GIOL Y COYANES

TOPOGRAFIA

2

TRATADO

DE

TOPOGRAFÍA.

TRATADO

DE

TOPOGRAFÍA,

DEDICADO

Á S. A. R. EL SERMO. SR. PRÍNCIPE DE ASTÚRIAS, HOY S. M. EL REY DON ALFONSO XII, Y ADMITIDA LA DEDICATORIA POR REAL ÓRDEN DE 7 DE FEBRERO DE 1862, EN VIRTUD DE INFORME FACULTATIVO,

POR EL ILMO. SEÑOR

D. ISIDRO GIOL Y SOLDEVILLA,

Comendador de la Real órden española de Isabel la Católica, Caballero de la Cruz de primera clase de la órden civil de María Victoria, y Vocal de la Asamblea de la misma, Caballero de la Real y Militar órden de San Fernando, Jefe honorario de Administracion de primera clase. Director de Caminos vecinales y Canales de riego, Profesor de Matemáticas, Arquitectura, Dibujo y Comercio, Vocal que ha sido de varios Tribunales de oposiciones á las cátedras de Matemáticas vacantes en los Institutos y Catedrático libre de Acotaciones y Topografía en el Instituto de San Isidro de Madrid y en otros varios Establecimientos,

Y

D. JOSÉ GOYANES Y SOLDEVILLA,

Director de Caminos vecinales y Canales de riego.

Obra declarada de texto en primer lugar en todas las ternas, por el Real Consejo de Instruccion pública, y adoptada en casi todas las Escuelas especiales facultativas civiles y militares.

3.ª EDICION CORREGIDA Y AUMENTADA.

TOMO II.

MADRID.
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE M. MINUESA,
calle del Juanelo, núm. 19.

1884.

NOTAS.

1.ª Un número encerrado entre paréntesis, así (25), dá á conocer que la materia de que se trata está fundada en lo dicho en el párrafo 25, el que se deberá tener presente para la mejor inteligencia.

2.ª Las citas de Matemáticas se refieren á los tratados y ediciones siguientes de la obra elemental del Sr. D. Juan Cortázar, y en su defecto á cualquiera de las posteriores:

Aritmética, 19.ª edicion.
Álgebra, 16.ª edicion.
Geometría, 13.ª edicion.
Trigonometría, 10.ª edicion.

3.ª Las citas de Acotaciones se refieren á la segunda edicion de nuestro Tratado publicado en 1873.

4.ª Los párrafos que llevan esta señal * pueden suprimirse en una primera lectura.

Á LOS LECTORES.

En el prólogo del 2.° tomo de la primera edicion de esta obra, poníamos lo siguiente:

«El presente Tratado de Nivelacion que tenemos el honor de ofrecer al público, es, sin disputa, el más completo de cuantos hasta ahora se han dado á luz. La descripcion de un sin número de *Niveles*, entre los que se cuentan los más modernos, y los detalles que contiene relativos á la práctica de todas las operaciones concernientes á la Nivelacion, hacen de este Tratado un libro tan útil como importante.

»Es evidente que los ferro-carriles, los puertos y carreteras de todas clases, los caminos vecinales, los canales de navegacion y de riego y las conducciones de aguas potables, cuyas importantes obras todas reconocen la Nivelacion por base principal, son los prodigiosos agentes de la industria, de la agricultura y del comercio, estando en razon de su desarrollo el grado de la riqueza pública y particular, y por consiguiente el engrandecimiento de las Naciones.

»Si se atiende á la época en que escribimos, cuando la imperiosa necesidad del fomento de las obras públicas y de la formacion del Catastro, obligan al Gobierno y á los particulares á mirar con preferencia tan importantes objetos, destinando á su realizacion cuantiosos capitales; si se atiende tambien á la carencia absoluta en nuestro idioma de obras originales como la presente, que sirvan de guia á la generalidad, exponiendo la ciencia á la altura á que se halla en los paises más adelantados, y con un método y claridad que facilite y haga agradable su estudio; y si, por último, se tienen en cuenta los extraordinarios gastos y sacrificios que nos hemos impuesto, entregados única y exclusivamente á nuestras propias fuerzas, no podrá menos de concedérsenos que hemos prestado á nuestra patria un servicio de no escasa importancia.

»No se crea, sin embargo, que tenemos la persuasion de haber escrito para aquellos que por sus carreras y profesiones tienen un deber de poseer esta ciencia á la altura á que hoy se encuentra. Hemos tenido presente, sobre todo, que en España se necesita además un personal auxiliar, numeroso é inteligente, que pueda prestar con utilidad sus servicios á los encargados de la direccion de las obras confiadas á empresas particulares; y si hemos descendido á tantos detalles en la mayor parte de las cuestiones de que tratamos, ha sido por la consideracion de que puedan sacar fruto de la lectura de esta obra hasta las personas menos instruidas.

»Con la publicacion de este segundo tomo se completa nuestro Tratado de Topografía, elevando ésta á toda la altura é importancia que en nuestro concepto debe tener en la actualidad. El lector verá tratadas en los lugares correspondientes las cuestiones geodésicas de más aplicacion y que hoy están llamadas á formar el complemento de la Topografía, habiendo prescindido únicamente de aquellas otras que son exclusivamente del dominio de la Geodesia. Desarrollado nuestro plan como nos habíamos propuesto, solo nos resta advertir que si esta obra sigue obteniendo del público el favor que hasta aquí, no tardaremos en dar á luz otro volúmen con las aplicaciones más importantes de la Topografía, cuales son el Trazado de los caminos y la Division de terrenos y montes; ocupándonos tambien de los Aforos, por las ventajas que pueda prestar esta última parte á los Agrimensores.

»Concluiremos rindiendo el homenaje de nuestra profunda gratitud á á los ilustrados redactores del periódico *La Revista de Obras públicas*, que en el número 16 del año próximo pasado se han dignado encarecer el tomo primero de nuestro humilde trabajo, dándoles públicamente las más expresivas gracias por su felicitacion, así como por la excitacion que al mismo tiempo nos hicieron para la publicacion de este segundo tomo, que si merece igualmente su aprobacion, nos consideraremos recompensados con exceso de nuestras tareas y sacrificios.»

En el prólogo de la segunda edicion, decíamos además, entre otras cosas, lo siguiente:

«Despréndese del prólogo anterior, que cuando publicamos nuestra primera edicion, vinimos á llenar una imperiosa necesidad en España. Comenzaba una época de creciente desarrollo para las operaciones topográficas con la creacion de la Escuelo del Catastro, y no habia un solo libro de Topografía en nuestro país que pudiese servir de verdadera guia, cuando apareció el nuestro llenando este vacío, y por él se han instruido cuantos se han dedicado á este estudio, contando hoy nuestra patria con un brillante cuerpo de Topógrafos que puede competir con los primeros de todas las naciones.

»La presente obra, declarada de texto en primer lugar en todas las ternas por el Consejo de Instruccion pública, así como nuestro *Curso elemental de Topografía*, han servido, la primera para ser adoptada como obra de consulta en muchas escuelas especiales, civiles y militares, por su mucha extension y el caudal de conocimientos que encierra, y la segunda para servir de verdadero texto en el corto tiempo de un curso señalado para esta asignatura, sirviendo ambas además de norma á los profesores y á todas las personas que tienen que desempeñar esta clase de trabajos; por todo lo cual hemos logrado difundir el gusto y la aficion á este estudio, habiéndonos cabido la gloria de haber contribuido á su propagacion de la manera más completa y terminante.

»Nuestro *Tratado de las Acotaciones,* como preliminar, tanto al tratado extenso de la Topografía, como al curso elemental de la misma, y por la circunstancia de ser la primera obra de este género publicada en España, ha tenido tambien el éxito más satisfactorio.»

En la presente edicion hemos añadido un *Apéndice,* en el cual nos ocupamos de la *Taquimetría* y de la *Agrimensura.*

Con respecto á la *Taquimetría,* solo hemos tenido por objeto exponer brevemente las nociones más fundamentales de este nuevo método de levantar los planos, no pudiéndonos detener más por la mucha extension de nuestra obra. Los que deseen profundizar en este asunto y adquirir mayor número de detalles, pueden consultar con aprovechamiento los excelentes tratados de Taquimetría de los Sres. Alonso y Millan, y de Topografía del Sr. Suarez Inclan, los que entre los de otros varios autores nacionales y extranjeros, hemos consultado para escribir los ligeros apuntes de Taquimetría que hemos consignado en esta obra, con el objeto más bien de dar una idea de ella y contribuir á hacer comprender su importancia.

Con respecto á la *Agrimensura,* como quiera que la parte esencial de ella, que comprende el levantamiento del plano de un terreno y la medicion de su área, se halla expuesta en la Topografía, solo nos ocuparemos de su complemento, es decir, de las demás clases de cuestiones que con frecuencia se ofrecen tambien al agrimensor y que son de uso frecuente.

Esperamos que el público seguirá favoreciéndonos como lo ha hecho hasta el presente, y acojerá esta tercera edicion con el mismo interés que ha manifestado por las anteriores.

OBRAS PUBLICADAS.

	PRECIOS. Madrid.	Provincs.
Tratado de las Acotaciones, por D. Isidro Giol y Soldevilla y D. José Goyanes y Soldevilla.—Un tomo en 4.° en rústica. Consta de 53 páginas y 8 láminas con 106 figuras, hechas con todo esmero 2.ª edicion corregida.	3.50	4
Tratado de Topografía, por los mismos.—Dos gruesos tomos en 4.° en rústica, cada uno con su atlas por separado, compuestos de muchas láminas perfectamente dibujadas y litografiadas. 3.ª edicion, corregida y aumentada.	40	42
Curso elemental de Topografía, por los mismos.—Un tomo en 4.° en rústica, de 286 páginas y 14 láminas con 292 figuras perfectamente dibujadas y litografiadas. 5.ª edicion, corregida.	8.50	9
Tratado de Agrimensura, por D. Isidro Giol y Soldevilla.—Un tomo en 4.° en rústica. Consta de 352 páginas y 16 láminas, con 334 figuras perfectamente dibujadas y litografiadas. 2.ª edicion.	6	7
Manual de la juventud, ó prontuario de los estudios que son preciso hacer para seguir las diferentes carreras, por D. Isidro Giol y Soldevilla y D. Agapito Gonzalez Callejo.—Un tomo en 4.° en rústica, que consta de 256 páginas. 1.ª edicion.	3	4
Elementos de vendajes, apósitos y aparatos; Anatomía quirúrgica y operaciones, por D. Isidro Giol y del Valle, doctor en Medicina y Cirugía. 2.ª edicion. Consta de tres cuadernos, que se venden por separado, á saber:		
El primer cuaderno	2	2.50
El segundo idem	3	3.50
El tercero idem	2	2.50

Todas estas obras se hallan de venta en casa de Hernando, calle del Arenal, núm. 11, y en las principales librerías.

TRATADO

DE TOPOGRAFÍA.

NIVELACION.

CAPÍTULO PRIMERO.

Ideas generales.

Definicion y objeto de la nivelacion.—Superficies de nivel.—Diferencia del nivel aparente al verdadero.—Error debido á la refraccion atmosférica en la observacion de los puntos de nivel aparente.—Correccion de la diferencia del nivel aparente al verdadero y de la refraccion.—Aplicacion de los principios establecidos á la determinacion del verdadero desnivel entre dos puntos.—Tablas de la diferencia del nivel aparente al verdadero y de la elevacion causada por la refraccion.—Determinacion del verdadero desnivel de dos puntos, independientemente de las correcciones de la diferencia del nivel aparente al verdadero y de la refraccion.—Superficies de comparacion.—Objeto de la nivelacion de las aplicaciones ordinarias.—Planos de comparacion.—Cotas referidas á ellos.

1. **Definicion y objeto de la nivelacion.**—*La nivelacion es la parte de la topografía que tiene por objeto hallar la diferencia de altura vertical de dos ó más puntos del espacio, y más particularmente de los que constituyen la superficie terrestre.*

Partiendo de la hipótesis de que esta superficie es de forma esférica, se toma como término de comparacion el centro de la tierra, en el cual concurren las verticales de todos los puntos que se consideran (Planimetría 44).

Un punto material recorre en su caida la línea vertical del punto del espacio en que se encontraba al empezar su movimiento, por hallarse atraido hácia el centro de la tierra, en virtud de la fuerza conocida con el nombre de *gravedad*; y se dice que dicho punto material *baja* ó *desciende*, cuando se acerca al expresado centro de atraccion, y que *sube* cuando se aleja de él.

Pasando á considerar varios puntos, se dice que dos ó más puntos están á igual altura ó son de nivel; cuando equidistan del centro de la tierra; y que uno está más elevado que otro, cuando el primero dista de dicho centro más que el segundo.

Así, el punto M (fig. 1 ª; lám. 1) está de nivel con los S y N, y con todos los de la superficie esférica, cuyo rádio es MC, distancia de M al centro C de la tierra.

La diferencia de altura de los puntos M y O, contada en sentido vertical, será la cantidad $SO = OC - CS = OC - CM$, diferencia de las distancias de los puntos dados al centro de la tierra.

La recta SO se llama el *desnivel* ó la *diferencia de nivel* de los puntos M y O. Luego el *desnivel de dos puntos, es la diferencia de sus distancias al centro de la tierra*.

El significado de la palabra *nivelacion* se hace extensivo al conjunto de operaciones, que se ejecutan para conseguir el fin que se propone esta parte de la Topografía.

2. **Superficies de nivel.**—*Toda superficie esférica, cuyo centro coincide con el de la tierra, es una superficie de nivel*.

La superficie de las aguas tranquilas de un lago, la del mar, si prescindiendo de las mareas la consideramos en calma, son verdaderas superficies de nivel, que la naturaleza nos presenta.

En efecto, las moléculas de un líquido cualquiera, están dotadas, entre otras propiedades, de una perfecta movilidad; lo que hace que solo pueda estar cada molécula en equilibrio, cuando sufre por todas partes presiones iguales y contrarias, que por consiguiente se destruyen.

En virtud de este mismo principio, un elemento IQ (fig. 2; lám. 1) bastante pequeño, tomado en una superficie líquida cualquiera, y para mayor generalidad en la del mar, es perfectamente horizontal; pues si le suponemos inclinado, una cualquiera de sus moléculas, no sufriendo presion lateral hácia la parte inferior del plano inclinado que constituye la superficie, tiende á bajar por él; y como lo mismo sucede á las demás moléculas de la superficie, en tanto que el elemento que consideramos tiene la más ligera inclinacion, aquella toma la posicion horizontal. Esta posicion es perpendicular á la vertical del centro de gravedad de la superficie que presenta el elemento líquido que se considera (Planimetría 56).

Como por esta razon todas las normales correspondientes á los distintos elementos que constituyen la superficie líquida, concurren en el centro de la tierra (Planim. 44), los elementos planos considerados forman un poliedro, cuyas caras, aumentando suficientemente en número, disminuyen indefinidamente en magnitud, y pueden llegar á confundirse con la superficie esférica á que son tangentes. Esta superficie tendrá por rádio la magnitud que corresponde á la normal de un elemento cualquiera, la cual es 6366200m (Planim. 42).

3. A pesar de lo que hemos expuesto, la verdadera forma de las superficies de nivel no está bien determinada. Se la creería perfectamente esférica, en virtud del principio demostrado (2) y de la gran regularidad que presenta la superficie del mar, si lo fuese tambien la forma general del globo terrestre; pero como se ha demostrado que éste es un elipsóide aplanado por los polos (Planim. 40), se atribuye á las superficies de nivel esta misma figura. Nosotros adoptaremos, sin embargo, la hipótesis de que tenga forma esférica; lo que en virtud de lo expuesto (Planim. 41) no producirá errores de consideracion en las nivelaciones topográficas.

4. A cada punta del espacio corresponde una superficie de nivel (2), cuyo rádio es la distancia del mismo punto al centro de la tierra; y el desnivel de dos puntos es tambien la diferencia de los rádios de las superficies de nivel que les corresponden.

5. La naturaleza no nos presenta en la superficie del globo más superficies de nivel que las de los lagos y los mares; y no tenemos medios de determinar las que corresponden á los demás puntos de la superficie terrestre. Lo que se ha conseguido es solo la determinacion del plano horizontal P (fig. 2; lám. 1), que es tangente á la superficie de nivel de M en este punto (Planim. 57).

Todos los puntos de este plano se dice que están de *nivel aparente* con el M. Así éste como cualquier otro punto, está de nivel verdadero con todos los de la superficie esférica, cuyo rádio es la distancia de M al centro de la tierra (1), y de nivel aparente con todos los del plano tangente á esta esfera en el punto M que consideramos.

6. **Diferencia del nivel aparente al verdadero.**—Determinado el plano tangente en M (fig. 2; lám. 1) á la superficie de nivel de este punto, la vertical V′ de otro punto cualquiera, cortará en un punto L á la superficie de nivel verdadero, y en otro H á la de nivel aparente del primer punto M. La distancia LH, que media entre estos puntos, es la *diferencia del nivel aparente al verdadero*, ó el *exceso del nivel aparente sobre el verdadero*, que respecto de M, corresponde á un punto H, que dista de M la longitud de la horizontal MH.

La diferencia del nivel aparente al verdadero para un punto, cuya distancia MH al punto de tangencia M es conocida, se halla restando de la distancia de H al centro de la tierra el rádio de la superficie de nivel; será pues

$$LH = HO - OL$$

7. *Conocida la distancia* MH (fig. 2; lám. 1) *entre dos puntos* M *y* H *de nivel aparente, y tambien el rádio* R *de la tierra, hallar la diferencia del nivel aparente al verdadero de uno* H *de los puntos dados con respecto á la superficie de nivel verdadero del otro* M.

Tenemos (Geom. Teor. 76) la proporcion:

$$QH : MH :: MH : HL \quad [a]$$

Llamando x á la diferencia HL de nivel aparente al verdadero, l á la distancia MH, y suponiendo $HQ = 2R$, lo que no es exacto, pues evidentemente la secante entera es mayor que el duplo del rádio terrestre OQ, pero que puede considerarse igual sin error sensible, en razon á la pequeñez de HL, relativamente á la magnitud del diámetro LQ, resulta

$$x : l :: l : 2R; \quad \text{de donde}$$

$$x = \frac{l^2}{2R};$$

pero como el diámetro medio 2R es (Planim. 42) 12732400^m, será

$$x = \frac{l^2}{12732400} = \frac{1}{12732400} \times l^2, \quad \text{ó}$$

$$x = 0{,}0000000785\ l^2 \quad [1].$$

Para otra distancia cualquiera l' resulta
$x' = 0{,}0000000785\ l'^2$; luego tendremos

$$x : x' :: 0{,}0000000785\ l^2 : 0{,}0000000785\ l'^2, \quad \text{ó}$$

$$x : x' :: l^2 : l'^2;$$

que nos dice: *que las diferencias del nivel aparente al verdadero son proporcionales á los cuadrados de las distancias.*

Si en la fórmula [1] hacemos $l = 100^m$ resulta

$$x = 0{,}0000000785 \times 10000 = 0^m{,}000785$$

Haciendo $l = 1000^m$ resulta

$$x = 0^m{,}0785$$

Se vé que á la distancia de 100 metros, el error que resulta será despreciable en las operaciones ordinarias; pero que á la distancia de 1000 metros, el error es de consideracion. Dando, pues, á l valores comprendidos entre 100 y 1000, obtendriamos un límite de la distancia que debe haber entre el punto de tangencia M y el H de observacion, pasado el cual los errores causados por la diferencia del nivel aparente al verdadero influirian en la exactitud de las operaciones. Este límite depende de la mayor ó menor exactitud que queramos obtener.

8. Hemos supuesto, $HQ = 2R$, lo cual no es exacto, y vamos á calcular el error que resulta: de la proporcion [*a*] se deduce

$$\overline{MH}^2 = QH \times HL;$$

y como hemos supuesto que se tiene

$$\overline{MH}^2 = 2R \times HL,$$

resulta de la primera de estas ecuaciones

$$HL = \frac{\overline{MH}^2}{QH},$$

y de la segunda

$$HL = \frac{\overline{MH}^2}{2R}.$$

Como se tiene en realidad $QH > 2R$, resulta

$$\frac{\overline{MH}^2}{2R} > \frac{\overline{MH}^2}{QH};$$

y la diferencia que buscamos es

$$\frac{\overline{MH}^2}{2R} - \frac{\overline{MH}^2}{QH} = \frac{\overline{MH}^2 \times QH - \overline{MH}^2 \times 2R}{2R \times QH} =$$

$$\frac{\overline{MH}^2\,(QH-2R)}{2R \times QH} = \frac{\overline{MH}^2}{QH} \times \frac{QH-2R}{2R} = HL \times \frac{QH-2R}{2R}.$$

Ahora bien, se tiene $QH - 2R = HL$, y la diferencia que buscamos se convertirá en

$$HL \times \frac{HL}{2R} \quad [b]$$

No pasando de 8000 metros sobre el nivel del mar las mayores alturas conocidas sobre la superficie de la tierra, puesto que la del Dawalagiri, pico más alto de los de Himalaya en Asia, es de 28071 piés ó 7822m próximamente, la diferencia [*b*] se convierte en

$$\text{HL} \times \frac{8000}{2\text{R}} \qquad [c]$$

y como 2R > 8000000, puesto que el diámetro menor del elipsóide terrestre es (Planim. 40) 12700000 próximamente, resulta

$$\frac{8000}{2\text{R}} < \frac{8000}{8000000}\text{; y como}$$

$$\frac{8000}{8000000} = \frac{1}{1000} = 0^{m},001, \text{ resulta}$$

$$\frac{8000}{2\text{R}} < 0^{m},001,$$

y por lo tanto la diferencia será menor que HL $\times$ 0m,001, es decir, que el error que resulta es menor que 0m,001 de la altura observada.

Para la altura del pico de Mulhacem en Sierra-nevada, una de las mayores calculadas en España por nivelacion topográfica, y que es de 12762 piés ó 3556m próximamente, el error sería

$$\text{HL} \times \frac{3556}{12.700000};$$

y como es

$$\frac{3556}{12.700000} < \frac{4000}{12.700000} < \frac{4000}{12.000000}, \text{ y}$$

$$\frac{4000}{12.000000} = \frac{1}{3000}, \text{ resultará}$$

$$\frac{3556}{12.700000} < \frac{1}{3000}.$$

El error para la altura del pico citado sería menor, por lo tanto, que

$$3556 \times \frac{1}{3000} = \frac{3556}{3000} = 1,185.$$

9. Error debido á la refraccion atmosférica en la observacion

de los puntos de nivel aparente.—Si se observa desde A (fig. 3; lámina 1), el punto N, de nivel aparente con A en la vertical OP, el rayo luminoso que traeria al observador la imágen de N, experimentando la refraccion atmosférica, de que nos hemos ocupado en las nociones de óptica dadas en la planimetría, seguiría una *trayectoria* t', cóncava hácia la tierra, y presentaría la imágen de N en el punto P, interseccion de la vertical OP con la tangente AP al último elemento de t'. Por la misma razon, el punto que aparece en N, será la imágen de un cierto punto M inferior al plano de nivel, producida por la trayectoria t, de la cual es AN la tangente al último elemento

El punto M observado, está siempre más bajo que el nivel aparente de A, y para tener la verdadera diferencia BN del nivel aparente al verdadero, será necesario añadir á la altura BM, realmente observada, la elevacion MN de la imágen del punto M, producida por la refraccion. Tendriamos pues

$$BN = BM + MN, \quad \text{de donde}$$

$$BM = BN - MN \qquad [2]$$

La altura BN se calcula por la fórmula [1] (7) siendo l la distancia horizontal AN, y R el rádio AO, independientes ambas cantidades del error de la refraccion. En cuanto á MN, dependiendo de la temperatura del aire, del estado higrométrico de este y de otras circunstancias, no hay medio fácil de calcularla exactamente al ejecutar las operaciones; pero en nuestros climas y en las circunstancias atmosféricas ordinarias es 0,16 de la altura BN del nivel aparente al verdadero

10. **Correccion de la diferencia del nivel aparente al verdadero y de la refraccion.**—En virtud de los principios expuestos (7), tenemos en la fig. 3 (lám 1)

$$BN = \frac{AN^2}{2R}$$

y por la correccion de la refraccion (9),

$$MN = 0{,}16\ BN.$$

Llamando ahora l á la distancia AN y e á la cantidad BM, altura del punto M visto desde A, como si estuviese en N, tendremos:

$$BN = \frac{l^2}{2R}, \text{ y}$$

$$MN = 0{,}16 \times \frac{l^2}{2R} = \frac{0{,}16\ l^2}{2R}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula [2] (9), resultará

$$e = \frac{l^2}{2R} - \frac{0,16\ l^2}{2R} = \frac{(1-0,16)\ l^2}{2R} = \frac{0,84\ l^2}{2R} = \frac{0,42\ l^2}{R}.$$

Tambien puede ponerse el valor de e bajo la forma

$$e = \frac{0,42}{R}\ l^2 \quad [3];$$

sustituyendo por R su valor, (Planim. 42), será

$$e = \frac{0,42}{6366220}\ l^2;$$

y ejecutando la division indicada

$$e = 0,000000066\ l^2 \quad [4].$$

Ejemplo. Supongamos que se tenga $l = 620^{m}$; sustituyendo este valor en la fórmula [4], y ejecutando sucesivamente las operaciones que se presentan indicadas, tendremos:

$e = 0,000000066 \times 620^2;$
$e = 0,000000066 \times 384400;$
$e = 0,0253704;$ ó próximamente
$e = 0,0254.$

* Tomando logaritmos en la fórmula [4], resultará

$$\log.\ e = \log.\ 0,000000066 + \log.\ l^2:$$

hallando el logaritmo de 0,000000066, y trasformando el último término, tendremos

$$\log.\ e = \bar{8},8195439 + 2 \log.\ l; \qquad \text{ó}$$

$$\log.\ e = 2 \log.\ l + 0,8195439 - 8 \qquad [5].$$

Ejemplo. Supongamos que se tiene $l = 620^{m}$, cuyo logaritmo es 2,7923917; sustituyendo este valor en la fórmula general (5), resultará sucesivamente:

$\log.\ e = 2 \times 2,7923917 + 0,8195439 - 8;$
$\log.\ e = 5,5847834 + 0,8195439 - 8;$
$\log.\ e = 6,4043273 - 8;$
$\log.\ e = \bar{2},4043273;$

de donde se deduce

$e = 0,02537;$ ó aproximadamente

$e = 0,0254.$

11. **Aplicacion de los principios establecidos á la determinacion del verdadero desnivel entre dos puntos.**—Si tratamos de hallar el desnivel A'B (1) que existe entre dos puntos A y A' (fig. 4; lám. 1) de la superficie terrestre, haremos pasar por A el plano horizontal que á este punto corresponde (Planim. 83) y mediremos la distancia AN, que hay de A al punto en que el plano encuentra á la vertical de A'. Observando desde A la vertical de A', él punto M aparecerá situado en N (9) y la distancia vertical aparente A'N del punto A' al plano horizontal de A, será en realidad A'M.

El desnivel que se busca, será entonces

$$A'B = A'M - BM \quad [6]$$

En esta fórmula A'M es la altura observada, y como además se tiene

$$BM = BN - MN,$$

que se determina por el cálculo (10), resultará la fórmula

$$A'B = A'M - (BN - MN), \quad \text{ó}$$

$$A'B = A'M - BN + MN \quad [7]$$

12. La fórmula [6] (11) se emplea para hallar A'B; representando por d este desnivel, por a la altura A'M observada y por e la correccion sustractiva general BM, cuyo valor hemos hallado (10), tendremos:

$$d = a - e;$$

y poniendo en vez de e dicho valor, resultará

$$d = a - 0{,}0000000\, l^2 \quad [8]$$

13. De esta fórmula y del procedimiento indicado para hallar los valores de las cantidades que entran en ella, resulta la siguiente regla práctica.

Para hallar el verdadero desnivel d *entre dos puntos dados, es preciso determinar el plano horizontal que pasa por uno de ellos* (Planim. 83), *y medir la distancia* l *entre el primer punto y aquel en que corta á este plano la vertical del segundo; hallar el cuadrado de esta distancia, y multiplicarle por el número constante* 0,000000066; *y por último restar el producto obtenido de la distancia* a, *observada desde el primer punto, y contada en la vertical del segundo, desde este hasta aquel en que la vertical parece que corta al plano horizontal del primero.*

Sea por ejemplo $a = 5,276$, y $l = 1800$ tendremos:

$$d = 5,276 - 0,000000066 \times 1800^2;$$
$$d = 5,276 - 0,000000066 \times 3240000;$$
$$d = 5,276 - 0,214;$$
$$d = 5,062.$$

14. La fórmula [7] (11), que tambien puede aplicarse dando á BN y á MN los valores correspondientes (10), da á conocer que la correccion de la diferencia del nivel aparente al verdadero es *sustractiva*, y que la de la refraccion es *aditiva*.

15. **Tablas de la diferencia del nivel aparente al verdadero y de la elevacion causada por la refraccion.**—Con el auxilio de una de las fórmulas [4] ó [5] (10) han sido calculadas unas tablas, que ponemos á continuacion, las cuales son muy útiles para las correcciones que deben tenerse en cuenta en las operaciones de nivelacion, y que son debidas á la diferencia del nivel aparente al verdadero, y á la elevacion que la refraccion atmosférica produce respecto al punto observado.

Contienen estas tablas los valores de las mencionadas correcciones, para las distancias comprendidas entre 20 y 10000 metros. Hasta 2000^m las distancias sucesivas se diferencian en 20 metros. Desde aquí en adelante difieren en 100 metros.

La primera columna de la izquierda expresa en metros los valores de l ó las distancias horizontales AN (fig. 3; lám. 1); la segunda, la *correccion sustractiva* BN, debida á la diferencia de nivel aparente al verdadero; la tercera, la *correccion aditiva* MN del error causado por la refraccion, y la cuarta los valores BM de e, correspondientes á las diversas distancias. Estos valores son las diferencias BN — MN de los números de las columnas segunda y tercera.

TABLAS

para las correcciones de los errores causados por la diferencia del nivel aparente al verdadero, y por la refraccion atmosférica.

DISTANCIAS.	DIFERENCIA DEL NIVEL APARENTE AL VERDADERO. — Correccion sustractiva.	ELEVACION CAUSADA POR LA REFRACCION. — Correccion aditiva.	ALTURA DEL PUNTO OBSERVADO SOBRE EL NIVEL VERDADERO — Correccion sustractiva general.
m	m.	m.	m.
0	0,0000	0,0000	0,0000
20	0,0000	0,0000	0,0000
40	0,0001	0.0000	0,0001
60	0,0003	0,0001	0,0002
80	0,0005	0,0001	0,0004
100	0,0008	0,0001	0,0007
120	0,0011	0,0002	0,0009
140	0,0015	0,0002	0,0013
160	0,0020	0,0003	0,0017
180	0,0025	0,0004	0,0021
200	0.0031	0,0005	0,0026
220	0,0038	0,0006	0,0032
240	0,0045	0,0007	0,0038
260	0.0053	0,0008	0,0045
280	0,0062	0,0010	0,0052
300	0,0071	0,0011	0,0059
320	0,0080	0,0013	0,0067
340	0,0091	0,0014	0,0076
360	0,0102	0,0016	0 0085
380	0,0113	0,0018	0,0095
400	0,0126	0,0020	0,0106
420	0,0138	0,0022	0,0116
440	0,0152	0,0024	0,0128
460	0,0166	0,0027	0,0140
480	0,0181	0,0029	0,0152
500	0,0196	0,0031	0,0165
520	0,0212	0,0034	0,0178
540	0,0229	0,0037	0,0192
560	0,0246	0,0039	0,0207
580	0,0264	0,0042	0,0222

DISTANCIAS.	DIFERENCIA DEL NIVEL APARENTE AL VERDADERO. — Correccion sustractiva.	ELEVACION CAUSADA POR LA REFRACCION. — Correccion aditiva.	ALTURA DEL PUNTO OBSERVADO SOBRE EL NIVEL VERDADERO. — Correccion sustractiva general.
m.	m	m	m.
600	0,0283	0,0045	0,0237
620	0,0302	0,0048	0,0254
640	0,0322	0.0051	0,0270
660	0,0342	0 0055	0,0287
680	0,0363	0,0058	0,0305
700	0,0385	0,0062	0,0323
720	0.0407	0,0065	0,0342
740	0,0430	0,0069	0,0361
760	0,0454	0,0073	0,0381
780	0,0478	0,0076	0,0401
800	0,0503	0,0080	0,0422
820	0,0528	0,0084	0,0444
840	0,0554	0,0089	0,0465
860	0,0581	0,0093	0,0488
880	0,0608	0 0097	0,0511
900	0,0636	0,0102	0 0534
920	0,0665	0,0106	0,0558
940	0,0694	0,0111	0,0583
960	0,0724	0,0116	0,0608
980	0,0754	0,0121	0,0634
1000	0,0785	0,0126	0,0660
1020	0,0817	0,0131	0,0686
1040	0,0849	0,0136	0,0714
1060	0,0882	0,0141	0,0741
1080	0,0916	0,0147	0,0769
1100	0,0950	0,0152	0,0798
1120	0,0985	0,0158	0,0828
1140	0,1021	0,0163	0,0857
1160	0,1057	0,0169	0,0888
1180	0,1094	0,0175	0,0919
1200	0,1131	0,0181	0 0950
1220	0,1169	0,0187	0,0982
1240	0,1208	0,0193	0,1014
1260	0,1247	0,0199	0,1047
1280	0,1287	0,0206	0,1081
1300	0,1327	0,0212	0,1115
1320	0,1368	0,0219	0,1150
1340	0,1410	0,0226	0,1185
1360	0,1453	0,0232	0,1220

DISTANCIAS.	DIFERENCIA DEL NIVEL APARENTE AL VERDADERO. — Correccion sustractiva.	ELEVACION CAUSADA POR LA REFRACCION. — Correccion aditiva.	ALTURA DEL PUNTO OBSERVADO SOBRE EL NIVEL VERDADERO. — Correccion sustractiva general.
m.	m.	m.	m.
1380	0,1496	0,0239	0,1256
1400	0,1539	0,0246	0,1273
1420	0,1584	0,0253	0,1330
1440	0,1629	0,0261	0,1368
1460	0,1674	0,0268	0,1406
1480	0,1720	0,0275	0,1445
1500	0,1767	0,0283	0,1484
1520	0,1815	0,0290	0,1524
1540	0,1863	0,0298	0,1565
1560	0,1911	0,0306	0,1605
1580	0,1961	0,0314	0,1647
1600	0,2011	0,0322	0,1689
1620	0,2061	0,0330	0,1731
1640	0,2112	0,0338	0,1774
1660	0,2164	0,0346	0,1818
1680	0,2217	0,0355	0,1862
1700	0,2278	0,0363	0,1907
1720	0,2323	0,0372	0,1952
1740	0,2370	0,0380	0,1997
1760	0,2433	0,0389	0,2044
1780	0,2488	0,0398	0,2090
1800	0,2545	0,0407	0,2137
1820	0,2602	0,0416	0,2185
1840	0,2659	0,0425	0,2234
1860	0,2717	0,0435	0,2282
1880	0,2776	0,0444	0,2332
1900	0,2835	0,0454	0,2382
1920	0,2895	0,0463	0,2432
1940	0,2956	0,0473	0,2483
1960	0,3017	0,0483	0,2534
1980	0,3079	0,0493	0,2586
2000	0,3142	0,0503	0,2639
2100	0,3464	0,0554	0,2909
2200	0,3801	0,0608	0,3193
2300	0,4155	0,0665	0,3490
2400	0,4524	0,0724	0,3800
2500	0,4909	0,0785	0,4123
2600	0,5309	0,0849	0,4460
2700	0,5726	0,0916	0,4809

DISTANCIAS	DIFERENCIA DEL NIVEL APARENTE AL VERDADERO. — Correccion sustractiva.	ELEVACION CAUSADA POR LA REFRACCION. — Correccion aditiva.	ALTURA DEL PUNTO OBSERVADO SOBRE EL NIVEL VERDADERO. — Correccion sustractiva general.
m	m.	m.	m
2800	0,6157	0,0985	0,5172
2900	0,6605	0,1057	0,5548
3000	0,7069	0,1131	0,5938
3100	0,7548	0,1208	0,6340
3200	0,8042	0,1287	0,6756
3300	0,8553	0,1368	0,7184
3400	0,9079	0,1453	0,7626
3500	0,9621	0,1539	0,8082
3600	1,0179	0,1629	0,8550
3700	1,0752	0,1720	0,9032
3800	1,1341	0,1815	0,9527
3900	1,1946	0,1911	1,0035
4000	1,2566	0 2011	1,0556
4100	1,3202	0,2112	1,1090
4200	1,3854	0,2217	1,1638
4300	1,4522	0,2323	1,2198
4400	1,5205	0,2433	1,2772
4500	1,5904	0,2545	1,3360
4600	1,6619	0,2659	1,3960
4700	1,7349	0 2776	1,4573
4800	1,8096	0,2895	1,5200
4900	1,8859	0,3017	1,5840
5000	1,9635	0,3142	1,6493
5100	2,0428	0,3268	1,7160
5200	2,1237	0,3398	1,7839
5300	2,2062	0,3530	1,8532
5400	2,2902	0,3664	1,9238
5500	2,3758	0,3801	1,9957
5600	2,4630	0,3941	2,0689
5700	2,5518	0,4083	2,1435
5800	2,6421	0,4227	2,2193
5900	2,7340	0,4374	2,2965
6000	2,8274	0,4524	2,3750
6100	2,9225	0,4676	2,4549
6200	3,0194	0,4830	2,5360
6300	3,1172	0,4988	2,6185
6400	3,2170	0,5147	2,7023
6500	3,3183	0,5309	2,7874
6600	3,4212	0,5474	2,8738

DISTANCIAS.	DIFERENCIA DEL NIVEL APARENTE AL VERDADERO. — Correccion sustractiva.	ELEVACION CAUSADA POR LA REFRACCION — Correccion aditiva.	ALTURA DEL PUNTO OBSERVADO SOBRE EL NIVEL VERDADERO — Correccion sustractiva general
m	m	m.	m
6700	3,5256	0,5641	2,9615
6800	3,6317	0,5811	3,0506
6900	3,7393	0,5983	3,1410
7000	3,8484	0,6157	3,2327
7100	3,9592	0,6335	3,3257
7200	4,0715	0,6514	3,4201
7300	4,1854	0.6697	3,5157
7400	4,3008	0,6881	3,6127
7500	4,4179	0,7069	3,7110
7600	4,5365	0,7258	3 8106
7700	4,6566	0,7451	3,9116
7800	4,7784	0,7645	4,0138
7900	4,9017	0,7843	4,1174
8000	5,0265	0,8042	4,2223
8100	5,1530	0,8245	4,3285
8200	5,2810	0.8450	4,4360
8300	5,4106	0,8657	4,5449
8400	5,5418	0,8867	4,6551
8500	5,6745	0,9079	4,7666
8600	5,8088	0,9294	4,8794
8700	5,9447	0,9511	4,9935
8800	6,0821	0,9731	5,1090
8900	6,2211	0,9954	5,2258
9000	6,3617	1,0179	5,3438
9100	6,5039	1,0406	5,4123
9200	6,6476	1,0636	5,5840
9300	6 7029	1,0869	5,7060
9400	6,9398	1,1104	5,8294
9500	7,0882	1,1341	5,9541
9600	7,2382	1,1581	6,0801
9700	7,3898	1,1824	6,2074
9800	7,5430	1,2069	6,3361
9900	7,6977	1,2316	6,4661
10000	7,8540	1,2566	6,5973

16. Las tablas que anteceden nos proporcionan el modo más expedito de hallar la correccion de la diferencia del nivel aparente al verdadero, y de la elevacion del punto observado, causada por la refraccion. Para

comprender el uso que de ellas debemos hacer, resolveremos con su auxilio el mismo problema que hemos resuelto (13), y tendremos:

Altura observada	3,276
Correccion sustractiva general correspondiente en las tablas á la distancia de 1.800m	0,214
Diferencia ó altura verdadera	3,062

que es la obtenida anteriormente.

17. Observando las tablas se vé, que cuando la distancia es menor que 120m, el error no llega á un milímetro, y que por consiguiente se puede despreciar. Las tablas se extienden á distancias mayores que las que ocurren en las operaciones ordinarias de la nivelacion. Con todo, pueden ser útiles cuando se trate de determinar la curvatura de una llanura extensa, lo que puede ocurrir en el trazado de un canal ó de un camino.

Tambien pueden servir para determinar la altura que debe tener un objeto elevado sobre el nivel del mar, para poder ser visto á una distancia dada, desde un punto de esta superficie, atendida su curvatura; lo que tiene aplicacion al establecimiento de los faros.

18. Otra causa de error en la nivelacion es debida á la *orientacion de la visual*. En efecto, calculada la diferencia del nivel aparente al verdadero, en el supuesto de que la superficie de nivel es esférica, no nos darán las tablas ni las fórmulas iguales diferencias de nivel en todas las direcciones; pues la curvatura de la verdadera superficie de nivel difiere al pasar de una direccion á otra, á partir del punto de observacion.

Sin embargo, los errores que de la orientacion de la visual pueden provenir, no tienen influencia digna de tenerse en cuenta en las aplicaciones ordinarias de la nivelacion topográfica.

19. **Determinacion del verdadero desnivel de dos puntos, independientemente de las correcciones de la diferencia del nivel aparente al verdadero y de la refraccion.**—*Dos puntos* a, b (fig. 5; lám. 1) *de un plano horizontal* MN, *equidistantes del punto* t *de tangencia del plano con una superficie de nivel, son puntos de nivel verdadero.*—Esto es, si tenemos $at = tb$, resultará $ao = bo$. En efecto, ot es perpendicular al plano MN, (Geom. Teor. 172. Recíp.); luego las oblícuas ao, bo, que equidistan del pié t de la perpendicular, son iguales (Geom. Teor. 119.—1.º). Estos puntos se hallan en la superficie de nivel cuyo rádio es $oa = ob$ (1). Además, siendo $at = tb$, los efectos de la refraccion son iguales, pues a y b están en la misma capa de aire atmosférico, y de b á t tiene la luz que atravesar las mismas capas que de a á t.

Todos los puntos c, d, e, de la circunferencia cuyo rádio es ta, son puntos de nivel verdadero; tambien lo son entre sí los de otra circunferencia cualquiera, cuyo centro sea el punto t.

20. *Si una recta* ab (fig. 6; lám. 1), *inclinada invariablemente al hori-*

zonte, gira alrededor de la vertical del punto a, *situado en la superficie de nivel* mn, *un punto cualquiera* b *de la recta describe en el espacio una circunferencia cuyos puntos son de nivel verdadero*. Sean *ab*, *ac* dos posiciones diferentes de la recta *ab*, en un mismo plano vertical. Tiremos la tangente *de* en el punto *a*, la cual será horizontal (Planim. 55), y las rectas *ob*, *oc*.

Los triángulos *aoc*, *aob* son iguales por tener *ao* comun, $ac = ab$, y los ángulos *cao* y *bao* iguales por componerse cada uno de un ángulo recto, por la propiedad de la tangente, más el ángulo invariable que forma la recta dada con la horizontal *de* Luego se tendrá $oc = ob$. Lo mismo demostraríamos para otra posicion cualquiera del punto *b*.

21. De los principios que acabamos de exponer resultan las consecuencias siguientes:

1.ª Cuando se ha determinado una verdadera horizontal, todos los puntos que ocupa, girando alrededor de un eje vertical, son de nivel aparente (Planim. 57)

2.ª Entre estos puntos de nivel aparente, son tambien de nivel verdadero entre sí todos los que pertenecen á una misma circunferencia, cuyo centro esté en la interseccion de la horizontal que gira y el eje vertical (19).

3.ª Si la recta, invariablemente inclinada al horizonte, gira alrededor de un eje vertical, solo serán de nivel verdadero los puntos que equidistan del eje del giro (20).

4.ª Si la inclinacion de la recta respecto al horizonte es variable, ó el eje no es vertical, un mismo punto pasa sucesivamente por distintas superficies de nivel.

22. **Superficies de comparacion.**—Hemos visto (4) que la diferencia de nivel de dos puntos A, B (fig. 7; lám. 1) se halla por la de sus distancias al centro de la tierra. Tambien puede determinarse por sus distancias á una superficie de nivel cualquiera: en efecto, el desnivel de A y B es

$$AB' = AO - BO: \quad \text{pero por ser}$$

$$OC'' = OC', \quad \text{resulta}$$

$$AO - BO = (AO - OC'') - (BO - OC') = AC'' - BC': \text{ y por tanto}$$

$$AB' = AC'' - BC'$$

El desnivel de A y B está entonces referido á la superficie de nivel CC'C''.

Así diremos que el punto A está más elevado que el B la cantidad AB', diferencia de los rádios de las superficies de nivel, que pasan por ellos (4), ó que A está sobre la superficie de nivel de B la cantidad AB'; y en este caso decimos que la altura de A *se refiere* á la superficie horizontal de B. Cuando hay muchos puntos que considerar, se refieren á una misma superficie de nivel. Así, si la superficie de nivel es CC'C'', diremos que C está en la superficie de nivel, ó que su altura sobre esta superficie es cero; que B está elevado la cantidad BC' sobre la misma superficie, y que A lo está la cantidad AC''.

23. La superficie de nivel á la cual se refieren las alturas de los puntos considerados, se llama *superficie general de comparacion*, y las alturas á que se hallan sobre la superficie los puntos que se consideran, son las *cotas* de los mismos puntos. El punto D, más bajo que la superficie de comparacion la cantidad DC, se dice que tiene la cota negativa DC, ó que su cota es — DC.

24. La superficie de comparacion es en general arbitraria. Puede ser la que pasa por el más bajo ó el más elevado de los puntos dados, la de un intermedio, ó cualquiera otra que satisfaga á la sola condicion de distar de un punto dado, y en direccion de la vertical, una cantidad determinada.

Los geógrafos han adoptado como superficie de comparacion la del Océano, considerada en su altura media entre las que corresponden á la mayor y menor de las mareas vivas, y cuya superficie suponen prolongada por debajo de las partes elevadas de los continentes. En este supuesto, la *cota* del punto A (fig. 8; lám. 1) es la altura A*m*. Así, cuando decimos que el puerto A de Pajares, en Asturias, está á 1376^{m} sobre el nivel del mar, se comprende que si desde A bajásemos una plomada hasta que encontrase á la prolongacion de la superficie oceánica, la longitud A*m* del cordon de la plomada sería de 1376^{m}. La cota negativa de un punto B, más bajo que el nivel del mar, se obtendría por la *sonda marina*, que marcaria la distancia vertical B*n*.

Adoptado el plano de los geógrafos, como ha empezado á hacerse en las obras públicas, se harian comparables los resultados de distintas nivelaciones, y se podrian obtener las verdaderas alturas de los puntos principales de un país, lo que seria de una inmensa utilidad.

Cuando las cotas de varios puntos están referidas á una superficie de comparacion arbitraria *m'* ó *n'*, se pueden referir á la del nivel del mar, considerando bajada desde un punto *m'* de ella la plomada *m'm* si la superficie *m'* estaba más elevada; ó si estaba más baja, elevando desde *n'* el flotador *n'n*. Entonces puede aplicarse á las superficies de comparacion lo que se ha dicho de los planos (Acotaciones, 7).

25. **Objeto de la nivelacion en las aplicaciones ordinarias.—Planos de comparacion.—Cotas referidas á ellos.**—La nivelacion nos da las cotas exactas de los diferentes puntos del terreno en que se opera. Estas cotas, se consideran paralelas (Planim. 50) y referidas á un mismo plano, que se confunde sensiblemente con la superficie de nivel, en atencion á los límites que comprenden las operaciones topográficas; y por tanto podemos decir que *la nivelacion tiene por objeto en sus aplicaciones, hallar la altura de cada uno de los puntos de un terreno dado sobre un plano horizontal determinado, que se llama plano de comparacion* (Acot. 4). Estas alturas serán las *cotas* de dichos puntos (Acotaciones, 3), las cuales se determinan por las operaciones de la nivelacion.

CAPÍTULO II.

NIVELACION POR ALTURAS.

Instrumentos.

Division de la nivelacion con respecto á los procedimientos que se emplean para obtener el desnivel entre dos puntos.—Instrumentos de la nivelacion por alturas. —Niveles y miras en general.—Miras generalmente usadas.—Mira de corredera ó de tablilla.—Mira parlante.—Niveles.—Nivel de perpendículo ó de albañil.—Límite del empleo del nivel de perpendículo.—Terazi.—Nivel-péndulo de Picard.—Nivel de agua.—Errores debidos á la capilaridad y á la diferencia de diámetros de los tubos.—Límite del empleo del nivel de agua.—Nivel de aire.—Límite del empleo del nivel de aire.—Nivel de aire con pínulas.—Verificaciones y correcciones.—Nivel de pínulas de Chézy.—Niveles de aire con anteojo.—Nivel de Lerebours.—Verificaciones y correcciones.—Nivel de Dollond.—Verificaciones y correcciones.—Primer método.—Segundo método.—Nivel de Chézy.—Verificaciones y correcciones.—Nivel de Egault.—Nivel de Troughton.—Verificaciones y correcciones.—Primer método.—Segundo método.—Nivel de Gravatt's.—Verificaciones y correcciones.—Nivel con dos anteojos.—Nivel-círculo de Leonir.—Otros diferentes niveles.—Nivel de reflexion.

26. **Division de la nivelacion con respecto á los procedimientos que se emplean para obtener el desnivel entre dos puntos.**

El desnivel entre dos puntos puede determinarse:

1.° Por sus *distancias* á un plano horizontal.

2.° Por la *pendiente* y la *longitud* de la recta que los une.

3.° Por las observaciones hechas con los instrumentos físicos conocidos con los nombres de *barómetro* y *termómetro*.

Atendiendo á estos distintos procedimientos, que se siguen para obtener el desnivel entre dos puntos, dividiremos la nivelacion en *nivelacion por alturas ó nivelacion ordinaria, nivelacion por pendientes*, y *nivelacion barométrica*.

27. **Instrumentos de la nivelacion por alturas.—Niveles y miras en general**.—Se da en general el nombre de *nivel* á todo instrumento que sirve para determinar una línea $m'a'$ (fig. 9; lám. 1), que girando alrededor de un punto m', y conservándose en todas sus posiciones $m'a'$, $m'b'$, $m'c'$ perpendicular á la vertical de m', determina un plano horizontal M (Planim. 37), al cual se refieren las distancias de varios puntos A, B, C, situados en general en la superficie terrestre.

Las alturas de los diferentes puntos del terreno se refieren al plano horizontal obtenido por el nivel, y se miden en sentido de la vertical. Estas alturas Aa', Bb', Cc', se determinan por medio del instrumento conocido con el nombre de *mira*.

28. *Mira* es una regla dividida, que puesta á plomo sobre un punto del terreno, sirve para marcar la distancia vertical del mismo al plano horizontal determinado por un nivel.

Punto de mira es la interseccion de la regla con el plano horizontal del nivel.

Altura de mira de un punto cualquiera del terreno es la distancia del mismo al punto de mira.

29. El conocimiento de estas alturas nos da el de las cotas de los puntos considerados, sobre un plano de comparacion P, inferior á ellos; que es el objeto que generalmente se propone la nivelacion topográfica.

En efecto, conocidas las alturas de mira Bb', Cc', (fig. 9; lám. 1) tendremos las ecuaciones

$$bb' = Bb' + Bb; \quad cc' = Cc' + Cc;$$

y como se tiene $bb' = cc'$ (Geom. Teor. 129), pues los planos M y P son paralelos (Planim. 92), y las rectas bb' y cc' son tambien paralelas (Geometría. Teor. 122), tendremos

$$Bb' + Bb = Cc' + Cc; \qquad \text{de donde resulta}$$

$$Bb' - Cc' = Cc - Bb.$$

Se ve que conocida la cota de uno de los puntos, la diferencia de las alturas de mira correspondientes á los mismos, que es tambien la de sus cotas, dará el conocimiento de la cota que corresponde al otro punto.

30. **Miras generalmente usadas.—Mira de corredera ó de tablilla.**—Se compone de dos perchas ó reglas de madera A, B (fig. 10; lámina 1), una de las cuales A puede correr frotando á lo largo de la otra B, en virtud de la forma particular de las mismas, que permite este movimiento, sin dejar que se separen, y que está representada en C (fig. 10; lámina 1): a es la seccion de la percha A y b la de la B. Más en grande se representan estas secciones en la fig. 11 (lám. 1) por a' y b'. La per-

cha A se sujeta á la B por medio del tornillo de presion t, que tiene su tuerca en la pieza metálica P, vista de frente en P', y fija á la regla A.

Para evitar que la punta del tornillo rehunda la percha B, lleva la pieza P una plancha elástica sujeta por uno de sus extremos, y esta plancha es la que el tornillo oprime contra la percha B

La seccion a' b' (fig. 11; lám. 1) del cuerpo formado por las dos reglas ó perchas es un cuadrado de $0^m,035$ de lado.

La tablilla de la mira es un rectángulo de plancha de hierro representado en E y F (fig 12; lám. 1), de unos $0^m,240$ de base por $0^m,200$ de altura, con los ángulos redondeados. La cara anterior está dividida en cuatro rectángulos, dos de los cuales, correspondientes á una misma diagonal de la plancha, están pintados de un color, y los correspondientes á la otra de color diferente, para distinguirlos á larga distancia, destacar la mira de los objetos que puedan rodearla, y señalar bien las rectas de separacion *ab*, *cd*, y su punto de interseccion *m*.

Los colores que generalmente se usan son rojo y blanco, y los creemos preferibles al blanco y negro que no se distinguen tan bien en muchos casos, sobre todo cuando la mira se proyecta en la sombra.

El punto *m* es el punto de mira (28).

Se han adoptado para pintar las tablillas de las miras otras varias disposiciones, como representan las figuras 13, 14 y 15 (lámina 1).

A la cara posterior de la tablilla hay fija otra abrazadera Q (fig. 12; lámina 1) enteramente semejante á la P de la fig. 10 (lám. 1), la cual puede correr á lo largo del cuerpo formado por las dos perchas, y fijarse á ellas á una altura conveniente por el tornillo de presion t', enteramente semejante al t (fig. 10; lám. 1). Al extremo inferior de la regla B hay un estribo saliente de hierro, que puede servir en los terrenos llanos para poner la mira próximamente vertical.

La corredera debe tener el menor juego lateral posible, para que no varíe mucho la recta *ab* de la posicion horizontal; pero debe tener algo, para que pueda correr cuando la madera de las perchas aumente de volúmen á causa de la humedad.

31. *Division de la mira.*—La cara posterior de la regla B está dividida en metros, decímetros y centímetros, desde 0^m, en el plano inferior del pié de la mira, hasta $1^m,670$ por lo general, y una de las caras laterales de la misma regla lo está tambien desde $1^m,670$ hasta $3^m,250$, de la manera que representa la fig 16 (lám 1). Las divisiones que abrazan todo el ancho de la regla, señalan una altura exacta de decímetros, y las que completan un número de metros llevan además la letra M á la parte inferior: cada decímetro está dividido en centímetros por líneas más cortas; estando prolongada un poco más, pero sin abarcar todo el ancho de la regla, la que corresponde á los cinco centímetros. Otras miras, como las de la fig. 17 (lám. 2) y siguientes, llevan marcados además en cada línea de division de los decímetros, el número de metros correspondiente.

La cara posterior de la corredera Q (fig. 12; lám. 1) lleva un centímetro *e* dividido en milímetros. La línea superior es el cero de la division, y está á la altura de la línea *ab* de la tablilla; lleva además los números 5 y 10 correspondientes á las líneas de division del centro é inferior. Conviene tener presente que este centímetro constituye una *escala*, no un *nonius* como á primera vista pudiera creerse.

La cara de la izquierda de la corredera P (fig. 10; lám. 1) presenta tambien un centímetro *e'* dividido del mismo modo que el *e*.

32. *Uso de la mira.*—Para usar este instrumento, se corre la regla A hasta el tope en el punto más bajo, fijándola entonces con el tornillo *t*, y se coloca en el punto cuya altura ó distancia al plano de nivel de un instrumento se quiere determinar, de manera que quede lo más vertical posible. Se hace correr la tablilla á lo largo del cuerpo formado por las dos reglas, hasta que la recta *ab* (fig. 12; lám. 1) esté en él plano de nivel, y la distancia del pié de la mira al cero de la escala *e* será la *altura de mira* que se busca (28).

33. *Lectura de la mira.*—La apreciacion de esta altura es lo que se llama la *lectura de la mira*.

La fig. 17 (lám. 2) representa una de las disposiciones en que puede quedar el cero de la escala, y la lectura se hará del modo siguiente: los metros y decímetros se hallarán escritos sobre la línea llena que está inmediatamente inferior al cero de la corredera. Se cuentan despues los centímetros que hay desde la última línea de decímetros hasta la línea cero de la escala. La lectura de los milímetros se hace de arriba abajo en el centímetro dividido de la corredera. La altura de mira en la figura 17 (lám. 2) es $1^{m},137$.

La de la fig. 18 (lám. 2).	$0^{m},999$.
La de la fig. 19 (lám. 2)	$1^{m},000$.
La de la fig. 20 (lám. 2).	$0^{m},950$
La de la fig. 21 (lám. 2).	$1^{m},104$.

34. La menor altura que con esta mira puede obtenerse es la que corresponde á la posicion en que la corredera Q (fig. 12; lám. 1) se halla en el tope con la P (fig. 10; lám. 1) y generalmente es de $0^{m},150$

La tablilla corre hasta alcanzar la altura de $1^{m},670$ á la cual la detiene un tope *m* (fig. 10; lám. 1) que se encuentra en el resorte metálico *n*, sujeto en *p* á la extremidad de la regla A. Se vé por esto, que la altura de la mira no debe exceder de la que hemos asignado; pues de lo contrario, para correrla al tope, sería necesario inclinar la mira moviéndola alrededor de su pié, ó separarla del punto en que se encuentra; cosas ambas que no conviene hacer, pues al moverla puede suceder que el terreno se comprima, lo que alteraría la altura de mira, y separándola puede volverse á colocar en otro punto. Este error, por pequeño que pueda ser, conviene no despreciarle.

Cuando la corredera Q ha llegado al tope, es indispensable que el cero de la corredera P marque en la escala correspondiente la misma altura, en el caso actual $1^m,670$, que corresponde á la que marca el cero de la Q.

De lo contrario, hay un error en más ó en ménos, que es preciso tener en cuenta para las alturas mayores que $1^m,670$.

Si el cero de la corredèra inferior quedase más bajo que la division *aa'* (fig. 22; lám. 2) que debe marcar, seria preciso añadir la cantidad *o'a'* á todas las alturas que excediesen de $1^m,670$. Sería preferible añadir una pieza de esta altura al resalto de la regla B, que recibe la extremidad inferior de A. Si por el contrario el cero estuviese por encima, sería necesario restar la distancia del cero á la division, ó hacer un rebajo de igual magnitud al resalto mencionado de la regla B.

35. Para obtener alturas mayores que $1,^m670$, se fija el tornillo de la corredera superior, cuidando de que esta haya llegado perfectamente al tope, se afloja el tornillo de la inferior, y se mueve la regla A, que lleva consigo la tablilla, teniéndose cuidado de que el pié de la mira no abandone el punto del terreno sobre el cual se halla colocada, y se continúa subiendo ó bajando la regla A, hasta tanto que el punto de mira haya alcanzado la altura del plano horizontal del nivel.

La altura de mira se lee en la division lateral del cuerpo B, con el cero de la corredera inferior P.

36. Las figuras 23 y 24 (lám. 2) representan la tablilla unida al cuerpo formado por las dos reglas, y *r* es un rebajo practicado en la corredera para ajustar con el tope *m*.

37. La fig. 25 (lám. 2) representa una mira ideada por nuestro matemático Vallejo; la cual se puede disponer perfectamente vertical con el auxilio de dos plomadas y el de los tornillos *t*, que se apoyan en piezas de madera ó hierro empotrados en el terreno, y pueden mover convenientemente el plano sobre que descansa la mira.

Esta, cuyo empleo evitaria los errores producidos en las miras ordinarias por la falta de aplomo, no tiene aplicacion en las operaciones ordinarias, por el mucho tiempo que su uso requiere; hemos creido deber citarla, sin embargo, como un testimonio del celo que animaba á su autor, atendida la época en que se dedicaba á estos trabajos, hácia todo lo que contribuia á los adelantos de los conocimientos útiles, tan desatendidos entonces en nuestro país.

38. **Mira parlante.**—La *mira parlante*, llamada tambien por algunos *escala*, se compone de tres cuerpos de caoba. El primero *ab* (fig. 26; lámina 2), de seccion rectangular de $0^m,075$ de ancho por $0^m,045$ de grueso, y de una altura exacta de $1^m,6$ á contar desde el canto inferior, recibe en su interior otro cuerpo de la misma forma, el cual puede correr en sentido de su longitud, lo que permite que pueda estar encerrado en el primero, hasta el borde inferior de la cantonera metálica *c*, y que pueda sobresalir en una longitud *bc*, que es de $1^m,4$.

Una regla *cd*, de $1^m,4$ de longitud, puede del mismo modo encerrarse en el segundo cuerpo ó mantenerse fuera de él una longitud *cd*. La altura total de la mira es de $4^m,4$.

Encerrados los dos cuerpos superiores en el *ab*, la mira, representada por su parte posterior en la figura 27 (lám. 2), puede trasportarse cómodamente.

Las cantoneras que terminan por su parte superior los dos cuerpos inferiores de la mira, presentan unos taladros circulares *a* (fig. 27; lámina 2): el del segundo cuerpo está destinado á recibir un boton *b* (fig. 28; lámina 2) que ajusta perfectamente con el taladro, y que está en la extremidad de un resorte metálico *r*, fijo á la parte inferior del tercer cuerpo. El segundo cuerpo tiene otro resorte semejante, cuyo boton ajusta con el taladro del primero.

Para dar á la mira la disposicion representada en la fig. 26 (lám. 2), y para que no se cometa error en las observaciones de las alturas que se hagan con este instrumento, es preciso hacer salir á los cuerpos segundo y tercero hasta el ajuste de sus botones con los taladros correspondientes.

El ajuste de los botones se verifica al tiempo de sacar los cuerpos de la mira por la fuerza elástica del resorte.

39. *Division.*—En una de las caras de mayor latitud de cada cuerpo, lleva la mira, sobre papel convenientemente preparado, la escala métrica de division.

Los metros están escritos con números grandes de tinta roja, y los decímetros con números del mismo tamaño de tinta negra. Las líneas que, como *ab* (fig. 29; lám. 2), comprenden todo el ancho de la escala, son las de separacion de los decímetros. Entre cada dos de estas líneas hay un número rojo y otro negro, que ocupan casi toda la distancia que media entre ellas, y que marcan la altura correspondiente á la línea inferior. Los centímetros están marcados por rectángulos alternativamente blancos y negros, de manera que leyendo de abajo arriba, los blancos ocupan en cada decímetro los lugares impares.

Entre cada número rojo y el negro que le corresponde, hay un círculo negro cuyo centro está á la altura de la línea de separacion de los centímetros quinto y sexto, y marca por lo tanto la mitad del decímetro.

Los milímetros están marcados de dos en dos por trazos gruesos alternativamente blancos y negros, y dispuestos como se vé en la figura. Algunas miras no llevan la division de los milímetros, que es preciso entonces apreciar á ojo. Estas miras presentan mayor claridad; pero exigen que el observador tenga cierta práctica en la apreciacion de los milímetros.

40. *Uso y lectura.*—Puesta la mira verticalmente en el punto del terreno, cuya distancia al plano horizontal del nivel se quiere determinar, y despues de sacar los cuerpos necesarios para alcanzar el plano de nivel, teniendo en cuenta que el tercero no debe emplearse hasta que los dos primeros no basten para alcanzar al plano, el observador determina en la mira la altura que corresponde á este plano.

Si la interseccion del plano con la mira es la línea *ab* (fig. 29; lámina 2) la altura de mira será, con arreglo á lo que hemos establecido (39), 1m,500, dada por la lectura de los números I y V que se hallan sobre la línea *ab*.

Si la interseccion es *cd*, la altura será 1m,550, dada por los mismos números I y V, comprendidos entre las líneas *ab* y *kl*, y los cinco centímetros que se marcan siempre que la interseccion del plano de nivel con la mira pasa por el centro del círculo que señala la mitad del decímetro.

De un modo análogo, la distancia del pié de la mira á *ef* es 1m,523.

La altura de *gh* es 1m,570.

La de *ij* 1m,478.

41. En la mira que hemos descrito se leen los metros y decímetros de arriba abajo y los centímetros y milímetros de abajo arriba.

En la que representa la fig 30 (lám. 2), y que solo difiere de la anterior en el órden de colocacion de los números rojos y negros, se hace la lectura por completo de abajo arriba.

Otras miras (fig. 31; lám. 2) tienen dispuestos los números de modo que los rojos están colocados á la parte inmediatamente inferior, y los negros á la inmediatamente superior de la línea cuya altura determinan. De esta disposicion se deduce fácilmente la regla que debe seguirse para la apreciacion de las alturas. La que corresponde á la línea *p'q'* es por lo tanto 1m,000; que segun lo expuesto, sería para la *pq*, línea de igual altura en la mira de la fig. 30 (lám. 2), la misma 1m,000, dada para la *pq* por los números superiores.

42. Algunas miras presentan dichos números escritos al revés, con objeto de que puedan emplearse con los instrumentos provistos de anteojos astronómicos, que como sabemos presentan invertidas las imágenes de los objetos.

Debe tenerse presente, en este caso, que el pié de la mira se presenta á la vista más elevado que el plano de nivel, en virtud de la inversion de su imágen, y la lectura se hará por lo tanto de arriba abajo.

43. **Niveles.—Nivel de perpendículo ó de albañil.**—Este instrumento representado en la fig. 32 (lám. 2), y descrito en la Planimetría (63), ha recibido distintas formas, como las representadas en las figuras 33, 34 y 35 (lám. 2), y todas están fundadas en el mismo principio.

Las verificaciones y rectificaciones son las expuestas (Planim. 63 y siguientes).

Suele unirse al nivel de albañil una regla *mn* (fig. 36; lám. 3), en cuyo centro hay una espiga unida á una rodilla de juego de nuez con su trípode, que sostiene todo el aparato.

El canto superior de la regla *mn* determina una línea horizontal.

44. *Usos del nivel de albañil* Los albañiles y carpinteros hacen uso del nivel de perpendículo para disponer horizontalmente las hileras de sillería, igualar los suelos, disponer las caras superiores de los machones

y los estribos de los arcos, para que los dinteles de las puertas y los arranques de los arcos estén en un mismo plano horizontal, etc : nosotros le consideraremos en sus aplicaciones, para determinar las distancias de los puntos del terreno á la línea ó al plano horizontal que el nivel determina, de las cuales se deducen los desniveles que existen entre estos puntos

Para hallar el de los puntos A y B (fig. 36; lám. 3) bastante próximos, y en un terreno poco inclinado, colocaremos el nivel en un punto C próximamente á igual distancia de los A y B, y en alineacion de estos puntos.

Colocando una mira en A, y dirigiendo una visual rasando la superficie de la regla *mn*, se hace subir la tablilla de la mira hasta que el punto de mira se halle á la altura de la visual y de la superficie de la regla.

La altura de mira A*a* (28) será la que se buscaba.

Hallando del mismo modo la B*b*, la diferencia entre estas alturas será el desnivel ó diferencia de las cotas de los puntos A y B (29) y (Acotaciones 5).

Conviene advertir que el punto de mira estará en la superficie de la regla, cuando esta aparezca á la vista como si fuese una recta en la cual esté contenido dicho punto.

Cuando en vez de una regla se horizonta un plano con el nivel de albañil (Planim. 83), pueden hallarse las alturas de mira de varios puntos del terreno situados á las inmediaciones del paraje en que se ha colocado el plano; puesto que pueden dirigirse visuales en todos sentidos.

45. **Límite del empleo del nivel de perpendículo**.—Supongamos que al colocar el nivel sobre la regla AB (fig. 37; lám. 3), la plomada *ab* se separa de la línea de fé una cantidad *bc*, que puede llegar á valer 0 ^{m}001 al apreciar la coincidencia del cordon de la plomada con la línea de fé. La recta AB tomará una posicion inclinada, y se separará tanto más de la horizontal AC de uno de sus puntos, cuando más se separe de este punto A.

Se trata de hallar la distancia x á la cual el error e, ó separacion de ambas líneas, tiene un valor determinado.

Los triángulos rectángulos *abc*, ABC, que tienen iguales los ángulos *bac* y BAC, por tener sus lados respectivamente perpendiculares, son semejantes (Geom. Teor. 64) y dan la proporcion

$$bc : ac :: BC : AC.$$

En esta proporcion, *bc* es el error cometido en la apreciacion de la coincidencia del cordon con la línea de fé, el cual puede llegar á valer 0,^{m}001; *ac* es la altura del triángulo que forma el nivel, á la que llamaremos h, y los términos BC y AC son las cantidades que hemos designado respectivamente por e y x. Sustituyendo estos valores en la proporcion anterior, tendremos

$$0{,}001 : h :: e : x;$$

de donde resulta

$$x = \frac{e \times h}{0,001} = \frac{e \times h \times 1000}{1} \quad 1000\, e\, h \qquad [1].$$

Suponiendo que el error máximo asignado es $0^m,1$, tendremos

$$x = 1000 \times 0,1 \times h = 100\, h \qquad [2].$$

De donde se deduce que la mayor distancia á que debe operarse con el nivel de albañil, con la condicion de que el error que cause la apreciacion de la coincidencia de la plomada con la línea de fé sea menor que $0,^m1$, es de 100 veces la altura del nivel.

Suponiendo que esta altura sea $0^m,3$, resultará

$$x = 0^m,3 \times 100 = 30^m.$$

Si quisiéramos que el mayor error cometido fuese $0^m,01$, y la altura del nivel es la misma que en el caso anterior, tendriamos reemplazando estos valores en la fórmula [1],

$$x = 1000 \times 0,01 \times 0^m,3 = 3^m.$$

Se ve por estos resultados, que el nivel de albañil solo puede emplearse para distancias muy cortas ó para nivelaciones que exijan poca exactitud en sus resultados.

46. **Terazi.**—Este nivel, empleado por los fontaneros de Constantinopla, se compone de un nivel de perpendículo N (fig. 38; lám. 3), que se desliza libremente por la cuerda *ab* en la cual se apoya por los anillos *c*, *d*, *e*.

Cuando el perpendículo coincide con la línea de fé, los puntos *a*, *b*, están de nivel entre sí, y las distancias A*a*, B*b* marcan las alturas respectivas de la línea de nivel *ab* sobre los puntos A, B del terreno.

La posicion de la fig. 38 (lám. 3) es la única en la cual puede el nivel N permanecer en equilibrio. En cualquiera otra (fig. 39; lám. 3) la fuerza de la gravedad *ef* se descompone en otras dos: una *ec* perpendicular á la porcion *ab* de la cuerda, que se destruye con la resistencia de esta, y otra *ed* paralela á la misma cuerda que hace correr al nivel á lo largo de ella. Se ve que está en las mismas condiciones que un cuerpo grave colocado sobre un plano inclinado.

47. **Nivel-péndulo de Picard.**—Fundado tambien en la accion de la gravedad, Picard inventó un nivel formado de dos reglas *ab*, *cd* (figura 40; lám. 3) ensambladas en *c* á ángulo recto, y suspendidas por este punto de una pieza de madera *e*, unida á un trípode que sostiene todo el

aparato. Se concibe que cuando la regla *cd* esté vertical, obedeciendo á la accion de la gravedad, la *ab* será horizontal (Planim. 55), así como la visual paralela *fg* tirada por los extremos superiores *f*, *g* de las dos reglas exactamente iguales *af*, *bg*, que se elevan perpendicularmente á los extremos de la regla horizontal (Planim. 110). La regla *cd* se mantiene constantemente vertical, cuando el aparato se halla libremente solicitado por la fuerza de la gravedad, á causa del peso *d* que lleva en su extremidad inferior.

La pieza *d* debe ser de una materia bastante pesada para que presente poca superficie á la accion del viento.

Este instrumento puede usarse en nivelacionees de poca importancia y cuando está perfectamente construido, el límite de su empleo es mayor que el del nivel de albañil (45).

48. **Nivel de agua**.—Los cuerpos líquidos en virtud de su fluidez tienen la propiedad de presentar una superficie plana y horizontal, como hemos visto (2) cuando se la considera en una pequeña extension. Esta superficie será por lo tanto de nivel aparente.

La propiedad á que nos referimos sugirió á los antiguos la idea del nivel más elemental; si bien de un uso molesto y de dificil trasporte. Tal era el llamado por los griegos *Chorobates*, que consistia en un canal de madera *abc* (fig. 41; lám. 3), el cual llenaban de agua hasta cierta altura. La superficie libre del agua era, en virtud de la propiedad que acabamos de enunciar, una superficie de nivel aparente, á la cual referian las alturas de los diferentes puntos del terreno.

49. El *nivel de agua* usado en el dia, se compone de un cilindro de laton ú hoja de lata *ab* (fig. 42; lám. 3) de $1^m,30$ de longitud, encorvado en sus extremos á ángulo recto, ó bien terminado en unas esferas *a*, *b*, y otros dos pequeños cilindros *c*, *d*, perpendiculares al *ab* y de mayor diámetro, á fin de poder adaptar á ellos dos frascos de vidrio *e*, *f*, de unos 30^{mm} de diámetro interior y 12^{cm} de altura.

Para la mayor facilidad del trasporte, el cilindro *ab* se compone generalmente de tres partes *ag*, *gh*, *hb*, y puede por lo tanto armarse y desarmarse por medio de roscas y tuercas convenientemente dispuestas en los puntos *g* y *h*.

Este instrumento se fija por medio de un pié formado de la pieza cónica hueca *r* soldada en el punto medio de la parte *gh* del cilindro horizontal. La pieza *r* entra á frotamiento en la espiga *j* de un trípode ordinario.

Otros niveles llevan una rodilla de juegoe d nuez (fig. 43; lám. 3).

Los frascos del nivel se cubren con los cilindros *l*, *k* (fig. 44; lám. 3) de hoja de lata ó laton, cerrados por su extremo superior, los cuales se sujetan por medio de los corchetes *o*, *n*, en los rebordes *c*, *d* (fig. 42; lámina 3). Los frascos llevan sus correspondientes tapones *t*, *s*.

50. *Teoría del nivel de agua*.—Se funda este instrumento en la propiedad que tiene todo líquido homogéneo de elevarse á la misma altura

en los extremos de un tubo de brazos comunicantes de un mismo diámetro.

Se llama así á un cilindro dos veces encorvado tal como el que constituye la parte *eabf* del instrumento representado en la fig. 42 (lám. 3), y el cual suponemos lleno de líquido hasta la línea *mn*. Las partes *ae*, *bf* del tubo son los brazos comunicantes y *ab* el tubo de la comunicacion.

51. *Cuando los cilindros que constituyen los brazos de un tubo de brazos comunicantes tienen igual diámetro, el plano determinado por las superficies del agua en los cilindros es un mismo plano horizontal, para todas las posiciones del aparato.*

Supongámosle sujeto á girar alrededor de rt (fig. 45; lám. 3), que es el eje de rotacion del instrumento, y que el giro se verifique de modo que siempre quede algo de líquido en los tubos. Sean además v y v' los volúmenes respectivos de las partes *cm* y *dn* del líquido contenido en ellos.

El volúmen *cabd* del líquido que llena el tubo de comunicacion, siendo el mismo en todas las posiciones que se den al aparato, la suma de los volúmenes v y v' permanecerá constante tambien en todas ellas.

Por otra parte, el volúmen v es igual á la altura media mm' multiplicada por la seccion recta del tubo, á que llamaremos s, y será $v = s \times mm'$.

Del mismo modo, resultará para el otro tubo $v' = s' \times nn'$; luego tendremos

$$v + v' = s \times mm' + s' \times nn';$$

y como se tiene $s = s'$ por el supuesto, vendrá á resultar

$$v + v' = s\ (mm' + nn')$$

Como $v + v'$ es constante, y lo mismo se verifica con la expresion $s\ (mm' + nn')$, en la cual s es siempre la misma, se deduce que la suma de alturas $mm' + nn'$ es una cantidad constante; luego $\dfrac{mm' + nn'}{2}$, ó su igual rt en el trapecio $mm'\,n'n$ (Geom. Teor. 35) tambien lo será, y como t es un punto fijo, el punto r lo será del mismo modo.

Luego todos los planos horizontales determinados por las superficies de nivel mn en sus diferentes posiciones, pasan por el punto r; luego son un solo y mismo plano horizontal (Planim. 94).

52. **Errores debidos á la capilaridad y á la diferencia de diámetros de los tubos.**—El principio matemático que acabamos de demostrar, no es cierto sin embargo físicamente considerado. Es verdad, en efecto, que todas las columnas líquidas *ab*, *cd*, *ef* (fig. 46; lám. 3) tienden á elevarse á una misma altura del fondo *bh* que suponemos de nivel; pero las columnas *ab*, *gh*, por ejemplo, que se hallan adheridas á las

paredes del tubo *ah*, están en parte sostenidas por la atraccion mútua que se ejerce entre las moléculas del líquido y las del vidrio, y la fuerza que trata de elevar estas columnas á la altura comun se encuentra ayudada por la causa que acabamos de citar, y el concurso de ambas fuerzas hace subir á las columnas *ab*, *gh*, á mayor altura, para que exista el equilibrio entre las fuerzas que consideramos.

Todas las demás columnas líquidas se hallarán tanto menos atraidas por las paredes del tubo, cuanto mas disten de él; hasta llegar al eje del cilindro *ah*, en el que la atraccion estará en su mínimum Por lo tanto la superficie del líquido toma la forma de un menisco cóncavo, cuya curvatura es tanto mayor cuanto menor es el diámetro del tubo Este fenómeno se conoce en Física con el nombre de *capilaridad*.

Si el líquido contenido en el tubo fuese mercurio, la superficie libre seria convexa; lo que proviene de que las moléculas de mercurio tienen más atraccion entre sí que con las del vidrio. Las columnas contiguas al tubo, no estando por lo tanto sometidas á la atraccion de las paredes del mismo, ejercen toda su presion sobre el fondo, y se elevan menos que las del centro, que se hallan en parte sostenidas por la atraccion mútua de sus moléculas Solo entonces está el líquido en equilibrio.

53 *Errores producidos por la capilaridad en tubos del mismo diámetro.* —Los meniscos que sustituyen á las superficies planas del líquido en los tubos, nos obligan á considerar como superficie de nivel el plano *aa'* (fig 46; lám 3) determinado por las bases de los meniscos, ó el *mm'* tangente á las superficies de los mismos; pero como quiera que ninguno de estos planos puede determinarse bien, la superficie que consideramos puede variar de inclinacion entre la zona *amm'a'*.

En las observaciones conviene separarse del instrumento cierta distancia, variable con la vista de cada observador y de $1^{m},5$ por término medio, á la cual los meniscos aparecen como unas líneas negras perfectamente destacadas. A pesar de todo, la superficie de nivel que resulta entonces puede considerarse siempre inclinada al horizonte en 1^{mm} para la longitud del instrumento, lo que dará un error tanto mayor cuanto mayor sea la distancia del mismo al punto cuya altura se observa.

54. *Errores de la capilaridad en tubos de diferentes diámetros.*—Dependiendo como hemos visto la altura del líquido en un tubo de la adherencia molecular que entre aquel y las paredes de este se ejerce, es claro que cuanto menor sea el diámetro del tubo, una molécula líquida cualquiera se hallará más próxima á las del tubo, y mas enérgica será, por consiguiente, la accion de la capilaridad. Así es que el líquido se eleva á mayor altura, y mayor será tambien la del menisco cóncavo. Es evidente que el plano que los meniscos determinen, en el caso de que los tubos tengan diámetros diferentes, será inclinado al horizonte, y que importa mucho por lo tanto que los tubos sean del mismo diámetro y estén perfectamente calibrados.

La sola circunstancia de la desigualdad del diámetro de los tubos, produce errores en la determinacion del plano de nivel.

55. *Cuando los tubos del nivel son de diferente diámetro, no puede obtenerse un plano de nivel, ni una superficie que pueda dar puntos de nivel.*

Supongamos que *ab* (fig. 47; lám. 3) es la diferencia de altura debida á la capilaridad. Si la recta *mn* es perfectamente horizontal, y el eje *rs* perfectamente vertical, la recta *ca*, de inclinacion constante, describe en su movimiento alrededor del eje *rs* una superficie cónica que tiene su vértice en *r*. Un punto cualquiera *a* ó *p* de esta recta describe una circunferencia cuyos puntos todos son de nivel verdadero (20).

Pero si *mn* (fig. 48; lám. 3) es inclinada, como generalmente lo es, y prescindimos de la accion capilar, será *ab*, por ejemplo, el plano horizontal marcado por la superficie del líquido en los tubos para una primera posicion del instrumento, marcada por las líneas llenas de la figura.

Si hacemos girar al instrumento 180°, alrededor de su eje *op*, y suponemos que durante el giro el líquido se ha solidificado, el plano *ab* habrá tomado la posicion simétrica *a'b'*. La porcion de líquido *a'frb* irá á ocupar la posicion *af'r'b'* y la porcion *acdb'* la *a'c'd'b*.

Si en este caso suponemos que el agua vuelve á su primitivo estado de fluidez, la porcion *af'r'b'* que ocupa el tubo más grueso, pesando sobre la superficie *af'* tratará de obligar á la columna líquida *af'mna'c'* á elevarse sobre *c'a'* por el tubo de menor diámetro *a'c'd'b* para alcanzar el nivel *ab*. Pero esto se consigue con solo pasar al tubo menor una cantidad *acdb'* = *a'c'd'b*; luego quedará una parte *cf'r'd* que se repartirá entre ambos tubos, elevando el nivel *ab* á una cierta altura AB.

Fácilmente se comprenderá, que si el tubo de mayor diámetro hubiese estado más elevado en la primitiva posicion del aparato, el plano de nivel hubiese bajado al hacer la inversion; y que cuando los diámetros de los tubos son diferentes, el plano de nivel varía para cada posicion del instrumento.

Teniendo en cuenta además que el error de la capilaridad, que existe necesariamente, debido á la diferencia misma de los diámetros de los tubos, no se compensa en general con el de que nos ocupamos, la determinacion de un solo plano de nivel es imposible, á no ser que los diámetros de los tubos sean iguales.

56. *Uso del nivel de agua.*—Para obtener con este instrumento el plano horizontal ó de nivel aparente que nos proponemos, se le dispone de modo que el brazo de comunicacion quede próximamente horizontal, y se empieza á llenar de agua uno de los frascos, la que en virtud de la propiedad hidrostática en que este instrumento se funda, se elevará en el otro á igual altura, hasta tanto que haya llegado á alcanzar próximamente las dos terceras partes de la de los tubos. El agua debe mezclarse con un poco de vino con el objeto de destacar más las superficies libres de nivel.

En el invierno conviene mezclar el agua con mayor cantidad de alcohol para evitar la congelacion del líquido.

Una vez puesto en estacion el instrumento, se dirigen las visuales de modo que estén contenidas en el plano horizontal determinado por las superficies del líquido en los tubos (51), y se refieren á este plano las alturas de los diferentes puntos del terreno, de un modo análogo al que hemos indicado (44) para el nivel de perpendículo. Para lo cual se coloca el observador á la distancia necesaria para que el espesor de los meniscos que forman dichas superficies (53) aparezca disminuido todo lo posible, dirigiendo entonces las visuales segun una de las cuatro tangentes comunes á los anillos m', n' (fig. 49; lám. 3) bajo los cuales aparecen á la vista las superficies del agua en los tubos. Estas tangentes, contenidas en el plano de nivel AB, se proyectan horizontalmente segun las tangentes a, b, c, d, á las proyecciones horizontales m, n, de dichas superficies.

Es conveniente advertir que la aproximacion del tubo de comunicacion á la posicion horizontal ha de ser tal, que el agua no ha de dejar de aparecer en ambos tubos durante la revolucion completa del nivel.

57. **Límite del empleo del nivel de agua.** —Cuando el instrumento satisface á todas las condiciones enunciadas, queda siempre una causa de error inevitable, debida á la inclinacion que experimenta la visual á causa del espesor de los meniscos indicados, y que nos conduce á la necesidad de calcular la mayor distancia á que se pueden hacer las observaciones de las alturas de mira, para que el error no exceda de cierto límite, que se asigna atendiendo á la importancia de la operacion.

Sea hh' (fig. 47; lám. 3) la horizontal verdadera; cp la visual inclinada; $h'p$ el error e á la distancia $rh' = x$; mn la longitud l del instrumento, y at la altura 0m,001 del menisco; siendo las rectas at, ph' verticales y por consiguiente paralelas (Planim. 50), los triángulos semejantes rta, $rh'p$, dan la proporcion

$$rt : ta :: rh' : h'p;$$

y observando que se tiene $rt = \frac{mn}{2} = \frac{l}{2}$, sustituyendo valores en la proporcion anterior y multiplicando la primera razon por 2, se tendrá

$$l : 0{,}002 :: x : e,$$

de la que resulta

$$x = \frac{1}{0{,}002} \times e \times l = 500 \times e \times l$$

Dando á e un valor particular segun la aproximacion necesaria, 0m,1 por ejemplo, será

$$x = 50 \times l \qquad [3];$$

se toma pues como límite de la distancia una longitud igual á cincuenta veces la del instrumento, y el error será entonces menor que un decímetro para las alturas de puntos más próximos al nivel. Dando á l una longitud media de $1^{m},2$, resulta $x=60^{m}$, distancia que se considera en la práctica como el límite máximo

58. **Nivel de aire.**—Este instrumento, cuya descripcion, verificaciones y correcciones hemos dado á conocer extensamente (tomo I, 69), se emplea para determinar la posicion horizontal ó de nivel aparente de una regla ó de un plano (tomo I, 83), y se aplica á la determinacion de las alturas de mira como el nivel de perpendículo (44).

59. **Límite del empleo del nivel de aire.**—Sea ab (fig. 50; lám. 3) una regla sobre la cual se ha colocado el nivel de aire np, que suponemos perfectamente corregido, pero que se ha cometido un error de desviacion mm' al observar la posicion de la burbuja, siendo m el punto medio del tubo, y m' el que ocupa la parte superior. El ángulo mcm' formado por los rádios cm, cm' del arco np tiene por tangente (20) la expresion $\frac{mm'}{cm}=\frac{0,001}{r}$, llamando r al rádio de curvatura del tubo, y suponiendo que el error cometido en la observacion de la posicion de la burbuja llega á valer un milímetro como límite máximo. La tangente del ángulo dah es $\frac{e}{x}$, designando por x la distancia ah á que tiene lugar un error $dh=e$, dado de antemano y debido á la inclinacion de la regla ab. Observando ahora que los ángulos mcm', dah son iguales por tener sus lados respectivamente perpendiculares (tomo I, 73), sus tangentes lo son tambien, y se tiene la proporcion

$$0,001 : r :: e : x;$$

de la que resulta

$$x=\frac{r\times e}{0,001}=\frac{1}{0,001}\times r\times e=1000\times r\times e \qquad [4].$$

Suponiendo que el rádio de curvatura del nivel tiene un valor mínimo de 20^{m}, la fórmula anterior se convertirá en

$$x=20000\times e \qquad [5].$$

Dando á e valores sucesivos $0^{m},1$, $0^{m},01$..... resultarán para x, 2000^{m}, 200^{m}..... y teniendo en cuenta que el error de desviacion de la burbuja que hemos supuesto, es bastante exagerado en razon á que la simple vista puede apreciar una desviacion mucho menor, y que el rádio de curvatura es mayor que 20^{m} en los niveles que generalmente se emplean, pueden considerarse como exactas las alturas de mira observadas á una distancia de 200^m en las aplicaciones ordinarias de la nivelacion.

60. Si en la ecuacion [4] asignamos á e un valor determinado, $0^m,1$ por ejemplo, se tendrá

$$x = 100 \times r \qquad [6],$$

que manifiesta que la distancia necesaria para producir un error dado, á igual desviacion de la burbuja, aumenta á medida que crece el rádio de curvatura del tubo. Bajo este punto de vista, conviene que el rádio sea lo mayor posible, teniendo en cuenta, sin embargo, el límite á que conviene llevar la sensibilidad del nivel (tomo I, 75)

61. Se ve tambien por lo que llevamos expuesto, la indisputable ventaja del empleo del nivel de aire sobre el de agua y el de perpendículo, no solo en cuanto á la mayor distancia á que puede operarse con él, sino tambien al grado de exactitud de que es susceptible.

62. **Nivel de aire con pínulas**.—Se compone este instrumento de una regla metálica CD (fig. 51; lám. 4) en cuyas extremidades se elevan las pínulas P, P′ y sobre la cual se halla dispuesto un nivel de ampolla n de manera que puede acercarse ó separarse de la regla, girando alrededor de la charnela h por el tornillo de correccion t, que puede ponerse en movimiento con el auxilio de una llave que acompaña al instrumento en su caja. La regla está sólidamente unida á un soporte m, cuyo eje, que es el de rotacion de la parte descrita del instrumento, debe ser perpendicular á la regla, y se mueve dentro de una pieza lijeramente cónica, que forma cuerpo con una plataforma de tres tornillos, como la que se representa en la figura, ó cualquiera otra de las que hemos descrito (tomo I, 331), y que se apoya en un trípode ordinario (tomo I, 341).

Cada una de las pínulas está provista de una abertura cuadrada c (fig. 52; lám. 4) con dos cerdas que se cruzan á ángulo recto, y de un taladro cónico ó esférico a, que da paso á la luz por un agujero de muy pequeño diámetro. Este agujero y el cruzamiento de las cerdas deben estar á la misma altura en ambas pínulas con respecto á la cara superior de la regla del instrumento, para lo cual se les dispone en una de las pínulas ó en ambas, en un tablero T móvil á lo largo del bastidor b con el auxilio del tornillo s, que se pone en movimiento por medio de una llave, y por el juego del resorte en espiral z Cuando se hace bajar al tornillo, baja tambien el tablero oprimiendo al resorte; y cuando se hace que el tornillo suba, obra el resorte elevando el tablero.

Las visuales ab (fig. 51; lám. 4) se dirigen por uno de los taladros y el cruzamiento de las cerdas de la pínula opuesta, resultando así paralelas á la cara superior de la regla (tomo I, 144).

63. *Usos del instrumento*.—En la suposicion de que la direccion de la visual y el eje del nivel sean perfectamente perpendiculares al eje de rotacion del instrumento, disponiendo este eje en una posicion vertical, el

nivel permanecerá marcando la horizontal durante una revolucion completa del instrumento, y la visual describirá un plano horizontal ó de nivel aparente al cual se referirán las alturas de mira de los distintos puntos del terreno. Para que estas circunstancias tengan lugar, se pone el nivel en estacion, de manera que el eje quede vertical en cuanto puede juzgarse á la vista: se coloca despues el tubo del nivel en la direccion de dos tornillos de la plataforma, llevando por el movimiento de estos la ampolla de aquel á la posicion en que sus extremos marcan divisiones simétricas en la graduacion del tubo, en cuyo caso estará horizontal (tomo I, 74); se le coloca despues en la direccion del tercer tornillo y se horizonta por él la ampolla, volviendo el tubo á la posicion primitiva y repitiendo las operaciones que acabamos de indicar, hasta que el nivel acuse la horizontalidad de ambas posiciones, en cuyo caso el eje de rotacion será vertical (tomo I, 124). El desnivel de dos puntos se obtiene como hemos visto (44), llevando la tablilla de la mira á la altura de la visual.

64. *Límite del empleo del nivel de aire con pínulas.*—Siendo la inclinacion que puede experimentar la visual con respecto al horizonte la misma que la del tablero en que descansa el tubo del nivel (62), el límite de apreciacion será el que hemos asignado para este último (59), más restringido aun, porque no puede exceder de la distancia á que el observador distinga claramente el cruzamiento de las líneas de mira; distancia que varía de un indivíduo á otro, y que no siempre alcanza por lo tanto al límite prescrito.

65. **Verificaciones y correcciones.**—Para que el eje del nivel, la direccion de las visuales y el eje de rotacion del instrumento cumplan con las condiciones á que debe satisfacer para su empleo en las operaciones de la nivelacion (63), es preciso ejecutar las verificaciones y correcciones que vamos á exponer.

1.ª *Verticalidad del eje de rotacion.*—Se coloca el nivel *mn* (fig. 53; lám. 4) en una direccion paralela á la de dos tornillos *t*, *t'* de la plataforma haciendo girar al instrumento alrededor de su eje de rotacion, y en esta posicion se horizonta la burbuja por el movimiento de los mismos tornillos; se da una semirevolucion exacta al nivel alrededor del citado eje de rotacion, con lo que quedará el nivel paralelo á los mismos tornillos *t*, *t'* que antes; pero el extremo *m* del tubo habrá venido á ocupar la posicion que antes ocupaba el *n*, y al contrario, si *mn* era paralelo á la regla *cd*, la cual es por construccion perpendicular al eje de rotacion *vz*: la ampolla seguirá marcando la posicion horizontal, y el nivel estará corregido. Pero si *mn* (fig. 54; lám. 4) no es perpendicular á *vz*, cuando la ampolla ocupe la posicion horizontal dada por el movimiento de los tornillos *t* y *t'*, el eje *vz* será inclinado al horizonte, y al dar la semirevolucion indicada los puntos *m* y *n* pasarán á ocupar las posiciones *m'* y *n'* simétricas de las primeras con relacion á *vz*, dejando la ampolla del nivel de marcar la horizontalidad del tubo; será preciso que $m'n'$ tome la posicion mm', paralela á cd, lo que se consigue moviendo el tornillo de correccion del nivel hasta hacer desaparecer la mitad de la desviacion que se haya observado en la burbuja, y acercar al eje vz á la posicion vertical acabando de horizontarla por los t y t' de la plataforma. Llevando el nivel á su posicion primera, y repitiendo la operacion acabada de indicar cuando se observe aun alguna desviacion en la burbuja hasta conseguir que equidiste de divisiones simétricas del tubo en ambas posiciones, el nivel estará corregido. Colocándole entonces en la direccion del tercer tornillo t'' se le horizonta por él determinando así un plano horizontal (tomo I, 58), y el eje será entonces vertical (tomo I, 122). Si la correccion está bien hecha, la burbuja permanecerá horizontal en todas las posiciones que ocupe haciéndola girar alrededor del eje de rotacion del instrumento.

66. Reasumiendo lo que acabamos de exponer, podemos establecer la siguiente regla práctica, consignada ya en el párrafo 403 del tomo primero.

Se coloca el tubo de la burbuja en la direccion de dos tornillos de la plataforma, y se horizonta por ellos: se da una semirevolucion al instrumento, y si la ampolla marca entonces la posicion horizontal del nivel, este estará corregido; en caso contrario, se corrige la desviacion que se observe, mitad por el tornillo de correccion particular del nivel y mitad por los mismos tornillos de la plataforma: se lleva el tubo del nivel á su posicion primera y se repite la misma operacion, hasta que en ambas posiciones la ampolla marque la horizontalidad; con lo que se habrá corregido el nivel. Se coloca este despues en direccion del tercer tornillo, y se horizonta por el solo movimiento de este. Para asegurarse de que la correccion está bien hecha, se observa si la graduacion del tubo marca la posicion horizontal de la burbuja en todas las posiciones que se den al instrumento alrededor de su eje general de rotacion.

67. 2.ª *Horizontalidad de la visual.*—Si suponemos que la direccion de la visual ab (fig. 55; lám. 4) es paralela al eje del nivel y por consiguiente perpendicular al eje vertical de rotacion vz, haciendo girar al instrumento alrededor de él, las distintas posiciones de la visual determinarán el plano horizontal (tomo I, 56) que pasa por el punto r del eje (tomo I, 93). Dirigiendo la visual á un punto h lejano y bien determinado, dando una semirevolucion al instrumento alrededor de rz y dirigiendo la visual al mismo punto, este quedará tambien cubierto por el cruzamiento de las cerdas de la pínula b; pues en efecto, los puntos a, b, h no salen del plano horizontal proyectado en ah y que pasa por el punto r.

Pero si la visual tiene la direccion $a'b'$ que va á parar á un punto h' de la vertical mh, al girar el instrumento alrededor de vz la inclinacion de la visual respecto de este eje es constante, y los puntos a' y b' van á ocupar las posiciones simétricas a'' y b''; la visual tomará la direccion $b''a''$ yendo á parar á h'', formando ambas visuales con la horizontal de r los ángulos iguales $b'rb$, bra'', y los triángulos rectángulos $h'rh$, hrh'', que tienen además el lado rh comun, serán iguales y darán $h'h=hh''$. Será preciso corregir la posicion de la visual haciendo bajar ó subir el tablero de la pínula móvil por su tornillo de correccion, hasta que la visual vaya á parar al punto h, equidistante en sentido vertical de los h', h'' determinados por las dos visuales dirigidas á la vertical mh.

Para efectuar esta correccion con mayor exactitud, sería conveniente que las dos pínulas fuesen móviles haciendo subir el punto a'' á b y bajar el b'' á a; pues en la correccion indicada primeramente, la direccion que se hace tomar en realidad á la visual es la de la recta inclinada $b''h$ haciendo pasar al cruzamiento de las cerdas de a'' á c; pero la inclinacion de $b''h$ y la separacion cb' son bastante pequeñas para que puedan despreciarse en la práctica, sobre todo cuando la distancia es muy grande; pues á medida que esta distancia crece, la visual se acerca más á la que pasaria por b'' y b', la cual seria exactamente paralela á ab.

68. Esta correccion puede hacerse con la mira, haciendo subir la tabla á h' para tomar la altura de mira mh', y llevándola á h'' despues de la semirevolucion del instrumento para observar tambien la mh'': llamando x á la distancia mh del punto del terreno en que está colocada la mira á la horizontal del instrumento, se tendrán las ecuaciones

$$x=mh'-h'h; \qquad x=mh''+h''h:$$

sumando estas dos ecuaciones, haciendo la reduccion recordando la igualdad demostrada de $h'h$ y $h''h$, y despejando, se tiene

$$x=\frac{mh'+mh''}{2} \quad [7],$$

por medio de la cual se determina el punto h.

Con la mira parlante se obtendría este punto del mismo modo, moviendo el tornillo de correccion hasta que la visual marcase la semisuma de las alturas observadas mh' y mh''.

69. Reasumiendo lo que hemos dicho, se puede establecer la siguiente regla práctica para la verificacion y correccion de que nos ocupamos.

Dispuesto el eje verticalmente por la correccion anterior, *se dirige la visual á un punto lejano, ó á una mira cuya altura se anota: se da una semirevolucion exacta al instrumento alrededor de su eje de rotacion y se dirige de nuevo la visual al mismo punto, y si éste queda cubierto por el cruzamiento de las cerdas de la pínula opuesta á la que entonces sirvió de ocular, la visual será horizontal. En el caso contrario, se observa el punto á que va á parar la segunda visual y el que equidista de éste y el anteriormente determinado, ó bien se observa la nueva altura de mira y se marca la altura media entre ésta y la primera, moviendo despues el tornillo de correccion de la pínula del tablero móvil hasta que la visual vaya á parar al punto medio seña-*

lado ó á la altura media marcada en la mira. Conviene repetir la operacion, sobre todo cuando no se usa la mira, por la dificultad de determinar á la simple vista el punto medio con alguna exactitud.

70. **Nivel de pínulas de Chézy**.—Este nivel sólo difiere del anteriormente explicado en que la regla AB (fig. 56; lám. 4) está unida á otra CD por medio de una pieza a provista de una charnela, por la cual pueden acercarse ó separarse las reglas una de otra haciendo girar al tornillo t, que teniendo su tuerca en CD sostiene con su extremo superior á la regla AB.

71. *Correccion del nivel de Chézy*.—Es preciso que la línea ab (fig. 57; lámina 4) que determinan las visuales sea paralela al eje del nivel mn, el cual debe serlo por construccion á la regla AB, ó hacerse que lo sea separando esta regla del resto del instrumento, y corrigiendo el paralelismo como hemos dicho (tomo I, 77 y 82) para el nivel sencillo de aire, empleando el tornillo de correccion particular del nivel.

Suponiendo ahora que existe el paralelismo entre mn y AB, supongamos el nivel en estacion en un punto cualquiera C, y coloquemos dos miras en los puntos P, Q, situados en una misma alineacion con C, y equidistantes de él; llevando la burbuja á su mitad, con lo que ab será horizontal, se determinarán las alturas Pa, Qb.

Dando una semirevolucion al instrumento, y llevando tambien la burbuja á la mitad del tubo, se habrá hecho variar la separacion de las reglas, lo que habrá elevado ó deprimido la regla AB, y por consiguiente la nueva visual $a'b'$ estará más alta ó más baja; pero será paralela á la primera por ser ambas horizontales, y situadas en un mismo plano. La diferencia $Pa'—Qb'$ de las alturas P y Q referidas á la horizontal $a'b'$ será igual á la $Pa—Qb$ de las primeramente referidas á la ab, á causa de ser $aa'=bb'$. Cuando se tenga por lo tanto $Pa—Qb=Pa'—Qb$, estará el instrumento corregido. La diferencia $Pa'—Pa=Qb'—Qb$ es la variacion que ha experimentado la separacion de las reglas al pasar de una á otra posicion en el giro del instrumento, y prueba tambien, cuándo tiene lugar el paralelismo de mn y AB.

Si la línea de visuales fuese inclinada respecto al nivel, segun ab (figura 58; lám. 4), por ejemplo, al horizontar el nivel despues de la semirevolucion tomará la posicion $a'b'$ igualmente inclinada al horizonte que la ab, y elevada en una cantidad cd ó deprimida en otros casos, segun el movimiento dado á las reglas para horizontar la burbuja en la segunda posicion. Tirando por el punto d en que la segunda visual corta al eje de rotacion del instrumento una recta mn paralela á ab, y la horizontal hh', se tendrá (67) $a'h=hm$ y $b'h'=h'n$. Tomando por otra parte las semisumas de las alturas de mira $\frac{Pa+Pa'}{2}$ y $\frac{Qb+Qb'}{2}$, se tendrá $a'a''=a''a$ y $b'b''=bb''$, siendo los puntos medios a'', b'' así obtenidos, de nivel entre sí. Para demostrar esto último, observaremos que de las igualdades que hemos establecido se deduce para el punto a'' la ecuacion

$$a'a'' - a'h = a''a - hm \qquad [8];$$

pero tambien se tiene

$$a'a'' - a'h = ha'' \quad \text{y} \quad a''a = a''m + ma = hm - ha'' + ma,$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion [8], pasando $-ha''$ al primer miembro y reduciendo,

$$2ha'' = ma \qquad [9].$$

Con respecto al punto b'' se deduce igualmente

$$b'h' - b'b'' = h'n - b''b \qquad [10];$$

y como se tiene tambien

$$b'h' - b'b'' = h'b''; \; h'n = h'b + bn \text{ y } b''b = b''h' + h'b,$$

sustituyendo en la ecuacion [10], pasando $-h'b''$ al primer miembro y reduciendo, resultará

$$2h'b'' = bn \qquad [11];$$

y como se tiene $ma = bn$ (Geom Teor. 28), se deduce de las ecuaciones [9] y [11] la igualdad $ha'' = h'b''$. Los puntos a'' y b'' determinarán por lo tanto una recta paralela á hh' y por consiguiente horizontal (tomo primero, 108) ó de nivel aparente.

La diferencia $Pa'' - Qb''$ de las alturas medias será el desnivel de los puntos P y Q, y moviendo por lo tanto el tablero de la pínula hasta que la diferencia de las alturas observadas en las miras sea igual á él, se habrá obtenido la horizontalidad de la visual.

72. La correccion está reducida por lo tanto á *colocar el nivel en estacion en un punto* C *equidistante de otros dos* P *y* Q, *horizontándole por el tornillo que separa ó acerca las reglas, y tomar las alturas* a, b *de dos miras colocadas en* P *y* Q, *mirando alternativamente por los dos taladros de las pínulas. Dando entonces una semirevolucion al instrumento, se horizonta de nuevo por el mismo tornillo, y dirigiendo nuevas visuales se determinan las alturas respectivas* a′, b′. *Si las diferencias* a — b *y* a′— b′ *son iguales, la visual será paralela al eje del nivel. En caso contrario, se hallarán las alturas medias* $a'' = \dfrac{a + a'}{2}$ *y* $b'' = \dfrac{b + b'}{2}$, *y se moverá el tablero de la pínula móvil por su tornillo de correccion hasta que la diferencia de alturas de mira correspondientes á una sola posicion del nivel sea igual á* $a'' - b''$.

Conviene tener presente que la ampolla debe permanecer exactamente horizontal durante la observacion de las alturas de mira en cada una de las posiciones indicadas.

73. *Uso del nivel de Chézy* —Este nivel no proporciona un plano, sino una línea de nivel aparente, y para determinar con él el desnivel entre dos puntos P y Q (fig. 57; lám. 4) es preciso colocarle en la alineacion que ellos determinan, horizontándole por el tornillo que separa una de otra las reglas del instrumento, como ya hemos indicado para la correccion; dirigiendo despues las visuales *ca*, *db* se hallarán las respectivas alturas de mira P*a*, Q*b*, cuya diferencia dará el desnivel entre los puntos P y Q referido á la horizontal *ab* (44).

Si el nivel estuviese fuera de la alineacion de los puntos P y Q, al dirigir la visual al segundo de ellos sería necesario horizontar de nuevo la burbuja, lo que hace variar más ó menos la altura de la visual, resultando las alturas de mira referidas á líneas de distintos planos de nivel aparente; lo que produce errores, que acumulándose, influyen mucho en el resultado de las operaciones. El uso de este nivel, mucho menos cómodo que el anteriormente explicado, es hoy poco comun.

74. **Niveles de aire con anteojo.—Nivel de Lerebours.**— Se compone de un anteojo astronómico AB (fig. 59; lám. 4), descrito ya (tomo I, 237), el cual descansa entre los collares *b* en que terminan unos soportes fijos á la regla metálica CD, uno de los cuales es susceptible sin embargo de subir ó bajar convenientemente en una cierta cantidad por medio del tornillo *s* movido por una llave, haciendo así variable la inclinacion del eje del anteojo con respecto al plano de la regla. El anteojo puede sacarse de los collares y colocarse de nuevo en ellos invertido, de manera que la parte del objetivo vaya á descansar sobre el collar que ocupaba la del ocular en la primera posicion; para lo cual se aflojan los tornillos *b*, que permiten girar á unas aldabillas para dar paso al nivel, las que se vuelven á cerrar cuando el anteojo está colocado de nuevo, oprimiendo los tornillos, los cuales no le permiten entonces otro movimiento que el giro alrededor de su eje de figura dentro de los collares. Puede determinarse una de las infinitas posiciones que en virtud de este giro puede ocupar el tubo del anteojo, moviendo el tornillo *a*, que atraviesa un cilindro ó tambor metálico *c* fijo al soporte, hasta el tope de su extremo con un prisma saliente invariablemente unido al tubo del anteojo: de esta manera, puede hacérsele volver cuando sea necesario en lo sucesivo á la posicion así determinada, moviéndole hasta que tenga lugar el contacto del prisma y el tornillo.

Sobre la regla CD se halla el nivel *n*, provisto de su tornillo *r* de correccion particular como en los niveles de pínulas, é invariablemente unido á ella, y en su parte inferior el eje de rotacion del instrumento, relacionado con una plataforma de tres tornillos *t*, con su tornillo de presion *z* para impedir el giro del instrumento cuando se le aprieta con alguna fuerza. El trípode es tambien el de seis brazos como en el nivel de pínulas.

Algunos niveles tienen en vez del tornillo de presion *z* un sistema de tornillos de presion y de coincidencia (tomo I, 322); pero esta disposicion no es absolutamente necesaria, por no ser preciso fijar con exactitud la posicion de la cerda vertical.

75. *Usos de este nivel.*—Es el mismo que hemos explicado para el de pínulas (63), pudiendo colocar el instrumento en estacion en un punto cualquiera, que á ser posible debe elegirse de modo que esté equistante de aquellos cuyo desnivel se trata de hallar. El plano horizontal á que se refieren las alturas de mira es el descrito por el eje óptico del anteojo, el cual, así como el del nivel, ha de ser perpendicular al eje de rotacion del instrumento, que se dispone verticalmente por los tornillos de la plataforma.

76 El límite del empleo de este nivel depende de la posicion de la burbuja (59) y del alcance del anteojo; así como tambien del tamaño y claridad con que pueden verse las divisiones cuando se usa la mira parlante.

77 **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Centracion de la cerda horizontal.*—Se hace coincidir esta cerda con la imágen de una recta cualquiera que puede ser horizontal de la tablilla de una mira, y se da al anteojo una semirevolucion dentro de sus collares, viendo si la cerda cubre en esta situacion á la misma recta, en cuyo caso ocupará la posicion de un diámetro de la seccion del tubo y estará corregida. En caso contrario, se hará que quede paralela á ella, moviendo la cerda por los tornillos del retículo hasta que haya recorrido la mitad de la separacion de las rectas cubiertas por ella en ambas posiciones del tubo del anteojo. Con la mira, se toman las alturas correspondientes á ambas posiciones, se marca la altura media y se lleva á ella la cerda por el movimiento de los tornillos del retículo.

Puede corregirse tambien la otra cerda del mismo modo, con lo que resultará centrado el anteojo (tomo I, 240); lo que no es preciso en los niveles, aunque puede ser conveniente para emplear la cerda vertical despues de haberla hecho describir un cuarto de revolucion, en el caso de haberse inutilizado la cerda horizontal.

78. 2.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Es la misma que hemos explicado (65) para el nivel de pínulas, corrigiendo por los tornillos *t* y por el *r* de correccion particular del nivel.

79. 3.ª *Horizontalidad del eje óptico del anteojo.*—Se ejecuta lo mismo que la verificacion y correccion análogas en el nivel de pínulas (67), dirigiendo la visual á una mira colocada á 200 ó 300^m del punto de estacion, y marcando la altura correspondiente á la graduacion que cubre la cerda horizontal del anteojo; sacándole despues de los collares para colocarle de nuevo en ellos invertido (74), y dando una semirevolucion al instrumento para dirigir la visual á la mira y ver si marca la misma altura. Si no, se corrije por la altura media de la mira y el tornillo *s* que mueve el soporte *b* del anteojo.

80. 4.ª *Determinacion de la posicion perfectamente horizontal de una de las cerdas del retículo.*—Se hace girar al anteojo alrededor de su eje de figura dentro de los collares hasta que la cerda sea horizontal á la vista, y se mueve el instrumento alrededor de su eje de rotacion hasta que el cruzamiento de las cerdas cubra un punto bien determinado: continuando el mismo movimiento, se observa si los demás puntos de la cerda horizontal van cubriendo sucesivamente al mismo punto, durante todo el tiempo que permanece en el campo del anteojo, en cuyo caso la cerda será perfectamente horizontal. Cuando esta circunstancia no se verifique, se moverá el anteojo dentro de los collares en el sentido conveniente, hasta hallar una posicion en la cual la cerda cubra constantemente al mismo punto. Para determinar esta posicion, se mueve el tornillo a (figura 59; lám. 4) hasta el contacto con el prisma del tubo del anteojo, como hemos indicado (74). En las observaciones conviene asegurarse de la existencia de este contacto, que establece la perfecta horizontalidad de la cerda (tomo I, 553).

81. **Nivel de Dollond.**—El tubo del nivel de ampolla está unido en este instrumento al anteojo terrestre AB (fig. 60; lám. 5), descrito en el tomo primero (236), por medio de una charnela, que permite variar la posicion relativa del eje óptico del anteojo y el del nivel, moviendo por medio de una pequeña palanca unas roldanas de tuerca, que recorriendo la longitud del tornillo r fijo al tubo del anteojo hacen subir ó bajar la pieza metálica en que termina el tubo del nivel. Tambien en este instrumento puede girar el anteojo con el nivel unido á él alrededor de su eje de figura dentro de los collares en que descansa, y estos pueden abrirse ó cerrarse con auxilio de las clavijas c, permitiendo así el que pueda sacarse el anteojo de los collares para colocarle de nuevo en ellos invertido.

El eje del anteojo puede variar de inclinacion con respecto á la regla CD en que se elevan los soportes b, por medio de las roldanas de tuerca y el tornillo s.

La regla CD se ensancha en su parte media para dar cabida á una brújula pequeña a dividida en grados, y cuya línea norte-sur se halla en direccion de la longitud de la regla. La parte descrita se une al trípode (tomo I, 344) por medio de una plataforma de cuatro tornillos t (tomo primero, 332).

82. *Uso de los sistemas de tornillos de correccion en el nivel de Dollond.*—Para hacer uso de las roldanas y los tornillos r y s, se afloja la tuerca superior, se da movimiento á la inferior hasta lograr la posicion que se desee, oprimiendo entonces ambas tuercas para conservarla.

83. *Disposiciones que presentan algunos niveles de Dollond.*—En vez de las roldanas s, tienen algunos niveles un tornillo que se pone en movimiento por medio de una llave, como en el descrito (74) ó bien que tiene cabeza fija; esta última disposicion es la más desventajosa por la facilidad con que al operar puede tocarse á la cabeza del tornillo y descorregir el instrumento.

Los niveles más modernos del mismo autor están dispuestos como el de Lerebours (74), con plataforma de tres tornillos y nivel de ampolla independiente del anteojo, siendo entonces por lo tanto idénticas las correcciones.

84. *Uso del nivel de Dollond.*—Es el mismo que el del nivel de Lerebours (75), horizontando la ampolla en direccion de dos tornillos de la plataforma, colocándole despues en la direccion de los otros dos y horizontándole por ellos, y continuando así hasta que en ambas posiciones la ampolla marque la horizontalidad.

85. **Verificaciones y correcciones.—Primer método.**—1.ª *Verificacion.—Centracion del anteojo.*—Es la explicada (77).

86. 2.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Se coloca el anteojo en direccion de dos tornillos de la plataforma y se horizonta por ellos la ampolla, dándole una semirevolucion alrededor del eje de rotacion del instrumento; y si entonces la ampolla queda horizontal, el eje del nivel será perpendicular al de rotacion del instrumento, y estará por lo tanto corregido. En caso contrario se corregirá la desviacion de la burbuja, mitad por el tornillo *r* (fig. 60; lám. 5) y mitad por los de la plataforma, repitiendo esta operacion hasta conseguir la perpendicularidad de los ejes. Dando despues un cuarto de revolucion al nivel, se le horizonta por los otros dos tornillos de la plataforma, con lo que el eje de rotacion del instrumento quedará vertical y el nivel horizontal en todas sus posiciones. El fundamento de esta correccion es enteramente análogo al que hemos dado á conocer (65).

Esta correccion puede hacerse tambien por el tornillo *s* y los de la plataforma, sobre todo en los instrumentos en que la disposicion del *s* facilita su uso, como en los que ya hemos citado en que es un tornillo de cabeza fija.

87. 3.ª *Horizontalidad de la visual.*—Esta verificacion exige que el eje óptico *ab* (fig. 61; lám. 5), ya corregido (85), sea perpendicular al *vz* de rotacion del instrumento, y por consiguiente paralelo á la regla *cd*, que es por construccion perpendicular á *vz*; la verificacion y correccion son enteramente las mismas que hemos indicado (67 y 79), empleando el tornillo *s* que mueve el soporte del anteojo. Como en este movimiento la ampolla habrá variado, se la horizonta de nuevo por su tornillo *r* de correccion particular, y entonces será paralela al eje del anteojo, si su eje *mn* está en el plano de los ejes *ab* y *vz*, porque se verifica un caso particular de una propiedad demostrada (tomo I, 105). Para asegurarnos de que este paralelismo existe, se hace girar al anteojo dentro de sus collares en la extension que permite observar la burbuja y viendo si ésta permanece horizontal; si no fuera así, habria que corregir lateralmente la posicion del eje de la ampolla por el tornillo *z* (fig. 60; lám. 5), hasta obtener la horizontalidad durante el expresado movimiento. La razon en que esto se funda es la expuesta (tomo I, 524).

88. **Segundo método.**—Pueden hacerse las correcciones por un méto-

do más breve que el que antecede y sin necesidad de la observacion de puntos lejanos; todo lo cual puede ser conveniente en circunstancias dadas. El órden en que se ejecutan es el siguiente:

1.ª *Correccion del retículo*.—Se hace del mismo modo que en el primer método (85).

89. 2.ª *Paralelismo del eje óptico del anteojo y el eje del nivel de ampolla.*—Se horizonta el nivel por dos tornillos opuestos de la plataforma, y sacando el anteojo de los collares se le coloca de nuevo en ellos invertido, y si la ampolla permanece tambien horizontal, los ejes son paralelos. Si no sucede así, se corrige la mitad de la desviacion por el tornillo de correccion del nivel y la otra mitad por los indicados tornillos de la plataforma, invirtiendo de nuevo el anteojo y repitiendo la correccion hasta que el nivel quede horizontal en dos posiciones consecutivas del anteojo. El eje del nivel será entonces horizontal (tomo I, 524), y se le dispondrá paralelamente al del anteojo, como ya hemos dicho tambien en el método primero (87).

90. 3.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Se procede del mismo modo que hemos dicho (86), corrigiendo por medio del tornillo *s* (fig. 61; lám. 5), que mueve el soporte del anteojo, y los de la plataforma. Como por esta correccion resulta *mn* horizontal en todas sus posiciones, tambien lo será su paralela *ab*, que determina con ellas el plano de nivel aparente.

91. **Nivel de Chézy.**—Este instrumento tiene el tubo de la ampolla unido al del anteojo y dispuesto en todo como en el nivel de Dollond (84), y los soportes que llevan los collares están invariablemente unidos á una regla que forma cuerpo con el arco metálico *a* (fig. 62; lám. 5) dentado en su canto exterior y susceptible de girar con la parte descrita del instrumento alrededor de un eje proyectado en *c*, cuando se pone en movimiento el tornillo sin fin *t*, cuya hélice engrana con los dientes del arco.

El eje *c* está sostenido por dos montantes paralelos que descansan sobre el extremo superior ensanchado de una espiga *b* ligeramente cónica, que se introduce en el pié del instrumento y es el eje alrededor del cual gira todo él. Para que este giro tenga lugar, es preciso aflojar un tornillo de presion que atravesando la meseta del trípode oprime con su extremo la espiga *b*, y entonces puede girar el instrumento con movimiento rápido ó de *aproximacion*: para el movimiento lento ó de *coincidencia*, hay que apretar el tornillo de presion, y mover por medio de la llave *r* el eje de un piñon cuyos dientes engranan con los que presenta el tambor *z*. Este tambor forma cuerpo con los montantes del eje *c*, y la armadura del piñon *r* con la espiga *b* fija al trípode por el tornillo de presion.

Existen algunos niveles, sobre todo alemanes, construidos por este sistema, cuyo uso no deja de ser bastante expedito; pero estos instrumentos están poco generalizados hoy en España.

92. *Uso del nivel de Chézy.*—Se coloca en estacion apreciando á la

vista la verticalidad del eje de rotacion del instrumento, se afloja el tornillo de presion que le sujeta para dirigir la visual á la mira, apretándole despues y moviendo el tornillo r para hacer coincidir con ella el extremo de la visual. Para tomar la altura, es preciso horizontar préviamente el nivel por el tornillo t; operacion que hay que repetir para cada altura que se observe en la misma estacion. Esta última circunstancia puede producir un error, que se desprecia en la práctica por ser una fraccion de milímetro en el caso más desfavorable, y que viene á ser casi nulo cuando al poner el instrumento en estacion se tiene la costumbre de disponer el eje de rotacion próximamente vertical, como hemos indicado.

En efecto, sea c (fig 63; lám. 5) el eje de rotacion del arco y la parte superior del instrumento, cb el de rotacion de este último, que es perpendicular por construccion á la regla dd', y ésta paralela al eje aa' de rotacion del anteojo: supongamos que el nivel mn es tambien paralelo á dd' y que cb coincide exactamente con la vertical vz del punto c. En esta disposicion es evidente que la ampolla permanecerá horizontal en todas las posiciones girando alrededor de cb, y que aa' describirá el plano de nivel aparente como en los niveles anteriormente explicados.

Pero si cb (fig. 64; lám. 5) forma un ángulo con la vertical del punto c, la visual ad describirá un plano inclinado perpendicular al eje de rotacion cb, y solo será horizontal en una de sus posiciones (tomo I, 107), que corresponderá al plano de nivel aparente proyectado segun ah: en otra posicion cualquiera, el eje óptico del anteojo estará dirigido segun una oblícua ad perpendicular á bc, y al horizontar la ampolla del nivel por el tornillo que mueve el arco graduado, a recorre un arco aa' y ad toma la posicion horizontal $a'd'$, hallándose la visual en el plano de nivel aparente proyectado segun esta última recta, diferente del ah, y que asimismo varía para cada posicion ocupada por el plano de los ejes del anteojo y el nivel; resultando las alturas referidas á distintos planos de nivel aparente. Para calcular el error $e=ma'$ que así resulta de la inclinacion del eje, se tiene en el triángulo rectángulo amc

$$am^2 = ca^2 - mc^2;$$

pero como es $ca=r$, que es el rádio del arco aa' y que tiene un valor constante en el instrumento, y $mc=r-e$, sustituyendo en la ecuacion anterior, desarrollando el cuadrado de $r-e$ y restándole de r^2, simplificando y despreciando el término e^2 que es siempre muy pequeño, resulta

$$am^2 = 2 \times r \times e,$$

y por último

$$am = \sqrt{2 \times r \times e}.$$

Si suponemos al error e un límite, que será el de apreciacion de las alturas de mira, $0^m,001$ por ejemplo, y sustituimos en la ecuacion última este valor, así como el $0^m,08$ que es el que generalmente tiene r en los niveles, se tendrá

$$am = \sqrt{2 \times 0^m,08 \times 0,001} = 0^m,0126\,;$$

y si se observa que es $mc = 0^m,08 - 0^m,001 = 0^m,079$, se comprenderá que es necesario muy poca costumbre de juzgar á simple vista de la verticalidad de una recta, para disponer el eje de manera que á una altura de cerca de 8^{cm} tenga lugar una desviacion de más de un centímetro, y que siendo siempre menor la separacion de la vertical, el error en la altura observada no llegará al límite asignado de un milímetro.

93. **Verificaciones y correcciones.**—Están reducidas en este instrumento á la centracion del retículo (77) que es conveniente ejecutar para ambas cerdas, puesto que no siendo el eje de rotacion del instrumento perfectamente vertical en todas sus posiciones, no puede ser bien horizontal el plano de una de las cerdas; y al paralelismo del eje del nivel con relacion al del anteojo y á la regla, que lo son entre sí por construccion.

Para esta verificacion puede seguirse el procedimiento empleado (89) con el nivel de Dollond, corrigiendo por el tornillo particular del nivel y el de movimiento del arco y la parte superior del instrumento alrededor del eje c (fig. 62; lám. 5), ó mejor aún el que consiste en dirigir la visual á una mira, horizontando el nivel por el tornillo t y marcando la altura de mira Ah' (fig. 65; lám. 6) correspondiente á esta posicion del nivel. Si se da una semirevolucion al instrumento alrededor de su eje general de rotacion vz, que difiere poco de la posicion vertical, tomará al cabo de este movimiento una posicion próximamente simétrica, quedando el nivel en la $m'n'$, que diferirá poco de la horizontal mn, y acabándole de horizontar por el tornillo del arco se hallará el instrumento en las mismas condiciones que si hubiese girado alrededor de la vertical de c, siendo simétricas (67 y 68) las posiciones del eje ab del anteojo con relacion á la horizontal eh del punto e. Tomando por lo tanto la nueva altura de mira Ah'', se determinará el punto h por la expresion $\dfrac{Ah' + Ah''}{2}$, y llevando la visual á este punto, el eje óptico del anteojo será horizontal; no habrá más que horizontar la ampolla del nivel por su tornillo de correccion particular.

Conviene que la mira se halle á la distancia de las mayores tiradas que se espere hacer con este nivel, para reducir todo lo posible el error que resulta (92) de no ser el eje perfectamente vertical.

94. **Nivel de Egault.**—Los primitivos niveles de este autor no difieren del que hemos dado á conocer (74) sino en la plataforma, que es la de dos tornillos y resortes opuestos, cuya descripcion hemos expuesto (tomo primero, 336), y que se usa como la de cuatro tornillos del nivel de Do-

llond (84), colocando sucesivamente el tubo de la ampolla en la direccion de cada tornillo y el resorte opuesto. Las correcciones son análogas á las explicadas para los niveles que acabamos de citar.

El modelo, bajo que se construyen en el dia estos niveles se compone de dos reglas k, l (fig. 66; lám. 5), cuya separacion puede variar por el movimiento del tornillo s girando alrededor de una charnela fija á la regla inferior, la cual puede girar con toda la parte superior del instrumento alrededor de un eje general de rotacion con movimiento rápido ó lento á voluntad por el sistema de tornillos p, x de presion y de ajuste ó coincidencia (tomo I, 318 y 322), y se apoya en una plataforma de tres tornillos t.

La regla superior k lleva consigo los soportes ó collares de un anteojo A, que puede girar entre ellos alrededor de su eje de figura y es susceptible de tomar una posicion determinada por el tope del tornillo d, que atraviesa el tambor c, con el reborde saliente b unido al tubo del anteojo. Sobre los collares de este se dispone la armadura del nivel n, provisto de su tornillo r de correccion particular; esta armadura puede separarse del anteojo levantándola por el boton z, y colocarla sobre él afirmándola á unos montantes, que se elevan sobre la regla k, por medio de unos pasadores verticales fijos á la misma armadura y de unas clavijas m de brazos desiguales. Cerrados los pasadores con los brazos menores de las clavijas, permiten libremente el giro del anteojo entre sus collares; y con los brazos mayores impiden todo movimiento. Para separar por completo la armadura del nivel es preciso abrir enteramente las clavijas.

95. *Verificaciones y correcciones.*—1.ª *Centracion del anteojo y en particular de una de las cerdas.*—Es la explicada (77) para el nivel de Lerebours.

96. 2.ª *Paralelismo del eje del nivel y la línea de apoyo de su armadura sobre el tubo del anteojo.*—Se coloca el anteojo en direccion de uno de los tornillos de la plataforma y se horizonta por él la ampolla del nivel n; se levanta despues el nivel, abriendo las clavijas y haciendo uso del boton z, y se le vuelve á colocar con sus extremos invertidos. Si la burbuja queda entonces equidistante de las marcas del tubo de cristal en que está encerrada, existirá el paralelismo indicado. En caso contrario se corrige por el tornillo r la mitad de la desviacion que la burbuja haya experimentado, acabando de horizontarla por el de la plataforma. Se repite la operacion hasta que la inversion no produzca cambio alguno en la posicion de la burbuja.

97. 3.ª *Paralelismo del eje del nivel y el de figura del anteojo en las dos posiciones que este último puede tomar por la inversion de sus extremos entre los collares.*—Esta verificacion exige una perfecta igualdad entre los collares, que suele alterarse con el uso, y hace precisa la intervencion de un instrumentista que haga desaparecer esta causa de error. Se asegura la existencia de la igualdad de los collares horizontando el nivel, sacando el anteojo de los collares para colocarle de nuevo en ellos invertido, le-

vantando el nivel para colocarle de nuevo sin invertirle respecto á su posicion primera, y viendo si la ampolla acusa la misma horizontalidad.

98. 4.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Es la explicada (65), haciendo la correccion por los tornillos *t* de la plataforma y el *s* que hace variar la posicion de las reglas *l* y *k*. Hecha esta correccion, el eje del anteojo y el del nivel permanecerán horizontales durante todo el movimiento de rotacion del instrumento alrededor de su eje vertical.

99. 5.ª *Determinacion de la posicion perfectamente horizontal de una de las cerdas del retículo.*—Esta verificacion, explicada ya (80), y la correccion á que da lugar, se ejecutan del mismo modo empleando en caso necesario el movimiento del tornillo *a* dentro del tambor *c* hasta el contacto con la pieza *b* en la posicion conveniente del anteojo.

100. *Usos del nivel de Egault.*—La disposicion particular de este nivel permite tomar exactamente las alturas de mira por una doble observacion, que se ejecuta dirigiendo la visual y tomando la altura correspondiente á la posicion horizontal de la ampolla, haciendo girar despues al anteojo dentro de sus collares hasta que la cerda corregida vuelva á quedar horizontal, y levantando la armadura del nivel para colocarla de nuevo sobre sus apoyos con los extremos invertidos; si la burbuja marca entonces alguna pequeña desviacion de la horizontal, se corrige por el movimiento del tornillo *s*, y se toma la nueva altura de mira. La semisuma de las dos alturas observadas será la altura verdadera, exenta de todo error que no sea el que puede provenir de la desigualdad de los collares del anteojo, que ya hemos dicho cómo puede conocerse, é indicado la necesidad de hacer que desaparezca.

101. **Nivel de Troughton.**—El tubo *n* (fig. 67; lám. 6) de la ampolla de aire está empotrado invariablemente en el del anteojo, el cual descansa sobre unos soportes que se apoyan en la regla metálica *c*. La inclinacion del eje del anteojo respecto á esta regla, puede variar por medio de un sistema de tres tornillos *s*, dispuesto á la parte inferior de cada uno de los soportes, al cual se hace subir ó bajar moviendo los tornillos laterales del sistema correspondiente, despues de haber aflojado el del centro, que se vuelve á apretar para fijar la posicion del sistema cuando se ha colocado el soporte á la altura conveniente. Para el uso de los tornillos *s* es preciso dejarlos al descubierto, separando una armadura metálica que los cubre, con objeto de librarlos de algun golpe que pudiera descorregir el instrumento.

Una brújula *b* descansa sobre cuatro columnas en la regla *c*, la cual se une á la plataforma de cuatro tornillos *t* por medio de una roldana *m*, que girando independientemente de la plataforma á que está unida, permite á una rosca que forma cuerpo con ella el que se atornille en la tuerca fija de una pieza metálica *a*, que en su mitad tiene la regla *c*.

El pequeño tubo que lleva la lente ocular puede ser reemplazado por otro, el cual tiene esta lente en su parte superior y un espejo inclinado 45° al horizonte: esta disposicion hace aparecer á la mira situada horizontalmente (tomo I, 205) y vista de arriba abajo, lo cual hace más cómodas las observaciones.

102. **Verificaciones y correcciones.**—Están reducidas en este instrumento á hacer que el nivel pueda proporcionar la verticalidad del eje general de rotacion, y á que la visual sea paralela al plano horizontal descrito entonces por el eje del nivel. Entre otros varios métodos que se han propuesto para las correcciones, nosotros indicaremos los dos siguientes, que en nuestro concepto son los que deben emplearse por su generalidad, y porque son susceptibles de dar resultados suficientemente aproximados.

103. **Primer método.**—*Verificacion primera.*—*Que el eje de rotacion sea vertical.*—Se ejecuta de la manera que hemos dado á conocer (86), corrigiendo en caso necesario la posicion de la burbuja por los tornillos *s* y los de la plataforma.

104. 2.ª *Que la visual sea paralela al plano horizontal descrito por el eje del nivel.*—Se coloca el instrumento en estacion en un punto C (figura 68; lám. 6), equidistante de otros dos A, B, en cada uno de los cuales se coloca una mira. Dirigiendo visuales ca, cb á estas miras, despues de haber dispuesto verticalmente el eje del instrumento con auxilio de los tornillos t de la plataforma, y observando la ampolla, la diferencia $Aa-Bb$ de las alturas observadas dará el desnivel $Ap=d$ entre A y B (20): trasladando despues el instrumento á B, se le dispone de modo que puesto el anteojo en direccion á la vertical de A se halle el ocular en la del punto B, y tomando la altura Bm del ocular sobre el punto B se marca en la mira de A una altura $An=Bm+d$, y se mueven los tornillos del retículo en caso necesario, hasta que la visual vaya á parar exactamente á n, con lo que la visual será horizontal.

Si el nivel se hubiese colocado en A, la altura que se tomaría en la mira de B seria la diferencia entre el desnivel hallado d y la altura del ocular sobre A.

105. La inexactitud en la determinacion de la altura del ocular sobre el punto correspondiente del terreno, hace preferible en la práctica el verificar la correccion de otra manera: despues de haber determinado el desnivel d como hemos indicado anteriormente, se coloca el instrumento en un punto D (fig. 69; lám. 6) lo más cerca del B que sea posible, en atencion á que pueda leerse claramente con el anteojo la altura de mira Bm dada por la visual que suponemos inclinada segun cm; tomando despues la altura An de la otra mira, se observa si la diferencia de las alturas An y Bm es igual á d, en cuyo caso la visual sería horizontal. Pero si no sucede así, como en el caso que nos ocupa, añadiendo á la altura Bm el desnivel $Ap=d$, se obtiene la altura An' de la horizontal que pasa por m; y moviendo los tornillos del retículo hasta que la mira señale esta altura, la visual habrá tomado la posicion cn', que se acerca más que cn á la horizontal del punto c. Dirigiendo de nuevo la visual á la mira más próxima, se tendria la altura Bm', y añadiéndola el desnivel d se obten-

dria para la correccion del retículo la altura Ar de la horizontal que pasa por m'; llevando la visual á r por los tornillos del retículo, la visual se acercaría más que antes á la horizontal de c; y al cabo de algunos tanteos, la diferencia de alturas sería igual al desnivel dado con un error menor que el límite de apreciacion de las alturas de mira, en cuyo caso la posicion de la visual estará corregida.

Conviene que la mira A se halle todo lo distante que permita el alcance del anteojo.

106. Cuando se puede disponer de una tabla de aguas tranquilas, como un estanque grande, un lago... se clavan dos ó tres estacas de modo que queden sus cabezas á flor de agua, determinando así una línea horizontal, á la que puede referirse la correccion del nivel. En efecto, colocando miras sobre las estacas y disponiendo el instrumento en estacion á desiguales distancias de ellas, se corrige la posicion de la cerda horizontal del retículo por medio de sus tornillos, empleando tanteos análogos á los que hemos indicado en el párrafo precedente, hasta lograr que marque iguales alturas alturas en las miras.

107. **Segundo método.**—La primera verificacion es la misma que en el anterior; y respecto á la segunda puede seguirse un procedimiento susceptible de dar mayor exactitud, pero más largo que el que hemos dado á conocer. Consiste en colocar miras en los extremos A, B (fig. 70; lámina 6) de una alineacion dividida en tres partes iguales AC, CE, EB: colocando en el punto de division C el instrumento, que suponemos descorregido, y disponiendo verticalmente su eje, se toman las alturas de mira Aa, Bb, cuya diferencia dará un desnivel inexacto, que representaremos por d; y pasando el nivel al otro punto E, se obtendrá del mismo modo la diferencia de las alturas de mira Aa' y Bb', que darán el desnivel inexacto d'. Por otra parte, el desnivel exacto puede hallarse calculando la diferencia de las alturas medias $\frac{Aa + Aa'}{2}$ y $\frac{Bb + Bb'}{2}$, que nos darán dos puntos a'', b'' de nivel entre sí: en efecto, concibiendo las horizontales que pasan por c y e, se tiene

$$mm' = ma + aa'' + a''m';$$

pero como es tambien $aa'' = a''a'$ en virtud de haber determinado a'' con esta condicion, que es la de la altura media, y por otra parte $a''a' = a''m' + m'a'$, sustituyendo en la expresion anterior resultará

$$mm' = ma + 2a''m' + m'a' \qquad [13]:$$

con respecto al punto b'' se tiene de una manera análoga

$$nn' = nb + 2b''n' + n'b' \qquad [14];$$

y como se tiene $mm'=nn'$, equidistancia de las horizontales de c y e, y además $ma=n'b'$ y $m'a'=nb$ por las igualdades de los triángulos amc y $en'b'$, $m'a'e$ y cnb, las expresiones [13] y [14] darán por último $a''m'=b''n'$, y los puntos a'', b'' determinarán una horizontal (71).

Para hacer la correccion necesaria, será preciso mover los tornillos del retículo hasta que la visual vaya á parar á m' ó á n', para lo que es necesario conocer el valor de $a'm'$ ó de su mitad $n'b'$, que pueden hallarse en funcion de las alturas de mira observadas. En efecto, para la primera estacion del instrumento se tiene como anteriormente hemos visto

$$d = \text{A}a - \text{B}b = \text{A}m + ma - \text{B}n - nb,$$

y llamando x á la expresion $ma=n'b'$ de la correccion que ha de experimentar la altura de mira más próxima al nivel, se tendrá $nb=m'a'=2x$, por lo que la expresion anterior se convertirá en

$$d = \text{A}m - \text{B}n - x \qquad [15];$$

para la segunda estacion del nivel se tiene de una manera análoga

$$d' = \text{A}m' - \text{B}n' + x \qquad [16];$$

y restando la primera de estas expresiones [15] y [16] de la segunda, resultará

$$d' - d = (\text{A}m' - \text{B}n') - (\text{A}m - \text{B}n) + 2x;$$

observando que $\text{A}m'-\text{B}n'$ y $\text{A}m-\text{B}n$ son iguales por ser ambas la expresion del desnivel verdadero entre los puntos A y B, y despejando x en la expresion que resulta de esta consideracion, se obtendrá

$$x = \frac{d' - d}{2}.$$

Una vez hallado el valor $x=n'b'$, y por consiguiente el de su duplo $m'a'$, se restarán respectivamente de las alturas de mira $\text{B}b'$ y $\text{A}a'$ de la segunda estacion, y si la diferencia entre los resultados $\text{B}n'$ y $\text{A}m'$ es igual al verdadero desnivel hallado anteriormente por las alturas medias de a'' y b'', será una prueba de que la visual está alta y habrá que bajar la cerda horizontal del retículo hasta que coincida con la division n'. Para comprobacion puede dirigirse la visual á la primera mira con objeto de ver si marca la altura $\text{A}m'$ calculada.

Cuando restando x y $2x$ de las alturas de mira $\text{B}n'$ y $\text{A}m'$ de la segunda estacion, la diferencia entre los resultados obtenidos no da el desnivel verdadero, será prueba de que la visual está demasiado baja, y se tendrán las alturas correspondientes á la horizontal de e sumando x y $2x$ con las alturas respectivas, y entónces la diferencia de los resultados dará el verdadero desnivel, toda vez que las operaciones estén bien ejecutadas.

108. **Nivel de Gravatt's.**—El anteojo de este instrumento tiene una

lente de gran diámetro y de pequeña distancia focal, lo que permite acortar bastante la longitud del tubo con ventaja de su uso en los terrenos quebrados. Difiere del de Dollond en que el tubo de la ampolla está dispuesto sobre el del anteojo, pudiendo hacerse variar la inclinacion relativa de ambos por medio de roldanas de tuerca *r* (fig. 71; lám. 6), que pueden subir ó bajar por los tornillos que constituyen los montantes del nivel *n*. La pieza *b* encierra la brújula, cuyo limbo forma cuerpo con la aguja imantada como en la brújula de Kater (tomo I, 422); la lectura de los rumbos se refiere á un índice marcado en la caja y se facilita con el auxilio de un microscopio armado de su varilla, que se introduce en el taladro que presenta una pieza cilíndrica unida á la *b* á las inmediaciones del índice. Un espejo *e* situado sobre el tubo del anteojo puede variar de inclinacion y sirve para observar si durante la lectura de la mira experimenta la burbuja alguna variacion; lo que es conveniente tener en cuenta, sobre todo cuando se opera en terrenos movedizos. El ejercicio hace que el observador se acostumbre á mirar al mismo tiempo el espejo y la mira. El segundo nivel n' tiene por objeto contribuir á colocar el trípode de modo que el eje de rotacion del instrumento quede próximamente vertical al colocarle en estacion.

109. **Verificaciones y correcciones**.—1.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento*.—Se ejecuta como en el nivel de Dollond (86), corrigiendo por los tornillos *r* y *t*.

110. 2.ª *Centracion del anteojo*.—La circunstancia de no poder girar el anteojo dentro de los collares exige un método particular de verificacion, que consiste en colocar á distancias iguales y en una misma alineacion tres miras B, B′, B″ (fig. 72; lám. 6), determinando desde *c* como hemos indicado (104) los puntos de nivel n, n' y desde c' los m y m'; añadiendo entonces á la altura $B''n'$ la diferencia nm' de las observadas en la mira B′, se tendrá el punto m'' de nivel con los m y m'. Trasladando el instrumento á un punto A próximamente situado en la alineacion de las miras para poder dirigir las visuales á todas ellas, se tomarán las alturas de mira Bb, $B'b'$, $B''b''$, y calculando las cantidades $m''b''$, $m'b'$, mb, se deberá verificar la ecuacion

$$m''b'' = mb = 2\,(m'b' - mb),$$

si el anteojo está centrado; porque entonces todas las visuales tiradas á distancias diferentes están en una sola recta ab'' determinada por la direccion única de la visual (tomo I, 240), y los triángulos semejantes $ba'b''$ y bab' dan $b''a' = 2\,b'a$, que es la ecuacion anterior. Pero en el caso de que esta no se verifique, se deducirá que la visual es indeterminada, y será preciso mover convenientemente los tornillos del retículo hasta que al cabo de cierto número de tanteos tenga lugar la condicion establecida.

111. 3.ª *Horizontalidad de la visual*.—Se emplean los procedimientos

indicados para el nivel de Trougthon (104 y siguientes), corrigiendo por los tornillos *s* (fig 71; lám 6). Como despues de esta correccion habrá variado la posicion del nivel *n*, se le vuelve á horizontar por medio de los tornillos *r*.

112. **Nivel con dos anteojos.**—Está dispuesto este instrumento como el nivel de Chézy explicado (70), sustituyendo á la regla y las pínulas de aquel un tablero y dos anteojos paralelos entre sí y á un nivel situado entre ellos, provistos los primeros de sus tornillos de correccion para hacer variables las inclinaciones de sus ejes con respecto al plano del tablero. Un segundo nivel cuyo eje está dirigido perpendicularmente al del primero, sirve para dar al tablero una posicion perfectamente horizontal (tomo I, 58).

113. *Verificacion y correccion.*—Este instrumento exige para su debido empleo en las operaciones de nivelacion que los ejes de los anteojos sean paralelos, y que se hallen á la misma altura respecto al plano del tablero; para lo cual se corrige cada uno de los anteojos de la misma manera que en el nivel de Troughton con los tornillos de correccion del anteojo, y en la posicion horizontal de ambos niveles, despues de haberle centrado como el de Gravatt's (110). Con respecto á la igualdad de altura de las visuales sobre el tablero, que se comprueba dirigiendo por ambos anteojos visuales á una misma mira, se podria hacer que marcasen en ella exactamente la misma altura siempre que uno de los anteojos pudiera moverse paralelamente á sí mismo hasta alcanzar la que señala el otro, con el auxilio de dos tornillos de correccion correspondientes á sus extremos; pero si esto no sucede, no suele tenerse en cuenta la diferencia que puede resultar, en atencion á lo próximos que son generalmente los límites en que puede variar.

114. Cuando la plataforma es de tres ó cuatro tornillos y los niveles tienen los de correccion particular que les corresponden, las verificaciones y correcciones son las mismas que las del nivel de Gravatt's (109), horizontando despues de todo el nivel trasversal por sus tornillos de correccion particular.

115. *Uso del nivel con dos anteojos.*—Se le dispone en estacion en la alineacion de los puntos cuyo desnivel se trata de hallar, y se dirigen visuales alternativamente con ambos anteojos á las miras colocadas en ellos. La única ventaja que presenta este nivel sobre el de Chézy, de no tener que hacer girar al anteojo, lo que puede alterar un tanto la altura de la visual, está ventajosamente presentada en los niveles más modernos, por lo que el de dos anteojos es hoy un objeto de pura curiosidad.

116. **Nivel-círculo de Lenoir.**—El anteojo de este instrumento está fijo invariablemente entre dos prismas metálicos *p*, *p'* (fig. 73; lám. 6) perfectamente iguales, los cuales descansan sobre un platillo circular *ac*, que forma cuerpo con la plataforma de tres tornillos *t*. El anteojo con sus prismas puede girar sobre el platillo alrededor de una espiga cilíndrica que se introduce en el centro del mismo, y que impide todo movi-

miento de traslacion. Otra espiga igual y simétricamente colocada en su parte superior se introduce en un taladro cilíndrico que presenta la regla en que está armado un nivel *n* provisto de su tornillo *r* de correccion particular, la cual se apoya además en las caras superiores de los prismas. El nivel con su armadura puede invertirse de posicion con respecto á sus extremos, y tambien separarse del resto del instrumento; permitiendo entonces levantar del mismo modo el anteojo y volverle á colocar cambiando la posicion de la espiga y de las caras superiores de los prismas, que se hacen venir á la parte inferior; lo que equivale á dar una semirevolucion exacta al anteojo alrededor de su eje de figura. Para que el instrumento que hemos descrito reciba propiamente el nombre de nivel-círculo necesita ir acompañado de un círculo azimutal, dispuesto como en el grafómetro de anteojo (tomo I, 490).

117. *Verificaciones y correcciones.*—1.ª *Paralelismo del eje del nivel y la cara superior del platillo.*—Se levanta el nivel y el anteojo, colocando el primero directamente sobre el platillo en direccion de dos tornillos de la plataforma, horizontándole por ellos; invirtiendo entonces la posicion de los extremos del nivel, se corrige en caso necesario la desviacion que haya experimentado la burbuja, mitad por el tornillo *r* y mitad por los de la plataforma, invirtiendo de nuevo el nivel y repitiendo la misma operacion hasta que quede horizontal en ambas posiciones.

118. 2.ª *Verticalidad del eje de rotacion.*—Se coloca el nivel en la direccion del tercer tornillo y se horizonta por él, con lo que el eje quedará vertical y el platillo horizontal (65).

119. 3.ª *Centracion de una de las cerdas del retículo.*—Se dispone el anteojo sobre el platillo, y se observa la altura que marca sobre una mira: invirtiendo entonces el anteojo, como hemos indicado (116), se observa si marca la misma altura; moviendo en caso contrario la cerda por los tornillos del retículo hasta que marque la semisuma de las alturas observadas (68).

120. 4.ª *Horizontalidad de la visual.*—Esta verificacion exige que los prismas del anteojo sean exactamente iguales; porque entonces sus puntos medios estarán á igual altura con respecto al platillo, y la visual será horizontal (tomo I, 111). Se verifica la igualdad de los prismas colocando el nivel sobre ellos, y viendo si la burbuja queda perfectamente horizontal. El instrumento estará entonces completamente corregido.

121. *Uso del nivel-círculo.*—Cuando el nivel cumple con todas las condiciones indicadas en los párrafos que preceden, puede usarse como los demás niveles. Cuando los prismas son desiguales, es preciso obtener cada altura de mira por una doble observacion, dando al anteojo una semiresolucion alrededor de su eje de figura é invirtiendo la posicion de los extremos del nivel (116) para proceder á la segunda lectura de mira, y cuidando de horizontar para ambas la ampolla del nivel por los tornillos *t* de la plataforma.

122. **Otros diferentes niveles.**—Descritos los niveles de más impor-

tancia y de un uso más generalizado, haremos mencion de otros varios entre los muchos que se han ideado, por la sencillez de su manejo ó por alguna particularidad notable que ofrezcan en su uso ó en sus correcciones.

123. *Nivel de agua de Mariotte.*—Se compone de una caja *ab* (fig. 74; lámina 6) de hoja de lata ó de madera llena de agua hasta cierta altura, y de un prisma flotante *c*, que sostiene á una columna *m* perpendicular á él. Un anteojo *d* encerrado en un collar se apoya en la columna y le es perpendicular por construccion.

El eje del anteojo será horizontal cuando el peso del aparato flotante esté equilibrado de manera que la cara superior del prisma *c* sea perfectamente horizontal; pero como es casi imposible que esta condicion se verifique, el nivel de Mariotte se debe usar colocándole á distancias iguales de los puntos cuyo desnivel se trate de hallar, en atencion á que dependiendo la posicion del eje óptico de la disposicion relativa de las distintas partes del aparato flotante, que no varía en la observacion de los objetos equidistantes, la inclinacion de dicho eje será la misma para ambas observaciones.

124. *Niveles de agua de Mr. Blondat.*—El ingeniero francés Mr. Blondat ha introducido en el nivel de agua ordinario (49) una modificacion, que consiste en adaptar á los frascos los extremos de un segundo tubo de comunicacion, que la establece entre el aire que ocupa la parte superior de los mismos frascos, evitando el derrame del líquido en los movimientos del instrumento. Reducido éste á pequeñas dimensiones, dando, por ejemplo, 0,m4 de longitud á los tubos de comunicacion, se obtiene un *nivel de mano*, que puede usarse colocándole á la altura de la vista y marcando en el terreno el punto en que termina la visual: el desnivel entre este punto y el ocupado por el observador será igual á la altura que tiene sobre este último la línea de nivel determinada por el instrumento.

125. Otra innovacion que el mismo ingeniero ha propuesto, consiste en dar al aparato un movimiento ascendente ó descendente, por medio de una barra dentada perpendicular al tubo inferior de comunicacion y formando cuerpo con él, y de un piñon, cuyos dientes engranan con los de la barra, movido por una manivela. Acompaña á este instrumento un jalon de 0,m5 de altura fija, el que se coloca sucesivamente en los puntos cuyo desnivel se trata de determinar, dirigiendo visuales sucesivas á sus extremidades superiores por la línea de nivel aparente, que se ha hecho subir ó bajar hasta alcanzarlas. El camino recorrido por la barra para pasar de una posicion á otra es el desnivel buscado: este camino se mide por las divisiones que en ambas posiciones enrasan con el tablero que termina el trípode del instrumento, y que sirve de línea de fé. Los límites de apreciacion están comprendidos entre las alturas á que puede observarse la línea de nivel aparente del instrumento, y son por lo tanto muy reducidos.

126. *Nivel de agua y tubo de goma elástica.*—Se compone de un tubo

flexible c (fig. 75; lám. 7) terminado por dos tubos e de cristal del mismo diámetro y perfectamente calibrados, los cuales están fijos á unas reglas d, en las que se hallan marcadas por medio de unas escalas las alturas de sus distintos puntos sobre los A y B en que se colocan las reglas.

Terminan los tubos por su parte superior en unos embudos de hoja de lata, que sirven para llenar el instrumento con facilidad, y al mismo tiempo de depósitos cuando el agua tiende á rebosar á causa de una ascension repentina en alguno de los tubos. Estos tienen 2^m de altura, y el de comunicacion c la longitud de 50^m. Un resorte en espiral encerrado en el tubo de goma elástica y en toda su longitud, tiene por objeto hacer conservar á este la forma cilíndrica y la longitud asignada.

Para servirse de este instrumento es preciso llenarle de agua hasta que alcance próximamente á la mitad de la altura de los tubos de cristal, y haciendo que el tubo de goma permanezca extendido y sin presentar al paso del agua pendientes y contrapendientes. Se coloca despues una de las reglas en el punto A y la otra en el B, cuyo desnivel con A se quiere hallar, y despues de establecido el equilibrio del líquido, se observan las alturas Aa y Bb que marca en las escalas respectivas; su diferencia Bm será el desnivel pedido.

El uso de este instrumento es por lo que acabamos de establecer el mismo que hacian los antiguos del *Chorobates* (48); y como la cantidad de agua encerrada en él es constante, tambien lo será la de los tubos mientras la que encierra el instrumento sea la misma: por lo tanto la suma de las alturas lo es tambien; lo que da un medio de comprobacion en operaciones elementales sucesivas.

127. *Nivel de tubo de goma elástica con mercurio y agua*.—El nivel de agua que acabamos de describir puede modificarse disponiendo un tubo de cristal ab (fig. 76; lám. 7) de una manera análoga á los de la figura 75 (lám. 7): el tubo c de goma elástica termina por el otro extremo en una caja cilíndrica d. En el tubo de cristal y parte del c se ha introducido una columna de mercurio destinada á equilibrar la del agua que llena el resto de c y parte de la caja d.

Para usar este nivel se coloca la caja d en el punto más elevado, y en la parte más baja la que lleva el tubo de cristal, y cuando los líquidos están en reposo, la altura ab de la columna de mercurio que ocupa el tubo de cristal, equilibra una columna de agua ed, cuya altura es 13,5 veces mayor que ab, toda vez que la densidad del mercurio es trece veces y media mayor que la del agua, y segun una ley de Hidrostática, *las alturas de dos columnas líquidas heterogéneas que se equilibran, están en razon inversa de las densidades de los líquidos*. Así, si tratamos de hallar la altura x de la columna de mercurio que equilibra la de un metro de altura en la del agua, tendremos la proporcion

$$1^m : x :: 13,5 : 1 ;$$

de la que resulta

$$x = \frac{1^{m}}{13,5} = 0,^{m}074.$$

La escala del tubo *h* está dividida en partes que cada una tiene $0,^{m}074$ de magnitud real, y numeradas $1,^{m}$ $2,^{m}$.... Estas están subdivididas en décimas y centésimas partes que representan decímetros y centímetros. En virtud de esta disposicion, la sola lectura de la graduacion marcada por el extremo superior *b* de la columna de mercurio, dará el desnivel entre los puntos que ocupan las cajas *a* y *d*.

128. *Nivel de perpendículo de Para.*—Sobre dos caballetes unidos por la traviesa *a* (fig. 77; lám. 7) se hallan los soportes *b*, *b'* de un anteojo, que tiene en la mitad de su tubo un prisma *r* invariablemente unido á él. En una de las caras laterales del prisma, y formando con él un solo cuerpo, está dispuesta una caja *c*, en la cual se observa una ranura con la que debe coincidir el cordon del perpendículo *p*. Esta coincidencia se obtiene haciendo subir ó bajar uno de los extremos del tubo del anteojo por el movimiento del tornillo de que el soporte correspondiente está provisto, y que queda oculto en la figura; y cuando tiene lugar, el eje óptico del anteojo debe ser perfectamente horizontal.

129. Para asegurarnos de que esta circunstancia se verifica, se dirige la visual á una mira marcando la altura correspondiente; se levanta el anteojo de los caballetes, colocándole de nuevo en ellos de modo que el extremo superior de la caja *c* vaya á la parte inferior al otro lado del que aparece á la vista en la figura, con lo cual vendrá el anteojo á tomar la posicion que ocuparía si hubiese dado una semirevolucion alrededor de su eje de figura; se observa la nueva altura de mira, y se dá al eje en caso necesario la posicion horizontal (79) por medio del tornillo que acompaña al soporte (128). Se repite la misma operacion hasta conseguir la horizontalidad perfecta. La direccion que corresponde entonces al cordon del perpendículo, y que deberá marcarse en la caja *c*, es la que corresponde en lo sucesivo á la posicion horizontal de las visuales. Puede emplearse este nivel sin corregirle, tomando para cada altura de mira la media entre las que se observen de la manera que hemos indicado para la correccion explicada.

130. Para determinar por medio de este instrumento el desnivel entre dos puntos, se le coloca en la alineacion que ellos determinan, á un mismo lado de ambos y á la distancia conveniente del más próximo para hacer claramente la lectura de la mira. La diferencia de alturas obtenidas para una mira colocada sucesivamente en dichos puntos, será el desnivel que existe entre ellos.

131. *Nivel de Huyghens.*—El anteojo *a* (fig. 78; lám. 7) está suspendido por el punto medio de la longitud de su tubo, y con auxilio de una cadena, de una argolla fija á un prisma que forma cuerpo con la armadura de madera *c* dispuesta en forma de cruz. Esta armadura termina por su parte inferior en la caja *d*, que descansa en la meseta del trípode

destinado á sostener todo el aparato. Una cadena enteramente igual á la que sostiene el anteojo está unida á él por su parte inferior; el peso *b* puede suspenderse de la cadena por medio de una argolla, constituyendo entonces el perpendículo del instrumento, cuya posicion vertical puede hacerse más estable llenando la caja *d* de un líquido en que el peso *b* queda en parte sumergido.

El uso de este instrumento es el mismo que el del nivel de Para (130). La verificacion es tambien la misma (129), pudiendo dar al eje del anteojo la semirevolucion entonces indicada, quitando el peso *b*, cambiando la posicion de las anillas extremas de las cadenas, y colocando de nuevo el peso en la que ha ido á ocupar la parte inferior. Pudiera ejecutarse la correccion en caso necesario, siempre que la forma del peso *p* permita hacer variar la posicion de su centro de gravedad, haciéndole girar hasta conseguir la posicion horizontal del eje del anteojo. Se conseguirá este objeto haciendo que termine en un tornillo la espiga de la argolla, y practicando la tuerca correspondiente en el peso *b*, el cual debe tener la forma de un tronco de cono cortado por un plano en direccion de dos generatrices. Cuando no pueda hacerse la correccion se emplea el método de las alturas medias (129).

132. *Nivel de Rœmer.*—Es una caja prismática de madera ó de hoja de lata terminada en sus extremos en un ocular y un objetivo por los cuales se dirigen las visuales: el ocular *a* (fig. 79; lám. 7) está formado por un tubo, en el que se halla practicado un taladro, y el objetivo por otro taladro circular de mayor diámetro abierto en el extremo *b* del prisma. Delante del ocular se halla fijo el retículo *r*. En el interior de la caja hay una regla *mn* terminada por uno de sus extremos en la horquilla *m*, la cual está provista de una cerda trasversal, y por el otro en la regla *np* que constituye un perpendículo, y el prisma triangular *n*, que se apoya por su arista inferior en dos resaltos que presentan las caras laterales de la caja, y sirve para mantener en equilibrio el sistema de la horquilla y las reglas *mn*, *np*, perpendiculares entre sí.

Disponiendo la caja de modo que el equilibrio del sistema tenga lugar libremente, el perpendículo toma la posicion vertical y la regla *mn* la horizontal: entonces las cerdas paralelas del retículo y de la horquilla *m* determinan un plano horizontal, que es el de nivel aparente á que deben referirse las alturas de mira.

133. Para nivelar con este instrumento no habrá por lo tanto más que colocarle á la altura de la vista, y dirigiendo la visual á la mira por el taladro del ocular, mover la caja hasta que la cerda del retículo cubra exactamente á la de la horquilla: la línea de la mira en que ambas se proyectan entonces señalará la altura correspondiente; y hallando del mismo modo la de otro punto, la diferencia de alturas será el desnivel entre ellos.

134. Para la verificacion y correccion de este nivel se determina la diferencia de alturas de mira de dos puntos del terreno, colocándose en

estacion á iguales distancias de ellos, y viendo si resulta la misma desde otro que no equidiste, en cuyo caso estará corregido el instrumento. Si así no sucediera, sería preciso operar á distancias iguales ó variar convenientemente la posicion del centro de gravedad del perpendículo cuando esto es posible (131).

135 *Nivel de anteojo de Mr. Porro.*—La disposicion de este nivel permite operar con mucha prontitud, y es por otra parte muy sencilla: se reduce á una plancha circular metálica, á la que está fijo un caballete destinado á sostener una pieza, á la que va unido por su parte superior el tubo de la ampolla provisto de sus tornillos de correccion particular, y á uno de los costados de la misma pieza un anteojo telemétrico (tomo I., 798 y 805), que puede girar alrededor de un eje horizontal para invertir las posiciones del ocular y el objetivo: el caballete es bastante elevado á fin de que permita este movimiento, y las dos posiciones opuestas del anteojo están determinadas por unos cilindros unidos al tubo del mismo, que se introducen en cajas de la misma forma practicadas en la pieza en que termina el caballete por su parte superior, y se fijan apretando un tornillo de presion convenientemente dispuesto.

Un sistema de tornillos de presion y de coincidencia sirve para el movimiento rápido ó lento del anteojo y el nivel, juntamente con la pieza á que están unidos, alrededor de un eje horizontal sostenido en el caballete.

La plancha en que este último se apoya se coloca horizontalmente observando un nivel esférico y poniendo en movimiento dos cuñas, dispuestas así como el nivel de la manera que hemos indicado para la brújula del mismo autor (tomo I, 436).

136 Para las verificaciones de este instrumento se dispone verticalmente el eje de rotacion, que es perpendicular por construccion á la plancha circular, horizontando el nivel esférico por medio de las cuñas de la plataforma, y se da á la visual una posicion horizontal (67), haciendo uso de la inversion del anteojo (135), y empleando para la correccion necesaria el tornillo de coincidencia de movimiento lento de la pieza que lleva consigo al anteojo y al nivel; horizontando despues este último por su tornillo de correccion particular.

137 El uso del nivel de Porro está reducido á disponer verticalmente el eje de rotacion del instrumento por el nivel esférico, y cuidar de horizontar el anteojo y el nivel á cada altura de mira que se observe, valiéndose del indicado tornillo de coincidencia.

138 *Nivel de anteojo excéntrico de Gambey.*—Se compone de dos niveles paralelos (n, n') (fig. 80; lám. 7), situados á los extremos de un eje (b, b') alrededor del cual pueden girar en planos perpendiculares á él. Está armado este eje en una horquilla que forma cuerpo con otro eje d, perpendicular al primero, y alrededor del cual puede girar la parte del instrumento que hemos descrito, juntamente con el anteojo y el limbo (l, l'), con movimiento rápido ó lento á voluntad en virtud del sistema de tornillos (a, a') (c, c') de presion y de coincidencia. Se apoya el eje d en

un montante (s, s') invariablemente unido á una plataforma de tres tornillos.

139. La verificacion está reducida á la verticalidad del eje de rotacion de todo el instrumento, que se obtiene con el nivel superior como ya hemos explicado (66) haciendo uso del tornillo de coincidencia (c, c') y los de la plataforma, ó bien de estos últimos, y el de correccion particular del nivel. Dando despues una semirevolucion al anteojo, el nivel inferior irá á colocarse á la parte superior: horizontándole por el tornillo (c, c') se observa si conserva la horizontalidad en todas sus posiciones alrededor del eje de rotacion del instrumento; y en caso contrario se le corrige colocándole como sabemos en dos direcciones opuestas, y haciendo desaparecer por mitades con su tornillo particular y el (c, c') la desviacion que se observe en la burbuja.

140. Las alturas de mira se obtienen con el nivel de Gambey por una doble observacion, dirigiendo la visual á una mira, horizontando el nivel superior por el movimiento del tornillo (c, c') y anotando la altura que se observe; dando despues una semirevolucion al anteojo alrededor del eje d, y otra al instrumento para poder dirigir de nuevo la visual á la misma mira, se horizonta el nivel que ocupa entonces la parte superior por el tornillo (c, c'), anotando la nueva altura de mira. La semisuma de ambas alturas será la verdadera, independientemente del error de excentricidad del anteojo y el de centracion del retículo.

El limbo (l, l') cuando está dividido sirve para la apreciacion de los ángulos zenitales como el del teodolito del mismo autor (tomo I, 575).

141. *Nivel de Emy.*—Este instrumento, cuyo uso está poco extendido en razon á que apenas existe alguno que otro modelo, está dispuesto de manera que el anteojo puede girar alrededor de su eje de figura materializado en uno de sus extremos por una espiga sujeta á la armadura del objetivo y apoyada en una pieza delgada en que termina uno de los soportes del anteojo: este último puede girar por el otro extremo en un collar unido al soporte situado á la parte del ocular. La colocacion de la espiga delante del objetivo no impide observar la mira, pues no hay lugar á la formacion de la imágen de aquella, atendiendo á su mucha proximidad á la lente objetiva.

El tubo de la ampolla puede girar alrededor de su eje de figura durante el indicado movimiento del anteojo, permitiendo así observar la burbuja en todas las posiciones que este adquiere; el eje de rotacion está constituido por dos espigas situadas en las extremidades del tubo, las cuales se apoyan en unos pequeños soportes, que tambien pueden levantarse para invertir la posicion de los extremos del nivel. La inclinacion del eje de la ampolla con respecto al eje de rotacion del tubo, puede hacerse variar por medio de tres tornillos, dos superiores y uno inferior, que modifican la situacion del tubo de cristal que encierra la ampolla, relativamente al eje de rotacion unido al tubo metálico; y ambos ejes pueden variar de inclinacion respecto al del anteojo por un tornillo vertical de correccion análogo á los explicados en los niveles ordinarios: otro tornillo horizontal sirve para mover lateralmente el eje del nivel, como en los niveles de Dollond (87)

Los soportes del anteojo están fijos á los extremos de una regla unida á una plataforma de tres tornillos

142. El uso de este instrumento es el mismo que el de los niveles ordinarios de anteojo Las verificaciones y correcciones son las siguientes:

1.ª *Verticalidad del eje de rotacion.*—Se ejecuta como en los niveles ordinarios por los tornillos de la plataforma y el que mueve el soporte del anteojo.

2.ª *Paralelismo del eje de la ampolla y el de rotacion del tubo del nivel.*—Se verifica levantando los soportes de este último para colocarle de nuevo en ellos invertido, y se corrige la mitad de la desviacion de la burbuja por los tornillos que modifican la posicion del tubo de cristal que la contiene, acabando de horizontar por el tornillo que mueve el soporte del anteojo.

3.ª *Horizontalidad del eje del anteojo.*—Se horizonta el nivel por el tornillo que mueve el soporte del anteojo; se dá una semirevolucion á éste alrededor del eje general de rotacion del instrumento, y se observa si la burbuja permanece en la posicion horizontal, lo que indicará que el paralelismo buscado existe. En caso contrario, se corrige la mitad de la desviacion de la burbuja por el mismo tornillo, acabando de horizontarle por el de correccion particular del tubo del nivel.

4.ª *Paralelismo del eje del nivel con respecto al del anteojo.*—La disposicion particular del tubo del nivel permite observar la ampolla durante todo el movimiento del anteojo alrededor de su eje de figura para cerciorarse de que existe el paralelismo de que nos ocupamos (87), haciendo variar en caso contrario la posicion del eje del tubo del nivel por el tornillo que le mueve lateralmente, hasta que la ampolla acuse la horizontalidad en todas las posiciones que ocupe durante el giro del anteojo

143 *Instrumentos de Planimetría usados como niveles.*—Los instrumentos de Planimetría que se hallan provistos de limbo zenital pueden emplearse como niveles, corrigiéndoles perfectamente y asegurando el anteojo en la posicion que marca la posicion horizontal de su eje de figura. Cuando el anteojo no puede girar entre los collares que le sostienen, como sucede entre otros con la *brújula de limbo zenital* (tomo I, 396), la *pantómetra de limbo zenital* (tomo I, 507) y el *teodolito de Combes* (tomo I, 554), es preciso empezar por centrar el anteojo con respecto á la cerda horizontal del retículo por el procedimiento que hemos dado á conocer (110), empleando para la correccion necesaria el tornillo ó tornillos que mueven á la indicada cerda horizontal.

El teodolito de Troughton (tomo I, 517 y 528) se usa como el nivel de Porro (137) disponiendo verticalmente el eje de rotacion por los niveles de la plancha superior, y cuidando de que la ampolla del que acompaña al anteojo sea perfectamente horizontal al tomar cada altura de mira, para lo que se emplea el tornillo de coincidencia del sistema destinado al movimiento del limbo zenital.

144. **Nivel de reflexion**.—Este sencillo instrumento, debido á M. Burel, se compone de un espejo *e* (fig. 81; lám. 7), azogado por las dos caras en su mitad de la izquierda, barnizada la de la derecha en una de ellas de negro y en la otra de rojo para distinguirlas, y dispuesto en una armadura metálica *c*. Esta armadura termina por su parte inferior en una varilla y el perpendículo *p*, que tiene la forma de un tronco de cono cortado por un plano en uno de sus lados, la cual permite variar la posicion del centro de gravedad del peso *p*, haciéndole subir ó bajar á lo largo de la varilla, que termina con este objeto en una rosca; para lo cual se aflojan los tornillos *t*, apretándolos despues que se ha dado á *p* la posicion conveniente. El tornillo *s* puede hacer ligeramente variable la inclinacion del espejo relativamente á la armadura.

La parte que hemos descrito del instrumento, puede girar alrededor de un eje fijo á la armadura, cuyos extremos se apoyan en una caja cilíndrica de metal. Esta caja es interior y de seccion concéntrica con la *ab*, la cual está dividida en dos partes: la inferior *b*, que está invariablemente unida á la interior, y la superior *a* que se tiene en la mano durante las observaciones, y que puede ir provista de una anilla para suspender el instrumento de un caballete. Fija la parte *a*, la *b* puede girar 180° alrededor del eje de figura comun de las cajas, llevando consigo al eje de la armadura y á los espejos, los cuales pueden presentarse alternativamente á la vista del observador.

El giro de 180° está determinado por lo que permite la disposicion de la ranura y el tope del tornillo que se ven en *r*.

Para evitar la accion del viento sobre el perpendículo, se atornilla á la caja *b* otra que le recubre, cerrada por su extremo inferior, quedando sólo descubierto entonces el espejo *e*. Para el trasporte se le cubre por medio de una tapa cilíndrica que se corre moviendo la roldana en que termina por su parte superior la caja *a*.

145. *Uso del nivel de reflexion*.—Suspendida de un caballete la parte *a* de la caja cilíndrica ó teniéndola en la mano, de modo que obre libremente el peso *p*, el espejo *e* toma la posicion vertical. Colocándose delante de él el observador de modo que vea directamente una mira colocada en el punto cuyo desnivel con el de estacion se trata de determinar, al mismo tiempo que la imágen *o'* (fig. 82; lám. 7) de la pupila *o* de uno de sus ojos, causada por la reflexion en el espejo, hará subir ó bajar la tabla de la mira hasta que el punto de mira *m* esté en la recta determinada por los puntos *o* y *o'*. La diferencia entre la altura de mira observada y la distancia vertical de *o* al punto de estacion será el desnivel buscado. En efecto, la recta *oo'* perpendicular al plano del espejo (tomo I, 205), que es vertical por hipótesis, será una horizontal (tomo I, 102).

En la práctica se halla el desnivel entre dos puntos haciendo estacion en otro cualquiera, desde el cual se observan, como hemos dicho, las alturas de mira correspondientes á los primeros: la diferencia de estas alturas será el desnivel entre ellos.

146. Cuando en el espejo se haya trazado una línea de fé, como sucede en algunos niveles, se coloca la vista de modo que la imágen de la pupila se halle en esta línea, haciendo que la horizontal de la mira se coloque en prolongacion de ella.

147. *Verificacion y correccion.*—El uso de este instrumento exige que cuando el perpendículo obre libremente, el espejo sea perfectamente vertical: lo que tendrá lugar cuando despues de haberle hecho girar 180° (144) la visual vaya á parar al mismo punto de mira *m* que en la primera posicion. Pero si es inclinado al horizonte como el *e* (fig. 83; lám. 7) la visual determinada por la posicion *o* de la pupila y su imágen *z* dará el punto de mira *m*, y despues de la semirevolucion indicada, en que tomará la posicion *e'* simétrica de la primera con relacion á la vertical *v* del eje *a* de la armadura, la visual *o'z'* determinará el punto de mira *m'* diferente del primero. Observando ahora que los ángulos *vae'*, *mah'* son iguales por tener el mismo complemento, será fácil demostrar la igualdad de los *mah'*. *h'am'*, obteniendo, como ya hemos indicado (67), *mh* =*h'm'*. Será preciso por lo tanto variar la inclinacion del espejo hasta que la visual vaya á parar á *h'*; lo que puede conseguirse en parte por el tornillo *s* (figura 84; lám. 7); pero es preferible hacer toda la correccion por el movimiento del peso *p*, como hemos dicho (144), apretando despues los tornillos *t* para fijar la posicion del espejo.

Tambien puede emplearse para la correccion el procedimiento seguido (134).

148. *Nivel de Mariotte.*—El físico Mariotte ideó un nivel sencillísimo fundado en el principio de la reflexion: consiste en una caja cilíndrica *c* (figura 84; lám. 7) abierta por la parte superior, cuya pared interior está cubierta de cera á fin de evitar la adherencia que con ella pudiera experimentar el agua con que ha de llenarse la caja, y cuya superficie toma por la misma razon una forma convexa bastante pronunciada. Colocando á cierta distancia una mira, se hace subir ó bajar su tablilla, que deberá tener dos líneas de fé *m*, *b*, hasta tanto que esta última se halle en la tangente *ab* en el punto más alto de la superficie líquida; lo que tendrá lugar cuando la línea superior *m* vista directamente y su imágen *m'* se hallen á distancias iguales de *b*. El rayo *ba* no puede reflejarse por ser tangente; el *ma* se refleja segun *av*, y colocada la vista del observador en *v*, verá la imágen *m'* en prolongacion del rayo *va* (tomo I, 206).

El uso de este instrumento no está generalizado; conviene, sin embargo, conocerle, por la facilidad con que se le obtiene en cualquier ocasion á falta de otro nivel, para una operacion que no requiera exactitud.

CAPITULO III.

Problemas de nivelacion.

Problema general de la nivelacion.—Estaciones de nivel.—Nivelacion simple y nivelacion compuesta.—Marcha que se sigue en las operaciones de la nivelacion compuesta.—Acotacion de los puntos del terreno.—Primer método.—Registro de la nivelacion.—Cálculo de las cotas.—Comprobacion de los cálculos.—Segundo método.—Observacion general acerca de los puntos que deben acotarse.—Comprobacion de las operaciones de nivelacion.—Obstáculos que suelen presentarse en la resolucion del problema general de la nivelacion.—Métodos particulares para la determinacion del desnivel entre dos puntos.—Método de la nivelacion recíproca.—Método de Egault.—Problemas particulares de nivelacion.—1.° Hallar un punto, cuyo desnivel con otro dado sea igual á una cantidad determinada.—2.° Dado un punto de la superficie del terreno, hallar otro que esté de nivel con el primero.—3.° Trazar en el terreno una línea cuyos puntos se hallen en un mismo plano horizontal.—4.° Hallar el punto más alto ó más bajo de una línea dada.—5.° Hallar el punto más alto ó más bajo de una superficie.

149. **Problema general de la nivelacion.**—Hemos dicho (1) que la nivelacion tiene por objeto hallar el desnivel que existe entre dos puntos dados. Este problema es, por lo tanto, el que se resuelve en general por las operaciones de la nivelacion.

Cuando los puntos á que nos referimos están bastante próximos para poderse divisar á la vez desde otro en el cual se coloca el instrumento en estacion, y por otra parte la inclinacion del terreno que entre ellos media permite que la visual alcance á la mira del punto más alto sin ir á terminar más abajo de su pié, y no pase más elevada que la mira colocada en el más bajo, basta la observacion de las dos alturas de mira para hallar el desnivel de que se trata.

En efecto, sean A y B (fig. 85; lám. 8) los puntos del terreno cuyo desnivel se pretende hallar, y *ab* la traza del plano horizontal ó de nivel aparente dado por el instrumento: A*a* será la altura de mira que corresponde al punto A más elevado, y B*b* la del más bajo B. El desnivel que se trata de hallar será la diferencia B*b*—A*a* de las dos alturas. Para demostrarlo, concibamos por A y B las trazas de los planos horizontales Am y Bn, y siendo An el desnivel entre los puntos A y B, tendremos

$$An = Bm = Bb - mb,$$

y observando que es tambien $mb = Aa$, se tendrá por último

$$An = Bb - Aa$$

Obsérvese que la menor altura de mira corresponde siempre al punto más elevado

Si se tiene por ejemplo $Aa = 0,^{m}632$ y $Bb = 1,^{m}237$, la diferencia $0,^{m}605$ será el desnivel entre A y B; ó bien, lo que A estará más alto que B, ó B más bajo que A

150. **Estaciones de nivel.—Nivelacion simple y nivelacion compuesta.**—En la operacion que acabamos describir se ha obtenido el desnivel entre los puntos sin variar la posicion del instrumento: se dice entonces que se ha obtenido por una sola *estacion de nivel* ó por *nivelacion simple,* y cuando hay necesidad de trasladarle á fin de obtener el desnivel por una série de estaciones simples, recibe la operacion el nombre de *nivelacion compuesta.*

Las estaciones distintas que constituyen una nivelacion compuesta, se distinguen entre sí por un número de órden, que se refiere á aquel en que han tenido lugar. A cada estacion se refieren asimismo todas las operaciones que en ella hayan sido ejecutadas.

151. **Marcha que se sigue en las operaciones de la nivelacion compuesta.**—Para hallar el desnivel entre dos puntos A y E (fig. 86; lámina 8) que no satisfacen á las condiciones establecidas (149), se hará estacion en un punto M, colocando la mira en el punto A de partida y otra en un nuevo punto B, cuyo desnivel con A pueda hallarse por medio de una nivelacion simple. La diferencia de alturas a y a' dará el desnivel entre A y B (149). Trasladando el instrumento á otro punto de estacion N, se observarán del mismo modo las alturas b y b' correspondientes al punto B y á otro C elegido con relacion á B con las mismas condiciones que este con respecto á A en la primera estacion. Así se continuará, tomando desde cada punto de estacion del instrumento la altura correspondiente á la última mira colocada en la estacion anterior y la de otro nuevamente elegido, hasta llegar á una estacion Q, en la que el punto que en ella ha de elegirse pueda ser el E, cuyo desnivel con el de partida se pretende hallar.

Observando la marcha que acabamos de indicar, notaremos que á cada estacion corresponden dos alturas de mira, una de las cuales está tomada dirigiendo la visual á la mira que el observador ha dejado á su espalda para buscar el punto en que ha hecho estacion, y otra que corresponde á un nuevo punto que elige para colocar la mira segunda en la direccion del punto E en que la operacion ha de terminar. La primera se denomina en la práctica *mira de espalda* ó *nivelada atrás*; la segunda *mira de frente* ó *nivelada adelante*. Se vé por lo tanto que las alturas a, b, c, d, que ocupan los lugares impares en el sentido AE en que suponemos ejecutada la operacion son niveladas atrás; y niveladas adelante las a', b', c', d', de lugar par. Tambien pudieran llamarse *niveladas primeras* ó *primeros términos* á las alturas de mira de lugar impar, y *niveladas segundas* ó *segundos términos* á las de lugar par.

En cada uno de los puntos intermedios B, C y D se toman dos alturas de mira: una que es segundo término ó mira de frente de una de las estaciones, y otra que es primer término ó mira de espalda de la estacion que sigue. En el punto de partida A solo se toma una altura, que es la de espalda de la primera estacion, y en el de término E otra, que es la de frente de la última.

La diferencia de nivel que resulta de cada estacion ó de cada nivelacion simple de las que constituyen una nivelacion compuesta, se halla siempre por la diferencia aritmética entre las alturas de mira correspondientes.

152. Para relacionar entre sí estas diferencias, de manera que podamos obtener fácilmente y siguiendo una regla general el desnivel entre los puntos dados, supondremos que el punto de partida es el más bajo, y llamaremos tambien *diferencias subiendo* á aquellas en que la mira de espalda sea mayor que la de frente, como sucede á las que corresponden á las estaciones M y Q, en las que el terreno sube yendo de A á E, que es el sentido en que suponemos ejecutada la operacion; y *diferencias bajando* á aquellas en que se verifique lo contrario, como sucede con las de las estaciones N y P.

Hechas estas hipótesis, si todas las diferencias fuesen subiendo, es evidente que sumándolas encontraríamos la diferencia total, y que en el caso de hallar una diferencia bajando, habrá que restarla de la suma ya obtenida.

Así, el punto B estará más elevado que A en una cantidad igual á la diferencia $a—a'$ de las alturas observadas en la primera estacion; el punto C más bajo que B en la diferencia $b'—b$, y más elevado que A en la cantidad

$$(a-a')-(b'-b)$$

Desde la estacion P se observará que el punto D está más bajo que C en la diferencia $c'—c$, y como C estaba más alto que A la cantidad $(a—a')—(b'—b)$, D respecto de A estará más alto en la cantidad

$$(a-a')-(b'-b)-(c'-c).$$

En la estacion Q en que podremos observar la mira del punto E en que ha de concluir la operacion tendremos que estando E más alto que D la cantidad $d-d'$, y habiendo visto que D está más alto que A en la

$$(a-a')-(b'-b)-(c'-c),$$

E estará más alto que A en la

$$(a-a')-(b'-b)-(c'-c)+(d-d'),$$

que será el desnivel que buscamos.

Verificando las operaciones algébricas indicadas en esta expresion, se tendrá sucesivamente:

$$a-a'-b'+b-c'+c+d-d';$$

$$(a+b+c+d)-(a'+b'+c'+d');$$

pero $a+b+c+d$ es la suma de las miras de espalda y $a'+b'+c'+d'$ es la de las miras de frente; luego *la diferencia de nivel que existe entre los puntos extremos de una nivelacion compuesta se obtiene hallando la suma de las miras de espalda, así como la de las miras de frente, y restando la segunda de la primera.*

Si la primera suma es mayor que la segunda, la diferencia será positiva, é indicará que el punto E está más alto que el de partida A, conforme á la hipótesis hecha para establecer la relacion que resuelve el problema

Si las sumas son iguales, A y E serán puntos de nivel.

Si es mayor la segunda, la diferencia es negativa, é indica que el punto de término está más bajo que el de partida.

153. *Ejemplos.*

1.° Sean:	$a = 3{,}528;$		$a' = 0{,}837$
	$b = 1{,}216;$		$b' = 2{,}404$
	$c = 0{,}842;$		$c' = 2{,}528$
	$d = 3{,}057;$		$d' = 1{,}224$
Sumas	8,643		6,993
	6,993		
Diferencia ...	1,m650		

2.° Sean:	$a = 3{,}128;$		$a' = 0{,}437$
	$b = 0{,}216;$		$b' = 2{,}454$
	$c = 0{,}842;$		$c' = 3{,}128$
	$d = 3{,}057;$		$d' = 1{,}224$
Sumas.......	7,243		7,243
Deferencia......	0.		

3.° Sean: $a = 2{,}140$;	$a' = 0{,}437$	
$b = 0{,}216$;	$b' = 2{,}025$	
$c = 0{,}719$;	$c' = 3{,}137$	
$d = 2{,}821$;	$d' = 1{,}456$	
Sumas.......... 5,896	7,055	
	5,896	
Diferencia....................	$1{,}^{m}159$	

En el primer ejemplo, E está $1{,}^{m}650$ más alto que A.

En el segundo, E está de nivel con A.

En el tercero, E está $1{,}^{m}159$ más bajo que A.

154. El problema general de la nivelacion se puede resolver del mismo modo, cualquiera que sea el camino seguido en la operacion; conviene, sin embargo, elegirle lo más corto que sea posible y por terreno menos accidentado. Cuando no se presente uno que cumpla con estas condiciones, creemos preferible, entre ciertos límites, sacrificar la primera condicion á la segunda.

155. **Acotacion de los puntos del terreno.**—Cuando además del desnivel entre dos puntos dados, se quiere hallar los que relativamente á ellos tienen un número mayor de puntos, es conveniente determinar la altura de cada uno de ellos respecto á un plano dado de posicion. Estas alturas no serán otra cosa que las *cotas* de los mismos puntos, referidas al plano dado que será por lo tanto el *plano de comparacion* (Acot. 4). El problema se resuelve como el de la nivelacion compuesta, teniendo en cuenta que es preciso colocar la mira en todos aquellos puntos cuya cota se quiere conocer, aun cuando así no lo exigiera la marcha establecida para la resolucion del problema general, y anotar cuidadosamente cada uno de estos puntos, para no confundir las cotas que han de corresponderles. Para acotar los puntos del terreno pueden seguirse dos métodos, que expondremos á continuacion: el primero es preferible por la facilidad con que se presta á la comprobacion de los cálculos; el segundo es más expedito.

156. **Primer método**.—Halladas las alturas de mira a, a', b, b'.... (fig 86; lám. 8), siendo A, B, C .... los puntos cuyas cotas tratamos de determinar, la cota que corresponde al punto de partida A es en general arbitraria, y conviene elegirla de manera que el plano de comparacion pase por debajo ó por encima de todos los puntos del terreno que tratamos de acotar con objeto de que todas las cotas resulten de un mismo signo (Acot. 8). Bastará para conseguirlo asignar al punto A una cota mayor que la diferencia calculada, ó que se juzgue debe haber entre este punto y el más bajo, en caso de que el plano de comparacion haya de ser inferior á los puntos dados. Cuando hubiese de ser superior á ellos, se tendria en cuenta el desnivel de A con el más elevado. Si en el curso de las operaciones resultase una cota negativa, se obviaría este inconve-

niente añadiendo á todas las cotas ya calculadas una misma cantidad, que para mayor facilidad debe ser un múltiplo de 10.

Otras veces el plano de comparacion está dado por las condiciones del problema, como cuando las cotas han de referirse al nivel del mar (24).

Sea AA′ la cota arbitraria del punto de partida. Para hallar la que corresponde al punto B, tendremos la expresion

$$BB' = AA' + BF;$$

y para los siguientes:

$$CC' = BB' - BG;$$
$$DD' = CC' - CH;$$
$$EE' = DD' + EL.$$

Observando estas expresiones, deduciremos que *para hallar la cota de un punto cualquiera, no hay más que añadir á la cota del punto anterior ó restar de ella el desnivel que existe entre ambos puntos, segun que este desnivel resulte subiendo ó bajando en el sentido de la marcha de la operacion.* El desnivel á que acabamos de referirnos está dado como sabemos por la diferencia de alturas de mira correspondientes á los puntos considerados.

157. **Registro de la nivelacion.**—Para la facilidad en la ejecucion de las operaciones que hemos indicado (155) y en las comprobaciones á que dan lugar, se dispone un registro cuyo modelo insertamos en la página 71. Empezaremos por anotar en la primera casilla la letra A con que hemos designado el punto de partida; en la número 7 y en el mismo renglon la cota arbitraria 5m,000 que le hemos atribuido, y en la número 8 la indicacion del sitio que ocupa.

El segundo renglon se destina á las anotaciones que se refieren al punto B, el cual se anota en la primera casilla; en la segunda se inscribe la letra M que designa la estacion desde la cual se han tomado las alturas a=3m,528 y a'=0m,837 (153.—*Ej.* 1.°), que han de dar el desnivel entre A y B, y las cuales se anotan respectivamente en las casillas 3 y 4.

La estacion N se anota en el renglon siguiente, así como el punto C y los valores de b y b' en las casillas correspondientes, continuando del mismo modo hasta llegar al punto E en que termina la nivelacion.

158. **Cálculo de las cotas.**—Se procede á calcular las diferencias de las alturas de mira de cada estacion, inscribiéndolas en la casilla número 5 del registro cuando resultan subiendo, que será siempre que la mayor altura ocupe la casilla número 3; y se anotarán en la número 6 cuando resulten bajando, lo que se conocerá en que la mayor altura de mira está en la cuarta casilla.

Añadiendo despues á la cota de A la diferencia 2,691 que corresponde á B, se obtendrá la cota 7,691 de este punto: restando de esta la diferencia 1,188 se hallará la cota 6,503 del punto C, y así sucesivamente.

El desnivel entre dos puntos cualesquiera de los A, B, C ... que hemos considerado, se calculará por la diferencia de sus cotas (Acot. 6). Así la que resulta para los A y E es el desnivel $1^m,650$, obtenido por la nivelacion general (153.—*Ej.* 1.º).

159. Cuanto hemos dicho supone que el plano de comparacion es inferior: si fuese superior, se referirían las cotas de los puntos á este plano restando de la cota anterior la diferencia que hubiese resultado subiendo ó sumándola si fuese bajando.

160. **Comprobacion de los cálculos.**—Para cerciorarnos de que no hemos cometido equivocaciones en el cálculo de las diferencias y las cotas, se ejecuta una operacion que sirve para comprobarle, y consiste en sumar las cantidades escritas en cada una de las columnas 3, 4, 5 y 6, y ver si la diferencia de las dos primeras sumas es igual á la que existe entre las dos segundas, en cuyo caso las diferencias están bien calculadas. Para comprobar las cotas, se halla la diferencia entre las cotas extremas, y se vé si es igual á las diferencias anteriores.

En caso de que todas no fuesen iguales, seria necesario proceder á calcular nuevamente los números insertos en las casillas 5, 6 y 7.

161. Cuando se ha escrito por equivocacion una diferencia subiendo en la columna número 6 ó al contrario, se comete un error en el desnivel total, que es igual al doble de la expresada diferencia, y que las comprobaciones indicadas dan necesariamente á conocer. De aquí la imprescindible necesidad de ejecutarlas siempre que se quiera tener confianza en el resultado de las operaciones.

Fácilmente se comprende que una diferencia subiendo de $3^m,258$, por ejemplo, correspondiente á dos puntos A, B (fig. 87; lám. 8), anotada como diferencia bajando, hará corresponder el punto B á la posicion B′, resultando un error $BB'=6^m,516$, doble del verdadero desnivel BC que existe entre los puntos del terreno. Este error se trasmite con todo su valor al resultado final de la operacion.

162. **Segundo método.**—Pueden hallarse las cotas de los diferentes puntos considerados siguiendo otra marcha más expedita: para ello observaremos, que si á la cota AA′ del punto de partida añadimos la altura de mira de espalda a y restamos de la suma obtenida la mira de frente a' de la misma estacion, se tendrá evidentemente la cota del punto B; lo que se expresa en la ecuacion

$$BB'=AA'+a-a'.$$

REGISTRO DE NIVELACION.

Puntos nivelados.	Estaciones.	MIRAS.		DIFERENCIAS.		Cotas.	OBSERVACIONES.
		Atras.	Adelante.	Subiendo.	Bajando.		
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	»	»	»	»	»	5,000	Punto de partida en la esquina N. de la ermita de * á la altura del zócalo.
B	M	3,528	0,837	2,691		7,691	
C	N	1,216	2,404		1,188	6,503	
D	P	0,842	2,528		1,686	4,817	
E	Q	3,057	4,224	1,833		6,650	Punto en que termina la nivelacion á la entrada del ponton de * sobre el arroyo * en el camino vecinal de *. Está marcado en el andén con la señal (X).
		8,643 6,993	6,993	4,524 2,874	2,874		
		1,650		1,650		1,m650	

Añadiendo á la BB′ la altura b se tendrá la altura del plano de nivel dado por el instrumento en la estacion N, y restando la altura de frente b' se tendrá la cota CC′ del punto C; esto es, que se tiene tambien

$$CC' = BB' + b - b';$$

y de un modo análogo, se obtendrá:

$$DD' = CC' + c - c';$$
$$EE' = DD' + d - d';$$

se ve por lo tanto, que *para hallar la cota de un punto se añade á la del anterior la mira de espalda tomada en este último, y de la suma así obtenida se resta la de frente que corresponde al punto cuya cota se calcula.*

Aplicando esta regla á los datos tomados en el ejemplo del primer método, se dispone el cálculo como sigue:

Cota del punto A	=	5,000
	+	3,528
		8,528
	—	0,837
Cota de B.......	=	7,691
	+	1,216
		8,907
	—	2,404
Cota de C	=	6,503
	+	0,842
		7,345
	—	2,528
Cota de D.......	=	4,817
	+	3,057
		7,874
	—	1,224
Cota de E.......	=	6,650

163. La comprobacion consiste en hallar el desnivel general, como hemos dicho (152) y ver si es igual á la diferencia de las cotas extremas.

164. Cuando el plano de comparacion estuviese situado sobre los pun-

tos considerados, se hallarian las cotas restando las alturas de espalda y añadiendo las de frente.

165 **Observacion general acerca de los puntos que deben acotarse.**—Puede ocurrir que tratándose de hallar las cotas de los puntos A, B, D, E, (fig 86; lám. 8) las operaciones de nivelacion nos conduzcan como en el ejemplo resuelto (156) á la determinacion de la que corresponde á un punto C.

Esta cota puede suprimirse en un estado general de las que corresponden á los puntos dados. Tambien se acostumbra suprimir la designacion de los puntos que se hallan en las mismas condiciones que C, llamados *puntos intermedios*, indicando con lápiz los resultados del cálculo de todas las cotas hasta que se han comprobado, y pasando despues con tinta únicamente las que corresponden á los puntos dados.

166. **Comprobacion de las operaciones de nivelacion.**—Se comprueba una nivelacion repitiéndola á fin de comparar su resultado con el obtenido primeramente, ejecutando las operaciones del terreno con el mismo cuidado, así como los cálculos necesarios para la determinacion del desnivel. Si este difiere del primeramente hallado en una cantidad insignificante, podrá adoptarse el término medio. De lo contrario habria que proceder á una tercera nivelacion, que bastará en general para averiguar el verdadero desnivel. Para dar una idea del grado de precision á que puede aspirarse, citaremos una operacion ejecutada en Francia el año 1846 entre Lyon y Avignon, de la cual resultó entre dos nivelaciones una diferencia de $0^{m},017$ en una longitud de 220 kilómetros, segun una nota de Mr. Breton inserta en su tratado de nivelacion, pág. 287. De la misma nota puede deducirse que empleando buenos instrumentos y ejecutando cuidadosamente las operaciones y los cálculos, se conseguiría obtener tan solo un error de un milímetro por kilómetro; pues aun cuando el obtenido parcialmente en cada uno de ellos excede con mucho de esta cantidad, existen necesariamente compensaciones entre los errores parciales, no siendo posible que todos ellos tengan lugar en el mismo sentido. Con el nivel de agua el error total es diez veces mayor que el que acabamos de indicar con referencia á los de anteojo.

167. Cuando se han acotado algunos puntos en la primera operacion, se conocerán los desniveles que existen entre ellos, y de esta manera se subdivide la nivelacion en otras nivelaciones parciales. La comprobacion puede entonces referirse á los desniveles entre estos puntos, que estando bien determinados, darán á conocer en la mayor parte de los casos dónde se han cometido las equivocaciones, y solo habrá que repetir la nivelacion entre aquellos puntos cuyos desniveles parciales no hubiesen dado el mismo resultado en ambas operaciones. En caso de que todos ellos fuesen diferentes, se deduciría que por lo menos alguna de las nivelaciones generales habia sido ejecutada con descuido.

Aun cuando no haya una necesidad absoluta de acotar puntos intermedios por tratarse tan solo de hallar el desnivel general, basta considerar cuánto se simplifica la comprobacion, siempre necesaria, para decidirse á tomar alturas de mira en puntos notables y fijos que se hallen á las inmediaciones del trayecto, como son el piso de la puerta de una ermita ó de una casa de campo, un guardarueda ó poste kilométrico, ó cualquiera otro que pueda encontrarse fácilmente, cuyos puntos se anotan cuidadosamente en el registro de la nivelacion

Si no se encuentran estos puntos notables, que se denominan *puntos de referencia*, se establecen clavando estacas en sitios en que puedan fácilmente ser halladas, refiriendo su posicion á objetos naturales próximos, á fin de poder determinarla en el caso de que desaparezca la señal, expresando siempre el nombre que los naturales del país dan al sitio en que se ha establecido la señal

Cuando la comprobacion se ejecuta al mismo tiempo por otro nivelador, el primero tiene cuidado de suministrar al segundo nota del órden y situacion de los puntos de referencia.

168. Si la nivelacion debe terminar en el punto de partida, los puntos acotados ó de referencia determinan un polígono, y la comprobacion se reduce entonces á observar si el desnivel total es cero ó difiere muy poco de reducirse á él; ó bien si la cota final hallada es la misma que la asignada al punto de partida Haciendo extensiva la circunstancia análoga en la trasportacion del plano de un polígono, se dice que este *cierra por nivelacion*.

169. **Obstáculos que suelen presentarse en la resolucion del problema general de la nivelacion.**—Ocurre con frecuencia no hallarse en el terreno un punto á propósito para estacionar el nivel de manera que se halle en las condiciones que se exigen para la observacion de las alturas de mira, en atencion á la invariabilidad de posicion de la visual: tal sucede, por ejemplo, cuando se presenta una cerca situada en un terreno horizontal ó tan poco ondulado que no presenta punto alguno desde el cual la visual domine la cerca, y pueda observarse una mira colocada al otro lado. Se la dispondrá entonces invertida y situada de manera que su pié esté en el plano superior B (fig 88; lám. 8) de la cerca: el desnivel entre los puntos A y B será entonces la suma de las alturas *a* y *a'* observadas en las miras á partir de cero. Para continuar la operacion se pasa al otro lado de la cerca, se coloca una de las miras *b* de modo que su pié esté en el mismo plano horizontal que la mira anterior *a'*. En el ejemplo que proponemos se halla á continuacion otra cerca en la que se dispone del mismo modo la otra mira, y se obtendrá el desnivel entre B y C por la diferencia de las alturas *b* y *b'*. En la estacion siguiente el desnivel será la suma de *c* y *c'*.

Cuando la cerca termina en un caballete, como es lo general, se refieren las posiciones del pié de la mira, disponiendo esta como en *a* y *b* (figura 89; lám. 8) de manera que estén en contacto con la cara inferior de una regla *c*, que se horizonta por medio del nivel *d*.

En la figura 90 (lám. 8) el desnivel entre B y C se obtiene tambien por la suma de las alturas *b* y *b'*.

Algunas veces es posible evitar estos procedimientos conduciendo por otra línea las operaciones de nivelacion, rodeando la cerca, por ejemplo, en el caso de la fig 88 (lám. 8), ó buscando otra bajada más practicable que la ABC de la fig. 90 (lám. 8), cuando solo se trata de hallar el desnivel entre dos puntos extremos; pero si se necesita conocer las cotas de algunos puntos dados, es preciso ir á pasar por ellos, cualquiera que sea el camino que pueda seguirse.

170. Si es necesario determinar las cotas de los puntos P y Q (figura 88; lám. 8), piés de las cercas, se hallará el desnivel entre A y P por el método general (149); despues el de P y B por la suma de alturas de la mira directa colocada en P y la mira invertida *a'*, continuando de una manera análoga hasta llegar á D, desde cuyo punto podrá seguirse la marcha general.

171. Cuando ocurren los casos particulares de que nos ocupamos, es preciso indicar en la casilla de observaciones de la libreta de nivelacion la manera de obtener cada uno de los desniveles parciales, á fin de anotarlas en la casilla que les corresponde para la averiguacion del desnivel general Es preciso para ello tener en cuenta que cuando se han invertido las miras colocadas en los puntos de cuyo desnivel se trata, como en las *b* y *b'* de la fig. 88 (lám. 8), el desnivel será bajando cuando la altura de mira de espalda sea mayor que la de frente, así como se verifica para los puntos B y C, y subiendo cuando sea menor; todo lo contrario de lo que sucede (149) en el caso general. Para anotar en el registro las alturas observadas se invertirá el órden, colocando la altura de espalda en la casilla número 4 (161) y la de frente en la número 3. Si la mira de espalda está invertida y directa la de frente, el desnivel será bajando, como tiene lugar para los puntos C y D de la figura citada, y los B y C de la 90. Si por el contrario está invertida la de frente, el desnivel será subiendo, como manifiesta la fig. 88 (lám. 8) para los puntos A y B. Para las anotaciones del registro, se escribirá en el primer caso de los que acabamos de tener en cuenta la suma de las alturas en la casilla número 4 del mismo, y en el segundo se anotará en la número 3; considerando en ambos que la otra altura se ha reducido á *cero*.

172 **Métodos particulares para la determinacion del desnivel entre dos puntos.**—En muchos casos, y especialmente cuando se trata de salvar un barranco de laderas inaccesibles, ocurre tener que dirigir visuales á miras muy distantes, estacionando el nivel á distancias muy desiguales de ellas; lo que puede originar errores de consideracion por poca que sea la descorreccion que el nivel haya podido experimentar en el trascurso de las operaciones, y es conveniente en todo caso asegurarse de la exactitud de las observaciones hechas. Daremos á conocer por lo tanto los métodos que se emplean generalmente en este caso

173. **Método de la nivelacion recíproca.**—Sean A*a*, B*b* (fig. 91; lámina 9) las alturas de mira observadas desde el punto de estacion M para las colocadas en los puntos A y B, y A*a'*, B*b'* las observadas desde N. El

desnivel entre A y B será la diferencia de las semisumas que se obtienen en las miras colocadas en dichos puntos.

Consideremos los puntos m y n que satisfacen á la condicion de dar las alturas medias enunciadas, y vamos á demostrar que la recta mn que los une es una horizontal En efecto, la horizontal r' s' del instrumento colocado en N, nos dará

$$r'm = \frac{r'a' + r'a}{2} = \frac{r'a' + ra + rr'}{2},$$

en virtud de la suposicion que hemos hecho de ser $am = ma'$; y por ser tambien $b'n = nb$,

$$s'n = \frac{s'b + s'b'}{2} = \frac{s's + sb + s'b'}{2};$$

pero en estas expresiones se tiene tambien, á causa de la inclinacion constante de la visual, $r'a' = sb$ por la igualdad de los triángulos $r'a'o'$ y sbo, así como $ra = s'b'$ por la de los rao, $s'b'o'$, y además $rr' = ss'$ por la distancia de los planos horizontales rs, $r's'$; luego los quebrados que expresan los valores de $r'm$ y $s'n$ son iguales, y lo mismo se verifica con estas distancias, por lo que mn es una horizontal (tomo I, 108) El desnivel BC será igual á Bn — Am, y sustituyendo por estas cantidades sus valores, se tendrá por último

$$BC = \frac{Bb + Bb'}{2} - \frac{Aa + Aa'}{2}.$$

174. **Método de Egault.**—El procedimiento de M. Egault se aplica no solo al caso á que se refiere el método anterior, sino que tambien se emplea para obtener las verdaderas alturas de mira cuando se hace uso de un nivel descorregido, no solamente en la posicion de la ampolla, sino tambien en la inclinacion de la visual con respecto al eje de figura del anteojo. Sea ab (fig. 92; lám 8) la direccion de la visual en la posicion C del anteojo: la altura de mira observada será Am, y dando una semirevolucion al anteojo dentro de sus collares, la visual ocupará la posicion $a'b'$, simétrica de la ab con respecto al eje de figura del anteojo, observándose la nueva altura Am'. La altura AM, semisuma de las Am y Am', será (77) la que corresponda á la verdadera direccion de la visual, en razon á ser OM perpendicular sin error sensible á la mira colocada en A. Del mismo modo será la AN, semisuma de An y An', la correspondiente á la que la visual debiera ocupar en la posicion D del anteojo. Esta posicion resulta de haber invertido la del mismo anteojo entre los collares y haberle dado una semirevolucion alrededor del eje general tz de rotacion del instrumento: las posiciones OM, ON serán simétricas (79) con relacion á la horizontal OH del punto O, resultando por lo tanto

$$AH = \frac{AM + AN}{2}.$$

Sustituyendo en vez de AM y AN los valores que hemos encontrado para estas líneas, resultará

$$AH = \frac{\frac{Am + Am'}{2} + \frac{An + An'}{2}}{2},$$

y ejecutando las operaciones indicadas, se tendrá por último

$$AH = \frac{Am + Am' + An + An'}{4};$$

de donde resulta que cada altura de mira se obtiene hallando la cuarta parte de la suma de las alturas observadas.

175. **Problemas particulares de nivelacion.—1.° Hallar un punto cuyo desnivel con otro dado sea igual á una cantidad determinada.**—Sea A (fig. 93; lám. 9) el punto dado en la pendiente AB, y m = CD el desnivel que ha de haber entre el mismo punto y el que se trata de determinar. Colocando en A una mira y estacionando el nivel en E de manera que la visual se halle más elevada si es posible con respecto á A que el desnivel dado m, se observa la altura de mira Aa, y restando de ella este desnivel, se marca en otra mira una altura Hh igual al resultado obtenido por la sustraccion que acaba de hacerse. Despues se hace subir ó bajar la mira por la pendiente AB, de modo que se apoye siempre en el terreno, sin variar el punto marcado h, hasta que la visual vaya á parar exactamente á él, como sucede en la posicion Ch; el punto C ocupado entonces por el pié de la mira será el punto pedido. En efecto, el desnivel entre A y C será la diferencia de las alturas Aa y Ch, igual al desnivel dado m.

Cuando este desnivel fuese mayor que la altura total de la mira, se resolvería este problema por una nivelacion compuesta, anotando los desniveles parciales hasta que faltase para el total pedido una cantidad menor que la altura de la mira. En este caso, se marca el punto siguiente de manera que satisfaga á la condicion del problema. Si por ejemplo el punto C hubiese de estar 14,m8 más elevado que A, y despues de tres estaciones se ha obtenido un desnivel de 12,m5, se determinará C haciendo que resulte 2,m3 más alto que el pié de la mira anterior.

176. Si el punto dado fuese C (fig. 93; lám. 9) y se quiere hallar A más bajo que él en una cierta cantidad dada, se procede de un modo análogo, añadiendo á la altura de mira en C el desnivel que se pide.

177. 2.° **Dado un punto de la superficie del terreno, hallar otro que esté de nivel con el primero.**—Este problema es el caso particular del anterior en que el desnivel dado es cero. Colocada una mira en el

punto dado A (fig 94; lám. 9), y puesto el nivel en estacion en M, se toma la altura de mira en A, y con ella se busca por tanteos un punto del terreno, en el cual colocada la mira sin variar la altura marcada en ella, la visual termine exactamente en el punto que la señala. El punto B ocupado por el pié de la mira, estará de nivel con A, ó mejor dicho, se hallará en el mismo plano horizontal que este último.

178. 3.° **Trazar en el terreno una línea cuyos puntos se hallen en un mismo plano horizontal.**—Determinados como en el problema anterior los puntos A y B (fig 94; lám 9), se pasa á estacionar el nivel en otro punto N, y se marca la altura B*s* de la nueva visual en la mira que ha debido permanecer en el punto B. Con esta altura se determina como en el problema anterior el punto C, que estará en el plano horizontal de B, y por consiguiente los tres puntos A, B, C, serán de nivel ó estarán en un mismo plano horizontal. Dejando colocada la última mira C y pasando á hacer una nueva estacion con el nivel, se podrá determinar otro punto del mismo plano, y así sucesivamente.

La altura *rs* es la diferencia de las que corresponden á los planos de nivel aparente determinados por la visual en las estaciones sucesivas del instrumento; diferencia que no influye en el resultado de la operacion en razon á que se hace variar en la misma cantidad la altura de mira al mudar de estacion el nivel. Cuando desde una misma estacion se pueden determinar tres ó más puntos, no hay necesidad de variar la altura de mira al pasarla de uno á otro.

Los puntos A, B, C ... determinados, están en la superficie del terreno y pertenecen por lo tanto á la interseccion de éste con un plano horizontal. La curva *abc*... que une las proyecciones *a*, *b*, *c*... de los puntos determinados, será una de las secciones horizontales que pueden considerarse en la superficie del terreno para su representacion geométrica (Acot. 106). Los puntos *m*, *n*... son las proyecciones de los de estacion M, N, y las rectas *ma*, *mb*, *nb*, *nc*... las de las visuales dirigidas á las miras A, B, C....

179. 4.° **Hallar el punto más alto ó más bajo de una línea dada.**—Haciendo que la mira recorra la línea dada fijándola en distintos puntos y anotando las alturas de mira correspondientes, el punto que haya suministrado la menor altura será el más elevado, y el más bajo aquel en que la altura sea mayor.

180. 5.° **Hallar el punto más alto ó más bajo de una superficie.**—Se trazarán en la superficie líneas paralelas, tanto más próximas entre sí cuanto mayor sea la exactitud que queramos obtener, y en una direccion normal á la que tiene la línea que aparece á la vista como formada por los puntos más elevados ó más bajos del terreno. Determínese el punto más alto ó más bajo de cada una de las líneas trazadas (179), y uniendo por una nueva línea los puntos así determinados, el más alto ó más bajo de ésta lo será tambien de la superficie.

CAPITULO IV.

Práctica de la nivelacion por alturas.

Operaciones de nivelacion por medio del nivel de perpendículo y reglones.—Empleo del nivel de ampolla de Thévenot.—Observaciones acerca de la nivelacion con reglones.—Operaciones con el nivel de agua.—Instalacion del nivel.—Determinacion de las alturas de mira.—Causas de error en el uso del nivel de agua.—Observaciones acerca de la nivelacion compuesta cuando se ejecuta con el nivel de agua.—Trasporte del nivel.—Empleo de la mira de tabla.—Lectura é inscripcion del golpe de nivel.—Uso del nivel de agua con tubo de goma elástica.—Operaciones con miras y niveles de perpendículo ó de ampolla montados sobre trípodes.—Niveles de pínulas.—Niveles de anteojo.—Causas de error en el uso de los niveles de anteojo.—Determinacion de la distancia límite á que deben darse los golpes de nivel para un instrumento dado.—Determinacion del rádio de curvatura del tubo.—Influencia del mayor ó menor número de estaciones en el resultado de una nivelacion.—Observaciones acerca del grado de aproximacion en el resultado general de las operaciones ejecutadas con un nivel.—Empleo de la mira parlante.—Error debido á la inclinacion de la mira con respecto á la vertical.—Error que el grueso del hilo del retículo produce en la observacion de las alturas de mira.—Observaciones generales.—Camino que debe seguirse en la ejecucion de las operaciones.—Instalacion del instrumento y colocacion de las miras.—Terrenos llanos.—Bosques.—Terrenos accidentados.—Arenales y terrenos pantanosos.

181. **Operaciones de nivelacion por medio del nivel de perpendículo y reglones.**—Para hallar con un nivel de perpendículo ó de albañil (43) el desnivel entre dos puntos del terreno, tales como A y D (figura 95; lám. 9), puede hacerse uso de dos reglones de una longitud de dos á tres metros, uno de los cuales A*a* se coloca en el punto de partida, de manera que uno de sus extremos descanse en él, y que puesto próximamente horizontal y en la alineacion AD pueda moverse alrededor de A en un plano vertical, subiendo ó bajando el otro extremo *a* á lo largo del reglon *r* dispuesto verticalmente. Colocando el nivel en medio del reglon A*a* se hace subir ó bajar su extremo *a* de la manera que acabamos de indicar, hasta lograr la coincidencia del cordon de la plomada con la línea de fé, en cuyo caso el reglon estará horizontal. Bajando desde *a* una plomada hasta que toque en un punto B del terreno, la distancia *a*B del

canto inferior de la regla al punto B, será el desnivel entre este punto y el de partida. Trasladando despues el primer reglon al punto B, y el r á r', se repite la misma operacion y se obtendrá el desnivel bC entre B y C, continuando del mismo modo hasta llegar al punto D. En la última posicion Cc del reglon horizontal es preciso correr por él la plomada hasta que caiga exactamente sobre D.

El desnivel entre los puntos dados A y D será la suma de las alturas halladas. En efecto, considerando por D la horizontal A′D y bajando desde A la vertical AA′, desnivel que se trata de hallar, se tendrá evidentemente

$$AA' = Am + mn + nA' = aB + bC + cD.$$

El cateto horizontal A′D del triángulo AA′D será del mismo modo igual á $Aa + Bb + Cc$, longitud del cateto A′D, proyeccion horizontal de AD.

182. Siguiendo el procedimiento que acabamos de dar á conocer, es preciso medir con una regla en cada estacion la longitud del cordon de la plomada cuando está vertical; pues en otra posicion cualquiera no se obtendría la verdadera altura, faltando la tension que causa en él el peso del perpendículo. Para evitar este inconveniente, los reglones r, r' (figura 96; lám. 9) están divididos, sirviendo la plomada para colocarlos verticalmente. Los reglones horizontales se disponen de modo que el extremo de cada uno de ellos se apoye en el pié del reglon vertical de la estacion anterior. Las alturas Ba, Cb, Cd se cuentan desde cero, que está al pié del jalon, hasta la division del mismo que corresponde al canto inferior de la regla horizontal.

183. *Acotacion de los puntos del terreno.*—Para hallar las cotas de los puntos A, B... (fig. 95; lám. 9) se restarán las diferencias bajando, y se tendrá como ya sabemos, por ejemplo,

$$BB' = AA' - aB.$$

En la fig. 96 (lám. 9) se hallarán, como hemos indicado en los párrafos anteriores, los desniveles Am entre los puntos A y C, y Dn entre los C y D; y dando al punto de partida A la cota AA′, se tendrá sucesivamente:

$$CC' = AA' - Am;$$

$$DD' = CC' + Dn.$$

184. **Empleo del nivel de ampolla de Thévenot.**—Se ejecuta lo mismo que con el nivel de perpendículo, horizontando las reglas por la posicion del nivel en que la ampolla equidista de las marcas del tubo.

185. **Observaciones acerca de la nivelacion con reglones.**—Los

límites del empleo de los instrumentos cuyo uso en las operaciones de nivelacion hemos descrito, son los asignados respectivamente (45 y 59). Estos instrumentos se emplean por lo general en operaciones auxiliares ó en las que no se exige precision, sobre todo cuando se han de referir á puntos muy lejanos: la acumulacion de los errores podría dar lugar en los demás casos á resultados muy distantes de la verdad.

186. **Operaciones con el nivel de agua.—Instalacion del nivel.**— Cuando los puntos A y B (fig. 97; lám. 9) satisfacen á las condiciones establecidas (149), la distancia AB es igual ó menor que el duplo 120m de la distancia límite asignada (57), y el desnivel entre ellos es menor que el duplo de la altura del instrumento, podrá obtenerse el valor de este desnivel por una nivelacion simple, colocando el nivel próximamente á igual distancia de A y B. Si el desnivel excede del duplo de la altura del instrumento, no puede satisfacerse á la última condicion, y habrá que colocar el nivel tanto más próximo al punto más elevado A, cuanto mayor sea el exceso de que acabamos de hacer mencion.

Al colocar el nivel en estacion, es preciso que no haya aire interpuesto en la masa líquida; porque al desprenderse de ésta durante las observaciones, alteraría el plano de nivel. Para conseguirlo, se tapa uno de los frascos, se inclina el tubo de comunicacion del lado del frasco tapado, y entonces el aire, en virtud de su menor densidad con relacion al agua, se eleva hácia el otro, y se desprende del líquido. Una vez conseguido esto, se dispone el nivel en el punto C elegido segun las condiciones particulares del problema. Si C puede equidistar de A y B, se le situará en el punto medio de la recta que une á estos últimos, ó en uno de los puntos de la perpendicular tirada por él á la misma recta, en cuyo caso conviene que se acerque á ella todo lo que sea posible, para evitar el dar al nivel giros de mucha amplitud para dirigir las visuales.

El trípode se coloca de manera que el eje de rotacion del tubo de comunicacion del nivel, quede lo más vertical que pueda juzgarse á simple vista, posicion que el observador se acostumbra con el ejercicio á determinar fácilmente. Se afirman los piés del trípode, introduciendo en el terreno, si es posible, las puntas de hierro que los terminan, y despues se aprietan los tornillos que los unen á la meseta, con objeto de evitar todo movimiento á la espiga alrededor de la cual ha de girar la parte móvil del instrumento.

187. **Determinacion de las alturas de mira.**—Para las operaciones que se ejecutan con el nivel de agua debe hacerse uso de la mira de tablilla con preferencia á la parlante, puesto que á los 60m á que puede extenderse la longitud de la visual (57), y á una distancia mucho más corta para algunos observadores, no se distinguen claramente las divisiones pequeñas de esta última mira, y el *golpe de nivel* es muy inseguro. No habría otro remedio que acortar la distancia de observacion, con perjuicio del tiempo que habia de emplearse en las operaciones.

Puesta á plomo la mira en el punto A (fig. 97; lám. 9), se mueve el nivel situado en C alrededor de su eje vertical, hasta que los tubos se hallen en un mismo plano con la mira, y se hace subir por ella la tabla hasta que la línea de fé esté á la altura de la visual, determinada como ya sabemos (56) por las superficies del líquido en los tubos. El cero de la escala que acompaña á la tablilla dará la altura A*a*. Haciendo girar al nivel hasta enfilar los tubos con la mira colocada en B, se halla del mismo modo la altura B*b*; con lo que se podrá determinar (149) el desnivel entre A y B.

188. **Causas de error en el uso del nivel de agua.**—Además de las que en otras ocasiones hemos indicado (52 y 57), relativas á los efectos de la capilaridad en tubos de diferentes diámetros, y á la inclinacion de la visual por el espesor de los meniscos que forman las superficies del líquido, existen otras inherentes al instrumento de que nos ocupamos, y que es conveniente conocer. La lluvia y la evaporacion, que tiene lugar sobre todo cuando el sol dá en el instrumento, alteran á veces de un modo apreciable el plano de nivel; aquella elevándole, y éste deprimiéndole. Por lo cual, conviene cubrir los frascos cuando las operaciones duran mucho tiempo en un mismo punto; ó bien se procura hacer todas las observaciones en el menor espacio de tiempo que las circunstancias permitan.

189. *Error debido á un defecto en la vista del observador.*—Sucede con frecuencia que dos observadores encuentran distintas alturas para una misma mira, estando todo en las mismas circunstancias; lo cual no solo se explica por la diferente inclinacion de las visuales, atendiendo á la distinta manera de considerar la zona bajo que aparecen los meniscos formados por las superficies líquidas, sino á veces por defectos de la vista, debidos á la forma particular de los ojos; la cual es á veces desigual para los de un mismo observador, que encuentra alturas diferentes mirando alternativamente con el derecho y el izquierdo. Para reconocer si esta causa de error existe y adquirir el hábito y la conviccion de que se dirigen convenientemente las visuales, se halla el desnivel de dos puntos, colocándose en estacion á igual distancia de ellos; y trasladando el nivel á otro muy próximo á una de las miras se ve si se obtiene el mismo desnivel. En caso contrario, y despues de repetir esta operacion varias veces, se procura conocer en qué consiste la inseguridad del golpe de nivel, y al cabo de algunos ensayos puede adquirirse la manera de operar con el instrumento de un modo satisfactorio, y la seguridad en los resultados que hayan de obtenerse en lo sucesivo.

190. **Observaciones acerca de la nivelacion compuesta cuando se ejecuta con el nivel de agua.**—Cuando es preciso recurrir á la nivelacion compuesta (151), despues de hallar el desnivel entre A y B (fig. 86; lám. 8), el portamira colocado en este último punto permanece en él, volviendo la mira á fin de colocarla de frente al observador en el nuevo punto que elija para hacer estacion, y cuidando de que el pié de la misma no abandone el punto del terreno

sobre que se ha dado el último golpe de mira de la estacion primera.

En la segunda estacion tomará las alturas b y b'; y dejando la mira colocada en C, pasará á un tercer punto de estacion, continuando del mismo modo, para obtener el desnivel entre los puntos extremos ó las alturas relativas de los que quieran acotarse (152 y 155).

191. **Trasporte del nivel**.—Al trasladar el instrumento de una á otra estacion, es necesario tapar uno de los frascos para evitar las grandes oscilaciones del líquido, que le hacen mezclarse con el aire y derramarse en gran parte, lo que es un grave inconveniente. Una vez tapado el frasco, la presion atmosférica que se ejerce sobre la superficie líquida en el otro, impide las oscilaciones.

192. **Empleo de la mira de tabla**.—El portamira debe tener especial cuidado en acostumbrarse á colocar la regla perfectamente vertical, y conservarla en esta posicion en tanto que lleva la tablilla á la altura conveniente. Para conseguirlo, hará correr esta tablilla á lo largo del reglon, cogiéndola con la mano derecha por su tornillo de presion, que aflojará para permitir este movimiento, y colocará la izquierda haciendo que el canto inferior de la tablilla se apoye sobre ella de manera, que deslizando la mano á lo largo de la regla lleve consigo la tabla.

Las señales con que el observador indica al portamira el sentido en que ha de moverla para alcanzar la altura de la visual son puramente convencionales. Las que generalmente se adoptan consisten en extender su brazo derecho el observador colocándole en una posicion horizontal, y partiendo de ella subir ó bajar la mano si la tablilla de la mira, hallándose más baja ó más alta que la visual, debe subir ó bajar para llegar á la horizontal del nivel.

Si al principio la línea de fé dista mucho de esta horizontal, hará señas repetidas, y el portamira seguirá moviendo la tablilla en el mismo sentido, hasta que el observador haga señales en sentido contrario. Entonces el portamira hará deslizar la tablilla suavemente obedeciendo á las nuevas señales del observador. De este modo, al cabo de algunos tanteos se consigue hallar la posicion que se busca; en cuyo caso el observador levantará el brazo manteniéndole algun tiempo en esta posicion; el portamira oprime entonces fuertemente el tornillo de presion de la tablilla, y el cero de la escala marcará la altura de mira. Si elevada la tabla hasta el tope (34) el observador hace señas para que suba más, el portamira aflojará el tornillo inferior de presion, y sujetando con la mano izquierda el cuerpo inferior de la regla, hará deslizar el segundo cuerpo cogiéndole con la otra mano por el tornillo de presion, hasta haber alcanzado de la manera que hemos dicho antes la altura de la visual. El cero de la armadura inferior marcará entonces la altura de mira.

Despues de obtenida esta, conviene volver á colocar la mira verticalmente, á fin de dirigir de nuevo la visual á ella para cerciorarse de que no ha habido variacion alguna al atornillar la tablilla: señales convenidas deben hacer entender al portamira, si la tabla está á la altura debida ó si es preciso determinarla de nuevo. Las señales se hacen más perceptibles teniendo en la mano un pañuelo blanco.

Cuando la distancia es muy corta, se suelen dar de palabra al portamira las órdenes convenientes; y si es muy considerable, se hace que un peon ejecute con una banderola las señales que el observador le indique. Para hacer que suba ó que baje la tablilla, el peon la separa hácia arriba ó hácia abajo, á partir de la posicion horizontal que ha debido darla préviamente; y para indicar que ha llegado la línea de fé á la altura del plano de nivel del instrumento, colocará verticalmente la banderola, manteniéndola un corto rato en esta posicion. Repetida la observacion como antes hemos dicho, se indicará al peon que la tablilla no ha experimentado movimiento al atornillarla, haciendo un remolino, que consiste en hacer girar en todos sentidos á la banderola alrededor del punto medio del ástil, por el que debe tenerla asida.

193. **Lectura é inscripcion del golpe de nivel.**—Una vez determinado el golpe de nivel á la espalda en una estacion cualquiera, el portamira hará la lectura correspondiente, y dirá su resultado en alta voz para que le anote el que nivela. Si la distancia es muy grande, puede darla á conocer por medio de señales convenidas de antemano. Se conviene, por ejemplo, en elevar verticalmente un jalon ó la misma mira tantas veces seguidas como unidades de cada órden resulten de la lectura, expresando el paso de las unidades de un órden cualquiera á las del inmediato inferior, por la colocacion horizontal del jalon ó mira, y la falta de unidades de un órden cualquiera por un remolino ú otra señal que no se confunda fácilmente con las demás que se hayan establecido.

El portamira, cuidando de que la tablilla permanezca fija, marcha al punto en que ha de colocarse para la observacion de la altura de frente, y al paso la presenta al que nivela, á fin de que éste la compare con la que ha anotado en el registro, para repetirla en caso necesario. Obtenida la altura de frente con las mismas precauciones, el portamira permanece fijo en el sitio que ocupa cuidando de que no varíe la posicion que ocupa el pié de la mira, y al pasar á su lado el que dirige la operacion para hacer la estacion siguiente, se asegura de la conformidad de la altura que marca con la anotada en el registro. Si esta conformidad no tuviese lugar, sería necesario repetir las operaciones de la estacion anterior; para lo que es preciso haber dejado señalados los sitios que la mira va ocupando sucesivamente, y mejor aun, conviene emplear dos miras y hacer que la primera no abandone la posicion que ocupa hasta haber comprobado la altura de la segunda. En todo caso debe evitarse que ésta se mueva del sitio que ocupa, pues podría suceder que el portamira no la colocase despues en él exactamente, dando lugar á un error que comprometería el resultado de la operacion. Tambien es preciso dejar muy bien señalado el punto á que ha llegado una nivelacion que se interrumpe para continuarla otro dia.

194. Usando la mira de tabla conviene que el portamira tenga su

cuerpo separado de ella con objeto de que la tablilla se destaque más fácilmente, y no pueda el observador confundirla con alguna parte del vestido del portamira, ó con los objetos que les rodean.

195. **Uso del nivel de agua con tubo de goma elástica.**—Las ventajas de este instrumento, descrito ya (126), sobre el nivel ordinario, consisten en que puede emplearse de noche auxiliándose de una luz artificial para la observacion de las alturas de mira, que siempre se hacen por el que dirige la operacion. El viento, la niebla, la lluvia, el calor, no impiden la ejecucion del trabajo; exigiendo cuando más la precaucion de cubrir los tubos sin impedir el efecto de la presion atmosférica. El tubo de comunicacion, en virtud de la elasticidad propia de la materia que le forma, puede adaptarse perfectamente á las formas del terreno, encorvándose lateralmente para salvar los árboles, las matas y otros obstáculos que con los demás niveles obligan á recurrir á operaciones auxiliares, evitando además las cortas de ramaje y los gastos de indemnizacion y pérdida de tiempo consiguientes.

196. **Operaciones con miras y niveles de perpendículo ó de ampolla montados sobre trípodes.**—Con estos niveles se opera como hemos dado á conocer (44) para el de perpendículo; procediendo como con el de agua para las nivelaciones compuestas (190), y empleando la mira de tabla por las razones expuestas anteriormente (187).

197. **Niveles de pínulas.**—Con estos niveles se ejecutan las operaciones como acabamos de indicar para los de perpendículo y de ampolla, pudiendo hacer estacion en un punto situado fuera de la alineacion de las miras, atendiendo á que puede disponerse la visual (65) de manera que en todas sus posiciones se halle en un mismo plano horizontal; á excepcion del nivel de Chézy, que es preciso colocar en la citada alineacion (73).

198. **Niveles de anteojo.**—Ejecutadas las correcciones del nivel, empezando por disponer convenientemente el tiro del ocular (tomo I, 239) para la vista del observador, se tendrá cuidado cada vez que se pone el instrumento en estacion de disponerle de modo que su eje de rotacion quede lo más próximo que sea posible á la posicion vertical; para lo que se fijará en el terreno uno de los piés del trípode, y teniendo en cada mano uno de los otros dos, se emplea el juego que permiten las articulaciones que los unen á la meseta, para dar á ésta la posicion conveniente al tiempo de fijarlos, afirmándolos despues fuertemente para evitar todo movimiento de torsion al aparato. Esta disposicion disminuye considerablemente el tiempo que ha de emplearse en horizontar el nivel por los tornillos de la plataforma, acortando por lo tanto el juego de los tornillos, que cuando es muy grande puede llegar á hacerse imposible, en razon á que las tuercas alcanzan á uno de ellos por su extremo superior y al otro por el inferior, la plataforma queda muy oblícua con respecto á ellos, lo que dificulta el movimiento, y los oprime fuertemente. Cuando esto sucede es preciso aflojar todos los tornillos y horizontar de nuevo; muchas

veces habrá que variar además la posicion de los piés del trípode para hacer desaparecer la inclinacion de la plataforma

199. Cuando se verifican circunstancias análogas á las indicadas (186) para el nivel de agua, pueden emplearse los de anteojo para determinar el desnivel entre dos puntos por medio de una nivelacion simple, así como tambien se empleará la nivelacion compuesta del mismo modo que antes hemos dado á conocer (190), pudiendo hacer estacion en puntos que se hallen fuera de la alineacion determinada por las miras, aunque procurando que equidisten de ellas.

200. **Causas de error en el uso de los niveles de anteojo.**—Al horizontar el nivel para disponer verticalmente el eje de rotacion del instrumento, pocas veces puede obtenerse una perfecta horizontalidad en todos sentidos, ya á causa de ligeras imperfecciones inherentes á la construccion de los instrumentos por esmerada que sea, ya por las variaciones que sufren en virtud de las alteraciones atmosféricas. Esta causa de error desaparece horizontando el nivel á cada altura de mira que se observe, y cuidando de que permanezca horizontal durante todo el tiempo de la observacion; lo que elevará ó deprimirá la altura de la visual en una cantidad absolutamente inapreciable en la altura de mira, al paso que la más ligera inclinacion de la burbuja puede dar lugar á un error de consideracion cuando la distancia de observacion llega á cierto límite (59). Estas circunstancias deben tenerse muy presentes en la práctica

201. Además de las causas mencionadas, hay entre otras que no son fáciles de reconocer, una que proviene de que la capacidad del tubo no es perfectamente simétrica con relacion á su punto medio. Este inconveniente, inevitable si existe en el instrumento que se maneja, puede reconocerse dando varios golpes de nivel sobre una mira, disponiendo la ampolla de modo que hallándose su punto medio fuera del centro del tubo, ocupe posiciones equidistantes de él para cada dos golpes consecutivos, y viendo si resulta de ellos una altura media constante. En este caso el tubo estará bien calibrado, y á ser posible la eleccion entre varios niveles, debe recaer en el que á igualdad de las demás circunstancias cumpla mejor con esta condicion

Además de determinar por este medio con mucha aproximacion la influencia de las mencionadas causas de error en el resultado de la nivelacion, puede ser empleado en determinar la distancia á que deben darse los golpes de nivel, á fin de que el error no pueda pasar de cierto límite asignado de antemano.

202. **Determinacion de la distancia límite á que deben darse los golpes de nivel para un instrumento dado.**—Colocando una mira á la distancia máxima asignada para el nivel de que se haga uso, se observa repetidas veces la altura de mira correspondiente á la horizontal del nivel, observando á distintas miras y á diferentes horas del dia, rectificando el instrumento y corrigiéndole dos ó tres veces, y una vez corregido, moviendo los tornillos de nivelacion despues de hallar cada una de

las alturas, con objeto de tener que nivelar por ellos de nuevo para la altura que ha de observarse en la mira siguiente: hacer, en fin, todo lo posible para obtener dichas alturas en las circunstancias más variables en que se juzgue que el instrumento pueda hallarse en lo sucesivo.

La diferencia entre la mayor y la menor altura de las observadas, puede considerarse entonces como un límite E (fig. 98; lám. 9) del error que las causas accidentales pueden producir. Si éste excede del que hemos asignado para la distancia D á que observamos, teniendo en cuenta la importancia de las operaciones que tengamos que ejecutar, y que representamos por e, hallaremos la distancia d, á que debemos limitar las observaciones, por la proporcion

$$d : \mathrm{D} :: e : \mathrm{E},$$

de la cual resulta

$$d = \frac{\mathrm{D} \times e}{\mathrm{E}}.$$

En las circunstancias ordinarias para la generalidad de los niveles, esta distancia debe resultar de 70 á 100$^{\mathrm{m}}$.

203. **Determinacion del rádio de curvatura del tubo.**—El procedimiento explicado (201) puede aplicarse á la determinacion del rádio de curvatura del tubo de un nivel. En efecto, llamando e (fig. 50; lám. 3) á la diferencia dh de las alturas obtenidas para dos golpes de nivel consecutivos, x á la distancia ah del punto de estacion al que ocupa la mira, y s á la separacion mm', determinada por el camino que ha recorrido un punto de la burbuja al pasar de una posicion á otra, se tendrá (59) la proporcion

$$s : r :: e : x,$$

de la que se deduce

$$r = \frac{s \times x}{e}.$$

204. **Influencia del mayor ó menor número de estaciones en el resultado de una nivelacion.**—Á medida que la distancia de observacion disminuye, aumenta el número de observaciones; pero la suma de los errores producidos es independiente de este último número. Para demostrarlo, llamemos e al error cometido en cada estacion cuando se observa á largas distancias, y n el número de estaciones que se necesitan para hallar el desnivel entre dos puntos dados; y sean e' y n' las expresiones del error de cada golpe, y el número de los que se deben dar para hallar el mismo desnivel cuando se opera á cortas tiradas. Si d y d' son las distancias respectivas de cada estacion, se tendrá (202)

$$e : e' :: d : d';$$

pero como á medida que la distancia aumenta, disminuye el número de observaciones en la misma proporcion, se tendrá tambien

$$d : d' :: n' : n$$

De estas proporciones resulta

$$e : e' :: n' : n,$$

y de aquí

$$e \times n = e' \times n';$$

pero $e \times n$ es el error total cometido nivelando á grandes distancias, y $e' \times n'$ el que resulta para las distancias menores: luego los errores son iguales, y por lo tanto para el resultado final es indiferente nivelar á largas ó á cortas tiradas.

205. **Observaciones acerca del grado de aproximacion en el resultado general de las operaciones ejecutadas con un nivel.**— Acabamos de ver que el número de estaciones no influye en la determinacion del desnivel entre dos puntos dados; por otra parte, observaremos que en los terrenos llanos puede satisfacerse en general á la condicion de equidistancia consignada (199), que en las fuertes pendientes las distancias de observacion son bastante cortas para que no se dé lugar á errores de consideracion (59), y por último, que no siendo probable que todos los errores tengan lugar en un mismo sentido, existen necesariamente compensaciones que contribuyen al buen éxito de las operaciones: despréndese de todo esto, el grado de aproximacion á la verdad de que es susceptible una nivelacion cuidadosamente ejecutada.

Cuando se quiere disminuir todo lo posible la totalidad de las causas de error, ó cuando hay que hacer estacion muy cerca de una de las miras, y muy distante de la otra, puede determinarse el desnivel correspondiente valiéndose del método de Egault (174). En la práctica se acostumbra aprovechar estas ocasiones, para corregir la direccion de la visual (79) llevando el anteojo á la posicion correspondiente á la semisuma de las alturas en la mira más distante.

206. **Empleo de la mira parlante.**—Cuando se trata de observar á distancias muy grandes, como sucede al pasar un punto de nivel de una á otra ladera muy distante, ó de comprobar á grandes tiradas una nivelacion detallada ejecutada préviamente, puede emplearse con los niveles de anteojo la mira de tabla (192) con preferencia á la parlante; pero en los demás casos es más ventajoso el empleo de esta última, en razon á que el observador lee por sí mismo la altura de mira, y tambien á que se obtienen mayores alturas, disminuyendo así el número de estaciones en los terrenos de grandes pendientes.

Para usar la mira parlante, cuidará el portamira de colocarla en una posicion perfectamente vertical, sosteniéndola con las manos extendidas y aplicadas á sus caras laterales, teniendo los brazos naturalmente doblados y unidos al cuerpo. De esta manera queda la graduacion descubierta, y la costumbre de colocarse bien en esta posicion habitúa al portamira á mantener la mira en la posicion conveniente.

El que dirige las operaciones tendrá especial cuidado de que el portamira no saque nunca el tercer cuerpo sin haber antes sacado el segundo, y de que al sacarlos les dé toda su altura, haciendo que tenga lugar el ajuste del boton correspondiente á cada uno de ellos.

A fin de evitar la separacion ó la inclinacion de la mira, que podrian alterar la posicion ocupada por su pié, en los casos en que la altura de los primeros cuerpos no fuese suficiente para alcanzar el plano del nivel del instrumento, se introducirá el segundo, sacando despues sucesivamente el tercero y el segundo hasta el ajuste indicado.

207. La lectura de la mira debe repetirse despues de anotada, para cerciorarse de su exactitud, y tambien es conveniente enseñar á leer las alturas de mira al peon que acompaña siempre al observador para trasladar el instrumento de una estacion á otra; lo que se consigue fácilmente, porque esto halaga su amor propio, y porque libre de las atenciones contínuas y multiplicadas del observador, es más difícil que se equivoque en la lectura. Al tiempo que el peon dicta la altura que observa, el que dirige la operacion la compara con la que ha inscrito en el registro.

208. *Empalme de las miras.*—Con dos miras parlantes pueden obtenerse alturas mayores que la que dan los tres cuerpos de una sola, colocando una de ellas en el punto del terreno despues de haber sacado el segundo cuerpo, y elevando sobre ella la otra con toda su altura, disponiéndola de modo que su canto inferior descanse sobre el superior del primer cuerpo de la que se apoya en el terreno, como se vé en la figura 99 (lám. 9). En el caso de que nos ocupamos habrá que añadir á la altura observada en la mira superior la de 1,^{m}6 del primer cuerpo de la otra. En la práctica hay que tener especial cuidado de no omitir este aumento, en los casos en que se haga el empalme.

209. **Error debido á la inclinacion de la mira con respecto á la vertical.**—Sea AB (fig. 100; lám. 9) una mira colocada en el punto A del terreno, y H la traza del plano horizontal determinado por las visuales en el instrumento: la altura AB observada, diferente de la verdadera altura AV á causa de la inclinacion de la mira, estará afectada de un error BC $= e$, que trataremos de determinar. Para ello observaremos que se tiene (tomo I, 19),

$$AV = AB \times \cos. b,$$

siendo b el ángulo que forma la mira con la vertical; llamando a á la verdadera altura AV, y observando que se tiene AB $= a + e$, sustituyendo en la expresion anterior se hallará la siguiente:

$$a = (a + e) \cos. b,$$

de la cual, despejando e, resulta sucesivamente:

$$e \cos. b = a - a \cos. b = a(1 - \cos. b);$$

$$e = a \times \frac{1 - \cos. b}{\cos b} \quad [1];$$

donde se vé que para un mismo ángulo b el error e aumenta con la altura de mira.

Suponiendo que esta altura es de 5^m y que la desviacion de la mira sea de 4°, se tendrá cos. 4° = 0,9976, y

$$e = 5 \times \frac{1 - 0,9976}{0,9976} = 0,^m012,$$

error que merece tenerse muy en cuenta.

210. La inclinacion lateral de la mira puede ser reconocida por el observador, comparando su posicion con la que ocupa la cerda vertical del retículo y puede hacer que desaparezca haciendo señas al portamira para indicarle el sentido en que debe moverla, y al buscar la verticalidad en este sentido la encuentra fácilmente en la que debe ocupar en el plano que pasa por la mira y la direccion de la visual, en el cual no puede el observador juzgar del mismo modo de la verticalidad. En todo caso puede hacer que el portamira la mueva en este plano, inclinándola hácia atrás y hácia adelante, y entonces la menor de las alturas de mira que hayan podido observarse será la verdadera. En efecto, toda altura AB, diferente de la verdadera altura AV, será mayor que esta, que debe ser perpendicular al plano horizontal H. (Tomo I, 90).

A este modo de apreciacion se recurre cuando el viento mueve fuertemente la mira. Entónces, si no puede suspenderse la operacion, se aguarda á leer las alturas en los momentos de calma, ó se anota la menor de las alturas que hayan podido observarse.

211. Error que el grueso del hilo del retículo produce en la observacion de las alturas de mira.—Cuando la mira se halla á una distancia considerable del anteojo, la imágen de aquella formada en el foco de este último es muy pequeña, y el hilo del retículo intercepta en ella una zona bastante ancha para producir un error apreciable en la determinacion de la altura de mira. Para darnos cuenta de este error, sea A (fig. 101; lám. 10) una porcion de la mira parlante, ó la altura de la tablilla en la de corredera, a su imágen formada en el anteojo, y D, d, las distancias respectivas del centro óptico del objetivo O al objeto A y á su imágen a. Tirando rectas desde este centro á los extremos de A y a, resultarán dos triángulos semejantes, en los que se verificará (Geometría Teor. 67) la proporcion

$$A : a :: D : d,$$

de la que resulta

$$a = \frac{Ad}{D}.$$

Suponiendo que se tiene $d = ,0^m45$, como sucede en los niveles más grandes, y $A = 0,^m2$, se tendrá como un límite superior

$$a = \frac{0,2 \times 0,45}{D} = \frac{0,09}{D};$$

donde se vé que la imágen a disminuye á medida que aumenta la distancia D. Cuando esta sea de 90 metros, a valdrá un milímetro; y si suponemos que el hilo del retículo tiene $\frac{1}{20}$ de milímetro de espesor, la altura que intercepte en la imágen a corresponderá á $\frac{1}{20}$ de A, ó $\frac{0,^m2}{20} = 0,^m01$; lo que da á conocer que el error puede llegar á valer un centímetro.

Se deduce de lo que acabamos de exponer, que á distancias algo grandes no es posible leer con exactitud los milímetros en la mira parlante, teniendo que limitarse la observacion á apreciarlos por la posicion del hilo en el centímetro á que corresponde. Por esta razon, algunas miras no presentan las divisiones de los milímetros, con lo que resulta más clara la de los centímetros.

Las disposiciones que presentan las tablillas de las figuras 13, 14 y 15 (lámina 1) tienen por objeto evitar el error de que nos ocupamos cuando se hace uso de la mira de tabla, y en todas ellas se juzga de la verdadera posicion del hilo del retículo por la igualdad de los segmentos coloreados á una y á otra parte del hilo.

212. **Observaciones generales. — Camino que debe seguirse en la ejecucion de las operaciones.** —Cuando sólo se trata de resolver el problema general de la nivelacion (149) en el que es posible elegir el camino que ha de recorrerse (154), conviene acompañarse en las distintas localidades que se han de atravesar, de un práctico del país que pueda suministrar los nombres de los diferentes términos y los datos necesarios para la buena eleccion del camino que ha de seguirse, evitando en lo posible los terrenos muy accidentados, bosques espesos y otros obstáculos. De él puede servirse además el encargado de dirigir la operacion, para saber los dias en que se han de atravesar bosques, á fin de procurarse los jornaleros que han de encargarse de la corta del ramaje.

Si es preciso acotar puntos del terreno, no se puede prescindir de recorrerle en la direccion marcada por estos puntos, quedando la eleccion reducida á la del camino que media entre cada dos de ellos.

213. **Instalacion del instrumento y colocacion de las miras**.—La eleccion del sitio en que se debe colocar el instrumento no es de manera alguna indiferente, tanto para la precision como para la comodidad y prontitud de las operaciones. La invariabilidad del punto en que descansa una mira es otra circunstancia indispensable, y de la cual es preciso que tenga conocimiento el portamira, haciéndole comprender que los descuidos que cometa comprometen el éxito de la operacion y pueden ser reconocidos en las comprobaciones sucesivas. Indicaremos las precauciones que para la instalacion del nivel y de las miras han de tenerse en cuenta, segun la naturaleza del terreno en que se opera.

214. **Terrenos llanos.—Bosques**.—En las vegas y terrenos llanos y descubiertos, se coloca el nivel equidisdante de las miras, y de manera que no exceda del límite asignado para el instrumento de que se haga uso, á fin de atenuar las distintas causas de error que hemos dado á conocer en los párrafos anteriores. Cuando el terreno está sembrado y es horizontal en una gran extension, se procura estacionar el nivel bastante elevado para que la visual pase por encima de las plantas cuando la altura de estas lo permita; pero cuando se elevan más que la altura que á la visual puede darse, convendrá colocarse en estacion en la línea de las miras, con objeto de que las cortas de ramaje tengan la menor longitud posible, tratándose de un sembrado ó monte espeso; pues en los bosques ó montes claros, es casi siempre posible elegir un punto de estacion desde el cual la visual salve los obstáculos que impiden la vista de las miras, teniendo á veces que recurrir tan solo á la separacion ó á la corta de alguna que otra rama.

Con respecto á las miras, convendrá situarlas sobre las cabezas de los piquetes ó estacas, cuando se clavan para la determinacion de algunos puntos, ó hacer que descansen en terreno bastante firme, para que el peso de la mira no le comprima. En los sitios en que ha habido corta de ramaje, pueden clavarse piquetes con el indicado objeto, ó cuidarse de no colocar la mira sobre el ramaje cortado.

215. **Terrenos accidentados**.—Cuando los terrenos se presentan ligeramente accidentados, se debe procurar disponer el nivel de modo que la visual no vaya á morir al terreno, sin alcanzar al pié de la mira más elevada cuando se nivela bajando, ó por encima de toda ella si se nivela subiendo, á fin de evitar el tener que estacionar de nuevo. Con la práctica se acostumbra el observador á juzgar de la altura á que debe colocarse segun la pendiente del terreno.

Cuando se nivela por una pendiente fuerte bajando, será preciso colocar el nivel muy cerca de la mira de espalda para que la visual alcance al pié, y debe procurarse que vaya lo más baja posible, al mismo tiempo que la mira de frente debe alejarse bastante del nivel para que la visual vaya á la parte superior. De esta manera se consigue hallar una estacion de mayor desnivel que en otro caso, y disminuir el número de estaciones.

La instalacion del nivel en las pendientes subiendo exige que la visual vaya á la parte superior de la mira de espalda, lo que no se consigue fácilmente sin tanteos, hasta no haber adquirido alguna práctica. La mira superior se hace subir por el terreno hasta que la visual vaya poco más alta que el pié, ó termine en el pié mismo para reducir á cero la altura de frente.

216. La nivelacion se abrevia en estos terrenos, empalmando las miras en los puntos bajos, obteniendo así en cada estacion un desnivel de 5 á 6 metros. Esta última altura, que es el límite superior, se alcanza pocas veces. Al llegar á una cima conviene estacionar el nivel de modo que la visual se acerque á serle tangente, con objeto de ganar desnivel en la bajada; y en los puntos bajos debe colocarse de modo que la visual alcance por su parte superior á la mira situada en el punto más bajo, para ganar desnivel en la subida.

217. **Arenales y terrenos pantanosos.**—La mira debe apoyarse en las cabezas de piquetes fuertemente clavados en el terreno, para evitar que su peso los introduzca poco á poco en el terreno movedizo, ó varíe de altura cuando descanse en un terreno elástico, como sucedería en las turbas. Otras veces se emplean unos clavos de hierro con cabeza esférica armados de tres ó cuatro puntas, las que los fijan bastante bien al mismo terreno, y las miras se colocan sobre sus cabezas. Los clavos se trasportan por los portamiras, y el manejo del que ha de usar cada uno de ellos, se facilita disponiéndole al extremo de una cadenilla bastante larga, que termina por el otro en una anilla por la que puede llevarla asida al portamira.

El encargado de las operaciones debe poner toda su atencion en las variaciones que la burbuja puede experimentar, para no confiar en su trabajo cuando estas sean de alguna consideracion, y repetir la observacion de la altura en que no tenga entera confianza. Procurará con este objeto situarse de manera que sin mudar de sitio pueda observar las dos alturas que corresponden á la estacion, pues el menor movimiento, la sola accion de cargar el peso de su cuerpo sobre uno de los piés para observar una altura, basta á veces para mover el terreno en una distancia que se prolonga hasta los puntos en que descansan los piés del trípode, moviéndolos y desnivelando el instrumento.

CAPITULO V.

Perfiles.

Ideas generales.—Operaciones que deben ejecutarse en el terreno.—Nivelacion y medida de las distancias.—Croquis y registro.—Casos particulares y obstáculos que se presentan en la determinacion de los elementos necesarios para la formacion de los perfiles.—Perfiles considerados en varias direcciones.—Perfil longitudinal y perfiles trasversales.—Determinacion de los perfiles trasversales y su referencia al plano general de comparacion.—Sondeos.—Operaciones de sondeo en los rios, lagos y puertos.—Cálculo de las mareas.—Rectificacion de las sondas y su referencia á una misma superficie.—Operaciones de gabinete.—Cálculo de las cotas.—Reduccion de las distancias al horizonte.—Construccion del perfil.—Aplicacion de los principios expuestos á un ejemplo particular.—Problemas que pueden resolverse en los perfiles construidos.—Determinacion de las proyecciones horizontales de los puntos del perfil que tienen cota entera.

218. **Ideas generales.**—Se llama *perfil* de un terreno (Acot. 124 y siguientes) en la direccion marcada por varios de sus puntos, á la interseccion de la superficie de aquel con la que engendraría una recta vertical, que recorriese la línea determinada por los mencionados puntos. La superficie así engendrada sería un plano vertical si los puntos que determinan la directriz de la superficie correspondiesen á una misma alineacion: una superficie quebrada, de elementos planos, cuando los puntos de la directriz son los vértices de una línea poligonal: una superficie cilíndrica si la directriz es una curva contínua; y mista de elementos planos y curvos, cuando es mista tambien la directriz. Los puntos de esta línea se señalan generalmente en el terreno con estacas numeradas.

219. **Operaciones que deben ejecutarse en el terreno.—Nivelacion y medida de las distancias.**—Para la formacion del perfil se ejecuta una nivelacion cuidadosa, teniendo en cuenta que es necesario acotar (155) todos los puntos estacados, y además todos aquellos, que estando comprendidos entre dos estacas y en la línea que los une, influyen en la configuracion del terreno en sentido vertical.

El perfil se aproximará tanto más á la representacion verdadera de las inflexiones del terreno, cuanto mayor sea el número de puntos que se acoten; pero no deben prodigarse con exceso, pues resulta confuso el dibujo del perfil, y obligan á emplear en los cálculos de las cotas un tiempo muchas veces perdido; porque la pequeñez de las escalas hace ilusoria la apreciacion hecha en el terreno de lijeros accidentes, que desaparecen por completo en la representacion gráfica de los perfiles.

220. Las operaciones de nivelacion deben comprobarse (166) simultáneamente á ser posible, á fin de comparar los desniveles que resultan para trozos de más ó ménos consideracion comprendidos entre estacas determinadas como hemos indicado (167), siendo conveniente concluir por una nivelacion general á fin de obtener una completa seguridad en el valor del desnivel hallado, lo que es de suma importancia en muchas aplicaciones.

221. Además de los desniveles, es preciso conocer las distancias entre las proyecciones de cada dos puntos consecutivos de los que deben acotarse, por lo cual se medirán estas horizontalmente (tomo I, 668). Si parece preferible medirlas con la inclinacion que tienen, será preciso reducirlas despues á su proyeccion horizontal.

222. Determinadas las cotas AA′, BB′.... (fig. 86; lám. 8) y las distancias horizontales A′B′, B′C′.... y suponiendo desarrollada en línea recta la directriz A′E′ de la superficie engendrada por la vertical que hemos considerado (218) se habrán determinado en un plano las posiciones de los puntos A, B .... que unidos por rectas ó por una curva contínua darán la forma del perfil que se trata de hallar.

223. **Croquis y registro.**—Cuando la nivelacion tiene por objeto la formacion de un perfil, es conveniente obtener y anotar siguiendo un órden constante los datos tomados en el terreno, á fin de disminuir la probabilidad de las equivocaciones, siempre fáciles de cometer. Se emplea con este objeto una libreta de nivelacion, dispuesta de manera que las llanas de la izquierda contienen un registro como el que hemos dado á conocer (157), con el aumento de tres casillas destinadas á la anotacion de las distancias: la primera de ellas sirve para inscribir los valores de las *distancias parciales* sucesivas AB, BC... (fig. 86; lám. 8) cuando se obtienen con la pendiente que presentan; la segunda para las *distancias reducidas* A′B′, B′C′... proyecciones de las primeras; y la tercera para las *distancias al orígen* A′B′, A′C′... obtenidas como ya sabemos (tomo I, 693), añadiendo á cada distancia al orígen que se haya determinado, la distancia parcial siguiente. El cálculo de estas distancias se comprueba viendo si la última distancia al orígen es igual á la suma de las distancias reducidas.

Las llanas de la derecha están destinadas á las observaciones y al croquis de la nivelacion, el cual consiste en dibujar á mano para cada estacion una línea de derecha á izquierda, que representa la horizontal del nivel, y tirar por sus extremos perpendiculares que representarán las alturas de mira; estas perpendiculares se cortan por una recta inclinada en el mismo sentido que la que representa del terreno. Las alturas de mira observadas, se anotan al lado de las líneas que las representan y en el órden con que se han obtenido; resultando para cada mira dos alturas, de las cuales la de la izquierda es la altura de frente de una estacion, y la de la derecha es la de espalda en la estacion que sigue. Las distancias se escriben sobre la horizontal del nivel cuando se han medido horizontalmente, y al lado de las rectas inclinadas correspondientes si se han medido con la pendiente que tienen en el terreno.

La fig. 102 (lám. 10) representa de la manera que acabamos de indicar, el croquis de la nivelacion ejecutada para deducir el perfil de la figura 86 (lám. 8).

El croquis y el registro sirven para comprobarse mútuamente, aclarando en general cualquiera de ellos las dudas que puedan presentarse en el otro.

224. **Casos particulares y obstáculos que se presentan en la determinacion de los elementos necesarios para la formacion de los perfiles.**—Cuando desde un mismo punto de estacion pueden tomarse las alturas de mira correspondientes á varios puntos consecutivos de los que han de figurar en el perfil, debe aprovecharse esta circunstancia para disminuir las variaciones de colocacion del instrumento; teniendo en cuenta que la altura correspondiente á cada uno de los puntos intermedios, debe escribirse repetida como mira de frente de una estacion parcial y de espalda de la siguiente; por cuya razon no influyen en el desnivel de la estacion general, dado por las alturas de las miras extremas. Un error cometido en la altura de una de aquellas afectará á la cota del punto intermedio correspondiente, pero no al resultado general de la nivelacion.

225. Un escafon ó corte vertical aparecerá en el perfil, tomando en el terreno alturas de mira en la parte superior é inferior del córte, y considerando que la proyeccion de la recta que los une es cero, lo que se indica en la casilla de distancias reducidas. Tambien es conveniente, para evitar dudas, anotar en las observaciones la existencia del corte y la indicacion de si es bajando ó subiendo en el sentido de la marcha que se sigue en las operaciones.

226. Cuando se presenta en la línea del perfil un obstáculo *m* (figura 103; lám. 10), despues de haber tomado la altura de mira correspondiente al punto *a*, anterior al obstáculo, se le rodea nivelando hasta tomar la altura de mira del punto *b* al otro lado, con lo que se podrá determinar la cota que á éste corresponde. Las obtenidas despues por el cálculo para los puntos considerados fuera de la alineacion, pueden suprimirse (165) despues de hallada la de *b*. Con respecto á la distancia *ab* puede determinarse por los métodos expuestos en el tomo I, para la determinacion de distancias inaccesibles, y con preferencia por el trazado de las perpendiculares *ar*, *rs*, *sb* (tomo I, 760), y midiendo *rs* que resulta igual á la distancia *ab*.

227. Si se presenta una cerca que conviene representar en el perfil, se hallan las cotas de los puntos correspondientes como hemos dado á conocer (170). En cuanto á las distancias, se considerará que es cero la proyeccion de la que media entre los puntos que se hallan en una misma vertical, y la distancia entre los puntos superiores de ambos frentes de la cerca es la parte *mn* (fig. 104; lám. 10), interceptada en el espesor del muro y en el sentido de la alineacion.

228. Los rios y los barrancos profundos pueden salvarse en general colocando en la orilla opuesta la segunda mira de la estacion más próxima á él, cuidando de observar su altura por el método indicado (205) si la distancia es considerable, como sucede generalmente. Obtenido así el desnivel entre A y C (fig. 105; lám. 10) desde la estacion M, que servirá (155) para hallar la cota de C partiendo de la del punto A, puede determinarse por una nivelacion aislada y practicada con el mismo nivel, si la pendiente y la naturaleza del terreno lo permiten, ó bien valiéndose de reglones (181), el desnivel entre A y B, que restado de la cota del primero de estos puntos dará la del segundo, situado en el fondo del barranco. La cota hallada para C servirá para la determinacion de las sucesivas en el perfil general. La inexactitud que pudiera resultar para la cota de B, es independiente del resto de la operacion, y no influye por lo tanto en el desnivel general.

229. Cuando se trata de hallar la cota de una cima ú otro punto muy elevado, y la montaña ó cerro de que forma parte puede faldearse sin inconveniente, se sigue la operacion abandonando la alineacion del perfil desde el punto A (fig. 106; lám. 10) y siguiendo por la ladera hasta llegar á otro punto C situado en el perfil al otro lado, y cuya cota se determinará por los desniveles obtenidos en esta operacion, continuando desde él la nivelacion general. El desnivel de A á B se hallará por medio de los reglones como en el caso anterior, y anadiéndole á la cota del primero de los indicados puntos, se obtendrá la del segundo.

230. Si se quiere detallar la forma del terreno en la parte ABC en los casos de las figuras 105 y 106 (lám. 10), puede hacerse la operacion auxiliar con las precauciones convenientes; teniendo cuidado de seguir la alineacion del perfil, y corrigiendo los resultados obtenidos en ella, de manera que den para C la cota hallada por la nivelacion general, y de que la proyeccion de la línea AC resulte igual á la obtenida directa ó indirectamente para la medida de la alineacion.

231. **Perfiles considerados en varias direcciones.—Perfil longitudinal y perfiles trasversales.**—Las aplicaciones de la nivelacion exigen muchas veces además de la determinacion de un perfil en el sentido de una línea, ya recta, curva ó mista, como la hemos considerado (218), la de otros perfiles dirigidos segun nuevas líneas, cada una de las cuales tiene un punto comun con la primera. El primero de ellos, que sigue *la base* de las operaciones se llama *perfil longitudinal*, y los segundos reciben el nombre de *perfiles trasversales*. Por lo general éstos son norma-

les al perfil longitudinal, y en todo caso las trazas de todos los perfiles se relacionan entre sí por los procedimientos explicados en el tomo I.

232. **Determinacion de los perfiles trasversales y su referencia al plano general de comparacion.**—Los perfiles trasversales se consideran divididos, á partir del punto de interseccion de su traza con la del perfil longitudinal, en dos partes llamadas *de la derecha* y *de la izquierda*. El *punto del eje*, que con este nombre se conoce en la práctica el de interseccion á que acabamos de referirnos, es el orígen de que parten las operaciones para cada una de las dos secciones en que hemos considerado dividido el perfil; y por lo tanto, las distancias se considerarán referidas al mismo punto para cada una de ellas de la manera que hemos dicho (223). Calculando igualmente las cotas (155), á partir tambien de la que corresponde al eje con respecto al plano de comparacion elegido para el perfil longitudinal, resultarán *referidas* al mismo plano las correspondiente á los puntos que determinan el perfil trasversal.

233. En la determinacion de los perfiles trasversales puede tener muy buena aplicacion el nivel de agua y mercurio, que hemos descrito (127), siempre que se opere en terrenos fuertemente accidentados; en los que el uso de la mayor parte de los niveles ordinarios exije un tiempo inútilmente empleado, toda vez que no se compensa con la exactitud que pueden proporcionar, innecesaria tratándose de la determinacion de cotas, cuyos valores no se trasmiten al resto de las operaciones.

234. **Sondeos.**—La línea de un perfil puede atravesar corrientes de agua, y es necesario muchas veces determinar la seccion de la corriente. El perímetro de la seccion se determina por lo general en la época de aguas bajas, sin descuidar la apreciacion de los puntos que corresponden á las altas aguas ordinarias y á las de grandes avenidas. Para obtener el perímetro de bajas de aguas, se halla el desnivel de los puntos extremos de la porcion de línea del perfil comprendida por la superficie del agua, refiriendo á esta línea la *sonda* ó distancia vertical de cada uno de varios puntos determinados del fondo. Los perímetros de altas aguas ordinarias y extraordinarias, se obtienen marcando los puntos á que en una y otra orilla han llegado las aguas en las épocas mencionadas. Para fijar estos puntos sirven de guia en muchas ocasiones señales más ó menos duraderas que quedan en las orillas, como el fango seco que cubre los troncos de los árboles, los desprendimientos que ha podido haber en las laderas, ó bien las marcas hechas por los propietarios de las inmediaciones en las cercas y paredes de sus posesiones. Si no existen estas señales, y en todo caso como medio de comprobacion, se recurre á las noticias que pueden suministrar los habitantes de la ribera, que suelen marcar con bastante precision las heredades y los lindes adonde las aguas han llegado en las crecidas.

235. *Determinacion del perímetro de bajas aguas.*—Colocado el instrumento en estacion á las inmediaciones de un arroyo, se hace el sondeo tomando sucesivamente las alturas de mira en las colocadas en los pun-

tos A y B (fig. 107; lám. 10), y disponiendo despues una de las miras en C, se observará en general la misma altura que en B, en cuyo caso la línea BC determinada en la superficie del agua será horizontal, á no ser que el plano del perfil corte con mucha oblicuidad á la direccion de la corriente; y en todo caso el cálculo de las cotas de B y de C dará la inclinacion de BC y su representacion en el perfil, continuando desde C como en el caso general (219), á fin de obtener el perfil ABCD. Falta tan sólo la determinacion del perímetro mojado B*lkt*C, para lo cual se tiende la cinta ó la cadena de B á C y se colocan verticalmente reglones divididos á lo largo de ella en los puntos en que parezca variar la pendiente del perímetro, y especialmente en el punto que corresponda á la mayor profundidad de la seccion.

Los puntos *l*, *k*, *t*, se determinan por sus distancias verticales á la línea BC de la superficie del agua. Estas distancias, que se llaman *sondas*, pueden observarse con el nivel, cuando la corriente es pequeña y el arroyo poco profundo, hallando las alturas de mira correspondientes que dan los reglones, y restando de cada una de ellas la altura de mira B en el caso de ser BC horizontal; ó bien considerando á las alturas observadas en los reglones como alturas de mira para calcular las cotas de *l*, *k* y *t* por el método general; pero ordinariamente se observan por un peon inteligente las alturas marcadas en los reglones por la superficie del agua.

Es preciso tambien anotar las distancias de reglon á reglon, y la suma de estas distancias debe ser igual á la longitud de BC, medida directamente, ó como distancia inaccesible (tomo I, 731 y siguientes); ó bien se anota la distancia de cada punto al orígen B de la medida. En la práctica, sobre todo cuando se han de atravesar rios ó arroyos muy anchos en el sentido del perfil, se hace uso de una cuerda dividida por medio de cintas de colores vivos para distinguirlas con facilidad, las cuales se anudan á distancias de 2 á 2, de 3 á 3 metros ó á equidistancias mayores, segun las circunstancias de los perfiles y el grado de exactitud que se desea obtener.

En la figura 107 (lám. 10) se han anotado los valores numéricos 0,32.. 0,63. 0,49 de las sondas respectivas de *l*, *k* y *t*; la altura 1,918 que debe restarse de las alturas de mira correspondientes para obtener las sondas, suponiendo que BC es horizontal; las distancias sucesivas 1,50.. 1,20 .. 1,10.. 0,80 que median entre las orillas y los puntos de sonda; la longitud 4,60 del ancho BC del arroyo en el sentido del perfil, y las proyecciones 3,50 y 1,90 que corresponden á las líneas AB y CD.

236. Cuando la profundidad y la corriente son mayores que en el caso que hemos considerado, puede hacerse uso de balsas ó barcas, á las que se hace recorrer la línea BC, colocando una persona desde ellas los reglones en los puntos convenientes y observando otra las alturas; y cuando son muy considerables la corriente ó la profundidad, se procurará aproximar la barca á los puntos de division de la cuerda tendida segun BC, y

para medir las profundidades correspondientes se emplea la *sonda marina*, que no viene á ser otra cosa que una plomada cuyo cordon está dividido, y que termina en su parte inferior por un peso algo mayor que en las ordinarias (tomo I, 46).

237. *Determinacion de la línea de altas aguas.*—Hallando la distancia horizontal 1,20 que media entre el punto A (fig. 107; lám. 10) y el M á que segun las noticias adquiridas llega el agua en las avenidas, se habrá determinado la posicion de este último, desde el cual se concebirá tirada la línea MN paralela á BC que será la línea de altas aguas. Sería conveniente para comprobacion, conocer el punto á que en la orilla opuesta han llegado las crecidas, á fin de ver si resulta próximamente situado en N. Esta comprobacion puede hacerse, cuando BC es horizontal, tomando la altura de mira en M; y haciéndola pasar despues á la otra orilla, se determina en ella el punto de la alineacion que está de nivel con M (177), viendo si el punto N así obtenido es con corta diferencia el designado con anterioridad como perteneciente á la línea de altas aguas.

238. **Operaciones de sondeo en los rios, lagos y puertos.**—Estos sondeos pueden tener por objeto, no tan sólo conocer las formas y accidentes que presenta el terreno cubierto constante ó alternativamente por las aguas, sino tambien los cambios que puede experimentar por el efecto de los movimientos de las aguas y los arrastres de arena y piedras que ocasiona el oleaje, ó bien la corriente ordinaria ó las extraordinarias de avenidas.

Cuando se trata del sondeo de un rio, ó de una ria, que en las horas de la marea baja, presenta un cáuce no muy ancho y poco profundo ó se divide en varios ramales, se empieza por trazar en el terreno libre de avenidas una *base de operaciones* ABCD.... (fig. 108; lám. 10), cuyos vértices A, B.... se señalan generalmente con las letras del alfabeto. Las situaciones relativas de estas estacas entre sí se determinan por los procedimientos generales de la Planimetría, orientando el plano de esta base para lograr la posicion absoluta de los puntos que la constituyen; y para obtener las cotas de estos mismos puntos se ejecuta una nivelacion detallada y cuidadosa, que sirve además para la formacion del perfil longitudinal segun el desarrollo de la línea quebrada ABCD....

En cada vértice se determina la traza de un perfil trasversal, constituido por una sola alineacion determinada por la condicion de ser normal á uno de los elementos de la base, ó de ser la bisectriz del ángulo formado por los elementos contiguos en el vértice de que se trata; ó bien en una direccion propia para cortar á la corriente en el sentido que parezca convenir más al objeto de la operacion, y que se determina por el rumbo que la corresponde ó por el ángulo que forma con uno de los elementos de la base. Otras veces el perfil trasversal sigue tambien una línea quebrada, cuyo plano se levanta como hemos indicado para el longitudinal, con el cual debe relacionarse.

239. Los perfiles trasversales se señalan tambien por medio de estacas

colocadas en los puntos cuyas cotas han de influir al parecer en la forma del perfil, y se miden y anotan cuidadosamente las distancias que median entre ellas, á fin de volver á encontrar los puntos en caso de que las estacas desaparezcan. Estas se señalan con la letra que tiene la del eje, de la cual parte la alineacion que forma el perfil trasversal á que corresponden, y con un número de órden, que las determina completamente.

Los perfiles trasversales se obtienen como hemos indicado (232), aplicando los procedimientos expuestos (235) para la parte cubierta por las aguas. Además de los determinados por las estacas en los perfiles trasversales, es necesario acotar los puntos *m*, *n*... de mayor profundidad en cada uno de ellos, así como otros que no hayan podido ser estacados. Estos últimos no pueden determinarse en general por los métodos explicados y es necesario en muchos casos colocarse un observador en D (figura 108; lám. 10) provisto de un instrumento cuyo anteojo tenga movimiento en un plano vertical, que se hará coincidir (tomo I, 656) con el de la alineacion del perfil *d*, dirigiendo la visual á un jalon colocado en una de las estacas que la determinan. Moviendo entonces el anteojo en su plano, hará señales el observador á los que colocan los reglones para medir la profundidad del agua, ó en su caso á los que dirigen la barca, hasta conseguir que se hallen en la alineacion; y á la señal que les indica esta circunstancia, disponen el reglon ó echan la sonda para hallar la profundidad del agua, á fin de obtener la cota del punto *m*. Para determinar la proyeccion de este punto, cuando es mucha la distancia á la estaca (d—2) más próxima, ó no puede tenderse la cadena ó la cuerda, á las que algunas veces rompe la fuerza de la corriente, los encargados del sondeo de *m* hacen una señal cualquiera, y mejor izan una bandera, y en aquel instante un observador colocado hácia R enfila con ella y con un jalon fijo en C otro R, que determinará con el C la alineacion CR, cuya prolongacion pasa por el punto *m*. Para comprobacion puede determinarse del mismo modo la alineacion SE. Midiendo y anotando los ángulos *z* y *t*, pueden replantearse en otra ocasion las alineaciones RC, SE y determinar por su interseccion el punto *m*; sirviendo tambien para fijar su posicion en el plano.

240. *Lagos, lagunas y pantanos.*—Se procedería de un modo análogo al que acabamos de explicar, colocando jalones en los puntos *a*, *b* (fig. 109; lámina 10) alineados con *m* y los puntos fijos respectivos A y B. Para determinar el punto de sonda *n* se colocarán los *a'* y *b'*.

En los registros deben anotarse los números de órden de las sondas, á fin de evitar la indeterminacion de los diferentes puntos de sonda y sus errores consiguientes. La sonda *m* se anotará con el número 1, así como los jalones *a* y *b*, los que llevarán además la indicacion del punto á que se han enfilado. Los puntos *n*, *a'*, *b'* se marcarán con el número 2 y así sucesivamente. Los *a*, *a'* ... *b*, *b'*... se dejarán marcados con estacas préviamente numeradas y señaladas, de que deben ir provistos los observadores. Este método se aplica solamente á lagunas ó pantanos de corta extension.

241. Tambien pueden determinarse las proyecciones de los puntos de sonda, eligiendo una base ABC (fig. 110; lám. 10) rectilínea ó formando un ángulo obtuso, alineando con A, B y C y con el punto *m* los jalones *a*, *b*, *c*, estacando estos puntos y poniéndoles la marca del número 1 correspondiente á la primera sonda; procediendo del mismo modo para las sondas sucesivas, que se designarán por su número de órden.

La referencia del punto de sonda puede hacerse desde el bote mismo empleando los instrumentos de reflexion en la determinacion de los ángunos *r* y *s*, que servirán para referir la posicion de *m* á los puntos fijos A, B, C (tomo I, 846), construyendo sobre AB y BC los segmentos capaces de los ángulos respectivos *r* y *s* (Geom. Probl. 19), y la interseccion de los segmentos dará el punto *m*. La posicion de *m* puede tambien obtenerse por el cálculo (tomo I, 852). Sirviéndose de la brújula de Kater (tomo I, 422), se determinan por observaciones inversas los rumbos de las visuales *m*A, *m*B, *m*C, con lo que se habrá fijado la posicion de *m* (tomo I, 848).

Empleando los goniómetros de reflexion es conveniente tomar simultáneamente los ángulos *r* y *s* por dos observadores, provisto cada uno de un instrumento, para hacer la lectura despues de la observacion; de no ser así, el tiempo que se empleara en la lectura del primer ángulo daría lugar á que la barca hubiese cambiado de sitio, haciéndose la segunda observacion en distinto punto que la primera. Si en el terreno existiese un cuarto punto relacionado con los tres primeros, podria observarse con otro instrumento un tercer ángulo, que serviria para comprobar la posicion del punto de sonda.

242. *Puertos.—Costas.*—Las operaciones del sondeo se ejecutan desde un bote que debe estar dispuesto para anclar en los puntos en que conviene observar la profundidad de las aguas, y á veces tambien la naturaleza del fondo; para lo que se puede cubrir de una capa de grasa ó de otra sustancia conveniente el peso en que termina la plomada de sondear, al cual se adhieren entonces las arenas, el cascajo... si existen en el fondo, ó se imprime la forma de la roca que le constituye. Cuando se quiere conocer mejor su naturaleza, se emplea la *barrena* ó *tienta-aguja*, cuyo ástil está compuesto de piezas de hierro, que se atornillan las unas á las otras con objeto de darle la longitud necesaria para alcanzar al fondo, en el cual se introduce la barrena haciéndola girar por su extremo superior por medio de una palanca: elevándola despues, las materias que se han introducido en la rosca de la barrena dan á conocer la naturaleza de las distintas capas que ha atravesado.

La proyeccion de los puntos de sonda se puede determinar desde el bote como hemos dicho (241), ó desde la costa midiendo desde los vértices de una base poligonal ABC (fig. 111; lám. 10) los ángulos formados con sus elementos por las visuales tiradas al bote en el momento de izar en él una bandera al arrojar la sonda. La base puede tambien ser rectilínea.

243. **Cálculo de las mareas**.—Los sondeos de los rios y los mares suelen hacerse en la baja mar, y es conveniente para la organizacion de los trabajos saber la hora de la marea alta y la de la marea baja, además de que en muchas ocasiones conviene levantar el plano de las líneas de marea.

Las *mareas* son las elevaciones y depresiones constantes y regulares que experimentan las aguas del mar, debidas á la atraccion combinada del sol y de la luna. Son mayores, por lo tanto, en los novilunios de equinoccios, en que estos astros se hallan en *conjuncion* respecto de la tierra. El fenómeno de las mareas no tiene lugar todos los dias á las mismas horas, sino que cada dia se retrasa 48′ próximamente.

Para calcular la hora de la marea en un dia dado, es preciso conocer la *edad de la luna* en este dia, y además el *establecimiento del puerto* en que se haga la observacion.

244. *Edad de la luna*.—Para saber la edad de la luna en un dia dado, por ejemplo el 20 de Agosto de 1864, bastará observar en el calendario la fecha 2 del último novilunio y su diferencia á la del dia dado, dará 18 para el número que se busca. Si las fechas corresponden á meses distintos, se contarán los dias trascurridos despues del novilunio hasta el de la fecha.

Cuando no se tiene el auxilio del calendario, se puede obtener la edad de la luna por medio del *número áureo* y *de la epacta*.

Aureo número de un año cualquiera es el que indica el número de órden que á este año corresponde en el *ciclo* ó espacio de 19 años, en que las *fases* ó *cuartos de la luna* se repiten en los mismos dias y casi á las mismas horas. El ciclo empieza á contarse en el año en que el novilunio cae en 1.° de Enero; y como el año del nacimiento de Jesucristo era el segundo del ciclo á que pertenecía, se hallará el áureo número de un año cualquiera, 1864 por ejemplo, por la expresion

$$\frac{1864+1}{19}=98+\frac{3}{19},$$

en la que los números 1 y 19 son constantes. El resíduo 3 será el áureo número que se busca. Cuando resulte cociente exacto, el áureo número será 19.

Epacta es la edad de la luna al principio del año. Para hallar la epacta, se resta una unidad del áureo número, y el resultado se multiplica por 11; para el año de que se trata tendremos

$$(3-1)\times 11=22,$$

en cuya expresion los números 1 y 11 son constantes. Cuando el producto pasa de 30 se le divide por este número, y el resto de la division será la epacta. Representando por a el áureo número, por e la epacta y por c el cociente de la division, la expresion que indica en general las operaciones que han de ejecutarse, será

$$\frac{(a-1)\times 11}{30}=c+\frac{e}{30}.$$

Conocida la epacta de un año cualquiera, puede hallarse la edad de la luna en un dia dado, el 20 de Agosto, por ejemplo, añadiendo á la fecha del mes la epacta y el número de meses comprendidos entre el de Marzo y el de la fecha, ambos inclusive; con lo que resultará para el dia de que se trata

$$20+22+6=48.$$

El exceso 18 de este número sobre 30, ó sobre 29 si el mes en cuestion fuese de 30 dias, será la edad de la luna. Cuando la suma obtenida no llega á 30, ella misma será la edad pedida.

En los meses de Enero y Febrero no se emplea el tercer sumando que hemos indicado.

245. *Establecimiento del puerto*.—Se llama *establecimiento de un puerto* la diferencia entre la hora en que tiene lugar la pleamar en el puerto mismo y aquella en que se ha verificado en alta mar. El establecimiento para el puerto de Cádiz es de $1^h\,15'$; para los puertos de la costa Cantábrica es próximamente de 3 horas.

246. *Hora de la marea*.—La hora de la pleamar en un dia dado se determina por la fórmula

$$M=L\times 48'+E,$$

siendo M la hora de la marea á partir del medio dia, L la edad de la luna en el dia dado, 48′ el retraso diario constante de la marea, y E el establecimiento del puerto. Cuando el número que resulta de la aplicacion de esta fórmula es menor que 12, la hora de la marea se referirá á la tarde del dia de la fecha: cuando esté comprendido entre 12 y 24, á la mañana del dia siguiente y habrá que restar de la hora hallada $12^h\,24'$ para hallar la del dia de la fecha: si pasa de 24 corresponderá á la tarde del dia siguiente, y será necesario restar $24^h\,48'$.

Sustituyendo los valores anteriormente hallados, se tendrá para un puerto cualquiera de la costa Cantábrica el dia 20 de Agosto de 1864:

$$M=18\times 48'+3^h=17^h\,24',$$

que corresponderá á las $5^h\,24'$ de la mañana del dia siguiente 21. Restando por lo tanto $12^h\,24'$, la diferencia 5^h indicará que la pleamar se verificará á las 5 en punto de la tarde del dia 20 de Agosto.

Calculada la hora de la pleamar, se obtiene la de la bajamar inmediata añadiendo $6^h 12'$, y la pleamar siguiente añadiendo $12^h 24'$ á la de la primera.

247. *Determinacion del establecimiento de un puerto.*—Este problema se resuelve observando por muchos dias las horas de la pleamar y hallando en cada uno de ellos la diferencia entre la hora observada y la que resulta por el cálculo para alta mar. Esta última se obtiene por la fórmula $M = L \times 48'$. El término medio entre las diferencias halladas será el establecimiento del puerto.

248. *Altura de la marea.*—Es la diferencia de nivel que hay entre la pleamar y bajamar. Hallando la altura correspondiente á la mayor de las mareas vivas, y tomando la mitad de esta altura se tendrá la superficie de comparacion (24) que se elije en las nivelaciones ordinarias cuando han de referirse al nivel del mar.

249. **Rectificacion de las sondas y su referencia á una misma superficie.**—Cuando la fuerza de la corriente da á la sonda una curvatura *abd* (fig. 112; lám. 11), se halla la verdadera altura *ae* midiendo la parte *ab* y la longitud *ac* de una plomada tirada desde *a* hasta enrasar con la superficie del agua. Conocida la longitud de la sonda, se tendrá la proporcion

$$ab : ad :: ac : ae = \frac{ad \times ac}{ab}.$$

Restando de este valor hallado la parte *ac* se tendrá la verdadera sonda *ce*.

250. *Referencia de las sondas.*—Las sondas en los trabajos marítimos se obtienen con relacion á las distintas superficies á que dan lugar las mareas, y no dan por lo tanto resultados inmediatamente comparables entre sí. Es necesario para ello reducirlas á una sola, que generalmente es la de las *mareas bajas de equinoccios*. La altura de esta marea suele estar marcada en los puertos en la *escala de mareas*, que es un pié derecho de madera invariablemente fijo, siendo la mencionada altura el cero de la graduacion de la escala. La altura marcada en ella por las aguas en una hora dada será la que entonces corresponde al nivel de las aguas del mar sobre el que tiene en la bajamar de equinoccios. Para servirse de la escala de mareas en las operaciones de sondeo, se encarga un observador de inscribir en un registro las alturas sucesivas marcadas en ella de 10 en 10 ó de 15 en 15 minutos: los encargados de las sondas anotan á su vez la hora en que hacen cada observacion. Restando despues del valor de cada una de las sondas la altura que indica el registro para la hora en que tuvo lugar su determinacion, se obtendrá la referencia de la sonda á la superficie de bajas aguas mencionada. Si á todas las sondas así determinadas se añade la semi-altura de la marea (248) se habrán referido á la marea media (24).

Cuando no hay en el puerto escala de mareas, se establece una, fijando su cero en un punto, cuya altura sobre el de las mareas bajas de equinoccios es preciso conocer despues, si se han de referir á este último las sondas (Acot. 7).

251. **Operaciones de gabinete. —Cálculo de las cotas.**—Terminadas las operaciones en el terreno, es necesario calcular las diferencias y las cotas de la manera que hemos dado á conocer (158), así como tambien es preciso reducir al horizonte las distancias medidas con la inclinacion del terreno, y hallar las distancias de las proyecciones al orígen, que es la proyeccion del punto de partida.

252. **Reduccion de las distancias al horizonte.**—Sea $AB = l$ (figura 113; lám. 11) la medida inclinada de la distancia entre los puntos acotados A y B; $BC = d$ el desnivel calculado por las operaciones anteriores, y $AC = x$ la proyeccion que se trata de conocer: en el triángulo rectángulo ABC que estas líneas constituyen se tendrá

$$x = \sqrt{l^2 - d^2} \qquad [1]$$

Aplicando el cálculo indicado, la fórmula exige hallar los cuadrados de dos números y extraer una raíz cuadrada; y es poco expedito cuando es grande el número de distancias que hay necesidad de reducir. Se abrevia mucho empleando una tabla de cuadrados de los números. Las del *Carnet de l'Ingenieur* que se publica todos los años en París contiene los cuadrados de dichos números desde 1 á 1000.

Si suponemos que se tiene $l = 41,^{m}9$ y $d = 8,^{m}3$, se tendrá

$$x = \sqrt{41,9^2 - 8,3^2} = \sqrt{1686,82} = 41,^{m}07.$$

Para emplear las tablas del Carnet, se prescinde de las comas y se hallan los cuadrados de los números 419 y 83, que son respectivamente 175561 y 6889; se tendrá entonces, separando las cifras decimales que deben resultar:

Cuadrado de 41,9	1755,61
Cuadrado de 8,3	68,89
Diferencia	1686,72.

El número 168672 está comprendido entre 168100 y 168921 en la columna de cuadrados, cuyas raíces respectivas son 410 y 411, y por lo tanto se tendrá

$$x = \frac{41,0 + 41,1}{2} = 41,^{m}05,$$

que solo difiere en 2^{cm} del hallado directamente por la fórmula [1].

253. Existen tambien, y son muy útiles, unas tablas calculadas por el Ayudante de Obras públicas D. Jacinto de la Rua, en las que por medio de la distancia inclinada y el desnivel obtenido entre sus extremos, se hallan desde luego las distancias reducidas. Se encuentran las tablas divididas en séries; y para hallar, por ejemplo, la reducida de una recta de 42,^{m}0, cuyos extremos tienen el desnivel de 5,^{m}250, se encontrará que la reducida corresponde á la segunda série y es 41,^{m}671 Las del Carnet dan por el procedimiento explicado un número comprendido entre 41,6 y 41,7, cuya semisuma 41,65 difiere tan sólo en dos centímetros próximamente del valor hallado por las tablas.

254. La fórmula [1] se dispone para el cálculo logarítmico descomponiendo en factores la cantidad subradical (Alg 29), con lo que se convierte en

$$x = \sqrt{(l + d)\,(l - d)} \qquad [2],$$

y tomando logaritmos,

$$\log.\ x = \frac{\log.\ (l + d) + \log.\ (l - d)}{2}.$$

Aplicando esta fórmula al ejemplo ya resuelto, se dispondrá el cálculo como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \log.\ 50{,}2 & = & 1{,}7007037 \\ +\ \log.\ 33{,}6 & = & 1{,}5263393 \\ \hline \text{Suma} & = & 3{,}2270430\ ; \\ \log.\ x & = & 1{,}6135215\ : \\ x & = & 41{,}^{m}07 \end{array}$$

255. *Empleo de las tablas de líneas trigonométricas.*—Cuando se dispone de unas tablas de líneas trigonométricas ó de sus logaritmos puede hacerse la reduccion hallando (tomo I, 18) la pendiente de la recta AB (fig. 113; lám. 11) por la fórmula

$$\text{sen. A} = \frac{d}{l} \qquad [3]\ ;$$

y conocido el ángulo A, se hallará la reducida (tomo I, 19) por la

$$x = l\ \cos.\ \text{A} \qquad [4].$$

Haciendo uso de las tablas de líneas trigonométricas naturales de Chevallot citadas en el tomo I, ó de las más completas publicadas recientemente en España por D. Juan Lopez del Rivero, Ingeniero Jefe de

Caminos y Canales, se hallará en el ejemplo propuesto (252) sustituyendo en la fórmula [3],

$$\text{sen } A = \frac{8,3}{41,9} = 0,1980907;$$

que corresponde en las tablas á un ángulo A = 11° 25′, y la ecuacion [4] dará entonces

$$x = 41,^{m}9 \times 0,9802 = 41,^{m}07.$$

Empleando el cálculo logarítmico, se tendrá para la fórmula [3] despues de restablecer el rádio:

$$\begin{array}{rl} \log.\ 8,3 = & 0,9190781 \\ +\ C^{to} \log.\ 41,9 = & 8,3777860 \\ \hline \log.\ \text{sen } A = & 9,2968641\ ; \\ A = & 11^{\circ}\ 25'. \end{array}$$

La fórmula [4] dará del mismo modo;

$$\begin{array}{rl} \log\ 41,9 = & 1,6222140 \\ +\ \log.\ \cos.\ 11^{\circ}\ 25' = & 9,9913207 \\ \hline \text{Suma} = & 11,6135347\ ; \\ \log.\ x = & 1,6135347\ ; \\ x = & 41,^{m}07. \end{array}$$

256. **Construccion del perfil.**—Para construir el perfil es preciso consultar las dos casillas del registro, que comprenden las distancias al orígen y las cotas. Se traza una línea recta en la que se marca un punto como proyeccion del de partida en el terreno, y es el orígen desde el cual se toman como *abscisas* las distancias que se hallan en la citada casilla del registro, señalando los puntos correspondientes en la misma línea; levantando despues perpendiculares en todos los puntos marcados, se toma en cada una de ellas con la escala la magnitud de la cota correspondiente, empezando por la primera cota del registro que es la del punto de partida Uniendo por medio de rectas ó por una curva contínua los puntos así determinados en las perpendiculares ú *ordenadas* se tendrá la representacion del perfil.

257. Cuando la línea que representa el plano de comparacion ha de ser muy larga, y es preciso por lo tanto marcarla por trozos, sucede muchas veces que no resultan en prolongacion exacta los unos de los otros: este inconveniente se evita tendiendo una seda bien tirante y marcando

algunos de los puntos que ocupa en el papel, los cuales determinan la direccion de los distintos elementos que han de constituir la recta de que nos ocupamos.

Para el trazado de las perpendiculares puede levantarse una por un procedimiento geométrico (Geom. Probls 1 y 2) y tirar paralelas á ella con las plantillas por los puntos de division del eje de abscisas; y como es posible que este paralelismo sufra alguna alteracion, conviene repetir de trecho en trecho la construccion geométrica indicada, á fin de comparar con ella la direccion de las ordenadas inmediatas.

258 *Uso del papel cuadriculado* —La construccion de los perfiles se facilita extraordinariamente con el uso del papel cuadriculado que se encuentra en el comercio, dividido por líneas perpendiculares entre sí en partes iguales á un milímetro; apareciendo con trazo más grueso las que corresponden á los centímetros. Trazando de lápiz en una de las líneas dirigidas segun la longitud del papel y por el número de sus divisiones la escala adoptada para las abscisas, y en una perpendicular á ella la de las ordenadas, se trazarán estas fácilmente, aun sin el auxilio de la escuadra; evitando de todos modos el trasladar de la escala al perfil con el compás las distancias y las cotas, como es preciso hacer siguiendo el método antes explicado. Tanto en uno como en otro son muy útiles las escalas de marfil (tomo I, 190), sustituyendo al compás en el primer método; y sirviendo en el segundo para la mejor apreciacion de las magnitudes, que estén representadas en las escalas del perfil por fracciones de milímetro.

259 *Máquina de nivelar* —Mr. Blondat ha construido una máquina para obtener gráficamente el perfil de la línea recorrida por un carreton que lleva consigo el aparato. Un árbol paralelo al plano del camino recibe un movimiento de rotacion por un sistema compuesto de un tornillo sin fin y una rueda dentada, y relacionado con el eje de las ruedas delanteras del carreton. El indicado movimiento se trasmite á un lápiz, que traza en un papel dispuesto verticalmente, y en la escala de 0,^{m}001, la línea recorrida. El papel en que resulta así el dibujo del perfil se halla unido á una regla que se mantiene constantemente horizontal, á causa de estar sostenida por dos flotadores que descansan en los brazos de un tubo dispuesto como el del nivel de agua ordinario (49), y que está lleno de mercurio, hasta cierta altura de las ramas verticales del tubo. Esta máquina, que sólo se ha ensayado en esplanaciones hechas, será de mucha utilidad en algunas ocasiones si llega á alcanzar la perfeccion de que parece susceptible.

260 **Aplicaciones de los principios expuestos á un ejemplo particular.**—Con objeto de hacer aplicacion de cuanto hemos expuesto acerca de la formacion de los perfiles, supongamos que se trata de hallar el del terreno representado en la fig. 114 (lám. 11). Una vez marcada la direccion del perfil por estacas numeradas, se determina como hemos dado á conocer (149) el desnivel entre los puntos 1 y 2, haciendo estacion en *a*

con el nivel y anotando en el primer renglon del registro indicado (223) é inserto en las páginas 138 y 139, el número de la estacion, el de la estaca de partida y la cota 313,m407 que suponemos ser la altura conocida del mismo punto sobre el nivel del mar; y en el segundo las alturas de mira y la distancia 31,m52 que media entre los marcados con las estacas 1 y 2. Desde el mismo punto de estacion se halla el desnivel entre las estacas 2 y 3 repitiendo (224) la altura 1,159, y anotando la distancia 20,99 que hay de una á otra estaca.

261. Para la representacion del barranco comprendido entre estas dos últimas estacas, se puede determinar por medio de los renglones el desnivel 5,m420 y la distancia horizontal 13 20 entre la estaca 2 y el fondo del barranco *m*, valiéndose de los reglones y el nivel de ampolla (181), anotándolos en la casilla de observaciones y en el renglon correspondiente á la estaca número 2, ó refiriéndole á él por un número de llamada, como en el modelo que proponemos.

262. Continuando las operaciones desde la estaca 3, y determinando la número 4 por una mira intermedia (224), se terminará la estacion en un punto *n*, que no se trata de determinar y con el sólo objeto de ganar desnivel en la subida á la estaca 5 situada en la cima inmediata; por cuya razon se dejan en blanco las casillas números 2 y 3 del registro, anotando tan solo las alturas de mira 3,210 que se repite, y la 0,248 que corresponde al punto *n*

Pasando á situar el nivel en *c*, con la precaucion indicada (216), se determinan los puntos señalados con las estacas 5 y 6, y pasando á *d* se hace lo mismo con el punto 7, siguiendo en las anotaciones la marcha general indicada (151)

263. Al llegar al punto 7 nos encontramos en un caso análogo al de que nos ocupamos en los párrafos 169 y 171, por lo que hallaremos el desnivel entre los puntos 7 y 8 por la suma 5,564 de las alturas de mira 4,151 y 1,413, que se anotará en la casilla número 7, ocupando con ceros la correspondiente en el número 6. Para representar en el perfil el corte representado en la figura, se hallará la suma de la altura 4,151 de la mira invertida con la 0,924 de una mira colocada en el punto *p*, anotando esta circunstancia en las observaciones. La distancia de *p* á 8 se mide horizontalmente para obtener la distancia de la vertical comun á los puntos 7 y *p* á la correspondiente al punto 8; expresándolo tambien en el registro y dejando en blanco la columna número 3.

En el punto 8 existe un escalon ó corte vertical, á cuyo pié se colocará la mira para obtener (225) la altura 2,427, que se anotará en la casilla número 7, y su diferencia con la 1,413 dada por la que primitivamente se colocó en el punto 8, dará para la altura del escalon 1,m014 para el punto 8′ situado en la vertical del anterior, por lo que se anotará 0,00 en la casilla de distancias reducidas, para indicar la existencia del corte vertical.

264. Continuando las operaciones desde la misma estacion, se toman

las alturas de mira de los puntos 9, 10 y 11, si el alcance del anteojo lo permite, cuidando de repetir en el registro las miras intermedias, inscribiendo en él la distancia de 8' á 9 en la casilla correspondiente, y en las observaciones la distancia 32,m5 á que se halla el punto *t* al que llegan las aguas en las avenidas (234) La distancia de 9 á 10 es el ancho del rio en el sentido del perfil, anotando esta circunstancia en el registro. La línea de bajas aguas sirve para la referencia de las sondas que se consignan en un registro parcial en la casilla de observaciones.

Pasando á hacer estacion en *f* se continúan las operaciones siguiendo la marcha general establecida.

265. *Observaciones generales.*—La altura de las miras 9 y 10 se ha obtenido por medio del empalme de las mismas. Las distancias para las cuales no se ha expresado otra cosa en el registro, se han medido con la inclinacion que presentan en el terreno. Tambien se indica en las observaciones la naturaleza del suelo, los cambios que experimenta siguiendo la línea del perfil, y en caso necesario el espesor medio de la capa de tierra vegetal y la naturaleza del sub-suelo. En las operaciones del terreno, suele omitirse en la casilla 6 del registro la repeticion de las miras intermedias, inscribiéndolas al tiempo de hallar despues las diferencias; ó bien se calculan éstas directamente por las alturas sucesivas que resultan en las de la columna número 7.

266. *Cálculo de las cotas y de las distancias al orígen.*—Halladas las cotas (251), reducidas las distancias á su proyeccion horizontal (252), y determinadas las distancias al orígen (223), con las comprobaciones á que estos cálculos dan lugar, en la parte correspondiente al perfil general, puede pasarse á la determinacion de las que corresponden á los puntos *m* y *p* determinados por las operaciones auxiliares anotadas en el registro. Para el primero de estos puntos, se añadirá á la distancia al orígen 31,m52 del punto 2, la distancia 13,20 consignada en el registro y resultará 44,72 para su distancia al orígen, que se escribirá tambien en las observaciones. Restando de la cota 313,042 del punto 2, la profundidad hallada 5,420 para el fondo del barranco, se obtendrá para *m* la cota 307,622.

De un modo análogo resultará para el segundo punto la cota 307,731.

267. *Construccion del perfil.*—Completo el registro con los cálculos ejecutados y las anotaciones hechas en él, se puede proceder á la construccion del perfil de la manera que hemos dado á conocer (256 y siguientes) y que representa la fig. 115 (lám. 11). El plano de comparacion que en él aparece es el de la cota 300m sobre el nivel del mar. Los números de las casillas 5 y 10 han servido para determinar los puntos numerados en el perfil, y los inscritos en la casilla de observaciones para la de los puntos *m* y *p*. Tomando despues de 8 á *t* la distancia consignada en el registro, levantando en este último punto una perpendicular hasta encontrar á la línea del perfil y tirando por el punto de interseccion una paralela á la línea de bajas aguas, se tendrá la línea de avenidas. Con respecto á la

seccion del rio, se tomarán en la línea de aguas bajas las distancias que se hallan en el registro particular del sondeo, y á sus extremos las magnitudes de las sondas; con lo que se habrá terminado la construccion del perfil.

268. *Ejemplo de un perfil trasversal.*—Al perfil longitudinal del ejemplo anterior, pueden referirse perfiles trasversales de la manera que hemos dicho (231): supongamos que se trata de determinar el correspondiente al punto 6 del perfil longitudinal; haciendo estacion en un punto *a* (fig. 116; lám. 11), se coloca la mira en el marcado con la estaca 6 y se observa en ella la altura 3,174 que se inscribe en las casillas 6 y 15 del registro que insertamos en las páginas 140 y 141, como mira de espalda para las dos secciones del perfil, y en el mismo renglon que las indicaciones referentes al número del perfil que se determina y al de la estacion del instrumento, las que corresponden á las columnas 1 y 2 del registro; continuando las operaciones de la seccion izquierda del perfil, la cual puede determinarse desde la misma estacion, y de la misma manera que si se tratase de un perfil longitudinal, escribiendo las distancias en la columna 12 cuando se miden con la pendiente del terreno, y en la 13 cuando se miden horizontalmente, como sucede en el ejemplo que proponemos.

Terminada la seccion de la izquierda, se toma la altura 3,630 en la mira situada inmediatamente á la derecha de la estaca del eje, y se pasa á hacer estacion en *b*, anotando el número 2 en la casilla correspondiente de la segunda columna del registro, continuando las operaciones de la manera indicada hasta concluir la seccion de la derecha, con lo que terminarán las operaciones del terreno.

Conviene en la práctica tener presente que por *perfil de la derecha* se entiende la parte que se halla á este lado cuando se camina en el sentido de la numeracion de los puntos del eje, y se ha hecho estacion antes de llegar al plano del perfil trasversal de que se trata. Así es, que cuando se toman los datos de dos ó más perfiles desde un mismo punto de estacion, se debe tener presente que la derecha de los que se hallan detrás del nivel en el sentido de la marcha de las operaciones corresponde á la izquierda del perfil, y debe anotarse así en el registro.

Cuando basta una sola estacion para la determinacion del perfil, conviene en general tomar constantemente los datos de la derecha al principio de cada uno de ellos, y esta es la razon de haber adoptado para el registro la disposicion que presenta el modelo que proponemos. Algunos niveladores colocan antes la seccion de la izquierda por encontrar más natural que la seccion de la derecha se halle realmente escrita á la derecha del registro, en cuyo caso debe empezarse á determinar en todos los perfiles la seccion de la izquierda.

269. Para las operaciones de gabinete se ejecutan los mismos cálculos y las mismas comprobaciones que para el perfil longitudinal (266), empezando por inscribir en la columna 11 del registro la cota 316,584

que corresponde al punto 6 del eje, de la cual se parte para el cálculo de las de ambas secciones del perfil.

270. **Problemas que pueden resolverse con los perfiles construidos.**—Construido un perfil y anotadas en él las cotas y las distancias al orígen, la distancia horizontal entre dos puntos dados del perfil se halla restando las distancias al orígen que les corresponden, y el desnivel por la diferencia de las cotas Con los perfiles puede hallarse además la cota de un punto cualquiera t (fig. 114; lám. 11) situado entre dos puntos determinados del perfil, haciendo aplicacion de la fórmula

$$x = c + \frac{(C - c)\, l}{L},$$

establecida (Acot. 23), empezando por hallar la distancia l restando de 77,62 proyeccion de la recta que une los puntos 8′ y 9, la distancia 32,50 de la proyeccion de t á la del punto de cota menor: se tendrá entonces

$$x = 303{,}758 + \frac{(306{,}234 - 303{,}758) \times 45{,}12}{77{,}62} = 305{,}197.$$

271. Dada la cota $c' = 305{,}197$ se hallaría la distancia z entre la proyeccion del punto correspondiente y la del punto 9, que es el de cota menor entre los puntos dados, por la fórmula

$$x = \frac{(c' - c)\, L}{C - c} \text{ (Acot. 24).}$$

272. Tambien puede hallarse la magnitud de la recta que une dos puntos del perfil, si no se ha medido en el terreno con la inclinacion que presenta, por la fórmula

$$x = \sqrt{L^2 + d^2} \qquad \text{(Acot. 22)},$$

en la que L representa la longitud de la proyeccion horizontal y d el desnivel de los puntos dados del perfil.

REGISTRO DE NIVELACIÓN [illegible] PERFIL LONGITUDINAL.

Estaciones 1.	Estacas 2.	DISTANCIAS. Parciales. 3.	Reducidas 4.	Al origen. 5.	MIRAS. Atrás. 6	Adelante. 7.	DIFERENCIAS. Subiendo. 8.	Bajando. 9.	Cotas. 10.	OBSERVACIONES. 11.
1	1	»	»	0,00	»	»	»	»	313,407	(1)
»	2	31,52	31,52	31,52	1,094	1,1[illegible]	»	0,065	313,042	(2)
»	3	20,99	20,98	52,50	1,459	0,6[illegible]	0,505	»	313,547	(3)
2	4	17,34	17,32	69,82	4,056	3,2[illegible]	0,846	»	314,393	
»	»	»	»	»	3,210	0,2[illegible]	2,962	»	317,355	
3	5	40,60	40,42	110,24	3,444	0,1[illegible]	3,262	»	320,617	
»	6	32,88	32,63	142,87	0,182	4,2[illegible]	»	4,033	316,584	(4)
4	7	70,12	70,02	212,89	0,254	4,0[illegible]	»	3,772	312,812	(5)
5	8	»	98,86	311,75	0,000	5,5[illegible]	»	5,564	307,248	(6)
»	8′	»	0,00	311,75	1,443	2,4[illegible]	»	1,014	306,234	
»	9	77,66	77,62	389,37	2,427	4,9[illegible]	»	2,476	303,758	(7)
»	10	»	36,74	426,11	4,903	4,9[illegible]	»	0,000	303,758	(8)
»	11	17,40	17,16	443,27	4,903	4,4[illegible]	2,919	»	306,677	(9)
6	12	45,30	45,27	488,54	2,924	1,1[illegible]	1,740	»	308,417	(10)
»	13	47,74	47,74	536,28	1,184	0,9[illegible]	0,274	»	308,691	
			536,28		31,153	35,[illegible]	12,508	16,924	4,416	
						31,1[illegible]	[illegible]	12,508		
						4,4[illegible]	[illegible]	4,416		

(1) Punto de partida.—Poste kilométrico número 135 en la carrtera de ***. Roca compacta de cuarzo.

(2) Borde de un barranco.—Pizarra.—El fondo tiene 5,m420 de profundidad á la distancia horizontal de 13,20.—Distancia al origen =44,72 —Cota= 307,622.

(3) Roca compacta.

(4) Tierra vegetal.

(5) Corte de roca, bajando.—5,m075= 4,151+0,924.—Cota del punto más bajo en la vertical de la estaca número 7=307,737.

(6) Distancia medida horizontalmente.—Altura de mira de frente obtenida por la suma de 4,151 y 1,413.

(7) A 32,m5 la línea de altas aguas.

(8) La distancia 36,74 es el ancho del río en el sentido del perfil.—Fondo de cascajo.—El sondeo ha dado los resultados siguientes:

REGISTRO PARCIAL DEL SONDEO.

Distancias.	Sondas.
12,52......	0,834
10,17......	1,062
14,05.....	0,000
36,74	

(9) Roca.

(10) Tierra vegetal.

PERFILES TRANSVERSALES.

Número de los perfiles.	Estaciones.	DERECHA. DISTANCIAS. Parciales.	Reducidas.	Al origen.	MIRAS. De espalda.	De frente.	DIFERENCIAS. Subiendo.	Bajando.	Cotas.	Cot[illegible] del e[illegible]	IZQUIERDA. DISTANCIAS. Parciales.	Reducidas.	Al origen.	MIRAS. De espalda.	De frente.	DIFERECIAS. Subiendo.	Bajando.	Cotas.	OBSERVACIONES.
1.	2.	3.	4	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14	15.	16.	17.	18.	19.	20.
6	1	»	5,07	5,07	3,174	3,630	»	0,456	316,128	316,[illegible]	»	10,14	10,14	3,174	1,922	1,252	»	317,836	
											»	39,86	50,00	1,922	0,538	1,384	»	319,220	
	2	»	15,06	20,13	0,467	5,327	»	4,860	311,268	»				5,096	2,460	2,636		2,636	
		»	6,18	26,31	5,327	5,327	»	0,000	311,268	»				2,636					
		»	9,64	35,95	5,327	1,667	3,660	»	314,928	»									La distancia 6,18 es el ancho del camino de Olivares.
		»	14,05	50,00	1,667	0,547	1,120	»	316,048	»									
					15,962	16,498	4,780	5,316	0,536										
						0,536		0,536											

273. La pendiente de la recta que une los puntos dados, puede tambien hallarse por el conocimiento del desnivel d y de la longitud l de la proyeccion hallada, haciendo uso de la fórmula

$$p = \frac{d}{l} \qquad \text{(Acot. 25)};$$

y deducir cualquiera de las cantidades p, l, d, conocidas las otras dos, en virtud de las ecuaciones establecidas en el párrafo citado de las Acotaciones.

274. **Determinacion de las proyecciones horizontales de los puntos del perfil, que tienen cota entera.**—Se resuelve este problema tirando paralelas á la recta que representa el plano de comparacion, equidistante un metro en la escala de las verticales, y proyectando sobre la misma línea los puntos en que encuentra á la del perfil (Acot. 127). En el ejemplo particular expuesto, sólo se han tirado las trazas de los planos horizontales que tienen cotas múltiplas de 3, número que será en este caso la equidistancia adoptada para los puntos de cota entera. La horizontal de cota 303 (fig. 117; lám. 11) corta á la línea del perfil en dos puntos, cuyas proyecciones se han acotado con el núm. 3 en la línea que representa el plano de comparacion, que es el de la cota 300. El de cota 309 la corta en tres puntos, el primero de los cuales no se ha acotado para evitar la confusion del dibujo.

Ejecutando las mismas operaciones en los perfiles trasversales, y trasladando los puntos acotados á las trazas de todos ellos y á la del perfil longitudinal, se podrán trazar (Acot. 129) las curvas horizontales que representarán la forma del terreno en la extension que los perfiles comprenden.

CAPITULO VI.

Trazado de las curvas horizontales.

Generalidades.—Trazado directo de las curvas horizontales.—Dificultades que pueden presentarse en el trazado de una curva horizontal.—Escarpes y cortes verticales.—Escalonado del terreno.—Observaciones generales acerca del trazado directo de las curvas.—Levantamiento del plano de las curvas trazadas.—Trazado y levantamiento simultáneos de las curvas horizontales.—Método de las estaciones alternadas.—Trazado directo de las curvas en un terreno determinado por puntos acotados.—Aplicacion á los terrenos de mediana y de grande extension.—Construccion de las curvas en los planos acotados.—Determinacion de las curvas en un plano por medio de los perfiles construidos sobre las rectas del canevás.—Perfiles auxiliares.—Representacion de las curvas en el plano de una poblacion.—Empleo de la cadena para la determinacion aproximada de las curvas.—Eleccion de la equidistancia de las curvas.—Problemas que pueden resolverse en el plano de un terreno determinado por curvas horizontales.—Deduccion de los perfiles segun direcciones dadas en el plano.

275. **Generalidades.**—Las cotas obtenidas por las operaciones de nivelacion están destinadas, en union con las proyecciones de los puntos acotados dadas por la Planimetría, á la representacion completa de la superficie del terreno en una extension determinada. Esta representacion se obtiene (Acot. 106) por las curvas horizontales que resultarían de la interseccion del terreno con cierto número de planos horizontales equidistantes en sentido vertical. Este método es debido á Felipe Buache, geógrafo francés, que en 1732 determinó por su medio las líneas de igual profundidad del mar en el canal de la Mancha.

Las curvas horizontales son llamadas por algunos impropiamente *curvas de nivel*; estas últimas serían las intersecciones del terreno con las superficies de nivel verdadero, cuya definicion hemos dado á conocer anteriormente (3).

La determinacion de las curvas horizontales puede obtenerse directamente trazándolas en el terreno, y determinando por los procedimientos de la Planimetría las posiciones relativas de los distintos puntos que las constituyen; ó bien se pueden trazar en el plano ya construido de un terreno, cuando se han hallado préviamente las cotas de los distintos vértices del canevás y de los puntos notables que figuran en el plano, ó se han construido los perfiles cuyas trazas son las rectas que forman el mismo canevás. Nos ocuparemos de estos distintos medios de representacion.

276. **Trazado directo de las curvas horizontales.**—Supongamos que se trata de representar el cerro M (fig. 118; lám. 11), que se eleva en una llanura: empezaremos por trazar en su superficie las curvas horizontales, cuyas proyecciones han de constituir la representacion de que se trata. Partiendo de un punto *a* del llano, que procurará elegirse de manera que pueda quedar completamente determinado ó señalado de una manera estable, se coloca en él una mira, y haciendo estacion en un punto *m* se hallan desde él los puntos 2 y 3 que están de nivel con *a* (178) y pertenecen por lo tanto á la primera curva. Si está fija la equidistancia de los planos secantes, y es pequeña, puede hallarse desde la misma estacion un punto *b*, más elevado que *a* en una cantidad igual al valor de la expresada equidistancia (175), disminuyendo en él la altura de mira observada en *a*. Pasando á hacer estacion en *m'*, se obtiene el punto 4 de nivel aparente con el 3, y perteneciente por lo tanto á la primera curva. Desde *m''* se obtienen los 5, 6 y 7, continuando del mismo modo hasta volver al punto *a*; con lo que se concluirá el trazado de la primera curva horizontal. Si al colocar la última mira en *a* con la altura correspondiente á la última estacion del nivel, el pié de la mira coincide exactamente con *a* ó la diferencia de altura es de algunos centímetros, la curva estará bien trazada; pero si la diferencia que resulta es más considerable, se partirá de *a* en sentido contrario, rectificando la posicion de las estacas, hasta llegar á encontrar la que coincide con el trazado primitivo.

Todas las estacas de la primera curva se señalan con la letra *a* y con el número de órden en que se han colocado. La curva contínua que pasase por todos los puntos así determinados sería la curva horizontal pedida; que se aproximará tanto más á ser la verdadera interseccion de la superficie del terreno con el plano horizontal del punto *a* (tomo I, 94), cuanto mayor sea el número de puntos determinados y mejor elegida haya sido la posicion de los mismos, procurando establecerlos en todos aquellos en que la forma del terreno varíe en sentido horizontal.

277. Una vez trazada la primera curva, se determina (175) un punto *b* de la segunda, más elevado que *a* en una cantidad igual á la equidistancia adoptada para los planos secantes, si antes no se ha determinado este punto, y se traza desde él la segunda curva de la misma manera que hemos indicado para el trazado de la primera, marcando todas las estacas con la letra *b* y el número de órden que á cada una de ellas corresponde.

Procediendo de una manera análoga, determinaríamos las curvas *c* y *d*, y al trazar la *e* observaríamos que una porcion de ella *e'zt* cerraba sobre un mismo punto *e'*, lo que nos indicaría que desde ella se separaba del resto del terreno la cima menos elevada de las dos en que termina el cerro, la cual quedaría determinada por las curvas *f'* y *g'*. Al llegar á este punto conviene hallar su desnivel con el más elevado de la cima á fin de obtener la cota que á este corresponde.

Volviendo al punto *e*, se traza la curva horizontal á que corresponde en la cima más elevada, la cual estará de nivel con la *e'*, y se continúa trazando las *f*, *g*, de nivel con *f'* y *g'*, y las *h*, *l* que terminan la representacion del cerro, tomando tambien la altura del punto más elevado de la cima sobre la última curva. Los puntos *f*, *g* pueden determinarse (177) tomando alturas de mira en *f'* y *g'*.

Todos los puntos obtenidos en el trazado de las curvas quedan perfectamente determinados; pues todos los piquetes tienen marcada con una letra la designacion de la curva á que pertenecen, y además el número de órden que en ella les corresponde.

278. El método que acabamos de indicar para un cerro aislado, es aplicable á cualquier terreno con ligeras modificaciones; y se abrevia en los terrenos llanos, cuando la equidistancia de los planos secantes es muy pequeña, trazando dos ó tres curvas á la vez, haciendo recorrer cada curva con una mira distinta dispuesta con la altura correspondiente á cada una de ellas para una misma estacion del nivel.

Tratándose de una ladera continuada, pueden determinarse varios perfiles, partiendo de distintos puntos de una curva horizontal determinada cuidadosamente en toda la extension de la ladera. Estos perfiles se trazan á distancias algo grandes, haciendo uso del problema (175) tomando por tipo del desnivel la equidistancia de los planos secantes. De esta manera, las curvas trazadas despues encuentran muchos puntos de comprobacion, lo que evita los errores consiguientes á las causas inevitables, que en otras ocasiones hemos dado á conocer, y que acumulándose influirían notablemente en la exactitud de la representacion que se trata de obtener por medio de las curvas.

279. **Dificultades que puede presentar el trazado de una curva horizontal.—Escarpes y córtes verticales.**—Cuando al trazar una curva horizontal *m* (fig. 119; lám. 12) se encuentra un obstáculo como una casa, un escarpado de rocas, un corte vertical, ú otro cualquiera que impida la aplicacion del método general que hemos dado á conocer en los párrafos precedentes, se continúa trazando la curva hasta llegar á un punto 6, lo más inmediato que sea posible al obstáculo que se trata de salvar, y desde él se sigue nivelando por un camino 6 ... *a*.... *b* hasta llegar á un punto *b* que se halle fuera del obstáculo, y cuyo desnivel con el marcado con la estaca número 6 se conoce por la operacion de nivelacion ejecutada. Desde este punto se nivela bajando, hasta llegar ó otro que se halle más bajo que *b* (176) en una cantidad igual á la altura de

este último sobre la estaca 6. Marcando con el número 7 la que ha de colocarse en el punto así determinado, que corresponderá á la curva *m*, se continuará desde él el trazado de la misma curva que resultará ser la *m*.....6.....7.....*n*.

Cuando el obstáculo ha de interrumpir el trazado de varias de las curvas, pueden irse determinando (175 y 176) al nivelar hácia *b* y en la bajada siguiente puntos de las distintas curvas mencionadas, con lo que se tendrán los que han de servir para la continuacion de sus trazados al otro lado del obstáculo.

Si la ladera opuesta es accesible, podría llevarse á ella el instrumento y determinar desde la estacion *h* del nivel en ella el punto 7 situado en el plano horizontal del 6, así como los puntos de partida de las curvas al otro lado del obstáculo.

280. **Escalonados del terreno** —Las laderas de pendientes fuertes formadas de roca se presentan algunas veces escalonadas, y otras lo están artificialmente con el objeto de horizontar algunas porciones del suelo destinadas á los plantíos de viñedos, ó con otro objeto cualquiera; y en todos estos casos las curvas están lejos de presentar la continuidad de forma que afectan en general, interrumpiendo bruscamente su curvatura con trazos rectos ó presentando puntos de retroceso. La representacion exacta de las curvas exije entonces tan solo de parte del observador un estudio más detenido, un mayor número de puntos que determinar; pero no dificultades que no pueda vencer fácilmente, si se ha penetrado de la marcha general que en la operacion de que nos ocupamos debe seguirse. Propondremos, por ejemplo, el caso que presenta la figura 120 (lám. 12) del escalonado formado por el muro de sostenimiento de un viñedo Observando desde la estacion A la altura de mira colocada en el punto (a, a'), se determina como ya sabemos el (b, b') de nivel con el primero en la línea de interseccion del muro con la superficie del terreno, y el (c, c') situado con la doble condicion de ser de nivel con los primeros y de hallarse en la arista del muro de contension de las tierras del viñedo: la proyeccion de la horizontal que se traza será en este caso la recta *bc*, que se proyectará en la traza del plano vertical que constituye el paramento del citado muro.

Como suponemos que el viñedo está plantado en un plano inclinado de $b'\ a'\ d'$, su interseccion con el plano secante será una recta determinada por el punto (c, c') y el (d, d'), que se determinará buscando el punto de nivel que corresponde á la interseccion de dicho plano inclinado con la superficie del terreno, resultando la proyeccion *cd*, y continuando despues el trazado de la curva horizontal á partir del último punto determinado (d, d').

La línea mista *abcde* será la interseccion del plano secante, cuya traza es la horizontal $a'e'$, con la superficie que se trata de determinár.

281. **Observaciones generales acerca del trazado directo de las curvas.**—En la resolucion de este problema pueden emplearse todos los

niveles explicados en el capítulo II, inclusos los instrumentos de planimetría usados como niveles, así como las miras de las dos clases explicadas en el mismo. La mira parlante se usa anotando la altura de mira correspondiente á la primera de cada estacion, y buscando en las posiciones sucesivas de la mira durante la estacion del nivel en un mismo punto las que dan la misma lectura. En la mira de tabla se fija esta á la altura del primer punto en cada estacion, y se conserva invariable hasta tanto que haya necesidad de variar el punto de estacion del nivel.

282. **Levantamiento del plano de las curvas trazadas.**—El levantamiento del plano tiene por objeto determinar las posiciones relativas de las proyecciones correspondientes á los puntos estacados, y se ejecuta con los instrumentos descritos en la Planimetría; y siguiendo los métodos que en ella hemos dado tambien á conocer. En el ejemplo primero, partiríamos desde *a* (fig. 118; lám. 11) midiendo las distancias que median entre las estacas de la primera curva, y hallando los rumbos que corresponden á las rectas que las unen, ó los ángulos que ellas forman entre sí; obteniendo de esta manera el plano de la primera curva por el *método de rodeo*. Del mismo modo pudiera obtenerse el de cada una de las curvas restantes, y para relacionar entre sí estos planos, que de otro modo no quedarían determinados en sus posiciones relativas, se levanta por el mismo método el de la línea poligonal *abcde*, empezando por determinar la direccion del primer elemento *ab* por medio de su rumbo ó del ángulo que forma con la línea que une las estacas 1 y 2 de la primera curva. Para comprobacion pueden seguirse desde *e* el levantamiento del plano de la línea *efghlr*, así como el de la *efe'f'g's*. Orientando el plano (tomo I, 197) si no se ha empleado la brújula, ó hallando la declinacion de la aguja (tomo I, 379) en este último caso, se habrá conseguido la representacion completa de la porcion de terreno que consideramos.

283. *Levantamiento del plano por el método de interseccion.*—Se elige una base AB (fig. 121; lám. 12), dentro ó fuera de la parte de terreno que las curvas trazadas comprenden, y dirigiendo desde la estacion A visuales á todos los piquetes, que en cada curva pueden ser recorridos por un peon que irá clavando un jalon sucesivamente en los puntos que recorre, se anotan cuidadosamente en un registro los ángulos que las visuales forman con la base AB, ó los rumbos que les corresponden, ó bien se marca su direccion en el tablero cuando se hace uso de la plancheta, señalando cada visual con la misma letra y el número de órden del piquete á que va dirigida. En esta operacion sería conveniente emplear banderolas de distintos colores, anotando además en cada visual la inicial del color de la banderola correspondiente. Los peones deben tener mucho cuidado en no interrumpir el órden de numeracion de las estacas en que se colocan, y convendría que llevasen una nota de la designacion de las que van ocupando. Una seña convenida indicará á todos los peones el momento en que deben trasladarse de uno á otro piquete.

Pasando á hacer estacion en el extremo B de la base, se determinan del mismo modo nuevas visuales, que en su interseccion con las obtenidas desde A determinarán las proyecciones de los puntos estacados. Hecha la trasportacion, bastará unir por curvas contínuas las que resultan con la misma letra para tener la representacion del terreno por medio de las curvas horizontales.

Si la extension que presenta es tal que no pueden observarse desde A y B todos los puntos marcados, ó las visuales han de cortarse con mucha oblicuidad, se establece otra base BC á partir de B, cuya posicion se determina por el rumbo que la corresponde ó por el ángulo que forma con AB. Con la plancheta se traza gráficamente el ángulo en el tablero, orientándola en B con respecto al lado AB. Del mismo modo puede obtenerse un mayor número de bases, refiriendo cada una á la anterior; y cuando se trata de curvas que cierran sobre sí mismas, como en el ejemplo propuesto (276), la base sería un polígono que vendría á cerrar en el punto A.

284. *Por abscisas y ordenadas.*—Cuando es muy corta la extension del terreno ocupado por las curvas, ó no se dispone de otro instrumento que el cartabon ó escuadra de agrimensor, puede elegirse una base orientada como eje de abscisas, ó mayor número de bases relacionadas entre sí por medio de perpendiculares ó de líneas que formen entre sí ángulos de 45 y de 135°, cuidadosamente trazadas y medidas, á las cuales se refieren por ordenadas las posiciones de las estacas ó piquetes, cuidando de anotar en las proyecciones respectivas la indicacion de la curva á que pertenecen y el número de órden que en ellas les corresponde.

285. **Trazado y levantamiento simultáneo de las curvas de nivel.**—Empleando la *brújula nivelante* ó de limbo zenital (tomo I, 396) puede levantarse el plano al mismo tiempo que se trazan las curvas. Dispuesto el instrumento como hemos dicho (143), se determina la primera curva haciendo estacion en *a* (fig. 122; lám. 12), y tomando la altura del eje de rotacion del anteojo en el instrumento sobre el mismo punto, se hace subir ó bajar la mira en el terreno hasta que la visua vaya á esta altura, que se conserva invariable; lo que determinará el punto 2 de la curva. Fijando entonces el limbo de la brújula, se anota el rumbo de la visual que servirá para determinar la direccion de la recta *a*.... 2, midiendo además su longitud: pasando á hacer estacion en el punto 2, se determina del mismo modo desde él el punto 3, continuando hasta la conclusion de la curva: y como al mismo tiempo que se ha trazado esta, se han medido los rumbos y las distancias de los elementos que la constituyen, se habrá obtenido al mismo tiempo su plano por el método de rodeo (tomo I, 953).

Hallando los puntos *b*, *c* .... de partida de las curvas superiores (277) se trazan y determinan estas curvas del mismo modo que la primera: para relacionarlas, bastaría levantar el plano de la línea *abc*..... y para comprobacion el de otra ú otras líneas que uniesen del mismo modo una estaca de cada una de las curvas trazadas

286. *Caso particular.*—La eleccion del punto de una curva cuando ha de corresponder al fondo de un arroyo ó de un barranco, de manera que sea un punto en el cual se pueda poner el instrumento en estacion, es difícil por lo general, cuando se trata de un barranco de laderas muy pendientes y fondo de rocas, y además la curvatura de la seccion horizontal es muy pronunciada. Se evita hacer estacion en él, hallando desde el punto 3 (fig. 122; lám. 12) los puntos 4 y 5 de nivel aparente con él, así como los rumbos de las rectas 3....4 y 3.....5, y la medida de los distancias 3....4 y 4.....5. Al pasar á hacer estacion en el piquete 5, puede obtenerse como observacion inversa (tomo I, 369) el rumbo de la línea 5.......4. Para trazar la curva en el plano, despues de tener la proyeccion del punto 3, se trazan las direcciones de las rectas 3...4 y 3.....5 dadas por los rumbos hallados en el terreno, y se determina el punto 4 por su distancia conocida al punto 3: haciendo centro en 4 con un rádio igual á la distancia que corresponde en la escala del plano á la recta 4.....5 medida en el terreno, se traza un arco hasta que corte á la recta 3....5 en un punto 5 que será la proyeccion de la estaca marcada en el terreno con este número; siguiendo desde él el trazado por la marcha general que acabamos de establecer. Para comprobacion puede verse si el rumbo que resulta para la recta 4.....5 es el obtenido por la observacion inversa en la estaca núm. 5 del terreno.

287. **Método de las estaciones alternadas.**—El método que acabamos de dar á conocer tiene el inconveniente del error que en la determinacion de cada punto se produce por la dificultad de tomar exactamente la altura del plano de nivel aparente del instrumento sobre el punto de estacion: error que puede irse acumulando en los puntos sucesivos, y alterando el verdadero trazado de la curva. Se evita este inconveniente por el método de las estaciones alternadas, que consiste en colocar una mira en el punto de partida 1 (fig. 123; lám. 12), y la brújula, dispuesta para nivelacion ordinaria, en estacion en un punto a, que esté próximamente en la curva de nivel: tomando en la mira colocada en el punto de partida la altura del plano de nivel del instrumento, y anotando al mismo tiempo el rumbo r de la visual a...1, leido con el extremo blanco de la aguja, se determina el punto 3 de nivel con el 1 (177), anotando tambien el rumbo r' de la recta a...3. Trasladando el instrumento á un nuevo punto a' de estacion, se toma la altura de la mira colocada en el punto 3, y se determina como acabamos de indicar el punto 5 de nivel con él, anotando los rumbos r'' y r''' de las dos visuales, y así sucesivamente. Midiendo además las distancias de las rectas r, r', r''....., que se han arrumbado, se podrá construir el plano de estas líneas, con lo que se habrán determinado con exactitud los puntos 1.....3.....5..... de la curva. Pueden tomarse además otros puntos de nivel inmediatos á los de estacion con la altura de mira que á los observados desde la misma

estacion corresponde, y cuya proyeccion se fija refiriéndolos al mismo punto de estacion por el rumbo y la distancia. Cuando el punto así determinado está muy cerca del de estacion, bastará medir la distancia, expresando en el croquis aproximadamente la posicion que ocupa con respecto al de estacion. Se determinarán así nuevos puntos 2.....4..... de la curva, cuya posicion no está en general tan exactamente determinada como la de los primeros; pero el error de que cada uno de ellos pueda estar afectado no influye en el trazado general de la curva.

288. *Empleo de la plancheta en el levantamiento simultáneo.*—Cuando se trata de un terreno poco accidentado y no muy extenso, se puede levantar el plano de la curva con la plancheta al tiempo mismo de trazarla. Se elige una base AE (fig. 124; lám. 12), dividida en cierto número de partes iguales, y en los puntos de division se levantan las perpendiculares AM, BN .... á la base establecida. Trazando en la plancheta dos perpendiculares *ae*, *c*Q dispuestas como las AE, CQ del terreno y reducidas á escala, así como las perpendiculares *am*, *bn*.... á la *ae*, se hace coincidir el punto Q con su homólogo del terreno, y se declina *c*Q sobre CQ, con lo que quedará la plancheta en estacion. Entonces, en el momento en que el observador provisto del nivel determina en el perfil AM el punto 1 de la curva, el que observa con la alidada de la plancheta la dirige desde Q á la mira y marca en el tablero el punto 1 de interseccion de la línea de fé con la recta *am* que sepresenta el perfil AM. Pasando á los puntos 2.....4.....5 de los perfiles BN, DS, ET se trazan del mismo modo en la plancheta las intersecciones 2.....4.....5 con las líneas que representan los perfiles respectivos en el tablero de la misma. El punto 3 se determina tomando á partir de Q en el tablero, de distancia Q.....3 del terreno referida á la escala del plano. Uniendo por una curva contínua los puntos obtenidos en el tablero se tendrá el trazado de la curva horizontal en la plancheta. De la misma manera se obtendrá el de las curvas siguientes.

289. **Trazado directo de las curvas en un terreno determinado por puntos acotados.**—Sean A, B, C ... (fig. 125; lám. 12) los vértices de un polígono del terreno, y M un punto interior de comprobacion, y supongamos conocidas (155) las cotas de todos estos puntos por las operaciones de nivelacion que se han practicado con este objeto. Partiendo del punto más bajo B, por ejemplo, cuya cota es 16, se determina en cada una de las alineaciones BA, BM, BC, si es posible, el punto que se halla 4 metros más elevado que B (175), obteniendo así tres puntos que corresponderán al plano horizontal de cota 20. Entre C y D se determinará del mismo modo el punto de cota 30, suponiendo que la equidistancia de los planos secantes ha de ser de 10^m, continuando del mismo modo hasta llegar al vértice F que es el más elevado. Desde este punto se determina (176) el que en la alineacion FG está 8^m más bajo que F y se obtendrá un punto de cota 80; bajando 10^m se tendrá en la misma alineacion el de cota 70, y así se continuará hasta llegar al punto A. Fijos así muchos puntos que pertenecen á las curvas horizontales, se tra-

zan estas directamente por cualquiera de los distintos procedimientos que hemos dado á conocer, y se procede despues al levantamiento del plano de las curvas como tambien hemos dicho.

290. **Aplicacion á los terrenos de mediana y de grande extension.**—Cuando la proyeccion del terreno que se trata de representar, se ha obtenido por una *poligonacion* (tomo I, 990), ó por una *red de triángulos* (tomo I, 1014), cruzados por las *trasversales* que han de contribuir á fijar la posicion de los detalles del plano, es preciso hallar las cotas de todos los puntos cuya proyeccion se ha obtenido, y determinar en las rectas que los unen y en virtud de la equidistancia adoptada para las *secciones ó curvas horizontales*, los puntos que á estas corresponden, para proceder á su trazado directo y al levantamiento del plano, que se relaciona con el canevás de la planimetría.

En el método que nos ocupa, sirve de comprobacion del trazado de una curva, la circunstancia de que termine en un punto determinado de la misma cota por la operacion preliminar, y tambien de que vaya la curva pasando por los determinados en las diversas rectas del canevás, que la curva va cortando.

291. **Construccion de las curvas en los planos acotados.**—Levantado y construido un plano, pueden trazarse en él las curvas de nivel que completan la representacion del terreno comprendido, siempre que se hayan determinado por las operaciones de la nivelacion (155) las cotas que corresponden á los distintos vértices del canevás, así como las de los demás puntos notables que figuran en el plano. Sea ABCD .... (fig. 125; lám. 12) el de un polígono en el que se ha determinado el punto interior M, que ha servido para la comprobacion de las operaciones de la Planimetría, y supongamos conocidas las cotas de todos estos puntos. El problema está reducido (Acot. 129) á determinar las *escalas de pendiente* (Acot. 30) de las rectas que constituyen el canevás, y unir por medio de curvas contínuas las proyecciones de los puntos de cota 20.... 30.... 40 .... múltiplas de la equidistancia 10^m adoptada. Para hacer aplicacion á la recta BC, por ejemplo, se tomarán sobre la BR, arbitraria de direccion y de longitud indefinida, las partes iguales á una magnitud tambien arbitraria y en número igual á la diferencia de las cotas de B y de C; uniendo el último punto de division con el vértice C por medio de una recta, y tirando á esta una paralela desde el punto 20 de BR se determinará en el lado BC el punto de cota 20 correspondiente á una de las curvas. Una construccion análoga se empleará en la determinacion de los demás que han de resultar con cotas múltiplas de la equidistancia de los planos secantes.

Este método es extensivo, como el del trazado directo (290), á los planos de los terrenos de mediana y de grande extension; pero solo es aplicable á la representacion aproximada del terreno, cuando es poco accidentado, á no haber determinado las cotas de las cimas, y las de muchos puntos en las divisorias, los talwegs y demás líneas que influyan de una manera notable en las inflexiones del suelo; de lo contrario, solo se obtendrá en la mayor parte de los casos una idea general de la configuracion del terreno, en razon á que la mucha distancia de los puntos acotados hace desaparecer entre ellos muchos detalles, sin los cuales no es posible la representacion de la verdadera forma del terreno.

292. **Determinacion de las curvas de un plano por medio de los perfiles construidos segun las rectas del canevás.—Perfiles auxiliares.**—Las curvas horizontales pueden trazarse en un plano, deduciéndolas de los perfiles construidos, siguiendo las distintas rectas que constituyen el canevás de la planimetría. Bastará para ello (274) trazar en los perfiles las líneas que representan los planos horizontales equidistantes, y proyectar sobre la traza de cada uno de ellos los puntos en que cortan á la que representa la interseccion del terreno con el plano vertical del perfil. Las proyecciones así obtenidas se trasladan á la línea correspondiente del canevás, reduciéndolas préviamente á la escala del plano si es distinta de la que corresponde á las horizontales del perfil, uniendo despues por curvas contínuas los puntos de igual cota.

Los perfiles no siempre siguen las lineas del canevás: algunas veces se trazan y se obtienen por perpendiculares á una de dichas líneas, como en la fig. 126 (lám. 12) en que lo son al lado AB del polígono; otras se determinan siguiendo una base de operaciones (Acot. 129), que no es otra cosa que una trasversal del canevás, cuya proyeccion se relaciona con él, y levantando perfiles trasversales (231) en los vértices de esta base, cuyos planos se refieren tambien al del canevás. En uno y otro caso estos perfiles auxiliares solo tienen por objeto hallar con más exactitud la representacion del relieve del terreno.

293. **Representacion de las curvas en el plano de una poblacion.**—Las curvas horizontales en los planos de las poblaciones sólo tienen por objeto dar á conocer la forma y los accidentes del suelo sobre que están edificadas, prescindiendo de las alteraciones, que en virtud de las construcciones ejecutadas han tenido que experimentar necesariamente. Las curvas horizontales pueden trazarse directamente (289) partiendo de los vértices acotados del canevás que ha servido para el levantamiento del plano, determinando así en las calles y plazas de la poblacion una série de puntos de cota entera, cuyas proyecciones referidas al plano sirven para trazar las curvas horizontales, uniendo por curvas contínuas, que pasan por encima de las plantas de los edificios, los puntos que resulten de igual cota.

Las curvas pueden trazarse en el plano mismo por las escalas de pendiente de las líneas que constituyen el canevás (291), ó deducirse de los perfiles construidos segun las mismas líneas (292), refiriendo despues al terreno las proyecciones obtenidas en el plano para los puntos de cota múltipla de la equidistancia de los planos secantes.

Sería muy conveniente dejar señalados en las aceras de la poblacion, ó referidos á puntos fijos los vértices del canevás, así como los puntos obtenidos para las curvas; sobre todo cuando las construcciones deban someterse á una alineacion y á una rasante determinadas; y tambien para facilitar los estudios de distribucion de aguas en la poblacion, ú otros en que tenga influencia la forma del terreno y las variaciones que ha introducido en ella la construccion de los edificios.

294. Tratándose de una poblacion pequeña, comprendida en un terreno que se determina por curvas horizontales, puede seguirse en su interior cualquiera de los procedimientos indicados (293) á partir de un punto *a* (fig. 127; lám. 13) de cota conocida, sirviendo los que se determinen en el contorno de la poblacion para relacionar el trazado con el de las curvas exteriores. Tambien puede determinarse el punto *b* de la curva 4 á partir de *a* (279), continuando desde él hasta llegar á *c*, y determinando del modo indicado los puntos *m*, *r*, *s*, hasta salir de la poblacion, continuando desde este último punto la marcha general.

295. **Empleo de la cadena para la determinacion aproximada de las curvas.**—Tendida la cadena segun A*c* (fig. 128; lám. 13) para medir horizontalmente la distancia AB, puede medirse tambien el desnivel $cp = 3,^{m}7$ de los extremos de la cadena, y dada la equidistancia $xr = 5^{m}$ de las curvas, puede determinarse la distancia A*x* á que deben hallarse unas de otras las curvas que han de cortar en el plano á la proyeccion de AB, empleando la proporcion

$$Ac : cp :: Ax : xr,$$

en la que sustituyendo los valores hallados, será

$$10 : 3,7 :: Ax : 5;$$

de la que resulta $Ax = 13,^{m}5$.

Si resulta que la proyeccion de AB es 54^{m} por ejemplo, dividiendo este número por el resultado 13,5 que acabamos de obtener, el cociente 4 indicará que la proyeccion de AB quedará dividida en cuatro partes iguales por las curvas equidistantes 5^{m} en sentido vertical.

296. Para hacer aplicacion de este método, es preciso anotar la distancia horizontal que corresponde á cada una de las rectas medidas en el terreno, y el desnivel de la cadena por un número que se acompaña de una flecha dirigida en el sentido en que el terreno baja, como se ve en todas las que constituyen el canevás de la fig. 129 (lám. 13). Para trazar las curvas se hallará (295) que *am* debe quedar dividida en cuatro partes iguales: y empleando el mismo cálculo para las demás rectas del canevás, se podrán determinar los puntos de paso de las curvas.

En el ejemplo que citamos, el canevás se compone de una base *abc* y de perfiles trasversales *m*, *t*, *z*; pero puede aplicarse á otro cualquiera. Para que el trazado de las curvas se acerque á la representacion del terreno, es preciso haber croquisado la forma general del terreno, expresando con claridad los talwegs, las pequeñas divisorias y otros accidentes que pueden influir en su forma general.

297. **Eleccion de la equidistancia de las curvas.**—La equidistancia de las curvas debe hallarse en relacion con la escala del plano, siendo inversamente proporcional á ella: en efecto, si el plano se ha trazado en escala grande, y lo fuese tambien la equidistancia, la mucha separacion de las curvas haría desaparecer muchos detalles, desfigurando la verdadera forma del terreno, y no dando una idea muy aproximada de sus pendientes; si por el contrario la escala fuese muy pequeña, sería necesario una equidistancia bastante grande para que la union de las curvas no hiciese confuso el dibujo. Estas circunstancias deben guiar en general para la adopcion de la equidistancia: en la mayor parte de los casos pueden emplearse, segun Goulard-Henrionnet, las indicadas en la tabla siguiente:

Para la escala de	1 por 5000	2,m5
	1 por 10000	5
	1 por 20000	10
	1 por 40000	15
	1 por 80000	20

298. **Problemas que pueden resolverse en el plano de un terreno determinado por curvas horizontales.**—Obtenida la representacion de un terreno por las curvas horizontales, pueden resolverse en el plano muchos problemas interesantes por sus numerosas é importantes aplicaciones. Entre ellos puede determinarse la cota de un punto cualquiera cuya proyeccion sea dada en el plano (Acot. 113); porque estará comprendido en general entre dos curvas acotadas. En el caso particular de hallarse en una de ellas, es evidente que tendrá la cota que á la curva corresponde. Recíprocamente, puede determinarse (Acot. 114) la proyeccion de un punto cuando se conoce su cota, y la proyeccion dada ha de hallarse en una recta que tiene dos puntos comunes con las curvas de la superficie representada. Pueden trazarse tambien (Acot. 115) curvas horizontales intermedias ralativamente á las que determiuan la superficie, completando así en algunos casos su representacion. Se puede determinar (Acot 116) la longitud é inclinacion de la recta que une dos puntos cuyas proyecciones son dadas en el plano.

299. **Deduccion de perfiles segun direcciones dadas en el plano.**—Determinada la representacion de un terreno por medio de las curvas horizontales, puede deducirse de ella el perfil de la superficie representada, dada la traza ó directriz del perfil. Cuando esta directriz es una recta trazada en el plano (Acot. 125), está reducido el problema á determinar (Acot. 123) la interseccion de la superficie con el plano vertical cuya traza es la recta dada, levantando perpendiculares á esta traza *mn* (figu-

ra 117; lám. 11) desde las proyecciones acotadas, hasta que encuentren á las trazas de los planos horizontales de igual cota. La línea que une los puntos de interseccion así obtenidos, es el perfil que se pretende hallar.

Tambien puede construirse el perfil (Acot. 126) cuando la directriz es una línea curva ó mista.

Este problema, recíproco del que hemos dado á conocer (292), sirve para dar una idea completa del relieve del terreno en todas direcciones, y tiene una aplicacion muy importante en las variaciones que sin recurrir á nuevas operaciones en el campo puede hacerse experimentar á un proyecto de canal, de un camino, ó de otra obra análoga cualquiera, deduciendo del plano mismo todos los datos que sin su auxilio hubiera sido necesario tomar de nuevo en el terreno.

CAPITULO VII.

Nivelacion por pendientes.

Generalidades.—Instrumentos de la nivelacion por pendientes.—Goniómetros de limbo zenital.—Goniómetro zenital de perpendículo.—Eclímetros.—Eclímetro de perpendículo.—Trigonómetro de Maison.—Eclímetro de pínulas.—Verificaciones y correcciones.—Eclímetro de Chézy.—Eclímetros de pínulas y anteojo.—Verificaciones y correcciones.—Tablas de reduccion de las pendientes á los ángulos á que corresponden.—Problema general de la nivelacion por medio de las pendientes.—Nivelacion simple.—Con los goniómetros de limbo zenital.—Con los eclímetros.—Con la plancheta fotográfica.—Obstáculos que suelen presentarse en la resolucion del problema de la nivelacion simple.—Causas de error en la resolucion del problema de la nivelacion simple.—Defecto de verticalidad del limbo zenital.—Falta de paralelismo de las verticales de los puntos extremos.—Límite de la distancia á que puede operarse en razon á la apreciacion del limbo zenital.—Correccion á que deben sujetarse los valores hallados por la aplicacion de las fórmulas generales.—Correccion de la altura del instrumento.—Reduccion al centro de la estacion.—Correccion de las fórmulas generales de la nivelacion por pendientes.—Límite del empleo de las fórmulas generales.—Método de la nivelacion recíproca.—Aplicaciones de la nivelacion recíproca.—Determinacion del ángulo de refraccion.—Indice de refraccion.—Nivelacion compuesta.—Acotacion de los puntos del terreno.—Determinacion directa de la cota de un punto desde el cual se divisa el horizonte del mar.—Dificultades que se presentan en la práctica de la nivelacion por pendientes.—Método de las estaciones alternadas.—Perfiles.—Perfil longitudinal.—Croquis y registro.—Cálculo de las distancias al orígen y de las cotas.—Perfiles trasversales.—Problemas de la nivelacion por pendientes.—1.° Hallar la pendiente de la recta que une dos puntos dados del terreno.—2.° Dado un punto del terreno, hallar otro tal, que la recta que los une tenga una pendiente dada.—3.° Trazar en el terreno una línea de pendiente dada.—4.° Hallar por medio del eclímetro la distancia entre dos puntos dados.

300. **Generalidades.**—*La nivelacion por pendientes* ó *nivelacion trigonométrica* tiene por objeto hallar el desnivel entre dos puntos dados, resolviendo el triángulo rectángulo ABC (fig. 130; lám. 13), que constituye la recta AB que los une, con la vertical BC del punto más elevado y la horizontal AC del otro, conociendo la pendiente ó inclinacion de AB (Acot. 25) y la longitud de la misma recta ó de su proyeccion horizontal

AC. La pendiente puede obtenerse en grados referida al ángulo A de elevacion, y al de depresion *m* (fig. 131; lám. 13), ó por el ángulo zenital, complemento de uno de los anteriores (tomo I, 251); ó bien por la relacion entre el desnivel BC (fig. 130; lám. 13) y la proyeccion horizontal AC (Acot. 25). Esta relacion es la tangente trigonométrica del ángulo de elevacion ó depresion correspondiente.

301. **Instrumentos de la nivelacion por pendientes.—Goniómetros de limbo zenital.**—Para la determinacion de los ángulos de elevacion y depresion ó de los ángulos zenitales, se emplean todos los goniómetros dispuestos para la medida de los ángulos situados en planos verticales; tales son: la brújula de limbo zenital descrita ya (tomo I, 396) y llamada tambien por esta razon *brújula nivelante*; la pantómetra de limbo zenital (tomo I, 507); los teodolitos y el círculo repetidor (tomo I, capítulo X). A estos puede agregarse el grafómetro (tomo I, 482), disponiendo su limbo verticalmente por medio de la plomada (tomo I, 484).

Entre estos goniómetros, hay algunos dispuestos para la determinacion directa de los ángulos zenitales, como el teodolito excéntrico de Gambey, el círculo repetidor y el círculo entero de reflexion (tomo I, 570, 579 y 604): los restantes dan inmediatamente los de elevacion y depresion, pudiendo deducirse de ellos (tomo I, 251) los ángulos zenitales.

302. **Goniómetro zenital de perpendículo.**—Es el nivel de perpendículo descrito ya (tomo I, 63), con la sola modificacion de sustituir al travesaño un arco graduado á partir de su punto medio *m* (fig. 130; lámina 13) en que se halla marcado el cero, partiendo desde él la numeracion de las graduaciones á derecha é izquierda, y sirviendo una de estas graduaciones para la apreciacion de los ángulos de elevacion, y la otra para los de depresion.

La verificacion es la que hemos expuesto (tomo I, 66), y da á conocer el error de que el instrumento puede estar afectado, que se debe llevar en cuenta de la manera que hemos indicado (tomo I, 527) en la apreciacion de los ángulos verticales.

El uso de este instrumento está reducido á colocarle sobre un reglon dispuesto sobre la recta AB cuya pendiente se trata de conocer, observando despues el valor del arco *mn* comprendido desde el cero de la graduacion hasta la division que coincide con el cordon del perdendículo: este arco corresponde á un ángulo *bac* que es igual (tomo I, 67) el ángulo en A que mide la pendiente de AB.

303. **Eclímetros.**—Se da el nombre genérico de *eclímetro, clisímetro* ó *clitómetro* á todo instrumento destinado á la medida de las pendientes, por la relacion en que se encuentra el desnivel que existe entre dos puntos con la proyeccion de la recta que los une. Esta relacion es la tangente trigonométrica del ángulo que mide la pendiente de la recta de que se trata (300). Tambien se da por extension el nombre de eclímetro al goniómetro que acabamos de describir (302), y á la parte que en los de limbo zenital está destinada á la apreciacion de los ángulos verticales:

razon por la cual se llama tambien *brújula-eclímetro* á la brújula de limbo zenital que hemos citado (301). El teodolito de Lerebours (tomo I, 545) es á la vez eclímetro y goniómetro de limbo zenital.

304. **Eclímetro de perpendículo.**—Es el nivel de perpendículo que hemos citado (302) y cuyo travesaño está dividido en partes iguales, cada una de las cuales es la centésima parte de la distancia *bn* (fig 131; lámina 13) comprendida entre el punto *b* y el medio *n* del travesaño. Este instrumento se corrige como el nivel de perpendículo (tomo I, 63), llevando en cuenta el error de que puede llegar á estar afectado por el uso.

Para hallar la pendiente de una recta AB se le dispone sobre ella como el goniómetro de perpendículo, y se observa el número de divisiones que señala la parte *nr* del travesaño comprendida entre el cero *n* de la graduacion y la division *r* que coincide con el cordon del perpendículo.

La semejanza de los triángulos rectángulos ABC, *brn*, que tienen el ángulo *b* igual al B (tomo I, 67), da la relacion

$$\frac{AC}{CB}=\frac{nr}{bn}=\frac{nr}{100}.$$

Así, cuando *nr* comprende 1... 2... 3.... divisiones, la pendiente de AB será de 1... 2... 3.... por 100.

305. El eclímetro de perpendículo puede estar unido á una regla en cuya mitad se halla dispuesta una rodilla de juego de nuez (tomo I, 329), que le une con el trípode destinado á sostener todo el aparato. Por medio de la rodilla se da á la regla la inclinacion conveniente.

306. **Trigonómetro de Maison.**—Se compone este eclímetro de dos reglas metálicas A*a*, B*b* (fig. 132; lám 13) perpendiculares entre sí y divididas en milímetros y décimas de milímetro, á partir del punto *b* hácia abajo en la segunda de estas reglas, y de *c* á uno y otro lado en la primera. La regla A*a* se puede mover paralelamente á sí misma á lo largo de B*b*, fijándola en una graduacion dada de esta última por medio de un tornillo de presion convenientemente dispuesto. Al extremo *b* de la regla B*b* se halla unida por medio de una charnela otra regla *bp* que toma la posicion vertical en virtud del peso *p* en que termina; y en el punto *c* de la A*a* otra *cm* dividida, dispuesta como la *bp*, y provista de dos pínulas laterales, una fija en *c* y otra móvil á lo largo de *cm*, con un índice que sirve para señalar la distancia á que en una posicion cualquiera se halla del punto *c*. Este aparato puede colocarse verticalmente sobre un trípode ó disponerse en un caballete de modo que permita á las reglas los movimientos que hemos dado á conocer.

307. **Eclímetro de pínulas.**—Este instrumento es una modificacion del nivel descrito (62): la pínula P (fig. 133; lám. 13) es en todo igual á la representada en la fig. 52 (lám. 4), y está provista de su tornillo de correccion *s*; la pínula P′ es mucho más elevada y está formada por un

bastidor fijo *a* (fig. 134; lám. 13), dentro del cual puede subir y bajar con movimiento rápido el tablero T cuando se afloja el tornillo de presion *z*, y se pone en movimiento el tablero cogiéndole por el boton *d*. Apretando el tornillo *z* forma cuerpo el tablero con el cilindro *b*, y haciendo girar á la cabeza del tornillo *x*, el cilindro sube ó baja con movimiento lento por la recta *c* llevándose consigo al tablero.

Dos tornillos proyectados en *h* (fig. 133; lám. 13) sirven para fijar el instrumento á la plataforma. Esta es generalmente la de dos tornillos y resortes metálicos descrita anteriormente (tomo I, 336).

308. *Graduaciones del instrumento.*—El larguero de la derecha del bastidor *a* (fig. 134; lám. 13) está dividido con arreglo al metro, y el de la izquierda se refiere á toesas ó á varas francesas, por lo que esta última graduacion no tiene aplicacion entre nosotros. La unidad en la division métrica tiene una altura de $3,^{mm}25$, que es la centésima parte de la longitud $0,^{m}325$ de la regla CD (fig. 133; lám. 13), contada entre los planos exteriores de las pínulas, y está dividida en dos partes, siendo por lo tanto de $\frac{1}{2}$ por 100 la menor division de la escala. Para evitar confusion, solo se enumeran generalmente las divisiones correspondientes á números pares de unidades, como indica la fig. 134 (lám. 13).

El nonius *m* que lleva el tablero T se ha formado de cuatro de las menores divisiones de la escala y se ha dividido en 5 partes iguales, apreciando por lo tanto (tomo I, 309) $\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{10}$, ó décimas partes de la unidad. Las pendientes podrán apreciarse por la relacion entre un número de unidades y décimas de unidad y el número constante 100. La apreciacion de la pendiente en la posicion *m'* del nonius será de $17,^{m}2$ por 100, siendo la division 2 del nonius lo que coincide con una de las de la escala. En la posicion *m''* la pendiente será de 24,7 por 100, apreciando las décimas por la media division comprendida entre la division 24 de la escala y el cero del nonius, aumentada con las 2 décimas que dá la coincidencia de su cero con una de las divisiones de la escala.

309. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Verticalidad del eje de rotacion del instrumento.*—Es la que hemos indicado (66), corrigiendo por el tornillo *t* (fig. 133; lám. 13) y los de la plataforma.

310. 2.ª *Horizontalidad de la visual cuando coincide el cero del nonius con el cero de la escala.*—Se establece la coincidencia exacta de los ceros y se emplea en la verificacion y correccion el método expuesto (69), corrigiendo por el sólo movimiento del tornillo *s* de la pínula pequeña. No debe de ninguna manera emplearse en esta correccion el tornillo *x*; porque se perdería la coincidencia de los ceros, que es absolutamente necesaria para que las lecturas que han de hacerse, den exactamente la relacion en que se funda la construccion del instrumento; en efecto, la posicion horizontal resultaría marcada por una pendiente diferente de cero, y todas las alturas estarian afectadas del mismo error.

311. **Eclimetro de Chézy.**—Sólo difiere del que acabamos de describir, en que la plataforma está sustituida por una segunda regla unida por una charnela y un tornillo á la primera, como en el nivel del mismo autor (70). La correccion de que es susceptible es tambien la misma (72), cuidando de establecer antes la coincidencia de los ceros, como hemos dicho (310).

312. **Eclímetro de pinulas y anteojo.**—Se compone de una regla sobre la que se apoyan pínulas desiguales como en el eclímetro descrito (307): la pínula pequeña puede subir ó bajar en la cantidad necesaria para la correccion en virtud de un tornillo *s* (fig. 135; lám. 14), que se pone en movimiento por medio de una palanqueta. El tablero de la pínula mayor sube y baja tambien con movimiento rápido ó lento por el sistema de tornillos de presion *z* y de coincidencia *x* como en el eclímetro ordinario, y lleva consigo al anteojo, cuyo eje óptico toma la misma direccion que la recta que determina la visual en los taladros y las regillas de las pínulas. En este movimiento el anteojo gira alrededor de un eje que se apoya en montantes fijos al tablero de la pínula pequeña. A medida que en razon á este movimiento aumenta ó disminuye la longitud de la parte del anteojo comprendida entre las pínulas, el tubo del objetivo entra ó sale á frotamiento en la prolongacion del tubo del ocular, situada entre las pínulas y destinada á proporcionar el aumento que producen las varias inclinaciones del eje respecto á la posicion horizontal del mismo. Sin esto, el movimiento de que nos ocupamos sería imposible. En muchos eclímetros se halla un tornillo *r* que sirve para corregir la posicion de las cerdas del retículo. El nivel está dispuesto tambien sobre la regla, y va provisto de un tornillo *t* de correccion particular.

La parte media de la regla se ensancha para dar cabida á una brújula dividida en grados de derecha á izquierda, cuya caja forma cuerpo con un tronco de cono, en cuya superficie lateral se hallan los nonius correspondientes á un limbo horizontal dividido de izquierda á derecha en grados y medios grados. Los nonius aprecian minutos. La plancha cónica de los nonius y toda la parte superior del instrumento se mueve en sentido horizontal, rápida ó lentamente, por el sistema de tornillos *a* y *c* de presion y de coincidencia. El limbo forma cuerpo con la espiga de una plataforma de tres tornillos (tomo I, 337).

La graduacion de la pínula mayor es la misma (308) que en el eclímetro ordinario.

313. En algunos eclímetros de anteojo se halla este situado por medio de unas dobles espigas salientes, que se apoyan en cajas cilíndricas dispuestas en unas piezas invariablemente unidas á los tableros de las pínulas; pudiendo levantarse el anteojo para colocarle invertido, de manera que el ocular puede hallarse indistintamente al lado de la pínula grande ó de la pequeña.

314. **Verificaciones y correcciones.**—1.ª *Verticalidad del eje de*

rotacion.—Lo mismo que en el nivel de pínulas (66) corrigiendo por el tornillo *t* y los de la plataforma.

315. 2.ª *Horizontalidad de la visual cuando coincide el cero del nonius con el de la escala.*—Esta correccion, en la que se emplea el tornillo *s*, es la misma que hemos dado á conocer (310) para el eclímetro de pínulas.

316. 3.ª *Paralelismo del eje óptico del anteojo respecto á la visual que las pínulas determinan.*—Se dirige la visual por las pínulas á un objeto muy lejano, empleando en caso necesario los tornillos *z* y *x*, así como los *a* y *c*, y se observa si la dirigida por el anteojo va á parar al mismo punto; haciendo en caso contrario que el cruzamiento de las cerdas le cubra exactamente, empleando para ello el tornillo *r* del retículo. Las visuales serán entonces gráficamente paralelas (tomo I, 454). Si el retículo no puede moverse es preciso contentarse con el paralelismo que haya resultado de la construccion del instrumento, que por esta misma razon ha debido ser muy esmerada.

317. En los instrumentos en que el anteojo está dispuesto como hemos indicado (313), se hace la correccion como en el nivel de Lerebours (79), despues de corregir la posicion de la cerda horizontal por medio de los tornillos del retículo (77), alterando la posicion del tubo del anteojo con el auxilio de un tornillo de correccion que hace variar la altura de uno de los soportes en que se apoya, independientemente del tablero á que está unido.

318. **Tablas de reduccion de las pendientes á los ángulos á que corresponden.**—En la resolucion de los problemas de que vamos á ocuparnos, es necesario muchas veces conocer la relacion que expresa la tangente del ángulo de elevacion ó depresion obtenido con un goniómetro de limbo zenital, y otras conviene saber el valor angular correspondiente á la relacion dada por un eclímetro. Esta consideracion nos ha conducido á insertar la tabla que exponemos en la pág. 138. En la primera columna se hallan las pendientes por ciento, que indican el desnivel 0,^{m}1..... 0,^{m}2.... que corresponde á la distancia horizontal de 100 metros para la línea á que esta pendiente corresponde: la segunda expresa los desniveles referidos á la unidad de distancia: las columnas tercera y cuarta contienen los valores angulares que á las mismas pendientes corresponden, para los límites de apreciacion de los instrumentos más usados en las operaciones topográficas. Para hallar el valor angular de una pendiente que no esté en las tablas, como la de 2,7 por 100, no habrá más que buscar en las de líneas trigonométricas naturales, y en la columna de las tangentes el número que más se acerque á este valor, considerando corrida la coma dos lugares á la derecha; y se hallará que es 0,0270592 y corresponde á 1° 33′. Recíprocamente, á este valor angular corresponde próximamente la pendiente de 2,7 por 100. Para la apreciacion de 20′′, y como un ejemplo del empleo del cálculo logarítmico, se tendría la expresion

Tabla de reduccion de las pendientes á los ángulos á que corresponden.

PENDIENTES.		ÁNGULOS Á QUE CORRESPONDEN.		PENDIENTES		ÁNGULOS Á QUE CORRESPONDEN.	
Por ciento.	Por unidad.	De 1′ en 1′.	De 20 en 20″.	Por ciento.	Por unidad.	De 1′ en 1′.	De 20 en 20″.
0,1	0,001	0° 3′	0° 3′ 20″	1,9	0,019	1° 5′	1° 5′ 20″
0,2	0,002	0 7	0 7 0	2,0	0,020	1 9	1 8 40
0,3	0,003	0 10	0 10 20	2,5	0,025	1 26	1 26 0
0,4	0,004	0 14	0 13 40	3,0	0,030	1 43	1 43 0
0,5	0,005	0 17	0 17 20	3,5	0,035	2 0	2 0 20
0,6	0,006	0 21	0 20 40	4,0	0,040	2 17	2 17 20
0,7	0,007	0 24	0 24 0	4,5	0,045	2 35	2 34 40
0,8	0,008	0 28	0 27 40	5,0	0,050	2 52	2 51 40
0,9	0,009	0 31	0 31 0	5,5	0,055	3 9	3 9 0
1,0	0,010	0 34	0 34 20	6,0	0,060	3 26	3 26 0
1,1	0,011	0 38	0 37 40	6,5	0,065	3 43	3 43 0
1,2	0,012	0 41	0 41 20	7,0	0,070	4 0	4 0 20
1,3	0,013	0 45	0 44 40	7,5	0,075	4 17	4 17 20
1,4	0,014	0 48	0 48 0	8,0	0,080	4 34	4 34 20
1,5	0,015	0 52	0 51 40	8,5	0,085	4 52	4 51 40
1,6	0,016	0 55	0 55 0	9,0	0,090	5 9	5 8 40
1,7	0,017	0 58	0 58 20	9,5	0,095	5 26	5 25 40
1,8	0,018	1 2	1 2 0	10,0	0,100	5 43	5 42 40

$$\frac{2,7}{100}=\frac{\text{tang. } x}{r},$$

siendo x el ángulo que se busca y r el rádio de las tablas: tomando logaritmos, se tendrá sucesivamente:

$$\log.\ \text{tang}\ x = 10 + \log\ 0{,}027;$$
$$\log.\ \text{tang.}\ x = 10 + \bar{2}{,}4313638 = 8{,}4313638,$$

que en las tablas de Callet corresponde á un ángulo de 1° 32' 48'', y que atendiendo á la apreciacion del instrumento se marcará en él por 1° 32' 40''.

319. **Problema general de la nivelacion por medio de las pendientes** —El problema general de la Nivelacion (149) se resuelve tambien con el auxilio de los instrumentos que hemos dado á conocer en los párrafos que anteceden, siendo la nivelacion necesaria simple ó compuesta (150), segun se obtenga el desnivel entre los puntos dados por una ó más estaciones del instrumento.

320. **Nivelacion simple.—Con los goniómetros de limbo zenital.** —Sean A y B (fig. 136; lám. 13) los puntos dados: haciendo estacion (tomo I, 399) en el primero de estos puntos con el instrumento perfectamente corregido, y tomando en una mira la altura Aa del eje de rotacion del anteojo sobre el punto de estacion, se colocará la mira en el extremo B y se llevará la visual á coincidir con la línea de fé de la tablilla; el ángulo de elevacion m dado por el instrumento mide (tomo I, 400) el valor de la pendiente de la recta AB; y como además se conoce la longitud de AB ó de su proyeccion AC, representándolas respectivamente por L y l, y llamando d al desnivel BC que se trata de conocer, se tendrá (tomo I, 18)

$$d = L \times \text{sen. } m \qquad [1];$$

ó tambien (tomo I, 20)

$$d = l \times \text{tang. } m \qquad [2];$$

que nos dicen, que *el desnivel entre dos puntos se obtiene multiplicando la longitud de la recta que los une por el seno de la pendiente de la misma recta, ó la distancia horizontal por la tangente que á la misma pendiente corresponde.*

Estas reglas se aplican igualmente al caso de la fig. 137 (lám. 13), en que la pendiente se obtiene por un ángulo de depresion. Tambien sirven para el goniómetro de perpendículo (302).

321. *Empleo de los ángulos zenitales.*—Cuando el instrumento está dispuesto para obtener los ángulos zenitales z (figs. 136 y 137; lám. 13), las fórmulas [1] y [2] se convertirán en las siguientes:

$$d = L \times \cos.\ z; \qquad [3]$$
$$d = l \times \text{cotg. } z;$$

estas fórmulas se aplican á la fig. 136 (lám. 13), atendiendo á que los ángulos z y m son complementarios (tomo I, 3); y para la fig. 137 (lám. 13), se tendrá:

$$d = L \times \text{sen.}\ (z - 90^\circ); \qquad [4]$$
$$d = l \times \text{tang}\ (z - 90^\circ);$$

pues en ella se verifica evidentemente $m = z - 90^\circ$.

322. *Ejemplos.* Sean AB $= 120^{m}4$; $m = 10^\circ\ 26'$: la proyeccion horizontal de AB será (tomo I, 160) $118,^{m}41$. Aplicando la fórmula [1] se tendrá sucesivamente:

$$d = 120,^{m}4 \times \text{sen.}\ 10^\circ\ 26';$$
$$d = 120,^{m}4 \times 0,1811 = 21,^{m}804.$$

Haciendo aplicacion del cálculo logarítmico se tendrá:

$$\begin{array}{rcl} \log\ \ 120,4 & = & 2,0806265 \\ + \log.\ \text{sen.}\ 10^\circ\ 26' & = & 9,2578977 \\ \hline \text{Suma} & = & 11,3385242\ ; \\ \log.\ d & = & 1,3385242\ ; \\ d & = & 21,^{m}804. \end{array}$$

Empleando la fórmula [2] se tendría:

$$d = 118,^{m}41 \times \text{tang.}\ 10^\circ\ 26';$$
$$d = 118,^{m}41 \times 0,1841 = 21,^{m}799,$$

que se diferencia tan sólo en 5^{mm} de la hallada por la fórmula anterior.

Aplicando los mismos valores á las fórmulas [3], y observando que se tiene $z = 90^\circ - m = 90^\circ - 10^\circ\ 26' = 79^\circ\ 34'$, se obtendrán tambien los mismos valores para d, toda vez que el seno de $10^\circ\ 26'$ es igual al coseno de $79^\circ\ 34'$, y lo mismo sucede con el coseno y la cotangente respectivas.

Con respecto á las fórmulas [4] se tendrá presente que conservando m el valor que le hemos atribuido será $z = 100^\circ\ 26'$, y se tendrá

$$d = 120,^{m}4 \times \text{sen.}\ (100^\circ\ 26' - 90^\circ),$$

que se reduce á la ecuacion

$$d = 120,^{m}4 \times \text{sen.}\ 10^\circ\ 26';$$

que es la que hemos calculado.

323. **Con los eclímetros.**—*Eclímetro de perpendículo.*—La proporcion que hemos establecido (304) nos sirve para hallar el desnivel entre los puntos A y B (fig. 131; lám. 13), pues despejando AC que es el desnivel pedido, se tendrá la fórmula

$$AC = \frac{CB \times nr}{100} \qquad [5],$$

en la que BC es la longitud de la proyeccion horizontal de AB, y nr el número de divisiones comprendido entre n y r en el travesaño del instrumento. Si suponemos que se tiene $BC = 25,^{m}8$ y $nr = 18$ divisiones, resultará $AC = 4,^{m}644$.

324. *Empleo del eclímetro de perpendículo dispuesto sobre un trípode.*—Colocado el instrumento en estacion en A (fig. 138; lám. 14), se dirige por la regla la visual al punto B, observando el número de divisiones que señala la parte cr del travesaño, y midiendo la proyeccion horizontal de AB. Considerando tiradas por A y C las horizontales AD, CH, los triángulos rectángulos bcr, CHB, que son semejantes por tener iguales los ángulos en b y en C (Geom. Teor. 12), dan la proporcion

$$bc : cr :: CH : HB = \frac{CH \times cr}{bc};$$

en la que CH es la longitud l de la proyeccion horizontal, cr el número n de divisiones que marca la graduacion del instrumento, y bc el número constante 100. El desnivel BD que buscamos, y que representaremos por x, se hallará restando de HB la altura HD = AC del instrumento á que llamaremos a. En virtud de lo expuesto, la fórmula que dará el desnivel será

$$x = \frac{l \times n}{100} - a \qquad [6]$$

325. *Ejemplo del trigonómetro de Maison.*—Se coloca el instrumento en estacion en C (fig. 132; lám. 13), y se dirige la visual por la regla Aa á la tabla de una mira colocada en M. La altura á que ha de hallarse la tablilla es arbitraria, ó está subordinada á los accidentes del terreno comprendido entre C y M, ó á la posicion que se ha dado al instrumento. Observando el número de divisiones que comprenden los lados bc, ca del triángulo bca, y midiendo la longitud de la proyeccion horizontal ch de la recta CM, los triángulos rectángulos bca, chD darán como en el eclímetro de perpendículo (324) la proporcion

$$bc : ca :: ch : hD = \frac{ca \times ch}{bc};$$

añadiendo á hD la altura MD que marca la mira, se tendrá la hM, de la que se restará la Cc del instrumento para obtener (324) el desnivel entre C y M.

Si se conoce préviamente la proyeccion ch, se corre la regla Aa hasta que la parte bc de la Bb marque el mismo número de milímetros que de metros la proyeccion conocida, y aplicando el procedimiento indicado se tendrá en el número de milímetros que marca ca el de metros que corresponde á hD.

326. Si no se puede medir directamente la proyeccion horizontal de CM, se mueve la pínula de la regla cm (306) hasta que la visual tirada por A y la posicion de la pínula r vaya á parar al pié M de la mira: se tendrá entonces la proporcion

$$Ac : cr :: AD : DM;$$

en la que las rectas Ac y cr se conocen por las graduaciones del instrumento, DM es la altura de mira, y se puede conocer por lo tanto la magnitud AD resolviendo la proporcion. Restando de AD la parte Ac se tendrá la magnitud de cD, y en el triángulo bca puede conocerse la que corresponde á la hipotenusa ba directamente, si la regla bp está tambien dividida; ó por la resolucion del triángulo, en el que se conocen los dos catetos y además la relacion $\frac{ca}{cb}$, que es la tangente del ángulo b, el cual puede conocerse por lo tanto aplicando las reglas dadas (tomo I, 24 y 26) El valor de ch podrá entonces deducirse de la proporcion

$$ba : bc :: cD : ch = \frac{cD \times bc}{ba}$$

327. *Empleo del eclímetro de pínulas.*—Se coloca el instrumento en estacion (tomo I, 399) en el punto A (fig. 139; lám. 14), despues de haberle corregido perfectamente, y de modo que el ocular de la pínula menor se halle próximamente en la vertical del mismo punto, y la mira en B con la altura $Bm = Aa$, moviendo el tablero de la pínula mayor como hemos indicado (307) hasta que la visual vaya á parar exactamente al punto de mira m, observando despues la altura cb marcada como hemos dicho (308) por el cero del nonius en la pínula grande. Los triángulos rectángulos semejantes acb, ACB (Geom. Teor. 63) á causa de ser paralelas am y AB (tomo I, 400), darán la proporcion

$$ac : cb :: AC : CB,$$

en la que ac es el número constante 100; cb la lectura observada en la graduacion de la pínula grande; AC la proyeccion horizontal de AB, y CB el desnivel que se trata de obtener. De la proporcion establecida se deduce la fórmula [5] que hemos hallado (323). El desnivel de que nos ocupamos se obtiene de la misma manera con los eclímetros de anteojo (312).

Cuando se trata de una pendiente bajando, la operacion se hace del mismo modo, sirviendo de ocular la pínula grande.

328. **Con la plancheta fotográfica.**—Sea C (fig. 140; lám. 14) el punto de estacion con la plancheta fotográfica (tomo I, 619), *ab* la imágen del objeto AB formada en la placa sensible, *c* el centro óptico del objetivo, y *m* la proyeccion de la cerda horizontal, que determina con *c* la horizontal *m*M. La semejanza de los triángulos *abc*, *c*AB, y de los triángulos rectángulos en que divide á los primeros la recta *m*M, dá las proporciones siguientes:

$$cm : ab :: c\mathrm{M} : \mathrm{AB};$$
$$cm : am :: c\mathrm{M} : \mathrm{AM};$$
$$cm : bm :: c\mathrm{M} : \mathrm{BM}.$$

En todas estas proporciones se conoce el primer término, que es la distancia focal medida por el cero del nonius correspondiente á la escala que acompaña (tomo I, 621) al instrumento; el segundo término, cuya magnitud real se mide en la placa; y el tercero, que es la proyeccion horizontal de la distancia CA, obtenida por las operaciones de planimetría (tomo I, 947), ó que puede medirse directa ó indirectamente. La primera proporcion dará la altura AB ó el desnivel entre sus puntos extremos: la segunda la altura AM, que es el desnivel entre la imágen *m* de la cerda horizontal en la placa y el punto A del terreno, de la cual se puede restar la altura C*c* del instrumento para obtener el desnivel entre C y A: la tercera proporcion dá el desnivel MB entre el punto B y la cerda horizontal *m* de la placa, al que puede añadirse la altura del instrumento para obtener el desnivel entre C y B.

329. **Obstáculos que suelen presentarse en la resolucion del problema de la nivelacion simple.**—Cuando la forma del terreno ó algun obstáculo intercepta la visual paralela á la línea AM (fig. 141; lámina 14) que une los términos de la estacion, es preciso elevar la tablilla de la mira hasta la altura C′ necesaria para alcanzar á la visual que salva el obstáculo. El ángulo de elevacion *m* así obtenido dará por la aplicacion de una de las fórmulas [1] ó [2] (320) el desnivel HC′ = BA′, en virtud de la igualdad del triángulo CHC′ con el ABA′ que resulta de tirar por A la paralela AA′ á la visual CC′; y para hallar el desnivel verdadero BM que existe entre A y M, observaremos que se puede establecer la ecuacion

$$\mathrm{BM} = \mathrm{BH} + \mathrm{HM} \qquad [7]:$$

y observando que se tiene BH = AC y HM = HC′ — MC′, sustituyendo en la ecuacion [7] resultará

$$\mathrm{BM} = \mathrm{AC} + \mathrm{HC'} - \mathrm{MC'} \qquad [8]:$$

llamando x al desnivel BM buscado, a á la altura AC del instrumento, observando que se tiene (320) $HC' = l \times$ tang. m, representando por h la altura de mira MC' y sustituyendo en la expresion [8], se halla la ecuacion

$$x = l \times \text{tang. } m + a - h \qquad [9];$$

que nos dice que el desnivel se obtiene en el caso que nos ocupa, añadiendo al valor obtenido por la aplicacion directa de la fórmula [2] (320) para el ángulo de elevacion m la altura del instrumento, y restando de esta suma la observada en la mira.

330. Para el ángulo de depresion m (fig. 142; lám. 14) se tiene desde luego la ecuacion

$$AC + AB = HC' + MC';$$

y sustituyendo los valores antes indicados,

$$a + x = l \times \text{tang. } m + h,$$

de la que resulta

$$x = l \times \text{tang. } m + h - a \qquad [10].$$

El desnivel se obtiene en este caso añadiendo al resultado obtenido por la fórmula [2] (320) para el ángulo de depresion m la altura de mira, y restando la del instrumento.

331. Las fórmulas [9] y [10] resuelven el problema segun que se trata de un ángulo de elevacion ó de depresion. Cuando se ha obtenido un ángulo zenital menor que 90° se aplicará al complemento del ángulo observado la primera de estas fórmulas, y la segunda cuando el ángulo zenital exceda de 90°.

332. **Causas de error en la resolucion del problema de la nivelacion simple.—Defecto de verticalidad del limbo zenital.**—Sea ah (figura 143; lám. 14) la horizontal del limbo; av la vertical del centro del mismo; am el diámetro del limbo que es perpendicular á ah, y que no coincidiendo con la vertical en la posicion en que le suponemos, forma con ella el ángulo t, el cual es el correspondiente (Geom. 67) al ángulo diedro de los planos vah, mah, vertical el primero é inclinado el segundo. Sea además x el verdadero ángulo zenital vaM, y z el maM complemento del de elevacion Mah obtenido en el instrumento: trazando con el mismo rádio los arcos t, x, z, correspondientes á los ángulos AaB, AaC, BaC, el triángulo esférico ABC que resulta será rectángulo en B, á causa de que siendo ah perpendicular á las rectas av y am y por consiguiente al plano que determinan (Geom. 54), el mah que pasa por ella y contiene á la visual aM será tambien perpendicular á vam (Geom.—Teor. 141): el triángulo esférico dará entonces (Trig. 55.—Primer caso)

$$\cos. x = \cos. t \times \cos. z \qquad [11]:$$

restando de cos. z ambos miembros de la ecuacion que acabamos de establecer, se convierte en

$$\cos. z - \cos. x = \cos. z - \cos. t \cos. z = \cos. z\,(1 - \cos. t) \qquad [12].$$

La expresion $\cos. A - \cos. B = -2 \operatorname{sen}. \frac{A+B}{2} \operatorname{sen}. \frac{A-B}{2}$, establecida en general (Trig. 19) nos dá para el primer miembro de la ecuacion [12], observando que se tiene (Trig. 5)

$$\operatorname{sen}. \frac{z-x}{2} = -\operatorname{sen} \frac{x-z}{2},$$

$$\cos. z - \cos x = 2 \operatorname{sen}. \frac{x+z}{2} \operatorname{sen}. \frac{x-z}{2};$$

igualmente la expresion general $\operatorname{sen}.^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos. A}{2}$ (Trigonometría 18) nos da, poniendo t en vez de A,

$$1 - \cos. t = 2 \operatorname{sen}.^2 \frac{t}{2}:$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion [12], y suprimiendo el factor 2 comun á ambos miembros, resulta

$$\operatorname{sen}. \frac{x+z}{2} \operatorname{sen}. \frac{x-z}{2} = \cos. z \operatorname{sen}.^2 \frac{t}{2},$$

en la que despejando $\operatorname{sen}. \frac{x-z}{2}$, se obtiene por último

$$\operatorname{sen}. \frac{x-z}{2} = \frac{\cos. z}{\operatorname{sen}. \frac{x+z}{2}} \times \operatorname{sen}.^2 \frac{t}{2} \qquad [3].$$

Observando en esta expresion que los valores x y z difieren muy poco, se tendrá sensiblemente $x + z = 2z$; de donde resulta

$$\frac{\cos. z}{\operatorname{sen}. \frac{x+z}{2}} = \frac{\cos. z}{\operatorname{sen}. z} = \operatorname{cotg}. z,$$

y la fórmula [13] se trasforma en

$$\operatorname{sen}.\ \frac{x-z}{2} = \operatorname{cotg}.\ z \times \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} \qquad [14].$$

El producto indicado en el segundo miembro de esta ecuacion es muy pequeño, porque el ángulo z difiere muy poco de 90°, y su cotangente es muy pequeña por lo tanto; así como el seno de t, por corresponder á un ángulo muy pequeño, siendo menor aún su cuadrado.

333. Si tratamos de hallar el límite de desviacion que puede tolerarse en la inclinacion del limbo, haciendo que la diferencia $x-z$ sea menor que el límite de apreciacion 20″ que suponemos en el limbo zenital, tendremos que restablecer el rádio de las tablas en la fórmula [14], que se convertirá entonces en

$$\operatorname{sen}.\ \frac{x-z}{2} = \frac{\operatorname{cotg}.\ z \operatorname{sen}^2 \dfrac{t}{2}}{r^2}:$$

dando á $x-z$ el valor que le hemos atribuido y despejando sen. $\frac{t}{2}$, se tendrá

$$\operatorname{sen}.\ \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{r^2 \times \operatorname{sen}.\ 10''}{\operatorname{cot}.\ z}};$$

y aplicando los logaritmos,

$$\log.\ \operatorname{sen}.\ \frac{t}{2} = \frac{20 + \log.\ \operatorname{sen}.\ 10'' - \log.\ \operatorname{cotg}.\ z}{2} \qquad [15].$$

Dando á z el valor 45° y aplicando la fórmula [15] resulta $t = 0°\ 48'$. Para $z = 85°$ resulta $t = 2°\ 42'$, que se puede aplicar á todos los ángulos de elevacion menores que 5°.

Cuando el límite de apreciacion es de 1′, como sucede en la mayor parte de los instrumentos topográficos ordinariamente usados, se tendrá para $z = 45°$, que es $t = 1°\ 57'\ 20''$; y para $z = 85°$ se obtiene $t = 6°\ 36'\ 40''$.

Se ve por los ejemplos que preceden, que en las circunstancias ordinarias, la desviacion necesaria para que el error exceda al límite de apreciacion del instrumento es bastante grande para que pueda apreciarse aun á simple vista, y que bastarán los medios ordinarios de correccion del limbo, y en otro caso el empleo de la plomada, para despreciar el error que de su inclinacion pudiera resultar.

334. **Falta de paralelismo de las verticales de los puntos extremos.**—Hemos dicho (tomo I, 414), que el defecto de paralelismo en

las verticales de los puntos extremos de la estacion es menor que el límite de apreciacion del instrumento cuando la distancia no llega á 2000^m, tratándose de instrumentos que aprecian de minuto en minuto, y de 620 á 670^m cuando aprecia de veinte en veinte segundos: es por lo tanto inapreciable el error que resulta en los casos que ocurren más generalmente en la práctica

335. **Límite de la distancia á que puede operarse en razon á la apreciacion del limbo zenital.**—Cuando se observa el ángulo de elevacion m (fig. 144; lám. 14) con objeto de obtener el desnivel entre dos puntos A y M, el límite de apreciacion del instrumento puede dar lugar, por exceso ó por defecto, en la apreciacion del ángulo, á un error t que producirá en el desnivel BM que se busca, una diferencia $MN = e$ en el mismo sentido, que es para ambos el de exceso en la figura. Tratemos de hallar el límite de la distancia l á que hemos de llevar las observaciones para un valor dado de e, siendo conocida la apreciacion del limbo zenital que ha de emplearse en las operaciones. El triángulo AMN da la proporcion

$$e : AM :: \text{sen. } t : \text{sen. } ANM;$$

pero se tiene (tomo I, 19) $AM = \frac{AB}{\cos. m} = \frac{l}{\cos. m}$, y $ANM = 90^\circ - (t + m)$, que da (Trig. 6) sen. ANM = cos. $(m + t)$; y sustituyendo estos valores en la proporcion anterior, será

$$e : \frac{l}{\cos. m} :: \text{sen. } t : \cos. (m + t),$$

en la cual, multiplicando por cos. m los dos términos de la primera razon, y poniendo en vez de cos. $(m + t)$ la cantidad cos. m, que difiere poco de cos. $(m + t)$ en razon al poco valor de t relativamente al de m, se convierte en

$$e \times \cos. m : l :: \text{sen. } t : \cos. m;$$

de la que resulta

$$l = \frac{e \times \cos.^2 m}{\text{sen. } t} \qquad [16].$$

Para aplicar esta fórmula, supongamos que sea el límite de apreciacion del instrumento $t = 1'$, y que el error e en el desnivel entre dos puntos no deba pasar de $0,^m1$: la fórmula será entonces

$$l = \frac{0,^m1}{10^{10} \times \text{sen. } 1'} \times \cos.^2 m \qquad [17],$$

despues de restablecer el rádio de las tablas. Empezaremos por calcular el coeficiente constante $\frac{0,^{m}1}{10^{10} \times \text{sen}.\ 1'}$, cuyo logaritmo será log. 0,1 — 10 — log. sen. 1′ = — 1 — 10 — 6,4637261 = — 17,4637261 : tomando despues logaritmos en la fórmula [17] y sustituyendo el que acabamos de hallar, será

$$\log.\ l = -17{,}4637261 + 2 \times \log.\ \cos.\ m \qquad [18].$$

Suponiendo ahora que se opera en terrenos llanos en que rara vez pasa m de 5°, y atribuyéndole este valor, la fórmula [18] dará sucesivamente:

$$\log.\ l = -17{,}4637261 + 2 \times 9{,}9983442 = 2{,}5329623;$$
$$l = 341,^{m}2.$$

Si el terreno es regularmente accidentado, las pendientes podrán llegar á 15°, y se tendrá entonces:

$$\log.\ l = -17{,}4637261 + 2 \times 9{,}9849438 = 2{,}5061615\ ;$$
$$l = 320,^{m}7.$$

En los terrenos muy accidentados puede llegar fácilmente m á valer 30°, y se tendrá:

$$\log\ l = -17{,}4637261 + 2 \times 9{,}9375306 = 2{,}4113351\ ;$$
$$l = 257,^{m}8.$$

Para el límite 20″ de la apreciacion del instrumento se tendrá la fórmula

$$\text{sen}.\ l = -16{,}9866049 + 2 \times \log.\ \cos.\ m \qquad [19],$$

de la que se deducirá para la pendiente de 5°, $l = 1023,^{m}5$; para 15°, $l = 962,^{m}2$, y para 30°, $l = 773,^{m}5$.

336. **Correcciones á que deben sujetarse los valores hallados por la aplicacion de las fórmulas generales.—Correccion de la altura del instrumento.**—Cuando no se hace uso de la mira para determinar el desnivel entre dos puntos, como sucede al tratarse de hallar la cota de un punto distante de la base de operaciones ó de otro cualquiera inaccesible para el portamira, se halla desde el punto de estacion A (figura 145; lám. 14) el ángulo m de elevacion, dirigiendo la visual al punto M cuyo desnivel con A se quiere determinar. La aplicacion de una de las fórmulas [1] ó [2] (320) dará la altura HM, á la que habrá que añadir

la BH igual á la altura AC del instrumento para obtener el desnivel BM que existe entre los puntos A y M.

Cuando se trata de un ángulo de depresion, será preciso restar de la altura MH (fig. 146; lám. 14), dada por la aplicacion de una de las fórmulas citadas, la BH igual á la altura AC del instrumento.

La correccion será reducida, por lo tanto, á sumar con el valor hallado por la aplicacion de la fórmula general de que se ha hecho uso, ó á restar de él, la altura del instrumento, segun el ángulo obtenido es de elevacion ó de depresion. La misma regla se aplicará al complemento del ángulo zenital (321) cuando se haya obtenido así en el instrumento.

337. **Reduccion al centro de la estacion.**—Cuando no se puede hacer estacion en un punto cuyo desnivel con otro se quiere determinar, se elige un nuevo punto situado á las inmediaciones del primero, y que generalmente se halla más alto ó más bajo que él y fuera de la vertical que le corresponde: será preciso reducir el ángulo observado: 1.° á la misma vertical; 2.° á la altura que en esta vertical ocupa el verdadero punto en que se debia haber estacionado: expondremos sucesivamente estas dos reducciones.

338. *Reduccion á una misma vertical.*—Sea a (fig. 147; lám. 14) el punto que ocupa el centro del limbo zenital, y m el ángulo de elevacion observado: concibamos el plano horizontal del punto a (tomo I, 94), que cortará respectivamente en los puntos b y c á la vertical del punto M observado y á la vr que corresponde al centro de la estacion. Haciendo girar alrededor de b á la recta bc en el plano horizontal en que se encuentra, hasta que coincida con ba, el punto c habrá ido á parar á c', y el ángulo $\mathrm{M}cb = x$ habrá ocupado la posicion $\mathrm{M}c'b$, siendo este ángulo el que se hubiera observado en el caso de haber sido posible colocar el instrumento en la vertical del centro de estacion. En el triángulo $\mathrm{M}c'a$ se tendrá entonces

$$c'\mathrm{M} : c'a :: \text{sen. } c'a\mathrm{M} : \text{sen. } t;$$

y observando que se tiene $c'\mathrm{M} = c\mathrm{M}$, y $c'a = c'b - ab = cb - ab$; que tambien es sen. $c'a\mathrm{M} =$ sen. m (tomo I, 6) y que además es $t = m - x$ (Geom. Teor. 14. Cor. 1.°), sustituyendo en la proporcion anterior, se tendrá

$$c\mathrm{M} : cb - ab :: \text{sen. } m : \text{sen. } (m - x),$$

de la que resulta

$$\text{sen. } (m - x) = \frac{cb - ab}{c\mathrm{M}} \times \text{sen. } m \qquad [20]$$

Para la aplicacion de esta fórmula es preciso conocer las distancias cb, ab y $c\mathrm{M}$ obteniéndolas directa ó indirectamente todas, ó tan solo las que no sean conocidas por las operaciones de la Planimetría que han podido ser préviamente ejecutadas. Una vez determinada por medio de la fórmula [20] la diferencia entre m y x, se restará su valor del obtenido para m, cuando a diste ménos que c de la vertical de M: añadiéndola en caso contrario.

La correccion es nula, como puede deducirse fácilmente de la fórmula [20], cuando se tenga $cb = ab$; y cuando estas distancias se diferencian muy poco, está generalmente encerrada en los límites de apreciacion del instrumento que se usa (335); por cuya razon no se emplea en las operaciones ordinarias, procurando elegir para estacion un punto que satisfaga de una manera bastante aproximada á la condicion de nulidad que hemos indicado.

339. *Reduccion á la altura del centro de la estacion.*—Sea m (fig. 148; lám. 14) el ángulo obtenido directamente, ó por la reduccion anterior en caso de que haya tenido lugar, y x el verdadero ángulo que se hubiese hallado desde B: tirando por este punto una paralela BD á la recta AM, esta formará con la horizontal de B el ángulo m, resultando el DBM igual al ángulo t formado en el punto M (Geom. Teor. recíp. del 7). El triángulo BAM dará la proporcion

$$\text{BM} : \text{BA} :: \text{sen. BAM} : \text{sen.}\ t:$$

y observando que se tiene (Trig. 6)

$$\text{sen. BAM} = \text{sen. } (90^\circ - m) = \cos.\ m,$$

y además $t = m - x$, sustituyendo en la proporcion anterior se convertirá en

$$\text{BM} : \text{BA} :: \cos.\ m : \text{sen.}\ (m - x);$$

de la que se deduce

$$\text{sen. } (m - x) = \frac{\text{BA}}{\text{BM}} \times \cos.\ m \qquad [21]$$

Hallada por esta fórmula la diferencia entre m y x, se restará del valor de m cuando el punto en que se ha hecho estacion esté más bajo que B, ó se le añadirá cuando se haya elegido más alto.

340. El segundo miembro de la fórmula [21] tiende evidentemente á hacerse nulo cuando BA disminuye.

Para las aplicaciones se mide BM directamente, considerándola como la distancia horizontal entre los puntos dados, si no se conoce esta por las operaciones de la Planimetría, y se halla por medio de la nivelacion ordinaria ó por pendientes el valor de AB.

Supongamos que por las operaciones de Planimetría se conoce la distancia 2429,^{m}75, que se ha obtenido 6,^{m}43 para la altura del punto B sobre el A en que se ha hecho estacion, y desde el cual se ha observado el valor de 7° 27′ para el ángulo m de elevacion: se dispondrá el cálculo de la manera siguiente:

$$\begin{array}{rcr} \log.\ \text{de}\ 6{,}43 & = & 0{,}8082110 \\ +\log.\ \cos.\ 7^\circ\,27' & = & 9{,}9963183 \\ \hline \text{Suma} & = & 10{,}8045293 \\ -\ \log.\ \text{de}\ 2429{,}75 & = & 3{,}3855616 \\ \hline \log.\ \text{de}\ (m-x) & = & 7{,}4189677, \end{array}$$

que corresponde á un ángulo de 0° 9′. Restando este valor del hallado para m se tendrá $x = 7^\circ\,18'$.

341 **Correccion de las fórmulas generales de la nivelacion por pendientes.** —Cuando se trata de tener en cuenta como en la nivelacion por alturas, la influencia que tiene en la determinacion del desnivel entre dos puntos dados, la diferencia de nivel aparente al verdadero (6) y la elevacion causada por la refraccion, las fórmulas obtenidas (320 y 321) sufren una correccion que las trasforma en las que ahora tratamos de deducir. Sea A (fig. 149; lám. 15) el punto de estacion, AH la horizontal de este punto determinada por el instrumento, y MAH el verdadero ángulo de elevacion, que determina la visual dirigida al punto M. La refraccion eleva á R la imágen de M, lo que es causa de que el instrumento nos dé el ángulo de elevacion RAH, diferente del verdadero, y el desnivel HR, cuyo valor se determinará en general por la expresion $l \times \text{tang.}\ m$; y para obtener la verdadera altura HM será necesario restar del valor hallado la elevacion MR causada por la refraccion, que es como ya sabemos (10) $\dfrac{0{,}16\ l^2}{2R}$, y tendremos la ecuacion

$$HM = HR - MR.$$

Para obtener ahora el verdadero desnivel DM entre los puntos A y M será preciso añadir á la altura MH la diferencia de nivel aparente al verdadero, que tiene por expresion (7) $\dfrac{l^2}{2R}$; será por lo tanto

$$DM = DH + HM;$$

y poniendo en vez de HM el valor que antes hemos hallado, resultará

$$DM = DH - MR + HR.$$

Sustituyendo en los términos de esta expresion sus valores, y llamando x al verdadero desnivel entre A y M, se tendrá sucesivamente:

$$x = \frac{l^2}{2R} - \frac{0,16\ l^2}{2R} + l \times \text{tang } m;$$

y por último (10)

$$x = 0,000000066\ l^2 + l \times \text{tang. } m \qquad [22].$$

El primer término del valor x en esta fórmula se halla calculado en la columna cuarta de las tablas insertas (15) para los distintos valores de l que comprende la primera: bastará por lo tanto buscarlos en ella si l se encuentra en las tablas, ó deducirlos por una proporcion análoga á la que se emplea para el cálculo de los logaritmos ordinarios y para la reduccion de las distancias al horizonte (tomo I, 164), y añadir al resultado obtenido el valor hallado por las fórmulas generales establecidas (320 y 321).

342. Cuando se trata de un ángulo de depresion, se tendrá (fig. 150; lám. 15)

$$DM = DH - MH;$$

y como es $MH = MR + RH$, resultará

$$DM = DH - MR - RH;$$

siendo conocidos los valores de $DH - MR$ (10) y de RH obtenido por las fórmulas (320 y 321), resultará sustituyéndolos

$$x = 0,000000066\ l^2 - l \times \text{tang. } m \qquad [23],$$

que se empleará para los ángulos de depresion.

343. **Limite del empleo de las fórmulas generales.**—Al ejecutar una operacion de nivelacion conviene saber el límite de la distancia de observacion, á partir del cual es indispensable tener en cuenta el error de la diferencia de nivel aparente y el de refraccion. Bastará para ello despejar l en la expresion

$$e = 0,000000066\ l^2$$

establecida (341 y 342) para la correccion de ambos errores, teniendo en cuenta lo dicho (10), con lo que se tendrá

$$l = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{0,000000066}} = \frac{\sqrt{e}}{0,0002569} \qquad [24].$$

Si suponemos por ejemplo $e = 0,^{m}1$, se deducirá

$$l = \frac{\sqrt{0,1}}{0,0002569} = \frac{0,^{m}3162278}{0,0002569} = \frac{3162278^{m}}{2569} = 1230^{m}.$$

Se puede pues nivelar á distancias menores que 1230^{m} con la seguridad de no cometer un error que llegue á un decímetro; quedando los errores encerrados en el límite de apreciacion del instrumonto (335). La misma fórmula se aplicaría para un límite distinto, el de $0,^{m}01$ por ejemplo, ó cualquiera otro que puede fijarse de antemano.

344. **Método de la nivelacion recíproca.**—La nivelacion recíproca tiene por objeto hallar el desnivel entre dos puntos A y M (fig. 151; lámina 15) independientemente de la correccion que hemos dado á conocer (341) y tambien del error producido por la falta de paralelismo de las verticales de los puntos extremos (334), por medio de la distancia horizontal que los separa y del ángulo zenital que en cada uno de los citados puntos corresponde á la visual tirada al otro desde él. Sea a el ángulo zenital VAM′ observado desde A, diferente del verdadero VAM $= z$, á causa de la elevacion de M á M′ en virtud de la refraccion, y a' el ZMA′ observado desde M y diferente tambien del verdadero ZMA $= z'$.

Llamando r y r' á los ángulos de refraccion, que son iguales, segun Mr. Biot, cuando se hacen simultáneamente las observaciones de a y a', se tendrá:

$$z = a + r;$$
$$z' = a' + r':$$

de las que se deduce á causa de ser $r = r'$,

$$z' - z = a' - a \qquad [25].$$

El triángulo ABM da (tomo I, 21)

$$\text{BM} : \text{BA} :: \text{sen. MAB} : \text{sen. AMB} \qquad [26];$$

tratemos de hallar en funcion de cantidades conocidas la expresion de cada uno de los ángulos que esta proporcion encierra. Se tiene para el primero de ellos

$$\text{MAB} = \text{MAC} - \text{BAC};$$

pero como es MAC $= 180^{\circ} - z$; y BAC $= 90^{\circ} - \dfrac{C}{2}$, se convertirá la última ecuacion en

$$\text{MAB} = 90^{\circ} + \frac{C}{2} - z:$$

por otra parte, el ángulo z', externo al triángulo AMC, suministra la expresion

$$z' = \text{MAC} + \text{C} = 180^\circ - z + \text{C},$$

de la que resulta

$$90^\circ + \frac{\text{C}}{2} = \frac{z' + z}{2},$$

que sustituido en el último valor hallado para MAB, dará

$$\text{MAB} = \frac{z' + z}{2} - z = \frac{z' - z}{2} \qquad [27].$$

Para hallar el valor de AMB, se tendrá en el triángulo AMC.

$$\text{AMB} = 180^\circ - \text{MAC} - \text{C},$$

y por ser $\text{MAC} = \text{MAB} + \text{BAC} = \frac{z' - z}{2} + 90^\circ - \frac{\text{C}}{2}$, sustituyendo en la expresion anterior y reduciendo, resultará

$$\text{AMB} = 90^\circ - \frac{\text{C}}{2} - \frac{z' - z}{2} \qquad [28].$$

Sustituyendo en la proporcion [26] los valores hallados [27] y [28], representando además por x el desnivel BM que se busca, y por l la distancia horizontal AB entre los puntos dados, que es sensiblemente igual (tomo I, 154) al desarrollo del arco AB, y despejando la incógnita, resultará

$$x = l \times \frac{\text{sen.}\, \frac{z' - z}{2}}{\text{sen.} \left[90^\circ - \left(\frac{\text{C}}{2} + \frac{z' - z}{2} \right) \right]} \qquad [29];$$

observaremos que se tiene (Trig. 6 y 15)

$$\text{sen.} \left[90^\circ - \left(\frac{\text{C}}{2} + \frac{z' - z}{2} \right) \right] = \cos. \left(\frac{\text{C}}{2} + \frac{z' - z}{2} \right) =$$

$$\cos \frac{\text{C}}{2} \cos. \frac{z' - z}{2} - \text{sen.} \frac{\text{C}}{2} \text{sen.} \frac{z' - z}{2},$$

y sacando á cos. $\frac{C}{2}$ cos. $\frac{z'-z}{2}$, como factor comun á ambos términos del segundo miembro, se convertirá este en

$$\cos.\frac{C}{2}\cos.\frac{z'-z}{2}\left[1-\frac{\text{sen.}\frac{C}{2}\,\text{sen.}\frac{z'-z}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos.\frac{z'-z}{2}}\right],$$

que se reduce (Trig. 13) á

$$\cos.\frac{C}{2}\cos.\frac{z'-z}{2}\left(1-\text{tang.}\frac{C}{2}\,\text{tang}\,\frac{z'-z}{2}\right);$$

sustituyendo este valor en la ecuacion á que corresponde, esta será

$$\text{sen.}\left[90^{\circ}-\left(\frac{C}{2}+\frac{z'-z}{2}\right)\right]=\cos.\frac{C}{2}\cos\frac{z'-z}{2}$$

$$\left(1-\text{tang.}\frac{C}{2}\,\text{tang.}\frac{z'-z}{2}\right);$$

y sustituyendo en la ecuacion [29] se obtendrá

$$x=l\times\frac{\text{sen.}\frac{z'-z}{2}}{\cos.\frac{C}{2}\cos.\frac{z'-z}{2}\left(1-\text{tang.}\frac{C}{2}\,\text{tang.}\frac{z'-z}{2}\right)}.$$

En esta expresion puede despreciarse el producto tang. $\frac{C}{2}$ tang. $\frac{z'-z}{2}$, en razon á que siendo muy pequeños los arcos $\frac{C}{2}$ y $\frac{z'-z}{2}$, sus tangentes lo son tambien, lo que reducirá la expresion enterior á

$$x=l\times\frac{\text{sen.}\frac{z'-z}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos.\frac{z'-z}{2}}.$$

Siendo en esta expresion $\frac{C}{2}$ muy pequeño, cos. $\frac{C}{2}$ difiere muy poco de la unidad, por lo que se reducirá todavía á

$$x = l \times \frac{\text{sen.}\ \frac{z'-z}{2}}{\cos.\ \frac{z'-z}{2}} = l \times \text{tang.}\ \frac{z'-z}{2};$$

y observando que segun hemos dicho antes es $z' - z = a' - a$, sustituyendo en la última ecuacion resulta la fórmula

$$x = l \times \text{tang}\ \frac{a'-a}{2} \qquad [30],$$

que es la que se aplica en la práctica.

345. Para hacer aplicacion de esta fórmula, supongamos que se tiene $l = 28504,^{m}75$; $a = 89^\circ\ 57'\ 49''$; $a' = 90^\circ\ 15'\ 3''$: sustituyendo en la ecuacion anterior, resultará sucesivamente:

$$x = 28504,^{m}75 \times \text{tang}\ \frac{90^\circ\ 15'\ 3'' - 89^\circ\ 57'\ 49''}{2};$$

$$x = 28504,^{m}75 \times \text{tang.}\ 0^\circ\ 8'\ 37'';$$

para cuya expresion, restableciendo el rádio de las tablas y tomando logaritmos, se dispondrá el cálculo como sigue :

$$\begin{array}{rcl} \log\ 28504,75 & = & 4,4549172 \\ + \log\ \text{tang.}\ 0^\circ\ 8'\ 37'' & = & 7,3990478 \\ \hline \text{Suma} & = & 11,8539650\ ; \\ \log.\ x & = & 1,8539650\ ; \\ x & = & 71,^{m}444. \end{array}$$

346. *Nivelacion recíproca empleando los ángulos de elevacion y depresion.* —Cuando en vez de los ángulos zenitales se han obtenido en los puntos de estacion C y B (fig. 152; lám. 15) los ángulos m y n de elevacion y depresion, la fórmula [30] se modifica convirtiéndose en la que vamos á dar á conocer. Sea O el centro de la tierra, y suponiendo trazados desde él con los rádios OC y OB dos arcos de círculo que terminen en estos rádios ó sus prolongaciones, considérense trazadas las tangentes BG, CF y DE que corresponden á los puntos B, C y D, así como las cuerdas AB y CD. Se trata de hallar como antes el valor de de BD $= x$, que es el des-

nivel que se busca. Siendo AB y CD paralelas, se tendrá con respecto á la secante BC la igualdad de los ángulos alternos internos ABC y BCD; y por tener los arcos AB y CD el mismo número de grados se tendrá tambien GBA = FCD (Geom. Teor. 51); y añadiendo á ambos miembros de esta igualdad los ángulos ABC y BCD se tendrá

$$ABC + GBA = BCD + FCD,$$

ó lo que es lo mismo

$$GBC = BCF + FCD + FCD;$$

de donde resulta

$$GBC - BCF = 2FCD,$$

y por último

$$FCD = \frac{GBC - BCF}{2} = \frac{n - m}{2}.$$

Ahora en el triángulo BCD, que se puede considerar sin error sensible como rectángulo en D, y en el que CD puede suponerse asímismo sensiblemente igual á CB, por ser DB muy pequeño relativamente á CD, como sucede en la mayor parte de los casos que ocurren en la nivelacion, dará

$$BD = CD \times \text{tang. } BCD \qquad [31].$$

Para hallar la expresion del ángulo BCD en funcion de cantidades conocidas, se observará que se tiene

$$BCD = BCF + FCD = m + \frac{n - m}{2} = \frac{2m + n - m}{2} = \frac{m + n}{2};$$

y sustituyendo este valor en la fórmula [31], así como los que corresponden á BD y CD, se tendrá por último:

$$x = l \times \text{tang. } \frac{m + n}{2} \qquad [32].$$

Esta fórmula se aplicará cuando en vez de los ángulos zenitales se ha obtenido un ángulo de elevacion y otro de depresion en las observaciones recíprocas.

347. **Aplicaciones de la nivelacion recíproca.—Determinacion del ángulo de refraccion.**—De las relaciones halladas (344) al principio del cálculo, se deduce la ecuacion

$$z + z' = a + r + a' + r' \qquad [33],$$

y por otra parte se tiene (Geom. Teor. 14. Cor. 1.º) para la fig. 151 (lámina 15):

$$z = C + AMC \,; \qquad z' = MAC + C \,;$$

de las que se deduce

$$z + z' = AMC + MAC + 2C \,;$$

pero AMC + MAC = 180° — C; sustituyendo en la expresion anterior y reduciendo se obtiene

$$z + z' = 180^\circ + C \qquad [34].$$

Igualando los valores hallados [33] y [34] para $z + z'$, resulta

$$a + r + a' + r' = 180^\circ + C;$$

y recordando que se tiene $r = r'$, se despejará esta incógnita y se obtendrá la ecuacion

$$r = \frac{180^\circ + C - a - a'}{2} \qquad [35] \,,$$

en cuya expresion se conocen a y a', y se puede obtener C en funcion de cantidades conocidas, observando que en el triángulo rectángulo ADC se tiene (tomo I, 18)

$$AD = AC \text{ sen. } \frac{C}{2} \,,$$

y poniendo en vez de AD su valor $\frac{l}{2}$, en vez de AC el valor del rádio terrestre, que es (tomo I, 40) 6366200m, y despejando sen. $\frac{C}{2}$, resultará

$$\text{sen. } \frac{C}{2} = \frac{l}{2 \times 6366200} \qquad [36].$$

Ejemplo. Sea $l = 28504,^{m}75$, y supongamos que repetidas observaciones (tomo I, 575 y 587) han dado para los ángulos observados los valores $a = 89^\circ\, 57'\, 49''$ y $a' = 90^\circ\, 15'\, 3''$: empezaremos por hallar el valor de C haciendo uso de la fórmula [36], en la que restableciendo el rádio, se dispondrá el cálculo como sigue:

$$10 + \log\ 28504{,}75 = 14{,}4549172$$
$$-\log\ 2 \times 6366200 = 7{,}1049102$$

$$\log.\ \text{sen.}\ \frac{C}{2} = 7{,}3500070\ ;$$
$$\frac{C}{2} = 0^{\circ}\ 7'\ 44'',49\ ;$$
$$C = 0^{\circ}\ 15'\ 24''.$$

Hallado el valor de C, se hace uso de la fórmula [35] para encontrar el de r, con lo que se tendrá:

$$r = \frac{180^{\circ} + 0^{\circ}\ 15'\ 24'' - 90^{\circ}\ 15'\ 3'' - 89^{\circ}\ 57'\ 49''}{2}\ ;$$

y ejecutando las operaciones indicadas en el numerador, se hallará por último

$$r = \frac{0^{\circ}\ 2'\ 32''}{2} = 0^{\circ}\ 1'\ 16''.$$

348. **Índice de refraccion.**—Se llama *índice de refraccion* á la relacion constante entre el ángulo de refraccion y el que forman las verticales de los puntos de la observacion recíproca (344), que sirve para determinarle. En efecto, Puissant demuestra que reduciéndose á la mitad por ejemplo el ángulo C (fig. 151; lám. 15), tambien r se reduce sensiblemente á la mitad de su primitivo valor, y puede admitirse que el ángulo de refraccion es proporcional al arco AB ó á su ángulo correspondiente. En su consecuencia, para hallar esta relacion no habrá más que dividir por C ambos miembros de la ecuacion [35] (347), lo que dará

$$\frac{r}{C} = \frac{180^{\circ} + C - a - a'}{2C}\ :$$

el segundo miembro de esta ecuacion será el índice de refraccion, que representaremos por n, y se tendrá

$$n = \frac{18^{\circ} + C - a - a'}{2C} \qquad [37]\ ;$$

y sustituyendo en la ecuacion anterior, se convertirá en

$$\frac{r}{C} = n.$$

Haciendo aplicacion de la fórmula [37] y recordando que para su numerador hemos hallado (347) 0° 2′ 32″, se tendrá

$$n = \frac{0^\circ\ 2'\ 32''}{2 \times 0^\circ\ 15'\ 24''} = \frac{152''}{1848''} = 0{,}08.$$

Este valor es el que se emplea en los cálculos, aun cuando por las alteraciones atmosféricas puede variar entre 0,07 que corresponde á los dias de más calor, en los que puede adoptarse, y 0,10 que suele ser el que alcanza en los dias de invierno: en las circunstancias ordinarias tiene el valor medio que acabamos de hallar.

349. **Nivelacion compuesta.**—Cuando no basta una sola estacion del instrumento para hallar el desnivel entre dos puntos, se divide la operacion en nivelaciones parciales, sumando despues los desniveles que resulten subiendo, los cuales corresponden á los ángulos de elevacion ó á los zenitales menores que 90°, como tambien los que resulten bajando, que corresponden á los ángulos de depresion ó á los zenitales mayores que 90°. La diferencia de estas sumas dará el desnivel entre los puntos dados (152) y el sentido en que tiene lugar.

Cuando la nivelacion tiene por objeto la acotacion de cierto número de puntos ó la determinacion de un perfil, se sigue una marcha análoga á la empleada para la nivelacion por alturas, haciendo estacion en el punto A de partida (fig. 153; lám. 15), y colocando en B una mira con la altura B*m* de *a* sobre el terreno; se obtendrá por medio de un ángulo de elevacion el desnivel subiendo entre A y B (320); pasando á hacer estacion en este último punto se determina por medio de un ángulo de depresion observado desde *b* el desnivel bajando entre B y C, continuando del mismo modo hasta el punto en que debe terminar la operacion.

350. **Acotacion de los puntos del terreno.**—Hallados los desniveles entre los distintos puntos A, B.... (fig. 153; lám. 15) que se quiere acotar, se obtendrán sus cotas AA′ BB′.... del mismo modo que en la nivelacion por alturas (156).

351. **Determinacion directa de la cota de un punto desde el cual se divisa el horizonte del mar.**—Cuando se percibe el horizonte del mar desde un punto en el cual puede colocarse un instrumento en estacion, puede hallarse directamente la cota que le corresponde. Sea x la altura DA (fig. 154; lám. 15) del punto dado A sobre la superficie BD del Océano, prolongada hasta la vertical de A: haciendo estacion en este punto se dirige una visual AB tangente al horizonte del mar. El ángulo zenital z estará afectado del error r debido á la refraccion atmosférica, que eleva á B′ la imágen del punto B, resultando para la observacion el ángulo a. El triángulo rectángulo ABC dá (tomo I, 19)

$$BC = AC \times \cos.\ C;$$

y sustituyendo en esta expresion sus valores, se obtendrá

$$R = (R + x) \cos. C,$$

en la que despejando x resulta:

$$x = \frac{R - R \cos. C}{\cos. C} = \frac{R(1 - \cos. C)}{\cos. C};$$

pero se tiene (Trig. 18) $1 - \cos. C = 2 \operatorname{sen}.^2 \frac{C}{2}$, que sustituido en la expresion anterior, da

$$x = \frac{2R \operatorname{sen}^2 \frac{C}{2}}{\cos. C}.$$

Por otra parte, siendo $\operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen}. \frac{C}{2} \cos. \frac{C}{2}$ (Trig. 17), resulta $2 \operatorname{sen}. \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{sen}. C}{\cos. \frac{C}{2}}$ y sustituyendo en el último valor de x,

$$x = \frac{R \operatorname{sen} C. \operatorname{sen}. \frac{C}{2}}{\cos C. \cos. \frac{C}{2}} = R \operatorname{tang}. C. \operatorname{tang}. \frac{C}{2},$$

y observando que siendo C muy pequeño se tiene sensiblemente $\operatorname{tang}. \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tang}. C}{2}$, sustituyendo en la expresion anterior, resulta

$$x = \frac{R \operatorname{tang}.^2 C}{2} \qquad [38]$$

Para expresar el valor de x en funcion de cantidades conocidas, observaremos para ello que z, exterior al triángulo rectángulo ABC, da

$$z = C + 90^\circ;$$

por otra parte sabemos que se tiene

$$z = a + r = a + Cn,$$

poniendo en vez de r su valor Cn hallado antes (348): de estas ecuaciones resultará

$$C + 90^\circ = a + nC;$$

en la que despejando C se obtiene

$$C = \frac{a - 90^\circ}{1 - n};$$

y sustituyendo en la ecuacion [38],

$$x = \frac{R \tang^2 \left(\frac{a - 90^\circ}{1 - n} \right)}{2} \qquad [39].$$

Esta fórmula da aproximadamente la cota x del punto A, y su aplicacion no presenta dificultad á los que se hayan familiarizado con los cálculos que hemos indicado en los problemas que anteceden.

352. **Dificultades que se presentan en la práctica de la nivelacion por pendientes.**—Sucede algunas veces que uno de los puntos B (figura 155; lám. 15) que es necesario acotar, no se presta fácilmente á la colocacion del instrumento en estacion, ó colocado en él se cree que no será vista cómodamente la mira que ha de situarse despues en C, siguiendo la marcha general que hemos establecido (349) para las operaciones de la nivelacion compuesta. Pueden en este caso ser hallados los desniveles de B y C con relacion al punto A en que se hace estacion, colocando sucesivamente la mira con la altura del instrumento en los puntos B y C, tomando los ángulos n de depresion y m de elevacion, y midiendo las distancias horizontalmente, con lo que resultarán los valores de as y ar para las proyecciones horizontales respectivas de AB y AC. La resolucion del triángulo rectángulo asb dará por la fórmula [2] (320) el desnivel sb entre A y B; el triángulo arc dará del mismo modo el rc que existe entre A y C. Restando sb de la cota de A se tendrá la del punto B, y añadiendo rc á la de A se tendrá la de C. De un modo análogo se procedería si los ángulos observados fuesen ambos de elevacion ó de depresion.

Cuando no se pueden medir horizontalmente las distancias ó es más cómodo medirlas con la inclinacion que tienen en el terreno, se hallará sb por medio de $ab = AB$ empleando la fórmula [1] (320), y la proyeccion as como ya sabemos (tomo I, 160). Además en el triángulo ABC se conoce el ángulo $CAB = cab = m + n$ y los lados AB y BC : la resolucion de este triángulo (tomo I, 31) dará el valor de AC ó de su igual ac, y la del triángulo rectángulo acr suministrará á su vez, como en el abs los valores de ar y de cr.

353. El procedimiento que acabamos de indicar se emplea muchas veces para abreviar las operaciones, aun cuando sea fácil hacer estacion en todos los puntos que se trata de acotar. Tambien se abrevian por el método que vamos á exponer á continuacion.

354. **Método de las estaciones alternadas.**—Este método, análogo al seguido en la Planimetría (966) para el levantamiento de un plano con

la brújula, consiste en colocarse en estacion en un punto sí y en otro no de los que se trata de acotar, y tomar desde cada punto de estacion la pendiente á los inmediatamente anterior y posterior, teniendo cuidado de que la primera de estas observaciones es inversa y debe anotarse en el registro como de depresion todo ángulo de elevacion observado, y al contrario: la segunda observacion es directa y debe anotarse el ángulo tal como se haya obtenido.

Es digno de tenerse en cuenta el que para facilitar las operaciones se puede dar á la mira una altura constante, que debe ser la altura media que ordinariamente alcanza el instrumento, sin que esto produzca error alguno en el resultado final de la operacion, dando lugar tan solo á un pequeño error en las cotas de los puntos de estacion. En efecto, sea B (figura 156; lám. 15) uno de estos puntos: dirigida la visual *ba*, el desnivel entre A y B estará afectado de un error *ma* igual á la diferencia de alturas del instrumento y de la mira, que se obtiene considerando tirada por *b* la paralela *bm* á la recta AB del terreno. Tirando por A la paralela A*r* á la visual *ba* y por *r* la horizontal *st*, el desnivel entre A y B se habrá obtenido por la resolucion del triángulo A*sr* en que entra A*r* $= ab$ y el ángulo p igual al observado en el instrumento: el desnivel A*s* que así resulta, es mayor que el verdadero que existe entre A y B en una cantidad B*r* $= ma$ por la igualdad de los triángulos *amb* y AB*r*, que tienen todos sus ángulos iguales (Geom. Teor. 11), así como dos lados del uno iguales á dos del otro (Geom. Teor. 28); y siendo el desnivel hallado mayor que el verdadero en la cantidad B*r*, la cota *r*B′ de B resultará disminuida en esta misma cantidad. Con respecto á la de C, observaremos que el desnivel C*t* entre B y C se obtiene análogamente por la resolucion del triángulo *r*C*t*, resultando aumentado en la cantidad B*r* $= cn = ma$; y la cota CC′ del punto C, igual á $r\mathrm{B}' + t\mathrm{C}$ es la que verdaderamente le corresponde.

De aquí podemos deducir, que la diferencia de alturas del instrumento y de la mira no influye en la determinacion de las cotas que corresponden á los puntos en que se han colocado las miras: y que por lo tanto siempre que se ejecuten las operaciones de manera que resulten dispuestas en los puntos de partida y de término, el desnivel general está exento de todo error por esta causa. Con respecto á las cotas de los puntos de estacion, hemos visto que resultan disminuidas cuando la altura de mira es mayor que la del instrumento, y fácil es darse razon de que resultarian aumentadas cuando fuese mayor la altura del instrumento, en una cantidad igual á la diferencia de alturas; que será muy pequeña en general, cuando se tenga cuidado de dar á la mira la altura media del instrumento, como al principio hemos indicado.

355. **Perfiles.—Perfil longitudinal.**—La nivelacion por pendientes puede aplicarse á la determinacion de los datos para la construccion de los perfiles, que pueden ser tambien longitudinales ó trasversales (231). Para la determinacion de un perfil longitudinal, se ejecutan las opera-

ciones indicadas (349) y se miden las distancias horizontalmente, ó con la inclinacion del terreno; en cuyo último caso será preciso reducirlas á su proyeccion horizontal (tomo I, 160).

356. **Croquis y registro.**—Análogamente al que hemos explicado para la nivelacion por alturas (223) debe llevarse un croquis de la operacion, que debe acompañar al registro, y que es tanto más necesario en la nivelacion por pendientes, cuanto que un ángulo de elevacion anotado como si fuese de depresion, ó al contrario, produce (161) un error doble del desnivel que por medio de este ángulo se calcula, y el croquis puede resolver la duda ó deshacer la equivocacion del sentido en que se ha tomado un ángulo mal anotado en el registro. El croquis es una figura semejante á la del perfil en cuanto las líneas que le constituyen guardan entre sí las relaciones de inclinacion que tienen las que representan del terreno, anotándose encima de ellas el valor del ángulo de elevacion ó de depresion que las corresponde, y debajo la distancia medida entre sus puntos extremos; algunas veces se da además el signo positivo á los valores de los ángulos de elevacion y el negativo á los de depresion, aun cuando esto no es absolutamente necesario. La fig. 137 (lám. 15) representa el croquis de una nivelacion entre los puntos A, B... E, que se han señalado en el terreno con estacas numeradas 1.... 2.... 5, habiendo hecho estacion en los puntos A, B y en el C, desde cuyo punto se ha observado el ángulo de depresion correspondiente á la visual tirada al punto D, así como el de elevacion que da la dirigida al punto E, anotando los valores de estos ángulos como se ve en la figura, y midiendo las distancias CD, DE cuyos valores se han anotado tambien en el croquis.

357. El registro se dispone ordinariamente segun el modelo que insertamos en la página siguiente, y se llenan en el terreno las cinco primeras casillas con los mismos datos que se inscriben en el cróquis: en el primer renglon y en la segunda casilla se anota el número 1 con que se ha señalado el punto A de partida, dejando en blanco las casillas restantes: en el segundo renglon se anotan los datos necesarios para la determinacion de la cota del punto B, empezando por escribir en la primera casilla el número de la estacion hecha en A, que es la primera; en la segunda casilla el número 2 de la estaca en que se ha colocado la mira para hallar la pendiente de AB; en la tercera el valor 23° 26′ del ángulo de elevacion que da la pendiente de la misma línea, y en la quinta el valor 98m,25 de su longitud. En el tercer renglon se anotan de una manera análoga los datos relativos á la determinacion del punto C, y en el cuarto y quinto los que determinan los D y E, los cuales se han observado desde la tercera estacion, hecha en el punto C, y que por lo tanto se han encerrado en una llave, como se vé en el modelo de registro que presentamos. Á las casillas de que consta suele añadirse en caso necesario otra, destinada á los rumbos que corresponden á las líneas medidas, cuando al mismo tiempo que la nivelacion se quiere levantar el plano de la línea que se nivela.

358. **Cálculos de las distancias al orígen y de las cotas**.—Por medio del coseno de 23° 26′, que es 0,9175 y de la distancia indicada 98,25 se halla (tomo I, 160) la distancia reducida 90m,14, que se inscribe en la sexta columna, y multiplicando esta reducida por la tangente 0,4334 del ángulo de 23° 26′ se halla (320) el desnivel 39m,067, que se anota en la casilla octava, como procedente de un ángulo de elevacion. Este desnivel pudiera haberse obtenido tambien multiplicando la distancia inclinada 98,25 por el seno de 23° 26′. Del mismo modo se hallarán las reducidas de las estacas 3 y 4, anotando los desniveles igualmente obtenidos en la casilla número 9, como resultados de ángulos de depresion.

Con respecto al punto 5, en que por no haber estacionado en D no puede seguirse la marcha general, será preciso deducir de los datos tomados la proyeccion D*h* de la recta DE y el desnivel E*h* entre sus puntos extremos. Para esto podremos resolver el triángulo CDE (352), que nos dará el valor de CE, y la resolucion del triángulo rectángulo CE*r* resolvería el problema; pero es más fácil deducir el valor del ángulo E de la proporcion (tomo I, 21)

$$75{,}0 : 83{,}37 :: \text{sen. } 38^\circ\, 58' : \text{sen E};$$

de la que resulta:

$$\text{sen E} = \frac{0{,}6289 \times 83{,}37}{75} = 0{,}69908,$$

que corresponde á 44° 21′. El ángulo en D será entonces igual á 180°—(38° 58′ + 44° 21′) = 96° 41′, y el ángulo $m = 180^\circ - (30^\circ\, 15' + 96^\circ\, 41') = 53^\circ\, 4'$. Multiplicando 75m,0 por el coseno 0,6009 de este ángulo, resulta 45m,07 para la proyeccion horizontal de DE, que se inscribe en la columna número 6 del registro. Multiplicando esta reducida por la tangente 1,3303 del mismo ángulo, resulta 59m,957 para el desnivel entre los puntos D y E, que se inscribirá en la casilla número 8 del registro, como subiendo en sentido de la marcha de las operaciones. El cálculo de las distancias al orígen y de las cotas, así como las comprobaciones á que dan lugar, son los mismos que en la nivelacion por alturas (223 y 158). La comprobacion de los desniveles solo puede hacerse por la repeticion de los cálculos, y convendría determinarlos por los senos y por las tangentes (320), fórmulas [1] y [2], á fin de comprobar la igualdad de los resultados obtenidos; puesto que cualquier error cometido influye en el resultado final de la operacion.

359. **Perfiles trasversales**.—Partiendo de los puntos acotados del perfil longitudinal pueden establecerse tambien perfiles trasversales, cuya direccion se determina del mismo modo que en la nivelacion por alturas (231). El punto de que parten se considera como el orígen de la nivelacion que es necesario ejecutar, de la misma manera que para el perfil longitudinal (355), á derecha é izquierda del citado punto. El cró-

REGISTRO DE LA NIVELACION POR PENDIENTES.

Perfil longitudinal.

Estaciones	Estacas	ÁNGULOS.		DISTANCIAS.			DIFERENCIAS.		Cotas.	OBSERVACIONES.
		De elevacion.	De depresion.	Parciales.	Reducidas.	Al origen.	Subiendo.	Bajando.		
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
»	1	»	»	»	»	»	»	»	127,308	
1	2	23° 26′	»	98,25	90,14	90,14	39,067	»	166,375	
2	3	»	21° 59′	84,16	78,04	168,18	»	31,505	134,870	
3	4	»	30° 15′	83,37	72,02	240,20	»	42,002	92,868	
	5	8° 43′	»	75,00	45,07	285,27	59,957	»	152,825	
					285,27		99,024	73,507	25,517	
							73,507			
							26,517			

quis es lo mismo que el que hemos indicado (356), y es preciso anotar cuidadosamente en él el punto del eje con el mismo número que tiene en el perfil longitudinal á que corresponde; y el registro se dispone de una manera análoga al inserto en las páginas 140 y 141 para la nivelacion por alturas, y cuyo modelo presentamos en la página siguiente.

Difiere del que hemos dado á conocer (357) para el perfil longitudinal en que las pendientes ocupan una sola casilla, destinando la otra á la insercion de la letra S ó B, que indica si la pendiente es subiendo ó bajando. Comprende cuatro perfiles, en los que se supone que las distancias se han medido horizontalmente, y en su consecuencia se ha empleado la fórmula de las tangentes (320) para la determinacion de los desniveles.

360. **Problemas de la nivelacion por pendientes.—1.° Hallar la pendiente de la recta que une dos puntos dados del terreno.**—Este problema, resuelto ya (273), se obtiene más fácilmente con los goniómetros, pues la pendiente está dada por el ángulo de elevacion ó depresion hallado (320), pudiéndose determinar (318) la relacion numérica correspondiente al ángulo obtenido. Con los eclímetros se halla directamente esta relacion (327) por la lectura hecha en la pínula móvil (308), dividida por el número constante 100.

361. **2.° Dado un punto del terreno, hallar otro tal, que la recta que los une tenga una pendiente dada.**—Se hace estacion en el punto dado A (figs. 136 y 137; lám. 13) y haciendo que el nonius del limbo zenital marque el ángulo dado, ó el que expresa la relacion del tanto por ciento ó por unidad (318), y en el sentido que haya de tener la pendiente, se toma en una mira la altura del centro del limbo zenital sobre el punto de estacion, y se busca por tanteos un punto del terreno, en el cual, colocada la mira con la altura marcada en ella, la visual tirada por el anteojo vaya á parar exactamente al punto de mira: el punto B en que esto se verifica es el punto pedido. En efecto, la igualdad de las alturas verticales A*a* y B*b* hace que AB sea paralela á la visual *ab* y por lo tanto de la misma pendiente.

Con el eclímetro se resuelve del mismo modo haciendo que el cero del nonius en el tablero móvil señale la pendiente dada (308). Cuando ésta es subiendo sirve de ocular la pínula fija; y la móvil cuando la pendiente es bajando.

El problema resuelto (177) es el caso particular del que nos ocupamos en que la pendiente dada es cero.

362. Para trazar una recta de pendiente dada con un nivel, se halla (175) un punto cuyo desnivel con el dado sea igual al numerador del quebrado que expresa la pendiente dada, haciendo al mismo tiempo que la distancia horizontal AD (fig. 93; lám. 9) entre ambos puntos sea de 100 metros. Para la pendiente de 3 por 100, se hará que el desnivel entre A y C sea de 3 metros.

363. Cuando no se puede hacer estacion con el eclímetro en el punto dado para resolver el problema 2.° (361), se emplea este instrumento

NIVELACION POR PENDIENTES.

Perfiles trasversales.

Numeracion de los perfiles	Estacion.	DERECHA.								Cotas del eje.	IZQUIERDA.							
		Pendiente	Sentido.	DISTANCIAS.		DIFERENCIAS.		Cotas.		Pen-diente.	Sentido	DISTANCIAS.		DIFERENCIAS.		Cotas.
				Medi-das.	Reduci-das.	Subien-do.	Bajan-do.					Medi-das.	Reduci-das.	Su-biendo.	Bajando.	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
1	1	0° 57′	S	»	31,09	0,516	»	120,516	120,000	5° 30′	B	»	26,87	»	2,588	117,421
2	1	0° 46′	S	»	30,59	0,676	»	133,887	133,211	12° 50′	B	»	58,50	»	13,326	118,885
3	1	2° 39′	S	»	30,47	1,411	»	137,694	136,283	21° 30′	B	»	30,52	»	12,022	124,261
4	1	17° 8′	S	»	14,14	4,359	»	146,002	141,643	5° 40′	B	»	71,65	»	7,108	134,535
»	2	»	»	»	»	»	»	»	»	26° 47′	B	»	24,82	»	12,529	122,006

como nivel, poniendo en coincidencia los ceros del tablero móvil para resolverle como acabamos de indicar (362), ó se elige para hacer estacion otro punto que esté próximamente en la recta que ha de unir al lado con la posicion que probablemente ocupará el que se trata de hallar, y se da á la direccion de la visual la pendiente asignada (361): se coloca una mira en el punto dado y se mueve su tablilla hasta la coincidencia de la visual dirigida á ella con la pendiente establecida; despues se busca por tanteos con la altura marcada en la mira el punto del terreno en que colocada verticalmente, la visual vá á parar á la línea de fé de la tablilla.

364. **3.° Trazar en el terreno una línea de pendiente dada**.—Se hace estacion en el punto de partida A (fig. 158; lám. 15) y se determina (361) el punto B que da la línea AB de pendiente dada. Pasando á hacer estacion en B se halla del mismo modo la recta BC paralela á la visual bm' que tiene la misma pendiente. Desde C se traza la CD paralela á cm'', continuando del mismo modo. La línea poligonal que los puntos A, B, C..... determinan se compone de elementos rectilíneos, que tienen la pendiente dada.

Cuando á esta línea poligonal sustituye una curva que pasa por los puntos determinados, de modo que los elementos rectilíneos sean cuerdas de los que constituyen la curva, ésta resultará de mayor longitud que la línea poligonal, y será por lo tanto de menor pendiente que ella: en efecto, en la relacion $p = \frac{d}{l}$ (Acot. 25) que expresa la pendiente de la línea dada, d permanece invariable y l aumenta, disminuyendo p por consiguiente. Lo contrario sucedería si á los elementos consecutivos sustituye un arco tangente.

365. **4.° Hallar por medio del eclímetro la distancia entre dos puntos dados**.—Sean A y B (fig. 159; lám. 15) los puntos dados: disponiendo el instrumento en estacion en A, se toma la altura de mira Bb correspondiente á la posicion horizontal de la visual, y la Bd que corresponde á una posicion dada cualquiera del cero de la pínula móvil. La diferencia de las alturas de mira dará la altura bd; y como se conoce el valor constante 100 de ac y la altura ce dada en la escala de la pínula grande, la proporcion

$$ac : ce :: ab : bd$$

dará el valor de ab, proyeccion de la recta que une los puntos dados A y B.

CAPITULO VIII.

Nivelacion barométrica.

Generalidades.—Instrumentos de la nivelacion barométrica.—Termómetro.—Indicaciones acerca de la construccion y graduacion de un termómetro.—Diferentes escalas termométricas.—Reduccion á la escala centesimal de las temperaturas señaladas en otra escala diferente.—Tablas de reduccion.—Barómetro.—Correcciones de la altura barométrica.—Tablas de reduccion á 0° de las alturas barométricas observadas.—Diferentes clases de barómetros.—Barómetro de Fortin.—Barómetro de Gay-Lussac.—Barómetro aneróide de Vidi.—Barómetro metálico de Bourdon.—Empleo de los instrumentos en la determinacion del desnivel entre dos puntos.—Fórmulas de la nivelacion barométrica.—Deduccion de la fórmula de Laplace.—Correcciones de la fórmula barométrica.—Tabla de las latitudes geográficas de las capitales de las diferentes provincias de España.—Fórmulas de que se hace uso en las operaciones ordinarias de la nivelacion barométrica.—Fórmula de Laplace modificada por Ramond.—Fórmula de Babinet.—Fórmula y tablas de Litrow.—Determinacion directa de la cota de un punto ó su altura sobre el nivel del mar.—Aplicaciones de la nivelacion barométrica á la medida de las distancias.—Práctica de las operaciones de nivelacion barométrica.—Diferentes maneras de obtener los desniveles ó alturas verticales por medio de la nivelacion barométrica.

366. **Generalidades**.—La *nivelacion barométrica* tiene por objeto hallar el desnivel entre dos puntos, ó la altura de un punto dado sobre el nivel del mar, con el auxilio de los instrumentos de Física llamados *barómetro* y *termómetro*. El desnivel ó la altura que se busca se obtiene por las observaciones barométricas y termométricas ejecutadas haciendo estacion en los puntos dados, y aplicando sus resultados á fórmulas destinadas á suministrar en funcion de ellos los valores correspondientes á las alturas que se trata de conocer.

La nivelacion barométrica da resultados bastante exactos cuando se hacen cuidadosamente las observaciones y el cálculo de las alturas; lo que es debido al grado de precision que se ha conseguido dar á las fórmulas que se emplean, teniendo en cuenta las muchas causas que pueden influir en el resultado de las observaciones barométricas y termométricas. La teoría de la nivelacion barométrica se reduce por lo tanto al conocimiento de los instrumentos que en ella se emplean y de sus correspondientes escalas, y al uso que se hace de ellos para la determinacion de los datos que han de introducirse en las fórmulas; á la exposicion de estas, dando una ligera idea de la marcha seguida para obtenerlas, y de las diferentes acciones físicas que para conseguirlo se han tenido en cuenta, así como á la exposicion de tablas que facilitan extraordinariamente el cálculo de las alturas; concluyendo con las indicaciones referentes á la manera de obtener con la mayor exactitud que es posible, en atencion á los adelantos de las ciencias físicas, las distancias verticales que consideramos; y las precauciones que deben observarse con el mismo objeto en la eleccion del tiempo más á propósito para las observaciones que han de hacerse, así como de las que es preciso tomar con respecto al uso del barómetro y el termómetro.

367. **Instrumentos de la nivelacion barométrica.**—El instrumento que principalmente se emplea es el barómetro, si bien las observaciones del termómetro contribuyen á la exactitud del resultado de la nivelacion; y aun cuando por esta razon entraríamos desde luego en la descripcion del primero de estos instrumentos, daremos principio por el segundo, en razon á que entra á formar parte de aquel.

368. **Termómetro.**—Se da el nombre de *termómetro* á un instrumento destinado á medir las temperaturas de los cuerpos y á manifestar las variaciones que pueden experimentar. Temperatura de un cuerpo es el estado de calórico sensible en que se encuentra. La cantidad absoluta de calor necesaria para obtener una misma temperatura en varios cuerpos, es para cada uno de ellos diferente en general de la de los otros, segun su capacidad calorífica.

En las operaciones de la nivelacion barométrica se emplea el termómetro de mercurio, que es un tubo capilar de cristal *ab* (fig. 160; lámina 15), herméticamente cerrado por su parte superior y soldado por la inferior á una esfera ó cilindro *c* de la misma materia. Esta cavidad está llena de mercurio, que ocupa tambien parte del tubo: el resto de este último está lleno del vapor del mercurio sin contener cantidad alguna de aire. En el tubo hay grabada una escala que comprende 100 partes iguales, entre el punto *r* marcado con el *cero* de la misma y el *s* que señala 100 grados termométricos. La graduacion se prolonga un corto número de grados á la parte superior de *s* y debajo del cero. Algunos termómetros están fijos á una armadura de madera y tienen la escala grabada en una regla metálica fija tambien á la misma armadura. Los primeros son preferibles en las observaciones de que nos ocupamos, por apreciarse mejor el punto de la escala á que en un momento dado llega el extremo superior *m* de la columna de mercurio, cuyo punto es el que marca la temperatura del medio (tomo I, 200) en que el instrumento se encuentra situado.

369. **Indicaciones acerca de la construccion y graduacion de un termómetro**.—Para la construccion de los termómetros se ha preferido el mercurio á los demás líquidos, por ser el que cumple mejor con las condiciones que se exigen en un instrumento de esta naturaleza. Es, en efecto, muy sensible á las variaciones de temperatura, que pone en evidencia dilatándose rápidamente cuando ésta aumenta, aun en cantidad muy pequeña, y contrayéndose del mismo modo cuando disminuye: se dilata uniformemente, entre los límites que comprenden las temperaturas que está destinado á apreciar, cuando son uniformes tambien las variaciones de temperatura: manifiesta por último con dilataciones ó contracciones bien perceptibles, las menores variaciones del estado de calor sensible, que experimenta el medio que le rodea.

370. *Construccion del termómetro.*—Para la construccion del instrumento es preciso valerse de un tubo bien calibrado, lo cual se reconoce introduciendo en él una pequeña cantidad de mercurio, haciéndola ocupar distintas posiciones en toda la longitud del tubo, y viendo si es constante la que corresponde á la pequeña cantidad de mercurio introducida; no debiendo valerse del tubo que no cumpla con esta condicion. Soldado despues á uno de los extremos el depósito esférico ó cilíndrico de que hemos hecho mencion, se llena por el otro de mercurio toda la cavidad que el tubo y el depósito comprenden. Esta operacion presenta alguna dificultad debida á la capilaridad del tubo, que impide al mercurio pasar al depósito á causa del aire interpuesto: se ejecuta soldando un embudo de cristal al extremo libre del tubo, y calentando fuertemente el depósito, á fin de que salga una pequeña cantidad de aire y dé paso á otra de mercurio, dejando enfriar el aparato, y calentándole de nuevo para introducir otra pequeña cantidad en el depósito. Cuando al cabo se ha conseguido llenarle de esta manera, así como al tubo, se calienta el mercurio hasta que haya salido la mitad ó los dos tercios de la cantidad contenida en el tubo, cerrando entonces su extremo superior á la lámpara de esmaltar. El mercurio al enfriarse despues deja un espacio vacío en la parte superior del tubo, que no tardan en ocupar los vapores de mercurio, evitándose de este modo la presion que sobre la columna de este líquido ejercería, al dilatarse por la accion del calórico, el aire que de otro modo ocuparía la parte superior indicada del tubo.

371. *Graduacion del termómetro.*—La escala termométrica tiene dos puntos fijos que se determinan con toda exactitud, correspondientes á temperaturas fáciles de reproducir é idénticas en todos los casos. Llenando de hielo ó de nieve una vasija provista de un taladro que dé salida al agua procedente del deshielo, se introduce en ella el depósito y parte del tubo del termómetro, disponiendo el aparato así constituido en un paraje cuya temperatura sea algo elevada. La columna de mercurio encerrada en el tubo empezará á descender rápidamente hasta llegar á una posicion en que queda estacionaria. El termómetro marca entonces la *temperatura del hielo fundente*, invariable en razon á que cualquiera que sea el orígen

del calor que funde el hielo deja de ser sensible, porque se emplea en el cambio de estado del hielo. Se marca entonces con la cifra cero de la escala termométrica el punto *r* (fig. 160; lám. 15) que corresponde á esta temperatura, y está determinado por el extremo de la columna de mercurio.

El otro punto fijo corresponde á la temperatura de ebullicion del agua destilada, que es tambien invariable, y se obtiene de una manera análoga introduciendo el depósito del termómetro y parte del tubo en un aparato particular dispuesto de manera, que las citadas partes del instrumento están completamente rodeadas del vapor de agua, que se produce en un vaso metálico colocado sobre un hornillo. El punto *s* en que se estaciona el extremo superior de la columna de mercurio se marca con el número 100 en la parte del tubo en que tiene lugar, y que por esta razon se deja al descubierto en el aparato que hemos indicado.

La parte comprendida entre las graduaciones 0 y 100 que hemos determinado se divide exactamente en cien partes iguales, cada una de las cuales es un grado de la escala del *termómetro centígrado*, y se subdivide en dos ó más partes iguales si la longitud que le corresponde lo permite. La graduacion se extiende por encima de *s* y por debajo del cero *r* de la escala. Los grados contados á partir del cero hácia la parte superior se consideran como positivos, y como negativos los que se cuentan hácia la inferior, escribiéndolos con los signos algébricos que les corresponden.

372. **Diferentes escalas termométricas.**—Además de la escala centesimal que hemos dado á conocer, están bastante extendidas otras escalas, como la de Réaumur y la de Fahrenheit. En la escala de Réaumur, el espacio comprendido entre los puntos fijos de que hemos hablado está dividido en 80 partes iguales, teniéndose por lo tanto la equivalencia $100C = 80R$, que simplificada se reduce á

$$5 \times C = 4 \times R \qquad [1].$$

El cero de la escala de Fahrenheit corresponde á la temperatura que se obtiene por una mezcla de partes iguales de sal amoniaco y nieve: el punto correspondiente á la ebullicion del agua destilada está marcado con el número 212, y el de la fusion del hielo corresponde á 32° de esta escala. De estas consideraciones resulta la equivalencia $100C = (212 - 32)\,F$, que se reduce á

$$5 \times C = 9 \times F \qquad [2].$$

373. **Reduccion á la escala centesimal de las temperaturas señaladas en otra escala diferente.**—Dado un número de grados, por ejemplo 17°5 de la escala de Réaumur, se reducirán á la escala centesimal, observando que de la equivalencia [1] se deduce $R = \frac{5}{4}\,C$, lo que

quiere decir que un grado de Réaumur es los $\frac{5}{4}$ de un centígrado; luego multiplicando por $\frac{5}{4}$ el número dado se tendrá el valor que se busca

$$x = 17,^{r}5 \times \frac{5}{4} = 21,^{c}9.$$

La reduccion de centígrados á grados de Réaumur se obtendría multiplicando por $\frac{4}{5}$ el número dado.

374. Para reducir á centígrados 97°,5 del termómetro de Fahrenheit se empezaría por restar 32° del número dado, y despues se multiplicaria la diferencia por $\frac{5}{9}$, en atencion á que de la equivalencia [2] resulta que un grado de la escala de Fahrenheit es los $\frac{5}{9}$ de un centígrado: se tendría por lo tanto

$$x = (97,^{f}5 - 32)\frac{5}{9} = 65,^{f}5 \times \frac{5}{9} = 36,^{c}4.$$

Si por el contrario se quiere reducir un número de grados centesimales á la escala de Fahrenheit, se le multiplica por $\frac{9}{5}$ y se añade 32° al producto obtenido.

375. **Tablas de reduccion.**—Las tablas que á continuacion insertamos sirven para evitar el cálculo de reduccion, obteniendo desde luego el número de grados de la division centesimal á que equivale un número de grados obtenido en el termómetro de Réaumur ó de Fahrenheit. Cuando el número dado consta de un número exacto de grados de Réaumur y de una fraccion de grado, se hará uso de la tabla núm. 1, corriendo la coma un lugar á la izquierda para las décimas de grado. Para el ejemplo citado (373) se tendrá que

á $17,^{r}0$ corresponden	$21,^{c}25$
$0,^{r}5$	$0,\ 63$
Suma	$21,^{c}88$

á $21,^{c}9$ próximamente.

Del mismo modo se reducirán las temperaturas de Fahrenheit, buscando en la tabla núm. 2 la equivalencia del número de grados, y en la pequeña tabla adicional el que corresponde á las décimas. Para el ejemplo résuelto (374) se tendrá:

á 97,^{f} 0 corresponden............................	36,^{c} 11
0,^{f} 5..	0, 28
Suma..............................	36,^{c} 39

ó 36,^{c} 4 próximamente.

TABLA NÚM 1.

Reduccion de los grados de la escala termométrica de Réaumur á grados centesimales.

R.	C.	R.	C.	R.	C.
1°	1°,25	15°	18°,75	28°	35°,00
2	2,50	16	20,00	29	36,25
3	3,75	17	21,25	30	37,50
4	5,00	18	22,50	31	38,75
5	6,25	19	23,75	32	40,00
6	7,50	20	25,00	33	41,25
7	8,75	21	26,25	34	42,50
8	10,00	22	27,50	35	43,75
9	11,25	23	28,75	36	45,00
10	12,50	24	30,00	37	46,25
11	13,75	25	31,25	38	47,50
12	15,00	26	32,50	39	48,75
13	16,25	27	33,75	40	50,00
14	17,50				

TABLA NÚM. 2

Reduccion de los grados de la escala termométrica de Fahrenheit á grados centesimales

F.	C.	F.	C.	F.	C.
10°	—12°,22	45	7°.22	80°	26°,67
11	—11 67	46	7.78	81	27,22
12	—11,11	47	8,33	82	27,78
13	—10,56	48	8,89	83	28,33
14	—10,00	49	9,44	84	28,89
15	— 9,44	50	10 00	85	29,44
16	— 8,89	51	10,56	86	30,00
17	— 8,33	52	11,11	87	30,56
18	— 7,78	53	11,67	88	31,11
19	— 7,22	54	12,22	89	31,67
20	— 6,67	55	12,78	90	32,22
21	— 6,11	56	13,33	91	32,78
22	— 5,56	57	13,89	92	33,33
23	— 5,00	58	14,44	93	33 89
24	— 4,44	59	15,00	94	34,44
25	— 3,89	60	15,56	95	35,00
26	— 3,33	61	16 11	96	35,56
27	— 2,78	62	16,67	97	36,11
28	— 2,22	63	17,22	98	36,67
29	— 1,67	64	17,78	99	37,22
30	— 1,11	65	18.33	100	37,78
31	— 0,56	66	18,89	101	38,33
32	0,00	67	19.44	102	38,89
33	0,56	68	20,00	103	39,44
34	1,11	69	20,56	104	40,00
35	1,67	70	21,11	105	40,56
36	2,22	71	21,67	106	41,11
37	2,78	72	22,22	107	41,67
38	3,33	73	22,78	108	42,22
39	3,89	74	23,33	109	42,78
40	4,44	75	23,89	110	43,33
41	5,00	76	24,44	111	43 89
42	5,56	77	25,00	112	44,44
43	6,11	78	25,56	113	45,00
44	6,67	79	26,11	114	45,56

F.	C.	F.	C.	F.	C.
115°	46°,11	124°	51°,11	133°	56°,11
116	46,67	125	51,67	134	56,67
117	47,22	126	52,22	135	57,22
118	47,78	127	52,78	136	57,78
119	48,33	128	53 33	137	58,33
120	48,89	129	53,89	138	58,89
121	49 44	130	54,44	139	59,44
122	50,00	131	55 00	140	60,00
123	50,56	132	55,56		

Décimas de F.	Centésimas C.	Décimas de F.	Centésimas C.
0°,1	0°,06	0°,6	0°,33
0 ,2	0 ,11	0 ,7	0 ,39
0 ,3	0 ,17	0 ,8	0 ,44
0 ,4	0 ,22	0 ,9	0 ,50
0 ,5	0 ,28		

376. **Barómetro.**—El *barómetro* es un instrumento destinado á la medida de la presion atmosférica en un punto dado de la superficie terrestre. La existencia de esta presion y la posibilidad de medirla se evidencian por el experimento de Torricelli, que consiste en llenar completamente de mercurio un tubo de cristal cerrado por uno de sus extremos, cubriendo despues con el dedo la abertura de modo que no quede aire alguno dentro del tubo; si en esta posicion se le invierte introduciéndole por la parte cubierta en una cubeta llena tambien de mercurio, destapándole despues, se observará que parte del que contiene el tubo pasa á la cubeta, quedando un espacio vacío en su parte superior *a* (fig. 161; lám. 16), llamado comunmente la *cámara barométrica:* el resto continúa ocupado por una columna *b* de mercurio, sostenida por la presion que ejerce el aire en la superficie *mn* del líquido contenido en la cubeta. Cuando la presion atmosférica aumenta, la columna *b* no puede equilibrarla, y entonces el exceso de presion obliga á pasar al tubo parte del mercurio de la cubeta, lo que hace aumentar la altura de la columna *b*. Si por el contrario disminuye la presion, pasa una porcion del mercurio del tubo á la cubeta, disminuyendo la altura de la columna *b*.

Del experimento que acabamos de citar se deduce tambien, que la presion ejercida sobre la superficie libre *mn* del mercurio en la cubeta ó sobre una parte cualquiera de ella, y que es el peso de un volúmen de aire cuya base es la superficie considerada y cuya altura es la de toda la atmósfera que gravita sobre ella, está equilibrada por el del volúmen de mercurio, que tiene la misma base y cuya altura es la de la columna barométrica *b*. Esto se explica sabiendo, como se demuestra en Física, que la presion ejercida sobre una porcion cualquiera de la superficie de un líquido se trasmite á toda ella. En virtud de lo que acabamos de exponer, la presion ejercida al nivel del mar, en que la columna barométrica tiene una altura de $0,^{m}76$ en las circunstancias atmosféricas ordinarias, sobre una superficie de un centímetro cuadrado, por ejemplo, será el peso de una columna de mercurio de 76 centímetros cúbicos; y como cada uno de estos pesa $13,^{gr}6$, por ser su densidad 13,6 respecto á la del agua destilada, la presion que tratamos de hallar será de $13,^{gr}6 \times 76 = 1033,^{gr}6$, ó lo que es lo mismó de $1^{kilg}\ 33,^{gr}6$.

En consecuencia de lo que acabamos de establecer, la presion atmosférica se mide por la altura de la columna de mercurio en el barómetro. Esta altura es independiente de la seccion del tubo y no influyen por lo tanto en ella las dilataciones ó contracciones del mismo. La altura barométrica se mide por una escala dividida en centímetros y milímetros, ó en pulgadas y décimas de pulgada. Las tablas que á continuacion insertamos indican la reduccion de la columna barométrica expresada en pulgadas españolas, francesas é inglesas á la division centesimal.

TABLA NÚM. 3

Reduccion de las pulgadas españolas á milímetros

Pulg.	Lín.	Milímetros	Pulg.	Lín.	Milímetros	Pulg.	Lín.	Milímetros
19	4	448,911	22	4	518,570	25	4	588,228
	5	450,846		5	520,505		5	590,163
	6	452,781		6	522,440		6	592,098
	7	454,716		7	524,375		7	594,033
	8	456,651		8	526,310		8	595,968
	9	458,586		9	528,245		9	597,903
	10	460,521		10	530,180		10	599,838
	11	462,456		11	532,115		11	601,773
20	0	464,391	23	0	534,049	26	0	603,708
	1	466,326		1	535,984		1	605,643
	2	468,261		2	537,919		2	607,578
	3	470,196		3	539,854		3	609,513
	4	472,131		4	541,789		4	611,448
	5	474,065		5	543,724		5	613,383
	6	476,000		6	545,659		6	615,318
	7	477,935		7	547,594		7	617,253
	8	479,870		8	549,529		8	619,188
	9	481,805		9	551,464		9	621,123
	10	483,740		10	553,399		10	623,058
	11	485,675		11	555,334		11	624,993
21	0	487,610	24	0	557,269	27	0	626,927
	1	489,545		1	559,204		1	628,862
	2	491,480		2	561,139		2	630,797
	3	493,415		3	563,074		3	632,732
	4	495,350		4	565,009		4	634,667
	5	497,285		5	566,944		5	636,602
	6	499,220		6	568,879		6	638,537
	7	501,155		7	570,814		7	640,472
	8	503,090		8	572,749		8	642,407
	9	505,025		9	574,684		9	644,342
	10	506,960		10	576,618		10	646,277
	11	508,895		11	578,553		11	648,212
22	0	510,830	25	0	580,488	28	0	650,147
	1	512,765		1	582,423		1	652,082
	2	514,700		2	584,358		2	654,017
	3	516,635		3	586,293		3	655,952

Pulg.	Lín.	Milímetros.	Pulg.	Lín.	Milímetros.	Pulg.	Lín.	Milímetros.
28	4	657,887	30	3	702,391	32	2	746,895
	5	659,822		4	704,326		3	748,830
	6	661,757		5	706,261		4	750,765
	7	663,692		6	708,196		5	752,700
	8	665,627		7	710,131		6	754,635
	9	667,562		8	712,066		7	756,570
	10	669,497		9	714,001		8	758,505
	11	671,432		10	715,936		9	760,440
29	0	673,366		11	717,871		10	762,375
	1	675,301	31	0	719,806		11	764,310
	2	677,236		1	721,741	33	0	766,245
	3	679,171		2	723,676		1	768,180
	4	681,106		3	725,611		2	770,115
	5	683,041		4	727,546		3	772,050
	6	684,976		5	729,481		4	773,985
	7	686,911		6	731,416		5	775,920
	8	688,846		7	733,351		6	777,855
	9	690,781		8	735,286		7	779,790
	10	692,716		9	737,221		8	781,725
	11	694,651		10	739,156		9	783,660
30	0	696,586		11	741,091		10	785,595
	1	698,521	32	0	743,025		11	787,530
	2	700,456		1	744,960	34	0	789,465

Décimas de línea.	Milímetros.	Centésimas de línea.	Milímetros.
0,1	0,194	0,01	0,019
2	0,387	02	0,039
3	0,581	03	0,058
4	0,774	04	0,077
5	0,968	05	0,097
6	1,161	06	0,116
7	1,355	07	0,135
8	1,548	08	0,155
9	1,742	09	0,174

TABLA NÚM. 4

Reduccion de las pulgadas francesas á milímetros.

Pulg.	Lín.	Milímetros.	Pulg.	Lín.	Milímetros.	Pulg.	Lín.	Milímetros.
16	7	448,909	19	7	530,120	22	7	611,330
	8	451,165		8	532,375		8	613,586
	9	453,421		9	534,631		9	615,841
	10	455,677		10	536,887		10	618,097
	11	457,933		11	539,143		11	620,353
17	0	460,189	20	0	541,399	23	0	622,609
	1	462,445		1	543,655		1	624,865
	2	464,701		2	545,911		2	627,121
	3	466,957		3	548,167		3	629,377
	4	469,213		4	550,423		4	631,633
	5	471,468		5	552,678		5	633,888
	6	473,724		6	554,934		6	636,144
	7	475,980		7	557,190		7	638,400
	8	478,236		8	559,445		8	640,656
	9	480,491		9	561,701		9	642,911
	10	482,747		10	563,957		10	645,167
	11	485,003		11	566,213		11	647,423
18	0	487,259	21	0	568,469	24	0	649,679
	1	489,515		1	570,725		1	651,935
	2	491,771		2	572,981		2	654,191
	3	494,027		3	575,237		3	656,446
	4	496,283		4	577,493		4	658,702
	5	498,538		5	579,748		5	660,958
	6	500,794		6	582,004		6	663,213
	7	503,050		7	584,260		7	665,469
	8	505,306		8	586,515		8	667,725
	9	507,562		9	588,771		9	669,981
	10	509,818		10	591,027		10	672,237
	11	512,073		11	593,283		11	674,493
19	0	514,329	22	0	595,539	25	0	676,749
	1	516,585		1	597,795		1	679,005
	2	518,841		2	600,051		2	681,260
	3	521,097		3	602,307		3	683,516
	4	523,352		4	604,563		4	685,772
	5	525,608		5	606,818		5	688,028
	6	527,864		6	609,074		6	690,284

Pulg.	Lin	Milímetros.	Pulg.	Lín.	Milímetros.	Pulg.	Lín.	Milímetros.
25	7	692,540	26	9	724,121	27	11	755,703
	8	694,795		10	726,377	28	0	757,959
	9	697,051		11	728,633		1	760,214
	10	699,307	27	0	730,889		2	762,470
	11	701,563		1	733,144		3	764,726
26	0	703,819		2	735,400		4	766,982
	1	706,074		3	737,656		5	769,238
	2	708,330		4	739,912		6	771,494
	3	710,586		5	742,168		7	773,749
	4	712,842		6	744,424		8	776,005
	5	715,098		7	746,679		9	778,261
	6	717,354		8	748,935		10	780,517
	7	719,609		9	751,191		11	782,773
	8	721,805		10	752,447	29	0	785,029

Décimas de linea.	Milímetros.	Centésimas de línea.	Milímetros.
0,01	0,226	0,01	0,023
02	0,451	02	0,045
03	0,677	03	0,068
04	0,902	04	0,090
05	1,128	05	0,113
06	1,354	06	0,135
07	1,579	07	0,158
08	1,805	08	0,180
09	2,030	09	0,203

TABLA NÚM 5.

Reduccion de las pulgadas inglesas á milímetros.

Pulgadas inglesas	Milímetros.	Pulgadas inglesas.	Milímetros	Pulgadas inglesas.	Milímetros.
17,7	449,568	21,2	538,468	24,7	627,368
8	452,108	3	541,008	8	629,908
9	454,648	4	543,548	9	632,448
18,0	457,188	5	546,088	25,0	634,988
1	459,728	6	548,628	1	637,528
2	462,268	7	551,168	2	640,068
3	464,808	8	553,708	3	642,608
4	467,348	9	556,248	4	645,148
5	469,888	22,0	558,788	5	647,688
6	472,428	1	561,328	6	650,228
7	474,968	2	563,868	7	652,768
8	477,508	3	566,408	8	655,308
9	480,048	4	568,948	9	657,848
19,0	482,588	5	571,488	26,0	660,388
1	485,128	6	574,028	1	662,928
2	487,668	7	576,568	2	665,468
3	490,208	8	579,108	3	668,008
4	492,748	9	581,648	4	670,548
5	495,288	23,0	584,188	5	673,088
6	497,828	1	586,728	6	675,628
7	500,368	2	589,268	7	678,168
8	502,908	3	591,808	8	680,708
9	505,448	4	594,348	9	683 248
20,0	507,988	5	596,888	27,0	685,788
1	510,528	6	599,428	1	688,328
2	513,068	7	601,968	2	690,868
3	515,608	8	604,508	3	693,407
4	518,148	9	607,048	4	695,947
5	520,688	24,0	609,588	5	698,487
6	523,228	1	612,128	6	701,027
7	525,768	2	614,668	7	703,567
8	528,308	3	617,208	8	706,107
9	530,848	4	619,748	9	708,647
21,0	533,388	5	622,288	28,0	711,187
1	535,928	6	624,828	1	713,727

Pulgadas inglesas.	Milímetros.	Pulgadas inglesas.	Milímetros.	Pulgadas inglesas.	Milímetros.
28,2	716,267	29,2	741,667	30,2	767,066
3	718,807	3	744,207	3	769,606
4	721,347	4	746,747	4	772,146
5	723,887	5	749,286	5	774,686
6	726,427	6	751,826	6	777,226
7	728,967	7	754,366	7	779,766
8	731,507	8	756,906	8	782,306
9	734,047	9	759,446	9	784,846
29,0	736,587	3,00	761,986	31,0	787,386
1	739,127	1	764,526		

Pulgadas inglesas.	Milímetros.	Pulgadas inglesas.	Milímetros.
0,01	0,254	0,001	0,025
02	0,508	002	0,051
03	0,762	003	0,076
04	1,016	004	0,102
05	1,270	005	0,127
06	1,524	006	0,152
07	1,778	007	0,178
08	2,032	008	0,203
09	2,286	009	0,229

377. **Correcciones de la altura barométrica.**—La *capilaridad* ejerce sobre la columna de mercurio una presion (52) que disminuye su altura, y que es tanto mayor cuanto menor es el diámetro del tubo. Para corregir de esta causa de error una altura barométrica, se halla el valor del diámetro interior del tubo, y se busca en la tabla siguiente el número que corresponde en la segunda columna al diámetro conocido, que se halla en la primera; el valor que así se encuentra se deberá añadir á todas las alturas observadas en lo sucesivo con el mismo barómetro. El diámetro interior del tubo puede calcularse si no se conoce de antemano, restando del exterior 2,^{mm}3 cuando se ha hallado para el valor de este último 8 á 10,^{mm} y 2,^{mm}5 si tiene de 10 á 12. En pasando de 20^{mm} ó 2^{cm} el error se considera nulo.

TABLA NÚM. 6.

Depresion en milímetros de la columna barométrica para un diámetro que se refiere á la misma unidad.

Diámetro del tubo. mm.	Depresion. mm.	Diámetro del tubo. mm.	Depresion mm.	Diámetro del tubo. mm	Depresion. mm.
2	4,454	7	0,909	14	0,161
2,5	3,568	7,5	0,803	15	0,127
3	2,918	8	0,712	16	0,099
3,5	2,442	8,5	0,632	17	0,077
4	2,068	9	0,562	18	0,060
4,5	1,774	9,5	0,500	19	0,047
5	1,534	10	0,445	20	0,036
5,5	1,337	11	0,330	21	0,028
6	1,171	12	0,260		
6,5	1,030	13	0,204		

378. *Reduccion de la columna barométrica á 0°.*—Otra correccion que es preciso introducir en la altura barométrica es la reduccion á una temperatura única y perfectamente determinada, sin la cual serian comparables entre sí las observaciones barométricas hechas en diferentes lugares y en estaciones distintas. Para conseguir este objeto, se ha elegido la temperatura de 0°, que cumple como ya sabemos (371) con la condicion á que acabamos de referirnos. Sin esta correccion, las variaciones que las diferentes temperaturas hacen experimentar á la densidad del mercurio, harían variable tambien la altura del barómetro para una misma presion atmosférica. En efecto, para hacer equilibrio á una presion dada de la atmósfera con dos barómetros á temperatura diferente, en los que el mercurio tendria por lo tanto diferente densidad, las alturas, segun se demuestra en Física, estarian en razon inversa de las densidades del líquido, y siendo estas diferentes, las alturas lo serian tambien conforme al principio que acabamos de enunciar. Si representamos por H la altura barométrica á la temperatura t diferente de cero, y por h la que le correspondería á 0°, representando además por d y d' las densidades de H y h, tendriamos segun el principio que acabamos de demostrar,

$$H : h :: d' : d;$$

si ahora representamos por 1 el volúmen de h, el dé H lo estará por $1 + Dt$, siendo D el coeficiente de dilatacion cúbica absoluta del mercurio, ó el aumento que experimenta por cada grado de temperatura, que es $\frac{1}{5550}$ de su volúmen á 0°, y tenemos en cuenta que para el mismo peso que equilibra al de la atmósfera, los volúmenes están en razon inversa de las densidades, resulta la proporcion

$$1 + Dt : 1 :: d' : d;$$

de las proporciones establecidas resulta

$$H : h :: 1 + Dt : 1;$$

en la que despejando h se tiene por último

$$h = \frac{H}{1 + Dt} \qquad [3].$$

Sustituyendo por D su valor, se hallará

$$h = \frac{H}{1 + \frac{t}{5550}} = \frac{H}{\frac{5550 + t}{5550}} = \frac{5550 \times H}{5550 + t}.$$

Ejemplo. Supongamos que á la temperatura de 13° centesimales se ha observado una altura barométrica de $0,^{m}765$: se hallará el valor de la altura correspondiente á 0° para la misma presion atmosférica, sustituyendo valores en la fórmula anterior, con lo que se tendrá

$$h = \frac{5550 \times 0,^{m}765}{5550 + 13} = \frac{4245,75}{5563} = 0,^{m}763.$$

379. **Tablas de reduccion á 0° de las alturas barométricas observadas.**—Para abreviar las operaciones evitándose el cálculo anterior, sirve la tabla que á continuacion insertamos. Para hacer uso de ella es preciso buscar en la primera columna la altura dada, y en el mismo renglon en que se halle se encontrará la reduccion para 1°.... 2°.... de temperatura: se descompondrá el valor de la que se ha observado en sus diferentes unidades, y se buscará la correccion que debe hacerse corriendo convenientemente la coma para las unidades de los diferentes órdenes. Para el ejemplo antes resuelto por el cálculo se tendría:

Altura dada..............	765,^{mm}00.
A 10^c de *t*, corresponde	—1,23;
á 3^c	—0,37.
Altura corregida.....	= 763,^{mm}4,

ó 0,^{m}763 como en el ejemplo citado.

Si la altura dada no está en las tablas, se halla la correccion proporcional entre las que la comprenden, como en el caso de ser 0,^{m}747 la altura dada y 25,^{c}6 la temperatura del mercurio, con lo que se dispondría el cálculo como sigue:

Altura dada..............	747,^{mm}00.
A 20^c corresponde......	—2,41;
á 5^c	—0,60;
á 0,^{c} 6..................	—0,07.
Altura corregida.....	= 743,^{mm}92,

ó 0,^{m}744 próximamente.

TABLA NÚM 7

Reducciones de la altura barométrica á 0°, referidas al milímetro como unidad.

Alturas	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
450	0,073	0,145	0,218	0,290	0,363	0,436	0,508	0,581	0,654
55	073	147	220	294	367	441	514	587	661
60	074	149	223	297	371	445	520	594	668
65	075	150	225	300	375	450	525	600	675
70	076	152	228	303	379	455	531	607	683
475	0,077	0,153	0,230	0,307	0,383	0,460	0,537	0,613	0,690
80	077	155	232	310	387	465	542	620	697
85	078	157	235	313	391	470	548	626	704
90	079	158	237	316	395	474	554	633	712
95	080	160	240	320	399	479	559	639	719
500	0,081	0,161	0,242	0,322	0,402	0,483	0,564	0,644	0,725
05	081	163	244	325	407	488	569	650	732
10	082	164	246	328	411	493	575	657	739
15	083	166	249	332	415	497	580	663	746
20	084	167	251	335	419	502	586	670	753
525	0,085	0,169	0,254	0,338	0,423	0,507	0,592	0,676	0,761
30	085	171	256	341	427	512	597	683	768
35	086	172	258	345	431	517	603	689	775
40	087	174	261	348	435	522	609	696	782
45	088	175	263	351	439	526	614	702	790
550	0,089	0,177	0,266	0,354	0,443	0,531	0,620	0,708	0,797
55	089	179	268	357	447	536	625	715	804
60	090	180	270	361	451	541	631	721	811
65	091	182	273	364	455	546	637	728	819
70	092	184	275	367	459	551	642	734	826
575	0,093	0,185	0,278	0,370	0,463	0,555	0,648	0,741	0,833
80	093	187	280	374	467	560	654	747	840
85	094	188	283	377	471	565	659	753	848
90	095	190	285	380	475	570	665	760	855
95	096	192	287	383	479	575	671	766	862
600	0,097	0,193	0,290	0,386	0,483	0,580	0,676	0,773	0,869
05	097	195	292	390	487	584	682	779	877
10	098	196	295	393	491	589	687	786	884
15	099	198	297	396	495	594	693	792	891
20	100	200	299	399	499	599	699	799	898

Alturas	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
625	0,101	0,201	0,302	0,403	0,503	0,604	0,704	0,805	0,906
30	101	203	304	406	507	609	710	811	913
35	102	204	307	409	511	613	716	818	920
40	103	206	309	412	515	618	721	824	927
45	104	208	312	415	519	623	727	831	935
650	0,105	0,209	0,314	0,419	0,523	0,628	0,733	0,837	0,942
55	105	211	316	422	527	633	739	844	949
60	106	213	319	425	531	638	744	850	956
65	107	214	321	428	535	642	749	857	964
70	108	216	324	431	539	647	755	863	971
675	0,109	0,217	0,326	0,435	0,543	0,652	0,761	0,869	0,978
80	109	219	328	438	547	657	766	876	985
85	110	221	331	441	551	662	772	882	993
90	111	222	333	444	555	667	778	889	1,000
95	112	224	336	448	559	671	783	895	1,007
700	0:113	0,225	0,338	0,451	0,564	0,676	0,789	0,902	1,014
05	114	227	341	454	568	681	795	908	1,022
10	114	229	343	457	572	686	800	914	1,029
15	115	230	345	460	576	691	806	921	1,036
20	116	232	348	464	580	696	811	927	1,043
725	0,117	0,233	0,350	0,467	0,584	0,700	0,817	0,934	1,051
30	118	235	353	470	588	705	823	940	1,058
35	118	237	356	473	592	710	828	947	1,065
40	119	238	357	477	596	715	834	953	1,072
45	120	240	360	480	600	720	840	960	1,080
750	0,121	0,242	0,362	0,483	0,604	0,724	0,845	0,966	1,087
55	122	243	365	486	608	729	851	972	1,094
60	122	245	367	489	612	734	857	979	1,101
65	123	246	369	493	616	739	862	985	1,108
70	124	248	372	496	620	744	868	992	1,116
775	0,125	0,250	0,374	0,499	0,624	0,749	0,873	0,998	1,123
80	126	251	377	502	628	753	879	1,005	1,130
85	126	253	379	506	632	758	885	1,011	1,137
90	127	254	382	509	636	763	890	1,018	1,145
95	128	256	384	512	640	768	896	1,024	1,152
800	0,129	0,258	0,386	0,515	0,644	0,773	0,902	1,030	1,159

380. **Diferentes clases de barómetros.**—Entre las varias clases de barómetros que se citan en las obras de Física, nosotros sólo nos ocuparemos de los más generalmente usados en las nivelaciones barométricas, por la precision que pueden suministrar en las observaciones y la comodidad con que por su forma se prestan á ser trasportados: tales son los barómetros de mercurio debidos á Fortin y á Gay-Lussac, el barómetro aneróide de Vidi, y el barómetro metálico de Bourdon.

381. **Barómetro de Fortin.**—El tubo *a* (fig. 162; lám. 16), que contiene la columna de mercurio destinada á medir la presion atmosférica, está encerrado en un estuche de cobre, que deja en sentido de su longitud dos aberturas opuestas para permitir la observacion de las variaciones de la columna barométrica. Á uno de los lados del tubo está grabada la escala de centímetros y milímetros ó de pulgadas y décimas; cuyo cero debe corresponder al nivel superior del mercurio en la cubeta de cristal *c*, contenida en una caja unida por tres columnas metálicas á la pieza en que termina por su parte inferior la armadura del tubo. Esta disposicion permite observar el nivel del mercurio en la cubeta. Un termómetro *t* fijo á la misma armadura sirve para apreciar la temperatura del mercurio, y el resalto *r* para disponer el instrumento en el trípode de varillas metálicas. La pieza móvil *n* corre á lo largo de la armadura; va provista de un nonius, que aprecia décimas partes de la menor division de la escala, y cuyo cero se lleva á la altura del extremo de la columna barométrica, haciendo que este se halle en el plano superior del reborde *k*. En los barómetros modernos el nonius está dispuesto en un bastidor que se hace correr á lo largo del tubo por medio del boton *m* (fig. 163; lám. 16) y en virtud del engranaje de un piñon con los dientes practicados en el tubo metálico. El cero se halla en el canto inferior del bastidor, que se lleva para las observaciones á la altura del extremo de la columna de mercurio.

382. *Situacion del cero de la escala.*—Las variaciones de altura de la columna barométrica hacen variable el nivel del mercurio contenido en la cubeta, que debería estar siempre á la altura del *cero* de la escala. El error que esta circunstancia produce es inapreciable cuando el diámetro de la cubeta es muy grande con relacion al del tubo; pero la forma del instrumento le haría entonces incómodo para el trasporte; y á fin de obviar este inconveniente se halla dispuesto un tornillo de presion *x* (figura 164; lám. 16) por medio del cual se hace subir ó bajar una piel de gamuza *m* en que termina la cubeta por su parte inferior, hasta que la superficie del mercurio llega á estar en contacto con el extremo de un estilo *b* fijo á la cubierta de la cubeta; lo que tendrá lugar cuando dicho extremo coincida exactamente con su imágen reflejada en la superficie del mercurio. La comunicacion de la cubeta con el aire exterior se establece á través de una gamuza *d* dispuesta sobre la placa que recubre la cubeta.

Para trasportar el instrumento, se mueve el tornillo *x* hasta que el mercurio llena completamente la cubeta, con objeto de impedir el paso del aire exterior.

383. **Barómetro de Gay-Lussac.**—El *barómetro de sifon* de Gay-Lussac consiste en un tubo de cristal *a* (fig. 165; lám. 16) encorvado de manera que presenta dos ramas desiguales, reunidas por un tubo capilar: la rama más alta tiene en su parte superior la cámara barométrica (376) y debajo la columna que equilibra el peso de la atmósfera: la otra hace las veces de cubeta y presenta una pequeña abertura lateral que da paso al aire atmosférico. Dos escalas *e*, *e'* divididas en sentidos contrarios á partir de un cero comun situado hácia el punto *a*, sirven para apreciar la altura de la columna barométrica, que es la suma de las graduaciones que marcan los ceros de los nonius dispuestos en las piezas móviles *n*, *n'* como la explicada (381) para el barómetro de Fortin. Cuando las escalas están graduadas en el mismo sentido á partir de un cero inferior á ambas, se tomará la diferencia de las alturas. El termómetro *t* tiene el mismo uso que en el instrumento acabado de citar. El barómetro de Gay-Lussac puede disponerse tambien en un trípode para la práctica de las operaciones de nivelacion.

La figura 166 (lám. 16) representa la seccion del tubo con la modificacion introducida por Mr. Bunten, y que tiene por objeto impedir toda comunicacion entre la atmósfera y la columna barométrica.

384. **Barómetro aneróide de Vidi.**—Se compone este instrumento de una caja circular metálica A (fig. 167; lám. 16) con su anilla para suspenderla en el punto de estacion, y presenta en su cara anterior una escala barométrica B, circular, que da la medida de la presion atmosférica en pulgadas inglesas, y dos termómetros: el uno C de la escala centesimal y el otro F de la Fahrenheit. El fondo de la caja está ocupado por un cilindro ó tambor metálico hueco, estriado circularmente en su base superior. En este cilindro se ha hecho préviamente el vacío por medio de la máquina neumática, y la presion atmosférica que obra sobre la base estriada del tambor, se comunica por medio de una palanca, traduciéndose en una tension igual á un resorte en espiral que pone en movimiento á la aguja *a* destinada á marcar la presion atmosférica. Una segunda aguja *b*, que por medio de un boton se mueve con la mano, sirve para fijarla en una graduacion dada de la escala barométrica, á fin de comparar la presion correspondiente al tiempo en que se fija con la que señala la aguja *a* en otra época cualquiera. Una pequeña abertura circular practicada en la caja A sirve para poner en comunicacion con el resto de la atmósfera el aire contenido en el interior de la caja.

385. **Barómetro metálico de Bourdon.**—La presion atmosférica se ejerce en este barómetro sobre un tubo *r* (fig. 168; lám. 16) de cobre laminado, encorvado circularmente, herméticamente cerrado, y en cuyo interior se ha hecho el vacío por medio de la máquina neumática. Los extremos del arco circular están fijos á los de una palanca que gira alrededor de un eje proyectado en *c*. Cuando en virtud de la presion atmosférica au-

menta ó disminuye la curvatura del tubo metálico, el movimiento que sus extremos imprimen á la palanca se comunica al arco dentado k, que por medio de un piñon trasmite el movimiento á la aguja indicadora a. Las divisiones de la escala barométrica circular son milímetros, y están numeradas las que corresponden á un número exacto de centímetros. Un contrapeso tiene por objeto equilibrar el de la palanca y la pieza del arco dentado en sus distintas posiciones, y por medio de una llave pueden disponerse la aguja indicadora y la escala graduada, que es móvil con este objeto, de manera que las indicaciones de este barómetro correspondan á las de uno de mercurio, con el que deben compararse antes de proceder á las operaciones. Las distintas partes de que el aparato descrito se compone están dispuestas en una caja circular metálica, que puede suspenderse por medio de una anilla como el barómetro aneróide.

386. **Empleo de los instrumentos en la determinacion del desnivel entre dos puntos.**—Para hacer uso del barómetro y el termómetro en la determinacion del desnivel que existe entre dos puntos dados, es preciso determinar con respecto á cada uno de ellos, la altura barométrica, la temperatura que señala el termómetro unido al barómetro, la cual indica la que tiene el mercurio en este instrumento, y la de la atmósfera, que se mide por un termómetro libre. Con el resultado de estas observaciones se emplean en la determinacion del desnivel que se busca fórmulas de más ó menos fácil aplicacion, ó tablas calculadas con este objeto: vamos á ocuparnos de las que entre unas y otras se han empleado con más frecuencia en la práctica de la nivelacion barométrica.

387. **Fórmulas de la nivelacion barométrica.—Deduccion de la fórmula de Laplace.**—Si suponemos dividida la atmósfera en capas concéntricas de igual altura aa' (fig. 169; lám. 16), suficientemente pequeña para que cada una de ellas pueda considerarse de una densidad uniforme, las alturas de los puntos $a, a' \ldots a'''$ sobre la base ap de la primera capa forman evidentemente una progresion aritmética creciente, cuya razon es aa', y que puede expresarse así:

$$\div\, 0 \,.\, a' \,.\, a'' \,.\, a''' \qquad [4]$$

Representando ahora por $p, p', p'' \ldots$ los pesos respectivos de las porciones de la atmósfera que gravitan sobre las bases ap, $a'p'$, $a''p'' \ldots$ de las diferentes capas que consideramos, $p - p'$ será el peso de la capa inferior, $p' - p''$ el de la inmediatamente superior á ella, y así sucesivamente. Por otra parte, el peso P de un cuerpo homogéneo cualquiera se obtiene multiplicando su densidad D, que es el peso de la unidad de volúmen, por su volúmen total V, y por lo tanto se tiene la expresion $V = \frac{P}{D}$, y si llamamos $d, d' \ldots$ á las densidades de las diferentes capas en que hemos considerado dividida la atmósfera, y tenemos en cuenta que sus volúmenes son sensiblemente iguales, se tendrá

$$\frac{p-p'}{d}=\frac{p'-p''}{d'}=\frac{p''-p'''}{d''}=\ldots\ldots \quad [5],$$

de donde resulta para las dos primeras fracciones la proporcion

$$p-p' : p'-p'' :: d : d' \quad [6];$$

y como en Física se demuestra que las densidades de un mismo fluido elástico sometido á presiones diferentes son proporcionales á los pesos que le comprimen, se tendrá tambien

$$d : d' :: p' : p'',$$

de cuya proporcion y la [6] resulta

$$p-p' : p'-p'' :: p' : p''.$$

Igualando en esta proporcion los productos de extremos y medios, ejecutando las operaciones indicadas y simplificando despues, se obtiene

$$p : p' :: p' : p''.$$

Comparando la segunda fraccion de la série de razones iguales [5] con la tercera, se deducirá igualmente

$$p' : p'' :: p'' : p''',$$

de manera que se obtendrá la progresion geométrica decreciente

$$\div\!\!\div p : p' : p'' : p''';$$

y como las alturas, á que llamaremos h, h'.... de las columnas de mercurio en los puntos a, a'.... son proporcionales á los pesos p, p'.... se tendrá

$$\div\!\!\div h : h' : h'' : h''' \quad [7];$$

luego para alturas que crecen en progresion aritmética, los pesos de la atmósfera y las columnas de mercurio que los miden decrecen en progresion geométrica; y por lo tanto pueden considerarse los términos de la progresion [4] como los logaritmos de sus correspondientes en la [7] que acabamos de obtener. Falta modificar esta última para que resulte análogamento dispuesta á la del sistema de logaritmos ordinarios; para lo que se hará que sea creciente dividiendo la unidad por todos sus términos, y multiplicándolos despues por h, con lo que se obtendrá:

$$\div 1 : \frac{h}{h'} : \frac{h}{h''} : \frac{h}{h'''} \qquad [8]$$

De las progresiones [4] y [8] resulta entónces:

$$a' = \log. \frac{h}{h'} \; ; \qquad a'' = \log. \frac{h}{h''} \; ; \qquad a''' = \log. \frac{h}{h'''}.$$

Para hallar ahora el desnivel x que existe entre dos puntos dados, a' y a''' por ejemplo, se tendrá

$$x = a''' - a' = \log \frac{h}{h'''} - \log. \frac{h}{h'} = (\log. h - \log. h''') -$$

$$(\log. h - \log. h');$$

y efectuando las operaciones indicadas en el segundo miembro, simplificando, é introduciendo el factor constante C por el cual es preciso multiplicarle para que los logaritmos ordinarios de h' y h''' den el verdadero valor de x, toda vez que las progresiones que han producido los de la fórmula anterior son diferentes de los que han dado lugar á los logaritmos tabulares, se tendrá la fórmula

$$x = C\,(\log. h' - \log. h''') \qquad [9],$$

en la que sólo falta determinar el valor de la constante C. Observaremos con este objeto, que á la temperatura de 0° centesimales, al nivel del mar y en la latitud de 45° el mercurio es 10467 veces más pesado que el aire, y el barómetro señala la altura de 0m,76; de lo que deduciremos que á una diferencia de nivel $x =$ 0m,10467 corresponde la de 0m,00001 en las columnas de mercurio, siendo por lo tanto 0m,76001 la altura barométrica del punto más bajo de la distancia vertical representada por x. Sustituyendo en la fórmula [9] los valores que acabamos de indicar, resultará

$$0^m,10467 = C\,(\log.\, 0^m,76001 - \log.\, 0^m,76).$$

Para hallar la diferencia de logaritmos indicada en el paréntesis se efectuará el cálculo siguiente:

$$\begin{array}{rcr} \log.\, 0,76001 = \bar{1},8808193 & = & -1 + 0,8808193 \\ -\log.\, 0,76 = -(\bar{1},8808136) & = & +1 - 0,8808136 \\ \hline \text{Diferencia.} & = & 0,0000057\,; \end{array}$$

sustituyendo en la expresion anterior y despejando C, resultará

$$C = \frac{0^{m},10467}{0,0000057} = 18363.$$

Laplace ha obtenido para C un valor 18312, deducido de experimentos y de cálculos de mucha precision: nosotros hemos indicado el que precede con el sólo objeto de dar á conocer cómo ha podido determinarse el valor de la constante La fórmula de Laplace, es por lo tanto

$$x = 18312^{m}\,(\log.\ H - \log.\ h) \qquad [10],$$

siendo H y h las alturas barométricas correspondientes á los puntos más bajo y más elevado de la altura que se trata de conocer.

La fórmula [10] sería ventajosamente aplicable por su sencillez á la medicion de las alturas, si numerosas causas de error inherentes á los instrumentos de que se hace uso para obtenerlas, debidas á las influencias atmosféricas que modifican contínuamente la disposicion de las distintas partes que les constituyen, no exigieran varias correcciones, las cuales tienen por objeto proporcionar el grado de aproximacion que exige la resolucion del problema que nos ocupa.

388. **Correcciones de la fórmula barométrica.**—*Correccion relativa á la temperatura del aire y á los vapores que contiene.*—El aire, como todos los fluidos elásticos, se dilata por el calórico en la fraccion de 0,00375 de su volúmen á 0°, por cada grado de la division centesimal en que aumenta su temperatura, siendo por lo tanto esta dilatacion de $0,00375 \times m$ para la temperatura m^{c} observada en el termómetro. Habiéndose calculado la fórmula [10] en la hipótesis de la temperatura 0^{c}, el volúmen del aire al pasar de ella á m^{c} hará aumentar la altura x en la misma cantidad, puesto que la base es siempre la misma; luego á la temperatura de m^{c} se tendrá

$$x' = 18312\,(\log.\ H - \log.\ h) + 0,00375\,m \times 18312\,(\log.\ H - \log.\ h):$$

sacando el factor 18312 (log H—log. h), comun á los dos términos del segundo miembro, y poniendo en vez de m su igual $\frac{T+t}{2}$, semisuma de las temperaturas en las dos estaciones del barómetro, que puede sustituirla en razon á que los decrecimientos de la temperatura son sensiblemente uniformes, la fórmula se convertirá en

$$x' = 18312\left(1 + 0,00375\,\frac{T+t}{2}\right)(\log.\ H - \log.\ h).$$

Esta fórmula se ha obtenido en la hipótesis de estar el aire perfectamente seco; pero como contiene siempre vapor de agua que hace variar su densidad, es preciso introducir una nueva correccion, para la que basta, segun Laplace, cambiar el coeficiente 0,00375 en 0,004, que da á la expresion la forma

$$x'' = 18312 \left(1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right)(\log H - \log. h) \qquad [11]$$

389. *Correccion relativa á la diferente accion de la gravedad sobre la columna barométrica y sobre el aire atmosférico en las dos estaciones del instrumento.*—La gravedad ejerce sobre la columna de mercurio, como sobre todos los cuerpos, una atraccion cuya intensidad está en razon inversa de los cuadrados de las distancias á que sucesivamente pueden hallarse del centro de la tierra. La densidad del mercurio en ambas estaciones se hallará por lo tanto en razon inversa de los mismos cuadrados. Sean A y M (fig. 170; lám. 16) los puntos de estacion del barómetro; Am la distancia a del punto inferior al nivel mn de la superficie del mar; BM $= x$ la altura dada por la aplicacion de la fórmula anterior, y R el rádio Cm de la superficie del mar. La distancia AC será igual á R $+ a$, y la MC á R $+ a + x$; y en virtud de la propiedad indicada, llamando D y d á las densidades del mercurio en A y M, se tendrá

$$D : d :: (R+a+x)^2 : (R+a)^2 \qquad [12]$$

Por otra parte, como para un mismo peso de la columna de mercurio los volúmenes V y v en las estaciones A y M estarán en razon inversa de sus densidades, se tendrá la proporcion

$$D : d :: v : V;$$

y siendo la misma la base de la columna, los volúmenes serán proporcionales á las alturas, resultando

$$v : V :: h : H;$$

de estas dos últimas proporciones se deduce

$$D : d :: h : H,$$

y sustituyendo la segunda razon de esta proporcion á la primera en la [12] que hemos establecido primeramente, resultará

$$h : H :: (R+a+x)^2 : (R+a)^2;$$

de la cual se deducen los valores

$$H = h\left(\frac{R+a}{R+a+x}\right)^2; \qquad h = H\left(\frac{R+a+x}{R+a}\right)^2.$$

La sustitucion de estos valores de H y h en la fórmula [11] introduciría en ella la correccion de que nos ocupamos; pero se ha observado que basta tener en cuenta una correccion media constante de $\frac{1}{382}$, que se obtiene aumentando en 48 unidades el coeficiente 18312, que vendrá entonces á ser 18360. De un modo análogo se ha encontrado que para la diferente accion de la gravedad con respecto al aire es preciso multiplicar el valor hallado por la relacion $\left(\frac{R+a+\frac{x}{2}}{R}\right)^2$; en la cual R es el rádio terrestre ó de la superficie del mar, y $R+a+\frac{x}{2}$, la distancia media de los puntos de estacion al centro de la tierra. Esta correccion puede mirarse tambien como constante, y se obtiene añadiendo 10 unidades al coeficiente 18360; por lo que la fórmula viene á ser entonces

$$x''' = 18370^{\text{m}}\left(1+\frac{2\,(T+t)}{1000}\right)(\log.\ H-\log.\ h) \qquad [13].$$

390. *Correccion debida á la latitud geográfica del lugar.*—La accion de la gravedad varía tambien con las latitudes (tomo I, 135), puesto que los puntos de la superficie terrestre lo son de la de un elipsóide, y distan por tanto desigualmente del centro de la tierra. Esta correccion se obtiene introduciendo el nuevo factor $(1-0{,}00323\times\cos.\ 2L)$ siendo L la latitud geográfica del lugar de estacion. Cuando se tiene $L>45^\circ$, será $2L>90^\circ$, y el coseno de 2L será negativo, por lo que el segundo término del coeficiente cambia de signo. No sucede así cuando se tiene $L<45^\circ$, porque entónces el coseno de $2L<90^\circ$ es positivo. La fórmula en toda su generalidad será por lo tanto

$$z = 18370^{\text{m}}\left(1+\frac{2\,(I+t)}{1000}\right)(1\pm 0{,}00323\ \cos.\ 2L)$$

$$(\log.\ H-\log.\ h) \qquad [14].$$

391 **Tabla de las latitudes geográficas de las capitales de las diferentes provincias de España.**—Para la aplicacion de la fórmula [14] es preciso conocer la latitud del lugar en que se opera, pudiendo adoptarse sin error sensible la de un punto próximo, como por ejemplo, la que corresponde á la Capital de Provincia más próxima. Esta consideracion nos ha inducido á la insercion de la siguiente tabla, que puede tambien ser útil en la resolucion de otros varios problemas, por comprender además las longitudes geográficas, así como las alturas sobre el nivel del mar.

TABLA NÚM. 8

Posiciones geográficas de las Capitales de Provincia de España.

PROVINCIAS.	Latitud Norte ° ′ ″	LONGITUD. En tiempo ′ ″	LONGITUD. En arco ° ′ ″	Cota.
Albacete (Iglesia de San Juan)	38 59 47,0	7 19,6	1 49 54,0 E	700
Alicante (Catedral)	38 20 41,0	12 49,6	3 12 24,0 E	
Almería	36 51 0,0	4 45,0	1 11 15,0 E	
Avila (Catedral)	40 39 24,8	4 2,0	1 0 30,0 O	1100
Badajoz	38 54 0,0	13 6,0	3 16 30,0 O	155
Barcelona (Montjuich)	41 21 44,0	23 23,0	5 50 45,0 E	
Bilbao	43 15 0,0	3 3,0	0 45 45,0 E	
Búrgos (Catedral)	42 20 28 2	0 4,4	0 1 6,0 O	840
Cáceres	39 29 0,0	10 36,0	2 39 0,0 O	350
Cádiz (antiguo Observatorio)	36 31 7,0	10 28,0	2 37 7,5 O	14
Castellon	40 0 0,0	14 32,0	3 38 0,0 E	
Ciudad Real (Iglesia de Santiago)	38 59 21,3	0 57,9	0 14 29,0 O	650
Córdoba	37 53 0,0	4 30 0	1 7 30,0 O	104
Coruña	43 22 0,0	18 50,0	4 42 30,0 O	
Cuenca (Catedral)	40 4 39,8	6 12,5	1 33 7,5 E	903
Gerona (Catedral)	41 59 15,0	26 1,0	6 30 15,0 E	60
Granada (Alhambra)	37 11 10,0	0 12,0	0 3 0,0 E	670
Guadalajara (Iglesia de S. Nicolás)	40 37 54,2	2 4,5	0 31 7,5 E	675
Huelva	37 14 0,0	13 5,0	3 16 15,0 O	
Huesca	42 7 0,0	13 1,0	3 15 15,0 E	450
Jaen	37 47 0,0	0 22,0	0 5 30,0 E	450
Leon	42 36 0,0	7 27,0	1 51 45,0 O	802
Lérida	41 38 0,0	17 16,0	4 19 0,0 E	140
Logroño	42 27 0,0	4 59,9	1 14 45,0 E	372
Lugo	43 1 0,0	15 27,0	3 51 45,0 O	461
Madrid (Observatorio)	40 24 30,0	0 0,0	0 0 0 0	655
Málaga (Catedral)	36 42 56,0	2 59,0	0 44 45,0 O	
Múrcia	37 59 0,0	10 12,0	2 33 0,0 E	136
Orense	42 20 0,0	16 42,0	4 10 30,0 O	144
Oviedo	43 23 0,0	8 30,0	2 7 30,0 O	228
Palencia (Catedral)	42 0 40,6	3 23,9	0 50 58,5 O	720
Palma	39 33 0,0	25 17,0	6 19 15,0 E	

PROVINCIAS.	Latitud Norte ° ′ ″	LONGITUD. En tiempo ′ ″	En arco ° ′ ″	Cota
Pamplona	42 49 0,0	8 4,0	2 1 0,0 E	420
Pontevedra	42 26 0,0	19 42,0	4 55 30,0 O	
Salamanca (Universidad)	40 57 39,0	7 55,2	1 58 48,0 O	780
Santa Cruz de Tenerife	28 28 30,0	50 17,0	12 34 10,0 O	
Santander	43 29 0,0	0 31,0	0 7 45,0 O	
Segovia (Catedral)	40 57 3,6	1 45,6	0 26 24,0 O	960
Sevilla (San Telmo)	37 22 35,0	9 16,0	2 19 0,0 O	90
Soria	44 44 0,0	4 49,0	1 12 15,0 E	1058
San Sebastian	43 19 0,0	6 46,0	1 41 30,0 E	
Tarragona	41 7 10,0	19 48,0	4 57 0,0 E	118
Teruel	40 21 0,0	10 17,0	2 34 15,0 E	935
Toledo	39 51 0,0	1 23,0	0 20 45,0 O	450
Valencia (Catedral)	39 28 28,0	13 15,4	3 48 51,0 E	
Valladolid (Universidad)	41 39 4,4	4 7,3	1 1 49,0 O	680
Vitoria	42 51 0,0	4 9,0	1 2 15,0 E	513
Zamora (San Juan)	41 30 12,0	8 14,0	2 3 30,0 O	596
Zaragoza	41 38 0,0	11 13,0	2 48 15,0 E	184

392. **Fórmulas de que se hace uso en las operaciones ordinarias de la nivelacion barométrica.—Fórmula de Laplace modificada por Ramond.**—Para las latitudes que difieren poco de 45° se tiene sensiblemente cos. 2L = cos 90° = 0; y teniendo en cuenta además las circunstancias atmosféricas más comunes en nuestros climas, Mr. Ramond ha modificado el coeficiente numérico de Laplace, cambiándole en 18393m, que parece satisfacer mejor á ellas. La fórmula será por lo tanto:

$$x = 18393^{m}\left(1 + \frac{2(I+t)}{1000}\right)(\log. H - \log. h) \qquad [A]$$

Para aplicar esta fórmula á la determinacion del desnivel entre dos puntos, supongamos que haciendo estacion en el más bajo de ellos, la altura barométrica corregida (387) es de 763^{mm} y la temperatura del termómetro libre 13° de la division centesimal; y que en el más elevado la temperatura es de 0° y la altura barométrica, corregida en caso de que la temperatura del termómetro unido al barómetro sea diferente de cero, es de $743^{mm}7$; se tendrá entónces:

$$H = 0,^{m}763\,;\; h = 0,^{m}7437\,;\; I = 13\,;\; t = 0\,:$$

é introduciendo estos valores en la fórmula, obtendremos sucesivamente:

$$1 + \frac{2 \times 13}{1000} = \frac{1026}{1000} = 1{,}026;$$

$$\log.\ H = \bar{1}{,}8825245; \qquad \log.\ h = \bar{1}{,}8713978;$$

$$\log.\ H - \log.\ h = 0{,}0111267;$$

estos valores, sustituidos en la ecuacion [A], darán

$$x = 18393^{m} \times 1{,}026 \times 0{,}0111267.$$

Aplicando el cálculo logarítmico para la determinacion de x se tendrá:

$$\begin{aligned} \log.\ 18393 &= 2{,}2646525 \\ +\log.\ 1{,}026 &= 0{,}0111474 \\ +\log.\ 0{,}0111267 &= \bar{2}{,}0463664 \\ \hline \log\ x &= 2{,}3221663; \\ x &= 209{,}^{m}974. \end{aligned}$$

393. *Correccion de latitud*.—Si se quisiese introducir en el valor hallado la correccion de latitud, no habrá más que multiplicar el valor de x por el factor $(1 - 0{,}00323 \cos\ 2L)$ hallado (390) para la fórmula de Laplace; se tendrá entonces para la altura corregida z, la fórmula

$$z = x\ (1 - 0{,}00323\ \cos.\ 2L) \qquad [B].$$

Suponiendo que la altura que se trata de conocer se refiere á dos puntos situados en las inmediaciones de Madrid, cuya latitud es de 40° 24′ 30″, se tendrá sucesivamente:

$$\begin{aligned} \log.\ \cos.\ 2L = \log.\ \cos.\ 80^{\circ}\ 49' &= \bar{1}{,}2030167 \\ +\log.\ 0{,}00323 &= \bar{3}{,}5092025 \\ \hline \log.\ 0{,}00323\ \cos.\ 2L &= \bar{4}{,}7122192; \\ 0{,}00323\ \cos.\ 2L &= 0{,}0005155; \end{aligned}$$

$$1 - 0{,}000323\ \cos.\ 2L = 1 - 0{,}0005155 = 0{,}9994845;$$

y sustituyendo en la fórmula [B] este valor y el que antes hemos hallado para x, se tendrá

$$z = 209{,}^{m}974 \times 0{,}9994845$$

Aplicando el cálculo logarítmico á esta expresion, se hallará

$$
\begin{aligned}
\log.\ 209{,}974 &= 2{,}3221655 \\
+\log.\ 0{,}9994845 &= \bar{1}{,}9997761 \\
\hline
\log.\ z &= 2{,}3219416 \\
z &= 209{,}^{m}866.
\end{aligned}
$$

394. **Fórmula de Babinet.**—Cuando el desnivel que se ha de medir no llega al límite 1000^{m}, se emplea la fórmula

$$x = 16000^{m}\left(\frac{H-h}{H+h}\right)\left(1+\frac{2\,(T+t)}{1000}\right) \qquad [C],$$

debida á Babinet, y que tiene la ventaja de no exigir el empleo del cálculo logarítmico Para hacer aplicacion de ella resolveremos el problema de que ya nos hemos ocupado (392), recordando que el último factor de la fórmula es como en el problema citado 1,026 y hallando el valor de la fraccion

$$\frac{H-h}{H+h} = \frac{0{,}7630-0{,}7437}{0{,}7630+0{,}7437} = \frac{0.0193}{1{,}5067} = 0{,}01281:$$

sustituyendo en la fórmula [C] se tendrá entonces

$$x = 16000^{m} \times 0{,}01281 \times 1{,}026 = 210{,}^{m}289.$$

395. **Fórmula y tablas de Litrow.**—Entre las varias tablas publicadas para facilitar la resolucion del problema de la nivelacion barométrica, como las de Oltmans y de Gauss, damos la preferencia á las de Litrow, atendiendo á lo sencillo de su aplicacion, y á que no siendo tan extensas como las de Oltmans, no exigen tampoco como las de Gauss el empleo de los logaritmos. Para el uso de las tablas de Litrow, que insertamos con el número 9 en las páginas 202 y 203, se emplea la fórmula

$$x = A + \frac{A\,(T+t)}{500} - \left(A' + \frac{A'(T+t)}{500}\right) \qquad [D].$$

en la cual T y t son, como en los ejemplos anteriores, las temperaturas en las estaciones inferior y superior, y A, A′ son valores deducidos de las tablas por medio de las alturas barométricas respectivas H y h, expresadas en milímetros. Estas alturas se descomponen en decenas, unidades y décimas de la unidad en que están expresadas: se busca en la primera

TABLA NÚM. 9.

Valores de A y A′ en la fórmula de Litrow.

H.	0mm	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm
450	+4212,2	—17,7	—35,4	—53,1	—70,7	—88,3	—105,8	—123,3	—140,8	—158,2
460	4036,6	17,3	34,6	51,9	69,1	86,3	102,7	120,6	137,7	154,8
470	3864,8	16,9	33,9	50,8	67,7	84,5	101,3	118,1	134,8	151,5
480	3696,6	16,6	33,1	49,7	66,2	82,7	99,2	115,6	132,0	148,3
490	3531,9	16,2	32,5	48,7	64,9	81,1	97,2	113,3	129,3	145,3
500	3370,6	16,0	31,9	47,8	63,7	79,5	95,3	111,0	126,2	142,5
510	3212,4	15,7	31,3	46,8	62,4	77,9	93,4	108,9	124,3	139,7
520	3057,3	15,4	30,7	46,0	61,2	76,5	91,7	106,8	122,0	137,1
530	2905,1	15,0	30,1	45,1	60,0	75,0	89,9	104,8	119,7	134,5
540	2755,8	14,8	29,5	44,2	58,9	73,6	88,3	102,9	117,5	132,0
550	2609,2	14,5	29,0	43,4	57,8	72,3	86,6	101,0	115,3	129,6
560	2465,3	14,2	28,5	42,7	56,8	71,0	85,1	99,2	113,3	127,4
570	2323,9	14,0	28,0	41,9	55,8	69,7	83,6	97,5	111,3	125,1
580	2185,0	13,8	27,5	41,2	54,9	68,6	82,2	95,8	109,4	123,0
590	2048,5	13,6	27,1	40,6	54,0	67,5	80,9	94,3	107,6	[illegible]
600	1914,2	13,3	26,6	39,8	53,1	66,3	79,5	92,6	105,8	118,9
610	1782,2	13,1	26,2	39,2	52,2	65,3	78,2	91,2	104,1	117,1
620	1652,3	12,9	25,8	38,6	51,4	64,2	77,0	89,7	102,5	115,2
630	1524,5	12,7	25,4	38,0	50,6	63,2	75,8	88,3	100,8	113,4
640	1398,7	12,5	25,0	37,4	49,8	62,2	74,6	86,9	99,3	111,6
650	1274,8	12,3	24,5	36,8	49,0	61,2	73,4	85,6	97,7	109,8
660	1152,9	12,1	24,2	36,3	48,3	60,3	72,3	84,3	96,3	108,2
670	1032,7	11,9	23,8	35,7	47,5	59,4	71,2	83,0	94,8	106,5
680	914,4	11,7	23,5	35,2	46,9	58,5	70,2	81,8	93,4	105,0
690	797,8	11,6	23,1	34,7	46,2	57,7	69,2	80,7	92,1	103,5
700	682,8	11,4	22,8	34,1	45,5	56,8	68,1	79,4	90,7	102,0
710	569,5	11,2	22,4	33,6	44,9	56,0	67,2	78,3	89,5	100,6
720	457,8	11,1	22,2	33,2	44,2	55,3	66,3	77,3	88,3	99,2
730	347,6	10,9	21,9	32,7	43,6	54,5	65,4	76,2	87,0	97,8
740	238,9	10,7	21,5	32,3	43,0	53,7	64,5	75,2	85,8	96,5
750	131,7	10,6	21,3	31,9	42,5	53,0	63,6	74,2	84,7	95,3
760	+ 25,9	10,5	21,0	31,5	41,9	52,4	62,8	73,2	83,6	94,0
770	— 78,5	10,4	20,7	31,1	41,4	51,7	62,0	72,3	82,6	92,8
780	181,6	10,2	20,4	30,6	40,8	51,0	61,2	71,3	81,5	91,6
790	283,3	10,1	20,2	30,3	40,4	50,4	60,5	70,5	80,5	90,5

TABLA NUM. 9.

Valores de A y A' en la fórmula de Litrow.

H.	0mm	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm
450	+4212,2	—17,7	—35,4	—53,1	—70,7	—88,3	—105,8	—123,3	—140,8	—158,2
460	4036,6	17,3	34,6	51,9	69,1	86,3	102,7	120,6	137,7	154,8
470	3864,8	16,9	33,9	50,8	67,7	84,5	101,3	118,1	134,8	151,5
480	3696,6	16,6	33,1	49,7	66,2	82,7	99,2	115,6	132,0	148,3
490	3531,9	16,2	32,5	48,7	64,9	81,1	97,2	113,3	129,3	145,3
500	3370,6	16,0	31,9	47,8	63,7	79,5	95,3	111,0	126,2	142,5
510	3212,4	15,7	31,3	46,8	62,4	77,9	93,4	108,9	124,3	139,7
520	3057,3	15,4	30,7	46,0	61,2	76,5	91,7	106,8	122,0	137,1
530	2905,1	15,0	30,1	45,1	60,0	75,0	89,9	104,8	119,7	134,5
540	2755,8	14,8	29,5	44,2	58,9	73,6	88,3	102,9	117,5	132,0
550	2609,2	14,5	29,0	43,4	57,8	72,3	86,6	101,0	115,3	129,6
560	2465,3	14,2	28,5	42,7	56,8	71,0	85,1	99,2	113,3	127,4
570	2323,9	14,0	28,0	41,9	55,8	69,7	83,6	97,5	111,3	125,1
580	2185,0	13,8	27,5	41,2	54,9	68,6	82,2	95,8	109,4	123,0
590	2048,5	13,6	27,1	40,6	54,0	67,5	80,9	94,3	107,6	121,0
600	1914,2	13,3	26,6	39,8	53,1	66,3	79,5	92,6	105,8	118,9
610	1782,2	13,1	26,2	39,2	52,2	65,3	78,2	91,2	104,1	117,1
620	1652,3	12,9	25,8	38,6	51,4	64,2	77,0	89,7	102,5	115,2
630	1524,5	12,7	25,4	38,0	50,6	63,2	75,8	88,3	100,8	113,4
640	1398,7	12,5	25.0	37,4	49,8	62,2	74,6	86,9	99,3	111,6
650	1274,8	12,3	24,5	36,8	49,0	61,2	73,4	85,6	97,7	109,8
660	1152,9	12,1	24,2	36,3	48,3	60,3	72,3	84,3	96,3	108,2
670	1032,7	11,9	23,8	35,7	47,5	59,4	71,2	83,0	94,8	106,5
680	914,4	11,7	23,5	35,2	46,9	58,5	70,2	81,8	93,4	105,0
690	797,8	11,6	23,1	34,7	46,2	57,7	69,2	80,7	92,1	103,5
700	682,8	11,4	22,8	34,1	45,5	56,8	68,1	79,4	90,7	102,0
710	569,5	11,2	22,4	33,6	44,9	56,0	67,2	78,3	89,5	100,6
720	457,8	11,1	22,2	33,2	44,2	55,3	66,3	77,3	88,3	99,2
730	347,6	10,9	21,9	32,7	43,6	54,5	65,4	76,2	87,0	97,8
740	238,9	10,7	21,5	32,3	43,0	53,7	64,5	75,2	85,8	96,5
750	131,7	10,6	21,3	31,9	42,5	53,0	63,6	74,2	84,7	95,3
760	+ 25,9	10,5	21,0	31,5	41,9	52,4	62,8	73,2	83,6	94,0
770	— 78,5	10,4	20,7	31,1	41,4	51,7	62,0	72,3	82,6	92,8
780	181,6	10,2	20,4	30,6	40,8	51,0	61,2	71,3	81,5	91,6
790	283,3	10,1	20,2	30,3	40,4	50,4	60,5	70,5	80,5	90,5

columna de las tablas el número de decenas, y se escribe el que en el mismo renglon le corresponde en la segunda casilla; advirtiendo que estos números son positivos desde el principio de la columna hasta llegar al 78,5 señalado con el signo —, desde el cual son negativos. El número de unidades que resulta de la descomposicion del que marca la altura barométrica, se busca en el renglon que encabeza la tabla, y se recorre la casilla en que se encuentra hasta llegar al que está en el mismo renglon que el número de decenas antes considerado, escribiéndole debajo del anterior con el signo negativo de que todos estos números están afectados. Igualmente se busca el que corresponde á las décimas de milímetro, corriendo la coma un lugar á la izquierda, y escribiéndole tambien con signo negativo debajo de los anteriores. Resolveremos, como ejemplo, el mismo problema que en los casos precedentes, y dispondremos como sigue el cuadro de las operaciones.

CÁLCULO DE A.

$$\begin{array}{lr} 740^{mm} \ldots\ldots & 238,9 \\ 3^{mm} \ldots\ldots & -32,3 \\ 0,^{mm}7 \ldots\ldots & -\ 7,5 \\ \hline A = & 199,1 \\ \dfrac{A\ (T+t)}{500} = & 5,18 \\ \hline \text{Suma} \ldots\ldots = & 204,28 \end{array}$$

CÁLCULO DE A'.

$$\begin{array}{lr} 760^{mm} \ldots\ldots & 25,9 \\ 3^{mm} \ldots\ldots & -\ 31,5 \\ \hline A' = & -\ 5,6 \\ \dfrac{A'(T+t)}{500} = & -\ 0,15 \\ \hline \text{Suma} \ldots\ldots = & -\ 5,75 \end{array}$$

$$x = 204,28 - (-5,75) = 204,28 + 5,75 = 210,^{m}03\,,$$

resultando poco diferente de los hallados (392 y 394) por la aplicacion de las fórmulas.

396. *Correccion de latitud.*—Para tener en cuenta la latitud, bastará restar del valor hallado para x (395) el que se obtiene en la tabla número 10, que insertamos en la página 205, buscando en la primera columna el valor de x, y viendo el número del renglon en que se encuentra y está al mismo tiempo en la casilla encabezada con la latitud dada, ó con la que más se aproxime á ella. Para el valor 2250 de x y á la latitud de 40°, por ejemplo, se hallará la correccion 1,01. En el ejemplo del párrafo anterior, como el valor 210 hallado para x no se encuentra en la tabla, se considerará que está entre 0 y 250, la correccion lo estará entre 0 y 0,11 para la latitud de 40°, por lo que se hallará el valor c de la correccion que se busca formando la proporcion

$$250 : 0,11 :: 240 : c = \frac{210 \times 0,11}{250} = 0,09:$$

se tendrá entonces para la altura corregida

$$z = 210,03 - 0,09 = 209,^{m}94.$$

TABLA NÚM 10.

Correccion de latitud.

x	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	43°	44°
250	0,20	0,18	0,16	0,13	0,11	0,09	0,07	0,04	0,02
500	0,40	0,36	0,31	0,27	0,22	0,18	0,14	0,09	0,05
750	0,60	0,54	0,47	0,40	0,33	0,27	0,21	0,14	0,07
1000	0,80	0,71	0,63	0,54	0,45	0,36	0,27	0,18	0,09
1250	1,00	0,89	0,78	0,67	0,56	0,45	0,34	0,22	0,12
1500	1,20	1,07	0,94	0,81	0,67	0,54	0,41	0,27	0,14
1750	1,40	1,25	1,10	0,94	0,78	0,63	0,47	0,31	0,16
2000	1,60	1,43	1,26	1,08	0,90	0,72	0,54	0,36	0,18
2250	1,80	1,60	1,41	1,21	1,01	0,81	0,61	0,41	0,21
2500	2,00	1,78	1,57	1,35	1,13	0,91	0,68	0,45	0,23
2750	2,20	1,96	1,73	1,48	1,24	0,99	0,74	0,49	0,25
3000	2,40	2,14	1,88	1,61	1,35	1,08	0,81	0,54	0,27
3250	2,60	2,32	2,04	1,74	1,46	1,17	0,88	0,59	0,30
3500	2,80	2,50	2,20	1,88	1,57	1,26	0,95	0,63	0,32
3750	3,00	2,67	2,35	2,01	1,68	1,35	1,02	0,67	0,34
4000	3,20	2,85	2,50	2,15	1,80	1,44	1,08	0,72	0,36

397. **Determinacion directa de la cota de un punto, ó su altura sobre el nivel del mar.**—Partiendo de que al nivel del mar se ha obtenido la altura barométrica 0,^{m}7629 á la temperatura de 12°,8 del termómetro centigrado y en la latitud de 50° sexagesimales, se observará la altura de la columna barométrica, la temperatura y la latitud del punto cuya cota se quiere conocer, y se aplicarán las fórmulas [A] y [B] (392 y 393) para deducir el valor de z, que será la cota pedida. Prescindiendo de la latitud, puede emplearse la fórmula [C] (394). Tambien puede hacerse uso de las tablas de Litrow (395 y 396). A continuacion (pág. 206) insertamos una tabla de las cotas absolutas ó alturas sobre el nivel del mar de algunas cimas y puertos de las principales cordilleras de España, datos interesantes en algunas aplicaciones de la nivelacion barométrica.

TABLA NÚM. 11.

Alturas sobre el nivel del mar de las principales montañas de España.

Nombre de la altura.	Cordillera ó comarca donde se halla.	Cota en metros.
Pico de Mulahacen	Penibética (Sierra Nevada)	3554
La Veleta	Idem	3470
Pico de Nethou	Pirenáica	3404
Pico de Posets	Idem	3367
Las Tres Sorores	Idem	3351
Monte Perdido	Idem	3351
La Alcazaba	Sierra Nevada	3314
Villamana	Pirenáica	3298
Pico de Estats	Idem	3140
Brecha de Roldan	Idem	3000
Pico de Riús	Idem	2941
Montaña de Maranges	Idem	2913
Pico de Cotiella	Idem (estribos)	2910
El Puigmal	Idem	2909
Monte Collarado	Idem (derivacion)	2889
Rio de Mont Liat	Idem	2881
El Tendeñera	Pirineos (estribos)	2850
Pico de Port de Orla	Idem	2803
Picos de Gallinero	Idem (estribos)	2750
Torre de Cerredo	Astúrica. (Picos de Europa)	2678
Altos de Almanzor	Carpeto-vetónica. (Gredos)	2650
Pico de Coll de Jou	Pirineos (Sierra de Cadí)	2535
Peña Prieta	Idem (derivacion)	2529
Puerto de Viella	Idem	2506
Peña de Curavacas	Idem (prolongaciones)	2502
Peña del Espiguete	Idem id.	2433
Pico del Almirez	Sierra Nevada	2400
Pico de Peñalara	Carpeto-vetónica (Guadarrama)	2400
Sierra Sagra	Ibérica. (Segura)	2398
Cabezas de Hierro	Guadarrama	2385
Pico de Añalarra	Pirineos	2348
Moncayo	Celtibérica (Sierra del Madero)	2346
Cumbres de la	Sierra de Gador. (Penibética)	2323
Pico de San Lorenzo	Celtibérica (Demanda)	2303
Mesa de los tres Reyes	Pirineos	2300
Pico de Urbion	Celtibérica	2246
Las Pedrizas	Guadarrama	2234
Los Siete Picos	Idem	2203
Cabeza de la Ex-comunion	Idem	2161

Nombre de la altura.	Cordillera ó comarca donde se halla.	Cota en metros.
Sierra de Tejeda	Almijara (Nevada, ramificacion)	2134
Pico de Ocejon	Guadarrama (Prolongacion)	2063
Sierra de María	Guillemona (Penibética)	2039
Pico de Ory	Pirineos	2017
Peña Labra	Idem (ramificacion)	2002
Pico Javalambre	Ibérica (Sierra de Gudar)	2002
Puerto de Navacerrada	Carpeto-vetónica	1780
Id. de Roncesvalles	Pirineos	1760
Id. de Canfranc	Idem	1640
Id. de Guadarrama	Carpeto-vetónica	1530
Id. de Somosierra	Idem	1430
Id. de Pajares	Astúrica	1360
Id. de las Pilas	Carpeto-vetónica	1355
Id. de Velate	Pirineos	1250
Id. de Alcolea del Pinar	Celtibérica	1240
Id. de Barahona	Idem	1130
Id. de Baños	Carpeto-vetónica	1000
Id. de la Brújula	Celtibérica	980

398. **Aplicacion de la nivelacion barométrica á la medida de las distancias.**—Despejando l en la fórmula [30] establecida (344) para la nivelacion recíproca, se tendrá

$$l = \frac{x}{\text{tang.} \frac{a' - a}{2}} = x \times \text{cotg.} \frac{a' - a}{2} \qquad [E]$$

La aplicacion de esta fórmula exige conocer los ángulos zenitales correspondientes á ambas estaciones, y hallar las alturas barométricas y las temperaturas que á ambas corresponden para determinar por nivelacion barométrica el valor del desnival x entre los extremos de la recta cuya magnitud l se trata de conocer. La sustitucion en la fórmula [E] de los valores hallados dará el que corresponde á l. El problema será imposible cuando se tenga $a' = a$, por reducirse á cero el ángulo $\frac{a' - a}{2}$.

Cuando se emplean los ángulos de elevacion y depresion, la fórmula [32] (346) dará de una manera análoga

$$l = x \times \text{cotg.} \frac{m + n}{2}.$$

El problema de la medida de las distancias por la observacion de los ángulos zenitales y de las alturas barométricas puede emplearse en la medida de una ó más bases de comprobacion (tomo I, 1039), haciendo observaciones barométricas en los vértices del canevás trigonométrico que han de suministrar estas bases, cuidando de elegir aquellos lados entre los cuales existan marcadas diferencias de nivel.

399. **Práctica de las operaciones de nivelacion barométrica**.— *Estacion barométrica*.—Es conveniente elegir para estacionar los instrumentos un punto bien determinado, y libre si es posible de las fuertes corrientes de aire: el barómetro y el termómetro libre se disponen de modo que permanezcan en una situacion fija, á la sombra, y perfectamente rodeados de un ambiente despejado, que les permita apreciar debidamente las influencias atmosféricas.

400. *Práctica de las observaciones*.—No debe nunca procederse á la observacion de las alturas barométrica y termométrica sin haber dejado pasar 30 ó 40 minutos de la colocacion de los instrumentos, á fin de que hayan adquirido el equilibrio de temperatura con los objetos que les rodean. Es necesario además, asegurarse de que las columnas no experimentan oscilaciones, que hacen incierta, ó inexacta por lo tanto, la lectura de las graduaciones marcadas por sus extremos en las respectivas escalas. Cuando no se dispone de termómetro libre, es necesario valerse del que está unido al barómetro, lo que regularmente no produce buenos resultados.

Las horas en que deben hacerse las observaciones no son tampoco indiferentes; pues parece que de diez de la mañana á las dos de la tarde, las columnas barométrica y termométrica están menos sujetas á variaciones, que alteran las apreciaciones de la temperatura y la presion atmosférica. Durante el tiempo marcado, las observaciones se repiten de cuarto en cuarto de hora, anotándolas con claridad en un cuaderno dispuesto al efecto; haciendo despues las correcciones que hemos dado á conocer (373 y 378), y tomando un término medio de las alturas corregidas; con lo que se tendrán las alturas medias del dia. Repitiendo esta operacion por espacio de uno ó dos meses, el término medio entre todos los hallados de esta manera, dará los valores que es preciso introducir en las fórmulas para averiguar el valor del desnivel que se busca.

Las operaciones deben suspenderse en los dias de tormenta ó de fuertes vientos.

401. **Diferentes maneras de obtener los desniveles ó alturas verticales por medio de la nivelacion barométrica**.—*Por observaciones simultáneas próximas*.—Se emplean entonces dos barómetros, uno en cada extremo de la recta cuyo desnivel se trata de conocer y cuyas indicaciones estén perfectamente acordes. La circunstancia de tener lugar las observaciones al mismo tiempo, lleva consigo la probabilidad de ejecutarlas en iguales condiciones atmosféricas; lo que hace que este método de operar sea el más exacto. En el caso que consideramos,, basta por lo

tanto repetir varias veces la operacion, á fin de obtener un término medio, que de una manera probable se aproxima más á la verdad que el resultado de una sola observacion.

402. *Por observaciones simultáneas distantes.*—Cuando la distancia entre los puntos de estacion es muy grande, de 5 á 6 leguas en adelante, es cuando se debe seguir con mayor escrupulosidad la repeticion de las observaciones (400), que pueden llegar hasta seis ó más meses, en atencion á que es difícil que tengan lugar para ambos puntos en análogas circunstancias atmosféricas.

403. *Por observaciones sucesivas.*—En este método se emplea un solo barómetro, estacionándole en el punto más bajo, trasladándole al más elevado para obtener una segunda observacion, que con los datos tomados en la primera, podrá servir para calcular el desnivel que entre ambos puntos existe. Trasladándose de nuevo al más bajo, se hace una tercera observacion, que con la segunda dará un nuevo valor del mismo desnivel. La aproximacion de ambos valores dará á conocer si han variado ó no de una manera notable las condiciones atmosféricas, y de todos modos el término medio entre los dos valores obtenidos, dará en general con mayor aproximacion á la verdad, el que corresponde á la diferencia de nivel entre los puntos de estacion.

404. *Por observaciones aisladas.*—Se emplea un solo barómetro en la determinacion de la presion atmosférica y la temperatura medias del lugar de la observacion, y se halla (397) la altura á que se encuentra sobre el nivel del mar.

Conocidas por este método las alturas de dos ó más puntos sobre el nivel del mar, ó sus cotas absolutas, las diferencias de estas cotas darán (Acot. 3) los desniveles que median entre los puntos dados.

CAPITULO IX.

Medida de alturas ó altimetría.

Generalidades.—Problemas de la altimetría.—Problema 1.º Determinacion de la altura de un objeto cuya base se halla situada en terreno accesible siendo visible el pié de la altura.—Primer caso. Cuando el terreno adyacente es horizontal.—Segundo caso. Cuando el terreno es un plano inclinado.—Tercer caso. Cuando el terreno contiguo es irregular ó muy accidentado.—Problema 2.º Medicion de la altura de un objeto cuya base se halla situada en terreno accesible, siendo invisible el pié de dicha altura.—Primer caso. Cuando el terreno adyacente es horizontal.—Segundo caso. Cuando el terreno es un plano inclinado.—Tercer caso. Cuando el terreno contiguo es irregular ó muy accidentado.—Problema 3.º Determinar la altura de un objeto cuya base se halla situada en terreno inaccesible, siendo visible ó invisible el pié de dicha altura.—Caso en que los puntos inaccesibles cuya distancia vertical se trata de conocer son visibles, pero no están en una misma vertical.—Métodos particulares y empleo de varios instrumentos destinados á la determinacion de las alturas.—Empleo de los instrumentos de reflexion y de la plancheta fotográfica.—Determinacion de una altura por medio de un espejo.—Empleo del anteojo altimétrico y de los telémetros.—Determinacion de una altura por las leyes de la caida de los cuerpos graves y la velocidad del sonido.—Observaciones generales.

405. **Generalidades.**—La *altimetría* tiene por objeto la medida de ciertas alturas, como las de las torres, faros, murallas, montañas..... tanto para conocer aisladamente la distancia del punto más elevado á su pié, ó lo que es lo mismo al terreno en que la montaña ó el edificio están situados, cuestion que se presenta con frecuencia, á veces por una mera curiosidad, cuanto por saber la distancia de dicho punto más elevado á su proyeccion sobre un plano horizontal elegido de antemano, para referirla á otro nuevo plano horizontal ó al nivel del mar.

Habiendo tratado ya con detenimiento de la nivelacion por alturas, por pendientes y barométrica, y no siendo la medida de una altura otra cosa que la determinacion de la diferencia de nivel de dos puntos situados ó no en una misma vertical, parece á primera vista que no habria para qué tratar separadamente de esta cuestion; pero fijando un poco la atencion, pronto se conoce que si bien en teoría está resuelto por completo en todos los casos el problema de nivelacion, no sucede así en la práctica, donde las circunstancias del terreno y la posicion de los puntos extremos de la altura que se quiere determinar, pueden hacer en muchos casos insuficientes los distintos medios empleados hasta ahora. Por ejemplo, si se tratara de medir la distancia entre el pié de un faro situado en una costa y la punta ó extremo del para-rayos situado en su parte superior, si bien podia resolverse el problema por medio de la nivelacion por pendientes, empleando los goniómetros, ó de las brújulas de limbo zenital, no se podria hacer aplicacion de la nivelacion por alturas valiéndose de estos instrumentos considerados como niveles ó de los niveles propiamente dichos, á causa de la imposibilidad de fijar el punto de mira del extremo superior; ni de la nivelacion barométrica, por no ser posible tampoco la colocacion del barómetro en dicho punto. Y si á esto se agrega el que el faro se halle situado dentro del mar, entonces, á la dificultad anterior de ser inaccesible su extremo superior, habrá que agregar tambien la de serlo su pié ó extremo inferior, no pudiéndose entonces hacer aplicacion de la nivelacion bajo ninguno de los tres aspectos que la hemos considerado; teniendo entonces que emplear distintos medios, entre otros como auxiliar, la resolucion de triángulos dispuestos de manera que ofrezcan con facilidad la determinacion de los datos que han de servir despues en nuevos triángulos para la determinacion de la altura de que se trata. Como además de los goniómetros se puede hacer uso de los instrumentos de reflexion y de la plancheta, ó solamente de la cadena ó cuerda, piquetes y jalones, y hasta de otros medios muy sencillos, como por ejemplo, de las sombras arrojadas..... esta es la razon por qué tratamos esta parte por separado, designándola con el nombre de *medida de alturas ó altimetría;* en la cual, si bien en algunos de sus problemas entra tambien como auxiliar la nivelacion bajo alguno de sus aspectos, en cambio sirve á su vez para completar aquella en todos los casos que en la práctica pueden ocurrir.

406. **Problemas de la altimetria**.—La teoría que nos ocupa se reduce á la resolucion de tres problemas generales, que pasamos á exponer con toda extension, considerando los diversos casos en que cada uno de ellos se divide para facilitar el método que debe seguirse en su estudio.

407. **Problema 1.° Determinacion de la altura de un objeto cuya base se halla situada en terreno accesible, siendo visible el pié de la altura.**—El considerar visible el pié de la altura, ocurre cuando el edificio ú objeto presenta una arista ó generatriz igual á dicha altura, y que por lo tanto puede reemplazarla.

Consideraremos tres casos diferentes en la resolucion de este problema.

408. **Primer caso.—Cuando el terreno adyacente es horizontal.**—Sea AE (fig. 171; lám. 16) la altura de una torre cuyo valor se trata de conocer: mídase una base AB, y poniendo el instrumento en estacion de modo que su centro C esté en la vertical del extremo B de la base, diríjase la visual horizontal CD y tómese el ángulo de elevacion DCE; con lo cual se podrá resolver (320) el triángulo rectángulo DCE, en el que se conocen dos ángulos y el cateto CD = AB, y se tendrá el valor de DE. Añadiendo á este valor la altura AD igual á la BC del instrumento, se tendrá el de la altura AE.

Ejemplo.—Sea AB = CD = 85,m24; BC = 1,m15 y DCE = 44° 26′: resultará DE = 83,m57, y AE = 84,m72.

En este ejemplo, como en los demás que expongamos en lo sucesivo, se podrá hacer uso de la trigonometría en la resolucion de los triángulos, ya valiéndose de las tablas de las líneas naturales ó de las de sus logaritmos; ó bien de la geometría solamente, segun la exactitud con que se deseen obtener los resultados.

409. Conviene saber á qué distancia debe colocarse el observador, para que el error e que se cometa al medir el ángulo DCE $= a$, produzca el menor error posible en el cálculo de la parte DE de la altura AE que se quiere determinar.

Para esto se hallará el límite del error relativo $\frac{EG}{ED}$. En el triángulo EGC tenemos

$$\frac{EG}{\text{sen. } e} = \frac{EC}{\text{sen. EGC}} = \frac{EC}{\text{sen. DGC}};$$

y como el ángulo DGC es el complemento del DCG = DCE — GCE $= a - e$, tendremos

$$\frac{EG}{\text{sen. } e} = \frac{EC}{\cos. (a - e)}.$$

Ahora, como en el triángulo EDC se tiene

$$EC = \frac{ED}{\text{sen } a},$$

sustituyendo este valor en la ecuacion anterior, resulta

$$\frac{EG}{\text{sen. } e} = \frac{ED}{\text{sen. } a \cos. (a - e)};$$

ó cambiando los medios,

$$\frac{EG}{ED} = \frac{\text{sen. } e}{\text{sen. } a \cos. (a - e)};$$

y como cos. $(a-e)$ difiere muy poco de cos. a, la ecuacion anterior se puede sustituir por esta otra:

$$\frac{EG}{ED}=\frac{\text{sen. } e}{\text{sen. } a \cos. a}=\frac{2 \text{ sen. } e}{2 \text{ sen. } a \cos. a};$$

pero 2 sen. a cos. a = sen. $2a$ (Trig. 17), luego resultará por último:

$$\frac{EG}{ED}=\frac{2 \text{ sen. } e}{\text{sen. } 2a}.$$

Donde vemos, que como el error relativo que se busca, será tanto menor cuanto mayor sea sen. $2a$, se obtendrá el menor error cuando $2a = 90°$ ó $a = 45°$, en cuyo caso ED es igual á CD, ó lo que es lo mismo, á la base AB trazada en el terreno; de donde se deduce que el punto B de estacion debe eligirse de manera que su distancia al objeto cuya altura se trata de determinar, se aproxime á ser igual á la parte ED de dicha altura.

410. *Con la plancheta.*—Si la alidada es de anteojo como la de la figura 308 (tomo I; lám. 18), se procede de una manera análoga á la acabada de explicar, disponiendo horizontalmente el tablero de la plancheta; pero si es de pínulas, se trazará primero en el papel del tablero una línea de lápiz *mn* (fig. 172; lám. 16) paralela al canto *rs*, y se colocará el tablero en la posicion vertical por medio de una plomada y de modo que el canto *rs* quede horizontal, lo que se conseguirá valiéndose del nivel sencillo de aire. Se marcará en la línea *mn* el punto C que se halle en la vertical del extremo B de la base AB, medida de antemano, y clavando una aguja en dicho punto, se hará girar á la alidada alrededor de ella para tomar el ángulo DCE, y se trazará la C*r* en la plancheta. Hecho esto, y teniendo cuidado de examinar si el instrumento no ha variado de su posicion primitiva, se tomará la CD que represente en la escala elegida el valor de la base AB, se levantará en el punto *d* la perpendicular *de* y esta representará en la escala el valor de DE; al cual se añadirá la altura CB = AD para obtener la AE.

En lo sucesivo prescindiremos de hacer uso de la plancheta; pues conocido su manejo, es fácil comprender el modo de servirse de ella despues de presentadas las soluciones con los goniómetros, con las cuales guardan analogía segun sabemos. Igualmente, lo que digamos de los goniómetros se entenderá de las brújulas de limbo zenital; por lo que solo citaremos los primeros.

411. *Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.*—Sea la altura AH (figura 173; lám. 16); plántese un jalon BD y otro CE en el plano vertical de la altura AH, y el jalon BD de manera que la distancia BC sea poco más ó ménos igual á la diferencia EF de dichos jalones, y que la visual DE,

dirigida por las cabezas de estos vaya á parar al punto H. Se medirá la base AB = DG, que se diferenciará tambien poco de la HG, y los triángulos semejantes HGD y EFD nos darán la proporcion

$$DF : EF :: DG : HG;$$

de donde

$$HG = \frac{EF \times DG}{DF};$$

y añadiendo al valor de HG el de GA igual á la altura del jalon menor BD, se tendrá la AH. Si FE = FD, resultará GH = AB.

412. *Por las sombras.*—Valiéndose de estas y de un solo jalon, se puede medir una altura del modo siguiente: plántese el jalon verticalmente en ac (fig. 174; lám. 16) y mídase su sombra ab, así como la AB de la altura AC. Como los rayos CB y cb pueden considerarse como paralelos por encontrarse en el sol y ser muy grande su distancia á la tierra, los triángulos ABC y abc serán semejantes, y darán la proporcion

$$ab : ac :: AB : AC;$$

de donde

$$AC = \frac{ac \times AB}{ab}$$

Es muy poco exacta la medida de una altura valiéndose de las sombras proyectadas; pues estas no terminan con claridad, y por lo tanto no se distingue bien el contorno extremo; y así solo se hace uso de este medio cuando no es necesaria mucha precision en el resultado que se trata de obtener.

Obsérvese que las resoluciones expuestas en este primer caso, como se han reducido á medir un cateto horizontal y á determinar el otro valiéndose del ángulo de elevacion ó de la semejanza de triángulos, no son todas ellas más que ejemplos ó casos particulares de la nivelacion por pendientes.

413. **Segundo caso.—Cuando el terreno es un plano inclinado.**—*Con los goniómetros.—Primer método.*—Sea DC (fig. 175; lám. 17) la altura; AC la inclinacion del terreno, y AE la altura del instrumento, estando el punto de estacion A más bajo que el pié de la altura C. Señálese en la altura un punto G de modo que se verifique la igualdad CG = AE. Mídase la AC = EG, y tómese el ángulo DEG y el zenital ZED, el cual es igual al EDG; y conociendo en el triángulo EDG un lado y dos ángulos, se hallará el valor de DG, y añadiéndole la altura AE = GC del instrumento se tendrá el valor de DC. En este método se vé que no se hace aplicacion de la nivelacion por pendientes.

414. *Segundo método.*—Mídase la horizontal AB = EF y el ángulo de elevacion DEF, y se determinará la altura BD por el primer caso (408). Si se pidiese la altura del punto D sobre el plano horizontal que pasa por A el problema estaría resuelto; pero si se pide la distancia del punto D al pié C, habrá que restar de la BD obtenida ya la parte BC. Esta parte se puede hallar por medio de la nivelacion por pendientes, pues es igual á la FG; ó por la nivelacion por alturas, hallando el desnivel de los puntos A y C; ó bien midiendo además de la horizontal AB la distancia inclinada AC, y se tendrá

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}.$$

415. Si el pié C de la altura está más bajo que el punto de estacion A (figura 176; lám. 17), ó bien se determinará la BC igual á GF por la fórmula anterior para añadirla á la BD, la cual se halla como en el primer caso (408), ó se medirán los ángulos de elevacion y depresion DEF y CEF, así como la horizontal EF = AB, para hallar los valores de DF y CF, que sumados darán la altura total CD que se trataba de determinar. Tambien se puede tomar un punto G de modo que se tenga CG = AE, y medir el ángulo DEG y el zenital ZED = EDG, á fin de obtener en el triángulo DEG en que se conoce un lado EG = AC y dos ángulos, la DG para añadirla á la CG. Tambien se puede colocar el instrumento por tanteos de modo que la visual horizontal BD (fig. 177; lám. 16) vaya á parar al pié B de la altura, y midiendo la BC en sentido horizontal resultará el valor de BD, con el cual y el ángulo de elevacion ADB se podrá hallar (320) la altura AB.

416. *Con la cadena ó cuerda, piquetes y jalones.*—Sea BF (figuras 178 y 179; lám. 17) la altura que se va á medir: plántese un jalon AC y otro HE en el plano vertical de AC y BF, de modo que los puntos C, E y F, correspondan á la misma visual; y como GE es la diferencia de los jalones, que ya se conoce de antemano, se medirán las rectas AB y AH iguales á CD y CG, y se tendrá la proporcion

$$CG : GE :: CD : DF;$$

que dará el valor de DF, y se tendrá despues

$$BF = DF + BD = DF + AC.$$

417. **Tercer caso.—Cuando el terreno contiguo es irregular ó muy accidentado.**—Cuando se hace uso de los goniómetros, se empezará por elegir un punto elevado en el terreno, desde el cual se descubra el pié de la altura, y se seguirá despues el segundo de los procedimientos indicados en el caso anterior (415). Con los jalones, estaría reducida la cuestion, despues de plantar dos AC y EH (fig. 180; lám. 17) de modo

que la visual que pase por sus cabezas pase tambien por el extremo superior F de la altura BF, á medir las distancias horizontales CD y CY de los puntos A y B, A y H; y para señalar en el jalon EH el punto G donde le corta la visual CB, se plantará un piquete HG en contacto con el jalon HE de modo que la visual CB pase por su extremo superior G: con lo cual se podrá medir la parte GE del jalon EH, y así hemos de entender que se marca siempre el punto de un jalon por donde pasa una visual. Tendremos entonces que los triángulos semejantes CEG y CBF nos darán (Geometría Teor. 67)

$$CY : EG : : CD : BF$$

Para la resolucion de los problemas con los jalones, se deben tener estos de distintos tamaños ó prepararlos en el campo segun convenga para su uso, además de estar provistos de banderolas y piquetes.

418. El problema 1.° que acabamos de resolver, se puede enunciar tambien de esta manera:

Medir la distancia vertical que existe entre dos puntos visibles situados en una misma recta vertical, siendo solo accesible el punto inferior.

419. **Problema 2.°—Medicion de la altura de un objeto cuya base se halla situada en terreno accesible, siendo invisible el pié de dicha altura.**—Cuando el pié de la altura es invisible, como suponemos en este caso, el problema está reducido á hallar la altura del punto más elevado con respecto á un punto de la base ó pié del objeto ó al punto de estacion. Este caso ocurre cuando se trata de hallar la altura del punto más elevado de una montaña ó de la veleta de una torre, en las cuales, aunque se pueda acercar el observador á su base, el pié de la altura, proyeccion del punto más elevado, cae por la parte interior de la montaña ó del edificio, siendo entonces invisible, así como toda la altura á excepcion del punto superior.

420. **Primer caso.—Cuando el terreno adyacente es horizontal.** —*Con los goniómetros.*—Plántense dos jalones en dos puntos C y D (figuras 181 y 182; lám. 17) que se hallen en un mismo plano vertical con el punto A. Colóquese sucesivamente el instrumento en cada uno de estos puntos, quitando uno de los jalones y conservando el otro para comprobar que los puntos A, E y F permanecen siempre en el mismo plano vertical. Mídanse los ángulos de elevacion AEG y AFG que forman las AE y AF con la horizontal GF, y se conocerá tambien el ángulo AEF suplemento del AEG. Mídase tambien la distancia CD = EF: y como en el triángulo AEF se conoce un lado y los dos ángulos adyacentes, se podrá resolver y se tendrá la magnitud de la recta AE. Ahora, el triángulo rectángulo AGE, en el que se conoce la hipotenusa y un ángulo agudo, se podrá resolver y se tendrá el valor de AG, al cual se añadirá GB igual á la altura del instrumento EC ó FD; con lo que resultará la altura AB que tratábamos de hallar. Obsérvese que despues de la operacion auxiliar de me-

dir la AE como distancia inaccesible por un extremo, el problema queda reducido á hallar el cateto AG por medio de la hipotenusa AE y el ángulo de elevacion AEG, por lo que en este caso se hace aplicacion de la nivelacion por pendientes (302). (Fórm. [1]).

Ejemplo.—Sean, CD = EF = 8,m47; AEG = 49° 20′ 40″; AFG = 39° 17′ 20″; y la altura EC del instrumento 1,m15. Se hallará AE = 30,m72 y AB = 24,m46.

Si al resolver el triángulo AGE (fig. 181; lám. 17) se halla tambien el valor del otro cateto EG, estableciendo la alineacion BC, si la visual GE entra dentro del edificio por alguna puerta ó ventana, se podrá marcar en el suelo el pié B proyeccion del punto A.

Por último, como se puede medir del mismo modo la altura vertical A′B′ (fig. 182; lám. 17) de otro punto A′ de la montaña con relacion al mismo plano horizontal que pasa por B, resulta que AB — A′B′ = AG′, diferencia de estas alturas, es la medida de la distancia entre los dos planos horizontales correspondientes á los puntos A y A′, que, como ya sabemos, es lo que se llama la *diferencia de nivel* entre dichos dos puntos.

421. Si no es conveniente por cualquier circunstancia establecer la base en el plano vertical del punto A, se tomará en un sentido cualquiera CD (fig. 183; lám. 17), y el procedimiento solo diferirá del acabado de explicar, en que habrá que tomar además de los ángulos AFE y AEG el AEF cuando se hace estacion en E, por no ser este último ahora suplemento del AEG; por lo cual conservamos las mismas letras en la figura. Sólo en el caso de querer fijar en el plano el punto B una vez establecida la base CD, será preciso tomar en el terreno el ángulo GEF ó GFE en sentido horizontal, cuando el instrumento está en las estaciones E ó F, para trazar en el plano el ángulo BCD ó BDC, segun nos hayamos valido de las hipotenusas AE ó AF para la determinacion del cateto AG por medio del triángulo rectángulo AGE ó AGF.

Ejemplo.— Sea CD = EF = 25,m72; AFE = 64° 36′ 40″; AEF = 62° 48′ 20″; AFG = 38° 17′; y la altura del instrumento EC = 1,m15. Se hallará AB = 18,m99.

Si se pidiese hallar el valor de AD, se resolvería el triángulo AFD, en el cual se conocen ya los lados AF y FD y el ángulo comprendido AFD = 90° + AFG. Pero se puede sin error de importancia hallar para valor de AD un medio aritmético entre la recta AF y la línea quebrada AF + FD, especialmente en el caso de ser considerable la distancia AF. En nuestro ejemplo se tiene AD = 28,m80 + 0,m58 = 29,m38.

422. El método acabado de exponer supone que se ha hecho uso de un grafómetro ó de otro instrumento dispuesto de manera que solo dé los ángulos en el plano de los objetos; pero cuando se puede disponer de un teodolito ó de otro instrumento que dé las proyecciones horizontales de los ángulos, se puede emplear para medir la altura AB (fig. 183; lámina 17) el procedimiento siguiente.

Despues de establecida y medida la base CD, tómense los ángulos horizontales GEF y GFE proyecciones de los AEF y AFE, así como los verticales ó de elevacion AEG y AFG, que forman las visuales AE y AF con las horizontales GE y GF. En el triángulo GEF conocemos un lado EF$=$CD y los dos ángulos adyacentes, y se podrá hallar el lado GE. Con éste y el ángulo de elevacion AEG se podrá hallar (408) en el triángulo AGE el cateto AG, y entonces se hace uso, como se vé, de la nivelacion por pendientes.

Como comprobacion se podrá resolver el triángulo AGF para ver si resulta el mismo valor para AG, al cual se añadirá por último la BG igual á la altura EC del instrumento.

Nuestro sábio Vallejo, segun cita en su Tratado elemental de Matemáticas, párrafo 674 de la parte 2.ª del tomo 1.º, empleó este procedimiento para medir la altura del punto más elevado de la Capilla de San Antonio de la Florida, encontrando 78,309 piés de altura sobre el terreno en que la Capilla está edificada, que equivalen á 21,^{m}820

423. *Con los jalones.—Primer método.*—Sea AB la altura del punto A (figura 184; lám. 17) sobre el plano horizontal BG. Plántense dos jalones CH y DY de modo que la visual HY dirigida por sus cabezas pase por el punto A, y otros dos EL y MG, iguales á los primeros, en la misma alineacion y de modo tambien que la visual ML pase por el punto A. Hecho esto, se tomará una parte EF igual á CD y se concebirán trazadas la horizontal MS, la perpendicular FN á la CG y la LN que será paralela é igual á la HY. Mídanse ahora las distancias EG y CD, cuya diferencia será la FG$=$MN, y las HY$=$LN y DG$=$MY, así como la diferencia HR$=$LP de los dos jalones: los triángulos semejantes MNL y MYA nos darán entonces la proporcion

$$MN : NL :: MY : AY.$$

Conocida por esta proporcion la AY, los triángulos semejantes YRH y ASY dan tambien

$$HY : HR :: AY : AS;$$

y añadiendo á AS la altura del jalon menor DY$=$BS se tendrá la altura AB.

424. *Segundo método.*—Despues de colocados los jalones del mismo modo que en el método anterior, é imaginando igualmente trazadas las NF y LN, midiendo la DG$=$MY, y hallando como antes el valor de MN, así como la diferencia HR$=$LP de los jalones, los triángulos semejantes MNL y MAY en los que MN y MY son las bases y LP y AS las alturas, nos darán (Geom. Teor. 67) la siguiente proporcion

$$MN : MY :: LP : AS;$$

y añadiendo á AS la altura DY$=$BS del jalon menor se tendrá el valor de AB.

425. *Tercer método.*—Despues de colocados los jalones como en los dos métodos anteriores, imagínense trazadas las horizontales MYS y LHT por las cabezas de los dos jalones menores y las de los dos mayores; mídanse las distancias $CE = HL$ de los jalones mayores y la $DG = MY$ de los menores, así como las longitudes HC y DY de dichos jalones: los triángulos semejantes AHL y AYM, en que HL y MY son las bases y AT y AS las alturas, darán (Geom. Teor. 67)

$$MY : HL :: AS : AT.$$

Aunque los dos últimos términos de esta proporcion son desconocidos, como se conoce su diferencia $AS - AT = TS$, que es la HR de los jalones, se podrá modificar (Aritm. 175 Nota) y se convertirá en esta otra:

$$MY - HL : MY :: AS - AT : AS;$$

ó lo que es lo mismo

$$DG - CE : DG :: HC - DY : AS;$$

de donde

$$AS = \frac{DG\,(HC - DY)}{DG - CE};$$

y añadiendo á AS la altura $DY = BS$ del jalon menor, se tendrá el valor de la AB.

426. *Cuarto método.*—Elíjase por tanteo una base CD (fig. 185; lámina 17), de modo que plantando dos jalones EC y FD en sus extremos, los dos ángulos AEF y AFE sean cada uno de 60°, lo que se conseguirá fácilmente valiéndose de un triángulo formado con tres reglas de madera de igual longitud, y entonces midiendo la base $CD = EF$ se tendrá la longitud de AE. Plántese un nuevo jalon YG en el plano vertical del punto A y del jalon EC, de modo que su cabeza G enrase con la visual AE, y concíbase trazada la horizontal EL. Hecho esto, como la GH es igual á la diferencia $GY - EC$ de los jalones, midiendo la $YC = HE$ se obtendrá la GE por la ecuacion

$$GE = \sqrt{GH^2 + HE^2};$$

luego en la proporcion

$$GE : GH :: AE : AL,$$

que se obtiene de los triángulos semejantes GHE y EAL, se conocen los tres primeros términos y se podrá hallar el valor del cuarto AL, al que se añadirá BL igual á la altura del jalon EC para obtener el valor de la altura AB.

Si al mismo tiempo se pudiese hacer uso de un triángulo rectángulo isósceles formado con reglas de madera para tomar el ángulo AEL de 45º, se evitaría la proporcion; porque se tendría

$$\overline{AE}^2 = \overline{2AL}^2;$$

de donde $AL = \frac{AE}{\sqrt{2}}$, y $AB = AL + EC$.

427. *Quinto método.*—Si se quiere evitar el uso de los triángulos de madera, se procederá de la manera siguiente. Clávense dos jalones FH y CE (fig. 186; lám. 17) de modo que se hallen con el punto A en un mismo plano vertical y que pase por este punto la visual EF; elíjase una base CL y tómese en ella un punto L. Á partir de este punto, plántense jalones en sentido del plano vertical de los puntos A y L y se tendrá determinada en el terreno la alineacion LB que iría á terminar en el pié invisible B de la altura, y trácese por último la HY paralela á BL. Los triángulos semejantes CBL y CHY dan la proporcion

$$CY : CL :: CH : CB;$$

de donde

$$CB = \frac{CL \times CH}{CY}.$$

Conocida la CB, que es igual á la horizontal DE que se puede imaginar por el punto E, así como la GF, diferencia de los jalones, y medida la HC = GE, los triángulos semejantes EFG y EAD darán la proporcion

$$EG : FG :: ED : AD,$$

y por último, se tendrá

$$AB = AD + BD = AD + EC$$

428. **Segundo caso.—Cuando el terreno es un plano inclinado.—** Si el terreno adyacente al pié H (fig. 187; lám. 18) de la altura presenta un plano inclinado HY, hemos dicho (419) que la cuestion estaba reducida á hallar la altura del extremo superior A respecto al punto de estacion C, y por lo tanto se medirá una base CG en la parte que se pueda elegir en sentido horizontal, y la sola inspeccion de la figura manifiesta que se pueden emplear los mismos métodos acabados de explicar en el primer caso; pero tanto porque podrá acontecer no poderse elegir la base horizontal que hemos dicho, cuanto porque se desee saber la altura del edificio, es decir, la distancia entre el punto superior A y su pié H, podremos emplear los procedimientos siguientes.

429. *Con los goniómetros.*—Sea AB (fig. 188; lám. 18) la altura de un objeto y GM una línea trazada en sentido de la pendiente del plano incli-

nado. Búsquese en esta línea un punto C de modo que colocando en él el instrumento, la visual horizontal EB vaya á parar al extremo ó pié G del objeto y que al mismo tiempo se pueda divisar el extremo superior A de la altura para medir el ángulo de elevacion AEB. Trácese despues en el plano inclinado una horizontal CD á partir del punto elegido C, que se medirá y tomará por base de la operacion; plántese un jalon en el punto D, y si se hace uso de un teodolito ó de otro instrumento que dé las proyecciones horizontales de los ángulos, al tomar el AEF se habrá obtenido su proyeccion BEF. Trasládese el instrumento al punto D y el jalon al C, y al tomar el ángulo AFE se habrá obtenido igualmente su proyeccion BFE. Ahora, como en el triángulo BEF se conoce el lado EF = CD y los ángulos adyacentes BEF y BFE, se le resolverá para hallar el valor de la recta BE, cateto del triángulo rectángulo ABE, el cual se podrá resolver, puesto que se ha medido además el ángulo de elevacion AEB, y se hallará el valor de toda la altura AB; en cuya resolucion vemos que se hace aplicacion de la nivelacion por pendientes.

430. Si se hiciese uso de un instrumento que solo diese los ángulos en el plano de los objetos, procederíamos de una manera análoga sin más diferencia que teniendo que tomar los ángulos AEF y AFE en el plano de los tres puntos A, E y F; se resolvería el triángulo AEF, en el que se conocen igualmente un lado y los dos ángulos adyacentes, para obtener el valor de la AE, hipotenusa del triángulo rectángulo AEB; con la cual y el ángulo de elevacion AEB se podrá resolver el triángulo rectángulo AEB para hallar el valor de la altura AB.

431. Si no se pudiese lograr la condicion enunciada anteriormente de colocar el instrumento de manera que al mismo tiempo que la visual horizontal vaya á parar al pié de la torre, se pueda descubrir el punto A, se le colocará en cualquier punto C (fig. 189; lám. 17) en sentido de la pendiente PM, se trazará como antes la base CD perpendicular á la PM, y se procederá de cualquiera de los dos modos que acabamos de explicar segun la clase de instrumento de que se haga uso, imaginando prolongada primeramente la altura AB hasta su encuentro con la visual horizontal ES, y procurando al dirigir ésta marcar en el terreno con un piquete el punto de encuentro O. Como por la resolucion del problema segun los métodos que preceden se obtiene el valor de AS, debe restarse de él lo que valga BS = PR, que se obtendrá midiendo la OP; pues en el problema que nos ocupa hemos supuesto que aunque el pié B de la altura es invisible, el P del objeto es accesible, y además se mide la OC tanto en sentido del terreno como horizontalmente para obtener la OE, con lo cual los triángulos semejantes PRO y OEC nos darán la proporcion

$$OC : OP :: OE : OR.$$

Una vez hallada la OR, en el triángulo rectángulo PRO resulta

$$PR = \sqrt{PO^2 - OR^2}.$$

432. *Con los jalones.*—Se seguirá una marcha análoga, representando ahora EC y DF (fig. 189; lám 17) dos jalones de igual altura, tomando los ángulos AEF y AFE como hemos ya dicho (426) valiéndose de un triángulo equilátero formado con tres reglas á fin de conocer AE = CD. Para continuar, se plantará un nuevo jalon HY en el plano vertical del punto A y del jalon EC, de modo que la cabeza H enrase con la visual EA y se señalará el punto L donde le corta la horizontal que se puede concebir trazada por el punto E, y que en la práctica se puede determinar por medio de un reglon y un nivel de albañil ó de aire de mano si los jalones no están muy distantes: pues en el caso contrario se clavará otro jalon *ab* (figura 188; lám. 17) bastante próximo al EC para que pueda colocarse horizontalmente una regla sobre sus cabezas, la que servirá para fijar la direccion de la visual horizontal, y en la figura 189 (lám 17) se practicará lo mismo, ó bien se bajará el reglon á lo largo del jalon EC hasta que toque al terreno tomando una posicion tal como *mn*, y midiendo las rectas C*n*, CE y C*m* se podrá obtener la CO. Hecho esto, y midiendo las HL y HE, ó deduciendo esta última del triángulo rectángulo HLE en el que la LE es la proyeccion horizontal de la YC, los triángulos semejantes ABE y HLE de la figura 188 (lám. 17) darán la proporcion

$$HE : HL :: AE : AB ;$$

y los triángulos semejantes ASE y HLE de la figura 189 (lám. 17) la

$$HE : HL :: AE : AS ;$$

y hallando como se ha explicado anteriormente el valor de BS = PR, se restará su valor del de AS y se tendrá el de AB.

433. **Tercer caso.—Cuando el terreno contiguo es irregular ó muy accidentado.**—*Con los goniómetros.*—Elíjase un punto L (figura 190; lám. 18) próximo al pié P de la montaña: concíbase por él la horizontal BD, y la altura AB será la que se trata de determinar. Colóquese el instrumento, que supondremos sea un grafómetro, de modo que su centro C esté en la vertical del punto L que se concebirá prolongada indefinidamente hácia Z; tómese el ángulo de elevacion ACF, y restándole de 90°, se conocerá el zenital ACZ. Trasládese el instrumento á otro punto elevado E de modo que el limbo se halle en el plano vertical de los puntos A, C y L y que la altura C′E sea igual á CL y tómese el ángulo de elevacion AC′ M. Mídase despues la distancia horizontal entre los puntos L y E y se tendrá la LD = MC′; hállese igualmente la diferencia de nivel ED de los mismos puntos L y E por medio de la nivelacion por alturas ó por la de pendientes, tomando el ángulo de elevacion ECR, pues se conoce además CR = LD; y como la figura LMC′D es un rectángulo y LC = C′E, resultará MC = ED. Una vez obtenidos todos estos datos, se resolverá primero el triángulo rectángulo MNC′, en el cual se conoce MC′ y el ángu-

lo NC'M, para hallar el valor del ángulo MNC', y del lado MN; y añadiendo á este último ED = MC se tendrá el valor de NC. Despues en el triángulo ANC se conoce el lado NC, el ángulo ACN y el ANC = 180º — MNC'; luego se podrá resolver, y se tendrá el valor de AC. Por último, en el triángulo rectángulo ACF, en el que se conocen la hipotenusa AC y el ángulo ACF, se hallará el valor de AF, al cual se añadirá BF igual á la altura CL o C'E del instrumento, y se tendrá el valor de AB.

434. En general, cuando se mide una altura, puede suceder que la recta AB considerada en la figura 190 (lám. 18) y perpendicular á la horizontal BL no sea la línea vertical correspondiente al punto A, por ser dicha horizontal de mucha longitud y no poderse suponer que coincida sensiblemente con el arco correspondiente de la superficie terrestre, y entonces se puede adoptar el siguiente procedimiento.

Sea B (fig. 152; lám. 15) la cúspide de una montaña, C el punto de estacion, BC la distancia hallada como en el caso anterior la AC; BCF el ángulo de elevacion, y GBC el de depresion, con cuyos datos se hallará el desnivel BD por el procedimiento que hemos dado á conocer (346).

Cuando no es posible tomar el ángulo de depresion GBC, se puede suponer que la BC que se determina como ya hemos dicho, ó la horizontal CF representa la longitud del arco rectificado CD, y tomando un minuto por cada 1851m,85 se tendrá el ángulo COD y por lo tanto su mitad ECD para calcular el BCD.

En los casos que hemos expuesto de medicion de alturas hemos prescindido de la refraccion y diferencia de horizontes, porque cuando no media mucha distancia no influyen casi nada; pero cuando los rayos visuales se dirigen á puntos muy distantes ó en operaciones de grande importancia, deben hacerse ciertas correcciones, pues hay que tener presente que en virtud de la refraccion aumentan los ángulos de elevacion y disminuyen los de depresion. Por los experimentos hechos por el señor Cassini de Thuri resulta que para cada 20 minutos la refraccion es de 3 minutos.

435. *Con los jalones.*—Plántense dos jalones FC y LM (fig. 191; lámina 18) en la parte más á propósito del terreno, que se hallen en un mismo plano vertical con el punto A, y que los tres puntos A, L y F correspondan á una misma visual, y otro jalon ó banderola GH al pié de la montaña para referir al plano horizontal que pasa por el punto H la altura del cúspide A. Hecho esto, márquese el punto *m* donde la visual horizontal dirigida por F corta al jalon GH. Clávese otro jalon ED fuera de la alineacion BC y en el sitio más conveniente para señalar tambien el punto *n* donde le corte la visual horizontal F*n*, determinadas estas visuales como se ha dicho anteriormente; ó bien búsquese un punto D en el terreno en el que se clavará un piquete D*n* de modo que la visual inclinada pase por su cabeza *n*, con lo cual se podrá hallar, valiéndose del triángulo de madera la AF, y despues midiendo las LF y LR se obtendrá por una proporcion la AY, á la que se añadirá la BY = H*m*.

436. El problema 2.º que acabamos de resolver, se puede enunciar tambien de estos dos modos:

1.º *Medir la distancia vertical entre dos puntos inaccesibles, por ejemplo, los* A *y* B *de la figura* 181 (lám. 17), *que están en la misma vertical, siendo además invisible el punto inferior.*

2.º *Medir la distancia vertical entre dos puntos visibles que no están en la misma vertical, siendo accesible el punto inferior ó de estacion como los* A *y* C (fig. 182; lám. 17), *ó ambos inaccesibles como los* A *y* A'.

437. **Problema 3.º—Determinar la altura de un objeto cuya base se halla situada en terreno inaccesible, siendo visible ó invisible el pié de dicha altura.**—El problema actual ocurre cuando entre el pié C (fig. 192; lám. 18) del objeto y el observador colocado en D hay un obstáculo como un rio ó lago, ó se halla el objeto en el interior del mar, como el faro de la figura 193 (lám. 18)

Este problema no es más que un caso particular del 2.º, pues en este todas las soluciones que se daban eran independientes de la medida de la BD, á causa de no poderse conocer la parte BC comprendida entre el pié B de la altura y el extremo C de la base del objeto, siendo causa la invisibilidad del punto B de que se le considere al mismo tiempo como inaccesible; y como ahora además de la BC hay que contar tambien con la CF ocupada por el obstáculo cuando el pié es invisible, ó solo con esta última si es visible, y las soluciones deben ser igualmente independientes de la medida de la BD, esta es la razon porque todas las del problema 2.º son igualmente aplicables á este tercer problema; excepto alguna modificacion que sea necesario hacer en virtud de la visibilidad ó invisibilidad del pié de la altura.

Así, cuando el terreno adyacente es horizontal, sea el pié de la altura visible ó invisible, se podrán aplicar todas las soluciones del primer caso del problema 2.º

Cuando el terreno contiguo es un plano inclinado como en la figura 189 (lám. 18) y se hace uso de los goniómetros, siendo invisible el pié B de la altura, habrá que medir ahora como inaccesible la OP, que se indicó como accesible en el 2.º caso del problema 2.º

Por último, cuando el terreno es muy irregular ó accidentado, se seguirá el mismo procedimiento que en la figura 190 (lám. 18) del caso 3.º del problema 2.º, en la cual el pié B de la altura es invisible, estableciendo cuando se hacía uso de los goniómetros, el primer punto de estacion L en el paraje conveniente para salvar el obstáculo que impida acercarse á un punto P de la base del objeto. Si se hace uso de los jalones como en la figura 191 (lám. 18), habrá que limitarse á hallar la altura de A con relacion á uno de los puntos de estacion C ó M, por la imposibilidad de plantar el jalon GH en el punto H que ahora se hallará interceptado por el obstáculo, como por ejemplo, un rio que pase bañando el pié de la montaña cuya altura AB se trata de determinar.

438. Cuando el pié de la altura es visible en este tercer problema, se pueden emplear además otras soluciones.

Si el terreno es horizontal y se hace uso de los goniómetros, se medirá la base BC = ED (fig. 194; lám. 18) como línea inaccesible por un extremo, y quedará esta cuestion reducida al caso 1.° del problema 1.°

Si se hace uso de los jalones, se plantarán dos que estén en un mismo plano vertical con el punto A (fig. 195; lám. 18) y de modo que la visual FE que pasa por sus cabezas vaya á parar al punto B; señálese en el jalon FC el punto G donde le corta la visual AE, así como el punto Y en que corta al EH la horizontal que se supone trazada por el punto G. Los triángulos semejantes BFC y BEH dan la siguiente proporcion:

$$FC : EH :: BC : BH.$$

Los dos últimos términos son incógnitos; pero como se conoce su diferencia HC que se puede medir, se podrá modificar dicha proporcion (Aritm. 175. Nota) y se obtendrá

$$FC - EH : FC :: BC - BH : BC.$$

Una vez conocida por esta proporcion la BC = DG, los triángulos semejantes YGE y ADG darán la proporcion

$$GY : EY :: DG : AD,$$

y por lo tanto

$$AB = AD + BD = AD + CG.$$

439. Si el terreno es inclinado ó accidentado, y se hace uso de los goniómetros, se elegirá una base horizontal cualquiera CD (fig. 196; lámina 18) que se medirá, así como en el punto E los ángulos BEF, BEA y AEZ = BAE, y en el punto F se tomará el ángulo BFE. El triángulo BEF, en que se conoce un lado y los dos ángulos adyacentes, nos dará el valor de BE; y en el triángulo ABE en que se conoce un lado y dos ángulos, se hallará el valor de AB. Tambien se hubieran podido tomar los ángulos AEF y AFE, y en el triángulo AEF hallar la AE, y despues en el ABE determinar la AB.

Se puede tambien conocer AB (fig. 197; lám. 18) eligiendo un punto C desde el cual se descubra B, midiendo BC y AC como distancias inaccesibles por un extremo, y tomando el ángulo ACB, con lo que en el triángulo ABC, en que se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se podrá hallar el valor de AB.

440. **Caso en que los puntos inaccesibles cuya distancia vertical se trata de conocer son visibles, pero no están en una misma vertical.**—En este caso se encuentran, por ejemplo, los extremos de las veletas de dos torres.

Sean A y B (fig. 198; lám. 19) dichos puntos: si se hace uso de instrumentos que den las proyecciones horizontales de los ángulos, como el teodolito, mídase en terreno á propósito una base horizontal FE y los ángulos AFE, BFE, FEB y FEA, con lo que se tendrán sus proyecciones respectivas CFE, DFE, FED y FEC. Resuélvanse los triángulos CFE y FDE para obtener los lados CE y ED, y tomando en el punto de estacion E los ángulos de elevacion AEC y BED, se podrán resolver los triángulos rectángulos ACE y BED, en los que se conoce un cateto y un ángulo agudo, para hallar los valores de las verticales AC y BD; con lo que se tendrán las cotas de los puntos A y B con relacion al plano horizontal del instrumento, y su diferencia BG será la distancia vertical entre dichos puntos que se pedía. Análogamente se hubiera procedido en el punto F tomando los dos ángulos de elevacion AFC y BFD y valiéndose de conocer FC y FD; ó bien, al hacer estacion en cada uno de los puntos F y E, tomar tambien en el primero el ángulo AFC y en el segundo el BED, y valerse en este caso de hallar los valores de CF y ED.

Como de la resolucion de los triángulos CFE y FDE se puede venir en conocimiento de la distancia horizontal inaccesible CD = AG (tomo I, 741), resulta que una vez hallada ésta, se podrá determinar la distancia geométrica AB, hipotenusa del triángulo rectángulo ABG en que se conocen los catetos AG y BG; de donde resulta un nuevo problema, en el que no sólo se vé la manera de hacer aplicacion á un mismo tiempo de las dos clases de ángulos horizontales y verticales que se pueden tomar con esta clase de instrumentos, sino tambien la reunion en una misma cuestion de las operaciones de la planimetría y nivelacion, y que puede enunciarse de este modo:

Medir las distancias horizontal, vertical y geométrica de dos puntos visibles y completamente inaccesibles.

441. Si se hiciese uso de instrumentos que sólo diesen los ángulos en el plano de los objetos, como los grafómetros dispuestos de este modo, entonces si los puntos A y B se hallan en el mismo plano que los F y E de la horizontal FE que se elige por base, los triángulos que habría que resolver serían los AFE y FBE para hallar los valores de las AE y BE, y tomando en el punto E los ángulos de elevacion AEC y BED, se podrían resolver los triángulos rectángulos ACE y BDE, en los que se conoce la hipotenusa y un ángulo agudo, para obtener las distancias verticales AC y BD, que serían las cotas de los puntos A y B con relacion al plano horizontal determinado por las dos posiciones horizontales de la alidada fija al tomar los ángulos de elevacion AEC y BED, y la diferencia BD — AC = BG sería la distancia vertical de los puntos A y B.

Como igualmente se hubiera podido operar en F, tomando los ángulos de elevacion AFC y BFD, valiéndose de las hipotenusas AF y BF, ó bien al operar en cada uno de los puntos de estacion F y E tomar el respectivo ángulo de elevacion AFC y BED y valerse de las hipotenusas AF y BE, y por otra parte la resolucion de los triángulos AFE y BFE conduce (tomo I, 739 y 741) á la determinacion de la distancia geométrica AB, en cuyo caso en el triángulo rectángulo ABG se conoce la hipotenusa y un cateto, y se puede hallar el otro AG = CD, distancia horizontal de los puntos A y B, de aquí el que se pueda tambien con esta clase de instrumentos resolver el problema enunciado anteriormente.

442. Cuando los extremos de la base no están en una misma horizontal, puede tambien resolverse el problema de que acabamos de ocuparnos. Sea A y B (fig. 199; lám. 19) los puntos dados, y fk la base inclinada, cuya proyeccion fe se ha medido directamente ó se ha obtenido por la medida de fk = FE y del ángulo de elevacion m (tomo I, 160). El valor de esta proyeccion y los de los ángulos azimutales afe, bfe, fea, feb, darán como en el caso anterior la magnitud de la proyeccion ab de la recta AB que une los puntos dados. Midiendo desde F los ángulos de elevacion m y m' y por medio de los valores conocidos Fs, Ft, se obtendrán (320) los desniveles Es, At, que añadidos á la cota Ff del punto F darán las Ee, Aa de los E y A referidas al plano horizontal del punto f (tomo I, 94). Midiendo despues desde E el ángulo de elevacion m'' y conocido el valor de Er se hallará como antes el desnivel Br, que sumado con la cota Ee del punto E dará la Bb que corresponde á B. La diferencia Bz de las cotas Aa, Bb, y la recta Az = ab serán los catetos de un triángulo rectángulo AzB, cuya hipotenusa AB se podrá determinar. Tambien pudieran haberse observado desde F las pendientes de las visuales dirigidas á los puntos A, B, E, y hallando los desniveles de estos puntos con respecto á F, haber referido sus cotas á la de este último.

443. **Métodos particulares y empleo de varios instrumentos destinados á la determinacion de las alturas.—Empleo de los instrumentos de reflexion y de la plancheta fotográfica.**—Se busca por tanteos un punto C (fig. 200; lám. 19) desde el cual la imágen reflejada de uno de los puntos A ó B, extremos de la altura que se trata de conocer, coincida con la del otro vista directamente, haciendo uso de una escuadra de reflexion cuyos espejos formen un ángulo de 22° 30′ (tomo I, 477), con lo que el ángulo en C del triángulo CBA será de 45°. Imaginando la recta AD que forma con AC el mismo ángulo, el triángulo ADC será rectángulo é isósceles, y el ABD, rectángulo tambien, nos dará la relacion

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 \qquad [1];$$

en el triángulo CDA se tiene $\overline{AC}^2 = 2\overline{CD}^2$; de donde resulta

$$\overline{CD}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{2} \qquad [2], \qquad \text{y } CD = \frac{AC}{\sqrt{2}} \qquad [3];$$

en el ABD se tiene tambien

$$\overline{DB}^2 = (CB - CD)^2 = \left(CB - \frac{AC}{\sqrt{2}}\right)^2 = \overline{CB}^2 + \frac{\overline{AC}^2}{2} -$$

$$2CB \times \frac{AC}{\sqrt{2}} \qquad [4]:$$

sustituyendo en la ecuacion [1] los valores [2] y [4] hallados para $\overline{CD}^2$ y $\overline{DB}^2$, resultará sucesivamente:

$$\overline{AB}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{2} = \overline{CB}^2 + \frac{\overline{AC}^2}{2} - 2CB \times \frac{AC}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB} - 2CB \times \frac{AC}{\sqrt{2}};$$

$$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2CB \times \frac{AC}{\sqrt{2}}} \qquad [5].$$

Para aplicar esta fórmula, es preciso medir CB directa ó indirectamente como distancia inaccesible, y AC como distancia inaccesible. Se calcularán despues los dos primeros términos de la cantidad subradical por el método ordinario ó por el empleo del cálculo logarítmico, así como el producto y cociente indicados en el último término Conocido el valor de la cantidad subradical se extraerá su raíz cuadrada, ó se dividirá por 2 su logaritmo para obtener el que corresponde á la altura AB.

444. Los goniómetros de reflexion se emplearán en cada caso como hemos indicado para los demás en los problemas que anteceden.

445. El problema que nos ocupa se resuelve con la plancheta fotográfica de la manera que hemos dado á conocer (328).

446 **Determinacion de una altura por medio de un espejo** — Fundados en los principios de la reflexion (tomo I, 202) y valiéndonos de un espejo plano y un jalon, se puede hallar la altura BE (fig. 201; lámina 19) de un objeto situado en un terreno horizontal, siendo visible y accesible el pié de la altura Colocado el espejo en un punto C, y dispuesto el jalon AD en otro A, de modo que dirigiendo una visual DC vaya á parar á la imágen E′ del punto superior E de la altura, se medirán las distancias AC y CB, así como la altura AD del jalon; y en virtud de la igualdad de los ángulos ACD y BCE, los triángulos ADC y BCE serán semejantes y darán la proporcion

$$AC : AD :: CB : BE,$$

de donde resulta

$$BE = \frac{AD \times CB}{AC}.$$

447. Si el pié de la altura es inaccesible, se colocará el espejo sucesivamente en dos puntos Q, Q′ (fig 202; lám 19), y se buscarán por tanteos las posiciones NP, N′P′ en que la visual tirada por el extremo del jalon y el punto medio del espejo va á parar á la imágen del punto superior A como en el caso anterior. Conociendo la altura del jalon, y midiendo las distancias PP′ y QQ′, se podrá resolver el problema estableciendo las proporciones

$$AB : NP :: QB : PQ,$$
$$AB : N'P' :: Q'B : P'Q',$$

las cuales dan sucesivamente:

$$AB + NP : NP :: PB : PQ \qquad [6];$$
$$AB + N'P' : N'P' :: P'B : P'Q';$$

de estas proporciones resulta, recordando que se tiene $NP = N'P'$.

$$PB : PQ :: P'B : P'Q',$$

ó cambiando de lugar los términos medios

$$PB : P'B :: PQ : P'Q',$$

que da

$$PB - P'B : PB :: PQ - P'Q' : PQ;$$

de donde resulta

$$PB = \frac{(PB - P'B)\, PQ}{PQ - P'Q'} = \frac{PP' \times PQ}{PQ - P'Q'},$$

y sustituyendo este valor en la proporcion [6]

$$AB + NP : NP :: \frac{PP' \times PQ}{PQ - P'Q'} : PQ$$

Comparando en esta última proporcion la diferencia entre antecedente y consecuente de cada razon con su consecuente, y reduciendo, se obtendrá

$$AB : NP :: \frac{PP' \times PQ - \overline{PQ}^2 + PQ \times P'Q'}{PQ - P'Q'} : PQ;$$

dividiendo por PQ ambos términos de la segunda razon, y poniendo en vez de PP′ — PQ su igual QP′, resultará

$$AB : NP :: \frac{QP' + P'Q'}{PQ - P'Q'} : 1;$$

de donde se deduce

$$AB = \frac{NP\,(QP' + P'Q')}{PQ - P'Q'} = \frac{NP \times QQ'}{PQ - P'Q'};$$

y observando que se tiene

$$PQ - P'Q' = PQ + QP' - QP' - P'Q' = PP' - QQ',$$

sustituyendo se obtendrá por último

$$AB = \frac{NP \times QQ'}{PP' - QQ'}.$$

448. Tambien se podrán hallar los valores de los ángulos e y e' por la relacion establecida (tomo I, 702), que dará

$$\text{tang. } e = \frac{NP}{QP} \text{ y tang. } e' = \frac{N'P'}{P'Q'},$$

y en virtud de estas relaciones y del valor de la distancia QQ′, se tendrá para Q′B (tomo I, 782) la fórmula

$$Q'B = \frac{QQ' \times \text{tang. } e}{\text{tang. } e' - \text{tang. } e};$$

entonces se podrá hallar la altura AB (320) por la fórmula

$$AB = Q'B \times \text{tang. } e'.$$

449. **Empleo del anteojo altimétrico y de los telémetros.**—El tubo del anteojo AB (fig. 203; lám. 19), que constituye la parte principal de este instrumento, está atravesado por un arco circular de acero CD, que puede correr á través del tubo AB, girando alrededor de una charnela fija en la parte B del tubo y con ayuda de una horquilla de cobre a, y que presenta

cuatro taladros situados en los puntos señalados con los números 1, 2, 3 y 4, y destinados á marcar la direccion de la visual en posiciones determinadas del anteojo AB. Un cilindro C y una bellota metálica D, que pueden variar de posicion con auxilio de tuercas de que van provistas, sirven para equilibrar el aparato en sus distintas posiciones; y el bastidor b destinado á la suspension del instrumento contribuye tambien al mismo objeto, por hallarse dispuesto en una pieza corrediza á lo largo del tubo del anteojo.

450. *Usos del anteojo altimétrico.*—Cuando está dispuesto el tubo AB de manera que el taladro número 1 se halla situado en el eje óptico del anteojo, lo que se consigue suspendiendo el aparato del bastidor b y moviendo convenientemente el contrapeso C, y el tubo en la pieza corrediza del bastidor, la visual es horizontal y se emplea el instrumento como un nivel; y cuando ocupan el eje óptico los taladros 2, 3 y 4 sirve para la medicion de las alturas. Entonces es preciso buscar por tanteos un punto del terreno, desde el cual la visual dirigida por uno cualquiera de los taladros, teniendo el anteojo en la mano y haciendo girar convenientemente al arco CD, vaya á parar al extremo superior de la altura. Midiendo despues la distancia, que designaremos por l, del punto de estacion al pié de la altura, y la que media en sentido vertical desde el ojo del observador al punto de estacion, á la cual llamaremos a, las fórmulas

$$x = \frac{l \times a}{2}; \qquad x = l + a; \qquad x = 2\,(l + a)$$

darán el valor de la altura x que se trata de conocer, segun que la visual se haya dirigido por el taladro 2, 3 ó 4.

Si, por ejemplo, se ha encontrado $a = 1^{m},52$ y $l = 30^{m},18$, habiéndose dirigido la visual por el taladro número 2, se tendrá

$$x = \frac{30^{m},18 + 1^{m},52}{2} = 15^{m},85.$$

451. *Empleo de los telémetros.*—Conocida la distancia l del punto de estacion á la altura x que se trata de medir, y sabiendo por ejemplo (tomo primero, 770) que á 100^{m} de distancia horizontal corresponde en la mira de la estadia la magnitud real de $0^{m},5$, la proporcion

$$100 : 0,5 :: l : x,$$

dará el valor de la altura x en funcion del valor hallado directa ó indirectamente para l.

452. Con el termómetro de Ertel se tiene sensiblemente (tomo I, 782) la relacion

$$x = l \times \text{tang. } v,$$

llamando x á la altura del objeto, y l á la distancia horizontal entre el punto de estacion y la altura que se trata de conocer.

453. Con el anteojo micrométrico de Amici se emplea (tomo I, 789) la fórmula

$$x = \frac{l}{\text{cotg. } v},$$

análoga á la anterior, y en la que el valor de la cotangente de v se obtiene (tomo I, 792) por la observacion hecha con el instrumento. Del mismo modo se resuelve este problema (tomo I, 797) cuando se hace uso del anteojo micrométrico de Rochon. La cotangente del ángulo micrométrico v se obtiene directamente por hallarse grabada en el tubo del anteojo.

454. **Determinacion de una altura por las leyes de la caida de los cuerpos graves y la velocidad del sonido.**—Abandonando á su propio peso un cuerpo grave desde el extremo superior de una altura vertical, y anotando el tiempo t, que desde este momento trascurre hasta que se observa que ha llegado al punto más bajo, se puede conocer el valor x de la altura, sabiendo que en la primera unidad de tiempo recorre un espacio vertical $h = 4^{m},9$, y que los espacios recorridos en las unidades sucesivas siguen la progresion de los números impares, por lo que el espacio recorrido al fin de cada unidad de tiempo es proporcional al cuadrado del tiempo trascurrido. Así, en la segunda unidad de tiempo recorrerá un espacio $h \times 3$ y el espacio total recorrido será $h + h \times 3 = h \times 4 = h \times 2^2$. En la tercera unidad recorrerá un espacio $h \times 5$ y el espacio total recorrido al cabo de las tres unidades de tiempo será $h \times 4 + h \times 5 = h \times 3^2$: al fin del tiempo t será por lo tanto

$$x = h \times t^2 \qquad [7];$$

y poniendo en vez de h su valor numérico,

$$x = 4^{m},9 \times t^2 \qquad [8]$$

Si el número de segundos hallado fuese 2,″5, se tendría

$$x = 4,^{m}9 \times 2,5^2 = 4,^{m}9 \times 6,25 = 30,^{m}63$$

455. Cuando no puede observarse el momento en que el cuerpo abandonado á su peso ha llegado al fin de su carrera, como sucedería tratándose de medir la profundidad de un pozo, es preciso contar el número t de segundos que median entre el principio del movimiento y el instante en que llega al oido del observador el ruido producido por el choque del cuerpo con el fondo del pozo ó causado por el agua que contiene. El tiempo t será entonces la suma del t' que ha tardado en caer el cuerpo grave

y el t'' que ha empleado el sonido en recorrer la misma distancia. El tiempo t' se calculará por la fórmula [7] que en el caso actual será $x = h + t'^2$, en la que despejando t' se tendrá

$$t' = \sqrt{\frac{x}{h}} \qquad [9].$$

Para hallar t'', recordaremos que el sonido camina con movimiento uniforme y con una velocidad v de 337^m por segundo; y como por otra parte sabemos que en el movimiento uniforme los espacios son proporcionales á los tiempos empleados en recorrerlos, se podrá establecer la proporcion

$$v : x :: 1 : t'';$$

de la cual resulta

$$t'' = \frac{x}{v} \qquad [10].$$

Sumando los valores [9] y [10] hallados para t' y t'', que componen el valor de t, se establecerá la ecuacion

$$\sqrt{\frac{x}{h}} + \frac{x}{v} = t \qquad [11].$$

Para resolvar esta ecuacion se aislará el radical en el primer miembro, elevando despues al cuadrado los dos miembros de la ecuacion resultante, y se obtendrá

$$\frac{x}{h} = t^2 - \frac{2tx}{v} + \frac{x^2}{v^2},$$

ecuacion de segundo grado con respecto á x, que resuelta dará lugar á la fórmula

$$x = \frac{2thv + v^2 \pm \sqrt{4\,thv^3 + v^4}}{2h}.$$

De los dos valores que encierra esta fórmula, el que corresponde al signo negativo del radical es el que expresa la altura ó la profundidad pedida. El del signo positivo da un valor mayor que el que se trata de hallar. Teniendo esto en cuenta, y separando á v como factor comun á todos los términos del numerador, la fórmula aplicable en la práctica será

$$x = v \times \frac{2th + v + \sqrt{4\,thv + v^2}}{2h} \qquad [12].$$

Para emplearla se sustituirán por h y por v los valores constantes 4,9 y 337 que les corresponden, y por t el número de segundos trascurridos en cada caso desde el principio de la caida del cuerpo grave hasta la percepcion del ruido que produce al llegar al fondo. Si, por ejemplo, se han contado 2,″6, se hallará para x el valor 30,^{m}95 poco diferente del hallado (454) por el método anteriormente dado á conocer.

La indicacion de los cálculos numéricos sucesivos es la siguiente:

$$x = 337 \times \frac{25,48 + 337 - \sqrt{17173,52 + 113569}}{9,8};$$

$$x = 337 \times \frac{362,48 = \sqrt{130742,52}}{9,8};$$

$$x = 337 \times \frac{362,48 - 361,58}{9,8};$$

$$x = 337 \times \frac{0,9}{9,8} = \frac{337 \times 9}{98} = \frac{3033}{98} = 30,^{m}95.$$

456 **Observaciones generales**.—Los problemas resueltos en la altimetría sirven, como indicamos al principio de este capítulo, para completar el estudio de la nivelacion; pues tratándose de hallar, por ejemplo, la diferencia de nivel que existe entre los extremos de las veletas de dos torres, en el caso de ser visibles por su poca distancia ó ser llano el terreno comprendido, se podría aplicar el procedimiento explicado (440) referente al caso de la figura 198 (lám 19); y si por su mucha distancia ó por las circunstancias del terreno fuesen invisibles, entonces se podría hallar la altura ó cota del punto de partida por aquel de los métodos que por las circunstancias en que se hallase le correspondiese entre los explicados en este capítulo; y considerando la altura como desnivel bajando, continuar despues empleando la nivelacion por alturas en los puntos intermedios para la determinacion de sus cotas referidas al mismo plano que la del punto de partida, hasta llegar al otro extremo, cuya altura ó cota se determinaría igualmente por el procedimiento á que diese lugar la naturaleza del caso y la marcha de la operacion.

Obsérvese igualmente que este capítulo puede considerarse tambien como el complemento de la medicion de las distancias inaccesibles por un extremo y de las completamente inaccesibles; pues en la Planimetría hemos resuelto estos problemas ateniéndonos con especialidad á las distancias horizontales, y aquí hemos medido las verticales, y como auxiliares para llegar á éstas las de una inclinacion cualquiera inaccesibles por un extremo, como por ejemplo las AE de las figuras 181, 182 y 183 (lámina 17), ó inaccesibles por ambos extremos como la AB de la figura 198 (lám. 19).

CAPITULO X.

Representacion del terreno.

Generalidades.—Operaciones en el terreno.—Reconocimientos y tanteos.—Medida, nivelacion y orientacion de la base de las operaciones.—Triangulacion de primer órden.—Medida de los ángulos correspondientes al doble canevás de la planimetría y de la nivelacion.—Triangulaciones de órden inferior, y operaciones necesarias para los detalles del plano.—Poligonacion, trasversales, seguimientos de los talwegs y las divisorias, y puntos exteriores referidos á ellos.—Planos de las poblaciones.—Operaciones de gabinete.—Reduccion de la base al horizonte y al nivel del mar.—Cálculo de los triángulos de primer órden.—Correcciones de los ángulos.—Correccion del exceso esférico.—Comprobaciones de los ángulos.—Cálculo de los lados del canevás.—Cálculo de las cotas de los vértices.—Coordenadas de los vértices.—Situacion de los vértices en el plano.—Cálculo de los triángulos de los órdenes inferiores, y determinacion de sus coordenadas.—Ligera exposicion del método taquimétrico de Porro.—Proyecciones y cotas de los puntos determinados en los planos parcelarios, las trasversales y los seguimientos, y de los que á estas líneas se refieren.—Curvas horizontales que detallan las formas del terreno y completan su representacion geométrica.—Consideraciones generales acerca de la representacion del terreno.

457. **Generalidades.**—Conocidas aisladamente por las teorías que preceden las operaciones de planimetría y de nivelacion, los instrumentos de que en ellas se hace uso, con sus verificaciones y correcciones, y los problemas que con ellas se relacionan, solo nos falta dar á conocer de qué manera contribuyen simultáneamente á la determinacion de los datos necesarios para la completa representacion geométrica del terreno; objeto, como ya hemos indicado (tomo I, 34), de la Topografía. Comprenderemos, por lo tanto, en este capítulo, el conjunto de las operaciones topográficas necesarias para conseguir debidamente la representacion de que nos ocupamos, recorriéndolas en el órden en que deben ser ejecutadas, y considerándolas divididas en *operaciones del terreno* y *operaciones de gabinete*.

458. **Operaciones en el terreno.—Reconocimientos y tanteos.**—Hemos hablado (tomo I, 861 y 1020) del reconocimiento que debe preceder á toda operacion topográfica, con objeto de determinar el sitio en que debe trazarse la línea que ha de servir de base de operaciones, á fin de que cumpla con las condiciones á que debe satisfacer (tomo I, 1017), así como para elegir y señalar (tomo I, 1018) los puntos que han de ser vértices de las triangulaciones de los diferentes órdenes, teniendo en cuenta la forma que conviene dar á los triángulos que han de constituirlas (tomo I, 1019). Los tanteos sirven tambien para la designacion de todos aquellos puntos que han de figurar en el plano para que sea completa la representacion del terreno que se recorre, indicando provisionalmente en vista de su posicion absoluta y de la que ocupan relativamente á puntos inmediatos, si han de ser vértices del canevás ó se han de determinar con relacion á ellos; y para formarse idea de la naturaleza y del órden de sucesion en que han de tener lugar las operaciones topográficas que han de seguirse, á fin de conseguir de la manera más pronta y más exacta el objeto á que están destinadas. Es preciso, al mismo tiempo, formar un croquis geométrico ejecutado (tomo I, 1020) empleando instrumentos sencillos y de fácil transporte, á fin de proceder, en su vista, á la eleccion definitiva de los vértices de las triangulaciones de los diferentes órdenes (tomo I, 1021), y á fijar la marcha de las operaciones necesarias para la determinacion de los demás puntos principales.

459. **Medida, nivelacion y orientacion de la base de las operaciones.**—Fijos los extremos de la base, se mide horizontalmente la distancia comprendida entre ellos con las precauciones indicadas (tomo I, 679), observando las temperaturas de los momentos en que se observan las longitudes de los reglones, á fin de hacer en lo sucesivo la correccion necesaria. Tambien es preciso obtener la altura de uno de los extremos de la base sobre el nivel del mar, por medio de observaciones barométricas (397), ó mejor aún las de ambos extremos, con el objeto de hallar el desnivel que existe entre ambos y compararle con el de la nivelacion por alturas, cuidadosamente ejecutada y comprobada con un buen nivel de aire; la cual dará además los desniveles entre los distintos puntos de la base, cuando por los accidentes del terreno es una línea ondulada. En caso de que tuviese una pendiente uniforme, bastaria determinar el desnivel de que tratamos por la nivelacion recíproca (341) haciendo uso de los ángulos zenitales que han de observarse en los extremos de la base al obtener los de la triangulacion, y de la proyeccion horizontal de la base. Cuando esta línea se mide por trozos de distintas inclinaciones, es preciso determinar la pendiente de cada uno de ellos para reducirlos á su proyeccion horizontal.

Es preciso tambien orientar la base, trazando con la posible exactitud la meridiana astronómica (tomo I, 126 y 1028), y midiendo cuidadosamente el *ángulo azimutal*, ó el *rumbo* de la base, que es como ya sabemos el ángulo que forma con la meridiana.

460. **Triangulacion de primer órden.—Medida de los ángulos correspondientes al doble canevás de la planimetría y de la nivelacion.**—Las operaciones necesarias para la completa representacion del terreno exigen una *doble triangulacion*, que comprende los ángulos azimutales ó situados en el plano de los objetos, teniendo en cuenta todo lo que á este fin hemos dado á conocer (tomo I, 294 y 1030), y además los ángulos zenitales ó de elevacion y depresion, para hacer aplicacion de los procedimientos de la nivelacion por pendientes en la determinacion de los desniveles que existen entre los vértices del canevás trigonométrico, y las cotas que á estos puntos corresponden. Los ángulos del canevás referente á la nivelacion sirven tambien de elementos para la reduccion al horizonte de los ángulos y de las distancias.

461. Los instrumentos que en esta operacion se emplean son, los teodolitos de precision y el círculo repetidor, perfectamente corregidos. Con los teodolitos se obtienen generalmente los ángulos azimutales y los de elevacion ó depresion. Los primeros son susceptibles de repeticion (tomo primero, 531). Con el teodolito de Richer y de Combes, como con los demás que son excéntricos, se aplica el procedimiento dado á conocer (tomo primero, 280) en la medida de los ángulos azimutales. Con el teodolito excéntrico de Gambey y el círculo repetidor se pueden obtener los ángulos zenitales por los métodos de repeticion expuestos (tomo I, 575 y 587), y con el último de estos instrumentos se miden y se repiten los ángulos en el plano de los objetos (tomo I, 584).

462. Terminadas las observaciones de los ángulos, se mide uno de los lados del canevás trigonométrico más distante de la base, con las mismas precauciones y cuidados, el cual sirve en lo sucesivo de comprobacion de los cálculos, comparando el valor obtenido directamente con el que de los cálculos resulta. El valor de la base de comprobacion puede tambien hallarse con el auxilio de la nivelacion barométrica (398).

463. **Triangulacion de órden inferior, y operaciones necesarias para los detalles del plano.**—La base de cada triangulacion de órden inferior, se obtiene eligiendo la que ha servido con su medida obtenida directamente (tomo I, 1029) para calcular la del órden inmediatamente superior, ó tomando en uno de sus lados una parte determinada por dos puntos, cuyas distancias á los extremos de este lado son conocidas, ó ya fijando cada uno de ellos con relacion á tres vértices del canevás anterior haciendo uso del problema de la carta (tomo I, 852).

464. En la determinacion de los ángulos se emplean los teodolitos y se ejecutan tan solo una ó dos repeticiones (tomo I, 1030). Para obtener las cotas de los vértices se hallan tambien los ángulos zenitales ó de elevacion y depresion, cuidando de hallar por medio de la nivelacion trigonométrica (320) el desnivel entre uno de ellos y otro que corresponda á la triangulacion del órden inmediatamente superior.

Desde los vértices de estas triangulaciones se toman tambien los ángulos que marcan las direcciones de las visuales dirigidas á los puntos principales que no son vértices del canevás, pero que conviene situar en el plano por intersecciones de visuales (tomo I, 826). Al mismo tiempo se observa desde un vértice á lo menos, el ángulo vertical que ha de servir para determinar la cota del punto exterior observado.

Los datos necesarios para relacionar dos triangulaciones aisladas (tomo I, 1051) deben tomarse tambien al tiempo de ejecutar las observaciones de que nos ocupamos.

465 **Poligonacion, trasversales, seguimientos de los talwegs y las divisorias, y puntos exteriores referidos á ellos.**—En las operaciones que fijan los detalles del plano como las poligonaciones (tomo primero, 990 y 1056), las trasversales que cruzan el terreno (tomo I, 984 y 1052) siguiendo una direccion cualquiera, ó la señalada por el curso de un rio ó de un arroyo, la línea de un camino ó de una divisoria, á las cuales se refieren los últimos detalles (tomo I, 989), se toman tambien los ángulos verticales que sirven para la reduccion al horizonte de los lados de la línea poligonal que se recorre, y para la determinacion de las cotas de sus vértices, así como se fijan las direcciones de las visuales dirigidas á las cimas y otros puntos exteriores, y las pendientes que á estas visuales corresponden, con el objeto de determinar las proyecciones y las cotas de los puntos que consideramos.

Todas estas operaciones pueden ejecutarse con los teodolitos ó la brújula de limbo azimutal de Ladois (tomo I, 415); ó cualquiera de las de limbo zenital (tomo I, 396), si se quiere determinar las direcciones de los elementos poligonales del seguimiento por el solo conocimiento de los rumbos

466. Las líneas poligonales abiertas ó cerradas de cuya determinacion nos ocupamos, se relacionan con el canevás trigonométrico fijando la posicion del punto de partida relativamente á dos ó tres vértices del mismo (tomo I, 847 y 846), teniendo en cuenta lo que hemos dicho (tomo primero, 1052) para las comprobaciones sucesivas La cota que al punto de partida corresponde, se halla tomando en el terreno los datos necesarios para determinar su desnivel con uno de los del canevás trigonométrico, ó de otro punto cualquiera ya nivelado.

467 Cuando no se emplea un instrumento provisto de limbo zenital, se ejecuta la nivelacion por alturas, acotando (155) todos los vértices de la línea poligonal y todos aquellos puntos que en el sentido de la misma influyen en la forma del terreno. El nivel que en esta operacion se emplea es generalmente el de aire con anteojo ó cualquiera de los otros, segun la importancia de la trasversal relativamente á las nivelaciones que de ella han de depender en las operaciones sucesivas, teniendo presente que los errores tienden por lo general á acumularse.

468. Para una completa representacion de los accidentes del terreno, es preciso conducir las trasversales por todos los caminos, los senderos de los bosques, los canales, rios, arroyos, talwegs, divisorias; otras veces se faldean las laderas, marcando las direcciones de todas las divisorias y

los talwegs que corta el seguimiento. Es conveniente llegar con estas operaciones de nivelacion á las cimas de los pequeños cerros aislados, que no han sido determinados por las operaciones anteriores, á fin de obtener las cotas que á sus puntos más elevados corresponden. En los terrenos llanos sigue la nivelacion direcciones determinadas por las ondulaciones más ó menos pronunciadas del terreno.

469. **Planos de las poblaciones**.—Los planos de las poblaciones se levantan y se refieren al canevás trigonométrico de la manera que hemos dado á conocer (tomo I, 992 y 1057).

470. **Operaciones de gabinete.—Reduccion de la base al horizonte y al nivel del mar.**—Cuando la base se ha medido en un terreno horizontal con reglones dispuestos tambien horizontalmente, la longitud hallada es el arco de círculo máximo AB (fig. 204; lám. 19) comprendido entre los extremos A y B de la base, y correspondiente á la superficie de una esfera cuyo rádio es la distancia AO de uno de ellos al centro de la tierra. El mismo arco resulta tambien de la aplicacion del cálculo á la determinacion de las proyecciones horizontales (tomo I, 160) de cada una de las posiciones del reglon empleado en la medida de la base, cuando no se ha dispuesto horizontalmente, para cuya reduccion se tienen los datos necesarios (459).

La adopcion de esta base referiría las proyecciones de todos los puntos del terreno considerado á la superficie esférica en que la base se encuentra, ó mejor al plano tangente al elemento medio M de la base (tomo primero, 154). Para referirlas á la superficie del mar, bastará reducir á ella la base, lo que se ejecuta por un cálculo muy sencillo. Sea OP el rádio terrestre R, cuyo valor se conoce (tomo I, 40); PQ el arco de círculo máximo de la esfera terrestre comprendido entre las verticales de los puntos A y B, que es la base reducida, y h la altura AP del extremo A de la base sobre el nivel del mar, que se obtiene (397) por los datos adquiridos en el terreno (459). Representando por B y b las bases AB y PQ, se tendrá la proporcion

$$B : b :: R + h : R,$$

de la que se deduce la fórmula

$$b = \frac{B \times R}{R + h} \qquad [1],$$

que dará el valor de la base reducida.

471. Cuando la base medida A′ B′ (fig. 204; lám. 19) tiene una pendiente uniforme, se determina el desnivel CB′ entre sus puntos extremos, en virtud de los datos adquiridos (459). La reduccion al horizonte dará sensiblemente el arco de círculo máximo AB correspondiente al punto medio M de la base, y la fórmula de reduccion será

$$b = \frac{B \times R}{R + h + \frac{d}{2}} \quad [2].$$

siendo h la altura A'P de A' sobre el nivel del mar, y d el desnivel CB', hallado entre los extremos de la base, y considerando á CB como la mitad de CB' en lo que no hay un error de consideracion

472. Cuando la base se ha medido por trozos de distintas inclinaciones, se obtienen por la fórmula [2] las reducidas sucesivas np, pq.... (fig. 205; lám. 19) de los elementos ab, bc.... de la base, considerando los arcos del círculo máximo correspondientes á sus puntos medios m, m'..... despues de haber obtenido por los datos de la nivelacion y la altura sobre el nivel del mar del punto a, las cotas de los puntos b, c.... de la base, referidas á la misma superficie.

473. **Cálculo de los triángulos de primer órden.—Correcciones de los ángulos.**—La base reducida al nivel del mar es la que se emplea en el cálculo de los triángulos de primer órden (tomo I, 1035 y 1036) despues de haber corregido los valores hallados (460) para los ángulos del canevás de la planimetría, quedando referida á la misma superficie la red constituida por el canevás. Las correcciones angulares á que nos referimos, son:

1.ª *Correccion de la excentricidad de los anteojos*, que tiene lugar en algunos instrumentos (tomo I, 297 y 531).

2.ª *Reduccion de los ángulos al horizonte* (tomo I, 162).

3.ª *Reduccion de los ángulos al centro de la estacion* (tomo I, 169).

474. **Correccion del exceso esférico.**—Los ángulos azimutales obtenidos directamente ó por la reduccion al horizonte, como el mAn, (figura 206; lám. 19) son los ángulos planos correspondientes á los ángulos diedros del triedro O correspondiente al triángulo esférico ABC, y por consiguiente los valores de los ángulos A, B, C de este triángulo, cuya suma está comprendida entre dos y seis ángulos rectos (Geom. Teor. 176). La diferencia entre 180° y el valor hallado para la suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera es lo que se conoce con el nombre de *exceso esférico*, el cual está comprendido con los errores de observacion en la diferencia expresada. Para hallar el valor del exceso esférico independientemente de los errores de observacion, Mr. Legendre ha demostrado el teorema que vamos á exponer. Sean A, B, C los ángulos del triángulo esférico ABC, y a, b, c los arcos de círculo máximo que le constituyen ó sus desarrollos, que son sensiblemente iguales (tomo I, 154) á las distancias horizontales entre los puntos A, B y C. Despejando cos. A en la fórmula del teorema fundamental de la trigonometría esférica (Trig. 47), se tendrá:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\operatorname{sen}. b \operatorname{sen}. c},$$

y representando por r el rádio de la esfera, se tendrá que para el triángulo semejante cuyo rádio es la unidad, los lados serán $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ y $\frac{c}{r}$, cuyos valores sustituidos en la fórmula que acabamos de hallar, nos darán

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\operatorname{sen}\frac{b}{r}\operatorname{sen}\frac{c}{r}} \qquad [3].$$

Desarrollando en séries los valores de las líneas trigonométricas del segundo miembro, y despreciando las potencias de r superiores á la cuarta, en atencion á que siendo esta cantidad muy grande con relacion á los valores de a, b y c, y entrando en el denominador las potencias de r, hacen muy pequeños los valores de los términos correspondientes, se hallará:

$$\cos\frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2\,.\,3\,.\,4r^4};$$

$$\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2\,.\,3\,.\,4r^4};$$

$$\cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{2\,.\,3\,.\,4r^4};$$

$$\operatorname{sen}\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{2\,.\,3r^3};$$

$$\operatorname{sen}\frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{2\,.\,3r^3}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion [3], despreciando los términos que encierran potencias de r superiores á la cuarta, ejecutando los productos indicados, reduciendo á un solo quebrado los términos que en el numerador y en el denominador del segundo miembro tienen un denominador comun, y sacando el factor $\frac{bc}{r^2}$ comun á los del denominador, se obtendrá la fórmula

$$\operatorname{Cos} A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)};$$

multiplicando ambos términos del quebrado que constituye el segundo miembro por $1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}$, despreciando las potencias de r superiores á la cuarta, y multiplicando por r^2 los dos términos de la fraccion que así resulta, se obtiene

$$\cos.A=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\frac{a^4+b^4-c^4}{24r^2}-\frac{b^2c^2}{4r^2}+\frac{b^4+2b^2c^2-a^2b^2+c^4-a^2c^2}{12r^2}}{bc};$$

reduciendo á un solo quebrado los tres últimos términos del numerador, y simplificando, resultará

$$\cos.A=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24r^2}}{bc},$$

ó efectuando la division indicada,

$$\cos.A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2} \qquad [4].$$

Si llamamos A′ al ángulo opuesto al lado a en el triángulo rectilíneo cuyos lados son a, b, c, se tendrá (tomo I, 22)

$$\cos.A'=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad [5].$$

$$\text{y } \operatorname{sen.}^2A'=1-\cos.^2A'=1-\frac{b^4+c^4+a^4+2b^2c^2-2a^2b^2-2a^2c^2}{4b^2c^2},$$

ó efectuando la sustraccion indicada,

$$\operatorname{sen}^2A'=\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2};$$

ecuacion que da, mudando los signos en ambos miembros,

$$-4b^2c^2\operatorname{sen.}^2A'=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 \qquad [6].$$

Sustituyendo en la ecuacion [4] los valores hallados en las [5] y [6], y simplificando la segunda fraccion, resultará:

$$\cos.A=\cos.A'-\frac{bc}{6r^2}\operatorname{sen.}^2A' \qquad [7].$$

Representando por x el exceso del ángulo A sobre el A', se tendrá:

$$A = A' + x \qquad [8],$$

de la que se deduce (Trig. 15)

$$\cos. A = \cos. (A' + x) = \cos. A' \cos. x - \text{sen}. A' \text{ sen } x;$$

siendo x muy pequeño, puede considerarse sin error sensible que se tiene sen. $x = x$, y cos. $x = 1$, por lo que la expresion anterior se reduce á

$$\cos. A = \cos. A' - x \text{ sen}. A',$$

y poniendo en vez de cos. A su valor [7],

$$\cos. A' - \frac{bc}{6r^2} \text{ sen}.^2 A' = \cos. A' - x \text{ sen}. A,$$

que da

$$x = \frac{bc}{6r^2} \text{ sen}. A',$$

y sustituyendo en la ecuacion [8],

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2} \text{ sen}. A' \qquad [9].$$

Observando que $\frac{bc \text{ sen}. A'}{2}$ es el área del triángulo rectilíneo cuyos tres lados son a, b, c (tomo I, 1067), la cual no se diferencia sensiblemente de la del triángulo esférico ABC; llamándola S y sustituyendo en la expresion anterior, se tendrá

$$A = A' + \frac{S}{3r^2},$$

de donde se deduce

$$A' = A - \frac{S}{3r^2} \qquad [10].$$

Del mismo modo se tendrá

$$B' = B - \frac{S}{3r^2} \quad \text{y} \quad C' = C - \frac{S}{3r^2} \qquad [11].$$

Sumando las expresiones [10] y [11], y reduciendo, se obtendrá

$$A' + B' + C' = A + B + C - \frac{S}{r^2} \qquad [12]$$

475. Observando los resultados obtenidos en las expresiones [10], [11] y [12], se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª Que el exceso esférico $\frac{S}{r^2}$ se obtiene hallando el área del triángulo esférico en funcion del rádio r de la esfera y de los ángulos A, B, C (Geom. Teor 202), ó por la fórmula $\frac{bc \text{ sen. A}}{2}$ citada en el párrafo anterior, y dividiéndola por el cuadrado del rádio conocido, que en el caso actual es el valor 6366200^m hallado (tomo I, 40) para el rádio terrestre.

2.ª Que el valor de cada ángulo del triángulo rectilíneo que sustituye al triángulo esférico se obtiene restando del correspondiente en el triángulo esférico el tercio del exceso esférico

3.ª Que representando $\frac{S}{r^2}$ el exceso esférico independientemente de los errores de observacion, se hallarán estos viendo la diferencia que existe entre el exceso esférico calculado, y el resultado que se obtiene de restar 180° de la suma $A + B + C$ de los ángulos azimutales obtenidos directamente ó por la reduccion al horizonte.

476. **Comprobaciones de los ángulos.**—Conocidos por la medicion directa los valores de los tres ángulos de un triángulo, y además uno de los lados, que es la base para el primer triángulo del canevás, y un lado del triángulo anteriormente calculado para los demás triángulos, se halla directamente el valor del exceso esférico (475), y se disminuye el valor de cada uno de los ángulos en el tercio de este exceso. La suma de los ángulos debe dar 180°, y si resulta alguna diferencia, esta será la suma de los errores de observacion, que se distribuye entre los tres ángulos (tomo I, 972) Es conveniente comprobar tambien (tomo I, 1034) la suma de los ángulos del contorno poligonal del canevás

Cuando solo se han medido directamente dos ángulos, se halla tambien el exceso esférico, determinando el área del triángulo (tomo I, 1068 ó 1069) segun la posicion de los ángulos dados, y corrigiendo estos ángulos en el tercio del exceso esférico. Restando de 180° la suma de estos ángulos corregidos se tendrá el valor del tercero, que encerrará los errores de observacion.

En el caso particular de conocerse dos lados del triángulo, se hallará el exceso esférico calculando el área del triángulo (tomo I, 1067 ó 1070) segun la posicion de los lados, ó el procedimiento indicado (tomo I, 1071) cuando se conocieran los tres lados.

477. **Cálculo de los lados del canevás.**—Reducida la base al nivel

mar, los lados de la red constituida por el canevás de la planimetría, no son otra cosa que lados de triángulos esféricos, y hallando por lo tanto el número de grados á que corresponde la base, dado su desarrollo y el rádio terrestre, se hallaría el indicado valor en grados (Geom. Problema 40. Ej. 4.º), y se podrian aplicar los procedimientos de la trigonometría esférica á la determinacion de los lados del canevás; pero como el error de 1″ en el valor hallado para uno de ellos produce el de 31^m próximamente en el desarrollo, y por otra parte los lados de los triángulos del canevás son muy pequeños con relacion al rádio terrestre, Mr. Legendre ha demostrado que puede sustituirse sin error notable á los triángulos esféricos, los triángulos rectilíneos cuyos lados son los desarrollos de los lados de los primeros, y cuyos ángulos son los que resultan de la correccion del exceso esférico (476). Se aplicarán por lo tanto á la resolucion que nos ocupa los procedimientos dados á conocer (tomo I, 1035).

Cuando el valor obtenido para los lados del canevás que se han medido directamente como bases de comprobacion (462) no concuerda con el obtenido por esta medicion directa, se ejecuta la rectificacion de los valores de los ángulos (tomo I, 1093) para proceder al cálculo definitivo de los lados

478. **Cálculo de las cotas de los vértices.**—Conocidas por el cálculo anterior las proyecciones de los lados que constituyen el canevás de la planimetría y además los valores de los ángulos zenitales ó de elevacion y depresion observados (460), se tendrán los elementos necesarios para el cálculo de los desniveles (344 ó 346) que existen entre los vértices del mismo canevás. Por medio de los desniveles y del sentido en que tienen lugar, se hallarán (156 y 350) los valores de las cotas que á los mismos vértices corresponden. La cota de partida es la calculada directamente (459) para uno de los extremos de la base

479. **Coordenadas de los vértices.**—Estando las cotas de los vértices referidas á la misma superficie en que se ha proyectado el canevás de la planimetría por la reduccion de la base al nivel del mar (470 y 473), la posicion de los vértices del canevás estará completamente determinada en el espacio, por sus coordenadas referidas á tres ejes rectangulares, que son:

1.º *La meridiana.*

2.º *La perpendicular á la meridiana en uno de sus puntos y en el plano horizontal en que se encuentra.*

3.º *La vertical que pasa por el punto de interseccion de los dos primeros ejes.*

En efecto, la posicion de la proyeccion de un vértice cualquiera en el plano de los dos ejes primeros, está determinada (tomo I, 1041) por sus distancias á la meridiana y á su perpendicular, que se calculan por medio de las longitudes halladas (477) y de los rumbos que les corresponden, y que se obtienen por medio de los ángulos del canevás y del rumbo de la base. Tomando en la vertical correspondiente á la proyeccion hallada la magnitud de la cota obtenida por el vértice en cuestion, se tendrá su posicion en el espacio completamente definida (Acot. 3).

480. **Situacion de los vértices en el plano.**—Trazada una recta NS (fig. 207; lám. 19), que representa á la vez la meridiana astronómica, y el desarrollo de un meridiano geográfico (tomo I, 37) se elige un punto A en el cual se levanta la perpendicular OE, que representará el del ecuador ó de un paralelo cualquiera (tomo I, 38), y que en general es el paralelo medio del terreno que se trata de representar en el plano. Hallando el desarrollo 111111,2 (tomo I, 49) de un grado del meridiano, que es un círculo máximo de la esfera terrestre (tomo I, 41 y 42), se podrá dividir la meridiada NS en grados ó fracciones de grado; y determinando del mismo modo el que corresponde al grado del paralelo medio OE, se le podrá dividir tambien en grados ó fracciones de grado. El valor del desarrollo de un grado de paralelo depende de su latitud geográfica, y es proporcional al cuadrado de esta latitud. En efecto, los desarrollos de los paralelos correspondientes á dos puntos dados A y B (fig. 208; lám. 19) son proporcionales á sus rádios AP y BP', senos de los ángulos ACN, BCN ó cosenos de sus complementos l y l', que son las latitudes respectivas de A y B. En virtud de este principio, se hallará el desarrollo x de un grado del paralelo correspondiente á la latitud de 40°, que es la latitud media de España, por la proporcion

$$1 : 111111^{m} : : \cos.\ 40^{\circ} : x\ ,$$

observando que el coseno de la latitud 0° que corresponde al ecuador es igual á la unidad, y que el desarrollo del arco de 1° del ecuador es 111111m en la hipótesis de ser esférica la tierra. Aplicando el cálculo logarítmico á la proporcion anterior, despues de restablecer el rádio de las tablas, se tendrá

$$\begin{aligned} \log.\ 111111^{m} &= 5{,}0457571 \\ \log.\ \cos.\ 40^{\circ} &= 9{,}8842540 \\ \hline \text{Suma} &= 14{,}9300111; \\ \log\ x &= 4{,}9300111; \\ x &= 85116^{m}. \end{aligned}$$

481. Para obtener gráficamente este desarrollo, se trazarán dos rectas que formen un ángulo CAB (fig. 209; lám. 19) igual á la latitud dada, tomando en uno de sus lados y con arreglo á la escala del plano una magnitud AB que represente el desarrollo 111111m del grado del ecuador: trazando con el rádio AB un arco BC, y bajando desde el punto C de interseccion así determinado la perpendicular CD, el segmento AD representará en la escala adoptada la magnitud del grado de paralelo que se trata de determinar.

482. Tirando por los puntos de division correspondientes á los grados ó fracciones de grado de las rectas OE y NS (fig. 207; lám. 19) perpendiculares á estas rectas, se tendrán los desarrollos de los meridianos y los

paralelos de la superficie. Para fijar en el plano un vértice dado, se tomarán las coordenadas Ax, Ay, distancias calculadas del punto M del espacio á la meridiana y á su perpendicular (tomo I, 1041), que serán los desarrollos respectivos de la longitud y latitud geográficas del punto M. Levantando perpendiculares á los ejes en los puntos x é y, su interseccion m será la proyeccion del punto M del espacio. La tercera coordenada está representada por la cota escrita al lado de m.

La longitud geográfica de M se hallará expresada en grados, añadiendo á la del punto A la que corresponda al desarrollo de Ax en el plano, la cual será en la figura de 25′ si cada parte de AE representa 10′ de un grado de paralelo. La latitud se obtendrá del mismo modo por la numeracion que corresponde á las divisiones de los meridianos. Cuando A está en el primer meridiano y en el ecuador, Ax y Ay serán la longitud y latitud de M.

483. Las longitudes y latitudes de los vértices pueden obtenerse directamente conocidas las de uno de ellos. Supongamos que se conoce la longitud geográfica del extremo A (fig. 210; lám. 19) de la base, y su latitud Aa, siendo N el polo norte de la tierra, y ab el arco de ecuador correspondiente al ángulo N. En el triángulo esférico NAB se conoce el lado AB, el AN complemento de la latitud del punto A, y el ángulo r comprendido, que es el rumbo hallado (459) para la base: resolviendo el triángulo (Trig. 59 Primer caso), se hallará el valor del ángulo N, y por consiguiente el arco correspondiente ab, que añadido á la longitud de A, dará la del punto B; así como el lado BN, que restado de 90° dará el valor de la latitud Bb que al punto B corresponde. A partir de este punto se determinan de un modo análogo las de otro vértice contiguo, y así se continuará hasta haber hallado las longitudes y latitudes de todos los vértices.

484. El método de proyeccion que hemos expuesto, y que empleó Cassini en la formacion de la carta de Francia, es bastante exacto en la construccion del plano de un terreno comprendido entre un corto número de grados de paralelo y de meridiano. El paralelismo de los meridianos, los cuales son convergentes sobre la esfera, produce una deformacion en la superficie, que no debe despreciarse cuando la extension del terreno representado es muy considerable. Se evita en parte este inconveniente en el caso á que nos referimos, cuando se trata por ejemplo de la representacion de una de las provincias de la antigua division de España, determinando como antes el desarrollo NS (fig. 211; lám. 19) de la porcion de meridiano que ha de comprender el plano ó carta geográfica, y hallando por el procedimiento indicado (480 ó 481) los desarrollos Sc y Nd de los grados ó fracciones de grado de los paralelos extremos; y uniendo los puntos de division de estos paralelos, se tendrán las direcciones de los meridianos que resultarán convergentes hácia la parte superior de la carta. Para situar un vértice en ella, se determinan los puntos a, a', que representan en los paralelos extremos la longitud del punto

cuya proyeccion se trata de hallar, así como los b y b', que marcan en los meridianos extremos la latitud dada. La interseccion m de las rectas aa', bb' tiradas por los puntos así determinados, será la proyeccion que se busca.

485. En la formacion de la nueva carta de Francia se ha empleado un método más exacto, debido á Flaamsteed. En él se trazan en curva los meridianos y los paralelos. Para ello se desarrolla segun la recta NS (fig. 212; lám. 19) la porcion de meridiano comprendida entre el polo y el paralelo inferior de la carta, y se toma á partir del punto R correspondiente á la latitud media, hácia N, y en la recta trazada, una magnitud RC igual á la cotangente del ángulo que expresa la latitud del paralelo medio, 40° por ejemplo, tratándose de la carta de España: se traza desde C como centro con el rádio CR, determinado como hemos dicho, un arco de círculo, que representará el paralelo medio P. Los demás paralelos son arcos concéntricos, y tienen por rádios las distancias de C á los puntos de division de NS que indican sus diversas latitudes. Los arcos p y p' así trazados serán los paralelos extremos de la carta. Tomando en estos arcos, con arreglo á la escala del plano, los desarrollos de las fracciones SM, RK ... de paralelo, calculadas como hemos dicho (480), ó gráficamente determinadas (481), segun la ley de decrecimiento hácia el polo, y haciendo pasar curvas contínuas por los puntos correspondientes de division de los paralelos, se tendrán los meridianos MKN.....

Se funda este procedimiento, en que si desde un punto R (fig. 213; lámina 19) cuya latitud L es de 40°, se tira una tangente al arco de círculo NRS, que es el meridiano de dicho punto, prolongándola hasta encontrar en C á la prolongacion del diámetro terrestre NS, la recta RC, tangente del ángulo ROC, es la cotangente de su complemento L, y al mismo tiempo el rádio correspondiente al arco de círculo trazado sobre la esfera desde el punto C como centro, y que nos ha servido para el del paralelo medio P.

Los paralelos correspondientes á otros puntos E... del meridiano, son proporcionales á sus cosenos EF ..... y desarrollando el arco RE segun RB, la recta CB representará, como antes hemos dicho, el rádio del paralelo p (fig. 212; lám. 19) correspondiente al punto B.

Para hallar en la carta la proyeccion de un punto del espacio, cuya longitud y latitud geográficas se conocen (483), se determinará en el meridiano dividido NS el punto r que marca la division correspondiente á la latitud dada y se trazará desde C con el rádio Cr un arco indefinido, que será el paralelo p'' correspondiente al punto dado. Determinando en los paralelos de la carta p, P, p' .. los puntos que en sus desarrollos corresponden á la longitud conocida del punto dado, y trazando el meridiano Nm que los puntos de division determinan, su interseccion a con el paralelo p'' será la proyeccion buscada.

486. La construccion de la carta por el método acabado de explicar presenta una dificultad en la práctica: el trazado de los paralelos por la

gran magnitud del rádio CR en la escala adoptada; este inconveniente se evita determinando por abscisas y ordenadas los puntos tales como A (fig. 212; lám. 19) de interseccion de los meridianos y los paralelos, por los cuales se hacen pasar despues estas curvas. Las coordenadas de los puntos de que tratamos se refieren á los ejes rectangulares CX, CY, y se determinan en funcion de la longitud y latitud conocidas de cada uno de ellos. Sean x, y, las coordenadas CD y AD del punto A, y L, l las latitudes del paralelo medio P y del p correspondiente al mismo punto, llamando tambien Q á su longitud geográfica. Se tendrá desde luego:

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{CD} = \mathrm{CA} \times \cos\ z \\ y &= \mathrm{AD} = \mathrm{CA} \times \mathrm{sen}\ z \end{aligned} \qquad [13]$$

Para hallar el valor de CA se observará que se tiene

$$\mathrm{CA} = \mathrm{CB} = \mathrm{CR} - \mathrm{BR}\,,$$

y observando que en la fig. 213 (lám. 19) es

$$\mathrm{CR} = \mathrm{RO} \times \mathrm{tg}\ \mathrm{ROC} = \mathrm{R} \times \mathrm{cotg}\ \mathrm{L}\,,$$

llamando R al rádio terrestre, y siendo L la latitud del paralelo medio, y teniendo además en cuenta que BR es el desarrollo de un arco de meridiano conocido, que representaremos por M, sustituyendo en el valor de CA, se obtendrá:

$$\mathrm{CA} = \mathrm{R} \times \mathrm{cotg}\ \mathrm{L} - \mathrm{M} \qquad [14]$$

Con respecto al ángulo z que entra tambien en las fórmulas [13], hallaremos su valor por medio de una proporcion que se funda en que *los valores angulares de dos arcos del mismo desarrollo correspondientes á diferentes rádios están en razon inversa de estos rádios*. En efecto, la observacion de la fig. 214 (lám. 19) da á conocer las proporciones

$$\mathrm{EF} : \mathrm{BC} :: \mathrm{AE} : \mathrm{AB}\,;$$
$$\mathrm{BAD} : \mathrm{BAC} :: \mathrm{BD} : \mathrm{BC}\,;$$

y como se tiene $\mathrm{EF} = \mathrm{BD}$, las dos proporciones tienen una razon comun, y resulta

$$\mathrm{BAD} : \mathrm{BAC} :: \mathrm{AE} : \mathrm{AB}\,,$$

conforme al principio enunciado.

Fundados en él observaremos, que para hallar el desarrollo de un arco del paralelo á que pertenece el punto B (fig. 213; lám. 19), el que corresponde por ejemplo al arco cuyo número de grados es Q, longitud geográfica del punto cuyas coordenadas se tratan de hallar, se hará uso del rádio

$$EF = EO \times sen. EOF = R \times cos. l,$$

siendo l la latitud del punto dado, que ha de hallarse en el paralelo p (fig. 212; lám. 19). Del mismo modo observaremos que en el desarrollo del arco AB se emplearía el rádio, que como hemos visto [14] tenía un valor

$$CA = R \times cotg\ L - M.$$

Y como el desarrollo del arco de Q grados en la esfera es igual por la construccion al AB que corresponde al ángulo z, se tendrá entre los valores angulares z y Q y los rádios respectivos CA y EF, en virtud del principio demostrado, la proporcion

$$z : Q :: EF : CA,$$

y poniendo en vez de EF y CA sus valores,

$$z : Q :: R \times cos\ l : R \times cotg.\ L - M.$$

Despejando z en esta proporcion se obtendrá

$$z = Q \times \frac{R \times cos.\ l}{R \times cotg.\ L - M} \quad [15].$$

Sustituyendo en las fórmulas [13] los valores hallados [14] y [15], se tendrá

$$x = (R \times cotg.\ L - M) \cos. \frac{Q \times R \cos.\ l}{R \times cotg\ L - M}$$
$$y = (R \times cotg.\ L - M) \operatorname{sen.} \frac{Q \times R \cos.\ l}{R \times cotg.\ L - M}$$

Estas fórmulas dan los valores de las coordenadas de todos los puntos de interseccion de los meridianos con los paralelos, cuyos puntos determinan como hemos dicho el trazado de estas curvas en el plano. De Plessis ha calculado por estas fórmulas unas tablas de coordenadas, muy útiles en la construccion de las cartas y de los planos topográficos de mucha extension.

487. **Cálculo de los triángulos de los órdenes inferiores y determinacion de sus coordenadas.**—Los triángulos de los órdenes inferiores se calculan como hemos indicado (tomo I, 1037), y sus cotas como hemos dicho para la triangulacion de primer órden (478), ó más comun-

mente por el método de la nivelacion simple (320), haciendo las correcciones necesarias (341 y 336), y en caso necesario la indicada (337). Cuando la longitud de los lados de la triangulacion y la apreciacion del instrumento (335) dan un error que pueda influir en la exactitud del cálculo de las cotas, es preciso emplear en el de los desniveles el método de la nivelacion recíproca (344) como en la triangulacion de primer órden. Tambien como en esta se pueden hallar las distancias á la meridiana y su perpendicular (479), que con las cotas determinarán las coordenadas de los vértices, los cuales podrán situarse igualmente en el plano (480).

488. **Ligera exposicion del método taquimétrico de Porro.**—Los datos necesarios para la determinacion de las tres coordenadas que fijan la posicion de un punto, se obtienen á la vez con el teodolito de Porro, que hemos descrito (tomo I, 576), cuyo empleo da lugar á un método especial de levantamiento de planos, á que el autor ha llamado *método taquimétrico* en razon á la rapidez que proporciona en las operaciones de campo necesarias para el levantamiento; método del que vamos á dar una ligera idea, y que se funda en el problema siguiente:

Dadas las coordenadas rectangulares x, y, z *de un punto* A (fig. 215; lámina 20) *referidas á la meridiana, su perpendicular y el nivel del mar, hallar las de otro punto* B.—Haciendo estacion en el primero de estos puntos con el teodolito, se determina por medio del orientador del instrumento la meridiana del punto de estacion (tomo I, 577), colocando un jalon N que marca su direccion, y al cual se dirige la visual por el anteojo superior llevando en coincidencia los ceros del limbo azimutal y de su nonius; fijando entonces el limbo, se dirige el anteojo al punto B, en el cual se habrá colocado préviamente la mira ó escala. Se observará entonces:

1.° El valor del arco m recorrido por el cero del nonius correspondiente al limbo azimutal. Este arco corresponderá al rumbo de la recta dada AB.

2.° El ángulo zenital, que marca en el limbo vertical la visual dirigida á la mira, y que hemos designado por a (tomo I, 806).

3.° La lectura S hecha en la mira de las divisiones cubiertas por los hilos del retículo (tomo I, 806).

Con estos elementos, á que Mr. Porro da el nombre de *números generadores*, se calculan fácilmente las coordenadas x', y', z' del punto B.

En efecto, por medio de a y S se halla la proyeccion D de la recta AB, empleando la fórmula

$$D = S \operatorname{sen.}^2 a \qquad [16],$$

establecida anteriormente (tomo I, 806).

Para la distancia del punto B á la meridiana, observaremos que se tiene

$$NB = D \operatorname{sen.} m,$$

y añadiendo este valor á la coordenada correspondiente del punto A, se tendrá

$$x' = x + \mathrm{D}\ \mathrm{sen.}\ m \qquad [17];$$

el segundo término del valor de x' es negativo cuando el punto B se halla al Oeste de la meridiana.

La distancia á la perpendicular, se obtiene añadiendo á la que corresponde al punto A, el valor

$$\mathrm{AN} = \mathrm{D}\cos.\ m,$$

por medio del cual se obtiene

$$y' = y + \mathrm{D}\cos.\ m \qquad [18],$$

en la que D cos. m es negativo cuando el punto B se halla al Sur de A.

Con respecto á la cota de B, se observará que la fórmula D cotg. a (321) da el desnivel entre el centro del limbo zenital y el punto medio de la porcion S interceptada en la mira; por lo que el desnivel entre el primero de estos puntos y el B será D cotg. $m - \frac{\mathrm{S}}{2}$, siendo S la distancia real entre el pié de la mira y el punto medio de la parte de ella interceptada entre los hilos del micrómetro; y la tercera ordenada

$$z' = z + \mathrm{D}\ \mathrm{cotg.}\ m - \frac{\mathrm{S}}{2} \qquad [19]$$

Cuando el ángulo zenital a pasa de 90° el término D cotg. m es negativo.

En todo caso es preciso añadir la altura del instrumento al valor obtenido por la aplicacion de la fórmula.

Las fórmulas [16], [17], [18] y [19] resuelven el problema que hemos enunciado.

489. Para aplicar este problema al levantamiento de un plano, se hace estacion en un punto A (fig 216; lám. 20), se traza su meridiana n, y se determinan, inscribiéndolos en un registro, los números generadores que han de servir para determinar las coordenadas de los puntos accesibles N, M, B y P, en los que puede colocarse la mira, así como los rumbos y las pendientes de las visuales dirigidas á los puntos inaccesibles R y Q. Trasladándose despues á uno de los puntos ya determinados como el B, se anotan los números generadores correspondientes al punto A para comprobar las observaciones hechas en este punto, y se ejecutan las referentes al punto accesible C y á los inaccesibles Q, R y S. Desde la estacion C se comprueban las observaciones de B relativas á la situacion del nuevo punto de estacion, y se verifican las que se refieren á

los S y T, inaccesible el primero y accesible el segundo, continuando del mismo modo.

Siguiendo este procedimiento se obtiene una base de operaciones ABC .... comprobada por los elementos rectilíneos de que se compone, de un modo análogo á lo que se verifica con la que se emplea en el levantamiento de planos con la brújula (tomo I, 953).

490. Tambien pueden elegirse para hacer estacion, puntos que no se hallen ligados entre sí de esta manera; pero entonces es preciso que las observaciones de cada una de las estaciones determinen dos ó más puntos comunes con los de otra estacion próxima; por medio de los cuales se relacionan las observaciones calcando separadamente las de cada estacion, para situarlas sucesivamente en el plano de manera que coincidan dichos puntos comunes. Siguiendo este método puede emplearse el cálculo en la determinacion de las líneas que constituyen el canevás de una triangulacion. En efecto, si suponemos que los puntos *m* y *n* (figura 217; lám. 20) son los que se han determinado como puntos comunes entre las estaciones *a* y *b*, se conocerán las distancias *am*, *an*, así como el ángulo *a* que forman, el cual se deduce (tomo I, 287) de los rumbos hallados para estas rectas, con lo que se podrá resolver el triángulo *amn*. Esta resolucion dará el valor del lado *mn*, y en el triángulo *mnb* se conocerán sus tres lados, resolviendo los demás de una manera análoga.

491. **Proyecciones y cotas de los puntos determinados en los planos parcelarios, las trasversales, y los seguimientos, y de los puntos que á estas líneas se refieren.**—Hemos dado á conocer extensamente (tomo I, 1052 y siguientes) la manera de determinar y referir á la triangulacion los planos parcelarios y los de las poblaciones, las trasversales constituidas por las líneas extensas que cruzan el terreno, ya naturales ó artificiales, como rios, caminos, divisorias, ó cualquiera otra línea que tenga por objeto referir á ella la posicion de los detalles del plano. Tambien hemos dicho (442) la manera de obtener las cotas de los puntos que estas líneas determinan, así como las de los puntos exteriores á ellas, y cuyas proyecciones se fijan por intersecciones de visuales. Las proyecciones de los puntos que consideramos pueden determinarse tambien (tomo I, 1049) por sus distancias á la meridiana y su perpendicular.

492. **Curvas horizontales que detallan las formas del terreno y completan su representacion geométrica.**—Una vez fijas de posicion las proyecciones acotadas de todos los puntos considerados en las operaciones anteriores, falta dar á conocer el relieve del terreno, reproduciendo el plano de las curvas horizontales (282), y fijando en él la posicion de las que se hayan trazado directamente en el terreno, y por medio de su orientacion la que les corresponde en el plano acotado; y construyendo las demás por medio de las escalas de pendiente de las rectas que constituyen el canevás de la planimetría (291), las que tambien pueden deducirse de perfiles construidos segun las mismas líneas (292).

493. Consideraciones generales acerca de la representacion del terreno.—Trazadas las curvas, y situados en el plano todos los objetos que cubren el terreno y las líneas extensas que le cruzan, con las indicaciones de los nombres con que se conocen en el país las distintas localidades y los diferentes objetos, ha terminado la ejecucion del plano geométrico encomendado al trabajo del topógrafo. En este plano se encuentran además de las poblaciones, los edificios aislados de todo género, los ríos, los arroyos, los talwegs, las divisorias, los caminos y los lindes y los cerramientos de las heredades, la expresion gráfica de las distintas formas que el terreno afecta: en él se hallan marcadas por curvas que representan una parte entrante redondeada, las vertientes separadas por arroyos de un curso uniforme; y por una série de puntos de retroceso, cuando lo están por los torrentes y los arroyos de pendientes fuertes, que cruzan los terrenos muy accidentados. Las divisorias aparecen determinadas por una mayor separacion de las curvas en la parte más saliente de la estribacion á que pertenecen; siendo pequeña en esta parte la curvatura cuando la forma del terreno es redondeada, y aumentando cuando corresponden las curvas á una estribacion muy pronunciada. Tambien se encuentran en el plano las indicaciones de los bosques y de las grandes masas de rocas que cubren una porcion extensa del terreno, y de los crestones de roca que en algunas localidades se descubren.

La representacion así obtenida se presta á la resolucion de muchos problemas en las aplicaciones de la Topografía, y es muy suficiente cuando se trata de presentar la solucion de un problema, como tiene lugar por ejemplo, en los planos particulares del proyecto de un camino ó de un canal, á fin de justificar la eleccion del trazado hecho en una extension determinada del terreno que cruza la línea; pero cuando se trata de presentar á un golpe de vista, y prescindiendo de los detalles, la forma general del terreno considerado, como en el plano general de un proyecto, se emplean otros medios de representacion, que presentan de una manera más gráfica y dan al plano un aspecto más agradable, y que son del dominio exclusivo del dibujante. En esta parte artística del dibujo topográfico, se emplean los colores que imitan los que los accidentes representados tienen en la naturaleza, y los convencionales adoptados para las obras de arte: tambien se emplea el dibujo á pluma en el que las formas del terreno se representan por líneas movidas rectas ó curvas, normales á dos curvas horizontales consecutivas.

El grueso de estas normales se ha arreglado por algunos autores á un diapason, en el que resulta proporcional á la pendiente del terreno comprendido entre las curvas horizontales consecutivas; pero este método, puramente geométrico, no presenta ventaja alguna sobre la representacion por curvas horizontales, ni expresa con tanta verdad el relieve del terreno con los efectos de luz y sombra, como el adoptado en España por distinguidos dibujantes, algunos de los cuales hemos citado en otras ocasiones con elogio. Consiste este método en aumentar la separacion y disminuir el grueso de las normales en las partes más iluminadas, suponiendo la luz de arriba abajo, por la izquierda, y con una inclinacion tal, que las proyecciones de un rayo de luz formen con la línea de tierra ángulos de 45º Los gruesos y la union de las normales aumentan gradualmente en razon de la pendiente y de la mayor sombra. La acertada combinacion de la separacion y de los gruesos, la indicacion de las sombras propias y de las arrojadas por las montañas más elevadas sobre las que las rodean, teniendo en cuenta sus posiciones relativas, los toques oportunamente dispuestos para representar las quebradas y escalonados de los terrenos, la propiedad en la indicacion de las rocas descubiertas, las aguas corrientes, los bosques y demás accidentes naturales, sirven á los dibujantes para sacar mucho partido en la representacion de todos estos accidentes, tal como se presentan en la naturaleza.

CAPITULO XI.

Copia y reduccion de planos y perfiles.

Definiciones.—Problema 1.° Dada una figura cualquiera reproducirla en diferente escala, de modo que sus líneas homólogas guarden una relacion dada.—Ángulo de reduccion.—Cuadrícula.—Procedimientos que se siguen en las copias de los planos en la misma escala.—1.° Picado.—2.° Calcado.—Relacion de las áreas en los métodos de copia y reduccion que anteceden.—Problema 2.° Dada una figura cualquiera reproducirla en diferente escala, de modo que las superficies guarden una relacion dada.—Instrumentos de reduccion.—Compases de reduccion.—Pantógrafos.—Pantógrafo de Gavard.—Teoría en que se funda la construccion del instrumento.—Descripcion del pantógrafo de Gavard.—Disposicion del pantógrafo en estacion.—Verificaciones y correcciones.—Usos del pantógrafo.—Aplicacion del pantógrafo al grabado.—Observaciones generales acerca del pantógrafo de Gavard.—Disposicion de las distintas partes del instrumento para facilitar los diferentes casos de copia y reduccion que pueden presentarse.—Fórmulas en que se funda la division de las reglas del pantógrafo de Gavard.—Pantógrafo decimal.—Pantógrafo de Dollond.—Micrógrafo de Letellier.—Observaciones generales.

494. **Definiciones.**—Cuando despues de construido un plano ó un perfil, se quiere trasladar á un papel diferente, se pueden presentar varios casos, segun las distintas condiciones que se quieren llenar al verificar la reproduccion. Consideraremos estos varios casos.

Primer caso.—Cuando el plano se quiere reproducir en el mismo tamaño que el original, se dice que *se copia* en la misma escala.

Este caso se presenta cuando se trata de poner en limpio un plano construido ya, ó se quiere tener varios ejemplares iguales de un mismo plano.

495. *Segundo caso.*—Cuando el plano se quiere reproducir en menor tamaño que el original, se dice que se copia en menor escala ó que *se reduce*.

Este caso se presenta cuando un plano construido en grande escala se quiere que ocupe menos extension superficial, ó cuando siendo de grande extension el terreno de que se ha de levantar el plano, y habiéndose valido de varias hojas de papel á fin de representarle en una escala conveniente para la mejor apreciacion de todas las particularidades que encierra, se quiere reunir en una sola hoja estos diversos planos parciales en su posicion relativa para abrazar toda la extension del terreno de una sola ojeada. Este plano, que se llama *plano general,* no debe contener más que aquellas partes más indispensables para su inteligencia y el conocimiento del terreno, y se forma reduciendo primero los planos parciales en una misma relacion, que depende siempre de las dimensiones del papel que ha de contenerle.

496. *Tercer caso.*—Cuando el plano se quiere reproducir en mayor tamaño que el original, se dice que se copia en mayor escala ó que *se amplifica.*

Este caso ocurre cuando una parte importante de un plano, como por ejemplo las plantas de los edificios y de las poblaciones contenidas en el mismo, se quiere representar en una escala mayor para apreciar con exactitud todos los contornos de las manzanas de casas. Estos planos que acompañan al general, y del que representan partes principales, se llaman *planos de detalles,* como ya hemos dicho (tomo I, 919).

497. Los dos últimos casos en que se reproduce el dibujo en menor ó mayor escala, se comprenden igualmente bajo el nombre de *reduccion,* y se llamará siempre *copia,* para abreviar, al nuevo dibujo que se obtenga del original, bien se conserve la escala de éste, ó se aumente ó disminuya.

El primer caso está reducido á la construccion de figuras iguales, y los otros dos á la de figuras semejantes. En la construccion de éstas se puede asignar la relacion que han de guardar los lados entre sí, ó la que han de tener las superficies; y una vez conocida una de estas relaciones es fácil deducir de ella la otra. Nos ocuparemos, por lo tanto, de los dos problemas á que dá lugar la construccion de las figuras semejantes, tratando al mismo tiempo de la igualdad, que es un caso particular de la semejanza.

En la resolucion de estos problemas nos valdremos primero de los métodos geométricos, haciendo uso despues de los instrumentos llamados de *reduccion.*

498. **Problema 1.º—Dada una figura cualquiera, reproducirla en diferente escala, de modo que sus líneas homólogas guarden una relacion dada.**—Si se observa cuanto hemos dicho en la Planimetría para la construccion de los planos de los polígonos, tendremos conocida la reduccion de las figuras, puesto que no se hizo entonces otra cosa que la formacion de figuras semejantes á las del terreno, cuyos lados estaban en una relacion dada; y se verá que haciendo ahora las veces del polígono del terreno, el dibujo original que se dé para copiar, la cuestion

estará reducida á trazar otra figura semejante en menor ó mayor escala, tomando en la primera las medidas en su correspondiente escala y los mismos valores en la nueva que se emplee, debiendo ser por otra parte los ángulos siempre iguales.

Se concibe en efecto, que en la construccion de las figuras semejantes se podrá hacer uso de cuantos medios suministra la Geometría, y que son los más principales aquellos de que hemos hecho uso en las construcciones de los planos en los capítulos XVI, XVII y XVIII del tomo I.

Así, por ejemplo, valiéndonos de *abscisas* y *ordenadas* ó por alineaciones perpendiculares, y suponiendo que ABCDEFG (fig. 587 del tomo I; lám. 39) sea el dibujo original cuya escala es conocida, despues de trazar el eje AE y las ordenadas BH, GY... se medirá la abscisa AH en la escala de esta figura, y se tomará su valor en la que se haya adoptado para hacer la copia *abcdefg* que suponemos sea menor en este caso, el cual nos dará *ah*; despues el de la ordenada BH del mismo modo para tener *bh*, y así sucesivamente. Ninguna dificultad habrá por consiguiente en adoptar cuantos métodos encierran las figuras 588 á 597 del tomo I (láminas 39 y 40), ambas inclusive, cuando el polígono en cuestion es rectilíneo de un corto número de lados.

Si el polígono es rectilíneo de un gran número de lados como los de las figuras 598 y 599, ó curvilíneos ó mistilíneos como los de las figuras 600 y 601 del tomo I (lám. 40), se seguirán los procedimientos que indican las mismas, inscribiendo ó circunscribiendo polígonos principales de un corto número de lados, que se construirán como se ha dicho, y despues las partes curvilíneas, refiriendo sus puntos por abscisas y ordenadas á los lados de los polígonos principales, y haciendo uso de la nueva escala elegida; pudiendo servir de otros tantos ejemplos las demás figuras desde la 602 hasta la 608, así como las 611 y 612 del tomo I (láminas 40 y 41).

Escusado es decir que puede seguirse en la reproduccion de las figuras semejantes, compuestas de contornos rectilíneos, y que han de representar en todos casos á los terrenos ó á los polígonos principales inscritos ó circunscritos á ellos, los métodos de alineaciones oblícuas, de interseccion, rodeo y radiacion explicados en los capítulos XVI, XVII y XVIII del tomo I, debiendo hacer uso para los trozos de curvas como en la figura 606 (lám. 40), ó de líneas poligonales como la parte correspondiente á FE de la figura 598 (lám. 40), de abscisas y ordenadas como hemos dicho anteriormente.

Como la igualdad de las figuras es un caso particular de la semejanza, que es cuando la razon de dos lados homólogos es igual á la unidad, se seguirán en la copia los mismos procedimientos explicados en las figuras semejantes, y cuantos pueda suministrar la Geometría; con la diferencia de que siendo iguales todas las dimensiones, no hay más que tomarlas con el compás en el original para reproducirlas en la copia, sin hacer caso de la escala de aquel, la cual tampoco es necesario conocer.

499. Llamando siempre l y L á dos lados homólogos *ab* y AB de dos figuras semejantes *abcdef* (fig. 587; lám. 39, tomo I), que representa la copia, y ABCDEF el original, y suponiendo que dichos lados estén siempre en la razon de dos números m y n, tendremos la relacion

$$l : L : : m : n,$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{l}{L}=\frac{m}{n} \qquad [1].$$

Si representamos ahora por $\frac{1}{M}$ la escala de la copia y por $\frac{1}{N}$ la del original, y llamamos D la dimension natural ó del terreno que representan los dos lados l y L, tendremos (tomo I, 188) las dos ecuaciones

$$D = Ml \quad y \quad D = NL;$$

de donde

$$Ml = NL,$$

y

$$\frac{l}{L} = \frac{N}{M} \qquad [2];$$

cuyo resultado se hubiera obtenido igualmente observando que se tiene

$$\frac{l}{L}=\frac{m}{n}=\frac{\frac{1}{M}}{\frac{1}{N}}=\frac{N}{M} \qquad [3]:$$

lo que nos dice que *las longitudes de dos lados homólogos de la copia y del original están en razon directa de las escalas, é inversa de los denominadores de las mismas escalas;* es decir, que si un lado de la copia ha de ser la mitad del correspondiente del original, por suponer que es $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, la escala de la copia será tambien la mitad de la del original, en cuyo caso el denominador de aquella será doble del de la de este (tomo I, 189), y así se verificará la série de razones iguales que acabamos de exponer.

Si en dicha série de razones iguales

$$\frac{m}{n}=\frac{l}{L}=\frac{N}{M}$$

hacemos

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{2}\ \ldots\ \frac{1}{3}\ \ldots\ \frac{1}{4}\ \ldots$$

se tendrá

$$\frac{l}{L}=\frac{N}{M}=\frac{1}{2}\ \ldots\ \frac{1}{3}\ \ldots\ \frac{1}{4}\ \ldots$$

que manifiesta más claramente lo expuesto; es decir, que cuando el lado l de la copia es por ejemplo la mitad, tercera, cuarta parte.... del L del original, el denominador N de la escala de éste es á su vez la mitad, tercera, cuarta parte.... del M de la escala de aquella.

500. Cuando construido un dibujo en la escala de $\frac{1}{N}$ se le quiere reproducir en otra escala $\frac{1}{M}$, se dice que se pasa de la escala $\frac{1}{N}$ á la $\frac{1}{M}$.

Para pasar de una escala $\frac{1}{N}$ á otra $\frac{1}{M}$ que sea mitad, tercio.... de la primera, es decir, cuando conocida la escala $\frac{1}{N}$ del original, se quiere construir la $\frac{1}{M}$ que ha de servir para la copia, conocida que sea la relacion $\frac{m}{n}$ de ésta con el original, se multiplicará la fraccion $\frac{1}{N}$ por la $\frac{m}{n}$, y se tendrá

$$\frac{1}{N}\times\frac{m}{n}=\frac{m}{mN}\qquad [4].$$

$$\text{Si}\ \frac{m}{n}=\frac{1}{2}\ \ldots\ \frac{1}{N}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2N}=\frac{1}{M}.$$

$$\text{Si}\ \frac{m}{n}=\frac{1}{3}\ \ldots\ \frac{1}{N}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3N}=\frac{1}{M},$$

y así sucesivamente.

Ejemplo.—Si se tiene $\frac{1}{N}=\frac{1}{500}$, y se quiere emplear una escala $\frac{1}{M}$ que sea $\frac{1}{4}$ de la anterior, tendremos

$$\frac{1}{N}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{500}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2000}=\frac{1}{M},$$

y no habrá mas que construir la nueva escala $\frac{1}{M} = \frac{1}{2000}$, segun hemos dicho (tomo I, 189).

501. Para pasar una escala $\frac{1}{N}$ á otra $\frac{1}{M}$ que sea los $\frac{3}{5}$ de la anterior, tendremos

$$\frac{1}{N} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5N} = \frac{1}{5N} \times 3 = \frac{1}{M'} \times 3 = \frac{1}{M};$$

y en general

$$\frac{1}{N} \times \frac{m}{n} = \frac{m}{nN} = \frac{1}{nN} \times m - \frac{1}{M'} \times m = \frac{1}{M}.$$

Ejemplo.—Sea $\frac{1}{N} = \frac{1}{1000}$, y $\frac{m}{n} = \frac{3}{5}$: resultará

$$\frac{1}{1000} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5000} = \frac{1}{5000} \times 3.$$

Es decir, que hallada la longitud $0,^{m}02$ de la recta que ha de representar 100 metros en la escala de $\frac{1}{5000}$ que hemos llamado $\frac{1}{M'}$, y tri-triplicándola, se tendrá la longitud $0,^{m}06$ del valor de 100 metros en la escala $\frac{1}{M}$ de la copia, que ha de ser en este caso los $\frac{3}{5}$ de la $\frac{1}{N}$ del original.

502. Otras veces un dibujo construido en una escala cualquiera, por ejemplo en la $\frac{1}{5000}$, se produce en otra $\frac{1}{30000}$ elegida á arbitrio. Si se desea saber entonces la relacion de sus lados homólogos, se tendrá

$$\frac{l}{L} = \frac{N}{M} = \frac{5000}{30000} = \frac{1}{6};$$

es decir, que las líneas de la copia serán la sexta parte de las del original.

503. **Ángulo de reduccion.**—La reduccion de una figura construida en la escala $\frac{1}{N}$ á otra en la $\frac{1}{M}$, se puede hacer tambien trazando una recta AB (fig. 218; lám. 20), que sea la mayor dimension del original, y

otra BC, que con la anterior forme un ángulo cualquiera ABC, que más comunmente suele ser recto. La BC será en la copia la homóloga de la recta AB, y su longitud se determinará por la expresion

$$BC = AB \times \frac{N}{M},$$

que proviene de la igualdad [2], haciendo $l = BC$ y $L = AB$. Si ahora se une el punto A con el C por medio de la AC, y se tiran á la BC las paralelas GF, HY..... estas representarán es la escala $\frac{1}{M}$ de la copia las líneas homólogas á las AF, AY..... del original en la escala $\frac{1}{N}$; pues se tendrá la série de razones iguales

$$\frac{GF}{AF} = \frac{HY}{AP} = \ldots\ldots \frac{CB}{AB} = \frac{N}{M};$$

de donde resulta

$$GF = AF \times \frac{N}{M};\ HY = AY \times \frac{N}{M};\ \ldots\ldots$$

por consiguiente, tomando con el compás una línea AD igual á una cualquiera de las del original y trazando la DE, esta será su homóloga en la copia.

Para construir desde luego el ángulo de reduccion, se puede dar á AB una longitud igual á 100 partes ó á 1000 de la escala de $\frac{1}{N}$, y otras 100 ó 1000 á BC de la escala de $\frac{1}{M}$ y se abreviará la operacion tirando á la BC paralelas *ab*, *cd*.., de 2 en 2 ó de 3 en 3 milímetros, para evitarse el levantar nuevas perpendiculares cada vez que se toma una distancia sobre la AB. Cuando el estremo de dicha distancia no coincida con el de una de las paralelas, será fácil tomar á ojo con el compás la longitud de la perpendicular correspondiente, sin necesidad de trazarla.

304. El ángulo de reduccion, que da los mismos resultados que se obtienen por medio de las escalas trazadas en el papel, no se usa apenas; pues es más cómodo y breve valerse de los juegos de escalas de boj ó de marfil. Es sin embargo importante su uso cuando no se conoce la escala del original, pues si se quisiese entonces hacer la copia de modo que cada lado fuese los $\frac{3}{5}$ del correspondiente del original, bastaría tomar una línea AB que excediese á la mayor dimension de éste, divi-

diéndola en 5 partes iguales, dando 3 partes de longitud á BC y tirando la AC se tendria construido el *ángulo de reduccion*. Se hace aplicacion igualmente de este procedimiento cuando la relacion se da en líneas, es decir, cuando se elige á arbitrio una recta BC para que represente otra AB tomada en el original; pues pudiera suceder entonces que estas dos rectas resultasen incomensurables, y la cuestion no solo se resolvería por completo del modo explicado, sino que entonces no sería tampoco posible resolverla de otro modo.

Por último, el ángulo de reduccion puede emplearse en la comparacion de dos planos del mismo terreno levantados en diferentes épocas por distintos sugetos, bién sean ó no conocidas las escalas. En este caso se unen por rectas los dos puntos más distantes de uno de los dos planos y sus homólogos en el otro, y estas dos rectas que se hallarán en una cierta relacion comensurable ó incomensurable, servirán como las AB y BC para construir el ángulo de reduccion, por cuyo medio se podrán comparar todas las demás líneas correspondientes de ambos planos.

505. Segun sea la BC menor ó mayor que la AB en la relacion que se pide, así resultará la copia reducida ó amplificada; y en los casos en que las dimensiones de esta deban ser menores que el doble de las del original, el ángulo de reduccion BAC (fig. 219; lám. 20) se puede trazar describiendo un arco de círculo BC con un rádio AB igual á la dimension mayor del original, y otro *rs* que corte al primero, haciendo centro en B con un rádio $BC = AB \times \frac{N}{M}$ ó bien á la línea arbitraria que se quiera que represente á AB: y toda distancia AD del original tomada sobre las AB y AC suministrará la homóloga DE de la copia; pues se tiene

$$\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB} = \frac{N}{M};$$

de donde

$$DE = AD \times \frac{N}{M}.$$

La marcha de las operaciones cuando se hace uso del ángulo de reduccion, es la misma que la indicada anteriormente valiéndose de las escalas, ya sean los contornos rectilíneos, curvilíneos ó mistilíneos.

506. **Cuadrícula.**—Para la reduccion ó ampliacion de los planos en la copia, se usa tambien, sobre todo, cuando los contornos son curvilíneos ó mistilíneos, el método llamado *por cuadrícula*, que consiste en trazar con lápiz en el original un cuadrado ABCD (fig. 220; lám. 20) que le comprenda enteramente, trazando despues el suficiente número de paralelas á los lados de esta figura, y á las que distinguiremos llamándolas horizontales y verticales, para que se forme una red de cuadrados pequeños é iguales, de $0^m,05$ por ejemplo de lado, numerándolas para mayor

comodidad en su uso, como se ve en la figura. Se construye despues en el papel donde ha de hacerse la copia otra cuadrícula A'B'C'D' cuyos lados guarden con los de la construida sobre el original la relacion en que se han de hallar los dibujos, es decir, que el lado de los cuadrados de la copia se obtendrá por medio de la expresion $l = L \times \frac{N}{M}$.

Se toman ahora á partir del punto de interseccion o de las líneas señaladas con el número 1 la abscisa oa y la ordenada ob, y despues de reducidas valiéndose del ángulo de reduccion, ó de tomadas en la escala de la copia, se tendrán las $o'a'$ y $o'b'$, y fijos, por lo tanto, los puntos homólogos a' y b' de la copia. El punto c le determina la ordenada ch tomada en la vertical 2 á partir del punto de interseccion h con la horizontal 1, y se obtendrá el c' en la copia por medio de la reducida $h'c'$. Un punto r situado en el interior de un cuadrado, se situará en la copia por medio de la abscisa $on = mr$ y la ordenada $om = nr$, y de este modo se irán fijando todos los puntos del contorno del original y se obtendrán sus homólogos en la copia. Tambien pueden fijarse por intersecciones de arcos de círculos como el punto s, haciendo centro en los puntos p y 3, y trazando dos arcos, para hacer la misma operacion en la copia valiéndose de los rádios reducidos que nos darán el punto homólogo s'. Por último, se hallarán por los mismos procedimientos los puntos homólogos de los interiores del plano, como el z' del z que pertenece al contorno del rio, y la casa E' que ha de representar la E del original.

Cuando uno de los cuadrados elementales del original contenga muchos detalles, se le dividirá, así como su homólogo de la copia, en otros nuevos cuadrados como sucede con el P, ó en triángulos por medio de sus diagonales como el R; y de este modo se facilitará la copia. Si los cuadrados son muy pequeños, se pueden apreciar á simple vista las mitades, tercios ó cuartos de sus lados.

507. Si se hiciese uso de la cuadrícula cuando el contorno es rectilíneo, bastaría para obtener ésta fijar la posicion de sus vértices; ó bien se prolongarían los lados en el original hasta su encuentro con los del marco cuadrado ABCD, en cuyo caso es fácil darles posicion en la copia.

Cuando el contorno es curvilíneo, fijos los puntos principales de las curvas, se trazarán ó copiarán estas á mano, imitando las del original, y hasta que no se hayan dibujado todos los detalles que comprenda un cuadrado no se pasará al siguiente.

508. Cuando no se quiere estropear el original trazando en él tantas líneas como exige la cuadrícula, se tiene un marco de madera, carton ú hoja de lata (fig. 221; lám. 20), el cual está dividido en pequeños cuadrados por medio de hebras de seda finas y tirantes. Se coloca sobre el original y solo se trazan de lápiz las dos rectas AB y BC que han de servir de guia para la continuacion del trabajo. Dividido todo el papel donde se ha de hacer la copia en cuadrados que esten con los del marco en la relacion pedida, es fácil concebir el modo de proceder hasta la conclusion.

Más fácil sería valerse de un papel vegetal ó trasparente, que cubra todo el original, y el cual se haya cuadriculado primero con el tiralíneas, y trazar en el papel de la copia la cuadrícula en la relacion que se desee.

En vez de cuadrados se puede hacer uso de rectángulos ó de paralelógramos cualesquiera, así como de triángulos; y en general se pueden aprovechar todas las líneas que han servido para la construccion del plano con arreglo á las operaciones practicadas en el terreno. Tal sería, por ejemplo, si se tratase de reducir figuras como las 701 y 708 (lám. 53 del tomo I) Los triángulos de la primera, así como el *ab*B de la segunda y los demás que se pudieran formar en esta dividiendo por diagonales los polígonos de más de tres lados, como el cuadrilátero A*aec*, se podrán dividir si fuese necesario, así como se vé en la fig 222 (lám. 20) en paralelógramos y triángulos que circunscriban todos los detalles. En una palabra, en la reduccion de los planos, como en su levantamiento y construccion, todo estriba en establecer la red de líneas, que constituye la *armazon* ó el *canevás*, y que sirven para fijar definitivamente el contorno y los detalles interiores y exteriores En el establecimiento de las líneas principales y secundarias puede hacerse uso de las escalas ó del ángulo de reduccion.

509. Cuando las figuras han de copiarse en mayor escala, lo que no sucede con frecuencia, debe tenerse presente que en la copia se aumentan los errores del original; mientras que en la reduccion á menor escala se hacen ménos perceptibles.

Los mismos métodos de la cuadrícula se extienden á la copia en igual tamaño ó en la misma escala que el original; si bien la operacion es más sencilla, por cuanto siendo todas las dimensiones iguales, no hay que hacer uso más que del compás para apreciarlas y trasladarlas, sin que sea necesario hacer uso de la escala En este caso se puede seguir además cualquiera de los métodos expeditos siguientes

510. **Procedimientos que se siguen en las copias de planos en la misma escala —1.° Picado —**Para copiar un plano picando los puntos, se coloca el original sobre la hoja de papel blanco donde se ha de copiar, disponiendo á ambos sobre un tablero bien plano, y asegurándolos con cola de boca ó con unos clavos ó tachuelas llamados *chinches*, los cuales consisten en unas puntas muy pequeñas y finas de acero, provistas de unas cabezas de metal que son cilindros de mucha base y pequeña altura. Hecho esto, con una aguja muy fina que va sujeta á los mangos de los tiralíneas, los cuales se destornillan de las lengüetas, se van picando verticalmente los puntos más notables del original, como los extremos de las líneas rectas, y en las curvas los puntos de *máxima*, de *mínima*, de *inflexion* y de *retroceso* (tomo I, 885), así como todos aquellos que puedan facilitar el trazado del contorno y de los detalles interiores del plano. Cuando no se tiene la aguja armada en el tiralíneas, se la pondrá por cabeza una bola de cera para manejarla más fácilmente. Se

levanta despues el original, y consultándole, se van uniendo los puntos picados que determinan líneas rectas con la regla y el lápiz, las cuales se pueden rectificar con el compás, y á mano los que determinan las curvas, imitándolas todo lo posible, y procediendo despues á concluir el dibujo con tinta de china. Si se picasen muchos puntos, resultaría confusion; por lo que todo está en el tino con que se han de elegir los precisos para la claridad y facilidad en el traslado. Escusado es decir que debe establecerse por medio del picado la armazon de rectas que haya servido para la construccion del plano, ó la que puede establecerse como si fuera para este fin; y que la práctica es el todo en el acierto y prontitud de esta clase de operaciones que nos ocupa.

Con el objeto de no volver á picar los puntos que ya lo están, y á fin de no omitir ninguno de los que han de fijarse, se evitarán las equivocaciones, señalando ligeramente en el original con trazos de lápiz, los trozos que ya se hayan picado; y si á pesar de todo se hubiera omitido algun punto, se podrá establecer por medio de intersecciones de arcos de círculo.

Cuando hay necesidad de sacar muchas copias, se pican muchas hojas de papel á un tiempo colocándolas debajo del original, si bien es mejor, aunque se tarde más, hacer la operacion de tres en tres hojas; pues se harían agujeros muy gruesos en el original si hubiera que hundir la aguja, aunque fuese muy delgada, hasta que llegase á señalar en la última hoja.

El picado se ha de hacer de modo que taladrando el original quede sólo la huella en el papel de la copia, aunque es difícil llenar por completo esta circunstancia; y si se ha tenido la precaucion de pegar al tablero el papel de la copia, se disimularán los taladros y las huellas en ésta, pasando por encima una esponja con agua.

511. Este método, además de las imperfecciones que encierra, tiene el inconveniente de que siempre se estropea el original; por lo que solo debe usarse en determinadas circunstancias, como cuando se trata de pasar de un borrador al plano en limpio, ó si el original está muy deteriorado y su conservacion no es importante. De todos modos no debe usarse en planos que encierren muchos detalles. En este caso y en el de ser interesante el original y tener que conservarle íntegro, se hará uso del procedimiento siguiente.

512. **2.° Calcado.**—*Por el cristal.*—Consiste en disponer el original sobre un cristal y encima el papel blanco donde se ha de hacer la copia, pegándolos con cola de boca. Hecho esto, se coloca el cristal inclinado de modo que dé paso á la luz para que el original se vea á través del papel blanco, y no habrá más que ir pasando con lápiz el dibujo de las curvas: en cuanto á las rectas, bastará marcar sus extremos para trazarlas despues con la regla, ó se pueden calcar tambien á pulso; pero despues hay que rectificarlas con la regla, si bien se puede hacer uso de ésta sobre el mismo cristal. Para la perfeccion del trabajo existen aparatos dispuestos

á propósito, que consisten en un cristal de gran tamaño colocado en un marco de madera, el cual puede girar alrededor de un eje horizontal sostenido por uno ó dos piés, y dispuesto todo de manera que el cristal se coloque á la altura y con la inclinacion que se desea, pudiéndole fijar de un modo invariable en la posicion adoptada. Al presentar el aparato á la luz, se cuidará de que ésta penetre solamente por debajo del cristal; lo que se conseguirá cubriendo con una tela negra la parte superior de la ventana ó balcon delante de los cuales se presente el aparato, y se aumenta la trasparencia colocando tambien debajo del cristal una lámina de hoja de lata ó de metal blanco bien bruñida, de modo que la batan los rayos de luz que por reflexion irán á iluminar el cristal. De todos modos, no siendo mucha la luz de que se puede disponer en estos casos, es necesario tener mucha práctica para ejecutar una copia con perfeccion; y además influye tambien en la exactitud la desviacion que el grueso del papel puede producir en la posicion de las líneas. Los aparatos citados suelen hallarse en los depósitos de planos y en las oficinas de Obras públicas en sus diversos ramos.

513. *Por el papel vegetal.*—Esta clase de papel tiene tal trasparencia, que colocado sobre el original se perciben con la mayor claridad hasta sus más ligeros detalles. Despues de asegurado en esta posicion, y sujeto con el original á un tablero por medio de chinches ó de cola de boca, se va pasando todo el dibujo ó las partes principales que se elijan como suficientes, con un lápiz que no sea ni muy duro ni muy blando, á fin de evitar el que se rompa el papel vegetal ó que salgan las líneas muy gruesas y se borren, y mejor aún es hacer el calco con tinta de china, haciendo uso del tiralíneas y de las plumas topográficas. Concluido el calco, se levanta el papel vegetal y se impregna por el revés de lápiz hecho polvo fino, extendiéndolo bien con una muñeca de lienzo. Se coloca despues el papel vegetal sobre la hoja de papel blanco donde se ha de hacer la copia, de modo que la parte ennegrecida se halle en contacto con él, quedando el dibujo del calco en la parte superior; y despues de asegurados ambos papeles con las chinches ó la cola de boca, se va pasando por las líneas del calco un lápiz duro ó un puntero de acero llamado *calcador*. Hay tambien y se hace uso de ellas, unas barritas cilíndricas de acero que van dentro de un mango tambien cilíndrico como si fuera un lápiz, y se llaman *calcadores de acero*; y aunque tienen la punta muy fina para poder grabar en piedra, redondeándola en una piedra de afilar, se pueden pasar sobre el papel vegetal sin romperle.

De este modo se irá señalando todo el dibujo sobre el papel blanco, en el cual se rectifican despues con un lápiz de punta fina, y consultando el original, las líneas, que en general suelen resultar muy gruesas, valiéndose de la regla, compás y tiralíneas, y corrigiendo á mano las curvas defectuosas, hasta dar por concluido el dibujo.

Para economizar tiempo se hace uso de un papel preparado que se llama *papel manchado* ó *polígrafo*, y que tiene una de sus caras ó las dos impregnadas de negro, azul ú otro color. Este papel se coloca entre el papel vegetal y el blanco de la copia.

Cuando no se tiene papel manchado se prepara una hoja de papel blanco, tiznándola bien de polvos finos de lápiz y usándole como el anterior. Los polvos del lápiz Eston, que es muy blando y negro, son los más á propósito para esta operacion; pues se borra con mucha facilidad cuando se limpia el dibujo. Tambien puede prepararse el papel trasparente tomando una hoja de papel comun y extendiendo sobre ella con un pincel, un aceite volátil como el de espliego ú otro, el cual, al poco tiempo se volatiliza, y el papel queda trasparente y con su color natural. Tambien se puede preparar un frasquito de *vencina* que se extiende con un pincel.

514. Cuando se hace uso del papel trasparente debe tenerse presente que éste padece alteraciones, debidas á la influencia que ejercen sobre él el calor de la mano y la humedad de la respiracion: por lo que cuando el original lo permite, puede tomarse la precaucion de establecer en éste con lápiz una cuadrícula cuyos cuadrados tengan dos decímetros de lado, ó bien se divide solamente en fajas paralelas. Haciendo la misma division en el papel vegetal y operando por cuadrados ó por fajas, se podrá cotejar en todas ocasiones el calco con el original para ver si se verifica la coincidencia de los respectivos cuadrados ó fajas, haciendo que tenga lugar esta coincidencia en caso contrario; y al pasar del calco á la copia se divide del mismo modo el papel donde se ha de hacer aquella, operando por cuadrados ó fajas que se harán coincidir exactamente. En este caso es conveniente tener un cuadrado de papel vegetal de 2 ó 3 decímetros de lado impregnado de polvos de lápiz, el que se coloca entre el papel blanco y el calco en el sitio donde ha de reproducirse la parte correspondiente al original.

515. Si el dibujo que se ha de copiar está ya muy deteriorado, ó es un borrador que se quiere poner en limpio, el mismo original puede hacer oficios de calco, ennegreciéndole por el revés ó colocando el papel manchado entre él y el papel blanco de la copia; evitando así el uso del papel vegetal y simplificando el trabajo.

516. *Por el papel-tela.*—La mayor exactitud y celeridad en la copia de los planos se consigue hoy haciendo uso de una tela llamada así, muy delgada y ligera, y preparada con una composicion que la hace impermeable al mismo tiempo que la dá mayor trasparencia que la que tiene el papel vegetal. El papel-tela posee otras propiedades que le hacen preferible al vegetal; pues sus dimensiones pueden tener la magnitud que se quiera, resiste los dobleces sin romperse, y de aquí el que se haya generalizado tanto y esté recomendado su empleo en los planos que acompañan á los expedientes, y mandado su uso en los proyectos de Obras públicas, dándosele tambien la preferencia en los depósitos de planos y en toda clase de oficinas públicas y particulares. Su uso es bien sencillo, pues extendido sobre el original y sujeto con chinches, se puede

proceder en seguida á la copia exacta valiéndose desde luego de la tinta de china y los colores en el trazado de las líneas, y dándose hasta las aguadas que contenga el original, haciendo todo el trabajo por completo de una vez, y siendo por lo tanto el método más expedito y exacto de cuantos se han ideado hasta ahora para la reproduccion ó copia de planos y mapas en igual escala que el original. Las aguadas suelen darse por el revés, á fin de no borrar las líneas del dibujo; la trasparencia del papel-tela las hace aparecer como si estuvieran dadas por el derecho. Las copias obtenidas con el papel-tela son las que llenan mejor la condicion de concebir una figura igual á otra por medio de la superposicion, y las que más se aproximan á la perfeccion ideal con que concibe el entendimiento este axioma de la Geometría, base de un gran número de demostraciones.

517. **Relacion de las áreas en los métodos de copia y reduccion que anteceden.**—Todos los procedimientos expuestos nos darán figuras iguales ó semejantes á las del original, y cuyos lados se hallarán en la relacion que se haya fijado de antemano; con lo que queda resuelto el primer problema; y se hallará fácilmente la relacion que guardan las superficies, observando que éstas son entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos (Geom. Teor. 100).

Sean ahora s y S las superficies de la copia y del original: tendremos

$$\frac{s}{S}=\frac{l^2}{L^2}=\frac{N^2}{M^2} \qquad [5];$$

donde vemos que *las superficies se hallan tambien entre sí en razon inversa de los cuadrados de los denominadores de las escalas.*

518. **Problema 2.° Dada una figura cualquiera, reproducirla en diferente escala, de modo que las superficies guarden una relacion dada.**—Cuando por el contrario de lo que sucede en el primer problema, se desee desde luego copiar una figura de manera que guarden las superficies del original y de la copia una relacion dada, la cuestion estará reducida á hallar la longitud que han de tener las líneas de la copia para que se verifique la expresada condicion, valiéndose de procedimientos geométricos; ó bien hallar desde luego la nueva escala, si se quiere hacer uso de ésta en el trazado.

Para conseguir este objeto, se tendrá presente que las raíces cuadradas de las superficies están en razon directa de los lados homólogos, é inversa de los denominadores de las escalas, pues en la série [5] de las razones iguales escrita anteriormente se tiene

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}=\frac{l}{L}=\frac{N}{M} \qquad [6]$$

Una vez conocida la relacion de los lados, estamos en el caso anterior; si bien es conveniente para la mayor exactitud en la formacion de la nueva escala, que las raíces de las superficies sean exactas. En efecto, si se toma siempre por unidad la superficie del original y se quiere construir un polígono cuádruplo de otro en superficie, tendremos

$$S=1 \quad y \quad s=4;$$

de donde

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}=2;$$

luego los lados de la copia serán dobles que los del original.

Si $S=1$ y $s=\frac{1}{2}$, tendremos

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1}}=\frac{1}{2},$$

y los lados de la copia serán la mitad de los del original. En una palabra, deben adoptarse los números de estas dos séries

$$\ldots\frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots$$

$$\ldots\frac{1}{25},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{4},\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25 \ldots$$

para hacer que cuando se trate de copiar estando los lados en una cierta relacion, ésta esté representada por dos números cualesquiera de la primera série; y cuando la relacion dada sea la de las superficies, se elegirán dos números de la segunda, y siempre será fácil pasar de la una á la otra; pues siendo por otra parte arbitrarias las relaciones de los originales con sus copias, se eluden así las dificultades y las inexactitudes. Las multiplicaciones del numerador 1 de los quebrados de ambas líneas á la izquierda de la unidad por los números enteros de la derecha de la misma, dan tambien relaciones sencillas como la $\frac{3}{5}$ y la correspondiente $\frac{9}{25}$ que resultan de multiplicar $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{25}$ por 3 y 9 respectivamente; pues se puede pasar fácilmente de una á otra, y la construccion de la escala de la copia que sea los $\frac{3}{5}$ de la del original, hemos visto ya (501) que era muy sencilla.

519. Este problema, que acabamos de resolver en el caso de ser las relaciones sencillas y expresadas por números, se puede resolver tambien cuando las relaciones son cualesquiera y complicadas, como á la que podrían dar lugar dos rectas cualesquiera elegidas á arbitrio, si se hallase su relacion en números por medio de los problemas 22 y 23 de la Geometría; pero en este caso nos valdremos de las mismas rectas, empleando el procedimiento gráfico que exponemos á continuacion.

Sea ABCDE (fig. 223; lám. 20) un polígono dado, y tratemos de construir un polígono semejante *abcde*, cuya superficie esté con la del primero en la misma relacion que la recta *m* con la recta *n*.

Tómese una parte AC $= n$ (fig. 224; lám. 20) y otra BC $= m$; colóquense una á continuacion de otra, y sobre la AB como diámetro se describirá una semicircunferencia. En el punto C se levantará la perpendicular CD y se tirarán las cuerdas AD y BD, prolongándolas lo que sea necesario. Tómese una parte DF igual al lado AB del polígono dado, y tirando la paralela FE á la AB se tendrá la DE, la cual será en la copia el lado homólogo del AB del original, de manera que construyendo sobre $ab =$ DE (fig. 223; lám. 20) un polígono *abcde* semejante al ABCDE (Geom. Probl. 30), se tendrá resuelto el problema.

En efecto, llamando P al polígono ABCDE y X al *abcde* que se trata de construir, tendremos

$$X : P :: ab^2 : AB^2,$$

$$X : P :: DE^2 : DF^2 \qquad [7];$$

pero los triángulos semejantes DEF y DAB dan la proporcion

$$DE : DF :: DB : DA,$$

y por lo tanto (Arit. 170. Cor.)

$$DE^2 : DF^2 :: DB^2 : DA^2 \qquad [8].$$

Las proporciones [7] y [8] tienen una razon comun; luego resultará

$$X : P :: DB^2 : DA^2 \qquad [9];$$

y como se tiene (Geom. Teor. 70. 2.°)

$$DB^2 : DA^2 :: BC : AC :: m : n,$$

resultará por último

$$X : P :: m : n;$$

que es lo que se quería demostrar.

Si en la construccion sucediese que la cuerda AD fuese igual á AB, la cuerda BD lo sería á *ab*.

Si el polígono dado fuese un cuadrado, se operaría de la misma manera para obtener el valor del lado sobre el que se ha de construir el nuevo cuadrado.

520. Cuando no se quiere seguir el procedimiento indicado para la construccion del polígono semejante, y se quiere evitar la formacion de ángulos que en ella se requiere, se podrá hacer uso del método por intersecciones, tomando en la cuerda AD otra parte D*a* = BC y la D*c* igual á la diagonal AC (figuras 223 y 224; lám. 20), y tirando las paralelas *ab* y *cd* se tendrán las D*b* y D*d* homólogas de las BC y AC: haciendo centro en *b* con un rádio D*b* y en *a* con el D*d*, se trazarán dos arcos que darán el punto *c*, y así se continuará hasta concluir.

No hay inconveniente en seguir tambien el método acabado de exponer, cuando la relacion es sencilla y se da en números como la de 3 : 5; pues está reducido á tomar una recta AB (fig. 224; lám. 20) y dividirla en ocho partes iguales, de las cuales tres compondrán la CB y cinco la AC.

521. Comparando dos lados homólogos de la copia y del original se podrá hallar su relacion (Geom. Probls. 22 y 23); pero es más conveniente determinar la escala de la copia, cuando se conoce la del original, á fin de poderse servir de aquella en la construccion del dibujo, y para hallar la relacion de los lados homólogos. Para esto, si la escala del original es la de $\frac{1}{1000}$, un decímetro representará 100 metros, y tomando DF (fig. 224; lám. 20) igual á un decímetro y tirando la paralela FE á la AB, la DE será tambien la longitud de 100 metros en la copia. Se medirá la DE, y si resulta ser igual á dos centímetros y medio, la escala de la copia será

$$\frac{0{,}^{m}025}{100} = \frac{25}{100000} = \frac{1}{4000}.$$

Comparando la escala $\frac{1}{1000}$ del original con la $\frac{1}{4000}$ de la copia, resulta ser esta 4 veces menor por ser su denominador 4 veces mayor: luego los lados de la copia son la cuarta parte de los del original ó la relacion de los lados homólogos es $\frac{1}{4}$.

522. Para hallar la longitud del lado homólogo se puede seguir otro camino, fundado en la sencilla solucion analítica siguiente.

Llamando *l* y L á dos lados homólogos de la copia y del original, se tiene desde luego la proporcion.

$$X : P :: l^2 : L^2;$$

y como tambien se supone que tiene lugar la

$$X : P : : m : n,$$

tendremos

$$l^2 : L^2 : : m : n,$$

y

$$l^2 = \frac{m L^2}{n} = L \times \frac{m L}{n};$$

de donde

$$l = \sqrt{L \times \frac{m L}{n}}:$$

lo que nos da á entender que l es una media proporcional entre las rectas L y $\frac{m L}{n}$, la cual se puede hallar (Geom. Probl. 28, 1.ª solucion) tomando $AC = L$ (fig. 223, lám. 20) y $CB = \frac{m L}{n}$, trazando una semicircunferencia ADB sobre la suma AB de las dos rectas, considerada como diámetro, y levantando en el punto C la perpendicular CD, la cual será la media proporcional pedida l. Esta construccion debe sólo emplearse cuando se tiene $m < n$; y si en este caso se quiere que la figura salga más reducida, se puede seguir otra construccion (Geom. Probl. 28 2.ª solucion), que consiste en tomar $AB = L$ y $AC = \frac{m L}{n}$, trazar un semicírculo sobre la AB considerada como diámetro, levantar en el punto C la perpendicular CD, y tirar la cuerda AD, la cual será ahora la media proporcional pedida l. Esta segunda construccion se empleará siempre en el caso de ser $m > n$, tomando $AC = L$ y $AB = \frac{m L}{n}$, trazando sobre AB la semicircunferencia ABD, levantando en C la perpendicular CD, y tirando la cuerda AD que dará el valor de l.

Para obtener $AC = \frac{m L}{n}$, que es una cuarta proporcional á m, n y L, cuando es $m < n$, se trazará una recta indefinida AZ, y por la parte inferior otra AY que forme con la primera un ángulo cualquiera YAZ. Tómense en la AY dos partes, una $AE = m$ y otra $AF = n$, y en la AZ otra parte $AB = L$, y uniendo el punto F con el B, y tirando la paralela EC, se tendrá la cuarta proporcional AC; pues los triángulos AEC y ABF dan

$$AE : AF : : AC : AB,$$

ó

$$m : n : : AC : L;$$

de donde

$$AC = \frac{m\,L}{n}.$$

Una vez hallada la AC, se construirá AD como se ha dicho, trazando un semicírculo sobre AB, levantando en el punto C la perpendicular CD, y tirando la cuerda AD; con lo que se tendrá

$$AD^2 = AB \times AC = L \times \frac{m\,L}{n};$$

de donde

$$AD = \sqrt{L \times \frac{m\,L}{n}} = l.$$

Cuando fuese $m > n$, se tomaría $AE = n$, $AF = m$, y $AC = L$; se uniría E con C y se tiraría la paralela FB; con lo que AB seria la cuarta proporcional, y sobre esta se trazaría ahora el semicírculo, se levantaría la perpendicular CD, y la cuerda AD resolvería la cuestion; lo que se demostraría del mismo modo.

523. *Casos particulares.* 1.º Si la superficie de la copia ha de ser doble de la del original, se tendrá $\frac{m}{n} = 2$; de donde $l^2 = 2L^2$, y $l = L\sqrt{2}$: es decir, que el nuevo lado l es la diagonal de un cuadrado cuyo lado es L, ó lo que es lo mismo, l es el lado del cuadrado inscrito en un círculo cuyo rádio es L. Si el polígono dado es un cuadrado, l es su diagonal.

2.º Si la superficie de la copia ha de ser la mitad de la del original, se tendrá $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, y $l^2 = \frac{1}{2}L^2$; de donde $l = \frac{1}{2}L\sqrt{2}$, es decir, que el nuevo lado es la mitad de la diagonal de un cuadrado cuyo lado es L. Si el polígono dado es un cuadrado, l es la mitad de su diagonal.

3.º Si la superficie del nuevo polígono ha de ser el triplo de la del propuesto, se tendría despues de hechas las operaciones $l = L\sqrt{3}$: es decir, que l es el lado del triángulo equilátero inscrito en un círculo cuyo rádio es L

4.º Si la superficie del nuevo polígono ha de ser el cuádruplo de la del propuesto, se tendrá $l = 2L$: es decir, que el lado del nuevo polígono ha de tener doble longitud que el del polígono propuesto; lo que debe ser así (Geom. Teor. 100).

524. **Instrumentos de reduccion.**—En la resolucion de los dos problemas de que nos hemos ocupado, se hace uso de los métodos expuestos cuando no se puede disponer de los *instrumentos de reduccion*. Mas en el caso de poderse valer de ellos las operaciones son más exactas y senci-

llas Nos ocuparemos de los llamados *compases de reduccion* y *pantógrafos*, observando primero que todos ellos están fundados en la teoría de las líneas proporcionales y en la de las figuras semejantes.

525. **Compases de reduccion**.—Supongamos dos rectas AE y BD (figura 226; lám. 20) exactamente iguales en longitud, y que se corten en un punto C, de modo que las partes de un mismo lado de este punto sean iguales, es decir, que se tenga $AC = BC$ y $DC = EC$: imaginando trazadas las AB y DE, tendrémos dos triángulos ACB y DCE, que serán semejantes (Geom. Teor. 59) por tener el ángulo $ACB = DCE$ por opuestos por el vértice, y los lados que los forman proporcionales, pues en virtud de la hipótesis resulta

$$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{CE}.$$

De modo que AB será paralela á DE, y si AC fuese la mitad, el tercio... de CE, resultaría tambien AB mitad, tercio... de DE; lo que se conseguiría haciendo que el punto C fuese movible y se pudiese sujetar en las divisiones que de antemano se podrían establecer en la recta AE ó en la BD. Se concibe ahora, que si las dos rectas se materializasen, y fuesen como los brazos de un compás prolongado por ambos lados de la charnela, tomando en el original una distancia con las puntas D y E, la distancia entre las A y B dará la longitud de la homóloga de la copia, las cuales estarán en la razon de AC á CE, ó en general de m á n. Se ve igualmente, que así como en este caso es $AC < CE$ ó $m < n$, y la copia resulta en menor escala, cuando se quiera reproducir el dibujo en mayor escala se tendrá $m > n$, y entonces se tomará $CE = m$ y $AC = n$, y se hará uso de las puntas A y B para tomar las distancias en el original, y las D y E darán las homólogas en la copia.

Si es por ejemplo $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, se tomará AC mitad de CE, y se tendrá la copia siendo cada línea la mitad de la correspondiente del original, usando el compás como hemos dicho en el primero de los casos que hemos considerado.

Si $\frac{m}{n} = \frac{2}{1} = 2$, se tomará como antes AC mitad de CE, y se tendrán las líneas de la copia dobles de las del original, usando el compás como se ha dicho en el segundo caso.

Como simple compás, puede servir este instrumento para reproducir los dibujos en la misma escala. Pasemos ya á la descripcion de estos instrumentos.

526. *Compás sencillo de reduccion*.—Para que pueda llenar todas las condiciones acabadas de enunciar, se compone de dos brazos de metal AE y BD (fig. 227; lám. 21) terminados por puntas de acero, y cuyos ejes de simetría representan las líneas AE y BD de la fig. 226 (lám. 20). En la 228

(lám. 21), A representa la proyeccion de la cara del brazo anterior del instrumento, B la proyeccion de la del posterior, y C la proyeccion visto de canto. Las puntas de acero inferiores *ab* son la tercera parte de la longitud total *db*, y las otras dos terceras partes superiores, que terminan en una pequeña punta de acero *d*, son de metal blanco ó amarillo y bastante anchas, con una abertura longitudinal en medio, por donde corre á lo largo una pieza *e* que ajusta exactamente con ella, y que va unida á una chapa *r*. Esta chapa y otra igual en la cara posterior tienen un taladro en su parte superior por el cual se introduce un tornillo *t*, y por medio de la tuerca *s* se arman los dos brazos del compás. Estando floja la tuerca, las dos piezas *e* con sus chapas *r* corren á lo largo de la indicada abertura; y apretándola, se unen fuertemente los brazos del compás formando todo un solo cuerpo, y el eje del tornillo *t* hace las veces de centro de la charnela, alrededor de la cual pueden girar los brazos como en un compás ordinario, y tomar una posicion cualquiera cuando se procede á operar con él en una relacion dada, tal como la de $\frac{1}{2}$, como se ve en la figura 227 (lám. 21). Todo está, por consiguiente, en colocar el centro *c* de manera que la parte *c*B tenga con la *c*D la razon asignada de *m* á *n*.

Para esto la cara A (fig. 228; lám. 21) lleva á los dos lados de la abertura longitudinal unas rayas divisorias señaladas con las fracciones

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9} \text{ y } \frac{1}{10},$$

que indican las relaciones de que se puede hacer uso. Estas divisiones están dispuestas de manera que cuando una raya horizontal que lleva al final la pieza *e*, y que se llama *línea de fé*, coincide con una de ellas tal como se ve en la figura que está en contacto con la division $\frac{1}{2}$, entonces quiere decir que la distancia *td* que hay desde el punto *t* al *d* es la mitad de la distancia *tb*. Si la línea de fé estuviera en contacto con la division $\frac{1}{3}$, la distancia del punto *t* al *d* sería el tercio de la que hubiera de *t* á *b*; y análogamente se verifica cuando se elige otra cualquiera division. El brazo posterior B lleva una ranura *x* que encaja en un tornillo *v* que va en la parte inferior del brazo anterior A.

527. *Compás de reduccion perfeccionado.*—La figura 229 (lám. 21) representa este instrumento en sus tres proyecciones A, B y C, como se ha hecho con el anterior. Este compás tiene mayor longitud, y sus puntas inferiores de acero *ab* son tambien la tercera parte de su longitud total. Las chapas *r* son rectangulares y de la misma longitud que las piezas que corren dentro de la abertura longitudinal, por lo que no se ven estas: la línea de fé está trazada en la mitad de la misma chapa y corresponde

al eje del tornillo que aprieta la tuerca *s* dispuesta en el brazo posterior B; por lo que las divisiones en la cara del brazo anterior A están dispuestas de manera que considerando, por ejemplo, la division $\frac{1}{4}$, la distancia de esta division al punto *d* es la cuarta parte de la que hay desde la misma division al punto *b*, y así no habrá más que hacer coincidir la línea de fé con una de estas divisiones tal como la $\frac{1}{4}$, y se tendrá el compás en estado de operar en esta relacion, como se indica en una de sus posiciones en la figura 230 (lám. 21), y en la relacion elegida $\frac{1}{4}$.

Aflojando la tuerca *s* (fig. 229; lám. 21), las chapas pueden correr con movimiento rápido como en el compás anterior; pero este tiene además una parte adicional para producir el movimiento lento en las mismas chapas. Esta adicion consiste en un soporte *h* que va en el extremo del brazo anterior como se ve en la proyeccion C, sosteniendo una rueda *s'* que hace veces de tuerca, y la cual se atornilla en el extremo inferior de una barra de acero *pq*, prismática, rectangular, y que llega hasta el extremo superior de la abertura longitudinal. Esta barra entra dentro de una pieza ó caja *i*, que puede correr á lo largo de dicha barra y fijarse en la posicion que se quiera por medio del tornillo *t*, el cual oprime la barra apoyándose sobre una lengüeta para no rehundir aquella. La chapa del brazo anterior A del compás lleva un taladro circular donde se introduce una espiga que lleva la pieza *i* como se ve en C. El soporte *h* puede girar además alrededor de un eje perpendicular á la cara del compás, haciendo describir á la barra un círculo entero.

Ahora, cuando se quiere poner el compás en una relacion cualquiera, por ejemplo, en la de $\frac{1}{4}$, despues de separar la pieza *i* y la barra *pq*, haciéndolas girar, se aflojará la tuerca *s* y se podrán llevar las chapas con movimiento rápido hasta que la línea de fé esté próxima á la division $\frac{1}{4}$. Se correrá la pieza *i* á lo largo de la barra *pq* hasta que la espiga se introduzca en el agujero de la chapa, que es como se halla en C, y apretando el tornillo *t* para que la pieza *i* forme cuerpo con la barra, no habrá más que dar vueltas á la tuerca *s'* en el sentido conveniente alrededor de su eje, y se producirá el movimiento lento; logrando así verificar exactamente la coincidencia de la línea de fé con la division $\frac{1}{4}$. Hallándose ya el compás en estado de operar, en cualquiera de sus posiciones, una distancia AB (fig. 230; lám. 21) de las puntas superiores será la cuarta parte de la DE de las inferiores; y para que se mantengan invariables los brazos del compás en cada posicion, y se eviten errores, se hace girar á la barra y se introduce la espiga de la pieza *i* despues de correr ésta lo que sea necesario á lo largo de ella, en un cilindro hueco de acero z (fig 229; lám 21) semejante al de la llave de un relój y dispuesto del modo que se ve en A, y está fijo en el brazo posterior B. Este cilindro sirve además para que encaje en él la ranura x (fig. 230; lámina 21) del brazo superior BD, cuando el compás está cerrado como en A (fig. 229; lám. 21). La figura 230 (lám. 21) representa el compás armado de esta manera; y los dos brazos y la barra forman un triángulo isósceles, siendo la barra pq paralela á las líneas DE y AB que tienen por extremos las puntas del compás.

528 *Divisiones del compás perfeccionado.*—Las divisiones que lleva el brazo anterior A (fig. 229; lám 21) á la izquierda de la abertura longitudinal son las

$$\frac{11}{12}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9} \text{ y } \frac{1}{10},$$

si bien no hemos indicado más en la figura que hasta la $\frac{1}{4}$, porque estando las demás muy próximas hubiera resultado confuso el dibujo Al final de la última division lleva grabado el compás la palabra *Lignes*

Hay otra division en el mismo brazo á la derecha de la indicada abertura, que tiene los numeros 7, 8, 9 hasta el 20, y de la que nosotros sólo hemos señalado hasta el 12, leyéndose en el compás al final del indicado brazo la palabra *Polígones* Esta division sirve para inscribir en un círculo polígonos regulares del número de lados que indica cada una de estas divisiones.

529. *Usos del compás perfeccionado.*—Sea C (fig. 231; lám. 21) un círculo cuyo rádio es CA, y supongamos que se quiere inscribir en él un polígono regular de 7 lados. Se correrán las chapas de modo que la *línea de fé* esté en contacto con la division 7, y abriendo el compás de manera que las puntas D y E (fig. 230; lám 21) comprendan el rádio CA, las otras dos A y B darán la longitud del lado del eptágono, el cual se llevará siete veces sobre la circunferencia y resultará inscrito el polígono pedido.

Se funda este procedimiento en que se han establecido las divisiones en el compás de modo que satisfagan á un círculo de rádio dado ó elegido á arbitrio; y siendo semejantes los polígonos regulares del mismo número de lados (Geom. Teor. 85), sus lados son proporcionales á los rádios de los círculos circunscritos, rádios tambien de los mismos polígonos, y la resolucion expuesta satisfará por lo tanto en todos los casos.

El uso de este compás en la reduccion de los planos es el explicado ya (525).

530. *Observaciones generales.*—En las figuras 228 y 229 (lám. 21) se han dibujado los compases tomando la mitad de las dimensiones del natural.

531. En el uso de este instrumento no debe reproducirse la copia siguiendo el método de rodeo en los polígonos rectilíneos de un corto número de lados, pues las inclinaciones de estos al formar los ángulos harían inexacto el trazado, y no cerrarían en general; así es que deben descomponerse en triángulos, con el objeto de fijar los vértices por intersecciones.

En los polígonos rectilíneos de un gran número de lados y en los curvilíneos y mistilíneos, se inscribirán ó se circunscribirán polígonos de un corto número de lados; y las partes poligonales ó curvilíneas correspondientes á los lados de aquellos se fijarán por abscisas y ordenadas. Los compases de reduccion son por lo tanto muy útiles para fijar los puntos de las figuras cuando se hace uso de la cuadrícula, evitando el empleo de los *ángulos de reduccion* y de las *escalas*, y abreviando considerablemente el trabajo.

Muchas veces sucede que alguna de las puntas del compás se rompe, y hay que afilarla, así como su correspondiente, quedando más cortas y por consiguiente el compás inutilizado; pues las divisiones ya no corresponden á las magnitudes reales de las partes marcadas en el instrumento. Para hacer servir el compás en este caso, despues de haber colocado la línea de fé en la division que indique la relacion elegida, si el defecto está en las puntas inferiores D y E (figs. 227 y 230; lám. 21), es decir, si éstas son más cortas, se moverán las chapas hácia la parte superior hasta que se consiga por tanteos que la línea AB sea respecto de otra línea DE elegida de antemano la parte que indique la relacion. De todos modos, bueno es comprobar de esta manera el compás antes de hacer uso de él ó cuando se compra; y el mismo procedimiento puede adoptarse para el empleo de cualquiera otra relacion distinta de las que lleva señaladas el compás.

532. Una vez obtenida la copia por el empleo del compás de reduccion, se hallará la relacion de su superficie con la del original por la de los cuadrados de los lados homólogos; y recíprocamente, dada la relacion de las superficies, si estas tienen raíz exacta, tomando por unidad la del original, se hallarán estas raices y se tendrá la relacion de los lados para proceder á ejecutar la copia; bien se halle ó no marcada esta relacion en el compás segun hemos manifestado antes.

533. Hay otro instrumento llamado *compás de proporcion* que acompaña generalmente á los estuches de matemáticas, y del cual no nos ocupamos por no hacerse hoy ningun uso de él.

534. **Pantógrafos**.—Estos instrumentos sirven para trazar ó reproducir toda clase de dibujos, segun lo indica su etimología griega. La reproduccion puede obtenerse en igual, menor ó mayor tamaño que el original, y en la relacion que se desee, valiéndose de los movimientos continuados de que son susceptibles estos aparatos, y en virtud de los principios en que se fundan. Estos son siempre invariables, por lo que su teoría es siempre la misma; pero las diversas disposiciones de que son

susceptibles, relativas á su construccion, dan lugar á otras tantas variedades, de las cuales vamos á ocuparnos.

535. **Pantógrafo de Gavard.—Teoría en que se funda la construccion del instrumento.**—Si tenemos una recta PC (fig. 232; lámina 21), y por dos de sus puntos A′ y C se trazan las paralelas A′C′ y CK de modo que se tenga la proporcion

$$PA' : PC :: A'C' : CK,$$

los tres puntos P, C′ y K estarán en línea recta.

En efecto, tirando la PK, si el extremo de la paralela trazada por A′, cuya longitud es dada, no cayese en la PK como en C′, caería fuera tal como en C″ ó en C‴, y entonces los triángulos semejantes PA′C′ y PCK darían

$$PA' : PC :: A'C' : CK;$$

pero por hipótesis se tiene

$$PA' : PC :: A'C'' \text{ ó } A'C''' : CK:$$

de donde

$$A'C' = A'C'' \text{ ó } A'C''',$$

lo que es absurdo. Vemos, pues, que los puntos P′, C′ y K estarán en línea recta, y que las rectas PC′ y PK guardarán la razon de las PA′ y PC y de las A′C′ y CK

Si suponemos ahora que estando fija en el plano la recta PC, las CK y A′C′ se mueven conservándose siempre paralelas, en una cualquiera de sus posiciones estarán representadas por las CK′ y Ac, que formarán un mismo ángulo m con las CK y A′C′; los puntos K y C′ describirán los arcos KK′ y C′c que los miden, verificándose igualmente que los puntos P, c y K′ estarán tambien en línea recta, y se tendrán las dos proporciones

$$PA' : PC :: PC' : PK;$$
$$PA' : PC :: Pc : PK';$$

de donde

$$PC' : PK :: Pc : PK':$$

y suponiendo trazadas las cuerdas KK′ y C′c, los triángulos PKK′ y PC′c, que tienen comun el ángulo en P y proporcionales los lados que le forman, serán semejantes (Geom. Teor. 59); lo que nos dice que las cuerdas KK′ y C′c son paralelas y están en la misma relacion que las PC y PA′ ó que las CK y A′C′. Tambien los arcos correspondientes á estas cuerdas son proporcionales y guardan la misma razon que ellas, porque perteciendo á un mismo ángulo m son entre sí como sus rádios CK y A′C′, y por lo tanto, como sus cuerdas KK′ y C′c.

536. Si suponemos ahora que estando fijo el punto P (fig. 233; lámina 21), y no variando la inclinacion de las rectas CK y A′C′ respecto de la PC, se mueve todo el triángulo PCK alrededor de dicho punto P, en una nueva posicion Pck, el ángulo c será igual al C, y el m que forman las PC y Pc será el mismo que el de las PK y Pk; los puntos P, c' y k se conservarán en línea recta como lo estaban los P, C′ y K; y del mismo modo que antes los puntos C′ y K describirán arcos C′c' y Kk, que serán entre sí como las cuerdas y como las distancias PA′ y PC ó las A′C′ y CK, y además serán respectivamente iguales á los arcos A′a' y Cc.

537. En ambos casos, cuando no se hace uso más que de uno de los dos movimientos acabados de indicar, resulta que los puntos K y C′ describen arcos de círculo; pero se concibe que si á la vez se hiciese uso de los dos movimientos, es decir, si al mismo tiempo que el triángulo PCK (fig 234; lám. 21) gira alrededor del punto P, se hace tambien girar á las dos rectas CK y A′C′ alrededor de los puntos C y A′, obligando á pasar al punto K por una recta dada KS se podrá entonces obtener por medio del punto C′ una recta C′c' que guarde con la anterior la relacion de las PA′ y PC ó de las A′C′ y CK.

En efecto, sea el triángulo PCK, y supongamos que en virtud de haber obligado al punto K á seguir la direccion rectilínea KS, la nueva posicion de dicho triángulo esté representada por el Pck, habiendo recorrido el punto C el arco Cc, y habiendo tomado una nueva inclinacion las paralelas ck y $a'c'$, que representan las CK y A′C′, respecto de la Pc, la cual representa tambien ahora á la PC, de modo que el ángulo m' sea diferente de m: es evidente que un punto cualquiera k de la direccion KS se hallará determinado por la interseccion de esta recta con el arco de círculo trazado desde el punto c, que entonces indique la posicion del C, con un rádio ck igual á CK; y por la misma razon el punto c' que representará la nueva posicion del C′, y que debe estar en línea recta con los P y k á causa del paralelismo constante de las CK y A′C′, se hallará determinado por la interseccion de la paralela $a'c'$, tirada á la ck por el punto a', con la recta Pk que se puede imaginar trazada por los puntos P y k, ó bien por la interseccion de esta misma recta con el arco de círculo trazado desde el punto a' con un rádio $a'c'$ = A′C′. Concibiendo trazada ahora la recta C′c', ésta será el camino recorrido por el punto C′ mientras el punto K recorre el Kk, y la línea C′c' guardará con la Kk la misma relacion que la PA′ con la PC ó que la A′C′ con la CK. Como además la línea C′c' es paralela á la Kk, y los puntos K y C′ han caminado en el mismo sentido, estando las líneas Kk y C′c' trazadas por consiguiente en una misma region del plano con respecto á la PK en su posicion primitiva, resulta que si suponemos que el punto K recorre el contorno de un polígono trazado en un plano, pasando primero por AB (fig. 235; lámina 21), despues por BC, y así sucesivamente hasta llegar al punto de partida A, y concebimos además que el punto C′ deje una impresion ó huella por el camino por donde vaya pasando sobre una hoja de papel blanco, dicho punto trazará primero la *ab*, despues la *bc*, así sucesivamente, hasta llegar al punto de partida *a* cuando el K haya llegado al A. Entonces como AB y *ab*, BC y *bc*... resultan paralelas y dirigidas en el mismo sentido y en la misma relacion, los polígonos *abcde* y ABCDE tendrán sus ángulos iguales (Geom. Teor. 11.—1.º), y sus lados proporcionales, y por lo mismo serán semejantes (Geom. 41), guardando los lados de la copia *abcde* con los del original ABCDE la relacion que nos habíamos propuesto.

Considerando por otra parte á una línea curva ó tortuosa como compuesta de elementos de rectas infinitamente pequeñas, se concibe que al recorrer el punto K en el original una línea de esta clase, se reproducirá en la copia su correspondiente; siendo fácil, por lo tanto, copiar en una relacion dada toda clase de dibujos, como mapas ó cartas geográficas, planos topográficos, paisajes, adornos...

538. El triángulo PCK (fig. 234; lám. 21) con la paralela A′C′ á la base CK constituye por consiguiente la parte esencial del instrumento llamado *pantógrafo*, que segun hemos dicho al principio y acabamos de manifestar, sirve para copiar un dibujo cualquiera en una relacion determinada á arbitrio, y el cual está dispuesto de manera que puede llenar las condiciones á que hemos tenido que suponerle sujeto, para lograr la reproduccion de un dibujo dado. Nos ocuparemos, por lo tanto, de esta disposicion, refiriéndonos primero á las líneas matemáticas que componen el instrumento, ó como se acostumbra á decir, á sus ejes principales, para pasar despues á la descripcion de las partes materiales de que consta.

Sea como antes el triángulo PCK (fig. 236; lám. 22) con la paralela A′C′: se conseguirá que esta línea se mantenga siempre paralela á la CK en todos los movimientos del instrumento, haciendo que forme parte del lado A′B′ de un paralelógramo A′B′CD, para lo cual se trazará por un punto cualquiera D elegido entre C y K una recta DB paralela á AC, se prolongará la A′C′ hasta B′, y se supondrá que las cuatro rectas PC, CK, DB y A′B′ pueden girar alrededor de los vértices del paralelógramo A′B′DC, pudiendo tomar los ángulos de éste toda clase de magnitudes, y permaneciendo siempre iguales los lados opuestos de dicho paralelógramo. Además, todo el sistema podrá girar alrededor del punto P, que supondremos fijo, y si concebimos que en la prolongacion KM de la CK se toma un punto M para dirigir el movimiento haciendo que el punto K pase por las líneas del original, el C′ reproducirá (537) las homólogas de la copia, en la relacion que se hallen las PA′ y PC, ó bien las A′C′ y CK, la cual puede ser cualquiera, tal como la $\frac{m}{n}$; y para conseguirlo, supondremos que la paralela A′B′ puede moverse además paralelamente á sí misma y por consiguiente á la CK á lo largo de las rectas AC y BD, así como que el punto C′ pueda tambien correr á lo largo de la recta A′B′. Si admitimos bajo esta hipótesis, que es $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, la PA′ será la mitad de CP y la A′C′ la mitad de CK; y para $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$, la paralela A′B′ habrá tomado una posicion A″B″, tál que PA″ será la cuarta parte de PC y por consiguiente A″C″ la cuarta parte tambien de CK, y así sucesivamente Donde vemos que tomando á partir del punto P, en el cual podremos suponer que se halla el *cero*, la cuarta parte, la mitad... de PC, y numerando las divisiones en la PC así como en su paralela BD, que es igual en longitud á la parte PC de la AC, y tomando tambien en la A′B′ á partir del punto A′ la cuarta parte, la mitad.... de la CK, cuyo extremo K se marca tambien con el *cero*, cuando se trate de disponer el pantógrafo en una relacion dada, por ejemplo, en la de $\frac{1}{2}$, no sólo la regla A′B′ se dispondrá de modo que sus extrèmos se hallen en las divisiones $\frac{1}{2}$ de las PC y BD, sino que tambien el punto C′ se ha de hallar en la division $\frac{1}{2}$ de la recta A′B′; division que indica la mitad de la CK Si la relacion fuese la de $\frac{1}{4}$, la regla A′B′ tendría sus extremos en las divisiones $\frac{1}{4}$ de las PC y BD en su nueva posicion A″B″, así como tambien el punto C′ se hallaría en la nueva posicion C″ correspondiente á la division $\frac{1}{4}$ de la A″B″, que representa la cuarta parte de la CK; y así con las demás divisiones que pueden establecerse.

539. La figura 237 (lám. 22) manifiesta con las líneas llenas una primera posicion del pantógrafo, y con las líneas de trazos un segunda posicion, determinada como se ve en la figura del modo que hemos dicho para la 234 (537) (lám. 21), y obtenida al querer hacer recorrer al punto K la línea recta arbitraria KS. El punto C′ habrá recorrido la C′c′.

540. **Descripcion del pantógrafo de Gavard** —Explicado este instrumento en sus líneas esenciales, pasamos ya á describirle tal cual es, representándole en gran tamaño en la fig. 238 (lám. 23), y advirtiendo que para la mayor inteligencia hemos puesto en todas las figuras empleadas hasta aquí las letras que lleva grabadas el mismo instrumento; y en lo que vamos á decir conviene tener presentes al mismo tiempo las figuras 236 y 238 (láms 22 y 23) para la mejor inteligencia

El pantógrafo se compone por lo tanto de dos reglas de metal AC y BD, unidas á otra CK por medio de juegos de charnela *c*, *c′*, los cuales son ejes cilíndricos verticales de acero que en su parte inferior *q* llevan un taladro horizontal donde se introduce una palanca en que termina la pieza del destornillador, para armar y desarmar el instrumento y apretar más ó ménos las reglas; terminando por su parte superior en una rosca, á la que se atornilla una tuerca h en forma de cabeza de tornillo: una cuarta regla A'B' igual en longitud á la parte CD de la CK va unida por sus extremos, y tambien por medio de juegos de charnela c'' y c''' como los anteriores, á dos cajas de metal A' y B', las cuales pueden correr á lo largo de las reglas AC y BD cuando se aflojan los tornillos t y t', ó formar cuerpo con dichas reglas apretándolos: logrando de este modo colocar la regla A'B' paralelamente á la CD y á la distancia que convenga, constituyendo el paralelógramo A'B'DC de ángulos variables. A lo largo de la parte PA corre otra caja P con su correspondiente tornillo t'' por la parte exterior del instrumento para fijarla á la regla, y con un taladro cilíndrico por la interior donde se introduce un eje ee' de acero, que va unido á un disco de metal n' á manera de cabeza de tornillo, y que sirve, como todos los discos de que hablemos, para facilitar los movimientos de las piezas á que corresponden. El eje tiene en su extremo e' una rosca que se atornilla en la tuerca que lleva una masa de hierro H de la forma que se ve en la figura, y que tiene por objeto hacer que permanezca fijo dicho eje, alrededor del cual se ha de verificar el movimiento de rotacion de todo el instrumento. Dicha masa de hierro tiene en su parte inferior cinco puntas pequeñas de acero para clavarlas en la mesa donde se establece el pantógrafo y asegurar mejor la posicion del punto de rotacion. A lo largo de dicho eje ee' corre una pieza cilíndrica n, provista de otro disco que ajusta exactamente al eje, produciendo mucho rozamiento, y que encaja por su parte inferior en la caja P para la mayor fijeza de dicho eje. Otra caja K corre á lo largo de la parte DM, teniendo por la parte interior su tornillo t''' para fijarla á la regla, y por la exterior lleva un taladro cilíndrico por donde se introduce un cilindro hueco mm', provisto de un disco que se asegura por medio del tornillo t^{IV}. Dentro de este cilindro corre produciendo bastante rozamiento un calcador de acero aa', cilíndrico tambien.

A lo largo de la regla A'B' corre una tercera caja C', con su tornillo t^{V} por la parte exterior para fijarla á la regla, y con un taladro cilíndrico por la parte interior por donde pasa una pieza vv', que es un cilindro hueco provisto de un disco n'' que encaja por su parte inferior en el taladro de la caja C', y que se puede asegurar á esta por el tornillo t^{VI}. Un lapicero de la forma de un cañon hueco de metal zz', provisto de un lápiz en su parte inferior, corre á lo largo de la pieza vv', con la cual se ajusta de modo que en su movimiento se produzca mucho rozamiento. En la parte superior zv del lapicero va una pieza de la forma que se ve en la figura, la cual se ajusta á él por medio del tornillo t^{VII}, y mantiene en posicion vertical á dos poleas p, p'. Un anillo con su correspondiente tornillo t^{VIII} puede correr á lo largo de la parte zv del lapicero y fijarse á éste colocándole más bajo que la polea p, y un hilo sujeto por uno de sus extremos á dicho anillo pasa por las poleas verticales p y p' y por la horizontal p'' colocada sobre la cabeza del eje del juego de charnela c''', pasando despues por un anillo b situado sobre la cabeza del eje del juego de charnela c', y atándose por el otro extremo en la pieza de báscula d, que puede girar en un plano vertical alrededor de un eje horizontal x en el sentido que indica la flecha, con el objeto de dar más tension al hilo. La pieza d y su eje de giro están dispuestos sobre una caja s, que puede correr á lo largo de la parte KM de la regla CM. Esta caja va abierta por un lado para separarla con facilidad de dicha regla, y está forrada por su interior de bayeta para hacer más suave el rozamiento y más íntimo el contacto. Sobre la cabeza del eje del juego de charnela c'' va otra polea p''', cuyo uso veremos más adelante. Por último, para facilitar y suavizar las dos clases de movimiento de que es susceptible este instrumento, como hemos dicho, se apoyan las reglas en otras cuatro cajas s', s'', s''' y s^{IV}, abiertas por un lado como la s que hemos descrito, y que llevan en su parte inferior unas armaduras de hierro que terminan en unas ruedas de marfil r, r', r'' y r'''. Cada una de las ruedas como la r puede girar alrededor de su eje horizontal; y la armadura f en que este eje se apoya, alrededor de un eje vertical, y resulta que todas las ruedas pueden moverse como se necesita en todos sentidos en virtud de los dos movimientos combinados de que es susceptible el aparato. Dichas cuatro cajas se colocan en las partes de las reglas que se indican en la figura, corriéndolas más ó ménos segun convenga á lo largo de estas para que hagan el mejor servicio. En la caja de madera donde va encerrado el instrumento suele haber hasta siete ú ocho de estas cajas de metal con sus correspondientes ruedas.

La parte zv' del lapicero, que como hemos dicho es un cilindro hueco, está cubierta con un tapon y de metal que termina en una espiga en la cual se colocan rodajas de plomo, que acompañan tambien al instrumento, con el objeto de hacer que con el peso oprima el lápiz contra el papel estando siempre ambos en contacto; y cuando hay necesidad de poner muchos pesos se quita el tapon y, y se introduce dentro del cilindro zv' una varilla de hierro L que concluye en un mango de madera, y en la cual se ha colocado antes el suficiente número de rodajas de plomo. Dicha varilla, que sacándola más ó ménos del tubo permite colocar mayor ó menor número de rodajas, va aguzada en su extremo lo necesario para que sirva al mismo tiempo de destornillador para armar y desarmar las distintas piezas de que se compone el instrumento, introduciéndola en el taladro q que hemos dicho lleva el extremo inferior del eje de cada juego de charnela.

La longitud de la regla BD es igual á la parte de la CA que hay desde su extremo C hasta el *cero*. A partir de este punto en la CA, del extremo B en la BD, y del A′ en la A′B′, se ven marcadas en las tres reglas las mismas divisiones $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{12}$.....

En el extremo M de la regla CM hay un taladro, en el cual se introduce un mango que lleva en su extremo una esfera de marfil, que es por donde se coge el instrumento con la mano derecha para dirigir el movimiento del puntero aa'; y en un tornillo t^{IX} sirve para asegurar á la regla el mango de la esfera, la cual debe estar á la misma distancia de las reglas que las ruedas. Tambien suele terminar la regla CM en un manubrio que puede girar alrededor de un eje, y en cuyo extremo se puede colocar la esfera del mismo modo que hemos dicho. Por medio del dedo índice de la mano izquierda se tira del hilo como se indica en la figura, cuando se quiere levantar el lapicero para que no señale en el papel las líneas que no deban salir trazadas.

Las cinco cajas P, A′, C′, B′ y K llevan unos rebajos ó chaflanes en los cantos superiores que han de adaptarse á las líneas divisorias de las reglas, logrando mejor la coincidencia en virtud de hallarse aquellos reducidos á aristas vivas como se indica en la figura.

Para que todos los movimientos del pantógrafo sean suaves y los rozamientos no los entorpezcan, debe tenerse mucho cuidado con que no falte el aceite á los ejes, y debe ponerse el mayor esmero en la mejor conservacion de todas las partes que le componen.

En la caja donde se guarda el instrumento suele hallarse tambien un *compás de varas*, que consiste en una regla de metal con dos cajas provistas cada una de una punta de acero. Una de las cajas está fija á la regla y la otra corre á lo largo de ella, pudiendo fijarse donde convenga por medio de un tornillo de presion, y tomar así entre las puntas la longitud que ha de tener el rádio, y para cuando ésta exceda á la de la regla, acompaña á esta última otra, que se llama *alargadera*, la cual se empalma con la primera y se sujeta por otro tornillo.

Las letras mayúsculas de la figura son las que van grabadas en el mismo instrumento, excepto la M y la H. Hay pantógrafos de menor tamaño, tambien del mismo autor, que tienen las cuatro reglas de ébano y son más fáciles de manejar por su menor peso; pero no son tan exactos.

541. **Disposicion del pantógrafo en estacion.**—La primera operacion es saber poner el instrumento en estacion, sacándole de la caja donde se halla colocado en la disposicion que se ve en la figura 239 (lámina 22), sin alterarla, y armándole como se presenta en la figura 238 (lám. 23). Para esto se procederá de la manera siguiente:

1.º Se cogen con la mano derecha las dos reglas que llevan las cajas P y K, se levanta el instrumento, y se desliza la mano izquierda por debajo de las reglas hasta llegar á las extremidades B y B′, colocando despues el pantógrafo en la misma disposicion de la figura 239 (lám. 22) sobre una mesa grande y cuya superficie esté bien lisa y nivelada.

2.º Se toma despues con la mano derecha la regla que lleva la caja K, y con la izquierda la que lleva la caja P, y se separan las dos reglas hasta que el eje C se halle en línea recta con P y K; se hace entrar despues el extremo B de la regla BD en la caja B′ dando á esta un cuarto de conversion de modo que el tornillo de presion quede fuera de la regla, á la derecha ó en la parte opuesta de como se halla en la figura, para que el extremo B de la regla BD entre por la parte a de la caja B', quedando las cuatro reglas en la disposicion que presentan en la fig. 238 (lám. 23) formando un paralelógramo.

3.° Se colocan despues las cuatro cajas que llevan las ruedas de marfil, poniendo una en el extremo A de la regla AC, otra cerca del eje C, la tercera en el extremo B de la regla BD, y la cuarta cerca de la caja K del calcador, con el objeto de poder colocar la esfera de marfil á la misma altura, poniéndola despues hácia la mitad de la regla CD para que no estorbe durante el curso de las operaciones.

4.° Se atornilla el extremo inferior del eje ee' en el de la masa de hierro H, y sacando la pieza n se levanta el instrumento para introducir dicho eje en el taladro de la caja P, volviendo á colocar despues la pieza n. Se dispone por último el lapicero en la caja C', y el calcador en la K.

5.° El hilo se coloca en la disposicion que se vé en la figura, segun ya hemos explicado en la descripcion del instrumento

542. Una vez que está puesto en estacion, para usarle se fijará la relacion que ha de guardar la copia con el original, y supongamos que sea la de $\frac{1}{2}$. Se moverá la regla A'B' paralelamente á sí misma hasta que los bordes de las cajas A' y B' coincidan exactamente con las divisiones $\frac{1}{2}$ de las reglas AC y BD. Se correrá despues la caja C' á lo largo de la regla A'B' hasta que coincida con la division $\frac{1}{2}$, así como las cajas P y K se harán coincidir exactamente con los *ceros* de las reglas AC y CD, apretando despues fuertemente los tornillos de las cinco cajas: hecho todo lo cual, el instrumento se hallará armado y en disposicion de usarse; pero antes debe verificarse y corregirse, determinando tambien la posicion que han de tener en la mesa donde se halla el pantógrafo, el dibujo original y el papel blanco que ha de recibir la copia.

Para la colocacion del original y el papel de la copia, supongamos primero que el instrumento es exacto y que se ha montado de manera que llene exactamente las condiciones que se requieren para la fiel reproduccion del original. Despues de puesto el pantógrafo en la posicion que se vé en la figura 238 (lám. 23), de manera que el ángulo ACK sea agudo, á fin de evitar que en el movimiento corran los puntos K y C' distancias que hagan que las ruedas puedan salir de la mesa en que aquel se halla establecido, y en la cual se coloca desde luego en la parte más conveniente: se situará el papel blanco de la copia debajo del lapicero asegurándole con cola de boca ó con chinches, y en el cual se habrá trazado primero un rectángulo *abcd* (fig. 240; lám. 22) cuyos lados guarden con los del ABCD que representa el marco del original, la relacion en que se ha de copiar éste, que supongamos sea la de $\frac{1}{2}$. Se moverá el pantógrafo hasta que la punta del lápiz se halle exactamente sobre el vértice a, y entonces se colocará el original debajo del calcador de manera que estando á ojo próximamente paralelos los lados de ambos rectángulos, la punta del calcador se halle sobre el vértice correspondiente A en el que se clavará una chinche. Para rectificar el paralelismo, se moverá el pantógrafo hasta que el lápiz venga á coincidir con el punto b, y dejando el instrumento en esta posicion, se hará girar al original alrededor del punto A que está fijo con la chinche, hasta que el punto B venga á colocarse exactamente debajo de la punta del calcador; cuya coincidencia no podrá ménos de verificarse, en atencion á la hipótesis que hemos hecho de la exactitud del instrumento: presentándose despues de esta operacion los dos rectángulos en la disposicion que hace ver la figura de la lámina 23, teniendo todos sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido. Se concibe que haciendo ahora seguir al calcador las direcciones BC, CD y DA, el lápiz irá trazando las bc, cd y da, coincidiendo el lapicero con cada vértice cuando el calcador esté sobre el correspondiente del original, hasta venir á terminar el lápiz en el punto a de partida, cerrando un cuadrilátero cuyos lados serán tambien perpendiculares entre sí como los del original, y por lo tanto será un rectángulo en la relacion con que aquel se pedia.

Tambien se pudiera empezar por fijar desde luego el original sobre la mesa, y colocar despues el papel de la copia hasta que se halle en la disposicion explicada.

543. En lo que hemos dicho, hemos supuesto que durante los movimientos del pantógrafo al recorrer el calcador todo el rectángulo ABCD, las ruedas no han salido de la mesa; cuyo tanteo debe hacerse siempre, y además se procura que el original y el papel de la copia puedan estar colocados con desahogo, es decir, sin que uno se sobreponga al otro; pero si por el mucho tamaño del original no se pudieran llenar estas condiciones, para obtener la copia haciendo una sola estacion, convendrá dividirle en dos rectángulos por medio de la recta EF ó de la GH, ó en cuatro por medio de ambas líneas; y si es preciso, en mayor número, con el objeto de verificar la copia valiéndose de hacer varias estaciones, y entonces ya se podrá sobreponer parte de la copia al original con tal que quede descubierto en este el rectángulo correspondiente á cada estacion. Se comprende que habrá necesidad de mover el original y la copia al pasar de una estacion á otra, repitiendo la operacion explicada ya para la colocacion de ambos, y valiéndose de los lados del rectángulo de la estacion anterior como líneas de comparacion ó de referencia para la estacion siguiente, á fin de que todas las partes de la copia queden relacionadas del mismo modo que lo estén en el original, en lo que deberá ponerse el mayor cuidado. Conforme se vaya adelantando en el trabajo, se podrán ir arrollando ambos dibujos en la parte próxima á la masa de hierro H.

544. **Verificaciones y correcciones.**—Las causas de imperfeccion á que este instrumento está sujeto, y las verificaciones y correcciones á que da lugar son las siguientes:

1.ª Que estando bien establecidas las divisiones de las tres reglas, y exactamente colocadas las cajas A′, C′ y B′ (fig. 238; lám. 23) en la relacion elegida de $\frac{1}{2}$ por ejemplo, los tres puntos determinados por los ceros de las reglas AC y CK y la punta del lápiz no se hallen en línea recta: lo que se conocerá en que adaptando á ellos el canto de una regla ó un hilo tirante no coincide exactamente. Entonces el error puede provenir de que la punta del lápiz no sea la proyeccion del eje del lapicero por estar mal afilado, lo que se conocerá si haciéndole girar sobre sí mismo alrededor de su eje traza la punta una pequeña circunferencia en lugar de señalar un solo punto, en cuyo caso se procederá á afilarle de nuevo. Si á pesar de estar bien afilado el lápiz, su punta no se halla en línea recta con los *ceros*, es prueba de que el error está en las divisiones de la regla A′B′, por lo que habrá que correr á lo largo de ésta la caja C′ en el sentido conveniente verificando la correccion por tanteos.

2.ª Que estando el lápiz en línea recta con los *ceros*, no resulte que la punta del lápiz termine en el punto *b* (fig. 240; lám. 22) cuando se halle el calcador en B, sino que se obtenga una línea $ab' > ab$ ó $ab'' > ab$. El primer caso ocurrirá cuando manteniéndose paralela la regla A′B′ á la CK (fig. 238; lám. 23) estén mal dispuestas las divisiones de las reglas AC y BD en el mismo sentido; es decir, que las partes OA′ y BB′ debiendo ser las mitades de las OC y BD, sean menores que estas mitades en una misma cantidad; en cuyo caso se aflojarán los tornillos *t* y *t′*, y se aproximará la regla A′B′ á la CK paralelamente á sí misma, buscando por tanteos la nueva posicion que debe ocupar, hasta que se logre que el lápiz venga á coincidir con el punto *b* (fig. 240; lám. 22) En el caso de ser $ab'' > ab$ se procederá del modo contrario aproximando la regla A′B′ hácia el punto P. En ambos casos la caja C′ se correrá del lado conveniente para que la punta del lápiz se halle en su nueva posicion en línea recta con los *ceros*.

3.ª Así como hemos visto que existiendo el paralelismo de las reglas CK y A′B′ (figs. 328 y 240; láms. 23 y 22) la diferencia de longitud del lado *ab* proviene de la falta de exactitud en un mismo sentido de las divisiones de las reglas PC y BD, aunque se verifique la condicion de estar en línea recta los *ceros* y la punta del lápiz, cuando al seguir el calcador la direccion de la perpendicular BC á la AB del original no resultase la *bc* perpendicular á la *ab* en la copia y se presentase en una posicion oblícua *bc′*, este error de perpendicularidad es debido á la falta de paralelismo de las reglas CK y A′B′. En efecto, esta circunstancia tiene lugar cuando las divisiones de las reglas PC y BD son erróneas en sentido contrario, una por exceso y otra por defecto, como se ve en la fig. 241 (lám. 22) en la cual siendo la PA″ mayor que la mitad PA′ de la regla PC, la B″B‴ es menor que la mitad de B‴D, que es la posicion que toma la BD cuando los extremos de la regla A′B′ se aseguran en los puntos de igual division A″ y B″, obteniéndose un cuadrilátero cualquiera A″B″DC en vez del paralelógramo A'B'DC, sin que por esto dejen de estar en línea recta los tres puntos P, C' y K que de antemano se habrán dispuesto así al hacer la primera correccion; por lo que habrá que colocar por tanteos la regla A''B'' paralela á la CK hasta que tome la posicion A'B'. Esta tercera correccion servirá por lo tanto tambien para conocer si efectivamente estaba ó no mal dividida la regla A'B', segun se ha manifestado en la primera correccion, por la falta de hallarse en linea recta los tres puntos P, C' y K.

Una vez verificado y corregido el pantógrafo, llenando todas las condiciones explicadas, y dispuesto como se ha dicho, se hallará en estacion y orientado y por consiguiente en estado de servirse de él.

Cuidando de que se verifiquen las mencionadas condiciones, es fácil concebir que se podrá adoptar otra relacion cualquiera distinta de las que marcan las divisiones de la regla, arreglando el pantógrafo por tanteos.

545. **Usos del pantógrafo.**—La cuestion de servirse de este instrumento es bien sencilla, pues se reduce á hacer pasar el calcador por todas las líneas del original, las que irá reproduciendo fielmente y con exactitud el lápiz en el papel dispuesto para la copia. El pantógrafo sustituye con la mayor ventaja á cuantos procedimientos hemos explicado anteriormente, determinando con toda la facilidad y prontitud que pueda desearse los contornos del dibujo, así como sus detalles, por complicados que sean. Á pesar de la diferente opinion de algunos autores, es el mejor de los instrumentos de que se puede hacer uso en esta clase de operaciones; pero debe tenerse presente que es necesario tener mucha práctica en su manejo si los resultados han de ser satisfactorios, y se debe poseer con el mismo objeto conocimientos de dibujo, sirviendo realmente el pantógrafo para ahorrar un tiempo considerable al dibujante en la copia y reduccion de los planos.

546. Cuando se trate de la reproduccion de líneas rectas, convendrá guiar el calcador por el borde de una regla ó escuadra delgada colocada en contacto con aquellas; y se cuidará de separar el lápiz del papel de la copia, levantándole por medio del hilo que atraviesa las poleas, cuando no se quiera que alguna línea del original resulte en la copia, ó cuando al pasar el calcador de un punto á otro se quiera evitar el trazado de líneas inútiles en aquella. Los arcos de círculo deberán hacerse ó rectificarse con el compás.

547. **Aplicacion del pantógrafo al grabado.**—Los grabadores sacan tambien mucho partido de este instrumento para el traslado del original á la piedra ó plancha de acero donde han de grabarle en una relacion dada. Se sabe, en efecto, que el grabador calca primero en papel vegetal el original que supondremos sea el cuadrilátero de la figura 242 (lám. 22), y despues volviendo el papel del revés pone contra la piedra el calco pegado por sus extremos, y entre este y aquella el papel manchado; y pasando despues el puntero por el calco que se trasparenta, queda mar-

cado el dibujo en la piedra en la forma que representa la figura 243 (lámina 22), que es la figura simétrica del original. De este modo, al hacer la estampacion, la figura 243 (lám. 22) que se halla trazada en la piedra, saldrá en el papel de la estampacion en la disposicion que tiene la 242, es decir, como está en el original.

Para hacer aplicacion del pantógrafo al grabado, acompaña al instrumento otro calcador que es un cilindro hueco de metal, del mismo diámetro que el lapicero, terminando por su parte inferior en una punta de acero y por la superior en un tapon que se puede quitar como el de aquel para introducir la varilla con las rodajas de plomo, y que se dispone en la caja C′ (fig. 238; lám. 23) colocando en él la anilla que lleva el hilo para levantarle cuando sea necesario. Estando dispuestos los dos calcadores en las cajas K y C′, observaremos que si se calca aparte primero el original en papel vegetal y se invierte despues este para colocarle debajo del calcador dispuesto en K como se haría sobre la piedra, é indica la figura 243 (lám. 22), y se coloca además en la caja C′ el otro calcador y debajo de éste la plancha de acero ó la piedra litográfica, con el papel manchado encima pegado por sus extremos, cuando se haga pasar el calcador K por las líneas del dibujo del papel vegetal, el otro calcador que va en la caja C′ irá pasando sobre el papel manchado y reproduciendo en la piedra ó lámina de acero la reducida que representa la figura 244 (lámina 22) en la relacion que se desee, y no habrá más que proceder despues al grabado.

Las piedras litográficas tienen despues de preparadas un color ligeramente rojo y las láminas de acero un color casi negro, por lo que el papel manchado deberá ser negro para las primeras y encarnado para las segundas.

Es fácil disponer un aparato debajo de la mesa, y dejar vacío en ésta un espacio rectangular para hacer que la superficie de la piedra litográfica, que suele tener mucho espesor, quede á nivel de la mesa, ó hacer que las cajas de metal que llevan las ruedas de marfil tengan la altura conveniente. La lámina de acero no lo necesita por ser muy delgada.

548. Se podrá evitar sacar el calco del original en papel vegetal, colocando sobre la mesa un aparato para sostener en posicion horizontal la piedra litográfica ó la lámina de cobre ó acero á la altura conveniente, de manera que la cara preparada mire hácia la mesa, y pegado en ella el papel manchado; el calcador de la caja C′ (fig. 238; lám. 23) se coloca invertido de modo que la punta de acero quede en la parte superior, y colocando el original debajo del calcador de la caja K, se podrá obtener desde luego marcada en la piedra ó lámina de cobre ó acero y reducida en la relacion dada la figura 244 (lám. 22) simétrica de la 242. En este caso se aproxima á la piedra por medio del hilo el calcador que va en la caja C′, de modo que ejerza sobre ella la presion necesaria dando al hilo la tension suficiente. Por último, cuando el grabado ha de ser valiéndose del agua fuerte, se prepara primero la lámina con un barniz.

549. **Observaciones generales acerca del pantógrafo de Gavard.—Disposicion de las distintas partes del instrumento para facilitar los diferentes casos de copia y reduccion que pueden presentarse.**—En cuanto llevamos expuesto hasta aquí hemos supuesto que el eje de rotacion se hallaba en la caja P y el lapicero en la C′ (figura 238; lám 23), y en este caso se pueden obtener las copias cuyos lados sean mayores ó menores que la mitad de los del original, pero siempre menores que los de este Basta solamente colocar el eje de rotacion en la caja C′ y el lapicero en la P, como se observa en las figuras 245 y 246 (láms. 22 y 24), para poder obtener la copia de modo que sus lados sean iguales á los del original, ó mayores.

En efecto, supongamos que se tenga como siempre el sistema de las tres rectas PC, A′C′ y CK (fig. 247; lám. 24), de modo que las A′C′ y CK sean siempre paralelas y que se tenga la proporcion

$$\mathrm{PC} : \mathrm{PA'} :: \mathrm{PK} : \mathrm{PC'} \qquad [10];$$

de donde resultará que los tres puntos P, C′ y K estarán en línea recta.

Si en esta proporcion aplicamos el principio conocido (Aritmética 172), tendremos

$$\mathrm{PC} - \mathrm{PA'} : \mathrm{PA'} :: \mathrm{PK} - \mathrm{PC'} : \mathrm{PC'},$$

ó lo que es lo mismo,

$$\mathrm{CA'} : \mathrm{PA'} :: \mathrm{KC'} : \mathrm{PC'} \qquad [11].$$

Si suponemos ahora que estando fija en el plano la línea A′C′, la PC gira alrededor del punto A′ conservándose la CK paralela á A′C′, los puntos P y C describirán los arcos de círculo PP′ y C*c*, y la línea CK tomará una posicion *c*K′ paralela á la A C′ y por consiguiente á la CK; de donde resultará que el ángulo PCK habrá cambiado y se habrá convertido en el P′*c*K′ mayor que el PCK; y en esta nueva posicion del sistema, el triángulo P′*c*K′ dará

$$\mathrm{P'}c : \mathrm{P'A'} :: \mathrm{P'K'} : \mathrm{P'C'} \qquad [12];$$

de donde

$$\mathrm{P'}c - \mathrm{P'A'} : \mathrm{P'A'} :: \mathrm{P'K'} - \mathrm{P'C'} : \mathrm{P'C'},$$

ó lo que es lo mismo

$$\mathrm{A'}c : \mathrm{P'A'} :: \mathrm{C'K'} : \mathrm{P'C'} \qquad [13].$$

De las proporciones [11] y [13] resulta esta otra

$$\mathrm{KC'} : \mathrm{C'K'} :: \mathrm{PC'} : \mathrm{P'C'} \qquad [14].$$

Ahora bien, si PA′ fuese la mitad de PC, en cuyo caso se tendría $PA' = CA'$ y $P'A' = A'c$, los triángulos $A'Cc$ y $A'PP'$ serían iguales (Geom. Teor. 15) y $Cc = PP'$; y como la proporcion [14] tendria tambien iguales los antecedentes y los consecuentes, los triángulos $C'KK'$ y $C'PP'$ serían tambien iguales por la misma razon que los anteriores, y tendríamos $KK' = PP'$; de donde se deduce que habiendo supuesto ahora que el eje de rotacion está en C′ y el lapicero en P, cuando el calculador K corra una distancia KK′, el lapicero P correrá otra PP′, igual paralela á la anterior, pero en sentido contrario; pues las rectas KK′ y PP′ se hallan trazadas cada una en distinta region de las dos en que divide al plano la recta PK en su posicion primitiva.

550. Si la distancia PA′ fuese $\frac{1}{3}$ de la PC, como entonces la A′C sería los $\frac{2}{3}$ de la PC, la PA′ sería $\frac{1}{2}$ de la A′C, y la P′A′ $\frac{1}{2}$ de la A′c, y resultaría tambien que $PC' = \frac{C'K}{2}$ y $P'C' = \frac{C'K'}{2}$, de donde se deduciría $PP' = \frac{1}{2}KK'$; luego los lados de la copia serían la mitad de los del original.

Si la PA′ fuese los $\frac{2}{5}$ de la PC, como entonces la A′C sería los $\frac{3}{5}$ de la PC, la PA′ sería los $\frac{2}{3}$ de la A′C, y la P′A′ los $\frac{2}{3}$ de la A′c, y resultaría tambien que $PC' = \frac{2}{3}C'K$ y $P'C' = \frac{2}{3}C'K'$, de donde $PP' = \frac{2}{3}KK'$; luego los lados de la copia serian los $\frac{2}{3}$ de los del original.

551. Cuando PA′ fuese los $\frac{3}{4}$ de la PC, como entonces la A′C sería $\frac{1}{4}$ de la PC, la PA′ seria igual á 3A′C y la P′A′ á 3A′c, y resultaria tambien que $PC' = 3C'K$ y $P'C' = 3C'K'$, de donde $PP' = 3KK'$; luego los lados de la copia serian el triplo de los del original.

Si la PA′ fuese los $\frac{3}{5}$ de la PC, como entonces la A′C sería los $\frac{2}{5}$ de la PC, la PA′ seria los $\frac{3}{2}$ de la A′C, y la P′A′ los $\frac{3}{2}$ de la A′c, y resultaría tambien que $PC' = \frac{3}{2}CK$, y $P'C' = \frac{3}{2}C'K'$, de donde $PP' = \frac{3}{2}KK'$; luego los lados de la copia equivaldrian á vez y media los del original.

552. Conviene observar que en virtud de la proporcion

$$PC : PA' :: CK : A'C' \quad [15],$$

que da tambien el triángulo PCK, en virtud de la paralela A'C' á la base CK, el eje de rotacion que va en la caja C' se ha de colocar siempre en la misma division de la regla A'C' que aquella en que se coloquen las cajas A' y B' con respecto á las reglas AC y BD. En la fig. 245 (lám. 22), estando el borde de la caja C' en la division $\frac{1}{2}$ de la regla A'B', es decir, siendo A'C' la mitad de CK, se hallará el instrumento dispuesto para obtener la copia cuyos lados sean iguales á los del original; y en la figura 246 (lám. 24) se presenta la disposicion del instrumento cuando se quiere obtener una copia cuyos lados sean mayores que los del original.

553. Como lo mismo demostraríamos, cuando se supiera que giraba todo el sistema alrededor de C' (fig. 248; lám. 24) sin cambiar la inclinacion de las paralelas CK y A'C' respecto de la PC, y en el caso en que se hiciese uso de ambos movimientos á un mismo tiempo, como manifiesta la figura 249, y tambien la 250 (lám. 24), en la que se representa con las líneas llenas una primera posicion del pantógrafo y con líneas de trazos otra posicion cualquiera, obtenida al querer hacer marchar al punto K á lo largo de la línea arbitraria KS, resulta que cuando en el pantógrafo se pone el eje de rotacion en una division de la regla A'B' y el lapicero en la caja P, como en las figuras 245 y 246 (láms. 22 y 24) el instrumento se hallará en disposicion de poderse obtener con él las copias en una relacion cualquiera $\frac{m}{n}$, bien sea $m=n$, ó $m<$ ó $>n$; y que en virtud de la dicho los lados de un polígono *abcd* (fig. 251; lám. 24) resultan en la copia paralelos á los del polígono del original ABCD, pero en sentido contrario, como se ve en la figura. Estos polígonos tendrán sus ángulos iguales (Geom. Teor. 11.—2.°) y sus lados proporcionales en la relacion que se desee, por lo que serán semejantes (Geom. 41). Dando al papel de la copia un cuarto de conversion, es decir, suponiendo que *ab* gira alrededor de su punto medio O hasta que *a* vaya á parar á *b*, que señalaremos ahora por a', y *b* á *a*, que representaremos por b', el polígono *abcd* tomará la posicion $a'b'c'd'$ que se presentará á la vista en el mismo sentido que el original ABCD.

En esta segunda manera de usar el pantógrafo se tiene la ventaja del mayor espacio que permite el instrumento para la colocacion del original y del papel de la copia; y como se ve en las figuras 245 y 246 (láminas 22 y 24) el hilo que parte del lapicero, pasa primero en este caso por la polea que va encima del juego de charnela que lleva la caja A' y que es la p''' de la figura 238 (lám. 23), de la cual no se hacía uso en la primera disposicion del pantógrafo.

Despues de todo lo dicho es fácil comprender en este caso la manera de colocar el pantógrafo en estacion, sus verificaciones y correcciones, así como el modo de usarle en la reproduccion de las copias, y en su aplicacion al grabado.

554. De un modo análogo al explicado anteriormente (532) se pasa de la relacion de los lados á la de las superficies, y recíprocamente.

555. **Fórmulas en que se funda la division de las reglas del pantógrafo de Gavard.**—Para obtener las fórmulas que sirven para la division de las reglas del pantógrafo en la primera disposicion relativa á su uso, que es cuando el eje de rotacion está en el punto P (fig. 238; lámina 23) y el lápiz en el punto C′, se determinará en la regla AC la longitud exacta que comprende desde el *cero* hasta el extremo C de dicha regla, así como la de la regla CK, desde el C hasta el *cero*, y llamaremos a y b á las cantidades constantes OC y CO, y x é y á las variables PA′ y A′C′; representando ahora por m y n los números absolutos que indican los valores de las longitudes PC′ y PK, que son las distancias del punto de giro P al lápiz y al calcador: como en todas las posiciones del instrumento la relacion $\frac{m}{n}$ de estas distancias es la misma, por ser siempre igual á las $\frac{PA'}{PC}$ y $\frac{A'C'}{CK}$, tendremos para obtener las variables x é y en funcion de las constantes a y b las dos proporciones siguientes:

$$PA' : PC :: PC' : PK;$$
$$A'C : CK :: PC' : PK;$$

y sustituyendo en ellas por cada línea el valor que hemos asignado, resultará

$$x : a :: m : n;$$
$$y : b :: m : n;$$

de donde se deduce

$$x = a \times \frac{m}{n} \qquad [16];$$

$$y = b \times \frac{m}{n} \qquad [17]$$

556. En la segunda disposicion del pantógrafo, que es cuando el eje de rotacion está en C′ (fig. 245; lám. 22) y el lápiz en P, las letras m y n representarán las distancias PC′ y C′K de dicho eje al lápiz y al calcador, y conservando para las otras líneas la notacion anterior, tendremos en virtud de la paralela A′C′ á la base CK del triángulo PCK, la siguiente proporcion

$$PA' : CA' :: PC' : C'K;$$

de donde (Arit. 171)

$$PA' : PA' + CA' :: PC' : PC' + C'K,$$

ó lo que es lo mismo,

$$PA' : PC :: PC' : PK;$$

y poniendo por estas líneas sus valores,

$$x : a :: m : m + n;$$

de donde

$$x = a \times \frac{m}{m+n} \qquad [18]$$

Los triángulos semejantes PCK y PA'C' dan tambien

$$A'C' : CK :: PC : PK;$$

ó lo que es lo mismo.

$$y : b :: m : m + n;$$

de donde

$$y = b \times \frac{m}{m+n} \qquad [19]$$

557. Las cuatro fórmulas acabadas de obtener manifiestan que en cada relacion la misma parte es x de a que y de b; lo que desde luego se deduce de los triángulos semejantes PCK y PA'C'.

Dando valores á m y n en la relacion $\frac{m}{n}$ y sustituyéndolos en las fórmulas anteriores, se podrán determinar, á partir de *cero* en la regla PC y de A' en la A'B', las longitudes que se han de tomar para cada relacion, y establecer en dichas reglas las líneas divisorias, señalándolas con la fraccion correspondiente. La otra regla BD se dividirá despues exactamente como la parte de la AC que hay desde el *cero* al extremo C.

Las divisiones que lleva el pantógrafo de Gavard son las correspondientes á la primera disposicion del instrumento, que se obtienen por las fórmulas [16] y [17]. Para ver estas divisiones á qué relaciones corresponden en la segunda disposicion del pantógrafo, nos valdremos de las fórmulas [8] y [19], y compararemos los resultados obtenidos entre unas y otras.

En efecto, consideraremos las fórmulas [16] y [18] que dan los valores de x, pues lo que digamos de ellas se entenderá igualmente de las [17] y [19] que dan los de y, y daremos valores á $\frac{m}{n}$.

558. Si se tiene $\frac{m}{n}=1$, resulta $x=a$; $x=\frac{1}{2}a$;

lo que nos dice que en la primera disposicion del pantógrafo resultaría la copia igual al original en el caso de coincidir la punta del lápiz con la del calcador, y en la segunda cuando se eligiese la division $\frac{1}{2}$ de las tres reglas.

559. Si $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ ..... $x=\frac{1}{2}a$; $x=\frac{1}{3}a$;

lo que nos dice que en la primera disposicion los lados de la copia serán la mitad de los del original cuando se elija la division $\frac{1}{2}$, y que en la segunda disposicion, para que los lados de la copia resulten tambien la mitad de los del original, es preciso elegir en las reglas la division $\frac{1}{3}$; por lo que sería conveniente que al lado de la misma línea divisoria que lleva en las reglas la relacion $\frac{1}{2}$ para la primera disposicion, se escribiera tambien con números acentuados ó de tamaño distinto, la relacion $\frac{1}{3}$ que se sirve para la segunda disposicion, lo que serviría para evitar estos cálculos en la práctica y para no cometer errores.

560. Por último, si $\frac{m}{n}=\frac{3}{4}$ ..... $x=\frac{3}{4}a$; $x=\frac{3}{7}a$;

y al lado de la division $\frac{3}{4}$ para la primera disposicion, habría que fijar la $\frac{3}{7}$ para la segunda, y así sucesivamente; cuyos resultados están conformes con lo expuesto (550)

561. Siendo invariable la teoría del pantógrafo en todas sus disposiciones con respecto á su construccion, de lo que resultan otras tantas variedades del mismo instrumento que reciben diferentes nombres, y no pudiendo ya presentar dificultad la descripcion y uso de cada uno de los instrumentos á que dan lugar aquellas, nos limitaremos solamente en lo que vamos á exponer, á indicar su disposicion particular, y las fórmulas que sirven para establecer las divisiones en las reglas.

562. **Pantógrafo decimal.**—Este pantógrafo difiere solamente del de Gavard en que los extremos de las reglas PC y BK (fig. 252; lám. 24) están unidos por una regla PB, por medio tambien de juegos de charnela, en los puntos P y B. Las cinco reglas que forman el instrumento son iguales y tienen exactamente la longitud de 1^m, constituyendo por lo tanto las cuatro CK, BK, PB y PC un rombo en todas las posiciones del instrumento, conservándose siempre la A'B' paralela á las PB y CK en su movimiento á lo largo de las reglas PC y BK. El calcador va siempre en K, y el centro de rotacion y el lapicero pueden cambiar de posicion en los puntos P y C', resultando las dos disposiciones que pueden dársele en su uso. La division de las dos reglas PC y BK á partir de los puntos P y B donde se colocan los *ceros*, y la de la A'B' á partir de A' donde se coloca tambien el de esta regla, puede ser cualquiera; pero siendo más conveniente en todos los pantógrafos dividir las reglas en muchas partes iguales, para obtener más fácilmente las relaciones, y más cómodo emplear la division decimal, en el instrumento que nos ocupa se han dividido las tres reglas PC, BK y A'B', que hemos dicho tienen de largo un metro, en decímetros, centímetros y milímetros, llevando cada una de las cajas que corresponden á los puntos A', C' y B' el correspondiente *nonius* que comprende la longitud de 9 milímetros dividida en 10 partes iguales, recibiendo por esta circunstancia este instrumento el nombre de *pantógrafo decimal*, que no es otra cosa que el de Gavard perfeccionado.

563. Las fórmulas para establecer las divisiones son las mismas que las del de Gavard, con la diferencia de que siendo en éste iguales las constantes a y b, se convierten las [16] y [17] para la primera disposicion en

$$x = a \times \frac{m}{n} \qquad [20] ;$$

$$y = a \times \frac{m}{n} \qquad [21] ;$$

y para la segunda las [18] y [19], en

$$x = a \times \frac{m}{m + n} \qquad [22] ;$$

$$y = a \times \frac{m}{m + n} \qquad [23] ;$$

cuyos valores idénticos son consecuencia de la naturaleza del rombo CPBK.

564. **Pantógrafo de Dollond.**—En este instrumento la regla A'B' (fig. 253; lám. 24) va fija á las AC y B'D en dos puntos tales como A' y B', formando un paralelógamo A'B'DC, que lleva juegos de charnela en

todos sus vértices. En un punto K de la regla CD prolongada se coloca el calcador, siendo constante la distancia $CK=b$, así como la $CA'=a$; en las $A'B'$ y $A'A$, prolongacion esta última de la CA', es donde se establecen las graduaciones, corriendo á lo largo de las AA' y $A'B'$ las cajas que llevan el eje de rotacion y el lapicero, y siendo las variables en una cualquiera de las posiciones en que los tres puntos P, C' y K están en línea recta, las $PA'=x$, $A'C'=y$, y PC que llamaremos z.

565. Para hallar las fórmulas en que se funda la division de las reglas en la primera disposicion, es decir, cuando el eje de rotacion está en P y el lapicero en C', la paralela A'C' á la base CK del triángulo PCK nos da la proporcion

$$PC : PA' :: PK : PC'.$$

En esta proporcion entran las dos incógnitas PC y PA', cuya diferencia $CA'=a$ es conocida; luego se podrán hallar sus valores (Arit. 175 Nota) de la manera siguiente:

$$PC - PA' : PA' :: PK - PC' : PC';$$
$$PC - PA' : PC :: PK - PC' : PK;$$

ó lo que es lo mismo,

$$CA' : PA' :: PK - PC' : PC';$$
$$CA' : PC :: PK - PC' : PK;$$

y sustituyendo á estas líneas las letras que las representan, resulta

$$a : x :: n - m : m;$$
$$a : z :: n - m : n;$$

de donde

$$x = a \times \frac{m}{n-m} \qquad [24];$$

$$z = a \times \frac{n}{n-m} \qquad [25].$$

Para determinar ahora la y, los triángulos semejantes PA'C' y PCK dan la proporcion

$$A'C' : CK :: PC' : PK;$$

ó lo que es lo mismo

$$y : b :: m : n;$$

de donde

$$y = b \times \frac{m}{n} \qquad [26]$$

Si se tuviera $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ resultaría

$$x = a ;\ z = 2a ;\ x = \frac{1}{2} z ;\ y = \frac{1}{2} b.$$

566. Para hallar las fórmulas en la segunda disposicion del pantógrafo, es decir, cuando el eje de rotacion está en C′ y el lápiz en P, en cuyo caso será $PC' = m$ y $C'K = n$, la paralela A′C′ da la proporcion

$$PA' : CA' :: PC' : C'K,$$

ó lo que es lo mismo,

$$x : a :: m : n;$$

de donde

$$x = a \times \frac{m}{n} \qquad [27].$$

Para hallar y, los triángulos semejantes PA′C′ y PCK dan la proporcion

$$A'C' : CK :: PC' : PC' + C'K,$$

ó lo que es lo mismo,

$$y : b :: m : m + n;$$

de donde

$$y = b \times \frac{m}{m+n} \qquad [28]$$

Las fórmulas [27] y [28] no difieren de las [18] y [19] del pantógrafo de Gavard, sino en que en este es $a = PC$, y en el de Dollond que ahora nos ocupa $a = CA'$; lo que es causa de que varíe el coeficiente de a en las fórmulas [18] y [27].

567. **Micrógrafo de Letellier.**—Este instrumento, inventado en 1785, es una de las variedades del pantógrafo, y se funda en los mismos principios. Las cuatro reglas que constituyen el paralelógramo A′CDC′ (fig. 254; lám. 24) de ángulos variables, están dispuestas de manera que

las distancias A'C' y CD pueden hacerse mayores ó menores, así como las CA' y DC', para lo cual lleva las graduaciones en las reglas PC y AC', así como en las CK y BC', como se ve en la figura 255 (lám. 24), teniendo unos taladros en los puntos de division, por donde pasan los ejes que terminan con las ruedas, y tambien se puede adoptar el sistema de dobles cajas para que se puedan verificar los dos movimientos en cada una de las reglas. El calcador va en K, siendo constante la distancia CK, y el lapicero y el eje de rotacion en los puntos P y C', los cuales pueden cambiarse recíprocamente, siendo tambien constante la distancia PC. Es fácil concebir que si cuando C'A' es la mitad de CK, la PA' fuese tambien la mitad de PC, los tres puntos P, C' y K estarán un línea recta.

Este instrumento difiere del pantógrafo de Dollond, en que en este se modificaba la relacion de las escalas, variando los puntos P y C' (fig. 253; lám. 24), mientras que en el micrógrafo se consigue variando los D y A'. Por consiguiente, las variables serán ahora A'C y A'C', que representaremos por x é y, llamando a y b á las constantes PC y CK.

568. Para hallar las fórmulas en la primera disposicion, cuando el punto de rotacion está en P, tendremos la proporcion

$$PC : PA' :: PK : PC';$$

de donde se deduce (Arit. 172)

$$PC - PA' : PC :: PK - PC' : PK,$$

ó lo que es lo mismo,

$$x : a :: n - m : n;$$

de donde

$$x = a \times \frac{n-m}{n} \qquad [29]$$

Para hallar y tenemos

$$A'C' : CK :: PC' : PK,$$

ó lo que es lo mismo,

$$y : b :: m : n;$$

de donde

$$y = b \times \frac{m}{n} \qquad [30]$$

569. En la segunda disposicion del pantógrafo, cuando el punto de rotacion está en C', tenemos para hallar la $A'C = x$

$$A'C : PC :: C'K : PC' + C'K;$$

ó poniendo por estas líneas sus valores,

$$x : a :: n : m + n;$$

de donde resulta

$$x = a \times \frac{n}{m+n} \qquad [31]$$

La y se hallará como la fórmula [28] del pantógrafo de Dollond, y se obtendrá del mismo modo

$$y = b \times \frac{m}{m+n} \qquad [32]$$

A las reglas PC y CK se les suele dar la misma longitud, y como entonces se tiene $a = b$, las fórmulas [31] y [32] se convierten en las siguientes:

$$x = a \times \frac{n}{m+n} \qquad [33];$$

$$y = a \times \frac{m}{m+n} \qquad [34]$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones resulta

$$x + y = a.$$

570. **Observaciones generales.**—Si llamamos s y S á las superficies de la copia y del original, y se supone que se han de hallar en la relacion de p á q, tendremos

$$\frac{s}{S} = \frac{p}{q}.$$

Representando por l y L dos de sus líneas homólogas, se tendrá tambien

$$\frac{s}{S} = \frac{l^2}{L^2};$$

de donde resulta

$$\frac{p}{q} = \frac{l^2}{L^2};$$

y extrayendo la raíz cuadrada de los cuatro términos de esta proporcion

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}=\frac{l}{\mathrm{L}}=\frac{m}{n};$$

siendo m y n los números abstractos que indican la relacion de los lados l y L.

Sustituyendo en general en todas las fórmulas expuestas hasta aquí para la division de las reglas de los pantógrafos en vez de m y n los radicales $\sqrt{p}$ y $\sqrt{q}$, tendríamos otras tantas fórmulas que nos servirian para poder señalar en las reglas las divisiones correspondientes á los casos en que se quisiese hacer la copia de modo que su superficie guardase con la del original una relacion dada; siendo tambien conveniente que las reglas llevasen señaladas las graduaciones referentes á las relaciones en que más comunmente se consideran las superficies. Así, por ejemplo, las dos últimas fórmulas [33] y [34] se convertirán en las siguientes:

$$x=a\times\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}};$$

$$y=a\times\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}},$$

y así de las demás.

571. Por medio de las fórmulas establecidas se puede comprobar la exactitud de las divisiones de las reglas y graduarlas para otras relaciones diferentes, que no estén señaladas en ellas; y se puede tambien establecer por tanteos el calcador, el lápiz y el eje de rotacion en la disposicion conveniente para que satisfagan á una relacion dada. Para esto, supongamos que los lados de la copia guarden con los del original la relacion de dos rectas dadas m y n; se colocarán el calcador, el lápiz y el centro de rotacion en línea recta en aquella de las dos disposiciones del pantógrafo que más convenga, y se hará recorrer al calcador la recta n que representa una de las del original, en cuyo tiempo el lápiz trazará una recta igual, mayor ó menor que m. En el primer caso estará resuelto el problema, y en los otros dos será preciso cambiar la posicion del lápiz y el centro de rotacion, haciendo el número de tanteos necesario, hasta que se consiga que el lápiz trace la recta m mientras el calcador recorre la n.

572. Por último, para pasar de la escala $\frac{1}{\mathrm{N}}$ á la $\frac{1}{\mathrm{M}}$, es decir, cuando conocida la escala $\frac{1}{\mathrm{N}}$ del original, se quiere hacer la copia en la es-

cala $\frac{1}{M}$, se empezará por hallar (502) la relacion $\frac{m}{n}$ de estas escalas, para tomarla en el pantógrafo.

573. Concluiremos manifestando que la *fotografía* está llamada á prestar un importante servicio en su aplicacion á la copia de los planos en igual, mayor ó menor escala que el original, cuando este problema haya acabado de resolverse por completo. Hoy se reproducen ya los dibujos con mucha exactitud; pero este sistema tiene el inconveniente, cuando el original presenta muchos detalles y la relacion elegida para la copia es muy pequeña, que ésta resulta bastante confusa, puesto que se reproducen todos aquellos, y en un plano topográfico no hay necesidad sino de cierto número de ellos; debiéndose descartar, para la claridad del dibujo, los que son insignificantes. En los planos en grande escala es por el contrario de la mayor importancia la aplicacion de la fotografía por esta misma circunstancia de reproducir todos los detalles. Atendida la índole de este sistema y la prontitud de las operaciones, la fotografía será con el tiempo un inmenso adelanto en la reproduccion de los planos, y producirá economías de consideracion.

APÉNDICE.

TAQUIMETRÍA.

CAPITULO XII.

Exposicion del método Taquimétrico.

Definicion y objeto de la Taquimetria.—Determinacion de un punto.—Determinacion de las coordenadas rectangulares en funcion de las polares.—Método radiométrico —Empleo de dos ó más estaciones.—Paralelismo de los ejes.—Diversos procedimientos que se emplean en el método radiométrico.—Método radiotómico.

574. **Definicion y objeto de la Taquimetria.**—La *Taquimetría* es un método que se emplea en el levantamiento de los planos y tiene por objeto el verificar esta operacion, empleando menos tiempo que por los demás procedimientos ya explicados, sin faltar á la exactitud que se obtiene por estos en las operaciones topográficas.

Los instrumentos que se emplean para conseguir estos resultados se llaman *taquímetros* y por ellos se obtienen con la mayor brevedad todos los elementos tanto de Planimetría como de Nivelacion, que son necesarios para la representacion del terreno. En efecto, estos instrumentos desempeñan á un mismo tiempo las funciones de los goniómetros de precision (tomo I, cap. X) y las de los telémetros (tomo I, cap. XIV), acompañándoles de sus correspodientes *miras*.

575. **Determinacion de un punto.**—La Geodesia resuelve este problema general valiéndose de las coordenadas del punto referidas á tres ejes, que son, la *meridiana,* el *paralelo* y la *vertical* de otro punto que se toma por *orígen*. En efecto, sea P (fig. 256; lám. 25) el punto dado y O el orígen elegido donde se hace estacion; los tres ejes que se considera pasar por este punto serán la meridiana OY de dicho orígen, la vertical OZ del mismo y la perpendicular OX al plano ZOY en dicho punto O, ó sea el paralelo de este punto. Estos tres ejes forman los tres planos YOX, ZOY y ZOX que se llaman planos coordenados del punto P.

576. Las coordenadas pueden ser *rectangulares* ó *polares*. Las rectangulares ú ortogonales las designaremos, por x las que se hallen en el sentido del paralelo OX, por y en el del meridiano OY, y por z en el de la vertical OZ. Las polares de un punto P son: la recta OP que desde el orígen O, que recibe el nombre de *polo* vá á parar á dicho punto P y que se la dá el nombre de *rádio rector* y se representa por r, y á cuya proyeccion horizontal Op la llamaremos D: el ángulo que el rádio rector OP forma con la vertical OZ, que se representa por φ que es la letra *f* del alfabeto griego que se lee *Fi* y es el ángulo zenital ZOP; y el ángulo YOp que la proyeccion Op del rádio rector OP forma con la meridiana OY en el plano horizontal YOX y que se designa por θ que es la letra *tz* del alfabeto griego y que se lee *zeta*. Vemos, pues, que el punto O elegido para estacion y orígen de los tres ejes citados para la determinacion del punto P del terreno ó del espacio en general, es como hemos dicho el que recibe el nombre de *polo*.

Por medio de las coordenadas polares de un punto cualquiera, dicho punto queda perfectamente determinado, pues colocado un *taquímetro* en el polo elegido, por medio del limbo azimutal y de la brújula que acompaña al instrumento, se determina y comprueba el ángulo azimutal θ y se obtiene la direccion de la proyeccion Op del rádio rector OP. Con el mismo instrumento que hemos dicho (574) funciona como telémetro, se determina la magnitud D de esta proyeccion que es de la que se hace uso en las operaciones y se tendrá su extremo p, que será la proyeccion p del punto P, y por medio de la determinacion del ángulo zenital φ que se obtiene valiéndose del limbo zenital, se tendrá la altura del punto P sobre el plano horizontal YOX, ó lo que es lo mismo su *cota* Pp.

577. La posicion de los ejes que sirven para la determinacion de los puntos del terreno, se halla tambien perfectamente determinada para obtener las coordenadas rectangulares y polares, pues cualquiera que sea el punto que se tome por orígen ó polo, no hay más que determinar la meridiana de este punto, la vertical del mismo y la perpendicular á la meridiana en dicho punto, de donde se infiere que en cada nueva estacion ó punto de orígen que se considere, los nuevos ejes serán respectivamente paralelos á los primeros, así como los planos respectivos determinados por los mismos, segun se demuestra fácilmente en geometría.

578. **Determinacion de las coordenadas rectangulares en**

funcion de las polares.—Las coordenadas polares de un punto P (figura 256; lám. 25) se obtienen muy fácilmente y despues se pueden deducir en valores de ellas los de las coordenadas rectangulares. En efecto, colocando el instrumento en el punto de estacion y disponiendo el diámetro del limbo azimutal que lleva el *cero* en sentido de la meridiana OY, en cuyo caso representará el eje de las y, el diámetro del instrumento perpendicular al anterior señalará el eje de las x y el diámetro que lleva el *cero* del limbo zenital en su posicion vertical, representará el eje de las z. Los *ceros* de los nonius darán las lecturas del ángulo azimutal θ y del zenital φ en la determinacion de un punto cualquiera P, y con la medida de la proyeccion D de la distancia OP de este punto P al orígen O, ó sea del rádio rector r, se tendrán sus coordenadas polares.

Una vez obtenidas las coordenadas polares, se deducen de ellas con facilidad las rectangulares. En efecto, en el triángulo POp rectángulo en p, tenemos

$$Pp = Op \text{ tang. } POp = Op \text{ cot. } ZOP$$

ó lo que es lo mismo,

$$z = D \text{ cot. } \varphi \qquad [1].$$

Ahora, en el triángulo Opp', rectángulo en p', resulta tambien

$$Op' = Op \text{ cos. } pOp' = Op \text{ sen. } pOY,$$

de donde

$$x = D \text{ sen. } \theta \qquad [2].$$

Tambien tenemos en el mismo triángulo

$$pp' = Op \text{ sen. } pOp' = Op \text{ cos. } pOY$$

de donde

$$y = D \text{ cos. } \theta \qquad [3].$$

La proyeccion D del rádio rector OP tendrá tambien por expresion (tomo I, 775 [2])

$$D = g \text{ cos.}^2 POp,$$

ó lo que es lo mismo,

$$D = g \text{ sen.}^2 \varphi \qquad [4],$$

como puede tambien verse (tomo I, 806 [27]); representando por g la diferencia de lecturas de la mira en su posicion vertical ó la porcion que los hilos micrométricos interceptan y que expresa la distancia de la mira al punto de estacion O.

Los tres valores θ, φ y g que se toman con el instrumento en un punto de estacion dado, los llama Porro *números generadores* (488), porque sirven para hallar las coordenadas polares y determinar por medio de estas las rectangulares. Los números generadores se llaman tambien *argumentos*.

579. **Método radiométrico.**—En virtud de lo dicho se pueden obtener las coordenadas polares de un punto cualquiera y se podrán deducir las rectangulares por las fórmulas [1], [2] y [3] y haciendo lo mismo para cuantos puntos se crea necesario y que siendo visibles y accesibles puedan fijarse desde la estacion elegida, se podrá obtener la posicion de todos ellos y se tendrá determinada la parte de superficie que abrazan. Este método, en el cual es preciso medir en cada estacion dada las proyecciones de todos los rádios rectores correspondientes á los puntos considerados en la misma, recibe el nombre de *método radiométrico*.

Vemos, pues, que las operaciones que hay que practicar en el terreno para la determinacion de un punto, están reducidas á la medida del ángulo azimutal ú horizontal θ y del ángulo zenital ó vertical φ y además á la de la distancia D que le separa del punto de estacion. Puede hacerse uso para la medida de dichos ángulos de cualquiera de los goniómetros que hemos explicado en el tomo I, que lleven limbos horizontal y vertical y además brújula para orientarlos. Sin embargo, los teodolitos que se construyen para las operaciones de la taquimetría, que hemos dicho se llaman taquímetros y de los que hablaremos más adelante, tienen completo el limbo vertical y los caballetes que á él y al anteojo le sostienen, son de la altura suficiente para que los anteojos puedan dar una revolucion completa alrededor de su eje de rotacion. Respecto á la graduacion, tanto del limbo horizontal como de la del vertical, se ha reemplazado la sexagesimal por la centesimal, de modo que la circunferencia se divide en 400 grados, cada grado en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos, siendo preferible esta division á la sexagesimal, por la facilidad que proporcionan las divisores 10 y 100.

Respecto á la medida de la distancia D, es preciso, atendido el gran número de mediciones que se practican en el método radiométrico, hallar las distancias por la medida indirecta valiéndose de los *telémetros* (tomo I; cap. XIV), que se obtienen sin recorrerlas con bastante exactitud, pues si tuviéramos que emplear la medida directa haciendo uso de las cadenas ó de los otros medios de medicion que tenemos explicados, (tomo I; cap. XIII) las operaciones serian largas y penosas.

580. Pudiendo ser los puntos que se quieren determinar en una estacion dada, accesibles ó inaccesibles, y visibles ó invisibles, supondremos ahora que los puntos son accesibles, puesto que esta condicion es precisa en el método radiométrico que nos ocupa, y que además se verifique que sean visibles. Respecto de esta última circunstancia, debe tenerse en

cuenta no confundir la visibilidad de un objeto por el alcance de la visual dirigida al mismo por el anteojo de un instrumento, como tal aparato de óptica, con la distancia á que debe hallarse situado para poderse verificar la lectura de la parte de la mira comprendida entre los hilos micrométricos que lleva dicho anteojo para funcionar como telémetro.

El mayor alcance de los anteojos depende sobre todo de su poder amplificativo, además de otras varias circunstancias y tambien de la magnitud de las divisiones de la mira. Supongamos que un objeto se presenta al observador bajo un ángulo de 0,15 de grado y que en este caso la apreciacion es la quinta parte de la magnitud de dicho objeto. Representemos por a la ampliacion del anteojo, por m la magnitud de la menor division de la mira y sea ahora d la distancia á que se halla colocada esta mira. Como en este caso $0^{\circ},15 : 5 = 0^{\circ},03$ se tendrá la fórmula

$$d = a \times \frac{m}{0,03} \qquad [5],$$

por medio de la cual se pueden calcular las mayores distancias á que debe hallarse colocada la mira para que pueda leerse con un anteojo, cuyo ocular tenga una amplitud dada a. Si, por ejemplo, siendo $a = 30^{\circ}$, los valores de m fuesen 4, 8, 20 milímetros, los valores de d serán respectivamente 45, 90, 231 metros.

Si siendo $a = 50^{\circ}$, los valores de m fuesen los mismos que anteriormente, los de d serian respectivamente 77, 154 y 385 metros.

581. **Empleo de dos ó más estaciones.**—No pudiéndose verificar generalmente que desde una sola estacion sean visibles todos los puntos que hay necesidad de observar en una operacion topográfica, y por otra parte, aun cuando esto pudiera suceder, como las distancias no pueden exceder del límite á que los puntos pueden ser obervados, que depende, como hemos dicho, del mayor alcance que puede proporcionar el anteojo, de aquí la necesidad de tener que establecer varias estaciones, que subdividiendo el terreno en varias porciones, pueda cada una de estas quedar perfectamente definida con respecto á su correspondiente estacion, relacionando despues entre sí todas las estaciones establecidas y refiriendo por último las coordenadas de todos los puntos á un sistema único de ejes coordenados para toda la zona de terreno que corresponda á las operaciones.

Para conseguir este resultado, se elige un punto de estacion para que sirva de *orígen principal* ó *estacion principal*, llamando *ejes principales* á los correspondientes á este orígen, así como *coordenadas principales* á las de los distintos puntos de todo el terreno que se trata de determinar referidas á estos ejes, y consideraremos como *orígenes parciales* á los puntos de las distintas estaciones empleadas en el trabajo topográfico, llamando *ejes parciales* á los que les corresponden y *coordenadas parciales* á las de los puntos que á estos ejes se refieren.

582. **Paralelismo de los ejes.**—Para esto es conveniente instalar el instrumento en todas las estaciones haciendo que siempre resulten paralelos entre sí los diámetros del instrumento que corresponden á los ejes de coordenadas, pues de este modo se pasa fácilmente de las coordenadas obtenidas para un punto del terreno, con relacion á un punto ú orígen cualquiera de estacion, á las que se hubieran obtenido refiriéndolas al orígen principal, para lo cual bastará añadir á las coordenadas de dicho punto con respecto á la estacion parcial á que pertenece, las coordenadas principales de este mismo punto de estacion con respecto al orígen y ejes principales, las que no son otra cosa que las distancias de los planos paralelos determinados por los ejes de cada estacion parcial y los de la principal. En efecto, sean x, y, z, las coordenadas parciales del punto P (fig. 257; lám. 25) con respecto al orígen parcial ó punto de estacion O′ y X, Y, Z, las coordenadas principales de este mismo punto de estacion O′ con respecto al orígen principal elegido O. Llamando a la distancia de los planos ZOY y Z′O′Y′; b la de los ZOX y Z′O′X′ y c la de los YOX y Y′O′X′, tendremos:

$$X = x + a; \quad Y = y + b; \quad Z = z + c; \qquad [6].$$

Luego se tendrán las coordenadas principales X, Y, Z, de un punto P, conocidas que sean sus coordenadas parciales x, y, z, añadiendo á estas coordenadas parciales con respecto á los ejes O′X′, O′Y′ O′Z′ del punto de estacion parcial O′, las coordenadas principales a, b, c, del orígen O′ de la estacion parcial con respecto á los ejes principales OX, OY, OZ, de la estacion principal O, que no son otra cosa, como hemos dicho, que las distancias a, b y c de los planos respectivos determinados por los ejes paralelos de la estacion principal O y de la parcial O′ correspondiente á dicho punto P.

583. Como es necesario hacer gran número de estaciones, cuando se trata de un levantamiento de alguna extension, con el objeto, como ya se ha dicho, de abrazar entre todas ellas una zona de terreno, cuyos puntos se refieran á los sistemas coordenados que tienen por orígen el centro del instrumento en cada una de las estaciones y en la hipótesis de ser siempre todos los ejes paralelos á la posicion primitiva ó principal, es fácil calcular las coordenadas principales X, Y, Z, de un punto cualquiera P por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} X &= a + a' + a'' + \dots\dots + x; \\ Y &= b + b' + b'' + \dots\dots + y; \\ Z &= c + c' + c'' + \dots\dots + z; \end{aligned}\right\} \qquad [7]$$

en las cuales $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ representan las coordenadas de cada punto de estacion ó las distancias octogonales de los planos coordenados, con relacion á su anterior, y x, y, z las coordenadas parciales del punto P referidas á la última estacion que es desde la que ha sido observado.

584. Por consiguiente, en la hipótesis siempre del paralelismo de los ejes, se consigue la referencia de las coordenadas de todos los puntos á á un solo orígen que se toma por principal, ó lo que es lo mismo, se determinan las coordenadas principales de todos ellos, conociendo las coordenadas principales de todos los puntos de estacion. Pero una vez conocidas las de la primera estacion, por medio de las fórmulas [7] se obtienen las de la segunda, hallando préviamente las distancias octogonales que separan las dos estaciones; conocidas las coordenadas principales de la segunda estacion, se tendrán las de la tercera, por las mismas fórmulas, que estarán representadas por las principales de la primera y distancias octogonales entre la primera y segunda y entre la segunda y tercera y así sucesivamente, hasta obtener las coordenadas principales de todos los puntos de estacion, estando dadas para cualquiera de ellos por la suma de las principales de la primera estacion y las distancias octogonales a, b c; a', b', c'; a'', b'', c''..... que separan unas de otras, y añadiendo las parciales x, y, z de la última estacion que se considera, correspondientes á un punto cualquiera P que se refiera á ella, se tendrán tambien las coordenadas principales de dicho punto P.

585. La exactitud del paralelismo de los ejes, si bien no hay inconveniente en admitirla respecto á los ejes verticales OZ, O'Z' (fig. 257; lámina 25) los cuales sabemos que se pueden siempre determinar valiéndose de los niveles y de los tornillos de las plataformas de los instrumentos (tomo I, 525) y considerarlos como paralelos (tomo I, 50), y lo mismo sucede respecto á la horizontalidad del plano XOY que se confunde con el limbo azimutal del instrumento. Pero no puede admitirse para los ejes horizontales OY, O'Y', y por consiguiente para los OX y O'X' que de ellos dependen, porque pueden no quedar en posiciones paralelas las distintas direcciones que pueden tener dependientes de las variaciones que experimenta la aguja imantada (tomo I, 353), pues aunque las *diurnas* guardan alguna regularidad, las debidas á la proximidad de los objetos que influyen sobre la aguja, en virtud del magnetismo, afectan tales irregularidades que á veces puede llegar la desviacion á 5 ó 6 minutos.

586 Para obtener el paralelismo rigoroso de los ejes en cada estacion, antes de calcular las coordenadas con relacion todas á un mismo orígen, ó sea al principal, es necesario que trazado el sistema principal por dicho orígen y determinada la meridiana verdadera ó astronómica de este punto, las coordenadas de cada punto de cada estacion parcial se refieran á un sistema de ejes paralelos á los del principal.

587 Para conseguir este paralelismo y fijar la posicion de los ejes OY y O'Y' (fig. 258; lám. 25) se debe tomar el rumbo de la recta que desde el orígen principal O vaya á terminar en el orígen de la estacion elegida O' y comprobar el rumbo de esta recta OO', valiéndose del método

de las *observaciones directas y observaciones inversas*, bien leyendo los dos rumbos de esta misma recta con la punta azul, en cuyo caso deben diferenciarse en 180° ó 200°, segun lleve la brújula la graduacion sexagesimal ó la centesimal, ó bien leyendo en uno de los extremos de la recta con la punta azul y en el otro con la punta blanca, en cuyo caso deben resultar iguales (tomo I, 369).

En efecto, supongamos (fig 258; lám. 25) que O sea el orígen principal y el eje OY represente la meridiana verdadera ó, lo que es lo mismo, esté en sentido de esta meridiana, y sea NS la meridiada magnética ó sea la direccion de la aguja imantada; O′ el orígen de la segunda estacion y OO′ la recta que une estos dos puntos. Tomando como buena la meridiana magnética NS, la observacion directa en el punto O con la punta azul nos dará el rumbo r Si al tomar el rumbo de dicha recta OO′ en el punto O′ ó al hacer la observacion inversa, esta fuese con la punta azul y en vez de tener la aguja la direccion N′S′ perfectamente paralela á la NS, tuviese por la desviacion de la aguja la posicion N″S″, entonces al hacer la observacion inversa para tomar el rumbo r', la diferencia de estas dos observaciones directa é inversa seria menor que 180° ó 200°, segun las graduaciones, y lo que le faltase para esta cantidad seria lo que habria que añadir al rumbo r' para obtener aquella diferencia, y en el caso contrario de tener la aguja la posicion N‴S‴ habria que restar del rumbo r'' el exceso á 180° ó 200°, con que se obtuviese la diferencia de los rumbos r y r''.

Si la observacion inversa se hiciese con la punta blanca, habria que añadir ó quitar al rumbo r' hallando con esta la diferencia de los rumbos r y r', segun los casos, para que ambos rumbos de las observaciones directa é inversa fuesen iguales.

Despues de referidas las distancias, que unen entre sí los puntos de estacion á la primera meridiana magnética ON del orígen principal que se toma como buena y hallada de antemano la direccion de la meridiana astronómica OY de dicho orígen principal O, se obtendrá el paralelismo de los ejes en los trabajos de gabinete, refiriendo á aquella todos los rumbos determinados para fijar las direcciones de las rectas que unen entre sí todos los puntos de estacion y el de la principal considerados.

588. Todos estos cálculos podrian evitarse determinando en cada punto de estacion la meridiana verdadera, pero como esto sería aún más trabajoso, basta determinarla, como hemos dicho, en la primera estacion, y si se quiere en alguna ó algunas tambien de las demás, con el fin de tener más datos y más medios de comprobacion en los trabajos de gabinete Despues se referirán, como hemos dicho, todos los rumbos hallados con respecto á la meridiana magnética que se tomó como buena, á la meridiana verdadera, contando con la declinacion y valiéndose de la declinatoria (tomo I; 439).

589. La manera de comprobar si los ejes son paralelos en dos estaciones consecutivas en general, se puede hacer tambien, midiendo los

ángulos que en ambas estaciones forma con la aguja una recta cualquiera dada, pues la diferencia de dichos ángulos expresará la desviacion que la aguja ha experimentado.

En efecto, sean OX y OY (fig. 259; lám. 25) los ejes horizontales de una estacion O y O′X′, O′Y′ los de la siguiente O′. Sea OY ó su paralela O′Y′ la direccion que marca la aguja en la primera estacion y O′M la que señala en la segunda y SP una recta cualquiera. Se hallan los dos valores de θ que son O′RP y O′SP ó bien θ' y θ''.

Representando la desviacion que la aguja ha experimentado por $\delta\theta$, vamos á ver que esta desviacion es igual á la diferencia $\theta' - \theta''$ de dichos ángulos. (δ es la letra griega que equivale á la *d* minúscula y que se lee *delta* y $\delta\theta$ se lee *delta-zeta*.)

En efecto, en el triángulo O′SR se tendrá

$$SO'R = O'RP - O'SR \text{ (Geom. 18. Teor 13 Cor. 1.º)}$$

ó lo que es lo mismo.

$$\delta\theta = \theta' - \theta'' \qquad [8]$$

590. Una vez obtenido el paralelismo de los ejes OY y O′Y′ (fig. 259; lám. 25) valiéndonos de la recta OO′ que une los dos puntos de estacion (587) ó de una recta cualquiera SP (589) se pasa á corregir los rumbos de los rádios vectores en cada estacion como, por ejemplo, en la O′ (fig. 260; lám. 25). Para esto, supongamos que NS es la meridiana verdadera del orígen O y *ns* la magnética, y supongamos que el eje OY está en la direccion de esta meridiana magnética y sea P un punto del terreno cuya proyeccion es *p*, así como O′*p* la proyeccion de su rádio rector OP. Si en el punto O′, la direccion de la aguja, en vez de ser la O′Y′ paralela á la OY, para que diera el mismo rumbo que esta, que llamaremos θ, fuese la O′M, entonces tendriamos el rumbo

$$\theta' = \theta - \delta\theta \quad \text{ó} \quad \theta = \theta' + \delta\theta \qquad [9],$$

en cuyo caso bastará añadir á todos los rumbos observados desde la estacion O′ la cantidad positiva $\delta\theta$.

Si la direccion de la aguja fuese la O′M′, entonces se tendría

$$\theta'' = \theta + \delta\theta \quad \text{ó} \quad \theta = \theta'' - \delta\theta \qquad [10],$$

en cuyo caso bastará restar de todos los rumbos obtenidos en la estacion O′ la cantidad *positiva* $\delta\theta$, ó añadir la *negativa* $-\delta\theta$, puesto que la diferencia entre los rumbos θ y θ'' es

$$\theta - \theta'' = \delta\theta \qquad [11].$$

591. En la práctica se coloca en cada estacion el instrumento de modo que el diámetro 0°—200° de su limbo azimutal se halle en situacion perfectamente paralela á la que tenia en la estacion principal ó de partida, para lo cual, en virtud de lo dicho (587) de que los dos rumbos tomados con la punta azul en los extremos de cada recta que une dos puntos de estacion difieren en 200°, bastará tomar el ángulo azimutal en uno de los puntos de estacion y añadiendo 200° á su valor que llamaremos a°, se hace que el nonius señale en el limbo azimutal la cantidad $a^\circ + 200^\circ$ y se coloca el instrumento en el punto de estacion siguiente, disponiéndole de modo que el eje óptico del anteojo quede dirigido al punto de estacion anterior, en cuyo caso el diámetro 0°—200° quedará en la direccion que debe tener el eje de las Y.

592. Para obtener este mismo resultado nos podemos valer tambien de la brújula que suele acompañar á los limbos azimutales de los instrumentos. Para esto, una vez colocado en posicion vertical el eje general de rotacion del instrumento en una estacion dada, se hace la coincidencia del *cero* de uno de los nonius con el del limbo azimutal y se aprieta el tornillo de presion que sirve para sujetar las dos placas. Se afloja despues el tornillo de presion que sirve para sujetar todo el instrumento con su pié, á fin de poder darle el movimiento general de rotacion y dejando libre la aguja imantada, se hace girar las dos placas unidas hasta que la punta azul señale 0°, en cuyo caso se aprieta este último tornillo de presion para sujetar las dos placas unidas al pié del instrumento. Se practica esta misma operacion en la estacion siguiente, refiriéndose al mismo nonius que en la anterior, y de este modo se logra que el diámetro 0°—200° forme el mismo ángulo con la meridiana magnética en ambas estaciones, resultando paralelos los ejes coordenados que pasan por los dos orígenes ó puntos de estacion que se consideran.

593. *Correccion de la coordenada z.*—Hallándose en cada estacion el orígen de las coordenadas en el centro del instrumento, resulta que el valor de z que se halla por la fórmula [1] en una estacion, debe corregirse añadiéndole la altura del instrumento en la siguiente, que se toma siempre como *positiva*.

En efecto, sea O (fig. 261; lám. 25) un punto de estacion y O′ el punto de la estacion siguiente; CD y C′E los planos horizontales que pasan por las dos posiciones correspondientes al centro del instrumento; la fórmula [1] nos dará el valor de z' el cual es O′D en vez del C′D que se busca, que es necesariamente la diferencia de altura de las dos posiciones que ocupa el centro del anteojo; luego tendremos

$$z = C'D = O'D + O'C' = z' + a'; \qquad [12],$$

representando por a' la altura del instrumento en la segunda estacion.

594. Se comprueba el valor de z por los datos que se obtienen desde O′, pues resulta

$$z = -C'D = -CE = -(OE - OC) = OC - OE,$$

ó bien

$$z = a' + z'' \quad [13].$$

Los valores de z y z'' son negativos, como así resulta de la fórmula [1] $z = D \cot. \varphi$ en la que ahora el ángulo es φ' que vale más que un cuadrante.

595. *Coordenadas de los puntos del terreno.*—Como cuando se calculan los valores de x, y, z correspondientes á un punto m (fig. 262; lám. 25) que está situado entre los puntos m' y m'' que marcan los hilos micrométricos, hay que hallar las coordenadas que con relacion al orígen O, han de referirse al punto B del terreno, si bien respecto á las x é y sus valores no experimentan alteracion, supuesto que los puntos B y m se hallan en una misma vertical, es necesario correjir la coordenada z.

En efecto, la coordenada z, que en dicha figura está representada por $B'm$ debe ser BB' para el punto B del tereno y este valor estará dado por la expresion

$$BB' = B'm - Bm$$

ó lo que es lo mismo, llamando z' á la BB' y m á la altura de mira Bm

$$z' = D \cot. \varphi - m \qquad [14].$$

Esta fórmula es general dando al término $D \cot. \varphi$ el signo positivo si φ es menor que 100° y el negativo cuando sea mayor que 100°.

596. *Acotacion de los puntos del terreno.*—Si suponemos conocida la cota c del orígen principal O (fig. 262; lám. 25) se hallará la que corresponde al punto B del terreno en que se coloca la mira y que llamaremos C, añadiendo á la cota c el valor de z' hallado en el párrafo anterior y se tendrá

$$C = c + z' \qquad [15]$$

y lo mismo se haría respecto de los demás puntos del terreno despues de referidos al orígen principal (584).

597. *Diferencia de nivel entre dos puntos.*—La diferencia de nivel que llamaremos D' entre dos puntos A y B (fig. 262; lám. 25), se obtendrá, siendo a la altura del instrumento por la expresion

$$D' = BB' + AO$$

ó bien

$$D' = z' + a \qquad [16].$$

598. **Diversos procedimientos que se emplean en el método radiométrico**.—En lo dicho hasta ahora, se observa que hemos expuesto la manera de enlazar las estaciones y de referir los datos tomados sobre el terreno en cada una de ellas para todos los puntos que comprende, á un solo sistema de ejes llamado principal. El procedimiento expuesto hasta ahora para relacionar las estaciones entre sí, recibe el nombre de *método de referencias directas* y es debido á *Moinot*, pero en la práctica se usa además el método llamado de *referencias indirectas* que es del que hace uso *Porro*, y en el cual se observan desde cada punto de estacion otros dos puntos que se llaman *puntos de referencia* (488 al 491).

599. Para dar á conocer el método de referencias indirectas que, como acabamos de manifestar, consiste en la observacion desde cada estacion de dos puntos que se llaman puntos de referencia, sean O y O′ (figura 263; lám. 25), dos estaciones consecutivas y A y B los dos puntos observados desde ambas. Para verificar la correccion de orientacion, se hallan los valores de los ángulos que forma con la aguja la recta AB en las dos estaciones O y O′ y se trazan por el punto A de las rectas AS y AH, y por el punto B las BE y BD respectivamente perpendiculares á los ejes, prolongando la BD hasta C y la BE hasta F.

Las coordenadas x é y del punto A de la estacion O, son OS y AS y las del punto B en la misma estacion las OE y BE, cuyas diferencias las representaremos por Δx y Δy, valiéndonos de la letra griega Δ que equivale á la D mayúscula y se lee tambien *delta*, y tendremos:

$$\mathrm{OS} - \mathrm{OE} = \mathrm{ES} = \mathrm{BC} = \Delta x ;$$

y

$$\mathrm{AS} - \mathrm{BE} = \mathrm{BF} = \mathrm{AC} = \Delta y .$$

En el triángulo rectángulo ABC se tiene

$$\text{tang } \theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad [17]$$

Si en esta fórmula se introducen los valores de x y de y con relacion á la estacion O obtenidos por las fórmulas [2] y [3], obtendremos un valor de θ, y si se hace lo mismo con los otros valores de θ con relacion á la estacion O′ deducidos por las mismas fórmulas, se hallará otro nuevo valor de θ que será igual al anterior, en el caso de ser paralelas en ambas estaciones las posiciones de la aguja. En el caso contrario, su diferencia será el valor de $\delta\theta$ (589).

El procedimiento de Porro ofrece sobre el de Moinot las ventajas siguientes: deja en libertad al observador la eleccion de los puntos de estacion, que pueden hasta no ser visibles entre sí; economiza el número de estaciones, pues así como en el método de Moinot la distancia entre las estaciones está limitada, como ya hemos dicho, por el alcance de los anteojos en su aplicacion como *telémetros* ó medidores de distancias, por el sistema de Porro puede hacerse que sea casi doble la distancia, y por último, no hay necesidad de medir la altura del instrumento y simplifica el cálculo de la coordenada z. Sin embargo, tiene el inconveniente de que se necesita practicar cálculos numéricos en el campo que son muy incómodos y poco exactos.

600. Tambien puede hacerse uso en la práctica del procedimiento llamado *método mixto*, que viene á ser el de Porro modificado y que conservando todas sus ventajas evita los inconvenientes que hemos indicado. Consiste en repetir sobre un mismo punto las observaciones, desde dos vértices consecutivos, procurando situarlos de modo que sean visibles entre sí y verificar desde cada uno de ellos la lectura del ángulo θ que corresponde á la recta que los une, como en el procedimiento de Moinot Por último, pueden las estaciones distar más entre sí que lo que permite el alcance del anteojo, en atencion á no necesitarse medir directamente la distancia que media entre ellas, y si en lugar de un solo punto de referencia se hacen observaciones sobre dos puntos, se tendrán los medios necesarios para hacer la comprobacion de los resultados.

601. **Método radiotómico.**—Ya hemos visto la aplicacion del método llamado *radiométrico*, en cuyo empleo se ha supuesto que los puntos del terreno eran accesibles y visibles, y situados además á las distancias que permite el alcance de los intrumentos, por lo que en general dicho método es el más conveniente; pero hay ocasiones en que no puede emplearse, como es cuando se trata de determinar puntos inaccesibles ó que se hallan situados á grandes distancias que exceden de los límites que permite el uso de los instrumentos. En este caso hay que determinar estos puntos por intersecciones de visuales dirigidas á los mismos desde dos estaciones al menos cuya posicion sea conocida, pues en estos casos no puede colocarse la mira en los puntos inaccesibles ó situados á mayor distancia del alcance del anteojo, no pudiendo hacer entonces uso de éste como telémetro y no siendo posible hallar la distancia D por este medio Este procedimiento se conoce con el nombre de *método radiotómico*.

En este caso, para situar un punto P hay que medir los ángulos θ y φ, desde cada estacion y se pueden obtener gráficamente las proyecciones horizontales de los puntos que se buscan y calcular despues sus cotas con facilidad

602. Cuando se requiera mayor exactitud, se puede proceder á deducir sus tres coordenadas del modo siguiente:

Sea P el punto inaccesible (fig. 264; lám. 25), observado desde los dos puntos de estacion O' y O'' y supongamos que se conocen las coordenadas principales de estos dos puntos de estacion, que llamaremos en general X, Y, Z, ó sean las referidas al orígen principal ó primitivo que supongamos es el punto O; representemos por ΔX, ΔY, y ΔZ las diferencias entre las coordenadas principales de los dos puntos de estacion O' y

O'' referidas á dicho orígen principal O. Se medirán en cada estacion solamente los ángulos azimutales θ' y θ'' y los zenitales φ' y φ'', puesto que hay que prescindir de la distancia D que no puede entrar en las fórmulas que vamos á deducir como entraba en las pertenecientes al *método radiométrico*.

Sean ahora x, y, z, en general las coordenadas parciales del punto P referidas á las estaciones O' y O'' y Δx, Δy y Δz, las diferencias entre las coordenadas parciales de dichas dos estaciones y tratemos de deducir las coordenadas del punto P con relacion á la estacion O'.

Las coordenadas x é y del punto P con relacion á la estacion O' son las incógnitas por el supuesto de ser el punto P inaccesible y estarian representadas por $O't$ y $p't$ que son iguales á $o't'$ y $p''t'$ por ser estas rectas las proyecciones de aquellas sobre el plano $Y''O''X''$ de la estacion O''. Pero en el triángulo $p''o't'$ rectángulo en t', se tiene (20)

$$p''t' = o't' \cot.\ \theta'$$

ó bien $$y = x \cot.\ \theta' \qquad [18].$$

En el triángulo $p''t''O''$, tenemos (20)

$$p''t'' = t''O'' \cot.\ \theta''$$

pero $$p''t'' = p''t' + t't'' \quad \text{y} \quad t''O'' = t'o' + sO''$$

y como sO'' y $t't''$ no son más que las diferencias de las coordenadas parciales de las dos estaciones O' y O'', tendremos

$$y + \Delta y = (x + \Delta x) \cot.\ \theta'' \qquad [19].$$

Como las ecuaciones [18] y [19] son dos ecuaciones con dos incógnitas x é y, eliminaremos la y entre ambas por el método de sustitucion, en atencion á estar la y despejada en la ecuacion [18]. Sustituyendo pues este valor de y en la ecuacion [19] quedará eliminada la y y resultará

$$x \cot.\ \theta' + \Delta y = (x + \Delta x) \cot.\ \theta'' \qquad [20].$$

Efectuando la operacion indicada en el segundo miembro, se tendrá

$$x \cot.\ \theta' + \Delta y = x \cot.\ \theta'' + \Delta x \cot.\ \theta'';$$

Pasando al primer miembro los términos de x, resultará

$$x \cot.\ \theta' - x \cot.\ \theta'' = \Delta x \cot.\ \theta'' - \Delta y;$$

y sacando la x fuera de un paréntesis

$$x\,(\cot.\,\theta' - \cot.\,\theta'') = \Delta x \cot\,\theta'' - \Delta y\,;$$

de donde despejando x tendremos

$$x = \frac{\Delta x \cot.\,\theta'' - \Delta y}{\cot.\,\theta' - \cot.\,\theta''}, \qquad [21].$$

en cuyo segundo miembro no entran más que cantidades conocidas.

Sustituyendo ahora este valor de x en el de y despejada en la ecuacion [18] tendremos

$$y = \frac{\Delta x \cot.\,\theta'' - \Delta y}{\cot.\,\theta' - \cot\,\theta''}\cot.\,\theta' \qquad [22]$$

603. Las ecuaciones [21] y [22] no se hallan bien dispuestas para el cálculo logarítmico, pero se pueden trasformar con facilidad en otras adecuadas á dicho cálculo.

Para conseguirlo daremos otra forma al denominador $\cot.\,\theta' - \cot.\,\theta''$ de dichas ecuaciones, introduciendo en él por θ'' su igual $\theta' + \Delta\theta$, y tendremos

$$\cot.\,\theta' - \cot.\,\theta'' = \cot\,\theta' - \cot\,(\theta' + \Delta\theta) = \frac{\cos.\,\theta'}{\operatorname{sen}.\,\theta'} - \frac{\cos.\,(\theta' + \Delta\theta)}{\operatorname{sen}\,(\theta' + \Delta\theta)};$$

Reduciendo estos dos quebrados á un comun denominador y efectuando la resta indicada, resultará la ecuacion

$$\cot.\,\theta' - \cot.\,\theta'' = \frac{\cos.\,\theta' \operatorname{sen}.\,(\theta' + \Delta\theta) - \operatorname{sen}.\,\theta' \cos\,(\theta' + \Delta\theta)}{\operatorname{sen}.\,\theta' \operatorname{sen}.\,(\theta' + \Delta\theta)};$$

Desarrollando los valores sen. $(\theta' + \Delta\theta)$ y cos. $(\theta' + \Delta\theta)$ (Trigon. 21) y constituyendo en la ecuacion anterior, resultará

$$\cot.\,\theta' - \cot.\,\theta'' =$$
$$\frac{\cos.\theta'(\operatorname{sen}.\theta' \cos.\Delta\theta + \cos.\theta' \operatorname{sen}.\Delta\theta) - \operatorname{sen}.\theta'(\cos.\theta' \cos.\Delta\theta - \operatorname{sen}.\theta' \operatorname{sen}.\Delta\theta)}{\operatorname{sen}.\,\theta' \operatorname{sen}.\,(\theta' + \Delta\theta)};$$

Efectuando las operaciones indicadas en el numerador, del quebrado del segundo miembro y simplificándole, se obtiene por resultado sen. $\Delta\theta$, luego se tendrá

$$\cot.\,\theta' - \cot.\,\theta'' = \frac{\operatorname{sen}.\,\Delta\theta}{\operatorname{sen}.\,\theta' \operatorname{sen}.\,(\theta' + \Delta\theta)};$$

y poniendo de nuevo en esta expresion en lugar de $\theta' + \Delta\theta$ su igual θ'', tendremos por último

$$\cot.\ \theta' - \cot.\ \theta'' = \frac{\text{sen.}\ \Delta\theta}{\text{sen.}\ \theta'\ \text{sen.}\ \theta''};$$

Poniendo ahora este valor del denominador de las fórmulas [21] y [22] en estas fórmulas tendremos para x

$$x = \frac{\Delta x \cot.\ \theta'' - \Delta y}{\dfrac{\text{sen.}\ \Delta\theta}{\text{sen.}\ \theta'\ \text{sen.}\ \theta''}} = \frac{\Delta x \cot.\ \theta''\ \text{sen.}\ \theta'\ \text{sen.}\ \theta'' - \Delta y\ \text{sen.}\ \theta'\ \text{sen.}\ \theta''}{\text{sen.}\ \Delta\theta} =$$

$$\frac{\Delta x \dfrac{\cos.\ \theta''}{\text{sen.}\ \theta''}\ \text{sen.}\ \theta'\ \text{sen.}\ \theta'' - \Delta y\ \text{sen.}\ \theta'\ \text{sen.}\ \theta''}{\text{sen.}\ \Delta\theta};$$

cuya ecuacion puede escribirse de este modo,

$$x = \Delta x \frac{\text{sen.}\ \theta'}{\text{sen.}\ \Delta\theta} \cos.\ \theta'' - \Delta y \frac{\text{sen.}\ \theta'}{\text{sen.}\ \Delta\theta}\ \text{sen.}\ \theta'' \qquad [23]$$

fórmula bien dispuesta para el cálculo logarítmico.

Una vez hallada la coordenada x, se tendrá el valor correspondiente de la coordenada y, sustituyendo este valor hallado de x en la ecuacion [18] que es

$$y = x \cot.\ \theta'$$

y tendriamos

$$y = \Delta x \frac{\text{sen.}\ \theta'}{\text{sen.}\ \Delta\theta} \cos.\ \theta'' - \Delta\ y \frac{\text{sen.}\ \theta'}{\text{sen.}\ \Delta\theta}\ \text{sen.}\ \theta''\ \cot.\ \theta' \qquad [24]$$

Por último, para tener la coordenada z, nos valdremos de las dos ecuaciones [1] y [2] en las que por θ y φ, se pondrá ahora θ' y φ' y resultarán las siguientes:

$$z = \text{D} \cot.\ \varphi'$$
$$x = \text{D}\ \text{sen.}\ \theta'.$$

Para esto, dividiremos la primera por la segunda y quedará eliminada la incógnita D y tendremos

$$\frac{z}{x} = \frac{\cot.\ \varphi'}{\text{sen.}\ \theta'}$$

de donde

$$z = x \frac{\cot.\ \varphi'}{\text{sen.}\ \theta'} \qquad [25].$$

604. Conocidas las tres coordenadas x, y, z, con relacion á la estacion O′, se podrán deducir las que se refieren á la estacion O″ añadiéndolas los valores de ΔX, ΔY y ΔZ.

Viendo además si el valor hallado para z, verifica en union de los φ'' y θ'' la ecuacion

$$z + \Delta Z = (x + \Delta X)\,\frac{\cot.\ \varphi''}{\operatorname{sen.}\ \theta''} \qquad [26],$$

se puede comprobar la exactitud de los resultados.

605. Para hallar, por último, las coordenadas principales del punto P, no habrá más que añadir, como ya queda dicho, á las coordenadas halladas con relacion al orígen O′, las coordenadas principales X, Y, Z de este orígen ó centro de estacion, ó si ya se tienen referidas al orígen O″, se les añadirá las coordenadas principales de este punto O″.

606. Los procedimientos acabados de exponer y que en la actualidad se emplean en la Topografía, se deben al sábio profesor Porro, á cuyo conjunto de operaciones dió el nombre de *Tacheometrie*, que se compone de dos palabras griegas que significan *medir con celeridad*, y de aquí tambien el que se llame este método *Celerimensura*. Entre nosotros se le da el nombre de *Taquimetria*.

Como hemos visto, en este procedimiento se obtienen los planos acotados, observando en el terreno el número de puntos necesario y suficiente para determinarle, hallando para cada punto que se observa los argumentos que sirven para fijar su proyeccion horizontal y su altura ó cota. No hay pues que atender al establecimiento de alineaciones, ni á mediciones con la cadena ni con ningun otro aparato, ni á verificar nivelaciones que es preciso ejecutar para hallar los perfiles longitudinales y trasversales que por los otros métodos empleados en la Topografía, son indispensables para obtener la representacion del terreno.

En el estudio de los ferro-carriles y carreteras, así como en las demás obras públicas y en el levantamiento del plano de cualquier clase de terreno, ofrece grandes ventajas y rapidez, siendo por consiguiente mayores la economía de tiempo y de gastos de personal, y por lo tanto mayores tambien las ventajas, cuanto más accidentado y mayores obstáculos presente el terreno que se considere.

Otra de las ventajas de este método, es que el operador puede á su arbitrio elejir los puntos que por su práctica comprenda son precisos y en el menor número posible para que le conduzcan, sin embargo, á representar los accidentes del terreno con más exactitud y más pronto que por los métodos ordinarios seguidos en esta clase de operaciones. Esto en cuanto á la práctica en el campo, pues al tratar de hacer el estudio del trazado en el gabinete, los trabajos producen tambien mejores resultados que cuando se hace el trazado directamente sobre el terreno.

CAPITULO XIII.

Taquímetros y teodolitos Clepes.

Taquímetros. Generalidades.—Taquímetro de Richer.—Usos del taquímetro.—Verificaciones y correcciones.—Taquímetro de Troughton.—Usos del taquímetro.—Verificaciones y correcciones.—Taquímetro de Salmojraghi.—Usos del taquímetro.—Verificaciones y correcciones.—Teodolitos Clepes. Generalidades.—Teodolito Clepe mayor.—Usos del teodolito Clepe. Teodolito Clepe mediano.—Teodolito Clepe menor.

607. **Taquimetros Generalidades**.—*Definiciones*.—Los *taquímetros* son verdaderos teodolitos llevados á su mayor grado de perfeccion y que reunen todas las condiciones necesarias para la resolucion de todas las cuestiones que se ofrecen en la *taquimetría*.

608. *Limbos*.—Ya hemos dicho (579) que estos instrumentos llevan tambien completo el limbo vertical y que ambos limbos tienen la graduacion centesimal, lo que facilita y abrevia las operaciones y hace que se adapte mejor al cálculo con las escalas logarítmicas. Ambos limbos van al descubierto en los *taquímetros*.

Los movimientos de los limbos azimutal y vertical pueden ser rápidos ó lentos, á voluntad, por medio de los sistemas de tornillos de presion y de coincidencia, que sirven para afinar las punterías y precisar las lecturas de los valores de los ángulos.

609. *Alidadas*.—El anteojo unido á la pieza que lleva los nonius que pertenecen al limbo azimutal constituye la alidada de anteojos (tomo I, 257) que acompaña á los taquímetros.

610. *Nonius*.—La alidada de anteojo lleva dos nonius diametralmente opuestos, que se mueven con el anteojo, permaneciendo fijo el limbo azimutal y que son los que hemos dicho corresponden á este limbo. Otra pieza fija en el instrumento contiene un nonius que corresponde al limbo zenital, estando por lo tanto ahora fijo el nonius y siendo el limbo vertical el que se mueve.

611. *Apreciacion de los nonius.*—Tanto en el limbo azimutal como en el zenital se pueden apreciar los valores angulares de un minuto, pues siendo la graduacion de ambos limbos la centesimal, se hallan divididos en 400 grados y cada grado en dos medios grados, resultando cada limbo dividido en 800 partes, como hemos dicho antes, que cada una representa medio grado ó 50′, siendo el medio grado la menor division del limbo. Como los nonius constan de un arco que comprende 49 de estas menores divisiones dividido en 50 partes, la fórmula [2] (tomo I, 308)

$$x = \frac{d}{n}$$

nos dará

$$x = \frac{50'}{50} = 1'.$$

Algunos nonius aprecian tambien 2′ y las aproximaciones 1′ ó 2′ ó sean 0,01 ó 0,02 de grado de la division centesimal equivalen respectivamente á 32″ y 65″ de la division sexagesimal.

612. Las lecturas de los ángulos en el limbo azimutal se practican siempre con dos nonius diametralmente opuestos, lo que permite comprobar siempre las lecturas y conocer en el acto los errores, pues siempre las dos lecturas deben diferenciarse exactamente en 200°. Al limbo vertical corresponde generalmente un solo nonius, pero tambien sería conveniente le correspondiesen dos para hacer la misma comprobacion Esta comprobacion se verificará siempre, cuando un ángulo se mide con precision y en la hipótesis de contar con toda seguridad con la perfecta centracion de los limbos y de las alidadas de anteojo que les corresponden.

613. *Microscopios y reflectores.*—Acompañan siempre á los nonius pertenecientes á los limbos azimutal y vertical sus correspondientes microscopios y reflectores para presentar más visibles y claras las graduaciones con el aumento de tamaño y mayor luz, y hacer las lecturas con mayor exactitud. Dichos microscopios y reflectores van dispuestos y colocados en los instrumentos por medio de piezas adicionales ó apéndices y de la manera más fácil y cómoda que permita la forma del instrumento, y como ya hemos visto van en algunos teodolitos (tomo I, lám. 21, 22, 23, 25 y 57), y aunque siempre hemos de suponer que acompañan á los taquímetros, unas veces los presentaremos en las figuras y otras los esgrimiremos, segun convenga, para la claridad del dibujo.

614. *Anteojos.*—El anteojo que acompaña á los taquímetros es astronómico (tomo I, 232) y da por lo tanto invertidas las imágenes Es analítico (tomo I, 798) cuyo nombre proviene de una palabra griega que significa *invariable*, por ser su objeto la invariabilidad del ángulo micrométrico ó diastimométrico. Es *telemétrico* ó *micrométrico* porque además

de poderse dirigir con él visuales á largas distancias como con los anteojos ordinarios que acompañan á casi todos los instrumentos de topografía, funciona tambien como telémetro ó diastimométrico en virtud de estar provisto de un *micrómetro*.

615. En todo anteojo existe un punto analático que se halla delante del objetivo á la distancia focal principal (tomo I, 224) de esta lente y que coincide con su foco principal, y siendo incómodo el medir las distancias á partir de dicho punto, porque á todas sería necesario añadir una cantidad constante para que se hallasen referidas al centro del anteojo, que debe hallarse situado en la vertical que pasa por el centro del instrumento, Porro imaginó colocar entre el objetivo y el ocular una lente convergente, que se llama *lente colectora* (tomo I, 798), y cuyo objeto es hacer que el punto analático coincida con dicho centro. En algunos anteojos la lente colectora está fija y en otros puede moverse en sentido de la longitgd del tubo del anteojo.

616. El ocular de estos anteojos es el de Ramsden (tomo I, 235) y el objetivo acromático (tomo I, 231).

617. *Retículos ó micrómetros*.—Se llaman así los retículos que además de tener los dos hilos r y s (fig. 265; lám. 25) que se cortan perpendicularmente en el centro c y de que constan en general los retículos ordinarios, llevan además otras varias cerdas ó hilos a, b, a', b' paralelos entre sí y al hilo medio r, y perpendiculares al s, que está destinado á ocupar la posicion vertical, en la cual el hilo r y sus paralelos a, b, a', b' ocuparían la posicion horizontal

Cuando el retículo lleva solamente dos hilos paralelos y equidistantes del hilo medio r y por lo tanto simétricos, el micrómetro se llama *sencillo*, y cuando consta de mayor número de hilos en número siempre par y simétricos de dos en dos, recibe el nombre de *múltiple*. Estos hilos se llaman hilos micrométricos, porque cada dos paralelos y equidistantes ó no del hilo medio determinan un ángulo micrométrico que, como sabemos, sirve para la determinacion de las distancias de los puntos del terreno al punto de estacion.

618. Los micrómetros múltiples son más convenientes que los sencillos, pues en atencion al mayor número de hilos, se pueden obtener dos ó más valores de una misma distancia haciendo las lecturas con cada dos hilos que constituyen un micrómetro sencillo en sus respectivas miras, y servirá de comprobacion el obtener siempre el mismo valor, y en caso contrario, lo que es casi frecuente, supuesto que en general no suelen coincidir los hilos exactamente con las divisiones de las miras y hay que apreciar á ojo aproximadamente las fracciones de la menor division de la mira, se toma un término medio entre todos los valores hallados, lo que producirá siempre una medida de la distancia más aproximada á la verdadera que la que se obtendrá empleando solamente en la medida un micrómetro sencillo.

Se comprueba una lectura, valiéndose de una sola mira, combinando entre sí los hilos del micrómetro múltiple. En efecto, en la fig. 265 (lámina 25) debe resultar, representando las lecturas por las letras asignadas á los hilos que

$$a - b = a' - b'$$

y en caso de pequeña diferencia, tomando el término medio entre las dos lecturas.

619. Como cuando se rompen los hilos, que son de tela de araña, seda, cerda ó platino de los retículos ordinarios, es muy difícil la colocacion de otros que estén situados á las mismas distancias que los primeros del hilo medio r, los constructores graban en una placa de cristal de roca independiente, ó en la cara interior del cristal del ocular unas rayas ó trazos sumamente finos que reemplazan á dichos hilos, y de este modo se evita el inconveniente de la rotura de estos y tambien la alteracion de la distancia entre ellos por las variaciones higrométricas á que pueden estar sujetos.

Cuando los hilos van grabados en el ocular, los retículos son fijos, y cuando lo están en una placa de cristal de roca, independiente, son susceptibles del movimiento de arriba abajo y viceversa, como los retículos ordinarios, por medio de los tornillos t' que se llaman verticales y de izquierda á derecha y al contrario por los tornillos t que se llaman horizontales (tomo I, 233)

620 *Niveles*.—Los niveles que llevan los taquímetros tienen, en su colocacion y union con estos instrumentos, aquella de las disposiciones que conviene de las explicadas (tomo I, 78 al 83) y se verifican y corrigen como hemos dicho tambien en los mismos párrafos citados.

621. *Tornillos*.—En los taquímetros se hace uso de cuantas variedades hemos explicado (tomo I, 316 al 326).

622. *Centracion de los limbos y de los anteojos*.—Se dice que un limbo está centrado, cuando su eje de rotacion pasa por su centro, siendo además perpendicular al plano de dicho limbo.

Se entiende por centracion de un anteojo, con respecto al limbo á que corresponde ó que es céntrico ó concéntrico con él, cuando la interseccion del eje de figura del anteojo con el eje de rotacion del mismo, siendo ambos ejes perpendiculares entre sí, se halla situada en la perpendicular al plano circular del limbo que pasa por su punto céntrico.

Se dice que el anteojo es escéntrico con el limbo á que corresponde, cuando siendo su eje de figura perpendicular á su eje de rotacion, este gira tambien á su vez alrededor del centro del limbo y el anteojo en todas sus posiciones permanece tangente á la circunferencia descrita por dicho eje de rotacion.

Cuando en un anteojo céntrico no gira, por mala construccion, el anteojo exactamente alrededor del centro del limbo, se dice que está descentrado, y aunque suele llamarse algunas veces *escéntrico*, no se ha de tomar en el sentido dado antes á esta palabra.

623. Para comprobar la centracion de un limbo y del anteojo que le acompaña, cuando el limbo es horizontal y está fijo y la alidada de anteojo es la giratoria, y está provista de dos nonius diametralmente opuestos, se examina si en todas las posiciones del anteojo, la diferencia de las dos lecturas es siempre igual á 200°. Cuando las alidadas llevan un solo nonius se siguen los procedimientos explicados (tomo I, 291 al 294).

624. En los limbos zenitales, en los que el nonius está fijo y el limbo participa de los movimientos del anteojo, como sucede en los taquímetros, en los cuales pasan las divisiones de dicho limbo enrasando con las del nonius, se examina entonces, si en cualquiera posicion del anteojo, resulta siempre al tomar un ángulo zenital que la suma de las dos lecturas obtenidas por el procedimiento que se explicará más adelante, equivale á 400° y si se obtiene siempre este mismo resultado con cuantos ángulos zenitales se haga el exámen. Si en las dos observaciones del primer ángulo que se mida, se ha encontrado un error, se ve si en los demás ángulos zenitales que se tanteen resulta constantemente este mismo error. Si no se verifican las circunstancias dichas y se tiene el convencimiento de que los limbos y los anteojos están descentrados, deberán desecharse los instrumentos por defectuosos en su construccion y no ser posible corregirlos.

625. *Centracion del retículo*.—La centracion del retículo (fig. 265; lámina 25) de un anteojo, que con frecuencia se entiende tambien por *centracion del anteojo*, consiste en hacer que el cruzamiento *c* de los hilos esté situado en el eje de figura del anteojo. Se dice que está centrado un hilo del retículo, cuando pasa por el centro del círculo de la seccion del tubo del anteojo producida por un plano perpendicular á su eje de figura. La interseccion de dos hilos centrados que son dos diámetros ó el cruzamiento de dichos hilos es el centro de dicha seccion.

Cuando el eje de rotacion del anteojo es horizontal, el eje óptico describirá en su giro alrededor de él un plano vertical en el cual se hallará comprendido el hilo centrado que sea vertical.

Cuando el eje óptico es horizontal y gira alrededor del eje general de rotacion del instrumento en su posicion vertical, dicho eje óptico describirá un plano horizontal en el cual se hallará situado el hilo centrado que sea horizontal.

Cuando el eje de figura del anteojo sea perpendicular á su eje de rotacion y el eje óptico coincida con él, resultará este tambien perpendicular á dicho eje de rotacion, y en su giro alrededor de este describirá un plano y no una superficie cónica.

626. Cuando los anteojos, además de girar alrededor de su eje de rotacion, pueden tambien girar sobre sí mismos alrededor de su eje de figura, dentro de los collares que les abrazan, pudiendo sacarle tambien de dichos collares ó desmontarlos para colocarlos de nuevo en ellos invertidos, como sucede, por ejemplo, en el teodolito de Troughton (tomo I, 517), la centracion de cada hilo del retículo, y por consiguiente la de este, se

practica como en dicho teodolito por el método expuesto (tomo I, 240, 241 y 242), y por medio del último giro expuesto, se puede colocar vertical ú horizontal el hilo del retículo que se desee.

627. Observaremos, que en estos instrumentos, los retículos, ó llevan marcadas en la parte interior del cristal del ocular las rayas ó trazos que sustituyen á los hilos usados generalmente, como ya hemos dicho (619), ó son placas de cristal de roca independientes y funcionan como los explicados en los teodolitos con sus dos tornillos horizontales y los dos verticales. En el primer caso se hallan fijos y centrados por construccion, y en el segundo se pueden centrar por medio de dichos tornillos y por los métodos que expondremos en su lugar correspondiente.

628. Los dos hilos principales *s* y *r* (fig. 265; lám. 25) del retículo se cortan perpendicularmente y su cruzamiento *c* es el que con el centro del ocular determinan el eje óptico del anteojo, que coincidirá con el eje de figura del tubo del mismo, cuando dicho cruzamiento coincida con dicho eje y esta recta comun pasará tambien por el centro del objetivo.

La disposicion del hilo *s* es tal, que cuando el eje óptico del anteojo sea horizontal, tiene la posicion vertical y conserva esta posicion en su movimiento de izquierda á derecha ó viceversa, por medio de los tornillos horizontales *t*, *t*, cuando se emplean para centrar el hilo *s*.

Como el hilo medio *r* y los *a*, *a'*, *b*, *b'* son perpendiculares por construccion al *s*, siempre son horizontales cuando el *s* es vertical, y para centrar el hilo medio *r* se hace uso de los tornillos verticales *t'*, *t'*.

629. *Plataformas.*—Las plataformas que se usan son las de tres tornillos (tomo I, 337).

630. *Trípodes.*—Los trípodes, que forman cuerpo con las plataformas, y cuya meseta sirve de asiento á estas y por lo tanto á los instrumentos, tienen por objeto sostenerlos á la altura conveniente para hacer cómodamente las observaciones, y se usan los explicados (tomo I, 342 y 343). Se han hecho innovaciones en estos trípodes y se han ideado otros, como por ejemplo, los inventados por Porro para los aparatos taquimétricos llamados *Clepes*, los cuales en su original é ingeniosa construccion son una prueba más del talento de su autor. El trípode, fijo siempre al instrumento, se guarda con él en la misma caja, despues de doblar sus brazos por medio de charnelas y reune la lijereza á la mucha estabilidad. Sin embargo, estos trípodes han caido en desuso por ser engorroso su manejo y no producir los resultados que exije la práctica, habiendo sido sustituidos por los que se usan en los instrumentos ingleses (tomo I, 344).

631. *Orientadores.*—Las brújulas, declinatorias á cualquier otro aparato orientador que acompañe á los taquímetros va dispuesto de manera que la línea *norte-sur* de su caja que representa el diámetro 0°—200° se halla en sentido del eje óptico del anteojo, estando el objetivo del mismo lado que el norte del limbo de la caja de la brújula ó aparato orientador, como se ve en la figura 246 (tomo I, lám. 15).

632. *Observaciones.*—Se entiende generalmente por *parte superior* de

un instrumento, prescindiendo del trípode, todo lo que lleva sobre la placa ó disco que contiene los nonius que pertenecen al limbo azimutal, incluso este disco, y *parte inferior* el resto del instrumento que comprende el limbo azimutal y lo que queda debajo hasta la plataforma inclusive

Por construccion, todos los taquímetros deben tener bien centrados y graduados los limbos y sus nonius correspondientes, y las divisiones de unos y otros han de enrasar con toda exactitud siendo perfecto su ajuste. Los movimientos de todas sus piezas deben ejecutarse con facilidad y suavidad; los sistemas de tornillos de presion y de coincidencia, así como los tornillos de correccion particular han de funcionar perfectamente y en las partes que han de estar completamente fijas no debe haber ningun movimiento Todas estas condiciones, que por construccion deben hallarse reunidas en toda clase de instrumentos, conviene se verifiquen con especialidad en los taquímetros, y la esmerada construccion de estos exije además que reunan las tres condiciones siguientes:

1.ª Perpendicularidad entre el eje general de rotacion de todo el instrumento y el plano del limbo azimutal.

2.ª Perpendicularidad entre el eje de figura del tubo del anteojo y el eje de rotacion del mismo.

3.ª Perpendicularidad entre el eje de rotacion del anteojo y el plano del limbo zenital.

A estas tres condiciones debe, pues, satisfacer el constructor, las que deben comprobarse cuando se adquieren los instrumentos ó se hace uso de ellos por primera vez, practicando las verificaciones correspondientes á cada uno y haciendo uso de las respectivas correcciones (tomo I, 65).

633. Cuando los instrumentos reunen las expresadas tres circunstancias, las verificaciones á que han de satisfacer para poder operar con ellos, ó se realizan, ó por medio de las correcciones de que sean susceptibles se puede hacer que se realicen, en cuyo caso los instrumentos están lo que se llama bien construidos Si á pesar de emplear las correspondientes correcciones, las verificaciones que es necesario hacer no pueden realizarse, es prueba de que los instrumentos no llenan dichas condiciones en su construccion, ni puede hacerse que las llenen, en cuyo caso deben desecharse por defectuosos. Deberán, pues, practicarse las verificaciones y correcciones correspondientes á cada instrumento, cuando este se adquiere ó antes de hacer uso de él por primera vez.

634. Prévias estas indicaciones de que tenemos ya hecho mérito de muchas de ellas en las distintas partes de nuestra obra, nos ocuparemos de la descripcion y uso de los principales taquímetros y de sus verificaciones y correcciones.

635. **Taquímetro de Richer**.—Este instrumento, que lleva el nombre de su autor francés *Richer*, cuyo teodolito del mismo autor hemos explicado (tomo I, 538) y que conviene tener presente, se compone de un disco ó placa circular *d* (fig 266; lám. 25) que termina en dos rebordes, en

cuyo plano superior lleva grabado en la corona extrema el limbo azimutal a, que está dividido en 400 partes que representan los grados de la division centesimal, y cada grado dividido en dos medios grados, resultando 800 partes ó divisiones y siendo el medio grado ó 50 minutos la menor division del limbo. El sentido de la graduacion es de izquierda á derecha. Este disco está unido sólidamente por su parte inferior á una columna cilíndrica y hueca c, la cual termina por su parte inferior en otro disco de metal d' unido á ella formando cuerpo. En la parte hueca y cilíndrica de esta columna se introduce una espiga cilíndrica ó eje, que está fijo perpendicularmente en el centro de una plataforma P de tres tornillos t_1 sobre la que descansa todo el instrumento. Alrededor de este cilindro, cuyo eje de figura es el eje general de rotacion ee de todo el instrumento, puede girar la columna hueca c y con ella el disco d que lleva el limbo azimutal y el inferior d', con los dos movimientos rápido ó lento á voluntad, por medio del sistema t de tornillos de presion y de coincidencia que obran sobre el disco d', sujetando ó dejando libre este disco.

En la parte superior del disco d que tiene cierto grueso y en la que hemos dicho va grabado el limbo azimutal a, está vaciada en sentido cilíndrico la parte circular comprendida dentro de la corona que lleva dicha graduacion y encaja dentro de esta parte vaciada una placa cilíndrica circular p sobre la cual se sostiene formando cuerpo con ella toda la parte superior del instrumento. Esta placa p lleva dos nonius diametralmente opuestos, cuyas divisiones enrasan perfectamente con las del limbo a en todo el movimiento de rotacion alrededor del eje que lleva fijo en su centro la parte vaciada del disco d, pudiendo ser tambien dicho movimiento de rotacion rápido ó lento á voluntad por el sistema t' de tornillos de presion y de coincidencia.

Apretando los tornillos de presion de los dos sistemas t y t', quedan unidas las dos partes superior é inferior del instrumento, formando un solo cuerpo y con la plataforma P que á su vez lo forma con el trípode.

Aflojando el tornillo de presion del sistema t y apretando el del sistema t', pueden girar unidas formando un solo cuerpo las dos partes superior é inferior del instrumento alrededor del eje de figura de la espiga cilíndrica de la plataforma.

Apretando ahora el tornillo de presion del sistema t y aflojando el del sistema t', queda fija á la plataforma la parte inferior del instrumento y por lo tanto el limbo azimutal a, que lleva la graduacion, y solo puede girar la placa p que lleva los nonius y con ella todo lo restante de la parte superior del instrumento que descansa en dicha placa, alrededor del eje de figura de su correspondiente espiga cilíndrica.

Los ejes de figura de los cilindros ó espigas cilíndricas, alrededor de los cuales se verifican los giros que acabamos de describir, coinciden exactamente con la vertical que pasa por el centro del limbo azimutal a en la posicion horizontal de este y la cual es el eje general de rotacion ee de todo el instrumento.

Ahora, sobre la placa p de los nonius se levantan dos caballetes C, C' que terminan en sus respectivos soportes ó cojinetes s, s', y sobre los cuales se apoyan los muñones ó extremos del eje material mm' de rotacion del anteojo oO, cuyo eje material consta de dos partes cilíndricas que están sólidamente fijas al tubo de dicho anteojo en su parte media, sin atravesarle, ó mejor á un collar ó anillo en que va introducido el anteojo. El eje de figura de los dos cilindros unidos al anteojo en su parte media que constituyen su eje material mm' y que es el verdadero eje de rotacion $e'e'$ de dicho anteojo, coincide exactamente con la perpendicular al limbo zenital que pasa por el centro de este, y el eje de figura del anteojo le corta tambien perpendicularmente por construccion, estando situada la interseccion c' en la vertical ee, que es el eje general de rotacion del instrumento, resultando así ser el anteojo céntrico ó concéntrico con los limbos azimutal y zenital.

La altura de los caballetes C, C' permite que el anteojo pueda dar una revolucion completa alrededor de su eje de rotacion $e'e'$ y uno de los soportes s' puede subir ó bajar á voluntad por medio de un tornillo t_2 que se puede mover con el auxilio de una palanqueta que se introduce en los agujeros que hay practicados en la cabeza del tornillo, con el objeto de poder variar la posicion á direccion del eje de rotacion $e'e'$.

Puesto el observador al lado del ocular como para dirigir visuales, el limbo vertical ó zenital z se halla á la izquierda del anteojo y está invariablemente unido al extremo m del eje del material del anteojo que pasa por su centro y al otro extremo m' de dicho eje y á la derecha del observador va unido otro disco d'' sin dividir para que sirva de contrapeso al primero que está á la izquierda, formando el limbo zenital z y el disco d'' con el anteojo y su eje material mm' un solo cuerpo que puede girar alrededor del eje de figura $e'e'$ de los cilindros, con movimiento rápido ó lento á voluntad, por medio del sistema t'' de tornillos de presion y de coincidencia que obran sobre el disco d'' que está á la derecha del anteojo.

El limbo zenital z que tiene la forma anular rodea á otro disco d''' en su mismo plano que va fijo al caballete C y lleva en su centro un taladro por el que pasa para que pueda girar, el eje material mm' del anteojo. Para alijerar el peso del instrumento, el disco circular d''' no es todo sólido, sino que está vaciado en sentido de algunos rádios en forma de rueda, como se ve en la figura. Dicho disco fijo lleva un nonius v en su parte superior cuyo *cero* se halla situado en el extremo superior del diámetro vertical de dicho disco y sus divisiones enrasan exactamente con las del limbo zenital z en el movimiento de rotacion de este en union del anteojo alrededor del eje de rotacion $e'e'$. El disco d''', aunque fijo al caballete C, es susceptible de un pequeño movimiento alrededor del eje $e'e'$ que puede dársele en virtud de un tornillo t_3 sin cabeza, fijo al caballete C, que se hace girar sin avanzar por medio de una llave de cuadradillo y se introduce su rosca en la tuerca en que termina una pieza adicional que está unida al disco fijo formando cuerpo con él. Este pequeño movimiento puede obtenerse tambien por medio del sistema explicado en el párrafo 507 del tomo I.

La division del limbo zenital *z* es la misma que la del limbo azimutal *a* y va tambien de izquierda á derecha, estando á la izquierda el *cero* del diámetro 0°—200° suponiéndole horizontal y por construccion el eje de figura del anteojo debe hallarse situado en sentido de dicho diámetro 0°—200°, en el mismo plano que pasa por este diámetro perpendicular al limbo zenital y paralelo á dicho diámetro. El objetivo O del anteojo está en el lado del *cero* y el ocular *o* en el de la division 200°. De este modo, cuando el eje de figura del anteojo sea horizontal, la division 100° del limbo zenital *z* coincidirá con el *cero* del nonius *v* del disco *d'''* fijo al caballete C, y el diámetro 100°—300° tendrá la posicion vertical.

636. La apreciacion de los nonius de los limbos azimutal y zenital de este taquímetro es de 1 minuto (611).

637. En el disco fijo *d'''* que tiene el nonius *v* hay un nivel *n* fijo al mismo, por lo cual permanece invariable en su posicion en todos los movimientos del anteojo en su giro alrededor del eje *e'e'*. Sirve este nivel para instalar el taquímetro en estacion haciendo que sea vertical su eje general de rotacion *ee* por medio de los tornillos t_1 de la plataforma y del de correccion particular t_4 del nivel *n*. El disco *d''* lleva un segundo nivel *n'* que es muy sensible y cuya burbuja debe situarse en el punto medio cuando sea horizontal el eje óptico del anteojo, tanto para que acuse la horizontalidad de este cuando convenga, como tambien para cuando se quiera emplear el taquímetro como nivel ordinario en los casos en que es necerario conocer con mucha precision el desnivel que hay entre dos puntos.

638. *Orientador magnético*.—Se llama así á un anteojo ó tubo cilíndrico *rr'*, provisto de un ocular *r* y un objetivo *r'* llamado *colimador*, que está situado en la parte inferior del instrumento en la columna *c* y entre el limbo azimutal *a* y la plataforma P, cuyo eje óptico es perpendicular al eje *ee* general de rotacion del instrumento, y por tanto, horizontal en la posicion vertical de este. Dicho anteojo lleva suspendida de un hilo sin torsion en el interior del tubo una aguja imantada, y junto al objetivo va grabada la graduacion en un círculo de talco á la altura del plano en que se mueve la aguja en la posicion horizontal del anteojo (tomo I, 576). La línea *norte-sur* de la graduacion coincide con el eje óptico del anteojo, estando el objetivo del lado de la letra N de dicha línea *norte-sur* del círculo de talco. Dicho eje está situado en un plano vertical paralelo al que pasa por el eje óptico del anteojo *o*O y la línea 0°—200° del limbo azimutal.

El anteojo *rr'* se halla unido al instrumento por medio de una pieza *p'* que en uno de sus extremos lleva un tornillo de correccion t_5, y el otro está unido al anteojo, pudiendo darse á este un pequeño movimiento por medio de dicho tornillo t_3, para cambiar la direccion de su eje óptico respecto al diámetro 0°—200° del limbo azimutal *a*.

Para orientar el taquímetro por medio de este aparato en cualquier punto de estacion, hay que tener en cuenta que la declinacion varía en cada tiempo y lugar, por lo cual, en uno de los puntos en que se opera en el terreno, se determina la meridiana astronómica y se instala en él el taquímetro. Se hace la coincidencia del cero del limbo azimutal *a* con el de su nonius, y aflojando el tornillo de presion del sistema *t*, se mueve todo el instrumento para dirigir la visual á un jalon situado en un punto de esta meridiana; hecho esto, se deja libre la aguja del aparato orientador, y por medio del tornillo t_3 de éste se da un pequeño movimiento al tubo del anteojo *rr'* hasta que enrase dicha aguja con el *cero* de la graduacion. Al cambiar el instrumento de estacion no habrá más que hacer la coincidencia de los ceros del limbo azimutal y de su nonius, y aflojando el tornillo de presion del sistema *t*, mover todo el instrumento hasta que la aguja marque el cero de la graduacion, con lo cual el eje óptico del anteojo *o*O se hallará en sentido de la meridiana verdadera y el taquímetro quedará orientado. Esta misma operacion repetida en todas las estaciones, nos dará todos los ángulos azimutales que se tomen referidos á dicha meridiana.

639. **Usos del taquimetro.**—*Medida de los ángulos.*—La medida de un ángulo azimutal se practica como en los teodolitos y en sentido de la graduacion, es decir, de izquierda á derecha. Antes de medir un ángulo azimutal se hace generalmente la coincidencia del cero del limbo azimutal con el del nonius que le corresponde, ó sea el que está al lado del objetivo de los dos, que como hemos dicho, lleva diametralmente opuestos la placa *p*, que con el anteojo constituye la alidada de anteojo del taquímetro (tomo I, 257).

El diámetro 0°—200°, aunque puede suponerse que se halla situado en el plano vertical que pasa por el eje óptico del anteojo, puede, sin embargo, hallarse en cualquiera otra direccion, pues el error de colimacion no influye en la medida de los ángulos (tomo I, 289 y 290).

Puede obtenerse tambien la medida de un ángulo sin hacer préviamente la coincidencia de los ceros (tomo I, 292), y con más exactitud, en caso necesario, tomando el término medio de las lecturas que marcan ambos nonius (tomo I, 497).

Tambien pueden repetirse y reiterarse los ángulos azimutales como hemos explicado (tomo I, 294 á 301, y 589 *b* al 590).

640. Para medir un ángulo zenital, supondremos que el anteojo *o*O (figura 267; lám. 26) tiene la posicion horizontal, que es circunstancia precisa, cuando la division 100° del limbo zenital coincide con el *cero* del nonius *v*. Sea ahora el ángulo zenital AOZ; al dirigir la visual al punto A, el anteojo tomará la posicion *o'*O', el cero del limbo zenital *z* se hallará ahora en el punto *c* y el nonius *v* del disco fijo *d* señalará el arco *a*, que siendo menor que 100° nos dirá que la visual OA es ascendente. Si el án-

gulo zenital fuese el BOZ, entonces el anteojo tomaría la posicion $o''O''$, el cero del limbo zenital estaría en r y el nonius v señalaría el arco a', que siendo mayor que 100° nos dirá que la visual OB era descendente.

641. *Objetivo, ocular y retículo.*—Para que este instrumento llene las funciones de telémetro, ya hemos dicho (614) que el anteojo oO (figura 266; lám. 25) es analático; su tubo se compone de dos partes ó mitades b y b' unidas á rosca. En el extremo de una de estas partes b lleva el objetivo O, el cual está compuesto de dos lentes acromáticas plano-convexas de 42 milímetros de diámetro la exterior y de 36 la interior, siendo la distancia focal de 26 milímetros, y en el otro extremo entra á enchufe el tubo analático que lleva la lente colectora y puede moverse á rozamiento fuerte en sentido de su longitud. En la otra parte b', se halla el ocular o, del sistema Ramsden, y en la parte interior de la lente del ocular tiene grabadas dos rayas (fig. 268; lám. 26) sumamente finas, una horizontal r y otra vertical s, cuya interseccion c coincide con el eje óptico y determina la direccion de éste, resultando así estar fijo el retículo y centrado por construccion. El tubo del ocular o (fig. 266; lám. 25) se puede tambien hacer que entre y salga á rozamiento en el extremo de la parte b' y áun hacerle girar alrededor de sí mismo ó sea de su eje de figura, permaneciendo siempre centrado. Otras dos rayas horizontales a y b (fig. 268; lám. 26) paralelas y equidistantes de la c, forman el micrómetro sencillo para la medida de las distancias. Estas rayas sustituyen, como sabemos, á los hilos de platino ó de tela de araña y á las cerdas de los retículos ordinarios.

642. La separacion de las rayas a y b corresponde á un ángulo diastimométrico que tiene por tangente 0,005 ó $\frac{1}{200}$, cuya relacion es en la que se halla la parte interceptada en la mira con la distancia que separa á ésta del punto de estacion.

643. *Mira ó escala.*—La mira que corresponde á este taquímetro y que está representada en la figura 269 (lám. 26) tiene de largo 4 metros y consta de dos partes iguales, que unidas por un juego de charnelas, se pueden plegar para facilitar su trasporte. En su cara posterior hay una varilla de metal que se mueve á corredera y se puede fijar á la mira por medio de dos tornillos, con el objeto de que permanezca estable cuando esté abierta. Tiene tambien dos agarraderos para sostenerla y colocarla en posicion vertical por medio de un perpendículo que lleva en uno de sus costados.

El ancho de la cara anterior de la mira está dividido en sentido de su longitud en dos fajas ó bandas iguales por medio de la recta rt y la mitad de la izquierda en otras dos por la recta ph. La mitad de la derecha está dividida en partes bn, ng.... que tienen de longitud medio metro, separadas ó marcadas con brazos mn rojos y señaladas con las cifras 1, 2, 3... negras é invertidas, estando cada medio metro bn dividido en dos partes iguales que son cuartos de metro, por medio de trazos azules *cd* que no están numerados.

Cada uno de los medios metros *bn* está dividido en diez partes iguales *ae*, *ei*.... en la primera faja de la izquierda, que equivale cada una á medio decímetro y están pintadas alternativamente de rojo y blanco. Cada medio decímetro *ae*, *ei*... está dividido en cinco centímetros *rs*.... en la faja de enmedio, y están pintados alternativamente de rojo y blanco, los que pertenecen á los medios decímetros *ae* pintados de rojo, y de blanco y azul los que corresponden á los medios decímetros *ei* pintados de blanco, siendo por lo tanto la menor division de la mira el centímetro *rs*.

644. Siendo como hemos dicho (636) 0,005 ó $\frac{1}{200}$ la tangente del ángulo diastimométrico, y por lo tanto la relacion en que se hallan las partes interceptadas de la mira con sus distancias al centro de estacion (tomo I; 189), tendremos que un metro de la mira equivale á 200 metros del terreno, y cada medio metro *bn* á 100 metros, de modo que los trazos rojos *mn* numerados son las *centenas*, y los trazos azules *cd* sin numerar representan medias centenas. Cada medio decímetro *ae* ó $0,^{m}05$ equivale á 10 metros ó representa las *decenas*, y cada centímetro *rs* ó $0,^{m}01$ equivale á 2 metros ó dos unidades. De modo que la menor division *rs* de la mira que es el centímetro ó $0,^{m}01$ representa la longitud de 2 metros en el terreno.

645. Para medir la distancia de un punto dado al de estacion se instala el taquímetro en éste y la mira en el punto dado en posicion vertical; se dirige la visual á la mira, procurando que el eje óptico del anteojo esté horizontal, y se hacen las lecturas que señalan los dos hilos micrométricos *a* y *b* (fig. 268; lám. 26), cuya diferencia nos expresará el número de menores divisiones de la mira y la fraccion de una de estas comprendida en la parte interceptada en ella por los trazos micrométricos *a* y *b*. Conviene que el trazo inferior *a*, cuya lectura la designaremos con la misma letra *a* de dicho trazo, y lo mismo se hará en todas las lecturas, enrase con una de las divisiones de medios metros señaladas con cifras en la mira, que hemos dicho marcan las centenas, y solo habrá entonces que apreciar los decímetros y centímetros y la fraccion de centímetro en la lectura *b* del trazo micrométrico superior *b*. Dicha fraccion, que hay que apreciarla á ojo, debe hacerse la apreciacion con la posible exactitud.

646. No debe olvidarse que el anteojo es astronómico y que las imágenes de los objetos se ven invertidas (tomo I; 232 y 237). Por eso, cuando se hacen las lecturas de la mira, como ésta se vé invertida, las cifras se presentan directas, y la mayor lectura *a* es la correspondiente á la mayor altura que se presenta en el hilo ó trazo inferior *a* y la menor lectura corresponde á la altura menor que se presenta en el trazo superior *b*, y por esta razon para leerlas con comodidad se han puesto en las miras invertidos los números grabados en ellas para que se presenten derechos á la vista.

647. Para obtener la distancia que se busca, calcularemos el valor del número generador g, que como hemos dicho (578) es la distancia del terreno expresada en metros, que corresponde á la parte interceptada en la misma por los trazos micrométricos ó sea la diferencia de lecturas de los hilos a y b, que en lo sucesivo las representaremos siempre por las mismas letras con que se señalen dichos hilos en las figuras. Por lo tanto, representando por d el valor de la menor division de la mira que en nuestro caso es 0,m01, tendremos la expresion

$$g = \frac{a - b}{0{,}005} \times d \qquad [27];$$

de la que resulta

$$g = 200\,(a - b) \times d \qquad [28]$$

Ejemplo. Si $a = 300$ de las menores divisiones de la mira y $b = 240$ de las mismas, como $d = 0{,}^{m}01$, sustituyendo en la expresion anterior estos valores, resultará:

$$g = 200\,(300 - 240) \times 0{,}^{m}01 = 200 \times 60 \times 0{,}^{m}01 = 120 \text{ metros.}$$

En efecto, como cada centímetro ó menor division de la mira hemos dicho (638) que equivale á 2 metros del terreno, los 60 centímetros que dá la diferencia de lecturas ó sea la parte interceptada de la mira, corresponderá á 120 metros del terreno.

Con esta mira, cuya longitud hemos dicho que es de 4 metros, y bajo la relacion $\frac{1}{200}$ que representa la tangente del ángulo diastimométrico, se pueden apreciar distancias que no excedan de 800 metros.

648. Sustituyendo el valor de g en la ecuacion hallada [4] (578)

$$D = g \operatorname{sen}^2 \varphi$$

se hallará la distancia que separa la mira del punto de estacion reducida al horizonte.

649. Para hallar la altura de mira que corresponde al eje óptico del anteojo en su posicion horizontal, ó sea la altura del instrumento que llamaremos m, observaremos que análogamente á lo dicho (tomo I, 407) y multiplicando por d, se tendrá

$$m = \frac{a + b}{2} \times d \qquad [29]$$

650. **Verificaciones y correcciones**. —1.ª *Verticalidad del eje general de rotacion del instrumento.*

La horizontalidad del limbo azimutal nos asegurará de la verticalidad del eje general de rotacion del instrumento. Se hace esta verificacion, dejando solamente libre el tornillo de presion t (fig. 266; lám. 25) y moviendo todo el instrumento alrededor del eje ee general de rotacion, y viendo si en todas las posiciones el nivel n está bien horizontado. Se corrige, cuando no se verifica esta circunstancia, por el procedimiento explicado (tomo I, 403), valiéndose del tornillo particular de correccion t_4 del nivel n y de los tornillos t_1 de la plataforma P.

651. 2.ª *Perpendicularidad del eje óptico del anteojo con su eje de rotacion.*

Esta circunstancia se verifica siempre en este instrumento por coincidir el eje óptico con el de figura del anteojo, que es por construccion perpendicular á su eje de rotacion (632, 2.ª). Por lo tanto, en el giro de dicho eje óptico alrededor de su eje de rotacion describirá un plano y no una superficie cónica.

652. 3.ª *Horizontalidad del eje de rotacion del anteojo y verticalidad del trazo centrado del retículo.*

La verticalidad del plano que describe el eje óptico alrededor de su eje de rotacion, nos dará por resultado la horizontalidad de dicho eje de rotacion. Se hace la verificacion, dirigiendo la visual á una línea vertical cualquiera, como la arista de un edificio ó el cordon de un perpendículo, y viendo si en todos los movimientos del anteojo, el cruzamiento de las rayas y además toda la raya s (fig. 268; lám. 26), coinciden exactamente con dicha vertical elegida. En caso contrario, se hace la correccion valiéndose del tornillo t_2 (fig. 266; lám. 25), que hace subir ó bajar el soporte s' de uno de los dos caballetes C' en que se apoya el eje $e'e'$, hasta que se cumpla la condicion enunciada. Hecha esta correccion, el eje óptico del anteojo describirá en su giro alrededor de su eje de rotacion un plano vertical.

653. 4.ª *Horizontalidad del eje óptico del anteojo y coincidencia exacta en este caso del cero del nonius correspondiente al limbo zenital, con la division* 100° *de la graduacion de este limbo.*

1.° Hemos dicho (640) que para la determinacion de los ángulos zenitales debe coincidir el cero del nonius del limbo zenital con la division 100° de este limbo, cuando el eje óptico del anteojo es horizontal, ó lo que es lo mismo, perpendicular al eje ee general de rotacion del instrumento (figura 266; lám. 25), cuando este eje tiene la posicion vertical.

Para hacer esta verificacion, se hallan en el terreno dos puntos que tengan la misma altura (177). Se coloca el taquímetro en estacion en uno de ellos, y en el otro una mira dispuesta verticalmente y en la que antes se haya señalado la altura del centro del instrumento sobre el punto de estacion. Se dirige la visual á la mira y se mueve el anteojo hasta que el cruzamiento de los trazos del retículo vaya á parar al punto marcado en la mira.

Una vez puesto el anteojo en la posicion horizontal, se le fija y se observa si existe la coincidencia indicada entre el cero del nonius y la division 100° del limbo zenital, y en caso contrario se hace la correccion valiéndose del tornillo sin cabeza t_5, que imprime pequeños movimientos al disco d''' que lleva el nonius v, independientemente del giro del anteojo alrededor de su eje de rotacion.

Como por el pequeño movimiento que acaba de darse al disco d''' se descorrige el nivel n, se le vuelve á horizontar por medio de su tornillo de correccion particular t_4 para que acuse la verticalidad del eje general de rotacion del instrumento ee que resultó satisfecha por la primera verificacion y correccion, y tambien para que sirva para acusar la coincidencia indicada del cero del nonius con la division 100° del limbo zenital.

Por último, el nivel n' que se halla en el disco d'' y participa del movimiento de rotacion del anteojo, debe estar horizontado cuando es tambien horizontal la posicion del eje óptico del anteojo, para que su horizontalidad acuse en lo sucesivo la del eje óptico de dicho anteojo y para que el taquímetro pueda servir de nivel ordinario, por lo cual si no se verifica el estar horizontado dicho nivel n', se le horizonta corrigiéndole por medio de su tornillo particular de correccion hasta que la burbuja acuse la horizontalidad.

654. 2.° La horizontalidad del eje óptico del anteojo puede tambien obtenerse por el método siguiente, análogo á los expuestos en el tomo I (406, 407 y 408), teniendo solo en cuenta que en este instrumento el limbo que lleva la graduacion es el que se mueve con el anteojo y el nonius vertical permanece fijo, y que la coincidencia del cero del nonius debe hacerse con la division 100° del limbo zenital al dar principio á la operacion.

Para esto, se pone el taquímetro en estacion (fig. 270; lám. 26) y se coloca una mira M á bastante distancia del observador. Se hace la coincidencia del cero del nonius v del disco fijo con la division 100° del limbo zenital y dirigiendo una visual á la mira se anota la lectura que corresponda al punto donde vaya á parar a. Téngase presente que el observador que está en el lado del ocular tiene el limbo zenital á su izquierda y el contrapeso á su derecha. Hecho esto, se dá una semirevolucion á la parte superior del instrumento, y el ocular o irá á parar á donde estaba el objetivo O y este al lado del observador, quedando ahora el limbo zenital á su derecha y el contrapeso á su izquierda, por lo cual se da otra semirevolucion al anteojo alrededor de su eje de rotacion, en cuyo caso la division 300° coincidirá con el nonius v y se vuelve á dirigir á la mira la puntería. Si esta segunda visual va á parar á la misma division a que la primera, dando exactamente la misma lectura, se realizará la circunstancia que se desea, pues el eje óptico del anteojo tendrá la posicion horizontal.

Cuando en la primera observacion la visual va á parar á un punto tal como a', y al dar la semirevolucion á la parte superior del instrumento y despues otra al anteojo, como hemos dicho, la segunda visual va á parar á otro punto a'', el eje óptico del anteojo estará oblícuo respecto del horizonte. Para hacer en este caso la correccion, se apuntan con precision las dos lecturas obtenidas y señalando en la mira exactamente el punto medio a de la diferencia de estas lecturas, se dirige de nuevo la visual á este punto medio, con lo cual el eje óptico del anteojo quedará en la posicion horizontal Como despues de esta correccion ya no habrá coincidencia entre la division 300° del limbo z y el nonius v, se procede en todo como acabamos de decir anteriormente, tanto para la coincidencia dicha como para el arreglo de los niveles.

655. 3.º Puede tambien hacerse esta verificacion sin la coincidencia prévia del cero del nonius con la division 100° del limbo zenital, es decir, haciendo uso del anteojo, cualquiera que sea su inclinacion. Para esto, se coloca el taquimetro en estacion y se dirige la visual á un punto lejano P (fig. 271; lám 26) que sea notable, como el extremo de una veleta ó pararayos, ó el de una banderola de bastante altura y colocada en terreno elevado, en el caso de no haber otro recurso Se hace la lectura del ángulo zenital que señale el nonius v, y en la hipótesis que ahora nos ocupa de no coincidir el cero del nonius v con la division 100° del limbo zenital z cuando esta division está en un punto t del diámetro vertical de dicho limbo z, la lectura será la correspondiente al arco rv, y no al verdadero rt, que llamaremos a, siendo el error cometido por defecto el arco vt, que representaremos por e. Dando ahora una semirevolucion á la parte superior del instrumento alrededor del eje general de rotacion ee, el anteojo Oo tomará la posicion $O'o'$ simétrica de la anterior y que estaría ahora representada por la $O''o''$; el punto v vendrá á parar á v' y el r á r'. Haciendo despues girar al anteojo $o'O'$ en el sentido que indica la flecha hasta que el objetivo O' se dirija de nuevo al punto P y tome la posicion $O''o''$ paralela á la primitiva Oo, el cero del limbo zenital habrá recorrido todo el arco $mm'\,m''$ señalado con trazos y habrá pasado por debajo del nonius v' un arco de la magnitud del $m\,m'\,m''$, de modo que la lectura del nonius v' corresponderá ahora al arco a' que ponemos de puntos y que en el caso de estar corregido el instrumento, tendríamos

$$a + a' = 400°;$$

pero que en el caso actual seria $a + a'$ menor que 400° en una cantidad p, de modo que resultaria

$$a + a' = 400° - p\,,$$

siendo p el arco $v'v''$ duplo del error vt por defecto que hemos llamado e, luego

$$a + a' = 400° - 2e.$$

Si p fuese 12′ seria $e = 6'$ y bastará añadir 6′ á cada uno de los ángulos que se observen.

Si el error fuese por exceso, entonces se tendrá

$$a + a' > 400^\circ,$$

ó lo que es lo mismo

$$a + a' = 400^\circ + 2e,$$

y siendo $p = 12'$ como antes, habrá que restar $6'$ de todos los ángulos que se observen.

Si bien de esta manera puede considerarse que los resultados se obtienen como si el instrumento estuviera corregido, se pueden evitar estas sumas y restas en la medida de los ángulos zenitales haciendo la correccion. Para esto, se vuelve á colocar de nuevo el anteojo en su primera posicion O*o*, y se hace otra vez la lectura del arco a para mayor seguridad, y añadiéndola el error $6'$, se mueve el disco fijo d como ya hemos dicho, hasta que el *cero* del nonius v señale en la graduacion del limbo zenital el ángulo verdadero igual á $a + 6'$ en el caso particular que consideramos ó en general á $a + e$, con lo que el instrumento estará corregido; pues al estar bien marcado el ángulo medido, si se mueve despues el anteojo hasta que la division 100° del limbo zenital coincida con el nonius, se concibe que su eje óptico tendrá la posicion horizontal.

656. 5.º *Correspondencia exacta entre la graduacion de la mira y el ángulo diastimométrico del anteojo.*

La division de la mira debe ser exactamente la que corresponde al ángulo diastimométrico del anteojo, con el fin de que la parte interceptada en aquella suministre con toda exactitud la medida de las distancias, en la hipótesis de ser horizontal el eje óptico del anteojo. Se hace la verificacion midiendo en un terreno que se halle próximamente horizontal y con toda la exactitud que sea posible, una base ó distancia que suele tomarse de 200 metros de longitud en general. Hecho esto, se coloca el taquímetro en estacion en uno de los extremos de esta base y la mira en el otro, colocándola perfectamente vertical, y para que conserve esta posicion durante la operacion, se sujeta á un jalon ó banderola clavado profundamente en el terreno. Se pone horizontal el eje óptico del anteojo y se hacen las lecturas con los dos micrométricos, deduciendo la distancia como hemos explicado (645). Si el valor de esta distancia es exactamente igual al que se obtuvo en la medida directa de la misma, el ángulo diastimométrico del anteojo será el que corresponde á la graduacion de la mira. Cuando no se verifica esta circunstancia, se corrige dicho ángulo variando la posicion del tubo analático, para lo cual se destornillan y separan las dos partes que forman el tubo del anteojo, y se hace entrar ó salir, segun convenga, á rozamiento fuerte, el tubo analático en la parte del tubo del anteojo en que hemos dicho va situado (641) la cantidad que se juzgue conveniente. Se vuelven despues á atornillar las dos partes del tubo del anteojo y se repite la operacion anterior, y así se continúa hasta que se obtenga la identidad de la medida directa y de la obtenida por la diferencia de las lecturas de la mira, en cuyo caso el ángulo diastimométrico del anteojo estará corregido.

657. Estas cinco verificaciones que acabamos de explicar para el taquímetro de Richer, corresponden tambien á todos los taquímetros, y las correcciones son análogas. En unos hay que hacerlas todas, y presentan medios para hacer las correcciones, y en otros solo hay necesidad de practicar algunas por cumplir con las demás por construccion, siendo hoy la tendencia de los constructores, á que los instrumentos salgan de sus talleres en disposicion de que no haya que hacer con ellos ninguna verificacion ni correccion, ó todas las menos posibles.

658. Existe otro taquímetro de este mismo autor, que viene á ser análogo al anterior, pero más pequeño, aunque difiere de aquel en que no tiene el disco d'' (fig. 266; lám. 25) ni el nivel n', estando unido el nivel n al caballete opuesto al limbo zenital. En vez del disco d''' que lleva el nonius v y está fijo al caballete C, se halla aquel sustituido por una raya que en su extremo superior tiene grabado el nonius y el inferior va fijo al caballete próximo tambien al limbo zenital, con el cual enrasa dicho nonius, y está dispuesto de modo que puede tener un pequeño movimiento, independiente del que tiene el limbo zenital, por medio del sistema explicado en el tomo I (507).

659. **Taquímetro de Troughton.**—Este instrumento, que lleva el nombre de su autor inglés Troughton, tiene cierta analogía con el teodolito del mismo autor que hemos explicado (tomo I, 517), el cual debe consultarse, en cuanto se refiere á la parte inferior del instrumento, y varía como es consiguiente en su parte superior en lo relativo á las condiciones que debe llenar para que ejerza las funciones de *telémetro* ó medidor de distancias.

La parte inferior tiene como dicho teodolito el borde su limbo azimutal a (fig. 272; lám. 26) en forma cónica, donde va grabada la division centesimal en grados y medios grados, presentando 800 divisiones como en el taquímetro de Richer; pero cambia el sentido de la graduacion, pues en este va de derecha á izquierda, y no de izquierda á derecha, como en aquel se verifica, lo que da lugar á que al medir los ángulos azimutales, se tomen estos en este mismo sentido, dirigiendo la primera visual al objeto de la derecha. Este limbo azimutal a va unido como en el de Richer á la columna c que en este es sólida y pasando por un taladro que hay en la plataforma P de tres tornillos t_1, descansa en esta y va á terminar en la pieza p_1 que se une al trípode. Dicha columna puede girar alrededor del eje general ee de rotacion del instrumento, pudiendo ser su movimiento rápido ó lento, á voluntad, en virtud del sistema t de tornillos de presion y de coincidencia. Su trípode es análogo al que corresponde al teodolito del mismo autor y que hemos descrito (tomo I, 344).

La parte superior del instrumento se compone de la placa p que va superpuesta al limbo azimutal a de manera que recubre toda su graduacion, excepto en los trozos que corresponden á los dos nonius que lleva dicha placa diametralmente opuestos. Las dos partes de esta placa donde van trazados los nonius están tambien en forma de superficie cónica que es prolongacion de la del borde del limbo que lleva la graduacion y que ajusta y enrasa exactamente con ella, pues esta disposicion hace más cómoda la observacion y lectura de las divisiones Los espacios vacíos que lleva la placa p tienen por objeto dejar descubierta á la vista solamente la parte necesaria del limbo azimutal para hacer las lecturas.

Sobre la placa p se levantan los caballetes C, C', los cuales terminan en los soportes s, s' que sostienen el eje de rotacion $e'e'$ del anteojo, al que van unidos formando cuerpo el anteojo oO y el limbo zenital z, cuya graduacion va en sentido de izquierda á derecha, dispuesto todo exactamente por el mismo sistema que en el taquímetro de Richer, y todas sus piezas tienen todos los movimientos explicados por medio de los mismos sistemas de tornillos t' y t'', de presion y de coincidencia, bastando solo la inspeccion de la figura para comprenderla. Se diferencia, sin embargo, del teodolito de Richer, en que no lleva como éste el disco no dividido d'' que sirve de contrapeso (fig. 266; lám. 25), y teniendo el que ahora nos ocupa el sistema de tornillos t'' de presion y de coincidencia que llevaba en aquel el disco d'', dispuesto de manera que obra directamente sobre el mismo limbo zenital z (fig. 272; lám. 26).

Una pieza p_2 fija al caballete C, lleva los nonius v del limbo zenital z que enrasan exactamente con las divisiones de dicho limbo y puede tener un pequeño movimiento para su correccion alrededor del eje $e'e'$ de rotacion del anteojo por el mismo sistema que en el taquímetro de Richer ú otro análogo, por medio del tornillo t_2.

La apreciacion de los nonius de los limbos azimutal y zenital en este taquímetro es tambien de un minuto (611).

660. Este taquímetro lleva cuatro niveles; el primero n va situado en la placa p que lleva los nonius y recubre el limbo azimutal; el segundo n' va situado en el caballete C' y ambos sirven para obtener la verticalidad del eje general ee de rotacion del instrumento; el tercero n'' va colocado en la misma pieza p_2 fija al caballete C que lleva los nonius v del limbo zenital, y sirve para acusar la estabilidad de la posicion dada á dicha pieza en virtud de su tornillo de correccion particular t_2; y el cuarto nivel n''' que va colocado sobre el anteojo oO y sirve para acusar la horizontalidad del eje óptico de dicho anteojo.

Los dos niveles n y n' llevan en sus dos extremos los correspondientes tornillos de correccion particular por el sistema de roldanas con tuercas que se mueven con el auxilio de una pequeña palanca ó palanqueta, como en el teodolito del mismo autor (tomo I, 517). Los otros dos niveles n'' y n''' van unidos respectivamente á la pieza p_2 y al anteojo por uno de los extremos del tubo por un juego de charnela y en el otro extremo llevan el tornillo particular de correccion del mismo sistema de roldanas con tuercas.

661. *Orientador magnético.*—En el centro de la placa *p* que lleva los nonius y en el espacio que queda entre los dos caballetes C y C′ que se apoyan en ella, va colocada una brújula *b*, cuyo centro está situado en el eje general de rotacion *ee* del instrumento, y su diámetro 0°—200° está en sentido ó coincide con el 0°—200° del limbo azimutal *a*.

La graduacion del limbo de la brújula es completa, centesimal y está en sentido contrario de la del limbo azimutal, es decir, que á partir del *cero*, comun á ambas graduaciones, va en sentido de izquierda á derecha en la brújula, mientras que á partir del mismo punto la del limbo azimutal va de derecha á izquierda.

662. En virtud de lo dicho, al mismo tiempo de servir la brújula de *aparato orientador*, sirve tambien para comprobar separadamente los valores obtenidos en la medida de los ángulos azimutales.

En efecto, sea O el centro de estacion (fig. 273; lám. 27) y OX y OY los ejes de las *x* y de las *y*, y supongamos que puesto el taquímetro en estacion en el punto O, la aguja *ns* de la brújula tome la direccion que se vé en la figura. Se anota desde luego el rumbo *r′* del eje OY que señale la punta azul *n* y despues se toma el ángulo azimutal θ en el sentido que indica la flecha, es decir, caminando el nonius de derecha á izquierda desde el eje OY en que se supone se halla el *cero* de la graduacion del limbo azimutal, que permanece fijo, hasta llegar al eje OX. La brújula que está situada en la placa de los nonius y que se mueve con ella, toma el movimiento que la corresponde de derecha á izquierda (tomo I, 363) y al llegar al punto X se anotará el ángulo azimutal θ y el rumbo *r* del eje OX. La diferencia *r*—*r′* de dichos rumbos tomados con la punta azul deberá ser igual ó próximamente igual al ángulo azimutal θ.

Lo mismo sucederia si la direccion de la aguja hubiese sido la *ns* (figura 274; lám. 27), y en el caso de estar el taquímetro orientado, es decir, de modo que la aguja estuviese en la direccion del eje OY, si fuese su posicion la de la fig. 275 (lám. 27), entonces la diferencia *r*—*r′* daria tambien el ángulo θ tomados los rumbos con la punta azul, pues tomados con la punta blanca el del eje OY seria *cero* y el del eje OX igual á θ; y por último, si la posicion de la aguja fuese la *ns* (fig. 276; lám. 27) entonces el rumbo *r′* del eje OY seria *cero* y el *r* del eje OX seria igual á θ.

663. **Usos del taquímetro.**—*Medida de los ángulos.*—Nada tenemos que decir de nuevo respecto á la medida de los ángulos azimutales y zenitales con el taquímetro de Troughton, pues se siguen los mismos procedimientos que con el taquímetro de Richer (639 y 640).

664. *Objetivo, ocular y retículo.*—El anteojo es analático; la lente objetivo tiene 38 milímetros de diámetro y la distancia focal del anteojo es de 250 milímetros. El ocular es astronómico de Ramsden, amplifica cerca de 30 veces las imágenes y tiene movimiento de arriba abajo y viceversa en sentido vertical, con el fin de poder colocar el eje de la lente á la altura de cada hilo del retículo.

La lente colectora está situada en un tubo analático y tiene movimiento en sentido de la longitud del eje del anteojo por medio de un tornillo que va unido á un piñon que engrana en una barra dentada que está fija en el interior del tubo del anteojo (tomo I, 237).

665. El retículo consta de cinco hilos horizontales, el hilo medio *r* y los cuatro *a*, *a'*, *b*, *b'* y uno vertical *s* (fig. 265; lám. 25). El punto de interseccion *c* del hilo vertical *s* con el horizontal *r* es el cruzamiento que ha de situarse en el eje óptico del anteojo. Los cuatro hilos *a*, *a'*, *b*, *b'* forman un micrómetro múltiple. Los hilos *a'* y *b* determinan un ángulo diastimométrico cuya tangente es 0,004 ó $\frac{1}{250}$ y los hilos *a* y *b'* otro distinto del anterior, cuya tangente es 0,02 ó $\frac{1}{50}$.

666. *Centracion del retículo.*—Para centrar el hilo vertical *s*, se pone el taquímetro en estacion, se hace la coincidencia de los *ceros* del limbo azimutal y de sus nonius y la del *cero* del limbo zenital con la division 100° de este limbo. Se dirije una visual á un jalon colocado á alguna distancia y se hace girar al anteojo alrededor de su eje de rotacion la cantidad de 200° del limbo zenital. Despues se vuelve á hacer girar al anteojo otros 200° alrededor del eje general de rotacion del instrumento, es decir, en sentido del limbo azimutal y se dirije de nuevo la visual hácia el paraje donde se halla situado el jalon, y si va á parar de nuevo á este, el hilo vertical estará centrado. Si la visual no va á parar al expresado jalon, se coloca otro en sentido de la visual, á igual distancia que el anterior del punto de estacion y dividiendo en dos partes iguales el espacio comprendido entre los dos jalones y plantando un tercer jalon en el punto medio, se hace que el hilo vertical coincida con este último jalon, valiéndose de los tornillos horizontales *t*, *t*, del retículo.

667. Para centrar el hilo medio *r*, se dirije la visual á una mira, y se anota la division que cubre dicho hilo. Se dan los mismos giros al anteojo, que se han dicho en el párrafo anterior, y si al dirigir la segunda visual va á parar el hilo *r* á la misma division de la mira que en la primera, el hilo horizontal estará centrado. Si va á parar á distinta division, se marca en la mira la division media de la distancia entre las dos primeras y se hace coincidir el hilo *r* con esta division, valiéndose de los tornillos verticales *t'*, *t'* del retículo.

668. Una vez centrados los dos hilos *r* y *s*, el cruzamiento *c* de estos hilos coincidirá con el eje de figura del anteojo y el eje óptico se confundirá con él y resultará además perpendicular al eje de rotacion del anteojo.

669. Acompaña á este taquímetro en su caja, á prevencion, un retículo independiente como el explicado (619) y el cual es un disco de cristal de roca que lleva grabados los trazos ó rayas que representan los hilos, para hacer uso de él en caso necesario.

670. *Mira.*—La que pertenece á este taquímetro y que está representada en la fig. 277 (lám. 27), tiene 4 metros de longitud y consta de

dos partes iguales que unidas por un juego de charnela, se pueden plegar para facilitar su trasporte, como se ha dicho en la correspondiente al taquímetro de Richer. El ancho de la mira está dividido en sentido de su longitud en dos fajas ó partes iguales por medio de la recta *mn*. La mitad de la derecha está dividida en partes *ab*, *bc*.... de la longitud de un decímetro, pintadas de rojo y blanco alternativamente, y los números invertidos 0, 1, 2, 3..... señalan espacios *ac*, *cd*..... de dos decímetros en la mitad inferior de la mira. Estas mismas cifras sirven para numerar la mitad superior de la mira, acompañándolas de un punto para distinguirlas de las otras

En la otra mitad de la izquierda de la mira, las divisiones *de*..... tienen la magnitud de dos centímetros y van pintadas del mismo modo de blanco y rojo alternativamente, de modo que la menor division de esta mira tiene el valor de 2 centímetros.

671. Si nos referimos al ángulo diastimométrico que determinan los hilos a' y b, (fig. 265; lám 25) para que las divisiones de la mira correspondan á este ángulo, cuya tangente hemos dicho (665) tiene por valor 0,004 ó $\frac{1}{250}$ tendremos (tomo I, 189), que 1 metro de la mira equivaldrá á 250 metros en el terreno, un decímetro de la mira á 25 metros en el terreno, y las divisiones numeradas *ac*; *cd* de dos decímetros á 50 metros; el centímetro de la mira equivaldrá á $2^m,5$ y las menores divisiones de la mira *de*, que hemos dicho tienen 2 centímetros de longitud, equivaldrán á 5 metros en el terreno.

672. El valor del número generador g en este caso será, representando las lecturas por las letras que señalan los hilos y llamando d al valor de la menor division de la mira

$$g = \frac{a' - b}{0{,}004} \times d; \qquad [30]$$

de donde

$$g = 250\,(a' - b) \times d \qquad [31].$$

Ejemplo; si $a' = 150$ y $b = 120$, menores divisiones de la mira, como $m = 0^m,02$, sustituyendo estos valores en la expresion anterior, resultará

$$g = 250\,(150 - 120) \times 0^m,02 = 250 \times 30 \times 0^m,02 = 150 \text{ metros}.$$

En efecto, como cada 2 centímetros ó cada menor division de la mira, equivale á 5 metros del terreno, las 30 divisiones que da la diferencia de lecturas equivaldrán á $5^m \times 30 = 150^m$.

673. Para comprobacion deberá verificarse exacta ó aproximadamente, llamando tambien r la lectura de este hilo medio que

$$a' - r = r - b. \qquad [32]$$

674. Con esta mira cuya longitud total es de 4 metros, y bajo la relacion $\frac{1}{250}$ que representa la tangente del ángulo diastimométrico, se pueden apreciar en este caso distancias que no excedan de 1000 metros.

675. Si nos referimos ahora al ángulo diastimométrico que determinan los hilos a y b' (fig. 265; lám. 25), para que las divisiones de la mira correspondan á este ángulo cuya tangente hemos dicho (665) tiene por valor $0^m,02$ ó $\frac{1}{50}$, tendremos que un metro de la mira equivaldrá á 50 metros en el terreno, un decímetro á 5 metros y las divisiones numeradas de dos decímetros ac, cd, ... á 10 metros; un centímetro de la mira equivaldrá á $0^m,5$ ó sean 5 decímetros en el terreno, por lo que las menores divisiones de la mira que hemos dicho tienen 2 centímetros de longitud, equivaldrán á 1 metro del terreno.

676. El valor de g en este caso será,

$$g = \frac{a - b'}{0,02} \times d \qquad [33]$$

de donde

$$g = 50\,(a - b') \times d \qquad [34]$$

Ejemplo: si $a = 300$ y $b' = 240$ de las menores divisiones de la mira, como $d = 0,^m02$, sustituyendo estos valores en la expresion anterior, resultará

$$g = 50\,(300 - 120) \times 0,^m02 = 50 \times 180 \times 0,^m02 = 180^m$$

En efecto, como cada dos centímetros ó cada menor division de la mira equivale á 1 metro del terreno, las 180 divisiones que da la diferencia de lecturas equivaldrán á $180 \times 1 = 180$ metros. En este caso se vé que la misma diferencia 180 de las lecturas dá la distancia del terreno.

677. Para comprobacion deberá verificarse exacta ó aproximadamente, llamando tambien r la lectura del hilo medio r que

$$a - r = r - b' \qquad [35].$$

678. Con esta mira, cuya longitud total es de 4 metros, y bajo la relacion $\frac{1}{50}$ que representa la tangente del ángulo diastimométrico, se pueden apreciar en este otro caso distancias que no excedan de 200 metros.

679. Sustituyendo estos dos valores de g respectivamente en la ecuacion [4] hallada (578),

$$D = g \operatorname{sen}^2 \varphi$$

se hallarán las distancias que separan á la mira del punto de estacion reducidas al horizonte.

680. La altura de mira correspondiente al eje óptico del anteojo, que llamamos m en su posicion horizontal, y que marca el hilo medio r (fig. 265; lám. 25), debe resultar la misma por las dos fórmulas

$$m = \frac{a' + b}{2} \times d \quad [36] \qquad \text{y} \qquad m = \frac{a + b'}{2} \times d \quad [37],$$

lo que servirá de comprobacion.

681. **Verificaciones y correcciones**.—Precediendo ante todo la centracion del retículo (666), son las mismas que las que hemos explicado en el taquímetro de Richer; las verificaciones 1.ª, 2.ª, 3.ª y 4.ª se practican y se hacen las correcciones de la misma manera que en dicho taquímetro, teniendo solo en cuenta los oficios designados á los niveles n, n', n'' y n''' (660). Respecto á la 5.ª verificacion, se hace tambien del mismo modo para cada uno de los dos ángulos diastimométricos del anteojo, y las correcciones se ejecutan moviendo la lente colectora por medio del tornillo provisto del piñon que engrana en la barra dentada que va unida al tubo del anteojo por su parte inferior (664).

682. **Taquímetro de Salmojraghi**.—Este taquímetro que lleva el nombre de su autor italiano *Salmojraghi*, consta como los dos ya explicados de un limbo azimutal a (fig. 278; lám. 27) y otro zenital z. El limbo azimutal se diferencia del de los anteriores en que está dividido en cuartos de grado de la division centesimal, presentando, por lo tanto, 1.600 partes ó divisiones y siendo el cuarto de grado ó 25′ el valor de la menor division del limbo azimutal a. El limbo zenital z lleva tambien la division centesimal y está dividido en medios grados, presentando 800 partes ó divisiones y siendo el medio grado ó 50′ el valor de la menor division del limbo zenital z.

La placa p superior que lleva los nonius correspondientes al limbo azimutal, recubre todo este limbo, dejando al frente de aquellos solamente al descubierto los espacios necesarios para poder hacer las lecturas en el limbo, todo lo mismo que en el taquímetro de Troughton.

En el taquímetro que ahora nos ocupa se consideran las mismas piezas principales que en los dos anteriores y los mismos ejes de rotacion, y todos los movimientos rápidos ó lentos á voluntad de los limbos, son idénticos á los ya explicados en aquellos, en virtud del sistema de tornillos t' para la placa que lleva los nonius del limbo azimutal y lo demás de la parte superior del taquímetro, y del sistema t'' para los movimientos del limbo zenital z y del anteojo oO, que como en los otros taquímetros van unidos formando cuerpo con el eje material de rotacion del anteojo, el cual está sostenido en los soportes s y s' en que terminan los caballetes C y C′ que se apoyan sobre la placa que lleva los nonius del limbo azimutal a.

El extremo del eje material de rotacion del anteojo opuesto al que lleva el limbo zenital, termina en una pieza m, que es una masa sólida que sirve de contrapeso á dicho limbo.

La columna sólida c va introducida en un taladro circular que hay en la plataforma P de tres tornillos t_1 de correccion ó nivelantes y puede girar alrededor de su eje de figura y con ella el limbo azimutal y todo el instrumento por medio del solo tornillo t que aflojándole puede girar el limbo y apretándole parar su movimiento y fijarle.

Las divisiones del limbo zenital enrasan en su movimiento con el nonius v que va grabado en una pieza p_1 fija al caballete C y que puede tener un pequeño movimiento en virtud del sistema de tornillos t_2 que llevan taladros en sus cabezas y que se mueven por medio de una palanqueta.

La apreciacion de los nonius del limbo azimutal a es de 1', pues constan de un arco que contiene 24 de las menores divisiones del limbo azimutal que son cuartos de grado ó 25', dividido en 25 partes, por lo que la fórmula [2] (tomo I, 308) nos dará

$$x = \frac{d}{n} = \frac{25'}{25} = 1'.$$

La apreciacion del nonius del limbo zenital z es tambien de 1', como en los taquímetros de Richer y de Troughton.

Este taquímetro lleva dos niveles; el uno n llamado *nivel esférico*, que consiste en un casquete esférico de cristal y señala la posicion horizontal de su base cuando la ampolla ó burbuja se halla en el punto más distante de ella, y va colocado en el centro y entre los caballetes C y C'. Dicho nivel sirve para la verticalidad del eje general ee de rotacion del instrumento. El nivel esférico va asegurado por medio de seis tornillos, tres de los cuales sirven en union de los tornillos t_1 de la plataforma para corregirle y los otros tres para asegurarle bien despues de corregido. Por este procedimiento es muy difícil que el nivel se descorrija, aunque pudiera ocurrir alguna vez, pues hasta para evitarlo están dispuestos los tornillos de manera que no sea fácil tropezarlos.

El otro nivel n' va colocado sobre el anteojo oO y encaja en unos topes unidos al tubo del mismo, pudiendo colocarse dicho nivel entre los dos topes por medio de un boton, y desmontarle cuando se hace girar al anteojo alrededor de su eje de rotacion $e'e'$ ó se trasporta el instrumento de un punto á otro. Este nivel recibe el nombre de *nivel volante* y lleva su correspondiente tornillo t_3 de correccion particular, sirviendo despues de horizontado para acusar la horizontalidad del eje óptico del anteojo.

En el extremo inferior de la columna c y en el punto que corresponde al extremo inferior del eje general de rotacion del instrumento, hay una anilla a' de la cual se suspende un perpendículo para colocar dicho punto en la vertical del punto de estacion, y el cordon del perpendículo pasa por un taladro que hay practicado en la meseta del trípode.

El trípode de este taquímetro es como el del teodolito de Troughton (tomo I, 344) y puede tambien el perpendículo ir dispuesto como en este trípode.

683. *Orientador magnético.*—El aparato orientador es una caja b como la declinatoria ordinaria (tomo I, 437) que va colocada sobre la placa p que lleva los nonius del limbo azimutal. Las puntas de la aguja imantada enrasan con dos arcos de círculo de 20 grados de amplitud divididos en medios grados. Tiene los mismos usos, en cuanto á la orientacion, que en los taquímetros anteriores.

684. **Usos del taquímetro** —*Medida de los ángulos.*—Se sigue la misma marcha que en los taquímetros anteriores.

685. *Objetivo, ocular y retículo.*—El anteojo es analático; el objetivo tiene 40 milímetros de diámetro; la distancia focal del anteojo es de 300 milímetros y amplífica 38 veces los objetos. El ocular es acromático y ortoscópico y la lente colectora está fija para que no tenga movimiento dentro del tubo del anteojo.

El retículo está grabado en una placa de cristal de roca y se halla sujeta al tubo del anteojo oO por los tornillos de correccion particular t_4, t_5 (fig. 278; lám. 27), en virtud de los cuales puede moverse de arriba abajo y de izquierda á derecha ó viceversa. Consta tambien como el del taquímetro de Troughton de un hilo vertical s (fig. 265; lám. 25), y cinco horizontales r, a, a', b y b', siendo r el hilo central. Los hilos a y b, a' y b' determinan dos ángulos diastimométricos iguales, cuya tangente es $0{,}01$ ó $\frac{1}{100}$ y los hilos a' y b otro distinto cuya tangente es $0{,}004$ ó $\frac{1}{250}$.

686. Haciendo uso de los dos primeros sistemas a y b ó a' y b' debe resultar como comprobacion al hacer las lecturas en la mira que

$$a - b = a' - b' \qquad \text{y} \qquad a - a' = b - b' \qquad [38]$$

687. *Centracion del retículo.*—La centracion del retículo se practica del mismo modo que en el taquímetro de Troughton (666), teniendo ahora en cuenta que antes de voltear el anteojo ó darle la semirevolucion alrededor de su eje de rotacion $e'e'$ debe desmontarse el nivel n' que va sostenido entre los topes para que no se caiga.

688. *Miras.*—Corresponden á este taquímetro dos miras de distinta longitud (fig. 279; lám. 28). La menor tiene dos metros y la mayor cuatro, que puede doblarse en dos partes iguales para el trasporte, cerrándola por el mismo sistema que se cierra una navaja para introducir la hoja en su mango. Tanto una mira como otra están pintadas de blanco en sus dos caras opuestas, y de negro la numeracion invertida y las divisiones y subdivisiones de las escalas de la mira.

La mira mayor lleva en una de sus caras la division ó escala número 1, y en la cara opuesta la division núm. 2. La magnitud *ab* es la cantidad de cuatro centímetros $0^m,04$, y es la que se toma por la menor division de la mira que representamos siempre en las fórmulas por *d*. En la escala número 1 están numeradas las divisiones *ad* que representan decenas de la menor division *ab* y en la escala núm. 2 están numeradas dichas menores partes de cinco en cinco.

La mira menor tiene en una de sus caras la misma division núm. 2 y en la cara opuesta la núm. 3, en la cual van numeradas de una en una las menores divisiones *ab*, *bc*... Por último, en la escala núm. 1 las menores divisiones *ab* están divididas en dos partes iguales que cada una equivale á 20 milímetros, en la escala núm. 2 en cinco, que cada una vale 8 milímetros, y en la núm. 3 en diez, que cada una equivale á 4 milímetros.

Sin embargo de lo dicho anteriormente, de que se toma por menor division la magnitud de 4 centímetros, las fórmulas que obtengamos respecto á esta magnitud, se pueden obtener con la misma facilidad cuando se toman por division menor las cantidades 20, 8 y 4 milimetros respectivamente.

689. Si nos referimos al ángulo diastimométrico que determinan los hilos *a* y *b* ó *a'* y *b'*, para que las divisiones de la mira correspondan á este ángulo, cuya tangente hemos dicho (685) tiene por valor 0,01 ó $\frac{1}{100}$, tendremos (tomo I, 189), que 1 metro de la mira equivaldrá á 100 metros en el terreno, un decímetro de la mira á 10 metros en el terreno, y un centímetro de la mira á un metro del terreno, por lo que las magnitudes menores *ab*, *bc* de la mira, que son de cuatro centímetros, equivaldrán á cuatro metros del terreno.

690. El valor del número generador *g* en este caso será, representando las lecturas por las letras que señalan los hilos (fig. 265; lám. 25) y llamando *d* al valor de la menor division de la mira

$$g = \frac{a-b}{0,01} \times d \qquad [39],$$

$$g = \frac{a'-b'}{0,01} \times d \qquad [40],$$

y tomando el término medio, para mayor exactitud

$$g = \frac{(a-b)+(a'-b')}{0,01} \times \frac{d}{2} \qquad [41],$$

y como *d* ó sea la menor division de la mira que se emplea en este taquímetro es igual á $0^m,04$, resultará

$$g = 2 \left\{(a-b)+(a'-b')\right\} \qquad [42]$$

691. La altura de mira correspondiente al eje óptico, que llamaremos m, en su posicion horizontal y que marca el hilo medio r (fig. 265, lámina 25) será

$$m = \frac{a + a' + b + b'}{4} \times d = \frac{a + a' + b + b'}{4} \times 0^m,04;$$

de donde

$$m = \frac{a + a' + b + b'}{100} \qquad [43].$$

692. Con la mira cuya longitud total es de 4 metros, y bajo la relacion $\frac{1}{100}$ que representa la tangente del ángulo diastimométrico, se pueden apreciar en este caso distancias que no excedan de 400 metros.

693. Si nos referimos ahora al ángulo diastimométrico que determinan los hilos a' y b, para que las divisiones de la mira correspondan á este ángulo, cuya tangente hemos dicho (685) tiene por valor 0,004 ó $\frac{1}{250}$ tendremos (tomo I, 189), que un metro de la mira equivaldrá á 250 metros en el terreno, un decímetro á 25 metros y un centímetro á 2 metros y medio, de donde la menor division de la mira que es $0^m,04$ equivaldrá á 10 metros en el terreno.

694. El valor de g en este caso será

$$g = \frac{a' - b}{0,004} \times d \qquad [44],$$

de donde

$$g = 10\,(a' - b) \qquad [45].$$

695 La altura de mira será en este caso

$$m = 0,02\,(a' + b) \qquad [46].$$

696. Con la mira cuya longitud total es de 4 metros, y bajo la relacion $\frac{1}{250}$ que representa la tangente del ángulo diastimométrico, se pueden apreciar en este otro caso distancias que no excedan de 1000 metros.

697. Sustituyendo los dos valores de g [42] y [45] respectivamente en la ecuacion [4] (578)

$$D = g \text{ sen.}^2\, \varphi$$

se hallarán las distancias que separan á la mira del punto de estacion reducidas al horizonte.

698. **Verificaciones y correcciones.**—Una vez hecha la centracion del retículo (687) y teniendo solo en cuenta los oficios de los niveles n y n', las verificaciones 1.ª, 2.ª y 3.ª se practican del mismo modo que en el triángulo de Richer (650) y se sigue la misma marcha en las correcciones necesarias.

Respecto á la 4.ª verificacion y correccion, salvo á que puede hacerse tambien como en dicho taquímetro, puede hacerse en este del modo siguiente. Se empieza por corregir el nivel n' (fig. 278; lám. 27), es decir, por averiguar si el eje de figura del nivel es paralelo al eje de figura del anteojo oO (tomo I, 524, 2.ª) para lo cual se horizonta dicho nivel por los tornillos t_1 de la plataforma y sacándole de los topes donde se halla empotrado se le vuelve á colocar de nuevo en ellos invertido, y si la burbuja queda centrada, los ejes son paralelos. En el caso contrario, se corrije la mitad de la desviacion que se observe por el tornillo t_3 de correccion particular del nivel n' y la otra mitad por los t_1 de la plataforma. Una vez seguros del paralelismo de los ejes y horizontado el nivel n', lo estará tambien el eje óptico del anteojo, y en esta posicion si el cero del nonius v no coincide con el diámetro 100°—300° del limbo zenital, se hace la correccion moviendo la pieza del nonius como ya hemos dicho (682) por medio de sus tornillos t_2 de correccion particular. En lo sucesivo la horizontalidad del nivel acusará la del eje óptico del anteojo y la coincidencia indicada, y en el caso de faltar esta, deberá averiguarse en qué se halla la falta, si en la descorreccion del nivel ó en la pérdida de la posicion dada á la pieza p_1 del nonius.

Por último, la 5.ª verificacion y correccion relativa á la conformidad de las dos miras con los respectivos ángulos diastimométricos, no tiene lugar en este taquímetro, por la circunstancia de llevar fija por construccion la lente colectora, segun hemos dicho (685).

699. Existen otros dos taquímetros del mismo autor. El uno menor que el acabado de explicar, tiene el limbo azimutal de 12 centímetros de diámetro y la apreciacion del nonius es de 2′. El objetivo tiene 25 milímetros de diámetro, el retículo dos hilos micrométricos y la tangente del ángulo diastimométrico es de 0,01 ó $\frac{1}{100}$ para la medida de las distancias.

700. El otro taquímetro, menor que el anterior, tiene el objetivo de 22 milímetros de diámetro, el retículo tambien con dos hilos y la tangente del ángulo diastimométrico es de 0,02 ó $\frac{1}{50}$. La graduacion de los limbos está grabada en los cantos cilíndricos de sus discos y la aproximacion de los nonius es de 5′, tanto en el limbo azimutal como en el vertical.

701. **Teodolitos Clepes.—Generalidades.**—Los *teodolitos clepes* ó *ciclo-clepes*, que se suelen llamar vulgarmente *clepes*, son unos aparatos taquimétricos llevados al mayor grado de perfeccion á que se puede aspi-

rar hasta hoy en un instrumento. El nombre que llevan proviene de la circunstancia de tener ocultos estos aparatos dentro de una caja los dos limbos horizontal y vertical, que sirven para la medida de los ángulos.

A la apreciable ventaja de la mayor exactitud y precision en los resultados, reunen la no menos importante del ahorro de tiempo, por la particularidad de salir de manos del constructor verificados y corregidos, es decir, construidos con tal esmero que no há lugar á practicar con ellos ninguna verificacion y correccion, salvo la más sencilla é indispensable de ponerles en estacion y orientarles.

Si se observa lo delicadas y penosas que son la mayor parte de las verificaciones y la dificultad de practicar bien las correcciones, así como el mucho tiempo que á veces suele emplearse en ellas, se comprenderá perfectamente el ahorro de tiempo, de trabajo y de paciencia que proporcionará el uso de estos instrumentos, no teniendo que ocuparse en ellos de verificarlos y corregirlos.

Bien que á primera vista aparecen los *clepes* como instrumentos complicados, no lo son en realidad, pues no teniendo que ocuparse en ellos de sus verificaciones y correcciones, dicho se está que su estudio estará reducido á la descripcion de las partes que les constituyen y al uso que se hace de ellos en la práctica.

702. Respecto á las partes principales que componen los *clepes*, no son ni más ni menos que las que hemos descrito en todos los taquímetros expuestos hasta ahora y su manera de funcionar es análoga. Pero no siendo un *clepe* otra cosa que un taquímetro modificado y perfeccionado, las diferencias que con estos presentan, solo están reducidas á algunas variaciones en las disposiciones de dichas partes principales y á la adicion de otras piezas accesorias y necesarias para conseguir la mayor exactitud y seguridad en los resultados de las operaciones que está llamado á desempeñar en la práctica.

703. Otra diferencia, acaso la más notable, es la de que los clepes tienen el anteojo escéntrico, y siguen en su uso para la determinacion de los ángulos horizontales, las reglas á que están sujetos los instrumentos escéntricos.

Por otra parte, el lector podrá apreciar por sí solo, sin ninguna dificultad, las expresadas diferencias y otras que pudieran existir entre los taquímetros descritos y los llamados clepes en la descripcion detallada que de ellos haremos.

Prévias estas indicaciones, pasaremos á describir los teodolitos clepes y á explicar sus usos.

Existen tres teodolitos clepes de distinta forma y tamaño, que llamaremos *mayor*, *mediano* y *menor*.

704. **Teodolito Clepe mayor**.—Este instrumento que presentamos en alzado y seccion en la fig. 280 (lám. 28) consta de una plataforma de figura trapecial P que se fija al trípode por medio del tornillo t_1 y de las

piezas giratorias p, que se introducen en los huecos ó cabidades que á propósito van practicadas en dicho trípode.

Sobre la plataforma P se apoya otra pieza cilíndrica circular p_1 que puede variar de inclinacion en virtud de una articulacion esférica e_1 que se introduce en la plataforma P y de dos tornillos t_2, y sobre cuya pieza p_1 se apoya como veremos el resto del instrumento.

Una columna hueca c tiene en su contorno interior la figura siguiente: empieza en b, sigue hasta e, se ensancha en este punto hasta h, y vuelve á estrecharse en este punto h hasta s. Esta columna hueca c lleva unido en su extremo superior b, formando cuerpo con ella, el limbo azimutal a y la parte más estrecha hs de su extremo inferior se introduce en una cabidad ó hueco cilíndrico que está practicado en la pieza p_1, pudiendo girar alrededor de su eje de figura y con ella el limbo azimutal a, aflojando el tornillo de presion t, y fijarse á la plataforma apretando dicho tornillo.

Otra columna hueca tambien c' rodea á la columna anterior c y descansa en la parte saliente del trozo más ancho eh de dicha columna c y en su parte superior va unida á ella formando cuerpo una caja de forma cúbica C, dentro de la cual se queda el limbo azimutal a. La columna c' tiene por eje material de rotacion á la columna c, alrededor de la cual puede girar y con ella la caja cúbica C, en virtud del tornillo de presion t' y del de coincidencia t''. El eje de figura de la columna c' coincide con el de figura tambien de la columna c y ambos con el eje general de rotacion ee de todo el instrumento.

En dos caras opuestas de la caja cúbica C hay practicados dos taladros circulares, que sirven de soportes donde se apoya un eje material e_2 cilíndrico que la atraviesa en sentido perpendicular al eje general ee de rotacion del instrumento y lleva en uno de sus extremos por la parte exterior de la caja C y junto á ella el anteojo oO unido á dicho eje formando cuerpo con él por medio de una pieza rectangular p_2, fija al extremo del eje y á la cual se une el anteojo. En la cara de la caja C opuesta á la que va junto al anteojo, pende de una pieza unida á dicha caja una masa sólida M para que sirva de contrapeso.

El eje de figura del eje material cilíndrico que atraviesa la caja es el eje $e'e'$ de rotacion del anteojo. El eje de figura del anteojo y su eje óptico que coincide con él y son uno solo oO, es perpendicular al eje de rotacion $e'e'$ del anteojo y puede este girar alrededor de él trazando un plano.

El limbo zenital z está unido tambien al eje material formando cuerpo con él y queda colocado tambien dentro de la caja cúbica C como el limbo azimutal a. Dicho limbo zenital z participa del movimiento del anteojo, que puede ser rápido ó lento, á voluntad, por medio del tornillo de presion t''' y del de coincidencia t^{IV}. El diámetro de los limbos horizontal y zenital es de 60 milímetros.

El eje de rotacion $e'e'$ del anteojo gira tambien alrededor del punto o' del eje general ee de rotacion del instrumento, y con él el anteojo oO, la caja cúbica C y la columna hueca c', cuando como hemos dicho antes, la columna c' gira alrededor del eje ee, pudiendo ser el movimiento rápido ó lento á voluntad por medio del sistema de los tornillos de presion y de coincidencia t' y t''.

En este instrumento se vé, como hemos dicho (703), que el anteojo oO es escéntrico y la escentricidad está representada por la recta $o'o''$, y esta es una de sus diferencias esenciales respecto de los anteriores taquímetros que hemos explicado y que hemos visto eran céntricos.

La posicion del anteojo oO respecto á la pieza p_2 á que hemos dicho va unido, es susceptible de variacion ó rectificacion, pues se le puede dar algun pequeño movimiento, en virtud de poder girar la pieza por uno de sus extremos que lleva un juego de charnela R y poderse acercar ó separar el otro al anteojo por medio de fuertes tornillos t_3, que obran sin avanzar sobre las tuercas que van fijas en el tubo de metal del anteojo.

Aflojando el tornillo de presion t de la columna c y apretando el de presion t' de la c', puede girar todo el instrumento alrededor de su eje general de rotacion ee.

Apretando el tornillo de presion t de la columna c y aflojando el t' de la columna c, permanece fijo el limbo azimutal a y puede girar la columna c' con todo el resto del instrumento.

705. Lleva el clepe tres niveles; el nivel esférico n en la plataforma P que se horizonta por el tornillo t_1, y el de precision n' que vá colocado sobre la cara superior de la caja cúbica C y se horizonta por los tornillos t_2. Con el nivel n se pone vertical el eje general ee de rotacion del instrumento y con el n' se acaba de rectificar esta verticalidad.

El tercer nivel n'' es volante y se coloca sobre el anteojo, para lo cual las abrazaderas que sujetan á éste son de forma cúbica y sirve para acusar la horizontalidad del eje óptico del anteojo. En caso necesario y colocando este nivel sobre las caras superiores de las abrazaderas cúbicas y horizontándole, se trasforma el instrumento en un verdadero nivel de precision con anteojo de gran potencia.

706. Respecto al trípode ya hemos dicho (630) que los de los clepes son distintos de los de los demás instrumentos, y que sin embargo de sus mayores pretensiones, no los habia sancionado la práctica y se los ha sustituido por los trípodes ingleses, por lo cual, y porque es fácil comprenderlos á la vista, no nos detenemos en su descripcion.

707. *Graduacion y lectura de los limbos.*—Los dos limbos azimutal a y zenital z (fig. 280; lám. 28) que sirven para la medida de los ángulos horizontales y verticales, son de metal blanco, muy duro y susceptible de un pulimento muy brillante, cuyo metal es conocido con el nombre de *bronce de telescopios*. Tienen 60 milímetros de diámetro y llevan la graduacion centesimal, estando divididos en 400 grados y cada grado en 10 partes iguales, de modo que constan de 4 000 partes iguales, que cada una equivale á 0,10 de grado ó 10 minutos centesimales, siendo esta cantidad la menor division de los limbos. Cada décima parte de esta menor

division equivale á una centésima de grado ó 1′, y cada centésima de la menor division representa 10″ ó una milésima de grado.

Teniendo la circunferencia de los limbos 188 milímetros y estando dividida en 4.000 partes iguales, corresponde á cada una algo ménos de 0,05 milímetros y hay que valerse de microscopios (tomo I, 226) para distinguir bien las divisiones, pues no son perceptibles á la simple vista, y poder apreciar las fracciones de éstas en lecturas de la graduacion de los limbos. Por lo tanto, en la cara de la caja C, opuesta á la que está junto al limbo zenital y el anteojo, hay dispuestos tres microscopios *m*, *m′* y *m″* para la lectura de la graduacion de los limbos. Con el microscopio *m*, que está en sentido de la vertical que pasa por el cero del limbo zenital, se hacen las lecturas de este limbo, y con los microscopios horizontales *m′* y *m″* las de las graduaciones que marcan los extremos de un mismo diámetro del limbo azimutal.

La luz que ilumina á los limbos penetra en el interior de la caja C por una abertura *a′* practicada en la cara superior de dicha caja y cubierta con un cristal. La luz cae sobre los limbos pulimentados y es reflejada por éstos en sentido de la direccion de los ejes de los microscopios correspondientes y para obtener la reflexion en las condiciones dichas, están ligeramente redondeados los limbos á manera de zonas esféricas. Hay además dentro de la caja, con el objeto de que la graduacion del limbo azimutal se presente tambien vertical al observador y se hagan las lecturas con comodidad, dos prismas triangulares de cristal cuya cara inferior es convexa, que corresponden á los dos microscopios *m′* y *m″*, como el que lleva la brújula de *Kater* (tomo I, 422.)

708. Otra de las diferencias de los clepes con respecto á los otros taquímetros consiste en la apreciacion de los grados y las fracciones de grado. En efecto, hemos visto que los taquímetros aprecian los grados y las fracciones de grado por medio de los nonius, como en los demás instrumentos topográficos, y en los clepes se aprecian, á la manera que las distancias, valiéndose de micrómetros, por lo cual los microscopios *m*, *m′* y *m″* van provistos, como sucede en el anteojo para medir las distancias, de sus correspondientes micrómetros múltiples, los cuales tienen 5 hilos dispuestos en sentido vertical, como se vé en la fig. 281 (lám. 28).

De los cinco hilos del micrómetro, el hilo medio *ab* se llama *hilo colimador*, porque reemplaza á los ceros de los nonius y es con el que se hacen las lecturas del número de grados y menores divisiones del grado. Las fracciones de las menores divisiones de los limbos se aprecian á ojo en atencion al aumento que proporcionan los microscopios.

Es sabido que se puede valuar bastando bien la fraccion $\frac{1}{50}$ de un intervalo ó division, con tal que este intervalo sea una cantidad apreciable á la simple vista y es bastante en nuestro caso el apreciar solamente la fraccion $\frac{1}{20}$. La fig. 281 (lám. 28) representa el campo de uno de los microscopios visto por el ocular en las dimensiones que debe tener para representar á la distancia de 20 centímetros de la vista del observador la graduacion aumentada por el microscopio, de manera que la fraccion $\frac{1}{20}$ ó $0^{\circ},005$ de la menor division del limbo, ó sea del intervalo entre dos divisiones consecutivas, sea aun una cantidad bien perceptible á la vista.

En vez de hacer las lecturas de las menores divisiones y fracciones de la menor division solamente con el hilo colimador, se hacen cinco lecturas independientes, correspondientes á la posicion de cada hilo y despues se toma el término medio, que en las operaciones ordinarias es lo bastante. En efecto, se obtiene de este modo un valor más exacto que se supone corresponder á un hilo colimador imaginario.

Cuando se tiene mucha práctica en hacer las lecturas, estas se hacen con rapidez y no se suele emplear más tiempo que el que se necesitaría para hacerlas valiéndose de los nonius que aprecian 10 segundos. Por otra parte, la completa analogía entre la manera de hacer la lectura de los ángulos para obtener sus valores, y las de la mira para determinar las distancias facilita en extremo la cuestion, y la práctica diaria confirma estas conclusiones.

709. Como la menor division de los limbos hemos dicho que es 0,10 de grado y se ha visto que en las lecturas se puede apreciar $\frac{1}{20}$ de esta cantidad, que es 0,005 de grado, el error será en ménos de $0^{\circ},005$ ó sea $0',5$. Segun el cálculo de las probabilidades, á cuyos métodos se debe apelar cuando se desea una grande aproximacion, los errores que se cometen en los valores finales de los ángulos, cuyos errores se llaman *errores residuos* ó *errores remanentes*, estan en razon inversa de las raíces cuadradas de los números de lecturas, y de aquí resulta que el error en dichas medidas será tanto menor cuanto mayor sea el número de lecturas. Así, si se emplean dos hilos ó se hacen dos lecturas siendo 0,005 el error con un solo hilo, y llamamos e el que se obtiene con dos y que es menor que el anterior, tendremos la proporcion

$$\pm\sqrt{2} : 1 :: 0{,}005 : e$$

de donde

$$e = \frac{0{,}005}{\pm\sqrt{2}} = \pm\frac{0{,}005}{\sqrt{2}} \qquad [47],$$

y haciendo las lecturas con los 5 hilos y llamando e' al nuevo error menor que el anterior e, resultará del mismo modo

$$e' = \pm\frac{0^{\circ},005}{\sqrt{5}} = \pm 0^{\circ},0022 \qquad [48]$$

que equivale á $7''$ de grado sexagesimal

710. Como hemos dicho que este instrumento es excéntrico, debe tenerse tambien en cuenta, que puesto que se hacen las lecturas del limbo azimutal con dos microscopios que dan las graduaciones de los extremos de un mismo diámetro, la determinacion es más exacta por la eliminacion del error de excentricidad. Por otra parte, si se hace la doble lectura por la inversion del anteojo, se llega fácilmente á obtener medidas angulares, cuyo error medio probable no pasa de una milésima de grado ó 3″,24.

711. *Orientador magnético.*—El aparato orientador va dispuesto en el hueco del interior de la columna *c* (fig. 280; lám. 28). De la parte superior pende el extremo de un hilo de seda sin torcer y en el otro extremo hay suspendida una aguja magnética *r* que viene á caer en la parte hueca más ancha *eh* de la columna *c*. El hilo de seda, cuando la aguja está libre y pesa sobre él, debe coincidir con el eje *ee* de rotacion de la columna *c* en su posicion vertical. La aguja *r* tiene la forma de una plancha ó lámina y la cara vertical del *oeste* está pulimentada como un espejo. En sentido normal á las caras de la aguja y en las paredes de la parte más ancha *eh* de la columna *c* se hallan: en una de ellas una lente *l* con una línea de colimacion grabada en sentido de un diámetro y en la opuesta un disco *d* de cristal de roca con una escala ó micrómetro. La lente tiene calculada su curvatura (tomo I, 227) de manera que cuando se mira por ella se vé claramente la escala del micrómetro y la imágen de la línea de colimacion reflejada por la cara pulimentada de la aguja. En el caso de coincidir la imágen de la aguja con el cero de la graduacion, la aguja se halla entonces en el plano meridiano magnético.

Un boton *b* sirve para poner en movimiento una série de palancas, con el objeto de sostener la aguja para que no se rompa el hilo durante el trasporte y para que despues de orientado el instrumento no cargue sobre el hilo de seda de que está suspendida, no debiendo dejarse libre la aguja sino el tiempo necesario que tiene que estar suspendida durante la orientacion del instrumento.

712. La orientacion del instrumento por este medio es más exacta que por el método ordinario de leer directamente en el limbo de la brújula la graduacion que señala el extremo de la aguja, puesto que la desviacion se mide ahora por el ángulo que forma el eje óptico de la lente con el plano vertical que contiene la imágen reflejada de la aguja y dicha desviacion es la mitad de este ángulo (tomo I, 207).

713. Pudiera, sin embargo, colocarse dentro de la parte donde va la aguja un limbo horizontal fijo para orientar magnéticamente la direccion del diámetro 0º—200º de la graduacion, que como sabemos es la línea de orígen de los valores de los ángulos horizontales.

714. **Usos del teodolito Clepe.**—*Medida de los ángulos.*—Se miden los ángulos verticales de la misma manera que con los taquímetros, expuesto, y los horizontales, teniendo presente que el instrumento es excéntrico y que deberán medirse por los métodos expuestos (tomo I, 280 y 589 *d*).

tambien pueden repetirse y reiterarse los ángulos, por reunir este instrumento todos los caractéres de los teodolitos repetidores y reiteradores.

715. *Objetivo, ocular y retículo.*—El anteojo es analático y diastimométrico; es el antiguo anteojo provisto de hilos é inventado por *Geminiano Montaraní* á fines del siglo XVII y perfeccionado despues por *Porro* con su interesante descubrimiento del *analatismo central*. La lente colectora está fija al tubo del anteojo y el objetivo tiene 50 milímetros de diámetro, siendo la distancia focal de cerca de 45 centímetros. El ocular es del sistema *Argos*, llamado así por sus muchos ojos ó aberturas, pues consiste en colocar varios oculares pequeños de Ramsden de modo que cada uno sirva para mirar los hilos correspondientes á cada ángulo diastimométrico. El ocular que describimos consta de tres lentes y la pieza en que están situadas tiene movimiento para poder divisar los distintos grupos de hilos que tiene el retículo, y para no equivocarse en las lecturas, hay una placa con varios orificios que moviéndose sobre el ocular, deja descubierta la lente por donde quiera mirarse y ocultas las demás. De este modo se amplifican mucho las imágenes hasta el punto de aumentarlas considerablemente.

716. El anteojo lleva tambien otro ocular o_1 (fig. 280; lám. 28), y un espejo con la inclinacion de 45º y con un taladro en su centro para que puedan pasar los rayos de luz que producen sobre el retículo las imágenes.

717. El retículo está centrado por construccion. Consiste en una placa de cristal de roca en que va grabado un micrómetro múltiple (figura 282; lám. 28) que consta de 17 hilos ó rayas, una de ellas s vertical y las otras 16 horizontales. Estas 16 rayas forman cinco grupos y determinan tres ángulos diastimométricos distintos. El primer grupo G, formado por los hilos a y a', b y b' corresponde á dos ángulos diastimométricos iguales formados por a y b y por a' y b' que tienen por tangente $\frac{1}{50}$ ó 0,02. El segundo grupo G′, formado por los hilos a, a', a'', a''', b, b', b'' y b''', corresponde á cuatro ángulos diastimométricos iguales formados por a y b, a' y b', a'' y b'', a''' y b''', cuya tangente es $\frac{1}{100}$ ó 0,01, y el tercer grupo G″, formado por los hilos a, a', b y b', corresponde á dos ángulos diastimométricos iguales formados por a y b y por a' y b', que tienen por tangente $\frac{1}{250}$ ó 0,004.

718. *Miras.*—Corresponden al teodolito clepe tres miras distintas é independientes que tienen la longitud de $4^m,40$ y cada una lleva una de las divisiones ó escalas 1, 2, 3, de la fig. 279 (lám. 28). Siempre hay que tomar en general el término medio del número de valores obtenidos en la mira, pero su division y numeracion pueden estar hechas de ex-profeso como las usan los italianos para evitar los cálculos aritméticos para hallar el expresado término medio en la determinacion del valor del número generador g.

719. Con las miras de la longitud dicha $4^m,40$ y bajo las relaciones $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{250}$ que representan las tangentes de los ángulos diastimométricos, se pueden apreciar distancias que no excedan de 200 á 220 metros en el primer caso, de 400 á 440 metros en el segundo y de 1000 á 1100 metros en el tercero.

720. Si nos referimos á los dos ángulos diastimométricos iguales que determina los hilos del primer grupo G cuya tangente es 0,02, se tendrán para g y m, determinándolos por las mismas fórmulas y por el mismo procedimiento que en los taquímetros anteriores, y siendo d=0,04, los valores siguientes:

$$g = \frac{(a-b)+(a'-b')}{0,02} \times \frac{0,04}{2} = \frac{(a-b)+(a'-b') \times 0,04}{0,04};$$

de donde

$$g = (a-b)+(a'-b') \qquad [49],$$

y para m

$$m = \frac{(a+a'+b+b') \times 0,04}{4} = \frac{a+a'+b+b'}{100};$$

ó lo que es lo mismo

$$m = 0,01\ (a+a'+b+b') \qquad [50],$$

y por comprobacion

$$a-b = a'-b' \qquad [51].$$

721. Si nos referimos á los cuatro ángulos diastimométricos iguales que determinan los hilos del segundo grupo G′ cuya tangente es 0,01, tendremos para g y m los valores siguientes:

$$g = \frac{(a-b)+(a'-b')+(a''-b'')+(a'''-b''')}{0,01} \times \frac{0,04}{4} =$$
$$\frac{(a-b)+(a'-b')+(a''-b'')+(a'''-b''') \times 0,04}{0,04};$$

de donde

$$g = (a-b)+(a'-b')+(a''-b'')+(a'''-b''') \qquad [52],$$

y para m

$$m = \frac{a+a'+a''+a'''+b+b'+b''+b'''}{8} \times 0,04 =$$
$$\frac{a+a'+a''-a'''+b+b'+b''+b'''}{200}$$

ó lo que es lo mismo

$$m = 0,005\ (a+a'+a''+a'''+b+b\ +b''+b''') \qquad [53]$$

y por comprobacion

$$a - b = a' - b' = a'' - b'' = a''' - b''' \qquad [54]$$

722. Si nos referimos á los dos ángulos diastimométricos iguales que determinan los hilos del tercer grupo G'' cuya tangente es 0,004, tendremos para g y m las expresiones siguientes:

$$g = \frac{a - b'}{0{,}004} \times 0{,}04 = (a - b') \times \frac{0{,}04}{0{,}004};$$

de donde

$$g = 10\,(a - b') \qquad [55]$$

y para m

$$m = \frac{a + a' + b + b'}{4} \times 0{,}04 = \frac{a + a' + b + b'}{100}$$

ó lo que es lo mismo

$$m = 0{,}01\,(a + a' + b + b') \qquad [56]$$

y por comprobacion

$$a - b = a' - b' \qquad [57].$$

723. Los principios citados para la medida de los ángulos (708 y 709) son aplicables tambien á la medida de las distancias, teniendo presente que la diferencia de cada dos hilos produce una lectura. Por lo tanto, llamando e, e', e'' los errores resíduos ó remanentes, cuando las lecturas sean una, dos y cuatro, tendremos

$$e = 0^m{,}005$$

$$e' = \pm \frac{0^m{,}005}{\sqrt{2}}$$

$$e'' = \frac{0^m{,}005}{2}$$

Donde vemos que los errores van disminuyendo y comparando unos con otros, se verá como hemos dicho que están en razon inversa de las raíces cuadradas de los números de lecturas.

Comparando los valores de e' y e'' resultará

$$\frac{e'}{e''} = \frac{\frac{0{,}005}{\sqrt{2}}}{\frac{0{,}005}{2}} = \frac{2 \times 0{,}005}{\sqrt{2} \times 0{,}005} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

724. El clepe mayor que acabamos de explicar tiene tambien otra disposicion más moderna: en vez de los tres microscopios que en el anterior lleva la caja cúbica que encierra los limbos, tiene este cuatro. Los dos superiores sirven para las lecturas del limbo zenital y los dos inferiores para las del limbo azimutal. Despues de cuanto hemos dicho, es fácil comprender por completo este instrumento sin necesidad de figura, y en su uso se procede de la misma manera y le acompañan las mismas miras.

725. *Verificaciones y correcciones.*—Estos instrumentos salen comprobados y corregidos de manos del constructor, y por lo tanto no hay que ocuparse de las correcciones. Conviene, sin embargo, hacer las verificaciones para convencerse de que se realizan. Solo habrá, por lo tanto, al operar con ellos, que ponerlos en estacion, lo que se consigue horizontando los niveles n, n' y n'' para que se llenen las circunstancias á que cada uno ha de satisfacer (705) y arreglar los microscopios á la vista del observador.

Tambien conviene averiguar la excentricidad del anteojo, para tenerla en cuenta cuando se determinen las coordenadas. Para esto, se dirige la puntería á un objeto lejano en las dos posiciones del anteojo, á izquierda y derecha del observador, y anotando en cada caso los valores de los ángulos θ y φ. La diferencia de cada par de valores en cada ángulo, restando de ella 200°, será el valor de la correccion que hay que practicar.

726. **Teodolito clepe mediano.**—El anteojo analático de este clepe tiene 35 centímetros próximamente de longitud. Su objetivo 40 milímetros de diámetro, y el ocular es de Ramsden como el de los anteojos ordinarios, pero de una construccion especial que se llama *ortoscópica*. Esta consiste en una combinacion de lentes dispuestas de manera que se pueda obtener el mayor campo en el anteojo sin disminuir mucho la amplificacion, que equivale á 30 veces. Sin embargo, el campo del anteojo queda bastante ancho para contener un *micrómetro múltiple* de cinco hilos (figura 265; lám. 25) para la medida de las distancias.

Si solo se emplease un ocular ordinario de Ramsden, la ampliacion seria solo de 20 veces, ó no se podría emplear más que un micrómetro *sencillo* ó de dos hilos, para determinar un solo ángulo diastimométrico, teniendo que renunciar por completo á la mayor precision en las apreciaciones de las partes interceptadas en las miras y á las comprobaciones consiguientes (618).

El anteojo está dispuesto con respecto á su eje de rotacion del modo que en el teodolito clepe mayor, y puede horizontarse por medio de un nivel volante de aire que se coloca sobre los collares que abrazan al anteojo.

Los limbos horizontal y vertical de este clepe tienen 50 milímetros de diámetro, y su menor division es la décima parte del grado.

La caja cúbica, dentro de la cual van los limbos, no tiene más que dos microscopios para hacer las lecturas de los valores de los ángulos. Estos dos microscopios están situados á uno y otro lado del extremo del eje de rotacion del anteojo, sirviendo el de la derecha para el limbo horizontal y el de la izquierda para el vertical. Puede leerse en el acto sin dificultad la centésima de grado con cada hilo de los tres que lleva el micrómetro para la medida de los ángulos.

727. **Teodolito clepe menor.**—La figura 283 (lám. 29) representa este instrumento. El anteojo es analático, su objetivo tiene 30 milímetros de diámetro, el ocular es ortoscópico y la amplificacion es de 25 veces. El micrómetro para la medida de las distancias es el mismo que el descrito para el *clepe mediano*.

El eje de rotacion del anteojo no atraviesa como en los dos anteriores la caja que encierra los dos limbos, sino que está situado en una de las caras de la caja, que á propósito tiene el grueso conveniente. Resulta, pues, estar vacío el interior de la caja y poderse aplicar para las lecturas de los limbos el único microscopio *m* que lleva la caja en la cara opuesta á aquella en que vá colocado el anteojo.

El hilo colimador del micrómetro para la medida de los ángulos está situado en el plano vertical que pasa por el eje geométrico de rotacion del anteojo y el campo del microscopico es bastante ancho para que puedan verse á un mismo tiempo (fig. 284; lám. 29), las dos graduaciones de los dos limbos, á cuyo efecto éstos tienen tambien la forma de zonas esféricas cóncavas. Los círculos de los dos limbos tienen 35 milímetros de diámetro, y sus menores divisiones son quintos de grado. La graduacion inferior corresponde al limbo zenital y la superior al horizontal, y las lecturas pueden hacerse con un hilo ó con tres, á voluntad.

La amplificacion está calculada de manera que sea sensible á la vista la vigésima parte de la menor division de las graduaciones de los limbos, ó sea un minuto.

La facilidad en el manejo y la brevedad que son las propiedades características de los teodolitos clepes en general, se hallan reunidas en el que nos ocupa en su mayor grado, y no sería posible con el empleo de los instrumentos que llevan nonius, obtener un aparato de tanta potencia y de tan fácil trasporte. Ofrece, por consiguiente, muchas ventajas en su uso en las cumbres de las montañas, en las sierras, en las minas, etc.

Las miras que se usan con estos dos últimos clepes son las mismas que las del clepe mayor (718), y la marcha en la medida de las distancias la misma tambien, una vez conocidas la menor division de las miras y las tangentes de los ángulos diastimométricos.

CAPITULO XIV.

Práctica de la Taquimetría.

Preliminares.—Determinacion de la meridiana magnética por medio del teodolito ó del taquímetro.—Determinacion de la meridiana astronómica por medio del teodolito ó del taquímetro.—Operaciones de campo.—Operaciones de gabinete.—Métodos abreviados de cálculo.

728. **Preliminares.**—Habiendo tratado en los dos capítulos anteriores de la teoría de los procedimientos taquimétricos y de la descripcion y uso de los taquímetros y de los clepes, nos ocuparemos en este capítulo de la marcha que debe seguirse en la práctica de las operaciones que conducen á la determinacion de los datos, tanto de planimetría como de nivelacion, que hemos dicho se obtienen á un mismo tiempo y que han de suministrar la representacion del terreno que se trate de considerar.

729. Distinguiremos las operaciones prácticas, como hemos hecho siempre en la presente obra, en *operaciones ó trabajos de campo* y en *operaciones ó trabajos de gabinete.*

730. En las *operaciones de campo* se enseña el órden y método más adecuados para obtener los datos que son indispensables y necesarios para que el trabajo resulte completo, y es preciso operar con inteligencia y exactitud para evitar el tener que volver de nuevo al terreno por falta de datos suficientes ó de equivocaciones y errores. Deben asimismo formarse los croquis y anotar en las casillas de los registros de campo ó libretas impresas para más uniformidad, los datos que se van tomando, que son las lecturas de mira y sus diferencias y los ángulos θ y φ, ó sean los números generadores, así como las alturas de mira y del instrumento, con cuantas observaciones y noticias sea conveniente consignar para la mayor claridad y buen éxito despues en las operaciones de gabinete.

731. En las *operaciones de gabinete* se forman los registros completos ó de gabinete, donde aparecen en sus primeras casillas los ángulos horizontales segun la orientacion del instrumento, las correcciones de la orientacion y los ángulos corregidos, así como los ángulos verticales, conteniendo además en las restantes casillas los valores deducidos para las distancias y las coordenadas parciales, así como las cotas y diferencias de nivel de los puntos ó vértices de estacion, para consignar por último las coordenadas principales de dichos puntos ó sean las referidas para todos á un solo orígen principal y á los ejes coordenados principales que les corresponden.

732. Por medio de estos registros de gabinete y de los croquis formados en el campo, se tienen reunidos todos los elementos necesarios para proceder á la construccion del plano, que es el término de las operaciones de gabinete, pudiéndose despues pasar á verificar la operacion inversa, que es el *replanteo* en el terreno, logrando así completar la representacion de aquel, y poder proceder á la resolucion de los problemas de que haya que hacer uso sobre el mismo y á la determinacion de nuevos datos que fijen nuevos puntos, en virtud de los que se han tomado en el terreno, sin necesidad de volver á éste de nuevo.

733. Si como ya sabemos, en el método taquimétrico se obtienen á un mismo tiempo los datos necesarios tanto para la planimetría, como para la nivelacion, de aquí la necesidad de que la eleccion de los puntos comprenda, no solo los que determinan las líneas que han de trazarse para la configuracion del contorno del polígono del terreno, sino tambien los que sirven para fijar el sentido de los caminos y curso de los rios ó arroyos que han de constituir la *planimetría;* y por lo que hace á la *nivelacion*, deben observarse los puntos que han de contribuir á conseguir el relieve ó configuracion de la superficie del terreno, entre los cuales son los más esenciales los más altos y más bajos y todos aquellos en que el terreno presenta marcados accidentes ya por los cambios notables y repentinos de pendiente, ya por la variacion rápida de sus formas, para lo cual debe ante todo preceder un escrupuloso reconocimiento de la zona del terreno que ha de ser objeto de las investigaciones del operador, para fijarse, segun los casos y el objeto que se proponga, en la eleccion de los puntos más importantes para obtener la planimetría ó la nivelacion ó ambas operaciones á un mismo tiempo.

734. Así como en la planimetría hemos visto que en el levantamiento del plano de las líneas curvas y sinuosas (tomo I, 883 á 891), se han seguido los métodos de inscribirlas ó circunscribirlas, ó ambas cosas á un tiempo, líneas poligonales compuestas de elementos rectilíneos, á fin de que fijando sus vértices, pudiéramos deducir luego la figura de la línea, siendo este procedimiento general, y aplicable por lo tanto á la *taquimetría*, del mismo modo la tendencia para lograr la representacion de la superficie irregular de una zona de terreno, es la de obtener el número suficiente de puntos para que unidos entre sí por medio de rectas, pue-

dan considerarse como los vértices de un poliedro, cuyas caras triangulares estén determinadas por dichas rectas y que inscrito ó circunscrito al terreno, se aproxime su superficie poliedral lo más posible á la irregular y caprichosa del terreno en cuestion, y cuanto mayor sea el número de puntos elegidos más exacto será el resultado, siendo lo más importante y científico el elegir los ménos posibles, pero en condiciones tales, que se consiga despues por medio de ellos obtener cuantos se deseen (Tomo I, 145).

735. Conviene, no obstante, advertir que por la taquimetría se obtienen con más precision los resultados de la planimetría que los de la nivelacion, pero con respecto á esta, segun sea el objeto con que se practique, así deberá ó no hacerse uso del método taquimétrico. Si la operacion tiene por objeto la construccion de un ferro-carril ó carretera, puede hacerse uso de la taquimetría; pero en operaciones muy delicadas, como las conducciones de aguas, entonces debe apelarse á los métodos ordinarios de la nivelacion, que hemos expuesto en este tomo segundo, para obtener toda la exactitud apetecible. Puede, sin embago, utilizarse aun en este caso, el método taquimétrico, practicando una nivelacion detenida que tenga por objeto enlazar los *puntos de referencia* de las estaciones, pues servirá para hacer las correcciones de sus coordenadas y las de todos los puntos desde dichas estaciones observados.

736. El personal encargado de estas operaciones debe ser inteligente, activo y práctico. Un operador se encarga de la direccion de los trabajos y está á su cargo el reconocimiento del terreno y de la formacion del *cróquis*, así como de la eleccion de los puntos donde han de colocarse las miras; otro se encarga del manejo exclusivo del instrumento, y otro de la anotacion de los datos en la libreta, debiendo ir además acompañados por lo menos de dos *porta-miras*, aunque para la rapidez que proporciona el método taquimétrico conviene que haya cuatro *porta-miras*.

737. En el manejo del instrumento se sigue siempre la misma marcha. Se hacen primero las lecturas de la mira, dirigiendo á esta la visual aflojando los tornillos de presion de los limbos vertical y horizontal, y precisando la puntería por medio de los tornillos de coincidencia, para que la cerda vertical del retículo coincida con la línea que ocupa el centro de la mira, apretando despues el tornillo de presion del limbo horizontal y aflojando el del vertical para dirigir la cerda horizontal que se presenta inferior hácia el pié de la mira y hacer que coincida por medio del tornillo de coincidencia con una de las divisiones exactas de la mira, como hemos dicho (645 y 646) y teniendo en cuenta que ha de darse al anteojo la posicion conveniente á fin de poder verificar las lecturas con todos los hilos del retículo.

738. Estas lecturas se practican siempre empezando por el hilo inferior y siguiendo por los restantes, es decir, de mayor á menor. Se dictan estas lecturas al encargado de la libreta, que pueden comprobarse en el acto, viendo si son iguales las diferencias de las lecturas correspondien-

tes á iguales ángulos diastimométricos. Por otra parte, el encargado del instrumento comprueba tambien si el anteojo y la mira han tenido movimiento durante el curso de la operacion, examinando si despues de concluida esta, aun permanece el hilo inferior marcando el número exacto de divisiones de la mira que señalaba al principio.

739. Se procede despues á la lectura de los ángulos del limbo vertical, y por último á los del horizontal, examinando si los ángulos leidos con los dos nonius de los limbos que los lleven se diferencian siempre exactamente en 200° cuando la division es la centesimal ó en 180° cuando es la sexagesimal.

740. Las miras han de establecerse en cada punto con rigorosa verticalidad y el instrumento con los requisitos que exije el decir que está *en estacion*. (Tomo I, 362.)

741. Una vez puesto el instrumento en estacion, se procede siempre á orientarle. Esta operacion se practica siempre del mismo modo y está reducida, en general, como hemos visto en varias partes de la presente obra, á hacer la coincidencia del *cero* del limbo horizontal con el de uno de los dos nonius, que debe señalarse para usar siempre del mismo, valiéndose del sistema de tornillos de presion y de coincidencia del limbo horizontal. Dejando entonces la aguja en libertad y aflojando el tornillo de presion que une el limbo á la plataforma, se hace girar el instrumento alrededor de su eje general de rotacion, hasta que la punta azul de la aguja enrase con la division *cero*, donde va la letra N, de su limbo correspondiente. Se vuelve despues á apretar el dicho tornillo de presion, y se hace permanecer de esta manera el instrumento durante todo el tiempo que se invierta en la operacion, despues de lo cual el instrumento se hallará en *estaciom* y *orientado*.

742. Esta operacion se repite en cada estacion y la orientacion de todas las estaciones, que es con referencia á la meridiana magnética y aproximada, se rectifica despues en los trabajos de gabinete para obtenerla con relacion á la meridiana astronómica.

743. **Determinacion de la meridiana magnética por medio del teodolito ó del taquímetro.**—Puesto el instrumento en estacion y orientado (741), el eje óptico del anteojo describirá en el movimiento de éste, alrededor de su eje de rotacion, un plano vertical que coincidirá con el plano meridiano magnético y plantando jalones en el terreno en sentido de la visual, se tendrá trazada la direccion de la meridiana magnética.

744. **Determinacion de la meridiana astronómica por medio del teodolito ó del taquímetro.**—En los párrafos 125 á 133 inclusives del tomo I, hemos expuesto los tres procedimientos que se pueden seguir en la determinacion de la meridiana astronómica, siendo el más exacto el tercero, expuesto en el párrafo 130, *por la observacion de la estrella polar*, y que se conoce con el nombre de las *alturas correspondientes*.

745. Pero en vez de observar una estrella se puede observar el sol.

valiéndose de un teodolito ó taquímetro, y procediendo de la manera siguiente: Sea M (fig. 285; lám. 29) el punto en que se quiere trazar la meridiana y ABCD el limbo horizontal del teodolito dispuesto de manera que su centro se halle en la vertical del punto M, y supongamos que la operacion se practica á las nueve de la mañana. Presentando el observador su hombro derecho al sol, tendrá á su derecha el Oriente ó Este, á su izquierda el Poniente ú Oeste, á su frente el Norte y á su espalda el Sur, estando representada por la curva E*abc*O la marcha del sol en su movimiento aparente. Disponiendo tambien el observador el cero del limbo horizontal á su izquierda en una posicion cualquiera, tal como la AC, se dirigirá la visual al astro y se tomará el ángulo horizontal AM*a*, que supondremos sea de 125° 20′, y el vertical correspondiente al mismo punto que supongamos sea de 25° 30′. Anotados estos ángulos, como desde las nueve hasta las doce van tres horas, se dejará pasar otro tanto tiempo, es decir, hasta las tres de la tarde, y volviendo á dirigir la visual al sol, conservando en el instrumento el mismo ángulo vertical de 25° 30′, se esperará á que el sol descienda hasta descubrirle por el anteojo, y se tomará el nuevo ángulo horizontal AM*c* que supongamos sea de 85° 16′. Restando este ángulo del AM*a*=125° 20′ se tendrá el ángulo *c*M*a* de 40° 4′, y tomando su mitad resultará el *c*M*b* de 20° 2′. Se añadirá este valor al del ángulo AM*c* que tenía 85° 16′ y resultará el AM*b* de 105° 18′, que tomándole en el instrumento y plantando jalones en la direccion de la visual M*b* dirigida por el anteojo, se tendrá trazada en el terreno aproximadamente la meridiana NS del punto M.

En la práctica, para hallar por este método la meridiana, que se llama por *las alturas de sol correspondientes*, se tomarán varias alturas de sol por la mañana y sus correspondientes por la tarde, con el fin de hallar el término medio de los resultados obtenidos, lo que dará la meridiana con más exactitud, y tambien pudiera suceder, si se tomase una sola altura por la mañana, que un obstáculo cualquiera, como una nube, un pico elevado de una montaña ó algun árbol frondoso, impidiese tomar la altura correspondiente de la tarde.

Para dirigir las visuales al sol se hará uso del cristal oscuro que lleva el teodolito (tomo I, 517), y en las observaciones se colocará el disco tangente á los lados de los ángulos que forman los hilos del retículo.

Conviene hacer las observaciones de media en media hora, procurando verificar la última dos horas antes del mediodía.

Este procedimiento por la observacion del sol, no es tan exacto como cuando se observa una estrella cualquiera á causa de las variaciones de la declinacion del sol, y debe tenerse presente para obtener la meridiana con la posible exactitud, lo que hemos expuesto (tomo I, 128 y 129).

746. Por una costumbre nuestra hemos llamado limbo azimutal al limbo horizontal *a* de los instrumentos y ángulos azimutales ú horizontales indistintamente á los ángulos tomados con este limbo, distinguiendo con el nombre de *rumbos* á los pertenecientes á los limbos de las

brújulas ó aparatos orientadores Para estar en armonía con los demás autores, entiéndase que son ángulos horizontales ó *directos* los tomados con el limbo horizontal a y ángulos azimutales los pertenecientes á los limbos de las brújulas Respecto de los ángulos zenitales tomados con el limbo vertical z de los instrumentos, se llaman indistintamente *ángulos verticales* ó *zenitales*.

747. **Operaciones de campo.**—En primer lugar dividiremos los terrenos con relacion á su figura y extension en las cuatro clases siguientes:

1.ª Cuando el terreno es de corta extension en todos sentidos y da lugar á una sola estacion.

2.ª Cuando el terreno es de mediana extension en todos sentidos y se necesitan establecer varias estaciones para determinarle.

3.ª Cuando el terreno es de grande extension en todos sentidos.

4.ª Cuando el terreno tiene poca anchura con respecto á su mucha longitud, como acontece en el levantamiento de un plano para la construccion de un canal, ferro-carril ó carretera, ó lo que es lo mismo, cuando hay que practicar un seguimiento.

748. En todos los casos cuando los puntos del terreno son además visibles, accesibles, nos valdremos del método *radiométrico* (579), haciendo aplicacion del método *radiométrico* (601) en los casos en que hay que determinar puntos inaccesibles.

749. *Terrenos de corta extension.*—Para obtener la planimetría y la nivelacion de un terreno cuyos puntos sean todos visibles desde un solo punto de estacion y cuya extension esté dentro del alcance del instrumento, que suele comprender por término medio 12 hectáreas, y que por lo tanto no da lugar más que á una sola estacion, hay que tener presente lo primero el objeto de la operacion, es decir, si ésta ha de ser una sola y aislada ó ha de tener que relacionarse con otras

750. En el primer caso no es necesaria la orientacion exacta y basta que sea aproximada, como la que puede suministrar la aguja magnética, sin tener en cuenta las variaciones diurnas y áun pudiera no hacerse caso de la orientacion dirigiendo el diámetro 0°—200° del instrumento en una direccion cualquiera. Sin embargo, es mucho más conveniente contar con la orientacion dada por la aguja, porque de este modo no solo se forma mejor la idea de la situacion de una localidad, cuando se conoce su orientacion, sino que no se altera la costumbre de presentar el plano con el *Norte* en la parte superior (tomo I. 197).

751. En el segundo caso el geómetra debe procurar hacer tambien desde el punto de estacion las observaciones que crea necesarias para que pueda despues enlazar su trabajo con otros que estén ya practicados ó que hayan de practicarse, valiéndose de puntos notables, ya determinados ó determinándolos en caso contrario, ó bien refiriéndose á puntos trigonométricos si los hay, y que unos y otros sean visibles y estén próximos al punto de estacion. En este caso es in-

dispensable la orientacion y que esta sea lo más exacta posible.

752 Antes de todo, el jefe de la brigada que compone el personal procede al reconocimiento del terreno, mandando establecer señales con piedras ó montones de tierra, ó bien clavando piquetes (tomo I, 157) en los puntos que han de ser observados desde el punto de estacion elegido más conveniente, en los cuales han de colocarse las miras, y fijándose tambien en los que han de determinarse para servir de enlace en el caso que esto sea preciso, y despues procede á formar el cróquis en la libreta que lleva para este objeto y que se llama *Libreta de campo.* Estas son apaisadas, de papel grueso y resistente y tienen 2 decímetros de ancho por 3 de largo. Este trabajo consiste en trazar el diseño del terreno en que ha de operarse, haciendo uso de un lápiz negro para indicar con letras ó los signos topográficos correspondientes los accidentes que presente el terreno, como son los rios, arroyos, caminos, veredas, cercas, casas, etc., y cuando estos cróquis han de corresponder á terrenos de más extension, conviene hacer uso del lápiz negro para los detalles del plano y tener un lápiz azul para los rios, arroyos, lagunas, lagos, etc., y un lápiz rojo para designar las líneas más principales del plano ó sean las bases de operaciones que en terrenos de mucha extension son indispensables. Tambien puede hacerse uso de los signos adoptados en el dibujo de los planos topográficos.

753. Puesto el instrumento en estacion y orientado (740 y 741) y colocada la mira en el primer punto que se trata de determinar, el encargado del instrumento ejecuta las observaciones en el órden establecido (737 á 743) y el que hace las anotaciones en el registro ó libreta, va consignando las lecturas de la mira y los números generadores g, φ y θ para cada uno de los puntos que se determinen en las respectivas casillas, como se verá más adelante. Se concluyen las observaciones midiendo la altura del instrumento ó sea la distancia vertical que hay entre el eje de rotacion del anteojo y el terreno.

754. El porta-mira no se mueve del primer punto observado hasta que recibe la señal del encargado del instrumento para trasladarse á otro punto. Conviene establecer un órden en la determinacion de los puntos donde ha de irse colocando sucesivamente la mira. Para esto, se empieza siempre por el *Norte* y por los puntos más distantes y marchando despues en sentido del *Este* ó del *Oeste*, trazando una espiral ó formando círculos concéntricos en cada vuelta de horizonte, aproximándose cada vez más el porta-mira hasta llegar cerca del punto de estacion donde se halla el instrumento. Los obstáculos que el terreno pueda presentar serán los que alteren y modifiquen la marcha establecida por el porta-mira.

755. En el catastro, en el cual hay que determinar los perímetros de las parcelas, hay que seguir estos perímetros parcela por parcela.

756. Si en alguna parte del terreno se presenta algun detalle que no se juzgue conveniente determinarle con el instrumento, debe hacerse

aparte un lijero croquis de su figura, en el cual se consignan las dimensiones que se miden con el doble metro, teniendo presente que estos detalles han de ser aislados y de pequeñas dimensiones y que no tengan ninguna influencia en el conjunto de las operaciones como, por ejemplo, espesores de muros, anchuras de fosos, etc.

Por último, aun en el caso que estudiamos de una sola estacion, si aconteciese que hubiera préviamente en el terreno en cuestion algun punto notable ó préviamente determinado, es conveniente tomar los datos para referirse á él.

757. Los *registros de campo*, que cada uno los dispone del modo que cree más conveniente para valerse de ellos con claridad y acierto en las operaciones para que le han de servir despues, deben ser dos, uno para los puntos de estacion y otro para los puntos observados en el terreno que á cada una de las estaciones corresponden y constan poco más ó menos de las casillas ó columnas que vamos á manifestar, tanto para el caso que nos ocupa de no haber más que una sola estacion, como cuando haya varias estaciones, pudiendo añadirse además las columnas que sean necesarias, segun el objeto de la operacion y los datos que sea preciso consignar.

El modelo núm. 1, inserto en la pág. 371, y que sirve para los datos de los puntos ó vértices de estacion, puede constar de las columnas que se ven en el mismo, y se hacen las anotaciones del modo siguiente, consultando á un mismo tiempo este registro y las figuras 286 y 287 de la lámina 29, que representa la primera la proyeccion horizontal de la línea que une los puntos de estacion, y la segunda el perfil del terreno, segun esta misma línea:

Colocado el instrumento en la estacion 1, cuyas coordenadas supondremos conocidas de antemano, se pone en la 1.ª columna del registro el número 1 de esta estacion; en la columna 2.ª la altura $1^m,475$ del instrumento; en la columna 3.ª se ponen las lecturas de la mira colocada en el punto de estacion 2; en la 4.ª columna las diferencias de lecturas de los hilos; en la 5.ª el número generador g que sirve para hallar la distancia desde la estacion 1 á la estacion 2; en la 6.ª el valor 82°.35 de φ, en donde dice *adelante*, porque se obtiene mirando á la estacion 2; en la 7.ª el valor 29°,71 de θ, en donde dice *adelante*, porque se obtiene mirando á la estacion 2, y en las columnas 9.ª y 10.ª las referencias y observaciones que se crea conveniente. De este modo se habrán sentado en el registro todos los datos tomados en la estacion 1.

Se traslada despues el instrumento á la estacion 2 y se apunta este número en la 1.ª columna; en la 2.ª se pone la altura 1,543 del instrumento; en la 3.ª y 4.ª las lecturas de los hilos de la mira colocada ahora en el punto 3 de estacion y sus diferencias para obtener el número generador g que se pone en la 5.ª y que sirve para hallar la distancia de la estacion 2 á la estacion 3; en la 6.ª el valor 117°,68 de φ tomado en la estacion 2 mirando á la 1, y el 105°,68 mirando á la estacion 3; y en la 7.ª

NÚM. 1.

Registro de campo; puntos de estacion.

1	2	3		4	5	6		7		8	9	10
		LECTURAS DE MIRA.			NUMEROS GENERADORES.							
						VALORES DE φ.		VALORES DE θ.				
Puntos de estacion.	Altura del instrumento.	Hilos superiores.	Hilos inferiores.	Diferencia de lecturas.	Valor de g.	Atrás.	Adelante.	Atrás.	Adelante.	Alturas de mira.	REFERENCIAS.	OBSERVACIONES.
1	1,475	$a=$ $a'=$	$b=$ $b'=$	$a-b=$ $a'-b'=$	»	» »	82°,35 »	» »	29°,71 »	»	»	»
2	1,543	$a=$ $a'=$	$b=$ $b'=$	$a-b=$ $a'-b'=$	»	117°,68 »	» 105°,68	229°,85 »	» 76°,23	»	»	»
3	1,520	$a=$ $a'=$	$b=$ $b'=$	$a-b=$ $a'-b'=$	»	94°,33 »	» 89°,18	276°,33 »	» 117°,67	»	»	»
4	1,425	$a=$ $a'=$	$b=$ $b'=$	$a-b=$ $a'-b'=$	»	110°,79 »	» »	317°,22 »	» »	»	»	»

NÚM. 2.

Registro de campo; puntos de detalle referidos á su estacion.

1 Puntos de estacion.	2 Puntos observados.	3 Altura del instrumento.	4 LECTURAS DE MIRA.		5 Diferencia de lecturas.	6 NÚMEROS GENERADORES.			7 Alturas de mira.	8 OBSERVACIONES.
			Hilos superiores.	Hilos inferiores.		g	φ	θ		
1	1									
	2									
	3									
2	1									
	2									
	3									

se pone primero el valor 229°,85 de 0 tomado hácia atrás mirando al punto de estacion 1, y el 76°,23 tomado hácia adelante mirando al punto de estacion 3, y por último, se hacen las anotaciones correspondientes á la estacion 2 que estamos considerando en las columnas 8.ª, 9.ª y 10.ª, y se obtendrán todos los datos que se han tomado en esta estacion y así se continúa hasta concluir con todas las estaciones.

Antes de mover el instrumento de cada estacion, se toman en el terreno todos los datos correspondientes á cada uno de los puntos que han de referirse á la misma para constituir el detalle ó relleno del plano y se forma para cada estacion un registro como el modelo núm. 2 inserto en la pág. 372, cuya sola inspeccion basta para comprenderlo.

Los valores de g, que se consignan en la columna 5.ª del registro modelo número 1, se deducen en este caso por la fórmula [41] del párf. 690.

758. *Terrenos de mediana extension.* —Cuando la extension del terreno es tal que permite el establecimiento de dos estaciones, entonces se empieza por operar en la primera estacion del modo que hemos dicho (753) y además se observan otros dos puntos por lo menos que sean visibles tambien desde la segunda estacion con el objeto de que sirvan para enlazar esta estacion con la segunda y reciben el nombre de *puntos de referencia*, en los casos que haya que hacer uso del método de *referencias* indirectas. Estos dos puntos deben elegirse de manera que la distancia que medie entre ellos sea próximamente la misma que separa los dos puntos de estacion. Concluidos los trabajos en la primera estacion, se trasporta el instrumento á la segunda y despues de orientado y observados los puntos dichos de referencia, para el enlace de las estaciones, se empiezan los trabajos de esta segunda estacion, dirigiendo primero la visual á la mira que se coloca en la primera, cuya práctica se asemeja á la marcha seguida en la nivelacion (151 y 152), y se continúan las operaciones de dicha segunda estacion como si estuviera aislada, formando su respectivo cróquis y consignando los datos en el registro y del mismo modo que en la primera estacion. El registro, para estas operaciones, es el mismo modelo núm. 1 y puede añadirse en él otras dos columnas para anotar los datos correspondientes á los puntos de referencia y los directores de que ahora hablaremos.

Despues, en los trabajos de gabinete, se practica el enlace de las dos estaciones en virtud de los croquis de ambas y de los datos del registro.

759. Cuando la extension del terreno dá lugar á establecer mayor número de estaciones, como cuando el terreno tiene de 500 á 1.000 hectáreas, se sigue tambien la misma marcha, pero entonces, para tener un medio más de comprobacion en el enlace de las estaciones entre sí, se eligen de antemano uno ó varios puntos notables, como las veletas de las torres, cimas de las montañas, postes telegráficos, etc., determinándolos por intersecciones de visuales ó sea haciendo uso del *método radiotómico.* Estos puntos, que se llaman *puntos directores*, se ha de procurar

que cada uno sea visible desde el mayor número de puntos de estacion y adoptando cada vez nuevos puntos con esta condicion hasta la conclusion de los trabajos de las varias estaciones establecidas.

760. Antes de trasladar el instrumento de una estacion á la siguiente, se debe examinar si se ha desorientado durante las observaciones hechas en la primera, para lo cual se vuelve á tomar el ángulo azimutal correspondiente á uno de los puntos directores y se comprueba si resulta igual al que se tomó primero.

Tanto las observaciones de los *puntos de estacion*, como de los *puntos de referencia* y *directores*, deben hacerse con el mayor esmero y precision, pues el polígono que estas tres clases de puntos forman entre sí, sirve para hacer las comprobaciones de los trabajos hechos y para la eliminacion de los errores cometidos y que se descubren por aquellas. Como estos errores acompañan siempre á todas las operaciones, por mucho que sea el cuidado con que se practiquen, y afectan al conjunto de todo el trabajo empleado en el levantamiento del plano de la extension de terreno considerada, debe procurarse eliminarle cuanto sea posible, reduciéndole á sus menores términos.

761. Los errores cometidos en las observaciones que se refieren á los puntos correspondientes á cada estacion aislada, y que corresponden á los *puntos de detalle*, no influyen en el conjunto de las operaciones y solo afectan á la estacion respectiva, y aunque deben tambien evitarse, no tienen la trascendencia que aquellos y puede decirse que ninguna, si solamente se trata de representar el terreno gráficamente.

762. Respecto al enlace de las estaciones unas con otras, pueden seguirse los procedimientos fundados en el método radiométrico (598).

En el primer caso, que hemos llamado *método de referencias directas*, hay necesidad de llevar las miras á los puntos de estacion y medir tambien la altura del instrumento.

763. En el segundo caso, llamado *método de referencias indirectas*, no hay necesidad de medir la altura del instrumento ni de llevar las miras á los puntos de referencia, bastando solo colocar banderolas para distinguirlos durante la operacion de medir el ángulo azimutal. Deben marcarse en el terreno los puntos de referencia, valiéndose de piquetes que se numeran para no confundirlos cuando se colocan de nuevo las miras en ellos para observarlos desde otra estacion distinta.

764. Cuando se hace uso del *método mixto* basta observar un solo punto de referencia y el ángulo azimutal de la otra estacion, en la cual se coloca una banderola.

765. Vemos, por último: 1.º Que cuando el terreno es poco accidentado y los puntos de estacion son visibles entre sí, se enlazan las estaciones por el método de referencias directas. 2.º Que cuando el terreno es muy accidentado y hay algunos puntos de estacion que no son visibles desde los inmediatos, debe hacerse uso del método de *referencias indirectas* ó del *método mixto*, segun las circunstancias; y 3.º Que en este

último caso se puede apelar tambien al medio de intercalar entre dos estaciones no visibles una de otra una estacion auxiliar, la cual sea visible desde ambas

766 Cuando las operaciones son de mucha importancia y deben ser los resultados muy exactos, entonces conviene hacer una operacion auxiliar preparatoria que consiste en levantar de antemano un polígono observando los menos puntos posibles y que se hallen á mucha distancia unos de otros, los que se señalan por medio de estacas ó piquetes numerados Empleando en esta operacion un instrumento de mayor precision y alcance y tomando los datos necesarios para comprobar el polígono, observando puntos fijos y que estén convenientemente situados, se procederá despues á determinar los puntos de detalle que se han de hallar dentro del polígono, practicando las operaciones dichas anteriormente (753), y sirviendo de puntos directores los vértices del expresado polígono.

767. *Terrenos de grande extension.*—Cuando se trata de un levantamiento de mucha extension, sea para el catastro ó para la formacion de la carta de una vasta comarca y se quiere obtener con mucha exactitud el conjunto, es indispensable partir de una triangulacion exacta que se extienda en todos sentidos y que suministre al geómetra los puntos de referencia que sean necesarios para enlazar todas las diversas operaciones de detalle en que se divide el trabajo y que se practican á un mismo tiempo en los distintos parajes

768. En la triangulacion por la taquimetría, no es necesario determinar tantos puntos trigonométricos como por los procedimientos ordinarios y tiene la ventaja de poderse emprender las operaciones tan pronto como se hallen marcados los puntos que han de ser vértices de la triangulacion y los cuales sirven de puntos directores, pudiéndose verificar las observaciones de los ángulos antes ó despues y los cálculos que determinan los triángulos de la red establecida. Cuando se haya practicado el trabajo trigonométrico y calculado las coordenadas de los vértices de la triangulacion, entonces se procede á obtener las coordenadas definitivas de las operaciones de detalle.

769. Operando entre los puntos trigonométricos, no se tiene más sujecion para la eleccion de las estaciones y de los puntos del terreno, que la que resulta de operar en un terreno de corta extension y no hay nuevas condiciones á que satisfacer respecto á la manera de enlazar las estaciones entre sí Cuando se está próximo á una señal trigonométrica, se la observa como á cualquier otro punto, colocando en ella la mira si es posible, ó determinándola por intersecciones si es una veleta ú otro punto inaccesible.

770. Tambien es esencial dirigir visuales en cada estacion á los puntos trigonométricos visibles desde ella, y si estos son muchos no hay necesidad de observarlos todos, sino solamente uno de los más lejanos y dos de los más próximos

771. En ocasiones, por estar el terreno en hondonada ó rodeado de obstáculos, así como tambien en los bosques, hay estaciones desde las cuales no se puede descubrir ningun punto trigonométrico y entonces hay que elegir un punto director que se determina por medio de las estaciones sucesivas.

772. *Vias de comunicacion.*—En la clase de extension considerada (747—4.ª) en los terrenos que sirven para el estudio de esta clase de trabajos, la zona de estos se limita á muy poca extension en sentido normal á la direccion de la via y á una longitud de consideracion. Debe, por lo tanto, dividirse en secciones y en cada una de ellas se pueden establecer las estaciones en la parte central de la zona, á fin de que los puntos de ellas se hallen al alcance del instrumento y se reduzcan aquellas á las menos posibles.

773. Cada seccion se halla entonces en las condiciones de los terrenos de corta extension (749) que se pueden determinar perfectamente del mismo modo, y cuidando de tomar en cada una los puntos necesarios de referencia para el enlace de los trabajos de las distintas secciones. Los puntos directores deben tomarse en mayor número para el mejor éxito de las comprobaciones, eligiendo entre ellos los vértices de los triángulos geodésicos y á falta de estos otros que estén muy distantes, y además aquellos que estando bien determinados ya en el terreno, puedan servir para completar la poligonacion, que es la base de la exactitud por las comprobaciones á que puede sujetarse. Se ha de procurar preferir en la eleccion de los puntos directores, en general, aquellos en los que las visuales dirigidas á ellos desde los puntos de estacion formen ángulos que no resulten muy agudos. En esta clase de trabajos, puede abreviarse el tiempo valiéndose de las coordenadas polares para fijar los puntos de detalle, pues la orientacion de dichas coordenadas las dá el taquímetro directamente y no se hace la correccion porque la pequeñez de $\Delta\theta$ no se puede apreciar en el plano con los trasportadores.

774. En esta clase de trabajos, así como en los terrenos de mucha extension en todos sentidos (767), el reconocimiento del terreno debe ser la operacion que más debe llamar la atencion del geómetra. En una via de comunicacion, una vez conocidos los puntos extremos que se han de unir, así como los intermedios, hay que estudiar la zona de terreno que ha de comprender la línea poligonal que enlaza dichos puntos, que son las poblaciones por donde la vía ha de pasar. Para esto, hay que valerse de un guia práctico en la localidad y recorrer el terreno comprendido entre cada dos puntos en todos sentidos, caminando por los diversos parajes que puedan conducir á dichos puntos y apuntando los nombres de todos los sitios que sea preciso mencionar y todas las noticias que el práctico suministre, en la libreta del croquis.

El geómetra que va formando además este croquis detallado, estudia la extructura y formacion del terreno que, como hemos dicho (tomo I, pág. 141 á 149), están sujetos á leyes determinadas y examina despues los cortes del mismo, cercas, casas, barrancos, etc., así como los puentes, alcantarillas y demas obras de fábrica que sirven para salvar las corrientes de agua que atraviesen el trazado, midiendo y anotando su altura y su luz á fin de conocer el desagüe de los rios y arroyos. Debe tambien examinarse el cáuce de los rios, determinando el paso más conveniente, teniendo en cuenta la altura de la rasante y la naturaleza del terreno en que han de fundarse las construcciones.

La direccion de las corrientes de agua y de las divisorias, las mesetas y valles y la indicacion de los pasos convenientes para las divisorias y corrientes de agua y las enfilaciones generales, deben asimismo ser objeto de detenido estudio. Debe, por último, indicarse tambien en los croquis, cuando se colocan las miras, la clase de terreno que las rodea, si es viña, labrantío, erial, etc., señalando tambien si hay arbolado y la direccion aproximada de las curvas de nivel, cuidando al hacer tantos apuntes en el croquis, de hacerlos de modo que resulten con claridad y se evite la confusion.

775. El trazado de la vía en un país llano presenta pocas dificultades para elegir la traza más acertada. Pero cuando la vía tenga que establecerse en un valle, entonces es tanto más dificultoso el problema cuanto más variada y caprichosa es la extructura del terreno, y en este caso se presentan dos zonas, que son entre todas, las más favorables para el trazado; una la que va por el fondo del valle paralelamente al *talweg* de este y á corta distancia suya, y la otra la próxima á la division orígen del nacimiento de los afluentes del rio principal. Se sigue ordinariamente la primera, ciñéndose á la meseta que sirve de estribacion á las montañas, siempre que sea posible.

Cuando desde una divisoria hay que descender al valle ó viceversa, se coloca el instrumento en el punto elegido para paso y se hace un tanteo bajando por la ladera con la pendiente adoptada como límite y una vez señalados los puntos que han de formar la línea poligonal que señala la direccion de la vía se procede á levantar su plano y su perfil para conocer si es posible seguir dicha direccion ó si pueden introducirse en ella las modificaciones convenientes, para en caso contrario adoptar un nuevo trazado.

776. Innumerables son las condiciones que hay que tener presentes y á que hay que satisfacer en el trazado de una vía, como son la más corta distancia que enlaza los puntos por donde ha de pasar, la pendiente ó inclinacion de la rasante á cuyos límites hay tambien que atenerse segun los casos, el mayor ó menor número de obras de fábrica que hay que construir, así como los desmontes y terraplenes que hay qué practicar, la mejor ó peor calidad de los materiales de la localidad y sus distancias y dificultades para el trasporte, la necesidad de satisfacer á la importancia del mayor ó menor comercio é industria de los pueblos de las localidades por que atraviesa y en ocasiones hasta la imprescindible de contar con la parte estratégica. Si á esto se añade la influencia de deter-

minadas localidades y corporaciones y hasta solo de personas, que redunda en beneficio de los menos y en perjuicio de los más, que contrarían y desvirtúan los proyectos mejores y más razonables, y tantas otras circunstancias á que hay que atender y que es difícil enumerar, y que todas concurren, ya solas, ya reunidas, á dificultar la resolucion de un problema tan complicado, se comprenderá que todo contribuye á arredrar al geómetra, que sin apartarse de los preceptos de la ciencia y resolviendo la cuestion económica del modo más favorable, desea al mismo tiempo satisfacer en lo que cabe tantas exigencias, unas justas y otras injustas que á cada paso se le presentan y que modifican y alteran en parte su pensamiento.

777. Es indudable que las condiciones esenciales que se han de satisfacer en primer lugar en todo proyecto, son la menor distancia y el establecimiento de la rasante, y para esto conviene tener presente lo dicho en nuestro *tratado de acotaciones*, párrafos 118 y 119 Una vez resueltas estas dos cuestiones, las demás que están supeditadas á ellas se van resolviendo en órden á su importancia y necesidad.

778. **Operaciones de gabinete**.—Una vez terminados los trabajos de campo, se procede á los trabajos de gabinete que, como hemos dicho (732), tienen por objeto la construccion del plano en el papel. Consta por lo tanto, de dos partes. En la primera se ocupa de hallar los valores numéricos de las coordenadas de todos los puntos que se han observado en el terreno, en virtud de los datos que suministran los registros de campo y de su disposicion en los registros de gabinete, y en la segunda se ocupa de la situacion en el papel, en virtud de los croquis y de los datos de los registros, de todos los puntos del terreno, los que unidos despues por rectas y trazadas además las líneas que son precisas para la representacion gráfica de la planimetría, se trazan tambien las curvas de nivel que expresan el relieve del terreno.

779. Antes de proceder al cálculo de las coordenadas, observaremos que en los trabajos de campo no pueden menos de cometerse inexactitudes, por mucho que sea el cuidado con que se practiquen las observaciones y de aquí la necesidad de fijar límites de tolerancia tanto en los trabajos de campo como en los de gabinete, los cuales una vez admitidos no deben traspasarse nunca.

780 En el método taquimétrico se distinguen las inexactitudes en *equivocaciones* y *errores*. Respecto á las *equivocaciones*, estas no deben tolerarse porque son materiales y se pueden evitar con la repeticion de las observaciones y las comprobaciones de los resultados en el campo, pues el cometerlas depende del descuido del operador en no hacer bien las lecturas de las miras y las apreciaciones de los ángulos con todo detenimiento; así como las operaciones numéricas del momento y el apunte ordenado de los datos que se inscriben en las libretas ó registros.

781. Respecto á los *errores* provienen de la imposibilidad de poder contar con la precision matemática de los instrumentos por esmerada y

perfecta que sea su construccion, y la imperfeccion en alto grado de nuestros sentidos Ante estas dos causas imposibles de remediar en absoluto, no hay otro recurso que transigir con ellas y tolerar los errores, haciendo que las diferencias de los resultados obtenidos á los verdaderos sean lo menos posible, lo que se consigue con la eleccion de instrumentos, que sean lo más exactos posible y en hacer las verificaciones y correcciones con la mayor exactitud, examinando con frecuencia si las últimas no sufren alteraciones durante el curso de las operaciones. Las observaciones deben tambien repetirse y del mayor cuidado, delicadeza é inteligencia del operador, así como de su mucha práctica depende sin duda alguna el mejor éxito del resultado.

782. La tolerancia en los errores debe, sin embargo, estar sujeta á ciertos límites que, como hemos ya dicho, no deben traspasarse y que siendo siempre los mismos en determinadas clases de operaciones, sean distintos con arreglo á la importancia de cada una de estas.

783. Hay que tener en cuenta dos clases de errores; los cometidos en los datos y que se llaman de *primer grado* y los que se obtienen en los resultados que se llaman de *segundo grado*, y como los primeros influyen en los segundos, es preciso que aquellos tengan los valores límites convenientes, para que estos no pasen de los límites marcados.

784. Como resultado de la práctica en los trabajos de campo, se ha adoptado en las distancias, por límite de tolerancia para los valores de datos ó sea para límite de primer grado, siempre que la distancia que representaremos por D no pase de un kilómetro, el valor de la expresion siguiente:

$$e = 0^{m},2 + 0,002\ D,$$

y disminuyendo la tolerancia cuando las dimensiones son de mayor consideracion, se tiene para las distancias mayores de un kilómetro la fórmula

$$e = 0^{m},2 + \sqrt{0,002\ D.}$$

Una vez corregidos los errores de primer grado, se opera con los datos obtenidos y se hallan resultados que aunque no son aun los verdaderos, se admite para límite de tolerancia de ellos ó sea de segundo grado los valores que se obtienen por las fórmulas siguientes:

Para límite de primer grado

$$e' = 0^{m},1 + 0^{m},001\ D$$

y de segundo grado

$$e' = 0^{m},1 + \sqrt{0,001\ D.}$$

785. Tratándose de la tolerancia que ha de corresponder á la medida de

los ángulos, hay que tener en cuenta el distinto grado de apreciacion de los instrumentos, del cual no puede pasarse para la eleccion del más conveniente segun los casos.

786 Citaremos los límites de tolerancia adoptados por el Instituto geográfico y estadístico de España que se consignan en las *Instrucciones para los trabajos topográficos*.

En la medicion de las distancias se tolerará el 1 : 500 de diferencia, contando tambien con la parte que pueda ser dudosa en la situacion de los extremos á que la distancia se refiera.

La tolerancia en el desarrollo gráfico para el cierre de cada polígono, cuando su perímetro no excede de 100 kilómetros está representada por la expresion

$$10^{m}\sqrt{K}$$

llamando K á la longitud del perímetro del polígono en kilómetros.

Cuando la longitud del perímetro excede de 100 kilómetros, la tolerancia será de

$$15^{m}\sqrt{K}$$

Para el error en el cierre de los triángulos, 1 minuto de la division sexagesimal.

787. Consecuencia de los límites que se adoptan y de las apreciaciones de los instrumentos, son los que rigen en las aproximaciones de los cálculos numéricos, pues sería trabajo inútil llevarlas más allá en los trabajos de gabinete de lo que permiten las que en el campo podemos obtener en las observaciones. Sin embargo, a veces conviene llevar la apreciacion más adelante en los cálculos numéricos y obtener mayor número de cifras decimales que las necesarias, con el objeto de comprobar y compensar los errores en los trabajos de gabinete, como veremos más adelante.

788. Los límites expuestos son suficientes en la mayor parte de las operaciones topográficas; pero algunas veces, como cuando se trata de trabajos catastrales de grande importancia, hay necesidad de reducir aun más la tolerancia, pero teniendo en cuenta de que á pesar de todo el cuidado que se ponga y menor tolerancia se admita, nunca nos podemos librar de las inexactitudes de todas clases en los trabajos de campo, es indudable la inutilidad de obtener en los cálculos numéricos una precision que habria por último de quedar sin objeto en las operaciones de gabinete, por todo lo cual, y á fin de que marchen en conformidad los trabajos de campo y de gabinete, bastará en general apreciar en el terreno hasta los decímetros en las distancias horizontales y hasta los centímetros en las verticales y otro tanto se hará en los cálculos numéricos y de este modo se hallarán unos y otros en la misma relacion, así como los instrumentos empleados en el campo con los medios adoptados en el gabinete.

789. *Correcciones de la orientacion.*—Antes de pasar á calcular los valores de las coordenadas de todos los puntos de un plano, nos ocuparemos de la correccion de la orientacion ó sea del verdadero valor de θ, para lo cual se siguen diversos procedimientos, segun el sistema que para el enlace de los puntos de estacion se haya empleado.

790. 1.° Si se ha elegido el método de *referencias directas* (598) que es cuando se van relacionando entre sí cada dos puntos de dos estaciones consecutivas, se empieza, si no se hubiese hecho ya en el terreno con el instrumento, por corregir de antemano la orientacion, con relacion al rumbo de la primera estacion, que se considera como bueno, y una vez corrompidos los valores de θ de los demás puntos de estacion, se consignan en el registro y se podrá pasar á hallar los valores de las coordenadas x, y, z.

791. 2.° Cuando se emplea el método de *referencias indirectas* (599), es decir, haciendo uso de dos puntos auxiliares, hay que hallar las coordenadas de estos dos puntos primero, refiriéndolas á los dos puntos de estacion que se trata de enlazar y con los valores obtenidos y por medio de la fórmula [17] (599).

$$\tang \theta = \frac{\Delta x}{\Delta y},$$

se obtiene la orientacion de la recta que une los puntos de referencia y dicha orientacion será la misma (599) si los valores de θ son iguales, siendo en caso contrario, como digimos, la diferencia de estos valores el valor de $\delta\theta$ (589).

En este caso, para convencerse que el error consiste en la orientacion, debe hacerse la comprobacion de la longitud de la recta que une los dos puntos de referencia, valiéndose de los datos tomados desde cada estacion y por la siguiente fórmula que se obtiene por medio de la fig. 263, lám. 25, correspondiente al párf. 599.

En efecto, en el triángulo ABC se tiene

$$BC = AB \operatorname{sen.} \theta,$$

de donde

$$AB = \frac{BC}{\operatorname{sen.} \theta} = \frac{\Delta x}{\operatorname{sen.} \theta} \qquad [58],$$

y una vez corregida la orientacion y teniendo presente el valor de $\Delta\theta$, se suma con todos los rumbos tomados en cada uno de los vértices ó puntos de estacion, y se podrá pasar á hallar despues las coordenadas x, y, z.

792. 3.° Si se hace uso del *método mixto de referencias* (600), se halla la correccion $\Delta\theta$ por la diferencia de los rumbos de la línea que une las dos estaciones y la de las coordenadas x, y, z del segundo vértice por medio de las coordenadas de los puntos de enlace intermedios.

Una vez corregidas las equivocaciones materiales en el campo, y hechas en el gabinete las correcciones de orientacion, como hemos manifestado, se consignan en el registro y se procede á hacer el cálculo de las coordenadas.

793. *Cálculo de las coordenadas.*—Pasemos ya á tratar de la práctica del cálculo de las coordenadas y de los registros de gabinete, donde se consignan los valores que han de servir despues para la construccion del plano, hallados en virtud de los datos inscritos en los registros de campo.

Para calcular las coordenadas hemos obtenido (578) las fórmulas para las rectangulares de un punto en funcion de las polares, las cuales son las siguientes, que señalaremos con los mismos números de órden que entonces

$$z = \mathrm{D} \cot \varphi \qquad [1]$$
$$x = \mathrm{D} \operatorname{sen} \theta \qquad [2]$$
$$y = \mathrm{D} \cos \theta \qquad [3]$$
$$\mathrm{D} = g \operatorname{sen}^2 \varphi \qquad [4].$$

794. Para hallar estos valores, se pueden seguir varios procedimientos. El primero consiste en valerse de sus tablas trigonométricas naturales para la determinacion de los valores sen θ, cos θ, cot φ y sen $^2 \varphi$.

795. El valor de g se obtiene en cada caso por la fórmula correspondiente, segun hemos visto en cada caso y el de D está en funcion de g y sen $^2 \varphi$.

796. Hallado el valor de z por la fórmula [1], se obtiene el de z corregido que hemos llamado z' (595) por la fórmula [14] de dicho párrafo, que es

$$z' = \mathrm{D} \cot . \varphi - m \qquad [14]$$

en la que m representa la altura de mira, por lo que habrá que restar el valor de esta altura del calculado para z ó sea de D cot. φ

797. Pueden consultarse las tablas de líneas trigonométricas naturales para la division sexagesimal, publicadas por el Ingeniero de caminos D. Juan Lopez del Rivero y las de Chevallet, y para la division centesimal las del Ayudante de obras públicas D. Leoncio de la Bárcena, y las de Salmojraghi.

El método expuesto exige el hacer cinco multiplicaciones para determinar cada punto despues del trabajo de buscar en dichas tablas los valores de sen φ, cot φ, sen θ y cos θ, y además hacer el cálculo de g. Como estos valores, escepto el de g, son decimales con bastantes cifras, aunque solo se empleen cuatro en los cálculos, las operaciones serian muy laboriosas y numerosas.

798. El segundo procedimiento, que consiste en emplear los logaritmos de las líneas trigonométricas naturales y los de los números, es más

ventajosa que el anterior, puesto que las multiplicaciones que hay que ejecutar se reducen á sumas, pero tambien además del manejo de las tablas de las líneas trigonométricas hay que hacer uso de las de los logaritmos de los números. Pueden consultarse las tablas de Vazquez Queipo y y las de la Lalande, Callet y Schron.

Como la fórmula [14], que es la que da el verdadero valor de la coordenada z, no es calculable por logaritmos por ser una resta, solo se puede calcular el minuendo que es el producto D cot. φ y despues restar m. Para evitar confusion señalaremos en adelante por t el valor de D cot. φ y por z el verdadero de esta coordenada, de modo que se calcularán las fórmulas siguientes en el órden que ahora las colocamos y á las que conservaremos los números de órden que ya tenian asignados

$$D = g \text{ sen.}^2\, \varphi \qquad [4]$$
$$t = D \text{ cot.}\ \varphi \qquad [a]$$
$$x = D \text{ sen.}\ \theta \qquad [2]$$
$$y = D \text{ cos.}\ \theta \qquad [3]$$
$$z = t - m = D \text{ cot.}\ \varphi - m \qquad [14]$$

De modo que se calculan las cuatro primeras por logaritmos y la última para z se obtiene restando m del valor de t.

799. A pesar de ser como hemos dicho más ventajoso este procedimiento que el anterior, si se siguiese cualquiera de estos métodos para la determinacion de las coordenadas de los puntos de estacion y de todos los del detalle ó relleno del plano, seria imposible el método taquimétrico, pues la economía de tiempo y de trabajo en las operaciones de campo no compensaria el esceso de trabajo y de tiempo empleado en el gabinete: sería insoportable el cálculo de tantos puntos como hay que considerar en el levantamiento de un plano, por los métodos ordinarios citados, y de aquí la imperiosa necesidad de tener que adoptar los varios métodos de abreviacion propuestos por varios autores y seguidos con éxito en la práctica y de los cuales nos ocuparemos más adelante.

800. *Registros de gabinete.*—Suponiendo calculadas las coordenadas, bien por los métodos ordinarios expuestos, bien por los abreviados, vamos á ocuparnos de la manera de formar los registros de gabinete. Para esto, teniendo á la vista el registro de campo núm. 1, en el que suponemos estar hechas todas las anotaciones, se formará el registro de gabinete número 3 que insertamos en las páginas 386 y 387, de la manera siguiente: en la 1.ª columna se ponen los puntos de estacion; en la 2.ª los valores de θ consignados en la fig. 286 (lám. 29), que representa el croquis, y que se hallarán tambien en la columna 7.ª del registro núm. 1; en la columna 3.ª las correcciones de la orientacion de los ángulos θ. La orientacion se comprueba al final, sumando las partidas de *atrás* y *adelante* de la columna 2.ª y restando una de otra. Si entonces se obtiene un

resultado, prescindiendo de la cifra de las centenas, que sea igual al último hallado en la columna 3.ª, la orientacion quedará comprobada.

En la columna 4.ª se ponen los ángulos θ corregidos y que se diferencian en 200°; en la 5.ª los ángulos φ de la columna 6.ª del registro número 1, que se ven en la fig. 287 (lám. 29), la cual representa el desarrollo del perfil de la fig. 286 (lám. 29). Cada ángulo adelante como el 82°35 de un punto de estacion con el ángulo atrás 117°68 del punto siguiente, deben componer 200° ó próximamente esta suma, por considerarse las verticales como paralelas (tomo I, 50) y ser ángulos internos de un mismo lado de la secante.

En la columna 6.ª se ponen las distancias entre cada dos puntos de estacion, que se obtienen por la fórmula

$$D = g \operatorname{sen}^2 \varphi \qquad [4].$$

En la columna 7.ª se ponen los valores de las coordenadas parciales x, y, z, obteniéndose las dos primeras por las fórmulas

$$x = D \operatorname{sen.} \theta \qquad [2],$$

$$y = D \cos. \theta \qquad [3],$$

y la z por medio de la fórmula que dá su valor corregido

$$z' = D \cot. \varphi - m \qquad [14];$$

y los valores de estas tres coordenadas se suman algebráicamente en cada punto de estacion con las del punto anterior.

En la columna 8.ª se ponen las alturas del instrumento que estarán anotadas en la 2.ª columna del registro núm. 1.

En la columna 9.ª las diferencias de nivel entre cada dos estaciones, que se calculan sumando algebráicamente en cada una de ellas la altura del instrumento con la coordenada hallada en la misma para la otra y tomando el promedio de la suma de los dos resultados. El desnivel hallado en cada caso llevará el signo + cuando sube el terreno y el — cuando baje, y se suma algebráicamente con la cota de la estacion anterior, tal como se ha dicho en la nivelacion (152) y partiendo de las mismas hipótesis que allí se hicieron.

Por último, en la columna 10.ª se ponen á partir del orígen, del cual se conocen las coordenadas, las de los puntos de estacion siguientes, dejando la columna 11.ª para consignar en ella las coordenadas compensadas despues de comprobadas, que explicaremos el modo de obtenerlas á continuacion.

801. *Comprobaciones y compensaciones.*—Para esto observaremos que

como el sistema taquimétrico consiste, como se ha visto, en la determinacion de una série de centros de estacion en los que se coloca el taquímetro y en la referencia de los distintos puntos del terreno que constituyen el detalle á la expresada série de estaciones, resulta que de la exactitud con que se determine cada centro de estacion dependerá la de los puntos que les rodean y que á cada una se refieran, y de aquí el que si una estacion está mal determinada, al pasar á la siguiente y de ésta á otra, y así sucesivamente, los errores se irán acumulando y el resultado será muy distinto del verdadero, y por lo tanto habrá la necesidad de contar primero con la exactitud de los puntos de estacion, para despues obtener la de los puntos que á cada una correspondan.

Segun la clase y extension del terreno, al enlazar entre sí los puntos de estacion para formar la base poligonal que ha de comprobarse y compensarse, dicha base se presenta bajo las formas de *cadenas, anillos* ó *redes*.

802. Cuando la base poligonal es abierta ó en forma de cadena, se procura, si es posible, elegir dos vértices geodésicos para extremos de la base poligonal, y en su defecto se refieren (fig. 286; lám. 29) los puntos extremos A y B de estacion de la base y los demás que sea posible á vértices de la triangulacion geodésica. De este modo quedan ligados entre sí unos y otros puntos, y los vértices de la triangulacion suministran los medios de calcular la exactitud de los vértices de estacion. Se comprende, en efecto, que si contando con las coordenadas exactas y deducidas para los extremos A y B de la base y partiendo de las conocidas para A, se siguiese la línea de operaciones hasta llegar á B, deben resultar iguales las que se obtengan para este punto B con las ya conocidas de antemano para el mismo. En la práctica, sin embargo, no se logra esta exactitud, y habrá que admitir los resultados cuando las diferencias no traspasen los límites de tolerancia admitidos, y desechar aquellos en que esta circunstancia no se verifique.

Para proceder en este caso á la comprobacion, una vez obtenidas las diferencias entre las tres coordenadas del segundo extremo B ya conocidas y exactas, y las obtenidas siguiendo la base de operaciones, se calcula la diagonal del paralelepípedo, cuyas tres dimensiones sean las expresadas por dichas tres diferencias, y el valor de esta diagonal es el que expresa la desviacion que se obtendría en la posicion del punto B con respecto á la verdadera. Si esta diagonal no excede del límite de tolerancia correspondiente al desarrollo de la línea de seguimiento A — 2 — 3 — B, entonces se aceptan las operaciones practicadas, y una vez hecha esta comprobacion, se procede á hacer las compensaciones en las estaciones comprendidas en dicha línea de seguimiento. Consisten éstas en repartir en partes iguales entre las coordenadas de los vértices sucesivos, siguientes al primero A de la base A — 2 — 3 — B, y de este modo se obtienen las coordenadas corregidas ó compensadas que se consignan en la columna 11.ª del registro núm. 3.

NÚM...

Registro de gabinete, ...puntos de estacion

1	2		3	4	5		6	7						8	9	10			11		
	ÁNGULOS θ				ÁNGULOS φ			COORDENADAS ...CIALES.								COORDENADAS Á PARTIR DEL ORÍGEN.			COORDENADAS COMPENSADAS		
								x		y		z									
Puntos de estacion	Atrás	Adelante.	Correccion de orientacion.	Ángulos θ corregidos	Atrás	Adelante	Distancia entre las estaciones.	+	—	+	—	+	—	Altura del instrumento	Diferencias de nivel	X	Y	Z	X	Y	Z
A. 1	»	29°,71	»	29°.71	»	82°,35	»	»	»	»	»	33,143	»	1 475	»	1860 3	925 2	242,52	1860 3	925 2	242 52
2	229°,85	»	— 0,14	229°,71	117° 68	»	120^{m} 7	54 3	»	107,5	»	»	36,175	1 543	+ 34 632	1914 6	1059,7	277 15	1914 5	1059,8	277,14
»	»	76° 23	»	76° 09	»	105° 68	»	»	»	»	»	»	15 070	»	»	»	»	»	»	»	»
3	276°.33		— 0 24	276° 09	94° 33	»	169^{m} 8	157,9	»	62,0	»	11,986	»	1 520	— 13,516	2072 5	1121 7	263 64	2072 4	1121 8	263 63
»	»	117° 67	»	117° 43	»	89°,18	»	»	»	»	»	34,831	»	»	»	»	»	»	»	»	»
B. 4	317° 22	»	— 0 21	317° 43	110° 79	»	201^{m} 3	193 5	»	54,4	»	»	37.731	1,425	+ 36,327	2266 0	1067 3	299 97	2265 8	1067 5	299 95
	23 40	23.61						Coordenadas conocidas de B								2265 8	1067 5	299 95			
		— 0,21						Coordenadas halladas para B								2266 0	1067 3	299,97			
		23 40														+ 0 2	— 0 2	+ 0,02			

803. Si la base poligonal fuese de la forma de anillo ó cerrada, como la fig. 288 (lám. 29), entonces se comprende que al hacer la comprobacion, empezando por el punto de partida A, que suponemos sea un punto geodésico ú otro notable, ó de lo contrario que estuviese referido á puntos de esta clase, y siguiendo todo el contorno de la base hasta venir otra vez á parar al punto de partida A, debieran resultar por este medio las mismas coordenadas ya conocidas de dicho punto de partida; pero aquí, como en el caso anterior, no lográndose en la práctica esta exactitud, habrá que seguir, para hacer las compensaciones, una marcha análoga á la explicada en el caso anterior. Como refiriéndose solo al punto de partida, aunque resulte exacta la figura del polígono, puede dudarse de que sea la misma la orientacion, es preciso hacer la referencia para el enlace de las estaciones á otros dos puntos exteriores y cuya orientacion sea conocida.

804. Cuando la figura de la línea poligonal que une entre sí todas las estaciones del terreno se extiende en todos sentidos formando una red que lo abarca todo, lo que sucede cuando los terrenos son de grande extension, entonces hay que multiplicar en todos sentidos los centros de estacion, y relacionarlos entre sí, de manera que puedan hacerse las comprobaciones de dichos puntos con cierto órden, que evite el hacer cálculos que sean inútiles. El medio más conveniente que debe elegirse, consiste en valerse de tres ó más vértices geodésicos, y en su defecto de puntos trigonométricos que de antemano se determinan, haciendo una triangulacion en el terreno en que se ha de operar, y referir á ellos ciertos puntos de estacion por medio de bases poligonales en cadena. Partiendo despues de las coordenadas conocidas de dichos puntos geodésicos ó trigonométricos, se comprueban las del punto de estacion á que van á terminar las bases poligonales que parten de aquellos, y se compensan las estaciones intermedias comprendidas entre cada punto geodésico ó trigonométrico, y el de estacion elegido al que concurren las dichas bases en cadena, siguiendo la misma marcha explicada en los dos casos anteriores, y teniendo en cuenta que se ha de tomar el medio aritmético de los valores obtenidos para las bases poligonales que concurren al punto de estacion, objeto de la comprobacion.

805. Pero en la eleccion de esos ciertos puntos de estacion que se ligan con los geodésicos ó trigonométricos, y en su defecto con puntos notables taquimétricos bien determinados, debe adoptarse cierto órden. Para esto conviene elegir en el terreno como primeros puntos los que vengan á ocupar la parte central del terreno y puedan enlazarse con mayor número de puntos geodésicos ó trigonométricos, los cuales reciben los nombres de *vértices centrales ó estaciones centrales de primer órden*.

Se eligen despues aquellos puntos de estacion que sigan á los anteriores en importancia y que puedan relacionarse con los vértices trigonométricos que sea posible y con los centrales de primer órden ya determinados, y se tendrán conocidas las *estaciones centrales de segundo órden*; y se obtendrán las de *tercer órden* buscando aquellas que puedan referirse á algun punto geodésico y á estaciones centrales de primero y de segundo órden, y así sucesivamente para las de los demás órdenes, resultando de este modo que todas las estaciones se hallarán determinadas de posicion por los promedios de los resultados obtenidos por las comprobaciones de todas las bases en cadena que concurren en cada estacion y que las enlazan entre sí en todos sentidos. De este modo, se llega hasta el caso de poder comprobar y compensar una sola estacion ó de último órden relacionada solamente con alguna ó algunas ya comprobadas y compensadas de las pertenecientes á alguna de las cadenas correspondientes á las estaciones de órdenes anteriores al del último que se considera.

806. Sea, por ejemplo, la red representada en la fig. 289 (lám. 30) y A, B, C tres vértices de un triángulo geodésico que comprende la parte de terreno cuyo plano se trata de obtener. Examinando el terreno se observa que el punto *a*, desde el cual se divisan los tres puntos geodésicos A, B, C, se puede elegir por *estacion central de primer órden* y establecer las tres cadenas A*a*, B*a* y C*a* que le unen á dichos tres vértices, y procurando que la direccion de estas cadenas pase por aquellos puntos que puedan á su vez ser los más convenientes para servir de estaciones para determinar el mayor número de puntos del detalle del terreno.

El punto *b*, que puede determinarse estableciendo las dos cadenas A*b* y B*b* que le unen á los dos vértices geodésicos A y B, y la cadena *ab* que le une á la estacion de primer órden *a*, se podrá considerar como *estacion central de segundo órden*.

El punto *c* que puede determinarse refiriéndole al punto geodésico A, al central de primer órden *a* y al de segundo órden *b*, por medio de las cadenas A*c*, *ac* y *bc*, será un punto de *estacion central de tercer órden*, y así sucesivamente, hasta el caso de considerar las estaciones de los últimos órdenes, tales como *d*, *e* y *m*, relacionadas, la primera con la estacion de primer órden *a*, la segunda con la de segundo órden *b* y la tercera con la de tercer órden *c*.

Como se vé en la figura, la disposicion de las cadenas dá lugar á que se formen anillos para constituir la *red* ó *malla* que comprende el terreno.

807. *Construccion del plano*.—Una vez comprobadas y compensadas las coordenadas de los puntos de estacion, cualquiera que sea el procedimiento seguido para levantar el plano, se consignan en el registro número 3, y con los datos del registro número 2 se calculan las coordenadas parciales x y z de todos los puntos del detalle correspondientes á cada estacion por las fórmulas ya sabidas (578), consignándolas en dicho registro, y con ambos registros 2 y 3 y los cróquis dibujados en el campo, se puede proceder á la construccion del plano en el papel, empezando por determinar las coordenadas principales, tanto de los puntos de estacion como de los del detalle, consignándolas en nuevas columnas en los respectivos registros, ó disponiéndolas en otros estados con el órden más

conveniente para la claridad de la situacion de los puntos en el plano, y haciendo la referencia á la meridiana verdadera de las orientaciones corregidas de los ejes coordenados de los puntos de estacion, en todo lo cual no habrá dificultad, siguiendo los métodos que sean análogos á los explicados en varias partes de nuestra obra para este objeto.

808. La condicion necesaria es que el orígen que se tome por principal sea tal, que los ejes coordenados principales formen un ángulo triedro, dentro del cual se halle comprendida toda la zona del terreno que se trate de representar, á fin de que todas las coordenadas pertenecientes á los puntos de estacion resulten positivas, lo que es fácil de conseguir, (Acotaciones, 8.) Respecto á las coordenadas parciales de los puntos del detalle, como en cada estacion parcial se considera otro sistema de ejes paralelos al sistema principal, al cual se refieren las coordenadas parciales de los puntos del terreno que rodean la estacion, dichas coordenadas podrán llevar diferentes signos, segun el sentido en que se las mida, para lo cual es conveniente para el órden y claridad fijar la direccion y el signo de los ejes coordenados. Por último, sumadas algebráicamente con las coordenadas principales de un punto de estacion las coordenadas parciales de los puntos que á esta estacion correspondan, se obtendrán tambien las coordenadas principales de todos los puntos del detalle de que ya hemos hablado.

809. *Curvas de nivel.*—Para completar la representacion gráfica del relieve del terreno, hay que hacer aplicacion de la Taquimetría al trazado de las curvas de nivel. Ya hemos visto (cap. VI y Acotaciones, 103 á 120) la teoría de estas curvas, y que el método general para determinar los puntos de las curvas de nivel consiste en unir por medio de una recta dos puntos ya situados en el plano y cuyas cotas se conocen, y en hallar sobre esta recta las proyecciones de los puntos cuyas cotas sean las correspondientes á las respectivas curvas.

Sean a y b (fig. 290; lám. 30) los dos puntos del plano cuyas cotas se conocen; se aplica esta recta sobre el plano horizontal de comparacion (Acotaciones, 20) y resultará la recta AB del terreno. La cuestion está reducida á hallar los valores de las distancias aa', aa''... para obtener las proyecciones a', a''.... de los puntos A', A''.... del terreno por donde pasan las curvas para trazarlas en el plano por los puntos a', a''.... Estas distancias se obtienen por la fórmula siguiente (Acotaciones, 24):

$$z = \frac{(c' - c)\ L}{C - c},$$

en la cual representábamos por z las longitudes ó distancias aa', aa''.... que ahora llamaremos d, d'.... y siendo L la longitud de la proyeccion $ab = Am''$ de la recta AB, así como C y c las cotas Bb y Aa de los puntos extremos B y A y c', c''.... las de los puntos A', A''.... de donde tendremos

$$d = \frac{(c' - c)\,L}{C - c} = \frac{L}{C - c} \times (c' - c)\,,$$

$$d' = \frac{(c'' - c)\,L}{C - c} = \frac{L}{C - c} \times (c'' - c)\,;$$

....

y así sucesivamente para mayor número de curvas, resultando ser constante el valor de la fraccion $\frac{L}{C - c}$ para hallar las proyecciones de todos los puntos del terreno por donde han de pasar las curvas de nivel.

Aplicando á estas fórmulas el cálculo logarítmico, se convertirian en

$$\text{Log. } d = \text{Log. } L - \text{Log. } (C - c) + \text{Log. } (c' - c)\,;$$

$$\text{Log. } d' = \text{Log. } L - \text{Log. } (C - c) + \text{Log. } (c'' - c)\,;$$

....

siendo ahora constante en estos valores la diferencia Log. L — Log. $(C - c)$.

Por los métodos abreviados de cálculo se facilita la resolucion de estos problemas, que están reducidos á determinar cuartas proporcionales.

810. *Dibujo de los planos.*—No creemos debe tratarse en un *Tratado de Topografía* del dibujo de los planos topográficos, pues hay tratados especiales que son cursos completos de dibujo topográfico, y en ellos están contenidas todas las reglas del dibujo, así como su práctica. En nuestro *Tratado de Acotaciones* se halla expuesta la teoría de este dibujo, siendo este Tratado además la base de la Topografía donde se exponen los principios en que ésta se funda. Respecto á los signos topográficos con que se ilustran los planos, se hallan comprendidos tambien en los tratados dichos de dibujo y en las Instrucciones para los trabajos topográficos de la Direccion general del Instituto geográfico y estadístico.

811. *Copia y reduccion de los planos y perfiles.*—Los lectores podrán consultar el capítulo XI donde hemos tratado esta parte extensamente, y vamos á añadir aquí, solamente para completarla, el nuevo é importante procedimiento para la copia de los planos por medio del *papel ferro-prusiato*, el cual es sensible para obtener instantáneamente las copias de los dibujos en fondo azul ó blanco. Este papel es ya muy conocido y se va generalizando, siendo de mucha utilidad para los Ingenieros, Ayudantes, Oficiales de la Armada y demás cuerpos facultativos, así como para los Jefes de talleres y todas aquellas personas que necesitan un pequeño número de copias de un plano ó de un dibujo cualquiera. En virtud de su importancia y utilidad, se ha autorizado á la Direccion general de Obras públicas, por real órden de 1.° de Diciembre de 1881, para que pueda admitir en papel ferro-prusiato las copias de planos y dibujos, siempre que se presenten forradas en tela ú otro papel que le dé consistencia. Los números con que expresamos las clases de este papel, son las marcas del fabricante para distinguirlos

812. Para usar este papel y obtener copias en fondo azul con trazos blancos, se coloca el dibujo hecho en papel trasparente sobre el cristal del marco-prensa, y sobre él, el papel ferro-prusiato núm. 494, y se expone á la luz; el papel va cambiando de tono; cuando toma un color gris aceitunado con reflejos metálicos, se saca la prueba del marco y se lava sumergiéndola en un baño copioso de agua, agitando la cubeta para facilitar el desprendimiento de la preparacion y renovando el agua una ó más veces. La imágen se destaca, y al terminar el lavado queda una prueba en que las partes negras ú opacas del original son blancas, y las partes trasparentes azules.

Para obtener las copias en fondo blanco, con trazos azules, se halla primeramente por el procedimiento arriba indicado una prueba de fondo azul y trazos blancos en papel ferro-prusiato trasparente núm 507.

Obtenida esta prueba negativa, y sirviéndose de ella como matríz en lugar del dibujo original, se obtienen siempre por el mismo procedimiento las pruebas de fondo blanco y trazos azules en el papel número 494.

Observaciones.—El papel ferro-prusiato debe guardarse al abrigo de la luz, y las operaciones de cortarlo, colocarlo en el marco y lavarlo, deben hacerse con rapidez y medio á oscuras, ó á la luz de una lámpara colocada á distancia.

En cuanto á determinar el momento más conveniente en que debe cesar la impresion de la imágen, se observará que el papel preparado expuesto á la luz toma sucesivamente las tintas siguientes: amarillo verdoso, verde azulado, azul gris, gris aceituna con reflejos metálicos; en este último punto debe cesar la impresion y hacerse el lavado: si no la copia tomaría un color azul demasiado oscuro y los blancos perderian su limpieza. El tiempo que ha de durar la exposicion depende de la trasparencia del original y de la intensidad de la luz. Siendo el original trasparente, y bajo la accion directa del sol, se necesita próximamente en verano un minuto y tres en invierno La exposicion para obtener negativas, núm. 507, debe prolongarse algo más para que el fondo resulte muy oscuro; cuanto más oscuro sea el fondo, más puro y limpio será el blanco de las positivas.

Aun cuando es conveniente que el original esté hecho en papel trasparente, pueden obtenerse copias de dibujos hechos en papel opaco; para este objeto recomendamos el papel núm. 759, fabricado especialmente en pasta muy igual, pura y limpia para que no resulten manchas en la copia; con este papel basta prolongar bastante la exposicion á la luz para conseguir buenas copias. Si se quieren reproducir dibujos hechos en un papel cualquiera opaco, es preciso humedecerlos por el revés con un ligero baño de bencina en el momento de ir á sacar la copia; despues de seco queda en su estado anterior.

Puede hacerse el lavado con agua fria, pero es preferible emplearla á 30 ó 35º centígrados, con lo que se consigue mayor rapidez y perfeccion.

Debe sacarse el dibujo en cuanto se destaque bien la imágen, pues de prolongar el lavado perderia en intensidad.

Se secan las pruebas suspendiéndolas de una cuerda con pinzas de madera; es conveniente enjugarlas primero entre dos hojas secantes.

Como el papel ferro-prusiato no es de mucho cuerpo, si se le quiere dar mayor resistencia debe pegarse en papel ó lienzo despues de obtenida la copia. Para facilitar esta operacion, se usa el papel especial engomado núms. 104 y 105. Antes de que la prueba se haya secado por completo, ó despues de humedecerla con igualdad por el reverso, si está ya seca, se coloca sobre el papel engomado y poniendo encima un papel secante ó de seda, se pasa suavemente la mano de arriba abajo; si quedase alguna burbuja, se pincha con una aguja fina y se oprime hasta que salga todo el aire. Si se quiere hacer el forrado en tela, núm. 910, se corta un trozo algo mayor que el marco (núm. 900 á 903), se moja bien y se tiende en el mismo, enganchándola en los clavos que dicho marco lleva en los bordes, empezando por los costados y terminando por los lados alto y bajo, se extiende con una brocha una capa de cola fresca clara y se aplica la prueba humedecida con agua.

Recomendamos el licor anti-fotogénico para desleir la tinta de china que se haya de emplear en los originales; su color permite emplear la tinta ménos espesa.

Para escribir sobre el azul del ferro-prusiato puede emplearse una disolucion de potasa con sal de acedera.

Mézclense en un vaso:

10	gramos	de sal de	acedera.
7	»	»	potasa.
50	»	»	agua

Se agita y decanta ó filtra al cabo de algunas horas; una parte de la sal no se disuelve.

813. **Métodos abreviados de cálculo.**—Los medios que se emplean para facilitar y abreviar el cálculo de las coordenadas de los puntos en el método taquimétrico, en el que es tan grande el número de las que hay que determinar, son tambien aplicables á todo género de cálculos aritméticos, y se pueden distinguir en dos clases

La primera comprende aquellos aparatos, como reglas y círculos divididos, de madera, marfil ó metal, dispuestos de manera que con su auxilio se encuentran los resultados de los datos que entran en toda clase de cuestiones, sabiéndolos manejar con soltura y lijereza.

La segunda parte consiste en el manejo de tablas especiales publicadas, donde se hallan dichos resultados correspondientes á todos los datos que puedan ofrecerse.

Los aparatos de que nos ocuparemos, comprendidos en la primera parte son: la *regla logarítmica* y los *círculos logarítmicos* de Salmoiraghi y de Sonne.

814. *Regla logarítmica.*—Las reglas logarítmicas se van generalizando mucho y se venden en el comercio acompañadas de sus respectivas instruciones ó folletos publicados por sus autores. Estas reglas y en general, toda esta clase de aparatos, es preciso tenerlas en la mano para su explicacion, inteligencia y manejo para resolver todas las cuestiones que se ofrezcan por su medio, y por lo tanto solo nos concretaremos á hacer una reseña de las más importantes refiriéndonos al artículo publicado en la *Revista de Obras públicas*, por D. Manuel Peironcely, y que se vende en un cuaderno con una lámina en casa de Recarte, por ser el más claro y completo que hemos visto entre todo lo publicado sobre esta materia.

815. La teoría de la *regla logarítmica*, llamada tambien *regla de cálculo*, es muy sencilla y fácil de comprender, poseyendo las ideas más fundamentales de la teoría de los logaritmos.

Están, pues, reducidas á contener gráficamente los logaritmos de los números y bastarian por sí solas para resolver las fórmulas expuestas (798), si en estas solo entrasen números desde luego; pero como además de números entran líneas trigonométricas, habría que buscar los logaritmos de estas líneas en las tablas de logaritmos de las líneas trigonométricas ó los números que expresan sus valores en las tablas trigonométricas naturales, para obtener despues sus logaritmos por medio de la regla logarítmica, y por lo tanto sería muy penoso y largo el trabajo que se emplease haciendo sólo uso de una regla logarítmica que solo contuviese la escala de los números y de sus logaritmos, si bien se pueden efectuar con bastante exactitud los cálculos que se reducen á multiplicaciones y divisiones, los cuales sabemos quedan reducidos á sumas ó restas de mantisas y se podrían obtener los valores de las fórmulas citadas, que todas tienen la forma de productos.

816. De aquí la necesidad para abreviar el trabajo, de que haya trazadas en las reglas de cálculo, que se construyen especialmente para los cálculos taquimétricos, las demás escalas que son necesarias, como son además de la citada de los logaritmos de los números naturales, las de los logaritmos de los senos y cosenos, de las tangentes y cotagentes y de los senos cuadrados.

Consta, pues, el aparato usado en la taquimetría llamado *regla de cálculo* ó *regla logarítmica*, de dos reglas de madera ó de metal (fig. 291; lámina 29), una más ancha R, y otra más estrecha *r*, que puede correr y se desliza á lo largo de la primera en una ranura practicada en la parte media de esta y que se llama *reglilla*. Esta reglilla se sujeta á la regla fija, por medio de una lengüeta con su correspondiente ranura, estando la lengüeta en unas en la reglilla, y otras llevando la lengüeta en la regla y la ranura en la reglilla que es lo más general. Las diferentes divisiones ú graduaciones de que hemos hablado, se hallan grabadas en los bordes exteriores de las dos caras A y B de la reglilla *r* y en los de la ranura de la regla fija, y pasaremos á describir las diferentes escalas que contiene la regla y el uso de cada una.

817. 1.º *Escala de los logaritmos de los números.*—Está trazada en los dos bordes *aa* y *bb* de la ranura de la regla fija R y en el *cc* de la cara B de la reglilla *r* (fig. 291; lám 29). Para trazarla se construye primero una escala auxiliar de partes iguales que se halla en el borde inferior *ee* de la mitad de la izquierda de la cara A de la reglilla.

Para esto se empieza por tomar una magnitud que en esta regla es de $0^m,20$ ó sean dos decímetros que se divide en 500 partes iguales, para lo cual se divide primero en 10 partes iguales *ms*, y cada una de estas en otras 10 *mt*, numerándose las primeras *ms* con los números 10, 20, 30..... hasta el 100 en los dos sentidos de izquierda á derecha y de derecha á izquierda. Como cada parte *mt* se divide en cinco, resulta para la *ms* 50 partes y para la *mn* 500; de manera que cada una de las menores divisiones equivale á 2 milésimas de la unidad elegida *mn*, pudiéndose apreciar á la simple vista la mitad ó una milésima.

La verdadera magnitud de menor division equivalente á las 2 milésimas de la unidad *mn* expresada en fraccion del metro es $0^m,20 : 500 = 0^m,0004$ ó sean $\frac{2}{5}$ de milímetro.

818. Construida para este caso la escala de partes iguales, que de un modo análogo se procedería para otros casos, se traza la de los logaritmos de los números de la manera siguiente:

Se toman en la escala de partes iguales las magnitudes que equivalgan al número de milésimas que contengan las mantisas de los logaritmos de los números naturales que se encuentran en una tabla de logaritmos, y se van colocando sobre una línea recta á partir de un punto que se toma en la misma para que sirva de orígen, marcando en el otro extremo de dichas magnitudes la cifra ó cifras del número á que pertenece, resultando de este modo haber construido una tabla gráfica de logaritmos compuesta de dos columnas, una que contiene los números y otra sus logaritmos correspondientes, representados por magnitudes gráficas, cuyos valores numéricos se pueden obtener valiéndose de la escala de partes iguales.

819. Una vez construida así la escala gráfica de los logaritmos de los números, se pueden resolver los dos problemas que ocurren en las tablas de logaritmos, que son, dado un número, hallar su logaritmo, y dado un logaritmo, hallar el número á que corresponde, y cuya resolucion se comprende fácilmente.

En la construccion de esta escala, hay que tener presente, que como son iguales las mantisas de los logarimos de los números, que crecen en progresion décupla, es decir, que teniendo iguales cifras significativas, solo varía el lugar de la coma, y por lo tanto, el número de sus cifras enteras, parece á primera vista que si se construye una escala que contenga las mantisas de los logaritmos de los números, desde el 1 al 10, no se necesita más para los cálculos, supuesto que no excediendo de 10 las características de los números que se consideran en la Taquimetría, se pueden sumar mentalmente y por separado de las escalas. Con todo, atendiendo á que pueden pasar de 1 las sumas de las mantisas y á que las distancias que se miden con el anteojo del taquímetro varían en lo general entre 10^m y 1.000^m, es preciso que la escala de los logaritmos de los números tenga dos unidades de longitud, es decir, que esta sea de $0^m,40$ ó cuatro decímetros, en los cuales se representan los complementos logarítmicos á log. 10 de los números de 10 á 1.000, lo que equivale á suprimir la primera unidad de la escala que contuviese los logaritmos de los números comprendidos entre 1 y 1.000.

820. El modo expuesto de construir la escala no altera en nada el resultado de los cálculos, en atencion á que por la escala logarítmica solo se hace el cálculo de las mantisas, teniendo que verificar aparte el de las características.

Tambien hay que advertir, que como los logaritmos de los números no varían proporcionalmente á dichos números, no serán iguales en la escala las distancias entre los trazos correspondientes á los números que difieren en una misma cantidad, resultando de aquí que las menores divisiones de la escala no aprecian en toda la longitud de ésta las mismas fracciones.

Por último, hay que observar tambien, que no siendo posible marcar todos los números enfrente de los trazos de sus logaritmos, solo se ponen algunos, apreciando los demás por las divisiones secundarias y á la simple vista, cuando hay fracciones más pequeñas que las menores divisiones. Las dos observaciones expuestas para esta escala son generales, y corresponden, por lo tanto, á las demás escalas de que tenemos que tratar.

821. Con la escala de los números y la de partes iguales se pueden verificar, además de las multiplicaciones y divisiones, como ya hemos dicho, la elevacion á potencia y extraccion de raíces, lo mismo que se hace por medio de las tablas de logaritmos.

822. Las reglas de cálculo tienen muchísimas aplicaciones en la mayor parte de las cuestiones aritméticas más usuales, siendo en general su verdadera utilidad en aquellas operaciones en que no se necesita mucha exactitud en las últimas cifras, consistiendo su mayor ventaja en la comodidad de su manejo y en la brevedad con que se obtienen los resultados. Nosotros solo nos ocuparemos de sus aplicaciones á la Taquimetría, para las cuales hemos recomendado las de Peironcely, y para los demás casos, recomendamos á nuestros lectores las reglas de cálculo con sus instrucciones de Lalanne, de Guy y de Leclair-Dejust.

823. 2.° *Escalas de los logaritmos de los senos cuadrados.*—La construccion de esta escala es necesaria con la de los números para la determinacion de la distancia D, cuya fórmula es como sabemos:

$$D = g \text{ sen }^2 \varphi \qquad [4]$$

En efecto, restableciendo el rádio, resulta

$$D = g \frac{\text{sen.}^2 \varphi}{R^2}$$

y tomando logaritmos

$$\text{Log. } D = \log. g + \log. \text{sen}^2. \varphi - \log. R^2$$

y como $R = \text{sen. } 100^\circ$, resultará:

$$\text{Log. } D = \log. g + \log. \text{sen.}^2 \varphi - \log. \text{sen.}^2 100^\circ$$

á que se puede dar las siguientes trasformaciones:

$$\text{Log. } D = \log. g - (\log. \text{sen.}^2 100^\circ - \log. \text{sen}^2 \varphi) \qquad [59]$$
$$\text{Log. } D = \log. g - 2(\log. \text{sen. } 100^\circ - \log. \text{sen } \varphi)$$
$$\text{Log. } D = \log g - 2(\log. R - \log. \text{sen. } \varphi)$$

y como $R = 10^{10}$ y $\log. R = 10$, tenemos por último

$$\text{Log. } D = \log g - 2(10 - \log. \text{sen. } \varphi) \qquad [60].$$

824. La construccion de las dos escalas de los *senos cuadrados* que se ven en el borde *ee* de la parte inferior de la mitad de la derecha de la cara A de la reglilla, tiene por objeto efectuar la resta indicada por la fórmula [59]. Estas dos escalas son exactamente iguales en su construccion, y solo difieren en que están colocadas en sentido inverso la una de la otra. Para construirlas, se procede á dar á φ distintos valores sucesivamente, y valiéndose de una tabla de logaritmos de las líneas trigonométricas, se hallan los valores correspondientes que resultan para la expresion logaritmo $\text{sen.}^2 100^\circ - \log. \text{sen.}^2 \varphi$ de la fórmula [59], ó bien considerando la fórmula [60] los valores que habrá que buscar, serán para cada caso el duplo del complemento logarítmico de log. sen. φ. Tomando despues sobre la escala de partes iguales el número de milésimas que se obtenga en cada caso, y llevándolas sobre una recta á partir del punto correspondiente á log. sen 100°, para el cual la expresion $2(10 - \log. \text{sen. } \varphi)$ se hará igual á *cero*. Repitiendo estas operaciones para cada valor que se dé á φ, y marcando en la recta en los extremos de las magnitudes respectivas el valor en grados del ángulo φ, de un modo análogo á lo que se ha dicho para la construccion de la escala de los logaritmos de los números, se tendrán construidas las dos escalas de los logaritmos de los senos cuadrados de φ.

825. En estas escalas se calculan solamente los valores de φ com-

prendidos entre 100° y 40°, y como son iguales los senos de los arcos suplementarios, se pueden marcar sobre los números que se hayan señalado sus suplementos, puesto que la expresion 2 (10 — log. sen. φ) toma el mismo valor para cada dos de ellos, pudiendo variar los valores de φ entre 40° y 160°.

826. Construidas ya las escalas de los logaritmos de los senos cuadrados, se puede calcular con facilidad el valor de log D para tener la distancia D. En efecto, en la fórmula [59] solo hay que restar de log. g el valor de la expresion log sen ^{2} 100°—log. sen.^{2} φ, cuya operacion se practica en la regla haciendo la coincidencia de la division que señala el valor dado de φ en la escala de los senos cuadrados con el trazo que corresponde al número generador g en la escala de los números, y examinando el número que en esta última escala coincide con sen ^{2} 100°. Suponemos en lo dicho que se emplea la escala de senos cuadrados cuyo orígen sen.^{2} 100° se halla á la izquierda, que es lo que se acostumbra, pero el mismo resultado se obtiene con la otra escala simétrica, haciendo la coincidencia de la division sen.^{2} 100° con el valor de g, y viendo el número que se halla entonces debajo del valor de φ.

827. *Ejemplo:* Supongamos $g=157$ y $\varphi=70°{,}52$; se hace coincidir la division 70°,52 con la 157 de la escala de los números, y el número 125m,60 que se vería enfrente de la division 100°, será el valor de D, en la hipótesis de emplear la escala de senos cuadrados que tiene el orígen á la izquierda.

El mismo resultado se hubiera obtenido operando con la escala de senos cuadrados que tiene el orígen 100° á la derecha, variando solo la disposicion, pues ahora se haría coincidir el número 157 con la division 100°, y el resultado 125,60 se hallaria enfrente del valor 70°,52.

828. 3.° *Escala de los logaritmos de las tangentes y cotangentes.*—Esta escala se necesita para hallar el valor del primer término

$$t = \mathrm{D} \cot.\ \varphi \ (a)$$

de la fórmula, que dá el valor de la coordenada vertical

$$z = \mathrm{D} \cot.\ \varphi - m \qquad [14].$$

Restableciendo el rádio en el valor de t se tendrá

$$t = \mathrm{D} \frac{\cot.\ \varphi}{\mathrm{R}};$$

y tomando logaritmos,

$$\mathrm{Log.}\ t = \log.\ \mathrm{D} + \log.\ \cot\ \varphi - \log.\ \mathrm{R},$$

ó lo que es lo mismo,

$$\mathrm{Log.}\ t = \log\ \mathrm{D} + \log\ \cot\ \varphi - 10 \qquad [61].$$

Cuya fórmula nos dice que se halla log. t sumando el logaritmo de D, que se conoce ya, con el logaritmo de cot. φ, que tambien es conocido, puesto que lo es φ, como dato que se toma en el terreno.

829. Para hacer este cálculo con la regla es preciso que esta contenga la escala de logaritmos de las tangentes y cotangentes, la cual se construye de un modo análogo al empleado en la construccion de la escala de los logaritmos de los números, y que está reducido á ir tomando en la escala de partes iguales las magnitudes iguales á los logaritmos de las tangentes de los distintos arcos y colocándolas sobre una línea recta, y en cuyos extremos se van marcando las graduaciones de los arcos respectivos. Esta escala se halla trazada en el borde *ii* de la parte superior de la cara A de la reglilla (fig. 291; lám. 29).

830. Supuesto que las tangentes varían entre 0 é ∞, parece que la longitud de esta escala debiera ser infinita, pero la graduacion no se necesita que pase de 50°, y por lo tanto la longitud de la escala de 10 unidades, puesto que tan. $50^\circ = \mathrm{R}$ y log. tan. $50^\circ = 10$. En efecto, como se tiene siendo a un arco:

$$\text{Tan. } a = \frac{\mathrm{R}}{\text{cot. } a}.$$

Cuando se da un arco mayor que 50°, por ejemplo, de 65°, se tendrá:

$$\text{Tan. } 65^\circ = \frac{\mathrm{R}}{\text{cot. } 65^\circ} = \frac{\mathrm{R}}{\text{Tan. } (100^\circ - 65)} = \frac{\mathrm{R}}{\text{Tan. } 35^\circ}.$$

831. Además, como las tangentes de los ángulos menores que 1° se pueden suponer aproximadamente proporcionales con los arcos á que corresponden, se deduce de aquí que cuando los ángulos que se midan sean inferiores á 0°,638, que es la tangente que tiene por logaritmo 8 unidades, se puede admitir que al multiplicar un arco por 10 ... 100 ... 1000 ..., su tangente queda tambien multiplicada por los mismos factores, y recíprocamente cuando es conocida la tangente correspondiente á uno de estos arcos múltiplos, se tendrán las de los primitivos, dividiéndolos por los factores 10 ... 100 ... 1000 ..., etc.

832. En atencion á lo dicho, no hay necesidad de que la longitud de la escala tenga 10 unidades, sino que se prescinde de la parte de la escala que estaria á la izquierda de la característica 8, y la longitud de dicha escala estaria reducida á la parte comprendida entre las características 8 y 9, es decir, quedaria reducida á dos unidades de la escala, que es la longitud *ee* que tiene cuatro decímetros ó 0m,40, resultando así de la misma magnitud que la escala de los logaritmos de los números, como se puede ver en la figura.

833. Por todo lo dicho resulta, que la escala acabada de explicar nos puede dar directamente: 1.° los logaritmos de las tangentes de los arcos comprendidos entre 0° y 0°,638, entre 0°,638 y 50° y entre 50° y 100°, es

decir, de todos los arcos desde 0° á 100°, y como las cotangentes de los arcos son iguales á las tangentes de sus complementos, no hay más que escribir en la misma escala y encima de las graduaciones de los arcos las de sus complementos, con lo que se tendrán directamente los logaritmos de las cotangentes desde 50° á 99°,362. Por último, se pueden obtener, por consideraciones análogas á las expuestas, los logaritmos de las cotangentes de todos los arcos desde 100° á 0°, es decir, de los de toda la circunferencia

834. En la escala construida en la fig. 291 (lám. 29) es fácil distinguir entre las dos graduaciones la que pertenece á las tangentes y la que corresponde á las cotangentes, siendo la primera la que aumenta en el mismo sentido que los logaritmos, es decir, de izquierda á derecha, y la segunda la que aumenta en sentido contrario, puesto que ya se sabe que si aumenta el arco crece su tangente, y por lo tanto su logaritmo, y en las cotangentes sucede lo contrario, pues si aumenta el arco disminuye la cotangente.

835. Pasemos ya á la construccion gráfica de la fórmula [61] por medio de la regla logarítmica, teniendo presente que con esta no se hace más que la suma gráfica de las mantisas de los logaritmos, pues el cálculo de sus características se hace mentalmente. Para hacer la suma de las mantisas, se toma en la escala de los números el logaritmo de D, y haciéndole coincidir con la característica, ó sea con el orígen de la parte decimal del logaritmo de la cotangente y la division de la escala de los números, que esté enfrente del número del ángulo dado, nos dará las cifras significativas del valor de t. Respecto á su parte entera, se vé si la suma de las mantisas ha dado alguna unidad, lo que se verifica en el caso de que el trazo de la regla fija que determina el valor de t se halla á la derecha de 100, estando á la izquierda de este mismo número la cifra que expresa el valor de D, en cuyo caso se suma dicha unidad con la característica del valor de D y con la del log. cot φ, restando despues 10, y se obtendrá la característica de log. t. En el caso de no llegar á valer 1 unidad la suma de las mantisas, se suman las características de log D y de log. cot. φ y se resta 10 de la suma, cuyas operaciones se practican mentalmente con la mayor facilidad

Considerarémos dos casos: 1.° cuando φ sea menor que 100°, y 2.° cuando φ sea mayor que 100°.

836. *Primer caso.*—Sea D = 85m,60 y φ = 91°,67; poniendo en práctica lo que acabamos de decir, la disposicion de las reglas será la siguiente:

Núm.	10	85,6	100	112,5
Tan.		9		91°,67

de donde las cifras significativas de t serán 11,25. Su parte entera, puesto que la suma de las mantisas es mayor que 1, se añadirá á esta unidad la característica de log. 85,60 que es 1, y la de log. cot. 91°,67 que es 9; de cuya suma 11, restando 10, quedará 1, lo que nos indica que el número que se busca tiene dos cifras enteras, y será por lo tanto 11m,25.

837. *Segundo caso.*—Sen. D $= 159^{m}$, y $\varphi = 103°,27$, se tendrá restableciendo el rádio

$$t = \frac{D \cot.\ \varphi}{R} = D \frac{\tan.\ (100° - \varphi)}{R} = -D \frac{\tan.\ (\varphi - 100°)}{R} \qquad [62]$$

El cálculo de t se hace con la regla como si fuera positivo, prescindiendo del signo —, que se deja para que afecte solo al resultado.

Se calculará por las reglas la expresion

$$159^{m} \times \frac{\tan\ 3°,27}{10^{10}}$$

y quedarán en la disposicion siguiente:

Núm.	100	159	818
Tan.		8	3°,27

y como no resulta ninguna unidad de la suma de las mantisas, la característica se compondrá de la de log. 159 que es 2 y de las de log. tan. 3°,27 que es 8, de cuya suma 10 restando 10 queda 0, siendo por lo tanto el valor de t igual á $-8^{m},18$.

838. Pueden hallarse las cantidades t y D simultáneamente con un solo movimiento de la regla, lo que puede practicarse por la disposicion especial que tienen las escalas de las tangentes y de los senos cuadrados, en las cuales se corresponden el trazo que expresa la característica 9 de la escala de las tangentes con el orígen 100° de la escala de los senos cuadrados, debiéndose entender que se trata de la que tiene este orígen á la izquierda, siendo por esta razon dicha escala la que se usa generalmente, como ya hemos manifestado (826)

Por lo tanto, al mismo tiempo que la division sen.^{2} 100° señala el valor de la distancia D en la escala inferior de los números de la regla fija, la característica 9 indica este mismo valor de D en la escala superior de los números, resultando hecha la coincidencia que se necesita para la determinacion del valor de t.

Sea $g = 175$ y $\varphi = 89°,51$; las reglas se hallarán dispuestas del modo siguiente:

Núm.	100	170,5	283
tan		9	89°,51
sen.^{2}		100°	89°,51
Núm.	100	170,5	175

Las cifras significativas de t son 283 y la característica $2+9-10=1$, de donde $t=28^{m},30$.

839. Como puede tener 8 de característica el log cot φ, al mover la reglilla, no quedan dispuestas para sumarse las mantisas de log. cot. φ y de log. D, puesto que la primera queda hácia la izquierda del extremo de la segunda, y no se puede calcular t á no ser que se mueva de nuevo la reglilla, lo cual se evita trasformando la igualdad [61] de la manera siguiente, valiéndose de la cantidad log. cot. φ' que puede tener un valor cualquiera.

$$\text{Log. } t=\text{log. D}+\text{log. cot. }\varphi-10+\text{log. cot. }\varphi'-\text{log. cot. }\varphi',$$

ó lo que es lo mismo,

$$\text{log. } t=\text{log. D}-(\text{log. cot. }\varphi'-\text{log. cot. }\varphi)-10+\text{log. cot. }\varphi'. \quad [63]$$

Si damos á log. cot. φ' el valor 9, esta fórmula se convierte en

$$\text{log. } t=\text{log. D}-(9-\text{log cot }\varphi)-1,$$

y de este modo queda convertida en una resta la suma de las mantisas, que se puede ejecutar sin necesidad de mover la regla. La parte entera calculada mentalmente, del modo que ya se ha dicho.

840. Cuando el terreno de que se quiere levantar el plano es llano, en cuyo caso son pequeñas las inclinaciones de las visuales, resulta el ángulo φ muy poco diferente de 100°, pudiendo estar sus valores comprendidos entre $99^{\circ},362$ y $100^{\circ},638$. En estos casos la regla no contiene los logaritmos de las cotangentes, y entonces suponiendo proporcionales las tangentes á los arcos pequeños, no habrá más que multiplicar los ángulos con el horizonte ó sean los complementos de φ, por 10, 100, 1.000..., hasta obtener otros ángulos que se hallen marcados en la regla, lo que tiene lugar cuando al hacer la multiplicacion de φ, el producto se halle dentro de los límites $n\times 100^{\circ}\pm 6^{\circ}$, y calculando t con este nuevo arco y dividiendo el resultado por el mismo factor de que se haya hecho uso, se obtendrá el verdadero valor de t.

841. Cuando el terreno presenta algun accidente muy notable, puede suceder que φ sea menor que 50° ó mayor que 150°, siendo por lo tanto en ambos casos mayor que 50° el ángulo que la visual forma con el horizonte, en cuyo caso, segun lo expuesto (830 y 831) no está comprendido en la regla el log. cot. φ, y es necesario trasformar el valor de t, de los dos modos siguientes:

Para $\varphi<50^{\circ}$ se hará

$$t=\text{D cot. }\varphi=\text{D}\times\frac{1}{\text{tan. }\varphi}=\text{D}\times\frac{1}{\frac{\text{tan. }\varphi}{\text{R}}}=\text{D}\times\frac{\text{R}}{\text{tan }\varphi},$$

y siendo R = tan. 50° resultará, tomando logaritmos,

$$\log.\ t = \log.\ D + (\log.\ \tan\ 50° - \log.\ \tan\ \varphi).$$

y por último,

$$\log.\ t = \log.\ D + (10 - \log.\ \tan\ \varphi.);$$

cuya operacion es calculable por la regla.

Para $\varphi > 150°$ tendremos del mismo modo

$$t = D\ \cot.\ \varphi = D \times \frac{R}{\tan.\ \varphi} = D \times \frac{R}{\cot.\ (100° - \varphi)} =$$

$$= D \times \frac{R}{\cot.\ (\varphi - 100°)},$$

y tomando logaritmos

$$\log\ t = \log\ D + [\log.\ \cot.\ 50° - \log.\ \cot.\ (\varphi - 100°)] \qquad [64],$$

y al valor hallado para t se le pondrá el signo —.

842. 4.° *Escala de logaritmos de los senos y cosenos.*—Esta escala se necesita para el cálculo de las coordenadas horizontales x é y, las cuales están dadas por las fórmulas

$$x = D\ \text{sen.}\ \theta \qquad [2]$$

$$y = D\ \cos.\ \theta \qquad [3]$$

y restableciendo el rádio y tomando logaritmos resultan

$$\log.\ x = \log.\ D + \log.\ \text{sen.}\ \theta - 10 \qquad [65]$$

$$\log.\ y = \log.\ D + \log.\ \cos\ \theta - 10 \qquad [66].$$

Para hacer estos cálculos con la regla logarítmica, es preciso que esta contenga la escala de los logaritmos de los senos y cosenos, la cual se construye de un modo análogo al de las anteriores, estando reducido á tomar en la escala de partes iguales las longitudes de las mantisas de los logaritmos de los senos de los distintos arcos. Esta escala se halla trazada en el borde *dd* de la parte superior de la cara B de la reglilla, y en cuanto á su longitud, hay que tener en cuenta las relaciones entre los senos de los arcos suplementarios, y además, por las mismas razones expuestas para las tangentes, se toma la escala á partir del 8 que corresponde al arco 0°,638.

843. Esta escala contiene por consiguiente los logaritmos de los senos desde 0°,638 hasta 100° en las dos unidades de longitud comprendidas

entre las características 8 y 10, como se vé en la figura 294 (lám. 29) y se observa fácilmente que esta longitud de dos unidades es suficiente para obtener los logaritmos de los senos y cosenos de todos los arcos de la circunferencia.

844. En efecto, los arcos comprendidos entre 0° y 0°,638, se pueden hallar multiplicando el arco dado por 10, 100...., hasta que se encuentre un múltiplo que esté en la escala, y como los senos de los ángulos suplementarios son iguales, basta consignar encima de cada número señalado en la escala el valor de su suplemento, teniéndose así los logaritmos de los senos desde 100° á 200°, y por lo tanto conteniendo la escala los de los arcos desde 0° á 200°.

845. Para los arcos mayores de 200° que son los que terminan en los cuadrantes tercero y cuarto, sus senos tienen el mismo valor absoluto que los de los cuadrantes primero y segundo que difieren en 200° de los primeros, y por lo tanto se tienen ya conocidos los logaritmos de sus senos.

846. Ahora, como los cosenos de los arcos son los senos de sus complementos, una vez conocidos los logaritmos de los senos, se tendrán los de los cosenos, de donde resulta que la escala trazada en la cara B de la reglilla, contiene todos los logaritmos de los senos y cosenos de todos los arcos desde 0° á 400°, y por medio de esta escala se pueden calcular con la regla las fórmulas [2] y [3] que dan los valores de x ó y, de un modo idéntico al empleado para hallar el valor de t en la escala de las tangentes.

847. En efecto, sumando las mantisas de log. D y de log. sen. θ se calcula la mantisa de log. x y la de log. y, sumando las mantisas de log. D y de log. cos. θ. Las características se determinan mentalmente y respecto á los signos serán los que correspondan segun el cuadrante en que termine el arco, supuesto que con la regla logarítmica solo se obtienen los valores absolutos. Para esto recordaremos, que cuando θ es >0 y $<100°$ el arco corresponde al primer cuadrante y el seno y coseno son positivos; si θ es $>100°$ y $<200°$, el arco corresponde al segundo cuadrante, siendo el seno positivo y el coseno negativo; si el arco es $>200°$ y $<300°$, el arco corresponde al tercer cuadrante y el seno y coseno son negativos, y por último, cuando θ es $>300°$ y $<400°$, el arco corresponde al cuarto cuadrante, siendo el seno negativo y el coseno positivo. La figura 292 (lám. 30) manifiesta los signos de los senos y cosenos, tangentes y cotangentes de los cuatro cuadrantes.

848. Ejemplo: Sea $D = 215^m,50$ y $\theta = 127°,60$; como el arco θ corresponde al 2.° cuadrante, el seno será positivo y por lo tanto el valor de x, y el coseno negativo, siéndolo igualmente el valor de y. Para resolver este ejemplo por medio de la regla, se observará que el logaritmo del seno de 127°,60 se encuentra inmediatamente en la graduacion inferior. Ahora como el coseno del mismo arco es igual en valor absoluto al coseno de su suplemento 72°,40, y este coseno es igual al seno de su complemento 27°,60 que se halla en la graduacion superior, se tendrá el

logaritmo del coseno del ángulo dado 127°,60; buscando este arco en la graduacion superior, prescindiendo de las centenas, es decir, buscando el arco 27°,60 La disposicion que presentarian las reglas sería la siguiente:

Núm.	10	21,55	90,3	100	195,5	
sen	9		27°,60 172,40		72,°40 127,°60	100° 100°

Resulta, pues, que el valor de x será $x = 195^m,5$ y el de y, anteponiéndole al signo —, será $y = 90^m,30$, por ser las características para el primero $1 + 2 + 9 - 10 = 2$, y para el segundo $2 + 9 - 10 = 1$.

De idéntico modo se resolverian otros ejemplos, cuyos arcos perteneciesen á cualquiera de los otros tres cuadrantes.

849. Cuando θ tiene valores comprendidos entre 0° y 0°,638; 199°,362 y 200°,638; 399°,362 y 400°, ó sean los que forman un ángulo menor que 0°,638 con el eje de las y, el log. sen. θ no está en la escala, y se procede del modo siguiente:

Sea $D = 74^m,40$ y $\theta = 399°,57$; el seno de este ángulo es igual en valor absoluto al de 198°,57, y éste al de 0°,43, y siguiendo el mismo método expuesto (840) se tendrá

Núm.	74,4	100	503
sen	8		4°,30

y la característica será

$$1 + 1 + 8 - 10 = 0,$$

de donde

$$x = -\frac{5^m,03}{10} = 0^m,503\,,$$

y para y, como la division 99°,57 coincide en la regla con la 100°, resulta que el valor de y es sensiblemente igual al de D, ó sea

$$y = 74^m,40$$

850. Cuando θ tiene valores comprendidos entre 90°,362 y 100°,638; 299°,362 y 300°,638 ó sean los que forman con el eje de las x, arcos que tienen valores menores que 0°,638, se procede de un modo análogo al anterior, observando que para x habrá que tener en cuenta la misma observacion hecha entonces para y, de manera que se obtendrá

$$x = 125^m,75,$$

y respecto á y se procede como para x en el caso anterior, y resultará que siendo el coseno de $100^o,38$ igual al de $0^o,38$, la disposicion de las reglas será la siguiente:

Núm.	100	125,75	750
	sen.	8	$3^o,50$

de donde

$$y = -\frac{7^m,50}{10} = -0^m,75.$$

851. *Círculo logarítmico de Salmoiraghi*.—Como puede comprenderse en virtud de todo lo expuesto hasta ahora, una de las dificultades que pudieran oponerse á la adopcion del método taquimétrico, es sin disputa, el mucho y fatigoso trabajo que hay que emplear para la trasformacion de las coordenadas polares que se obtienen directamente sobre el terreno, en coordenadas rectangulares. Muchos son los medios abreviados ideados para facilitar esta clase de trabajos y aun hasta hoy se cree que el más conveniente es el uso de las escalas logarítmicas de que ya hemos hablado. Sin embargo, Salmoiraghi propone un nuevo método de hacer los cálculos relativos á la taquimetría, que consiste en valerse de un nuevo círculo logarítmico que contiene solamente los logaritmos de los números naturales y de una tabla de los valores naturales de las líneas trigonométricas.

Para apreciar las ventajas de este nuevo círculo hay que tener presente, que las escalas logarítmicas de Porro que se venden impresas y las reglas de cálculo, sean de madera ó de marfil, de que se hace uso, no son muy exactas, por ser su unidad logarítmica muy pequeña, pues en la escala impresa de Porro es de 20 centímetros y en la regla de cálculo de 12 centímetros. El círculo logarítmico de Porro es el instrumento más perfecto y completo de esta clase, pero es muy costoso, pues cuestan los de metal 300 pesetas, y aunque se les sustituye por otros de carton, no dan buenos resultados en la práctica, por su falta de exactitud debida á las deformaciones que experimenta el papel en la impresion.

Lo cierto es que la mayor parte de los ingenieros no se sirven de ninguno de estos medios, por la prevencion que inspira su falta de precision y porque el uso de las escalas y de los círculos, aunque sin ser difícil, es muy complicado. En efecto, hay que emplear, como hemos visto, cuatro escalas, la de los números, la de los senos y cosenos, la de los senos cuadrados y la de las tangentes y cotangentes, y hay que operar con mucha atencion para no cometer graves errores.

El procedimiento que nos ocupa de Salmoiraghi es indudablemente un progreso importante y ventajoso que facilita los cálculos en la trasformacion de las coordenadas. El principio en que se funda consiste en que una escala, que contiene los logaritmos de los números, se puede considerar tambien que contiene los de las líneas trigonométricas, pues conociendo los valores naturales de éstas, los logaritmos de estos números se obtendrán por la referida escala. Concluyamos de aquí, que con el círculo logarítmico de Salmoiraghi, que contiene los logaritmos de los números y una tabla de líneas trigonométricas naturales, se pueden verificar los cálculos en las operaciones taquimétricas, teniendo presente que lo mismo pudiera servir una escala recta que la circular que ahora nos ocupa. Sin embargo, es preferible la circular, pues con el círculo solo se necesita una sola unidad, y esta unidad es toda la circunferencia del círculo, de manera que bajo muy pequeñas dimensiones se obtiene una unidad muy grande, que es más fácil de dividir y subdividir, y hemos visto que en las escalas rectas se necesita la longitud de dos unidades consecutivas.

852. *Descripcion del círculo logarítmico de Salmoiraghi.*—Este círculo tiene cerca de 16 centímetros de diámetro, lo que dá para la unidad logarítmica 50 centímetros de longitud, y para tener una regla con la misma unidad, su longitud tendría que ser de 100 centímetros ó un metro.

Este círculo (fig. 293; lám. 30) se compone de dos coronas concéntricas, una exterior fija c y otra interior c' que gira alrededor de su centro O enrasando su borde exterior exactamente con el interior de la primera. Los dos limbos de estas coronas están divididos con arreglo á la série de los logaritmos de los números, y el orígen ó punto de partida está señalado en ambos con el número 10, de donde resulta, que haciendo la coincidencia de las divisiones 10 de ambos limbos, todas las divisiones de los mismos se hallarán tambien en coincidencia, y en esta posicion se halla representado en la figura.

En la cara inferior de la corona exterior hay fijas tres puntas agudas de acero, que sirven para fijarla sobre la mesa ó tablero, á fin de que permanezca fija durante los movimientos de rotacion de la corona interior.

Este círculo es de metal plateado y tiene 600 divisiones que corresponden á los logaritmos de los números 1010, 1020, 1030, 1040 ... hasta el 4.000, y de 4020, 4040, 4060, 4080 ... hasta el 10.000. Los logaritmos de los números intermedios se les valúa suponiendo cada intervalo dividido mentalmente en 10 partes, lo que no presenta dificultad.

Se marcan y se leen los datos y los resultados como se practica en las reglas, haciendo la coincidencia exacta de las divisiones de uno de los limbos con las del otro, y como sucede generalmente que tanto las divisiones correspondientes á los números propuestos como á los resultados, haya que valuarlas mentalmente determinando un cierto punto que se encuentre entre dos divisiones consecutivas del círculo, se emplea para más comodidad una pieza ó índice p, móvil y trasparente, como se vé en la figura. Con la práctica se pueden hacer operaciones con este círculo aproximadas en menos de media milésima, y con mucha frecuencia en menos de una diezmilésima.

853. Las tablas de líneas trigonométricas naturales publicadas por el

autor tienen cuatro cifras decimales y se hallan en ellas directamente los valores de las líneas trigonométricas de los arcos de 10 en 10 minutos, y por medio de las partes proporcionales que se consignan en las columnas correspondientes, se pueden obtener los valores de las líneas trigonométricas de los arcos de minuto en minuto ó de la centésima parte de grado. Puede igualmente hacerse uso de las tablas de D. Leoncio de la Bárcena, que tienen tambien cuatro cifras decimales y contienen los arcos de minuto en minuto, ó de las de Chevallot y Perez del Rivero que contienen siete cifras decimales y van de minuto en minuto; pero en estas dos últimas se toman solo las cuatro primeras cifras decimales y se prescinde de las tres últimas, teniendo cuidado de añadir una unidad á la última de las cuatro cifras conservadas si pasa de cinco la primera de las tres últimas que se desprecian, á fin de que las tablas de los valores naturales, considerando que contienen cuatro cifras decimales, puedan hallarse en armonía perfecta con el círculo logarítmico y obtener los resultados de los cálculos de la trasformacion de las coordenadas rigorosamente exactos en cuanto á las incertidumbres propias de los elementos polares obtenidos directamente con los instrumentos en el terreno, lo que no puede menos de tener que suceder así, pues de lo contrario debería desecharse absolutamente todo sistema que no garantizase por completo la precision obtenida en las determinaciones directas.

854. *Uso del círculo logarítmico.*—Tanto al buscar los logaritmos de los números, como los resultados en los problemas que vamos á exponer, advertimos que deben leerse los números en dos grupos de á dos cifras para mayor comodidad, salvo á colocar despues la coma en el lugar que la corresponda.

855. *Problema 1.º—Sea por ejemplo multiplicar* 2572 *por* 32,35.

Para obtener el producto, se hace girar el círculo interior hasta que la division 10 del círculo exterior esté enfrente de la quinta parte del intervalo comprendido entre las dos divisiones 2570 y 2580 de dicho círculo interior; se busca despues en este mismo círculo interior el número que corresponde á la division 3235 del círculo exterior, y se hallará que es 8320. Solo falta ahora separar las cifras enteras de las decimales, para lo cual se observará, que siempre que el segundo factor, que es el 3235, se encuentra en el arco que queda hácia atrás de la division 10 del círculo interior, en el sentido de la marcha que indica la numeracion, el número de cifras que componen la parte entera del resultado, será igual á la suma algebráica de las cifras que componen la parte entera de los dos factores, disminuida en una unidad, y siempre que el segundo factor, que indica el resultado, está en el arco que se halla de la otra parte del 10 del círculo interior, en este caso la parte entera del resultado se compone de un número de cifras igual solamente á la suma de los números de cifras de la parte entera de los dos factores. Como en el ejemplo propuesto, el segundo factor 3235 se halla enfrente de un punto de este lado del 10, nos hallamos en el primer caso, y el número de cifras de la parte entera del resultado será igual á $4 - 1 = 3$, siendo por lo tanto el producto 832. Si el segundo factor hubiera sido 39,00 en lugar de 32,35, el resultado hubiera sido igual al número entero 1003.

En el caso de ser decimal uno de los factores, el número de cifras de la parte entera no existe, pero se le reemplaza por el número de ceros que preceden á la primera cifra, significativa despues de la coma, considerándole como negativo, ó por cero cuando la primera cifra significativa se halla inmediatamente despues de la coma.

Si se supone que el factor 32,35 es ahora 0,3235, el número de cifras de la parte entera será $2 + 0 - 1 = 1$ y el resultado definitivo 8,320. Por último, si dicho factor fuese 0,003235, el número de cifras de la parte entera del resultado será $2 - 2 - 1 = -1$, y el resultado definitivo 0,0832. Esta regla es general.

856. *Problema 2.°—Hallar el cociente* $\frac{2450}{7475}$

Se hace la coincidencia del 10 del círculo interior con la division del círculo exterior que expresa el denominador, y se busca en el círculo interior el número correspondiente á la division 2450 del círculo exterior, y se hallará 3322. El número de cifras de la parte entera del resultado se obtiene por la diferencia entre el número de cifras de la parte entera del numerador y de la del denominador, aumentada en una unidad en el caso en que el resultado se halle sobre el arco que está á la derecha del 10 del círculo interior, ántes de llegar al 10 del círculo exterior. Como en este problema la lectura que da el resultado se encuentra más allá del 10 del círculo exterior, el número de cifras de la parte entera será $4 - 4 = 0$, y el resultado definitivo 0,3322.

Si el numerador hubiera sido un número comprendido entre 7350 y 10,000, se aumentará en una unidad el número de cifras de la parte entera del resultado.

Por último, cuando se trata del cociente entre dos números decimales es la misma de siempre la regla de las características negativas; de manera que si el ejemplo propuesto hubiera sido 0,2450 dividido por 7,375, la parte entera del resultado hubiera sido $0 - 1 = -1$.

857. *Problema 3.°—Hallar el cuarto término de una proporcion.*

Sea la proporcion

$$25 : 75 :: 15 : x$$

tendremos:

$$x = \frac{75 \times 15}{25}$$

Para obtener el valor de x se hace la coincidencia de la division correspondiente al denominador 25 del círculo interior con uno de los dos factores del numerador, por ejemplo el 75 del círculo exterior, y se hace la lectura del resultado en el círculo exterior, que se obtiene por la division del círculo interior que representa el otro factor, y se hallará el número 45. En cuanto al número de cifras de la parte entera del resultado, se obtendrá sumando las cifras de la parte entera de los dos factores del numerador y restando de la suma el número de cifras de la parte entera del denominador, aumentando una unidad siempre que el resultado se encuentre comprendido entre los dos 10 de las dos divisiones tomado en sentido positivo en el círculo exterior que es el de la marcha de la numeracion.

858. *Aplicacion de las reglas expuestas al cálculo de la trasformacion de las coordenadas polares en la Taquimetría.*—Reasumiendo en pocas palabras cuanto hemos dicho en el procedimiento taquimétrico, vemos que el levantamiento de los planos está reducido á la determinacion de puntos en el terreno, y que para esto se miden directamente las coordenadas polares de dichos puntos con los instrumentos llamados *taquímetros*, y mejor aún con los especiales llamados clepes, y que dichas coordenadas polares son: una longitud de la mira, de la cual se deduce la del radio vector y dos ángulos uno vertical y otro horizontal, y que en funcion de estos valores se obtienen las fórmulas (578) que nos dan las coordenadas rectangulares de los puntos en cuestion.

Tambien debe tenerse presente que un taquímetro ó un clepe en estacion debe considerarse como constituyendo un verdadero sistema de tres planos ortogonales, cuyas intersecciones forman los ejes de las x, y, z. Para concebir con facilidad estos tres planos, nos podemos imaginar que dos planos verticales que son los zx y zy pasan por los dos diámetros del limbo horizontal del instrumento perpendiculares entre sí, y que pasan por las divisiones 0°—200° y 100°—300°. El tercer plano que es el de las xy es horizontal, paralelo al limbo horizontal del instrumento y pasa por el eje de rotacion vertical del anteojo, de donde resulta que el punto de interseccion de los tres ejes coincide con el de interseccion tambien de los dos ejes vertical y horizontal de rotacion del instrumento.

859. Por último, por medio de la aguja imantada se logra la coincidencia del plano zy y con el plano meridiano magnético, y por lo tanto del diámetro 0°—200° del círculo horizontal con la meridiana magnética del punto de estacion, y de aquí la costumbre de llamar ángulos azimutales y limbo azimutal á los ángulos horizontales y limbo horizontal, que siempre hemos indicado por θ. Los ángulos zenitales se miden siempre á partir del zénit, donde se supone que se halla el cero del limbo vertical del instrumento, hácia el horizonte, al cual corresponde la division 100°, obteniéndose así directamente las distancias zenitales que hemos llamado φ. Se dirige siempre al Norte el cero del círculo horizontal, y la marcha positiva de los ángulos es la de Norte, Oeste, Sur y Este. (Figura 292; lám. 30).

860. Despues de todo lo dicho no habrá dificultad en comprender los signos que corresponden á las funciones angulares, segun el cuadrante á que pertenezcan y que para mayor claridad pueden consultarse en la figura acabada de citar.

861. La resolucion de las fórmulas del párrafo 798, está reducida á hallar los valores de las líneas trigonométricas naturales que entran en dichas fórmulas, en las tablas de estas líneas y con los números que los representan y el que señale la parte interceptada g en la mira, y la altura m de esta, hacer funcionar el círculo logarítimo, para la determinacion de la distancia D y de las coordenadas x, y, z.

Supongamos que se hayan obtenido en el terreno para un punto dado los valores siguientes:

$$g = 195^{m},30.$$
$$\varphi = 94^{o},30.$$
$$\theta = 22^{o},15.$$
$$m = 2^{m},158.$$

Tomaremos en las tablas las líneas trigonométricas sen. φ, cot. φ, sen. θ y cos. θ y resolverá

$$\text{sen. } \varphi = 0,9960$$
$$\text{cot. } \varphi = 0,0898$$
$$\text{sen. } \theta = 0,3409$$
$$\text{cos. } \theta = 0,9403$$

y se procederá como sigue. Se empieza por calcular el valor de D para lo cual hay que hacer dos multiplicaciones, pues se tiene

$$D = g \text{ sen. } \varphi \text{ sen. } \varphi,$$

y una sola multiplicacion si se emplean las tablas de La Bárcena que contienen tambien una columna de los senos cuadrados, ó bien por medio del círculo de Salmoiraghi se hará la coincidencia de la division 1953 que vale g del círculo interior con la division 10 del círculo exterior, y se hallará inmediatamente el número de círculo interior que corresponde á la division 9960 que indica sen. φ del círculo exterior que es 194,50; se repite otra vez esta misma operacion con el número 1945 que representa g sen. φ, es decir, se lleva 1945 sobre 10 y se leerá el número correspondiente á la division 9960, como antes, y se hallará 193,70 que representará ya el resultado final g sen.^{2} φ.

862. Para hallar ahora tambien por medio del cálculo los valores de x, y y $t =$ D cot. φ, se hará coincidencia del valor de g sen.^{2} φ, que es 193,70 con el 10 del círculo exterior, y no habrá más que buscar en el círculo interior las divisiones correspondientes á los valores 3409, 9403 y 8980, para obtener en el círculo exterior los valores

$$x = 66,05$$
$$y = 182,10$$
$$t = 17,39$$

y por último, el valor de z será

$$z = t - m = \text{D} \cot \varphi - m = 17{,}39 - 2{,}158 = 15{,}232,$$

por donde vemos que se han obtenido las coordenadas rectangulares por medio solamente de simples multiplicaciones.

863. *Círculo ó disco logarítmico de Sonne.*—La teoría es exactamente la misma, pues se funda en los mismos principios y tiene los mismos usos que el de Salmoiraghi. Su construccion por otra parte es más complicada, pues vá provisto de un aparato que se llama *calificador de cifras*, que sirve para la determinacion de la calidad de las cifras de los resultados obtenidos por medio del círculo logarítmico y que consiste en agregar á la suma de las cifras conocidas de las cantidades dadas la que se lea sobre el disco calificador, á fin de obtener la calificacion de las cifras del resultado.

Como segun demuestra la experiencia, el crecimiento positivo ó negativo de la suma de las cifras conocidas asciende rara vez á más de 2, se adquiere fácilmente la costumbre de hacer mentalmente las operaciones sin ayuda del calificador de cifras, y por lo tanto éste es inútil. Los lectores, sin embargo, pueden consultar la figura y descripcion de este aparato que se vende en aleman.

864. *Tablas especiales de cálculos.*—Además de los métodos abreviados de cálculo que hemos descrito, se han publicado tablas numéricas que dan con la mayor sencillez los valores de las coordenadas.

Las de D. Mariano Carderera y D. Juan Alonso y Millan, en su excelente tratado de Taquimetría, están calculadas para operar con instrumentos cuyos limbos lleven la graduacion tanto centesimal como sexagesimal y remitimos á ellas á los lectores para su descripcion y uso.

Posteriormente se han publicado en 1884 las tablas taquimétricas de D. J. J. Cuartero, que contienen las distancias reducidas al horizonte y las tangentes ó sea la diferencia de nivel de todos los ángulos desde 70° á 130°, calculadas de minuto en minuto para generadores de 1 á 400 metros y seguidas de un apéndice con las tablas de senos y cosenos naturales de 0° á 50°, las que son hasta el presente lo más completas, breves y sencillas que se han publicado, así como las más exactas, para verificar los cálculos taquimétricos, y á las que remitimos igualmente á nuestros lectores. Tanto estas como las de Carderera y Alonso se hallan de venta en casa de Recarte.

AGRIMENSURA.

CAPITULO XV.

Definiciones é ideas generales.—Medicion de las áreas por el método taquimétrico.—Division de los polígonos.—Problemas.—Division de los solares.—Division de las dehesas.—Problemas.—Division de los montes.—Cortas de árboles.—Division de las rentas.—Problemas.—Deslindes de los terrenos.—Trasformacion de los linderos.—Problemas.—Deslinde entre dos pueblos.—Rectificacion de los linderos.—Problemas.—Apeos.—Del conocimiento y clasificacion análisis química y tasacion de los terrenos.

865. **Definiciones é ideas generales.**—La palabra *Topografía* se compone de las dos griegas *Topos* y *graphos* ó *grafos*, que significan, la primera *lugar* ó *sitio*, y la segunda *dibujo* ó *descripcion*, y haciendo referencia á la superficie de la tierra podremos definir la Topografía diciendo, que es la *ciencia que se ocupa de la representacion geométrica de una parte de la superficie terrestre*.

Cuando se trata de representar una porcion muy extensa de esta superficie, recibe el nombre de *Geodesia* la ciencia que de ello se ocupa; el de *Geomorfia* cuando comprende una provincia ó un estado cualquiera, y el de *Navegacion* si representa una porcion de la superficie del globo cubierta por las aguas, y sirve para determinar el punto que en un momento dado ocupa un buque y el rumbo que ha de tomar para dirigirse á otro punto determinado.

La Topografía enseña á determinar las posiciones relativas de varios duntos de la superficie de la tierra, á calcular las distancias que entre ellos median y á colocarlos sobre un plano en posiciones análogas á las que realmente ocupan.

La representacion de una parte de la superficie terrestre, se obtiene por medio del *sistema de las Acotaciones*, valiéndose del método de las secciones horizontales (Acots 103), y presentando en las curvas proyectadas un sistema de puntos acotados, que pueda servir para determinar (Acots. 113 y 114) cualquier otro punto que no forme parte de dicho sistema.

La palabra *Agrimensura* se compone de las dos latinas *Ager* y *mensura*, que significan, la primera *campo* y la segunda *medida*, por lo que se define la Agrimensura diciendo que es la *ciencia que se ocupa de la determinacion ó medida de las superficies de los terrenos*.

La palabra *Geometria* se compone de las dos griegas, *Geo* y *metro*, que significan, la primera *Tierra* y la segunda *medida*, entendiéndose por Geometría la *ciencia que se ocupa de la medida de la tierra*, por lo cual se llamaban en lo antiguo *geómetras* á los que tenian el oficio de medir las tierras, despues se les llamó *geómetras agrimensores*, y hoy se les dá el nombre de *peritos agrimensores* y *tasadores de tierras*.

Hoy se llama *Geometría práctica* la ciencia que se ocupa de las operaciones que conducen á la determinacion de la medida de los terrenos, y es una aplicacion inmediata de la que hoy se entiende por *Geometría elemental*, siendo aquella la que trata de la resolucion material de los problemas especulativos que forman el objeto de la segunda, elevada á una grande altura por las muchas teorías que forman su objeto.

La *Topografía* y la *Geodesia*, teniendo ambas por objeto la representacion de la superficie terrestre, tienen tantos puntos de contacto, que es difícil establecer hoy por completo la línea divisoria entre ellas en muchos casos, atendido el adelanto que una y otra han experimentado.

La Topografía, sin embargo, limita el terreno de cuya representacion se ocupa á una extension en la cual no es preciso tener en cuenta la esfericidad de la tierra para obtener la debida exactitud Cuando la extension del terreno que debe representarse es tal, que no puede prescindirse de tener en consideracion la forma de la tierra sin cometer graves errores, las operaciones, que exigen además el empleo de instrumentos de mayor precision, y que conducen á cálculos superiores á los conocimientos elementales de Matemáticas, entran en el dominio de la *Geodesia*.

En las operaciones geodésicas se refiere la posicion de los puntos notables del terreno á la superficie de las aguas tranquilas del Océano; pero en la corta extension que ha de comprender un plano topográfico, se sustituye sin error sensible á la superficie oceánica el plano tangente á la misma.

La Agrimensura y la Geometría práctica, vienen á ser una misma cosa y tambien tienen bastante de comun con la Topografía, pues son realmente una parte de esta; de suerte que al tratar de una de ellas hay tambien que ocuparse de las otras. La Topografía determina la figura geométrica de un terreno ó *levanta* su *plano*, y la Agrimensura determina su *cabida* ó *mide su superficie* y rara vez se hace una operacion de estas sin ejecutar la otra.

La extension de los terrenos, que pueden presentarse en la Agrimensura, no excede de 300 hectáreas. Los terrenos de mayor extension en que ya debe hacerse uso de las triangulaciones, no son ya del dominio del Agrimensor y pertenecen al Topógrafo.

Respecto al levantamiento del plano de un terreno y la medicion de su superficie, el Agrimensor encontrará, en lo que hemos expuesto en la presente obra, cuantos procedimientos pueda emplear, segun su instruccion y conocimientos, desde los más sencillos y elementales, hasta los más complicados, inclusos los métodos taquimétricos. Solamente añadiremos aquí la aplicacion que se hace tambien de la Taquimetría á la medicion de las superficies.

866. **Medicion de las áreas por el método taquimétrico.**—Puesto que en el método taquimétrico se determinan los puntos del terreno, y por lo tanto los vértices de los polígonos cuyas áreas se quieren hallar, por medio de coordenadas, referidas á sistemas de ejes rectangulares de orígenes y direcciones conocidas exactamente, de aquí que en la Taquimetría se pueden fijar con toda la precision apetecible los vértices de todas las figuras que en el catastro se necesitan determinar, y por lo tanto los linderos que unen entre sí dichos vértices y separan unas de otras las diferentes parcelas que constituyen un término dado, ó una zona cualquiera del terreno.

Una vez designadas las fincas por medio de las coordenadas de los vértices de los polígonos que las constituyen, se pueden hallar tambien con todo rigor las superficies que comprenden, valiéndose de estas coordenadas para obtener los datos necesarios á esta determinacion de la manera más sencilla y sin apelar á obtener otros nuevos para el cálculo, ni menos hacer uso de los procedimientos gráficos, siempre mucho menos exactos, como hemos dicho otras veces, que los que están basados en los elementos que sobre el terreno se determinan.

867. *Primer caso.—Coordenadas polares.*—Con solo el conocimiento de las coordenadas polares θ y D de los vértices de un polígono, puede hallarse su área del modo siguiente:

Sea el polígono ABCDE (fig. 294; lám. 30), O el polo, y OX y OY los ejes de las coordenadas x é y de sus vértices. Basta observar que si de la suma de los triángulos AOB, BOC y COD que tienen por vértice comun el polo O y por bases los lados AB, BC y CD, se resta la suma de los triángulos DOE y EOA, que tienen tambien por vértice comun el polo O y por bases los lados DE y EA, se obtendrá la superficie del polígono ABCDE. Las superficies de estos triángulos se determinan por la fórmula [12] (tomo I, párrafo 1067), de donde resulta para los tres primeros triángulos;

$$AOB = \frac{1}{2} D' \; D'' \operatorname{sen} (\theta' - \theta'')$$

$$BOC = \frac{1}{2} D'' \; D''' \operatorname{sen} (\theta'' - \theta''')$$

$$COD = \frac{1}{2} D''' D^{IV} \operatorname{sen} (\theta''' - \theta^{IV}),$$

y para los dos últimos

$$DOE = \frac{1}{2} D^{IV} D^{V} \operatorname{sen} (\theta^{V} - \theta^{IV})$$

$$EOA = \frac{1}{2} D^{V} D' \operatorname{sen} (\theta' - \theta^{V}).$$

Ahora, si en vez de restar de la suma de los tres primeros triángulos la de los dos últimos, cambiamos el signo á éstos, para lo que basta cambiarlo á uno de los factores, no habrá más que sumarlos todos y separar el factor comun $\frac{1}{2}$, para obtener la siguiente fórmula simétrica:

$$S = \frac{1}{2} \left\{ D' D'' \operatorname{sen} (\theta' - \theta'') + D'' D''' \operatorname{sen} (\theta'' - \theta''') + D''' D^{IV} \operatorname{sen} (\theta''' - \theta^{IV}) \right.$$
$$\left. + D^{IV} D^{V} \operatorname{sen} (\theta^{IV} - \theta^{V}) + D^{V} D' \operatorname{sen} (\theta^{V} - \theta') \right\} \qquad [1]$$

868. 2.° *Caso — Coordenadas rectangulares.* —Pero si las coordenadas rectangulares estuviesen ya determinadas en funcion de las polares y se quisiera hacer uso de aquellas en la determinacion de las superficies de los polígonos se procedería del modo siguiente:

Sea el polígono ABCDE (fig 295; lám. 30), O el orígen y OX y OY los ejes de las coordenadas x é y. Si tomamos el eje OX como eje de abscisas y el OY como eje de ordenadas de los vértices del polígono y se observan los cinco trapecios que se apoyan sobre el eje de las x y de los lados del contorno, bastará restar de la suma de los dos trapecios $ABx''x'$ y $BCx'''x''$, la suma de los tres trapecios $DCx'''x^{IV}$, $EDx^{IV}x^{V}$ y $AEx^{V}x'$, para obtener la superficie del polígono ABCDE.

Como el área de cada uno de estos trapecios se determina por la fórmula [24] (Tomo I, párf. 1078) se tendrá para los dos primeros trapecios

$$ABx''x' = \frac{1}{2} (y' + y'') \; (x' - x'')$$

$$BCx'''x'' = \frac{1}{2} (y'' + y''') \; (x'' - x''')$$

y para los tres últimos

$$DCx'''x^{IV} = \frac{1}{2}(y'''+y^{IV})(x^{IV}-x''')$$

$$EDx^{IV}x^{V} = \frac{1}{2}(y^{IV}+y^{V})(x^{V}-x^{IV})$$

$$AEx^{V}x' = \frac{1}{2}(y^{V}+y')(x'-x^{V}).$$

Ahora, si en vez de restar de la suma de los dos primeros trapecios la de los tres últimos cambiamos el signo á estos, del modo que se hizo en el caso anterior, no habrá más que sumarlos todos y separar el factor comun $\frac{1}{2}$ para obtener la siguiente fórmula simétrica:

$$S = \frac{1}{2}\Big\{(y'+y'')(x'-x'')+(y''+y''')(x''-x''')+(y'''+y^{IV})(x'''-x^{IV})$$
$$+(y^{IV}+y^{V})(x^{IV}-x^{V})+(y^{V}+y')(x^{V}-x')\Big\} \qquad [2]$$

869. En las aplicaciones numéricas se forman registros en uno y otro caso para el mayor órden y claridad en la marcha de las operaciones para la determinacion de las áreas, estableciendo el número de columnas necesarias en cada caso para anotar los datos y los resultados, calculando estos con las reglas ó los círculos logarítmicos en el primer caso de las coordenadas polares.

870. Como es necesario al Agrimensor resolver además otras cuestiones que son del dominio de su profesion, como la division de los terrenos y heredades, de los solares, dehesas y montes, cortas de árboles y division de las rentas, así como de los deslindes y apeos de los terrenos, y de su conocimiento y clasificacion en virtud de su análisis, y por último de su tasacion, nos ocuparemos á continuacion de todas estas cuestiones, dando de este modo mucha más latitud á la palabra *Agrimensura*.

871. **Division de los polígonos**.—Una de las operaciones que con frecuencia tiene necesidad de practicar el Geómetra, es la division de los terrenos ó propiedades, sujetándose á las condiciones impuestas por los propietarios. Esta parte de Topografía se llamaba antiguamente *Geodesia*; pero hoy se da este nombre á la aplicacion que se hace de la Astronomía y de la Trigonometría rectilínea y esférica al levantamiento de la Carta de una gran extension de terreno, como por ejemplo, la superficie de un estado ó país, designándose la que ahora nos ocupa con el nombre de *division de los polígonos*.

Pasemos ahora á la resolucion de los problemas más elementales, en los cuales haremos uso de las *soluciones numéricas* ó *gráficas*, separadamente ó combinadas ambas (tomo I; 1053).

872. **Problemas**.—*Contornos rectilíneos de un corto número de lados.—Triángulos.—Problema 1.º—Dado un triángulo, tirar desde uno de sus vértices una recta al lado opuesto, de manera que forme un triángulo parcial de una área dada, ó lo que es lo mismo, tomar una superficie de otra dada.*

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig 296; lám. 31) en el cual se quiere tirar por el vértice B la recta BD que forme el triángulo parcial ABD que tenga un área dada. Sean S y s las áreas numéricamente conocidas ABC y ABD. Como estos dos triángulos de una misma altura BE, son entre sí como sus bases AC y AD, que llamaremos B y b, se tendrá

$$S : s :: B : b,$$

de donde

$$b = \frac{s \times B}{S} \qquad [3]$$

Hallado el valor numérico de AD, se tomará esta distancia desde el punto A en la AC, bien en el terreno en su tamaño natural si se ha operado en él, ó bien en el papel con arreglo á la escala si se opera en el gabinete, para referirla despues al terreno; y trazando por último la recta BD se tendrá separada la porcion ABD que se deseaba. De este procedimiento se puede hacer uso cuando no se tiene á mano más que la cadena ó cinta, piquetes y jalones.

Si la línea de division debiese partir del vértice C, entonces se podria hacer que los dos triángulos, el dado ABC y el que se busca AFC, tuviesen la misma base AC, en cuyo caso serían entre sí como sus alturas h y h', y se tendría

$$S : s :: h : h',$$

de donde

$$h' = \frac{s \times h}{S} \qquad [49]$$

Levantando en el punto A una perpendicular AH $= h'$ á la AC y tirando por el punto H la recta HF paralela á AC, se unirá el punto de interseccion F con el C y se tendrá el triángulo AFC.

873. Puesto que s es conocida y se tiene (tomo I, 1060),

$$s = \frac{b \times h}{2},$$

se puede trazar y medir la altura h del triágulo ABC, y despejando b se tiene para valor de la base que se busca

$$b = s : \frac{h}{2} = \frac{2s}{h} \qquad [5].$$

Tomando en la AC una cantidad $AD = b$, se tendrá resuelto el problema. En este caso no se necesita saber la superficie S del triángulo ABC.

Tambien puede medirse la base $AC = B$, y como para el triángulo AFC se tendría

$$s = \frac{B \times h'}{2},$$

despejando h' se tendrá

$$h' = s : \frac{B}{2} = \frac{2s}{B} \qquad [6].$$

y despues se hará la construccion indicada anteriormente para hallar el punto F.

De los procedimientos explicados se hará uso cuando se pueda disponer de las escuadras.

874. Sucede á veces que en un triángulo ABC (fig. 296; lám. 31) se quiere tomar el ABD que tenga la misma superficie que otro dado *abc*: en este caso se mide la superficie del *abc* y dividiendo el resultado por la mitad de la altura $BE = h$, se obtendrá el valor de la base $AD = b$. Si el triángulo hubiera de ser el AFC, se dividirá la misma superficie por la mitad de la base AC y se tendrá la altura $FG = h'$, constituyéndose el triángulo AFC como hemos dicho anteriormente.

875 *Solucion gráfica*.—En este caso debe conocerse la figura del triángulo *abc* (fig. 297; lám. 31) cuya área ha de ser la misma que la que ha de tomarse en el triángulo ABC, por una recta tirada desde el ángulo B. Para esto se trasforma el triángulo *abc* en otro equivalente *adc*, de modo que el ángulo *dac* sea igual al BAC (tomo I, 1154), y tomando $AF = ad$ y $AE = ac$, y trazando la FE, el triángulo AFE será igual al *adc* y equivalente al *abc*; pero como la línea de division ha de partir del punto B, se trazará la BE y por F la FD paralela á BE; y tirando por último la BD, tendremos el triángulo ABD equivalente al AFE, y por lo tanto al *acb* y trazado las condiciones que exige el problema.

876. *Ejemplo numérico.—Un padre dá á su hija en dote una porcion de terreno de 8 áreas de cabida, que se ha de tomar de otro terreno de forma triangular que tiene 25 áreas*

Sea el triángulo ABC (fig. 296; lám. 31) de 25 áreas y supongamos que se indica al Agrimensor que las 8 áreas que ha de tomar han de ser hácia el ángulo A y que la línea divisoria ha de partir del vértice B Se medirá el lado AC opuesto á este vértice y si resulta tener 125 metros, se formará la proporcion

$$25^a : 8^a :: 125^m : x^m = \frac{8 \times 125^m}{25} = 40 \text{ metros.}$$

Tomando $AD = 40^m$ y trazando la BD, el triángulo ABD contendrá las 8 áreas y resolverá el problema.

877. *Problema 2.º—Dado un triángulo, tirar desde uno de sus vértices una recta á la prolongacion del lado opuesto, de modo que forme un triángulo parcial de una área dada, ó lo que es lo mismo, añadir una superficie á otra dada.*

Solucion numérica.—Sea el triángulo ABC (fig. 298; lám. 31), y supongamos que del terreno que linda con AB se ha de tomar la parte que se le ha de añadir, y que el lindero BD es prolongacion del CB. Se tendrá la proporcion

$$ABC : ADC :: BC : CD;$$

conocida CD, se tendrá

$$BD = CD - BC,$$

y uniendo el punto A con el D, se tendrá el triángulo ACD que resuelve el problema.

Tambien se puede hallar desde luego la BD por la proporcion

$$ABC : ABD :: BC : BD.$$

Si el otro lindero del terreno colindante con AB tuviese la direccion BE, se dividirá la superficie que hay que añadir al triángulo ABC por la mitad de la base, ó el doble de dicha superficie por la base AB (873) [6], y se tendrá la altura, que tomándola en la perpendicular levantada á AB en un punto F que sea el que más convenga, y tirando por el extremo G de dicha altura una paralela GE á la AB, se unirá el punto de interseccion E con la BE, con el punto A, y el triángulo ABE será el que hay que añadir al ABC.

En este caso y en todos en general se puede prescindir del valor de la superficie del triángulo dado, para añadirle ó quitarle una cantidad tambien dada.

878. *Ejemplo numérico.—Un propietario posee un terreno triangular* ABC (fig. 298; lám. 31) *que contiene* 32 *áreas, debiendo contener* 40 *áreas, y reclama á su vecino colindante le restituya las* 8 *áreas que le faltan.*

Si han de tomarse sobre la AB las 8 áreas y la recta se ha de tirar desde el vértice A á la prolongacion del lado opuesto ó base BC, que tiene de longitud 75 metros, se establecerá la proporcion siguiente:

$$32^a : 40^a :: 75^m : x = \frac{40 \times 75}{32} = 93^m,75.$$

Siendo $93^m,75$ la longitud de la base del triángulo que contiene 40^a, y 75^m la base del triángulo que contiene 32^a, se restará de $93^m,75$ la cantidad 75^m y la diferencia $18^m,75$ será la base del triángulo que hay que añadir al ABC. Tomando en la prolongacion de la BC los $18^m,75$ y uniendo el punto A con el D, el triángulo ACD resolverá el problema.

879. *Problema 3.°—Dividir un triángulo en un cierto número de partes equivalentes por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto.*

Solucion numérica.—Sea el triángulo ABC (fig. 299; lám. 31) que se quiere dividir en tres partes equivalentes. Divídase su superficie por 3, y haciendo aplicacion del problema 1.°, tómese el triángulo ABD igual en superficie al tercio del ABC. Tómese á continuacion el BDE ó bien el BEC, y quedará resuelto el problema. Tambien se puede tomar primero el ABD igual al tercio del ABC y despues el ABE igual á los dos tercios del ABC; y en ambos casos mídase la superficie del triángulo EBC para que sirva de verificacion, pues deberá resultar igual al tercio del ABC.

Solucion gráfica.—Divídase la base AC en tres partes iguales, y trazando las BD y BE, los triángulos ABD, DBE y BEC, que tienen igual base é igual altura, son equivalentes.

880. *Problema 4.°—Dividir un triángulo en un cierto número de partes proporcionales á números dados, por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto.*

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 299; lám. 31) el cual se quiere dividir en tres partes proporcionales á los números m, n y p: se tendrá la proporcion

$$\mathrm{ABD} : m :: \mathrm{BDE} : n :: \mathrm{BEC} : p;$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{ABC} : m+n+p :: \mathrm{ABD} : m \\ \mathrm{ABC} : m+n+p :: \mathrm{BDE} : n \\ \mathrm{ABC} : m+n+p :: \mathrm{BEC} : p \end{array}\right\} \quad [7];$$

y despejando en estas proporciones los terceros términos, tendremos:

$$\mathrm{ABD} = \mathrm{ABC} \times \frac{m}{m+n+p};$$

$$\mathrm{BDE} = \mathrm{ABC} \times \frac{n}{m+n+p};$$

$$\mathrm{BEC} = \mathrm{ABC} \times \frac{p}{m+n+p};$$

conocidas las tres porciones, se hará la divisien del triángulo ABC haciendo aplicacion del problema 1.°

2.ª Divídase el valor numérico de la base AC en tres partes que sean proporcionales á los números dados, y se tendrá

$$AD : m :: DE : n :: EC : p;$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} AC : m+n+p :: AD : m \\ AC : m+n+p :: DE : n \\ AC : m+n+p :: EC : p \end{array}\right\} \quad [8].$$

Conocidas las distancias AD, DE y EC, se tomarán en la AC, y trazando las BD y BE, los tres triángulos que resultan, de la misma altura, serán proporcionales á sus bases (Geom. Teor. 94.—3.º).

La *solucion gráfica* en este caso es impracticable, á no darse la relacion en líneas, para emplear la resolucion del problema 25 de la Geometría; lo que no sucede nunca en las aplicaciones prácticas de este problema á las particiones de terrenos entre varios herederos.

881. *Problema 5.º—Dividir un triángulo en un cierto número de partes desiguales cualesquiera, por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto.*

Soluciones numéricas.—1.ª Esta solucion consiste en dividir la superficie dada de cada una de las tres porciones por la mitad de la altura comun, para obtener las respectivas bases AD, DE y EC (fig. 299; lám. 31) en que ha de quedar dividida la total AC.

2.ª En este caso de asignarse desde luego la parte que ha de recibir cada uno de los herederos, y no se conoce ó no se quiere determinar la altura del triángulo, se establecerán las proporciones, fundándose en la propiedad de que los triángulos de una misma altura son proporcionales á sus bases, como en el siguiente

Ejemplo numérico.—Un padre deja una tierra á sus tres hijos que contiene $25^a,75$, *con la condicion de que se den al mayor* $10^a,25$; *al mediano* $8^a,25$, *y al menor* $7^a,25$. *La tierra tiene la forma triangular* ABC (fig. 299; lám. 31) *y todas las partes han de concurrir al punto* B *en que se halla un pozo ó casa.*

Mídase la base AC, y suponiendo resulten $125^m,40$, tendremos las proporciones

$$25,75 : 125,40 :: 10,25 : x = \frac{125,40 \times 10,25}{25,75} = 49,91$$

$$25,75 : 125,40 :: 8,25 : x = \frac{125,40 \times 8,25}{25,75} = 40,18$$

$$25,75 : 125,40 :: 7,25 : x = \frac{125,40 \times 7,25}{25,75} = 35,31$$

Total igual á la longitud de la base AC. 125,40

Se tomarán sobre CA las medidas $49^m,91$, $40^m,18$ y $35^m,31$, y se trazarán desde el punto B las rectas BE y BD á los puntos de division, y se tendrán los tres triángulos que resuelven la cuestion propuesta.

882 Para obtener la *solucion gráfica* sería preciso que se nos diese de antemano la línea AC dividida en las tres partes AD, DE y EC.

883 No nos ocuparemos en lo sucesivo de la division en partes desiguales que no tengan entre sí una relacion sencilla; pues en todos casos se deduce del procedimiento de la division en partes iguales, con la diferencia de que en ésta basta conocer el valor de la superficie total y el número de las partes, con lo cual se puede obtener el de una, dividiendo dicho valor total por el número de las partes, mientras que en la division en partes desiguales es preciso conocer de antemano el valor de cada una de ellas.

884. *Problema* 6.°—*Dividir un triángulo en tres partes equivalentes por rectas que partan de dos de sus vértices.*

Solucion gráfica.—Divídase la AC (fig. 300; lám. 31) en tres partes iguales; tírese la BD, y por su punto medio E la AE, y quedará resuelto el problema. Si se hubiera de dividir el triángulo en cinco partes, se dividirá la base AC (fig. 301; lám 31) en este número de partes y la figura indica el resto de la construccion; lo mismo se ejecutará cuando el número de partes sea mayor.

885 *Problema* 7.°—*Dividir un triángulo en tres porciones equivalentes, por rectas que partan de sus tres vértices y se unan en un mismo punto interior.*

Solucion numérica.—Hállese la superficie del triángulo ABC (fig. 302; lámina 31), y tómese el tercio. Divídase el resultado por la mitad de la base AC, y se tendrá la altura h de una de las porciones. Levantando la perpendicular $Aa = h$ y trazando la aO paralela á AC, el vértice del triángulo que tiene por base á AC, estará en dicha paralela. Divídase despues otra vez el tercio de la superficie del triángulo ABC por la mitad del lado BC y se tendrá la altura h'; levantando la perpendicular $Bb = h'$ á la BC y trazando la paralela bO á esta línea, el punto O de su interseccion con la aO será el que, unido con los vértices A, B y C, resolverá el problema, como es fácil comprender.

Solucion gráfica.—Divídase uno de los lados AC (fig. 303; lám. 31) en tres partes iguales, y trácense BD y BE: se tendrán los tres triángulos equivalentes ABD, DBE y EBC, y por consiguiente iguales cada uno al tercio del ABC. Trácense las paralelas DF y EG á las AB y BC, y desde el punto O donde se cortan trácense las tres rectas AO, BO y CO, y el triángulo ABO equivalente al ABD será un tercio del ABC (879), el triángulo BOC equivalente al BEC será otro tercio de ABC, por lo que el triángulo restante AOC deberá ser tambien el tercio de ABC.

886. *Observaciones acerca de la division en partes proporcionales ó desiguales.*—Si en la solucion numérica las partes hubieran de ser entre sí como los números m, n y p, se empezaría por hallar los valores de di-

chas tres partes y despues se haría la construccion del mismo modo

En general, en las soluciones numéricas, la division de una superficie S en n partes de igual área ó equivalentes, exige primero la determinacion del valor $\frac{S}{n}$ de cada una de las partes, y despues los cálculos consiguientes para obtener los de las líneas necesarias para verificar la construccion.

La division en partes desiguales supone el conocimiento prévio de los valores de estas partes, verificándose despues la construccion del mismo modo.

Por último la division en partes que sean entre sí como números dados $m, n, p \ldots$ no difiere de esta última sino en que es necesario determinar cada una de estas partes, y de la anterior en la manera de verificar esta determinacion; siendo igual el resto de las operaciones que en la division en partes equivalentes y desiguales.

Ahora bien, teniendo presente que una superficie S queda dividida en partes $a, b, c \ldots$ que sean entre sí como los números dados $m, n, p \ldots$ estableciendo la série de razones

$$a : m :: b : n :: c : p :: \ldots$$

en las cuales tenemos

$$a+b+c+\ldots = S : m+n+p+\ldots :: a : m :: b : n :: c : p :: \ldots$$

de donde resulta

$$\left.\begin{aligned} a &= S \times \frac{m}{m+n+p+\ldots} \\ b &= S \times \frac{n}{m+n+p+\ldots} \\ c &= S \times \frac{p}{m+n+p+\ldots} \end{aligned}\right\} \qquad [9]$$

no volveremos á ocuparnos en adelante de las divisiones en partes proporcionales

Por razones análogas será inútil hablar de la division en partes desiguales, por lo que en lo sucesivo sólo nos referiremos á la division en partes iguales en superficie ó equivalentes.

La misma marcha seguiremos en las soluciones gráficas, pues las construcciones son las mismas, salvo á dividir gráficamente en partes iguales, desiguales ó proporcionales, aquellas líneas cuyos valores hayan de dividirse de estos distintos modos en las soluciones numéricas para obtener las partes equivalentes, desiguales ó proporcionales.

887 *Problema 8.°—Dividir un triángulo en dos partes equivalentes por líneas tiradas desde un punto interior dado.*

Solucion numérica.—Sea el triángulo ABC (fig. 304; lám. 31) y O el punto dado: trácense OB y OC, y mídanse los triángulos ABC y BOC, y si éste no es la mitad del anterior, y suponemos que sea menor que dicha mitad, se hallará la diferencia, la que dividida por la mitad de la perpendicular OD, que se trazará y medirá, se tendrá el valor de la base EC de un triángulo EOC que representará dicha diferencia; con lo que tendremos que el cuadrilátero EOBC, compuesto de los dos triángulos BOC y EOC, será la mitad del triángulo ABC; y por consiguiente la otra mitad estará representada por el otro cuadrilátero ABOE, que podrá medirse para comprobar la resolucion del problema.

Solucion gráfica.—Sea O el punto dado (fig. 305; lám. 31): trácese la BO, y únase el punto medio D del lado AC con los B y O: los triángulos ABD y BDC son cada uno la mitad del ABC; y si por el punto B se traza la BE paralela á OD y se tira por último la OE, el cuadrilátero ABOE, compuesto de los triángulos ABE y BOE será equivalente al triángulo ABD compuesto de los ABE y BED; y por lo tanto, valdrá la mitad del ABC, siendo la otra mitad el cuadrilátero BOEC.

888 *Problema 9.°—Dividir un triángulo en tres porciones equivalentes, por líneas que partan de un punto interior dado.*

Solucion numérica.—Supongamos que una de las líneas de division vaya á parar á un vértice, tal como OA (fig. 306; lám. 31). Mídase la superficie del triángulo ABC y tómese el tercio; mídase la perpendicular O*a* y hállese la base AD, y tirando la OD se tendrá una de las partes AOD. Imagínese la perpendicular O*b* y mídase el triángulo AOC, y si no es igual al tercio de ABC, habrá que añadirle ó quitarle una cierta cantidad tal como *m*. Sea $AOC < \frac{1}{3} ACB$; mídase la perpendicular O*c* y hállese la base CE del triángulo $OEC = m$, y el cuadrilátero AOEC representará la segunda parte. Hállese la superficie del cuadrilátero EODB para ver si equivale tambien al tercio de ABC, lo que servirá al mismo tiempo para comprobar la operacion.

Si una de las líneas de division ha de ser perpendicular á uno de los lados, tal como la OD (fig. 307; lám. 31), se imaginará la AO, y midiendo el triángulo AOD, si suponemos que le falta una cierta cantidad *m* para ser igual al tercio de ABC, se medirá la altura O*a* y se hallará la base AE del triángulo $AEO = m$, y el cuadrilátero ADOE será una de las partes. Hágase lo mismo para hallar la segunda parte DOFC, y compruébese la operacion midiendo el cuadrilátero EOFB.

Si una de las líneas de division ha de ser oblícua á uno de los dos lados, tal como la OD (fig. 308; lám. 31), el procedimiento no difiere del que acabamos de indicar.

Soluciones numérica y gráfica combinadas.—Supuesto que son análogas las soluciones numéricas en los tres casos que acabamos de considerar en este problema, y que tambien lo serían combinadas con las gráficas, vamos á resolver por este método el caso correspondiente á la (fig. 308; lámina 31).

Para esto, trácese y mídase la perpendicular Oc (fig. 309; lám. 31), y hállase la longitud de la base que ha de tener un triángulo igual al tercio del ABC; tómese esta longitud de D á E, y trazando la OE se tendrá dicho triángulo, que será el DOE. Tomando DG=DE y trazando la OG, se tendrá el triángulo DOG equivalente al DOE é igual por lo tanto al tercio del ABC. Como estos triángulos tienen cada uno una parte fuera del ABC, se trazarán las OC y OA y las paralelas á éstas EF y HG, y uniendo los puntos F y H con el O, tendremos los cuadriláteros DOFC y DOHA equivalentes á los triángulos DOE y DOG, como es fácil comprender, y por consiguiente iguales cada uno al tercio de ABC. Para comprobacion se medirá el otro cuadrilátero BFOH para ver si equivale tambien al tercio del ABC.

889. *Problema 10.—Dividir un triángulo en tres partes equivalentes por líneas tiradas desde un punto dado en uno de sus lados.*

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 310; lám. 31) y D el punto dado. Se medirá la superficie de dicho triángulo y se tomará el tercio, cuya cantidad dividida por la mitad de la perpendicular Da dará la base AE del triángulo ADE igual á una de las partes. Procédase del mismo modo para hallar la CF, y se tendrá la segunda parte DCF, y para comprobacion se podrá examinar si el cuadrilátero EDFB que ha de representar la tercera parte equivale al tercio del triángulo ABC.

2.ª Despues de calcular la superficie del triángulo ABC y de tomar su tercio, tírese la BD y hállese la del triángulo ABD y se tendrá la proporcion

$$\text{ABD} : \frac{1}{3}\,\text{ABC} :: \text{AB} : \text{AE}.$$

Conocida por ella la longitud de la AE, se tendrá el punto E que unido con el D nos dará el triángulo $\text{ADE} = \frac{1}{3}\,\text{ABC}$, y que será por lo tanto una de las partes. Del mismo modo se hallaría la parte DFC y la restante será el cuadrilátero EDFB.

Solucion gráfica.—Divídase la base AC (fig. 311; lám. 31) en tres partes iguales, y tírense las BG y BH. Trácese la BD y paralelamente á ésta las GE y HF y se tendrán los puntos E y F, que unidos con el D nos darán los triángulos AED y FDC equivalentes á los ABG y BHC, cada uno de los cuales representará la tercera parte del triángulo ABC, y el cudrilátero EDFB la tercera parte restante.

890. *Problema 11.—Dividir un triángulo en cinco partes equivalentes, por rectas tiradas desde un punto dado en uno de sus lados.*

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 312; lám. 31) y

D el punto dado: despues de haber hallado la superficie del triángulo ABC, tomado su quinta parte y medido la perpendicular Da para determinar la base EC de dicha quinta parte, que será la DEC, llévese esta base las veces que se pueda sobre la EA y sean dos hasta G, siendo AG<EC; los triángulos DFE y DGF serán tambien quintas partes de ABC. Tírese ahora la DA y véase cuál es la superficie del triángulo ADG, y restándola de la quinta parte de ABC se obtendrá un resto que será la cantidad que habrá que añadir al triángulo ADG. Para hallar esta cantidad, bájese la perpendicular Db á la AB y divídase dicho resto por la mitad del valor de la perpendicular, y se tendrá la base AH del triángulo AHD que habrá que añadir al ADG, para que el cuadrilátero AHDG represente otro quinto del ABC. Para comprobacion puede medirse el triángulo BDH que queda y que deberá ser otro quinto del ABC.

Tambien se puede determinar el BDH despues de haber hallado los triángulos DEC, DFE y DGF, y la parte restante se hallará representada por el cuadrilátero AHDG.

2.ª Cuando no se puede operar en el interior, hállese la superficie del triángulo ABC, valiéndose de los tres lados, y tomada su quinta parte, tendremos la siguiente proporcion (Geom. Teor. 99.)

$$\mathrm{ABC} : \frac{1}{5}\,\mathrm{ABC} :: \mathrm{BC} \times \mathrm{AC} : \mathrm{DC} \times x;$$

de donde

$$x = \frac{\mathrm{BC} \times \mathrm{AC}}{5 \times \mathrm{DC}} \quad [10]$$

Una vez hallada la longitud de $x = \mathrm{CE}$, se tendrá el punto E, y el triángulo DCE será igual á $\frac{1}{5}$ ABC. Tómense FE y FG iguuales á EC y tendremos ya en el contorno los puntos de division E, F y G. Procédase despues para hallar la BH como hemos hecho para CE y tendremos el último punto de division H, por el cual y uniendo los G, F y E con el punto D, tendremos dividido el triángulo ABC en los DEC, DFE, DGF y BDH, y en el cuadrilátero AHDG como en la solucion anterior. Esta última es tambien aplicable al caso en que el punto dado se halla en uno de los vértices.

Soluciones gráficas. —1.ª Tírese la DA (fig. 313; lám. 31) y por B la BY paralela á ella, y trazando la DY tendremos convertido el triángulo ABC en otro equivalente DYC que tendrá su vértice en el punto dado D (tomo I; 1154). Divídase la base CY en cinco partes iguales, y uniendo el punto D con los de division, se tendrán los tres triángulos DEC, DFE y DGF dentro del triángulo ABC é iguales á un quinto de éste. El cuarto triángulo DGH tiene fuera del ABC la parte $\mathrm{HA}a$; por lo que tirando la $\mathrm{H}b$ paralela á DA y trazando la $\mathrm{D}b$, el cuadrilátero $\mathrm{AGD}b$ será tambien el quinto de ABC, por lo que el triángulo BDb representará tambien un quinto del ABC.

Esta solucion es aplicable tambien al caso en que el punto D se halle en el interior, trasformando el triángulo dado en otro que tenga su vértice en este punto (tomo I; 1154).

2.ª Si se quieren evitar las trasformaciones del triángulo total dado en otros equivalentes, se procederá del modo siguiente: divídase la base AC (fig. 314; lám. 31) en cinco partes iguales, de las que sólo señalaremos la primera CD, y trazada la BD, el triángulo BDC será el quinto del ABC; trácese la OD y por B la BE paralela á OD, y uniendo el punto O con el E, el triángulo OEC es el quinto del ABC, pues hemos trasformado el triángulo BDC en otro equivalente que tiene el vértice O (tomo I, 1154). Tómese la base EC y llévese tres veces de E á H, y trazando las OF y OG, los triángulos OFE y OFG serán quintas partes del ABC. El otro triángulo OGH se reemplazará por el cuadrilátero OGAa, y la última quinta parte se hallará representada por BOa.

891. *Polígonos en general, convexos y cóncavos.—Contornos rectilíneos de un corto número de lados.—Problema 12.—Dividir un cuadrilátero convexo en tres partes equivalentes por líneas que partan de uno de sus vértices.*

Solucion numérica.—Sea el cuadrilátero ABCD (fig. 315; lám. 31) y C el vértice dado. Mídase la superficie del cuadrilátero y tómese el tercio, cuya cantidad dividida por la mitad de la perpendicular CE, nos dará la base FD, y trazando la CF, el triángulo FDC será el tercio de ABCD. Hágase una operacion análoga para trazar la CG, y el triángulo BCG será otro tercio de ABCD; el último tercio estará representado por el cuadrilátero AFCG, que midiéndole podrá servir para verificar el problema.

Soluciones gráficas.—1.ª Trácense las diagonales BD y AC (fig. 316; lám. 31): divídase la opuesta al ángulo C en tres partes iguales BE, EF y FD y trácense las rectas CE y CF, AE y AF, y tendremos

$$BCE = ECF = CFD, \text{ y } ABE = EAF = AFD;$$

de donde se deduce

$$BCE + ABE = ECF + EAF = CFD + AFD;$$

ó lo que es lo mismo

$$ABCE = AECF = AFCD$$

Tirando ahora por los puntos E y F las EG y FH paralelas á la AC y trazando las CG y CH, el cuadrilátero AGCH reemplazará al AECF, y los triángulos BGC y CHD á los cuadriláteros respectivos ABCE y AFCD, como es fácil ver en la figura, con lo que el problema quedará resuelto.

2.ª Trasfórmese el cuadrilátero ABCD (fig. 317; lám. 31) en el triángulo equivalente ECD (Tomo I: 1156) y divídase la báse ED en tres partes iguales en los puntos G y F, y trazando las CF y CG, el triángulo CFD será la primera parte, el cuadrilátero AHCF que reemplaza al triángulo CGF será la segunda, y el triángulo BHC representará la otra tercera parte.

892. *Problema 13.—Dividir un cuadrilátero cóncavo en cuatro partes equivalentes, por rectas que partan de uno de sus vértices.*

Solucion númerica.—Sea el cuadrilátero cóncavo ABCD (figura 318; lám. 32): la sola inspeccion de la figura manifiesta que la série de operaciones para la resolucion del problema, es la misma que en el caso de ser convexo el polígono.

Solucion gráfica.—Despues de trasformado el cuadrilátero en el triángulo equivalente ECD (fig. 319; lám. 32) y dividida la base ED en cuatro partes iguales, se concluirá el problema como el anterior.

893. Los procedimientos númerico y gráfico que acabamos de exponer para el cuadrilátero, se hacen extensivos de un modo análogo á los polígonos que pasan de cuatro lados, y basta para ello observar la figura 320; lám. 32, que es un pentágono convexo dividido en tres partes equivalentes por rectas tiradas desde uno de sus vértices. La solucion numérica da á entender, que despues de haber tirado las diagonales AC y CE y hallado las superficies de los triángulos ABC y CDE, ha sido preciso valerse de la altura C*a* para hallar las bases AF y EG de los triángulos ACF y CEG que hay que añadir á los AHC y CIE para que los cuadriláteros ABCH y CIED sean las terceras partes del polígono ABCDE, siendo el triángulo HCI la otra tercera parte. El procedimiemto gráfico consiste en reducir el polígono á triángulo equivalente CFG (Tomo I; 1160) y dividirle en tres partes equivalentes (879).

894. *Problema 14.—Dividir un polígono cualquiera cóncavo ó convexo, en un cierto número de partes equivalentes, por rectas que partan de un punto situado en el interior ó en uno de sus lados.*

Soluciones numérica y gráfica combinadas.—Supongamos ahora que el punto O (fig. 321; lám. 32) que ha de ser comun á tódas las partes equivalentes se halle situado en el interior del pentágono cóncavo que se ha de dividir, por ejemplo, en cuatro partes equivalentes.

Hállese la superficie del pentágono ABCDE y tómese el cuarto, con el fin de que bajando la perpendicular O*a*, que podrá considerarse como el lindero comun á dos de las partes en que ha de dividirse el polígono, pueda hallarse el valor de la base *a*F, que suponemos sea mayor que A*a*, para obtener un triángulo *a*OF, que represente el cuarto de la superficie del pentágono; tirando la OA y por F la FH paralela á ella, se trazará la OH y el cuadrilátero *a*AHO será una de las partes que se buscan; tómese *a*G =F*a*, y repitiendo á la derecha de O*a* la misma construccion que se ha hecho á la izquierda, el cuadrilátero *a*EIO será la otra de las dos partes que han de tener el lindero comun O*a*, lo que se comprende fácilmente; y la cuestion se resolvería del mismo modo, si se hubiese puesto por condicion que el linde comun hubiera sido una oblícua al lado AE ó bien una recta OE que fuese á terminar á un vértice E.

Para hallar la tercera porcion se considerará el punto O como el vértice de un triángulo, del cual OH es uno de sus lados, y hallando la base HL y trasformando el triángulo OHL en el cuadrilátero OHBM, este representará la tercera de las partes que buscamos, siendo la cuarta y última el pentágono OMCDI, el cual puede en este caso medirse ó no, puesto que usamos de las dos soluciones combinadas.

Si el punto comun O (fig. 322; lám. 32) debiera hallarse situado en uno de los lados del pentágono convexo ABCDE, y se quisiese dividir éste en tres partes equivalentes, se comprende con facilidad que siguiendo una marcha idéntica á la acabada de exponer, haciendo uso de las dos soluciones simultáneamente, se hallara primero el cuadrilátero AHOE que representará la primera de las tres partes en que se trata de dividir ahora el pentágono. Tomando despues FG=GE, trazando la FO, y tirando FL paralela tambien á la OA que ha servido para la primera parte, prolongando el lado AB cuando es preciso como en el caso actual, se tendrá

$$FAO-GAO=LAO-AOH \text{ ó } FGO=HLO,$$

y el triángulo OHL será la segunda de las tres partes que se buscan, y por lo tanto se trasformará en el cuadrilátero OHBM, que representará dicha segunda parte; estándolo la tercera y última por el cuadrilátero ODCM, el que podrá ó no medirse segun convenga, para la verificacion del problema.

895. *Division en zonas paralelas.*—En la division de los polígonos hemos considerado hasta ahora la circunstancia de la eleccion de un punto, ya situado en un vértice, en el interior de la figura ó en uno de los lados del contorno, haciendo que dicho punto sea comun á las diversas partes de terreno que resultan de la division entre varios partícipes, por la razon de que éste punto pueda ser un objeto notable, como un pozo, aljibe, fuente, molino, torre.....; pero otras veces no mediando esta circunstancia, la mejor figura del terreno para el cultivo, la construccion de edificios ú otra razon cualquiera de las muchas que pueden ocurrir, puede dar lugar á la division en zonas paralelas con arreglo á una direccion dada ó arbitraria, y vamos á ocuparnos de la resolucion de esta clase de problemas.

896. *Problema 15.—Dado un triángulo, tirar una recta paralela á uno de sus lados, de manera que forme con los otros dos un triángulo parcial que tenga una área dada.*

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 323; lám. 32); se trata de hallar un punto D situado en uno de los lados, por el cual tirando una recta DE paralela al lado AC, cumpla con la condicion que exige el problema. Para esto, como el nuevo triángulo que ha de resultar, y que supongamos sea el BDE, ha de ser semejante al ABC (Geometría, Teor. 58), tendremos (Geom. Teor. 100)

$$ABC : BDE :: AB^2 : BD^2,$$

ó en general, haciendo $ABC = S$; $BDE = s$; $AB = L$ y $BD = l$,

$$S : s :: L^2 : l^2;$$

de donde

$$l = \sqrt{\frac{s \times L^2}{S}} = L\sqrt{\frac{s}{S}} \qquad [11]$$

Tomando á partir de B una distancia $BD = l$, y tirando la paralela DE á la AC quedará resuelto al problema.

Si se quiere evitar el trazado de la paralela, se operaría del mismo modo sobre BC para tener el punto E, que unido con el D nos determinará la recta DE; ó bien, puesto que BD es ya conocida, se tendrá BE por la proporcion

$$BA : BD :: BC : BE.$$

La longitud de la paralela DE se obtiene por la proporcion

$$BA : BD :: AC : DE.$$

2.ª Cuando no se pueda operar en el contorno y sí en el interior, se trazará la perpendicular BP, y se tratará de hallar en ella un punto G, por el cual tirando la paralela DE á la AC, esta paralela cumpla con la condicion que exige el problema. Para esto tenemos (Geom. Teor. 100)

$$ABC : BDE :: BP^2 : BG^2,$$

ó haciendo $BP = A$ y $BG = a$,

$$S : s :: A^2 : a^2;$$

de donde

$$a = \sqrt{\frac{s \times A^2}{S}} = A\sqrt{\frac{s}{S}} \qquad [12].$$

Se tomará $BG = a$, y se tendrá el punto G para trazar la paralela DE. La longitud de esta paralela se obtiene por la proporcion

$$BP : AC :: BG : DE.$$

3.ª Si s fuese una parte alícuota de S, es decir en general, si s fuese $\frac{1}{n}$ de S, tendríamos entonces estas dos proporciones:

$$S : s :: n : 1;$$
$$S : s :: L^2 : l^2;$$

de donde (Arit. 169)

$$n : 1 :: L^2 : l^2;$$

y como

$$l^2 = \frac{L^2}{n} = \frac{L}{n} \times L,$$

se tendrá tambien

$$L : l :: l : \frac{L}{n} \qquad [13]$$

Lo que nos dice que se obtendrá la longitud BG $= l$, hallando una media proporcional geométrica entre L y $\frac{L}{n}$. Por lo tanto, si s debiera ser $\frac{1}{3}$ de S, se hallaría la media proporcional geométrica entre la longitud de L y su tercera parte $\frac{L}{3}$. Este último procedimiento es, como se observa, independiente del conocimiento de las superficies, bastando saber la relacion que se quiere que exista entre ellas.

Solucion gráfica.—La solucion geométrica exige la condicion de que s sea una parte alícuota de S; y el procedimiento está reducido á hallar gráficamente la media proporcional entre L y $\frac{L}{n}$ (Geom. Probl. 28). La demostracion sería la misma que en la tercera solucion numérica; solo que en las proporciones entrarían las líneas, en vez de los valores numéricos. Cuando se puede operar en el exterior, se hace la construccion sobre la misma figura. Sea el triángulo ABC $=$ S (fig. 324; lám. 32), y supongamos que la parte s que se quiere separar sea el tercio de S. Divídase AB en tres partes iguales en los puntos D y E; y para hallar la media proporcional entre AB y BE $\frac{AB}{3}$, se describe sobre AB como diámetro una semicircunferencia, se levanta en el punto E la perpendicular Ea y se traza la Ba, y ésta será la media proporcional, la cual se llevará sobre la BA, haciendo centro en B y describiendo un arco de círculo con el rádio Ba, hasta encontrar á AB en el punto F, por el cual se trazará la paralela FG á la AC y el problema quedará resuelto, siendo el triángulo FBG el tercio del ABC. En esta solucion gráfica, como en la tercera numérica, solo será preciso conocer la relacion de las superficies ABC y BFG.

Cuando la parte que se ha de tomar en el triángulo ABC (fig. 323; lámina 32) está representada por otro triángulo *abc*, se hallarán dos medias proporcionales, una x entre la base AC y la altura BP del triángulo ABC y otra z entre la base *ac* y la altura *bp* del *abc*; y como la parte que ha de tomarse en el triángulo ABC y que ha de resultar semejante al triángulo *abc*, ha de ser un triángulo tal como el BDE semejante al ABC, resulta que x y z serán dos de sus líneas homólogas; por lo que hallando una cuarta proporcional á x, z y AB se obtendrá el valor de BD, y la paralela DE resolverá la cuestion.

Segun se hallen aritmética ó geométricamente las medias y cuartas proporcionales, así la solucion será numérica ó gráfica.

897. *Problema 16.—Dividir un triángulo en partes equivalentes.*—El problema que acabamos de resolver, suministra el medio de dividir un triángulo cualquiera en varias partes equivalentes, desiguales ó proporcionales, advirtiendo que las soluciones serán numéricas ó gráficas segun se proceda aritmética ó geométricamente en la determinacion de los valores.

Para dividir un triángulo ABC (fig. 324; lám. 32) en n partes equivalentes, se dvidirá $BA = L$ en n partes iguales BE, ED.... y llamando l, l', l'',.... á las medias proporcionales B*a*, B*b*.., se tendrán las proporciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} L : l :: l : \dfrac{1}{n} L; \\ L : l' :: l' : \dfrac{2}{n} L; \\ L : l'' :: l'' : \dfrac{3}{n} L; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad [14];$$

tomando los valores de l, l', l''.... á partir de B en el lado BA, que supongamos sea BF, BL.... y trazando las paralelas FG, LM.... se tendrá resuelto el problema.

Para dividir el mismo triángulo ABC en partes desiguales, como estas han de ser conocidas, llamándolas s, s', s''..... y S al triángulo ABC, tendrémos las proporciones

$$S : s :: L^2 : l^2$$
$$S : s' :: L^2 \; l'^2.$$

Hallando los valores de l, l'..... y tomando las partes BF, BL.... que los representen, y trazando las paralelas FG, LM.... quedará resuelto el problema.

Por último, para dividir el mismo triángulo en partes proporcionales, despues de hallado el valor de cada una, segun sabemos, valiéndonos de la série de razones iguales

$$s : m :: s' : n :: s'' : p :: \ldots$$

se continuará como en el caso anterior de partes desiguales.

En el caso de dividir el triángulo en dos partes proporcionales á los números m y n, tendremos

$$s : m :: s' : n;$$

de donde

$$s + s' = \mathrm{S} : m + n :: s : m,$$

y

$$s = \mathrm{S} \times \frac{m}{m+n},$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{s}{\mathrm{S}} = \frac{m}{m+n}.$$

Sustituyendo el valor de $\frac{s}{\mathrm{S}}$ en la fórmula [11] resultará

$$l = \mathrm{L}\sqrt{\frac{m}{m+n}} \quad [15],$$

y un caso particular de esta cuestion será el expuesto anteriormente de dividir un triángulo en partes equivalentes. En efecto, supongamos que el triángulo ABC se quiere dividir en tres partes equivalentes; se tendría para la primera:

$$\frac{s}{\mathrm{S}} = \frac{m}{m+n} = \frac{1}{3}, \text{ y } l = \mathrm{BF} = \mathrm{L}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\mathrm{L}}{3}\sqrt{3}.$$

Para la segunda, se tendria $\frac{s}{\mathrm{S}} = \frac{m}{m+n} = \frac{2}{3}$, y

$$l' = \mathrm{BL} = \mathrm{L}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\mathrm{L}}{3}\sqrt{2}\ \sqrt{3}.$$

Para comprobacion debe ser tambien ACML el tercio de ABC.

Para el caso de dividirle en cuatro partes equivalentes se tendrian los siguientes valores:

$$l = \frac{L}{2}; \qquad l' = \frac{L}{2}\sqrt{2}; \qquad l'' = \frac{L}{2}\sqrt{3}.$$

Esta solucion numérica es por lo tanto la misma que se obtiene por la fórmula [11], haciendo sucesivamente $\frac{s}{S} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ y por las proporciones [14] haciendo $n = 4$.

898. *Problema 17.—Dado un trapecio, tirar una recta paralela á las bases tal, que el trapecio parcial que forme con la base menor ó mayor y los lados del trapecio, tenga una área dada.*

Solucion numérica.—Sea AECD (fig. 325; lám. 32) el trapecio á cuya superficie llamaremos S; EC su base mayor $= B$; AD su base menor $= b$, y AF su altura $= a$; sea GP $= x$ la recta que buscamos, la cual ha de separar una superficie s adyacente á la base menor b, ó una superficie s' adyacente á la base mayor B.

Para hallar la expresion de x cuando se quiere separar del trapecio AECD una parte AGPD $= s$ adyacente á la base menor b, tendremos primero

$$s = \frac{x + b}{2} \times AH \qquad [16].$$

Como la altura AH es una incógnita, se determinará su valor trazando la AL paralela á DC, y los triángulos semejantes AGR y AEL nos darán la proporcion

$$EL : GR :: AF : AH;$$

ó lo que es lo mismo

$$B - b : x - b :: a : AH = \frac{a\,(x - b)}{B - b}.$$

Sustituyendo el valor de AH en la ecuacion [16] y efectuando operaciones, tendremos

$$s = \frac{a\,(x^2 - b^2)}{2\,(B - b)} \qquad [17].$$

Despejando x en esta ecuacion, resulta

$$x = \sqrt{b^2 + \frac{B - b}{a} \times 2s} \qquad [18];$$

con lo que se tiene el valor de la línea divisoria GP, que hemos llamado x, en funcion de las bases y altura del trapecio total dado y de la parte conocida s que se quiere separar adyacente á la base menor b.

Para hallar ahora la expresion de esta misma línea $x = \mathrm{GP}$, cuando se quiere separar del trapecio AECD una parte $\mathrm{EGPC} = s'$ adyacente á la base mayor B, tendremos primero

$$s' = \frac{\mathrm{B} + x}{2} \times \mathrm{FH} \qquad [19]$$

Como la FH es una incógnita, se determinará su valor observando que se tiene

$$\mathrm{FH} = \mathrm{AF} - \mathrm{AH} = a - \frac{a\,(x - b)}{\mathrm{B} - b} = \frac{a\,(\mathrm{B} - x)}{\mathrm{B} - b}$$

Sustituyendo este valor de FH en la ecuacion [84] y efectuando operaciones, tendremos

$$s' = \frac{a\,(\mathrm{B}^2 - x^2)}{2\,(\mathrm{B} - b)} \qquad [20];$$

y despejando x en esta ecuacion, se obtiene

$$x = \sqrt{\mathrm{B}^2 - \frac{\mathrm{B} - b}{a} \times 2s'} \qquad [21];$$

con lo que se tiene tambien el valor de la línea divisoria $\mathrm{GP} = x$ en funcion de las bases y la altura del trapecio total dado y de la parte conocida s' que se quiere separar, adyacente á la base mayor B.

899. Una vez conocido el valor de x, se tomará en la base mayor CE (fig. 325; lám. 32) una parte $\mathrm{CM} = x$; por el punto M se trazará la MG paralela á la CD, y tirando por último por el punto G la GP paralela á EC, se tendrá la línea divisoria que se buscaba.

Si se quiere evitar el trazado de la paralela GM, se puede determinar la AG á que llamaremos y, observando que los triángulos semejantes AGR y AEL dan la proporcion

$$\mathrm{EL} : \mathrm{GR} :: \mathrm{AE} : \mathrm{AG};$$

ó lo que es lo mismo, llamando ahora l al lado AE,

$$\mathrm{B} - b : x - b :: l : y;$$

de donde

$$y\ (B - b) = (x - b)\ l :$$

eliminando x entre esta ecuacion y la [18], y despejando y resulta

$$y = l \times \frac{-b + \sqrt{b^2 + \frac{B-b}{a} \times 2s}}{B-b} \qquad [22].$$

Tomando en el lado AE una longitud $AG = y$, se trazará la paralela GP á la EC.

Puesto que se tiene trazada y conocida la altura AF para la determinacion de la superficie del trapecio AECD, se podrá buscar en ella el punto H para tirar por él la paralela GP á la EC.

Para esto, como ya se conoce el valor de dicha paralela GP, las superficies de los trapecios AGPD y GECP serán

$$AGPD = \frac{AD + GP}{2} \times AH ;$$

$$GECP = \frac{GP + EC}{2} \times HF ;$$

de donde despejando las alturas AH y HF, tendremos

$$AH = \frac{2AGPD}{AD + GP} \quad [23], \quad y \quad HF = \frac{2GECP}{GP + EC} \quad [24];$$

y tomando en la AF las magnitudes AH ó HF, segun que el trapecio parcial que se tome sea adyacente á la base menor ó á la mayor, se tendrá conocido el punto H.

Como se hallaria tambien fácilmente $AF = \frac{2AECD}{AD + EC}$, tendremos como comprobacion iguales los valores numéricos de AF y AH + HF, así como los de

$$\frac{2AECD}{AD + EC} \quad y \quad \frac{2AGPD}{AD + GP} + \frac{2GECP}{GP + EC}.$$

Ejemplo numérico.—Supongamos que el trapecio AECD tiene de superficie 11160 metros cuadrados, que su altura AF es de 72 metros, su base mayor es $EC = 230$ metros, y la menor $AD = 80$ metros, y que se quiere separar una superficie de 2520 metros cuadrados, adyacente á la base menor AD, representada por el trapecio AGPD. La fórmula [18] nos da

$$GP = \sqrt{80^2 + \frac{230 - 80}{72} \times 2 \times 2520} = 130 \text{ metros}.$$

Restando de 11160 metros cuadrados los 2520 metros cuadrados, se tendrán 8640 metros cuadrados para el valor de la parte adyacente á la base mayor EC, representada por el trapecio GECP.

Si se hubiera querido separar desde luego esta parte, hubiéramos hallado para GP el mismo valor de 130 metros, valiéndonos de la fórmula [21], pues sustituyendo en ella por las letras sus valores, resulta

$$GP = \sqrt{230^2 - \frac{230 - 80}{72} \times 2 \times 8640} = 130^{m}.$$

Para hallar las alturas AH y HF, las fórmulas [23] y [24] dan

$$AH = \frac{2 \times 2520}{80 + 130} = 24^{m}; \qquad HF = \frac{2 \times 8640}{130 + 230} = 148^{m}.$$

Como comprobacion tenemos

$$AF = AH + HF = 24 + 48 = 72 \text{ metros}.$$

900. **Division del trapecio en partes proporcionales.**—Si se quiere dividir el trapecio AECD en dos partes que se hallen en la razon de m á n, por medio de una paralela á las bases, tendremos

$$\frac{s}{s'} = \frac{m}{n} \qquad \text{ó} \qquad \frac{s}{S} = \frac{m}{m+n};$$

ó sustituyendo en vez de S su valor en funcion de a, B y b, y despejando $2s$, resulta

$$2s = \frac{am\,(B + b)}{m + n};$$

y poniendo por $2s$ su valor en la ecuacion [18], tendremos, despues de verificadas todas las trasformaciones,

$$x = \sqrt{\frac{mB^2 + nb^2}{m + n}} \qquad [25].$$

901. Despues de haber enseñado á tomar en un trapecio una superficie dada y á dividirle en dos partes proporcionales á dos números dados por medio de una paralela á las bases, se comprenderá fácilmente, en atencion á la marcha seguida por el triángulo en este caso del paralelismo, la manera de dividir el trapecio en varias partes iguales, desiguales ó proporcionales á números dados, por lo que no nos detendremos en la resolucion de estos problemas. Pasaremos por lo tanto á la division de un polígono cualquiera en partes equivalentes por medio de rectas paralelas entre sí, no deteniéndonos más que en este caso, por las mismas consideraciones que acabamos de exponer.

902. *Probléma* 18.—*Dividir en general un polígono cualquiera en un cierto número de partes equivalentes, por medio de rectas paralelas entre sí.*

Solucion númerica.—Sea el polígono ABCDE (fig. 326; lám. 32) que se quiere dividir, por ejemplo, en tres partes equivalentes. Hállese su superficie, y dividiéndola por 3 se tendrá el valor de una de las partes. Para determinar estas partes en la figura, trácese por el vértice A una recta cualquiera AH y por los demás vértices C y E las CF y EG paralelas á la AH, con lo que el polígono quedará dividido en triángulos y trapecios. Para hallar la primera parte, mídase el triángulo ABH, y si su área es mayor que el tercio del polígono, se trazará una recta *mn* paralela á AH que separe en el triángulo ABH una parte B*mn* igual á dicho tercio (895): si el triángulo ABH fuese menor que este tercio, añádasele el trapecio AH*rp*, que se obtendrá trazando una paralela *pr* á la AH que separe en el trapecio AHCF una parte AH*pr* adyacente á la base menor AH (897) [18] igual á lo que faltaba al triángulo ABH para ser el terció del polígono, y se tendrá representada por el cuadrilátero AB*rp* la primera parte de las tres en que se quiere dividir el pentágono ABCDE.

Para hallar la segunda, se medirá el trapecio *pr*CF, y si no fuese igual al tercio del polígono, menor por ejemplo, se trazará una paralela *st* que separe en el trapecio FEGC una parte FC*ts* adyacente á la base mayor FC (897), [21] igual á lo que le faltaba al trapecio *pr*CF para valer el tercio del polígono, y el pentágono *pr*C*ts* representará la segunda de las tres partes que buscamos.

Para comprobacion se medirá el cuadrilátero *st*DE compuesto del trapecio *st*GE y del triángulo EGD, que es la figura que queda para representar la última tercera parte del polígono propuesto y que deberá ser igual á dicho tercio.

Si se pusiese por condicion que las paralelas que han de dividir el polígono en zonas tuviesen una direccion determinada, es decir, fuesen paralelas á una recta dada, en vez de tirar de un modo arbitrario la primera recta AH, se trazará paralela á la recta dada.

903. *Contornos rectilíneos de un gran número de lados.*—Cuando los polígonos tienen muchos lados, pero éstos son de bastante longitud, pueden abreviarse las operaciones de la division, procediendo de la manera que vamos á exponer; para lo cual consideraremos el caso más sencillo

de la division en dos partes, reasumiendo todos los casos análogos á los expuestos hasta aquí, en el problema general siguiente, en el cual hacemos uso solamente de las soluciones numéricas.

904. *Problema 19.—Dividir un polígono en dos partes equivalentes, desiguales ó proporcionales á dos números dados* m *y* n, *por medio de una recta tirada desde uno de sus vértices, ó por un punto situado en uno de sus lados, ó bien por medio de una recta paralela á uno de sus lados.*

Sea primero dividir el polígono ABC....H; (fig 327; lám. 32), en dos partes equivalentes por una recta tirada desde el vértice H. Divídase en triángulos *a*, *b*, *c*..... desde este vértice, hállese la superficie de cada uno y súmense para tener la del polígono. Entonces si $a + b + c$, por ejemplo, es la suma inmediatamente inferior á la mitad que se trata de separar, se hallará la diferencia, y se tomará en el triángulo siguiente HCD una parte *r* igual á esta diferencia por medio de una recta HM á partir del vértice H (872), y esta línea HM resolverá el problema. Para comprobacion se verá si es tambien $e + d + s$ igual á la mitad del polígono.

Cuando la línea divisoria ha de partir de un punto Z situado en un lado AH, el procedimiento no varía esencialmente.

905. Si el polígono se ha de dividir en dos partes iguales en superficie por medio de una recta paralela al lado AI (fig 328; lám. 32), se trazará por el punto B, por ejemplo, una paralela BM á la AI, y se hallará la superficie de la parte del polígono ABMHI, descomponiéndola, por ejemplo, en triángulos, y la de la parte BCDEFGM descomponiéndola tambien en triángulos, ó en triángulos y trapecios como se vé en la figura, para sumar sus áreas y tener la total del polígono, la que se dividirá por 2. Hecho esto, si la parte ABMHI no equivale á la mitad del polígono y es, por ejemplo, menor, se trazará por G la GR paralela á la BM, y se tomará en el trapecio BMGR la parte B*mn*M, adyacente á la base mayor BM (897), [21] y la recta *mn* paralela á la BM será la que dividirá al polígono en dos partes equivalentes.

De un modo análogo se procederá en la division en dos partes desiguales, cuyos valores numéricos deben darse de antemano, así como en la division en dos partes que se hallen en la relacion de *m* á *n*, las que tambien hay que determinar primero segun hemos ya visto en los demás casos de esta especie.

906. *Contornos curvilíneos y mistilíneos.*—Cuando los contornos están formados de muchos lados y es pequeña además la magnitud de estos, ó bien cuando son curvilíneos ó mistilíneos, en cuyos casos pueden considerarse como polígonos irregulares de infinito número de lados, podémos hacer uso de la circunscripcion ó inscripcion de un polígono de menor número de lados para determinar la superficie total de la figura en cuestion. Una vez hallada esta, así como el valor de las partes iguales, desiguales ó proporcionales en que haya de dividirse, y señalado el punto por donde haya de trazarse la línea divisoria, bien que sea un vértice ó se halle situado en el contorno ó en el interior, ó bien que dicha recta se

haya de trazar paralelamente á una direccion dada ó á arbitrio, en todos los casos no habrá más que seguir exactamente la marcha trazada hasta aquí en la série de operaciones expuestas, cuidando de aprovechar siempre las circunstancias favorables que puedan conducir, en los diferentes casos que se presentan en la práctica, á soluciones más prontas y más sencillas.

907. De igual manera se procede para resolver el problema importante siempre de añadir ó quitar á una tierra una parte, para tomarla de otra colindante ó cederla á esta, valiéndonos de los problemas anteriores, en particular de los 1.º (872) y 17 (898), pues en el caso de la figura 329 (lám. 32) en que el contorno *abcd* es bastante irregular, despues de haberle circunscrito un polígono ABCDE y de haber trazado una recta *mn* que á ojo parezca que dará la parte *obcp* que se quiera separar de la tierra M, se hallará la verdadera superficie de esta parte, hallando la del polígono *mn*DCB y restando de ella la superficie comprendida entre el contorno rectilíneo del polígono y el curvilíneo de la tierra M. Si el resultado no es igual á la parte que se ha de quitar de dicha tierra, se hallará la diferencia, la que se añadirá ó quitará de la *obcp*, por medio de triángulos como el *ors* ó por parelelas como *et*, considerando á la figura *opte* como paralelógramo ó rectángulo segun la forma y direccion de las líneas *oe* y *pt*, en cuyo caso, tomando la *op* como base, se hallará la altura *xz*, ó bien, prévio el trazado de una paralela auxiliar *fg*, hallar la superficie del trapecio *opgf*, y por el problema 17 (898), determinar la recta *et* que forme con la base *op* el trapecio parcial *opte* que exprese la diferencia que se ha de quitar ó añadir segun los casos, haciendo las construcciones por la parte de la recta *op* que sea conveniente para satisfacer á las condiciones que han de llenarse.

908. En el caso de ser las líneas del contorno de la tierra, aunque sinuosas, que puedan considerarse como rectas sin error de consideracion como en la figura 330 (lám. 32), se podrá añadir á la tierra ABCDEF el triángulo B*s*C tomando la BC por base y hallando la altura *rs*, ó quitarle una parte A*mn*F tomándola por un rectángulo, siendo AF la base y determinando la altura *ab*. Si se hubiera de quitar dicha parte por el lado de la ED, pudiera esta considerarse como la base de un paralelógramo ED*dc* cuya altura *ef* se hallaría.

909. **Division de los solares.**—Cuando en el terreno que se trata de dividir hay que establecer construcciones, es necesario que los solares que resultan sean figuras que presenten ángulos rectos, especialmente en las líneas de fachada, tanto para la mayor solidez de los edificios como para su mejor distribucion.

Supongamos, por ejemplo, que el cuadrilátero ABCD (fig. 331; lám. 32) es un terreno que se quiere dividir en cuatro solares, siendo AB la línea de fachada. Se trazará una línea PQ á arbitrio en sentido de la longitud de la figura y paralela á la línea AB, la que se marca en el terreno plantando piquetes en los puntos P y Q: se mide esta línea y se divide en cuatro partes iguales, trazando por los puntos de division las perpendiculares EH, YF y GK á la PQ, para fijar aproximadamente las dimensiones de cada uno de los cuatro solares, que suponemos han de ser iguales en superficie. Hecho esto, se hallará la superficie total del cuadrilátero ABCD y dividiéndola por 4 se tendrá la cabida que ha de tener cada uno de los solares. Se medirá la primera parte ADHE, y si se supone que tiene menos superficie que el cuarto de ABCD, se tomará del trapecio siguiente HEFY la parte H*mn*E que le falte adyacente á su base menor HE, valiéndose de la fórmula [18] (898), y el primer solar estará representado por el cuadrilátero AD*mn*. Mídase ahora la superficie *m*YF*n* y si tambien es menor que el cuarto de ABCD, se seguirá el mismo procedimiento para añadirle la parte Y*pq*F y así sucesivamente, y se tendrán los cuatro solares de igual superficie AD*mn*, *mpqn*, *prsq* y *r*CB*s* (902). De un modo análogo se resolveria el problema, si los solares hubieran de ser desiguales, ó proporcionales á números dados, ateniéndonos á las observaciones expuestas (886).

910 Mr. J. Regnault resuelve este problema en su curso práctico de Agrimensura, siguiendo el procedimiento que se vé en el siguiente

Ejemplo número. —Sea el cuadrilátero anterior ABCD (figura 331; lám. 32), en el que se suponen practicadas las construcciones anteriores de trazar la PQ y las perpendiculares dichas por los puntos de division. Sea la medida PQ=76,^{m} 48 y por consiguiente su cuarto 19,^{m} 12.

La primera parte DAEH, siendo un cuadrilátero cualquiera, se le divide en dos triángulos para conocer su superficie, para lo cual se miden las líneas DA, AE, EH, HD y DE, y lo mismo se hace para hallar la cuarta parte representada por el cuadrilátero KGBC, midiendo las líneas GB, CB, CK, KG y CG. En cuanto á las partes HEFY y FYKG que son dos trapecios, se miden sus bases paralelas y se multiplica su semisuma por su distancia.

Una vez tomadas todas las medidas sobre el terreno, se procede á las operaciones del cálculo de la manera siguiente.

La primera parte se compone de los dos triángulos DAE y DEH:

La superficie del triángulo DAE es igual (Tomo I; 1071) [17] á

$$\sqrt{36,45 \times 10,55 \times 23,45 \times 2,45}$$
$$= \sqrt{22093,365} = 148,7 \text{ m}^2 = 1,49 \text{ áreas.}$$

La superficie del triángulo DEH es igual á

$$\sqrt{41,40 \times 18,40 \times 7,40 \times 15,60}$$
$$= \sqrt{87937,512} = 296,54 \text{ m}^2 = 2,97 \text{ áreas.}$$

Superficie de la primera parte = 4,46 áreas.

La segunda parte está representada por el trapecio HEFY; se suman las dos líneas HE y FY y se multiplica la mitad de la suma por 19,^{m} 12, lo que da

$$\frac{25,80 + 27,90}{2} \times 19,^{m} 12 = 513,^{m} 37 = 5,13 \text{ áreas.}$$

La tercera parte está representada por el trapecio FYKG; se suman las dos líneas YF y KG y se multiplica la mitad de la suma por 19,^{m} 12, lo que nos da

$$\frac{27,90 + 29,50}{2} \times 19^{m} 12 = 548,^{m} 74 = 5,49 \text{ áreas}$$

Por último, la cuarta parte se compone de los dos triángulos KGC y GBC;

La superficie del triángulo KGC es igual á

$$\sqrt{46,80 \times 17,30 \times 22,10 \times 7,40}$$
$$= \sqrt{19682,3456} = 363,87 \text{ m}^2 = 3,6387 \text{ áreas.}$$

La superficie del triángulo GBC es igual á

$$\sqrt{43,60 \times 29,20 \times 4,20 \times 10,20}$$
$$= \sqrt{54540,42} = 233,53\text{m}^2 = \underline{2,3353 \text{ áreas.}}$$
$$5,9740 \text{ áreas.}$$

y despreciando las dos últimas decimales, la superficie de la cuarta parte será 5,97 áreas.

Sumando las cuatro partes, se tendrá la superficie total de la figura ABCD, que será

$$4,^{a}46 + 5,^{a}13 + 5,^{a}49 + 5,^{a}97 = 21,^{a}05\,;$$

y como cada solar ó lote debe ser el cuarto de esta superficie, equivaldrá á 5,^{a}26.

La primera parte siendo 4,^{a}46 le faltan 0,^{a}80 para ser 5,^{a}26.

La segunda parte siendo 5,^{a}13 le faltan 0,^{a}13 para ser 5,^{a}26.

La tercera parte siendo 5,^{a}49 le sobran 0,^{a}23 para ser 5,^{a}26.

La cuarta parte siendo 5,^{a}97 le sobran 0,^{a}71 para ser 5,^{a}26.

Para igualar cada una de estas partes al valor 5,^{a}26 que ha de tener cada lote, se procederá de este modo.

Para la 1.ª parte que tiene de menos 0,^{a}80, se tomará esta cantidad de la 2.ª parte, por medio de una paralela *mn* á la línea HE. Mas para hallar la anchura E*n* de la zona que hay que añadir, es preciso no contentarse con dividir esta superficie por la línea HE, en atencion á que la línea *mn* que se quiere determinar tendrá una longitud tanto mayor cuanto más se aleje de la línea HE.

Para hallar la cantidad constante en que va aumentando la HE á medida que se separa de su posicion primitiva, ó que se aproxima á YF para convertirse en la *mn*, se formará la proporcion siguiente:

Entre YF y HE hay una diferencia de 2,m 10 para una superficie de 5,ª13, ¿cual será la diferencia entre HE y *mn* para una superficie de 0,ª80? es decir,

$$5,^{a}13 : 2,^{m}10 :: 0,^{a}80 : x = 0,^{m}32.$$

Para tener la longitud de *mn*, se añadirá 0,m 32 á la longitud de HE, lo que dá 26,m 12. Se sumarán las dos líneas HE y *mn* y se obtendrá 51,m 92, cuya mitad es 25,m 96, y dividiendo la superficie 0,ª80, que es un trapecio, por 25,m96, que es una de las dimensiones, el cociente 3 m 08 expresará la anchura de la zona que hay que tomar de la segunda parte HYFE para añadirla á la primera ADHE y tener así el primer cuarto ó lote AD*mn* de 5,ª26. Así, en lugar de la medida 19,m 12 tomada sobre la PQ, se tomará 19,m 12 + 3,m 08 = 22,m 20 y por el nuevo punto de division se trazará una perpendicular á la AB ó á su paralela PQ, la cual será la *mn* que es la primera línea de separacion.

Para hallar el 2.º cuarto ó lote, se observará que siendo la 2.ª parte HEFY de 5,ª13 y habiéndola quitado 0,ª80 para formar el primer cuarto ó lote, queda reducida á 4,ª33 y como debe contener 5,ª26 le falta 0,ª93 que es preciso tomar de la 3.ª parte FYKG para componer dicho segundo lote. Para hallar la anchura de la zona que hay que tomar de la 3.ª parte expresada, se seguirá el mismo método, hallando la cantidad en que debe aumentarse YF al aproximarse á KG, para convertirse en la *pq*, que ha de ser la segunda línea de separacion, para lo cual tendremos la siguiente proporcion:

Entre YF y KG hay una diferencia de 1,m 60 para una superficie de 5,ª49, ¿cual será la diferencia entre YF y *pq* para una superficie de 0,ª93?, ó lo que es lo mismo

$$5,^{a}49 : 1,^{m}60 :: 0,^{a}93 : x = 0,^{m}27.$$

Para tener la longitud de *pq* se añadirá 0,m 27 á la de YF, lo que dará 28,m 17. Sumando las dos rectas YF y *pq*, y tomando la mitad de la suma se encuentra 28,m 03 y dividiendo por esta cantidad la superficie 0,ª93, se obtiene la anchura de la zona que hay que tomar de la tercera parte YFGK para añadirla á la figura *mn*FY y tener así el segundo cuarto ó lote *mpqn* de 5,ª26 tambien. Hecha esta division, se halla por cociente 3,m31 y siendo la distancia entre las líneas HE y FY tomada sobre la línea PQ de 19,m 12, es preciso restar de ella 3,m 08 y añadir al resultado 3,m 31, lo que dará la distancia 19,m 35 entre las dos líneas *mn* y *pq*. Trazando por el nuevo punto de division una perpendicular á la AB ó á su paralela PQ, se tendrá la *pq* que es la segunda línea de separacion.

Para hallar el tercer cuarto ó lote, se observará que siendo la tercera parte FYKG de 5,a49 y habiéndola quitado 0,a93 para formar el segundo cuarto ó lote, queda reducida á 4,a56 y como debe contener 5,a26, le falta 0,a 70 que es preciso tomar de la 4.a parte HGBC para componer dicho tercer lote. Operando como lo hemos hecho en los dos lotes anteriores, buscaremos la cantidad que hay que aumentar á la KG para que se convierta en la *rs* por medio de la proporcion

$$5,^{a}97 : 3,^{m}90 :: 0,^{a}70 : x = 0,^{m}45.$$

Añadiendo, pues, 0,m 45 al valor de KG, se tendrá *rs*=29,m 95 y sumando los valores de KG y *rs*, y tomando la mitad se obtiene 29,m 72. Se dividirá 0,a70 por 29,m72, y se obtendrá por cociente 2,m32 que es la anchura de la zona que hay que tomar de la 4.a parte KGBC para componer el tercer lote, y tomando sobre la PQ y á partir de la GK la cantidad 2,m32 y trazando por el nuevo punto de division una perpendicular á la PQ, se tendrá la *rs* que es la tercera línea de separacion. La distancia entre las líneas *pq* y *rs* será por lo tanto igual á

$$19,^{m}12 - 3,^{m}31 + 2,^{m}32 = 18,^{m}13,$$

Obtenidos ya los tres lotes AD*mn*, *mpqn* y *prsq*, el cuadrilátero restante *r*CB*s* representará el cuarto lote, y para comprobacion se restará de la 4.a parte KGBC que es de 5,a97, la cantidad 0,a70 que se tomó para el tercer lote, y resulta en efecto 5,a27, que debe contener tambien el cuarto lote, con la diferencia de una centiárea por exceso, pues siempre es inevitable alguna pequeña diferencia. La distancia entre las líneas *rs* y CB será igual á

$$19,^{m}12 - 2,^{m}32 = 16^{m}80.$$

Por los mismos métodos acabados de emplear, se procederá á la division de cualquier solar, cualquiera que sea su figura.

911. **Division de las dehesas.**—Como este problema no difiere del anterior de division de los solares, sino en ser las dimensiones de aquellas mayores que las de estos, se seguirán los mismos métodos en su resolucion, para dividirlas en *suertes ó lotes, cuarteles ó tranzones*.

Los hacendados que dan sus dehesas ó tierras en arrendamiento, tienen la costumbre de dividir sus terrenos en zonas ó fajas de igual anchura, las que á su vez dividen en porciones ó trozos del mismo ó distinto número de áreas ó de hectáreas, á las que dan el nombre de *lotes*, *suertes*, *tranzones* ó *cuarteles*. Estos lotes, numerados, anotada su cabida, y amojonándolos bien para que se distingan unos de otros, pueden arrendarlos evitándose la repeticion de frecuentes medidas, y sirviéndoles para siempre la division primitiva.

Sea, por ejemplo, la dehesa ABCD (fig. 332; lám. 32) Se trazará en la direccion que sea más conveniente una recta EF que la atraviese, y que medida con exactitud supongamos que tiene 800 metros y tratemos de dividir la posesion en 5 fajas ó zonas. Se divide 800 por 5, y resultan 160 metros. Tomando esta medida 5 veces en la línea EF, quedará dividida la posesion en cinco fajas, y además sobrarán las porciones *opq* y *rst*. Para dividir las fajas en lotes ó suertes de 5 hectáreas cada una, se reducirán las 5 hectáreas á metros cuadrados, que son 50.000, y partiendo este número por 160, se tendrán 312 m5. Tomando en las perpendiculares *cc'*, *ee'*.... y á partir de la EF, distancias como *ox*, *oh*.... iguales á 312 metros y medio, y trazando paralelas á la EF, se tendrán las zonas divididas en lotes de á 5 hectáreas, excepto las porciones próximas á los contornos muy irregulares, las que habrá que medir por separado, tales como las *Aabc*, *cbde*... *opq* y *rst*. Sin embargo, si se quisiesen formar todas las suertes posibles de 5 hectáreas, una vez medida la suerte irregular *Aabc*, si suponemos que vale menos, se le añadirá lo que la falte, tomando la diferencia de la parte *cbde* por medio de la paralela *mn* á la *cb*, y por los métodos que ya se conocen. Numeradas todas las suertes que contienen 5 hectáreas completas, así como las que resulten con menos por ser las últimas porciones á las que nada puede añadirse, quedará concluido el trabajo.

912. En cuanto hemos dicho se ha sobreentendido que todo el terreno objeto de la division era de la misma calidad, pudiéndose aplicar además todos los procedimientos explicados para la division de polígonos en partes iguales, desiguales ó proporcionales á números dados, y reuniendo además la condicion de que todas las suertes participen de algun objeto que sea notable, como una fuente, un pozo, una vereda, un molino, etc., ya esté situado en el interior de la tierra ó en uno de sus linderos, ó bien estando el terreno ó heredad compuesto de trozos de distinta calidad, será preciso que el Agrimensor procure que todos participen del buen terreno y del malo, ó bien que al que se le dé mejor terreno, se le dé menos cantidad que al que le toque malo, de modo que haya compensacion á fin de que todos reciban igual valor, de donde se deduce que en los terrenos de diferentes calidades, para dividir su valor en partes iguales, las porciones habrán de ser desiguales, y tambien podrá suceder que habiendo de dividir un terreno compuesto de partes de distinta calidad, por ser la division en partes desiguales ó proporcionales, vengan á resultar iguales los pedazos de tierra, pues si en efecto, una tierra estuviese compuesta de dos porciones iguales, que la una fuese de calidad doble mejor que la otra, y hubiera que partirla entre dos herederos, con la condicion de que el uno recibiera doble valor que el otro, bastaria dar al

primero la mitad que tenia doble valor y al segundo la otra mitad Todo esto hace ver cuánta instruccion, paciencia y recursos en la ciencia y en la práctica han de acompañar á un buen Agrimensor para llenar con exactitud y conciencia su cometido. Nos ocuparemos, por lo tanto, á pesar de cuantas cuestiones hemos resuelto sobre este particular, de la resolucion de los siguientes problemas numéricos que abrazan varios de los casos que acabamos de enumerar, y para que se comparen los métodos numéricos y gráficos que ahora seguiremos, con los empleados en otros casos de igual naturaleza.

913 **Problemas.**—*Problema 1.°—Se quiere dividir una dehesa en cuatro partes iguales, tales que todas participen del punto* O *(fig. 333; lám. 32), que puede ser un pozo, casa, fuente ú otro objeto cualquiera de utilidad para todos los propietarios.*

Medída toda la heredad, y suponiendo que tiene 126 hectáreas, se dividirá este número por 4, y corresponderá á cada parte 31,5 hectáreas que reducidas á metros cuadrados resultan 315000 m². Trácense desde el punto O dos rectas OC y OD que comprendan el espacio que parezca podrá contener poco más ó menos las 31,5 hectáreas, y mídase la superficie de esta porcion OCD, que supondremos resulta ser de 30 hectáreas, es decir, que tiene 1,5 hectáreas de menos, cuya cantidad habrá que añadir á la porcion OCD Se reducirá 1,5 hectáreas á metros cuadrados, que da 15000m^2, y se medirá la OD que supongamos tiene 500 metros, y ha de servir de base del triángulo que se ha de añadir á la porcion OCD. Se dividirá, pues, 15000 por 500, y resultará 30 metros, que será la mitad de la altura de dicho triángulo, por lo que doblando esta cantidad y levantando en el extremo D una perpendicular DN de 60 metros de longitud, y trazando la paralela NE á la OD, no habrá más que tirar por el punto E donde encuentra á la linde y el punto O la OE, y se tendrá la parte OED próximamente igual á un triángulo de 1,5 hectáreas, cuya altura es la EM=ND, que añadido á la porcion OCD de 30 hectáreas, resulta la primera parte OCDE de 31,5 hectáreas.

Para hallar la segunda parte, trácese otra recta OA que nos dé la porcion AOE, y que á la simple vista venga á contener las 31,5 hectáreas, y si resultase ahora salir mayor, quítesele la parte AOF por el mismo procedimimiento, y la segunda parte será la porcion EOF. Del mismo modo se continuará para obtener la tercera parte OFH, despues de añadir ó quitar la cantidad que se haya errado en el tanteo, y la cuarta parte OCH no habrá necesidad de hallarse, pues es el resíduo de las otras tres, pero convendrá, sin embargo, como comprobacion medir su superficie, que deberá ser tambien 31,5 hectáreas con corta diferencia si la particion está bien hecha.

914. *Problema 2.°—Repartir una dehesa* ABCDEF *(fig. 334; lám. 32) de* 200 *hectáreas entre 5 labradores, á partes iguales, con la condicion de que todos disfruten de la parte* ABCD *que es la mejor y de la* AFED *que es de peor calidad y pantanosa.*

Bien reconocida y clasificada la posesion para repartirla con la igualdad posible, se trazará una recta AD ó una línea quebrada que separe la parte buena de la mala que está sujeta á quiebras y daños, á fin de que todas las suertes participen de una y otra. Hecho esto, se dividirá la recta AD en cinco partes iguales A*b*, *ab*,.. y por los puntos *a*, *b*, *c* y *d* se trazarán en la parte de mejor calidad las cuatro rectas que se ven en la figura en las direcciones que deban tener (913) para que los cinco trozos sean de la misma cabida, y haciendo igual operacion en la parte AFED de peor calidad, se tendrá la tierra dividida en cinco suertes de 40 hectáreas cada una y participando todas del terreno superior y del inferior. Si el terreno quebrado y malo estuviese situado en el interior de la heredad como sucede con el A*mn*D*rs* señalado en la figura, se trazaría la recta AD de manera que le dividiese en dos partes próximamente iguales y se procedería despues de la misma manera.

915. Fácilmente se concibe, que á pesar del esmero con que se procure hacer esta clase de operaciones, no es posible repartir con perfecta igualdad ninguna dehesa ó posesion grande, pues las diferentes calidades de los terrenos y las distintas clases de los mismos, así como los muchos obstáculos que se presentan en la práctica, y las diversas condiciones impuestas por los propietarios, dificultan el empleo de cuantos métodos hemos expuesto, y ponen al Agrimensor en el caso de discurrir y de inventar nuevos recursos á cada paso para aproximarse siquiera á la verdad. Aquí es el caso de manifestar, cuán errado es el creer que la profesion de Geómetra-Agrimensor es de escasa importancia, y que con ligeros y superficiales conocimientos puede desempeñarla cualquiera, y bastará para dar una idea del atraso de nuestro país, el ver que una parte de los Agrimensores sigue esta profesion y obtiene un título sin tener apenas ningun conocimiento, y que la otra parte se halla desempeñada por hombres rústicos, ignorantes é incapaces de aprender, no sabiendo apenas ni aun escribir sus nombres. En manos de estos hombres, faltos de los rudimentos más sencillos y con la anarquía que aun continúa y continuará siempre, en la cuestion de los infinitos y absurdos sistemas de pesas y medidas, puede juzgarse cuál habrá sido siempre la suerte de la propiedad y con cuanta injusticia y desigualdad se habrá procedido en la mayoría de los casos, en las compras y ventas y reparticion en las testamentarías de toda clase de bienes y heredades. No hay que dudarlo; mientras la Topografía y Agrimensura no se las considere con mayor importancia y se procure su desarrollo y se ponga un empeño decidido en que solo se use el sistema métrico, nuestro país será siempre el más atrasado de todos.

Para desempeñar las funciones del Agrimensor, se necesitan profundos conocimientos en la práctica de la geometría, los que se aumentan y multiplican á medida que poseen más conocimientos teóricos.

Además de todo lo dicho en el delicado asunto de la reparticion de los terrenos y de las dificultades que ofrece, los intereses particulares, la envidia, el orgullo, la ambicion y otras muchas causas dan orígen á mil pleitos y disensiones, queriendo todos que la heredad se reparta á medida de su deseo ó con la misma igualdad que si se tratase de un número de reales, queriendo todos además las suertes más regulares, las que se hallen mejor situadas y las que participan de mayores beneficios El camino que debe seguirse en tan variadas y encontradas opiniones es apelar al recurso del *sorteo*

Para sortear las suertes se escribe en unas papeletas los nombres ó números que de antemano se asignan á cada una, y metidas en una bolsa, sombrero, cántaro ó vasija cualquiera, irá sacando una de las cédulas cada uno de los que tienen opcion al sorteo y guardando el turno correspondiente, quedando dueño cada uno de la suerte que indique el lote que haya sacado.

916 Para corroborar cuanto hemos dicho acerca de los particulares expresados, no puedo menos de consignar aquí lo que pone mi adorado catedrático el *Sr. D. Antonio de Varas y Portilla*, en la tercera edicion de su *Tratado de Aritmética y Geometría práctica de la Real Academia de San Fernando*, impresa en 1835, párrafos 503 al 508 inclusives, y lo que dice hablando de su discípulo tambien el distinguido geómetra Ilmo. *señor D. José Mariano Vallejo*, cuando se ocupa del procedimiento análogo al que nosotros hemos expuesto (tomo I; 895) y en el que nosotros hemos dado además los medios de comprobacion Concluye, pués, la exposicion de este procedimiento de la manera siguiente:

(503). «Por lo dicho se vé, que con tirar y medir la línea de travesía »que vaya desde el un extremo al otro de la posesion, y levantarle á las »distancias que parezcan más convenientes dos ó tres perpendiculares »que pasen en el terreno por puntos marcados, ó que ofrezcan alguna »particularidad hasta terminar en otros del perímetro que se anotarán »cuidadosamente, hay lo bastante para que, combinando el conocimien»to de estas cosas con los datos que se tomaron en la medicion del con»torno, se puedan fijar en el papel todos los puntos más notables, que se »llaman *cotos*, *hitos* ó *mojones*, en sus lugares respectivos: unos con una »absoluta exactitud y otros tan próximos á ella que no se separarán mu»cho de la verdad. Dibujando despues con mano diestra todas las curva»turas y sinuosidades que hay desde un punto al otro ó desde un hito al »otro, sin desmentir á la naturaleza, se obtendrá una figura cerrada y »semejante al terreno ó posesion valuada, en que estarán bien determi»nados todos sus límites y extension, que es lo que se llama haber le»vantado el plano del terreno »

«El método acabado de exponer, dice, además de las luces y conven»cimiento que de sí mismo arroja, tiene á su favor la aprobacion de un »sugeto tan benemérito en la carrera de las ciencias, como es D. José »Mariano Vallejo. Siempre laborioso é infatigable en sus investigaciones, »y siempre dispuesto á prestar sus servicios, no solo al Estado, sino á »cualquiera clase de personas, se le han ofrecido varias ocasiones en que

»ha sido invitado para que presenciase y dirigiese las operaciones que se »iban á practicar sobre terrenos que tenian leguas y leguas de exten»sion. Con este motivo ha tenido mucho trato y roce con los Agrimenso»res más prácticos y acreditados de algunas de nuestras provincias, los »cuales se han asombrado de la abundancia de recursos que les presen»taba para salir de los apuros en que á cada paso se encontraban por las »grandes dificultades que ofrecian las tierras en que maniobraban; se »han admirado igualmente de la sencillez de los medios que adoptaba »para cerrar toda clase de figuras, y han tenido mucho que aprender en »la delicadeza y exactitud con que manejaba sus instrumentos, de tal »manera que al separarse de su lado, no han podido menos de rendirle »aquel tributo de gracias y de reconocimiento, que le era debido por las »reglas y máximas con que los habia instruido, para conducirse con »acierto en lo sucesivo.

(504). »Mas el comun de nuestros prácticos se desdeñan de consultar »á los hombres de ciencia y de conocimientos, persuadidos de que ellos »están colocados en una esféra superior por las muchas reglas y secre»tos que poseen, heredados de sus mayores, siendo lo peor del caso »que los tales secretos suelen ser un conjunto de absurdos y necedades »con los cuales agravian á los vendedores ó compradores de tierras. Y »para dar una prueba de esto, basta contraerse á las figuras cuadrilá»teras.

(505). »Hay sujetos dedicados á la medicion de terremos, que tienen »establecido por regla general que para medir una tierra de cuatro cos»tados, no hay más que sumar los lados opuestos, tomar las mitades de »estas sumas, multiplicarlas entre sí, y el producto que resulte dicen que »es la superficie buscada.

»Sea ABCD (fig. 335; lám. 33) una tierra con estas circunstancias, »cuyos lados tengan la longitud que expresan los números que en »ellos están señalados, y aplicándole dicha regla se obtendrá que

»Sup. $ABCD=\frac{34+32}{2}\times\frac{24+26}{2}=33\times25=825$ unidades cuadradas.

»Pero valiéndose de la verdadera regla que enseña la Geometría, se »medirá la diagonal que con arreglo á la misma escala LR (fig. 337; lámi»na 33) en que se han tomado los lados, vale 43 unidades lineales, se le ba»jarán las perpendiculares correspondientes, que medidas valen $DH=18$ »y $BF=19$, y sumando las superficies de los dos triángulos en que está »dividido el cuadrilátero, tendremos

$$\frac{43\times18}{2}+\frac{43\times19}{2}=\frac{43\,(18+19)}{2}=\frac{43\times37}{2}=\frac{1591}{2}=795\frac{1}{2};$$

»que son las unidades superficiales que verdaderamente tiene el dicho »cuadrilátero. Si estas se restan de las anteriormente halladas, tendre»mos $825-795\frac{1}{2}=29\frac{1}{2}$, que es en lo que excede aquel resultado al »verdadero, entendiéndose que son unidades cuadradas. Si fuesen, por

»ejemplo, estadales de 10 piés de lado, resultarian 2950 piés superficiales »en que quedaba agraviado el comprador.

(506). »Si al expresado cuadrilátero se le diese la forma EFGH (figu- »ra 336; lám. 33), quedando sus lados de la misma magnitud, como lo »dan á conocer los números que sobre ellos se colocan, su superficie sal- »dria la misma aplicándole esa regla de los prácticos, pues siendo los »mismos los datos, el resultado no puede variar: se obtendria pues las »mismas 825 unidades superficiales que antes se sacaron. Sin embargo, »el que considere con alguna atencion ambas figuras, conocerá á simple »vista que la primera encierra mayor superficie que la segunda, y así »debe ser porque siempre que en un cuadrilátero cualquiera se hagan »variar los ángulos, conservando la misma magnitud sus lados, su su- »perficie padecerá alteraciones de consideracion, bien sean por exceso ó »bien por defecto. Esto es lo que cabalmente se observa entre dichas dos »figuras, de las cuales la segunda resulta de la primera con solo haberle »dado á esta un estiron, por decirlo así, hácia la derecha, y al mismo »tiempo bastante inclinado á la parte inferior; con eso, todos sus ángulos »han variado y los datos de que ha de provenir su superficie se han de »haber indefectiblemente alterado.

(507). »En efecto, sujetándola á la misma escala á que lo está la pri- »mera, se notará que los valores de la diagonal, base de los dos triángu- »los en que queda dividida la figura total, y de las perpendiculares que »sobre ella caen, alturas de dichos triángulos, son $EG = 57$, $HL = 5\frac{1}{2}$ »y $FN = 8$. La superficie pues del cuadrilátero EFGH equivale á la suma »de las de los triángulos EHG y EFG y es la que resulta del siguiente »cálculo:

$$\frac{57 \times 5\frac{1}{2}}{2} + \frac{57 \times 8}{2} = \frac{57\left(\frac{11}{2} + 8\right)}{2} = \frac{57 \times \frac{27}{2}}{2} = \frac{1539}{4} =$$
$$384\frac{3}{4}.$$

»Estas son las unidades superficiales que en realidad tiene el cuadri- »látero; que restándolas de las 825 que se sacan por la expresada regla, »salen de diferencia $440\frac{1}{2}$, esto es, que son más las unidades superfi- »ciales que el error añade, que las que en sí misma tiene la tierra. Aun »hay más, y es que por ese mismo método resultan iguales dos su- »perficies que en realidad se diferencia en $410\frac{3}{4}$ unidades cuadradas. »Tales son estas dos figuras, á cada una de las cuales se dan 825 unidades »superficiales, siendo así que la una tiene $795\frac{1}{2}$ y la otra $384\frac{3}{4}$. Como

»estos resultados tan poco conformes entre sí en un asunto en que se »interesa la razon y la justicia, podrian acaso hacérseles increibles á al»gunas personas, se han sujetado con el rigor posible á la escala que »acompaña á las expresadas figuras, para que todos puedan convencerse »por sí mismos de la falsedad de una regla que está en contradiccion »con los principios más sencillos de la geometría.

(508). »De todo lo cual debe deducir el Agrimensor bien instruido: »1.º Que las figuras no tienen igual superficie porque tengan iguales pe»rímetros. 2.º Que las figuras á cuyos ángulos se les haga variar, tam»bien variarán en superficie. 3.º Que toda superficie proviene siempre »de dos dimensiones perpendiculares entre sí, ó lo que es lo mismo, de »una base por una altura. 4.º Que para formar una idea justa de los ter»renos, no solo debe atender á la magnitud de los lados, sino á la canti»dad de los ángulos. 5.º y último Que debe proceder con mucha cir»cunspeccion para admitir por cierta una regla por buena que le parez»ca, mientras no esté seguro que ha sido deducida por una rigurosa y »exacta demostracion que la ha colocado entre las verdades evidentes.»

917. Ahora bien, siendo la medida exacta de la superficie de los terrenos, la base para hacer las reparticiones, segun hemos visto, puede comprenderse los errores que cometería en ellas un Agrimensor que para hallar la superficie se valiese de la absurda regla que ha acabado de citarse.

918. Pero el punto más interesante del método citado y expuesto (tomo I; 895) es que por este medio se consigue, sin aumentar demasiado el trabajo, el que cierren ó terminen los perímetros de las posesiones ó terrenos con una exactitud racional, que es uno de los objetos más indispensables, segun indicamos (896). Para comprender las dificultades que en sí encierra esta operacion, basta que expongamos á continuacion, lo que dice en el libro citado el mismo *D. Antonio de Varas y Portilla* en los párrafos 483 á 490 inclusives.

(483) «El terminar las figuras ó cerrar sobre el papel el contorno de »las posesiones que se han medido, es un punto que puede dar mucho »ejercicio al Agrimensor, por las dificultades que en sí mismo encierra, »y por los errores y equivocaciones que se pueden padecer.

(484). »La figura más sencilla que puede tener un terreno es la de un »triángulo; midiendo, pues, sus tres lados y hecha la correccion pruden»cial, caso que se necesite, no puede haber dificultad ninguna en trasla»darlo al papel, siempre que la suma de dos lados cualesquiera sea ma»yor que el tercero, y la superficie que contendrá será más ó ménos exac»ta, segun sea la exactitud con que se hayan determinado los tres lados »medidos. Si el terreno que se trata de trasladar al papel, tuviese la for»ma ABCD (fig. 338; lám. 33) que es un cuadrilátero, podria tal vez ésta »dar mucho más que discurrir al Práctico; pero si fuese tal que se pudie»sen medir sus cuatro lados y una de las diagonales, por ejemplo, la AC, »no se encontraría tampoco dificultad en cerrar el espacio en el papel y

»aun medir la superficie, pues estaba reducido á la construccion de los »triángulos ABC y ACD, y se tendria la figura *abcd*, y la construccion que»dará ejecutada más ó menos puntualmente, segun la exactitud con que »se hayan medido los lados.

(485). »Mas si el terreno ofrece dificultades, por las cuales no pueda »verse desde A el punto C, ó desde B el punto D, porque no lo permitan »las casas, matorrales, inflexiones ó quebradas del país, entonces deben »fijarse los ángulos del modo siguiente. Tómese en la AB una distancia »de 10 á 20 piés, que esto es indiferente, bien que siempre es mejor to»mar más que menos, y sea la A*m*: tómense otros tantos en la AD, que »son los que representan la A*n*, y mídase la distancia *mn*: esta distancia »propiamente puede llamarse la *abrazadera*, porque de tal manera fija »la direccion de la líneas AB y AD, que el ángulo que forman en A no »puede aumentar ni disminuir. Hágase lo mismo con los demás ángulos »B, C, D; y con estos datos se podrá trasladar al papel la figura con la »exactitud que se puede apetecer; para lo cual se procederá de esta ma»nera: tómese en la escala (fig. 337; lám. 33) una línea que tenga tantas »partes iguales como piés, varas ó estadales tiene en el terreno la AB y sea »$a'b'$; desde a' á la derecha, tómese una distancia $a'm'$ de las 10 ó 20 par»tes que se midieron en el terreno para A*m* y haciendo centro en m' con »una distancia tomada en la escala de las mismas partes que se ha medi»do en el terreno la *mn*, trácese un arco *rs*; haciendo despues centro en a' »con un rádio igual á la distancia medida sobre A*n* se trazará otro arco *pq*; »por el punto a' y el de interseccion se tira la $a'n'$; esta línea se prolon»gará lo necesario para que tenga tantas partes de la misma escala, »cuantos piés ó estadales se midieron en el terreno sobre la AD, y »con eso quedará fijo en el papel el punto d' que corresponde al D del »terreno.

(486). »Si en el punto d' se forma un ángulo $a'd'c'$ igual al ADC del »terreno con arreglo á los datos que se deben haber tomado en D, análo»gamente á lo dicho en A, y se tira la $d'c$ de la longitud que se ha me»dido en el terreno la DC, se tendrá el punto c'. Formando en c' un án»gulo igual al medido en C en el terreno conforme se hizo en A, y to»mando $c'b'$ de la magnitud CB, debe verificarse, que estando todo esto »bien ejecutado, el extremo b' de la $c'b'$ caiga exactamente en b' extremo »de la $a'b'$, y que la figura quede cerrada, cosa que raras veces consi»guen los Prácticos.

»Esto puede hacerse tambien con el auxilio del cartabon, para lo »cual deben elegirse aquellos parajes que menos inconvenientes ofrez»can. Hecho esto, colóquese el cartabon en B y tírese una de las visua»les en la direccion BA que siempre debe medirse; diríjase en seguida la »visual perpendicular BF, mídase inmediatamente, y con eso se tiene el »punto F de la línea CD: continúese midiendo la BF hasta G, punto desde »el cual la visual que se tire perpendicular á BFG vaya á pasar por C; C »medida la distancia GC, se tendrá lo necesario para colocar el punto y

»en el papel: fijos ya los puntos B y C, y uniéndose sus dos extremos, re»sulta la línea que representa á la BC.

(487). »Teniendo ya fijos el punto C y el F, no falta más que medir »en este término la FD en la direccion CFD y prolongar la línea que re»presenta la CF, una magnitud igual con la medida que se haya obteni»do para FD y quedará fijo el punto D, y uniendo, por último, el punto »que represente á D con el A se tiene terminada la figura.

»Cuando se estaba midiendo la BF, pudiera haberse tomado el medio »de tirar desde un punto que estuviese enfrente de D tal como E la vi»sual ED, que despues de medida nos ofrecería una nueva prueba de la »exactitud con que se habia procedido para fijar el punto D.

(488). »El cuadrilátero de que se acaba de hablar, y que queda bien »determinado por los métodos que se han puesto en práctica, es uno de »los casos más sencillos que pueden ocurrir; sin embargo, son tan»tos y tan grandes los errores que se pueden cometer, ya por la precipi»tacion con que suelen hacerse este género de operaciones, ya por la falta »de inteligencia de los que las ejecutan, y ya tambien por la limitacion y »pequeñez del hombre, que es indispensable detenerse muy de propósito »en darlos á conocer con toda la extension y claridad necesarias, y pre»sentar, por último, un método general y constante, que en los casos du»dosos y complicados conduzca como por la mano al Agrimensor á cer»rar la figura, y á determinar su superficie con la aproximacion que se »puede desear, cuando no sea con toda la exactitud que acaso conse»guirá en muchas ocasiones.

(489). »Volviendo, pues, al cuadrilátero que está en cuestion, supón»gase que en la medida de AB se haya cometido un vigésimo de error por »exceso, es decir, que en vez de dar á la AB, por ejemplo, 300 piés que »suponemos tiene, se hubiera reputado en 315; entonces, suponiendo »que se principiaba desde b, hubiera caido el punto a en a''; si por otra »parte al tomar el ángulo en A, ya sea con el cartabon, ya de cualquier »otro modo, se hubiese cometido una equivocacion de un grado, enton»ces la direccion del lado ad estaría representada por $a''d''$: y continuando »de esta manera, bajo el supuesto de que en la medida de todos los lados »se hubiese cometido por exceso el error de una vigésima parte, y en »cada ángulo un grado de equivocacion, tambien por exceso, para hacer »más notable el error, se verificará que d'' representará á D; la direccion »de CD será la que ahora dice $d''c''$: el punto C estará expresado por c'', »la direccion CB lo estará por $c''b''$ y el punto b'' denotará el B del terre»no; pero este punto está representado por b, donde principia y termina, »luego es imposible que b'' pueda representar lo mismo que b, á saber, »el punto B del terreno; y por lo mismo es imposible que $c''b''$ pueda cer»rar la figura, pues ni por su magnitud ni por su direccion puede termi»nar en b, por impedirlo el espacio que hay entre b y b'' que da á cono»cer el error cometido. Así que el resultado hallado sobre el papel dista »mucho de formar una figura cerrada, como es la ABCD del terreno.

»En lo que se acaba de decir, se ha supuesto que todos los errores se »han cometido por exceso, á fin de que se percibiese bien en lo que venía »á parar la equivocacion; pero igualmente se haría sensible si todos »hubiesen sido por defecto, ó unos por exceso y otros por defecto. Todo »esto manifiesta la necesidad que hay de buscar medios para sujetar »todos los puntos del terreno, de manera que el punto b'' venga precisa»mente á caer sobre el punto b; lo cual se consigue, segun se ha visto, »midiendo siempre que se pueda, la diagonal, ó por mejor decir, las dos »diagonales, que es lo más exacto; y si se procede por el cartabon fijando »el punto D, y midiendo las líneas AD y BC, quedará cerrada la figura »tirando por sus extremos D y C la línea DC.

»(490.) Si en el cuadrilátero, que es la figura más sencilla despues del »triángulo, se pueden hallar tantas dificultades para haberlo de cerrar, »dicho se está que en las más complicadas serán tantas y de tanta con»sideracion, que bien se puede asegurar que el comun de los Agrimen»sores difícilmente las podrá superar; y mucho más si se considera que »la mayor parte de ellos no se detienen á sujetar los ángulos: se conten»tan únicamente con medir las líneas del contorno, y decir si las unas »se separan un poco ó un mucho de la anterior hácia la izquierda ó »hácia la derecha, expresando algunas veces que mira á tal ó tal punto »marcado en el terreno, como se vé en la mayor parte de las escrituras »de venta Todo esto es tan vago é indeterminado, que no es posible que »el más diestro y mejor instruido sea capaz de trazar una figura y medir »su superficie por los datos que dejan consignados en las mencionadas »escrituras.»

919. Siendo tantas las dificultades que se ofrecen para cerrar un polígono de un gran número de lados, segun resulta de todo lo expuesto, y complicándose más todavía cuando el contorno del terreno es muy ondulado y sinuoso, es necesario adoptar un procedimiento que nos conduzca á cerrar la figura y esté además sujeto á comprobaciones, y el cual es el que hemos explicado en el párrafo 895 (tomo I) ya citado anteriormente (916).

920. *Division de las dehesas con respecto á los pastos.*—En los casos de esta especie, se trata de dividir una dehesa en partes que suministren el pasto necesario al número de cabezas de ganado que tenga cada uno de los ganaderos que han de utilizarse de ella. Para esto se seguirá el método que se emplea á continuacion para la resolucion del siguiente

Problema.—Se quiere repartir una dehesa en la que pueden pastar 4.000 *ovejas, entre tres ganaderos, de manera que el* 1.° *tenga pasto para* 800, *el* 2.° *para* 1.200 *y el* 3.° *para* 2.000, *y se trata de averiguar el terreno que corresponde á cada uno.*

Se mide la superficie de la dehesa, y supongamos que tiene 1.000 hectáreas, que reducidas á metros cuadrados son 10.000.000 m². Habrá, pues, que dividir este número en partes proporcionales á los números de ovejas que tiene cada ganadero y tendremos que partir los 10.000.000

de metros cuadrados por las 4.000 ovejas que puede apacentar la dehesa, y multiplicar el cociente 2.500 por el número de ovejas que tiene cada ganadero y resultará:

Para el 1.°:	2.500 × 800	=	2.000.000 m²	= 200 Ha.
Para el 2.°:	2.500 × 1.200	=	3.000.000 m²	= 300 Ha.
Para el 3.°:	2.500 × 2.000	=	5.000.000 m²	= 500 Ha.
			10.000.000 m²	= 1.000 Ha.

Se procederá despues á dividir la dehesa en tres partes desiguales de 200, 300 y 500 hectáreas, por líneas paralelas ó á partir de un vértice, de un punto de un lado, ó de un punto interior por los métodos explicados, segun haya ó no un objeto notable del que deban participar todos los ganaderos.

921. *Division de los terrenos con respecto á los plantíos de viñas ú olivares.*—La division de las tierras de labor se practica algunas veces por los propietarios, con el objeto de establecer los plantíos de viñas ú olivares. Las viñas se plantan en líneas paralelas, á fin de que los espacios que median entre línea y línea se puedan arar con facilidad. El plantío puede ser *á marco real* ó *á tres bolillo*. Se llama plantío *á marco real*, aquel en que las líneas paralelas están dispuestas de modo que cada cuatro plantas forman un cuadrado (fig. 339; lám. 33), y se llama *á tres bolillo* cuando dichas líneas se hallan trazadas de modo que cada tres plantas forman un triángulo equilátero (fig. 340; lám. 33). El plantío *á marco real* es el usado más comunmente.

922. *Plantío á marco real.*—Para este plantío, se fijará primero la distancia que ha de haber entre cada dos plantas, bien sea de un metro ó de doce decímetros..... y tomando una cuerda de bastante longitud se irán haciendo nudos ó cosiendo unos trapos de color que disten unos de otros lo que hayan de distar las plantas entre sí. Si se hace uso de la cadena ó mejor de la cinta métrica, se tienen desde luego en ella las divisiones que nos hacen falta. Se recorre despues el terreno en que se va á hacer el plantío y se elige la línea del contorno ó *lindero* que más convenga, que suponemos sea la AD (fig. 339; lám. 33) del rectángulo ABCD y tendiendo la cuerda ó cinta como si fuera á medirse, se irán poniendo estacas, cañas, cantos ó montoncillos de tierra en los puntos A, *a*, *b*, *c*,..... que correspondan á los nudos ó trapos de la cuerda ó á las divisiones correspondientes de la cinta. En el punto A se levantará una perpendicular AB á la AD sobre la cual se hará la misma operacion para determinar los puntos *m*, *n*, *r*....; levantando ahora perpendiculares á la AD por los puntos *a*, *b*, *c*,..... y á la AB por los *m*, *n*,..... y hallando los punto *s*, *t*,..... de interseccion de estas perpendiculares, ó lo que es mejor, trazando solamente las perpendiculares á la AD y determinando en ellas los puntos *s*, *t*, con la cuerda ó cinta como se ha dicho para las AB y AD, se tendrá trazado el plantío á marco real.

Si el terreno fuese irregular como sucede en la figura 341 (lám 33), se trazará una línea AC en sentido de su mayor longitud y sobre ella se determinarán con la cuerda, cadena ó cinta los puntos *a*, *b*, *c*,... por los cuales se trazarán perpendiculares á la AC, fijando sobre ellas del mismo modo los puntos *n*, *b*, *r*.....

923. *Plantío á tres bolillo.*—Para marcar este plantío, se tenderá la cuerda ó cinta en sentido de una linde AB (fig. 340; lám. 33), y se señalarán los puntos de los nudos ó divisiones como en el caso anterior. Se toma despues una parte de la cuerda que contenga tres nudos y fijando los dos nudos extremos en dos de los puntos de division como en A y *a*, se estirará la cuerda cogiéndola por el nudo del medio, y se marcará en el terreno el punto *m* donde aquel venga á parar. Se determinarán del mismo modo los puntos *n*, *r*, *s*,.... y prolongando sobre el terreno las líneas A*m*, *an*, *br*,.... todo cuanto permita la heredad, sobre las cuales se tiende la cuerda para marcar en el terreno los puntos *t*, *o*, *x*, *z*,.... á que corresponden los nudos, se tendrá trazado el plantío *á tres bolillo*. Lo mismo se haría en un terreno irregular á partir de una línea AC, DB ó EF (fig. 341; lám. 33) establecida de antemano en la direccion más conveniente. En este plantío se suelen dejar entre planta y planta de 3 á 4 metros.

924. Una vez trazado cualquiera de los dos plantíos que acabamos de exponer, se procede á abrir los hoyos en los puntos señalados con las estacas, cañas ó cantos, y para que no desordenen el plantío, se tendrá cuidado al abrirlos, de hacer la escavacion de manera que el piquete clavado quede en uno de los ángulos del hoyo y se tiende en este el sarmiento de modo que el extremo superior quede en el punto en que se hallaba la estaca ó señal. El tamaño de estos hoyos suele ser de unos 5 á 6 decímetros en cuadro y otro tanto de profundidad, si bien puede ser esta mucho mayor, lo cual depende del mayor gasto que se quiera hacer y de más circunstancias.

Pasemos á resolver los siguientes problemas:

925. *Problema 1.º—Hallar el número de plantas que hay en un terreno rectangular, siendo el plantío á marco real.*

Sea el terreno ABCD (fig. 339; lám. 33); como en la línea AB cabe cuatro veces la unidad de distancia A*m* que hay entre cada dos plantas y hay una planta más, es decir, cinco plantas; y por estar dicha unidad de distancia contenida seis veces en la AD, hay siete perpendiculares á esta línea, que cada una tiene cinco plantas, tendremos $7 \times 5 = 35$ plantas. Los cuadrados trazados en el terreno son $4 \times 6 = 24$ y la diferencia 11 es precisamente el número de plantas que contienen las dos líneas AB y AD disminuido en una unidad, por ser la planta A comun á ambas líneas; luego el número de plantas es igual al número de cuadrados aumentado en las contenidas en la base y la altura del rectángulo y disminuido en una unidad.

926. *Problema 2.º—Hallar el número de plantas que hay en un terreno rectagular, siendo el plantío á tres bolillo.*

Sea el terreno ABCD (fig. 340; lám. 33); como en la 1.ª línea AB hay cuatro veces la unidad de distancia A*a* y por lo tanto cinco puntos de division ó cinco plantas, y lo mismo sucede en las líneas 3.ª, 5.ª... ; y en las líneas 2.ª, 4.ª, 6.ª... hay cuatro plantas ó sea una menos, multiplicaremos por 5 el número 6 de líneas que ocupan lugar impar, y por 4 el número 5 de líneas que ocupan lugar par, y sumando estos valores, se tendrá el número total de plantas. En efecto, se tiene $5 \times 6 + 4 \times 5 = 50$, que son las plantas que hay en la figura.

927. *Problema 3.º—Hallar el número de plantas que hay en un terreno irregular.*

Sea el terreno ABCD (fig. 341; lám. 33); si el plantío es á marco real se contarán las plantas que contiene cada una de las perpendiculares tiradas á una de las rectas que suele ser la mayor, tal como la AC y la suma de todos los números que resulten será el número total de plantas. Si el plantío es á tres bolillo se procederá de un modo análogo.

928. *Problema 4.º—Dado un terreno, hallar el número de plantas que podrá contener.*

Se levantará el plano con exactitud, tanto para tener su verdadera figura, como su cabida. Se hará en el plano la construccion correspondiente, segun sea el plantío *á marco real* ó *tres bolillo* y con arreglo á la escala del plano. Se determina el número de plantas por los problemas anteriores, y se sabrá las plantas que pueden ponerse en las hectáreas que contenga el terreno en cuestion, una vez sabida la clase del plantío y la unidad de distancia ó de separacion entre cada dos plantas. Se traslada por último al terreno la construccion hecha en el plano y se marcan los puntos correspondientes á dichas plantas.

929. *Problema 5.º—Averiguar el coste de cada planta en un terreno dado, de un plantío de viñas ú olivares.*

Despues de determinar el número de plantas que puede contener por el problema anterior y los gastos que produce el plantío, como son los jornales y demás que puedan ocurrir, se dividirá el importe de dichos gastos por el número de plantas ó cepas y se tendrá el coste de cada una.

No hacemos aquí mencion de las tablas que ponen algunos autores para hallar el número de plantas que contiene un terreno dado, siendo dada tambien la distancia entre las plantas, porque tanto dichas tablas como los problemas que se resuelven por su medio, carecen de exactitud.

930. **Division de los montes**.—Bajo la denominacion de *Montes*, para el objeto que nos proponemos, y para los efectos de las Ordenanzas generales de los mismos, se comprenden todos los terrenos cubiertos de árboles á propósito para la construccion naval ó civil, carboneo, combustible y demás necesidades comunes, ya sean montes altos, bajos, bosques, sotos, plantíos ó matorrales de toda especie distinta de los olivares, frutales ó semejantes plantaciones de especial fruto ó cultivo agrario.

931. La division de los montes se practica, ya con el fin de repartirlos entre varios herederos, ya con el fin de dividirlos en cuarteles para su explotacion cuando tienen arbolados, ó sea para las cortas periódicas, bien deban hacerse por *cuarteles*, ó por *entresaca* ó *clareo*. Todo cuanto digamos respecto á estos fines, se hallará conforme con las Ordenanzas de Montes, con el objeto de que los particulares se aprovechen para sus usos particulares, de sus luminosas disposiciones.

En todo caso, la primera operacion que debe practicarse es el levantamiento del plano del monte y la medida de su superficie. El procedimiento para levantar el plano debe ser, en la suposicion más frecuente de estar muy poblado de árboles, el de la circunscripcion de un polígono. Sea (fig. 342; lám. 33) el monte terminado por una línea ondulada que representa la figura, y tratemos de levantar su plano Se hará un reconocimiento minucioso de todo su contorno, y se establecerá un polígono cualquiera circunscrito ABCDEFG, que pudiera ser tambien un rectángulo ó cuadrado, plantando jalones en los vértices de todos los ángulos, y numerándolos por órden y valiéndose del teodolito, del grafómetro, ó de la brújula y sujetándole al mayor número de comprobaciones de que sea susceptible, para convencernos de su exactitud. Eligiendo despues por bases los lados GF, FE... del polígono circunscrito, se levantarán sobre ellos y valiéndose de la escuadra, el mayor número posible de perpendiculares G*a*, *bc*, *de*... *mn*, *us*... á fin de poder obtener con toda escrupulosidad el contorno *ace*..., *ns*... del monte. Se hará despues la trasportacion al papel con arreglo á escala, y se conocerá la figura del monte.

Para hallar la superficie del mismo, sabemos tambien que se ha de hallar la del polígono circunscrito y restar de ella la suma de las áreas de los trapecios G*abc*, *bced*..., F*nsu*... y de los triángulos que como el F*mn*, se originan por medio de las perpendiculares y de las líneas que como la F*n* se crea conveniente establecer para obtener con facilidad los resultados.

Una vez obtenida la figura del monte y sabida su cabida, se procederá sobre el plano á practicar las divisiones en las partes iguales, desiguales ó proporcionales que sea necesario, segun las condiciones impuestas por los propietarios, y despues se hace el *replanteo*, es decir, se refieren al terreno los puntos y líneas de division, estableciendo estas por medio de la brújula ó cualquier otro instrumento si es posible. En efecto, si por la division practicada en el papel, hubiese de ser una de las líneas de division la *zz'* que separase del monte la parte *zhz'* de superficie conocida, para lo cual hemos explicado ya todos los medios de conseguirlo, se prolongaría en el plano la *zz'* hasta su encuentro en *x* y *x'* con los lados AB y DE del polígono circunscrito; se mediría el ángulo B*xz*, valiéndose de un buen trasportador, así como las rectas B*x* y *xz* con la escala elegida, y tomando en el terreno la distancia B*x* y trazando el ángulo B*xz* con el instrumento elegido, se tendrá la direccion de la *xz*. Se colocará un jalon ó piquete en la interseccion *z* de esta línea con el contorno del monte y se medirá para comprobacion en el terreno la xz, para ver si resulta igual á la medida que se obtuvo en el plano por la escala.

Para la prolongacion de la xz por el interior del monte á través del arbolado y establecimiento de la línea divisoria zz', se necesitan tres peones, que alineándose á continuacion de tres jalones plantados ya en la direccion de la línea, vayan desembarazando el terreno con el hacha ó podadera, quitando cuantos obstáculos puedan impedir el tendido y circulacion de la cadena ó cinta. El paso que vayan abriendo debe tener por lo menos de 0,m70 á 1 metro de ancho, continuando el trazado de la línea y su medicion hasta el punto x' de encuentro con el lado DE del polígono, fijando con un piquete el punto z' de interseccion de la línea con el contorno del monte, y viendo si la medida correspondiente á la parte $z'x'$ resulta igual á la que se obtiene en el plano por la escala, así como la medida de la zz' y de la total xx'. Cuando el arbolado no es muy espeso, y se pueden descubrir con facilidad unos jalones desde otros, así como atravesar el monte y medir la línea, entonces no hay necesidad de abrirse paso con el hacha. En uno y otro caso los dos últimos jalones de los tres colocados al principio, deben irse colocando uno á continuacion de otro en sentido de la línea, valiéndonos de más jalones si las dificultades del terreno nos impiden mover alguno de los jalones plantados, que de hacerlo resultaría perdida la direccion de la línea.

932. Cuando se presenta un árbol muy grueso que impide la prosecucion del trazado, entonces se salva este obstáculo por medio de una ó de dos paralelas á la alineacion interceptada. Sea AB la alineacion propuesta (fig. 343; lám. 33) y P el árbol que la intercepta; en los puntos c y m se levantan dos perpendiculares que se prolongan á derecha é izquierda una distancia suficiente para salvar el obstáculo, por ejemplo, un metro. Se unen los extremos b, d y a, e de estas perpendiculares y se prolongan lo suficiente las líneas bd y ae para salvar el árbol P, y trazando por dos puntos t y s dos perpendiculares á la bs, que se prolongan hasta su encuentro con ax, no habrá más que tomar en ellas distancias de un metro y se tendrán los puntos n y o que pertenecerán á la alineacion AB y que sirven para su prolongacion.

Es preciso llevar mucho cuidado en la medicion de una línea que atraviesa un monte, procurando que la cadena esté siempre bien tendida y que el peon que va detrás dirigiendo la operacion, no pierda de vista las agujas que va plantando el que va delante, para que no se extravien entre las malezas retamas y yerbas muy altas.

933. **Cortas de árboles.**—La operacion de las cortas en un monte se reduce á dividir este en cuarteles que tengan una superficie dada, trazando bien sus límites para distinguirlos unos de otros, cuyas superficies se determinan generalmente con respecto á la extension del monte y al número de años que se fija para su explotacion. Si se trata, por ejemplo, de explotar un monte en 20 años, para conseguirlo por completo en este

tiempo, es preciso tomar cada año $\frac{1}{20}$ de la superficie total, y determinar esta cantidad sobre el terreno con toda exactitud, pues de otro modo, las diferencias anuales acumulándose sucesivamente, sucederá que el último año, la superficie que haya quedado para la corta será mucho mayor ó menor que lo que le corresponde. En este caso, si las diferencias son de consideracion, ó producirá mayores gastos la explotacion, ó no quedará acaso terreno que explotar. Por consiguiente, es preciso, no solo determinar bien la superficie total del monte, sino la de cada una de las partes que han de explotarse anualmente, estableciéndolas con precision sobre el terreno.

934. A pesar de todas estas advertencias y de las previsiones que se ocurran al geómetra, los resultados no son tan exactos como exige esta clase de operaciones, pues la medicion de las líneas en un monte es mucho más difícil y menos exacta que en un terreno llano, y por otra parte el trazado de las líneas que fijan los límites de las cortas, no pudiendo hacerse en ocasiones con toda la exactitud conveniente, á menos que no se corte una cantidad considerable de árboles que pueda impedir el trazado, sucede con frecuencia que hay que modificar la cabida ó extension que se habia propuesto dar á cada corta.

935. Para ver la manera de proceder en este caso, para que los errores no se acumulen y pueda explotarse el monte en el número de años dado, se determinará la extension del terreno para cada corta anual de la manera siguiente. Supongamos que un monte contiene 320 hectáreas y que se trata de explotar en 20 años. Las cortas anuales deberían practicarse sobre partes del monte que tuviese cada una $\frac{320}{20} = 16$ hectáreas. Si la corta del primer año no ha podido hacerse sino de 15,50 hectáreas, para determinar la superficie que debe explotarse el segundo año, se tendrá

$$\frac{320 - 15{,}50}{19} = 16{,}03 \text{ hectáreas.}$$

Ahora bien, si al establecer esta extension sobre el terreno no puede conseguirse que sea de 16,03 sino de 16,20 hectáreas, se tendrá para el tercer año

$$\frac{320 - (15{,}50 + 16{,}20)}{18} = 16{,}02 \text{ hectáreas.}$$

Del mismo modo, si la corta resultase haberse hecho de 15,60 hectáreas solamente, se tendría para la corta del 4.° año

$$\frac{320 - (15{,}50 + 16{,}20 + 15{,}60)}{17} = 16{,}04 \text{ hectáreas,}$$

y así sucesivamente para las cortas de los demás años.

936. Sea ahora (fig. 342; lám 33) el monte en que se quiere hacer una corta en un cierto número de años. Determínese la superficie que se ha de explotar el primer año por el procedimiento anterior, y trácese en general en el plano obtenido en el papel á partir de un vértice A ó de otro punto conveniente, una diagonal AE ó línea cualquiera que deje interceptada en la parte AEFG del polígono circunscrito, una parte *p*R*na* del monte, que tenga próximamente la superficie en cuestion y que suponemos resulta menor. Mídase ahora en el plano con exactitud esta parte del monte y hállese su diferencia á la que deba ser, y partiendo esta diferencia por la longitud de la línea AE, tomada en la escala y considerada como base de un triángulo, se tendrá la mitad de la altura que se doblará, y levantando una perpendicular EH de esta longitud en el punto E de la AE y trazando una paralela HY á la AE, se tendrá el punto Y, que unido con el A nos dará el triángulo AEY de base AE y altura YL = HE, que será la parte que habrá que añadir á la *p*R*na*. Se hallarán las superficies de las porciones excedentes A*tp* y ROYE, y restando su suma del triángulo AEY, se tendrá la cantidad que aun habrá que añadir á la parte del monte *t*O*na* para tener la que se desea. Para esto, se dividirá esta cantidad por la longitud de la O*t* tomada en la escala y considerada como base de otro triángulo, y se tendrá la mitad de la altura que doblándola y levantando una perpendicular de esta longitud á la *t*O en el punto O del contorno del monte y haciendo la misma construccion que anteriormente, se tendrá el triángulo *t*MO que habrá que añadir á la parte *t*O*na*, para tener la *t*MR*na* que será igual ó próximamente igual á la que se trataba de separar para la primera corta. Rectifíquese de nuevo su cabida midiendo esta parte sobre el plano, por los medios geométricos conocidos ó por medio de la *ruleta* (tomo I; 1180) y si se encontrase aun alguna diferencia, no se insistirá más y se hará uso del cálculo explicado anteriormente (935) para la determinacion de la superficie que se ha de tomar para hacer la corta el segundo año, y de este modo se continuará para todos los demás.

Prolongando ahora en el plano la línea *t*M hasta su interseccion I con el lado DE, y tomando en el terreno con la cadena la distancia TE que dé la escala en el plano, y poniendo un instrumento angular en el punto I con el ángulo ETM que marque en el plano el trasportador, se establecerá en el interior del monte la línea IM*t* segun hemos ya manifestado.

Tambien se puede tomar la parte que falte á la *p*R*na* para la primera corta, por medio de una paralela ó varias á la *p*R, valiéndose de las fórmulas [18 y 21] (898).

Como los ángulos B*xz* y ETM necesarios para el trazado de las rectas *xx'* y I*t* se han medido sobre el papel con el trasportador, para trasladarlos despues al terreno, es lo más probable que al verificar estas operaciones, no vayan las líneas trazadas á terminar en los puntos opuestos *x'* y *t*, y habrá que rectificar su posicion por el procedimiento expuesto (tomo I; 752).

937. La brújula es un instrumento preciso para esta clase de trabajos y solo pueden decir lo contrario los que no la entienden ó no la han manejado lo bastante para descubrir todas las ventajas y todos los recursos que presenta en toda clase de operaciones, en una palabra, los que no saben su verdadero valor y no pueden apreciar esta joya de la Topografía, y yo he tenido ocasion de ver el asombro de algunos que eran inteligentes y que sin embargo la desdeñaban, al total de cerca sus maravillosos resultados. Sería imposible que yo enumerase aquí, las muchas ventajas de la brújula, y me bastará decir que además de poder hacer con ella la mayor parte de las operaciones que con los demás instrumentos angulares, la brújula en medio de un extenso y espeso bosque poblado de corpulentos y elevados árboles, donde apenas se descubre parte del cielo, que el navegante divisa todo hasta el horizonte, sirve como á aquel de segura guía para dirigirse con un rumbo conocido. Tal vemos en la figura 342 (lám. 33), al partir de un punto a' y tener que ir trazando una línea quebrada $a'b'c'$C buscando la salida más fácil, dirigiéndonos siempre con la direccion de la punta azul de la aguja á la parte Norte BCD que nos proponemos, ó con la punta blanca á la parte Sur ó bien al Este ú Oeste, valiéndonos de perpendiculares como $m'n'$ que se imaginan tiradas á la aguja en su punto céntrico en cada uno de los puntos de estacion.

938. Para trazar las líneas de separacion de las respectivas cortas, podemos seguir tambien el siguiente método. Sea AB (fig. 344; lám. 33) la línea de separacion; como la direccion de esta línea no puede conocerse rigorosamente, el ángulo medido sobre el plano conduce á establecer una línea tal como A'B en lugar de la AB que debería obtenerse. En este caso, desde el punto A que es el de partida para la operacion, bájese la Ab perpendicular sobre la A'B y tómese $ab = \frac{1}{2}$Ab, á fin de llevar la magnitud ab de distancia en distancia y perpendicularmente sobre la A'B y se obtendrán nuevos puntos c, m, n, que nos servirán para trazar definitivamente la línea de separacion pq, para lo cual se irán plantando jalones y abriéndose paso de p á a, de a á c, de c á m.... y así sucesivamente.

Este método, si no completamente exacto, se emplea en muchos casos y no producirá diferencias muy sensibles en la superficie que se quiere obtener, sino en el caso en que AA' fuese muy considerable y que uno de los lados A'C del polígono tuviese una direccion muy distinta de la de su opuesto BR. Es indispensable que el trazado provisional A'B se haga de la manera más ligera posible, no cortando sino los árboles más precisos para poder descubrir los jalones ó sus cabezas.

939. Cuando la diferencia AA' entre las dos posiciones de las AB y A'B no excede de 2 metros, puede servir el primer trazado A'B, cuidando de añadir al lado del polígono en el plano ó restar de él, la distancia entre los puntos A y A' segun que este último se halle encima ó debajo del punto A

Cuando la posicion de la línea de separacion AB se halla definitivamente fijada, se mide esta línea en el terreno y se aplica su longitud sobre el plano con arreglo á la escala, lo que servirá para conocer si se ha operado bien, pues en el caso contrario es preciso investigar las causas que producen el error y solo cuando se está cierto de la exactitud de la operacion, es cuando se procede á abrir definitivamente la línea cortando todos los árboles necesarios.

940. Sucede á veces ser más cómodo establecer la línea de separacion AC (fig. 345; lám. 33), por medio de una línea auxiliar *Cr* que se determina sobre el terreno, cuando la localidad presenta un espacio libre en que pueda operarse. Para esto, se traza en el plano la *Cs* perpendicular al lado BC del polígono y se prolonga la línea AC; se toma en la escala una longitud *Cn* que represente los metros que pueda calcularse caben en el terreno despejado, 60 mètros por ejemplo, y trazando la perpendicular *nr* á la *Cn* se hallará su valor en la escala que supondremos tiene 20 metros. Trácese ahora en el terreno la perpendicular *Cs* á la CB, tómense los 60 metros de C á *n*, levántese en el punto *n* una perpendicular á la *Cn*, y tomando en ella la *nr* de 20 metros, se plantará un jalon en el punto *r*, que con el colocado en el punto C se podrá trazar la *Cr* y su prolongacion en el interior del monte, que será la línea de separacion AC, sin hacer uso de los instrumentos angulares, si bien estos son muy convenientes para el trazado y prolongacion de las líneas.

941. Se concibe que ningun método particular puede indicarse para proceder á la determinacion de la figura del terreno que ha de comprender cada corta, aunque lo más frecuente es darlas la figura rectangular, estableciendo cada corta adyacente á la anterior recientemente explotada, siendo el plano de esta la que suministra la base de la nueva. En efecto, si una corta tiene una base de 500 metros y se quiere determinar una segunda corta de 5 hectáreas, se dividirán estas por 500 metros y el cociente 100 metros será la anchura de dicha corta, que se trazará á ángulos rectos.

942. La division de las cortas, llamando tambien así á los terrenos que comprende cada una, en lotes ó parcelas, no es más que un problema de division de una propiedad en partes iguales, desiguales ó proporcionales. Si queremos dividir la corta ABCD (fig. 346; lám. 33) en cuatro lotes iguales, se establecerá la línea de division *ab* paralelamente á AD ó á BC, de modo que las dos partes *ab*BC y *ab*AD tengan la misma superficie. Se dividirá despues cada una de estas dos figuras en dos partes iguales por las rectas *cd* y *rs* perpendiculares á la *ab*, y el trabajo no presenta dificultad, sobre todo cuando se trata de un rectángulo ó de un trapecio.

943. Cuando el terreno es extenso y grande el número de las parcelas, se trazará una línea de base AC (fig. 341; lám. 33) que atraviese el monte por su centro y en sentido de toda su longitud, y el procedimiento no difiere del expuesto (922). Todas las parcelas que no formen un cuadrado, un rectángulo ó un paralelógramo, se medirán por separado

como tambien se dijo, para obtener su cabida. Todas las parcelas se numeran tambien por órden, para facilitar su conocimiento en cualquiera de los usos á que se las destine, de renta, arriendo, corta ú otro objeto cualquiera.

944. La comprobacion de las cortas se verifica haciendo de nuevo la medicion del terreno que comprenden, para asegurarse que la superficie es la que se habia consignado á cada una y poder saber en caso contrario la diferencia de cabida y buscar los medios de subsanarla. Cuando se hace una comprobacion, se elige una base distinta de la que se haya adoptado en la operacion primitiva.

945. Concluiremos consignando algunas prescripciones conformes con las Ordenanzas de Montes, para su conservacion y beneficio y que pueden servir de guia á los propietarios.

El agrimensor debe señalar los montes ó partes de montes que deban destinarse para tal ó cual especie de arbolado; la distribucion en cuarteles para las cortas periódicas; las épocas de estas cortas, y si deben hacerse por *cuarteles*, que es más cómodo y ventajoso, ó por *entresaca* ó *clareo*, escogiendo los piés mejores. La corta por entresaca se practica tambien para hermosear y sanear los montes, derribando los árboles torcidos, los enfermos, los viejos y los no emplazados ó que no llevan fruto ó es coscoja, ejecutando la corta por el pié. Tambien deben cortarse los árboles cuando han llegado á cuanto pueden ser, pues dejándolos, cada dia pierden de su valor, se envejecen, se secan y se pudren y al fin perecen.

No debe permitirse la corta de tallares ó árboles que no tengan á lo menos veinticinco años de edad, á no ser en los montes en que domine el castaño, el fresno y álamo blanco ó chopos; ó que estén sitos en tierra de ínfima calidad.

En toda corta de arbolados, se reservarán diez y seis *rezalvos* ó árboles escogidos de los que ya tengan la edad señalada, en cada fanega de tierra del marco de Castilla ó sea de 576 estadales cuadrados, equivalentes á 64,40 áreas. Los árboles así escogidos no se cortarán sino cuando se les vea en decadencia, ó que no pueden ya tener mayores medros.

En cuanto á los montes de árboles resinosos, cuyas cortas deben hacerse por entresaca ó clareo, debe señalarse la edad y grueso que deben tener los árboles para poderlos cortar, así como los medios de sacar provecho de sus resinas por sangrías ó destilacion. Del mismo modo debe expresarse la forma de aprovechar los productos del corcho, y las cascas ó cortezas para curtidos.

Los medidores no deben dar más de una vara de ancho ó sea $0^m,836$ á las sendas ó carriles que sea absolutamente necesario abrir para la medicion de los terrenos.

En los parajes destinados á corta servirán de *cotos*, *hitos* ó *mojones*, los árboles más notables que se hallaren en los ángulos y en las líneas laterales, y donde no hubiere árboles á propósito, se fijarán estacas, describiendo el sitio de su colocacion por los principales árboles que haya en su inmediacion. El medidor cuidará de hacer servir de coto, alguno de los árboles que ya sirvió al mismo efecto en la corta anterior.

A todos los árboles que sirvan de mojones angulares, les pondrá el medidor la marca de su oficio al pié del tronco, y lo más cerca de la tierra que sea posible, estampándola á derecha é izquierda de la línea de medicion. A los otros que sirven como de pared lineal los marcará por el lado que mira al terreno en que va á hacerse la corta.

Los Agrimensores deben levantar los planos y describir lo que hayan medido con destino á cortarse, indicando todas las circunstancias necesarias para que se puedan reconocer los lindes de las cortas al tiempo de hacerse la comprobacion de ellas.

En las cortas que deban hacerse, no por trozos de montes, sino por piés de árboles, se debe poner la marca en los que hayan de cortarse, así en su raigal como en el cuerpo de cada uno.

946. **Division de las rentas.**—Muchas veces las heredades no son de fácil particion, y se conviene en que queden pro-indiviso, repartiéndose las rentas ó productos de la finca en partes iguales, desiguales ó proporcionales entre todos los partícipes, segun lo que deba corresponder á cada uno.

En el repartimiento de las rentas totales entre las suertes en que está dividida una dehesa ó heredad, se suelen cometer dos abusos. El primero, que es muy frecuente, consiste en repartir igualmente á cada suerte, sin tener en cuenta que aunque las suertes tengan la misma extension, pueden no ser iguales en calidad, quedando así favorecidos unos y perjudicados los otros, lo que da despues lugar á cuestiones y pleitos. El otro abuso que no suele ser tan comun, pero que es tambien muy perjudicial, tiene lugar en aquellos pueblos en que se acostumbra pagar las rentas en grano, para lo cual antes de hacer la siega se reparte á cada suerte la renta que debe pagar á juicio de los peritos labradores ó tasadores, y en vista del grano que calculan puede haber en ellas, segun el estado de la sementera. Se hace la suma de todas las rentas parciales y si sobra ó falta para componer la renta total, se disminuye ó aumenta la renta de la suerte que mejor les conviene ó en que tienen algun interés de amistad, parentesco ó espíritu de venganza. Aparte y aun suponiendo que no existan estas causas, suelen los tasadores atenerse al cuerpo que tiene la sementera, sin tener presente los beneficios que por el mayor abono, mejor labor y otras ventajas, puedan tener unas suertes más que otras, resultando de aquí que el labrador aplicado é industrioso que consigue buena cosecha á costa de su trabajo y mayores gastos, se encuentra luego recargado teniendo que pagar mayor renta, lo cual, además de ser injusto, es una falta de proteccion y de estímulo á la industria y laboriosidad.

947. En los problemas siguientes exponemos los métodos que se deben seguir para hacer el repartimiento de las rentas con equidad y justicia. (Arit. 217.)

Problemas.—*Problema 1.° El producto ó renta de una dehesa es 10.000 reales y está repartida en cuatro suertes de igual cabida pero de distinta calidad; se quiere saber cuánto tiene que pagar cada suerte segun su calidad.*

Una vez averiguada la calidad de cada suerte de la manera que más adelante diremos, y representando por un número tal como el 10 la calidad de la suerte superior, si las demás suertes fuesen en calidad con respecto á la primera, una los $\frac{3}{5}$, otra $\frac{1}{2}$, y la más inferior $\frac{2}{5}$, podríamos representar estas calidades por los números 10, 6, 5 y 4, y dividir la renta total 10 000 rs. en partes proporcionales á estos números. Tendremos, pues, hallando la suma de dichos números que es 25, las siguientes proporciones:

$$
\begin{aligned}
25 : 10.000 :: 10 : x &= 4.000 \text{ rs.}\\
25 : 10.000 :: 6 : x' &= 2.400 \text{ rs.}\\
25 : 10.000 :: 5 : x'' &= 2.000 \text{ rs.}\\
25 : 10.000 :: 4 : x''' &= 1.600 \text{ rs.}\\
\hline
&\ 10.000 \text{ rs.}
\end{aligned}
$$

De modo que la suerte de calidad superior pagará 4 000 rs., la siguiente 2 400 rs., la tercera 2.000 rs., y la de inferior calidad 1 600 rs., cuyas rentas parciales suman la renta total de 10.000 rs.

Problema 2.°—Una dehesa cuyo terreno es todo de la misma calidad, produce 12.000 rs de renta; está dividida en cuatro suertes desiguales. La 1.ª de cabida de 8 hectáreas, la 2.ª de 5 hectáreas, la 3.ª de 4 hectáreas y la 4.ª de 3 hectáreas, y se desea saber la renta que corresponde á cada suerte.

Sumando las hectáreas de las cuatro suertes se tendrán 20 hectáreas, que es la cabida total de la dehesa, y habrá que dividir la renta total 12.000 reales en partes proporcionales á los números de hectáreas de cada suerte. Tendremos, pues, las proporciones siguientes, que nos darán la renta de cada suerte:

$$
\begin{aligned}
20 : 12.000 :: 8 : x &= 4.800 \text{ rs.}\\
20 : 12.000 :: 5 : x' &= 3.000 \text{ rs.}\\
20 : 12.000 :: 4 : x'' &= 2.400 \text{ rs.}\\
20 : 12.000 :: 3 : x''' &= 1.800 \text{ rs.}\\
\hline
&\ 12.000 \text{ rs.}
\end{aligned}
$$

Problema 3.°—Una dehesa produce de renta 8.520 rs; está dividida en cuatro suertes de distinta calidad y diferente cabida y se quiere saber la renta que corresponde á cada suerte.

Supongamos que las calidades de las cuatro suertes están representadas por los números 10, 6, 5 y 4, y sus cabidas respectivamente son 8, 5, 4 y 3 hectáreas. Multiplicando ordenadamente estos números, es decir, el que representa la calidad de cada suerte por el que expresa su cabida se tendrán los productos 80, 30, 20 y 12 que suman 142, y no habrá más que dividir la renta total 8.520 rs. en cuatro partes proporcionales á estos productos, y se tendrán las rentas de cada suerte, para lo cual estableceremos las siguientes proporciones:

$$
\begin{aligned}
142 : 8.520 :: 80 : x &= 4.800 \text{ rs.} \\
142 : 8.520 :: 30 : x' &= 1.800 \text{ rs.} \\
142 : 8.520 :: 20 : x'' &= 1.200 \text{ rs.} \\
142 : 8.520 :: 12 : x''' &= 720 \text{ rs.} \\
\hline
& 8.520 \text{ rs.}
\end{aligned}
$$

948. **Deslindes de los terrenos.**—Cuando se levanta el plano de una heredad, con el objeto de conocer exactamente su figura y la cabida de su superficie, en los casos de compra y venta, de division ó reparticion, y en todas aquellas operaciones en que hay necesidad de separar ó de distinguir una parte de las demás, si no se estableciesen las líneas divisorias en el terreno ó se perdieran los datos, sería preciso volver á hacer de nuevo las operaciones en los casos que hubiera necesidad, y se comprende que lo primero es señalar bien en el terreno las líneas que separan una heredad de las contiguas, así como las que deban dividirla en varias partes iguales, desiguales ó proporcionales, lo que se llama hacer el *deslinde*. Esta operacion tiene la mayor importancia cuando se trata de entresacar un terreno de entre otros varios, por haber sido borradas las líneas divisorias por el trascurso del tiempo y hay que restablecerlas de nuevo. Pero despues de hecho el deslinde, deberán fijarse las líneas de una manera estable para evitar inconvenientes en lo sucesivo, poniendo en el terreno ciertas señales, que marquen donde acaban las propiedades de los unos y donde comienzan las de los otros y á esto se llama hacer el *apeo*. Estas dos operaciones simultáneas de *deslindar* una finca y *apearla* ó fijarla de modo que permanezca sin alteracion en lo sucesivo, las comprenden algunos bajo la sola expresion de *hacer el apeo*.

949. *Deslindes.* Desde luego se concibe que en fincas, en cuya extension y figura no se presente dificultad por parte del mismo dueño y de los propietarios colindantes, la operacion de levantar el plano de una finca y dividirla si es preciso, nos da determinados los linderos y la líneas divisorias, y por lo tanto deberíamos desde luego pasar á tratar de los distintos medios que se emplean para fijar dichas líneas y linderos que constituyen el *apeo*; mas como no siempre sucede así, tenemos que ocuparnos de resolver diversos problemas de importancia que se comprenden en la cuestion de los *deslindes*.

Para esto, distinguiremos dos partes: en la primera trataremos del convenio que se hace entre varios propietarios colindantes para trasformar los linderos formados por líneas *onduladas* ó *sinuosas* en otros compuestos de líneas rectas, sin que ninguno pierda nada en extension superficial, por la mejor disposicion y mayor sencillez que presentan las figuras rectilíneas sobre las curvilíneas y mistilíneas, tanto para el levantamiento de los planos, como para las demás operaciones de division que sea necesario practicar en los terrenos. Estas operaciones se conocen con el nombre de *trasformacion de los linderos.*

En la segunda parte, nos ocuparemos de averiguar las direcciones que deben tener los linderos de una heredad, que se han borrado ó desaparecido con el tiempo, para determinar su situacion, ó bien para entresacar y hallar una tierra que haya desaparecido entre otras en que debe hallarse comprendida, lo que suele suceder con frecuencia, pues hay muchos que usurpan la propiedad agena rompiendo los linderos á pesar de haber leyes que prohiben la traslimitacion, que por ser un despojo violento, lleva consigo la pena de perder la propiedad de la tierra, si esto lo hace de su propia autoridad y otro tanto más el que no es dueño, como puede verse en el libro 4.°, título 13 de la Novísima Recopilacion. Estas operaciones se comprenden bajo el nombre de *investigacion ó rectificacion de los linderos.*

950. **Trasformacion de los linderos.**—Pasaremos á exponer los problemas que pueden ocurrir más comunmente.

951. **Problemas.**—*Problema 1.° Trasformar en un lindero recto, una línea ondulada ó sinuosa.*

Sea A*mnrs*B (fig. 347; lám. 33) la línea ondulada que es lindero comun á dos propiedades M y N, comprendidas entre las rectas EE′ y CC′, y que se quiere sustituir con una recta. Trácese la recta AB que una sus extremos, y hállese la superficie del espacio comprendido entre dicha AB y la línea ondulada, para lo cual se trazarán en el plano que se supone levantado de antemano, el mayor número de perpendiculares sobre la AB, que sea posible, para determinar con bastante precision dicha superficie, valiéndonos del método expuesto (Tomo I; 1107) Estas perpendiculares deben ser las trazadas y medidas en el terreno para el levantamiento del plano del contorno de la superficie. Dividiendo el doble de esta superficie por la AB considerada como la base de un triángulo, se tendrá (873) [6] la altura del mismo, y levantando en el punto B, ó A segun se designe, una perpendicular, se tomará en ella con arreglo á escala la parte BD igual á dicha altura, y se trazará por el punto D la paralela DC á la AB, que cortará á la linde BC de la tierra N un un punto C. Únase el punto A con el C por medio de la AC, y este será el lindero recto que separará las dos propiedadea MN. Haciendo el *replanteo,* ó sea trasladando al terreno la recta AC del plano, quedará resuelta la cuestion.

952. *Problema 2.°—Trasformar en dos linderos rectos, una línea ondulada y sinuosa.*

Sea la A*mnrs*B (fig. 348; lám. 33) la línea ondulada; hágase la misma construccion que en el problema anterior y hállese la superficie, que dividiendo su doble por la base AB tendremos la altura, que supongamos sea BG. Trazando por el punto G en el plano una paralela á la AB, se podría unir cualquier punto de esta paralela con los A y B, y se tendrían los dos linderos rectos. Si la paralela pasase por un punto notable, como el árbol E que puede servir de hito ó coto, ó cortase una vereda ó sendero AE, que conviene sea camino á las dos tierras M y N, se aprovecharía dicho punto E para tirar las rectas AE y EB que serían los dos linderos rectos.

Si hubiese un pozo D en la heredad N, y el propietario tratase con el de la tierra M para darle participacion, entónces desde este punto D, se bajaría una perpendicular DF á la AB, que se tomaría por la altura del triángulo que tuviese por superficie la comprendida entre la AB y la línea ondulada. Dividiendo el doble de esta superficie por la altura se tendrá la base AP (873) [5], y en este caso quedaría reemplazada la línea sinuosa por una quebrada compuesta de las tres rectas ó linderos AD. DP y PB.

Se comprende, que á no ser por circunstancias particulares ó por obstáculos que se interpongan, debe siempre trazarse un solo lindero AC como en el problema 1.°, pues el trazado de las AE y EB, así como el de las AD, DP y PB, dá lugar á ángulos entrantes y salientes que desfiguran las heredades y es menos á propósito en el caso de dedicarse la tierra á las construcciones de edificios

953. *Problema 3.°—Trasformar un lindero curvilíneo ó tortuoso, en un lindero recto que sea paralelo á la recta que une los extremos del primero.*

Supongamos que las líneas AD y BC (fig 349; lám 34) limitan las dos propiedades M y N que tienen comun el lindero curvilíneo ó tortuoso A*mnr s*B y que se quiera reemplazar este por una recta que sea paralela á la AB que une los extremos de aquel. Para esto, se trazará en el plano una recta cualquiera DC paralela á la AB y se hallará la superficie del trapecio ABCD, y las medidas de las bases AB y CD y de la altura CH. Con estos datos y el valor de la superficie comprendida entre la AB y la línea sinuosa A*mnr s*B, que se hallará como se ha dicho en el problema 1.°, se puede hacer aplicacion de las fórmulas [18] y [21] (898), para hallar la longitud de la línea de separacion, que tomándola con arreglo á escala desde B á F y trazando la EF, paralela á BC se tendrá el punto E, por el cual se tirará la EG paralela á AB, la cual será el lindero recto que se deseaba, y que separa del trapecio ABCD una parte ABGE, igual en superficie á la comprendida entre AB y la línea sinuosa A*mnr s*B

954. En los problemas anteriores, hemos supuesto tácitamente que los terrenos que tienen un lindero comun, son de la misma calidad, pues si esta fuera diferente, sería preciso tener en cuenta esta circunstancia para evitar el que haya perjuicio para ninguno de los propietarios. Supongamos que los terrenos M y N (fig. 347; lám. 33) son de distinta calidad, y que sea N el que tenga calidad doble mejor que el M. Despues de establecido el nuevo lindero recto AC, es evidente, que el propietario de M cede al de N la parte comprendida entre la recta A*r* y la línea on-

dulada A*mnr*, y que toma del mismo la parte comprendida entre las rectas *r*C y CB y la ondulada *rs*B, cantidades exactamente iguales en extension y que resuelven el problema en la hipótesis de ser las tierras M y N de igual calidad. Pero en el caso presente que decimos que la parte *r*CB*s* vale doble que la A*mnr*, de dos modos puede el propietario de M indemnizar al de N; ó averiguando el valor de las superficies *r*CB*s* y A*mnr*, que se medirán con cuidado y que deben salir iguales, y hallando sus valores que supongamos resulta para la primera 400 rs., en cuyo caso deberá ser 200 rs el de la segunda, para que el propietario de M entregue al de N la diferencia 200 rs. que resulta á favor de este, ó bien apelando al medio de no tomar el propietario de la tierra M, nada más que la mitad de la parte *r*CB*s* de la tierra N. Para esto, dividiendo toda la superficie *r*CB*s* que es el doble de la que ahora se trata de dejar, por la BC considerada como base de un triángulo, se tendrá la altura del mismo. Levantando, pues, en el punto C una perpendicular CP á la BC igual á dicha altura, trazando por P una paralela PR á la CB y uniendo el punto O de su interseccion con la AC con el punto B, el triángulo BOC de base BC y de altura OF = PC será el que tendrá que ceder el propietario de la tierra M al de la tierra N y tomar solamente de esta la parte *r*OB*s*, verificándose en este caso el tener que sustituir el lindero recto AC que resultó primero, por la línea quebrada compuesta de los dos linderos AO y OB, entre las dos propiedades M y N. De un modo análogo debe procederse en los casos de igual naturaleza.

955. *Problema 4.º—Trasformar el contorno irregular ó sinuoso de un terreno cualquiera, en una série de linderos rectos, que le separen de las propiedades colindantes.*

Si suponemos que el terreno O (fig. 350; lám. 34) es de corta extension, y que las líneas *ab*, *cd*, *rs* y *tx* separan entre sí las propiedades colindantes M, N, P y R, se trazarán las rectas *bc*, *cr*, *rx* y *bx* y se trasformará el lindero sinuoso que separa al terreno O de cada uno de los contiguos, haciendo aplicacion de los métodos expuestos en los tres problemas anteriores. Mas debe hacerse aquí una observacion importante, y es que trazado el primer lindero recto, como el segundo debe partir del extremo del primero, el tercero del extremo del segundo y así sucesivamente, al final, cuando no quede más que unir el último punto con el primero ó de partida, sería una casualidad muy extraña que la línea de separacion con la última propiedad fuese la que uniese dichos puntos, por lo cual, lo que casi siempre ocurrirá será el tener que valerse de dos linderos rectos para separar la tierra de la última propiedad.

Sea, por ejemplo, el terreno O (fig. 351; lám. 34) y sean A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, y E*e* las lindes laterales que separan entre sí las propiedades colindantes M, N, P, R y S. Trácense las rectas AB, BC, CD, DE y EA que unen entre sí los extremos de cada una de las partes del contorno sinuoso del terreno O, colindantes con los de cada uno de los distintos propietarios y cuyos linderos ondulados se han de trasformar en linderos rectos, relacionados entre sí y de modo que no resulte perjuicio en superficie para la tierra O ni para las colindantes.

Para esto, á partir de un punto tal como el A, se empezará sustituyendo el lindero curvilíneo comun con la tierra M, por el lindero recto *ab* paralelo á AB por método del problema 3.° (953). No se tomará ahora como base de operacion la BC que une los extremos de la linde sinuosa comun con la propiedad N, sino la *b*C que desde el punto *b* de la linde B*b* comun á las tierras M y N va á parar á C, y dicha linde sinuosa se podrá reemplazar por los dos linderos rectos *br* y *r*C por el método del problema 2.° (952). Tomando despues por base la CD, se trasformará el lindero ondulado comun con la propiedad P, en el lindero recto C*d* por el método del problema 1.° (951), y para continuar no tomaremos por base de la operacion la DE sino la *d*E; y observando que el terreno que hay que tomar de la propiedad R es mayor que el que hay que ceder del terreno O, la línea de separacion obtenida tambien como en el problema 1.° se dirigirá al interior del terreno O hasta encontrar á la prolongacion de la linde lateral E*e* en un punto *s*, y por último nos encontramos ya en el caso de unir el último punto *s* con el de partida *a* para sustitutir el lindero curvilíneo comun con la propiedad S por uno ó más linderos rectos. Para esto, no tomaremos por base de la operacion la AE, sino la *as* y como sería, segun hemos dicho, muy casual que la parte que se tome de la propiedad S compense la que se ceda de la propiedad O, en cuyo caso la *as* resolvería la cuestion, y lo natural es que haya una diferencia, se tomará la *as* como base de operacion y se construirá el triángulo *a*S*s* que tenga de superficie esta diferencia, determinando su altura y siguiendo el método expuesto en el problema 2.°, bien hácia la parte de la propiedad S ó hácia el interior de la O, segun deba tomarse la diferencia de la primera como suponemos en la figura, ó de la segunda en caso contrario.

956. Se comprende que en un terreno no puede trazarse más que un lindero paralelo, cualquiera que sea el número de las lindes que haya que modificar, pues de otro modo resultarian entre las que estuviesen contiguas, pedazos de terreno en forma de picos, que no deben permitirse de modo alguno en la figura de las heredades, supuesto que el principal objeto de la trasformacion de los linderos consiste en regularizar los terrenos, de manera que las posesiones se presenten con las formas más regulares, sencillas y agradables á la vista que sea posible.

Del mismo modo se puede observar, que el menor número de linderos rectos que convendría obtener, debe ser igual al número de trozos curvilíneos correspondientes á las propiedades colindantes, es decir, que en el caso de la figura 350 (lám. 34) deberían resultar cuatro rectas de separación, por ser cuatro las propiedades M, N, P y R, colindantes con la propiedad O, á no ser que por la diferente calidad de los terrenos contiguos, como digimos en la figura 347 (lám. 33) (954), ó con el objeto de dar mayor regularidad al terreno, ó bien por cualquiera otra circunstancia de conveniencia ó de interés comun á los propietarios, como hemos explicado en la figura 348 (lám. 33) (952), haya que doblar el número de los nuevos linderos rectos comunes á unos y otros terrenos.

Por último, convendría que no pasase el número de los nuevos linderos rectos del doble del número de las propiedades colindantes, á no ser tambien que por las razones acabadas de exponer y que sea preciso satisfacer, ó por la mucha extension de los terrenos, sea indispensable aumentar en mayor cantidad el número de los expresados nuevos linderos.

957. Dicho se está, que en todos los procedimientos de que nos estamos ocupando y de los que nos valgamos en lo sucesivo, deben hacerse con precision las operaciones sobre el plano, y el trazado en el terreno de las rectas que resuelven las cuestiones ó sea el *replanteo*. Excusado es decir tambien que de un modo análogo debe procederse en cuantos problemas ocurran de este género y cuyas variedades no influyen en la parte esencial de su resolucion y están siempre al alcance del Geómetra, despues de cuanto se ha indicado sobre el particular.

958. Pero si se supone ahora que en el caso indicado (955) fuese un terreno tal como el O (fig. 350; lám. 34), de grande extension, como pudiera suceder, que las perpendiculares $a'b'$, $c'd'$, para determinar la linde comun á las tierras O y N, tuviesen mucha longitud y hubiera que inscribir un polígono de más lados que el cuadrilátero $bcrx$ para la determinacion del contorno, dividiríamos entonces el trozo curvilíneo $rd'b'c$ en tres partes en los puntos p y q y la cuestion se reduciría á sustituir esta curva por tres ó más linderos rectos, y así en las demás partes del contorno.

959. *Método de las compensaciones.*—Cuando el polígono es de mucha extension, como hemos dicho en el párrafo anterior, y presenta muchos lados de poca longitud ó es curvilíneo, se emplea con ventaja el *método de las compensaciones*, que consiste en sustituirle por otro de menos lados, dispuestos de manera que haya *compensacion* entre las excedentes y deficientes; así, para el contorno curvilíneo representado en la figura 352; lám. 34, se traza una primera recta AB, de manera que la figura deficiente a' equivalga á la escedente a; despues la BC de modo que b' equivalga á b, y así sucesivamente. Si la última recta EA puede trazarse de modo que la parte deficiente e pueda reemplazar á las dos excedente e' y e'', entonces la línea EA será la última que resuelve el problema; en caso contrario, el último lindero curvo cuyos extremos son A y E, se trasformará en dos linderos rectos como ya sabemos (952).

Si los contornos de los terrenos son rectilíneos, pueden establecerse las compensaciones con más exactitud; pues si la recta AB (fig. 353; lámina 34) es un lado de un polígono principal, los triángulos a y c pueden reemplazarse por los b y d que aparecen equivalentes.

Se puede dar un medio sencillo para establecer la *recta de compensacion* que ha de sustituir á una línea ondulada, resolviendo el siguiente:

960. *Problema.—Dada la línea ondulada* EHF (*fig.* 354; *lám.* 34) *que separa dos propiedades* M, N, *comprendidas entre las rectas* AB *y* CD, *reemplazarla por una recta* EF, *sin que se alteren las superficies de las dos propiedades.*

En el punto de interseccion de la línea ondulada con la recta AB, se levantará á esta una perpendicular EF prolongándola hasta su encuentro en F con CD, y se hallarán las superficies de los tres segmentos a, b, y c que forma con la línea ondulada. La propiedad AEHFC se hallará aumentada en los segmentos a y c, y disminuida en el b: si b fuese igual á $a+c$, la recta EF resolvería el problema; pero si resulta $a+c>b$, se hallará la diferencia $a+c-b$ y se dividirá por $\frac{EF}{2}$; tomando á partir de E una parte EG igual al cociente hallado, y trazando la FG, ésta resolverá el problema, siendo la recta de compensacion que ha de representar el nuevo límite comun á ambas propiedades. En efecto, se tiene

$$\text{triáng. EFG} = \frac{FE}{2} \times EG = a + c - b$$

961. **Deslinde entre dos pueblos.**—Cuando el deslinde se practica con el fin de distinguir ó separar los términos de dos pueblos contiguos, hay que extender esta operacion á líneas de muchos kilómetros, lo que la complica sobremanera. El Agrimensor que tiene que proceder con arreglo á las formalidades que la ley prescribe y á presencia de muchos interesados, es necesario que dé muestras de mucha inteligencia y rectitud, por lo que debe estudiar mucho cuantos problemas en lo científico y disposiciones en lo legal, puedan conducirle al acierto, evitando de este modo los muchos disgustos y cuestiones las más veces fomentadas por las pasiones, que pueden suscitarse entre los partidarios y entre familias enteras.

962. **Rectificacion de los linderos.**—Comprendemos en esta parte los medios que deben emplearse para descubrir los linderos borrados por el tiempo ó la mala fé, así como las tierras perdidas y ocultas ú oscurecidas entre las de los propietarios colindantes, para lo cual estudiaremos los siguientes problemas.

963. **Problemas.**—*Problema 1.° Dadas cuatro tierras, entre las que se halla otra que resulta tener menos superficie que la que le corresponde, rectificar sus linderos, para recobrar la cantidad que le falta.*

Sea la tierra O (fig. 355; lám. 34) que linda al Norte con la tierra M, al Este con la N, Sur con la P y al Oeste con la R, determinadas todas por líneas llenas que se ven en la figura, y supongamos que medida la tierra O por el sujeto que la compra ó hereda, resulta tener 5 hectáreas y 3 áreas, siendo así que segun las escrituras y documentos correspondientes debe contener 5 hectáreas y 35 áreas. Se hallará pues en el caso de reclamar las 32 áreas que le faltan y para esto lo primero que debe exigir á los dueños de las tierras colindantes M, N, P y R es, no solo la medida de sus tierras, sino la presentacion de los títulos ó escrituras, para hacer el cotejo de las medidas que ahora resulten con las que en los títulos se consignan.

Verificadas las medidas de las cinco tierras, supongamos que resultan las cabidas siguientes:

Para la tierra	O	5	hectáreas y	3 áreas.
Para la	» M	7		25
Para la	» N	8		32
Para la	» P	6		»
Para la	» R	9		»

Total de la superficie ABCDEF = 35 hectáreas y 60 áreas.

Examinados los títulos ó escrituras, resulta que sus medidas deben ser:

Para la tierra	O	5	hectáreas y	35 áreas.
Para la	» M	7		»
Para la	» N	8		20
Para la	» P	6		»
Para la	» R	9		5

Total de la superficie ABCDEF = 35 hectáreas y 60 áreas.

Haciendo el cotejo de los resultados que acaban de obtenerse por ambos medios, se observa:

1.° Que estando conforme la medida de la tierra P con lo que expresa la escritura, no hay ninguna reclamacion que hacer á favor ni en contra del propietario de esta tierra, resultando deber permanecer el mismo el lindero comun *me*.

2.° Que las tierras M y N, teniendo mayor cabida que las que consignan las escrituras, habrá que reclamar de sus dueños las diferencias que deben pertenecer al dueño de la tierra O, y que son 25 áreas para la primera y 12 áreas para la segunda.

3.° Que no teniendo la tierra R más que 9 hectáreas, y debiendo ser su cabida segun las escrituras 9 hectáreas y 5 áreas, hay que restituir al dueño de esta tierra las 5 áreas que le faltan.

De modo, que haciendo la comprobacion resulta, que añadiendo á las 5 hectáreas y 3 áreas que mide la tierra O, las 25 áreas y 12 áreas que resultan demás para la M y N y deben tomarse de ellas; y restando de la suma que resulta 5 hectáreas y 40 áreas, las 5 áreas que hay que restituir á la tierra R, resultan efectivamente para la tierra O las 5 hectáreas y 35 áreas que debe contener segun los títulos y por cuyo valor la heredó ó compró su dueño.

964. Pasemos ahora á rectificar los linderos, ó sea á señalar de nuevo los linderos que deben separar unas tierras de otras para que cada tierra contenga la cabida que le corresponde, y puedan conservarse los linderos en lo sucesivo sin nuevas alteraciones, con lo cual se tendrá concluida la operacion del deslinde. Empezaremos por el caso más complicado, que es cuando no existen planos de los terrenos, sino solamente los títulos, y aunque parezca extraño el hacerlo así, es, sin embargo, con el objeto de hacer resaltar la importancia de este asunto, siendo además lo mismo en esta clase de cuestiones empezar por el caso más fácil ó por el más difícil.

Para esto, tomando por base de un triángulo el lindero antiguo *ac*, (fig. 355; lám. 34), y dividiendo 50, doble de las 25 áreas que tiene de más la tierra M, por la longitud *ac* de dicha base, se tendrá la altura *bb'*, que levantándola en cualquier punto de la *ac* por la parte interior de la tierra M y trazando las *ab* y *bc*, estos serán los nuevos linderos de la tierra O con la M.

Haciendo las mismas operaciones para rectificar los linderos con las tierras N y R, sin más diferencia que trazar como antes la perpendicular *dd'* en el interior de la N, por tener que quitarle las 12 áreas que tiene demás, y la perpendicular *nn'* por la parte exterior de la tierra R por tenerla que añadir las 5 áreas que la faltan, se tendrán los nuevos linderos *cd* y *de*, *an* y *mn* comunes con las tierras N y R, permaneciendo el mismo el lindero *me* comun con la tierra P, y debiendo ser la nueva figura de la tierra O la *abcdemn* señalada con líneas de trazos y marcados sus ángulos con piquetes, en vez de la *acem* que antes tenia.

El mayor número de linderos que ahora se obtiene, podrá dar lugar, por el convenio y armonía que pueda establecerse entre los propietarios de las 5 tierras, á la operacion de la *trasformacion de linderos*, haciendo uso de los procedimientos ya expuestos.

965. *Problema 2.º—Dadas cuatro tierras, entre las que debe haber otra que aparece perdida ú oscurecida, rectificar los linderos de todas para descubrirla y deslindarla.*

Sean M, N, P, R (fig. 356; lám. 34) las cuatro tierras señaladas en la figura con líneas llenas, entre las que debe existir otra tierra O, que señalamos con líneas de trazos. Por el procedimiento del problema anterior, podremos llegar á descubrir las partes que se han de tomar de cada una de las tierras M, N, P y R, determinando los linderos que deben ser comunes á cada una de ellas con la tierra O. Se podrá despues por la trasformacion de linderos (950) reducirla á la forma definitiva *abcde* que se vé en la figura, suponiendo que se ha podido establecer un lindero recto *ab*, *bc* y *cd* con cada una de las M, N y P, habiendo tenido que trazar dos *ae* y *ed* para separarla de la tierra R, como sucede generalmente, y dar así cima á la operacion.

966. Muy grave y trascendental es la operacion de rectificar los linderos, que acabamos de poner de manifiesto con la resolucion de los pro-

blemas anteriores y dá lugar á serias consideraciones. En efecto, puede suceder: 1.° Que las tierras fuesen mal medidas al formar las escrituras. 2.° Que las tierras M, N, P y R que citamos en cualquiera de las figuras 355 y 356, (lám. 34) por ejemplo, en la figura 330, estén perfectamente deslindadas entre sí, no teniendo que alterar las direcciones de los linderos AB, BC, CD.... ni las de los A*a*, B*c*, D*e*.... y entonces queda reducida la cuestion á lo expuesto. Pero podrá suceder, que una de las M que ha tomado parte de la tierra O, haya perdido á su vez la misma ó más cantidad por haberse introducido en su propiedad, alterando los linderos AB, A*a* ó B*c* los dueños colindantes, resultando que tenga ahora más ó menos de lo que diga la escritura, aunque la medida que se hiciera para consignarla en aquella estuviera bien hecha. Y de aquí el ponerse sucesivamente en movimiento un gran número de propietarios y originarse todo género de pleitos y disputas. 3.° Que aun en presencia de los hechos, ninguno de los dueños de las tierras vecinas quiera ceder de su parte, ni pasar por ser el usurpador, lo que origina tambien sérios conflictos.

Por todo lo cual, el Agrimensor debe procurar con su prudencia y cordura, evitar todos estos inconvenientes y dejar á todos contentos. Para proceder con el mayor acierto, conviene que se haga acompañar de labradores que hayan trabajado la tierra que se ha de deslindar ó las inmediatas, lo cual unido á las medidas que practique y á los medios que ponga en juego, podrá hacer que todo se arregle amigablemente entre los interesados, evitando los gastos de procesos que siempre son mayores que el valor de un trozo más ó menos de tierra que pueda ganarse ó perderse.

967. Ahora bien, despréndese de lo dicho, la importancia del caso más sencillo que puede presentarse en la práctica y que hemos dejado para lo último, segun digimos (964), el cual es sin disputa cuando cada propietario posee el plano de su finca, levantado con exactitud y orientado, además de los títulos ó escrituras, pues entonces, suponiendo que se trata de la tierra O, (fig. 355; lám. 34) no habría más que hacer el replanteo, sobre el terreno, partiendo de una de las lindes AB, midiéndola y dándola la longitud que señala el plano, y trazar en los puntos A y B los ángulos BA*a* y AB*c* con un goniómetro ó con la plancheta. Se fijan las longitudes A*a* y B*c* y formando por último sobre el terreno los ángulos A*ab* y B*cb* que marque el plano, se tendrá el punto *b* y los linderos *ab* y *bc* que suponemos son los de la tierra M comunes con la O y no el lindero *ac* que habia sido sustituido por aquellos con el tiempo ó por la mala fé, y que deberá comprobar con el correspondiente en el plano de la tierra O, así como las A*a* y B*c* deben concordar tambien con los mismos de las tierras R y N, y así sucesivamente se irá haciendo el replanteo hasta haber formado sobre el terreno la confeccion de los cinco planos, cual si lo hubiéramos hecho sobre el papel.

968. Pero aunque no todos los propietarios tengan el plano, no por

eso deja de facilitarse la operacion, pues siempre con los planos que se tengan, hay más medios de hallar con más seguridad la figura de los demás terrenos, pues si en la figura del caso actual, el dueño de la tierra O que hace las reclamaciones, careciese de plano, el replanteo de los demás planos vendría á determinar la figura *abcdmn*, que debe corresponder á su finca O Esto, unido á las luces que de sí arrojen los títulos de las propiedades de que no haya planos, asegurará el buen éxito de todas las operaciones, en los casos frecuentes de rectificar los linderos de una finca y de buscar una tierra perdida.

Para mayor ilustracion de nuestros lectores, vamos á consignar aquí el siguiente curioso problema de division y deslinde que resuelve Mr. J. Regnault en su *Curso práctico de Agrimensura*, y que yo he modificado.

969. *Problema.—Tres propietarios poseen un terreno cuya superficie real es de 38 áreas y 48 centiáreas ó metros cuadrados; sus títulos no componen más que 28 áreas, se quiere dividir y deslindar el terreno, de manera que cada uno perciba lo que tenia y además la bonificacion que le corresponda.*

Supongamos que el terreno propuesto sea el representado en la figura 357 (lám 34); que el polígono ó porcion ABCFGE sea la parte del primero, la porcion EGHIJML la parte del segundo y la porcion MJOPLN la parte del tercero.

Es preciso dividir estos polígonos en triángulos, hallar la superficie de la totalidad del terreno, y dividirla despues segun los títulos de los propietarios, dando á cada uno proporcionalmente lo que les toca de la bonificacion; ó bien, es preciso medir cada parcela, sumar despues sus superficies, restar del resultado las cabidas contenidas en los títulos, y la diferencia será la bonificacion que debe repartirse entre todas las partes, proporcionalmente al contenido de cada una segun los títulos

El polígono ABCFGE puede descomponerse en cuatro triángulos:

	Áreas.
ABD, cuya superficie es de	9,81
AED ... de	5,35
DCF ... de	0,97
DFG ... de	0,21
Cabida del primer polígono	16,34

El polígono EGHIJML puede descomponerse en seis triángulos:

	Áreas.
DGH, cuya superficie es de	0,66
DHY ... de	1,26
IJK ... de	0,18
DLK ... de	4,77
DEL ... de	1,39
KLM ... de	4,31
Cabida del segundo polígono	12,57

El polígono MJOPQN puede descomponerse en cuatro triángulos:

	Áreas.
JMO, cuya superficie es de	1,94
MNO de	0,61
NOP de	4,43
PQN de	2,59
Cabida del tercer polígono	9,57

Resúmen de las cabidas de los tres polígonos.

	Áreas.
El primer polígono contiene	16,34
El segundo	12,57
El tercero	9,57
Cabida total del terreno propuesto	38,48

El resultado del cálculo de los catorce triángulos que componen el polígono propuesto, dan para superficie del mismo 38 áreas y 48 centiáreas, y no resultando por los títulos más que 28 áreas, hay un exceso ó bonificacion de 10 áreas y 48 centiáreas, que hay que repartir entre los tres propietarios, en proporcion á la cantidad de terreno que expresan sus respectivos títulos.

Ahora bien, segun dichos títulos,

	Áreas.
El primero tiene	12,22
El segundo	9,35
El tercero	6,43
Total	28,00

Se establecerán, por lo tanto, para repartir la bonificacion 10,48 áreas, proporcionalmente á estas tres cantidades, las tres proporciones siguientes:

	Áreas.
$28 : 10,48 :: 12,22 : x =$	4,58
$28 : 10,48 :: 9,35 : x' =$	3,50
$28 : 10,48 :: 6,43 : x'' =$	2,40
Total igual á la bonificacion	10,48

Comprobacion.

				Áreas.
Corresponde	al 1.er	propietario	$12,22 + 4,58 =$	16,80
Id.	al 2.º	id	$9,35 + 3,50 =$	12,85
Id.	al 3.º	id	$6,43 + 2,40 =$	8,83
Cabida total del terreno propuesto				38,48

Hecha la liquidacion á cada uno de los tres propietarios, para deslindar la parte que á cada uno corresponde, vemos que:

	Areas.
El 1.er propietario tiene por los títulos	12,22
Le corresponde por la bonificacion	4,58
Debe importar su parte	16,80
Importa lo que tiene	16,34
Tiene que restituirle el 2.º propietario	0,46

Estas 46 centiáreas deben tomarse á lo largo de la línea GE cuya longitud es de $39^m,70+9^m,00=48^m,70$ y á la izquierda, para lo cual se dividirán las 46 centiáreas por la longitud $48^m,70$, para tener la anchura de la zona que hay que devolver. Esta division da por cociente $0^m,94$ y por lo tanto es preciso tirar una paralela *mn* á la GE á una distancia de $0^m,94$ para restituir la superficie que el primer propietario tiene de ménos.

	Areas.
El 2.º propietario tiene por los títulos	9,35
Le corresponde por la bonificacion	3,50
Debe importar su parte	12,85
Importa lo que tiene	12,57
Tiene que percibir	0,28
Ha entregado al 1.er propietario	0.46
Tiene que restituirle el tercer propietario	0,74

Estas 74 centiáreas deben restituirse á lo largo de la línea JM que tiene 40 metros de longitud; se dividirá pues 74 centiáreas por 40 metros, y el cociente $1^m,85$ será la anchura de la zona que hay que tomar, lo que se conseguirá trazando una paralela á la línea JM, y á su izquierda, á la distancia de $1^m,85$, á fin de ceder al segundo propietario una superficie de 0,74 áreas.

	Areas.
El tercer propietario tiene por los títulos	6,43
Le corresponde una bonificacion de	2,40
Debe importar su parte	8,83
Importa lo que tiene	9,57
Exceso que ha devuelto al 2.º propietario	0,74

Este resultado justifica la exactitud de toda la operacion.

970. **Apeos**.—Ya hemos dicho que despues de tener deslindada una propiedad, es menester que las líneas que la determinan queden fijas para siempre, para que se sepa dónde acaban las propiedades de los unos y empiezan las de los otros, y que esta operacion se llama *apeo*.

971. Debiendo ser respetada por todos la propiedad, bastaría emplear los medios más sencillos para su resguardo y seguridad. Así es, que sería suficiente hacer el *apeo* por medio de *rebozos*, de *surcos* ó de *lindazos*.

972. Los *rebozos* consisten en atar con tomizas los sarmientos de las últimas plantas ó cepas linderas de las viñas para indicar que se respete la posesion.

973. Los *surcos* son unas zanjas pequeñas que se hacen alrededor de toda la finca, tan poco anchas y profundas que no ofrecen ninguna dificultad para traspasarlas, borrarlas y cambiarlas de direccion, siendo por lo tanto uno de los peores medios que pueden emplearse y que no obstante se usa con frecuencia.

974. Los *lindazos*, llamados tambien *lindes* ó *linderos*, son unas fajas ó zonas de terreno que se dejan sin labrar entre las respectivas propiedades contiguas de dos propietarios, cuyo terreno se cede por mitad por ambos en beneficio de su comodidad y de la de los habitantes del campo. Sirven en efecto de pequeñas veredas ó sendas para las comunicaciones entre unos y otros en todos sentidos y con toda independencia, evitando los perjuicios de servidumbres onerosas, como son las veredas de paso. En los lindazos crece la yerba espontáneamente, lo que sirve para separar ó distinguir bien cada heredad de las demás colindantes. Suele á veces levantarse el suelo de estos lindazos algo más que las partes labradas inmediatas, lo que es conveniente para que estén practicables en todos tiempos. La verdadera línea divisoria entre cada dos propiedades contiguas, debe ser el eje de la faja ó zona de terreno que constituye el lindazo.

975. Pero la mala fé de algunos de los propietarios colindantes y la mala intencion de los transeuntes, hace preciso emplear otros medios más seguros que puedan restituir cuando se quiera la figura que corresponde á una tierra, aunque haya experimentado en ella cualquiera alteracion, y que liberten al mismo tiempo á la heredad de que se apropie nadie sus frutos, y á veces tales prevenciones son necesarias tambien contra los animales campestres. Sin embargo de que la necesidad obligue á tomar todo género de precauciones, es lo cierto que dan muy mala idea del poco respeto que se profesa á la propiedad y de la ninguna cultura de los habitantes de la comarca.

976. Pero antes de exponer estos medios, creemos conveniente dividir las propiedades en tres clases para nuestro objeto, y con el fin de exponer en cada una la manera más conforme de practicar el *apeo*.

En la *primera clase* colocaremos las posesiones de mucho valor ó pertenecientes á ricos hacendados y que son de utilidad y recreo, como las casas de campo, los cortijos, fábricas, que casi todas tienen terrenos adyacentes y las huertas y jardines, contiguos ó separados de los edificios. Para apearlas se emplea el medio del *cerramiento*.

En la *segunda clase*, las fincas de igual naturaleza que las anteriores, pero de mucho menos valor é importancia, las viñas y olivares y todas las análogas, las que se apean por medio de *cercados*.

Y por último, en la *tercera clase*, las dehesas, montes, sotos, prados y tierras de labor de grande ó pequeña extension. Esta clase de fincas se apean por medio del *acotamiento* ó *amojonamiento*.

Las propiedades de la segunda y tercera clase son fincas que por su naturaleza suelen ser terrenos aislados ó separados á distancia del sitio donde reside el dueño.

977. Es indudable, que las propiedades de la primera clase deben en general hallarse completamente cerradas, tanto por la seguridad personal de sus moradores, como por evitar que las frutas, verduras, flores y demás productos, sean un incentivo á la codicia ajena ó á la mala intencion. Esta clase de cerramientos, corresponde á los Arquitectos, Maestros de obras y Aparejadores, que hayan intervenido en la construccion del edificio, supuesto que estos cerramientos son construcciones de muros ó paredes, que pueden ser de mampostería, de hormigon, tapiales ó de adoves y ladrillos, dando lugar á las distintas combinaciones que usan los constructores y que son cerramientos de cajones de hormigon, con machones de mayor y menor verdugadas de ladrillo; cerramientos de cajones de mampostería con iguales combinaciones con el ladrillo, y cerramientos de cajones de tapial y machones y verdugadas de ladrillo. Por último, los enverjados de hierro, solo se usan como cerramientos de lujo.

Como esta clase de cerramientos, y las demás obras que puedan adoptarse pertenecientes á la construccion y para las que es preciso primero establecer cimientos, no son del dominio del simple Agrimensor, sino reune además otros títulos que le autoricen, y como no estamos escribiendo un tratado de construccion y ningun fruto sacarían nuestros lectores, si no poseen los principios de aquella, nos creemos dispensados de exponer aquí la manera de hacer estos cerramientos y por lo tanto no nos ocuparemos más de este asunto.

978. Mas para las propiedades que incluimos en la segunda clase, pertenecientes á propietarios menos ricos y que al lado de sus casas quieren tener resguardado el terreno que las rodea, y que dedican igualmente á huertas y otros usos, los medios de *apearlas*, que llamaremos *cercados* por lo que se diferencian de un verdadero cerramiento, se hallan al alcance del Agrimensor y de los mismos propietarios. Estos *cercados* se practican, estableciendo alrededor de las posesiones, *zanjas*, *vallados*, *zanjas y vallados*, *zanjas y vallados alternados*, *setos vivos ó de rama verde*, *setos muertos ó de rama seca*, *y muros de piedras sueltas*, *y de piedras y tierra*.

979. Todos estos medios, aunque con distintos nombres, son, en una palabra, así como los cerramientos, el mismo acto de *cercar*, *rodear*,

atrincherar, *circuir* ó establecer el *coto* ó *recinto* que comprende las posesiones, aislándolas y separándolas de las contiguas ó colindantes, para fijarlas y determinarlas de un modo estable, y preservar el terreno y los frutos de las intrusiones y de los ataques de las personas y de los animales.

Pasaremos á explicar estas distintas clases de *apeos*, llamadas en general *cercados*.

980. *Apeo por cercado de zanjas.*—Las zanjas son unos fosos de anchura y profundidad arbitrarias, que se abren ó cavan alrededor de toda la posesion, y que pueden servir tambien para dar paso á las aguas. En algunas localidades usan las zanjas ó cerramientos militares.

981. *Apeo por cercado de vallados.*—Los *vallados* ó *lomos* son unas especies de barreras levantadas á lo largo de los linderos, con las piedras que se extraen de las fincas despues de haberlas limpiado de los cantos rodados que les son perjudiciales. Tambien se forman con tierras amontonadas de manera que las quede suficiente base y tengan regular altura é inclinacion por uno y otro lado para que no se corran ó se desmoronen, por lo cual deben apisonarse ó mezclarse con raíces ó ramas, ó bien céspedes cortados en los prados húmedos, que las presten alguna adherencia. Suelen practicarse tambien sobre algunos vallados de esta clase, pequeñas veredas ó sendas de comunicacion alrededor de las tierras.

982. *Apeo por cercado de zanjas y vallados.*—Se abre la zanja todo alrededor de la finca, y se levanta con la tierra que se extrae de ella un vallado á su orilla y hácia la parte interior de la heredad.

983. *Apeo por cercado de zanjas y vallados alternados.*—Algunas veces no se hace seguida la zanja, sino que se abren de 2 ó 3 metros de largo, y en los trechos que quedan entre cada dos se forma una loma ó vallado con la tierra escavada, de modo que despues de la primera zanja sigue un vallado, despues de este la segunda zanja, y á continuacion de esta otro vallado y así sucesivamente, cuyo procedimiento resulta más económico que el anterior.

984. *Apeo por cercados de ramas verdes, llamados setos vivos.*—Mejor aun que los medios empleados hasta aquí, es el valerse de *setos* ó *vallados* formados con las plantas llamadas de setos ó vallados, que además de defender mejor las posesiones, las dan un aspecto más agradable y pintoresco. Son estas plantas la *pita*, el *nopal*, la *caña brava* y la *cambronera*. La *pita* ó *agave* es planta de la region del naranjo, de hojas grandes, color verde claro, y con espinas muy duras en el contorno y punta, siendo el *magüei* una variedad de esta planta, con hoja verde azulada y espinas más pequeñas. Cuando se aproxima la florescencia de esta planta, se eleva muy de prisa un tallo ó pitaco que puede llegar hasta seis metros y medio y se ramifica en la parte superior donde nacen las flores, y aunque poco despues muere la planta quedan á su alrededor muchos hijuelos ó retoños. Estas plantas crecen, con especialidad la pita, en los terrenos más ingratos y pobres, y se propagan con facilidad por los retoños

que se les arrancan y se ponen en zanjas donde prenden. Además del excelente cercado que forman, sacan en Méjico del *magüei*, una bebida espirituosa del país que llaman *pulqüe*. Estas plantas requieren clima cálido, por lo que en las provincias cálidas y templadas de la Península crecen con abundancia

El *nopal*, *tuna* ó *higuera de pala*, se cria sin ningun cultivo en los parajes templados, áridos y secos, y se multiplica por medio de sus palas que se quitan enteras y dejándolas secar un poco, se introducen en la tierra hasta la mitad, en la que desde luego agarran. Forman cercados excelentes pues espesan mucho y alejan sus espinas á los hombres y ganados Producen los higos chumbos que es fruto delicado y puede darse tambien á los animales cuando le hay abundante. El nopal no está tan propagado en España como debiera

La *caña brava* es una planta que matéa y ahija mucho, y forma por lo tanto cercados impenetrables. Abunda mucho en los países templados de América y Asia, y empieza á cundir y propagarse por las costas de Andalucía, siendo conveniente que se extendiera con rapidez, atendida su grande utilidad. En Filipinas la llaman *cañuayang*, y llega á tener cerca de 17 metros de altura y 2 decímetros de diámetro. La caña *macho* es casi sólida de nudos salientes y de extraordinaria résistencia, pero de menores dimensiones

La *cambronera*, y despues de ella el espino, la zarza, el sáuce y los escaramujos sirven mucho para construir cercas ó setos vivos, y tambien algunas veces se ponen árboles y arbustos ménos hostiles.

Los *setos vivos* son muy útiles al Agricultor, pues de ellos sacará leña, frutos y otros productos, segun las plantas de que se valga Debe atenderse al suelo, clima, situacion de la finca y cultivos á que se destine, y elegirse plantas de raíces perpendiculares y que se estiendan poco, para que no perjudiquen á las principales del cultivo.

En general, en los sitios húmedos ó pantanosos, elíjase para setos el sáuce, aliso, plátano, chopo y otros que absorben mucho la humedad. En los parajes secos y áridos, fórmense los setos con el albaricoquero, granado, almendro, azufaifo acerolo, mirto, laurel, espino, durillo, níspero y escaramujo. En los puntos frescos ó frios, son convenientes el peral, manzano, grosellero, membrillero, madroño, la haya, el roble, la encina, el árbol del paraíso, las cambroneras y otras muchos. Por último, son preferibles siempre que se pueda los frutales más adecuados al clima y localidad.

La formacion del seto, puede ser de asiento, de estaca ó por trasplanto, preparando la faja del terreno con una cava profunda, y eligiendo árboles ó arbustos de la misma especie, que guarden entre sí la distancia oportuna, pero con la debida espesura. Deben cruzarse las ramas, á fin de que tengan una direccion inclinada y que no se eleven los brotes perpendiculármente. Cuando el seto se eleve de un metro á metro y medio, se le rebaja hasta la altura de medio metro, y despues de esta operacion nacen muchos vástagos en los puntos inferiores. Se repiten los córtes, y despues del segundo ó tercer recorte, se quitan con la podadera todas las cepas que aparezcan de los anteriores córtes, pues sin esta operacion las plantas se achaparran y forman portillos, por todo lo cual deben repetirse los recortes cada dos años, separando las ramas verticales, las de los lados que sobresalgan mucho y las chuponas.

Los setos deben tenerse bien cuidados y preservarlos del diente destructor de los animales. La duracion de los setos vivos, cuando están bien cuidados, puede ser de 50 á 100 años.

985 *Apeo por cercados de ramas secas, llamados setos muertos.*—Estas cercas se hacen con unas estacas clavadas en tierra y entretegidas con ramas, fagina, mimbres ó de otra manera. En algunas localidades, las cercas ó setos muertos, son de cañas puestas con una inclinacion de 48 á 56°, cruzadas unas con otras formando una especie de enverjado, sostenido con espartos ó cordeles, pero estos setos duran poco.

986 *Apeo por cercados con muros de piedra suelta, ó de piedra y tierra.*—Se hacen tapias alrededor de las lindes, con piedras sueltas, con cantos rodados ó con lascas segregadas de las rocas, segun lo que sea más abundante en las cercanías, y la costumbre que haya en cada país. Se da al muro bastante grueso y poca altura y no llevan cimiento ó muy poco. Se colocan las piedras de modo que encajen unas con otras, sin que resulten grandes intersticios, los que en todo caso pueden rellenarse con guijo ó piedras menudas.

Más resistencia tienen estos toscos muros, recibiendo sus piedras con tierra plástica ó arcilla, pues esta llena los intersticios menores y constituye un macizo más compacto y duradero, suficiente para el objeto que nos ocupa. Muchas veces tambien, estos muros son necesarios para contener las tierras más altas, á fin de que no se corran y desmoronen sobre las colindantes más bajas, y que tanto aquellas como estas no se perjudiquen mútuamente.

Por último, algunas veces, por alguna parte de las heredades, hay que establecer *malecones*, si las fincas están inmediatas á rios, arroyos ó sitios expuestos á inundaciones.

987 *Apeo por acotamiento ó amojonamiento.*—Para las propiedades que incluimos en la tercera clase, y que son las dehesas, los montes, sotos, prados y las tierras de labor de cualquiera clase y extension, el apeo se practica por *acotamiento* ó *amojonamiento*. Llámase así, porque consiste en colocar unas señales que se llaman *cotos*, *mojones* ó *hitos*, en los vértices de los ángulos de los polígonos y en sentido tambien de los lados cuando estos tienen mucha longitud, y que se numeran para determinar más fácilmente el seguimiento del contorno, y fijar así la figura de la finca. Estas señales suelen ser comunmente, montones de piedra ó de arcilla en forma cónica, y mejor aun piedras cortadas á propósito en rollos cilíndricos apuntados en cono, ó en pilares prismáticos terminados en pirámides. Otras veces los mojones se forman con tres piedras meti-

das en tierra hasta su mitad, siendo la central más gruesa y larga y las laterales más redondas y pequeñas, pero bien distintas: tambien los hay de una sola piedra, Esta clase de apeo es el más á propósito y económico para la clase de fincas á que le destinamos.

988. El modo de colocar en el terreno los *hitos*, *cotos ó mojones*, es el siguiente: Sea *eabcd* (fig. 358; lám. 34) el coto ó pilar de forma de paralepípedo recto, terminado en una pirámide cuadrangular, y *abcd* su base, en la cual, trazando las diagonales *ac* y *bd*, su interseccion *e'* será la proyeccion del vértice, ó cúspide *e*. Para colocar el coto en el terreno, sea *a'b'c'd'* la base, y *a'c'*, *b'd'* sus diagonales, y *e''* la proyeccion del vértice *e*; y supongamos que P es un piquete clavado en el terreno en uno de los vértices del polígono. Se abrirá alrededor de este punto un hoyo lo ancho y profundo que sea necesario para que pueda entrar el coto ó hito la parte que sea suficiente para que quede bien firme y que sea hasta *mnrs* que representan las líneas que han de enrasar con el terreno. Sobre dicho hoyo se atirantan dos cuerdas *a''c''* y *b''d''* que se crucen en el piquete P á ángulos rectos, y se coloca y asienta la base del coto de modo que coincidan sus diagonales con las expresadas cuerdas, con el objeto de que el vértice del ángulo del polígono ó cualquier otro punto de la linde que sea necesario *acotar*, coincida con *e''* proyeccion del vértice *e*, estando así en lo sucesivo este vértice en la vertical del punto en cuestion del terreno, y determinando estos vértices las líneas que constituyen el deslinde de las propiedades. Más conveniente sería, labrar el *coto*, de modo que tuviese la forma de un prisma recto, cuya base *abcd* (fig. 359; lám. 34) tuviese tantos lados como ángulos se forman en el punto *e* comun á varias tierras M, N, P y O, siendo este punto *e* la proyeccion del vértice de la pirámide cuadrangular, en que debe terminar el coto, pues colocado éste en el terreno en la disposicion que representa la figura, cada propietario podría inscribir su nombre ó sus iniciales en la cara ó frente del coto, que mirase á su tierra, y el punto *e* y las aristas verticales del prisma, nos determinarían las respectivas lindes.

989. Como sucede muchas veces que por ser el terreno muy extenso ó haber arbolado, y tambien por ser muy pendiente y quebrado ó presentar otra clase de obstáculos, no se descubre desde un vértice del polígono el siguiente, será preciso, como es fácil comprender, colocar cuantas señales intermedias sean indispensables, todo con el fin de que sea fácil y cómodo observar la situacion de los linderos y sus cambios de direccion, y no dejar duda ninguna de la figura que ha de afectar el terreno. Ahora bien, si en los planos de los terrenos que todos los propietarios deben conservar, se marcan tambien los puntos donde se establecen los *hitos*, cuando desaparezca uno ó varios de estos, será muy sencillo volverlo á colocar en los puntos que antes se hallaban, por la operacion del *replanteo*.

990. Escusamos entrar aquí en las formalidades y prescripciones legales para la operacion del *apeo*, que son las mismas que para el *deslinde* y que no forman parte de nuestro próposio

991 Pero modernamente se ha pensado en sustituir con los árboles los cotos ó mojones de piedra. Hace muchos años, que en las operaciones de deslinde que se me han ofrecido ejecutar, he inculcado á los propietarios la importancia y conveniencia de hacer esta sustitucion y de hacerles ver las ventajas de emplear el arbolado para el apeo de sus tierras, exponiéndoles una série de ellas y además la sencilla de poder guarecerse á la sombra el fatigado labrador y el ganado, en las horas de descanso y del sol abrasador del estío. Pero apegados los propietarios y lo mismo toda la gente rústica á rancias preocupaciones y antiguas costumbres, he tenido el disgusto de que no me hayan hecho ningun caso. Sin embargo, como tengo esta cuestion por importante, no puedo menos de dar noticia á mis lectores, de lo que despues se ha publicado sobre este particular, para que se vea que se piensa ya sobre este punto de una manera séria, y que hay personas respetables y científicas que son de esta misma opinion, habiendo llegado su celo hasta el punto de llevar esta cuestion al Congreso, que la ha tomado en consideracion, y cuyas ventajas que enumeran y que son las que yo he procurado siempre imbuir tanto á los propietarios que se han valido de mí como á mis discípulos, son las que se consignan en los siguientes sueltos que tomamos de varios números de los periódicos *La Correspondencia de España* y *La Nueva Iberia*.

992. *Correspondencia de España* del 26 de Marzo de 1868:—«En la última conferencia del Sr. Galofre en la sociedad económica matritense, manifestó entre otras ideas sumamente razonables, lo conveniente que es hacer plantaciones de árboles en todos los linderos de las fincas destinadas á labor, como medio de dulcificar el clima, atraer las lluvias, tener leña con el tiempo y fijar hitos estables para la integridad de las propiedades rústicas. El Sr. Galofre combatía con grande decision la vulgar idea de que los árboles atraen los pájaros y que la sombra daña á los cereales.»

993. *Nueva Iberia* del 3 Mayo de 1868:—«El pensamiento de fomentar en España la plantacion de arbolado, asunto de que ya nos hemos ocupado en varias ocasiones, y que no dejaremos de recomendar por la verdadera importancia que en sí tiene, vá fijando la atencion de algunos hombres pensadores, y entre ellos la del Sr. D. Pascual Medina, que acaba de dirijirnos una extensa carta en apoyo de esta idea.

Las ventajas que proporciona el arbolado, reconocidas por todos los agricultores notables, tropiezan entre nosotros con preocupaciones arraigadas que es indispensable destruir. Aquí, el labrador, sin saber por qué, profesa generalmente aversion á los árboles, cuando estos debieran ser sus mejores amigos, porque atraen las lluvias, refrescan y purifican la atmósfera, proporcionan frutos delicados, producen las maderas de construccion, suministran abundante combustible y convierten en ricos bosques y verdes praderas, campos que, abrasados por el sol y agostados por la sequía, se asemejan á los desiertos arenales del Africa.

Desarrollando la plantacion, no solo obtendrían los labradores, al cabo de algun tiempo, pingües rendimientos, sin perjuicio de los demás cultivos, sino que acrecentarían con ellos el valor de sus propiedades, y alejarían el riesgo de las prolongadas sequías que en la actualidad esterilizan sus afanes.

El Sr. Medina nos excita en su carta á que aconsejemos un dia y otro la plantacion de moreras, porque la sombra de estos árboles favorece el desarrollo de los cereales, ganando éstos en lozanía, y por consiguiente en estimacion.

Veinte moreras distribuidas en los linderos de cada tahulla de tierra darian, á juicio del comunicante, y á costa de bien poco trabajo, un aumento considerable al valor de la propiedad rústica, y otro aumento no despreciable en la produccion.

Nosotros no discutiremos acerca de la preferencia en la clase, porque cada territorio optará por los que mejor se adapten á las condiciones de su suelo, ó con menor dificultad se aclimaten y produzcan. Lo que sí haremos en todas ocasiones y á todas horas es encarecer la conveniencia de poblar de arbolado nuestro suelo: frutales, moreras, olmos, álamos, chopos, pinos y robles, segun convenga al suelo y dé mayores utilidades en determinados países. Árboles y canales de riego: hé aquí lo que ha de aumentar la hermosura y la riqueza de este suelo; hé aquí lo que deben procurar nuestros agricultores; hé aquí lo que están obligados á promover el Gobierno, las Diputaciones, los Ayuntamientos y las Sociedades de Amigos del País, por cuantos medios estén á su alcance.»

994. *Correspondencia de España* del 5 de Mayo de 1868:—«La proposicion sobre fomento de arbolado leida hoy al Congreso dice así:

Artículo 1.º En todos los pueblos de España se procederá á la formacion de uno ó más viveros de cuenta del Ayuntamiento, para cria y plantío de arbolado.

2.º Todo labrador ó labradores que cultiven, suya ó agena, una tierra mayor de 30 áreas, están obligados á plantar los árboles que puedan caber en los linderos de la misma á la distancia de 15 á 20 metros cada uno, cuidarlos y reponerlos si perecen. Al efecto, el Ayuntamiento dará gratis los plantones, y si hubiese sobrantes los dará tambien á los labradores de tierras menores de 30 áreas si voluntariamente quisieren plantarlos.

3.º La propiedad de los árboles y todos sus aprovechamientos pertenecen al dueño de la finca. No se puede cortar ramaje hasta que la planta tenga 8 años de vida. El tronco no puede quitarse sin justificar la reposicion de tres plantones puestos por cada árbol arrancado, ó bien el agrupamiento en propiedad de la finca inmediata. Los plantones muertos se repondrán todos los años en igual número.

4.º Los árboles colocados en los puntos principales de las fincas, servirán de mojones legales desde que tengan cuatro años de vida, y se anotarán en el registro de la propiedad.

5.° Entre finca y finca mayor de 30 áreas, si no existiese zanja ó acequia, se dejará para las mútuas servidumbres privadas una linde neutral de un metro En las menores de 30 áreas, una de 70 centímetros Estas servidumbres privadas, son únicamente para el uso indispensable de los dueños y cultivadores de las fincas cuando no tengan camino, vereda ó sendero público para entrar en ellas.

6.° La tutela y policía de la plantacion general del arbolado en las lindes, corresponde á la administracion. Toda cuestion entre partes á la jurisdiccion ordinaria.

7.° El Gobierno formará el correspondiente reglamento para el cumplimiento de esta ley.

Madrid 29 de Abril de 1868.—El marqués de Bogaraya, J. de Iro y Ortolano, Braulio Rodriguez, Francisco de P. Lobo, U Cardenal, Diaz Ajero, Fivaller.

Este proyecto es debido á la iniciativa del Sr Galofre y está conforme con las ideas que, segun dijimos en su dia, emitió en la Sociedad de Amigos del País.»

995. *Correspondencia de España* del 21 de Mayo de 1868:—«El proyecto de ley sobre plantacion general de arbolado en las lindes, que el Congreso ha tomado en consideracion, ha producido en toda España muy buen efecto, y todos los dias reciben felicitaciones el autor que le ha redactado y el marqués de Bogaraya que le apoyó.

Alguno hace la objecion de que no se puede gravar á la propiedad con esta obligacion; pero téngase en cuenta, que lejos de gravarla, se la beneficia, dándole árboles para que sirvan de mojones, para que los que la labran tengan leña y madera de edificacion, para que se consigan lluvias suaves y benéficas, y para que se salven las cosechas y mejore la salud pública.

En Francia hay la buena costumbre de plantar un árbol cuando nace un hijo, y en Prusia una ley obligaba á presentar un certificado de haber plantado dos árboles á los que contraian matrimonio, y hoy tienen tanto arbolado, que no necesitan hacer uso de esta ley, que hace mucha falta en España.»

996. Por último, para corroborar más y más la importancia que debe darse al arbolado, hasta dentro de las mismas poblaciones, copiamos á continuacion el siguiente suelto:

Correspondencia de la mañana del 13 de Junio de 1875:—«Cada árbol ordinario de los que sirven para la ornamentacion y el saneamiento de la atmósfera en el interior de París, cuesta *ciento ochenta francos*, comprendidas las jaulas de hierro para defenderlos cuando aun son débiles, y el blindaje de guijarros con que se envuelven las cañerías del gas, para preservar la vegetacion contra el efecto deletéreo de las fugas. Y, sin embargo de ese elevado precio, cada vez se considera en Francia más necesario el arbolado dentro de las poblaciones, que en nuestro país ha tenido hasta ahora tantos enemigos, especialmente entre los labradores de muchas grandes comarcas.»

Por último, y para hacer constar que no se abandona este punto tan importante, *La Correspondencia de España* del 6 de Octubre de 1875, pone lo siguiente:

«*El Eco de España* dice, que la sequía prolongada impide la siembra en Castellon; que se ha perdido la cosecha de la oliva en Andalucía y la de garbanzos en Castilla, y escitará en su dia á las Córtes para que fomenten la plantacion de árboles con medidas obligatorias.»

997. *Apeo del término municipal de un pueblo*.—Se emplea tambien el sistema de *acotamiento* ó *amojonamiento*, colocando en todos los puntos notables, en vez de los cotos de piedra que se ponen en las posesiones particulares, otros cotos altos ó postes de fábrica de piedra y cal con el objeto de que se distingan bien de lejos.

998. *Observaciones*.—La naturaleza nos presenta ciertas *señales*, que llamaremos *señales naturales*, para distinguirlas de las otras que hemos explicado y que son *artificiales* por intervenir el arte ó la mano del hombre, y podemos atenernos á estas indicaciones manifiestas que ofrece el terreno, para la separacion entre sí de las diversas propiedades. Tales son la diferencia de altura de terrenos inmediatos que señalan un límite entre los predios superior é inferior; cuando la separacion se verifica por una cañada, un rio sea ó no navegable, canal navegable ó de riego, carretera, camino, sendero, vereda, arroyo ó paso de aguas de cualquiera clase; cuando en una posesion rústica hay una casa ú otra construccion cualquiera, que se presenta como término ó límite de una ó varias propiedades: cuyos accidentes y los demás que pudieran ofrecerse deben preferirse, siempre que sea posible y conveniente, á las demás clases de apeos, por ser señales más permanentes y que no están expuestas á ser removidas de su sitio ni á ser destruidas por la mala fé de los hombres, ni por los malos temporales. Estas señales naturales se aprovechan tambien en el *apeo* del término municipal de un pueblo, en combinacion con los altos cotos ó postes.

999. **Del conocimiento y clasificacion, análisis química y tasacion de los terrenos**.—La tierra ó sea la costra superficial, sobre la cual ejerce su insdustria el labrador, es una mezcla de sustancias minerales y de materias orgánicas. Son las primeras el resultado de la descomposicion de diferentes rocas y por medio de ellas se fijan las raices de las plantas, sirviéndolas de apoyo y trasmitiéndolas una parte de las sustancias que son necesarias para su desarrollo, así como igualmente el calor y la humedad que les son necesarias. Las segundas, compuestas de los restos de los animales y de los vegetales, reducidas al estado de *humus* ó *mantillo* forman el esencial alimento de las plantas.

Distínguense en la Agricultura tres clases principales de sustancias minerales que son: *la arcilla*, *la arena*, *y la caliza* ó *calcárea*.

1000. La *arcilla* presenta los siguientes caractéres; absorbe con facilidad la humedad, se pega á la lengua y se hace tenaz y adherente cuando contiene cierta cantidad de agua, siendo susceptible de recibir en este estado cuantas formas quiera darle la mano del hombre. Cuando se halla saturada de agua, ó lo que es lo mismo, cuando ha absorbido toda la de que es capaz, no admite más ni la dá paso, consistiendo en esta propiedad de la arcilla el que algunas tierras sean excesivamente húmedas. Un banco de arcilla superficial, da lugar á la formacion en los campos de lagunas de agua estancada, pues no penetrando en el terreno las aguas permanecen en la superficie hasta que las evapora el calor del sol. Bajo la influencia de los hielos, cuando la arcilla está húmeda se resquebraja, y por el calor, una vez evaporada el agua que ha absorbido, se presenta más ó menos dura, pierde una parte de su volúmen y se esquebraja y agrieta tambien.

1001. La *arena* tiene propiedades completamente distintas de las de la arcilla. No es consistente y el agua la atraviesa sin penetrarla; la deja evaporar con prontitud y no forma pasta con ella crasa ni dúctil, y por último, se calienta con facilidad y conserva por mucho tiempo el calor.

1002. La *cal* está casi siempre combinada en el terreno con el gas ácido carbónico, y se la separa de este por medio de la calcinacion, siendo su carácter distintivo el de fermentar con los ácidos como el vinagre, ácido sulfúrico, etc. Absorbe el agua con facilidad, formando con ella una pasta adherente, que se reduce á polvo despues que se halla bien seca, y su color es blanco ordinariamente.

1003. Aisladas cualquiera de estas tres sustancias, arcilla, arena y cal, no poseen elementos para constituir una tierra labrantía, ó lo que es igual, un terreno propio para el cultivo, pero adquieren esta propiedad cuando se hallan combinadas y las proporciones relativas en que se encuentran en las mezclas determinan las distintas calidades del terreno y dan lugar á la infinita variedad de tierras, que solo se diferencian entre sí por las diversas é insensibles degradaciones de sus colores, y los terrenos reciben los nombres de arcillosos, areniscos ó calcáreos, segun predominen en ellos la arcilla, la arena ó la cal.

1004. Constituyen los terrenos arcillosos las tierras que llaman *fuertes* los labradores, por labrarse con dificultad, necesitar abonos abundantes, aunque tambien los retienen durante algun tiempo y propender á secarse con tanta más rapidez, cuanto más tenaz sea la tierra y más agua retenga. Los mejores medios que pueden emplearse para hacer estos terrenos productivos y evitar el exceso de humedad que les perjudica sobremanera, consisten en las labores profundas dadas antes del invierno, con el objeto de que el hielo divida y deshaga los terrones, los estiércoles que sirven para dar paso al aire y que se pueda introducir en el terreno, los surcos de desagüe y las zanjas abiertas cuando el campo presenta muy poca pendiente.

1005. Constituyen los terrenos areniscos las tierras llamadas *ligeras*, porque ofrecen mucha facilidad para las operaciones del cultivo, si bien esta ventaja se halla compensada con los muchos inconvenientes á que da lugar su naturaleza, pues no admiten mucho abono á la vez y hay necesidad por lo tanto de suministrárselo con frecuencia y dejan de evaporar prontamente la humedad, por lo que es necesario que la labor sea clara, es decir, que haya mayor intervalo entre los surcos y que estos sean profundos, conviniéndoles, por último, que el clima sea más bien húmedo que seco

1006 Los terrenos calcáreos ofrecen las ventajas é inconvenientes de los areniscos, pues al paso que permiten ser trabajados con facilidad, tienen el grave inconveniente de absorber con prontitud los abonos y la sequedad, y el hielo les perjudica mucho. Cuando domina con exceso la cal, se calientan los terrenos y se deshacen con los fuertes calores y con las lluvias continuas se convierten en pantanosos.

1007. Estos diferentes terrenos no se encuentran generalmente en su estado de pureza, hallándose la arcilla, la arena y la cal reunidas con frecuencia en diversas proporciones en un mismo terreno. Si este contiene más de un 60 por 100 de arcilla, recibe el nombre de arcilloso; cuando contiene más de un 70 por 100 de arena se le llama arenisco y tiene algunas veces un color rojo que es debido al óxido de hierro, el cual es nocivo á la vegetacion cuando se halla con demasiada abundancia en el terreno. Los terrenos se llaman calcáreos cuando constan de más de un 10 por 100 de cal

1008 Las tierras combinadas toman nombres particulares. Se llaman *terrenos arcillo-areniscos* aquellos cuya cantidad de arcilla está bien mezclada con la proporcion de arena que contiene, y esta clase de terreno es conveniente al mayor número de siembras, constituyendo por lo tanto los terrenos de mejor calidad en los paises cálidos.

1009. Las tierras llamadas *silíceo-arcillosas* son aquellas en las que entra en mayor proporcion la arena que la arcilla y las *arcillo-calcáreas* y *silíceo-calcáreas* son las que en su composicion entra una porcion notable de carbonato de cal

1010. Existen otros terrenos, con independencia de los expuestos, que son de una naturaleza excepcional y son los de *hornaguera* y los *limosos*. Las tierras de hornaguera se componen de una sustancia elástica, esponjosa, de un color oscuro, y que aunque contiene muchas plantas en parte descompuestas, aun se descubre en ellas su textura fibrosa. Cuando se seca pierde mucho de su peso y se hace inflamable

1011. La hornaguera ó la turba es por lo tanto el resultado de una materia vegetal que ha experimentado un cambio particular bajo la accion del agua y se la encuentra en capas en la superficie de las llanuras y en el fondo de los valles, y aunque el terreno formado por estos despojos es de naturaleza vegetal, no contiene en sí mismo todos los elementos de fertilidad como á primera vista parece. En efecto, el exceso de sustancias vegetales que contiene, es más bien perjudicial que útil y mientras que no está suficientemente desecado y no pierde el principio astringente que encierra, solo produce malas yerbas, los hielos y el calor le perjudican y las lluvias copiosas le convierten en pantanos.

1012. Tambien el terreno *limoso* presenta á primera vista el aspecto de una tierra fértil, y por el contrario es de las más pobres que se conocen, pues muy ligero por su naturaleza, está compuesto de partículas areniscas coloreadas por la descomposicion de los matorrales que de ordinario cubren su superficie. El humus ó mantillo que contiene es rebelde para la vegetacion de las plantas agrícolas, en atencion á no experimentar el suelo la influencia del aire.

1013. Por último, hay que tener presente, que por ventajosa que sea la composicion mineral del terreno, no se hallará en disposicion de producir buenas y abundantes cosechas, si no contiene la cantidad suficiente de humus ó mantillo. Esta sustancia es una materia ligera, negruzca, de aspecto térreo y la base principal de la vegetacion y fertilidad, pues al contacto del aire y de la humedad se disuelve y se infiltra en las plantas constituyendo su principal alimento. Su accion sobre el terreno es fertilizar y aligerar las tierras fuertes y dar cuerpo y consistencia á las tierras ligeras. Esta sustancia se forma más pronto en los terrenos calcáreos que en los areniscos y arcillosos, si bien en cambio la pierden con facilidad estos últimos.

1014. El humus ó mantillo es el residuo fermentado por la descomposicion más ó menos avanzada de las sustancias orgánicas expuestas al contacto del aire y todavía se designa en la actualidad con el nombre de *estiércol vegetal* ó *animal*, segun su procedencia de sustancias vegetales ó animales, y suministra á la agricultura como hemos dicho un excelente abono, obrando al parecer en el acto de la vegetacion no solo por los principios solubles salinos que encierra, sino tambien por la propiedad que tiene, segun las observaciones de Laussure y Humbolt de absorber por su carbono cierta cantidad de oxígeno del aire, produciendo el gas ácido carbónico que descompuesto por las plantas es uno de sus principales alimentos.

1015. Las investigaciones emprendidas por Teodoro de Laussure han demostrado que el estiércol vegetal contiene una cantidad muy pequeña de materia extractiva soluble en el agua y el alcohol, pero que está casi completamente formado de una sustancia pardi-negra que se deslíe en las soluciones alcalinas, y que á pesos iguales contiene más carbono y ázoe y menos hidrógeno y oxígeno que los vegetales que le han producido, y si bien la composicion del humus se acerca en general á la que hemos indicado, varía segun la naturaleza de la sustancia orgánica que la produce.

1016. Hay otras diversas causas, independientes del humus ó mantillo, que influyen en el valor de los terrenos y son las más importantes el espesor de la capa arable ó vegetal, el bajo suelo ó capa inferior donde no penetra la labor, el color de las tierras, su situacion y su posicion.

1017. Se entiende por espesor de la capa arable la profundidad de la tierra vegetal, la cual es homogénea y está mezclada igualmente de humus ó mantillo, siendo esta capa de mucho espesor en los terrenos privilegiados ó de la mejor calidad, pues cuanto mayor es el lecho vegetal, menos sufre el terreno con la humedad y con la sequía que producen las varias estaciones Respecto á las plantas que produce y alimenta, pueden extender con libertad sus raices, y vivir más próximas unas de otras, siendo sus frutos mucho más hermosos y lozanos.

1018. Por el contrario, en los terrenos cuya capa vegetal tiene poco espesor, sufren mucho con las sequías y humedades las plantas que producen, y sus frutos son siempre de mediana calidad, de donde se infiere que es preciso no perdonar ninguno de los medios que puedan conducir á aumentar el espesor de la capa vegetal de esta clase de terrenos, profundizando cada vez más las labores, si es que el bajo-suelo ó capa inferior puede mezclarse útilmente con la capa superior arable ó vegetal.

1019. Siendo el bajo-suelo ó subsuelo la capa de tierra que se encuentra inmediatamente debajo de la capa vegetal removida por el arado, cuando este subsuelo está compuesto de arena ó de materias calcáreas que dan paso á las aguas, se le llama permeable, é impermeable cuando está constituido por un banco de arcilla que impide la filtracion de las aguas. Dedúcese de aquí, que cuando la superficie del terreno es arcillosa convendrá que tenga un subsuelo permeable para que las aguas se filtren, y que por el contrario, cuando la capa vegetal sea arenisca ó calcárea, convendrá que el bajo-suelo sea arcilloso para que las aguas se retengan é impida se seque demasiado pronto su superficie. Hay casos en que el subsuelo permeable es de tal naturaleza que conviene mezclarle con la capa vegetal para corregir los defectos de esta y hacerla más fértil y propia para el cultivo, como sucedería, por ejemplo, si teniendo una capa vegetal arenisca, el subsuelo fuese calcáreo, pues entonces se mejora mucho la capa vegetal mezclándola con el subsuelo que la dará naturalmente más adherencia.

1020 La inclinacion de la superficie del terreno influye tambien mucho en el cultivo, pues una pendiente suave que permite correr las aguas, un país abierto, una superficie plana, son ventajas preciosas para el labrador, y por el contrario las operaciones del cultivo son más pesadas, más difíciles y más costosas cuando el terreno tiene una pendiente rápida ó una superficie muy accidentada (Tomo I; 151).

1021. Los colores del terreno, hay tambien que tenerlos en cuenta, pues las tierras negras, por ejemplo, gozan de la propiedad de absorber y retener el calor, lo que hace que las cosechas sean abundantes, prosperen y maduren perfectamente en los terrenos de esta clase. En cambio, en las tierras rojizas, cuyo color es debido al óxido de hierro, cuando este es en cantidad, es poco favorable para la vegetacion.

1022. Respecto á la exposicion ó situacion de los terrenos, estos varían de valor en igualdad de las demás circunstancias, pues los que están situados al *Mediodía*, sufren más las sequías y están expuestos á ver arrebatados sus productos por los hielos y los deshielos; los situados al *Este* sufren tambien mucho por efectos de los hielos tardíos; los situados al *Norte*, sufren los frios más rigorosos por la falta de sol, y los que están al *Oeste*, sufren muchos perjuicios por la humedad, cuyos resultados son dependientes de la naturaleza del terreno y del clima particular de cada localidad.

1023. Una vez hecha aunque ligeramente la clasificacion de las diversas clases de terrenos, con relacion á las sustancias de que se componen, pasaremos á hacer algunas observaciones con respecto á sus valores, los cuales dependen de un gran número de circunstancias tanto locales como particulares, las cuales no es posible fijar y tratar de un modo absoluto.

1024. Los agrónomos clasifican, por lo general, los terrenos, ya sean de secano, ya de regadío, en tres clases. Pertenecen á la primera, las tierras de mejor calidad y que con menos gastos producen cosechas más abundantes. Correspoden á la segunda las tierras medianas, y á la tercera las de peor calidad. Tambien dividen en las mismas tres clases los sotos, prados, eriales, montes y demás terrenos que están destinados exclusivamente á producir maderas, leñas y pastos, y una vez hechas estas clasificaciones les asignan valores en atencion á sus productos y demás circunstancias. Sin embargo, como estos valores varian en cada localidad, conviene tener muy presentes las siguientes advertencias.

1.ª Un terreno de primera clase, por ejemplo, tiene en igualdad de circunstancias más valor cuando se halla situado en las inmediaciones de una poblacion, que otro de la misma calidad que se encuentre distante de ella, y este segundo si pertenece ó está inmediato á una poblacion por donde pase una carretera ó ferro-carril, vale mucho más que el primero. En efecto, en el primer caso las labores del terreno inmediato á la poblacion son menos costosas que las de aquel que está situado á mayor distancia y en el segundo, los frutos del próximo á una carreterra tienen más fácil y pronta extraccion que los del que está situado distante de la misma. Por lo tanto, estas ventajas é inconvenientes no pueden menos de influir de una manera directa en los valores respectivos de los terrenos.

2.ª Considerados los terrenos con respecto á sus producciones y por lo tanto, como un objeto de comercio, han de pasar necesariamente por todas las alteraciones inherentes al comercio en general, y como el valor del terreno tiene que estar en relacion con sus productos, sufriendo estos alteracion, sea cualquiera la causa que la produzca, necesariamente la han de sufrir aquellos tambien, y pudiera suceder muy bien, que un terreno de primera clase, por ejemplo, que valiera hace algun tiempo á 150 pesetas la fanega, valga en la actualidad 200 ó 250 pesetas, ya porque el pueblo en cuyo término está situado haya aumentado en vecindario ó en su industria y comercio, ó ya tambien por haberse establecido cerca de él una carretera general ó provincial, caminos vecinales, un canal de navegacion ó de riego, un ferro-carril ó cualquier otro medio de comunicacion con las grandes poblaciones ó con el litoral de la nacion.

1024. Resulta de todo lo expuesto que el geómetra, cuando tenga la precision de valorar algun terreno, que es una de las operaciones más difíciles y delicadas si se ha de hacer con exactitud y acierto y á toda conciencia, deberá tener presentes todas estas observaciones y cuantas otras le sugiera su buen ingenio y su práctica, despues de haber reconocido y clasificado préviamente el terreno y de haber procedido á verificar su análisis químico. Asimismo, procurará adquirir los datos exactos de los productos del terreno en cuestion, en el último quinquenio, valiéndose al efecto de los labradores más ancianos y experimentados de las inmediaciones, si bien lo más conveniente sería poder examinar los libros de productos que debieran llevar los labradores propietarios á los arrendatarios, si fuera posible, que no es de esperar, que algun dia la instruccion, el buen sentido y la conveniencia mútua presidiese los actos más importantes de la vida del hombre, reemplazando su inercia, su indiferencia y su vergonzosa apatía. Por último, el geómetra no debe descuidar el adquirir cuantas noticias y datos pueda necesitar y le sugiera el deseo del acierto para salir airoso de su empeño, pues de lo contrario las tasaciones, cuando se verifican por rutina, no se hallarán en relacion con los productos, que es la verdadera base, y dichas tasaciones serán arbitrarias y escandalosas.

1025. *Análisis química de los terrenos.* —En lo que vamos á exponer de una manera sucinta, nos concretaremos á lo que dice J. M. Bailly en su tratado completo de Agricultura teórica y práctica.

Los terrenos ó tierras en que los vegetales se desarrollan y crecen, varían, como hemos dicho, considerablemente en su composicion ó en las proporciones de las diferentes sustancias que los constituyen. Estas sustancias proceden de ciertas mezclas ó combinaciones de algunas tierras primitivas, materias animales ó vejetales en estado de descomposicion y de ciertos compuestos salinos, encontrándose entre las primeras la *sílice*, la *alúmina*, la *magnesia*, la *cal*, el *peróxido de hierro* y algunas veces el *peróxido de manganeso*, y entre los últimos se encuentran el *carbonato de cal* ó creta, el *sulfato de cal* ó espejuelo, el *fosfato de cal* y algunas veces el *sulfato de potasa* y el *nitrato de potasa*.

1026. Las sustancias que acabamos de indicar, que se encuentran ordinariamente en la composicion de las tierras propias para el cultivo de los vegetales, retienen el agua con más ó menos fuerza y existen en proporciones muy diversas en los diferentes terrenos en estado de arena silícea, de arcilla y de tierra caliza, y para determinar las cantidades y descubrir su especie de union, se someten las tierras á los experimentos reclamados por la análisis.

1027. En general, cuando se examina un terreno estéril con objeto de mejorarle, si esto es posible, es menester compararle con otro cercano que sea muy fértil á pesar de hallarse en una situacion análoga. La diferencia que presente la análisis de estos terrenos indicará los procedimientos de mejora que deben emplearse. Si, por ejemplo, el terreno fértil contiene una cantidad mucho mayor de arena ó de sílice que el estéril, el procedimiento consistirá solo en suministrar á este último cierta cantidad de estas dos tierras, ó bien en suministrarle arcilla ó tierra caliza, si contiene estas dos sustancias en cantidad suficiente ó mucho menor que el terreno fértil.

1028. Cuando se quiere examinar la tierra de un campo, es necesario tomar muestras en diferentes puntos á 6 ó 7 pulgadas de profundidad, y luego mezclarlas todas. Sucede algunas veces que en los llanos todo el terreno superior es de la misma especie, pero en los valles y en las cercanías de los rios hay grandes diferencias.

1029. La proporcion de humedad puede evaluarse haciendo secar un peso conocido de la tierra que se analiza, y teniendo cuidado en no descomponer las sustancias orgánicas que en ellas se encuentran. Despues de esta determinacion, deben separarse el casquijo y las piedras, pesarles en seguida y asegurarse de cuál es su naturaleza por medio del ácido hidroclórico ó nítrico. Si el casquijo ó las piedras están formados de creta ó carbonato de cal, se disolverán con efervescencia, y permanecerán insolubles si la sílice es quien forma su base.

1030. Los terrenos, áun prescindiendo del casquijo y de las piedras que contienen mezcladas en cantidad variable, contienen una cantidad mayor ó menor de arena fina, cuya separacion se logra fácilmente removiendo por espacio de algun tiempo la tierra en el agua. Como la arena es más pesada se precipita en menos de un minuto; luego, se la recoje en un vaso por decantacion, y despues de haberse secado se la pesa. Tambien por medio de un ácido puede conocerse su naturaleza tan fácilmente como la del casquijo.

1031. Las *partes térreas más ténues y la materia animal y vegetal*, menos pesadas que la arena, permanecen más tiempo suspendidas en el agua, y para separarlas se hace filtrar el líquido en un papel.

1032. Con respecto al agua que ha de servir para esta operacion debe saberse que contiene las *materias salinas y las materias orgánicas solubles*, si es que las hubiese en la tierra, y se la hace evaporar enteramente en una cápsula para pesar el resíduo y examinarlo aparte.

1033. La *materia dividida del terreno*, separada por la filtracion, es la que más importa conocer, porque ordinariamente contiene restos de materia orgánica, sílice, alúmina, peróxido de hierro, carbonato de cal y algunas veces carbonato de magnesia. Se calcina una porcion en un crisol para conocer el peso de la materia orgánica por la pérdida del peso experimentado; pero como una parte de esta pérdida es tambien debida al ácido carbónico que proviene del carbonato calizo, se estima una cantidad de éste por la pérdida que experimente este peso de tierra disolviéndola en una cantidad conocida de ácido hidroclórico debilitado ó diluido, y restando entonces este último peso del que la masa experimenta, se tiene con la calcinacion el de la materia orgánica.

Se trata despues el resíduo de la calcinacion con el ácido hidroclórico hirviendo en un pequeño recipiente de vidrio, y todos los óxidos se disuelven, á excepcion de la sílice que se recoje en un coladero, y despues de haberle lavado bien en agua destilada caliente, se debe calcinar antes de buscar su peso.

La disolucion hidroclórica se precipita por una disolucion de bicarbonato de potasa. El peróxido de hierro, la alúmina y la cal quedan separados y la magnesia permanece filtrada en la disolucion, de la cual puede retirarse haciéndola hervir.

1034. *El precipitado formado por el bicarbonato de potasa* se recoje por decantacion ó filtracion, y se le mete todavía húmedo en una solucion de potasa cáustica y se la hace hervir para quitar la alúmina que en seguida se separa de esta solucion alcalina por medio de otra de hidroclorato de amoniaco.

1035. La *porcion del precipitado insoluble* en la potasa no contiene más que el peróxido de hierro y el carbonato de cal, y se les vuelve á disolver en el ácido hidroclórico. Añadiendo en seguida amoniaco, el peróxido de hierro se aisla de la cal que queda sobrenadando en el líquido, y á su vez se la precipita tambien por medio de una solucion de carbonato de potasa.

1036. Cada uno de los *principios separados* por el indicado método debe ser muy *calcinado y pesado,* á fin de conocer en qué cantidad se encuentra en la muestra de tierra sometida al análisis.

1037. Todos los reactivos de que hemos hablado para analizar las tierras, se encuentran muy baratos en todas las droguerías y boticas. Los utensilios ó recipientes necesarios para ejecutar las diferentes operaciones de que hemos hecho mencion, son los siguientes, que no son muy numerosos ni costosos.

1.° Una cápsula de porcelana A colocada sobre un hornillo H (figura 360; lám. 34), para secar un peso determinado de tierra y conocer la porcion de agua que contiene.

2.° Un gran vaso cilíndrico de vidrio V (fig. 361; lám. 34) para separar por decantacion en el agua la arena de la parte fina de la tierra.

3.° Un pequeño matraz M de vidrio ó recipiente (fig. 362; lám. 34) con su hornillo H′ para tratar la tierra por el ácido hidroclórico á fin de disolver todos los principios solubles en este ácido.

4.° Un crisol con cobertera C de porcelana ó de tierra fina (fig. 363; lám. 34), para calcinar los diferentes productos extraidos por la análisis.

5.° Un gran hornillo ordinario H″ (fig. 364; lám. 34), en que se coloca el crisol C en medio de las ascuas para una calcinacion de rojo oscuro.

1038. *Tasacion de los terrenos.*—En esta importantísima y delicada cuestion nos limitaremos únicamente á exponer la fórmula y la aplicacion que de ella hace, el eminente y laborioso arquitecto Sr. D. Félix María Gomez, y que están insertas en el *Prontuario para uso de los Arquitectos,* publicado por la Junta Directiva de la Sociedad Central de Arquitectos.

Dicha fórmula, que sirve para determinar el valor en venta de la fanega de tierra de secano ó de riego, es la siguiente:

$$a = \frac{p - e}{f - 1} \qquad [26],$$

«En esta fórmula a representa el valor en reales de la fanega de tierra de secano ó de riego; p el término medio del producto anual expresado en reales y tomado en un quinquenio de las diferentes semillas que produce la fanega en la localidad y marco que se considere; e el importe anual de los gastos de cultivo, recoleccion, accesorios, etc., de la fanega de tierra del marco y localidad que se considere, y f el valor de un real aumentado de sus intereses al tanto por 100 al fin de un año, y segun la clase y calidad de la finca, segun la tabla siguiente:

FINCAS RÚSTICAS			VALORES
Tierras de labor			$f = 1{,}03$
Viñas			$f = 1{,}05$
Olivares			$f = 1{,}06$
Debesas	Primera clase		$f = 1{,}02$
	Segunda clase		$f = 1{,}025$
	Tercera clase		$f = 1{,}03$
Terrenos eriales con matorrales			$f = 1{,}03$
Tierras de riego	Fijo	Por canal ó arroyo	$f = 1{,}02$
		Por noria	$f = 1{,}025$
	Eventual		$f = 1{,}0275$

»La alteracion de los tipos marcados en esta tabla puede producir grandes males á la Agricultura; por eso recomendamos á los arquitectos, maestros de obras y agrimensores su juiciosa aplicacion. Los peligros, exigencias y diferencia de productos á que está expuesta cada una de las fincas anteriores son distintos, y esta es la razon de su diverso interés.

»1039. Ejemplo.—*Determinar el valor en venta de una fanega de tierra de secano de primera clase del término de Madrid con arreglo á los datos del quinquenio de* 1857 á 1861.

Preparacion y manera de deducir el valor de e.

Gastos de cultivo.

		Reales.
Abono	Basura	8
	Trasporte y extension de la basura	14
	Suma	22
Labor	Alzar	20
	Binar	18
	Prepararla para sembrar	14
	Suma	52

		Reales.
Siembra	Simiente	58
	Al sembrador	1
	Vuelta de cubrir la semilla	13
	Suma	72
Conservacion de la semilla	Escarda	6
	Andadura	1
	Suma	7

Gastos de recoleccion.

Siega	Siega (mano de obra)	16
	Atillos	2
	Suma	18
Trasporte y trillado	Por los viajes de acarreo	18
	Por la trilla	20
	Por la limpia	3
	Suma	41
Almacenaje	Encierro del grano } inclusos derechos de	14
	Encierro de la paja } puerta	6
	Suma	20

Accesorios.

Gastos generales	Interés del capital de la yunta	4
	Desperfectos de aperos de labor	6
	Interés del capital invertido en la casa de labor y conservacion de esta finca	12
	Herraje y asistencia del veterinario	8
	Por el 30 por 100 de barbechera	12
	Por la contribucion territorial	10
	Suma	52
	Importe total de los gastos ó valor de *e*	284

Preparacion y manera de deducir el valor de *p*.

Productos ó valor de p

Por la semilla que produce una fanega de tierra	406
Por la paja correspondiente á la semilla	32
Por la rastrojera	4
Importe total de los productos ó valor de *p*	442

Sustituyendo ahora en la fórmula [26] en vez de e, p y f sus valores, será

$$a = \frac{442 - 284}{1{,}03 - 1};$$

efectuando operaciones tendremos;

$$a = \frac{158}{0{,}03} = 5266 \text{ reales.}$$

»Luego en el quinquenio referido, el valor en venta de la fanega de tierra de secano de primera clase del término de Madrid es de 5.266 rs., cuyo valor aumentará ó disminuirá segun valgan los granos, etc., razon por la que deben facilitarse á los peritos todos estos datos para evitar divergencias en sus tasaciones.

Resúmen

Siendo el gasto total ó valor de *e*.	1
El abono es	0,077
La labor es	0,183
La siembra es	0,253
La conservacion de la semilla.	0,025
La siega es	0,064
El trasporte y trilla	0,114
El almacenaje	0,071
Los gastos generales	0,183

Siendo el producto total ó valor de *p*	1
El de la semilla es	0,918
El de la paja es	0,0723
El de la rastrojera es	0,0090

»Practicando cálculos análogos para la fanega de tierra de secano de segunda clase y de tercera en el quinquenio expresado, resulta:

Valor de la fanega.

	Reales.
1.ª clase	5.266
2.ª clase	3.300
3.ª clase	1.000

»Si se comparan estos valores con los precios que hace algunos años tenian las fanegas de tierra del término de Madrid, se encontrará que resultan dobles, y tiene que ser así, porque el trigo, cebada, etc., ha subido el doble y algo más de precio del que tenia anteriormente, y por consiguiente hoy valen más las tierras porque valen más los granos.»

FIN DEL SEGUNDO Y ÚLTIMO TOMO.

RECARTE.

LOBO, NÚMERO 8, MADRID

TAQUIMETRÍA.

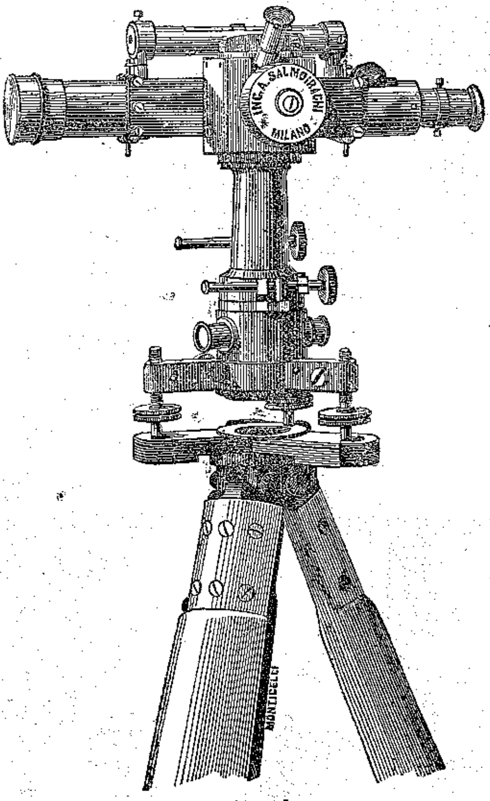

Fig. 1.ª

Números.			Pesetas.
1	Taquímetro inglés de 4, 5 y 6 pulgadas	1.000, 1.150 y	1.300
2	Id. id., construccion italiana 16 cm		1.050
3	Id. Moinot, 15, 17 y 20 cm	950, 1.150 y	1.300
4	Id. Porro, 16 cm		900
5	Ciclo-Clepe, gran modelo (fig. 1.ª)		1.500
6	Id. mediano		1.400

Números.		Pesetas.
7	Id. pequeño	850
8	Círculo geodésico de 13 cm., division en 400° con nonius que dá 10′, arco vertical de 160° con doble nonius que dá igualmente 10′, movimiento de coincidencia para los círculos horizontal y vertical, anteojo analático de 12 mm. de abertura, aumenta 8 veces, gran alcance, base de 3 tornillos, un nivel esférico en la plataforma y otro cilíndrico sobre el anteojo; con caja y trípode	300
9	El mismo con orientadora	350
10	El mismo con anteojo telemétrico sin orientadora	268
11	Id. id. id. con orientadora	318
	Funda de cuero para el mismo	15
	Correas en vez de funda	8
	Porta-trípode de cuero	5
12	Círculo geodésico, modelo italiano de 8 cm., division en 400°, con nonius que dá 5′; arco vertical de 120° con nonius que dá 5′, movimiento de coincidencia para el arco vertical, anteojo telemétrico de 22 cm. de abertura, nivel esférico en la plataforma y otro cilíndrico sobre el anteojo; caja y trípode	200
13	Teodolito concéntrico Richer de 12 cm., 360° 1′, círculo vertical completo id., anteojo telemétrico	550

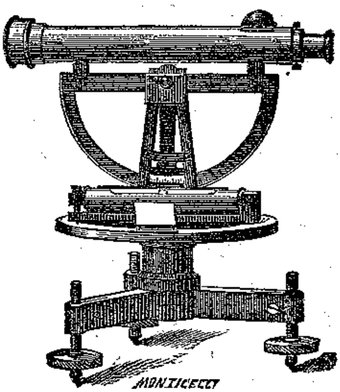

Fig. 3.ª

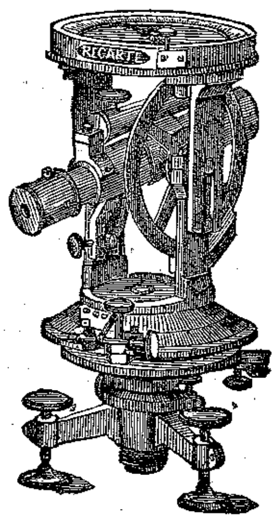

Fig. 4.ª

14	Id. Salmoiraghi de 14 cm., 400° 1′, semicírculo vertical id., anteojo telemétrico, con orientadora (figura 3.ª)	350
15	Id. Breithaupt de 8 cm., círculo horizontal y vertical completos, nonius que dan 1′, anteojo telemétrico, plataforma de tres tornillos (fig. 4.ª)	505

Números		Pesetas
16	Id. id. de 12 cm. id. id.	800
17	Id. completo con dos miras trasparentes provistas de nivel esférico y trípodes á corredera, prisma y cristal de color para el ocular, espejo para iluminar el retículo, prisma de reflexion total para observaciones zenitales y 2 lámparas de Weissbach	1 400

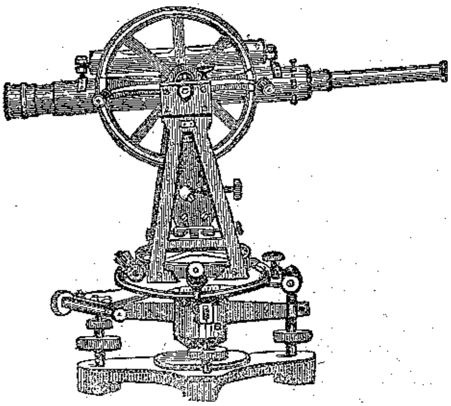

Fig. 2.ª

Números		Pesetas
18	Teodolitos ingleses de tránsito, anteojo telemétrico, aprecian minutos de 3, 4 y 5 pulgadas (figura segunda) 750, 800 y	950
19	Id apreciando 20″, de 5 y 6 pulgadas 975 y	1.175
20	Id. id. 30″ de 5 pulgadas, con nivel sobre el eje y linterna	1.075
21	Id. Id. 40″ de 6 pulgadas, con id. id	1.300
22	Id. ingleses de semicírculo vertical, anteojo telemétrico, apreciando minutos de 3, 4 y 5 pulgadas 625, 700 y	825
23	Id. apreciando 20″ de 5 y 6 pulgadas 850 y	1.050
24	Id. id. 10″ de 6 pulgadas	1.075
25	Id. inglés de tránsito, de bolsillo, 2 ½ pulgadas, anteojo telemétrico, aprecia 1′	675
26	Id. de anteojo excéntrico	505

PANTÓMETRAS.

Números		Pesetas
27	Pantómetra Tragé perfeccionada, con brújula, 2 niveles en cruz, anteojo telemétrico, limbo cónico con 2 nonius que aprecian 1′, 3 tornillos de coincidencia, para el nonius vertical uno, otro para el limbo horizontal y otro para el movimiento total del instrumento; con todo el cuerpo superior y montantes del anteojo fundidos en una sola pieza, base de 3 tornillos	245

Números		Pesetas
28	Id. con la diferencia de no estar fundido en una sola pieza el cuerpo superior.	200

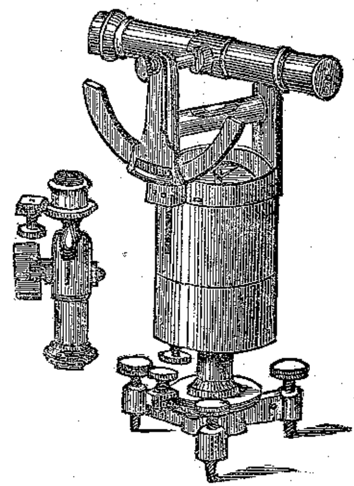

Fig. 5.ª

29	Id. de construccion más sencilla con un solo nonius que aprecia 2′, y cremallera en vez de tornillo de coincidencia para el limbo horizontal (fig. 5.ª)	185

BRÚJULAS.

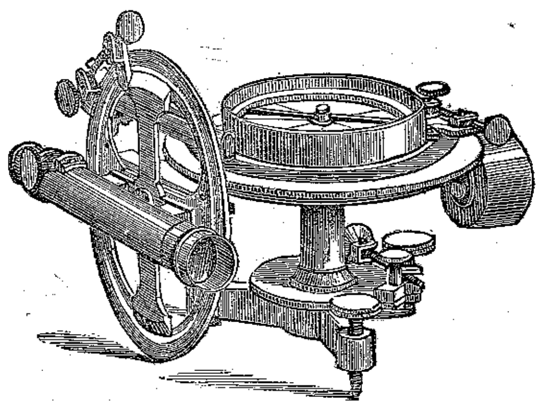

Fig 6.ª

30	Brújula-eclímetro con círculo horizontal de 17 cm., y vertical de 15 $^1/_2$, aprecia 1′, anteojo telemétrico con correccion para la distancia de los hilos, de superior construccion (fig. 6.ª)	650

Números		Pesetas.
31	Id. construccion ordinaria...........................	450
32	Id. id. de metal sencilla, con semicírculo vertical, anteojo ordinario............................	200
33	Id. con tornillo de coincidencia para el movimiento vertical..	225
34	Id. como el núm. 32, juego de nuez..................	130
35	Id. de 19 cm., caja de caoba, círculo vertical completo..	250
36	Id. de 16 cm., metal ó caoba, con índice en sustitucion del nonius................................	85
	Las anteriores brújulas con estadia aumentan......	10
37	Id. de superior construccion, aguja de 6 cm., anteojo telemétrico, círculo vertical completo con nonius que aprecia 5′, base de 4 tornillos que oprimen el eje..	335
38	Id. id con limbo horizontal de 11 cm. y semicírculo vertical de 20 cm. con nonius que dan 3′, anteojo de 21 cm., retículo de cruz, base de 3 tornillos, trípode á corredera para colocarlo á cualquier altura.	475
38 *a*	Id para minas, francesa, con aguja de 9 cm., platillo de 30 cm. dividida en milímetros, semicírculo vertical dividido en $^1/_2$°, armas de suspension y cadena..	195
38 *b*	Aparato exterior dispuesto para recibir la brújula anterior y compuesto de platillo de caoba con un nivel, círculo vertical con nonius que dá minutos, anteojo y juego de nuez..............................	60
38 *c*	Brújula igual al núm. 38 *a* con aguja de 7 cm. y platillo de 25 cm..	172
38 *d*	Aparato exterior igual al núm. 38 *b*.................	60
38 *e*	Brújula de Breithaupt con aguja de 72 mm., semicírculo dividido en $^1/_4$°, platillo-trasportador, armas de suspension, etc..................................	255
38 *f*	Aparato exterior para recibir la brújula núm. 38 *e* con anteojo telemétrico centrado, arco vertical con doble nonius que dá minutos, plataforma de 3 tornillos, trípode de 3 brazos............................	350
38 *g*	Brújula Lingke con aguja de 8 cm., semicírculo dividido en $^1/_5$°, platina trasportador, armas de suspension, etc..	400
38 *h*	Aparato exterior con brújula independiente de la del aparato de interior, círculo vertical con doble nonius que dá minutos, anteojo centrado que dá la vuelta entera, 3 niveles, 2 movimientos de coincidencia, plataforma de tres tornillos y trípode de 3 brazos á corredera que pueden fijarse á cualquier altura...	675

ECLÍMETROS.

39	Eclímetro anteojo analático de 35 cm. círculo horizontal sobre plata 400° 1′, corredera vertical con doble division para tangentes y ángulos, brújula en 360°..	600

Números		Pesetas.
40	Id. anteojo analático de 40 cm., círculo horizontal sobre metal blanco 360° 1′, doble division vertical para tangentes y ángulos, con brújula	450
41	Id. construccion ordinaria	325
42	Id. de pínulas, base de 3 tornillos. 190 á	225

ALIDADAS Y PLANCHETAS.

43	Alidada de superior construccion, anteojo analático, semicírculo vertical $10\,^1/_2$ cm. rádio, division en 360°, con nonius que dá 1′ nivel sobre el anteojo, regla de 54 cm	400
44	Id. id. id. division en 400°, nonius que dá 1′, nivel y declinatoria sobre la regla de 40 cm	350
45	Id. construccion ordinaria, con arco vertical 360° y nivel	75
46	Id. id. con estadia y cremallera.	95
47	Plancheta de 60×66 cm., con trípode y plataforma de 3 tornillos.	254
48	Id. modelo Starke con doble tablero y plataforma de hierro, sistema especial para centrar	350
49	Aparato completo de Starke que comprende la plancheta anterior, alidada, brújula, compás, nivel, cadena, etc.	900
50	Plancheta ordinaria 57×73 cm., trípode á la Cugneau.	135
51	Id. id. 55×65 cm., juego de nuez, sin trípode con rodillos para el papel	45
52	Id. id. id. sin rodillos.	27 50
53	Aparato del capitan Peigné, compuesto de: alidada auto-reductriz, brújula alidada, brújula ruleta y brújula de bolsillo, plancheta y trípode, cuadro gráfico y mira	275

NIVELES.

54	Nivel topográfico de Kern con dos miras de precision, sensible 5″ por línea de París	950
55	Id. Dollond, anteojo de 61 cm., ocular terrestre, con brújula.	800
56	Id. id. con 2 oculares y escala telemétrica id.	850
57	Id. de 35 y $^1/_2$ cm. telemétrico ocular terrestre y brújula	650
58	Id. id. 2 oculares id.	675
59	Id. id. Whatking de 38 cm. 2 oculares, con brújula.	550
60	Id. id. 30 y $^1/_2$ id. id.	500
61	Id. Troughton de 33 cm. ocular astronómico, con brújula	500
62	Id. id. sin brújula.	450
63	Id. Salmoiraghi de 50 cm., aumenta 40 veces, sin brújula	500
64	Id. id. anteojo analático de 38 cm., aumenta 30 veces, círculo horizontal que dá 1′	450
65	Id. id. id. sin círculo horizontal	350
66	Id. anteojo analático de 41 cm., con brújula	300

Números		Pesetas.
67	Id. id. telemétrico de 35 cm., círculo horizontal que dá 1′	300
68	Id. id. sin círculo horizontal, retículo de cruz	225

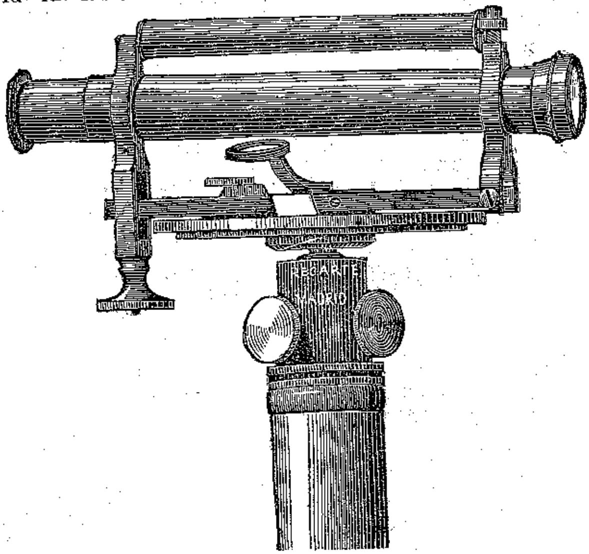

Fig. 7.ª

69	Id. de bolsillo, anteojo telemétrico de 16 cm., círculo dividido que dá 1′ (fig. 7.ª)	155
70	Id. id. sin círculo	127.50
71	Nivel de agua Goulard, con trípode y mira	120
72	Id. sin trípode ni mira	45

INSTRUMENTOS DE REFLEXION.

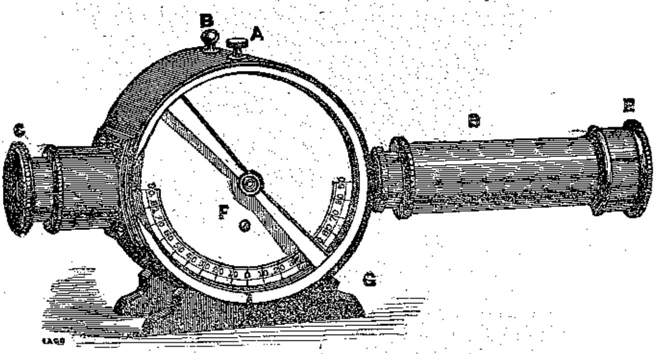

Fig. 8.ª

73 Altazimut. Instrumento que solo mide 55 mm. de diá-

Números | Pesetas.

metro y 30 de grueso, pesando medio kilógramo, con brújula, eclímetro y clinómetro, anteojo de 17 cm., trípode con movimiento universal (figura 8.ª)........ 245

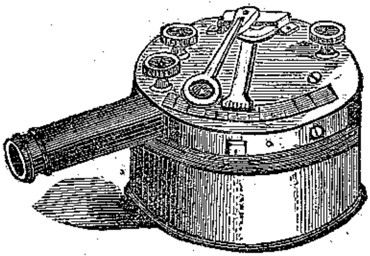

Fig. 9.ª

74 Sextante de bolsillo de 5 cm., bronceado, con anteojo y nonius, que dá 1', 2 cristales azimutales, funda de cuero (fig. 9.ª)........ 125

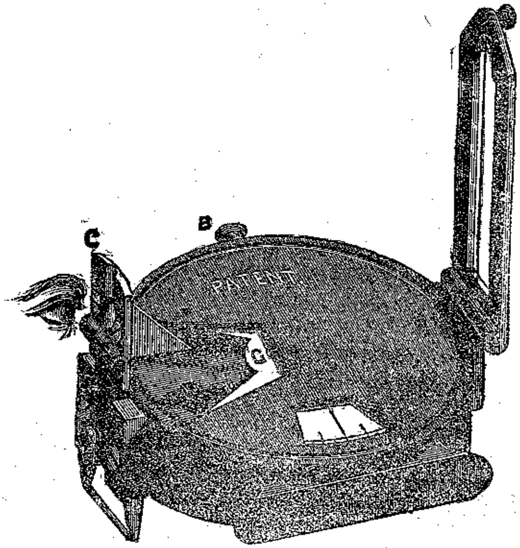

Fig. 10.

Brújulas inglesas barnizadas de negro, con eclímetro y clinómetro que dá directamente el tanto por ciento de pendiente, con rosca para montarlas sobre trípode, y funda de cuero con correas para colgar (fig. 10).

Números		Pesetas.
75	Esferas de papel	85
76	Id. con dos cristales azimutales	100
77	Brújula dividida sobre papel, y eclímetro sobre metal blanco	100
78	Id. con dos cristales azimutales y espejo de reflexion.	115
79	Id. dividida sobre aluminio, eclímetro sobre metal blanco, 2 cristales azimutales y espejo	140
80	Trípode de caoba para estas brújulas, de 3 brazos, con juego de nuez y movimientos horizontal y vertical, para el eclímetro	51
81	Brújula Burnier, dorada, en caja de caoba, con eclímetro, dos botones de suspension, rodilla á la Cugneau	47.50
82	Id. con tres botones de suspension	57.50
83	Id. Kater, sin eclímetro, barnizada de negro, enchufe recto, en caja de caoba	37.50

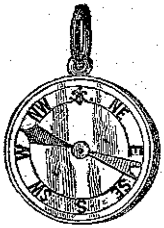

Fig. 11

84	Brújula-dige de oro, lisa, de 20 mm. Los cristales que sostienen la aguja, forman una lente de aumento (fig. 11)	22.50
85	Id. con una cadena alrededor del cerco	30
86	Id. de oro, lisa, esfera de plata dividida de 5 en 5 grados. La aguja puede suspenderse	40
87	Id. montada sobre piedras finas	45
88	Ruleta de oro, de 30 mm. diámetro, dividida en metros, centímetros y milímetros	60
89	Id. con brújula y calendario perpétuo	75
90	Id. de plata, sin brújula ni calendario	35
91	Id. de nikel, 25 mm., id	12.50
92	Prisma de 90°, 29 mm. de base	16
93	Id. id., 45 mm. id	24
94	Id. de 45 y 90° en un solo prisma	45
95	Id. de 45, 90 y 180° id	54
96	Id. Bauernfeind de 90°	33.50

PLANÍMETROS.—PANTÓGRAFOS.

97	Planímetro polar de Wetli y Starke	625
98	Id. de Starke	195
99	Id. de Amsler, modelo pequeño, para diferentes unidades, de laton ó metal blanco 70 y	95

Números		Pesetas
100	Id. id. para superficies muy grandes ó muy pequeñas	175
101	Integrador de Amsler........................	277,50
102	Pantógrafo modelo Gavard, de 90 cm., que permite reducir cuadrados de 66 cm. de lado	375
103	Id. id. 70 cm., cuadrados de 58 cm	275
104	Id. id. 56 cm., id. de 40 cm....................	195
105	Id. Salmoiraghi, gran modelo....................	440

PERAMBULATOR Ó RUEDA PARA MEDIR CAMINOS.

Consiste, como indica la figura, en una gran rueda de circunferencia conocida, cuyo eje está unido á un bastidor, y un sistema de engranajes registra en un cuadrante el número de sus revoluciones, convertidas ya en medida métrica. La exactitud de la medida es mayor que la que ofrece la cadena; y en cuanto á rapidez y facilidad en los trabajos no hay comparacion posible. El cuadrante lleva dos círculos divididos y dos agujas; el círculo exterior está dividido en metros, y el interior en hectómetros, y numerados el primero en metros y decámetros, y el segundo en hectómetros y kilómetros.

106	Modelo pequeño, rueda de hierro, 57 cm. de diámetro hasta 10 kilómetros..............................	265

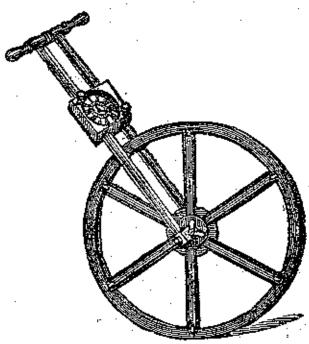

Fig. 12.

107	Id. grande, rueda de madera, llanta de hierro, 86 cm. de diámetro hasta 20 kilómetros (fig 12)...........	350
108	Reglones de madera pintada al óleo de 2 m. 50 y 3 m. 00.................................. 37, 50 y	55
109	Id. con piés de hierro..............................	175
110	Aparato para medir bases, compuesto de cuatro barras de acero rectangulares de 3 metros cada una, montadas sobre otras tantas plataformas, de 3 tornillos, con nonius, microscopios y todos los tornillos de correccion necesarios para verificar el ajuste y nivelacion con la mayor exactitud posible; termómetros para corregir las dilataciones por tempe-	

Números		Pesetas
	ratura, y un aparato para referir exactamente al terreno las medidas practicadas....................	10.500

BARÓMETROS

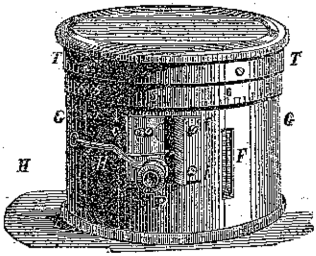

Fig. 13

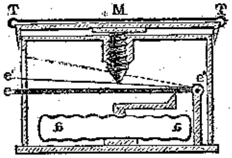

Fig. 14

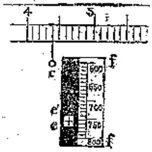

Fig. 15

111	Núm. 1. Barómetro de Marina y de nivelacion. Diámetro 80 mm. Altura 65 mm. (Figs. 13, 14 y 15.).	180
	La sensibilidad de este instrumento permite graduarlo con seguridad á $^{1}/_{10}$ de mm., y siendo el tamaño de cada grado en el instrumento de 2 $^{1}/_{2}$ mm. se puede apreciar fácilmente $^{1}/_{100}$ de mm.	
	Este modelo está destinado á medir alturas cuyas diferencias de nivel no excedan de algunos cientos de metros Habiendo repetido diferentes veces la operacion en un mismo punto, para tomar el promedio, el resultado obtenido con el barómetro comparado con el de un nivel no ofreció más diferencia que 0,m.6 en una altura de 100 m.	

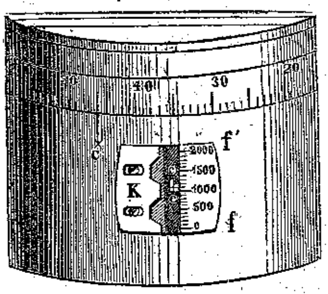

Fig. 16.

112	Núm. 2. Aneróide para la medida de grandes alturas (fig. 16)................................	180
	Tamaño igual al anterior.	
	Alcanza diferencias de nivel de 4.000 á 5.000 m.	

Números.		Pesetas.
113	Núm. 3. Aneróide de bolsillo (fig. 17)...............	120

Fig. 1 Fig. 2

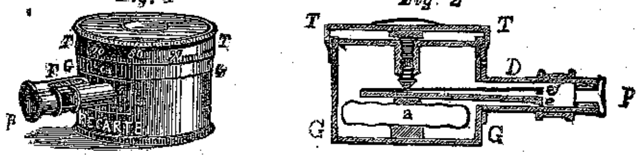

Fig. 17.

	Diámetro 40 mm. Altura 30 mm.	
	Este modelo es de menos precision que los anteriores.	
	A cada barómetro acompaña un termómetro libre y tablas para la correccion por temperatura y cálculo de alturas.	
114	Aneróide de bolsillo, inglés, compensado para toda temperatura, diámetro 50 mm., escala de alturas movible, sistema remontoir hasta 3 000 m., aprecia 5 m..................	121
115	Id. id. id. con brújula..................	146
116	Id. id. escala de alturas movible á mano de — 350 á + 350 m..................	100
117	Id. id. caja de plata, diámetro 38 mm. hasta 2 500 m.	140
118	Id. id. no compensado, 50 mm., escala de alturas fijas hasta 2.500 m., con termómetro..................	65
119	Id. francés, escala fija hasta 2 400 m..................	60
120	Id. id. escala movible hasta 1.700 m..................	47.50
121	Id. id. 45 mm., escala movible remontoir hasta 2.400 metros, con brújula..................	50
122	Id. id. 55 mm., escala fija hasta 2 400 m., con brújula y termómetro..................	40
123	Juego de barómetro, termómetro y brújula en estuche rectangular, escala de alturas movible, hasta 3.000 m., con lente de aumento en el cristal del barómetro, de 35 y 44 mm. diámetro del barómetro.	75
124	Id. de 50 mm..................	80
	Barómetros de montaña con estuche de piel y correas, termómetro libre, de:	
125	13 cm. diámetro escala de alturas fija — 100 á + 3.100 metros..................	100
126	11 cm. diámetro escala de alturas fija — 100 á + 3.600 metros..................	75
127	8 cm. diámetro escala de alturas fija — 100 á + 3.800 metros..................	62.50
128	Barómetro Fortin, escala desde 450 mm., con trípode de metal y estuche de cuero (fig. 19)..................	275

ESTADIAS.—TELÉMETROS.

129	Anteojo Rochon de 75 cm. foco..................	200
130	Id. id. de 60 cm. foco..................	160

Números		Pesetas
131	Anteojos micrométricos de cerdas movibles y disco dividido de 29, 36, 42, 45, 49 mm. de diámetro del objetivo.......... 65, 85, 105, 120 y	135
131 *a*	Gemelos de campo con estadia, modelo del ejército aleman, objetivos de 55 mm., guarnicion de cobre forrada de piel	100
131 *b*	Id. guarnicion de aluminio............	220
132	Telémetro Groetaers.	180
133	Id. Gautier..........	210
134	Id. Roksandic	30
135	Id Gaumet..........	45
136	Id. Bauerfreind	33.50
137	Id. Le Boulengé. 10 á	60

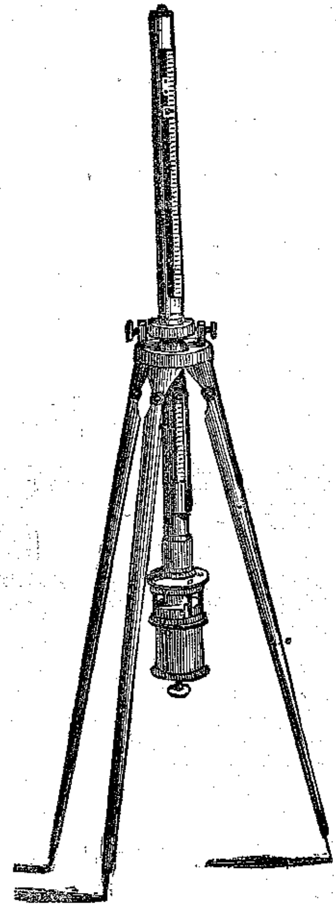

Fig. 19

TRASPORTADORES.

138	Trasportador centesimal, metal blanco, círculo entero, con nonius que dá 1′ de 14 $^1/_2$, 20 y 25 cm. diámetro. 75, 85 y	100
139	Id. con tornillo de coincidencia para el nonius.... 85, 95 y	115
140	Id. sexagesimales, sin tornillo de coincidencia.... 70, 80 y	95
141	Id centesimales, $^1/_2$ círculo, 14 $^1/_2$ y 20 cm. diámetro. 45 y	55
142	Id. sexagesimales, id. id........... 40 y	50
143	Id. centesimal, con regla dividida, modelo especial para taquímetro inglés.	50
144	Id. id. para taquímetro Porro y Clepe.	65
145	Trasportador sexagesimal, inglés, de 2 brazos, 6 pulgadas, 30″..................	197.50
146	Id. id. 7 pulgadas, 20″..................	200
147	Id. id. id. 10″..................	225
148	Id id. 5 pulgadas, con 3 reglas de 26 cm., divididas en milímetros, dos nonius, 1′..................	300
149	Id. id. de Lingke, de 15 cm., con regla, 1′..........	140
150	Id. id. id., 18 cm., id. id..................	170
151	Id. centesimal de talco, medio círculo..........	12
152	Id. id. de cartulina; docena..................	7

REGLAS LOGARÍTMICAS.

Números		Pesetas.
153	Regla logarítmica de boj	70
154	Id de marfil	117,50
155	Id. de metal	115
156	Círculo logarítmico de Salmoiraghi, con instruccion y tablas	40
157	Id. de Sonne, de 8 y 12 cm 40 y	45
157 *a*	Tablas taquimétricas por Cuartero, conteniendo las distancias reducidas al horizonte y las tangentes ó diferencias de nivel de todos los ángulos desde 70° á 130° calculadas de 1′ en 1′ para generadores de 1 á 400 metros, seguidas de un apéndice con las tablas de senos y cosenos naturales de 0° á 50°; en rústica	25
	Encuadernadas en tela ó badana, con índice de escalerilla al costado	30
157 *b*	Libretas taquimétricas; docena	21

ESCALAS.

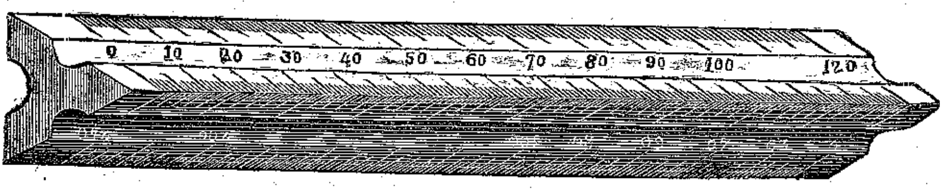

Fig. 18

158	Escalas prismáticas, con seis escalas cada una, de boj, de 20 cm. (fig. 18), una	6,50
159	Id. id. de divisiones muy finas	7
160	Id. id. de 30 cm	8,50
161	Id. id. de 50 cm	18
162	Id. de marfil de 10 y 15 cm 12 y	24
163	Id. de ébano con las divisiones sobre marfil, de 50 cm	75
164	Dobles decímetros de marfil, con dos escalas; docena	72
165	Id. de boj id.	21
166	Id. imitacion á boj, escala natural 7,50 á	12

MIRAS.—JALONES.

167	Miras para taquímetro inglés, en dobles centímetros, 4 metros	50
168	Id. id. id. Moinot en centímetros, id.	60
169	Id. id. id. Porro y Clepe, de 4 en 4 mm., id.	60
170	Id. id. teodolitos y niveles Salmoiraghi, en centímetros; id.	50
171	Id. id. teodolito concéntrico de Richer, id. id.	50

Números		Pesetas.
172	Id. Bourdalone en centímetros ó dobles centímetros, idem....................................	35
173	Id. parlantes de caoba, en dobles milímetros (figura 16), id....................................	40
174	Id. id. id. de 4 m. 50....................................	45
175	Id. de tablilla, 4 id.............................. 30 y	42.50
176	Id. id. 2 y 3 id.............................. 20 y	27.50
	Jalones de pino salvaje curados á fuego, de: Metros 1,50—2—2,50—3	
177	Madera natural 54—66—78—96 pesetas docena.	
178	Pintados blanco y rojo 66—78—96—114 id. id.	
	Con banderin aumenta 12 pesetas la docena.	

ARITMÓMETROS.

179 Máquina para ejecutar toda clase de operaciones aritméticas sin fatiga ninguna, y con mayor seguridad y rapidez que por el procedimiento ordinario.

Una multiplicacion de 8 cifras por 8 se ejecuta en 18 segundos: una division de 16 cifras de dividendo y 8 de divisor exije 24 segundos: la extraccion de la raíz cuadrada de un número de 16 cifras y la prueba de la operacion se ejecuta en 1 $^1/_4$ minutos.

El manejo del aparato es tan sencillo que basta leer la instruccion y practicar media hora para que se note mayor facilidad empleando el *aritmómetro*, que haciendo la operacion por el procedimiento ordinario. Como prueba pondremos un ejemplo de multiplicacion

Se escribe el multiplicando con los botones *A*, que corren libremente en las ranuras verticales.

Si el multiplicador tiene una sola cifra, se dan tantas vueltas á la manivela como unidades tenga esa cifra

En los discos *C* aparece el producto.

En los discos *D* habrá quedado escrito el multiplicador, puesto que en ellos se registra el número de vueltas á la manivela.

Si el multiplicador tiene varias cifras, se multiplica como se ha indicado por la primera cifra de la derecha ó sea las unidades, se corre la platilla *MM* un lugar de izquierda á derecha, y se multiplica por la segunda cifra ó sea las decenas, del mismo modo que se ha hecho con la primera, es decir, dando dos vueltas á la manivela, si la cifra de decenas es, por ejemplo, un 2.

Cualquiera que sea el número de cifras, el procedimiento es siempre el mismo. Cuando se haya multiplicado por la última cifra de la izquierda, aparece en los discos *CC* el producto total.

Se hacen tres modelos que dan productos máximos de 12, 16 y 20 cifras.................. 550, 700 y 1 100

TELÉFONOS.

Números | Pesetas.

Todo el material que se emplee en las líneas provisionales para los trabajos, puede utilizarse y queda ya montado para las líneas definitivas de la explotacion.

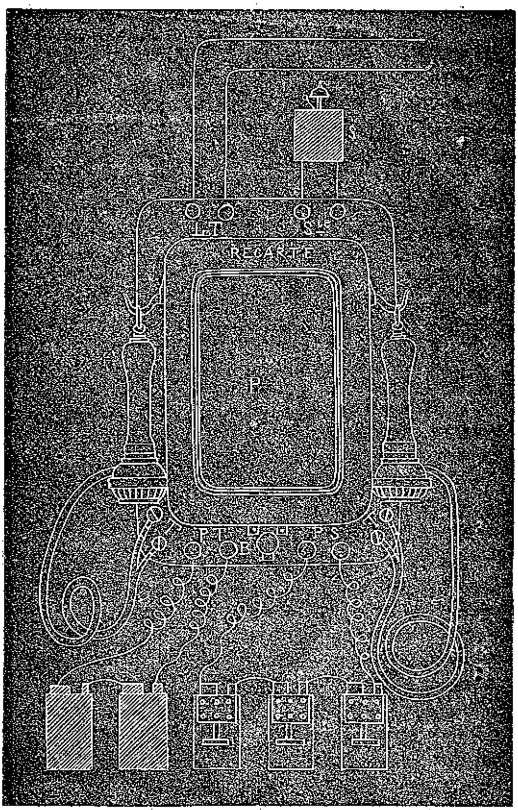

Fig. 20.

180 Electrófono Maiche para distancias hasta 100 kilómetros. Cada estacion consta de 1 trasmisor de carbon (micrófono), 2 receptores Bell, 1 timbre y 3 elementos Leclanché aglomerados (fig. 20)............... 250

181 Teléfono Gower para pequeñas distancias, funcionando sin pilas. Cada estacion consta de 1 teléfono Gower, trasmisor y receptor al mismo tiempo, una

Números.		Pesetas
	corneta resonadora y 1 teléfono reloj.............	140
182	Alambre de hierro galvanizado de 4 mm.; kilómetro.	121
183	Id. id. 3 mm.; id..............................	72
184	Id. de acero fundido id. 2 mm.; id..................	42
185	Id. bronce fosforoso id. 1 mm.; id...................	80

EXPLOSORES PARA VOLADURAS.

186	Explosor magneto-eléctrico para inflamar simultáneamente 12 cebos..............................	375
187	Id. para 8 cebos..............................	250
188	Id. para 2 cebos..............................	150
189	Cable de cobre de 2 conductores de $^{7}/_{10}$ mm., cubiertos de gutapercha y algodon; kilómetro............	300

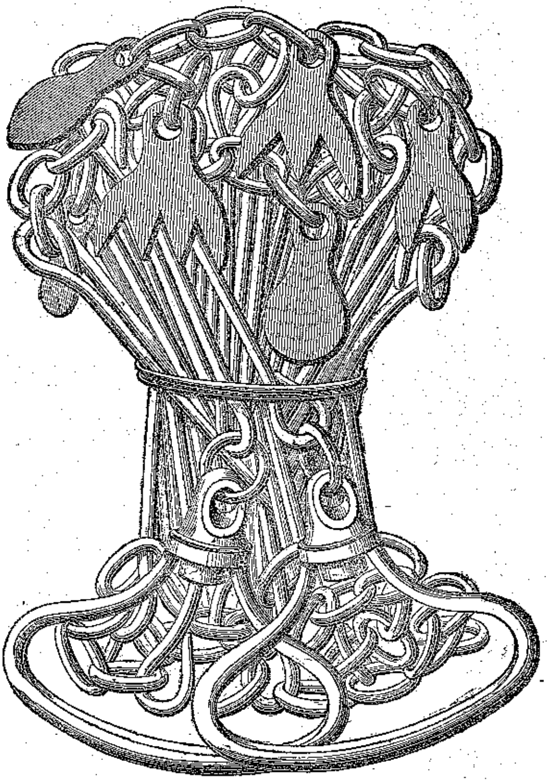

Fig. 21.

190	Alambre sencillo cubierto de gutapercha y algodon, el kilo (120 á 130 m.)...........................	14

Números.		Pesetas.
191	Cebos experimental de Abel, el ciento	30
192	» Blasting, id	70
193	» submarinos, id	80
194	» para dinamita, de 10 cm., id	80
195	» » » sin alambre, id	30

CADENAS.—CINTAS (fig. 21).

196 Cadenas inglesas, con agujas de 10, 20 y 25 metros.
á 10, 15 y 18.50 pesetas.
197 Id. francesas, id. á 5, 10 y 12 »
Cintas metálicas inglesas de:
10, 15, 20, 25 30, 35, 40 y 50 metros.
198 á 8, 10, 11.75, 13.75, 16.50, 20, 23.50 y 30 pesetas.
199 á 10, 14, 16, 19, »
200 á 4.50, 5.50, 7, 8.50, 11, 14.50, 16 y 20 »
El 198 es «en rodetes de cuero rojo.»
El 199 es «en rodetes de cuero endurecido.»
El 200 es «sueltas sin rodete.»
201 Cintas de acero en rodetes de cuero rojo:
de 10, 15, 20, 25 y 30 metros.
á 21, 30, 37.50, 47.50 y 60 pesetas.

Escafandras, Sondas de exploracion, Bombas para agotamientos, Instrumentos meteorológicos, Aparatos y papel para la reproduccion de dibujos por el procedimiento heliográfico, Papel tela superior marca *Imperial*, Papel de dibujo, único depósito en España de la casa Schleicher, Estuches de delineacion, Tinta de China, Colores, Artículos de Faber, Objetos de escritorio, Efectos de campo, Timbres eléctricos, Para-rayos, Hectógrafos, Microscopios, Balanzas de precision.

ÍNDICE.

CAPÍTULO PRIMERO.

IDEAS GENERALES.

	Págs.
Definicion y objeto de la nivelacion	1
Superficies de nivel	2
Diferencia del nivel aparente al verdadero	3
Error debido á la refraccion atmosférica en la observacion de los puntos de nivel aparente	6
Correccion de la diferencia del nivel aparente al verdadero y de la refraccion	7
Aplicacion de los principios establecidos á la determinacion del verdadero desnivel entre dos puntos	9
Tablas de la diferencia del nivel aparente al verdadero y de la elevacion causada por la refraccion	10
Determinacion del verdadero desnivel de dos puntos, independientemente de las correcciones de la diferencia del nivel aparente al verdadero y de la refraccion	16
Superficies de comparacion	17
Objeto de la nivelacion en las aplicaciones ordinarias.—Planos de comparacion.—Cotas referidas á ellos	18

CAPÍTULO II.

NIVELACION POR ALTURAS.

Instrumentos.

	Págs.
Division de la nivelacion con respecto á los procedimientos que se emplean para obtener el desnivel entre dos puntos	19
Instrumentos de la nivelacion por alturas.—Niveles y miras en general	20
Miras generalmente usadas.—Mira de corredera ó de tablilla	Id.
Mira parlante	23
Niveles.—Nivel de perpendículo ó de albañil	25
Límite del empleo del nivel de perpendículo	26
Terazi	27
Nivel-péndulo de Picard	Id.
Nivel de agua	28
Errores debidos á la capilaridad y á la diferencia de diámetros de los tubos	29
Límite del empleo del nivel de agua	32
Nivel de aire	33
Límite del empleo del nivel de aire	Id.
Nivel de aire con pínulas	34
Verificaciones y correcciones	35
Nivel de pínulas de Chézy	38
Niveles de aire con anteojo — Nivel de Lerebours	40
Verificaciones y correcciones	41
Nivel de Dollond	42
Verificaciones y correcciones.—Primer método	43
Segundo método	Id.
Nivel de Chézy	44
Verificaciones y correcciones	46
Nivel de Egault	Id.
Nivel de Troughton	48
Verificaciones y correcciones	49
Primer método	Id.
Segundo método	50
Nivel de Gravatt's	51
Verificaciones y correcciones	52
Nivel con dos anteojos	53
Nivel-círculo de Lenoir	Id.

Págs.

Otros diferentes niveles.......... 54
Nivel de reflexion.............. 62

CAPÍTULO III

—

PROBLEMAS DE NIVELACION.

Problema general de la nivelacion.................. 64
Estaciones de nivel.—Nivelacion simple y nivelacion compuesta.............. 65
Marcha que se sigue en las operaciones de la nivelacion compuesta.............. Id
Acotacion de los puntos del terreno............. 68
Primer método.............. Id.
Registro de la nivelacion...... 69
Cálculo de las cotas.......... Id.
Comprobacion de los cálculos. 70
Segundo método........... Id.
Observacion general acerca de los puntos que deben acotarse................... 73
Comprobacion de las operaciones de nivelacion......... Id.
Obstáculos que suelen presentarse en la resolucion del problema general de la nivelacion.................. 74
Métodos particulares para la determinacion del desnivel entre dos puntos.......... 75
Método de la nivelacion recíproca.............. Id.
Método de Egault.......... 76
Problemas particulares de nivelacion.—1.° Hallar un punto cuyo desnivel con otro dado sea igual á una cantidad determinada......... 77
2.° Dado un punto de la superficie del terreno, hallar otro que esté de nivel con el primero.................. Id.
3.° Trazar en el terreno una línea cuyos puntos se hallen en un mismo plano horizontal.................... 78
4.° Hallar el punto más alto ó más bajo de una línea dada. Id.
5.° Hallar el punto más alto ó más bajo de una superficie.. Id.

CAPÍTULO IV

—

PRÁCTICA DE LA NIVELACION POR ALTURAS

Págs.

Operaciones de nivelacion por medio del nivel de perpendículo y reglones.......... 79
Empleo del nivel de ampolla de Thévenot.................. 80
Observaciones acerca de la nivelacion con reglones....... Id.
Operaciones con el nivel de agua.—Instalacion del nivel 81
Determinacion de las alturas de mira.................. Id
Causas de error en el uso del nivel de agua........... 82
Observaciones acerca de la nivelacion compuesta, cuando se ejecuta con el nivel de agua.................. Id.
Trasporte del nivel.......... 83
Empleo de la mira de tabla... Id.
Lectura é inscripcion del golpe de nivel.............. 84
Uso del nivel de agua con tubo de goma elástica......... 85
Operaciones con miras y niveles de perpendículo ó de ampolla, montados sobre trípodes.................. Id
Niveles de pínulas......... Id.
Niveles de anteojo.......... Id.
Causas de error en el uso de los niveles de anteojo......... 86
Determinacion de la distancia límite á que deben darse los golpes de nivel para un instrumento dado........... Id
Determinacion del rádio de curvatura del tubo.......... 87
Influencia del mayor ó menor número de estaciones en el resultado de una nivelacion. Id
Observaciones acerca del grado de aproximacion en el resultado general de las operaciones ejecutadas con un nivel. 88
Empleo de la mira parlante... Id.
Error debido á la inclinacion de la mira con respecto á la vertical.............. 89
Error que el grueso del hilo del retículo produce en la obser-

Págs.

vacion de las alturas de mira 90
Observaciones generales.—Camino que debe seguirse en la ejecucion de las operaciones 91
Instalacion del instrumento y colocacion de las miras 92
Terrenos llanos.—Bosques Id.
Terrenos accidentados Id.
Arenales y terrenos pantanosos 93

CAPÍTULO V.

PERFILES.

Ideas generales 94
Operaciones que deben ejecutarse en el terreno.—Nivelacion y medida de las distancias Id.
Cróquis y registro 95
Casos particulares y obstáculos que se presentan en la determinacion de los elementos necesarios para la formacion de los perfiles 96
Perfiles considerados en varias direcciones.—Perfil longitudinal y perfiles trasversales 97
Determinacion de los perfiles trasversales y su referencia al plano general de comparacion 98
Sondeos Id.
Operaciones de sondeo en los rios, lagos y puertos 100
Cálculo de las mareas 103
Rectificacion de las sondas y su referencia á una misma superficie 105
Operaciones de gabinete.—Cálculo de las cotas 106
Reduccion de las distancias al horizonte Id.
Construccion del perfil 108
Aplicaciones de los principios expuestos á un ejemplo particular 109
Problemas que pueden resolverse con los perfiles construidos 113
Determinacion de las proyecciones horizontales de los puntos del perfil, que tienen cota entera 118

CAPÍTULO VI.

TRAZADO DE LAS CURVAS HORIZONTALES.

Págs.

Generalidades 119
Trazado directo de las curvas horizontales 120
Dificultades que puede presentar el trazado de una curva horizontal.—Escarpes y cortes verticales 121
Escalonados del terreno 122
Observaciones generales acerca del trazado directo de las curvas Id.
Levantamiento del plano de las curvas trazadas 123
Trazado y levantamiento simultáneo de las curvas de nivel 124
Método de las estaciones alternadas 125
Trazado directo de las curvas en un terreno determinado por puntos acotados 126
Aplicacion á los terrenos de mediana y de grande extension 127
Construccion de las curvas en los planos acotados Id.
Determinacion de las curvas de un plano por medio de los perfiles construidos segun las rectas del canevás.—Perfiles auxiliares 128
Representacion de las curvas en el plano de una poblacion Id.
Empleo de la cadena para la determinacion aproximada de las curvas 129
Eleccion de la equidistancia de las curvas 130
Problemas que pueden resolverse en el plano de un terreno determinado por curvas horizontales Id.
Deduccion de perfiles segun direcciones dadas en el plano Id.

CAPÍTULO VII.

NIVELACION POR PENDIENTES.

Generalidades 132
Instrumentos de la nivelacion

	Págs
por pendientes.—Goniómetros de limbo zenital	133
Goniómetro zenital de perpendículo	Id
Eclímetros	Id.
Eclímetro de perpendículo	134
Trigonómetro de Maison	Id
Eclímetro de pínulas	Id.
Verificaciones y correcciones	135
Eclímetro de Chézy	136
Eclímetro de pínulas y anteojo	Id.
Verificaciones y correcciones.	Id.
Tablas de reduccion de las pendientes á los ángulos á que corresponden	137
Problema general de la nivelacion por medio de las pendientes	139
Nivelacion simple.—Con los goniómetros de limbo zenital	Id.
Con los eclímetros	141
Con la plancheta fotográfica	143
Obstáculos que suelen presentarse en la resolucion del problema de la nivelacion simple	Id.
Causas de error en la resolucion del problema de la nivelacion simple.—Defecto de verticalidad del limbo zenital	144
Falta de paralelismo de las verticales de los puntos extremos	146
Límite de la distancia á que puede operarse en razon á la apreciacion del limbo zenital	147
Correcciones á que deben sujetarse los valores hallados por la aplicacion de las fórmulas generales.—Correccion de la altura del instrumento	148
Reduccion al centro de la estacion	149
Correccion de las fórmulas generales de la nivelacion por pendientes	151
Límite del empleo de las fórmulas generales	152
Método de la nivelacion recíproca	153
Aplicaciones de la nivelacion recíproca. — Determinacion del ángulo de refraccion	157
Índice de refraccion	159
Nivelacion compuesta	160
Acotacion de los puntos del terreno	Id
Determinacion directa de la cota de un punto desde el cual se divisa el horizonte del mar	Id.
Dificultades que se presentan en la práctica de la nivelacion por pendientes	162
Método de las estaciones alternadas	Id.
Perfiles.—Perfil longitudinal	163
Cróquis y registro	164
Cálculo de las distancias al orígen y de las cotas	165
Perfiles trasversales	Id
Problemas de la nivelacion por pendientes.—1.º Hallar la pendiente de la recta que une dos puntos dados del terreno	167
2.º Dado un punto del terreno, hallar otro tal, que la recta que los une tenga una pendiente dada	Id
3.º Trazar en el terreno una línea de pendiente dada	169
4.º Hallar por medio del eclímetro la distancia entre dos puntos dados	Id.

CAPÍTULO VIII.

NIVELACION BAROMÉTRICA.

Generalidades	170
Instrumentos de la nivelacion barométrica	171
Termómetros	Id.
Indicaciones acerca de la construccion y graduacion de un termómetro	172
Diferentes escalas termométricas	173
Reduccion á la escala centesimal de las temperaturas señaladas en otra escala diferente	Id.
Tablas de reduccion	174
Barómetro	177
Correcciones de la altura barométrica	184
Tablas de reduccion á 0º de las	

	Págs.
alturas barométricas observadas	186
Diferentes clases de barómetros	190
Barómetro de Fortin	Id.
Barómetro de Gay-Lussac	191
Barómetro aneróide de Vidi	Id.
Barómetro metálico de Bourdon	Id.
Empleo de los instrumentos en la determinacion del desnivel entre dos puntos	192
Fórmulas de la nivelacion barométrica.—Deduccion de la fórmula de Laplace	Id.
Correcciones de la fórmula barométrica	195
Tabla de las latitudes geográficas de las capitales de las diferentes provincias de España	197
Fórmulas de que se hace uso en las operaciones ordinarias de la nivelacion barométrica.—Fórmula de Laplace modificada por Ramond	199
Fórmula de Babinet	204
Fórmula y tablas de Litrow	Id.
Determinacion directa de la cota de un punto, ó su altura sobre el nivel del mar	205
Aplicacion de la nivelacion barométrica á la medida de las distancias	207
Práctica de las operaciones de nivelacion barométrica	208
Diferentes maneras de obtener los desniveles ó alturas verticales por medio de la nivelacion barométrica	Id.

CAPÍTULO IX

MEDIDA DE ALTURAS Ó ALTIMETRÍA.

Generalidades	210
Problemas de la altimetría	211
Problema 1.°—Determinacion de la altura de un objeto cuya base se halla situada en terreno accesible, siendo visible el pié de la altura	Id.
Primer caso.—Cuando el terreno adyacente es horizontal	212
Segundo caso.—Cuando el terreno es un plano inclinado	214
Tercer caso.—Cuando el terreno contiguo es irregular ó muy accidentado	215
Problema 2.°—Medicion de la altura de un objeto cuya base se halla situada en terreno accesible, siendo invisible el pié de dicha altura	216
Primer caso.—Cuando el terreno adyacente es horizontal	Id.
Segundo caso.—Cuando el terreno es un plano inclinado	220
Tercer caso.—Cuando el terreno contiguo es irregular ó muy accidentado	222
Problema 3.°—Determinar la altura de un objeto cuya base se halla situada en terreno inaccesible, siendo visible ó invisible el pié de dicha altura	224
Caso en que los puntos inaccesibles cuya distancia vertical se trata de conocer, son visibles, pero no están en una misma vertical	225
Métodos particulares y empleo de varios instrumentos destinados á la determinacion de las alturas.—Empleo de los instrumentos de reflexion y de la plancheta fotográfica	227
Determinacion de una altura por medio de un espejo	228
Empleo del anteojo altimétrico y de los telémetros	230
Determinacion de una altura por las leyes de la caida de los cuerpos graves y la velocidad del sonido	232
Observaciones generales	234

CAPÍTULO X

REPRESENTACION DEL TERRENO.

Generalidades	235
Operaciones en el terreno.—Reconocimientos y tanteos	236
Medida, nivelacion y orientacion de la base de las operaciones	Id.
Triangulacion de primer órden.—Medida de los ángulos	

Págs.

correspondientes al doble canevás de la planimetría y de la nivelacion 237
Triangulaciones de órden inferior, y operaciones necesarias para los detalles del plano .. Id.
Poligonacion, trasversales, seguimientos de los talwegs y las divisorias, y puntos exteriores referidos á ellos....... 238
Planos de las poblaciones 239
Operaciones de gabinete.—Reduccion de la base al horizonte y al nivel del mar.... Id.
Cálculo de los triángulos de primer órden.—Correcciones de los ángulos............ 240
Correccion del exceso esférico. Id.
Comprobaciones de los ángulos 244
Cálculo de los lados del canevás. Id.
Cálculo de las cotas de los vértices.................... 245
Coordenadas de los vértices.. Id.
Situacion de los vértices en el plano 246
Cálculo de los triángulos de los órdenes inferiores, y determinacion de sus coordenadas... 250
Ligera exposicion del método taquimétrico de Porro...... 251
Proyecciones y cotas de los puntos determinados en los planos parcelarios, las trasversales y los seguimientos, y de los puntos que á estas líneas se refieren.......... 253
Curvas horizontales, que detallan las formas del terreno y completan su representacion geométrica............. Id.
Consideraciones generales acerca de la representacion del terreno............. 254

CAPÍTULO XI

COPIA Y REDUCCION DE PLANOS Y PERFILES

Definiciones............. 256
Problema 1.°—Dada una figura cualquiera, reproducirla en diferente escala, de modo que sus líneas homólogas guarden una relacion dada 257

Pgás.

Angulo de reduccion 261
Cuadrícula.................. 263
Procedimientos que se siguen en las copias de los planos en la misma escala.—1.° Picado.................... 265
2.° Calcado 266
Relacion de las áreas en los métodos de copia y reduccion que anteceden........... 269
Problema 2.°—Dada una figura cualquiera, reproducirla en diferente escala, de modo que las superficies guarden una relacion dada.......... Id.
Instrumentos de reduccion ... 274
Compases de reduccion....... 275
Pantógrafos................ 279
Pantógrafo de Gavard.—Teoría en que se funda la construccion del instrumento....... 280
Descripcion del pantógrafo de Gavard................. 283
Disposicion del pantógrafo en estacion................ 286
Verificaciones y correcciones.. 288
Usos del pantógrafo.......... 290
Aplicacion del pantógrafo al grabado .... Id
Observaciones generales acerca del pantógrafo de Gavard.—Disposicion de las distintas partes del instrumento para facilitar los diferentes casos de copia y reduccion que pueden presentarse......... 292
Fórmulas en que se funda la division de las reglas del pantógrafo de Gavard....... 295
Pantógrafo decimal.......... 298
Pantógrafo de Dollond........ Id.
Micrógrafo de Letellier....... 300
Observaciones generales...... 302

APÉNDICE.

TAQUIMETRÍA

CAPÍTULO XII.

EXPOSICION DEL MÉTODO TAQUIMÉTRICO

Definicion y objeto de la taquimetría 303

Págs.

Determinacion de un punto... 306
Determinacion de las coordenadas rectangulares en funcion de las polares... Id.
Método radiométrico... 308
Empleo de dos ó más estaciones... 309
Paralelismo de los ejes... 310
Diversos procedimientos que se emplean en el método radiométrico... 316
Método radiotómico... 317

CAPÍTULO XIII.

TAQUÍMETROS Y TEODOLITOS CLEPES.

Taquímetros. Generalidades... 322
Taquímetro de Richer... 328
Usos del taquímetro... 332
Verificaciones y correcciones... 335
Taquímetro de Troughton... 340
Usos del taquímetro... 342
Verificaciones y correcciones... 346
Taquímetro de Salmoiraghi... Id.
Usos del taquímetro... 348
Verificaciones y correcciones... 351
Teodolitos Clepes. Generalidades... Id.
Teodolito Clepe mayor... 352
Usos del teodolito Clepe... 357
Teodolito Clepe mediano... 361
Teodolito Clepe menor... 362

CAPÍTULO XIV.

PRÁCTICA DE LA TAQUIMETRÍA

Preliminares... 363

Págs.

Determinacion de la meridiana magnética por medio del teodolito ó del taquímetro... 366
Determinacion de la meridiana astronómica por medio del teodolito ó del taquímetro... Id.
Operaciones de campo... 368
Operaciones de gabinete... 378
Métodos abreviados de cálculo... 393

AGRIMENSURA

CAPÍTULO XV

Definiciones ó ideas generales... 413
Medicion de las áreas por el método taquimétrico... 415
Division de los polígonos... 417
Problemas... 418
Division de los solares... 441
Division de las dehesas... 445
Problemas... 447
Division de los montes... 458
Cortas de árboles... 460
Division de las rentas... 466
Problemas... 467
Deslindes de los terrenos... 468
Trasformacion de los linderos... 469
Problemas... Id.
Deslinde entre dos pueblos... 474
Rectificacion de los linderos... Id.
Problemas... Id.
Apeos... 484
Del conocimiento y clasificacion, análisis química y tasacion de los terrenos... 490

FÉ DE ERRATAS.

Página.	Línea.	Dice.	Debe decir.
96	28	Escafon	Escalon
122	31	Contension	Contencion
»	36	b' á d'	b' á d'
310	40	octogonales	ortogonales
311	9	Id.	Id.
»	13	Id.	Id.
»	16	Id.	Id.
312	25	hallando	hallado
313	36	$\theta-\theta''=\delta\theta$	$\theta-\theta''=-\delta\theta$
316	17	punto A de las rectas	punto A las rectas
318	16	$y=x$ cot. $0'$	$y=x$ cot. θ'
319	20	constituyendo	sustituyendo
324	3	diastimométrico	diastimómetro
333	43	brazos	trazos
335	28	ó sea la altura del instrumento	ó sea la distancia del eje de rotacion al terreno
344	31	$m=0,^{m}02$	$d=0,^{m}02$
402	17	calculada	se calcula
417	35	(Tomo I; 1053)	(Tomo I; 1059)
418	28	[49]	[4]
419	30	trazado las	trazado con las
438	12	$HF=\dfrac{2\times 8640}{130+230}=148$ m	$HF=\dfrac{2\times 8640}{130+230}=48$ m
472	5	por método	por el método
»	18	sustitutir	sustituir
477	4	Figura 330	Figura 355

NOTA. Ha parecido conveniente omitir en las feés de erratas de los dos tomos de esta obra, algunas otras ménos importantes y que se dejan al buen juicio del lector