79-D

Sett 9/71

J. GOMEZ Y PALLETE.

APLICACION
DEL
ÁLGEBRA Á LA GEOMETRÍA.

PRIMERA PARTE.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA Y ESFÉRICA.

MADRID,
IMPRENTA Y ESTEREOTIPIA DE M. RIVADENEYRA,
calle del Duque de Osuna, número 3.

1871.

APLICACION

DEL

ÁLGEBRA Á LA GEOMETRÍA,

POR

DON JOSÉ GOMEZ Y PALLETE,

CAPITAN DE INGENIEROS Y AYUDANTE DE PROFESOR QUE HA SIDO EN LA ACADEMIA ESPECIAL DEL CUERPO.

PRIMERA PARTE.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA Y ESFÉRICA.

José Gomez y Pallete

MADRID,
IMPRENTA Y ESTEREOTIPIA DE M. RIVADENEYRA,
calle del Duque de Osuna, 3.

1871.

APLICACION

DEL ALGEBRA A LA GEOMETRIA.

PRIMERA PARTE.

TRIGONOMETRÍA.

CAPÍTULO PRIMERO.

ELEMENTOS QUE FIJAN LA POSICION DE UN PUNTO Y DE UNA RECTA.

1. La Geometría enseña á resolver las cuestiones que se propongan entre líneas, superficies ó volúmenes, determinando las construcciones gráficas que conducen de los datos al conocimiento de las incógnitas. Estas construcciones se ejecutan por procedimientos mecánicos, valiéndose de la regla y el compas, y no son susceptibles, por lo tanto, de toda la exactitud deseable, pues conocido es el error anejo á toda operacion material; pero como las magnitudes pueden representarse por números ó letras, comparándolas á otras de la misma especie adoptadas por unidades, se comprende que si se las somete á las operaciones algebraicas, disfrutarán de la exactitud y generalidad imposibles de obtener con

las construcciones gráficas, las que á su vez servirán para facilitar aquéllas, por la claridad que les es propia. Estas sucintas reflexiones hacen ver la conveniencia de unir el Álgebra y la Geometría para la resolucion de gran número de cuestiones; constituyendo esta union una nueva ciencia, tan interesante como extensa en sus aplicaciones.

2. Como la Geometría considera no sólo las magnitudes, sino tambien sus situaciones relativas, no basta la medida de aquéllas para aplicar el álgebra á los problemas geométricos; es preciso, ademas, saber determinar analíticamente dichas situaciones, y esto estará conseguido en principio cuando se sepa fijar la posicion de un punto, ya esté sobre una línea ó un plano dados, ó ya en el espacio.

3. Sea A B (Fig. 1) una línea sobre la que se quiere determinar la posicion de un punto M con relacion á otro dado y fijo O, para lo que bastará conocer: 1.°, la distancia entre estos dos puntos, expresada por su relacion á la unidad lineal; 2.°, la direccion en que debe contarse esta distancia, que deberá expresarse de modo que pueda tenerse en cuenta en los cálculos analíticos.

4. Para conseguir esto supongamos que dado el punto O sobre la línea A B y las situaciones respecto á él de otros dos M y M′, quiera determinarse la que éstos tienen entre sí. Sean $x =$ O M, $x' =$ O M′ las distancias de O á M y M′ y $X =$ M M′ la de M á M′; si estos dos puntos están al mismo lado de O, se tendrá

$$X = x' - x \qquad (1) \qquad \text{ó} \qquad X = x - x' \qquad (2),$$

segun que $x' > x$, ó $x' < x$, y si están á uno y otro lado de O, será

$$X = x + x' \qquad (3).$$

Comparando entre sí las fórmulas [1] y [2], y conviniendo en considerar negativas las cantidades procedentes de restas hechas en órden inverso, ó sea cambiando los oficios de minuendo y sustraendo, se ve que los valores de X están en este caso y deben, por lo tanto, suponerse de signos contrarios. Observando la figura, se ve que la distancia de M á M′, que se cuenta de izquierda á derecha si $x' > x$, se cuenta, por el contrario, de derecha á izquierda si $x > x'$.

Una observacion análoga se deduce de la comparacion de la fórmula [1] con la [3]; la primera da $x = x' - X$, y la segunda $x = X - x'$, lo que indica que al pasar el punto M á la izquierda de O, el valor de x cambia de signo, segun lo convenido anteriormente.

Si ahora se suponen positivas las magnitudes X, x, x' de la fórmula [1], apropiada al caso de estar los puntos M y M′ en la posicion que indica la figura, resulta de lo expuesto que para obtener las [2] y [3] basta suponer negativas las magnitudes que se aprecian en sentido inverso del primitivo. En efecto, si el punto M pasa á la posicion M_1, á la derecha de M′, se tendrá $x > x'$, y la fórmula [1], dando para X un valor negativo, indicará que esta magnitud debe contarse en direccion opuesta á la del caso de $x' > x$, lo que conviene á la nueva situacion de los puntos M_1 y M′; pero si el primero de éstos pasa á M_2, á la izquierda de O, la distancia x es la que se aprecia en direccion opuesta, y debe ir precedida del signo (—) obteniéndose la [3] adaptada á este caso.

Se ve, pues, que la fórmula [1] se hace extensiva á todas las posiciones de los puntos M y M′ sin más que suponer signos contrarios á las magnitudes contadas en direcciones opuestas.

5. Esta importante propiedad del Álgebra en sus aplicaciones á la Geometría puede expresarse en general, diciendo que *cuando la distancia de un punto á otro es susceptible de contarse en dos direcciones opuestas segun los diversos casos de una misma cuestion, bastará tratar ésta algebraicamente en la hipótesis de uno de ellos, y las fórmulas que se obtengan tendrán toda la generalidad apetecible siempre que en las aplicaciones se suponga á los valores de aquella distancia precedidos de los signos* (+) *ó* (—), *segun que se cuenten en la direccion que se supuso ó en la opuesta.*

Este principio importantísimo fué establecido por *Descártes*, y debe considerarse como una convencion adoptada, y confirmada despues por numerosas aplicaciones, pero no como una proposicion susceptible de ser demostrada *à priori*.

6. El siguiente ejemplo aclarará más el uso de las cantidades negativas en las aplicaciones del Álgebra á la Geometría: *dada una recta* A B = a (Fig. 2) *dividirla en media y extrema razon*, es decir, en dos partes, A M y B M, tales que la mayor A M sea media proporcional entre la menor B M y la recta dada A B. Llamando x á la distancia A M, se tendrá $BM = a - x$, y el problema estará planteado en la proporcion

$$a : x :: x : a - x \quad \text{ó} \quad x^2 = a^2 - a x,$$

que da para x los dos valores

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}\ .$$

El primero es positivo, y para construirlo se levantará en el extremo B la perpendicular $BO = \frac{1}{2}a$, y uniendo A con O se tendrá $\overline{AO}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$. Describiendo ahora una circunferencia desde el punto O como centro con el radio O B, resultará

$$AD = AO - OD = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2} = x;$$

de modo que llevando A D sobre A B quedará determinado el punto M por la misma construccion conocida en Geometría. El valor negativo es numéricamente mayor que a, y no puede, por lo tanto, servir de solucion al problema tal como está enunciado, pues el punto M debe estar situado entre A y B; pero si prescindiendo de esta restriccion se da á dicho valor la interpretacion expresada en el número anterior, habrá que tomarlo en sentido opuesto al A M, ó sea desde A hácia M'. Su valor absoluto es

$$AD' = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} + \frac{a}{2} = -x,$$

y tomando $AM' = AD'$ se conocerá el punto M' que debe satisfacer á las condiciones algebraicas del problema expresadas en el planteo, y el enunciado deberia cambiarse diciendo que *dados dos puntos* A *y* B *sobre una recta indefinida, se pide hallar el punto* M *tal que su distancia al punto* A *sea media proporcional entre su distancia al punto* B *y la magnitud* A B. Si en este caso se hubiera supuesto en M′ el punto buscado, y tomado por incógnita $A M' = x$, se tendria $B M' = a + x$, y el problema estaria planteado en la ecuacion

$$x^2 = a^2 + a x,$$

que sólo difiere de la anterior en el cambio de x en $-x$, y da los valores

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$$

iguales y de signos contrarios á los anteriores. El primero es positivo y da el punto M′, y el segundo negativo y da el punto M en la direccion opuesta.

Si se quiere que los dos valores de x sean positivos, no hay más que suponer que es B el punto desde donde se cuentan las distancias, y considerar positivas las dirigidas hácia la izquierda, pues entónces los dos puntos M y M′ estarán en la misma direccion. En efecto, suponiendo $B M = x$, se tendrá

$$A M = a - x \quad \text{ó} \quad = x - a,$$

y en los dos casos el problema estaria planteado en la ecuacion

$$(a - x)^2 = a x,$$

que da dos valores positivos

$$x = \frac{3 a}{2} \pm \sqrt{\frac{5 a^2}{4}},$$

uno mayor y otro menor que a.

Resulta de lo expuesto que la raíz negativa obtenida primeramente ha servido para manifestar una restriccion impuesta en el enunciado y no tenida en cuenta en el planteo; pero no pudiendo prescindirse de aquélla, se debe desechar la solucion indicada por dicha raíz. Si al plantear el problema del segundo enunciado se hubiese supuesto el punto M entre A y B, particularizando así su posicion, la raíz negativa hubiera indicado una segunda solucion en sentido opuesto á la que se supuso, pues la restriccion no estaba entre las condiciones del enunciado, sino que habia sido introducida en el planteo del problema. De todos modos, y ya sean admisibles ó no las soluciones indicadas por los valores negativos de las incógnitas, éstos sirven siempre para generalizar los resultados, haciendo desaparecer las restricciones impuestas en el enunciado ó introducidas en el planteo.

Si en el supuesto de haber tomado por orígen el punto B se hubiera fijado el punto pedido en M″, tomando por incógnita la distancia B M″ $= x$, sería A M″ $= a + x$, y el problema estaria planteado en la ecuacion

$$(a + x)^2 = a\,x,$$

que da para x los dos valores imaginarios

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{3\,a^2}{4}},$$

que no indican que el problema es imposible, pues tiene dos soluciones, sino que es absurda la hipótesis hecha de estar el punto M″ á la derecha de B, pues no puede la distancia A M″ ser media proporcional entre otras dos A B y B M″, necesariamente menores que ella. Es muy conveniente tener en cuenta esta significacion de los valores imaginarios de las incógnitas, que en otros casos indicarán imposibilidad en el problema propuesto.

7. Volviendo ahora al número 3, se ve que para determinar un punto sobre una línea bastará conocer la distancia que lo separa de otro fijo, la que deberá estar precedida del signo que indique la direccion en que deba contarse. Este punto fijo se llama *orígen*, y *abscisas* dichas distancias con sus signos correspondientes, debiendo adoptarse una direccion, que generalmente es de izquierda á derecha, para las distancias positivas, y la opuesta para las negativas.

8. Segun estas definiciones la fórmula [1] del número 4 puede enunciarse en todos los casos diciendo que la abscisa X de un punto M′, con relacion á otro punto M, es igual á la diferencia $x'-x$ de las abscisas de estos dos puntos con relacion á un mismo orígen, cualquiera que sea su posicion.

9. Si el punto M (Fig. 3) cuya posicion se quiere determinar está en un plano dado, se refiere ésta á dos rectas fijas X X′, Y Y′ situadas en este plano y que se corten bajo un ángulo cualquiera, que generalmente es recto. Tirando por M las paralelas M Q y M P á X X′ é Y Y′ se obtendrán dos puntos P y Q, que una vez conocidos determinarán el punto M, porque tirando por ellos las paralelas P M y Q M á Y Y′ y X X′, su punto de encuentro será el que se busca, quedando reducida la cuestion á determinar la posicion de P y Q sobre las rectas X X′ é Y Y′, lo que, segun lo expuesto en el número 7, estará conseguido cuando se conozcan sus distancias O P y O Q al punto O en que aquéllas se cortan, las cuales deberán estar precedidas de los signos que indiquen la direccion en que deban tomarse y reciben el nombre de *coordenadas rectilíneas* del punto M, así como las rectas X X y Y Y′ el de *ejes coordenados*, y el punto O el de *orígen de las coordenadas.* En particular reciben el nombre de *abscisas* las contadas sobre el eje X X′, y el de *ordenadas* las contadas sobre el Y Y′. Los puntos P y Q son las *proyecciones* de M sobre los ejes, *ortogonales* ú *oblicuas*, segun que éstos sean ó no perpendiculares. En el primer caso las coordenadas se llaman *rectangulares*, y *oblicuas* en el segundo.

10. Generalmente se consideran positivas las abscisas contadas de izquierda á derecha y las ordenadas contadas de abajo á arriba, y negativas las opuestas; de modo que llamando x, y á las coordenadas de un punto cualquiera, se tendrá ($x = $ O P, $y = $ O Q) si el punto M está en el ángulo Y O X, ($x = -$ O P′, $y = $ O P) para M′ en el ángulo Y O X′, ($x = -$ O P′, $y = -$ O Q′) para M″ en el X′ O Y′ y ($x = $ O P, $y = -$ O Q′) para M‴ en el Y′ O X.

11. Para fijar la posicion de un punto cuyas coordenadas son conocidas se tomarán sobre los ejes, á partir del orígen y en la

direccion indicada por los signos de aquéllas, magnitudes iguales á sus valores absolutos, y trazando por los puntos así obtenidos dos paralelas á los ejes, su punto de encuentro determinará el que se busca. Observando que en todos los casos $OP = MQ$, $MP = OQ$, podrá determinarse el punto M tomando $OP = x$ sobre el eje O X y $PM = y$ sobre la paralela al Y tirada por P, ó bien $OQ = y$ sobre el eje Y y $QM = x$ sobre la paralela al X tirada por Q. Si una ó las dos coordenadas fueran negativas se tomarian sus magnitudes en direccion opuesta, determinando así los puntos M', M'' ó M'''.

12. La posicion de un punto en el espacio se determina de una manera análoga considerando tres rectas $X'X$, $Y'Y$, ZZ' (figura 4), que se corten en un punto O y que no estén en un mismo plano, cuyas rectas y los planos X Y, Z Y y X Z que forman se llaman ejes y planos coordenados. Si por el punto M que se quiere determinar se tiran tres planos M P, M Q y M R paralelos á los coordenados y que corten á los ejes en los puntos P, Q y R, su posicion será conocida si lo son, en *magnitud* y *signo*, las distancias O P, O Q y O R, pues bastará tirar por los puntos P, Q y R determinados por ellas tres planos paralelos á los coordenados, que se cortarán en un punto único M, que será el que se busca.

13. Tirando por el punto M tres rectas M A, M B y M C, paralelas á los ejes, que corten á los planos coordenados en los puntos A, B y C se tendrá $MA = OR$; $MB = OQ$; $MC = OP$, y estas tres nuevas magnitudes, que representan las distancias del punto M á los planos coordenados medidas en la direccion de los ejes, pueden servir, lo mismo que las primeras, para determinar la posicion de dicho punto. Estas tres magnitudes algebraicas se llaman *coordenadas* del punto M, tomando en particular el nombre de *abscisas* las contadas en direccion del eje X, y de *ordenadas en el plano* X Y *ó en el espacio* las paralelas á los ejes Y y Z. Los puntos P, Q, R, A, B, C son las proyecciones coordenadas del punto M sobre los ejes X, Y, Z las tres primeras, y sobre los pla-

nos X Y, X Z, Y Z las últimas. Si los ejes son perpendiculares las proyecciones son ortogonales.

14. Para saber los signos que convienen á las coordenadas de un punto debe tenerse presente si sus proyecciones sobre los ejes están en éstos ó en sus prolongaciones; así el punto M en el triedro O X Y Z tiene todas sus coordenadas positivas, y el M′ en el O X′ Z′ Y tiene negativas x, z, y positiva y.

15. Trazando todas las aristas del paralelipípedo O M formado por los planos coordenados y los paralelos á éstos tirados por el punto M, se ve que puede llegarse á éste desde el orígen recorriendo seis contornos O P A M, O P B M, O Q A M, O Q C M, O R B M y O R C M, diferentemente situados, pero formados por tres rectas iguales en magnitud y direccion á las coordenadas de aquel punto.

16. De todo lo expuesto se deduce que un punto estará determinado por una ó dos coordenadas si está colocado sobre una línea ó un plano dados, y por tres si está en el espacio; entendiéndose que estas coordenadas deben considerarse siempre como cantidades algebraicas con el signo que las corresponda.

17. Sea ahora la recta M M′ (Fig. 5) aquella cuya posicion quiere determinarse en un plano, lo que se conseguirá conociendo uno de sus puntos M y la direccion que debe seguir. Aquél estará determinado por sus coordenadas O P y M P, y ésta por el ángulo m O X que con una recta dada O X forme una paralela O m á la primera tirada por un punto cualquiera O de la segunda. Este ángulo es el recorrido por una recta móvil que partiendo de la posicion O X gire al rededor del punto O hasta tomar la O m, y para determinarlo bastará conocer la extension de este movimiento y la direccion en que se ha verificado. La extension se mide en grados, minutos y segundos, segun enseña la Geometría, y la direccion, análogamente á lo dicho respecto á las distancias, se define con un signo, considerando positivos los ángulos contados en una direccion, de O X á O m, por ejemplo, y negativos los contados en la opuesta, ó sea de O X á O m'.

18. Si la recta O m continúa su movimiento despues de haber hecho una ó várias revoluciones completas en sentido positivo ó negativo, volverá á pasar por las mismas posiciones que ya habia ocupado, y por lo tanto estará determinada lo mismo por el ángulo α, que puede tener un valor cualquiera, que por los ángulos $2\pi+\alpha$, $4\pi+\alpha$....., ó en general por $\alpha \pm 2n\pi$, siendo n un número entero.

19. Puesto que segun lo acabado de exponer puede añadirse á un ángulo un número cualquiera de circunferencias sin que sufra alteracion la direccion que determina, podrá convertirse en positivo un ángulo negativo tomando un número suficiente de circunferencias positivas.

20. Si segun lo dicho en el número 17 se fijan las direcciones de dos rectas M M′ y N N′ por los ángulos α y α' que forman con el eje O X las dos paralelas á aquéllas O m y O n, y aplicando aquí la discusion del número 4, se quiere determinar el ángulo β de estas dos rectas, evidentemente igual al de las propuestas, se tendrá en todos los casos

$$\beta = \alpha' - \alpha,$$

cualesquiera que sean los signos y magnitudes de β, α y α'.

CAPÍTULO II.

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

21. Las posiciones de los puntos están determinadas, segun lo expuesto en el capítulo anterior, por magnitudes algebraicas, y éstas pueden representarse por cantidades que permiten introducir en las operaciones analíticas aquellas posiciones, sin que en esto haya dificultad alguna, al ménos en teoría, pues sólo exige la medicion de las expresadas magnitudes, ó sea su comparacion con la unidad respectiva.

No sucede lo mismo con la posicion de las líneas rectas, que se fija por un ángulo, cuya medida en grados, que es la que enseña la geometría, no puede combinarse con las lineales por ser cantidades heterogéneas, siendo indispensable evitar esta dificultad si se quiere aplicar con toda generalidad el Álgebra á los problemas geométricos. Esto puede conseguirse comparando, no la amplitud del arco que sirve de medida á un ángulo, sino su longitud, á la misma unidad lineal que ha servido para medir las magnitudes rectilíneas, pues de esta manera todos los elementos necesarios para determinar las posiciones de puntos y rectas estarian expresados por cantidades de la misma especie.

La operacion necesaria para obtener la longitud de un arco es impracticable con exactitud, ademas de ser muy prolija, por cuyo motivo se reemplaza en la medida de los ángulos el arco comprendido entre sus lados por las relaciones que existen entre ciertas magnitudes rectilíneas, cuyo estudio y el de sus aplicaciones á la resolucion de triángulos constituye la *Trigonometría.*

22. Sean (Fig. 6) O X, O Y dos ejes coordenados rectangulares, O M (*) una recta que parte del orígen O y forma con O X un ángulo cualquiera α positivo ó negativo; A m el arco descrito por un punto de una recta móvil que partiendo de la posicion O X gire al rededor del punto O hasta tomar la O M, cuyo arco puede ser positivo ó negativo, y mayor que una ó várias circunferencias; $r =$ O A $=$ O m el radio de este arco, esencialmente positivo, y x, y las coordenadas del punto m, positivas ó negativas segun su posicion.

Cualquiera que sea el valor de r, las relaciones $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{y}$ serán constantes, de modo que bastará conocer una de éstas y los signos de x, y, ó sea los valores algebraicos de dichas relaciones para determinar el ángulo α y la posicion de la recta O M.

23. Estas relaciones, llamadas líneas trigonométricas del ángulo α, reciben los nombres siguientes:

1.° *Seno.* La relacion algebraica $\frac{y}{r}$ entre la ordenada y el radio, que será del mismo signo que y. Si se adopta el radio por unidad de longitud, el *seno* será igual á la ordenada m P, ó bien á la mitad de la cuerda que subtiende un arco doble de A m.

2.° *Coseno.* La relacion algebraica $\frac{x}{r}$ entre la abscisa y el radio, que será del mismo signo que x.

3.° *Tangente.* La relacion algebraica $\frac{y}{x}$ entre la ordenada y la abscisa, que será positiva ó negativa segun que x, y tengan los mismos signos ó contrarios. Para comprender el orígen de este nombre basta tirar por el punto A la tangente A T al arco A m, que encontrará en T al radio O m convenientemente prolongado, y llamando t á la magnitud A T, que será positiva ó negativa se-

(*) En la figura las letras M, m, T citadas en el texto, llevan uno, dos, tres y cuatro acentos, para indicar que los raciocinios generales hechos en aquél son aplicables á cualquier posicion de la recta móvil.

gun se cuente en el mismo sentido que O Y ó en el opuesto la relacion $\frac{t}{r}$ ó t si $r = 1$, será en todos los casos igual á $\frac{y}{x}$, que recibe por este motivo el nombre de *tangente* del ángulo α.

4.° *Cotangente.* La relacion $\frac{x}{y}$ inversa y del mismo signo que la tangente.

5.° *Secante.* La relacion $\frac{r}{x}$ inversa y del mismo signo que el coseno. Prolongando el radio O M hasta que encuentre en T á la tangente A T se formará una secante indefinida, y llamando s la parte comprendida entre O y T, que será positiva ó negativa segun que los dos puntos m y T estén ó no al mismo lado del centro, la relacion $\frac{s}{r}$ ó s, si $r = 1$, es en todos los casos igual en magnitud y signo á $\frac{r}{x}$, que se llama por esta razon *secante* del ángulo α.

6.° *Cosecante.* La relacion $\frac{r}{y}$ inversa y del mismo signo que el seno.

24. Para designar en el cálculo las líneas trigonométricas del ángulo α, se adoptan las abreviaciones siguientes:

$$\text{sen. } \alpha = \frac{y}{r}; \ \cos. \ \alpha = \frac{x}{r}; \ \text{tg. } \alpha = \frac{y}{x};$$

$$\text{cot. } \alpha = \frac{x}{y}; \ \text{sec. } \alpha = \frac{r}{x}; \ \text{cosec. } \alpha = \frac{r}{y}.$$

Si el ángulo α es el formado por las dos rectas O M y O X, puede designarse por la notacion (M, X) y se tendrá

$$\text{sen. (M, X)} = \frac{y}{r}; \ \text{cos. (M, X)} = \frac{x}{r}; \ \text{tg. (M, X)} = \frac{y}{x};$$

$$\text{cot. (M, X)} = \frac{x}{y}; \ \text{sec. (M, X)} = \frac{r}{x}; \ \text{cosec. (M, X)} = \frac{r}{y}.$$

Estas fórmulas representan las definiciones más rigorosas de las líneas trigonométricas, y servirán de base en lo sucesivo, quedando las representaciones geométricas sin otro objeto que recordar los nombres y significaciones.

25. Suponiendo que el ángulo α tome valores crecientes á partir de cero, el punto A recorrerá todos los de la circunferencia; y de los valores que tomen en cada caso x é y se deducirán los que correspondan á las líneas trigonométricas:

1.° Si

$$\alpha = 0 \text{, será } x = r,\ y = 0,$$

y por consiguiente

$$\text{sen. } 0 = 0;\ \text{cos. } 0 = 1;\ \text{tg. } 0 = 0;$$
$$\text{cot. } 0 = \infty;\ \text{sec. } 0 = 1;\ \text{cosec. } 0 = \infty.$$

Creciendo α hasta 90°, x disminuirá hasta cero, é y aumentará hasta r, de modo que el seno, la tangente y la secante crecerán, y decrecerán el coseno, la cotangente y la cosecante.

2.° Cuando

$$\alpha = 90^\circ \text{, será } x = 0,\ y = r,$$

y por lo tanto

$$\text{sen. } 90^\circ = 1;\ \text{cos. } 90^\circ = 0;\ \text{tg. } 90^\circ = \infty;$$
$$\text{cot. } 90^\circ = 0;\ \text{sec. } 90^\circ = \infty;\ \text{cosec. } 90^\circ = r.$$

De 90° á 180°, x é y varian en valor absoluto en sentido inverso que de 0 á 90°; pero x es negativa, así como el coseno, la tangente, la cotangente y la secante, permaneciendo positivos el seno y la cosecante.

3.° Para

$$\alpha = 180^\circ \text{, será } x = -r,\ y = 0,$$

y

$$\text{sen. } 180^\circ = 0;\ \text{cos. } 180^\circ = -1;\ \text{tg. } 180^\circ = 0;$$
$$\text{cot. } 180^\circ = -\infty;\ \text{sec. } 180^\circ = -1;\ \text{cosec. } 180^\circ = \infty.$$

De 180° á 270° los valores absolutos de x, y, y por tanto, los de las líneas trigonométricas varian como de 0 á 90°, pero siendo negativas las dos coordenadas, lo serán tambien el seno, el coseno, la secante y la cosecante, y positivas la tangente y cotangente.

4.° Para

$$\alpha = 270°, x = 0; \ y = -r,$$

y

$$\text{sen. } 270° = -1; \ \cos. 270 = 0; \ \text{tg. } 270° = -\infty;$$
$$\cot. 270° = 0; \ \sec. 270° = \infty; \ \text{cosec. } 270° = -1.$$

De 270° á 360° los valores absolutos de las líneas trigonométricas varian como de 90° á 180°, y siendo x positiva é y negativa, el coseno y la secante serán positivas, y el seno, la tangente, la cotangente y la cosecante negativas.

5.° Cuando $\alpha = 360°$ el punto A vuelve á su posicion primitiva tomando las líneas trigonométricas los mismos valores que para $\alpha = 0$.

26. Si α sigue creciendo, los valores de x é y serán los mismos que se han estudiado hasta aquí, demostrando que *las líneas trigonométricas de un ángulo no varian cuando se añadan á éste un número cualquiera de circunferencias*, que pueden ser positivas ó negativas, pues al terminar la rotacion completa del punto m en una ú otra direccion, siempre volverá á su posicion primitiva. Esta propiedad concuerda con lo dicho en el núm. 18.

27. Observando los valores que toman las líneas trigonométricas se ve que el seno y coseno varian entre $+1$ y -1, la tangente y cotangente entre $+\infty$ y $-\infty$, y la secante y cosecante entre ± 1 y $\pm\infty$; de modo que las segundas son las únicas que pueden tener un valor cualquiera.

28. No considerando sino los valores absolutos de las líneas trigonométricas, se ve que siempre son iguales á las del ángulo agudo formado por la recta O M con el eje O X ó su prolongacion, pues son iguales los valores análogos de x é y; de donde se deduce que pueden obtenerse los valores de dichas líneas correspondientes á un ángulo cualquiera por medio de las de otro menor que 90°, precedidas de los signos que las correspondan segun la discusion del núm. 25, lo que se expondrá más adelante.

29. Del número 26 se deduce que habrá varios ángulos á quienes

corresponda una misma línea trigonométrica, un mismo seno, por ejemplo; y para obtener una fórmula que los comprenda bastará resolver el problema siguiente: *dado el seno de un ángulo, determinar éste.*

Sea p el seno dado: si con un radio arbitrario r se traza una circunferencia y se designan por (x, y) las coordenadas del punto m en que corte á la recta O M (Fig. 6) que forma con O X el ángulo pedido, la fórmula $p = \frac{y}{r}$ dará el valor de y, quedando el problema reducido á determinar sobre dicha circunferencia un punto que tenga esta ordenada, que deberá ser menor que el radio, lo que exige $p < 1$, para que aquél sea posible. Tomando, pues, sobre el eje Y una magnitud $OQ = y$, y trazando por Q una paralela $m'' m'$ á O X, se obtendrán dos puntos m'' y m', que unidos con O, darán dos rectas O M′ y O M″, tales que todos los ángulos que partiendo de O X terminen en ellas satisfarán á la condicion propuesta. Llamando α al ángulo agudo M′ O X, la expresion de todos los que terminen en O M′ será $2n\pi + \alpha$ (26), siendo n un número entero cualquiera positivo ó negativo, y se tendrá

$$\text{sen.}\ \alpha = \text{sen.}\ (2n\pi + \alpha) \qquad (1).$$

El ángulo M″ O X será igual á $\pi - \alpha$, y los que terminen en O M″ tendrán por expresion

$$2n\pi + \pi - \alpha = (2n + 1)\pi - \alpha,$$

siendo entónces

$$\text{sen.}\ \alpha = \text{sen.}\ [(2n + 1)\pi - \alpha] \qquad (2).$$

Estas fórmulas [1] y [2] comprenden con toda generalidad los ángulos positivos y negativos que tienen un mismo seno.

30. Si se conoce el coseno q, se determinará el valor de x, que deberá ser menor que el radio, por la fórmula $q = \frac{x}{r}$, que exige, por lo tanto, $q < 1$ para que el problema tenga solucion. Tomando ahora $OP = x$, la paralela $m' m^{\text{IV}}$ al eje Y determinará dos puntos m' y m^{IV}, tales que todos los ángulos que partiendo de O X

terminen en O M′ ú O M^{IV} tendrán por coseno la cantidad dada. Llamando α al ángulo agudo X O M′, los terminados en O M′ tendrán por expresion $2n\pi+\alpha$, el X B A′ B′ M^{IV} será igual á $2\pi-\alpha$, y los que terminen en O M^{IV} estarán representados por $2n\pi+2\pi-\alpha$, ó bien por $2n\pi-\alpha$, pudiendo establecerse la fórmula

$$\cos.\ \alpha=\cos.\ (2n\pi\pm\alpha) \qquad (3),$$

que comprende todos los ángulos que tienen un mismo coseno, siendo n, como anteriormente, un número entero cualquiera positivo ó negativo.

CAPÍTULO III.

PROYECCIONES DE LAS LÍNEAS RECTAS.

31. La proyeccion de un punto M (Fig. 7) sobre una recta O X es, segun lo dicho en el núm. 13, el punto P en que corta á esta recta un plano M P paralelo á otro dado Y O Z, que si es perpendicular á O X hace que la proyeccion reciba el nombre de *ortogonal.*

Si dos puntos M y M′ se proyectan en P y P′ sobre el eje O X, la distancia P P′ tomada con el signo que convenga á la direccion P P′ es lo que se llama *proyeccion de la recta* M M′ sobre el mismo eje, siendo indicada dicha direccion por el órden en que se enuncien los puntos M M′ y sus proyecciones. Así la proyeccion de M M′ es + P P′ y la de M′ M es — P P′.

32. Siendo P P′ la diferencia entre las abcisas O P′ y O P de los puntos M′ y M, cualquiera que sea la situacion relativa de los puntos O, M y M′, se deduce de la consideracion anterior y de las del número 4 que la *proyeccion de una recta sobre un eje es igual á la diferencia* x′ — x *de las abscisas de sus extremos.*

33. Extendiendo esta demostracion á los tres ejes coordenados, se deduce que las proyecciones sobre cada uno de ellos de la recta que una dos puntos cuyas coordenadas sean (x, y, z), (x', y', z') serán iguales respectivamente á $x' - x$, $y' - y$, y $z' - z$.

34. Fundándose en esta propiedad se demuestra el siguiente teorema: *la suma algebraica de las proyecciones de los lados de una línea quebrada cualquiera* M M′ M″..... M_1 (*Fig.* 8) *sobre un eje* O X

es igual á la proyeccion sobre el mismo eje de la recta M M_1 *que une los dos extremos de aquélla.*

Sean x, x', x'', x''' ..... x_1 las abscisas de los puntos M, M′, M″, M‴ ..... M_1; la proposicion del núm. 32 da las ecuaciones

$$
\begin{array}{ll}
\text{proyeccion} & \text{de M M}' = x' - x\,, \\
\text{id.} & \text{de M}' \text{M}'' = x'' - x'\,, \\
\text{id.} & \text{de M}'' \text{M}''' = x''' - x''\,, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{id.} & \text{de M}''' \text{M}_1 = x_1 - x'''\,,
\end{array}
$$

que sumadas dan *proyeccion de la línea quebrada* M M′ M″... ... $M_1 = x_1 - x =$ *proyeccion de* M M_1.

Fácilmente se comprende esta propiedad, pues cada punto M′, cuya abscisa O P′ $= x'$ es mayor que la O P $= x$ del punto anterior M, hace avanzar el punto P una magnitud positiva $x' - x =$ PP′, y cada punto M‴ cuya abcisa O P‴ $= x'''$ es menor que la O P″ $= x''$ del anterior M″ hace avanzar una magnitud negativa $x''' - x'' = -$ P″ P‴ al punto P″, que retrocede, por tanto, á P‴ para avanzar de nuevo si la abscisa del punto siguiente es mayor que x'''.

35. Si los puntos M y M′ de la figura 7 se suponen situados en el plano X Y y se designan por (x, y) (x', y') sus coordenadas referidas á dos ejes rectangulares O X y O Y (Fig. 9), las proyecciones de la recta M M′ sobre éstos serán iguales en magnitud y signo á $x' - x$, $y' - y$ (33), y pueden determinarse fácilmente en funcion de la magnitud M M′, que se designará por d, y del ángulo formado por esta recta con el eje O X. Para conseguir esto se trazarán por el punto M dos ejes M X′, M Y′ paralelos á O X, O Y y con la misma direccion, con lo que las coordenadas (MP″, M′ P″) del punto M′ con relacion á los nuevos ejes serán evidentemente iguales en magnitud y signo á las proyecciones de M M′ sobre éstos ó sobre los X, Y, y el ángulo formado por M M′ con M X′, que se designará por (M, X′), será igual al que forman M M′ y O X, ó (M, X). Esto supuesto, y segun las definiciones del núm. 23, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} \cos.\,(\mathrm{M},\mathrm{X}) &= \cos.\,(\mathrm{M},\mathrm{X}') = \frac{\mathrm{M\,P}''}{\mathrm{M\,M}'} = \frac{x'-x}{d}, \\ \mathrm{sen.}\,(\mathrm{M},\mathrm{X}) &= \mathrm{sen.}\,(\mathrm{M},\mathrm{X}') = \frac{\mathrm{M}'\,\mathrm{P}''}{\mathrm{M\,M}'} = \frac{y'-y}{d}, \end{aligned}\right\}$$

ó bien

$$x'-x = d\cos.\,(\mathrm{M},\mathrm{X})\,;\quad y'-y = d\,\mathrm{sen.}\,(\mathrm{M},\mathrm{X}).$$

En estas fórmulas x, y, x', y' representan cantidades algebraicas, d una longitud esencialmente positiva, y la indicacion (M, X) el ángulo formado por la recta M M′ con la direccion positiva del eje O X.

36. Cuando dos rectas en el espacio se cruzan, se mide el ángulo que forman por el de dos rectas paralelas á ellas tiradas por un punto cualquiera en la misma direccion, pudiéndose, en virtud de esta definicion, ampliar á este caso las fórmulas encontradas en el número anterior. Sea M M′ (Fig. 10) la recta que se proyecta ortogonalmente en P P′ sobre el eje O X; si se tira por M la recta M X′ paralela á O X y en su misma direccion, la proyeccion M N de M M′ sobre este nuevo eje será igual, en magnitud y signo, á P P′, y el ángulo (M, X′) será el formado por M M′ y O X, que podrá siempre designarse por (M, X). Aplicando ahora á las rectas M M′ y M N, situadas en un mismo plano, la primer fórmula de las obtenidas en el número anterior, resulta

$$\mathrm{M\,N} = \mathrm{M\,M}'\cos.\,(\mathrm{M},\mathrm{X}'),$$

ó bien

$$x'-x = d\cos.\,(\mathrm{M},\mathrm{X}),$$

que generalizando dicha fórmula, demuestra que *la proyeccion ortogonal de una recta sobre otra es igual en magnitud y signo al producto de la longitud de la primera por el coseno del ángulo que forman.*

La generalidad de las definiciones del núm. 23 hace que esta propiedad sea igualmente cierta, cualquiera que sea la situacion que los puntos M y M′ tengan entre sí.

37. De lo expuesto hasta aquí se deduce el modo de hallar la

distancia entre dos puntos dados por sus coordenadas rectangulares, lo que equivale á determinar la magnitud d de las fórmulas anteriores en funcion de sus proyecciones ortogonales.

Sean los puntos M y M′ (Fig. 11) dados por sus coordenadas (x, y, z) (x', y', z'); si por cada uno de ellos se tiran tres planos paralelos á los coordenados se formará un paralelipípedo rectángulo, cuyas aristas serán iguales en magnitud y signo á las proyecciones de M M′ sobre los ejes, ó bien (33) á $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$, y su diagonal M M′ $= d$, cuyo cuadrado es igual á la suma de los cuadrados de las aristas, estará determinada por la fórmula

$$d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

que se reduce á

$$d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

si los dos puntos están colocados en el plano X Y, pues z y z' serán iguales á cero.

En el caso que el punto M coincida con el orígen, sus coordenadas serán nulas y las fórmulas anteriores se reducen á

$$d^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2; \quad d^2 = x'^2 + y'^2.$$

Estas cuatro fórmulas demuestran que *la distancia entre dos puntos es igual á la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de sus coordenadas; y que la distancia del orígen á un punto es igual á la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las coordenadas de éste.*

38. Aplicando la proposicion del núm. 36 á las proyecciones de la distancia d sobre los tres ejes, y designando por (d, X) (d, Y) y (d, Z) los ángulos que forma con cada uno de ellos, se obtienen (33) las ecuaciones

$$x' - x = d \cos. (d, X),$$
$$y' - y = d \cos. (d, Y),$$
$$z' - z = d \cos. (d, Z),$$

que sumándolas despues de elevar al cuadrado los dos miembros de cada una, y teniendo presente la primer fórmula del número anterior, dan la relacion notable

$$\cos.^2 (d, X) + \cos.^2 (d, Y) + \cos.^2 (d, Z) = 1,$$

que demuestra que *la suma de los cuadrados de las cosenos de los ángulos que una recta forma con tres ejes rectangulares es constante é igual á la unidad.*

39. De las proposiciones de los números 34 y 36 se deduce la siguiente:

Si una línea quebrada cualquiera conduce de un punto á otro, la proyeccion ortogonal de la recta que une estos dos puntos sobre un eje cualquiera es igual á la suma de los productos de cada uno de los lados de aquélla por el coseno del ángulo que forma con el eje.

Llamando x, x', las abscisas de los puntos extremos; d, d', d''....., las longitudes de los diversos lados, y designando por (d, X), (d', X), (d'', X)..... los ángulos que forman con el eje, la proposicion anterior estará expresada por la fórmula

$$x' - x = d \cos. (d, X) + d' \cos. (d', X) + d'' \cos. (d'', X) + ...$$

40. De esta propiedad se deducen las soluciones de los siguientes problemas:

PROBLEMA I.—*Dadas las coordenadas* x, y, z *de un punto con relacion á tres ejes cualesquiera* O x, O y, O z, *determinar la abscisa ortogonal del mismo punto con relacion á un eje* O X *que parta del mismo orígen* O *de los primeros y forme con ellos ángulos conocidos.*

La abscisa x y dos paralelas á las ordenadas y, z, forman (15) una línea quebrada que conduce desde el orígen al punto dado, y cuyos lados forman con el eje O X ángulos iguales á los de éste con los coordenados; y la abscisa pedida, que se designará por X, es la proyeccion sobre el mismo eje de la recta que une los extremos de dicha línea quebrada; aplicando, pues, la proposicion anterior, se obtiene la fórmula

$$X = x \cos. (X, x) + y \cos. (X, y) + z \cos. (X, z),$$

que resuelve la cuestion propuesta.

41. PROBLEMA II.—*Dados los ángulos que dos rectas* X *é* Y, *ó sus paralelas* O X *y* O Y *tiradas por el orígen en su misma direccion, forman con tres ejes coordenados rectangulares* O x, O y, O z, *determinar el que forman entre sí.*

Tomando sobre la recta O Y, á partir de O, una magnitud cualquiera designada por Y, y proyectándola sobre O X, se tendrá, llamando X esta proyeccion (36),

$$X = Y \cos. (\mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

Pero si (x, y, z) son las coordenadas del extremo de la magnitud Y, ó sean las proyecciones de esta magnitud sobre los ejes Ox, Oy, Oz, se tendrá igualmente

$$x = Y \cos. (\mathrm{Y}, x); \quad y = Y \cos. (\mathrm{Y}, y); \quad z = Y \cos. (\mathrm{Y}, z).$$

Sustituyendo los valores de X, x, y, z en la fórmula del número anterior, y suprimiendo el factor Y, comun á todos los términos, resulta

$$\cos. (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \cos. (\mathrm{X}, x) \cos. (\mathrm{Y}, x) + \cos. (\mathrm{X}, y) \cos. (\mathrm{Y}, y) + \cos. (\mathrm{X}, z) \cos. (\mathrm{Y}, z),$$

que demuestra que *el coseno del ángulo que forman dos rectas en el espacio es igual á la suma de los productos de los cosenos de los ángulos formados por estas rectas con cada uno de tres ejes coordenados rectangulares.*

42. Cuando las rectas dadas estén situadas en el plano x, y ó en uno paralelo á éste, serán perpendiculares al eje z, y desapareciendo el último término de la fórmula anterior, quedará ésta reducida á la siguiente:

$$\cos. (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \cos. (\mathrm{X}, x) \cos. (\mathrm{Y}, x) + \cos. (\mathrm{X}, y) \cos. (\mathrm{Y}, y).$$

43. Si las rectas X, Y son perpendiculares entre sí, se tiene $\cos. (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$, y las fórmulas anteriores se reducen á las siguientes relaciones entre los ángulos de estas rectas con los ejes

$$\cos. (\mathrm{X}, x) \cos. (\mathrm{Y}, x) + \cos. (\mathrm{X}, y) \cos. (\mathrm{Y}, y) + \cos. (\mathrm{X}, z) \cos. (\mathrm{Y}, z) = 0,$$

$$\cos. (\mathrm{X}, x) \cos. (\mathrm{Y}, x) + \cos. (\mathrm{X}, y) \cos. (\mathrm{Y}, y) = 0.$$

CAPÍTULO IV.

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.

44. Las diversas líneas trigonométricas de un ángulo tienen entre sí relaciones importantes, y para conocerlas se deberá partir de las fórmulas siguientes:

$$\text{sen. } \alpha = \frac{y}{r}; \quad \cos. \alpha = \frac{x}{r}; \quad \text{tg. } \alpha = \frac{y}{x};$$

$$\cot. \alpha = \frac{x}{y}; \quad \sec. \alpha = \frac{r}{x}; \quad \text{cosec. } \alpha = \frac{r}{y};$$

que son (24) las que establecen las definiciones de dichas líneas.

Sumando las dos primeras, despues de elevar al cuadrado los dos miembros de cada una, y observando (37) que $x^2 + y^2 = r^2$, resulta

$$\text{sen.}^2 \alpha + \cos.^2 \alpha = 1. \qquad (1)$$

Dividiendo la primera por la segunda, y vice-versa, se obtiene, en virtud de la tercera y cuarta,

$$\text{tg. } \alpha = \frac{\text{sen. } \alpha}{\cos. \alpha}, \qquad (2) \qquad \cot. \alpha = \frac{\cos. \alpha}{\text{sen. } \alpha}; \qquad (3)$$

resultando asimismo las siguientes de comparar la segunda con la quinta y la primera con la sexta:

$$\sec. \alpha = \frac{1}{\cos. \alpha}, \qquad (4) \qquad \text{cosec. } \alpha = \frac{1}{\text{sen. } \alpha}. \qquad (5)$$

Estas cinco relaciones que existen entre las seis líneas trigonométricas de un ángulo permiten, cuando se conozca una de ellas, determinar las demas.

45. Si se da el seno, por ejemplo, y se piden el coseno y la tangente, se deducirá de las ecuaciones [1] y [2]

$$\cos.\ \alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen.}^2\alpha}\,; \qquad \operatorname{tg.}\ \alpha = \pm\frac{\operatorname{sen.}\ \alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen.}^2\alpha}},$$

y debiéndose tomar simùltáneamente los signos superiores ó los inferiores, se deduce que á un mismo seno corresponden dos ángulos cuyos cosenos y tangentes son iguales en magnitud y de signos contrarios. Es fácil comprobar esta propiedad, pues las dos rectas O M′ y O M″ (Fig. 6) forman con el eje X ángulos que tienen un mismo seno (29) y cuyos cosenos y tangentes son evidentemente iguales y de signos contrarios.

46. Si se conoce el coseno, las mismas fórmulas dan los valores

$$\operatorname{sen.}\ \alpha = \pm\sqrt{1-\cos.^2\alpha}\,; \qquad \operatorname{tg.}\ \alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos.^2\alpha}}{\cos.\ \alpha}\,;$$

que conducen á consideraciones análogas.

47. Cuando se conozca la tangente, dichas fórmulas dan succesivamente:

$$\operatorname{tg.}^2\alpha = \frac{1-\cos.^2\alpha}{\cos.^2\alpha}\,; \qquad \cos.^2\alpha\,(1+\operatorname{tg.}^2\alpha) = 1\,;$$

$$\cos.\ \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg.}^2\alpha}}\,; \quad \operatorname{sen.}\alpha = \cos.\alpha\ \operatorname{tg.}\alpha = \pm\frac{\cos.\ \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg.}^2\alpha}}\,;$$

que tambien producen las mismas consecuencias.

48. Sean ahora dos ángulos α y $-\alpha$ de la misma magnitud y de signos contrarios, que podrán considerarse como descritos por una recta que partiendo de una misma posicion, y girando al rededor de uno de sus puntos, ha recorrido dos espacios iguales en opuestas direcciones. Designando por (x,y) (x',y') las coordenadas de los extremos de los arcos de radio r que miden los ángulos da-

dos, y debiendo estos extremos estar simétricamente colocados respecto al eje X, se tendrá, cualquiera que sea el valor de α,

$$x = x'; \quad y = -y',$$

y las ecuaciones conocidas (24)

$$x = r \cos. \alpha; \quad x' = r \cos. (-\alpha),$$
$$y = r \operatorname{sen.} \alpha; \quad y' = r \operatorname{sen.} (-\alpha),$$

darán las relaciones

$$\operatorname{sen.} (-\alpha) = -\operatorname{sen.} \alpha; \quad \cos. (-\alpha) = \cos. \alpha,$$

que sustituidas en las fórmulas [2, 3, 4 y 5], producen sucesivamente:

$$\operatorname{tg.} (-\alpha) = \frac{\operatorname{sen.} (-\alpha)}{\cos. (-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen.} \alpha}{\cos. \alpha} = -\operatorname{tg.} \alpha,$$

$$\cot. (-\alpha) = -\cot. \alpha; \quad \sec. (-\alpha) = \sec. \alpha; \quad \operatorname{cosec.} (-\alpha) = -\operatorname{cosec.} \alpha.$$

Estas relaciones demuestran que *dos ángulos de la misma magnitud y de signos contrarios tienen sus cosenos y secantes iguales en magnitud y signo, y las demas líneas iguales tambien en magnitud, pero de signos contrarios.*

49. Dos ángulos α y α' se llaman complementarios, cualesquiera que sean sus magnitudes y signos, cuando su suma algebraica es igual á $\frac{\pi}{2}$, verificándose entónces que el seno de cada uno es igual al coseno del otro.

En efecto, sean, en primer lugar, dos ángulos positivos $\alpha =$ A O M' (Fig. 6) y $\alpha' =$ M' O B, entre los que existe la relacion $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$; cada uno de ellos será menor que un ángulo recto, y designando por (x, y) las coordenadas del punto m', que estará situado entre A y B, se tendrá

$$x = r \cos. \alpha; \quad y = r \operatorname{sen.} \alpha.$$

Pero la recta O m' forma con el eje O Y el ángulo α', y pudiendo considerarse $x = m'$ Q la ordenada, é $y =$ O Q como la abscisa del punto m' con relacion á dicho eje, se tendrá igualmente

$$x = r \operatorname{sen.} \alpha'; \quad y = r \cos. \alpha',$$

que combinadas con las anteriores, dan

$$\text{sen.}\,\alpha' = \cos.\,\alpha; \quad \cos.\,\alpha' = \text{sen.}\,\alpha,$$

segun expresa el enunciado.

Si uno de los ángulos α es mayor que $\frac{\pi}{2}$, el otro deberá ser negativo, y si se designa por α'' su valor absoluto, será $\alpha' = -\alpha''$, y la relacion $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$ se convertirá en $\alpha - \alpha'' = \frac{\pi}{2}$. Si ahora se construye un ángulo A O M$'' = \alpha$ sobre el eje O X y otro M$''$ O B $= \alpha''$ sobre la recta O M$''$, pero en direccion contraria, el ángulo A O B será igual á la diferencia $\alpha - \alpha'' = \frac{\pi}{2}$, y por lo tanto, el lado O B coincidirá con el eje O Y, cualquiera que sea la posicion del punto m'', cuya abscisa x y cuya ordenada y serán, como anteriormente, su ordenada y abscisa respecto al eje O Y, con el que la recta $o\,m''$ forma el ángulo $-\alpha''$, que debe estar precedido del signo —, pues se ha tomado en direccion opuesta que α. Se tendrá, por consiguiente,

$$x = r\cos.\,\alpha; \quad y = r\,\text{sen.}\,\alpha,$$

$$x = r\,\text{sen.}\,(-\alpha''); \quad y = r\cos.\,(-\alpha''),$$

ó bien

$$\cos.\,\alpha = \text{sen.}\,(-\alpha'') = \text{sen.}\,\alpha'; \quad \text{sen.}\,\alpha = \cos.\,(-\alpha'') = \cos.\,\alpha',$$

como cuando α y α' son positivos y menores que $\frac{\pi}{2}$.

Sustituyendo en estas fórmulas el valor $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, se convertirán en las siguientes:

$$\text{sen.}\,\alpha = \cos.\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right); \quad \cos.\,\alpha = \text{sen.}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

que demuestran que *el coseno de un ángulo no es otra cosa que el seno de su complemento.*

50. Aplicando estas fórmulas á las [2, 3, 4 y 5], se obtiene sucesivamente:

$$\text{tg.}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\text{sen.}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos.\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos.\ \alpha}{\text{sen.}\ \alpha}=\cot.\ \alpha;$$

$$\sec.\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\cos.\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{1}{\text{sen.}\ \alpha}=\text{cosec.}\ \alpha;$$

de donde se deduce que análogamente al coseno la *cotangente y cosecante de un ángulo son la tangente y secante de su complemento.*

Esta propiedad justifica el nombre dado á estas líneas.

51. Problema.— *Dados los senos y cosenos de dos ángulos* a *y* b, *determinar el seno y coseno de la suma y de la diferencia de estos ángulos.*

Trazando por el orígen de dos ejes rectangulares dos rectas A y B, que formen con el X los ángulos dados a y b, el de dichas dos rectas estará en todos los casos representado por $a-b$ (20) y se tendrá (42)

$$\cos.\ (A, B)=\cos.\ (A, X)\cos.\ (B, X)+\cos.\ (A, Y)\cos.\ (B, Y),$$

ó bien

$$\cos.\ (a-b)=\cos.\ a\cos.\ b+\cos.\ (A, Y)\cos.\ (B, Y).$$

Si los ángulos a y b son menores que $\frac{\pi}{2}$ se tendrá

$$\text{ángulo }(A, Y)=\frac{\pi}{2}-a \quad \text{y} \quad \text{ángulo }(B, Y)=\frac{\pi}{2}-b;$$

si mayores,

$$\text{ángulo }(A, Y)=a-\frac{\pi}{2},\ \text{ángulo }(B, Y)=b-\frac{\pi}{2};$$

y en los dos casos (48 y 49)

$$\cos.\ (A, Y)=\cos.\left[\pm\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right]=\cos.\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{sen.}\ a,$$

$$\cos.\ (B, Y)=\cos.\left[\pm\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\right]=\cos.\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=\text{sen.}\ b,$$

cuyos valores dan, por último,

$$\cos.(a-b)=\cos.a\cos.b+\operatorname{sen}.a\operatorname{sen}.b. \quad (6)$$

Siendo esta fórmula exacta para todos los valores de a y b, se verificará cuando se cambie b en $-b$, con lo que se convierte, teniendo presente (48) que

$$\operatorname{sen}.(-b)=-\operatorname{sen}.b \text{ y } \cos.(-b)=\cos.b,$$

en

$$\cos.(a+b)=\cos.a\cos.b-\operatorname{sen}.a\operatorname{sen}.b. \quad (7)$$

Cambiando a en $\frac{\pi}{2}-a$ en el valor de $\cos.(a-b)$, se obtiene, por ser (49)

$$\cos.\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right)=\operatorname{sen}.(a+b),$$

$$\cos.\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\operatorname{sen}.a \text{ y } \operatorname{sen}.\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos.a,$$

$$\operatorname{sen}.(a+b)=\operatorname{sen}.a\cos.b+\operatorname{sen}.b\cos.a, \quad (8)$$

y cambiando en ésta b en $-b$,

$$\operatorname{sen}.(a-b)=\operatorname{sen}.a\cos.b-\operatorname{sen}.b\cos.a. \quad (9)$$

Las cuatro fórmulas [6, 7, 8 y 9] resuelven el problema propuesto.

52. Haciendo $b=a$ en las fórmulas [7 y 8] se obtienen las siguientes, que determinan el seno y coseno del doble de un ángulo en funcion del seno y coseno de éste:

$$\operatorname{sen}.2a=2\operatorname{sen}.a\cos.a, \quad (10)$$

$$\cos.2a=\cos.^2 a-\operatorname{sen}.^2 a=1-2\operatorname{sen}.^2 a=2\cos.^2 a-1. \quad (11)$$

53. Si $b=2a$, las mismas fórmulas dan:

$$\operatorname{sen}.3a=\operatorname{sen}.a\cos.2a+\cos.a\operatorname{sen}.2a,$$

$$\cos.3a=\cos.a\cos.2a-\operatorname{sen}.a\operatorname{sen}.2a;$$

ó bien sustituyendo los valores [10 y 11]:

$$\operatorname{sen}.3a=3\operatorname{sen}.a-4\operatorname{sen}.^3 a, \quad (12)$$

$$\cos.3a=4\cos.^3 a-3\cos.a; \quad (13)$$

que sirven para calcular el seno ó coseno del triple de un ángulo cuando se conozca el seno ó coseno de éste.

54. De las fórmulas [2, 6, 7, 8 y 9] se deduce:

$$\text{tg.}\,(a \pm b) = \frac{\text{sen.}\,(a \pm b)}{\cos.\,(a \pm b)} = \frac{\text{sen.}\,a \cos.\,b \pm \text{sen.}\,b \cos.\,a}{\cos.\,a \cos.\,b \mp \text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,b},$$

ó bien, dividiendo los dos términos del quebrado por cos. a cos. b:

$$\text{tg.}\,(a \pm b) = \frac{\text{tg.}\,a \pm \text{tg.}\,b}{1 \mp \text{tg.}\,a\,\text{tg.}\,b}, \qquad (14)$$

fórmula que determina la tangente de la suma ó diferencia de dos ángulos en funcion de las tangentes de éstos.

55. Suponiendo $b = a$, se obtiene

$$\text{tg.}\,2\,a = \frac{2\,\text{tg.}\,a}{1 - \text{tg.}^2\,a}, \qquad (15)$$

fórmula cuyo uso es análogo al de las [10 y 11].

56. Si se supone $a = \pi$ en las fórmulas [6, 7, 8, 9 y 14], se obtienen las siguientes, teniendo en cuenta los valores (25, 3°);

$$\left.\begin{aligned} \text{sen.}\,(\pi - b) &= \text{sen.}\,b \\ \cos.\,(\pi - b) &= -\cos.\,b \\ \text{tg.}\,(\pi - b) &= -\text{tg.}\,b \end{aligned}\right\} \;(16) \qquad \left.\begin{aligned} \text{sen.}\,(\pi + b) &= -\text{sen.}\,b \\ \cos.\,(\pi + b) &= -\cos.\,b \\ \text{tg.}\,(\pi + b) &= \text{tg.}\,b \end{aligned}\right\} \;(17)$$

que demuestran: 1.°, *que los senos de dos ángulos suplementarios son iguales en magnitud y signo, y sus cosenos y tangentes iguales en magnitud y de signos contrarios;* 2.°, *que los senos y cosenos de dos ángulos cuya diferencia sea* π, *son iguales en magnitud y de signos contrarios, y sus tangentes iguales en magnitud y signo.*

57. De esta propiedad se deduce que añadiendo á un ángulo un número par de semi-circunferencias no varian sus líneas trigonométricas, lo que concuerda con lo ya dicho (26), y si este número es impar, cambiarán únicamente de signo el seno y el coseno, conservando el suyo la tangente, cuya última circunstancia se expresa por la fórmula

$$\text{tg.}\,(n\,\pi + \alpha) = \text{tg.}\,\alpha,$$

que siendo n un número entero cualquiera, determina los ángulos que tienen una misma tangente, y es análoga á las de los números 29 y 30.

58. Es fácil ahora obtener las líneas trigonométricas de un ángulo en funcion de las de otro menor que 90°. Sea, por ejemplo, un ángulo de $1.726° = \alpha$; se tiene $1.726 = 9\pi + 106$; y por tanto (57),

$$\text{sen.}\,\alpha = -\text{sen.}\,106°;\ \cos.\,\alpha = -\cos.\,106°;\ \text{tg.}\,\alpha = \text{tg.}\,106°;$$

ó bien (56,1°)

$$\text{sen.}\,\alpha = -\text{sen.}\,74°;\ \cos.\,\alpha = \cos.\,74°;\ \text{tg.}\,\alpha = -\text{tg.}\,74°.$$

En efecto, el ángulo dado termina en el cuarto cuadrante, y se sabe (25,4°) que su coseno es positivo, y negativo el seno y la tangente.

Si el ángulo dado fuera negativo, el teorema del núm. 48 determinaria los signos correspondientes á los valores obtenidos aplicando este método al mismo ángulo supuesto positivo.

59. Sumando y restando entre sí las ecuaciones [6, 7, 8 y 9], se obtienen las siguientes:

$$\text{sen.}\,(a+b) + \text{sen.}\,(a-b) = 2\,\text{sen.}\,a\cos.\,b,$$
$$\text{sen.}\,(a+b) - \text{sen.}\,(a-b) = 2\,\text{sen.}\,b\cos.\,a,$$
$$\cos.\,(a+b) + \cos.\,(a-b) = 2\cos.\,a\cos.\,b,$$
$$\cos.\,(a+b) - \cos.\,(a-b) = -2\,\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,b,$$

ó bien, suponiendo

$$a+b=p,\quad a-b=q,$$

de donde

$$a=\frac{1}{2}(p+q),\ b=\frac{1}{2}p-q):$$

$$\text{sen.}\,p + \text{sen.}\,q = 2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(p+q)\cos.\,\frac{1}{2}(p-q); \tag{18}$$

$$\text{sen.}\,p - \text{sen.}\,q = 2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(p-q)\cos.\,\frac{1}{2}(p+q); \tag{19}$$

$$\cos.\,p + \cos.\,q = 2\cos.\,\frac{1}{2}(p+q)\cos.\,\frac{1}{2}(p-q); \tag{20}$$

$$\cos.\,p - \cos.\,q = 2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(p+q)\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(q-p); \tag{21}$$

fórmulas que sirven para trasformar en un producto la suma ó diferencia de senos y cosenos.

60. Dividiendo la [18] por la [19] se obtiene

$$\frac{\text{sen.}\, p + \text{sen.}\, q}{\text{sen.}\, p - \text{sen.}\, q} = \frac{\text{tg.}\, \frac{1}{2}(p+q)}{\text{tg.}\, \frac{1}{2}(p-q)}; \qquad (22)$$

fórmula que demuestra que *la suma de los senos de dos ángulos es á su diferencia como la tangente de la semi-suma de estos ángulos es á la de la semi-diferencia.*

61. Multiplicando entre sí las expresiones

$$\cos.\, a + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\, a \quad \text{y} \quad \cos.\, b + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\, b,$$

se obtiene:

$$(\cos.\, a + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\, a)(\cos.\, b + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\, b) =$$
$$= (\cos.\, a \cos.\, b - \text{sen.}\, a\, \text{sen.}\, b) + \sqrt{-1}\,(\text{sen.}\, a \cos.\, b + \text{sen.}\, b \cos.\, a) =$$
$$= \cos.\, (a+b) + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\, (a+b);$$

expresion de la misma forma que cada factor en donde el ángulo a ó b está reemplazado por la suma $a+b$. Multiplicando este producto por un tercer factor $\cos.\, c + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\, c$, se obtendrá, por lo tanto,

$$(\cos.\, a + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\, a)(\cos.\, b + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\, b)(\cos.\, c + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\, c) =$$
$$= \cos.\, (a+b+c) + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\, (a+b+c).$$

Aplicando esta fórmula á m factores, y suponiendo $a = b = c = \ldots\ldots$, se obtiene la siguiente, conocida con el nombre de *fórmula de Moivre:*

$$(\cos.\, a + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\, a)^m = \cos.\, m\, a + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\, m\, a. \qquad (23)$$

Esta demostracion supone que el exponente m es entero y positivo, pero es fácil extenderla á todos los casos. Sea $m = \frac{p}{q}$

un número fraccionario positivo; siendo enteros p y q se tendrá, segun la fórmula anterior,

$$\left(\cos.\frac{a}{q}+\sqrt{-1}\text{ sen. }\frac{a}{q}\right)^q=\cos. a+\sqrt{-1}\text{ sen. }a,$$

ó bien, extrayendo la raíz q de los dos miembros

$$(\cos. a+\sqrt{-1}\text{ sen. }a)^{\frac{1}{q}}=\cos.\frac{a}{q}+\sqrt{-1}\text{ sen. }\frac{a}{q}.$$

Elevando ahora estos dos miembros á la potencia p, se tendrá:

$$(\cos. a+\sqrt{-1}\text{ sen. }a)^{\frac{p}{q}}=\cos.\frac{a\,p}{q}+\sqrt{-1}\text{ sen. }\frac{a\,p}{q};$$

y por consiguiente, la fórmula [23] es aplicable á este valor de m.

Por último, si el exponente es negativo se obtiene sucesivamente:

$$(\cos. ma+\sqrt{-1}\text{ sen. }ma)(\cos. ma-\sqrt{-1}\text{ sen. }ma)=$$
$$\cos.^2 ma+\text{sen.}^2 ma=1;$$

$$\cos. ma-\sqrt{-1}\text{ sen. }ma=\frac{1}{\cos. ma+\sqrt{-1}\text{ sen. }ma}=$$
$$\frac{1}{(\cos. a+\sqrt{-1}\text{ sen. }a)^m};$$

ó bien (48)

$$(\cos. a+\sqrt{-1}\text{ sen. }a)^{-m}=\cos.(-ma)+\sqrt{-1}\text{ sen. }(-ma),$$

que demuestra la exactitud de la [23] para este caso.

62. Las fórmulas [10 y 11] determinan el seno y coseno del doble de un ángulo cuando se conocen los de éste, y de ellas se deduce la resolucion de los problemas inversos que siguen, cuyo estudio servirá de aplicacion á lo expuesto hasta aquí.

63. Problema I.—*Dado el coseno de un ángulo determinar el seno y coseno de su mitad.*

Cambiando a en $\frac{a}{2}$ en las fórmulas [1 y 11] se obtienen las siguientes entre el dato cos. a y las incógnitas sen. $\frac{a}{2}$ y cos. $\frac{a}{2}$:

$$\text{sen.}^2 \frac{a}{2} + \cos.^2 \frac{a}{2} = 1; \ \cos.^2 \frac{a}{2} - \text{sen.}^2 \frac{a}{2} = \cos. a;$$

que combinadas por suma y resta dan los valores

$$\cos. \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos. a}{2}}; \ \text{sen.} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos. a}{2}},$$

que manifiestan que á cada una de las incógnitas corresponden dos valores de la misma magnitud y de signos contrarios, lo que en efecto debe suceder, pues no dándose el ángulo a, sino su coseno, deberán obtenerse como soluciones los senos y cosenos de la mitad de todos los ángulos que tengan por coseno la magnitud dada, los cuales están comprendidos en la forma (30) $(2\,n\,\pi \pm \alpha)$; y por tanto, las soluciones del problema serán sen. $(n\,\pi \pm \frac{\alpha}{2})$ y cos. $(n\,\pi \pm \frac{\alpha}{2})$.

Si n es par, se tendrá (57), (48):

$$\text{sen.}\left(n\,\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \text{sen.}\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm\, \text{sen.} \frac{\alpha}{2},$$

$$\cos.\left(n\,\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \cos.\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right) = \cos. \frac{\alpha}{2},$$

y si es impar:

$$\text{sen.}\left(n\,\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = -\text{sen.}\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm\, \text{sen.} \frac{\alpha}{2},$$

$$\cos.\left(n\,\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos.\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos. \frac{\alpha}{2};$$

y por lo tanto deben obtenerse para sen. $\frac{a}{2}$ y cos. $\frac{a}{2}$ dos valores iguales en magnitud y de signos contrarios, que son los determinados en las fórmulas anteriores.

Si se diese el ángulo a al mismo tiempo que su coseno el problema no tendria más que una solucion, pues al ángulo conocido $\frac{a}{2}$ no pueden corresponder más que un seno y un coseno. Para conocer cuál de los dos valores dados por las fórmulas deberia adoptarse se determinarian (58) los signos de sen. $\frac{a}{2}$ y cos. $\frac{a}{2}$ con lo que desapareceria toda ambigüedad.

64. PROBLEMA II.—*Dado el seno de un ángulo determinar el seno y coseno de su mitad.*

Cambiando como anteriormente a en $\frac{a}{2}$ en las fórmulas [1 y 10] se obtiene :

$$\text{sen.}^2 \frac{a}{2} + \cos.^2 \frac{a}{2} = 1; \quad 2 \text{ sen.} \frac{a}{2} \cos. \frac{a}{2} = \text{sen. } a;$$

las que dan, combinándolas por suma y resta, y extrayendo despues la raíz cuadrada :

$$\text{sen.} \frac{a}{2} + \cos. \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 + \text{sen. } a};$$

$$\text{sen.} \frac{a}{2} - \cos. \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 - \text{sen. } a};$$

de las que se deduce fácilmente :

$$\text{sen.} \frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{sen. } a} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \text{sen. } a};$$

$$\cos. \frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{sen. } a} \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 - \text{sen. } a}.$$

Los dobles signos de los radicales dan para cada incógnita cuatro valores, y en efecto debe ser así, pues han de obtenerse los senos y cosenos de la mitad de todos los ángulos que tienen un mismo seno, los que están representados (29) por $2n\pi + \alpha$ y $(2n + 1)\pi - \alpha$; de modo que las expresiones de sen. $\frac{a}{2}$ y cos. $\frac{a}{2}$ deben dar los senos y cosenos de todos los ángulos comprendidos en las formas $n\pi + \frac{\alpha}{2}$ y $n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, ó sean (57)

$$\text{sen.} \left(n\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \text{sen.} \frac{\alpha}{2};$$

$$\text{sen.} \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \text{sen.} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\cos.\left(n\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \cos.\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos.\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \cos.\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right);$$

correspondiendo los signos superiores al caso de ser n par y los inferiores al de ser impar, resultando en consecuencia para sen. $\frac{a}{2}$ y cos. $\frac{a}{2}$ cuatro valores, dos á dos de la misma magnitud y de signos contrarios. Observando (49) que

$$\text{sen.}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos.\frac{\alpha}{2} \text{ y } \cos.\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \text{sen.}\frac{\alpha}{2},$$

se ve que los valores de sen. $\frac{a}{2}$ son iguales á los de cos. $\frac{a}{2}$, lo que manifiestan las fórmulas encontradas, que sólo difieren en los signos de los radicales.

Si el ángulo a fuese conocido, no habria más que una solucion, y para determinar cuál de los valores debería aceptarse, se refe-riría el ángulo $\frac{a}{2}$ al primer cuadrante (58), y conocidos los signos de sen. $\frac{a}{2}$ y cos. $\frac{a}{2}$, se desecharian los dos valores que los tuvieran contrarios, quedando sólo que elegir el verdadero entre los otros dos, lo que se conseguiria observando que en el primer cuadrante la magnitud absoluta del seno de un ángulo mayor que 45° es mayor que la de su coseno, y que si, por el contrario, el ángulo es menor que 45° su seno es menor que su coseno; y puesto que se ha obtenido el ángulo de dicho cuadrante cuyo seno y coseno son iguales en magnitud á los de $\frac{a}{2}$, será fácil conocer el valor que deberá tomarse de los dos primeramente determinados. Suponiendo, por ejemplo, que se dé

$$\text{sen. } a = \text{sen. } 1650° = -\tfrac{1}{2},$$

pidiéndose sen. 825° y cos. 825°, se tiene (58)

$$\text{sen. } 825° = \text{sen. } (4\pi + 105°) = \text{sen. } 105° = \text{sen. } 75°,$$

$$\cos. 825° = \cos. (4\pi + 105°) = \cos. 105° = -\cos. 75°;$$

y debiendo ser, por lo tanto, sen. $\frac{a}{2}$ positivo y cos. $\frac{a}{2}$ negativo, deberán adoptarse los valores :

$$\text{sen. } 825^\circ = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\cos.\ 825^\circ = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}};$$

pero siendo sen. $75^\circ >$ cos. 75°, el valor de sen. $\frac{a}{2}$ será el mayor en absoluto, ó sea el correspondiente al signo superior, y el de cos. $\frac{a}{2}$ será el menor, ó sea tambien el del signo superior, y se tendrá, por último :

$$\text{sen. } 825^\circ = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right),$$

$$\cos.\ 825^\circ = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

CAPÍTULO V.

CONSTRUCCION Y USO DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

65. Estando en general expresados los ángulos en grados, el uso de las líneas trigonométricas no sería ventajoso si no se pudiera pasar fácil y rápidamente de aquéllos á éstas y vice-versa, lo que se consigue por medio de tablas, cuya formacion, si bien prolija, no presenta dificultades.

66. Si en la figura 6 se adopta el radio O A por unidad, y se supone $A\,O\,M' = \alpha$, será $m'\,P = \text{sen.}\ \alpha$ y $A\,T' = \text{tg.}\ \alpha$. Evidentemente se tiene

$$m'\,P < \text{cuerda}\ m'A < \text{arco}\ A\,m',$$

y

$$\text{área sector O A } m' < \text{área triángulo O A T}',$$

luego

$$\text{sen.}\ \alpha < \text{arco}\ \alpha \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}\,\text{O A} \times \text{arco}\ \alpha < \frac{1}{2}\,\text{O A} \times \text{tg.}\ \alpha;$$

ó bien

$$\frac{\text{arco}\ \alpha}{\text{sen.}\ \alpha} > 1 \quad \text{y} \quad \text{arco}\ \alpha < \text{tg.}\ \alpha = \frac{\text{sen.}\ \alpha}{\text{cos.}\ \alpha}, \quad \text{ó} \quad \frac{\text{arco}\ \alpha}{\text{sen.}\ \alpha} < \frac{1}{\text{cos.}\ \alpha};$$

lo que demuestra que la relacion $\frac{\text{arco}\ \alpha}{\text{sen.}\ \alpha}$ está constantemente comprendida entre 1 y $\frac{1}{\text{cos.}\ \alpha}$. Si se dan á α valores decrecientes la relacion $\frac{1}{\text{cos.}\ \alpha}$ se aproximará á la unidad, y cuando α sea suficientemente pequeño, diferirá de ella tan poco como se quiera, así como $\frac{\text{arco}\,\alpha}{\text{sen.}\,\alpha}$ cuyo límite es, por consiguiente, la unidad. Luego *la diferencia entre un arco y un seno puede ser menor que toda magnitud asignada dando á aquél un valor suficientemente pequeño.*

67. Multiplicando la igualdad (64) sen. $\alpha = 2$ sen. $\frac{\alpha}{2}$ cos. $\frac{\alpha}{2}$ por la desigualdad sen. $\frac{\alpha}{2} > \frac{\text{arco}\,\alpha}{2}$ cos. $\frac{\alpha}{2}$, deducida de la $\frac{\text{arco}\,\alpha}{\text{sen.}\,\alpha} < \frac{1}{\text{cos.}\,\alpha}$ establecida en el número anterior, se obtiene:

$$\text{sen.}\,\alpha > \text{arco}\,\alpha\,\text{cos.}^2\frac{\alpha}{2} = \text{arco}\,\alpha\left(1 - \text{sen.}^2\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$\text{arco}\,\alpha - \text{sen.}\,\alpha < \text{arco}\,\alpha\,\text{sen.}^2\frac{\alpha}{2};$$

y multiplicando ahora esta desigualdad por la del mismo sentido,

$$\text{sen.}^2\frac{\alpha}{2} < \frac{(\text{arco}\,\alpha)^2}{4},$$

resulta, en fin,

$$\text{arco}\,\alpha - \text{sen.}\,\alpha < \frac{(\text{arco}\,\alpha)^3}{4},$$

que demuestra que *la diferencia entre un arco y un seno es menor que la cuarta parte del cubo de este arco.*

68. Es fácil ahora conocer el error que se cometerá adoptando el valor de un arco para el de su seno. Sea $\alpha = 10''$ este arco que estando comprendido 64800 veces en el de $180° = 648000''$ tendrá por valor,

$$10'' = \frac{\pi}{64800} = \frac{3{,}1415926.....}{64800} = 0{,}0000484813681.....,$$

y el error que se cometerá tomándolo por el de sen. $10''$ será menor que $\frac{(\text{arco}\,10'')^3}{4} = 0{,}00000\ 00000\ 00032.....$, de modo que podrán considerarse exactas las trece primeras decimales, y establecer en consecuencia,

$$\text{sen.}\,10'' = 0{,}00004\ 84813\ 681.$$

69. Sustituyendo este valor en la fórmula

$$\cos. 10'' = \sqrt{1 - \text{sen.}^2 10''},$$

se obtendrá con la misma aproximacion

$$\cos. 10'' = 0{,}99999\ 99988\ 248.$$

70. Para calcular los senos y cosenos de los demas ángulos de 10″ en 10″, sirven las fórmulas (59)

$$\text{sen.}\ (a + b) = 2\ \text{sen.}\ a \cos.\ b - \text{sen.}\ (a - b),$$
$$\cos.\ (a + b) = 2 \cos.\ a \cos.\ b - \cos.\ (a - b),$$

que suponiendo $b = 10''$, se reducen á

$$\text{sen.}\ (a + 10'') = 2\ \text{sen.}\ a \cos.\ 10'' - \text{sen.}\ (a - 10''),$$
$$\cos.\ (a + 10'') = 2 \cos.\ a \cos.\ 10'' - \cos.\ (a - 10'').$$

Haciendo $a = 10'', 20''$....., se obtendrá:

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen.}\ 20'' = 2\ \text{sen.}\ 10'' \cos.\ 10'' \\ \cos.\ 20'' = 2 \cos.^2 10'' - 1\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen.}\ 30'' = 2\ \text{sen.}\ 20'' \cos.\ 10'' - \text{sen.}\ 10'' \\ \cos.\ 30'' = 2 \cos.\ 20'' \cos.\ 10'' - \cos.\ 10''\end{array}\right\} \text{.....},\ \text{etc.}$$

71. La aplicacion de estas fórmulas exige cálculos aritméticos muy prolijos, pero que pueden simplificarse notablemente, pues observando que el factor 2 cos. 10″ es constante en todas las operaciones, y difiere muy poco de 2, puede suponerse $2 - 2 \cos.\ 10'' = K = 0{,}00000\ 00023\ 504$, y sustituyendo $2 - K$ en vez de 2 cos. 10″ en las fórmulas anteriores se obtiene:

$$\text{sen.}\ (a + 10'') = 2\ \text{sen.}\ a - K\ \text{sen.}\ a - \text{sen.}\ (a - 10''),$$
$$\cos.\ (a + 10'') = 2 \cos.\ a - K \cos.\ a - \cos.\ (a - 10''),$$

ó bien,

$$\text{sen.}\ (a + 10'') - \text{sen.}\ a = [\text{sen.}\ a - \text{sen.}\ (a - 10'')] - K\ \text{sen.}\ a,$$
$$\cos.\ (a + 10'') - \cos.\ a = [\cos.\ a - \cos.\ (a - 10'')] - K \cos.\ a,$$

que dan la diferencia entre los senos y cosenos de dos ángulos consecutivos $(a + 10'')$ y a en funcion de la diferencia, ya determinada por la operacion anterior, entre los senos y cosenos de los dos ángulos a y $a - 10''$ y del producto K sen. a, que aunque hay que formarlo en cada operacion, puede hacerse con facilidad escribiendo los productos de K por las nueve cifras significativas y no tomando más que las trece primeras decimales. Como se conocen los senos y cosenos de dos ángulos consecutivos 0 y 10″ se podrán determinar las diferencias

$$\text{sen.}\,20'' - \text{sen.}\,10''; \ \text{sen.}\,30'' - \text{sen.}\,20''.....;$$

$$\cos.\,20'' - \cos.\,10''; \ \cos.\,30'' - \cos.\,20''.....;$$

y por consiguiente,

$$\text{sen.}\,20'',\ \text{sen.}\,30''.....,\ \cos.\,20'',\ \cos.\,30''......$$

Determinados así los senos y cosenos de todos los ángulos de 10″ en 10″ hasta 45°, las fórmulas

$$\text{sen.}\,\alpha = \cos.\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{y} \quad \cos.\,\alpha = \text{sen.}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

los extenderán hasta 90°, y por medio de lo expuesto en el número 58 será fácil obtener los de un ángulo cualquiera.

72. La tangente y cotangente se calcularán por las fórmulas del núm. 44, y aunque tambien pueden obtenerse la secante y cosecante, el poco uso que tienen estas líneas hace que se prescinda de ellas por completo.

73. La facilidad que introduce en los cálculos el uso de los logaritmos ha hecho calcular los de las líneas trigonométricas determinadas como acaba de exponerse, formándose tablas en que al lado de cada ángulo están escritos los logaritmos de dichas líneas. Las más completas que se conocen son las de Callet, tanto por estar los ángulos de 10″ en 10″, como porque los logaritmos están aproximados hasta siete decimales, y á ellas se refieren las explicaciones que siguen, siendo necesario, cuando se manejen otras cualesquiera, enterarse de las contenidas en su introduccion, pues aunque en la esencia son iguales, suelen variar en su disposicion.

74. Los senos y cosenos son menores que la unidad, y por lo tanto deben ser negativos sus logaritmos, pero en las tablas se ha recurrido á suponer negativa tan sólo la característica, y áun para evitar la notacion correspondiente, que podria ser confusa,

se han escrito en vez de éstas sus complementos aritméticos, de modo que para log. sen. ($31^\circ 50' 10''$), por ejemplo, se encuentra escrito 9,7222153 en vez de $\bar{1},7222153$, lo que obliga á hacer en los cálculos la rectificacion correspondiente.

75. La misma observacion es aplicable á los logaritmos de las tangentes de los ángulos de 0 á 45° y á los de las cotangentes de 45° á 90°, pero los demas, siendo ya positivos, están escritos con su verdadero valor.

76. Las tablas trigonométricas constan de cinco columnas principales, una que contiene los ángulos y cuatro en que al lado de cada uno de éstos están escritos los logaritmos de su seno, coseno, tangente y cotangente; pero como el seno y tangente de un ángulo son iguales al coseno y cotangente de su complemento, no se extienden las tablas más que hasta 45°, y de aquí hasta 90° los logaritmos de estas dos últimas líneas dan los de las dos primeras, y vice-versa. Por esta razon cada columna de logaritmos tiene dos títulos, uno en la parte superior, que corresponde al número de grados escrito sobre el marco de la página y á los minutos y segundos de las dos primeras columnas de la izquierda, y comprende los ángulos de 0 á 45°; y otro en la parte inferior, que corresponde al número de grados que está bajo el marco y á los minutos y segundos de las dos columnas de la derecha, y comprende los ángulos de 45° á 90°. Ademas se encuentran tres columnas de diferencias, una para los senos, otra para los cosenos y otra comun para las tangentes y cotangentes, pues segun la fórmula $\text{tg. } \alpha = \frac{1}{\text{cot. } \alpha}$, la suma de sus logaritmos debe ser constante é igual á cero, como efectivamente se verifica teniendo en cuenta la observacion del número 75.

77. Cuando el ángulo de cuyas líneas trigonométricas se buscan los logaritmos está expresado en grados, minutos y decenas de segundos las tablas los dan inmediatamente, ya por la graduacion superior y de la izquierda, ó ya por la inferior y de la derecha, segun que aquél sea menor ó mayor de 45°, debiéndose hacer la correccion indicada en los números 74 y 75.

78. Si la graduacion del ángulo contiene unidades y fracciones de segundo hay que recurrir á un procedimiento análogo al empleado en las tablas de logaritmos de los números. Sea, por ejemplo, $A = 31^\circ\, 27'\, 28'',13$ el ángulo de cuyas líneas trigonométricas se buscan los logaritmos; el siguiente cuadro manifiesta el modo de disponer los cálculos con claridad, y contiene todas las operaciones aritméticas necesarias, no habiendo necesidad de efectuar ninguna por separado:

$$\begin{array}{r|r}
\text{log. sen. A } (31^\circ\, 27'\, 28'',13) = & \bar{1},7175349 \\
d = 344 & 2752 \\
 & 34 \\
 & 10 \\
\hline
 & \bar{1},7175629
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r}
\text{log. tg. A } (31^\circ\, 27'\, 28'',13) = & \bar{1},7865628 \\
d = 473 & 3784 \\
 & 47 \\
 & 14 \\
\hline
 & \bar{1},7866013
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r}
\text{log. cos. A } (31^\circ\, 27'\, 28'',13) = & \bar{1},9309592 \\
-\,1'',87 & 128 \\
d = -\,128 & 102 \\
 & 8 \\
\hline
 & \bar{1},9309616
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r}
\text{log. cot. A } (31^\circ\, 27'\, 28'',13) = & 0,2133899 \\
-\,1'',87 & 473 \\
d = -\,473 & 378 \\
 & 33 \\
\hline
 & 0,2133987
\end{array}$$

Al lado de log. sen. A se escribe en un paréntesis el valor de A con objeto de tenerlo á la vista y se busca en las tablas log. sen. $(31^\circ 27' 20'') = \bar{1},7175349$, que se escribe á la derecha, y debajo la diferencia $d = 344$ entre este logaritmo y el de sen. $(31^\circ 27' 30'')$, entre los que está comprendido el que se busca, la que corresponde, por lo tanto, á una diferencia de $10''$ entre los ángulos. La proporcion $10'' : 344 :: 8'',13 : x = 344 \times 0,813$ da la diferencia que se debe añadir á log. sen. $(31^\circ 27' 20'')$ para obtener log. sen. A, bastando escribir debajo de aquél los productos de 344 por 8, 1 y 3, corriéndolos uno, dos y tres lugares á la derecha y despreciando las decimales que siguen á las de octavo órden; sumando, por último, el logaritmo encontrado en las tablas y los productos parciales obtenidos se conocerá log. sen. A, que debe limitarse á siete decimales.

79. Análogamente se determina log. tg. A, pero para los otros dos debe tenerse en cuenta una ligera variacion fundada en que á mayor ángulo corresponde menor coseno ó cotangente, y viceversa. En este caso se escribirá á la derecha de log. cos. A el del ángulo inmediatamente superior, ó sea log. cos. $(31^\circ 27' 30'')$, y debajo la diferencia $-1'',87$ entre este ángulo y el propuesto, y la $d = -128$ dada por las tablas entre los logaritmos que comprenden el que se busca. Multiplicando d por 187, y escribiendo los productos parciales como anteriormente, se tendrá log. cos. A, y de una manera análoga log. cot. A.

80. Cuando se da el logaritmo de una línea trigonométrica, se recorrerán las columnas pertenecientes á esta línea hasta encontrar dicho logaritmo, en cuyo caso se conoce inmediatamente el ángulo, ó bien hasta determinar dos logaritmos entre los que esté comprendido el propuesto, y entónces hay que recurrir á un procedimiento análogo al explicado en el número anterior. Sea, por ejemplo,

$$\text{log. sen. A} = \bar{1},6007963, \quad \text{log. cos. A} = \bar{1},6416435,$$

$$\text{log. tg. A} = 0,1931562, \text{ y } \text{log. cot. A} = \bar{1},8014213;$$

se dispondrán los cálculos de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r|l}
\log.\ \text{sen. A}\ (23^\circ\ 30'\ 14'',38) = \bar{1},6007693 & \\
481 & d = \\
\hline
2120 & 484 \\
\cline{2-2}
1840 & 4'',38 \\
3880 & \\
8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\log.\ \text{tg. A}\ (57^\circ\ 20'\ 27'',54) = 0,1931562 & \\
213 & d = \\
\hline
3490 & 463 \\
\cline{2-2}
2490 & 7'',53 \\
1750 & \\
361 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\log.\ \text{cos. A}\ (64^\circ\ 0'\ 45'',95) = \bar{1},6416435 & \\
692 & d = \\
\hline
-2570 & -432 \\
\cline{2-2}
4100 & 5'',94 \\
2120 & \\
392 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\log.\ \text{cot. A}\ (57^\circ\ 39'\ 54'',51) = \bar{1},8014213 & \\
423 & d = \\
\hline
-2100 & -466 \\
\cline{2-2}
2360 & 4'',50 \\
300 &
\end{array}$$

En el primer ejemplo se escribe el logaritmo dado, poniendo á la izquierda del signo = un paréntesis en blanco destinado al número de grados que se pide. Recorriendo en las tablas las columnas de los senos se ve que el logaritmo dado está comprendido entre $\bar{1}$,6007481 y $\bar{1}$,6007965, que pertenecen á los ángulos 23° 30′ 10″ y 23° 30′ 20″ que deberán comprender igualmente el ángulo que se busca, de modo que puede escribirse en el paréntesis 23° 30′ 1....., faltando determinar las unidades y fracciones de segundo. Para esto se escriben debajo del logaritmo dado las cifras 481, que el menor de los dados por las tablas tiene distintas de las de aquél, se restan de las correspondientes 693, y entre la diferencia 212 y la $d = 484$ de las tablas se forma la proporcion $484 : 10 :: 212 : x = \frac{2120}{484}$; y por lo tanto bastará añadir un cero á 212 y efectuar la division por d, y el cociente, aproximado hasta que desaparezcan todas las decimales del logaritmo dado, expresará las unidades y fracciones de segundo que deben escribirse en el paréntesis á continuacion de las decenas y completan el ángulo pedido.

81. Del mismo modo se determina A cuando se conoce log. tg. A; y solamente debe observarse en el ejemplo anterior que no estando el logaritmo dado comprendido entre ningunos de las columnas en cuya parte superior está escrito *tangente*, hay que recurrir á las notaciones inferiores, y en efecto se encuentran 0,1931213 y 0,1931676, pertenecientes á los ángulos $57° 20' 20''$ y $57° 20' 30''$, que comprenden el logaritmo propuesto y dan lugar al mismo cálculo que anteriormente.

82. Si se da log. cos. A, se debe tener en cuenta la advertencia del núm. 79 y escribir debajo del logaritmo dado las cifras en que difiera de él el mayor de los que lo comprendan en las tablas que corresponde á un ángulo menor, al que habrá que añadirle las unidades y fracciones de segundo determinadas como anteriormente.

Las mismas observaciones son aplicables al caso de darse log. cot. A.

CAPÍTULO VI.

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO RECTILÍNEO.

83. Siendo el principal objeto de la Trigonometría el cálculo de los elementos desconocidos de un triángulo en funcion de los conocidos en los diversos casos que puedan ocurrir, se necesitan fórmulas que comprendiendo los lados y los ángulos, establezcan relaciones entre los datos é incógnitas del problema, y permitan obtener el valor de éstas por procedimientos algebraicos.

84. Sea A B C (Fig. 12) un triángulo cualquiera en el que se designarán por A, B, C los ángulos que tienen sus vértices en estos puntos, y por a, b, c los lados opuestos, ó sean BC, AC y AB; si se toma el lado $AC = b$ por eje de las X, el vértice A por orígen, y se llaman x, y las coordenadas A D, B D del punto B, se tendrá en todos los casos, teniendo en cuenta que x será negativa cuando el ángulo A sea obtuso (36),

$$a^2 = y^2 + (b - x)^2\,;\quad y^2 = c^2 - x^2\,;\quad x = c \cos.\, A.$$

Sumando las dos primeras ecuaciones, y sustituyendo por x el valor de la tercera, resulta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos.\, A\,;$$

fórmula que demuestra que *el cuadrado de un lado de un triángulo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos ménos el duplo del producto de estos lados por el coseno del ángulo que comprenden.*

85. Aplicando esta propiedad á los tres lados, se obtienen las ecuaciones

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos. A \qquad (1)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos. B \qquad (2)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos. C \qquad (3)$$

que resuelven el problema de la Trigonometría, pues permiten determinar tres elementos de un triángulo cuando se conozcan los otros tres, sirviendo tambien para demostrar otras propiedades importantes por lo cual se las considera como las fórmulas fundamentales.

86. Combinando por suma y resta las ecuaciones [1] y [2] resultan las siguientes:

$$c = b \cos. A + a \cos. B,$$
$$a^2 - b^2 = c\,(a \cos. B - b \cos. A);$$

y multiplicándolas entre sí con objeto de eliminar c, se obtiene:

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos.^2 B - b^2 \cos.^2 A,$$

ó bien

$$a^2 \text{sen.}^2 B = b^2 \text{sen.}^2 A, \quad \text{ó} \quad \frac{\text{sen. } A}{a} = \frac{\text{sen. } B}{b},$$

que demuestran que *en todo triángulo los senos de los ángulos son proporcionales á los lados opuestos;* propiedad que aplicada á los tres ángulos produce las ecuaciones

$$\frac{\text{sen. } A}{a} = \frac{\text{sen. } B}{b} = \frac{\text{sen. } C}{c}. \qquad (4)$$

87. Las ecuaciones [4] dan la proporcion

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } B}, \quad \text{ó bien} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{sen. } A + \text{sen. } B}{\text{sen. } A - \text{sen. } B},$$

de donde se deduce (60)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg. } \frac{1}{2}\,(A+B)}{\text{tg. } \frac{1}{2}\,(A-B)}; \qquad (5)$$

fórmula que demuestra que *la suma de dos lados de un triángulo es á su diferencia como la tangente de la semi-suma de los ángulos opuestos es á la de la semi-diferencia.*

88. Las tres ecuaciones del núm. 85 sirven para determinar tres elementos cualquiera de un triángulo cuando se conozcan los otros tres, de donde parece deducirse que considerando los lados como incógnitas se obtendrán sus valores en funcion de los ángulos, pero es fácil demostrar analíticamente que existe en este caso la misma indeterminacion conocida en Geometría.

Sumando dichas ecuaciones dos á dos se obtienen las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} a\cos. B + b\cos. A = c \\ a\cos. C + c\cos. A = b \\ b\cos. C + c\cos. B = a \end{array}\right\},$$

que son de primer grado en a, b, c y pueden reemplazar á aquel sistema. Eliminando c entre la primera y cada una de las otras dos se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} a(\cos. A\cos. B + \cos. C) = b - b\cos.^2 A = b\,\mathrm{sen.}^2 A \\ b(\cos. A\cos. B + \cos. C) = a - a\cos.^2 B = a\,\mathrm{sen.}^2 B \end{array}\right\};$$

ó bien

$$\left.\begin{array}{l} \cos. A\cos. B + \cos. C = \dfrac{b}{a}\,\mathrm{sen.}^2 A \\ \cos. A\cos. B + \cos. C = \dfrac{a}{b}\,\mathrm{sen.}^2 B \end{array}\right\}.$$

De las ecuaciones del núm. 86 se deduce sucesivamente:

$$a\,\mathrm{sen.}\, B = b\,\mathrm{sen.}\, A;\quad a^2\,\mathrm{sen.}^2 B = b^2\,\mathrm{sen.}^2 A;\quad \frac{a}{b}\,\mathrm{sen.}^2 B = \frac{b}{a}\,\mathrm{sen.}^2 A.$$

Las dos ecuaciones obtenidas para determinar a y b se reducen, pues, á una sola y demuestran que sus valores son indeterminados, estando únicamente sujetos á la ecuacion

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos. A\cos. B + \cos. C}{\mathrm{sen.}^2 B},$$

que hace ver que su relacion $\frac{a}{b}$ es constante.

89. Suponiendo en las fórmulas encontradas hasta aquí que uno de los ángulos, A, por ejemplo, sea igual á 90°, se obten-

drán las correspondientes á los triángulos rectángulos. De la [1] se deduce

$$a^2 = b^2 + c^2, \qquad (6)$$

y sustituyendo este valor de a^2 en las [2 y 3] y reduciendo, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} c = a \cos. B \\ b = a \cos. C \end{array}\right\}, \qquad (7)$$

ó bien, observando que $B + C = 90°$,

$$\left.\begin{array}{l} c = a \operatorname{sen.} C \\ b = a \operatorname{sen.} B \end{array}\right\}, \qquad (8)$$

que se obtienen análogamente partiendo de las [4].

Dividiendo los valores [8] de b y c por los [7] de c y b, se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} b = c \operatorname{tg.} B \\ c = b \operatorname{tg.} C \end{array}\right\}, \qquad (9)$$

pudiendo establecerse que *en todo triángulo rectángulo:* 1.°, *un cateto es igual á la hipotenusa multiplicada por el coseno del ángulo adyacente ó por el seno del opuesto;* 2.°, *un cateto es igual al otro multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero.*

Estas fórmulas se obtienen directamente observando que los catetos de un triángulo rectángulo pueden considerarse como las coordenadas del vértice de uno de los ángulos agudos (23).

90. Las tablas trigonométricas dan los logaritmos de las diversas líneas de los ángulos, pero no éstas, lo que obliga á modificar las fórmulas de modo que les sea aplicable con facilidad el cálculo logarítmico, para lo cual es necesario saber transformar en producto la suma ó diferencia de dos cantidades.

91. Sea, en primer lugar, la suma de dos cantidades positivas a y b la que se trata de calcular por logaritmos: se tendrá,

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Se ha visto (27) que cuando un ángulo varía de 0 á 90° su tangente varía desde cero á infinito, de modo que siempre existirá en el primer cuadrante un ángulo φ tal que su tangente tenga un valor determinado. Sea, pues,

$$\text{tg.}\,\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}}\;;$$

el valor de $a+b$ será,

$$a+b=a\,(1+\text{tg.}^2\varphi)=a\left(1+\frac{\text{sen.}^2\varphi}{\cos.^2\varphi}\right)=$$

$$=a\left(\frac{\cos.^2\varphi+\text{sen.}^2\varphi}{\cos.^2\varphi}\right)=\frac{a}{\cos.^2\varphi}.$$

Por medio de las tablas se calculará el valor de φ, y despues el de $a+b$ conociendo los logaritmos de a y b sin necesidad de pasar á los números, lo que en algunas ocasiones puede ser ventajoso.

92. Si se quiere calcular la diferencia $a-b$ en que se suponga $a>b$, se podrá siempre encontrar un ángulo φ tal que $\text{sen.}\,\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}}$, puesto que $\frac{b}{a}<1$, y se tendrá:

$$a-b=a\left(1-\frac{b}{a}\right)=a\,(1-\text{sen.}^2\varphi)=a\cos.^2\varphi.$$

93. Si el binomio que se quiere trasformar en monomio es de la forma $A\cos.\,\alpha+B\,\text{sen.}\,\alpha$ se supondrá $\text{tg.}\,\varphi=\frac{B}{A}$ y se obtendrá:

$$A\cos.\,\alpha+B\,\text{sen.}\,\alpha=A\left(\cos.\,\alpha+\frac{B}{A}\,\text{sen.}\,\alpha\right)=A\,(\cos.\,\alpha+\text{tg.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\alpha)=$$

$$=A\,\frac{\cos.\,\alpha\cos.\,\varphi+\text{sen.}\,\alpha\,\text{sen.}\,\varphi}{\cos.\,\varphi}=\frac{A\cos.\,(\alpha-\varphi)}{\cos.\,\varphi}.$$

Tambien puede suponerse $\cot.\,\varphi=\frac{B}{A}$, y entónces resulta:

$$A\cos.\,\alpha+B\,\text{sen.}\,\alpha=A\,(\cos.\,\alpha+\cot.\,\varphi\,\text{sen.}\,\alpha)=\frac{A\,\text{sen.}\,(\varphi+\alpha)}{\text{sen.}\,\varphi}.$$

CAPÍTULO VII.

RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS.

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

94. Las fórmulas del núm. 89, dispuestas ya para el cálculo logarítmico, resuelven todos los casos, manifestando el cuadro siguiente las apropiadas á cada uno de los cuatro que pueden presentarse:

	Datos.	Incógnitas.	Fórmulas.
1.er caso..	a, B. . .	C, b, c.. . .	$C = 90^\circ - B$; $b = a \text{ sen. } B$; $c = a \cos. B$.
2.º. . . .	a, b. . . .	B, C, c... .	$\text{sen. } B = \frac{b}{a}$; $C = 90^\circ - B$; $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$ ó $c = a \cos. B$.
3.º. . . .	b, B. . . .	C, a, c. . .	$C = 90^\circ - B$; $a = \frac{b}{\text{sen. } B}$; $c = \frac{b}{\text{tg. } B} = b \cot. B$.
4.º. . . .	b, c. . . .	B, C, a. . .	$\text{tg. } B = \frac{b}{c}$; $C = 90^\circ - B$; $a = \frac{c}{\cos. B} = \frac{b}{\text{sen. } B}$.

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

95. PRIMER CASO.—*Se dan dos ángulos y un lado cualquiera* a. El tercer ángulo se determinará por la fórmula $A+B+C=180°$, y los dos lados b y c por las del núm. 86, ó sean

$$b = \frac{a \text{ sen. } B}{\text{sen. } A}; \quad c = \frac{a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A},$$

á las que pueden aplicarse los logaritmos.

96. SEGUNDO CASO.—*Se dan dos lados* a *y* b *y el ángulo* A *opuesto á uno de ellos.*

El ángulo B se determinará por la fórmula (86)

$$\text{sen. } B = \frac{b \text{ sen. } A}{a};$$

pero como dos arcos suplementarios tienen el mismo seno (56) el valor obtenido para sen. B puede corresponder al ángulo agudo dado por las tablas ó á su suplemento, lo que parece indicar dos soluciones del problema. Si $A \geqq 90°$ B no podrá ser obtuso, y su valor será el dado por las tablas, lo mismo que si siendo $A < 90°$ se tiene $a > b$, pues deberá ser $B <$ A; y únicamente cuando se verifique que $A < 90°$ y $b > a$ tendrá B dos valores, uno el dado por las tablas y otro su suplemento, siempre que el problema sea posible, lo que exige que sen. $B < 1$ ó b sen. $A < a$. Esto concuerda con la construccion geométrica (Fig. 13), que indica dos soluciones ABC y $AB'C$ si $a < b$ y $a > CD$, ó bien $a > b$ sen. A, observando que en el triángulo rectángulo $A\,C\,D$ se tiene $CD = b$ sen. A, siendo ademas evidente que los ángulos CBA y $CB'A$ son suplementarios.

Conocido el ángulo B, ya admita uno ó dos valores, se obtendrán los correspondientes de C y c por las fórmulas

$$C = 180° - (A + B), \quad \text{y} \quad c = \frac{a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A}.$$

97. El valor de c puede obtenerse directamente en funcion de los datos del problema partiendo de la fórmula [1] del núm. 85, que dá:

$$c = b \cos. A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen.}^2 A},$$

siendo preciso para que estos valores sean reales que $a > b \operatorname{sen.} A$, y como los lados de un triángulo representan magnitudes absolutas, necesariamente positivas, se deberá verificar, ademas, para que c admita dos valores

$$b \cos. A > \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen.}^2 A},$$

ó bien

$$b^2 \cos.^2 A + b^2 \operatorname{sen.}^2 A > a^2, \quad \text{ó} \quad b > a,$$

que son las mismas condiciones encontradas en el número anterior.

Los valores de c no son calculables por logaritmos, pero puede aplicarse á la cantidad sub-radical el procedimiento del núm. 92, suponiendo

$$\frac{b \operatorname{sen.} A}{a} = \operatorname{sen.} \varphi,$$

pues por ser $b \operatorname{sen.} A < a$ resulta $\operatorname{sen.} \varphi < 1$. Esta hipótesis transforma el valor de c, que se reduce á

$$c = b \cos. A \pm \sqrt{a^2\left(1 - \frac{b^2 \operatorname{sen.}^2 A}{a^2}\right)} = b \cos. A \pm a \cos. \varphi,$$

ó bien, sustituyendo por b su valor $\frac{a \operatorname{sen.} \varphi}{\operatorname{sen.} A}$ sacado del de $\operatorname{sen.} \varphi$,

$$c = \frac{a \operatorname{sen.} \varphi \cos. A}{\operatorname{sen.} A} \pm a \cos. \varphi = \frac{a(\operatorname{sen.} \varphi \cos. A \pm \operatorname{sen.} A \cos. \varphi)}{\operatorname{sen.} A} =$$
$$= \frac{a \operatorname{sen.} (\varphi \pm A)}{\operatorname{sen.} A};$$

y una vez calculado el valor de φ se obtendrá el de c.

98. TERCER CASO.—*Se dan dos lados* a *y* b *y el ángulo comprendido C.*

Siendo $\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$, la fórmula del número 87 dará $\frac{A-B}{2}$ por la ecuacion

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(A-B)=\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(A+B)\frac{a-b}{a+b}=\text{cot.}\ \tfrac{1}{2}C\ \frac{a-b}{a+b},$$

y si se encuentran así los valores $\frac{A+B}{2}=m°$, y $\frac{A-B}{2}=n°$, será $A=m°+n°$ y $B=m°-n°$.

99. Conocidos los tres ángulos se determinará el lado $c=\frac{a\ \text{sen.}\ C}{\text{sen.}\ A}$; ó bien directamente en funcion de los datos por la fórmula [3] del núm. 85,

$$c^2=a^2+b^2-2\,a\,b\cos.\ C.$$

Para aplicarle el cálculo logarítmico se sustituirá por cos. C su valor $1-2\ \text{sen.}^2\ \frac{1}{2}\ C$ (52), y se obtendrá

$$c^2=(a-b)^2+4\,a\,b\ \text{sen.}^2\ \tfrac{1}{2}\ C;$$

ó bien, suponiendo $\frac{2\sqrt{a\,b}\ \text{sen.}\ \frac{1}{2}\ C}{a-b}=\text{tg.}\ \varphi$ para aplicar el procedimiento del núm. 91,

$$c^2=(a-b)^2(1+\text{tg.}^2\ \varphi)=\frac{(a-b)^2}{\cos.^2\ \varphi},\quad \text{ó}\quad c=\frac{a-b}{\cos.\ \varphi}.$$

100. Cuarto caso.— *Se dan los tres lados.*

Las fórmulas del núm. 85 resuelven el problema, siendo necesario únicamente prepararlas para el cálculo de logaritmos. La [1] da

$$\cos.\ \text{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c};$$

y sustituyendo este valor en la ecuacion (52) $2\cos.^2\frac{1}{2}A=1+\cos.\ A$ se obtendrá:

$$\cos.^2\ \tfrac{1}{2}\ A=\frac{(b+c)^2-a^2}{4\,b\,c}=\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{4\,b\,c}.$$

Representando por $2p$ el perímetro del triángulo será

$$2p = a + b + c, \quad \text{y} \quad 2(p - a) = b + c - a,$$

con lo que el valor anterior se convierte en

$$\cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

al que pueden aplicarse los logaritmos.

Para que el triángulo pueda existir es necesario que cos. $\frac{1}{2} A$ sea real y menor que la unidad, lo que exige que

$$p > a, \quad \text{y} \quad p(p-a) < bc,$$

ó bien

$$\frac{a+b+c}{2} > a \quad \text{ó} \quad a < b + c,$$

y

$$(b+c+a)(b+c-a) < 4bc \quad \text{ó} \quad (b-c)^2 < a^2,$$

de donde se deduce

$$\pm (b - c) < a,$$

segun $b >$ ó $< c$, encontrándose de nuevo las condiciones conocidas en Geometría para que pueda construirse un triángulo cuyos lados se dan, reducidas á que *un lado cualquiera debe ser menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.* Los otros dos ángulos se determinarán por fórmulas semejantes deducidas de las [2] y [3] del núm. 85, y nunca podrá suceder que los valores de cos. $\frac{1}{2} B$ y cos. $\frac{1}{2} C$ no sean admisibles, pues las condiciones para que lo sean, análogas á las anteriores, se deducen de éstas que se suponen satisfechas. En efecto, suponiendo $a > b > c$, de $a < b + c$ y $a > b - c$ se deduce

$$b > a - c, \quad b < a + c \quad \text{y} \quad c > a - b,$$

siendo, ademas, evidente que $c < a + b$.

101. Partiendo de la fórmula (52) 2 sen.$^2 \frac{1}{2} A = 1 -$ cos. A, y sustituyendo en ella el valor de cos. A se obtiene:

$$\text{sen.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

en la que no hay ambigüedad, pues siempre será $\frac{1}{2} A < 90°$.

102. Dividiendo el valor de sen. $\frac{1}{2}A$ por el de cos. $\frac{1}{2}A$, resulta la fórmula

$$\text{tg.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A} = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}\,,$$

que tambien puede servir para calcular el ángulo A.

103. La primera de estas fórmulas es la que determina con más sencillez el ángulo A, pero si hay que determinar los otros dos es preferible la tercera, pues no hay que buscar más que los cuatro logaritmos de p, $p-a$, $p-b$ y $p-c$, y aquélla exige los siete de $a, b, c, p, p-a, p-b$, y $p-c$. La segunda fórmula economizaria el de p.

104. El área de un triángulo es igual, segun enseña la Geometría, al semi-producto de la base por la altura, y puede determinarse en funcion de los datos en cada uno de los cuatro casos que se han examinado.

Primer caso.—*Se conocen dos lados* b, c *y el ángulo comprendido* A.

La perpendicular $B\,D$ (Fig. 12) es igual á c sen. A, y se tendrá, llamando S al área buscada,

$$\text{S} = \tfrac{1}{2}\,A\,C \times B\,D = \tfrac{1}{2}\,b\,c\,\text{sen.}\,A,$$

que demuestra que el *área de un triángulo es igual al semi-producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido.*

Segundo caso.—*Se dan dos ángulos* A, B *y un lado cualquiera* c.

Siendo (86)

$$b = \frac{c\,\text{sen.}\,B}{\text{sen.}\,C} = \frac{c\,\text{sen.}\,B}{\text{sen.}\,(A+B)}\,,$$

se tendrá:

$$\text{S} = \tfrac{1}{2}\,b\,c\,\text{sen.}\,A = \frac{c^2\,\text{sen.}\,A\,\text{sen.}\,B}{2\,\text{sen.}\,(A+B)}\,.$$

Tercer caso.—*Se dan dos lados* a, b *y el ángulo* A *opuesto á uno de ellos.*

Se tendrá

$$\text{S} = \tfrac{1}{2}\,a\,b\,\text{sen.}\,C = \tfrac{1}{2}\,a\,b\,\text{sen.}\,(A+B),$$

debiéndose determinar primero el valor de B por la fórmula

$$\text{sen.}\,B = \frac{b\,\text{sen.}\,A}{a}.$$

Cuarto caso.—*Se conocen los tres lados.*

Se tiene (52)

$$S = \tfrac{1}{2}\,b\,c\,\text{sen.}\,A = b\,c\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}A\,\cos.\,\tfrac{1}{2}A,$$

ó bien

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\,,$$

sustituyendo por sen. $\frac{1}{2}A$ y cos. $\frac{1}{2}A$ sus valores (100 y 101).

CAPÍTULO VIII.

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO

105. Se llama triángulo esférico la parte de superficie comprendida en una esfera por tres arcos de círculo máximo, cuyos planos determinan un ángulo triedro que tiene su vértice en el centro de la esfera, y cuyas caras y ángulos diedros son iguales respectivamente á los lados y ángulos del triángulo.

106. El objeto de esta parte de la Trigonometría es determinar tres de los elementos de un triángulo esférico cuando se conozcan los otros tres, para lo que bastará tener fórmulas que establezcan relaciones convenientes entre los lados y ángulos.

107. Sea (Fig. 14) $A\,B\,C$ un triángulo esférico cualquiera, en el que se designarán por a, b, c, los tres lados, y por A, B, C, los ángulos opuestos, y O el centro de la esfera de que aquél forma parte. Si por un punto cualquiera m del radio O A se tira un plano perpendicular á éste que corte á OB y O C en n y q, se formarán dos triángulos $m\,n\,q$ y $o\,n\,q$ que darán (84):

$$\left.\begin{aligned} \overline{n\,q}^2 &= \overline{mn}^2 + \overline{mq}^2 - 2\,m\,n.\,m\,q.\cos.\,q\,m\,n, \\ \overline{n\,q}^2 &= \overline{o\,n}^2 + \overline{o\,q}^2 - 2\,o\,n.\,o\,q.\cos.\,q\,o\,n, \end{aligned}\right\}.$$

Restando estas ecuaciones, dividiendo por $\overline{o\,m}^2$, y observando que

$$q\,m\,n = A;\; q\,o\,n = a;\; \frac{o\,n}{o\,m} = \sec.\,c = \frac{1}{\cos.\,c};\; \frac{o\,q}{o\,m} = \sec.\,b = \frac{1}{\cos.\,b};$$

$$\frac{mn}{om} = \text{tg.}\, c = \frac{\text{sen.}\, c}{\cos.\, c}; \quad \frac{mq}{om} = \text{tg.}\, b = \frac{\text{sen.}\, b}{\cos.\, b};$$

$$\overline{on}^2 - \overline{mn}^2 = \overline{om}^2; \quad \text{y} \quad \overline{oq}^2 - \overline{mq}^2 = \overline{om}^2:$$

resulta :

$$2 - 2\cos.\, a\, \frac{1}{\cos.\, b \cos.\, c} + 2\cos.\, A\, \frac{\text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c}{\cos.\, b \cos.\, c} = 0,$$

ó bien,

$$\cos.\, a = \cos.\, b \cos.\, c + \text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c \cos.\, A.$$

108. La construccion anterior exige que los lados b y c sean menores que 90°, pues de lo contrario no podrian formarse los triángulos onq y mnq que han servido de base para aquélla, siendo necesario demostrar que la fórmula obtenida es igualmente exacta en todos los casos.

Si siendo $c < 90°$ se tiene $b > 90°$ y se prolongan (Fig. 15) los lados a y b hasta su encuentro en C', se formará un triángulo $A\,B\,C'$ en el que b' y c serán menores que 90°, y se tendrá :

$$\cos.\, a' = \cos.\, b' \cos.\, c + \text{sen.}\, b'\, \text{sen.}\, c \cos.\, B\,A\,C';$$

pero

$$a' = 180° - a,\ b' = 180° - b,\ B\,A\,C' = 180° - A;$$

y por tanto

$$\cos.\, a' = -\cos.\, a,\ \cos.\, b' = -\cos.\, b,\ \text{sen.}\, b' = \text{sen.}\, b,$$
$$\text{y} \quad \cos.\, B\,A\,C' = -\cos.\, A;$$

sustituyendo, pues, y cambiando los signos, resulta :

$$\cos.\, a = \cos.\, b \cos.\, c + \text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c \cos.\, A,$$

que es la fórmula obtenida en el número anterior, ampliada al caso actual.

Si $b > 90°$ y $c > 90°$, el triángulo $A\,B\,C'$ tendrá $b' < 90°$, $c > 90°$, y siéndole aplicable la fórmula, segun lo acabado de demostrar, se está en el caso anterior.

Demostrada esta fórmula para todos los valores de b y c agudos y obtusos, se verificará cuando difieran de 90° tan poco como se quiera, y por consiguiente será aplicable al caso en que uno ó los dos lados tengan este valor particular.

109. Aplicando esta fórmula á los tres lados del triángulo, resultan las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \text{cos. } a = \text{cos. } b \text{ cos. } c + \text{sen. } b \text{ sen. } c \text{ cos. } A \\ \text{cos. } b = \text{cos. } a \text{ cos. } c + \text{sen. } a \text{ sen. } c \text{ cos. } B \\ \text{cos. } c = \text{cos. } a \text{ cos. } b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \text{ cos. } C \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

que permitirán siempre determinar tres elementos de un triángulo en funcion de los otros tres y dejan resuelto el problema que constituye la Trigonometría esférica.

110. La comodidad en las aplicaciones exige fórmulas que contengan los tres datos y cada una de las incógnitas, ó sean cuatro de los elementos combinados de todas las maneras posibles, que se reducen á las siguientes:

1.ª combinacion. Tres lados y un ángulo.

2.ª Dos lados y los ángulos opuestos.

3.ª Dos lados, el ángulo comprendido y el opuesto á uno de ellos.

4.ª Tres ángulos y un lado.

Las fórmulas [1] corresponden á la primera combinacion.

111. Las correspondientes á la segunda, que deberán contener a, b, A y B, por ejemplo, se obtendrán eliminando c entre las dos primeras ecuaciones [1], que combinadas por suma y resta dan:

$$(\text{cos. } a + \text{cos. } b)\,(1 - \text{cos. } c) = \text{sen. } c\,(\text{sen. } b \text{ cos. } A + \text{sen. } a \text{ cos. } B)$$
$$(\text{cos. } a - \text{cos. } b)\,(1 + \text{cos. } c) = \text{sen. } c\,(\text{sen. } b \text{ cos. } A - \text{sen. } a \text{ cos. } B).$$

Multiplicando entre sí estas ecuaciones, y observando que

$$(1 - \text{cos. } c)\,(1 + \text{cos. } c) = \text{sen.}^2\, c,$$

resulta sucesivamente:

$$\text{cos.}^2\, a - \text{cos.}^2\, b = \text{sen.}^2\, b \text{ cos.}^2\, A - \text{sen.}^2\, a \text{ cos.}^2\, B,$$
$$\text{sen.}^2\, b - \text{sen.}^2\, a = \text{sen.}^2\, b\,(1 - \text{sen.}^2\, A) - \text{sen.}^2\, a\,(1 - \text{sen.}^2\, B),$$
$$\text{sen.}^2\, b \text{ sen.}^2\, A = \text{sen.}^2\, a \text{ sen.}^2\, B;$$

y por último,

$$\frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } a} = \frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } b};$$

que demuestra que *en todo triángulo esférico los senos de los lados son proporcionales á los de los ángulos opuestos.*

Aplicando esta propiedad á los tres lados se obtienen las ecuaciones

$$\frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } a} = \frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } b} = \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } c}. \qquad (2)$$

112. Para obtener una fórmula perteneciente á la tercera combinacion, que contenga, por ejemplo, a, b, A y C, hay que eliminar c entre la primera y tercera [1]. Esta última permite eliminar cos. c, y sen. c lo será por las [2] que dan

$$\text{sen. } c = \frac{\text{sen. } a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A};$$

cuyos valores sustituidos en la primera ecuacion citada producen:

$$\text{cos. } a = \text{cos. } a \text{ cos.}^2 b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \text{ cos. } b \text{ cos. } C + \text{sen. } b \text{ cos. } A \frac{\text{sen. } a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A},$$

ó bien, dividiendo los dos miembros por sen. a sen. b, y observando que cos. a — cos. a cos.$^2 b$ = cos. a sen.$^2 b$:

$$\text{cot. } a \text{ sen. } b = \text{cos. } b \text{ cos. } C + \text{sen. } C \text{ cot. } A,$$

ecuacion de la que se deducen las siguientes, haciendo con las letras todas las combinaciones posibles:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{cot. } a \text{ sen. } b = \text{cos. } b \text{ cos. } C + \text{sen. } C \text{ cot. } A \\
\text{cot. } b \text{ sen. } a = \text{cos. } a \text{ cos. } C + \text{sen. } C \text{ cot. } B \\
\text{cot. } a \text{ sen. } c = \text{cos. } c \text{ cos. } B + \text{sen. } B \text{ cot. } A \\
\text{cot. } c \text{ sen. } a = \text{cos. } a \text{ cos. } B + \text{sen. } B \text{ cot. } C \\
\text{cot. } b \text{ sen. } c = \text{cos. } c \text{ cos. } A + \text{sen. } A \text{ cot. } B \\
\text{cot. } c \text{ sen. } b = \text{cos. } b \text{ cos. } A + \text{sen. } A \text{ cot. } C
\end{array}\right\}. \qquad (3)$$

113. Por un procedimiento de eliminacion análogo á los anteriores se obtendrian las fórmulas correspondientes á la cuarta combinacion, pero es mucho más sencillo aplicar las ecuaciones [1] al triángulo $A' B' C'$ suplementario del $A B C$, entendiéndose por tal el triángulo esférico correspondiente al ángulo triedro suplementario del que corresponde á $A B C$, y cuyas caras y ángulos serán suplementos respectivos de los ángulos y ca-

ras de éste. Suponiendo, pues, dichas fórmulas escritas con las letras acentuadas y sustituyendo en vez de a', b', c', A', B', C', sus iguales $180° - A$, $180° - B$, $180° - C$, $180° - a$, $180° - b$, $180° - c$, se obtendrá:

$$\left.\begin{array}{l} \cos. A = -\cos. B \cos. C + \text{sen.}\, B\, \text{sen.}\, C \cos. a \\ \cos. B = -\cos. A \cos. C + \text{sen.}\, A\, \text{sen.}\, C \cos. b \\ \cos. C = -\cos. A \cos. B + \text{sen.}\, A\, \text{sen.}\, B \cos. c \end{array}\right\}. \qquad (4)$$

114. Las fórmulas [1] se trasforman fácilmente en otras más adecuadas al uso de los logaritmos siguiendo un procedimiento análogo al del núm. 100, pues si se despeja de la primera cos. A y se sustituye su valor en la ecuacion

$$2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} A = 1 + \cos. A,$$

se obtiene sucesivamente:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c},$$

$$2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c + \text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c}{\text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c} = \frac{\cos. a - \cos. (b + c)}{\text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c};$$

ó bien (59 [21])

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{sen.}\, \tfrac{1}{2} (a + b + c)\, \text{sen.}\, \tfrac{1}{2} (b + c - a)}{\text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c};$$

y por último, suponiendo $a + b + c = 2p$, de donde se deduce $b + c - a = 2(p - a)$,

$$\cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen.}\, p\, \text{sen.}\, (p - a)}{\text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c}}. \qquad (5)$$

115. Partiendo de la fórmula $2 \,\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - \cos. A$ se obtiene análogamente:

$$\text{sen.}\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen.}\, (p - b)\, \text{sen.}\, (p - c)}{\text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c}}, \qquad (6)$$

en la que $\tfrac{1}{2} A < 90°$.

116. Dividiendo la [6] por la [5] resulta:

$$\text{tg.}\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen.}\, (p - b)\, \text{sen.}\, (p - c)}{\text{sen.}\, p\, \text{sen.}\, (p - a)}}. \qquad (7)$$

117. Aplicando las fórmulas [5] y [6] á los ángulos B y C, se obtiene:

$$\cos.\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-b)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,c}}\ ;\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\text{sen.}(p-a)\ \text{sen.}(p-c)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,c}}\ ;$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b}}\ ;\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,(p-a)\,\text{sen.}\,(p-b)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b}}\ ;$$

y sustituyendo los valores correspondientes en la fórmula

$$\text{sen.}\,(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)=\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B+\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}B\cos.\tfrac{1}{2}A,$$

resulta:

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)=\sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-c)\ \text{sen.}^2\,(p-b)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b\ \text{sen.}^2\,c}}+$$

$$+\sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-c)\ \text{sen.}^2\,(p-a)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b\ \text{sen.}^2\,c}}=$$

$$=\frac{\text{sen.}\,(p-b)+\text{sen.}\,(p-a)}{\text{sen.}\,c}\sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b}}=(59\ [18])$$

$$\frac{2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(2p-a-b)\cos.\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen.}\,c}\cos.\tfrac{1}{2}C;$$

pero

$$2p-a-b=c,\ \ \text{sen.}\,c=2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}c\cos.\tfrac{1}{2}c,$$

y por consiguiente

$$\cos.\tfrac{1}{2}c\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)=\cos.\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}(a-b). \qquad (8)$$

Por un procedimiento análogo se encuentran las tres ecuaciones siguientes, que con la anterior constituyen las conocidas con el nombre de *fórmulas de Delambre:*

$$\left.\begin{aligned}\cos.\tfrac{1}{2}c\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)&=\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}(a+b)\\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}c\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)&=\cos.\tfrac{1}{2}C\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(a-b)\\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}c\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)&=\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}C\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

118. Dividiendo la primera de estas fórmulas por la segunda, la tercera por la cuarta, y despues la cuarta por la segunda y la

tercera por la primera, resultan las siguientes, conocidas con el nombre de *analogías de Néper* :

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(a-b)}{\cos.\ \frac{1}{2}(a+b)}\cot.\ \tfrac{1}{2}\,C \\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(A-B) &= \frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(a+b)}\cot.\ \tfrac{1}{2}\,C \\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(a+b) &= \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(A-B)}{\cos.\ \frac{1}{2}(A+B)}\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\,c \\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(a-b) &= \frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(A+B)}\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\,c \end{aligned}\right\} . \qquad (9)$$

119. Suponiendo $A = 90^\circ$ en las fórmulas [1], [2], [3] y [4], se obtienen las siguientes, aplicables á los triángulos esféricos rectángulos :

$$\cos.\ a = \cos.\ b \cos.\ c \ldots\ldots\ldots \qquad (10)$$

$$\text{sen.}\ b = \text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ B, \quad \text{sen.}\ c = \text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ C \qquad (11)$$

$$\left\{\begin{aligned} &\text{tg.}\ b = \text{tg.}\ a \cos.\ C, \quad \text{tg.}\ c = \text{tg.}\ a \cos.\ B && (12) \\ &\text{tg.}\ b = \text{sen.}\ c\ \text{tg.}\ B, \quad \text{tg.}\ c = \text{sen.}\ b\ \text{tg.}\ C && (13) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\cos.\ B = \text{sen.}\ C \cos.\ b, \quad \cos.\ C = \text{sen.}\ B \cos.\ c && (14) \\ &\cos.\ a = \cot.\ B \cot.\ C \ldots\ldots\ldots && (15) \end{aligned}\right.$$

120. La fórmula [10] exige que cos. a y cos. b cos. c tengan el mismo signo, por lo que los tres cosenos deben ser positivos, ó bien uno solo y los otros dos negativos; así, *en todo triángulo esférico rectángulo los tres lados son menores que* 90°, *ó dos mayores y el tercero menor.*

121. Como en las fórmulas [13] sen. c y sen. b son siempre positivos, tg. b y tg. B, así como tg. c y tg. C, deben tener el mismo signo, de modo que *cada cateto es de la misma especie que el ángulo opuesto*, es decir, *los dos deben ser menores, ó los dos mayores que* 90°.

CAPÍTULO IX.

RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS.

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

122. Un triángulo esférico puede tener dos ó tres ángulos rectos; en el primer caso los lados opuestos son tambien iguales á 90° y el tercer ángulo es igual al tercer lado, y en el segundo los tres lados son cuadrantes, de modo que no habiendo problema posible cuando esto suceda, deben considerarse únicamente los triángulos que sólo tengan un ángulo recto.

123. Las fórmulas encontradas (119), á las que pueden aplicarse los logaritmos, resuelven todos los casos, debiendo tomarse las que contengan los datos y cada una de las incógnitas, segun manifiesta el cuadro siguiente:

Datos.	Incógnitas.	Fórmulas.
1.er caso. a, b	c, B, C	$\cos. c = \frac{\cos. a}{\cos. b}$, $\operatorname{sen}. B = \frac{\operatorname{sen}. b}{\operatorname{sen}. a}$, $\cos. C = \frac{\operatorname{tg}. b}{\operatorname{tg}. a}$.
2.° . . b, c	a, B, C	$\cos. a = \cos. b \cos. c$, $\operatorname{tg}. B = \frac{\operatorname{tg}. b}{\operatorname{sen}. c}$, $\operatorname{tg}. C = \frac{\operatorname{tg}. c}{\operatorname{sen}. b}$.
3.° . . a, B	b, c, C	$\operatorname{sen}. b = \operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. B$, $\operatorname{tg}. c = \operatorname{tg}. a \cos. B$, $\cot. C = \cos. a \operatorname{tg}. B$.
4.° . . b, B	a, c, C	$\operatorname{sen}. a = \frac{\operatorname{sen}. b}{\operatorname{sen}. B}$, $\operatorname{sen}. c = \frac{\operatorname{tg}. b}{\operatorname{tg}. B}$, $\operatorname{sen}. C = \frac{\cos. B}{\cos. b}$.
5.° . . b, C	a, c, B	$\operatorname{tg}. a = \frac{\operatorname{tg}. b}{\cos. C}$, $\operatorname{tg}. c = \operatorname{sen}. b \operatorname{tg}. C$, $\cos. B = \cos. b \operatorname{sen}. C$.
5.° . . B, C	a, b, c	$\cos. a = \cot. B \cot. C$, $\cos. b = \frac{\cos. B}{\operatorname{sen}. C}$, $\cos. c = \frac{\cos. C}{\operatorname{sen}. B}$.

En el primero y tercer caso B y b están dados por sus senos, pero no hay ambigüedad, pues deben ser respectivamente de la misma especie que b y B (121).

En el cuarto las tres incógnitas están determinadas por sus senos, pero sólo habrá dos soluciones, pues una vez fijada la especie de a, lo estará la de c (120), y por tanto la de b (121). En efecto, si $A\,B\,C$ (Fig. 16) es el triángulo que satisface al problema, y se prolongan los lados $A\,B$ y $B\,C$ hasta su encuentro en B', $A\,B'\,C$ satisfará igualmente, y a', c', C' serán suplementos respectivos de a, c, C.

124. Los triángulos que tengan un lado igual á 90° pueden resolverse por las fórmulas anteriores, pues el suplementario tendrá un ángulo recto.

125. Tambien son aplicables aquéllas á los triángulos isósceles, pues trazando desde el vértice un arco de círculo máximo perpendicular á la base se formarán dos triángulos rectángulos iguales, cuyos elementos estarán determinados por los del propuesto, y vice-versa, por lo que bastará resolver aquéllos.

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

126. PRIMER CASO.—*Se dan los tres lados.*

Cualquiera de las fórmulas [5], [6] y [7] determina los ángulos, no existiendo ambigüedad si se adopta la segunda, pues se tendrá siempre $\frac{1}{2}A < 90°$. Cuando deban calcularse los tres ángulos es preferible la última, que exige la determinacion de menor número de logaritmos.

El triángulo no podrá existir si los valores de sen. $\frac{1}{2}A$ ó cos. $\frac{1}{2}A$ resultan imaginarios ó mayores que la unidad.

127. SEGUNDO CASO.—*Se conocen dos lados*, a *y* b, *y el ángulo comprendido* C.

Las dos primeras *analogías de Néper* (118) darán los valores de $\frac{1}{2}(A+B)$ y $\frac{1}{2}(A-B)$, y por consiguiente los de A y B. El lado c puede determinarse despues por la ecuacion (111)

$$\text{sen.}\, c = \frac{\text{sen.}\, a\, \text{sen.}\, C}{\text{sen.}\, A};$$

pero es preferible obtenerlo directamente en funcion de los datos, pues así no se presenta la ambigüedad consiguiente á estar dado por su seno. Para esto se necesita una fórmula que contenga los cuatro elementos a, b, C y c, ó sea la tercera [1],

$$\cos. c = \cos. a \cos. b + \operatorname{sen.} a \operatorname{sen.} b \cos. C,$$

que debe prepararse para el cálculo logarítmico, suponiendo, segun el procedimiento del núm. 93, $\cot. \varphi = \operatorname{tg.} a \cos. C$, con lo que resulta sucesivamente:

$$\cos. c = \cos. a (\cos. b + \operatorname{sen.} b \operatorname{tg.} a \cos. C) = \frac{\cos. a \operatorname{sen.} (b + \varphi)}{\operatorname{sen.} \varphi}.$$

128. Tercer caso.—*Se dan dos lados* a *y* b *y el ángulo* A *opuesto á uno de ellos.*

El ángulo B estará determinado por la fórmula

$$\operatorname{sen.} B = \frac{\operatorname{sen.} A \operatorname{sen.} b}{\operatorname{sen.} a},$$

y despues lo podrán ser C y c por las segunda y cuarta *analogía de Néper*, que dan:

$$\cot. \tfrac{1}{2} C = \operatorname{tg.} \tfrac{1}{2} (A - B) \frac{\operatorname{sen.} \frac{1}{2} (a + b)}{\operatorname{sen.} \frac{1}{2} (a - b)};$$

$$\operatorname{tg.} \tfrac{1}{2} c = \operatorname{tg.} \tfrac{1}{2} (a - b) \frac{\operatorname{sen.} \frac{1}{2} (A + B)}{\operatorname{sen.} \frac{1}{2} (A - B)}.$$

Para obtener C directamente se recurrirá á la primer fórmula [3], que contiene los cuatro elementos a, b, A y C, y que da las siguientes, suponiendo (93) $\operatorname{tg.} \varphi = \frac{\cot. A}{\cos. b}$:

$$\cot. a \operatorname{sen.} b = \cos. b \left(\cos. C + \frac{\cot. A}{\cos. b} \operatorname{sen.} C\right) =$$

$$= \cos. b \frac{(\cos. C \cos. \varphi + \operatorname{sen.} C \operatorname{sen.} \varphi)}{\cos. \varphi} = \frac{\cos. b \cos. (C - \varphi)}{\cos. \varphi},$$

$$\cos. (C - \varphi) = \cos. \varphi \operatorname{tg.} b \cot. a, \text{ si } C > \varphi,$$

y

$$\cos. (\varphi - C) = \cos. \varphi \operatorname{tg.} b \cot. a, \text{ si } C < \varphi,$$

pues $\cos. C \cos. \varphi + \operatorname{sen.} C \operatorname{sen.} \varphi$ es el desarrollo de $\cos. (C - \varphi)$ ó de $\cos. (\varphi - C)$. En el primer caso se tiene $C = m + \varphi$, y en el segundo $C = \varphi - m$, siendo m el valor obtenido para $\pm (C - \varphi)$.

El cálculo directo de c se hará partiendo de la primer fórmula [1] que contiene a, b, A y c, y de la que se deduce sucesivamente, suponiendo tg. ψ = tg. b cos. A,

$$\cos. a = \cos. b (\cos. c + \text{sen}. c \, \text{tg}. b \cos. A) = \frac{\cos. b \cos. [+ (c - \psi)]}{\cos. \psi},$$

$$\cos. [\pm (c - \psi)] = \frac{\cos. a \cos. \psi}{\cos. b},$$

segun $c >$ ó $< \psi$.

Conviene observar que si desde el vértice C del triángulo $A B C$ (Fig. 17) se traza un arco de círculo máximo $C D$ perpendicular al $A B$, se formará un triángulo rectángulo $A C D$, en el que se tendrá (119 [15] y [12])

$$\cos. b = \cot. A \cot. A C D; \ \text{tg}. A D = \text{tg}. b \cos. A,$$

y por consiguiente

$$\varphi = A C D, \quad \psi = A D,$$

de donde se deduce que φ y ψ son los dos mayores ó los dos menores que C y c.

129. El ángulo B está determinado por su seno, y pueden convenirle dos valores suplementarios, que indican dos triángulos que resuelven el problema. En efecto, si A es menor que 90° lo será tambien CD (121), y por tanto serán mayores que éste todos los arcos oblicuos trazados desde C á AB, y tanto más cuanto más se alejen de su pié D. Tomando ahora $DE = DB$ será $CE = CB$, y los dos triángulos $A B C$ y $A E C$ tendrán los mismos datos siempre que se verifique $A C > B C$; pero si $A C =$ ó $< B C$, sólo existirá el $A B C$, pues el punto E coincidirá con A ó pasará más allá, debiendo adoptarse los valores $B < 90°$ (121) $C > \varphi$, $c > \psi$. Si $a + b =$ ó $> 180°$ será $B C =$ ó $> C A'$ y el problema no tendrá solucion, pues el punto B coincidirá con A', ó le rebasará. Si $b > 90°$, se obtendrán dos soluciones $A B' C'$, $A E' C'$, tomando $D' E' = B' D'$ siempre que $B' C' < C' A'$ ó $a + b < 180°$, pero si $a + b =$ ó $> 180°$, sólo existirá $A B' C'$, teniéndose entónces $B > 90°$ (121) $C < \varphi$, $c < \psi$. Si $a =$ ó $> b$, no hay solucion.

Haciendo raciocinios semejantes cuando se suponga $A > 90^\circ$, y teniendo en cuenta que en esta hipótesis el arco CD lo es tambien (121), y que, por lo tanto, es mayor que los oblicuos CE y CB, que disminuyen á medida que se alejan del CD, podrá formarse el cuadro siguiente, que resume todos los casos que pueden ocurrir, no incluyéndose los de $A = 90^\circ$ ó $b = 90^\circ$ porque el triángulo propuesto se resolveria segun lo ya explicado para los rectángulos (123, 124).

$A < 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a < b$.		Dos sol. . $B \lesseqgtr 90^\circ$; $C \gtreqless \varphi$.
		$a = b$.		Una. . . . $B = A$; $C > \varphi$.
		$a > b$	$a < 180^\circ - b$.	Una. . . . $B < 90^\circ$; $C > \varphi$.
			$a \geqq 180^\circ - b$.	Ninguna.
	$b > 90^\circ$	$a < b$	$a < 180^\circ - b$.	Dos. . . . $B \lesseqgtr 90^\circ$; $C \gtreqless \varphi$.
			$a \geqq 180^\circ - b$.	Una. . . . $B > 90^\circ$; $C < \varphi$.
		$a = b$.		Ninguna.
		$a > b$.		
$A > 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a > b$	$a > 180^\circ - b$.	Dos. . . . $B \lesseqgtr 90^\circ$; $C \lesseqgtr \varphi$.
			$a \leqq 180^\circ - b$.	Una. . . . $B < 90^\circ$; $C < \varphi$.
		$a = b$.		Ninguna.
		$a < b$.		
	$b > 90^\circ$	$a > b$.		Dos. . . . $B \lesseqgtr 90^\circ$; $C \lesseqgtr \varphi$.
		$a = b$.		Una. . . . $B = A$; $C > \varphi$.
		$a <$	$a > 180^\circ - b$.	Una. . . . $B > 90^\circ$; $C > \varphi$.
			$a \leqq 180^\circ - b$.	Ninguna.

130. Cuarto caso.—*Se dan dos ángulos* A *y* B *y el lado* a *opuesto á uno de ellos.*

Hallando los suplementos de estos datos se conocerán en el triángulo suplementario los dos lados a y b y el ángulo A, y resolviendo éste como en el tercer caso se determinarán c, B y C, cuyos suplementos serán los elementos C, b, c del triángulo propuesto.

131. Quinto caso.—*Se conocen dos ángulos* A *y* B *y el lado adyacente* c.

Se resuelve como el segundo caso, por medio del triángulo suplementario.

132. Sexto caso.—*Se dan los tres ángulos.*

Se conocerán los tres lados del triángulo suplementario, lo que reduce este caso al primero.

CAPÍTULO X.

EJERCICIOS DE RESOLUCION DE TRIÁNGULOS.

133. Las teorías expuestas en los capítulos VII y IX para resolver los triángulos rectilíneos y esféricos se aplican sin dificultad á los diversos casos que pueden ocurrir, teniendo en cuenta lo prescrito en los números 78 y 80 para el uso de los logaritmos de las líneas trigonométricas.

Los ejemplos que siguen manifiestan el modo de operar en cada caso disponiendo los cálculos con la mayor sencillez y claridad posibles, estando efectuadas todas las operaciones aritméticas, que no hay necesidad de hacer separadamente.

TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS.

I. *Resolver un triángulo rectángulo en que se conoce la hipotenusa* a $= 8926^{m},975$ *y un cateto* b $= 7701^{m},87$.

El cálculo de los elementos desconocidos se hará segun lo manifestado en el núm. 94 y de la manera siguiente :

$$\text{Cálculo de } B;\ \text{sen. } B = \frac{b}{a} \left\{ \begin{array}{l} b = 7701{,}87 \\ a = 8926{,}975 \end{array} \right.$$

$$\text{log. sen. } B\,(59^{\circ}37'41'',9) = \left| \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 3{,}8865922 \\ 40 \end{array}\right\} = \text{log. } b \\ \hline 3{,}8865962 \\ \left.\begin{array}{r} -3{,}9507007 \\ 34 \\ 25 \end{array}\right\} = \text{log. } a \\ \hline \bar{1}{,}9358918 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r|l} 894 & d = \\ \overline{240} & 124 \\ 1160 & \overline{} \\ 44 & 1{,}9 \end{array}$$

$$\text{Cálculo de } c = \sqrt{(a+b)\,(a-b)} \left\{ \begin{array}{l} a + b = 16.628{,}845 \\ a - b = 1.225{,}105 \end{array} \right.$$

$$\text{log. } c\,(4513{,}55) = \left| \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 4.2208400 \\ 210 \\ 105 \\ 131 \end{array}\right\} = \text{log. } (a+b) \\ \left.\begin{array}{r} 3{,}0881715 \\ 178 \end{array}\right\} = \text{log. } (a-b) \\ \hline 7{,}3090355 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 3{,}65451775 \\ 34 \\ \hline 435 \end{array}$$

Conocido el valor de B se obtiene el de $C = 90^{\circ} - B = 30^{\circ}22'18'',1$.

El valor de c puede obtenerse de la manera siguiente, que sirve de comprobacion á la anterior.

$$\text{Cálculo de } c = a \cos. B \left\{ \begin{array}{l} \text{log. } a = 3{,}9507044 \\ B = 59^{\circ}37'41'',9 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \text{log. } c\,(4513{,}55) = \\ -8'',1 \\ d = -359 \end{array} \left| \begin{array}{r} 3{,}9507044 \quad = \text{log. } a \\ \left.\begin{array}{r} \bar{1}{,}7037845 \\ 2872 \\ 359 \end{array}\right\} = \text{log. cos. } B \\ \hline 3{,}6545180 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \hline 46 \end{array}$$

El valor de log. a, ya determinado al calcular B, se obtiene efectuando la suma allí indicada, cuya circunstancia debe tenerse presente en casos análogos para no repetir operaciones.

Los elementos desconocidos son, por lo tanto, $B = 59^{\circ}37'41'',9$; $C = 30^{\circ}22'18'',1$ y $c = 4513^{\text{m}},55$.

II. *Resolver un triángulo en que se conocen dos ángulos* A=102°37′45″,6 *y* B=33°41′34″,5 *y un lado* a=5387ᵐ,483.

El ángulo C se obtendrá inmediatamente por la fórmula $C=180°-(A+B)=43°40'39'',9$.

Cálculo de b.

$$b=\frac{a \text{ sen. } B}{\text{sen. } A}=\frac{a \text{ sen. } B}{\text{sen. }(180^\circ-A)}=\left\{\begin{array}{l}a=5387,483\\ B=33^\circ 41'34'',5\\ 180^\circ-A=77^\circ 22'14'',4\end{array}\right.$$

log. b (3062,765) =	3,7313792	
	65	= log. a
	24	
4″,5	1,7440765	
$d=316$	1264	= log. sen. B
	158	
	3,4754767	
4″,4	$-\bar{1}$,9893609	
$d=48$	192	= log. sen. A
	192	
	3,4861137	
	045	
	92	

Cálculo de c.

$$c=\frac{a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A}\left\{\begin{array}{l}\text{log. } a=3,7313859\\ C=43^\circ 40'39'',9\\ \text{log. sen. } A=\bar{1},9893630\end{array}\right.$$

log. c (3726,07) =	3,7313859	= log. a
9″,9	$\bar{1}$,4382058	
$d=220$	198	= log. sen. C
	198	
	3,5606145	
	$-\bar{1}$,9893630	= log. sen. A
	3,5712515	
	429	
	86	

Siendo el ángulo A mayor que 90°, ha sido preciso determinar su suplemento para obtener log. sen. A (56, 1.°).

Se obtiene así $C=43^\circ 40'39'',9$; $b=3062^m,765$; $c=3726^m,07$.

III. *Resolver un triángulo en que se conocen dos lados* a=136^{m},31, b=234^{m},85 *y el ángulo opuesto al primero* A=49°33′45″,7.

Cálculo de B; $\operatorname{sen.} B = \dfrac{b \operatorname{sen.} A}{a}$ $\left\{\begin{array}{l} b = 234{,}85 \\ A = 49°33'45'',7 \\ a = 136{,}31 \end{array}\right.$

log. sen. B ( ) =	2,3707906	= log. b
5″,7	$\bar{1}$,8814407	
d = 180	90	= log. sen. A
	126	
	2,2522416	
	2,1345277	= log. a

El triángulo propuesto no puede existir, pues resultando log. sen. $B > 0$, será sen. $B > 1$ ó $b \operatorname{sen.} A > a$ (96).

IV. *Resolver un triángulo conociendo, como en el caso anterior,* a = 200^{m},19, b = 234^{m},85 *y* A = 49°33′45″,7.

Cálculo de B; $\operatorname{sen.} B = \dfrac{b \operatorname{sen.} A}{a}$ $\left\{\begin{array}{l} b = 234{,}85 \\ A = 49°33'45'',7 \\ a = 200{,}19 \end{array}\right.$

log. sen. B (63°14′20″,4) =	2,3707906		= log. b
5″,7	$\bar{1}$,8814407		
d = 180	90		= log. sen. A
	126		
	2,2522416		
	—2,3014424		= log. a
	$\bar{1}$,9507992		
	88	d =	
	400	106	
	82	0,3	

Verificándose $A < 90°$ y $b > a$ el ángulo B tiene dos valores suplementarios (96), y cada uno de ellos produce un triángulo que resuelve el problema. Adoptando primero el valor de B dado por las tablas se obtendrá $C = 180° - (A + B) = 67°11'54'',9$.

Cálculo de $c = \dfrac{a \operatorname{sen.} C}{\operatorname{sen.} A}$ $\left\{\begin{array}{l} \log. a = 2{,}3014424 \\ C = 67°11'54'',9 \\ \log. \operatorname{sen.} A = \bar{1}{,}8814510 \end{array}\right.$

log. c (242,467) =	2,3014424	= log. a
4″,9	$\bar{1}$,9646576	
d = 89	356	= log. sen. C
	801	
	2,2661044	
	—$\bar{1}$,8814510	= log. sen. A
	2,3846534	
	401	
	133	

Los elementos del primer triángulo que resuelve el problema son, pues, $B = 63°14'20'',4$, $C = 67°11'54'',9$ y $c = 242^{m},467$.

Adoptando para valor de B el suplemento del anterior y calculando C y c de la misma manera, se obtiene $B = 116°45'39'',6$, $C = 13°40'34'',7$ y $c = 62^{m},1878$, que son los elementos del triángulo que constituye la segunda solucion del problema.

V. *Resolver un triángulo conociendo dos lados* a $= 3473^{m},8$, b $= 572^{m},76$ *y el ángulo comprendido* C $= 63°15'17'',6$.

Cálculo de A y B;

$$\text{tg.}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,C\,\frac{a-b}{a+b}\left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}C = 31°37'38'',8 \\ a-b = 2901{,}04 \\ a+b = 4046{,}56 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r|rl}
\log.\text{tg.}\tfrac{1}{2}(A-B)(49°20'9'') = & 0{,}2105091 & \\
-1'',2 & 472 & =\log.\text{cot.}\tfrac{1}{2}C \\
d = -472 & 944 & \\
 & 3{,}4625477 & \\
 & 60 & =\log.(a-b) \\ \hline
 & 3{,}6730685 & \\
 & -3{,}6070795 & \\
 & 65 & =\log.(a+b) \\ \hline
 & 0{,}0659825 & \\
 & 441 & d = \\
 & \overline{3840} & 426 \\
 & 60 & \overline{9{,}0}
\end{array}$$

$$\text{Cálculo de } c = \frac{b\,\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B}\left\{\begin{array}{l} b = 572{,}76 \\ C = 63°15'17'',6 \\ B = 9°2'12''2 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r|rl}
\log.c(3256{,}46) = & 2{,}7579727 & =\log.b \\
7''.6 & \bar{1}{,}9508518 & \\
d = 106 & 742 & =\log.\text{sen.}\,C \\
 & 636 & \\ \hline
 & 2{,}7088326 & \\
2'',2 & -\bar{1}{,}1960571 & \\
d = 1324 & 2648 & = \log.\text{sen.}\,B \\
 & 2648 & \\ \hline
 & 3{,}5127464 & \\
 & 377 & \\ \hline
 & 87 &
\end{array}$$

Siendo $\tfrac{1}{2}(A+B) = 90° - \tfrac{1}{2}\,C = 58°22'21'',2$, resulta $A = 107°42'30'',2$, y $B = 9°2'12'',2$.

El cálculo directo de c en funcion de los datos del triángulo puede hacerse de la manera siguiente (99):

$$c = \frac{a-b}{\cos.\ \varphi},\quad \text{tg.}\ \varphi = \frac{2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C\sqrt{a\,b}}{a-b} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\ C = 31^\circ 37' 38'',8.\ .\ .\ . \\ a = 3473{,}8..\ .\ .\ .\ .\ . \\ \log.\ b = 2{,}7579727 \\ \log.\ (a-b) = 3{,}4625537.. \end{array} \right\} \log.\ \sqrt{a\,b} = \left| \begin{array}{l} 3{,}5408048 = \log.\ a \\ 2{,}7579727 = \log.\ b \\ \hline 6{,}2987775 \\ 3{,}1493887 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \log.\ \text{tg.}\ \varphi\ (27^\circ 1' 8'',5) = \\ \qquad 8'',8 \\ \quad d = 342 \end{array} \left| \begin{array}{rl} 0{,}3010300 & = \log.\ 2 \\ \bar{1}{,}7196275 & \\ 2736 & = \log.\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C \\ 2736 & \\ 3{,}1493887 & = \log.\ \sqrt{a\,b} \\ \hline 3{,}1700763 & \\ -\ 3{,}4625537 & = \log.\ (a-b) \\ \hline \bar{1}{,}7075226 & \\ 4781 & \\ \hline 4450 & d = 521 \\ 2820 & \\ 215 & 8{,}5 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \log.\ c\ (3256{,}46) = \\ \qquad -1'',5 \\ \quad d = -107 \end{array} \left| \begin{array}{rl} 3{,}4625537 & = \log.\ (a-b) \\ -\ \bar{1}{,}9498058 & \\ 107 & = \log.\ \cos.\ \varphi \\ 535 & \\ \hline 3{,}5127463 & \\ 377 & \\ \hline 86 & \end{array} \right.$$

Los valores que resuelven el problema son $A = 107^\circ 42' 30'',2$, $B = 9^\circ 2' 12'',2$, $c = 3256^{\text{m}},46$.

VI. *Resolver un triángulo conociendo los tres lados* $a=3043^{m},17$, $b=5610^{m},43$, *y* $c=4216^{m},9$.

Cálculo de *A;*

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}\qquad \left\{\begin{array}{l}2p=12.870,50..\\ p=\ \ 6.435,25..\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}p-a=3392,08\\ p-b=\ \ 824,82\\ p-c=2218,35\end{array}\right.$$

$$\text{log. tg.}\ \tfrac{1}{2}A\,(16^{\circ}8'48'',5)=\left|\begin{array}{rl}
2,9163592 & =\text{log.}\,(p-b)\\
3,3460203 & \\
98 & =\text{log.}\,(p-c)\\ \hline
6,2623893 & \\
-\ 3,8085620 & \\
34 & =\text{log.}\,p\\
3,5304558 & \\
103 & =\text{log.}\,(p-a)\\ \hline
\bar{2},9233578 &
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r}
\bar{1},4616789\\
121\\ \hline
6680\\
3740\\
588
\end{array}\quad\left|\begin{array}{c} d=\\ 788\\ \hline 8,4\end{array}\right.$$

$$\text{Cálculo de } B;\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}$$

$$\text{log. tg.}\ \tfrac{1}{2}B\,(49^{\circ}58'26'',3)=\left|\begin{array}{rl}
3,5304661 & =\text{log.}\,(p-a)\\
3,3460301 & =\text{log.}\,(p-c)\\ \hline
6,8764962 & \\
-\ 3,8085654 & =\text{log.}\,p\\
2,9163592 & =\text{log.}\,(p-b)\\ \hline
0,1515716 &
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r}
0,0757858\\
589\\ \hline
2690\\
1220\\
364
\end{array}\quad\left|\begin{array}{c} d=\\ 428\\ \hline 6,2\end{array}\right.$$

$$\text{Cálculo de } C;\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}$$

$$\text{log. tg.}\ \tfrac{1}{2}C\,(23^{\circ}52'45'',2)=\left|\begin{array}{rl}
3,5304661 & =\text{log.}\,(p-a)\\
2,9163592 & =\text{log.}\,(p-b)\\ \hline
6,4468253 & \\
-\ 3,8085654 & =\text{log.}\,p\\
3,3460301 & =\text{log.}\,(p-c)\\ \hline
\bar{1},2922298 &
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r}
\bar{1},6461149\\
0851\\ \hline
2980\\
1350\\
212
\end{array}\quad\left|\begin{array}{c} d=\\ 569\\ \hline 5,2\end{array}\right.$$

Los valores de los ángulos son $A=32°17'37''$; $B=99°56'52'',6$, y $C=47°45'30'',4$, cuya suma es igual á $180°$, lo que sirve de verificacion á los cálculos.

VII. *Resolver un triángulo cuyos lados son* a $= 367^m,45$, b $= 293^m,96$ *y* c $= 220^m,47$.

Cálculo de A.

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \left.\begin{matrix} 2p = 881,88. \\ p = 440,94. \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} p-a = 73,49 \\ p-b = 146,98 \\ p-c = 220,47 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{l|rl} \text{log. tg.}\ \tfrac{1}{2} A\ (45° \quad) = & 2,1672582 & = \log.(p-b) \\ & 2,3433495 & = \log.(p-c) \\ \cline{2-2} & 4,5106077 & \\ & -2,6443795 & = \log. p \\ & 1,8662282 & = \log.(p-a) \\ \hline & 0,0000000 & \end{array}$$

Resulta tg. $\frac{1}{2} A = 1$ ó $\frac{1}{2} A = 45°$, lo que indica que el triángulo es rectángulo en A, y aunque puede utilizarse esta circunstancia para determinar los otros dos ángulos, es más sencillo aplicar las fórmulas de los triángulos oblicuángulos, pues ya están calculados los logaritmos de las cantidades que entran en ellas.

$$\text{Cálculo de } B;\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\begin{array}{l|rl} \text{log. tg.}\ \tfrac{1}{2} B & 1,8662282 & = \log.(p-a) \\ & 2,3433495 & = \log.(p-c) \\ \cline{2-2} & 4.2095777 & \\ & -2,6443795 & = \log. p \\ & 2,1672582 & = \log.(p-b) \\ \hline & \bar{1},3979400 & \\ & \bar{1},6989700 & \\ & 480 & \\ & 2200 & d = 526 \\ & 960 & 4,1 \\ & 434 & \end{array}$$

Tomando el complemento de B se determinará C, y los valores de los tres ángulos serán $A=90°$, $B=53°7'48'',4$, $C=36°52'11'',6$.

VIII. *Determinar el área de un triángulo en el que se conocen dos lados* a $= 34015,^{m}6$, b $= 25700^{m},1$ *y el ángulo opuesto al primero* A $= 66^{\circ}33'42'',5$.

$$S = \tfrac{1}{2}\, a\, b \text{ sen.}(A+B);\ \text{sen. } B = \frac{b \text{ sen. } A}{a} \quad \left\{\begin{array}{l} b = 25700,1 \ldots \\ a = 34015,6 \ldots \\ A = 66^{\circ}33'42'',5 \ldots \end{array}\right\} \begin{array}{r} A + B = 110^{\circ}26'44'',4 \\ C = \ \ 69^{\circ}33'15'',6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rl}
\text{log. sen. } B\,(43^{\circ}53'1'',9) = & 4,4099331 & \\
 & 17 & \Big\} = \text{log. } b \\
2,''5 & \overline{1},9625989 & \\
d = 31 & 182 & \Big\} = \text{log. sen. } A \\
 & 455 & \\
\hline
 & 4,3725360 & \\
 & -\,4,5316705 & \Big\} = \text{log. } a \\
 & 77 & \\
\hline
 & \overline{1},8408578 & \\
 & 37 & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
410 & d = \\
1910 & 219 \\
\hline
158 & 1,8
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rl}
\text{log. } S\,(409566449) = & 4,5316782 & = \text{log. } a \\
 & 4,4099348 & = \text{log. } b \\
5'',6 & \overline{1},9717370 & \\
d = 78 & 390 & \Big\} = \text{log. sen. } (A+B) \\
 & 468 & \\
\hline
 & 8,9133544 & \\
 & -\,0,3010300 & = \text{log. } 2 \\
\hline
 & 8,6123244 & \\
 & 175 & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & d = \\
690 & 107 \\
480 & \\
520 & \\
920 & 6448 \\
64 &
\end{array}$$

El área buscada es, pues, igual á 409.566.449 metros cuadrados.

TRIÁNGULOS ESFÉRICOS.

IX. *Resolver un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa* a$=53^\circ 41' 33'',5$ *y un cateto* b$=132^\circ 3' 11'',3$.

El lado c estará determinado por la fórmula (123) $\cos. c = \dfrac{\cos. a}{\cos. b}$ y será (120) mayor que 90°, lo que obliga á tomar los suplementos de b y c para que resultando positivos los dos miembros de dicha fórmula, y menores que 90° los ángulos que entran en ella, puede aplicarse el cálculo logarítmico. Esta circunstancia debe tenerse presente siempre que resulten negativos los dos miembros de una fórmula cualquiera.

Cálculo de c; $\cos. (180^\circ - c) = \dfrac{\cos. a}{\cos\ (180^\circ - b)} \left\{ \begin{array}{l} a = 53^\circ 41' 33'',5 \\ 180^\circ - b = 47^\circ 56' 48'',7 \end{array} \right.$

$$\begin{array}{r|r l}
\log. \cos. (180^\circ - c)\ (27^\circ 52' 19'') = & \bar{1},7723887 & \\
-6'',5 & 1722 & \\
d = -287 & 1435 & = \log. \cos. a \\
\cline{2-2}
 & \bar{1},7724074 & \\
-1'',3 & -\bar{1},8259548 & \\
d = -235 & 233 & = \log. \cos. (180^\circ - b) \\
 & 699 & \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\bar{1},9464496 & \\
597 & d = \\
-\overline{1010} & -112 \\
20 & \overline{\ 9,0\ }
\end{array}$$

Cálculo de B.

$$\text{sen. } B = \frac{\text{sen. } (180^\circ - b)}{\text{sen. } a} \quad \left\{ \begin{array}{l} 180^\circ - b = 47^\circ 56' 48'',7 \\ a = 53^\circ 41' 33'',5 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r|l}
\text{log. sen. } B\,(67^\circ 8' 1'',8) = & \left.\begin{array}{r} \bar{1},8706939 \\ 152 \\ 133 \\ \hline \bar{1},8707104 \end{array}\right\} = \text{log. sen. } b \\
8'',7 & \\
d = 190 & \\
3'',3 & \left.\begin{array}{r} -\bar{1},9062500 \\ 465 \\ 465 \end{array}\right\} = \text{log. sen. } a \\
d = 155 & \\
\hline
 & \begin{array}{r} \bar{1},9644553 \\ 37 \\ \hline 160 \\ 710 \\ 87 \end{array} \begin{array}{|c} d = \\ 89 \\ \hline 1,7 \end{array}
\end{array}$$

Cálculo de C.

$$\cos. C = \frac{\text{tg. } b}{\text{tg. } a}; \quad \cos. (180^\circ - C) = \frac{\text{sen. } b \cos. a}{\text{sen. } a \cos. (180^\circ - b)}$$

$$\begin{array}{r|l}
\text{log. cos. } (180^\circ - C)\,(35^\circ 27' 34'',1) = & \begin{array}{rl} \bar{1},8707104 & = \text{log. sen. } b \\ \bar{1},7724074 & = \text{log. cos. } a \\ \hline \bar{1},6431178 & \\ -\bar{1},9062551 & = \text{log. sen. } a \\ \bar{1},8259578 & = \text{log. cos. } (180^\circ - b) \end{array} \\
\hline
 & \begin{array}{r} \bar{1},9109049 \\ 111 \\ \hline -62 \\ 20 \\ 5 \end{array} \begin{array}{|c} d = \\ -150 \\ \hline 4,1 \end{array}
\end{array}$$

Al calcular C se han reemplazado tg. a y tg. b por sus valores $\frac{\text{sen. } a}{\cos. a}$ y $\frac{\text{sen. } b}{\cos. b}$ por estar ya determinados los logaritmos de estas cuatro líneas en el cálculo de c y B.

Siendo $b > 90^\circ$ se tendrá $B > 90^\circ$ (121) y los elementos desconocidos tendrán los valores $c = 152^\circ 7' 41''$; $B = 112^\circ 51' 58'',2$; $C = 144^\circ 32' 25'',9$.

X. *Resolver un triángulo isósceles en que se conocen la base* b = 121°3′24″ *y el ángulo opuesto* B = 149°17′32″,6.

Aplicando el procedimiento del núm. 125 se formará un triángulo rectángulo, en el que un cateto y el ángulo opuesto serán iguales respectivamente á $\frac{1}{2}b$ y $\frac{1}{2}B$, y cuya resolucion dará á conocer todos los elementos del triángulo propuesto.

Cálculo de a.

$$\text{sen. } a = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}b}{\text{sen. } \frac{1}{2}B} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}b = 60^\circ 31' 42'' \\ \frac{1}{2}B = 74^\circ 38' 46'',3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r|rl}
\text{log. sen. } a\,(64^\circ 31' 53'',3) = & \bar{1},9398158 & \\
2'' & 238 & \\
d = 119 & \overline{} & = \text{log. sen. } \frac{1}{2}b \\
 & \bar{1},9398182 & \\
6'',3 & -\bar{1},9842127 & \\
d = 57 & 342 & = \text{log. sen. } \frac{1}{2}B \\
 & 171 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|c}
\bar{1},9556019 & \\
5986 & \\
\overline{} & d = \\
330 & 101 \\
270 & \overline{} \\
69 & 3,2
\end{array}$$

Cálculo de C.

$$\text{sen. } C = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}B}{\text{cos. } \frac{1}{2}b}$$

$$\begin{array}{r|rl}
\text{log. sen. } C(32^\circ 33' 34'') = & \bar{1},4228547 & \\
-3'',7 & 2301 & \\
d = -767 & 5369 & = \text{log. cos. } \frac{1}{2}B \\
 & \overline{} & \\
 & \bar{1},4228831 & \\
-8'' & -\bar{1},6919292 & \\
d = -373 & 2984 & = \text{log. cos. } \frac{1}{2}b \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|c}
\bar{1},7309241 & \\
098 & d = \\
\overline{143} & 330 \\
110 & \overline{4,0}
\end{array}$$

Estando a y C dados por sus senos, el triángulo rectángulo, y por consiguiente el isósceles propuesto, tendrá dos soluciones

(123,4°), y los valores de las incógnitas serán $a = 64°31'53'',3$, $C = 32°33'34''$ para la primera; y $a = 115°28'6'',7$, $C = 147°26'26''$ para la segunda.

XI. *Resolver un triángulo en que son conocidos los tres lados* a $= 70°19'34''$, b $= 109°3'4'',6$ *y* c $= 59°33'23'',2$.

$$\text{Cálculo de } A;\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,(p-b)\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,p\ \ \text{sen.}\,(p-a)}}$$

$$\begin{array}{rl} 2p = 238°56'1'',8. & p - a = 49°8'26'',9 \\ p = 119°28'0'',9. & p - b = 10°24'56'',3 \\ 180° - p = 60°31'59'',1. & p - c = 59°54'37'',7 \end{array}$$

log. tg. ½ A (25°59′3″,8) =	$\bar{1}$,2570965	
6″,3	6870	= log.sen.(p—b)
d = 1145	3435	
7″,7	$\bar{1}$,9371287	
d = 122	854	= log.sen.(p—c)
	854	
	$\bar{1}$,1943067	
9″,1	— $\bar{1}$,9398277	
d = 119	1071	= log. sen. p
	119	
6″,9	$\bar{1}$,8786928	
d = 182	1092	= log.sen.(p—a)
	1638	
	$\bar{1}$,3757628	
	$\bar{1}$,6878814	
	611	
	2030	d = 534
	4280	
	8	3,8

Cálculo de B.

$$\operatorname{tg.} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.}(p-a)\operatorname{sen.}(p-c)}{\operatorname{sen.} p \operatorname{sen.}(p-b)}}$$

$$\begin{array}{r|rl}
\log. \operatorname{tg.} \tfrac{1}{2} B\,(63^\circ 52' 30'',1) = & \bar{1},8787054 & = \log. \operatorname{sen.}(p-a) \\
 & \bar{1},9371381 & = \log. \operatorname{sen.}(p-c) \\
\hline
 & \bar{1},8158435 & \\
 & -\bar{1},9398385 & = \log. \operatorname{sen.} p \\
 & \bar{1},2571686 & = \log. \operatorname{sen.}(p-b) \\
\hline
 & 0,6188364 & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|c}
0,3094182 & \\
76 & d = \\
\hline
600 & 532 \\
68 & \overline{0,1}
\end{array}$$

Cálculo de C.

$$\operatorname{tg.} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.}(p-a)\operatorname{sen.}(p-b)}{\operatorname{sen.} p \operatorname{sen.}(p-c)}}$$

$$\begin{array}{r|rl}
\log. \operatorname{tg.} \tfrac{1}{2} C\,(23^\circ 4' 33'',1) = & \bar{1},8787054 & = \log. \operatorname{sen.}(p-a) \\
 & \bar{1},2571686 & = \log. \operatorname{sen.}(p-b) \\
\hline
 & \bar{1},1358740 & \\
 & -\bar{1},9398385 & = \log. \operatorname{sen.} p \\
 & \bar{1},9371381 & = \log. \operatorname{sen.}(p-c) \\
\hline
 & \bar{1},2588974 & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|c}
\bar{1},6294487 & \\
305 & \\
\hline
1820 & d = 584 \\
680 & \\
96 & \overline{3,1}
\end{array}$$

Los ángulos buscados tienen, pues, los valores $A = 51^\circ 58' 7'',6$, $B = 127^\circ 45' 0'',2$ y $C = 46^\circ 9' 6'',2$.

XII. *Resolver un triángulo en que se conocen dos lados* a $= 150°3'42''$, b $= 49°10'34''$, *y el ángulo opuesto al primero* A $= 115°33'42'',6$.

$$\text{Cálculo de } B\,;\ \text{sen. } B = \frac{\text{sen. } A \text{ sen. } b}{\text{sen. } a} \quad \left\{ \begin{array}{r} 180° - A = 64°26'17''4 \\ b = 49°10'34'' \\ 180° - a = 29°56'18'' \end{array} \right.$$

log. sen. B ( ) =	$\bar{1},9552569$	
$7'',4$	707	= log. sen. A
$d = 101$	404	
$4''$	$\bar{1},8789294$	= log. sen. b
$d = 182$	728	
	$\bar{1},8342011$	
$8''$	$-\bar{1},6981301$	= log. sen. a
$d = 366$	2928	
	$0,1360417$	

Resulta sen. $B > 1$, y por tanto el triángulo propuesto no puede existir, á pesar de indicar dos soluciones el cuadro del número 129. Observando que en el triángulo rectángulo $A\,C\,D$ (figura 17), en el que $C\,D > 90°$ se tiene, segun las fórmulas [11] del núm. 119, sen. $C\,D =$ sen. A sen. b, resulta, puesto que sen. A sen. $b >$ sen. a, sen. $C\,D >$ sen. a, ó $C\,D < a$; de donde se deduce que el triángulo no puede existir pues el arco $C\,D$ es el mayor que puede trazarse desde el vértice C al lado $A\,B$. Las dos soluciones indicadas en el núm. 129 se hubieran obtenido si $a < C\,D$ y $> 180° - b$.

XIII. *Resolver un triángulo en el mismo caso anterior, siendo* a $= 64°5'12'',4$, b $= 114°2'11''$ *y* A $= 79°13'42'',6$.

$$\text{Cálculo de } B;\ \text{sen. } B = \frac{\text{sen. } A \text{ sen. } b}{\text{sen. } a} \quad \left\{ \begin{array}{r} A = 79°13'42'',6 \\ 180° - b = 65°57'49'' \\ a = 64°\ 5'12'',4 \end{array} \right.$$

log. sen. B $(85°56'8'',7)$ =	$\bar{1},9922786$	
$2'',6$	8	= log. sen. A
$d = 40$	24	
$9''$	$\bar{1},9605988$	= log. sen. b
$d = 94$	846	
	$\bar{1},9528869$	
$2'',4$	$-\bar{1},9539779$	
$d = 103$	206	= log. sen. a
	412	
	$\bar{1},9989065$	
	52	$d =$
	130	15
	100	8,6
	10	

Cálculo de C.

$$\operatorname{tg.}(180^\circ-\varphi)=\frac{\cot. A}{\cos.(180^\circ-b)}\quad\left\{\begin{array}{l}A=79^\circ13'42'',6\\ 180^\circ-b=65^\circ57'49''\end{array}\right.$$

log. tg. $(180^\circ-\varphi)(25^\circ2'8'',8)=$	$\overline{1},2792278$	=log. cot. A
$-7'',4$	8029	
$d=-1147$	4588	
	$\overline{1},2793127$	
$-1''$	$-\overline{1},6099276$	=log. cos. $(180^\circ-b)$
$d=-472$	472	
	$\overline{1},6693804$	
$\varphi=154^\circ57'51'',2$	319	$d=$
	4850	549
	4580	8,8
	188	

$$\cos.[\pm(C-\varphi)]=\cos.\varphi\operatorname{tg.}b\cot.a=\frac{\cos.(180^\circ-\varphi)\operatorname{sen.}b\cot.a}{\cos.(180^\circ-b)}$$

log. cos. $[\pm(C-\varphi)](9^\circ14'4'',7)=$	1,9571480	= log. cos. $(180^\circ-\varphi)$
$-1'',2$	98	
$d=-98$	196	
	1,9606073	= log. sen. b
$-7'',6$	$\overline{1},6864697$	= log. cot. a
$d=-98$	3745	
	3210	
	$\overline{1},6042668$	
	$-\overline{1},6099323$	=log. cos. $(180^\circ-b)$
	$\overline{1},9943345$	
	61	$d=$
	-160	-34
	240	4,7
	2	

Resultando tg. $\varphi<0$ por ser cos. $b<0$, se tiene $\varphi>90^\circ$, y la fórmula que determina su valor (128) debe transformarse segun está indicado. La misma observacion debe tenerse en cuenta para calcular log. cos. $[\pm(C-\varphi)]$, habiendo reemplazado además tg. $(180^\circ-b)$ por $\frac{\operatorname{sen.}(180^\circ-b)}{\cos.(180^\circ-b}=\frac{\operatorname{sen.}b}{(\cos.180^\circ-b)}$ por estar ya determinados log. sen. b y log. cos. $(180^\circ-b)$ al calcular B y φ.

Cálculo de c.

$$\text{tg.}(180^\circ - \psi) = \text{tg.}(180^\circ - b)\cos. A = \frac{\text{sen.}\, b \cot. A \,\text{sen.}\, A}{\cos.(180^\circ - b)};$$

$$\log.\text{tg.}(180^\circ - \psi)\,(22^\circ 44' 10'',3) = \begin{array}{|ll} \bar{1},9606073 & = \log.\text{sen.}\, b \\ \bar{1},2793127 & = \log.\cot. A \\ \bar{1},9922796 & = \log.\text{sen.}\, A \\ \hline \bar{1},2321996 & \\ -\bar{1},6099323 & = \log.\cos.(180^\circ - b) \\ \hline \bar{1},6222673 & \\ \quad 56 & \\ \hline \quad 1700 & \\ \quad 518 & \end{array} \qquad \begin{array}{|l} d = \\ 591 \\ \hline 0,2 \end{array}$$

$$\psi = 157^\circ 15' 49'',7$$

$$\cos.[\pm(c - \psi)] = \frac{\cos. a \cos. \psi}{\cos. b} = \frac{\text{sen.}\, a \cot. a \cos.(180^\circ - \psi)}{\cos.(180^\circ - b)},$$

$$\log.\cos.[\pm(c - \psi)]\,(8^\circ 17' 57'',4) = \begin{array}{|ll} \bar{1},9539804 & = \log.\text{sen.}\, a \\ \bar{1},6865104 & = \log.\cot. a \\ \bar{1},9648609 & \\ \quad 792 & = \log.\cos.(180^\circ - \psi) \\ \quad 616 & \\ \hline \bar{1},6053602 & \\ -\bar{1},6099323 & = \log.\cos.(180^\circ - b) \\ \hline \bar{1},9954279 & \\ \quad 302 & \\ \hline -230 & \\ \quad 130 & \\ \quad 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{|l} d = \\ -31 \\ \hline 7,4 \end{array}$$

$$-9'',7 \qquad d = -88$$

Se han reemplazado cos. A y cos. a por sen. A cot. A y sen. a cot. a por estar ya determinados los logaritmos de estas últimas líneas.

Para completar la resolucion del problema debe determinarse si el valor de B es mayor ó menor que 90°, así como los signos que deben adoptarse para los ángulos $C - \varphi = \pm 9^\circ 14' 4'',7$ y $c - \psi = \pm 8^\circ 17' 57'',4$. Recurriendo con este objeto al cuadro del núm. 129 se ve que existen dos soluciones, una $A E' C'$ (Fig. 17) en que $B < 90^\circ$, $C > \varphi$ y $c > \psi$, ó sea $C = \varphi + 9^\circ 14' 4'',7$, $c = \psi + 8^\circ 17' 57'',4$; y otra $A B' C'$ en que $B > 90^\circ$, $C < \varphi$ y $c < \psi$ ó bien $C = \varphi - 9^\circ 14' 4'',7$, $c = \psi - 8^\circ 17' 57'',4$.

Los elementos que resuelven el triángulo son $B = 85^\circ 56' 8'',7$, $C = 164^\circ 11' 55'',9$ y $c = 165^\circ 32' 47'',1$ para una solucion; y $B = 94^\circ 3' 51'',3$, $C = 145^\circ 43' 46'',5$ y $c = 148^\circ 57' 52'',3$ para la otra.

XIV. *Resolver un triángulo conociendo dos ángulos* A $= 107^\circ 17' 54''$, B $= 118^\circ 37' 46''$ *y el lado opuesto al primero* a $= 36^\circ 46' 43'',6$.

Segun lo indicado en el núm. 130 debe resolverse el triángulo suplementario en el que se conocerán dos lados a' y b', y el ángulo A' opuesto al primero.

$$\text{Cálculo de } B'\text{; sen. } B' = \frac{\text{sen. } A' \text{ sen. } b'}{\text{sen. } a'} \left\{ \begin{array}{l} 180^\circ - A' = a = 36^\circ 46' 43'',6 \\ b' = 180^\circ - B = 61^\circ 22' 14'' \\ a' = 180^\circ - A = 72^\circ 42' \ 6'' \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r|r l}
\text{log. sen. } B' \ (33^\circ 23' 45'',1) = & \overline{1},7772187 & \\
3'',6 & 843 & \Big\} = \text{log. sen. } A' \\
d = 281 & 1686 & \\
4'' & \overline{1},9433597 & \Big\} = \text{log. sen. } b' \\
d = 115 & 460 & \\
\hline
 & \overline{1},7205931 & \\
6'' & -\overline{1},9798946 & \Big\} = \text{log. sen. } a' \\
d = 65 & 390 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\overline{1},7406946 & \\
783 & d = \\
\overline{1630} & 319 \\
\hline
350 & 5,1 \\
31 &
\end{array}$$

El triángulo no tiene más que una solucion (129) en la que $B' < 90^\circ$, y el cálculo de C' y c' debe hacerse por las analogías de Néper, cuyo procedimiento es más cómodo en este caso que el empleado en el número anterior.

Cálculo de C'.

$$\cot.\tfrac{1}{2}C' = \text{tg.}\tfrac{1}{2}(A'-B')\,\frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a'+b')}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a'-b')}\quad\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}(A'-B')=54^\circ54'45'',65\\ \tfrac{1}{2}(a'+b')=67^\circ\ 2'10''\\ \tfrac{1}{2}(a'-b')=\ 5^\circ39'56''\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r|r l}
\log.\cot.\tfrac{1}{2}C'(4^\circ18'26'',4)= & 0{,}1533400 & \\
5'',65 & 2240 & \left.\right\}=\log.\text{tg.}\tfrac{1}{2}(A'-B') \\
d=448 & 2688 & \\
 & 2240 & \\
 & \overline{1},9641422 & =\log.\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a'+b') \\
\hline
 & 0{,}1175075 & \\
6'' & -\overline{2},9942845 & \left.\right\}=\log.\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a'-b') \\
d=2123 & 12738 & \\
\hline
 & 1{,}1230956 & \\
 & 2749 & \quad d= \\
 & -\overline{17930} & \quad -2812 \\
C'=8^\circ36'52'',8 & 10580 & \quad 6{,}3 \\
 & 2144 &
\end{array}$$

Cálculo de c'.

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}c' = \text{tg.}\tfrac{1}{2}(a'-b')\,\frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(A'+B')}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(A'-B')}\quad\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}(a'-b')=\ 5^\circ39'56''\\ \tfrac{1}{2}(A'+B')=88^\circ18'30'',75\\ \tfrac{1}{2}(A'-B')=54^\circ54'45'',65\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r|r l}
\log.\text{tg.}\tfrac{1}{2}c'(6^\circ54'34'',9)= & \overline{2},9964100 & \left.\right\}=\log.\text{tg.}\tfrac{1}{2}(a'-b') \\
6' & 12858 & \\
d=2143 & & \\
0'',75 & \overline{1},9998107 & \\
d=6 & 42 & \left.\right\}=\log.\text{sen.}\tfrac{1}{2}(A'+B') \\
 & 30 & \\
\hline
 & \overline{2},9963493 & \\
5'',65 & -\overline{1},9128920 & \\
d=148 & 740 & \left.\right\}=\log.\text{sen.}\tfrac{1}{2}(A'+B') \\
 & 888 & \\
 & 740 & \\
\hline
 & \overline{1},0834489 & \\
 & 3624 & \quad d= \\
c'=13^\circ49'9'',8 & \overline{8650} & \quad 1763 \\
 & 15980 & \quad 4{,}9 \\
 & 113 &
\end{array}$$

Tomando los suplementos de B', C' y c' se obtendrán los valores de $b=146^\circ36'14'',9$, $c=171^\circ23'7'',2$, y $C=166^\circ10'50'',2$ que resuelven el triángulo propuesto.

XV. *Resolver un triángulo conociendo dos ángulos* A $=29°57'47''$, B $=138°46'47'',4$ *y el lado adyacente* c $=106°17'34''$.

El problema se resolverá por medio del triángulo suplementario en el que se conocerán dos lados $a'=150°2'13''$, $b'=41°13'12'',6$ y el ángulo comprendido $C'=73°42'26''$.

Cálculo de A' y B'.

$$\text{tg.}\,[180° - \tfrac{1}{2}(A'+B')] = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a'-b')}{\cos.[180° - \tfrac{1}{2}(a'+b')]}\cot.\tfrac{1}{2}C' \quad \left\{\begin{array}{r} \tfrac{1}{2}(a'-b') = 54°24'30'',2 \\ 180° - \tfrac{1}{2}(a'+b') = 84°22'17'',2 \\ \tfrac{1}{2}C' = 36°51'13'' \end{array}\right\} \quad \text{tg.}\,\tfrac{1}{2}(A'-B') = \frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a'-b')}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a'+b')}\cot.\tfrac{1}{2}C'.$$

log. tg. [180° — ½(A′+B′)](82°48′3″)=	$\overline{1},7648971$	
—9″,8	2646	=log.cos. ½ (a′—b′)
d = —294	2352	
7″	0,1251652	= log. cot. ½ C′
d = —439	3073	
	$\overline{1},8901218$	
—2″,8	$-\overline{2},9915158$	=log.cos.[180°— ½ (a′+b′)]
d = —2136	4272	
	17088	
	0,8985462	
½ (A′+B′)=97°11′57″	4956	d =
	5060	1694
	16720	2,9
	1474	

log. tg. ½ (A′—B′) (47°28′10″,5) =	$\overline{1},9101896$	= log. sen. ½ (a′—b′)
0″,2	302	
d = 151	0,1251959	= log. cot. ½ C′
	0,0353858	
7″,2	$-\overline{1},9978996$	= log. sen. ½ (a′+b′)
d = 20	14	
	4	
	0,0374848	
	26	d =
	2200	422
	90	0,5

Conocidos $\frac{1}{2}(A' + B')$ y $\frac{1}{2}(A' - B')$ se obtiene $A' = 144°40'7'',5$ y $B' = 49°43'46'',5$.

Cálculo de c'.

$$\cot.(180° - \varphi) = \operatorname{tg}.(180° - a')\cos. C' \left\{\begin{array}{r} 180° - a' = 29°57'47'' \\ C' = 73°42'26'' \\ 180° - (b' + \varphi) = 39°35'34'',2 \\ 180° - \varphi = 80°48'46'',8 \end{array}\right\} \cos.(180° - c') = \frac{\cos.(180° - a')\,\operatorname{sen}.(b' + \varphi)}{\operatorname{sen}.\varphi}$$

$$\begin{array}{r|l} \log.\cot.(180° - \varphi)\ (80°48'46'',8) = & \left.\begin{array}{r} \bar{1},7607584 \\ 3402 \end{array}\right\} = \log.\operatorname{tg}.(180° - a') \\ 7'' & \\ d = 486 & \left.\begin{array}{r} \bar{1},4479748 \\ 2884 \end{array}\right\} = \log.\cos. C' \\ -4'' & \\ d = -721 & \begin{array}{r} \bar{1},2087961 \\ 8863 \\ -9020 \\ 10040 \\ 688 \end{array} \begin{array}{|l} d = \\ -1336 \\ \hline 6,7 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \log.\cos.(180° - c')\ (55°59'27'',6) = & \left.\begin{array}{r} \bar{1},9376885 \\ 366 \end{array}\right\} = \log.\cos.(180° - a') \\ -3'' & \\ d = -122 & \left.\begin{array}{r} \bar{1},8043520 \\ 1020 \\ 510 \end{array}\right\} = \log.\operatorname{sen}.(b' + \varphi) \\ 4'',2 & \\ d = 255 & \begin{array}{r} \bar{1},7420549 \end{array} \\ 6'',8 & \left.\begin{array}{r} -\bar{1},9943907 \\ 102 \\ 272 \end{array}\right\} = \log.\operatorname{sen}.\varphi \\ d = 34 & \begin{array}{r} \bar{1},7476629 \\ 865 \\ -2360 \\ 1760 \\ 200 \end{array} \begin{array}{|l} d = \\ -312 \\ \hline 7,5 \end{array} \end{array}$$

Obtenido el valor de $180° - \varphi$, y sin necesidad de obtener el de φ, se deduce el de $180° - (b' + \varphi) = (180° - \varphi) - b'$. Tampoco debe calcularse c' pues el suplemento obtenido es el valor de C. Los valores que resuelven el triángulo son, por consiguiente, $a = 35°19'52'',5$, $b = 130°16'13'',5$ y $C = 55°59'27'',6$.

Problemas. I. Resolver un triángulo rectilíneo en el cual se conocen la base, uno de los ángulos adyacentes y la altura.

II. Resolver un triángulo rectilíneo conociendo la altura y los ángulos.

III. Resolver un triángulo rectilíneo conociendo dos alturas y un ángulo.

IV. Resolver un triángulo rectilíneo conociendo un ángulo, un lado y la suma ó diferencia de los otros dos.

V. Resolver un triángulo rectilíneo conociendo los ángulos y el área.

VI. Resolver un triángulo rectilíneo conociendo los ángulos y el perímetro.

VII. Resolver un triángulo rectilíneo rectángulo conociendo la hipotenusa y la proyeccion sobre ella de uno de los catetos.

VIII. Calcular el área de un triángulo en funcion de dos lados y la mediana (*) del tercero.

IX. Resolver el triángulo con los datos anteriores.

X. Resolver un triángulo rectilíneo conociendo la mediana de la base, la altura y el ángulo en el vértice.

XI. Determinar el área de un cuadrilátero en funcion de sus diagonales y del ángulo que forman.

XII. Resolver un triángulo esférico conociendo la suma ó diferencia de dos lados y de los ángulos opuestos, y el tercer lado ó el tercer ángulo.

(*) Se entiende por mediana de un lado de un triángulo la recta que une su punto medio al vértice opuesto.

ÍNDICE.

Lam. I.

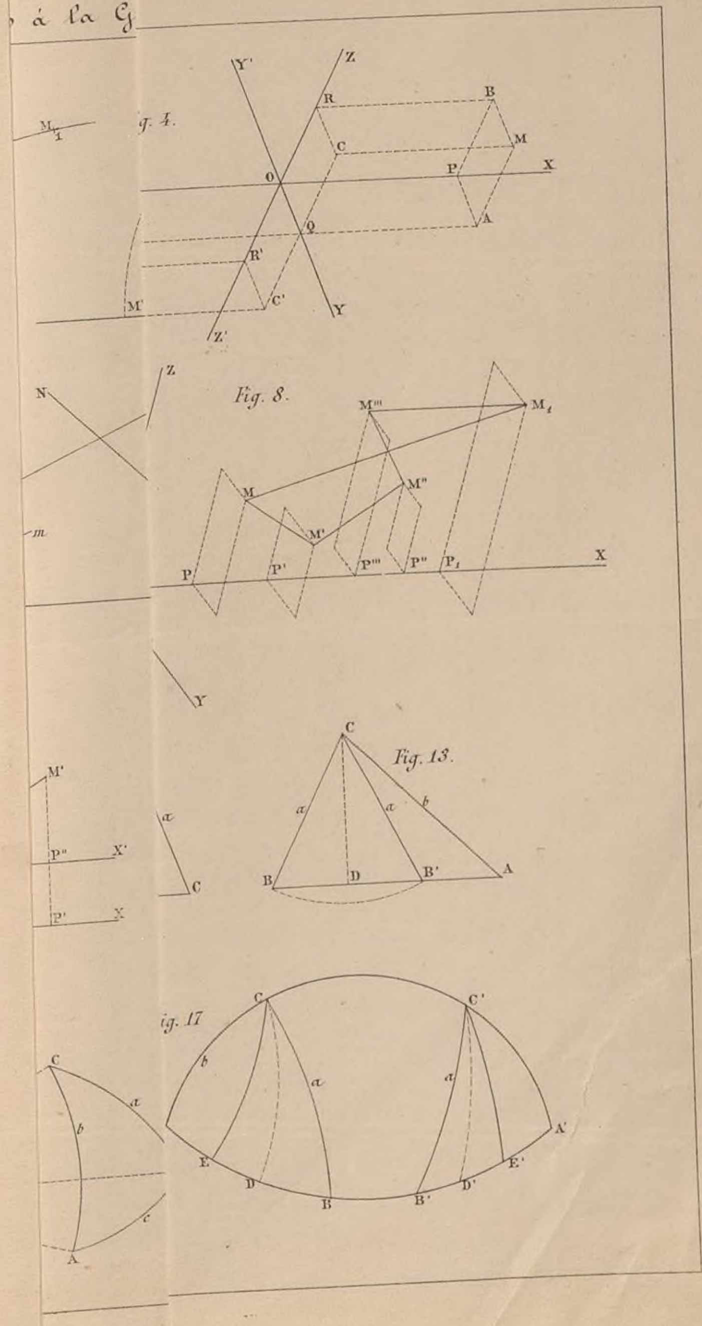

Fig. 4.
Y' Z R B C M O P X Q A R' C' M' Y Z'
Fig. 8.
M''' M₁ M M'' M' P P' P''' P'' P₁ X
Fig. 13.
C a a b B D B' A
Fig. 17
C C' b a a A' E D B B' D' E'

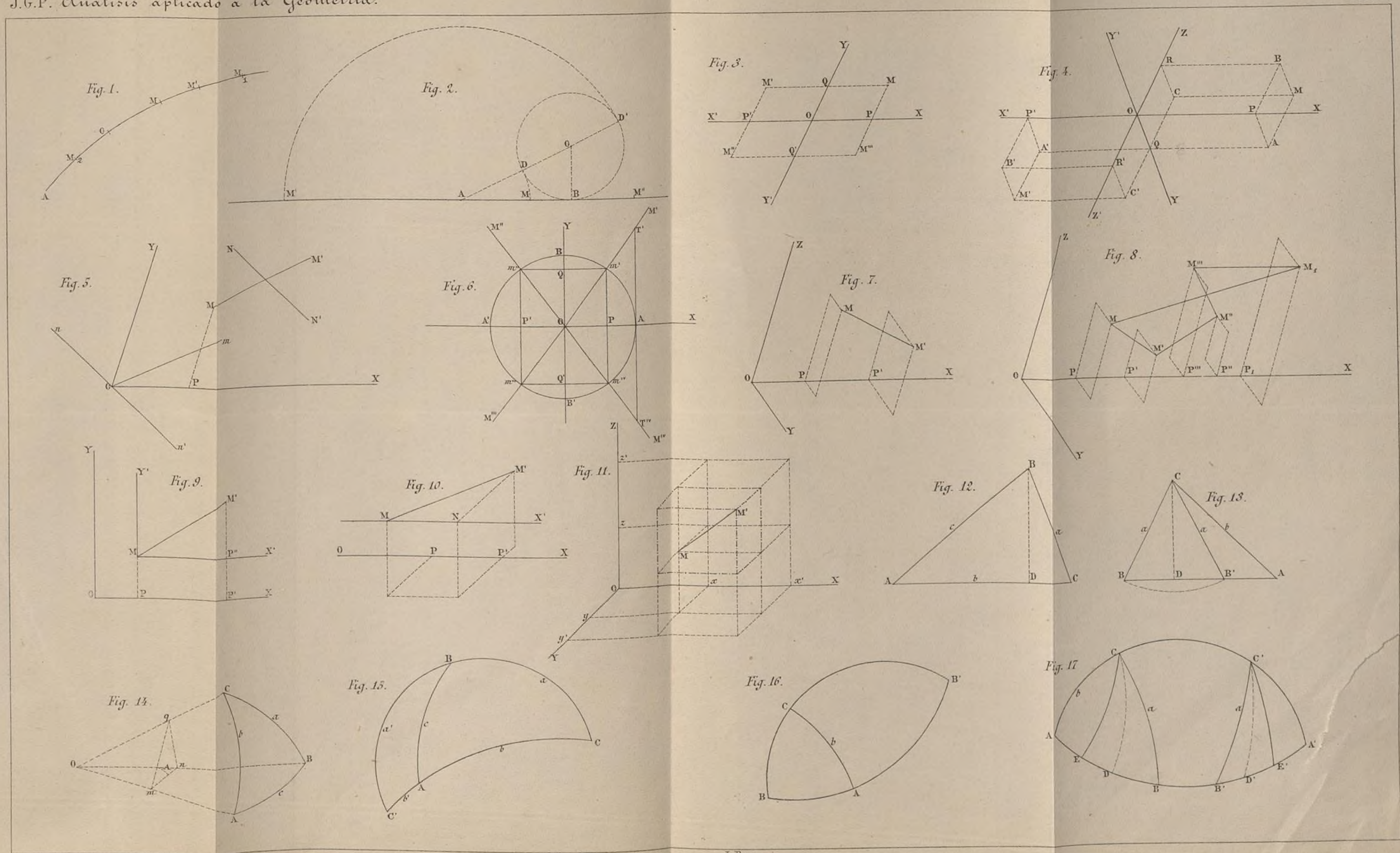
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17

J. Pajares.

Se vende al precio de **2 pesetas** en Madrid, y **2,50** en provincias, franco de porte, haciendo los pedidos al Administrador de *El Museo de la Industria*, calle de Atocha, núm. 143.

Ademas se halla de venta en Madrid, en las librerías de *Durán*, Carrera de San Jerónimo; de los Sres. *Medina y Navarro*, Arenal, 16, y en la Academia preparatoria y de carreras especiales de D. E. de Mariátegui, Atocha, 145, segundo derecha.