciones anteriores, á fin de obtener las cotas que á sus puntos más elevados corresponden. En los terrenos llanos sigue la nivelacion direcciones determinadas por las ondulaciones más ó ménos pronunciadas del terreno.

CAPITULO II.

Proyeccion horizontal del terreno.

620. **Reduccion de la base al horizonte y al nivel del mar.** —Conocidos por las operaciones ejecutadas en el terreno todos los datos necesarios para su representacion, se da principio á las que suministran la proyeccion horizontal, por la reduccion de la base al horizonte (85) cuando no se ha medido horizontalmente; circunstancia esta última, que siempre tiene lugar para aquella base de la cual se hacen depender todas las operaciones sucesivas (610 y 613). Esta reduccion da para cada elemento ab, bc, ...de la base (fig. 220) el arco de círculo máximo considerado en su punto medio respectivo m, m',... situado en diferente superficie de nivel que los demás; y es necesario reducirlos todos á una sola, que segun se ha convenido por los geógrafos, es la del nivel del mar, cuyo rádio tiene un valor conocido (3) y es tambien la superficie de comparacion á que se han de referir las cotas de los diversos puntos del terreno. Llamando R al rádio terrestre, y h á la altura del punto m sobre el nivel del mar, cuyo valor se deduce añadiendo á su desnivel con a la altura que se supone conocida (610) de este último punto sobre la misma superficie, el rádio de la que contiene á m estará representado por R+h. Designando ahora por B la base m, y por b la reducida np que se busca, se tendrá la proporcion B : b : : R + h : R, de la que se deduce

$$b = \frac{B \times R}{R + h} \qquad [7].$$

Análogamente se reducirían segun pq, qr ...los demás elementos.

621. **Cálculo de los triángulos de primer órden.—Correcciones de los ángulos.**—La base reducida al nivel del mar es la que se emplea en el cálculo de los triángulos de primer órden, quedando referida á la misma superficie la red constituida por el canevás. Las correcciones angulares á que nos referimos son:

1.ª *Correccion de la excentricidad de los anteojos*, que tiene lugar en algunos instrumentos (203).

2.ª *Reduccion de los ángulos al horizonte* (91).

3.ª *Reduccion de los ángulos al centro de la estacion* (188).

* 622. **Correccion del exceso esférico.**—Los ángulos azimutales obtenidos directamente ó por la reduccion al horizonte, como el mAn (fi-

gura 221), son los ángulos planos que corresponden á los ángulos diedros del triedro O correspondiente al triángulo esférico ABC, y por consiguiente los valores de los ángulos A, B, C de este triángulo, cuya suma está comprendida entre dos y seis ángulos rectos (Geom. Teor. 176). La diferencia entre 180° y el valor hallado para la suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera es lo que se conoce con el nombre de *exceso esférico*, el cual está comprendido con los errores de observacion en la diferencia expresada. Para hallar el valor del exceso esférico independientemente de los errores de observacion, Mr Legendre ha demostrado el teorema que vamos á exponer. Sean A, B, C, los ángulos del triángulo esférico ABC, y a, b, c los arcos del círculo máximo que le constituyen ó sus desarrollos, que son sensiblemente iguales (79) á las distancias horizontales entre los puntos A, B y C. Despejando cos. A en la fórmula del teorema fundamental de la trigonometría esférica (Trig. 47), y representando por r el rádio de la esfera, se tendrá que para el triángulo semejante cuyo rádio es la unidad, los lados serán $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ y $\frac{c}{r}$, cuyos valores sustituidos en la fórmula obtenida darán

$$\cos. A = \frac{\cos. \frac{a}{r} - \cos. \frac{b}{r} \cos. \frac{c}{r}}{\operatorname{sen.} \frac{b}{r} \operatorname{sen.} \frac{c}{r}} \qquad [8]$$

Desarrollando en séries los valores de las líneas trigonométricas del segundo miembro, y despreciando las potencias de r superiores á la cuarta, en atencion á que siendo esta cantidad muy grande con relacion á los valores de a, b y c, y entrando en el denominador las potencias de r, hacen muy pequeños los valores de los términos correspondientes, y sustituyendo estos valores en la ecuacion [8], se llega, despues de varias transformaciones, á la expresion

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24\,bc\,r^2} \qquad [9].$$

Si llamamos A′ al ángulo opuesto al lado a en el triángulo rectilíneo cuyos lados son a, b, c, se tendrá (Trig. 43)

$$\cos. A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} \qquad [10],$$

$$\text{y } \operatorname{sen.}^2 A' = 1 - \cos.^2 A' = \frac{2\,a^2\,b^2 + 2a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4\,b^2\,c^2};$$

ecuacion que da, mudando los signos en ambos miembros,

$$-4\,b^2\,c^2 \operatorname{sen.}^2 A' = a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2\,b^2 - 2\,a^2\,c^2 - 2\,b^2\,c^2 \qquad [11]$$

Sustituyendo en la ecuacion [9] los valores hallados en las [10] y [11], y simplificando la segunda fraccion, resultará:

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2} \operatorname{sen}^2 A' \qquad [12].$$

Representando por x el exceso del ángulo A sobre el A', se tendrá:

$$A = A' + x \qquad [13],$$

de la que se deduce (Trig. 15)

$$\cos A = \cos (A' + x) = \cos A' \cos x - \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} x;$$

siendo x muy pequeño, puede considerarse sin error sensible que se tiene $\operatorname{sen} x = x$, y $\cos x = 1$, por lo que la expresion anterior se reduce á

$$\cos A = \cos A' - x \operatorname{sen} A',$$

y poniendo en vez de cos A su valor [12],

$$\cos A' - \frac{bc}{6r^2} \operatorname{sen}^2 A' = \cos A' - x \operatorname{sen} A';$$

que da

$$x = \frac{bc}{6r^2} \operatorname{sen} A';$$

y sustituyendo en la ecuacion [13],

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2} \operatorname{sen} A' \qquad [14]$$

Observando que $\frac{bc \operatorname{sen} A'}{2}$ es el área del triángulo rectilíneo cuyos tres lados son a, b, c, la cual no se diferencia sensiblemente de la del triángulo esférico ABC, llamándola S, sustituyendo en la expresion anterior, y despejando A', se tendrá

$$A' = A - \frac{S}{3r^2} \qquad [15]$$

Del mismo modo se hallará

$$B' = B - \frac{S}{3r^2} \quad \text{y} \quad C' = C - \frac{S}{3r^2} \qquad [16].$$

Sumando las expresiones [15] y [16], y reduciendo, se obtendrá

$$A' + B' + C' = A + B + C - \frac{S}{r^2} \qquad [17].$$

623. Observando los resultados obtenidos en las expresiones [15], [16] y [17], se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª Que el exceso esférico $\frac{S}{r^2}$ se obtiene hallando el área del triángulo esférico en funcion del rádio r de la esfera y de los ángulos A, B, C (Geom Teor. 202), ó por la fórmula $\frac{bc \text{ sen. } A}{2}$ indicada en el párrafo anterior, y dividiéndola por el cuadrado del rádio conocido, que en el caso actual es el valor 6366200m hallado (3) para el rádio terrestre.

2.ª Que el valor de cada ángulo del triángulo rectilíneo que sustituye al triángulo esférico, se obtiene restando del correspondiente en el triángulo esférico el tercio del exceso esférico.

3.ª Que representando $\frac{S}{r^2}$ el exceso esférico independientemente de los errores de observacion, se hallarán estos viendo la diferencia que existe entre el exceso esférico calculado, y el resultado que se obtiene de restar 180º de la suma A + B + C de los ángulos azimutales obtenidos directamente ó por la reduccion al horizonte.

624 **Comprobaciones de los ángulos.** — Conocidos por la medicion directa los valores de los tres ángulos de un triángulo, y además uno de los lados, que es la base para el primer triángulo del canevás, y un lado del triángulo anteriormente calculado para los demás, se halla directamente el valor del exceso esférico (623), hallando antes el área en funcion de los elementos conocidos del triángulo, y se disminuye el de cada uno de los ángulos en el tercio de este exceso. La suma de los ángulos que así se obtienen debe dar 180º; y si resulta alguna diferencia, esta será la suma de los errores de observacion, que se distribuye proporcionalmente entre los tres ángulos. Es conveniente comprobar tambien (211) la suma de los ángulos del contorno poligonal de canavás ZHKPT (fig. 219), ó bien empleando el cálculo que se desprende de las proporciones siguientes:

$$\begin{array}{l} AZ : AH :: \text{sen. } AHZ : \text{sen. } AZH; \\ AH : AK :: \text{sen. } AKH : \text{sen. } AHK; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ AT : AZ :: \text{sen. } ATZ : \text{sen. } ATZ: \end{array}$$

de las que se deduce

$$\frac{AZ \times AH \times \ldots AT}{AH + AK \times \ldots AZ} = \frac{\text{sen. } AHZ \times \text{sen. } AKH \times \ldots \text{sen. } AZT}{\text{sen. } AZH \times \text{sen. } AHK \times \ldots \text{sen. } ATZ};$$

y observando que son iguales, por componerse de los mismos factores, los productos que constituyen la fraccion del primer miembro, se deducirá la ecuacion

$$\frac{\text{sen. } AHZ \times \text{sen. } AKH \times \ldots \text{sen. } AZT}{\text{sen. } AZH \times \text{sen. } AHK \times \ldots \text{sen. } ATZ} = 1 \quad [18];$$

la cual expresa que, numerando los ángulos que se forman en los vértices del polígono, el cociente que resulta de dividir el producto de los senos de los ángulos pares por el de los ángulos impares es igual á la unidad.

625. Cuando sólo se han medido directamente dos ángulos, se halla tambien el exceso esférico determinando el área del triángulo en funcion de los ángulos dados, y corrigiendo estos ángulos en el tercio del exceso esférico. Restando de 180° la suma de los ángulos corregidos se tendrá el valor del tercero, que encerrará los errores de observacion.

En el caso particular de conocerse dos lados del triángulo, se hallará el exceso esférico calculando el área del triángulo en funcion de los lados que se conocen y de los ángulos medidos.

626. **Cálculo de los lados del canevás.**—Reducida la base al nivel del mar, los lados de la red constituida por el canevás de la Planimetría no son otra cosa que lados de triángulos esféricos, y hallando por lo tanto el número de grados á que corresponde la base, dado su desarrollo y el rádio terrestre, se hallaría el indicado valor en grados (Geom. Probl. 40. Ej. 4.°), y se podrían aplicar los procedimientos de la trigonometría esférica á la determinacion de los lados del canevás; pero como el error de 1″ en el valor hallado para uno de ellos produce el de 31^m próximamente en el desarrollo, y por otra parte los lados de los triángulos del canevás son muy pequeños con relacion al rádio terrestre, Mr. Legendre ha demostrado que pueden sustituirse sin error notable á los triángulos esféricos, los triángulos rectilíneos cuyos lados son los desarrollos de los lados de los primeros y cuyos ángulos son los que resultan de la correccion del exceso esférico (623—2.°). Para efectuar los cálculos de manera que den comprobaciones, se resolverá el triángulo AKP (fig. 219), en el que se conoce la base AK y los ángulos, con lo cual se hallará el valor de AP y se podrá resolver el APT y conocer AT, por medio del cual se hallará tambien AZ. Partiendo ahora de la misma base AK se resolverán sucesivamente del mismo modo los triángulos AKH, AHZ, y se tendrá un nuevo valor de AZ, que se comparará con el primero para seguridad de todos los cálculos ejecutados.

627. **Límite de los errores que pueden tolerarse en los elementos de una triangulacion.**—La práctica ha dado á conocer que en la observacion de un ángulo puede tolerarse un error de 15″ para las triangulaciones de primer órden, de 30 á 40 para las del segundo, y para las de tercero puede llegar la tolerancia á 1′ 30″. El conocimiento de esta tolerancia nos puede dar á conocer cuando es admisible la suma de los errores de observacion de los ángulos (624).

En cuanto á los lados se tolera respectivamente un error de 0,0001, de 0,0002 y de 0,001 de la longitud media que corresponde á los lados en cada órden. El primero de estos límites nos puede servir para conocer cuándo es tolerable la diferencia hallada por el cálculo de los valores de AK (613) y de AZ (626).

*628. **Correccion de los ángulos cuando no concuerda la medida de una base de comprobacion con su valor obtenido por el cálculo.**—Cuando el valor obtenido para los lados del canevás que se han medido directamente como bases de comprobacion (616) no concuerda con el obtenido por esta medicion directa, se ejecuta la rectificacion de los valores de los ángulos, para proceder de nuevo al cálculo de los lados. Para dar á conocer este método supongamos que sea a (figura 222) la base de una triangulacion, A el ángulo opuesto á ella en el primer triángulo, B el que se opone en él al lado a' que ha de servir de base para el cálculo del triángulo núm. 2, designando del mismo modo por A', A'', A''' los ángulos opuestos á los lados a', a'', a''', considerados como bases de los triángulos 2, 3 y 4, y por B', B'', B''' los opuestos respectivamente á los lados a'', a''', a^{IV} en los mismos triángulos. Si representamos por m la medida directa de a^{IV}, y hay una diferencia algo notable entre ella y el valor obtenido por el cálculo, debe suponerse que proviene de ligeras incorrecciones en los valores angulares, que será conveniente modificar. Para ello se emplea la fórmula

$$x = \frac{e \text{ tang. } 60^\circ}{2nb \text{ sen } 1''} \qquad [19],$$

en la cual x representa el aumento ó disminucion que en cada caso deben esperimentar los ángulos B, y que corresponde á la disminucion ó el aumento que deben tener los ángulos A; n es el número de triángulos; b el valor deducido por el cálculo para la base de comprobacion, y e la diferencia entre este valor y el obtenido por la medida directa. Esta fórmula es debida á Puissant, y se aplica cuando los triángulos de la red satisfacen á la condicion de ser próximamente equiláteros.

Para hacer una aplicacion de la fórmula, supongamos como en el caso de la figura 222 que se tiene $n = 4$; $e = 2,^{m}27$; $b = a^{IV} = 7520$: se hallará

$$x = \frac{2,27 \times \text{tg. } 60^\circ}{2 \times 4 \times 7520 \times \text{sen. } 1''} = 13'',48$$

Hallado el valor de x, se observará si se tiene $a^{IV} > m$, en cuyo caso debe disminuir a^{IV} y por consiguiente los ángulos B en 13,''5; los ángulos A aumentarán en la misma cantidad. Cuando es $a^{IV} < m$, hay que aumentar los valores de los ángulos B y disminuir los de los ángulos A.

629. **Determinacion de las distancias de los vértices del canevás á la meridiana y su perpendicular.** —La construccion sucesiva de los triángulos calculados, tomando los lados en la escala adoptada para el plano no puede ménos de producir desviaciones en la posicion de los vértices del canevás; y para obviar este inconveniente, aislando los errores gráficos y haciendo desaparecer por lo tanto su influencia, se hallan por medio del cálculo las coordenadas de los vértices, las que se refieren á dos ejes, deduciendo sus valores de los elementos geométricos de los triángulos. Los ejes de referencia son la meridiana y la perpendicular á ella en uno de sus puntos. Supongamos con este objeto que NS (fig. 219) es la meridiana astronómica que pasa por el vértice Z más occidental del

canevás, y EO la perpendicular á ella en el mismo punto. Determinando gráficamente ó por el cálculo (449) el rumbo r de la recta TZ, se hallará el valor del ángulo $s = 360° - r$, y el de su complemento m. Trazando las rectas de puntos que se ven en la figura, perpendiculares las unas y paralelas las otras á la meridiana, se tiene un sistema de triángulos rectángulos, cuya resolucion conduce fácilmente á la determinacion de las coordenadas de los vértices del canevás con relacion á los ejes NS y OE. Por medio de los ángulos de los triángulos que componen el canevás, relacionados con los s y m, se calcularán los n, p, z.... que son necesarios para la resolucion de los triángulos rectángulos del sistema que hemos establecido, ejecutando las sencillas operaciones que siguen, por las que se tiene:

$$n = \text{ATZ} - s; \qquad p = \text{TAP} - n; \qquad z = \text{KPA} = p;$$
$$t = \text{TZA} + \text{AZH} - m; \; t' = 90° - t; \qquad q = \text{ZHA} + \text{AHK} - t'.$$

Una vez hallados los valores de los ángulos, se calculan las coordenadas de cada vértice, efectuando los cálculos que se indican á continuacion:

$$\text{Z} \quad x = 0; \; y = 0.$$
$$\text{T}\begin{cases} x' = \text{Z}a = \text{ZT} \cos m; \\ y' = \text{T}a = \text{ZT} \text{ sen } m. \end{cases}$$
$$\text{A}\begin{cases} x'' = \text{Z}b = x' + \text{A}c = x' + \text{AT sen } n; \\ y'' = \text{A}b = y' - \text{T}c = y' - \text{AT} \cos n. \end{cases}$$
$$\text{P}\begin{cases} x''' = \text{Z}b + bd = x'' + \text{A}e = x'' + \text{AP sen } p; \\ y''' = \text{P}d = \text{P}e + y'' = y'' + \text{AP} \cos p. \end{cases}$$

Así se obtienen las coordenadas de los vértices que se hallan al norte de la EO, y se parte de nuevo del punto Z para la série de los que se hallan en la region sur, con lo que se tendrá:

$$\text{H}\begin{cases} x^{\text{IV}} = \text{Z}f = \text{ZH} \cos t; \\ y^{\text{IV}} = \text{H}f = \text{ZH sen } t. \end{cases}$$
$$\text{K}\begin{cases} x^{\text{V}} = \text{Z}g = x^{\text{IV}} + \text{K}h = x^{\text{IV}} + \text{HK sen } q; \\ y^{\text{V}} = \text{K}g = y^{\text{IV}} - \text{H}h = y^{\text{IV}} - \text{HK} \cos q. \end{cases}$$

Las ordenadas y^{IV}, y^{V} son negativas, como tambien lo serian las abscisas que se contasen de Z á O.

Pueden comprobarse las coordenadas de un punto tal como P, halladas por medio de los lados ZT, TA y AP, estableciendo una nueva disposicion de triángulos rectángulos, y viendo si las coordenadas no difieren mucho de las primeramente obtenidas. Siguiendo la marcha ZHAP se tendría una nueva comprobacion. Tambien se corrige el valor de cada una de las coordenadas, hallando un término medio entre todos los resultados obtenidos, el cual se acepta definitivamente.

630. **Construccion del plano**.—Trazada una recta NS (fig. 223), que representa á la vez la meridiana astronómica, y el desarrollo de un meridiano geográfico (6), se elige un punto A en el cual se levanta la perpendicular OE, que representará el del ecuador ó de un paralelo cualquie-

ra (7), y que en general es el paralelo medio del terreno que se trata de representar en el plano. Hallando el desarrollo 111111,2 (69) de un grado del meridiano, que es un círculo máximo de la esfera terrestre, se podrá dividir la meridiana NS en grados ó en fracciones de grado: y determinando del mismo modo el que corresponde al grado de paralelo medio OE, se le podrá dividir tambien en grados ó en fracciones de grado. El valor del desarrollo de un grado de paralelo depende de su latitud geográfica, y es proporcional al coseno de esta latitud. En efecto, los desarrollos de los paralelos correspondientes á dos puntos dados R y B (fig. 224) son proporcionales á sus rádios RH y BF, senos de los ángulos ROC, BOC ó cosenos de sus complementos L y l, que son las latitudes respectivas de R y B. En virtud de este principio se hallará el desarrollo x de un grado del paralelo correspondiente á la latitud de 40°, que es la latitud media de España, por la proporcion

$$1 : 111111^{m} :: \cos. 40^{0} : x,$$

observando que el coseno de la latitud 0° que corresponde al ecuador es igual á la unidad, y que el desarrollo del arco de 1° del ecuador es 111111^{m} en la hipótesis de ser esférica la tierra. Aplicando el cálculo logarítmico á la proporcion anterior, despues de restablecer el rádio de las tablas, se tendrá $x = 85116^{m}$.

631. Para obtener gráficamente este desarrollo, se trazarán dos rectas que formen un ángulo CAB (fig. 225) igual á la latitud dada, tomando en uno de sus lados y con arreglo á la escala del plano una magnitud AB que represente el desarrollo 111111^{m} del grado del ecuador: trazando con el rádio AB un arco BC, y bajando desde el punto C de interseccion así determinado la perpendicular CD, el segmento AD representará en la escala adoptada la magnitud del grado de paralelo que se trata de determinar.

632. Tirando por los puntos de division correspondientes á los grados ó fracciones del grado de las rectas OE y NS (fig. 223) perpendiculares á estas rectas, se tendrán los desarrollos de los meridianos y los paralelos de la superficie. Para fijar en el plano un vértice dado, se tomarán las abscisas Ax, Ay, distancias calculadas del punto M del espacio á la meridiana y á su perpendicular (629), que serán los desarrollos respectivos de la longitud y latitud geográficas del punto M. Levantando perpendiculares á los ejes en los puntos x é y, su interseccion m será la proyeccion del punto M del espacio.

La longitud geográfica de M se hallará expresada en grados, añadiendo á la del punto A la que corresponda al desarrollo de Ax en el plano, la cual será en la figura de 24′ si cada parte de AE representa 10′ de un grado de paralelo. La latitud se obtendrá del mismo modo por la numeracion que corresponde á las divisiones de los meridianos. Cuando A está en el primer meridiano y en el ecuador, Ax y Ay serán la longitud y latitud de M.

633. Las longitudes y latitudes de los vértices pueden obtenerse di-

rectamente conocidas las de uno de ellos (63 y 65) Supongamos que se conoce la longitud geográfica del extremo A (fig. 19) de la base, y su latitud Am, siendo C el polo norte de la tierra, y mn el arco de ecuador correspondiente al ángulo C. En el triángulo esférico CAB se conoce el lado AB, el AC complemento de la latitud del punto A, y el ángulo r comprendido, que es el rumbo hallado (610) para la base: resolviendo el triángulo (Trig. 59. Primer caso), se hallará el valor del ángulo C y por consiguiente el arco correspondiente mn, que añadido á la longitud de A dará la del punto B; así como el lado BC, que restado de 90° dará el valor de la latitud Bn que al punto B corresponde. A partir de este punto se determinan de un modo análogo las de otra vértice contiguo, y así se continuará hasta haber hallado las longitudes y latitudes de todos los vértices.

*634 El método de proyeccion que hemos expuesto, y que empleó Cassini en la formacion de la carta de Francia es bastante exacto en la construccion del plano de un terreno comprendido entre un corto número de grados de paralelo y de meridiano El paralelismo de los meridianos, los cuales son convergentes sobre la esfera, produce una deformacion en la superficie, que no debe despreciarse cuando la extension del terreno representado es muy considerable. Se evita en parte este inconveniente en el caso á que nos referimos, cuando se trata por ejemplo de la representacion de una de las provincias de la antigua division de España, determinando como antes el desarrollo NS (fig. 223) de la porcion de meridiano que ha de comprender el plano ó carta geográfica, y hallando por el procedimiento indicado (630 ó 631) los desarrollos de los grados ó fracciones de grado de los paralelos extremos: uniendo los puntos de division de estos paralelos se tendrán las direcciones de los meridianos, que resultarán convergentes hácia la parte superior de la carta. Para situar un vértice en ella se determinan los puntos que representan en los paralelos extremos la longitud del punto cuya proyeccion se trata de hallar, así como los que marcan en los meridianos extremos la latitud dada. La interseccion de las rectas tiradas por los puntos así determinados, será la proyeccion que se busca.

*635. En la formacion de la nueva carta de Francia se ha empleado un método más exacto debido á Flaamsteed. En él se trazan en curva los meridianos y los paralelos. Para ellos se desarrolla segun la recta NS (fig. 226) la porcion de meridiano comprendida entre el polo y el paralelo inferior de la carta, y se toma á partir del punto R correspondiente á la latitud media, hácia N, y en la recta trazada una magnitud RC igual á la cotangente del ángulo que expresa la latitud del paralelo medio, 40° por ejemplo, tratándose de la carta de España: se traza desde C como centro con el rádio CR determinado como hemos dicho un arco de círculo, que representará el paralelo medio P. Los demás paralelos son arcos concéntricos, y tienen por rádios las distancias de C á los puntos de division de NS que indican sus diversas latitudes Los arcos p y p' así trazados serán los paralelos extremos de la carta. Tomando en estos arcos con arreglo á la escala del plano los desarrollos de las fracciones SM, RK... de paralelo, calculadas como hemos dicho (630), ó gráficamente determinadas (631), segun la ley de decrecimiento hácia el polo, y haciendo pasar curvas continuas por los puntos correspondientes de division de los paralelos, se tendrán los meridianos MKN....

Se funda este procedimiento en que si desde un punto R (fig. 224) cuya latitud L es de 40°, se tira una tangente al arco de círculo NRS, que es el meridiano de dicho punto, prolongándola hasta encontrar en C á la prolongacion del diámetro terrestre NS, la recta RC, tangente del ángulo ROC, es la cotangente de su complemento L, y al mismo tiempo el rádio correspondiente al arco de círculo trazado sobre la esfera desde el punto C como centro, y que nos ha servido para el del paralelo medio P.

Para hallar en la carta la proyeccion de un punto del espacio, cuya longitud y latitud geográficas se conocen (633), se determinará en el meridiano dividido NS (fig 226) el punto r que marca la division correspondiente á la latitud dada, y se trazará desde C con el rádio Cr un arco indefinido, que será el paralelo p'' correspondiente al punto dado. Determinando en los paralelos de la carta p, P, p'.... los puntos que en sus desarrollos corresponden á la longitud conocida del punto dado, y trazando el meridiano Nm que los puntos de division determinan, su interseccion a con el paralelo p'' será la proyeccion buscada.

*636. La construccion de la carta por el método acabado de explicar presenta una dificultad en la práctica: el trazado de los paralelos, por la gran magnitud del rádio CR en la escala adoptada; este inconveniente se evita determinando por abscisas y ordenadas los puntos tales como A de interseccion de los meridianos y los paralelos, por los cuales se hacen pasar despues estas curvas. Las coordenadas de los puntos de que tratamos se refieren á los ejes rectangulares CX, CY, y se determinan en funcion de la longitud y latitud conocidas de cada uno de ellos. Sean x, y, las coordenadas CD y AD del punto A, y L, l las latitudes del paralelo medio P y del p correspondiente al mismo punto, llamando tambien Q á su longitud geográfica. Se tendrá desde luego:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{CD} = \mathrm{CA} \times \cos z \\ y &= \mathrm{AD} = \mathrm{CA} \times \operatorname{sen} z \end{aligned}\right\} \qquad [20]$$

Para hallar el valor de CA se observará que es CA = CB = CR — BR, y que en la (fig. 224) se tiene CR = RO × tg ROC = RO × cotg L; y llamando R al rádio terrestre, siendo L la latitud del paralelo medio, y teniendo además en cuenta que BR es el desarrollo de un arco de meridiano conocido, que representaremos por M, sustituyendo en el valor de CA, se obtendrá:

$$\mathrm{CA} = \mathrm{R} \times \operatorname{cotg} \mathrm{L} - \mathrm{M} \qquad [21]$$

Con respecto al ángulo z que entra tambien en las fórmulas [20], hallaremos su valor por medio de una proporcion que se funda en que *los valores angulares de dos arcos del mismo desarrollo correspondientes á diferentes rádios, están en razon inversa de estos rádios.* Fundados en este principio, y representando por z el valor del arco AB de rádio CA en el plano (fig. 226) y recordando que hemos llamado Q á la longitud geográfica del punto A, que se halla en un paralelo cuyo rádio es BF (figura 224), se tendrá la proporcion

$$z : Q : : BF : CA ;$$

pero se tiene tambien $BF = BO \times \text{sen}\, BOF = R \times \cos l$, siendo l la latitud del punto dado, que ha de hallarse en el paralelo p (fig. 226); luego sustituyendo en la proporcion anterior este valor de BF, así como el hallado para CA [21] y despejando z, se tendrá

$$z = Q \times \frac{R \times \cos. l}{R \times \text{cotg.} L - M} \qquad [22]$$

Sustituyendo en las fórmulas [20] los valores hallados [21] y [22], se hallará por último

$$\left. \begin{aligned} x &= (R \times \text{cotg } L - M) \cos. \frac{Q \times R \cos. l}{R \times \text{cotg } L - M} \\ y &= (R \times \text{cotg } L - M) \text{sen}. \frac{Q \times R \cos l}{R \times \text{cotg } L - M}; \end{aligned} \right\} \qquad [23].$$

Estas fórmulas dan los valores de las coordenadas de todos los puntos de interseccion de los meridianos con los paralelos, cuyos puntos determinan como hemos dicho el trazado de estas curvas en el plano

637. **Triangulaciones de órden inferior y detalles del plano** —Los triángulos de los órdenes inferiores se calculan del mismo modo que los del primero (626), prescindiendo de la correccion del exceso esférico; y el plano se construye tambien por los mismos procedimientos, aun cuando puede construirse por triángulos sucesivos. En todo caso se puede trasladar al plano general buscando la coincidencia de los vértices que deben tener comunes con las del primer órden ó que han debido referirse á ellos (605)

638 Los detalles del plano (618) se construyen por los procedimientos generales de la Planimetría, y se refieren al plano general por los puntos que se ha tenido cuidado de relacionar con los vértices de las triangulaciones Cuando no coinciden con exactitud los vértices designados en el plano de detalles con las posiciones que deben ocupar en el plano general, puede tolerarse para las distancias que no pasen de 100 metros una diferencia en más ó en ménos de $\frac{1}{50}$ de la longitud total: para las distancias comprendidas entre 100 y 300 metros se tolera un error de $\frac{1}{100}$; de $\frac{1}{300}$ para las que lo estén entre 300 y 500 metros, y de aquí en adelante la tolerancia es de $\frac{1}{500}$.

CAPITULO III.

Relieve del terreno.

639. **Determinacion completa de los puntos del terreno.**— Construido el plano, y conocidas por lo tanto las distancias horizontales entre los distintos puntos que en él se consideran, pueden servir estas últimas en union con los ángulos verticales para hallar los desniveles y las cotas de los mismos puntos (519 ó 530), segun se hayan determinado los ángulos por una sencilla ó por una doble observacion. Refiriendo estas cotas al nivel del mar, para lo cual se ha hallado por lo ménos la altura de uno de los extremos de la base (610), que sirve entonces de partida para el cálculo de las demas cotas, lo estarán á la misma superficie en que se ha proyectado el canevás de la Planimetría (620 y 621), y la posicion de sus vértices estará completamente determinada en el espacio, por sus coordenadas referidas á tres ejes rectangulares, que son:

1.º *La meridiana.*

2.º *La perpendicular á la meridiana en uno de sus puntos y en el plano horizontal en que se encuentra.*

3.º *La vertical que pasa por el punto de interseccion de los dos primeros ejes.*

En efecto, la posicion de la proyeccion de un vértice cualquiera en el plano de los dos ejes primeros, está determinada (444) por sus distancias á la meridiana y á su perpendicular; y tomando en la vertical correspondiente á la proyeccion hallada la magnitud de la cota obtenida para el vértice en cuestion, se tendrá su posicion en el espacio completamente definida (Acot. —3).

640. Las proyecciones y las cotas de los vértices correspondientes á las triangulaciones de los órdenes inferiores y á los polígonos cerrados ó líneas poligonales abiertas que constituyen los detalles del plano, se hallan de una manera análoga, toda vez que en las operaciones del terreno se ha tenido cuidado de tomar los datos necesarios para relacionarlas debidamente con las proyecciones y las cotas de los vértices de la triangulacion de primer órden, directamente ó por medio de los otros puntos que con ella se relacionan.

641. **Curvas horizontales, que detallan las formas del terreno y completan su representacion geométrica.**—Una vez fijas de posicion las proyecciones acotadas de todos los puntos considerados en las operaciones anteriores, falta dar á conocer el relieve del terreno, re-

duciendo el plano de las curvas horizontales (597), y fijando su posicion con respecto á las que se hayan trazado directamente en el terreno, fijando por medio de su orientacion la posicion que les corresponde en el plano acotado, y construyendo las demás por medio de las escalas de pendiente de las rectas que constituyen el canevás de la Planimetría (600), las que tambien pueden deducirse de perfiles construidos segun las mismas líneas (602).

642. **Eleccion de la equidistancia de las curvas.**—La equidistancia de las curvas debe hallarse en relacion con la escala del plano, siendo inversamente proporcional á ella: en efecto, si el plano se ha trazado en escala grande, y lo fuese tambien la equidistancia, la mucha separacion de las curvas haría desaparecer muchos detalles, desfigurando la verdadera forma del terreno, y no dando una idea muy aproximada de sus pendientes; si por el contrario la escala fuese muy pequeña, sería necesario una equidistancia bastante grande para que la union de las curvas no hiciese confuso el dibujo. Estas circunstancias deben guiar en lo general para la adopcion de la equidistancia: en la mayor parte de los casos pueden emplearse, segun Goulard-Henrionnet, las indicadas en la tabla siguiente:

Para la escala de	1 por 5000	2,m5
	1 por 10000	5
	1 por 20000	10
	1 por 40000	15
	1 por 80000	20

643. **Problemas que pueden resolverse en el plano de un terreno determinado por curvas horizontales.**—Obtenida la representacion de un terreno por las curvas horizontales, pueden resolverse en el plano muchos problemas interesantes por sus numerosas é importantes aplicaciones. Entre ellos puede determinarse la cota de un punto cualquiera cuya proyeccion sea dada en el plano (Acot.—113); porque estará comprendido en general entre dos curvas acotadas En el caso particular de hallarse en una de ellas, es evidente que tendrá la cota que á la curva corresponda. Recíprocamente, puede determinarse (Acot.—114) la proyecion de un punto cuando se conoce su cota, y la proyeccion dada ha de hallarse en una recta que tiene dos puntos comunes con las curvas de la superficie representada. Pueden trazarse tambien (Acot.—115) curvas horizontales intermedias relativamente á las que determinan la superficie, completando así en algunos casos su representacion. Se puede determinar (Acot.—116) la longitud é inclinacion de la recta que une dos puntos cuyas proyecciones son dadas en el plano.

644. **Consideraciones generales acerca de la representacion del terreno.**—Trazadas las curvas, y situados en el plano todos los objetos que cubren el terreno y las líneas extensas que le cruzan, con las indicaciones de los nombres con que se conocen en el país las distintas localidades y los diferentes objetos, ha terminado la ejecucion del plano

geométrico encomendado al trabajo del Topógrafo. En este plano se encuentran además de las poblaciones, los edificios aislados de todo género, los rios, los arroyos, los talwegs, las divisorias, los caminos y los lindes y cerramientos de las heredades, la expresion gráfica de las distintas formas que el terreno afecta: en él se hallan marcadas por curvas que representan una parte entrante redondeada, las vertientes separadas por arroyos de un curso uniforme; y por una série de puntos de retroceso cuando lo están por los torrentes y los arroyos de pendientes fuertes, que cruzan los terrenos muy accidentados. Las divisorias aparecen determinadas por una mayor separacion de las curvas en la parte más saliente de la estribacion á que pertenecen; siendo pequeña en esta parte la curvatura cuando la forma del terreno es redondeada, y aumentando cuando corresponden las curvas á una estribacion muy pronunciada. Tambien se encuentran en el plano las indicaciones de los bosques y de las grandes masas de rocas que cubren una porcion extensa del terreno, así como las de los crestones de roca que en algunas localidades se descubren.

La representacion así obtenida se presta á la resolucion de muchos problemas en las aplicaciones de la Topografía, y es muy suficiente cuando se trata de presentar la solucion de un problema, como tiene lugar por ejemplo, en los planos particulares del proyecto de un camino ó de un canal, á fin de justificar la eleccion del trazado hecho en una extension determinada del terreno que cruza la línea; pero cuando se trata de presentar á un golpe de vista, y prescindiendo de los detalles, la forma general del terreno considerado, como en el plano general de un proyecto, se emplean otros medios de representacion, que dan á conocer de una manera más gráfica y dan al plano un aspecto más agradable, y que son del dominio exclusivo del dibujante. En esta parte artística del dibujo topográfico, se emplean los colores que imitan los que los accidentes representados tienen en la naturaleza, y los convencionales adoptados para las obras de arte: tambien se emplea el dibujo á pluma, en el que las formas del terreno se representan por líneas movidas rectas ó curvas, normales á dos curvas horizontales consecutivas.

El grueso de estas normales se ha arreglado por algunos autores á un diapason, en el que resulta proporcional á la pendiente del terreno comprendido entre las curvas horizontales consecutivas; pero este método, puramente geométrico, no presenta ventaja alguna sobre la representacion por curvas horizontales, ni expresa con tanta verdad el relieve del terreno con los efectos de luz y sombra, como el adoptado en España por distinguidos dibujantes. Consiste este método en aumentar la separacion y disminuir el grueso de las normales en las partes más iluminadas, suponiendo la luz de arriba abajo, por la izquierda, y con una inclinacion tal, que las proyecciones de un rayo de luz formen con la línea de tierra ángulos de 45°. Los gruesos y la union de las normales aumentan de una manera gradual en razon de la pendiente y de la mayor sombra. La acertada combinacion de la separacion y de los gruesos, la indicacion de las sombras propias y de las arrojadas por las montañas más elevadas sobre las que las rodean, teniendo en cuenta sus posiciones relativas, los toques oportunamente dispuestos para representar las quebradas y escalonados de los terrenos, la propiedad en la indicacion de las rocas descubiertas, las aguas corrientes, los bosques y demás accidentes naturales, sirven á los dibujantes para sacar mucho partido en la representacion de todos estos accidentes, tal como se presentan en la naturaleza.

LIBRO QUINTO.

Complemento de las operaciones topográficas.

CAPITULO PRIMERO.

Medida de las áreas.

645. **Preliminares.**—Se llama área de una superficie limitada el número de veces que esta superficie contiene á la unidad

La unidad superficial tiene siempre la forma de un cuadrado, cuyo lado es la unidad lineal adoptada para medir las longitudes.

Indiquemos la manera de obtener las áreas de los planos cuya construccion ha sido el objeto de los estudios precedentes; operacion de la mayor importancia en muchas aplicaciones de la Topografía.

646. **Area del triángulo**.—Sea S el área, B la base y A la altura: tenemos (Geom. Teor. 94)

$$S = \frac{B \times A}{2} \qquad [1]$$

647. **Triángulos rectángulos**.—Tratándose de un triángulo rectángulo, como los catetos b y c son en este caso la base y la altura, tendremos para el caso en que se conocen los dos catetos,

$$S = \frac{bc}{2} \qquad [2].$$

648. Si en la fórmula [2] ponemos por un cateto c su valor

$$\sqrt{(a + b)(a - b)} \qquad \text{(Trig.—36)},$$

resultará

$$S = \frac{b}{2} \times \sqrt{(a + b)(a - b)} \qquad [3],$$

que nos da la superficie del triángulo, cuando se conocen la hipotenusa y un cateto.

649. Conocido un cateto b y uno de los ángulos B ó C, sustituyendo en la fórmula [2] uno cualquiera de los valores $c = b$ tang. C ó $c = b$ cot B, (Trig. 31.—2.°) se obtendrán las fórmulas

$$S = \frac{b^2 \text{ tang. } C}{2} \quad [4]. \qquad S = \frac{b^2 \text{ cot. } B}{2} \quad [5],$$

cuyos segundos miembros se dividirán por 10^{10} cuando se trate de aplicar el cálculo logarítmico.

650. Cuando se conoce la hipotenusa a y un ángulo agudo B, se sustituirán en la misma fórmula [2] los valores $b = a$ sen B y $c = a$ cos. B (Trig 31.—1.°) y poniendo en vez de sen. B cos. B su igual $\frac{\text{sen. } 2B}{2}$, (Trigonometría 17), se hallará

$$S = \frac{a^2}{4} \text{ sen } 2B \qquad [6].$$

651. **Triángulos oblicuángulos.**—Sea el triángulo ABC (figura 227), a y c los lados conocidos y B el ángulo comprendido. Llamando h á la altura, tendremos [1] (646)

$$S = \frac{ch}{2}.$$

El triángulo rectángulo CBD da (Trig. 31.—1.°)

$$h = a \text{ sen. B},$$

y sustituyendo por h su valor, resulta

$$S = \frac{ac \text{ sen. B}}{2} \qquad [7],$$

que nos dá el área de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido. En esta fórmula se debe restablecer tambien el rádio $R = 10^{10}$ de las tablas de logaritmos.

652. Conociendo un lado a de un triángulo y los ángulos adyacentes B y C, no habrá más que sustituir por c en la fórmula [7], su valor sacado de la proporcion (Trig. 32.—1.°)

$$c : a :: \text{sen C} : \text{sen A} = \text{sen. (B + C)},$$

y se tendrá

$$S = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{\text{sen B sen. C}}{\text{sen. (B + C)}} \qquad [8].$$

653. Cuando se conoce un lado, el ángulo opuesto y uno de los adyacentes, se halla el valor del tercer ángulo, y queda reducido el problema al caso anterior.

654. Para hallar el área de un triángulo cuando se dan dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, se resolverá el triángulo para determinar los otros dos ángulos, y quedará reducido este caso á uno de los anteriores. Cuando este problema dá lugar á dos soluciones (Trig.—45) se pueden hallar las áreas de los dos triángulos, las cuales serán diferentes; pero si se sabe el triángulo que satisface á la cuestion, bastará hallar la que le corresponde.

655. En el caso de ser conocidos los tres lados, se tiene desde luego en el triángulo ABC (fig. 227)

$$h^2 = b^2 - \mathrm{AD}^2 :$$

y despejando AD en la expresion $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times \mathrm{AD}$, (Geom.—Teor. 72), sustituyendo en la anterior, reduciendo el segundo miembro á una sola fraccion, y descomponiendo en el numerador la diferencia de cuadrados que resulta en un producto de dos factores (Alg.—29), se tendrá

$$h^2 = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2}$$

de donde

$$h^2 = \frac{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}{4c^2}.$$

Llamando $2p$ al perímetro resultará la expresion

$$2p = a + b + c,$$

y restando sucesivamente de ambos miembros $2a$, $2b$ y $2c$, sustituyendo en el valor de h^2, simplificando, y extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros,

$$h = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$$

Sustituyendo ahora este valor de h en la expresion del área del triángulo, que es como sabemos (646)

$$\mathrm{S} = \frac{c \times h}{2},$$

y simplificando despues, se tiene por último

$$\mathrm{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad [9]$$

656. **Aplicaciones de las fórmulas que anteceden.**—Sea el triángulo ABC (fig. 227), en el cual suponemos que se tiene:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{AB} = 11\,178{,}22\ \mathrm{m}\ ; & \mathrm{C} = 52^\circ\ 11'\ 30''; \\ \mathrm{BC} = 11.093{,}60; & \mathrm{A} = 51^\circ\ 38'\ 10''; \\ \mathrm{AC} = 13\,738{,}43; & \mathrm{B} = 76^\circ\ 10'\ 20''; \end{array}$$

y la superficie $S = 60206407$ metros cuadrados próximamente, que corresponde al logaritmo 7,7796427. Con estos valores pueden suponerse conocidos en cada caso los datos de la cuestion, aplicar las fórmulas correspondientes, y comparar los valores hallados con los que asignamos.

657. **Cuadriláteros**.—El área del cuadrilátero ABCD (fig 228) se compone de las áreas de los cuatro triángulos en que le dividen sus dos diagonales. Como se dan conocidas éstas y el ángulo que comprenden, llamando S á la superficie del cuadrilátero, se tendrá (Trig.—7) y (651):

$$\mathrm{AOD} = \frac{1}{2}\,\mathrm{AO} \times \mathrm{OD} \operatorname{sen} \mathrm{AOD}; \qquad \mathrm{BOC} = \frac{1}{2}\,\mathrm{CO} \times \mathrm{OB} \operatorname{sen} \mathrm{AOD};$$

$$\mathrm{DOC} = \frac{1}{2}\,\mathrm{DO} \times \mathrm{OC} \operatorname{sen} \mathrm{AOD}; \qquad \mathrm{AOB} = \frac{1}{2}\,\mathrm{OB} \times \mathrm{AO} \operatorname{sen} \mathrm{AOD};$$

de donde sumando ordenadamente estas igualdades, separando factores comunes, y llamando S á la superficie del cuadrilátero, d y d' á las diagonales y α al ángulo comprendido, se tendrá

$$S = \frac{1}{2}\, d \times d' \operatorname{sen} \alpha \qquad [10].$$

Si las diagonales son perpendiculares entre sí, sen α es igual á la unidad, y el área del cuadrilátero está representada por la mitad del producto de sus diagonales.

658. Cuando el cuadrilátero es inscriptible se tiene $C = 180^\circ - A$; y llamando m á la diagonal DB opuesta á los vértices A y C, se tendrá (651) para las áreas de los triángulos ADB y BDC, y su suma,

$$S = s + s' = \frac{ab + cd}{2} \operatorname{sen} A;$$

pero tambien se tiene (Trig. 32 — 2.º), despues de poner en vez de cos C su igual — cos A,

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A; \qquad m^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos A;$$

que restadas y despejando cos A resulta

$$\cos A = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}, \text{ y } \operatorname{sen} A = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)^2};$$

y por lo tanto, sustituyendo en el valor de S, reduciendo la cantidad subradical á una sola fraccion, sacando del radical el denominador de esta última, y suprimiendo el factor comun $ab + cd$, se obtiene

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - (c-d)^2][(c+d)^2 - (a-b)^2]};$$

introduciendo $\frac{1}{4}$ debajo del radical, y descomponiendo (Alg.—29), los factores que existen en él se obtiene

$$S=\sqrt{\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\left(\frac{a+b+d-c}{2}\right)\left(\frac{c+d+a-b}{2}\right)\left(\frac{c+d+b-a}{2}\right)};$$

por último, representando por p el semiperímetro del cuadrilátero, se tendrá de una manera análoga á la que hemos indicado para el triángulo (655)

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad [11]$$

659. *Area del trapecio.*—Llamando b á la base mayor, b' á la menor, h á la altura y S al área, la fórmula será (Geom. Teor. 95.)

$$S=\frac{b+b'}{2}\times h \qquad [12].$$

Llamando b'' á la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos, la fórmula será (Geom. Teor. 95. Nota.)

$$S=b''\times h \qquad [13].$$

660. Las fórmulas [12] y [13] resuelven el problema en funcion de los lados del trapecio, cuando dos de sus ángulos son rectos; y tambien puede hallarse así en otro caso, calculando por medio del valor de la altura AF (fig. 229) los del lado AE y el AL, igual á DC y obtenido por una paralela á este lado tirada por el punto A.

661. *Area del rectángulo.*—La fórmula será (Geom. Teor. 92.)

$$S=B\times A \qquad [14].$$

662. *Area del cuadrado.*—Llamando l al lado del cuadrado, la fórmula será (Geom. Teor. 92. Corol.)

$$S=l^2 \qquad [15].$$

663. *Area del paralelógramo.*—La fórmula será (Geom. Teor. 93)

$$S=B\times A \qquad [16].$$

664. Para hallar la expresion trigonométrica de esta área, sean en el paralelógramo ABCD (fig. 230) los lados adyacentes AB $=c$ y AD $=b$, y A el ángulo comprendido. Como los triángulos ABD y BCD son iguales, se tendrá (651)

$$ABCD=2\times\frac{1}{2}\,bc \text{ sen. } A;$$

de donde

$$S=bc \text{ sen. } A \qquad [17].$$

Si el paralelógramo fuese rectángulo, sen. A sería igual á la unidad, y la fórmula se convertiría en la [14]

665. **Polígonos regulares.**—Si designamos por l el lado del polígono regular, por a la apotema ó altura de uno de los triángulos isósceles iguales en que queda dividido por las rectas tiradas desde el centro á los vértices, y por n el número de lados, la fórmula será (Geom. Teor. 96):

$$S = \frac{1}{2} nl \times a \qquad [18]$$

Llamando P al perímetro nl, y r á la apotema a, esta fórmula se convertirá en

$$S = \frac{P \times r}{2} \qquad [19].$$

666. **Polígonos irregulares.**—Para determinar la superficie de esta clase de polígonos es necesario concebirlos descompuestos en otras figuras más sencillas.

Estas descomposiciones resultan algunas veces de las líneas establecidas en el terreno para el levantamiento del plano, y otras hay que hacer la descomposicion en este último.

Cuando el establecimiento de las líneas del canevás para el levantamiento del plano del polígono presenta á éste descompuesto en figuras adecuadas al cálculo de su superficie con todos los datos necesarios, ó se puede concebir descompuesto sin necesidad de tomar nuevos datos, sino deduciéndolos de los que ya se conocen, deben seguirse siempre los métodos numéricos, y sólo en el caso contrario se hará uso de los métodos gráficos.

Una vez determinados los datos numérica ó gráficamente, se hará aplicacion de las fórmulas correspondientes para obtener la superficie de cada una de las figuras parciales, y por consiguiente la total del polígono en cuestion.

La primera operacion debe ser por lo tanto la exacta construccion del plano del polígono, cuya superficie se trata de determinar; si bien cuando sólo ésta es necesaria y se emplean los métodos numéricos, puede obtenerse el resultado sirviendo únicamente de guía el croquis ó el registro.

Nosotros supondremos siempre en cuanto vamos á exponer que ha precedido la construccion del polígono en el papel. Del mismo modo, siempre que hablemos de procedimientos gráficos, se ha de entender que no tenemos otro dato que el contorno del polígono construido en el papel, y la escala que ha servido para la construccion. Expondremos los varios métodos de descomposicion generalmente empleados.

667. *Por descomposicion en triángulos y trapecios.*—Levantando un plano por abscisas y ordenadas (418) se obtiene desde luego (fig. 167) la descomposicion en triángulos y trapecios, y no habrá más que aplicar las fórmulas [1] y [12], (646 y 659), y sumar los resultados obtenidos. El estado que para estos cálculos debe formarse es el siguiente:

Estado de la superficie del polígono ABCDEFG.

Número de órden. 1.	Clase de las figuras. 2	Indicacion de los cálculos. 3	Resultados parciales. 4	Resultado total. 5
1	Triáng. ABH	$\frac{19,5 \times 27,6}{2}$	269,10m²	
2	Trap. BHJC	$\frac{27,6 + 38}{2} \times 42,5$...	1394,00 „	
3	Trap. CJMD	$\frac{38 + 23,4}{2} \times 33,3$...	1022,31 „	
4	Triáng. DME	$\frac{23,4 \times 11,7}{2}$	136,89 „	
5	Triáng. AYG	$\frac{41 \times 31,7}{2}$	649,85 „	
6	Trap. YGEL	$\frac{31,7 + 24}{2} \times 44,4$...	1236,54 „	
7	Triáng. LFE	$\frac{24 \times 21,6}{2}$	259,20 „	4967,89m²

El mismo procedimiento puede aplicarse al resultado de la triangulacion cuando se han obtenido las distancias á la meridiana y su perpendicular (629), así como á un polígono construido por otro método cualquiera, trazando y midiendo en el plano los ejes y las coordenadas.

668. Cuando se circunscribe un rectángulo al polígono (421), se restará del área de este rectángulo la suma de las áreas exteriores, cuando son ó pueden considerarse como figuras rectilíneas, rectángulos, triángulos ó trapecios en general, y la diferencia será el área del polígono en cuestion.

669. *Por descomposicion en triángulos.*—Cuando el procedimiento que se ha seguido en el levantamiento del plano presenta al polígono descompuesto en triángulos por diagonales á partir de un mismo vértice (423), como por ejemplo el G (fig. 169), bastará hallar el área de cada uno de los triángulos (646) y sumarlas para obtener la del polígono. Tambien puede descomponerse gráficamente de este modo, el plano del polígono aunque se haya levantado por otro método cualquiera.

Las áreas de los triángulos pueden hallarse en el caso que nos ocupa, empleando la fórmula [9] (655).

670. *Descomposicion del polígono cuando se ha levantado el plano por los métodos de rodeo y de intersecciones.*—Cuando se ha seguido el método de rodeo en el levantamiento del plano de un polígono *abcde* (fig. 171) los triángulos *aob*, *boc*... en que queda descompuesto á partir de un punto interior *o*, quedan determinados por los lados *ab*, *bc*... y los ángulos adyacentes *oab*, *oba*, *obc*... por lo que se hará uso de la fórmula [8] (652), poniendo en ella (Trig.—7) sen A en vez de su igual sen (B + C) y se tendrá, llamando S al área del polígono,

$$S = \frac{1}{2}\left[ab^2 \times \frac{\text{sen.}\,oab\ \text{sen.}\,oba}{\text{sen.}\ aob} + bc^2 \times \frac{\text{sen.}\,obc\ \text{sen.}\,ocb}{\text{sen.}\,boc} + \ldots\right]$$

671. Habiéndose levantado por intersecciones el plano de un polígono ABGFE (fig. 172), puede obtenerse la descomposicion á partir de un vértice cualquiera A, teniéndose por ejemplo para el triángulo AFG el valor del ángulo FAG por la diferencia entre los ángulos conocidos BAF y BAG, y los lados adyacentes AF y AG por la resolucion de los triángulos AFB, AGB, que están determinados por los datos tomados en el terreno. La fórmula aplicable en este caso es la [7] (651).

Si se quiere hallar una fórmula que dé el área del polígono en funcion de la base AB y de los ángulos, la superficie del primer triángulo AEB en el que se conoce el lado AB y los ángulos adyacentes, será [8] (652) $\frac{AB^2}{2} \times \frac{\text{sen. EAB sen. EBA}}{\text{sen. AEB}}$; para hallar la del siguiente EFB, se hallará el ángulo EBF por la diferencia entre los ABF y ABE, y respecto á los valores de los lados adyacentes BE y BF se deducirán de las proporciones conocidas (Trig.—32.—1.º)

$$\text{sen. AEB} : \text{sen. EAB} :: \text{AB} : \text{BE} = \frac{\text{AB sen. EAB}}{\text{sen. AEB}};$$

$$\text{sen. AFB} : \text{sen. FAB} :: \text{AB} : \text{BF} = \frac{\text{AB sen. FAB}}{\text{sen. AFB}};$$

y sustituyendo en la fórmula [7] se tendrá para el área del triángulo BEF la expresion

$$\frac{\text{AB}^2}{2} \times \frac{\text{sen. EAB sen. FAB}}{\text{sen. AEB sen. AFB}} \times \text{sen. EBF}.$$

De un modo análogo se hallaría la del FBG; resultando para el polígono ABGFE, la expresion

$$S = \frac{\text{AB}^2}{2} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\text{sen. EAB sen. EBA}}{\text{sen. AEB}} \\[2ex] + \dfrac{\text{sen. EAB sen. FAB}}{\text{sen. AEB sen. AFB}} \times \text{sen. EBF} \\[2ex] + \dfrac{\text{sen. FAB sen. GAB}}{\text{sen. AFB sen. AGB}} \times \text{sen. FBG} \end{array} \right.$$

Observando la ley que siguen los términos en cuanto á los diferentes ángulos de que cada uno de ellos se compone, es fácil aplicar este método á un polígono cualquiera obtenido por intersecciones.

672. Respecto al método por doble interseccion pueden hallarse las áreas de los triángulos como se ha dicho (653); y para el de radiacion puede aplicarse inmediatamente la fórmula [7] (651).

673. **Contornos curvilíneos.**—Una vez hallada por cualquiera de los procedimientos que anteceden el área del polígono principal del canevás ABCDEFGH (fig. 169), es necesario conocer las de las porciones GF56...... comprendidas entre los lados de éste y las porciones curvas del contorno, para añadirlas al polígono ó restarlas de él segun sean esteriores ó interiores con respecto á su perímetro. Se hará para ello uso de las abscisas y ordenadas que descomponen á estas áreas en triángulos y trapecios (667); pero pueden hallarse más fácilmente cuando las ordenadas están equidistantes. Supongamos que así se verifique en las 5 y 6 de la figura, y llamémoslas b y b', representando por a la equidistancia de estas ordenadas: fácil es ver entonces que las áreas de las tres porciones en que dividen al contorno GF56, son respectivamente (646 y 659)

$$\frac{a \times b}{2}; \quad \frac{b + b'}{2} \times a; \quad \frac{a \times b'}{2};$$

cuya suma dará para el área que se busca,

$$S = \frac{a \times b + a(b + b') + a \times b'}{2} = a(b + b') \quad [20];$$

bastando por lo tanto multiplicar la equidistancia por la suma de las ordenadas.

Este método se aplica para los contornos curvilíneos en el caso citado (668).

674. El método acabado de explicar, se aplica tambien de otra manera llamada de *medicion por cuadrícula*. Consiste en dividir el papel en que el plano se ha trazado por un sistema de rectas, paralelas á una de direccion arbitraria AB (fig 231) y equidistantes entre sí en una magnitud dada, 100 metros por ejemplo de la escala del plano, y otro análogamente dispuesto en direccion perpendicular al primero; y sabiendo que el área de cada cuadrado es de 10000m², los seis cuadrados enteramente ocupados por el plano darán 60000m², á cuyo valor será necesario añadir los de las porciones, que como *ahcrb* no llenan un cuadrado, y pueden calcularse como hemos dicho (673).

Para no manchar el dibujo puede hacerse la cuadrícula en un papel transparente que se dispone sobre el plano.

675. Al procedimiento de la cuadrícula se acude tambien cuando se construye un plano por abscisas y ordenadas, y éstas son de tanta longitud que exceden la abertura del compás y no pueden ser apreciadas con exactitud por la escala de boj (98). Así si el punto *r* está referido al eje 2.....2 paralelo á AB y se conoce el valor numérico 176,24 de su ordenada, bastará tomar de *o* á *n* el valor de la abscisa que debiera tomarse en el eje de referencia, restar 100 del valor de la ordenada, y llevar de *n* á *r* la diferencia 76,24 para obtener la situacion de este último punto en el plano.

676. **Determinacion gráfica de las áreas con auxilio de instrumentos.—Planímetros**.—Los valores de las áreas pueden obtenerse gráficamente con mucha brevedad y con bastante aproximacion, haciendo uso de ingeniosos instrumentos más ó ménos perfeccionados, entre los que citaremos la Ruleta de Dupuit y el Planímetro de Amsler, como los más generalmente usados; si bien no como los que mayor exactitud proporcionan.

677. **Ruleta de Dupuit**.—Este instrumento está destinado á la medida de la longitud de una recta, y á la de la suma de varias rectas recorridas sucesivamente por los puntos de la circunsferencia de una rueda *r* (fig. 232), que gira con un piñon concéntrico é invariablemente unido á ella alrededor de un eje proyectado en *m*. Los dientes del piñon engranan con los de la rueda R, móvil alrededor del eje *n*, y el sistema está dispuesto de manera que la rueda R da una revolucion completa en el tiempo en que la *r* da diez, por el engranaje de diez dientes de que consta el piñon con ciento que presenta la rueda R. Dos agujas indicadoras *s*, *t* están fijas con los ejes *m*, *n* en una armadura metálica *p*, sujeta al mango A. Un tornillo de presion *x* acerca ó separa de la rueda *r* un resorte de acero, con el fin de poderla hacer girar más ó ménos libremente. La circunferencia de la rueda *r* está rayada á fin de que no resbale sin girar, pues en este caso, no se tendrian exactamente las magnitudes de las líneas que recorriese.

La circunferencia de la rueda *r* tiene un desarrollo de un decímetro exacto, que está dividido en diez partes, numeradas con las cifras 0, 1, 2.... y cada una de estas partes corresponde á un centímetro, subdividido en otras veinte, cada una de las cuales vale medio milímetro. Las divisiones correspondientes á los milímetros exactos aparecen algo más largas que las otras, prolongándose más entre ellas las que corresponden á cinco los milímetros.

La rueda R presenta tambien las cifras 0, 1, 2 ... que indican con las unidades que representan el número de revoluciones completas ó de decímetros recorridos por la rueda *r*, á partir de una posicion en que los ceros de las graduaciones de R y de *r* coinciden con los extremos de las agujas *s* y *t*; posicion que se obtiene haciendo girar á la rueda *r* hasta que tenga lugar la coincidencia.

678. **Usos del instrumento.**—Para hallar con auxilio del Planímetro el área de un polígono ABCDE (fig. 233) se hace pasar por él un sistema de paralelas *b*, *b'*, *b''*..., equidistantes entre sí una magnitud *a*, y será fácil ver, análogamente á lo que hemos dado á conocer (673), que el área de este polígono será igual al producto de la equidistancia *a* por la suma de las partes de las paralelas *b*, *b'* ... comprendidas en el polígono. La ruleta sirve para determinar esta suma de paralelas; lo que se ejecuta haciendo en ella la coincidencia de los ceros con las agujas como acabámos de indicar, y colocando el instrumento verticalmente de modo que el extremo de la aguja *t* coincida con el de la recta *b* que se halle más próximo al operador; se le pone entonces en movimiento apoyando la mano ligeramente en el mango A (fig. 232) para que la rueda *r* no resbale sin girar, recorriendo de este modo todos los puntos de la recta dada, con los que irá coincidiendo sucesivamente el extremo de la aguja *t*, hasta que corresponda exactamente al último de ellos. Se levanta entonces para colocarle en un extremo de la paralela *b'*, que se recorre del mismo modo, así como las paralelas restantes. La observacion de las posiciones ocupadas entonces por las agujas indicadoras, dará la longitud buscada. Si tomamos por unidad el centímetro, y la aguja *s* resulta situada entre las divisiones 3 y 4 de R, la rueda *r* habrá dado tres revoluciones ó recorrido 30^{cm}, y si la distancia del cero de la rueda *r* al extremo de la aguja *t* es de dos centímetros marcados por la cifra 2, y seis milímetros y medio observados en la graduacion, que componen $2,^{cm}65$, la longitud de la recta será de $32,^{cm}65$ en escala natural.

Cuando la suma de paralelas que se mide es de mucha longitud, puede suceder que la rueda R dé más de una revolucion: entonces es preciso cuidar de anotar las veces que pasa por *s* el cero de la graduacion de esta rueda, correspondiendo cada vuelta á 100^{cm}.

Puede hacerse la medida sin la coincidencia prévia de los ceros con las agujas, anotando la lectura que marca la ruleta en el momento de empezar á recorrer la primera recta, y hallando despues la diferencia entre ésta y la que señala al concluir de recorrer la última. Si por ejemplo, se empezase con la graduacion $32,^{cm}65$ que marcaba al concluir la que antes hemos propuesto como ejemplo, y despues marcase 79,cm80, la longitud que se busca sería de 47,cm15.

Una vez hallada en centímetros la suma de las paralelas, no habrá más que multiplicarlas por la equidistancia entre ellas, expresada tambien en centímetros, y se tendrá el área del polígono expresada en metros en la escala de $\frac{1}{100}$. Si la equidistancia es un centímetro, la suma de las paralelas dará desde luego el área.

Suponiendo, por ejemplo, que en la figura 233 las paralelas distan seis milímetros, y que la suma de las paralelas b, b'.... es 6cm3, se tendrá $a = 0,^{cm}6$; y el área que se busca

$$S = 6,^{cm}3 \times 0,6 = 3,^{cm^2}78,$$

ó $3,^{m^2}78$ en la escala de 1 por 100.

679. **Reduccion á la escala del plano**.—Obtenidas como hemos visto las lecturas en escala natural y en centímetros cuadrados, para hallar el área de una figura trazada con arreglo á una escala diferente de la de 1 por 100, no habrá más que multiplicar el resultado obtenido por el área que en la escala de la figura represente el centímetro cuadrado. Así, si el polígono ABCDE (fig. 233) estuviere construido en la escala de 1 por 250, como un centímetro lineal representa $2,^{m}5$ en esta escala, el centímetro cuadrado representará $6,^{m^2}25$, por lo que el polígono tendrá un área

$$s = 6,^{m}25 \times 3,^{m}78 = 23,^{m^2}625$$

680. La equidistancia de las paralelas puede hallarse en distinta escala que ellas, cuando su direccion es determinada: se sigue entonces la marcha establecida (678), expresando el valor de a en su escala correspondiente, y multiplicándole por la suma de las paralelas, reducida á su escala respectiva.

Si en la figura 233 se tiene por ejemplo $a = 6^{m}$, lo que indica que la escala á que la equidistancia corresponde es la de $\frac{1}{1000}$, se tendrá entonces para el área del polígono, teniendo presente (679) que la escala de paralelas es de 1 por 250,

$$b + b' + b'' + b''' = 15,^{m}75;$$

haciendo entónces aplicacion de la regla que acabamos de dar, resultará

$$s = 6^{m} \times 15,^{m}75 = 94,^{m^2}50.$$

681. **Observaciones acerca del grado de aproximacion de los resultados obtenidos con la ruleta**.—La experiencia ha dado á conocer que el error cometido en la apreciacion de las áreas con la *ruleta*, puede ser en las escalas ordinarias de 2 á 3 por 100 de la superficie

que se considera; menor por lo tanto que el que tiene lugar cuando se aplica el cálculo determinando gráficamente los elementos geométricos. En la escala de $\frac{1}{100}$ para las paralelas que han de medirse, no hay diferencia apreciable entre los errores que produce el uso del instrumento de que nos ocupamos y los que resultarian de la aplicacion del cálculo, en razon á la mayor apreciacion que se obtiene para los valores de las paralelas.

682. **Planímetro de Amsler.**—Se compone de dos reglas *a, b*, (figura 234), que forman un ángulo variable girando alrededor de una charnela fija en la parte *s* de una armadura *c*, que lleva consigo al contador del aparato. La regla *b* es cilíndrica y termina por el extremo más distante de la charnela en la aguja *h*, que puede subir ó bajar, y fijarse por un tornillo de presion, y que se clava en el plano en que insiste la figura cuya área se trata de determinar, fijando así tambien el extremo de la regla, y permitiéndola sin embargo girar alrededor de él. La regla *a* puede correrse á lo largo de la armadura *c* con objeto de fijar uno de los extremos *f* de esta última, que sirve de línea de fé, en la division de aquella que corresponde á la indicacion que se quiere obtener con el Planímetro, y termina por uno de sus extremos en el estilo *d*. El contador se compone de una rueda graduada vertical *r*, susceptible de girar alrededor de un eje que se apoya en la armadura *c* y de trasmitir su movimiento por medio de un tornillo sin fin á una rueda horizontal *m* tambien graduada. El nonius *n* correspondiente á la rueda *r* está fijo á la misma armadura. Un cilindro metálico que acompaña al instrumento en su caja, sirve para disponerle sobre la armadura de la aguja *h* á fin de aumentar su estabilidad.

683. *Graduacion del contador.*—La rueda *r* está dividida en 100 partes numeradas de diez en diez, y su nonius aprecia décimos de una de estas divisiones. La *m* lo está en 10 partes, cada una de las cuales corresponde á una vuelta entera de la rueda *r*.

Cada division de *r* representa un centímetro cuadrado, y por consiguiente cada una de las de *m* corresponde á un decímetro cuadrado.

Si por ejemplo la línea de fé de *m* se encuentra entre las divisiones 6 y 7, y la de la rueda *r* marca 53 divisiones y el nonius 4, la lectura del Planímetro corresponderá á 653,$^{cm^2}$4. Si la primera se hallase entre 0 y 1, la segunda marcase 5 divisiones y el nonius 7, la lectura corresponderia á 5,$^{cm^2}$7.

Para que las lecturas estén expresadas como acabamos de indicar, es preciso correr la regla *a* en la caja de la armadura *c* hasta la coincidencia del canto *f* que hace veces de línea de fé con la division correspondiente en la regla. Las otras divisiones corresponden á medidas inglesas y no tienen generalmente aplicacion para nosotros.

684. **Determinacion de las áreas y reduccion á la escala del plano.**—Se disponen sobre un plano, lo más horizontal y bien construido

que sea posible, el Planímetro y el papel que contiene la figura cuya área se trata de determinar. Para la disposicion del Planímetro se clava la aguja h colocando sobre ella el cilindro de metal de que hemos hecho mencion para darle estabilidad, descansando entonces el instrumento sobre tres puntos que son: la indicada aguja, la punta del estilo d y el punto inferior de la rueda r; la disposicion de h debe ser tal que permita al estilo recorrer todo el perímetro de la figura. Se coloca entonces exactamente el estilo en uno de los vértices ú otro punto notable del perímetro, anotando la lectura que entonces señale el contador (683); se recorre el perímetro con un movimiento contínuo del estilo hasta que vaya á parar exactamente al punto de partida, anotando tambien la lectura correspondiente á esta posicion. La diferencia de ambas lecturas será en centímetros cuadrados la expresion del área comprendida en el perímetro recorrido. Puede partirse de la posicion cero del contador, con el objeto de tener (678) la expresion del área por una sola lectura; pero la disposicion particular del contador en el planímetro de Amsler no se presta cómodamente al establecimiento de la coincidencia.

La teoría de este instrumento se apoya en consideraciones de cálculos superiores, y por lo tanto prescindimos de ocuparnos de ella, remitiendo á nuestros lectores al tomo IX de la Revista de Obras públicas, pág. 246, donde se ha publicado.

685. Para la reduccion á la escala del plano, no tendremos más que observar que las áreas se obtienen con este Planímetro como con la ruleta, en metros cuadrados para la escala de $\frac{1}{100}$; siendo las reducciones las mismas que hemos dado á conocer (679).

686. **Reducciones para los planímetros modernos de Amsler.**—Los planímetros más modernos de este autor están dispuestos de manera que la regla a (fig. 234) no es corrediza, y dan las áreas en pulgadas cuadradas, que será preciso reducir á metros cuadrados en la escala del plano.

Supongamos por ejemplo, que la diferencia de lecturas obtenida en el Planímetro, como hemos dicho (684) es $769,5-611,2=158,3$; dividiendo esta diferencia por 10 se tendrá el número 15,83 de pulgadas cuadradas inglesas, y multiplicando por 6,45, que son aproximadamente los centímetros cuadrados á que equivale la pulgada cuadrada, el producto tambien aproximado 102,10 representará en centímetros cuadrados el área que se busca.

687. **Correccion á que están sujetos los procedimientos empleados en la determinacion de la áreas.**—Ocurre muchas veces tener que hacer uso en la medicion de las líneas de una cadena cuya longitud es más ó ménos de 10^m, por no tener medio de corregirla comparándola con otra que sea exacta ó no permitirlo el tiempo de que se dispone. En estos casos conviene emplearla cual se halla, tomándola como unidad de medida y hacer los cálculos considerándola como exacta, salvo

á rectificar despues el resultado cuando se averigüe el error de la cadena. Para verificar esta correccion, supongamos que sea n el área que se ha determinado, referida al cuadrado construido sobre el valor real de la cadena que ha servido para la medida de las distancias: si representamos por l este valor real, l^2 será el verdadero valor de la unidad superficial; y como el área le contiene n veces, su verdadera expresion será

$$S = n \times l^2 \qquad [21]$$

Luego *para hallar la superficie no habrá más que multiplicar el resultado obtenido como si la cadena fuese exacta, por el cuadrado de la longitud real de la cadena inexacta.*

Supongamos que con una cadena inexacta se ha obtenido para valor de una superficie $n = 32$ áreas. Midiendo exactamente la cadena, supongamos que su longitud es $l = 10^m,02$: se tendrá

$$S = 32^a \times 100,^{m^2}4004 = 32 \times 1,^a004004 = 32^a,128128.$$

688. Cuando un Planímetro cualquiera no está bien corregido, pueden hallarse con él sin embargo las áreas con el mismo grado de aproximación que si lo estuviese, construyendo en el papel un cuadrado exacto, de un decímetro por ejemplo, y tomando el término medio de las áreas que para él dé sucesivamente la aplicacion del Planímetro á la determinacion de su medida. Supongamos por ejemplo, que para un cuadrado de un decímetro exacto de lado ha resultado de 0,98, y que no pudiendo corregir el instrumento es preciso hacer la correccion en las áreas que por su medio se obtengan. Representando por a el resultado obtenido en el Planímetro para una área cualquiera, se hallará su verdadero valor x por la proporcion

$$0,98 :: 1 :: a : x = 1,0204082 \times a$$

Será preciso por lo tanto multipicar las áreas obtenidas con el auxilio del Planímetro por el coeficiente constante 1,0204082.

689. **Reduccion de las áreas al horizonte.** —Cuando se trata de una área plana, y se conoce su pendiente (46) puede hallarse fácilmente su proyeccion horizontal.

Sea el triángulo ABC (fig. 235) inclinado al horizonte, abc su proyeccion horizontal, y p la pendiente ó el ángulo que forman los planos en que se hallan situados dicho triángulo y su proyeccion, prolongados hasta que se encuentren. Si en la arista Aa del prisma troncado $ABCabc$ se toman las partes inguales AA' y aa', y por los puntos A' y a' se tiran los planos $A'B'C'$ y $a'b'c'$ respectivamente paralelos á los ABC y abc, resultarán los prismas equivalentes $ABCA'B'C'$ y $abca'b'c'$ (Geom. Teor. 211). Llamando S á la superficie del triángulo ABC y tirando desde A' la perpendicular $A'd$ á esta base, el volúmen del prisma $ABCA'B'C'$ será $S \times A'd$, y como el volúmen del $abca'b'c'$ es igual á $abc \times aa'$ tendremos, llamando s á la proyeccion horizontal abc, que

$$S \times A'd = s \times aa'.$$

En el triángulo rectángulo AA′d tenemos (Trig. 31—1.º)

$$A'd = AA' \times \cos AA'd;$$

y como el ángulo aA′d no solo es suplemento del AA′d sino tambien del ángulo p que forman los planos (Geom. Teor. 147) resulta AA′$d = p$, y por consiguiente

$$A'd = AA' \cos p;$$

cuyo valor sustituido en la ecuacion de los volúmenes, recordando que se tiene $AA' = aa'$, nos da por último

$$s = S \times \cos p \qquad [22].$$

Si se tiene $p = 90^\circ$ ó $p = 60^\circ$, será $\cos p = 0$ ó $\cos p = 0{,}5$ y por lo tanto $s = 0$ ó $s = \dfrac{S}{2}$.

Cuando los planos son paralelos es $p = 0$, y por consiguiente se tiene $\cos. p = 1$ y $s = S$.

690. **Tolerancia de los errores que pueden admitirse en el cálculo de las superficies.**—Cuando el valor hallado para la superficie de un polígono ha de corresponder á condiciones dadas, como sucede para las distintas porciones de los planos de detalle (618) cuya suma ha de dar el área de un triángulo del canevás trigonométrico ó de un polígono cualquiera ó zona en que están comprendidas, puede tolerarse un error en más ó en ménos, que no debe pasar de $\dfrac{1}{100}$ para las superficies menores que 100 hectáreas, es decir, que el plano de detalle se considera bien levantado cuando su superficie difiera de la que le corresponde como parte del triángulo ó del polígono, en ménos de una área ó una hectárea por cada 100 de las que comprenda el plano. La tolerancia es de $\dfrac{1}{200}$ para las superficies que comprenden de 100 á 300 hectáreas, y de $\dfrac{1}{300}$ para las que excedan de este límite. Las diferencias en más ó en ménos se reparten proporcionalmente á las áreas de las distintias partes en que se ha dividido el área total.

CAPITULO II.

Transformacion de los polígonos.

691 **Ideas generales.**—Se dice que se *transforma* un polígono en otro, cuando por medio de una *operacion gráfica* se sustituye al primero otro que le es *equivalente*, es decir, que tiene la misma superficie que el polígono dado, pero cuya forma es distinta de la de éste, pudiendo ser el mismo ó diferente el número de sus lados y ángulos; pero siempre distintas las relaciones de magnitud de unos y de otros.

Se concibe que esta operacion gráfica debe ejecutarse en el papel, despues de haber construido el polígono del terreno en la mayor escala posible, para verificar despues las referencias al terreno; puesto que aunque pudiera ejecutarse desde luego sobre este último, las dificultades que se ofrecen en general producen resultados ménos exactos. En la que vamos á decir se entenderá sin embargo que operamos lo mismo sobre el terreno que sobre el papel.

La transformacion de los polígonos es una operacion de la mayor importancia, por las razones siguientes:

1.ª Porque es indispensable como auxiliar en la resolucion de muchas cuestiones, especialmente en las que tienen por objeto la division de los terrenos y heredades.

2.ª Por la aplicacion que puede hacerse de ella como auxiliar tambien para la medicion de las superficies, transformando los polígonos dados en otros, cuyas formas sean más adecuadas para el cálculo de aquellas.

3.ª Por la conveniencia que puede resultar en casos dados á los propietarios colindantes, de la transformacion convencional de sus heredades, en otras que tengan el mismo ó menor número de lados, para regularizar las figuras de los terrenos y rectificar los linderos, ó para satisfacer á otra circunstancia cualquiera.

Pasaremos por lo tanto á la resolucion de varios problemas.

692. **Problema 1.º—Transformar un triángulo equilátero ó isósceles en otro triángulo rectángulo equivalente.**—Si el vértice B (fig. 236) ha de ser el mismo, bájese la perpendicular BD, prolónguese DA de modo que DE sea igual á AC, tírese la BE, y el triángulo rectángulo EBD será equivalente al ABC, por tener ambos igual base y altura (Geom. Teor. 94.—Cor. 1.º). Si la base AC ha de ser la misma, levántase en C la perpendicular CB′ hasta encontrar en B′ á la paralela tira-

da por B á la AC, y trazando la AB′, el triángulo AB′C será el que se pide.

693 **Problema 2.º—Transformar un triángulo escaleno en otro rectángulo equivalente.**—Si la base AC (fig 237) ha de ser la misma, levántese la perpendicular CB′ á la AC y por el punto B tírese la paralela BB′ á dicha AC, y el triángulo AB′C resolverá la cuestion. En el caso de que haya de ser el mismo el vértice, bájese la perpendicular BC′ á la AC prolongada, tómese C′A′ = AC, y trazando la BA′, el triángulo A′BC′ seré el que se pide.

694. **Problema 3.º—Transformar un triángulo cualquiera en otro equivalente que tenga la misma base.**—Trácese por el punto B (fig. 238), la paralela B′B″ á la base AC, y todos los triángulos AB′C, AB″C, que tengan la base AC y sus vértices se hallen en dicha paralela serán equivalentes al propuesto. Este problema sirve para transformar un triángulo acutángulo ABC en otro obtusángulo equivalente AB″C y recíprocamente; siendo determinado el problema cuando se da el valor que ha de tener uno de los ángulos de la base, y pudiéndose enunciar entonces de este modo.

Transformar un triángulo ABC *en otro equivalente* AB′C *que tenga la misma base y altura, y el ángulo* ACB′ *ó* CAB′ *de la base igual á un ángulo dado.*

Si el triángulo dado ABC se ha de transformar en otro isósceles AFG, se levantará la DF perpendicular en el punto medio D de AC; y si en otro rectángulo AEC, la AE perpendicular á AC en uno de sus extremos A.

695. **Problema 4.º—Transformar un triángulo** ABC (fig. 239) **en otro equivalente** AB′C′ **que tenga una altura dada.**—El vértice B′ del nuevo triángulo puede darse situado en el lado AB ó en su prolongacion: en ambos casos tírese la B′C y por el punto B la paralela BC′ á la B′C; únase el punto B′ con el C′ por medio de la B′C′, y el triángulo AB′C′ resolverá la cuestion; pues resultan equivalentes (694) los triángulos BB′C, C′B′C para el primer caso, y los B BC′, CBC′ para el segundo.

Si el vértice B′ estuviese fuera del triángulo ABC, como en las dos posiciones de la figura 240, se tirará la recta AB′ y por el punto B la BD paralela á la AC hasta que encuentre á la AB′ ó á su prolongacion en el punto D; trácese la CD y por el caso anterior constrúyase el triángulo AB′C′, el cual siendo equivalente al ADC, como éste lo es al ABC, quedará resuelta la cuestion.

Se comprende que si el punto B′ no se da de posicion, podrá resolverse por este medio el problema de

Transformar un triángulo ABC *en otro equivalente* AB′C′ *cuya altura sea dada, así como un ángulo* B′AC′ *de la base.*

696 **Problema 5.º—Transformar un triángulo** ABC (fig. 241) **en otro equivalente que tenga una base dada.**—Si la base ha de ser FC, que resulta de prolongar la AC en uno de sus sentidos, se tirará

la BF y por A la paralela AD á la BF, y uniendo el punto F con el D se tendrá el triángulo FDC equivalente al ABC.

Si la base ha de ser la FE que resulta de prolongar la AC en sus dos sentidos, despues de hacer la construccion anterior, se trazará la DE, y por C la CO paralela á DE, y uniendo el punto O con el E, el triángulo FOE será equivalente al FDC y por consiguiente al ABC.

697. **Problema 6.º—Transformar un cuadrilátero cualquiera** ABCD (fig. 242), **convexo ó cóncavo, en un triángulo equivalente cuyo vértice sea el** B **del cuadrilátero.**—Tírese la diagonal BD, y por el punto C la paralela CE á la BD hasta que encuentre á la AD ó á su prolongacion en el punto E; trácese la BE, y el triángulo ABE será el que se busca.

698. **Problema 7.º—Transformar un cuadrilátero cualquiera** ABCD (fig 243) **en un triángulo equivalente cuyo vértice** E **se halle situado en el lado** BC.—Tírense las rectas EA y ED, y por los puntos B y C las BF y CG respectivamente paralelas á las primeras, hasta que encuentren á la AD prolongada en los puntos F y G; y trazando las EF y EG, el triángulo FEG resolverá la cuestion

En el caso de ser el cuadrilátero un paralelógramo, bastará prolongar la base AD (fig. 244) de modo que resulte DF = AD, y uniendo el punto E con los A y F, se tendrá el triángulo AEF equivalente al paralelógramo ABCD, por tener la misma altura y doble base que éste.

699. A veces se quiere transformar un polígono en otro que tenga el mismo número de lados, pero que su forma sea distinta, caso que suele tener aplicacion en muchas ocasiones.

Sea por ejemplo el cuadrilátero ABCD (fig. 245): en vez de prolongar uno de sus lados AB hasta B′ en sentido de su direccion, se trazará por el punto B una recta BE′ en la direccion que convenga, y tirando la diagonal BD y por C la paralela CE á la BD, se unirá el punto de interseccion E con el D, y el cuadrilátero ABED será equivalente al propuesto ABCD.

700. **Problema 8.º—Transformar cualquier polígono** ABCDE (fig. 246) **en otro equivalente que tenga un lado ménos.**—Tírese la diagonal AC, y por el punto B la BF paralela á AC, hasta que encuentre en el punto F á la AE prolongada; únase el punto C con el F, y el pentágono propuesto será equivalente al cuadrilátero FCDE.

701. Como por el caso anterior se puede transformar el cuadrilátero en un triángulo, resulta que cualquier polígono se puede transformar en un triángulo, reduciéndole primero á otro que tenga un lado ménos, el que resulte á otro que tenga un lado ménos que el anterior, y así sucesivamente, hasta convertirle en triángulo, como se ve en el pentágono ABCDE de la figura 247, que se halla transformado en el triángulo equivalente FCG, habiendo servido de bases para las operaciones las diagonales CA y CE que parten de un mismo vértice C.

702. Ahora bien, como hemos dicho (695) el modo de transformar un triángulo en otro que le sea equivalente y que tenga una altura dada y

uno de los ángulos de la base, resulta que se podrá reducir un polígono cualquiera á un triángulo que tenga el vértice en cualquier punto dado, dentro ó fuera del mismo polígono, y de modo que un ángulo de la base sea igual tambien á un ángulo dado.

703. **Problema 9.º—Transformar un triángulo en un cuadrado equivalente.**—Hállese una media proporcional (Geom. Probl. 28) entre la base y la mitad de la altura ó entre la altura y la mitad de la base del triángulo, y se tendrá el lado del cuadrado.

En efecto, sea x el lado del cuadrado, a la altura y b la base del triángulo: tendremos

$$x^2 = \frac{1}{2}\,ab = \frac{1}{2}\,a \times b = a \times \frac{1}{2}\,b;$$

de donde se deducen las proporciones

$$\frac{1}{2}\,a : x :: x : b \qquad \text{ó} \qquad a : x :: x : \frac{1}{2}\,b.$$

704. **Problema 10.—Transformar cualquier polígono en un cuadrado equivalente.**—Se reduce primero á triángulo, y luego este triángulo á cuadrado.

Si el polígono es un *rectángulo*, un *paralelógramo* ó cualquier figura cuya área pueda obtenerse por el producto de dos rectas, la cuestion está reducida á *hallar una media proporcional entre dichas dos rectas*, para tener el lado del cuadrado equivalente que se pide.

Si el polígono es *regular*, se desarrollará el perímetro sobre una recta indefinida, y se hallará la media proporcional entre la mitad del perímetro y la apotema, ó sea el rádio del círculo inscrito.

Por último, para hallar el lado de un cuadrado equivalente á un círculo, se construirá la media proporcional entre la mitad de la circunferencia rectificada y el rádio; pero este resultado no es más que aproximado, pues dependiendo de la rectificacion de la circunferencia, sería necesario para obtenerle con exactitud poder construir una recta con la regla y el compás, que tuviese la longitud exacta de la circunferencia; lo que hasta hoy no ha podido conseguirse.

705. Cuando el número de lados del polígono empiece á ser considerable, se dificulta la transformacion tomando por bases las diagonales á partir de un mismo vértice (701), tanto por la configuracion del polígono y la confusion de las líneas que habría que trazar, como porque á veces la gran distancia de dos vértices en el papel impide hacer uso de la regla y las escuadras para el trazado de la diagonal; debiendo tambien tener en cuenta que las construcciones que se ejecuten permitan que los puntos de interseccion de las líneas que se establezcan se hallen situados en el papel del dibujo. En estos casos conviene tomar por bases las diagonales más á propósito que partan de distintos vértices, como se ve en el eptágono ABCDEFG de la altura 248, en la que se ha tomado primero por base

la diagonal CA, para tener el exágono HCDEFG; despues se ha trazado la diagonal DH para que resulte el pentágono YDEFG, luego la EG para obtener el cuadrilátero YDEL, y por último se trazará la diagonal DL para convertir el cuadrilátero en el triángulo YDM, que será equivalente al eptágono propuesto.

706. Si se examina con detencion la marcha que hemos seguido, se verá que está reducida la cuestion á operar en el sentido del contorno del polígono, cuyo procedimiento es indispensable en los que se componen de un gran número de lados, pues siendo éstos en lo general de cortas y muy variadas longitudes presentan contornos muy sinuosos, y son estas líneas quebradas las que con mas frecuencia limitan los terrenos.

Supongamos que se trata de reducir á un sólo triángulo el polígono *rectilíneo* ABC.... FZ (fig. 249), algunos de cuyos lados presentan bastante longitud, pero otros son de cortas dimensiones. Para facilitar la operacion se empezará por dividir el polígono en dos partes **A** y **B**, ó en mayor número si fuere necesario, prolongando en uno ó en ambos sentidos uno de los lados tal como FE, de modo que la recta VV' atraviese el polígono, siendo E*z* la línea que le divide Despues á partir de esta recta, que tomaremos por base de la operacion, se trazará la CE y por el punto D la paralela D*a* á ella; y tirando la C*a*, ésta reemplazará á los dos lados CD y DE. Se trazará despues la B*a* y por C la C*b* paralela á B*a*, y tirando la B*b*, ésta reemplazará á los tres lados BC, CD y DE. Se trazará por último la A*b* y por B la paralela B*c* á la A*b*, y trazando la A*c*, ésta reemplazará á la parte del contorno formada por los cuatro lados AB, BC, CD y DE. La parte del polígono formada por las AZ y ZT se reemplazará por la T*d* como se ve en la figura, y procediendo del mismo modo supongamos que la T*e* es la línea que reemplaza á la parte del contorno formada por los lados TS, SR.... O*z*, se habrá transformado de este modo el polígono EDC.... O*z*, que constituye la parte **A**, en el cuadrilátero equivalente *cd*T*e*. Se procederá del mismo modo en la otra parte **B**, y supongamos que la recta L*f* reemplaza á la línea quebrada *z*NML, y L*n* á la EFGHYL; y tendremos el triángulo *f*L*n* equivalente al polígono FGH.... N*z*. Si ahora por el problema 5.° (696) transformamos el triángulo *f*L*n* que tiene por base la *fn* en el equivalente *exc*, que tenga por base el lado *ec* del cuadrilátero *e*T*dc*, resultará transformado el polígono propuesto en el pentágono *cd*T*ex*, el cual será ya fácil transformar en un triángulo, ya á partir de un vértice ó de dos, por los métodos empleados en las figuras 247 y 248 (701 y 705).

707. **Método de las compensaciones.**—Cuando el polígono presenta muchos lados de poca longitud ó es curvilíneo, se emplea con ventaja el *método de las compensaciones*, que consiste en sustituirle por otro de ménos lados, dispuestos de manera que haya *compensacion* entre las partes excedentes y deficientes; así, para el contorno curvilíneo representado en la figura 250 se traza una primera recta AB de manera que la figura deficiente *a'* equivalga á la excedente *a*; despues la BC de modo que *b'* equivalga á *b*, y así sucesivamente. La última línea EA está trazada de modo

que la parte deficiente e puede reemplazar á las dos excedentes e' y e''.

Si los contornos de los terrenos son rectilíneos, pueden establecerse las compensaciones con más exactitud; pues si la recta AB (fig. 251) es un lado de un polígono principal, los triángulos a y c pueden reemplazarse por los b y d que aparecen equivalentes.

Se puede dar un medio sencillo para establecer la *recta de compensacion* que ha de sustituir á una línea ondulada, resolviendo el siguiente problema, que tiene además mucha aplicacion en la práctica.

708. *Dada la línea ondulada* EHF (fig. 252) *que separa dos propiedades* M, N, *comprendidas entre las rectas* AB *y* CD, *reemplazarla por una recta* FG *sin que se alteren las superficies de las dos propiedades.*

En el punto de interseccion de la línea ondulada con la recta AB, se levantará á ésta una perpendicular EF prolongándola hasta su encuentro en F con CD, y se hallarán las superficies de los tres segmentos a, b y c que forma con la línea ondulada. La propiedad AEHFC se hallará aumentada en los segmentos a y c y disminuida en el b: si b fuese igual á $a + c$ la recta EF resolvería el problema; pero si resulta $a + c > b$, se hallará la diferencia $a + c - b$ y se dividirá por $\frac{EF}{2}$; tomando á partir de E una parte EG igual al cociente hallado, y trazando la FG, ésta resolverá el problema, siendo la recta de compensacion que ha de representar el nuevo límite comun á ambas propiedades. En efecto, se tiene

$$\text{triáng EFG} = \frac{FE}{2} \times EG = a + c - b$$

709. **Aplicacion de la transformacion de los polígonos á la medida de sus áreas.**—Pudiendo reducirse á triángulo, cuya área se determina fácilmente (646), un polígono cualquiera, aun cuando su contorno sea curvilíneo ó se componga de muchos lados, como hemos visto por todo lo que precede, se ve la importante aplicacion de las transformaciones que forman el objeto principal de este Capítulo; debiendo tenerse presente que si bien el resultado que se obtenga es solamente aproximado, debe esperarse que exista cierta compensacion entre los errores procedentes de las operaciones de transformacion y los que se cometerian por el método general de la descomposicion en triángulos (669), quedando siempre al primero de estos métodos la ventaja de la brevedad.

En algunos casos puede limitarse la transformacion de un polígono á convertirle en otro, el cual pueda calcularse con mas facilidad, por la descomposicion en dos ó mas triángulos. Así en la figura 248, bastará haber transformado el eptágono ABCDEFG en el cuadrilátero YDEL, el cual estando descompuesto por la diagonal DL en los dos triángulos YDL y DEL, que tienen la base comun DL, no habrá mas que bajar perpendiculares desde los vértices Y y E sobre la base para tener las alturas y poder calcular sus superficies. En el caso de la figura 249 se detendría la transformacion cuando se hubiese obtenido el polígono $cdTex$, en el cual tirando la diagonal cT se hallaría descompuesto á partir del punto c en los tres triángulos cdT, Ice y ecx, cuyas superficies se calcularán fácilmente. Como la menor desviacion de los vértices de su verdadera posicion, produciría diferencias de consideracion en el resultado, debe ante todo tenerse seguridad en la exactitud de las construcciones.

710. En todo caso vemos que la determinacion de la superficie se halla reducida al cálculo de uno ó más triángulos, que en general son oblicuángulos, por lo que este método es muy expedito y vamos á exponer la manera de simplificar mas el cálculo. En efecto, como hemos enseñado el modo de convertir un triángulo oblicuángulo ABC (fig. 253) en otro rectángulo ADC (694), la cuestion está reducida ahora á transformar el triángulo ADC en otro tambien rectángulo AFE, tal, que dando un cierto valor al cateto AE que sirve de base, no haya más que tomar en la escala el valor del otro cateto AF que ha de ser la altura. Para esto se prolongará AC de modo que AE sea igual á 200^m de la escala, se tirará la DE, y por el punto C la CF paralela á la DE; uniendo despues F con E por medio de la FE, el triángulo AFE será equivalente al ADC, y por consiguiente al ABC. Para hallar ahora la superficie del AFE tendremos

$$AFE = \frac{AE}{2} \times AF = \frac{200^m}{2} \times AF = AF \times 100^m;$$

donde vemos que con sólo tomar la longitud de AF en la escala y multiplicar por 100 se tiene la superficie del triángulo.

Ejemplo: Sea AF $= 54,^m35$; tendremos

$$AFE = 54,^m35 \times 100^m = 5435^{m^2} = 54,^a35;$$

luego la superficie del triángulo contendrá 54 áreas y 35 centiáreas.

711. Cuando se han obtenido las áreas por el método de la *cuadrícula*, que hemos dado á conocer (674), pueden reducirse los polígonos excedentes á triángulos rectángulos que tengan por bases los lados de los cuadrados, y cuyas alturas se tomen tambien en lados de los mismos; y entonces las superficies se calculan fácilmente del siguiente modo. Sea ABCDEFGH (fig. 254) la parte de polígono comprendida dentro del cuadro MNPR; tomando el lado MR de éste por base de reduccion, se transformará (705) la porcion de polígono en el triángulo equivalente Aab, y éste en otro MdR que tenga por base el lado MR del cuadrado (696), para lo cuál se tirará primero la aM y por A la Ac paralela á aM, y por último la Mc, y se tendrá el triángulo Mcb. Se unirá el punto c con el R, se trazará por b la bd paralela á cR, y uniendo el punto d con el R se tendrá el triángulo MdR que se quería, el cuál se transformará (710) en el triángulo rectángulo MeR, que tiene por base el lado MR del cuadrado y cuya altura Me es parte del lado MN; por lo que no habrá más que tomar el valor de Me en la escala y se tendrán los datos suficientes para calcular la superficie por la fórmula

$$MeR = \frac{Me}{2} \times MR.$$

Ejemplos. 1.° Si el lado MR del cuadrado representa 500m de la escala, y Me vale 324,m50, se tendrá

$$MeR = 162,^{m}25 \times 500^{m} = 81125^{m^2}.$$

2.° Si MR = 1000m, se hallará del mismo modo:

$$MeR = 162,^{m}25 \times 1000^{m} = 162250^{m^2}.$$

CAPITULO III.

Division de polígonos.

712. **Preliminares.**—Una de las operaciones que con frecuencia tiene necesidad de practicar el geómetra, es la division de los terrenos ó propiedades, sujetándose á las condiciones impuestas por los propietarios. Esta parte de la Topografía se llamaba antiguamente *geodesia*; pero hoy se da este nombre á la aplicacion que se hace de la Astronomía y de la Trigonometría rectilínea y esférica al levantamiento de la Carta de una gran extension de terreno, como por ejemplo, la superficie de un Estado ó país, designándose la que ahora nos ocupa con el nombre de *division de polígonos*.

713. En la resolucion de las cuestiones emplearemos dos procedimientos: el uno que llamaremos de *soluciones numéricas*, y el otro de *soluciones gráficas*. Entenderemos por soluciones númericas, aquellas en que se haga uso del cálculo, bien se opere sobre el terreno ó sobre el papel, valiéndose de los instrumentos de campo ó de gabinete para la determinacion de las líneas y ángulos que han de servir de datos, y el trazado tambien de las líneas y ángulos que han de representar los resultados; y llamaremos *soluciones gráficas*, aquellas en que sólo se haga uso de construcciones geométricas, tanto en el campo como en el gabinete, con los instrumentos adecuados á cada caso para la resolucion de los problemas, sin entrar el cálculo para nada en la resolucion.

Para las soluciones tanto numéricas como gráficas, cuando se opera en el terreno mismo basta la formacion del croquis si no se tiene plano y no hay necesidad de levantarle; pero será preciso construir el plano con precision y en escala conveniente cuando las soluciones tanto numéricas como gráficas deban efectuarse en el gabinete. Es de todo punto indispensable determinar bien el contorno del terreno, como base de todas las operaciones que se han de practicar despues.

714. Cuando se opera en el terreno, las soluciones numéricas son mas exactas que las gráficas, y podrá servir de comprobacion el observar si al

trasladar al papel las líneas establecidas en el terreno, y que representan los resultados, guardan en el plano las mismas relaciones de posicion.

Cuando se opera en el papel, las soluciones gráficas son al contrario más exactas que las numéricas, y se obtienen aquellas con mas aproximacion, construyendo de nuevo el plano si estaba en escala pequeña en otra más conveniente. En este caso las líneas obtenidas por ambos métodos en el plano se trasladan despues al terreno, lo que constituye el *replanteo*.

En adelante, al resolver una cuestion numérica ó gráficamente, el procedimiento que expongamos deberá entenderse que debe seguirse tanto en el terreno como en el papel.

715. *Las soluciones numéricas* se fundan en los diversos problemas de Geometría que establecen ciertas relaciones entre los datos y las incógnitas; y las *gráficas* en las diversas proposiciones de la Geometría referentes á los polígonos equivalentes, y en la transformacion de las figuras que hemos explicado en el capítulo anterior, y la cual entra como auxiliar en el mayor parte de las soluciones.

Pasemos ya á la resolucion de los problemas mas elementales.

716. **Contornos rectilíneos de un corto número de lados.— Triángulos.—Problema 1.º—Dado un triángulo, tirar desde uno de sus vértices una recta al lado opuesto, de manera que forme un triángulo parcial de una área dada.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 255) en el cual se quiere tirar por el vértice B la recta BD que forme el triángulo parcial ABD que tenga una área dada. Sean S y s las áreas numéricamente conocidas ABC y ABD. Como estos dos triángulos de una misma altura BE, son entre sí como sus bases AC y AD, que llamaremos B y b, se tendrá

$$S : s : : B : b,$$

de donde

$$b = \frac{s \times B}{S} \quad [23].$$

Hallado el valor numérico de AD, se tomará esta distancia desde el punto A en la AC, bien en el terreno en su tamaño natural si se ha operado en él, ó bien en el papel con arreglo á escala si se opera en el gabinete, para referirla despues al terreno; y trazando por último la recta BD se tendrá separada la porcion ABD que se deseaba. De este procedimiento se puede hacer uso cuando no se tiene á mano mas que la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.

Si la línea de division debiese partir del vértice C, entonces se podria hacer que los dos triángulos, el dado ABC y el que se busca AFC, tuviesen la misma base AC, en cuyo caso serian entre sí como sus alturas h y h', y se tendría

$$S : s : : h : h',$$

de donde

$$h' = \frac{s \times h}{S} \quad [24].$$

Levantando en el punto A una perpendicular AH $= h'$ á la AC, y tirando por el punto H la recta HF paralela á AC, se unirá el punto de intersección F con el C y se tendrá el triángulo AFC.

717. Puesto que s es conocida y se tiene (646)

$$s = \frac{b \times h}{2},$$

se puede trazar y medir la altura h del triángulo ABC, y despejando b se tiene para valor de la base que se busca

$$b = \frac{2s}{h} \quad [25].$$

Tomando en la AC una cantidad AD $= b$, se tendrá resuelto el problema. En este caso no se necesita saber la superficie S del triángulo ABC.

Tambien puede medirse la base AC $=$ B, y como para el triángulo AFC se tendría

$$s = \frac{B \times h'}{2},$$

despejando h' se tendrá

$$h' = \frac{2s}{B} \quad [26],$$

y despues se hará la construccion indicada anteriormente para hallar el punto F.

De los procedimientos explicados se hará uso cuando se pueda disponer de las escuadras.

718. Tambien se puede hallar la base AD $= b$ del triángulo ABD por la fórmula [7] establecida (651), que en el caso actual será

$$s = \frac{bc \text{ sen. A}}{2R},$$

en la que despejando b, resulta

$$b = \frac{2Rs}{c \text{ sen. A}} \quad [27].$$

De este método se hará uso cuando se pueda disponer de los goniómetros.

719. Sucede á veces que en un triángulo ABC se quiere tomar el ABD que tenga la misma superficie que otro dado abc: en este caso se mide la superficie del abc y dividiendo el resultado por la mitad de la altura $BE = h$, se obtendrá el valor de la base $AD = b$. Si el triángulo hubiera de ser el AFC, se dividirá la misma superficie por la mitad de la base AC y se tendrá la altura $FG = h'$, construyéndose el triángulo AFC como hemos dicho anteriormente.

720. *Solucion gráfica.*—En este caso debe conocerse la figura del triángulo abc (fig. 256) cuya área ha de ser la misma que la que ha de tomarse en el triángulo ABC, por una recta tirada desde el ángulo B. Para esto se transforma el triángulo abc en otro equivalente adc de modo que el ángulo dac sea igual al BAC (695), y tomando $AF = ad$ y $AE = ac$, y trazando la FE, el triángulo AFE será igual al adc y equivalente al abc; pero como la línea de division ha de partir del punto B, se trazará la BE y por F la FD paralela á BE, y tirando por último la BD, tendremos el triángulo ABD equivalente al AFE, y por lo tanto al acb y trazado con las condiciones que exige el problema.

721. **Problema 2.º—Dividir un triángulo en un cierto número de partes equivalentes por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto.**

Solucion numérica.—Sea el triángulo ABC (fig. 257) que se quiere dividir en tres partes equivalentes. Divídase su superficie por 3, y haciendo aplicacion del problema anterior, tómese el triángulo ABD igual en superficie al tercio del ABC. Tómese á continuacion el BDE ó bien el BEC, y quedará resuelto el problema. Tambien se puede tomar primero el ABD igual al tercio del ABC y despues el ABE igual á los dos tercios del BCA; y en ambos casos mídase la superficie del triángulo EBC para que sirva de verificacion, pues deberá resultar igual al tercio de ABC.

Solucion gráfica.—Divídase la base AC en tres partes iguales, y trazando las BD y BE, los triángulos ABD, DBE y BEC, que tienen igual base é igual altura, son equivalentes.

722. **Problema 3.º—Dividir un triángulo en un cierto número de partes proporcionales á números dados, por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 257), el cual se quiere dividir en tres partes proporcionales á los números m, n y p: se tendrá la proporcion

$$ABD : m :: BDE : n :: BEC : p;$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} ABC : m + n + p :: ABD : m \\ ABC : m + n + p :: BDE : n \\ ABC : m + n + p :: BEC : p \end{array}\right\} [28];$$

y despejando en estas proporciones los terceros términos, tendremos:

$$ABD = ABC \times \frac{m}{m+n+p};$$

$$BDE = ABC \times \frac{n}{m+n+p};$$

$$BEC = ABC \times \frac{p}{m+n+p};$$

conocidas las tres porciones, se hará la division del triángulo ABC haciendo aplicacion del problema 1.º

2.ª Divídase el valor numérico de la base AC en tres partes que sean proporcionales á los números dados, y se tendrá

$$AD : m : : DE : n : : EC : p;$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} AC : m+n+p : : AD : m \\ AC : m+n+p : : DE : n \\ AC : m+n+p : : EC : p \end{array}\right\} \quad [29].$$

Conocidas las distancias AD, DE y EC se tomarán en la AC, y trazando las BD y BE, los tres triángulos que resultan, de la misma altura, serán proporcionales á sus bases (Geom. Teor. 94—3.º).

La *solucion gráfica* en este caso es impracticable, á no darse la relacion en líneas, para emplear la resolucion del problema 25 de la Geometría; lo que no sucede nunca en las aplicaciones prácticas de este problema á las particiones de terrenos entre varios herederos.

723. **Problema 4.º—Dividir un triángulo en un cierto número de partes desiguales cualesquiera, por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto.**

Solucion númerica.—Esta solucion consiste en dividir la superficie dada de cada una de las tres porciones por la mitad de la altura comun, para obtener las respectivas bases AD, DE y EC (fig. 257) en que ha de quedar dividida la total AC.

Para obtener la *solucion gráfica*, sería preciso que se nos diese de antemano la línea AC dividida en las tres partes AD, DE y EC.

No nos ocuparemos en lo sucesivo de la division en partes desiguales que no tengan entre sí una relacion sencilla; pues en todos casos se deduce del procedimiento de la division en partes iguales, con la diferencia que en ésta basta conocer el valor de la superficie total y el número de las partes, con lo cual se puede obtener el de una, dividiendo dicho valor total por el número de las partes, mientras que en la division en partes desiguales es preciso conocer de antemano el valor de cada una de ellas.

724. **Problema 5.º—Dividir un triángulo en tres partes equivalentes por rectas que partan de dos de sus vértices.**

Solucion gráfica.—Divídase la AC (fig. 258) en tres partes iguales, tírese la BD, y por su punto medio E la AE, y quedará resuelto el problema. Si se hubiera de dividir el triángulo en cinco partes se dividirá la base AC (fig. 259) en este número de partes y la figura indica el resto de la construccion; lo mismo se ejecutará cuando el número de partes sea mayor.

725. **Problema 6.°—Dividir un triángulo en tres porciones equivalentes, por rectas que partan de sus tres vértices y se unan en un mismo punto interior.**

Solucion numérica.—Hállese la superficie del triángulo ABC (fig. 260), y tómese el tercio. Divídase el resultado por la mitad de la base AC, y se tendrá la altura h de una de las porciones. Levantando la perpendicular $Aa = h$ y trazando la aO paralela á AC, el vértice del triángulo que tiene por base á AC, estará en dicha paralela. Divídase despues otra vez el tercio de la superficie del triángulo ABC por la mitad del lado BC y se tendrá la altura h'; levantando la perpendicular $Bb = h'$ á la BC y trazando la paralela bO á esta línea, el punto O, de su interseccion con la aO será el que unido con los vértices A, B y C resolverá el problema, como es fácil comprender.

Solucion gráfica.—Divídase uno de los lados AC (fig. 261) en tres partes iguales, y trácense BD y BE: se tendrán los tres triángulos equivalentes ABD, DBE y EBC, y por consiguiente iguales cada uno al tercio del ABC. Trácense las paralelas DF y EG á las AB y BC, y desde el punto O donde se cortan trácense las tres rectas AO, BO y CO, y el triángulo ABO, equivalente al ABD será un tercio del ABC (721), el triángulo BOC equivalente al BEC será otro tercio de ABC, por lo que el triángulo restante AOC deberá ser tambien el tercio de ABC.

726. **Observaciones acerca de la division en partes proporcionales ó desiguales.**—Si en la solucion numérica las partes hubieran de ser entre sí como los números m, n y p, se empezaría por hallar los valores de dichas tres partes y despues se haría la construccion del mismo modo.

En general, en las soluciones numéricas, la division de una superficie S en n partes de igual área ó equivalentes, exige primero la determinacion del valor $\frac{S}{n}$ de cada una de las partes, y despues los cálculos consiguientes para obtener los de las líneas necesarias para verificar la construccion.

La division en partes desiguales supone el conocimiento prévio de los valores de estas partes, verificándose despues la construccion del mismo modo.

Por último, la division en partes que sean entre sí como números dados m, n, p..... no difiere de esta última sino en que es necesario determinar cada una de estas partes, y de la anterior en la manera de verificar esta determinacion; siendo igual el resto de las operaciones que en la division en partes equivalentes y desiguales.

Ahora bien, teniendo presente que una superficie S queda dividida en partes a, b, c... que sean entre sí como los números dados m, n, p... estableciendo la série de razones

$$a : m :: b : n :: c : p :: ....$$

en las cuales tenemos

$$a + b + c + ... = S : m + n + p + ... :: a : m :: b : n :: c : p :: ...$$

de donde resulta

$$\left.\begin{aligned} a &= S \times \frac{m}{m+n+p+...} \\ b &= S \times \frac{n}{m+n+p+...} \\ c &= S \times \frac{p}{m+n+p+...} \end{aligned}\right\} \quad [30],$$

no volveremos á ocuparnos en adelante de las divisiones en partes proporcionales.

Por razones análogas será inútil hablar de la division en partes desiguales, por lo que en lo sucesivo solo nos referiremos á la division en partes iguales en superficie ó equivalentes.

La misma marcha seguiremos en las soluciones gráficas, pues las construcciones son las mismas, salvo á dividir gráficamente en partes iguales, desiguales ó proporcionales, aquellas líneas cuyos valores hayan de dividirse de estos distintos modos en las soluciones numéricas para obtener las partes equivalentes, desiguales ó proporcionales.

727. **Problema 7.º—Dividir un triángulo en dos partes equivalentes por líneas tiradas desde un punto interior dado.**

Solucion numérica.—Sea el triángulo ABC (fig. 262) y O el punto dado: trácense OB y OC, y mídanse los triángulos ABC y BOC, y si éste no es la mitad del anterior, y suponemos que sea menor que dicha mitad, se hallará la diferencia, la que dividida por la mitad de la perpendicular OD, que se trazará y medirá, se tendrá el valor de la base EC de un triángulo EOC que representará dicha diferencia; con lo que tendremos que el cuadrilátero EOBC, compuesto de los dos triángulos BOC y EOC, será la mitad del triángulo ABC; y por consiguiente la otra mitad estará representada por el otro cuadrilátero ABOE, que podrá medirse para comprobar la resolucion del problema.

Solucion gráfica.—Sea O el punto dado (fig. 263): trácese la BO, y únase el punto medio D del lado AC con los B y O: los triángulos ABD y BDC son cada uno la mitad del ABC; y si por el punto B se traza la BE paralela á OD y se tira por último la OE, el cuadrilátero ABOE, compuesto de los triángulos ABE y BOE será equivalente al triángulo ABD compuesto de los ABE y BED; y por lo tanto valdrá la mitad del ABC, siendo la otra mitad el cuadrilátero BOEC.

728. **Problema 8.º—Dividir un triángulo en tres porciones equivalentes, por líneas que partan de un punto interior dado.**

Solucion numérica.—Supongamos que una de las líneas de division vaya á parar á un vértice, tal como OA (fig. 264). Mídase la superficie del triángulo ABC y tómese el tercio; mídase la perpendicular Oa y hállese la base AD, y tirando la OD se tendrá una de las partes AOD. Imagínese la perpendicular Ob y mídase el triángulo AOC, y si no es igual al tercio de ABC, habrá que añadirle ó quitarle una cierta cantidad tal como m. Sea $AOC < \frac{1}{3} ACB$; mídase la perpendicular Oc y hállese la base CE del triángulo $OEC = m$, y el cuadrilátero AOEC representará la segunda parte. Hállase la superficie del cuadrilátero EODB para ver si equivale tambien al tercio de ABC, lo que servirá al mismo tiempo para comprobar la operacion.

Si una de las líneas de division ha de ser perpendicular á uno de los lados, tal como la OD (fig. 265), se imaginará la AO, y midiendo el triángulo AOD, si suponemos que le falta una cierta cantidad m para ser igual al tercio de ABC, se medirá la altura Oa y se hallará la base AE del triángulo $AEO = m$, y el cuadrilátero ADOE será una de las partes. Hágase lo mismo para hallar la segunda parte DOFC, y comprúebese la operacion midiendo el cuadrilátero EOFB.

Si una de las líneas de division ha de ser oblícua á uno de los lados, tal como la OD (fig. 266), el procedimiento no difiere del que acabamos de indicar.

Soluciones numérica y gráfica combinadas.—Supuesto que son análogas las soluciones numéricas en los tres casos que acabamos de considerar en este problema, y que tambien lo serían combinadas con las gráficas, vamos á resolver por este método el caso correspondiente á la figura 266.

Para esto, trácese y mídase la perpendicular Oc (fig. 267) y hállese la longitud de la base que ha de tener un triángulo igual al tercio del ABC; tómese esta longitud de D á E, y trazando la OE se tendrá dicho triángulo, que será el DOE. Tomando $DG = DE$ y trazando la OG, se tendrá el triángulo DOG equivalente al DOE é igual por lo tanto al tercio del ABC. Como estos triángulos tienen cada uno una parte fuera del ABC, se trazarán las OC y OA y las paralelas á éstas EF y GH, y uniendo los puntos F y H con el O, tendremos los cuadriláteros DOFC y DOHA equivalentes á los triángulos DOE y DOG, como es fácil comprender, y por consiguiente iguales cada uno al tercio de ABC. Para comprobacion se medirá el otro cuadrilátero BFOH para ver si equivale tambien al tercio del ABC.

729. **Problema 9.º—Dividir un triángulo en tres partes equivalentes por líneas tiradas desde un punto dado en uno de sus lados.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 268) y D el punto dado. Se medirá la superficie de dicho triángulo y se tomará el tercio, cuya cantidad dividida por la mitad de la perpendicular Da, dará la base AE del triángulo ADE igual á una de las partes. Procédase del mismo modo para hallar la CF, y se tendrá la segunda parte DCF, y para comprobacion se podrá examinar si el cuadrilátero EDFB que ha de representar la tercera parte equivale al tercio del triángulo ABC.

2.ª Despues de calcular la superficie del triángulo ABC y de tomar su tercio, tírese la BD y hállese la del triángulo ABD y se tendrá la proporcion

$$ABD : \frac{1}{3} ABC :: AB : AE.$$

Conocida por ella la longitud de la AE, se tendrá el punto E que unido con el D nos dará el triángulo $ADE = \frac{1}{3}$ ABC, y que será por lo tanto una de las partes. Del mismo modo se hallaria la parte DFC y la restante será el cuadrilátero EDFB.

3.ª Si sucede que no es posible penetrar en el interior, se imaginará la BD, y midiendo los lados AB y AD y el ángulo BAD, se calculará la superficie del triángulo ABD (651), la que dividida por la base AB nos dará la mitad de la altura Da. Hállese la superficie del triángulo ABC valiéndose de sus tres lados (655) y tómese el tercio, que dividido por la mitad de la altura Da hallada ántes, dará la base AE del triángulo ADE que ha de representar la primera parte, y análogamente se obtendrá la segunda DFC.

Solucion gráfica.—Divídase la base AC (fig. 269) en tres partes iguales y tírense las BG y BH. Trácese la BD y paralelamente á ésta las GE y HF y se tendrán los puntos E y F, que unidos con el D nos darán los triángulos AED y FDC equivalentes á los ABG y BHC, cada uno de los cuales representará la tercera parte del triángulo ABC, y el cuadrilátero EDFB la tercera parte restante.

730. **Problema 10.—Dividir un triángulo en cinco partes equivalentes, por rectas tiradas desde un punto dado en uno de sus lados.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 270) y D el punto dado: despues de haber hallado la superficie del triángulo ABC, tomado su quinta parte y medido la perpendicular Da para determinar la base EC de dicha quinta parte, que será la DEC, llévese esta base las veces que se pueda sobre la EA y sean dos hasta G, siendo AG $<$ EC; los triángulos DFE y DGF serán tambien quintas partes de ABC. Trácese ahora la DA y véase cuál es la superficie del triángulo ADG, y restándola de la quinta parte de ABC se obtendrá un resto que será la cantidad que habrá que añadir al triángulo ADG. Para hallar esta cantidad, bájese la perpendicular Db á la AB y divídase dicho resto por la mitad del valor de la perpendicular, y se tendrá la base AH del triángulo AHD que habrá que añadir al ADG, para que el cuadrilátero AHDG represente otro quinto del ABC.

Para comprobacion puede medirse el triángulo BDH que queda y que deberá ser otro quinto del ABC.

Tambien se puede determinar el BDH despues de haber hallado los triángulos DEC, DFE y DGF, y la parte restante se hallará representada por el cuadrilátero AHDG.

2.ª Cuando no se puede operar en el interior, hállese la superficie del triángulo ABC, valiéndose de los lados BC y AC y del ángulo ACB, que se medirá; ó bien de los tres lados, y tomada su quinta parte, tendremos la siguiente proporcion (Geom. Teor. 99.)

$$ABC : \frac{1}{5} ABC :: BC \times AC : DC \times CE;$$

de donde

$$CE = \frac{BC \times AC}{5 \times DC} \qquad [31]$$

Una vez hallada la longitud de la CE, se tendrá el punto E, y el triángulo DCE será igual á $\frac{1}{5}$ ABC. Tómense FE y FG iguales á EC y tendremos ya en el contorno los puntos de division E, F y G. Procédase despues para hallar la BH como hemos hecho para CE y tendremos el último punto de division H, por el cual y uniendo los G, F y E con el punto D, tendremos dividido el triángulo ABC en los DEC, DFE, DGF y BDH, y en el cuadrilátero AHDG como en la solucion anterior. Esta última es tambien aplicable al caso en que el punto dado se halla en uno de los vértices.

Soluciones geográficas.—1.ª Tírese la DA (fig. 271) y por B la BY paralela á ella, y trazando la DY tendremos convertido el triángulo ABC en otro equivalente DYC que tendrá su vértice en el punto dado D (695) Divídase la base CY en cinco partes iguales, y uniendo el punto D con los de division se tendrán los tres triángulos DEC, DFE y DGF dentro del triángulo ABC é iguales á un quinto de éste. El cuarto triángulo DGH tiene fuera del ABC la parte HAa; por lo que tirando la Hb paralela á DA y trazando la Db, el cuadrilátero AGDb será tambien el quinto de ABC, por lo que el triángulo BDb representará tambien un quinto de ABC.

Esta solucion es aplicable tambien al caso en que el punto D se halle en el interior, transformando el triángulo dado en otro que tenga su vértice en este punto (695)

2.ª Si se quieren evitar las transformaciones del triángulo total dado en otros equivalentes, se procederá del modo siguiente: divídase la base AC (fig. 272) en cinco partes iguales de las que solo señalaremos la primera CD, y trazada la BD el triángulo BDC será el quinto del ABC; trácese la OD y por B la BE paralela á OD, y uniendo el punto O con el E el triángulo OEC es el quinto del ABC, pues hemos transformado el triángulo BDC en otro equivalente que tiene el vértice én O (695). Tómese la base EC y llévese tres veces de E á H, y trazando las OF y OG, los triángulos OFE y OFG serán quintas partes del ABC. El otro triángulo OGH se reemplazará por el cuadrilátero OGAa, y la última quinta parte se hallará representada por BOa.

731. **Polígonos en general, convexos y cóncavos.—Contornos rectilíneos de un corto número de lados.—Problema 11. —Dividir un cuadrilátero convexo en tres partes equivalentes por líneas que partan de uno de sus vértices.**

Solucion aritmética.—Sea el cuadrilátero ABCD (fig. 273) y C el vértice dado. Mídase la superficie del cuadrilátero y tómese el tercio, cuya cantidad dividida por la mitad de la perpendicular CE, nos dará la base FD, y trazando la CF, el triángulo FCD será el tercio de ABCD. Hágase una operacion análoga para trazar la CG, y el triángulo BCG será otro tercio de ABCD; el último tercio estará representado por el cuadrilátero AFCG, que midiéndole podrá servir para verificar el problema.

Soluciones gráficas.—1.ª Trácense las diagonales BD y AC (fig. 274): divídase la opuesta al ángulo C en tres partes iguales BE, EF y FD y trácense las rectas CE y CF, AE y AF, y tendremos

$$BCE = ECF = CFD, \text{ y } ABE = EAF = AFD;$$

de donde se deduce

$$BCE + ABE = ECF + EAF = CFD + AFD;$$

ó lo que es lo mismo

$$ABCE = AECF = AFCD$$

Tirando ahora por los puntos E y F las EG y FH paralelas á la AC y trazando las CG y CH, el cuadrilátero AGCH reemplazará al AECF, y los triángulos BGC y CHD á los cuadriláteros respectivos ABCE y AFCD, como es fácil ver en la figura, con lo que el problema quedará resuelto.

2.ª Transfórmese el cuadrilátero ABCD (fig. 275) en el triángulo equivalente ECD (697) y divídase la base ED en tres partes iguales en los puntos G y F, y trazando las CF y CG, el triángulo CFD será la primera parte, el cuadrilátero AHCF que reemplaza al triángulo CGF será la segunda, y el triángulo BHC representará la otra tercera parte.

732. **Problema 12.—Dividir un cuadrilátero cóncavo en cuatro partes equivalentes, por rectas que partan de uno de sus vértices.**

Solucion numérica.—Sea el cuadrilátero cóncavo ABCD (fig. 276): la sola inspeccion de la figura manifiesta que la série de operaciones para la resolucion del problema, es la misma que en el caso de ser convexo el polígono.

Solucion gráfica.—Despues de transformado el cuadrilátero en el triángulo equivalente ECD (fig. 277) y dividida la base ED en cuatro partes iguales, se concluirá el problema como el anterior.

733. Los procedimientos numérico y gráfico que acabamos de exponer

para el cuadrilátero, se hacen extensivos de un modo análogo á los polígonos que pasan de cuatro lados, y basta para ello observar la figura 278, que es un pentágono convexo dividido en tres partes equivalentes por rectas tiradas desde uno de sus vértices. La solucion numérica da á entender que despues de haber tirado las diagonales AC y CE y hallado las superficies de los triángulos ABC y CDE, ha sido preciso valerse de la altura Ca para hallar las bases AF y EG de los triángulos ACF y CEG que hay que añadir á los AHC y CIE para que los cuadriláteros ABCH y CIED ean las terceras partes del polígono ABCDE, siendo el triángulo HCI la otra tercera parte. El procedimiento gráfico consiste en reducir el polígono á triángulo equivalente CFG (705) y dividirle en tres partes equivalentes (721).

734. **Problema 13.—Dividir un polígono cualquiera cóncavo ó convexo, en un cierto número de partes equivalentes, por rectas que partan de un punto situado en el interior ó en uno de sus lados.**

Soluciones numérica y gráfica combinadas.—Supongamos ahora que el punto O (fig. 279) que ha de ser comun á todas las partes equivalentes se halle situado en el interior del pentágono cóncavo que se ha de dividir por ejemplo en cuatro partes equivalentes.

Hállese la superficie del pentágono ABCDE y tómese el cuarto, con el fin de que bajando la perpendicular Oa, que podrá considerarse como el lindero comun á dos de las partes en que ha de dividirse el polígono, pueda hallarse el valor de la base aF, que suponemos sea mayor que Aa, para obtener un triángulo aOF, que represente el cuarto de la superficie del pentágono; tirando la OA y por F la FH paralela á ella, se trazará la OH y el cuadrilátero aAHO será una de las partes que se buscan; tómese aG = Fa, y repitiendo á la derecha de Oa la misma construccion que se ha hecho á la izquierda, el cuadrilátero aEIO será la otra de las dos partes que han de tener el lindero comun Oa, lo que se comprende fácilmente; y la cuestion se resolvería del mismo modo, si se hubiese puesto por condicion que el linde comun hubiera sido una oblícua al lado AE ó bien una recta OE que fuese á terminar á un vértice E.

Para hallar la tercera porcion se considerará el punto O como el vértice de un triángulo, del cual OH es uno de sus lados, y hallando la base HL y transformando el triángulo OHL en el cuadrilátero OHBM, éste representará la tercera de las partes que buscamos, siendo la cuarta y última el pentágono OMCDI, el cual puede en este caso medirse ó no, puesto que usamos de las dos soluciones combinadas.

Si el punto comun O (fig. 280) debiera hallarse situado en uno de los lados del pentágono convexo ABCDE, y se quisiese dividir éste en tres partes equivalentes, se comprende con facilidad que siguiendo una marcha idéntica á la acabada de exponer, haciendo uso de las dos soluciones simultáneamente, se hallará primero el cuadrilátero AHOE que representará la primera de las tres partes en que se trata de dividir ahora el pentágono. Tomando despues FG = GE, trazando la FO, y tirando FL paralela tambien á la OA que ha servido para la primera parte, prolongando el lado AB cuando es preciso como en el caso actual, se tendrá

$$FAO - GAO = LAO - AOH \text{ ó } FGO = HLO,$$

y el triángulo OHL será la segunda de las tres partes que se buscan, y por lo tanto se transformará en el cuadrilátero OHBM, que representará dicha segunda parte; estándolo la tercera y última por el cuadrilátero ODCM, el que podrá ó no medirse segun convenga, para la verificacion del problema.

735. **Division en zonas paralelas.**—En la division de los polígonos hemos considerado hasta ahora la circunstancia de la eleccion de un punto, ya situado en un vértice, en el interior de la figura ó en uno de los lados del contorno, haciendo que dicho punto sea comun á las diversas partes del terreno que resultan de la division entre varios partícipes, por la razon de que este punto pueda ser un objeto notable, como un pozo, aljibe, fuente, molino, torre.... pero otras veces no mediando esta circunstancia, la mejor figura del terreno para el cultivo ú otra razon cualquiera de las muchas que pueden ocurrir, puede dar lugar á la division en zonas paralelas con arreglo á una direccion dada ó arbitraria, y vamos á ocuparnos de la resolucion de esta clase de problemas.

736 **Problema 14.—Dado un triángulo, tirar una recta paralela á uno de sus lados, de manera que forme con los otros dos un triángulo parcial que tenga una área dada.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 281): se trata de hallar un punto D situado en uno de los lados, por el cual tirando una recta DE paralela al lado AC, cumpla con la condicion que exige el problema. Para esto, como el nuevo triángulo que ha de resultar, y que supongamos sea el BDE, ha de ser semejante al ABC (Geom. Teor. 58), tendremos (Geom. Teor. 100)

$$ABC : BDE : : AB^2 : BD^2,$$

ó en general, haciendo ABC = S; BDE = s; AB = L y BD = l,

$$S : s : : L^2 : l^2;$$

de donde

$$l = \sqrt{\frac{s \times L^2}{S}} = L\sqrt{\frac{s}{S}} \qquad [32].$$

Tomando á partir de B una distancia BD = l, y tirando la paralela DE á la AC quedará resuelto el problema.

Si se quiere evitar el trazado de la paralela, se operaría del mismo modo sobre BC para tener el punto E, que unido con el D nos determinará la recta DE; ó bien, puesto que BD es ya conocida, se tendrá BE por la proporcion

$$BA : BD : : BC : BE;$$

la longitud de la paralela DE se obtiene por la proporcion

$$BA : BD :: AC : DE$$

2.ª Cuando no se pueda operar en el contorno y sí en el interior, se trazará la perpendicular BP, y se tratará de hallar en ella un punto G, por el cual tirando la paralela DE á la AC, esta paralela cumpla con la condicion que exige el problema. Para esto tenemos (Geom. Teor. 100)

$$ABC : BDE :: BP^2 : BG^2,$$

ó haciendo $BP = A$ y $BG = a$,

$$S : s :: A^2 : a^2;$$

de donde

$$a = \sqrt{\frac{s \times A^2}{S}} = A\sqrt{\frac{s}{S}} \quad [33].$$

Se tomará $BG = a$, y se tendrá el punto G para trazar la paralela DE. La longitud de esta paralela se obtiene por la proporcion

$$BP : AC :: BG : DE.$$

3.ª Si s fuese una parte alícuota de S, es decir en general, si s fuese $\frac{1}{n}$ de S, tendríamos entonces estas dos proporciones:

$$S : s :: n : 1;$$
$$S : s :: L^2 : l^2.$$

de donde (Arit. 169)

$$n : 1 :: L^2 : l^2;$$

y como

$$l^2 = \frac{L^2}{n} = \frac{L}{n} \times L,$$

se tendrá tambien

$$L : l :: l : \frac{L}{n} \quad [34].$$

Lo que nos dice que se obtendrá la longitud de $BG = l$, hallando una media proporcional geométrica entre L y $\frac{L}{n}$. Por lo tanto si s debiera ser $\frac{1}{3}$ de S, se hallaria la media proporcional geométrica entre la longitud de L y su tercera parte $\frac{L}{3}$. Este último procedimiento es, como se observa, independiente del conocimiento de las superficies, bastando saber la relacion que se quiere que exista entre ellas.

Solucion gráfica.—La solucion geométrica exige la condicion de que s sea una parte alícuota de S; y el procedimiento está reducido á hallar gráficamente la media proporcional entre L y $\frac{L}{n}$ (Geom Probl. 28). La demostracion sería la misma que en la tercera solucion numérica, sólo que en las proporciones entrarían las líneas, en vez de los valores numéricos. Cuando se puede operar en el exterior, se hace la construccion sobre la misma figura. Sea el triángulo ABC = S (fig. 282), y supongamos que la parte s que se quiere separar sea el tercio de S Divídase AB en tres partes iguales en los puntos D y E; y para hallar la media proporcional entre AB y BE $= \frac{AB}{3}$, se describe sobre AB como diámetro una semicircunferencia, se levanta en el punto E la perpendicular Ea y se traza la Ba, y ésta será la media proporcional, la cual se llevará sobre la BA, haciendo centro en B y describiendo un arco de círculo con el rádio Ba, hasta encontrar á AB en el punto F, por el cual se trazará la paralela FG á la AC y el problema quedará resuelto, siendo el triángulo FBG el tercio del ABC. En esta solucion gráfica, como en la tercera numérica, solo será preciso conocer la relacion de las superficies ABC y BFG.

Cuando la parte que se ha de tomar en el triángulo ABC (fig. 281) está representada por otro triángulo abc, se hallarán dos medias proporcionales, una x entre la base AC y la altura BP del triángulo ABC y otra z entre la base ac y la altura bp del abc; y como la parte que ha de tomarse en el triángulo ABC y que ha de resultar semejante al triángulo abc, ha de ser un triángulo tal como el BDE semejante al ABC, resulta que x y z serán dos de sus líneas homólogas; por lo que hallando una cuarta proporcional á x, z y AB se obtendrá el valor de BD, y la paralela DE resolverá la cuestion

Segun se hallen aritmética ó geométricamente las medias y cuartas proporcionales, así la solucion será numérica ó gráfica.

737. **Problema 15.—Dividir un triángulo en partes equivalentes.**—El problema que acabamos de resolver, suministra el medio de dividir un triángulo cualquiera en varias partes equivalentes, desiguales ó proporcionales, advirtiendo que las soluciones serán numéricas ó gráficas segun se proceda aritmética ó geométricamente en la determinacion de los valores.

Para dividir un triángulo ABC (fig. 282) en n partes equivalentes, se dividirá BA = L en n partes iguales BE, ED ... y llamando l, l', l''... á las medias proporcionales Ba, Bb... se tendrán las proporciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} L : l :: l : \frac{1}{n}L; \\ L : l' :: l' : \frac{2}{n}L; \\ L : l'' :: l'' : \frac{3}{n}L; \end{array}\right\} [35];$$

tomando los valores de l, l' l''.... á partir de B en el lado BA, que supongamos sean BF, BL.... y trazando las paralelas FG, LM.... se tendrá resuelto el problema.

Para dividir el mismo triángulo ABC en partes desiguales, como estas han de ser conocidas, llamándolas s, s' s''.... y S al triángulo ABC, tendremos las proporciones

$$S : s :: L^2 : l^2$$
$$S : s' :: L^2 : l'^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hallando los valores de l, l'.... y tomando las partes BF, BL.... que los representen, y trazando las paralelas FG, LM.... quedará resuelto el problema,

Por último, para dividir el mismo triángulo en partes proporcionales, despues de hallado el valor de cada una, segun sabemos, valiéndonos de la série de razones iguales

$$s : m :: s' : n :: s'' : p \ldots$$

se continuará como en el caso anterior de partes desiguales.

En el caso de dividir el triángulo en dos partes proporcionales á los números m y n, tendremos

$$s : m :: s' : n;$$

de donde

$$s + s' = S : m + n :: s : m,$$

y

$$s = S \times \frac{m}{m + n},$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{s}{S} = \frac{m}{m + n}.$$

Sustituyendo el valor de $\frac{s}{S}$ en la fórmula [32] resultará

$$l = L\sqrt{\frac{m}{m + n}} \quad [36],$$

y un caso particular de esta cuestion será el expuesto anteriormente de dividir un triángulo en partes equivalentes. En efecto, supongamos que el triángulo ABC se quiere dividir en tres partes equivalentes; se tendría para la primera:

$$\frac{s}{S} = \frac{m}{m + n} = \frac{1}{3}, \text{ y } l = BF = L\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{L}{3}\sqrt{3}$$

Para la segunda, se tendría $\frac{s}{S} = \frac{m}{m+n} = \frac{2}{3}$, y

$$l' = BL = L\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{L}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}.$$

Para comprobacion debe ser tambien ACML el tercio de ABC.

Para el caso de dividirle en cuatro partes equivalentes se tendrian los siguientes valores:

$$l = \frac{L}{2};\quad l' = \frac{L}{2}\sqrt{2};\quad l'' = \frac{L}{2}\sqrt{3}.$$

Esta solucion numérica es por lo tanto la misma que se obtiene por la fórmula [32], haciendo sucesivamente $\frac{s}{S} = \frac{1}{4}; \frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ y por las porciones [35] haciendo $n = 4$.

738. **Problema 16.—Dado un trapecio, tirar una recta paralela á las bases tal, que el trapecio parcial que forme con la base menor ó mayor y los lados del trapecio, tenga una área dada.**

Solucion numérica.—Sea AECD (fig. 229) el trapecio á cuya superficie llamaremos S ; EC su base mayor $= B$; AD su base menor $= b$, y AF su altura $= a$; sea GP $= x$ la recta que buscamos, la cual ha de separar una superficie s adyacente á la base menor b ó una superficie s' adyacente á la base mayor B.

Para hallar la expresion de x cuando se quiere separar del trapecio AECD una parte AGPD $= s$ adyacente á la base menor b, tendremos primero

$$s = \frac{x+b}{2} \times AH \qquad [37].$$

Como la altura AH es una incógnita, se determinará su valor trazando la AL paralela á DC, y los triángulos semejantes AGR y AEL nos darán la proporcion

$$EL : GR :: AF : AH;$$

ó lo que es lo mismo

$$B - b : x - b :: a : AH = \frac{a(x-b)}{B-b}.$$

Sustituyendo el valor de AH en la ecuacion [37] y efectuando operaciones, tendremos

$$s = \frac{a(x^2 - b^2)}{2(B-b)} \qquad [38].$$

Despejando x en esta ecuacion, resulta

$$x = \sqrt{b^2 + \frac{B-b}{a} \times 2s} \qquad [39];$$

con lo que se tiene el valor de la línea divisoria GP, que hemos llamado x, en funcion de las bases y altura del trapecio total dado y de la parte conocida s que se quiere separar.

Para hallar ahora la expresion de esta misma línea $x = \mathrm{GP}$, cuando se quiere separar del trapecio AECD una parte EGPC $= s'$ adyacente á la base mayor B, tendrémos primero

$$s' = \frac{B + x}{2} \times \mathrm{FH} \qquad [40].$$

Como la FH es una incógnita, se determinará su valor observando que se tiene

$$\mathrm{FH} = \mathrm{AF} - \mathrm{AH} = a - \frac{a(x-b)}{B-b} = \frac{a(B-x)}{B-b}.$$

Sustituyendo este valor de FH en la ecuacion [40] y efectuando operaciones, tendremos

$$s' = \frac{a(B^2 - x^2)}{2(B-b)} \qquad [41];$$

y despejando x en esta ecuacion, se obtiene

$$x = \sqrt{B^2 - \frac{B-b}{a} \times 2s'} \qquad [42];$$

con lo que se tiene tambien el valor de la línea divisoria GP $= x$, en funcion de las bases y la altura del trapecio total dado y de la parte conocida s' que se quiere separar, adyacente á la base mayor B.

739. Puesto que las fórmulas [39] y [42] representan el valor de una misma línea GP $= x$, deberemos tener

$$\sqrt{b^2 + \frac{B-b}{a} \times 2s} = \sqrt{B^2 - \frac{B-b}{a} \times 2s'};$$

y en efecto esta igualdad, despues de elevar al cuadrado, hacer la trasposicion conveniente y suprimir el factor B — b que resulta comun á sus dos miembros, se convierte en la siguiente:

$$S = \frac{a(B+b)}{2}, \text{ ó } S = S$$

que es una identidad.

Del mismo modo, puesto que tenemos $S = s + s'$, sustituyendo en esta igualdad por s y s' sus valores [38] y [41], tendremos la ecuacion

$$S = \frac{a(x^2 - b^2)}{2(B-b)} + \frac{a(B^2 - x^2)}{2(B-b)};$$

la cual se transforma tambien en la misma identidad que la anterior; sirviendo en ambos casos de comprobacion.

740. Una vez conocido el valor de x, se tomará en la base mayor CE (fig. 229) una parte $CM = x$; por el punto M se trazará la MG paralela á la CD, y tirando por último la GP paralela á EC por el punto G, se tendrá la línea divisoria que se buscaba.

Si se quiere evitar el trazado de la paralela GM, se puede determinar la AG á que llamaremos y, observando que los triángulos semejantes AGR y AEL dan la proporcion

$$EL : GR :: AE : AG;$$

ó lo que es lo mismo, llamando ahora l al lado AE,

$$B - b : x - b :: l : y;$$

de donde

$$y(B-b) = (x-b)\,l:$$

eliminando x entre esta ecuacion y la [39], y despejando y, resulta

$$y = l \times \frac{-b + \sqrt{b^2 + \frac{B-b}{a} \times 2s}}{B-b} \qquad [43]$$

Tomando en el lado AE una longitud $AG = y$, se trazará la paralela GP á la EC.

Puesto que se tiene trazada y conocida la altura AF para la determinacion de la superficie del trapecio AECD, se podrá buscar en ella el punto H para tirar por él la paralela GP á la EC.

Para esto, como ya se conoce el valor de dicha paralela GP, las superficies de los trapecios AGPD y GECP serán

$$AGPD = \frac{AD + GP}{2} \times AH;$$

$$GECP = \frac{GP + EC}{2} \times HF;$$

de donde despejando las alturas AH y HF, tendremos

$$AH = \frac{2AGPD}{AD + GP} \;[44], \quad y\ HF = \frac{2GECP}{GP + EC} \quad [45];$$

y tomando en la AF las magnitudes AH ó HF, segun que el trapecio parcial que se tome sea adyacente á la base menor ó á la mayor, se tendrá conocido el punto H.

Como se hallaría tambien fácilmente $AF = \frac{2AECD}{AD + EC}$, tendremos como comprobacion iguales los valores numéricos de AF y AH + HF, así como los de $\frac{2AECD}{AD + EC}$ y $\frac{2AGPD}{AD + GP} + \frac{2GECP}{GP + EC}$.

Ejemplo. Supongamos que el trapecio AECD tiene de superficie 11160 metros cuadrados, que su altura AF es de 72 metros, su base mayor es $EC = 230$ metros, y la menor $AD = 80$ metros y que se quiere separar una superficie de 2520 metros cuadrados, adyacente á la base menor AD, representada por el trapecio AGPD. La fórmula [39] nos da

$$GP = \sqrt{80^2 + \frac{230 - 80}{72} \times 2 \times 2520} = 130 \text{ metros.}$$

Restando de 11160 metros cuadrados, los 2520 metros cuadrados, se tendrán 8640 metros cuadrados para el valor de la parte adyacente á la base mayor EC, representada por el trapecio GECP.

Si se hubiera querido separar desde luego esta parte, hubiéramos hallado para GP el mismo valor de 130 metros, valiéndonos de la fórmula [42], pues sustituyendo en ella por las letras sus valores, resulta

$$GP = \sqrt{230^2 - \frac{230 - 80}{72} \times 2 \times 8640} = 130^m.$$

Para hallar las alturas AH y HF, las fórmulas [44] y [45] dan

$$AH = \frac{2 \times 2520}{80 + 130} = 24^m; \quad HF = \frac{2 \times 8640}{130 + 230} = 48^m.$$

Como comprobacion tenemos

$$AF = AH + HF = 24 + 48 = 72 \text{ metros.}$$

741. **Division del trapecio en partes proporcionales.**—Si se quiere dividir el trapecio AECD en dos partes que se hallen en la razon de m á n, por medio de una paralela á las bases, tendremos

$$\frac{s}{s'} = \frac{m}{n} \quad \text{ó} \quad \frac{s}{S} = \frac{m}{m + n};$$

ó sustituyendo en vez de S su valor en funcion de a, B y b, y despejando $2s$, resulta

$$2s = \frac{am\,(B + b)}{m + n};$$

y poniendo por $2s$ su valor en la ecuacion [39], tendremos, despues de verificadas todas las transformaciones,

$$x = \sqrt{\frac{mB^2 + nb^2}{m + n}} \quad [46]$$

Despues de haber enseñado á tomar en un trapecio una superficie dada y á dividirle en dos partes proporcionales á dos números dados por medio de una paralela á las bases, se comprenderá fácilmente, en atencion á la marcha seguida para el triángulo en este caso del paralelismo, la manera de dividir el trapecio en varias partes iguales, desiguales ó proporcionales á números dados, por lo que no nos detendremos en la resolucion de estos problemas. Pasaremos por lo tanto á la division de un polígono cualquiera en partes equivalentes por medio de rectas paralelas entre sí, no deteniéndonos más que en este caso, por las mismas consideraciones que acabamos de exponer.

742. **Problema 17. — Dividir un polígono cualquiera en un cierto número de partes equivalentes, por medio de rectas paralelas entre sí.**

Solucion numérica. — Sea el polígono ABCDE (fig. 283) que se quiere dividir, por ejemplo, en tres partes equivalentes. Hállese su superficie, y dividiéndola por 3 se tendrá el valor de una de las partes. Para determinar estas partes en la figura, trácese por el vértice A una recta cualquiera AH y por los demás vértices C y E las CF y EG paralelas á la AH, con lo que el polígono quedará dividido en triángulos y trapecios. Para hallar la primera parte, mídase el triángulo ABH, y si su área es mayor que el tercio del polígono, se trazará una recta mn paralela á AE que separe en el triángulo ABE una parte Bmn igual á dicho tercio (736): si el triángulo ABH fuese menor que este tercio, añádasele el trapecio AHrp, que se obtendrá trazando una paralela pr á la AH que separe en el trapecio AHCF una parte AHpr adyacente á la base menor AH (738) [39], igual á lo que faltaba al triángulo ABH para ser el tercio del polígono, y se tendrá representada por el cuadrilátero ABrp la primera parte de las tres en que se quiere dividir el pentágono ABCDE.

Para hallar la segunda, se medirá el trapecio prCF, y si no fuese igual al tercio del polígono, menor por ejemplo, se trazará una paralela st que separe en el trapecio FCGE una parte FCts adyacente á la base mayor FC (738) [42], igual á lo que le faltaba al trapecio prCF para valer el tercio del polígono, y el pentágono prCts representará la segunda de las tres partes que buscamos.

Para comprobacion se medirá el cuadrilátero stDE compuesto del trapecio stGE y del triángulo EGD, que es la figura que queda para representar la última tercera parte del polígono propuesto y que deberá ser igual á dicho tercio.

Si se pusiese por condicion que las paralelas que han de dividir el polígono en zonas tuviesen una direccion determinada, es decir, fuesen paralelas á una recta dada, en vez de tirar de un modo arbitrario la primera recta AH, se trazará paralela á la recta dada.

743. **Contornos rectilíneos de un gran número de lados.**— Cuando los polígonos tienen muchos lados, pero éstos son de bastante longitud, pueden abreviarse las operaciones de la division, procediendo de la manera que vamos á exponer; para lo cual consideraremos el caso mas sencillo de la division en dos partes, reasumiendo todos los casos análogos á los expuestos hasta aquí, en el problema general siguiente, en el cual hacemos uso solamente de las soluci ones numéricas.

744. **Problema 18.—Dividir un polígono en dos partes equivalentes, desiguales ó proporcionales á números dados m y n, por medio de una recta tirada desde uno de sus vértices, ó por un punto situado en uno de sus lados ó en su interior, ó bien por medio de una recta paralela á uno de sus lados.**

Sea primero dividir el polígono ABC.... H (fig. 284) en dos partes equivalentes por una recta tirada desde el vertice H. Divídase en triángulos a, b, c.... desde este vértice, hállase la superficie de cada uno y súmense para tener la del polígono. Entónces si $a + b + c$, por ejemplo, es la suma inmediatamente inferior á la mitad que se trata de separar, se hallará la diferencia, y se tomará en el triángulo siguiente HCD una parte r igual á esta diferencia por medio de una recta HM á partir del vértice H (716), y esta línea HM resolverá el problema. Para comprobacion se verá si es tambien $e + d + s$ igual á la mitad del polígono.

Cuando la línea divisoria ha de partir de un punto Z situado en un lado AH, el procedimiento no varia esencialmente.

745. Si el polígono se ha de dividir en dos partes iguales en superficie por medio de una recta paralela al lado AI (fig. 285), se trazará por el punto B, por ejemplo, una paralela BM á la AI, y se hallará la superficie de la parte del polígono ABMHI, descomponiéndola, por ejemplo, en triángulos, y la de la parte BCDEFGM descomponiéndola tambien en triangulos ó en triángulos y trapecios como se ve en la figura, para sumar sus áreas y tener la total del polígono, la que se dividirá por 2. Hecho esto, si la parte ABMHI no equivale á la mitad del polígono y es por ejemplo menor, se trazará por G la GR paralela á la BM, y se tomará en el trapecio BMGR la parte BmnM, adyacente á la base mayor BM (738) [42], y la recta mn paralela á la BM será la que dividirá al polígono en dos partes equivalentes.

746. Si, finalmente, la recta divisoria debiera pasar por un punto interior P (fig. 286) del polígono ABCDE, se trazará á arbitrio una recta GG′ y se calculará la superficie AEDGG′ que supondremos sea menor que la que se trata de separar, y que en este caso sería la mitad; llamándola s, y d á la diferencia. Si se supone que la línea GG′ gira alrededor del punto P, cuando haya tomado una posicion tal como FF′ en que se verifique que es

$$PGF - PF'G' = d \qquad [47],$$

la expresada recta FF resolverá la cuestion: de modo que todo está en conocer al ángulo a que forman entre sí las rectas FF′ y GG′.

Para esto, mídanse GP y PG′ y hagamos GP $= m$ y PG′ $= n$; hállense tambien los valores de los ángulos FGP y PG′ F′ que llamaremos b y c. En virtud de la fórmula [8] (652) que nos da la superficie de un triángulo en funcion de uno de sus lados y de los ángulos adyacentes, tendremos:

$$PGF = \frac{1}{2} m^2 \times \frac{\text{sen.}\, a\ \text{sen.}\, b}{\text{sen}\ (a + b)},$$

$$\text{y } PF'G' = \frac{1}{2} n^2 \times \frac{\text{sen.}\, a\ \text{sen}\ c}{\text{sen.}\ (a + c)}$$

Sustituyendo en la igualdad [47] y multiplicando ambos miembros por 2, resultará

$$\frac{m^2\ \text{sen.}\, a\ \text{sen.}\, b}{\text{sen.}\ (a + b)} - \frac{n^2\ \text{sen}\ a\ \text{sen.}\, c}{\text{sen.}\ (a + c)} = 2d;$$

y poniendo por sen $(a + b)$ y sen. $(a + c)$ sus valores (Trig. — 15), dividiendo los dos términos del primer quebrado por cos a cos b y los del segundo por cos. a cos. c y simplificando, se tendrá

$$\frac{m^2\ \text{tang.}\, a\ \text{tang.}\, b}{\text{tang}\ a + \text{tang.}\, b} - \frac{n^2\ \text{tang.}\, a\ \text{tang.}\, c}{\text{tang}\ a + \text{tang.}\, c} = 2d,$$

ecuacion de segundo grado con relacion á la incógnita tang. a.

Resolviéndola y hallando el valor del ángulo a, se formará en el punto P sobre PG el ángulo GPF y se tendrá la recta FF′, que es la que separa del polígono ABCDE la parte AEDFF′ $= s$, que se deseaba obtener. Tambien se puede tomar sobre PG una parte arbitraria PR, y levantando la RM perpendicular á la PR, hallar el valor del cateto RM del triángulo rectángulo PRM para trazar por los puntos P y M la recta FF′.

De un modo análogo se procederá en la division en dos partes desiguales, cuyos valores numéricos deben darse de antemano, así como en la division en dos partes que se hallen en la relacion de m á n, las que tambien hay que determinar primero segun hemos ya visto en los demás casos de esta especie.

747. **Contornos curvilíneos y mistilíneos.**—Cuando los contornos están formados de muchos lados y es pequeña además la magnitud de estos, ó bien cuando son curvilíneos ó mistilíneos, en cuyos casos pueden considerarse como polígonos irregulares de infinito número de lados, podemos hacer uso de la circunscripcion ó incripcion de un polígono de menor número de lados para determinar la superficie total de la figura en cuestion. Una vez hallada ésta, así como el valor de las partes

iguales, desiguales ó proporcionales en que haya de dividirse, y señalado el punto por donde haya de trazarse la línea divisoria, bien que sea un vértice ó se halle situado en el contorno ó en el interior, ó bien que dicha recta se haya de trazar paralelamente á una direccion dada ó á arbitrio, en todos los casos no habrá mas que seguir exactamente la marcha trazada hasta aquí en la série de operaciones expuestas, cuidando de aprovechar siempre las circunstancias favorables que puedan conducir, en los diferentes casos que se presentan en la práctica, á soluciones mas prontas y mas sencillas.

CAPITULO IV.

Copia y reduccion de planos y perfiles.

748. **Generalidades.**—En la reproduccion de un plano ó de un perfil en la misma escala, se da el nombre de *copia* al dibujo obtenido, conservando el primitivo el de *original*. Cuando la escala del plano ó perfil que se trata de construir ha de resultar en menor escala que el original, se dice que éste se *reduce*, y que se *amplifica* cuando ha de estar en escala mayor.

Los dos últimos casos en que se reproduce el dibujo en menor ó mayor escala, se comprenden igualmente bajo el nombre de *reduccion*, y se llamará siempre *copia* para abreviar, al nuevo dibujo que se obtenga del original, bien se conserve la escala de éste, ó se aumente ó disminuya.

El primer caso está reducido á la construccion de figuras iguales, y los otros dos á la de figuras semejantes. En la de estas se puede asignar la relacion que han de guardar los lados entre sí, ó la que han de tener las superficies; y una vez conocida una de estas relaciones, es fácil deducir de ella la otra. Nos ocuparemos por lo tanto de los problemas á que da lugar la construccion de las figuras semejantes, tratando al mismo tiempo de la igualdad, que es un caso particular de la semejanza.

749. **Relacion entre los lados homólogos del plano y de la copia, y sus escalas.**—Llamando l y L á dos lados homólogos cualesquiera ab, AB (fig. 167) de dos figuras semejantes, que representan respectivamente la copia y el original, y observando que siempre son proporcionales á las escalas correspondientes, se tendrá, siendo $\frac{1}{M}$ la escala de la copia y $\frac{1}{N}$ la del original,

$$\frac{l}{L} = \frac{\frac{1}{M}}{\frac{1}{N}} = \frac{N}{M} \qquad [48]$$

lo que nos dice que *las longitudes de dos lados homólogos de la copia y del original, están en razon directa de las escalas, é inversa de los denominadores de las mismas escalas.*

Si por ejemplo, se quiere saber la relacion de las líneas de la copia y del original, siendo $\frac{1}{5000}$ la escala de éste, y $\frac{1}{30000}$ la de aquella, se tendrá

$$\frac{l}{L} = \frac{N}{M} = \frac{5000}{30000} = \frac{1}{6};$$

es decir, que las líneas de la copia serán la sexta parte de las del original.

750. Otras veces se conoce la escala $\frac{1}{N}$ del plano y la relacion $\frac{m}{n}$ entre los lados l y L, y se trata de hallar la escala $\frac{1}{M}$ de la copia: se tendrá entoncés, poniendo $\frac{m}{n}$ en vez de $\frac{l}{L}$ en la ecuacion [48] y despejando $\frac{1}{M}$, la fórmula

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} \times \frac{m}{n} = \frac{m}{nN} = \frac{1}{nN} \times m \qquad [49].$$

Teniendo por ejemplo, que reducir un plano construido en la escala de 1 por 500, de manera que la relacion de los lados homólogos ó de las escalas respectivas sea de $\frac{1}{4}$, se hará N $= 500$; $m = 1$; $n = 4$; y sustituyendo en la fórmula [49] se deducirá que la copia ha de construirse en la escala de 1 por 2000.

Si la escala del original fuese de 1 por 1000 y la relacion $\frac{3}{5}$, se hallaría

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{1000} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5000} = \frac{1}{5000} \times 3,$$

y será necesario construir la escala de 1 por 5000 (99) y triplicar su valor; y como en esta escala la magnitud real de 2^{cm} representa 100 metros del terreno, no habrá mas que tomar 6^{cm} para representar los mismos 100^{m} en la escala que se ha de construir para la copia.

751. **Relacion entre las áreas y los lados homólogos ó las escalas de la copia y del original.**—Teniendo presentes las relaciones establecidas (749) y la que existe (Geom. Teor. 100) entre las áreas s y S de la copia y del original y sus lados homólogos, se tendrá la expresion

$$\frac{s}{S} = \frac{l^2}{L^2} = \frac{N^2}{M^2} \qquad [50];$$

la cual manifiesta que *las áreas se hallan tambien en razon inversa de los cuadrados de los denominadores de las escalas.*

752. **Problema 1.º—Dada una figura cualquiera, reproducirla en diferente escala, de modo que sus líneas homólogas guarden una relacion dada.**—Conocida la escala en que ha de hacerse la copia (750), pueden emplearse los valores numéricos de los distintos elementos del plano, tomándolos en ella, con lo que se tendrá un nuevo plano del mismo terreno; pero no siempre se conocen numéricamente todos ó la mayor parte de estos elementos, y es necesario resolver gráficamente el problema. Entónces se prefiere valerse de las líneas cuyos valores pueden conocerse por la escala, ó tomarse gráficamente en la relacion pedida. Así, por ejemplo, empleando el método de copia por *abscisas y ordenadas* (418), y suponiendo que ABCDEFG (fig. 167) sea el dibujo original cuya escala sea conocida, despues de trazar el eje AE y las ordenadas BH, GY... se medirá la abscisa AH en la escala de esta figura, y se tomará su valor en la que se haya adoptado para hacer la copia *abcdefg* que suponemos sea menor en este caso, el cual nos dará *ah*, despues el de la ordenada BH del mismo modo para tener *bh*, y así sucesivamente. Este método puede aplicarse á un plano levantado por otro método cualquiera, trazando préviamente un eje y las perpendiculares á él desde los puntos notables del plano.

Puede tambien hacerse la reduccion descomponiendo el polígono en triángulos (423) y construyendo otro semejante á él, tomando los valores de sus lados en la escala de la copia.

753. **Angulo de reduccion.**—La reduccion de una figura construida en la escala de $\frac{1}{N}$ á otra en la de $\frac{1}{M}$, puede hacerse gráficamente formando un ángulo cualquiera BAC (fig. 287) y describiendo un arco de círculo BC con un rádio AB igual á la dimension mayor del original y otro que corte al primero, haciendo centro en B con un rádio $BC = AB \times \frac{N}{M}$, ó bien á la línea arbitraria que se quiera que represente á AB: y toda distancia AD del original tomada sobre las AB y AC suministrará la homóloga DE de la copia; pues se tiene

$$\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB} = \frac{N}{M}$$

Tambien puede resolverse por triángulos rectángulos semejantes levantando en el extremo de AB una perpendicular y tomando en ella la magnitud de BC.

754. **Cuadrícula.**—Para la reduccion ó amplificacion de los planos en la copia, se usa tambien, sobre todo cuando los contornos son curvilíneos ó mistilíneos, el método llamado *por cuadrícula*, que consiste en trazar con lápiz en el original un cuadrado ABCD (fig. 231) que le com-

prenda enteramente, trazando despues el suficiente número de paralelas á los lados de esta figura, y á las que distinguiremos llamándolas horizontales y verticales, para que se forme una red de cuadrados pequeños é iguales, de 0,m05 por ejemplo de lado, numerándolas para mayor comodidad en su uso, como se ve en la figura. Se construye despues en el papel donde ha de hacerse la copia otra cuadrícula A′B′C′D′ cuyos lados guarden con los de la construida sobre el original la relacion en que se han de hallar los dibujos, es decir, que el lado de los cuadrados de la copia se obtendrá por medio de la expresion $l = \mathrm{L} \times \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$.

Se toman ahora á partir del punto de interseccion o de las líneas señaladas con el número 1 la abscisa oa y la ordenada ob, y despues de reducidas valiéndose del ángulo de reduccion, ó de tomadas en la escala de la copia, se tendrán las $o'a'$ y $o'b'$, y fijos por lo tanto los puntos homólogos a' y b' de la copia. El punto c se determina por la ordenada ch tomada en la vertical 2 á partir del punto de interseccion h con la horizontal 1, y se obtendrá el c' en la copia por medio de la reducida $h'c'$. Un punto r situado en el interior de un cuadrado, se situará en la copia por medio de la abscisa $on = mr$ y la ordenada $om = nr$, y de este modo se irán fijando todos los puntos del contorno del original. Tambien pueden fijarse por intersecciones de arcos de círculos, como el punto s, haciendo centro en los puntos p y 3, y trazando dos arcos, para hacer la misma operacion en la copia valiéndose de los rádios reducidos, que nos darán el punto homólogo s' Por último, se hallarán por los mismos procedimientos los puntos homólogos de los interiores del plano, como el z' del z que pertenece al contorno del rio, y la casa E′ que ha de representar la E del original.

Cuando uno de los cuadrados elementales del original contenga muchos detalles, se le dividirá, así como su homólogo de la copia, en otros nuevos cuadrados como sucede con el P, ó en triángulos por medio de sus diagonales como el R; y de este modo se podrá facilitar el trabajo.

Cuando el contorno es curvilíneo, fijos los puntos principales de las curvas, se trazarán ó copiarán éstas á mano, imitando las del original, y hasta que no se hayan dibujado todos los detalles que comprenda un cuadrado no se pasará al siguiente.

755. Cuando no se quiere estropear el original trazando en él tantas líneas como exige la cuadrícula, se tiene un marco de madera, carton ú hoja de lata, el cual está dividido en pequeños cuadrados por medio de hebras de seda finas y tirantes. Se coloca sobre el original y solo se trazan de lápiz las dos rectas AB y BD que han de servir de guia para la continuacion del trabajo.

756. Cuando las figuras han de copiarse en mayor escala, lo que no sucede con frecuencia, debe tenerse presente que en la copia se aumentan los errores del original; miéntras que en la reduccion á menor escala se hacen ménos perceptibles.

Los mismos métodos de la cuadrícula se extienden á la copia en igual tamaño ó en la misma escala que el original; si bien la operacion es mas sencilla, por cuanto siendo todas las dimensiones iguales, no hay que hacer uso mas que del compás.

757. **Procedimientos especiales que se siguen en las copias de los planos en la misma escala.—1.º Picado.**—Para copiar un plano picando los puntos, se coloca el original sobre la hoja de papel blanco donde se ha de copiar, disponiendo á ambos sobre un tablero bien plano, y asegurándolos con cola de boca: y con una aguja muy fina que va sujeta á los mangos de los tiralíneas, los cuales se destornillan de las lengüetas, se van picando verticalmente los puntos mas notables del original, como los extremos de las líneas rectas, y los que mas influyen en la forma de las curvas del plano, así como todos aquellos que puedan facilitar el trazado del contorno y de los detalles interiores. Se levanta despues el original, y consultándole se van uniendo los puntos picados que determinan líneas rectas con la regla y el lápiz, las cuales se puedan rectificar con el compás, y á mano los que determinen las curvas, imitándolas todo lo posible, y procediendo despues á concluir el dibujo con tinta de china.

Este método tiene el incoveniente de que siempre se estropea el original; por lo que solo debe usarse en determinadas circunstancias, como cuando se trata de pasar de un borrador al plano en limpio, ó si el original está muy deteriorado y su observacion no es importante. De todos modos no debe usarse en planos que encierren muchos detalles. En este caso y en el de ser interesante el original y tener que conservarle íntegro, se hará uso del procedimiento siguiente.

758. **2.º Calcado.**—*Por el cristal.*—Consiste en disponer el original sobre un cristal y encima el papel blanco donde se ha de hacer la copia, pegándolos con cola de boca. Hecho esto, se coloca el cristal inclinado de modo que dé paso á la luz para que el original se vea al través del papel blanco, y no habrá más que ir pasando con lápiz el dibujo de las curvas: en cuanto á las rectas, bastará marcar sus extremos para trazarlas despues con la regla, ó se pueden calcar tambien á pulso; pero despues hay que rectificarlas con la regla, si no se puede hacer uso de ésta sobre el mismo cristal. Para la perfeccion del trabajo existen aparatos dispuestos á propósito, que consisten en un cristal de gran tamaño colocado en un marco de madera, el cual puede girar alrededor de un eje horizontal sostenido por uno ó dos piés, y dispuesto todo de manera que el cristal se coloque á la altura y con la inclinacion que se desea, pudiéndole fijar de un modo invariable en la posicion adoptada. Al presentar el aparato á la luz, se cuidará de que ésta penetre solamente por debajo del cristal, lo que se conseguirá cubriendo con una tela negra la parte superior de la ventana ó balcon delante de los cuales se presente el aparato; y se aumenta la transparencia colocando tambien debajo del cristal una lámina de hoja de lata ó de metal blanco bien bruñida, de modo que la batan los rayos de luz, que por reflexion irán á iluminar el cristal.

759 *Por el papel vegetal.*—Esta clase de papel tiene tal transparencia, que colocado sobre el original se perciben con la mayor claridad hasta sus mas ligeros detalles.

Se va pasando todo el dibujo ó las partes principales que se elijan como suficientes, con un lápiz, y mejor aun es hacer el calco con tinta de china, haciendo uso del tiralíneas y de las plumas topográficas. Concluido el calco, se levanta el papel vegetal y se impregna por el revés de lápiz hecho polvo fino, extendiéndolo bien con una muñeca de lienzo. Se coloca despues el papel vegetal sobre la hoja de papel blanco donde se ha de hacer la copia, de modo que la parte ennegrecida se halle en contacto con él, quedando el dibujo del calco en la parte superior; y despues de asegurados ambos papeles se va pasando por las líneas del calco un lápiz duro ó un puntero de acero llamado *calcador*.

Para economizar tiempo se hace uso de un papel preparado, que se llama *papel manchado ó polígrafo*, y que tiene una de sus caras ó las dos impregnadas de negro, azul ú otro color. Este papel se coloca entre el papel vegetal y el blanco de la copia.

Puede prepararse el papel transparente, tomando una hoja de papel comun y extendiendo sobre ella con un pincel un aceite volátil, como el de espliego ú otro, el cual al poco tiempo se volatiliza, y el papel queda transparente y con su color natural. Tambien se puede preparar un frasquito de *vencina* que se extiende con un pincel.

760. *Por el papel-tela.*—Con preferencia al papel vegetal se hace uso en la actualidad del *papel-tela*, llamando así á una tela fina engomada, de mucha transparencia, sobre la cual se dibuja directamente y queda permanente la copia.

761 **Problema 2.º—Dada una figura cualquiera, reproducirla en diferente escala, de modo que las superficies guarden una relacion dada.**—Para conseguir este objeto, se tendrá presente que las raices cuadradas de las superficies están en razon directa de los lados homólogos, é inversa de los denominadores de las escalas, pues en la série [50] de las razones iguales escrita anteriormente, se tiene

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{l}{L} = \frac{N}{M} \qquad [51]$$

Una vez conocida la relacion de los lados, estamos en el caso anterior; si bien es conveniente para la mayor exactitud en la formacion de la nueva escala, que las raices de las superficies sean exactas. En efecto, si se toma siempre por unidad la superficie del original y se quiere construir un polígono cuádruplo de otro, tendremos

$$S = 1 \text{ y } s = 4;$$

de donde

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}=2;$$

luego los lados de la copia han de ser dobles de los del original

S es $S=1$ y $s=\frac{1}{4}$, se hallará del mismo modo que las líneas de la copia han de ser la mitad de las del original.

762. Cuando las áreas han de ser proporcionales á números dados ó á rectas cuyas magnitudes son conocidas gráficamente, puede hacerse uso del siguiente procedimiento:

Sea ABC.... (fig. 167) un polígono dado, y tratemos de construir un polígono semejante *abc*.... cuya superficie esté con la del primero en la misma relacion que la recta *m* con la recta *n*.

Tómese una parte $AC=n$ (fig. 288) y otra $BC=m$; colóquense una á continuacion de otra, y sobre la AB como diámetro se describirá una semicircunferencia. En el punto C se levantará la perpendicular CD y se tirarán las cuerdas AD y BD, prolongándolas lo que sea necesario. Tómese una parte DF igual al lado AB del polígono dado, y tirando la paralela FE á la AB se tendrá la DE, la cual será en la copia el lado homólogo del AB del original, de manera que construyendo sobre $ab=DE$ (fig. 167) un polígono *abc*.... semejante al ABCDE (Geom. Probl. 30), se tendrá resuelto el problema.

En efecto, llamando P al polígono ABC.... y X al *abc*.... que se trata de construir, tendremos

$$X : P :: ab^2 : AB^2 :: DE^2 : DF^2 \qquad [52];$$

pero los triángulos semejantes DEF y DAB dan la proporcion

$$DE : DF :: DB : DA,$$

y por lo tanto (Arit. 170.—Cor.)

$$DE^2 : DF^2 :: DB^2 : DA^2 \qquad [53].$$

Las proporciones [52] y [53] tienen una razon comun; luego resultará

$$X : P :: DB^2 : DA^2 \qquad [54];$$

y como se tiene (Geom.—Teor. 70.—2.°)

$$DB^2 : DA^2 :: BC : AC :: m : n,$$

resultará por último

$$X : P :: m : n;$$

que es lo que se quería demostrar.

Si en la construccion sucediese que la cuerda AD fuese igual al lado AB del polígono, la cuerda BD lo sería á *ab*.

Si el polígono dado fuese un cuadrado, se operaría de la misma manera para obtener el valor del lado sobre el que se ha de construir el nuevo cuadrado.

763 Cuando no se quiere seguir el procedimiento indicado para la construccion del polígono semejante, y conviene evitar la formacion de ángulos que en ella se requiere, se podrá hacer uso del método por intersecciones, tomando en la cuerda AD otra parte D*a* = BC y la D*c* igual á la diagonal AC (figs. 167 y 288), y tirando las paralelas *ab* y *cd* se tendrán las D*b* y D*d* homólogas de las BC y AC.

764. Comparando dos lados homólogos de la copia y el original, puede construirse fácilmente la escala de la primera. Tomando por ejemplo DF = 100m en la del original, DE representará la misma magnitud en la que se trata de construir. En algunos casos particulares, que á continuacion damos á conocer, se puede hallar más sencillamente el valor del lado homólogo, fundándose en la relacion numérica que se conoce ó que se deduce (Geom.—Probls. 22 y 23) de los valores gráficos DF y DE.

765 *Casos particulares.*—1.° Si la superficie de la copia ha de ser doble de la del original, se tendrá $\frac{m}{n}=2$; de donde se deduce $l^2=2L^2$, y $l=L\sqrt{2}$; es decir, que el nuevo lado l es la diagonal de un cuadrado cuyo lado es L, ó lo que es lo mismo, l es el lado del cuadrado inscrito en un círculo cuyo rádio es L. Si el polígono dado es un cuadrado, l es su diagonal.

2.° Cuando la superficie de la copia haya de ser la mitad de la del original, se tendrá $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, y $l^2=\frac{1}{2}L^2$; de donde $l=\frac{1}{2}L\sqrt{2}$; es decir, que el nuevo lado es la mitad de la diagonal de un cuadrado cuyo lado es L. Si el polígono dado, un cuadrado, l es la mitad de la diagonal.

3.° Si la superficie del nuevo polígono ha de ser el triplo de la del propuesto, se tendría despues de hechas las operaciones $l=L\sqrt{3}$; es decir, que l es el lado del triángulo equilátero inscrito en un círculo cuyo rádio es L.

4.° Si ha de ser el cuádruplo de la del propuesto, se tendrá $l=2L$; es decir, que el lado del nuevo polígono ha de tener doble longitud que el del propuesto; lo que debe ser así (Geom. Teor. 100).

766. **Instrumentos de reduccion.**—*Compás.*—El *compás de reduccion* se compone de dos brazos de metal AE, BD (fig. 289) terminados por ambos extremos en puntas de acero. Una ranura longitudinal que ambos presentan, permite á una pieza *c* correr á lo largo de ella, y fijarse en un punto dado con auxilio de un tornillo de presion. A los lados de esta ranura están grabadas unas divisiones acompañadas de números que representan las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$... escritas á su lado, las cuales indican la relacion en que está la parte *c*B de uno de los brazos con la otra *c*D, y

que es la misma que existe entre las aberturas AB y DE de las puntas de acero. Así cuando la línea de fé que acompaña á la pieza c coincide con la division $\frac{1}{2}$, AB es mitad de DE, y puede reducirse un plano en esta relacion tomando las distancias del original con las puntas D y E, con lo que se obtendrán sus homólogas correspondientes en las A y B; ó bien amplificarse tomando con estas últimas las distancias del original.

767. **Pantógrafo**.—Se funda la teoría de este instrumento de reduccion, en que si se suponen dos reglas A′C′, CK (fig. 290) unidas por medio de articulaciones á otra PC en los puntos A′ y C, constituyendo un sistema que puede girar al rededor del punto P, conservándose siempre paralelas las dos primeras reglas, cuyas longitudes son proporcionales á las distancias de P á las articulaciones respectivas, sus extremos K y C′ estarán siempre en línea recta con el punto fijo P; principio que está fundado á su vez en la teoría de las líneas proporcionales. Además, al pasar el sistema de una posicion á otra recorriendo el punto C un arco Cc, los extremos K y C′ de las reglas paralelas estarán tambien en línea recta en sus nuevas posiciones k' y c' en virtud del principio indicado, y se tendrá la proporcion

$$Pc : Pa' :: Pk : Pc';$$

y como por hipótesis se tiene

$$PC : PA' :: PK : PC';$$

y las primeras razones son evidentemente una misma, se tendrá

$$PK : PC' :: Pk : Pc' \qquad [55];$$

y por consiguiente la recta $C'c'$ es paralela á Kk y está con ella en la relacion constante de PA′ á PC. En virtud de todo lo expuesto, si suponemos un lápiz situado en el punto C′ y un punzon en K, cuando éste recorra una recta Kk, el lápiz trazará la $C'c'$ paralela á ella y en la relacion de PA′ á PC; por lo tanto, cuando el punzon recorra los diferentes lados de un polígono cualquiera, el lápiz trazará otro semejante á él por tener sus lados paralelos y en la misma relacion, que puede ser dada de antemano disponiendo convenientemente las articulaciones A′ y C. Las curvas recorridas al mismo tiempo por K y C′ resultan tambien semejantes, porque pueden considerarse como límites de polígonos rectilíneos.

768. **Descripcion del pantógrafo de Gavard**.—Las condiciones á que debe satisfacer el sistema de reglas á que acabamos de referirnos para aplicarse á la copia y reduccion de planos, se obtienen cumplidamente en el pantógrafo de Gavard, que se compone de dos reglas de metal AC y BD (fig. 291) unidas á otra CK por medio de juegos de charnela c, c', los cuales son ejes cilíndricos verticales de acero, que en su parte inferior llevan un taladro horizontal donde se introduce una palanca en que termina la pieza

del destornillador, para armar y desarmar el instrumento y apretar más ó ménos las reglas; terminando por su parte superior en una rosca, á la que se atornilla una tuerca en forma de cabeza de tornillo: una cuarta regla A′ B′ igual en longitud á la parte CD de la CK va unida por sus extremos, y tambien por medio de juegos de charnela c'' y c''' como las anteriores, á dos cajas de metal A′ y B′, las cuales pueden correr á lo largo de las reglas AC y BD cuando se aflojan los tornillos t y t', ó formar cuerpo con dichas reglas apretándolos; logrando de este modo colocar la regla A′B′ paralelamente á la CD y á la distancia que convenga, constituyendo el paralelógramo A′B′DC de ángulos variables. A lo largo de la parte PA corre otra caja P, con su correspondiente tornillo t'' por la parte exterior del instrumento para fijarla á la regla, y con un taladro cilíndrico por la interior donde se introduce un eje de acero, el cual tiene en su extremo inferior una rosca que se atornilla en la tuerca correspondiente dispuesta en una masa de hierro H, la que tiene por objeto hacer que permanezca fijo dicho eje, alrededor del cual se ha de verificar el movimiento de rotacion de todo el instrumento.

Otra caja C′ corre á lo largo de la regla A′B′, y puede fijarse á ella por el tornillo de presion t''', llevando consigo un lapicero z; y una tercera caja K está igualmente dispuesta con relacion á la regla CD, y se halla provista de un *calcador* de acero a. El extremo afilado del lapicero z de la caja C′, puede estar en contacto con un papel fijo al tablero sobre el cual se dispone el instrumento, para cuyo fin se le carga de un peso conveniente con auxilio de unas piezas de plomo que pueden colocarse fácilmente en la parte superior del lapicero; ó bien puede impedirse el contacto, elevando el lapizero por medio de un cordon, que atraviesa las poleas verticales p, p' y la horizontal p'', así como una anilla b, y se sujeta por uno de sus extremos á la pieza d, dotada de un movimiento de báscula.

Las reglas que constituyen el instrumento se apoyan en cuatro ó más cajas s, que llevan en su parte inferior unas armaduras de hierro, las cuales terminan en unas ruedas de márfil r susceptibles de girar alrededor de su eje horizontal, y la armadura en que este eje se apoya gira tambien alrededor de un eje vertical; resultando que todas las ruedas pueden moverse como se necesita en todos sentidos, en virtud de los dos movimientos combinados de que es susceptible el aparato.

La longitud de la regla BD es igual á la parte de la CA que hay desde su extremo C hasta el *cero*. A partir de este punto en la CA, del extremo B en la BD, y del A′ en la A′B′, se ven marcadas en las tres reglas las mismas divisiones $\frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}$...

Las letras mayúsculas de la figura son las que van grabadas en el mismo instrumento

769. **Disposicion del pantógrafo en estacion.** —Colocando como se represeta en la figura sobre un tablero bien nivelado, dispuestos convenientemente el calcador, el lapicero y las cajas s, y seguros de que

todos los movimientos del aparato se ejecutan con facilidad, se fijará la relacion que ha de guardar la copia con el original, y supongamos que sea la de $\frac{1}{2}$. Se moverá la regla A′B′ paralelamente á sí misma hasta que los bordes de las cajas A′ y B′ coincidan exactamente con las divisiones $\frac{1}{2}$ de las reglas AC y BD. Se correrá despues la caja C′ á lo largo de la regla A′B′ hasta que coincida con la division $\frac{1}{2}$, así como las cajas P y K se harán coincidir exactamente con los *ceros* de las reglas AC y CD, apretando despues fuertemente los tornillos de las cinco cajas: hecho todo lo cual, el instrumento se hallará armado y en disposicion de usarse; pero antes debe verificarse y corregirse, determinando tambien la posicion que han de tener en la mesa donde se halla el pantógrafo, el dibujo original y el papel blanco que ha de recibir la copia.

Para la colocacion del original y el papel de la copia, supongamos primero que el instrumento es exacto y que se ha montado de manera que llene exactamente las condiciones que se requieren para la fiel reproduccion del original. Se fija al tablero el papel de la copia, en el cual se ha trazado una línea homóloga de otra del original y en la relacion asignada; moviendo el pantógrafo hasta que la punta del lápiz se halle en uno de los extremos de dicha recta de la copia, y colocando su homólogo en el original debajo del calcador. Fijando este punto, y llevando el lápiz por el movimiento del pantógrafo al otro extremo de la citada línea, se hace girar á la recta homóloga en el original alrededor de su extremo fijo hasta que el otro coincida con la punta del calcador; con lo cual se hallará convenientemente dispuesto el original. La coincidencia no podrá ménos de verificarse, en atencion á la hipótesis que hemos hecho de la exactitud del instrumento.

770. **Verificaciones y correcciones.**—Las causas de imperfeccion á que este instrumento está sujeto, y las verificaciones y correcciones á que da lugar son las siguientes:

1.ª Que estando bien establecidas las divisiones de las tres reglas, y exactamente colocadas las cajas A′, C′ y B′ (fig. 291) en la relacion elegida de $\frac{1}{2}$ por ejemplo, los tres puntos P, C, K no se hallen en línea recta: lo que se conocerá en que adaptando á ellos el canto de una regla ó un hilo tirante no coincide exactamente. Entónces el error no puede provenir de que la punta del lápiz no sea la proyeccion del eje del lapicero por estar mal afilado, lo que se conocerá si haciéndole girar sobre sí mismo alrededor de su eje traza la punta una pequeña circunferencia en lugar de señalar un solo punto, en cuyo caso se procederá á afilarle de nuevo. Si á pesar de estar bien afilado el lápiz su punta no se halla en línea recta con los *ceros*, es prueba de que el error está en las divisiones de la regla A′B′, por lo que habrá que recorrer á lo largo de esta la caja C' en el sentido conveniente verificando la correccion por tanteos.

2.ª Que estando el lápiz en línea recta con los *ceros* P y K no resulte la coincidencia de que hemos hecho mérito en el párrafo anterior, resultando en el original una recta más corta ó más larga que la homóloga de la recorrida por el lápiz en la copia. En este caso se aflojarán los tornillos t y t', y se aproximará la regla A'B' á la CK ó se alejará de ella paralelamente á sí misma, buscando por tanteos la nueva posicion que debe ocupar, hasta que se logre la coincidencia exacta.

771. Cuidando de que se verifiquen las mencionadas condiciones, es fácil concebir que se podrá adoptar otra relacion cualquiera distinta de las que marcan las divisiones de la regla, disponiendo convenientemente las cajas en el pantógrafo por tanteos.

772. **Usos del pantógrafo.**—Dispuesto el instrumento como hemos indicado en lo que llevamos expuesto, la copia resulta reducida: pero si queremos amplificar un dibujo ó copiarle en la misma escala, se coloca la pieza H (fig. 291) en C' y el lapicero en P, y la línea de fé de C' en la division $\frac{1}{2}$ de la regla A'B' para este último caso; y en el de la amplificacion es necesario además colocar las cajas A' y B de modo que dividan á las reglas AC, BD en partes proporcionales á los números que marcan la relacion de las escalas. Así para copiar en escala doble de la del original, se hará que PA' sea doble de A'C.

Dispuesto y corregido el instrumento, se reduce la operacion á pasar el calcador por todas las líneas del original, las que irá reproduciendo fielmente y con exactitud el lápiz en el papel dispuesto para la copia. El pantógrafo sustituye con la mayor ventaja á cuantos procedimientos hemos explicado anteriormente, determinando con toda la facilidad y prontitud que puedan desearse los contornos del dibujo, así como sus detalles, por complicados que sean.

773. Cuando se trate de la reproduccion de líneas rectas, convendrá guiar el calcador por el borde de una regla ó escuadra delgada colocada en contacto con aquellas; y se cuidará de separar el lápiz del papel de la copia, levantándole por medio del hilo que atraviesa las poleas, cuando no se quiera que alguna línea del original resulte en la copia, ó cuando al pasar el calcador de un punto á otro se quiera evitar el trazado de líneas inútiles. Aflojando despues el cordon, vuelve á caer por su propio peso y el de las pesas adicionales (768). Los arcos de círculo deberán hacerse ó rectificarse con el compás.

774. **Fórmulas en que se funda la division de las reglas del pantógrafo de Gavard.**—Las fórmulas que emplean los construtores para marcar las divisiones de las reglas, pueden servir para establecer una relacion cualquiera $\frac{m}{n}$ de la copia al original, cuando no aparezca

señalada en el instrumento: se miden las cantidades constantes PC y CK (fig. 291), las que designaremos respectivamente por a y b: llamando entonces x é y á las PA′ y A′C′ se tendrán las razones iguales

$$x : a :: y : b :: m : n,$$

de las que resultan las fórmulas

$$x = a \times \frac{m}{n} \quad [56]:$$

$$y = b \times \frac{m}{n} \quad [57]:$$

775. Cuando el eje de rotacion está en C′ (772), se tiene la proporcion

$$PA' : A'C' :: PC' : C'K,$$

ó (Arit. 171),

$$PA' : PC' :: PC' : PC' + C'K,$$

de la cual resulta, despues de sustituir valores,

$$x : a :: m : m + n;$$

de donde

$$x = a \times \frac{m}{m + n} \quad [58],$$

y de un modo análogo se obtiene

$$y = b \times \frac{m}{m + n} \quad [59].$$

776. **Pantógrafo decimal**.—Este pantógrafo difiere solamente del de Gavard en que los extremos de las reglas PC y BK (fig. 292) están unidos por una regla PB, por medio tambien de juegos de charnela, en los puntos P y B. Las cinco reglas que forman el instrumento son iguales y tienen exactamente la longitud de 1m, constituyendo por lo tanto las cuatro CK, BK, PB y PC un rombo en todas las posiciones del instrumento; conservándose siempre la A′B′ paralela á las PB y CK en su movimiento á lo largo de las reglas PC y BK. El calcador va siempre en K, y el centro de rotacion y el lapicero pueden cambiar de posicion en los puntos P y C′, resultando las dos disposiciones que pueden dársele en su uso. La division de las dos reglas PC y BK á partir de los puntos P y B donde se colocan los *ceros*, y la de la A′B′ á partir de A′ donde se coloca tambien en esta regla, puede ser cualquiera; pero siendo más conveniente en todos los pantógrafos dividir las reglas en muchas partes iguales, para obtener más fácilmente las relaciones, y más cómodo emplear la division decimal, en el instrumento que nos ocupa se han dividido las tres re-

glas PC, BK y A'B, que hemos dicho tienen de largo un metro, en decímetros, centímetros y milímetros, llevando cada una de las cajas que corresponden á los puntos A', C' y B' el correspondiente *nonius* que comprende la longitud de 9 milímetros dividida en 10 partes iguales, recibiendo por esta circunstancia este instrumento el nombre de *pantógrafo decimal*, que no es otra cosa que el de Gavard perfeccionado.

777. Las fórmulas para establecer las divisiones son las mismas que las del de Gavard, con la diferencia de que en el pantógrafo decimal son iguales las constantes a y b.

778. **Aplicacion de la fotografía á la copia y reduccion de los planos.** —Concluiremos manifestando que la *fotografía* está llamada á prestar un importante servicio en su aplicacion á la copia de los planos en igual, mayor ó menor escala que el original, cuando este problema haya acabado de resolverse por completo. Hoy se reproducen ya los dibujos con mucha exactitud; pero este sistema tiene el inconveniente, cuando el original presenta muchos detalles y la relacion elegida para la copia es muy pequeña, que ésta resulta bastante confusa, puesto que se reproducen todos aquellos; y en un plano topográfico no hay necesidad sino de cierto número de ellos, debiéndose descartar, para la claridad del dibujo, los que son insignificantes. En los planos en grande escala es de la mayor importancia la aplicacion de la fotografía, por lo mismo que reproduce todos los detalles. Atendida la índole de este sistema y la prontitud de las operaciones, la fotografía será con el tiempo un inmenso adelanto en la reproduccion de los planos y producirá economías de consideracion.

FIN DEL CURSO ELEMENTAL.

ÍNDICE.

LIBRO PRIMERO

NOCIONES PRELIMINARES.

CAPÍTULO PRIMERO.

Definiciones é ideas generales.

CAPÍTULO II.

De la superficie terrestre y de su representacion geométrica.

CAPITULO III.

Nociones de Óptica.—Anteojos.

CAPÍTULO IV.

Instrumentos en general, y partes principales de que se componen.

CAPITULO V.

Medida y repeticion de los ángulos.

CAPÍTULO VI.

Generalidades acerca de las verificaciones y correcciones de los instrumentos.

LIBRO SEGUNDO.

PLANIMETRÍA.

CAPITULO PRIMERO.

Instrumentos angulares empleados en las operaciones elementales de la Planimetria.

CAPÍTULO II.

Goniómetros de precision.

CAPÍTULO III.

Trazado y medicion de las alineaciones.

CAPÍTULO IV.

Problemas de Planimetría.

CAPITULO V.

Levantamiento de planos.

CAPÍTULO VI.

Construccion y replanteo de los planos

LIBRO TERCERO.

NIVELACION

CAPITULO PRIMERO.

Ideas generales.

CAPITULO II.

Instrumentos de nivelacion.

CAPÍTULO III.

Nivelacion por alturas.

CAPITULO IV.

Nivelacion por pendientes.

CAPÍTULO V.

Nivelacion barométrica.

CAPÍTULO VI.

Problemas de nivelacion.

CAPÍTULO VII.

Perfiles y sondeos.

CAPÍTULO VIII.

Trazado de las curvas horizontales.

LIBRO CUARTO.

REPRESENTACION DEL TERRENO.

CAPÍTULO PRIMERO.

Triangulacion.

CAPÍTULO II.

Proyeccion horizontal del terreno.

CAPÍTULO III.

Relieve del terreno

LIBRO QUINTO.

COMPLEMENTO DE LAS OPERACIONES TOPOGRÁFICAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

Medida de las áreas.

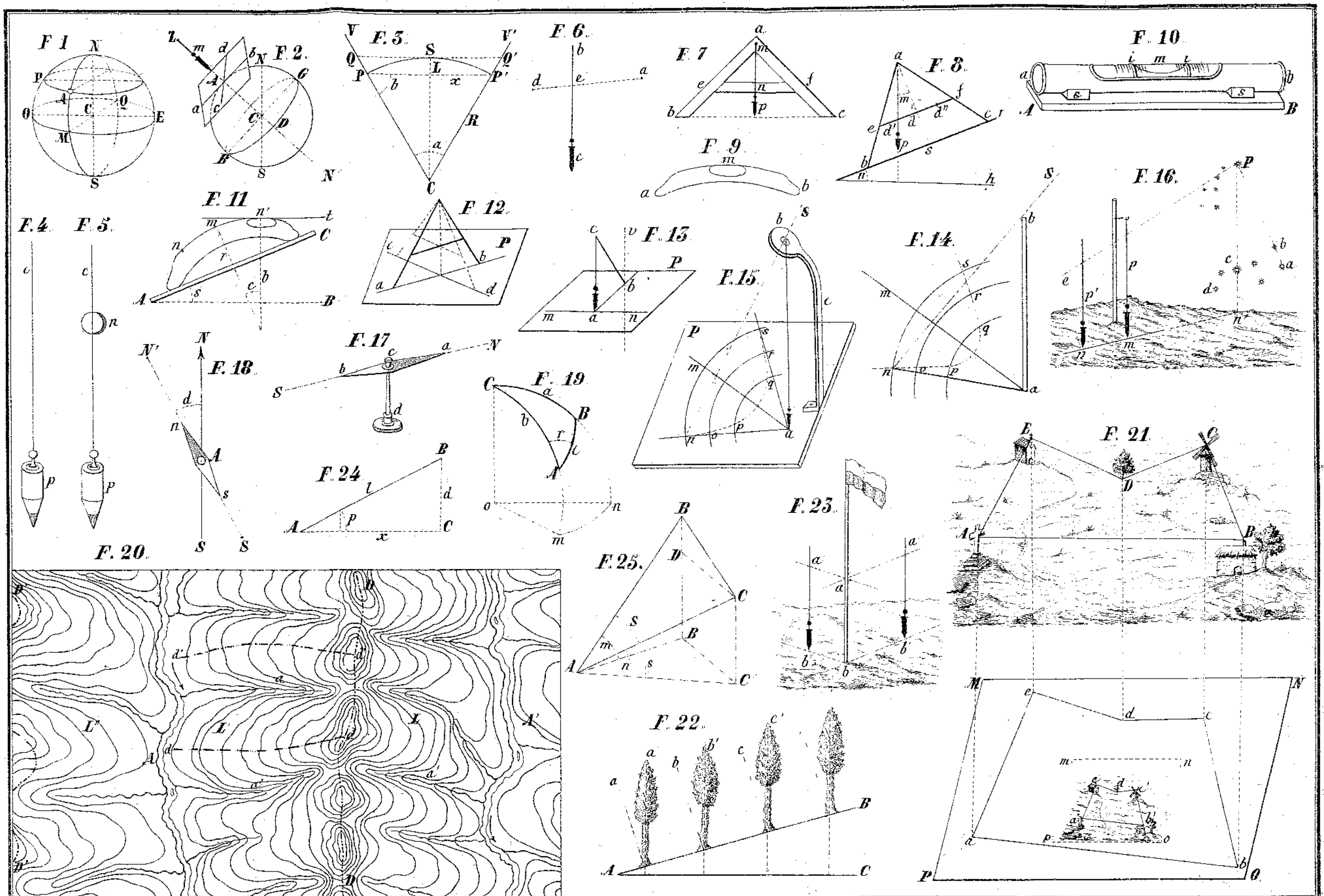
Págs.

CAPÍTULO IV.

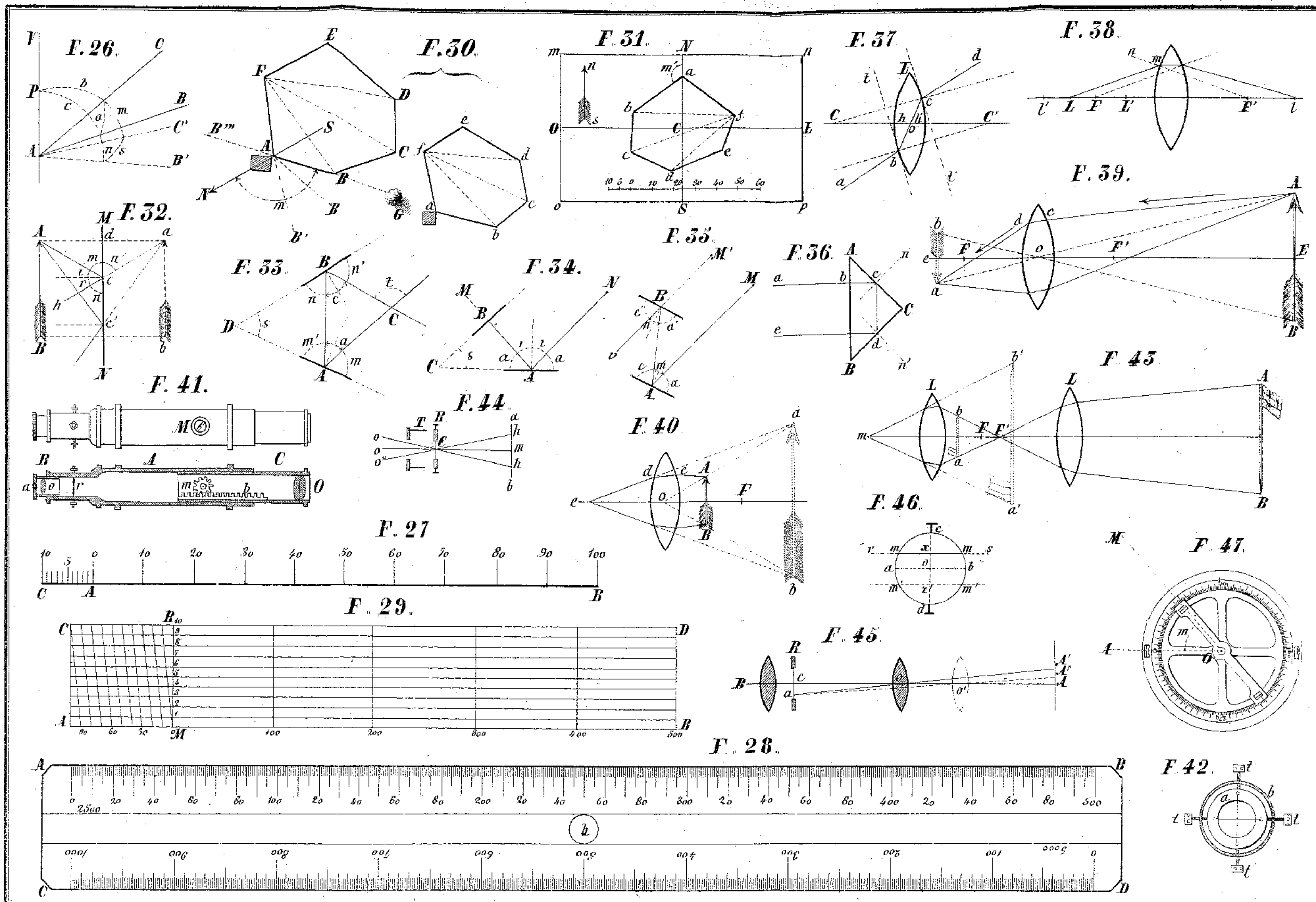
Copia y reduccion de planos y perfiles.

ERRATAS IMPORTANTES.

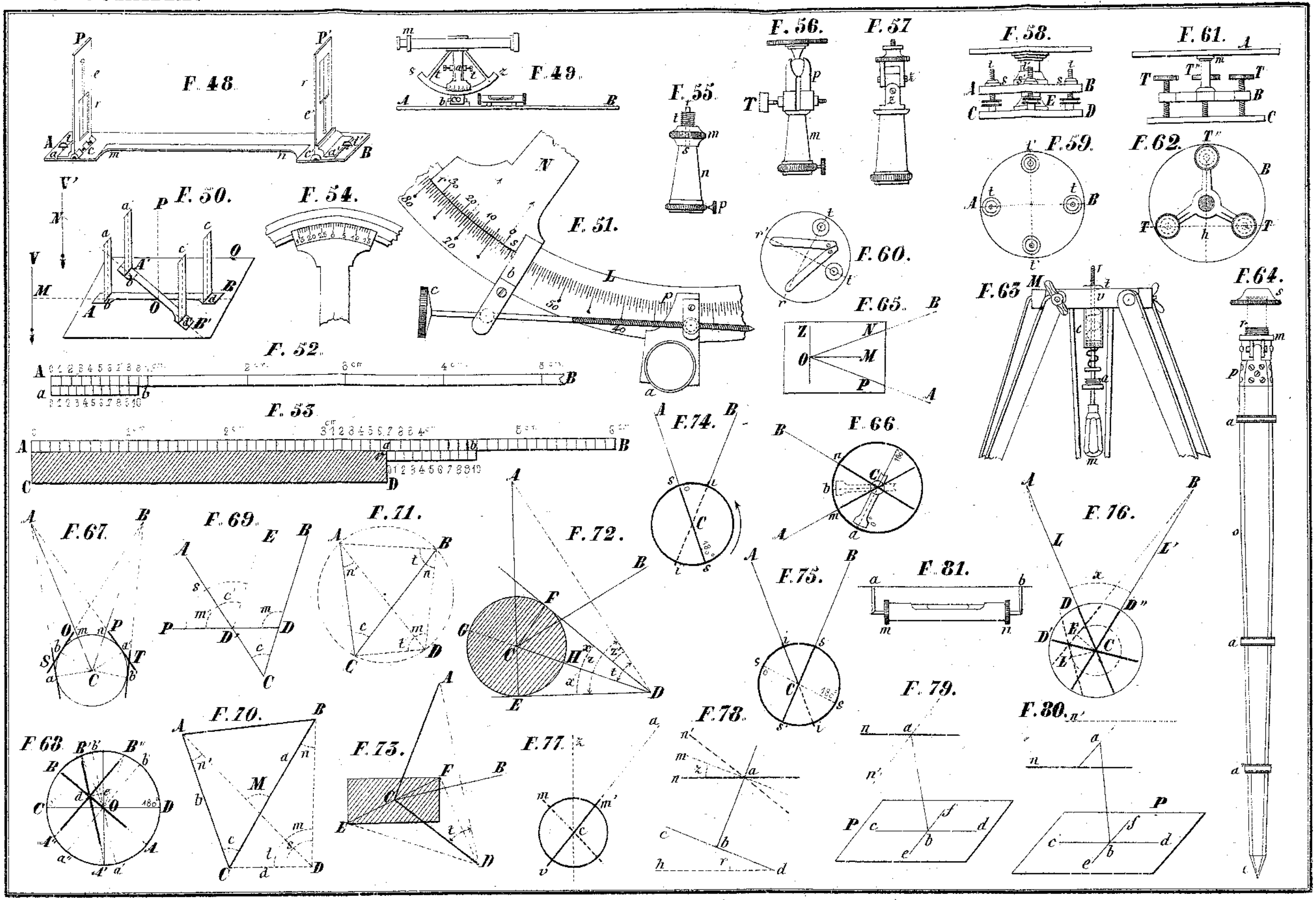
PÁGINA.	PÁRRAFO.	LÍNEA.	DICE.	DEBE DECIR.
8	48	1	pendiente	pendiente de un punto
27	99	5	500	5000
30	110	1	mayor	menor
33	122	20	eje	centro
58	213	1	dá	á
85	314	3	coincidan	coincidian
93	333	12	a'	a
94	334	4	$q'h'$	g' y h'
104	358	5	$A'E'=$	$A'E'$
112	393	19	d'	d''
125	»	10	á	y
129	444	7	erres	errores
130	447	14	conseguirse	seguirse
135	»	3	$0{,}0000000 \times l^2$	$0{,}000000066 \times l^2$
»	»	5	$0{,}000000066 + l^2$	$0{,}000000066 \times l^2$
148	»	1	diano	plano
162	526	24	$h =,$	h
164	528	5	$l +$ tang.m.	$l \times$ tang.m.
201	624	19	$AH + AK \times \ldots AZ$	$AH \times AK \times \ldots AZ$
204	»	13	$z = KPA = p;$	$z = KPA - p;$
223	»	6	cinco los	los cinco
230	694	13	AFG	AFC.
245	»	22	geográficas	gráficas
252	»	9	porciones	proporciones
256	742	11	AE	AH
»	id.	12	ABE	ABH
258	»	2	FF	FF'
261	754	2	contoros	contornos
262	»	9	$L + \frac{N}{M}$.	$L \times \frac{N}{M}$.
263	757	19	observacion	conservacion
265	»	3	S es $s = 1$	Si es $s = 1$
271	»	12	P'C	PC



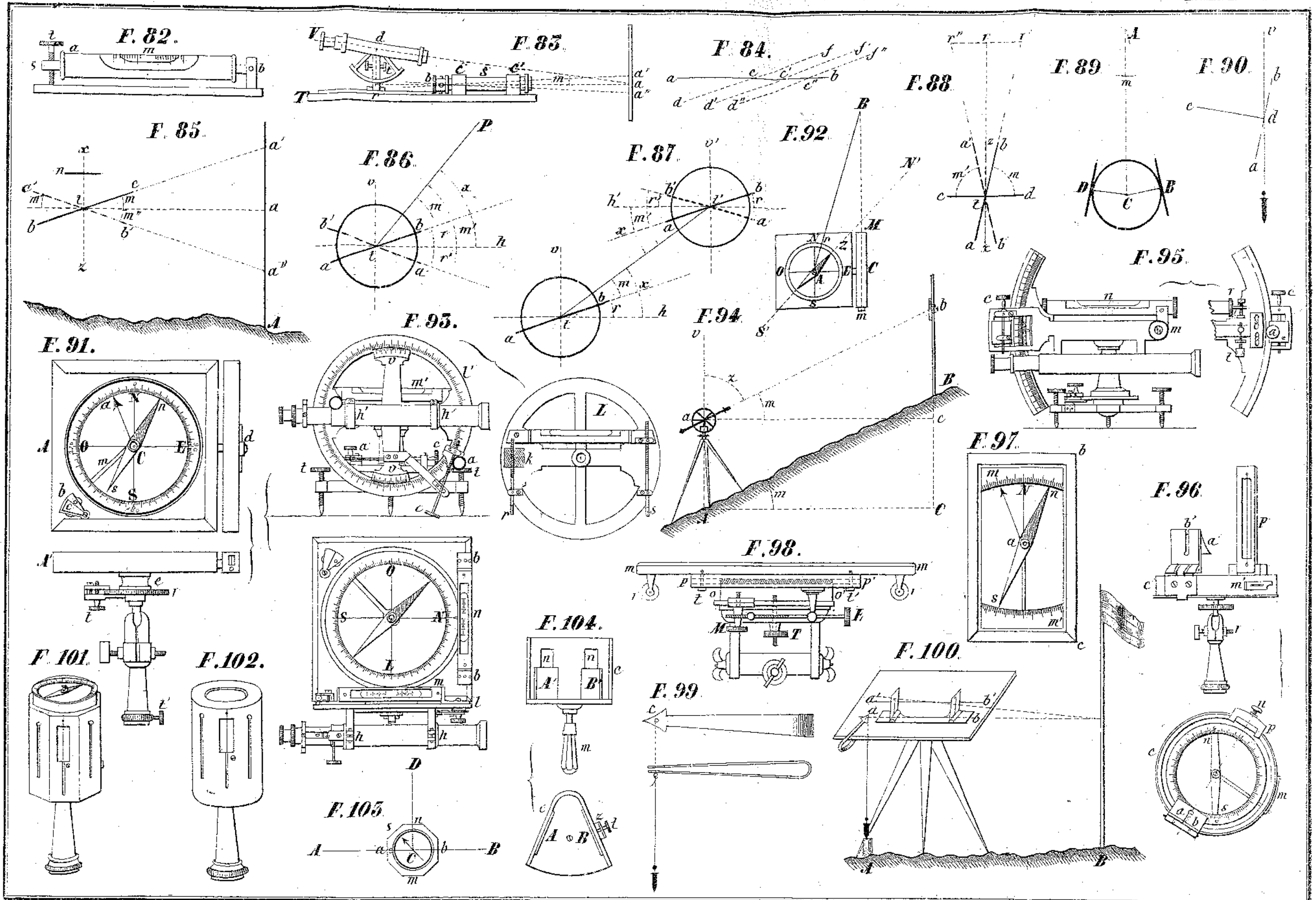
J. Gil Sillaurilla del.   Lit. Fernandez, Salvador 3.   F. Peñuelas litog.

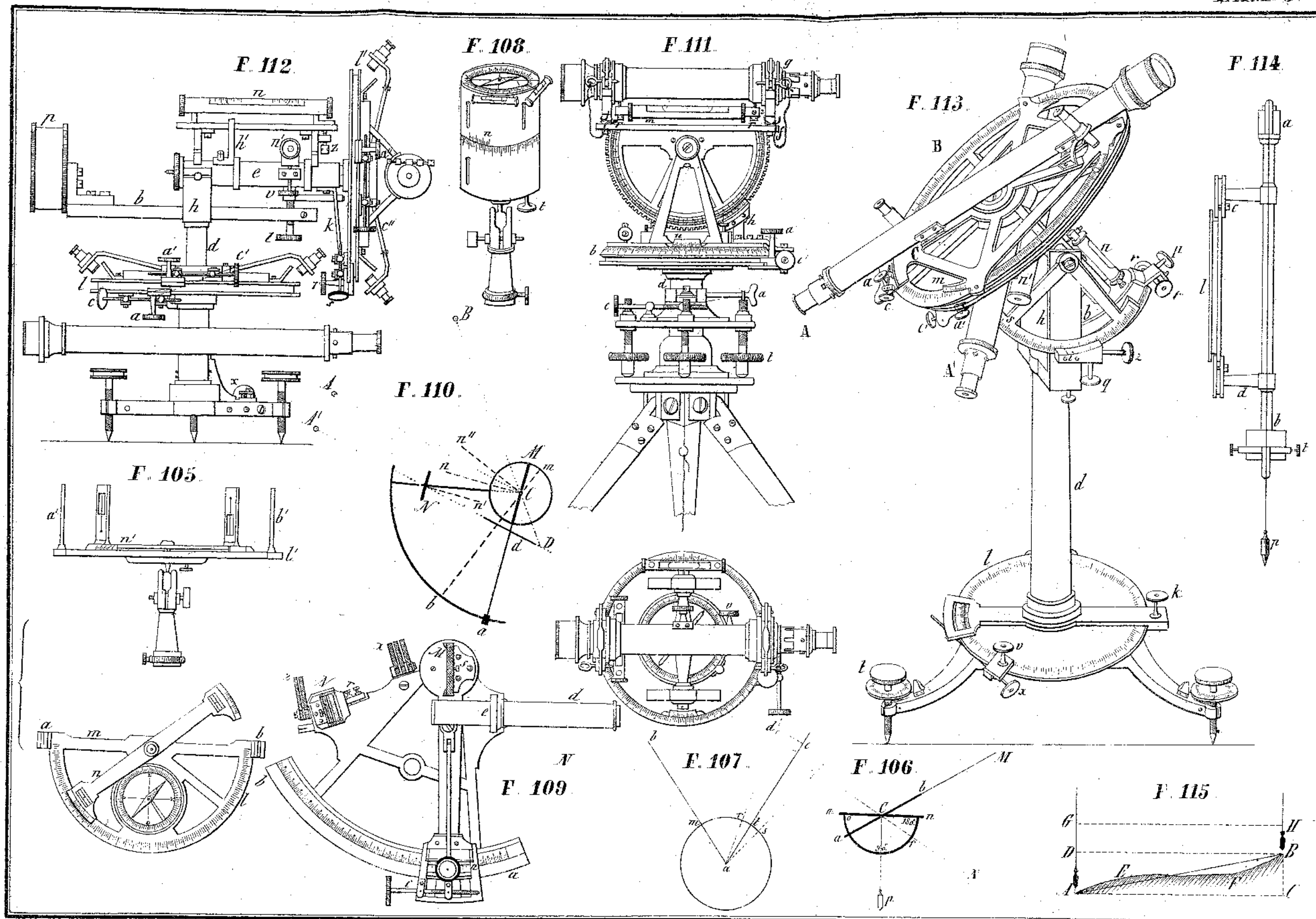


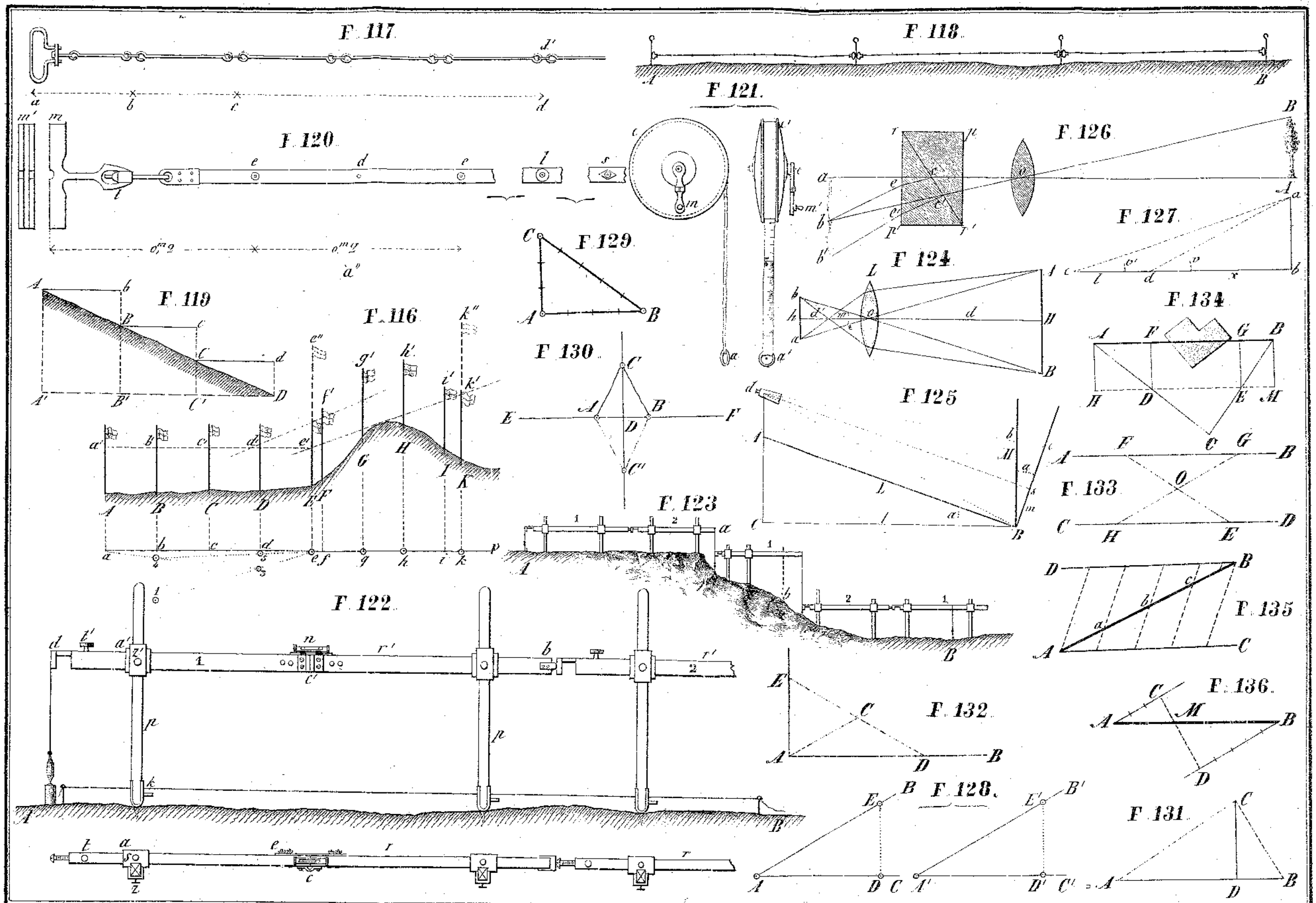
Lit. Fernandez, Salvador, 8. E. Peñuelas lit.

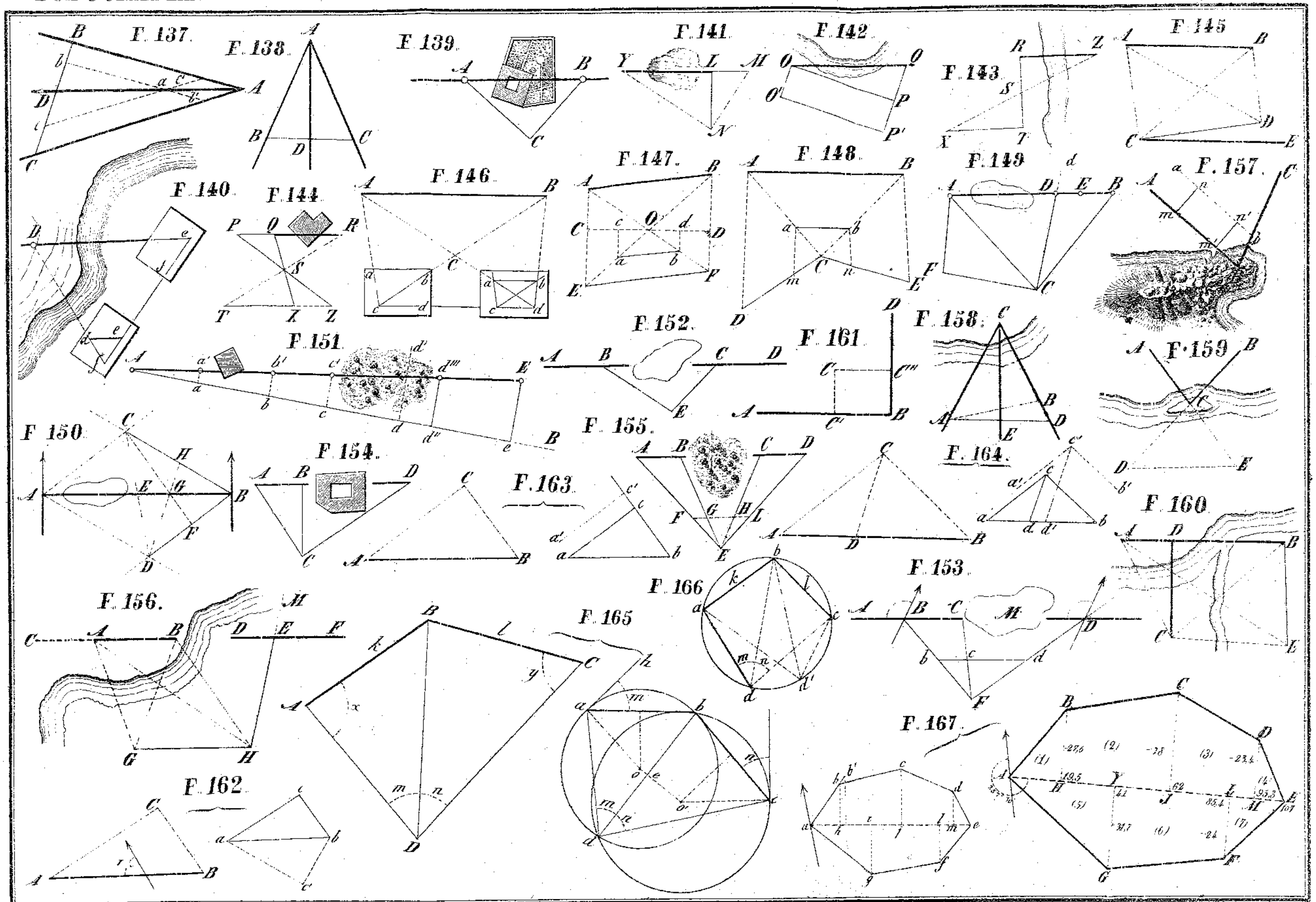


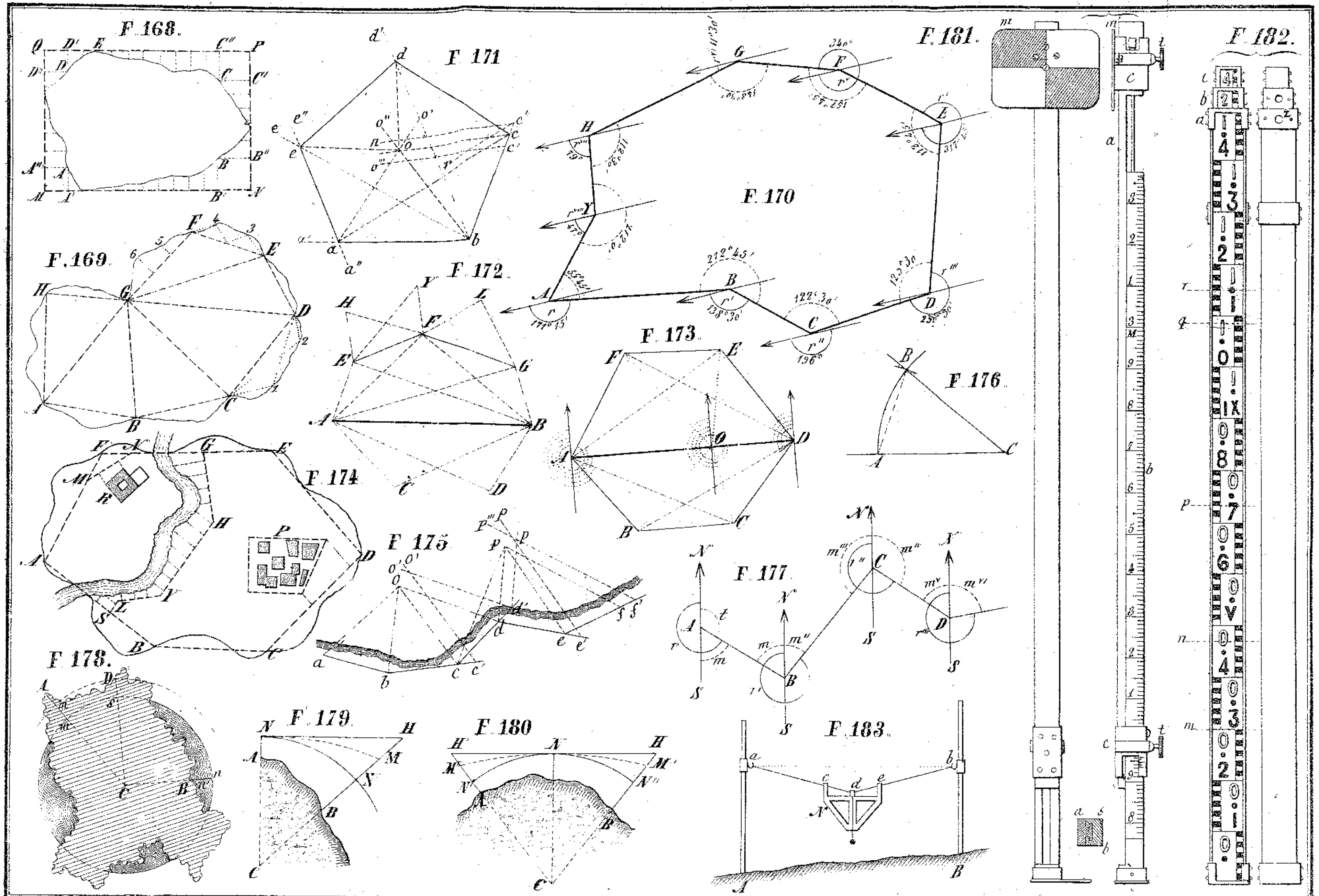
J. Gil Soldevilla dib.° Lit. Fernandez, Salvador, 9 F. Peñuelas litog.°

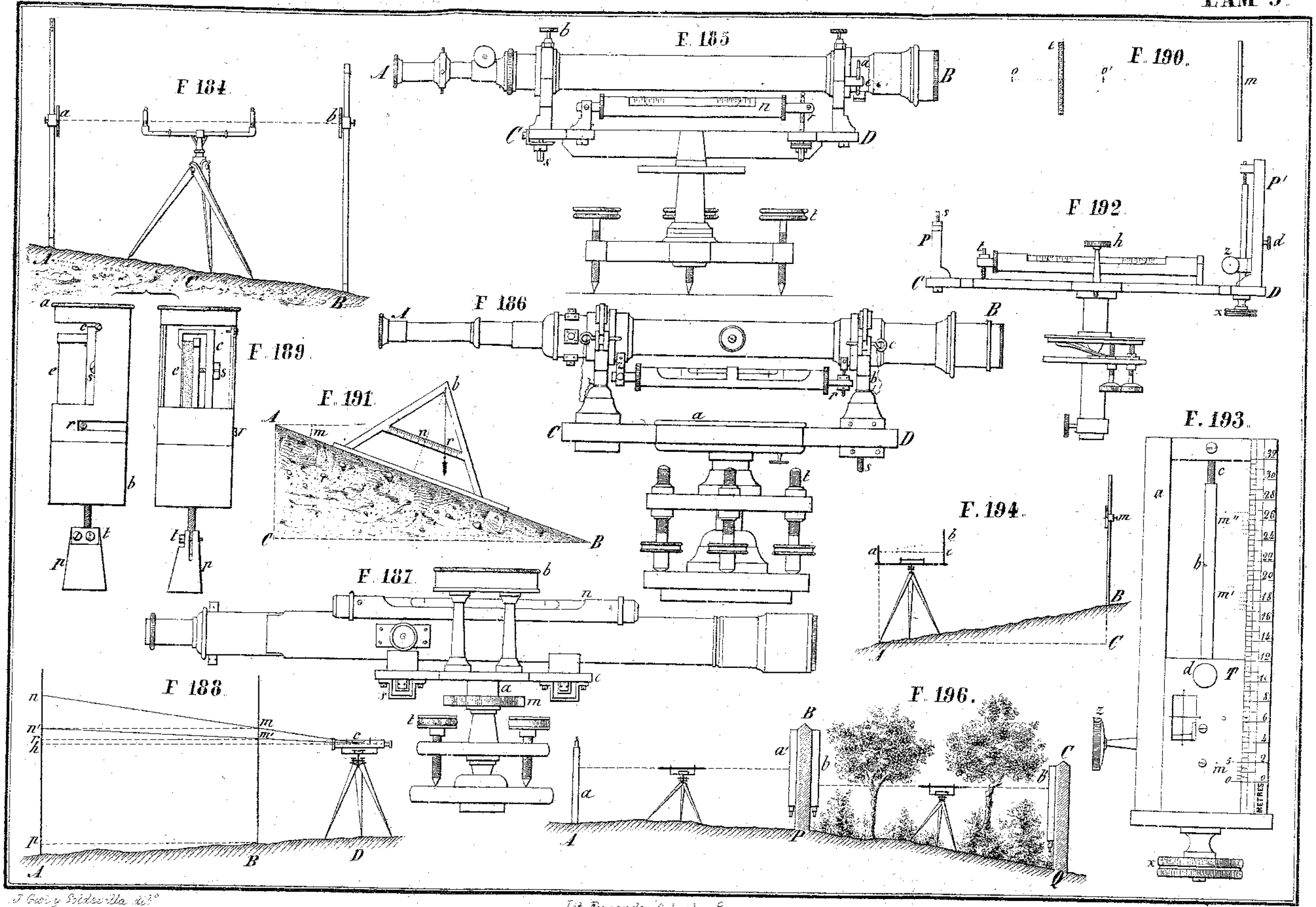

F. 82.
F. 83.
F. 84.
F. 85.
F. 86.
F. 87.
F. 88
F. 89
F. 90.
F. 91.
F. 92.
F. 93.
F. 94.
F. 95.
F. 96.
F. 97.
F. 98.
F. 99
F. 100.
F. 101.
F. 102.
F. 103.
F. 104.


F. 112.
F. 108.
F. 111.
F. 113.
F. 114.
F. 110.
F. 105.
F. 109.
F. 107.
F. 106.
F. 115.

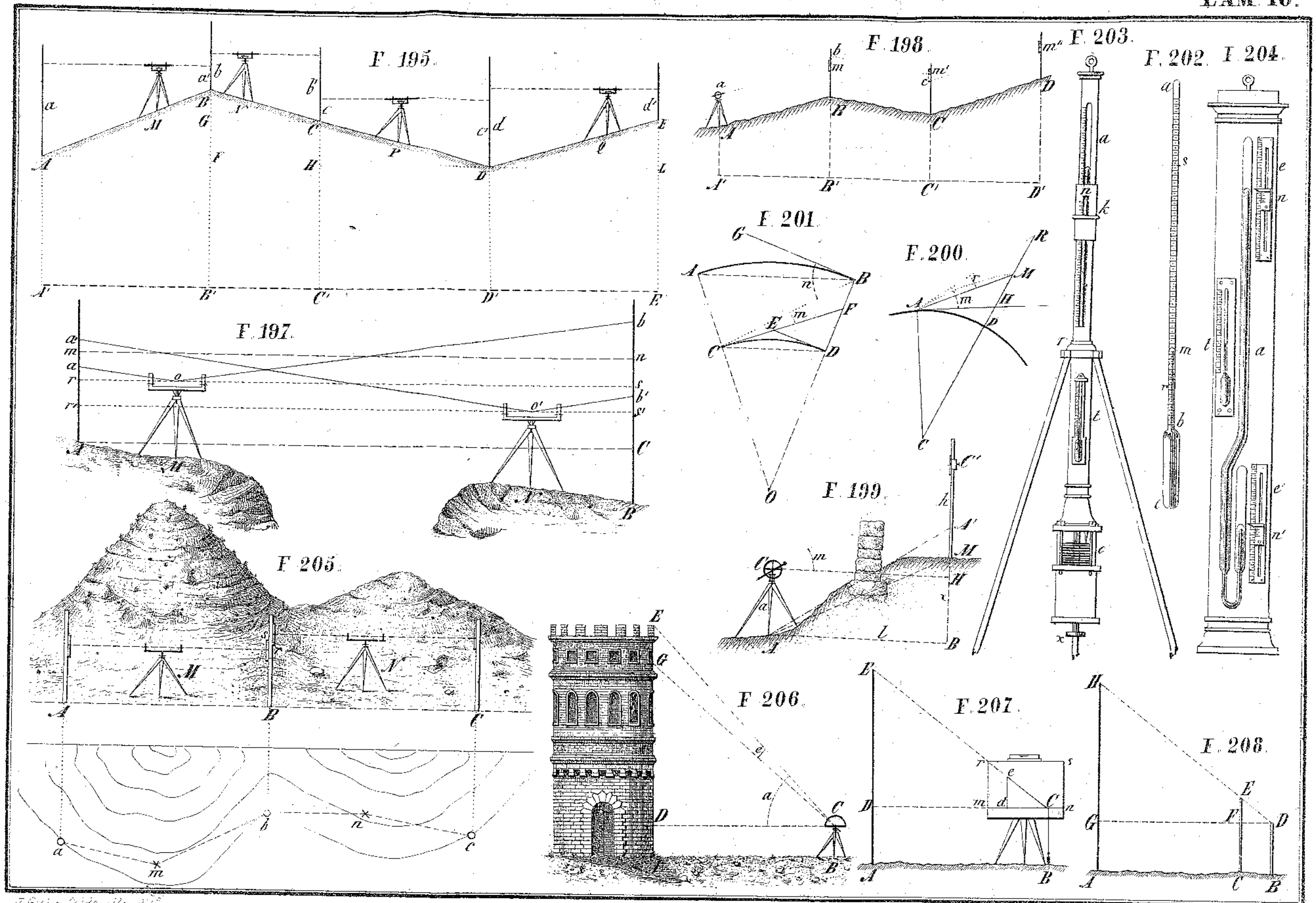

F. 116.
F. 117.
F. 118.
F. 119.
F. 120.
F. 121.
F. 122.
F. 123.
F. 124.
F. 125.
F. 126.
F. 127.
F. 128.
F. 129.
F. 130.
F. 131.
F. 132.
F. 133.
F. 134.
F. 135.
F. 136.

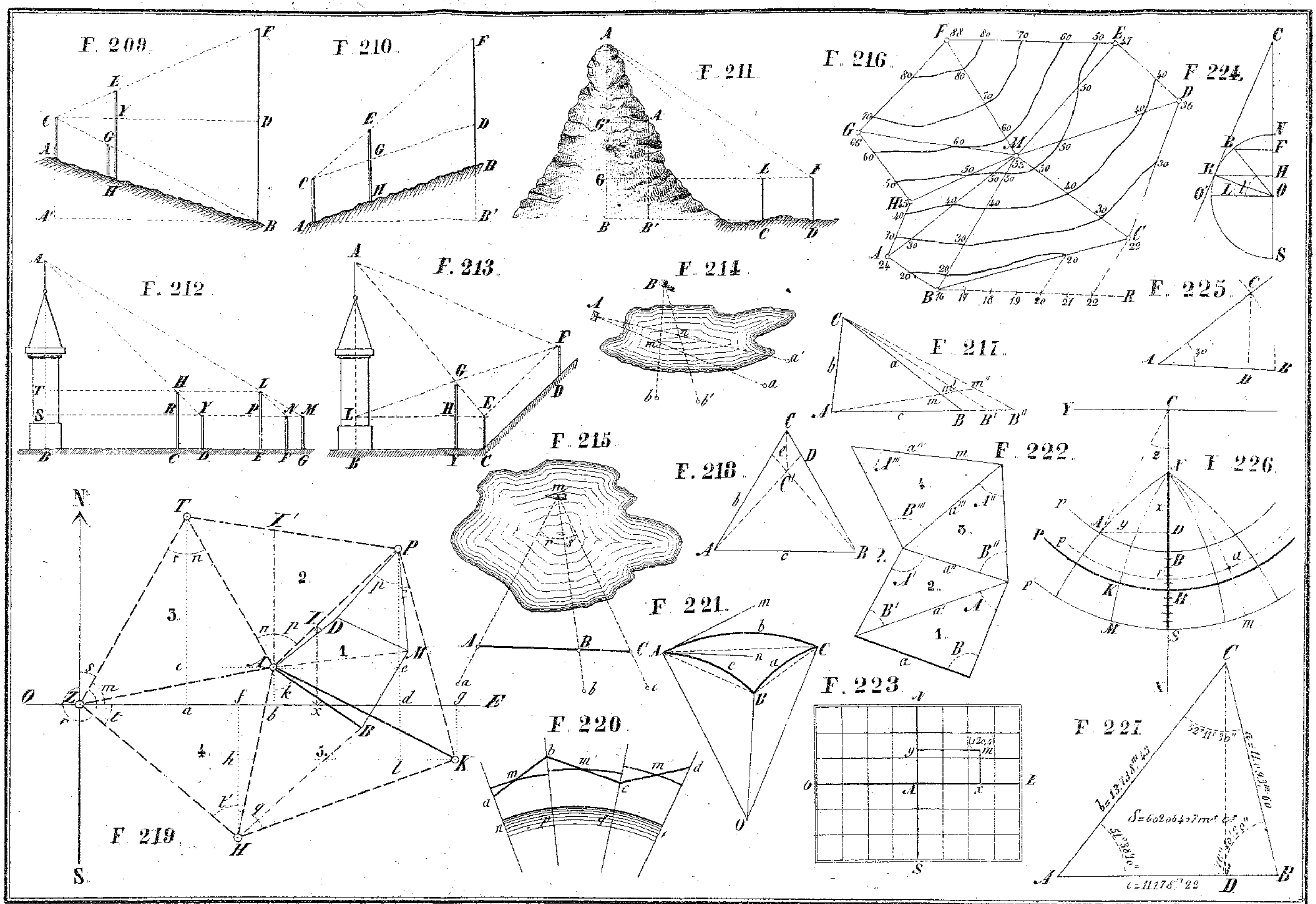

F. 137.
F. 138.
F. 139.
F. 140.
F. 141.
F. 142.
F. 143.
F. 144.
F. 145.
F. 146.
F. 147.
F. 148.
F. 149.
F. 150.
F. 151.
F. 152.
F. 153.
F. 154.
F. 155.
F. 156.
F. 157.
F. 158.
F. 159.
F. 160.
F. 161.
F. 162.
F. 163.
F. 164.
F. 165.
F. 166.
F. 167.


F. 168.
F. 169.
F. 170.
F. 171.
F. 172.
F. 173.
F. 174.
F. 175.
F. 176.
F. 177.
F. 178.
F. 179.
F. 180.
F. 181.
F. 182.
F. 183.

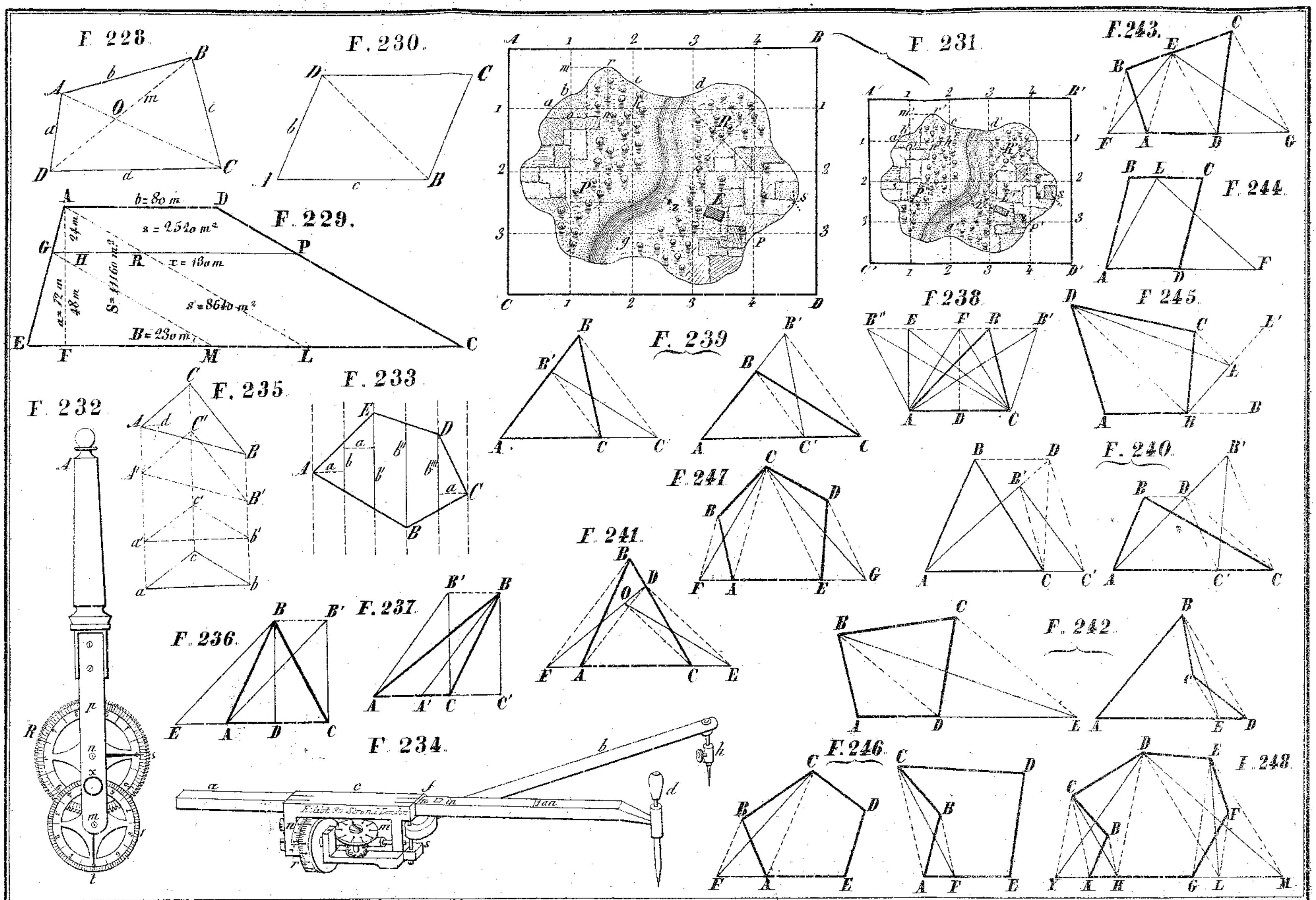


J. Gali y Saldarilla dib.º Lit. Fernandez, Salvado 9. P. Pellicer litog.º

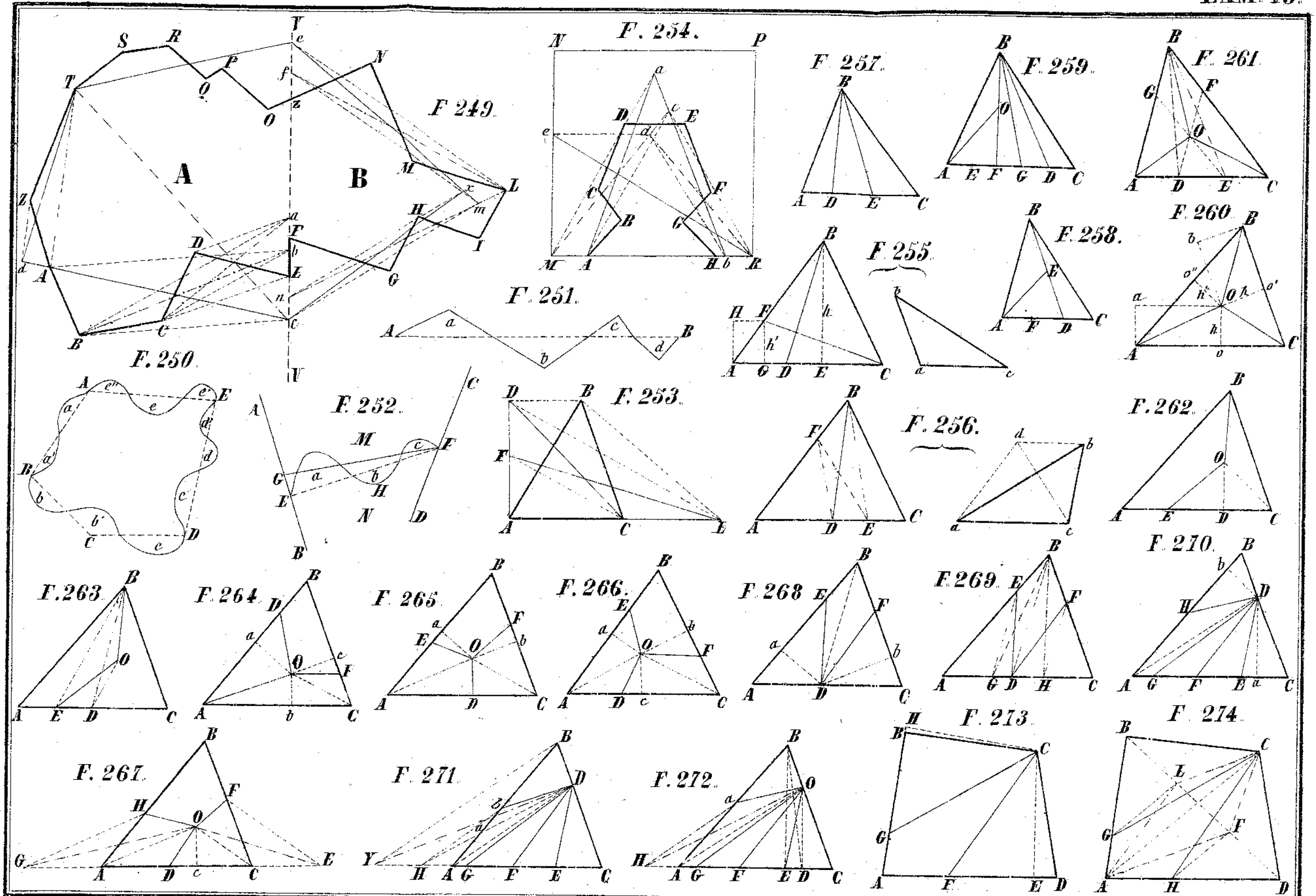

F. 195.
F. 197.
F. 198.
F. 201.
F. 200.
F. 199.
F. 203.
F. 202.
F. 204.
F. 205.
F. 206.
F. 207.
F. 208.

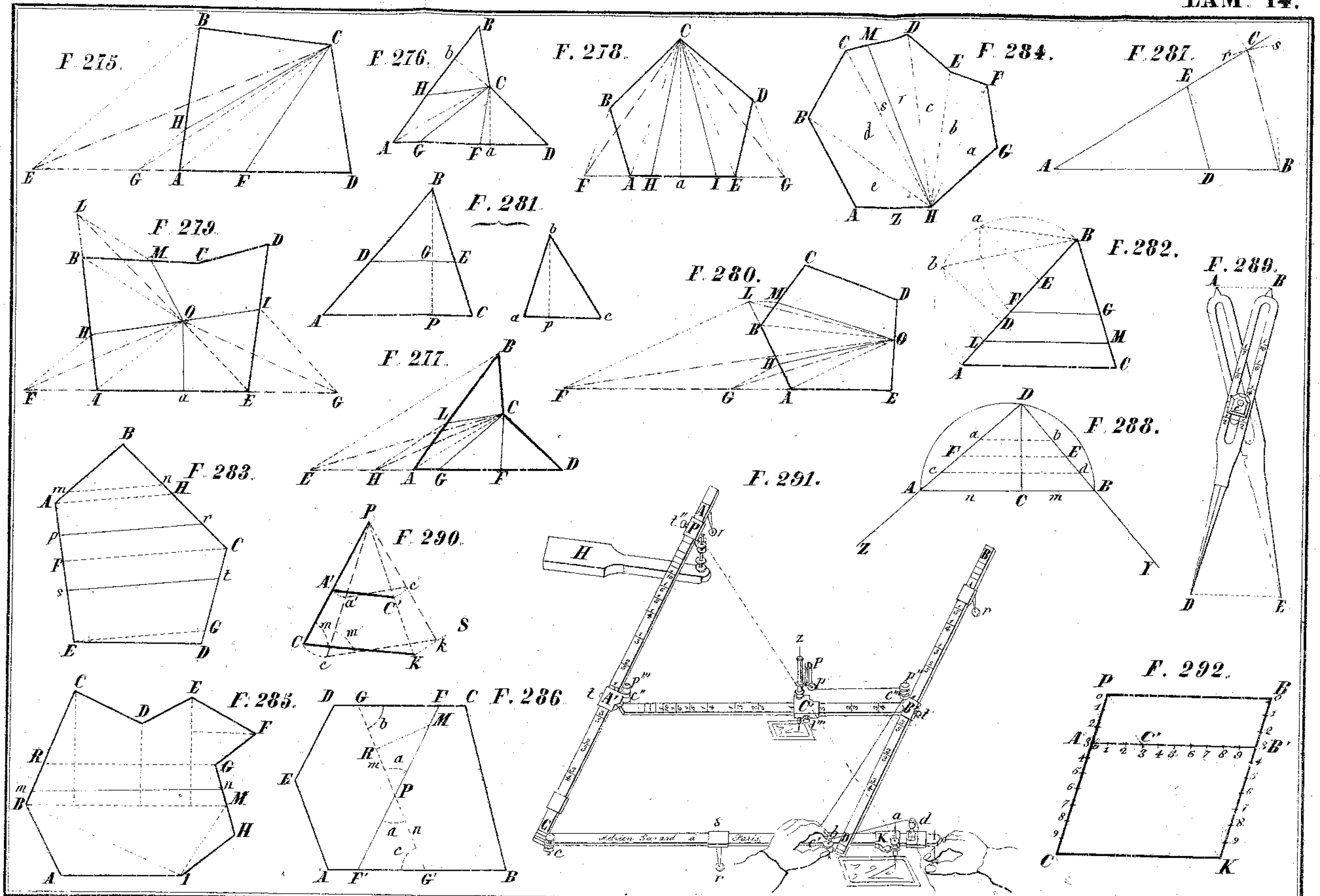


J. Giol y Soldevilla dib.° Lit. Fernandez, Soledad, n.° 8. F. Paredas, litog.°



F. 228.
F. 229.
b=80 m.
s=2520 m²
x=18 m.
S=11160 m²
s'=8640 m²
B=230 m.
F. 230.
F. 231.
F. 232.
F. 233.
F. 234.
F. 235.
F. 236.
F. 237.
F. 238.
F. 239.
F. 240.
F. 241.
F. 242.
F. 243.
F. 244.
F. 245.
F. 246.
F. 247.
F. 248.


F. 249.
F. 250.
F. 251.
F. 252.
F. 253.
F. 254.
F. 255.
F. 256.
F. 257.
F. 258.
F. 259.
F. 260.
F. 261.
F. 262.
F. 263.
F. 264.
F. 265.
F. 266.
F. 267.
F. 268.
F. 269.
F. 270.
F. 271.
F. 272.
F. 273.
F. 274.


F. 275.
F. 276.
F. 278.
F. 284.
F. 287.
F. 279.
F. 281.
F. 280.
F. 282.
F. 289.
F. 277.
F. 288.
F. 283.
F. 291.
F. 290.
F. 292.
F. 285.
F. 286.
Adrien Gavard à Paris.