H. SONNET

ELEMENTOS DE GEOMETRIA

PRIMEROS ELEMENTOS
DE GEOMETRIA

CON LAS PRINCIPALES APLICACIONES

AL DIBUJO LINEAL, AL LEVANTAMIENTO DE PLANOS,
Á LA AGRIMENSURA, ETC., ETC.

POR H. SONNET

Doctor en ciencias, Inspector de la Academia de Paris, catedrático
en la Escuela central de Artes y Manufacturas

OBRA AUTORIZADA POR EL CONSEJO DE INSTRUCCION PÚBLICA
ACOMPAÑADA CON NUMEROSAS FIGURAS INTERCALADAS EN EL TEXTO
TRADUCIDA DEL FRANCÉS

por

D. GERÓNIMO FRONTERA

Doctor en ciencias matemáticas de la Facultad de Paris
catedrático de matemáticas en el liceo de San Luis
de Paris

G. Hachette

PARIS
LIBRERIA HACHETTE Y C.ᵃ
79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

PRIMEROS ELEMENTOS

DE GEOMETRIA

PARIS — TIPOGRAFIA LAHURE
calle de Fleurus, 9.

PRIMEROS ELEMENTOS

DE GEOMETRIA

CON LAS PRINCIPALES APLICACIONES

AL DIBUJO LINEAL, AL LEVANTAMIENTO DE PLANOS,
Á LA AGRIMENSURA, ETC., ETC.

POR H. SONNET

Doctor en ciencias, Inspector de la Academia de Paris, Profesor
en la Escuela central de Artes y Manufacturas

OBRA AUTORIZADA POR EL CONSEJO DE INSTRUCCION PÚBLICA
ACOMPAÑADA DE NUMEROSAS FIGURAS INTERCALADAS EN EL TEXTO
TRADUCIDA DEL FRANCÉS

por

D. GERONIMO FRONTERA

Doctor en ciencias matemáticas de la Universidad de Paris,
catedrático de matemáticas en el liceo de San Luis
de Paris

PARIS
LIBRERIA HACHETTE Y C.ᴬ
79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1874

PRIMEROS ELEMENTOS

DE GEOMETRIA

INTRODUCCION

1. La GEOMETRIA es la ciencia que trata de la forma de los cuerpos y de la medida de la extension.

Para estudiar la forma de los cuerpos, la Geometría hace abstraccion de todas sus demás propiedades físicas, como son el peso, el color, etc.

Entre las formas tan diversas que pueden tomar los cuerpos, la Geometría elemental solo considera las que son susceptibles de una definicion simple, por cuya razon, se llaman *formas ó figuras geométricas.*

2. Todo cuerpo ocupa una porcion del espacio sin límites que nos rodea.

Está separado del resto del espacio por un limite que se llama su *superficie.*

Para estudiar una superficie se suele hacer abstraccion del cuerpo al cual sirve de límite; una vez adquirida la nocion de superficie, se pueden concebir superficies que no pertenecen á ningun cuerpo.

Cuando dos superficies se encuentran, su interseccion se llama *línea.* Una línea puede considerarse como el límite comun de dos superficies que se encuentran. Para estudiar una línea se puede hacer abstraccion de las superficies á las cuales sirve de límite, y pueden concebirse líneas que no pertenezcan á ninguna superficie.

Cuando dos líneas se encuentran, su interseccion se llama *punto.* Un punto puede concebirse sin las líneas á las que sirve de límite comun, y tambien pueden concebirse puntos que no pertenezcan á ninguna línea.

3. La extension de un cuerpo se llama su *volúmen.* La extension de una superficie se llama su *área.* La extension de una línea se llama su *longitud.* Un punto no tiene extension.

Todo cuerpo tiene tres *dimensiones*, que son : *longitud, latitud* ó *anchura* y *altura.* Toda superficie tiene dos : *longitud* y *anchura.* Toda línea tiene una sola dimension : *longitud.* Un punto no tiene ninguna dimension.

4. La mas simple de todas las líneas es la *línea recta*; un hilo tendido, si se prescinde de su grueso, nos da una idea bastante exacta de lo que es una línea recta, cuya definicion es la siguiente : *la línea recta es la línea mas corta que se puede tirar de un punto á otro.*

Esta definicion supone que la línea recta es limitada, pero nada impide prolongarla idealmente mas allá de los dos puntos que le sirven de límites ; y así es que al hablar de una línea recta, siempre se la considera como *indefinida* á menos que no se advierta lo contrario.

Para abreviar, se dice á menudo *una recta,* en lugar de una *línea recta.*

5. Llámase *línea quebrada* á toda línea compuesta de

porciones de línea recta; estas porciones de línea recta se llaman los *lados* de la línea quebrada.

Una línea quebrada cuyos lados son infinitamente pequeños y en número infinitamente grande, ó, en otros términos, una línea tal que ninguna porcion de ella, por pequeña que sea, no es rigurosamente recta, se llama una *línea curva*, ó simplemente una *curva*.

La Geometría elemental, solo estudia la mas simple de las líneas curvas, que es la *circunferencia de círculo*, de la que hablaremos mas lejos.

6. La superficie mas simple es la *superficie plana* ó simplemente el *plano*; la superficie superior de un agua tranquila y de poca extension nos da el ejemplo de una superficie plana, cuya definicion es la siguiente: *un plano es una superficie sobre la cual una línea recta puede aplicarse en todos los sentidos.*

Las superficies planas que hay que considerar en la práctica tienen, por fuerza, una extension limitada; pero nada impide el considerarlas prolongadas idealmente en todos los sentidos; y mientras no se advierta lo contrario, el plano debe siempre considerarse como una superficie indefinida ó sin límites.

7. Llámase *superficie quebrada* á toda superficie compuesta de porciones de plano, que son las *caras* de la superficie quebrada.

Llámase *superficie curva* á una superficie quebrada cuyas caras son infinitamente pequeñas y en número infinito, ó, en otros términos, una superficie que no tiene ninguna porcion rigurosamente plana, por pequeña que sea la porcion que se considera.

La Geometría elemental solo se ocupa de las superficies curvas mas simples, que son: las superficies *cilín-*

dricas, las superficies *cónicas* y las superficies *esféricas*, de que hablaremos mas adelante.

8. La Geometría se divide en dos partes principales, á saber: la GEOMETRÍA PLANA y la GEOMETRÍA DEL ESPACIO. La primera parte tiene por objeto el estudio de las propiedades de las líneas colocadas en un mismo plano, de las *figuras planas* ó superficies planas limitadas, y el medir las longitudes y las áreas que dependen de estas líneas y figuras. La segunda parte tiene por objeto el estudio de las propiedades de las superficies, de las formas de los cuerpos geométricos, y la medida de las áreas y de los volúmenes de estas superficies y de estos cuerpos geométricos.

9. Llámase AXIOMA á una proposicion evidente por sí misma sin necesidad de ninguna demostracion.

Llámase TEOREMA á una proposicion que, por no ser evidente por sí misma, necesita ser demostrada. Para demostrar una verdad geométrica se necesita á menudo emplear puntos, líneas, superficies y hasta cuerpos auxiliares, lo cual se llama hacer una *construccion;* y al conjunto de las construcciones y de los *razonamientos* necesarios para evidenciar el teorema, se da el nombre de *demostracion* del teorema.

El enunciado de un teorema consta siempre de una hipótesis ó suposicion por lo menos, y de una consecuencia que se deduce de esta hipótesis; si sucede que esta consecuencia, tomada á su vez por hipótesis, da por consecuencia la primera hipótesis, se tiene entonces un segundo teorema llamado *recíproco* del primero. Por ejemplo, en este teorema de aritmética: *todo número, terminado por un guarismo par, es divisible por* 2, la hipótesis es que el número esté terminado por un guarismo par, y la consecuencia que sea divisible por 2. Al contrario, si se supone que el número es divisible por 2, se saca por consecuencia que está terminado por un guarismo par ; lo cual constituye un teorema recíproco del primero.

Todo teorema no tiene necesariamente su recíproco ; por ejemplo, se sabe que : *todo número cuyos guarismos tienen por suma un múltiplo de* 9, *es necesariamente divisible por* 3 ; y es falso decir que *cuando un número es divisible por* 3, *la suma de sus guarismos es necesariamente un multíplice de* 9 (pues basta que sea un multíplice de 3). En tal caso se dice que el *teorema recíproco es falso.*

Llámase POSTULADO á una verdad no tan evidente como un axioma, pero que lo es bastante para que se pueda *admitir* sin demostracion.

Llámase LEMA á un teorema preparatorio, destinado á facilitar la demostracion de otro teorema mas importante.

Llámase COROLARIO á una verdad accesoria que resulta de la demostracion de un teorema.

Un PROBLEMA es una cuestion que se trata de resolver fundándose sobre teoremas anteriormente demostrados. La solucion de un problema exige, las mas veces, hacer operaciones gráficas, á cuyo conjunto se da el nombre de *construccion.*

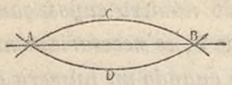
Los teoremas, postulados, lemas, corolarios y problemas, se indican tambien con el nombre comun de *proposiciones.*

10. Las líneas, las superficies, los cuerpos, se representan por medio de figuras.

Los diferentes puntos de una misma figura se distinguen unos de otros con letras del alfabeto colocadas al lado de estos puntos. Dícese pues : el punto A, el punto B, etc. (fig. 1).

Una línea se designa generalmente por las letras que corresponden á dos de sus puntos ; así pues se dice : la línea AB, para indicar la que va del punto designado por A al punto designado por B. Cuando hay muchas líneas que unen á estos dos puntos, es necesario emplear para distinguirlas una tercera letra ; por ejemplo, se dirá la línea ACB, la línea ADB, reservando la indicacion AB para la línea recta que une á los dos puntos A y B.

Fig. 1.



Las superficies y los cuerpos se indican de un módo semejante. A veces una longitud, un área, un volúmen, se designan por una sola letra ; esta convencion debe indicarse siempre formalmente en el texto.

Cuando se han empleado ciertas letras A, B, C, etc., para indicar ciertos puntos ó ciertas magnitudes, si se quieren indicar puntos ó magnitudes análogas, se usan las mismas letras acentuadas, A′, B′, C′, etc., las que se pronuncian A *primera*, B *primera*, C *primera*, etc., algunas veces se emplean las mismas letras marcadas con dos acentos, A″, B″, C″, etc., y se pronuncian A *segunda*, B *segunda*, C *segunda*, etc. Con tres acentos, A‴, B‴, C‴, etc., se pronuncian A *tercera*, B *tercera*, *C tercera*, etc. ; y así sucesivamente.

Tambien se usan las letras minúsculas juntamente con las mayúsculas, y en este caso se distinguen colocando la palabra *grande* delante de las mayúsculas y la palabra *pequeña* delante de las minúsculas. Las expresiones ABCD, *abcd*, se enunciarán pues : grande ABCD, pequeño *abcd*.

11. En la Geometría, para abreviar, se emplean algunos signos usados en Algebra.

El signo $=$ se enuncia *igual*, é indica la igualdad de las dos cantidades que separa. Así $A = B$, significa que la cantidad designada por A, es igual á la designada por B.

El signo $+$ se pronuncia *mas*, é indica la adicion. Así $A + B$, que se pronuncia : A mas B, significa A aumentado de B.

El signo $-$, que se enuncia *menos*, indica la resta. Ejemplo : $A - B$, significa A disminuido de B.

El signo $\times$ indica la multiplicacion y se enuncia *multiplicado por :* Así $A \times B$, significa A multiplicado por B.

El signo $:$ se enuncia *dividido por*, é indica la division. Ejemplo : $A : B$, significa A dividido por B. Tambien se indica la division de A por B, por la expresion $\frac{A}{B}$.

Los paréntesis ( ) representan el resultado de las operaciones indicadas sobre las cantidades que abrazan. Ejemplo : $(A + B - C) \times D$, significa que á A debe añadirse B, restar C de la suma obtenida, y que el *resultado* de estas operaciones debe multiplicarse por D.

Las expresiones A^2, $\overline{AB}^2$, etc, indican la segunda potencia de la cantidad representada por A, la de la línea representada por AB, etc.

Las expresiones A^3, $\overline{AB}^3$, etc., indican tambien la tercera potencia de A ó de AB.

El signo $\sqrt{}$ indica la raiz cuadrada de la cantidad colocada debajo de él. Así $\sqrt{A \times B}$ expresa la raiz cuadrada del producto de A por B.

El signo $\sqrt[3]{}$ indica la raiz cúbica de la cantidad colocada debajo de él. Así $\sqrt[3]{A \times B \times C}$ indica la raiz cúbica del producto de los tres factores A, B y C.

El signo $>$ se enuncia *mas grande que* ó *mayor que*, é indica que la cantidad colocada á su izquierda es mas grande que la que está colocada á su derecha. Así $A > B$ significa que A es mayor que B.

El signo $<$ se enuncia *menor que*, é indica que la cantidad colocada á la izquierda es mas pequeña que la cantidad colocada á su derecha. Así $A < B$, significa que A es menor que B.

El estudio de la Geometría no exige mas conocimientos preliminares que los de aritmética, en los que van comprendidas las proporciones y la extraccion de las raices cuadrada y cúbica.

Nota. Los números colocados entre paréntesis ( ) indican las referencias á proposiciones precedentes.

PRIMERA PARTE

GEOMETRIA PLANA

PRIMERA SECCION

DE LAS LINEAS

CAPITULO PRIMERO

DE LA LÍNEA RECTA, DE LAS LÍNEAS QUEBRADAS Y DEL CÍRCULO.

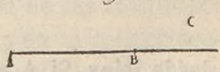
§ I. De la línea recta.

12. Axioma.—*De un punto á otro no se puede tirar mas que una línea recta:* O en otros términos, entre las líneas que se pueden tirar de un punto á otro, no hay mas que una que sea la mas corta.

13. Teorema.—*Dos rectas que tienen dos puntos comunes* A *y* B (fig. 2), *coinciden en toda su extension.*

Las dos rectas coinciden desde A hasta B en virtud del axioma que precede: y decimos que su prolongacion coincide tambien, pues, si una de ellas tuviera un punto C que no estuviese situado sobre la otra, se podria hacer mover esta al rededor del punto A hasta que viniese á pasar por el punto C; como todos sus puntos, á excepcion de A, habrian cambiado en este movimiento de colocacion, las dos rectas dejarian de coincidir en B; y por lo tanto de A á C, se podrian tirar dos rectas di-

Fig. 2.



ferentes, lo que es imposible segun el axioma que precede. De consiguiente, todo punto tomado sobre una de las rectas, pertenece al mismo tiempo á la otra, y por lo tanto coinciden en toda su extension.

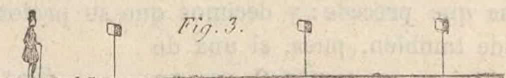
Corolario. — *Dos puntos bastan para determinar la posicion de una recta.*

14. Aplicaciones. — 1ª Todo el mundo sabe el modo de emplear *la regla* para trazar una recta que pase por dos puntos dados sobre el papel, un lienzo, un muro, etc.

2ª Los jardineros trazan una línea recta sobre el terreno, siguiendo con una estaca la direccion de una cuerda tendida y fija, por sus extremos, á dos puntos que sirven para determinar esta recta.

Cuando se trata de trazar sobre el terreno una recta de una extension considerable, se señalan un cierto número de puntos sobre su direccion por medio de jalones ó estacas colocadas de distancia en distancia: y esto es lo que se llama *jalonear* ó *alinear* una direccion. Cada jalon suele llevar, en su extremidad superior, una placa pintada de dos colores para poderlo distinguir

Fig. 3.



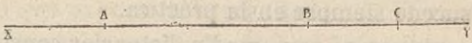
desde lejos. Si A y B (fig. 3) son los jalones extremos, para determinar un jalon intermedio nos colocaremos fuera de la línea AB, de modo que el jalon B quede oculto por el jalon A, y se hace colocar un jalon C entre estos dos puntos, de modo que esté igualmente oculto por el jalon A.

15. Algunas veces hay necesidad de prolongar una recta ya trazada. Si se opera con la regla, basta colocarla de un modo que una parte de uno de sus bordes coincida con la recta trazada; la otra parte del mismo borde determina la prolongacion de esta recta. Con la cuerda la operacion es análoga. Si se trata de prolongar una recta jaloneada cuyos puntos A y C sean los últimos jalones, colocándose en el punto A de modo que el jalon C esté cubierto, se hace plantar un jalon B mas lejos que el jalon C, de modo que el jalon B esté tambien cubierto por el jalon A. El punto B está sobre la prolongacion de AC.

16. La *distancia* entre dos puntos es la longitud de la recta que los une. Las longitudes son susceptibles de sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse como las demás magnitudes.

Para hallar la suma de dos longitudes se tira una recta indefinida XY (fig. 4) y se marca un punto A; so-

Fig. 4.



bre esta recta y partiendo del punto A, tómese con el compás una distancia AB igual á una de las longitudes propuestas, y luego, partiendo de B y en el mismo sentido, una distancia BC igual á la segunda longitud propuesta; la distancia AC será la suma pedida.

Para determinar la diferencia entre dos longitudes dadas, tómese sobre la recta XY, partiendo desde el punto A, una distancia AC igual á la mayor longitud propuesta, y despues partiendo del punto C, pero en sentido contrario, una distancia CB igual á la mas pequeña; la distancia AB será la diferencia pedida.

Para multiplicar una longitud dada por un número entero cualquiera, 5 por ejemplo, basta colocar sobre la recta XY, partiendo desde el punto A y siempre en la misma direccion, 5 distancias iguales á la longitud dada: la distancia entre la extremidad de la quinta abertura de compás y el punto de partida A, será el producto pedido.

Mas adelante veremos el modo de dividir una longitud dada en partes iguales.

17. *Medir* la longitud de una recta es buscar su relacion con otra longitud tomada por unidad. Para hacer esta comparacion, basta colocar la unidad sobre la recta que se ha de medir tantas veces como sea posible. Si queda un resto se evalua con una unidad mas pequeña que tenga con la unidad principal una relacion simple. Si esta segunda operacion da todavía un resto, se evalua por medio de otra unidad todavía mas pequeña; y así sucesivamente, hasta hallar un resto inapreciable, lo que sucede siempre en la práctica.

Por el contrario, para medir distancias considerables se hace uso de múltiplos de la unidad principal.

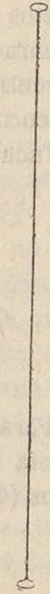
En España, en Francia y en varias otras naciones, la unidad lineal principal es el *metro*, ó sea la diezmillonésima parte del cuarto del meridiano terrestre. Se subdivide en 10 *decímetros* ó décimos de metro; cada decímetro en 10 *centímetros* ó céntimos de metro; cada centímetro en 10 *milímetros* ó milésimos de metro.

Una longitud de 10 metros forma un *decámetro;* 10 decámetros ó 100 metros hacen un *hectómetro;* 10 hectómetros ó 1,000 metros un *kilómetro;* 10 kilómetros ó

10,000 metros un *miriámetro*. Estas dos últimas unidades sirven para medir distancias geográficas.

En Agrimensura se hace uso de la *cadena de agrimensor* (fig. 5), que se compone de 50 eslabones rectilíneos de dos decímetros cada uno, y por consiguiente de un decámetro de longitud. En las construcciones se emplea una regla de dos metros de longitud dividida en decímetros y centímetros (y á la cual se da el nombre de *doble metro*). En el dibujo lineal es mas cómodo adoptar el *doble decímetro* dividido en centímetros y milímetros, y cortado á bisel de modo que un borde pueda coincidir con la línea que se debe medir.

Fig. 5.



18. Las longitudes evaluadas en unidades y partes de unidad son números concretos con los cuales se pueden efectuar todas las operaciones aritméticas. Para obtener gráficamente el resultado, no hay mas que llevar sobre una línea indefinida el número de unidades y partes de unidad que exprese este resultado.

Si, por ejemplo, se quiere tomar la quinta parte de una longitud dada, se mide primero esta longitud. Supongamos que sea igual á $8^m,375$; se toma el quinto de este número, ó sea $1^m,675$; se lleva sobre una recta indefinida 1 metro, luego 6 decímetros, en seguida 7 centímetros, y por último 5 milímetros.

Para obtener la relacion entre dos longitudes, se las mide y se busca la relacion de los dos números obtenidos. Si, por ejemplo, estas dos longitudes están expresadas por $1^m,855$ y $2^m,597$ su relacion será la de 1855 á

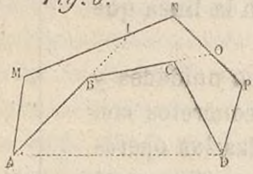
2597, ó sea de 5 á 7 (dividiendo estos dos números por 371 que es su máximo comun divisor.)

§ II. De las líneas quebradas.

19. Una línea quebrada plana se llama *convexa* cuando una recta no puede cortarla mas que en dos puntos por mucho que se prolongue. Tal es la línea quebrada ABCD (fig. 6.) La línea quebrada ABCDP, por el contrario, no es convexa, porque una sola recta puede encontrar los tres lados AB, CD y DP.

Teorema. — *Si de un punto* A *á otro* D (fig. 6) *y de un mismo lado de la recta* AD, *se trazan dos líneas quebradas convexas* ABCD *y* AMNPD, *de las cuales la una encierra la otra, la línea quebrada externa ó envolvente será siempre mas larga que la interna ó envuelta.*

Fig. 6.



Para demostrarlo prolonguemos AB hasta I, y BC hasta O; por la definicion de la línea recta tendremos (4):

$$AB + BI < AM + MI,$$
$$BC + CO < BI + IN + NO,$$
$$CD < CO + OP + PD.$$

Sumando estas desigualdades miembro á miembro (lo que puede hacerse puesto que son de una misma especie), suprimiendo los términos BI y CO, que entran en cada uno de los dos miembros, y observando que MN es igual á MI + IN y NP lo es á NO + OP, tendremos:

$$AB + BC + CD < AM + MN + NP + PD;$$

que es lo que se trataba de demostrar.

Corolario. —Siendo la demostracion independiente del número y de la magnitud de los lados, la proposicion puede hacerse extensiva á las líneas quebradas de un número infinito de lados é infinitamente pequeños; es decir, á las líneas curvas convexas. En este caso *la curva externa ó envolvente es siempre mayor que la interna ó envuelta.*

§ III. Del círculo.

20. *Se llama* circunferencia de círculo *á una curva plana cuyos puntos están igualmente distantes de otro interior llamado centro.*

La palabra círculo, rigurosamente hablando, no se aplica mas que á la porcion de plano limitado por la circunferencia; sin embargo, para abreviar se da muchas veces el nombre de círculo á la circunferencia. En este caso, lo que precede ó sigue indicará si se trata de la curva ó del espacio.

La figura 7 representa un círculo. El punto O es su *centro*. Las rectas OA, OB, OC, etc., dirigidas desde el centro á diferentes puntos de la circunferencia, se llaman *radios*. Segun la misma definicion del círculo *todos los radios son iguales*.

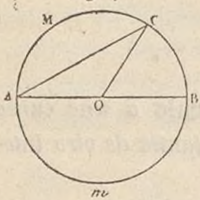
Toda recta, como AB, que pasa por el centro y termina por ambos extremos en la circunferencia, se llama *diámetro*. Todo diámetro es duplo del radio, y por lo tanto *todos los diámetros son iguales*.

Un círculo se indica por su radio, por su diámetro ó por su centro; así es que se dice el círculo OA, el círculo AB, ó el círculo O.

Sabido es cómo se traza un círculo por medio del compás. Sobre el terreno se emplea, en lugar del compás, una cuerda tendida y fija por uno de sus extremos al centro, y llevando en el otro una estaca que sirve para trazar la curva.

21. Teorema.. — *Todo diámetro* AB (fig. 7) *divide la circunferencia en dos partes iguales.*

Fig. 7.



En efecto, si se concibe que la figura se dobla por la línea AB, y que su parte inferior A*m*B venga á aplicarse sobre la superior ACB, las dos partes deben coincidir en toda su extension, porque de lo contrario todos sus puntos no equidistarian del centro.

22. Toda porcion de circunferencia, como AMC, se llama *arco* de círculo; la recta AC, que une los dos extremos del arco, se llama su *cuerda*. Se dice que la cuerda *subtiende* el arco, ó que este está *subtendido* por la cuerda.

Toda cuerda, como AC, *que no pasa por el centro, divide la circunferencia en dos partes desiguales;* porque una de ellas A*m*BC se compone de una semicircunferencia, mas el arco BC; y la otra AMB es igual á una media circunferencia AMCB menos el mismo arco BC.

Esta consecuencia demuestra la recíproca de la proposicion del núm. **21**; es decir, que *toda cuerda que divide la circunferencia en dos partes iguales es un diámetro.*

La misma cuerda AC subtiende á la vez dos arcos, AMC y A*m*BC. Cuando se habla de un arco subtendido por una cuerda, se entiende siempre que se trata del menor, á menos que no se indique de un modo esplí cito lo contrario.

23. Teorema. — *Toda cuerda* AC (fig. 7) *es mas pequeña que el diámetro* AB. Pues si se traza el radio OC, tendremos :

$$AC < AO + OC$$

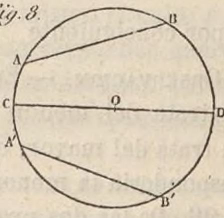
y reemplazando el radio OC por su igual OB, resulta :

$$AC < AO + OB \text{ ó bien } AC < AB.$$

24. Teorema. — *En un mismo circulo, dos arcos iguales* AB, A'B' (fig. 8) *están subtendidos por cuerdas iguales.*

En efecto, sean AB y A'B' (fig. 8) los dos arcos iguales, tracemos por el punto medio C del arco AA' un diámetro CD, y dóblese la figura por dicho diámetro; las dos semicircunferencias coincidirán. El punto A' caerá sobre A por ser los arcos CA' y CA iguales; y como los arcos A'B' y AB son tambien iguales, el punto B' caerá sobre B; luego las rectas AB y A'B' que tienen los extremos comunes coincidirán y serán iguales.

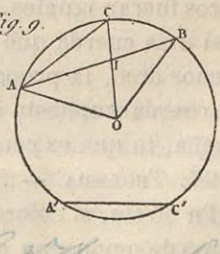
Fig. 8.



25. Teorema. — *En una misma circunferencia, á mayor arco corresponde mayor cuerda.*

Sea el arco AB (fig. 9) mayor que el arco A'C'; vamos á demostrar que la cuerda AB es mayor que la cuerda A'B'. Para demostrarlo, tomemos el arco AC igual á A'C'; su cuerda AC será igual á A'C' en virtud del teorema anterior. Tirando los radios OB y OC,

Fig. 9.



este último cortará la cuerda AB en un punto I, y tendremos :

$$AI + IC > AC$$
$$OI + IB > OB.$$

Sumando estas dos desigualdades miembro á miembro, y observando que $AI + IB$ es igual á AB, y $OI + IC$ es igual á OC, tendremos :

$$AB + OC > AC + OB$$

y como OC y OB son iguales, se pueden quit r de ambos miembros y tendremos :

$$AB > AC$$

y por consiguiente $AB > A'C'$.

Observacion. — En esta proposicion se entiende que se trata del menor arco subtendido por la cuerda. Si se trata del mayor, es fácil ver que al mayor arco corresponderia la menor cuerda.

26. De las dos proposiciones precedentes se deducen fácilmente sus *recíprocos*. Así pues,

Dos cuerdas iguales subtienden arcos iguales; porque si los arcos fuesen desiguales, sus cuerdas lo serian tambien. (**25**)

A mayor cuerda corresponde mayor arco; porque si los arcos fueran iguales, las cuerdas lo serian tambien (**24**), y si á la cuerda que se supone mayor correspondiese menor arco, la proposicion del nº **25** demostraria que la cuerda supuesta mayor, es realmente la mas pequeña, lo que es contrario á la suposicion.

27. Teorema. — *Dos círculos de igual radio son iguales.*

En efecto, si colocamos los dos círculos uno sobre el otro, de modo que sus centros coincidan, las dos circunferencias coincidirán tambien, pues de lo contrario tendriamos puntos de la circunferencia que no estarian á igual distancia del centro.

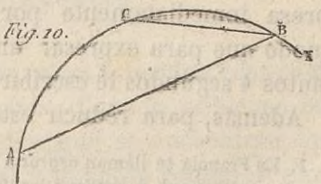
Observaciones. — I. Cuando dos circunferencias de igual radio están colocadas de modo que sus centros coincidan, si se las hace girar en cualquier sentido en su plano y al rededor de su centro, todas sus partes coincidirán durante el movimiento. El círculo es la única curva que tiene esta propiedad.

II. Las proposiciones de los números **24**, **25** y **26** se aplican á los arcos tomados sobre circunferencias distintas, pero de igual radio.

28. Acabamos de ver que en un mismo círculo, ó en círculos iguales á arcos iguales, corresponden cuerdas iguales y recíprocamente. Esta consideracion permite sumar, restar, etc., arcos de un mismo radio como si se tratase de líneas rectas.

Para hallar, por ejemplo, la diferencia de dos arcos dados de igual radio, se describe con este mismo radio un arco indefinido AX (fig. 10.) Sobre este arco indefinido y partiendo del punto A, se pone una abertura de compás AB igual á la cuerda del mayor de los dos arcos dados; desde el punto B y en sentido contrario, se coloca una abertura de compás BC igual á la cuerda del otro arco dado. Los arcos AB y BC son respectivamente iguales á los dos arcos dados, puesto que tienen las cuerdas iguales á las de dichos arcos, y están trazados con el mismo radio: luego el arco AC será igual á su diferencia.

Fig. 10.



Para hacer un arco un cierto número de veces mayor, basta colocar sobre un arco indefinido, descrito con el mismo radio, un número de aberturas de compás iguales á la cuerda del arco dado. Mas adelante veremos la division de los arcos en partes iguales.

29. Muchas veces se tiene necesidad de comparar un arco con la circunferencia de la cual forma parte. Para esto se supone la circunferencia dividida en 360 partes iguales que se llaman *grados*; cada grado en 60 partes iguales llamadas *minutos*; y cada minuto en 60 partes iguales llamadas *segundos*. Para evaluar un arco en partes de la circunferencia á la cual pertenece, se enuncia el número de grados, minutos, segundos (y fracciones de segundo) de que se compone. Se dice, por ejemplo, un arco de 60 grados 51 minutos y 28 segundos, lo que se escribe del modo siguiente : $60° 51' 28''$.

La cuarta parte de la circunferencia ó 90 grados se llama *cuadrante*.

30. En el sistema decimal el cuadrante se divide en 100 *grados*, cada grado en 100 *minutos*, y cada minuto en 100 *segundos*[1]. Un arco evaluado de este modo se expresa inmediatamente por un número decimal ; de modo que para expresar un arco de 72 grados 16 minutos 4 segundos le escribiremos : $72^{gr},1604$.

Además, para reducir este número á otro de unida-

1. En Francia se llaman *degrés* á los grados de la primera division ó sea la *sexagesimal*, y *grades* á los de segunda ó *centesimal*. En España cuando se enuncian simplemente grados, minutos y segundos, se entiende siempre que nos referimos á la division sexagesimal. Si queremos expresar la medida de un ángulo en grados de la segunda division, debemos añadir el adjetivo *centesimal* á la palabra grado, minuto ó segundo. Así diremos, por ejemplo, un ángulo de 27 grados 38 minutos *centesimales*. Si no se añade este adjetivo *centesimal* se entiende que los $27° 38'$ se refieren á la division *sexagesimal*.

des inferiores, basta correr la coma de dos lugares hácia derecha; así tendremos 72^{gr}, 1604 igual á 7216^{min},04 ó 721604 segundos.

A pesar de las grandes ventajas de la division centesimal, la antigua ó sexagesimal es la única que se usa.

Para reducir un número de grados centesimales á grados sexagesimales basta multiplicarles por $\frac{9}{10}$, puesto que 90^0 sexagesimales equivalen á 100^0 centesimales, ó 9 de los primeros equivalen á 10 de los segundos. Por ejemplo, 16^{gr} 25 centesimales multiplicados por $\frac{9}{10}$ dan 14^0, 625 ó $\frac{14625}{1000}$ de grado sexagesimal, ó sea $14^0\ 37'\ 30''$.

Recíprocamente, para reducir grados sexagesimales á grados centesimales basta multiplicar por $\frac{10}{9}$. Por ejemplo, $14^0\ 37'\ 30''$ equivalen á $14^0\ 2250''$ ó $14^0\ \frac{2250}{3600}$ puesto que un grado vale $3600''$. Reduciendo esta fraccion á decimal, encontramos $14^0 625$ que multiplicados por $\frac{10}{9}$ nos da 16^0, 25 centesimales.

CAPITULO II

DE LOS ÁNGULOS

31. Hemos visto que dos rectas coinciden cuando tienen dos puntos comunes (**13**). Cuando no tienen mas que un punto comun, se dice que se encuentran, que concurren ó que se cortan; y el punto comun se llama su punto de encuentro, de concurso ó de *interseccion*.

Se llama *ángulo* la mayor ó menor abertura de dos rectas que se encuentran : estas rectas son los *lados* del ángulo, y su punto comun es el *vértice*.

Para designar un ángulo basta á veces indicar el vértice; y así es que se dice el ángulo A (fig. 11). Pero

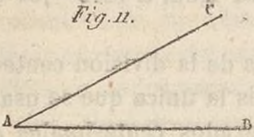


Fig. 11.

como sucede á menudo que varios ángulos tienen el mismo vértice, se ha convenido en designar cada uno de ellos con tres letras, de las cuales una es la del vértice, y las otras dos se toman sobre los lados, cuidándose empero de que la del vértice esté en medio. Así es que se dice indistintamente el ángulo BAC ó el ángulo CAB.

En la consideracion de los ángulos no se debe atender á la longitud de sus lados.

Los ángulos son cantidades susceptibles de sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse como las otras cantidades. Así es que el ángulo AOC

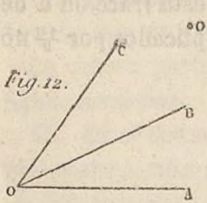


Fig. 12.

(fig. 12) es la *suma* de los ángulos AOB y BOC; el ángulo AOB es la *diferencia* de los ángulos AOC y BOC: si los ángulos AOB y BOC son iguales, el ángulo AOC es el *producto* de AOB por 2; y AOB es por el contrario el *cociente* de AOC por 2.

32. Teorema. — *Dos ángulos cualesquiera* AOB, CO'D (fig. 13) *están en la misma relacion que sus arcos* AB *y* CD *descritos desde su vértice, tomado como centro, con un mismo radio.*

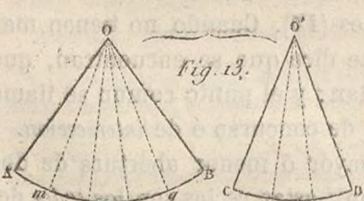


Fig. 13.

Evaluemos los arcos AB y CD por medio de una unidad bastante pequeña á fin de que la contengan un número exacto de veces, lo que en la práctica llegará siempre á suceder. Para fijar las ideas supongamos que AB contiene 5 veces la unidad, y que CD la contiene 3; estos dos arcos estarán entre sí como 5 y 3.

Despues de haber dividido estos arcos en partes iguales á la unidad, tracemos por todos los puntos de division m, n, p, q, r, s, los radios mO, nO, pO, qO, rO′, sO′; y decimos que los ángulos parciales AOm, mOn, etc., CO′r, rO′s, etc., son iguales. En efecto, consideremos, por ejemplo, los dos ángulos mOn y rO′s : si se hacen coincidir las dos circunferencias O y O′ que tienen un mismo radio, y se las hace girar al rededor de su centro, que se ha hecho comun, hasta que los arcos iguales mn y rs coincidan, los radios mO, y rO coincidirán tambien, puesto que tendrán las mismas extremidades, y lo mismo sucederá á los radios nO y sO′; luego los ángulos mOn y rO′s coincidirán y serán por lo tanto iguales. Del mismo modo se demostrará que un ángulo parcial cualquiera de los que forman AOB, es igual á cualquiera de los parciales que forman CO′D; luego todos los ángulos parciales son iguales : y como AOB contiene cinco ángulos parciales, y CO′D contiene tres; los ángulos AOB y CO′D están en la razon de 5 á 3; es decir, en la misma relacion que los arcos AB y CD; y se puede escribir :

$$\mathrm{AOB} : \mathrm{CO'D} = \mathrm{AB} : \mathrm{CD}.$$

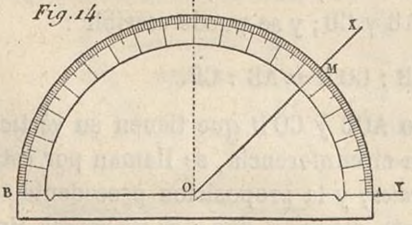
Los ángulos como AOB y CO′D que tienen su vértice en el centro de una circunferencia, se llaman por esta razon ángulos *centrales;* y la proposicion precedente se enuncia generalmente diciendo que : *en un mismo círculo, ó en círculos iguales, los ángulos centrales son proporcionales á los arcos comprendidos entre sus lados.*

33. Del mismo teorema se deduce que *todo ángulo en el centro tiene por medida el arco comprendido entre sus lados* : es decir, que si se toma por unidad angular el ángulo central que corresponda á la unidad de arco, la relacion de un ángulo central cualquiera con su unidad de medida, es la misma que la de un arco comprendido entre sus lados con su unidad de arco.

Se toma por unidad angular el ángulo central que corresponde al cuadrante, y se le da el nombre de ángulo *recto*. El ángulo recto se divide en 90 partes que se llaman *grados*, correspondiendo por lo tanto al arco de un grado. Cada ángulo de un grado se subdivide en 60 *minutos*, y cada uno corresponde á un arco de un minuto; y por último, cada ángulo de un minuto se subdivide en 60 *segundos*, correspondiendo cada uno á un arco de un segundo. Segun esto, un ángulo de 68° 17′ 30″ es el ángulo central que comprende entre sus lados un arco de 68° 17′ 30″.

34. Para medir los ángulos sobre una superficie de poca extension se emplea un instrumento llamado *transportador* ó *semicírculo graduado*, el cual se compone de un semicírculo de cobre, talco ó madera (fig. 14) cuya circunferencia llamada *limbo* está dividida en grados.

Fig. 14.



Sea XOY el ángulo que se ha de medir. Se coloca el instrumento sobre el ángulo de modo que su centro caiga sobre el vértice O, y que el diámetro AB coincida con la direccion OY de uno de los lados del ángulo. El lado OX cortará á la circunferencia exterior del trasportador en un cierto punto M, y se nota el número de grados comprendidos entre los puntos A y M. El número de grados es la medida del arco AM, y por lo tanto la del ángulo propuesto.

Sobre el terreno se hace uso de un instrumento llamado *grafómetro* (fig. 15) el cual se coloca sobre un trípode. Consiste en un semicírculo de metal graduado, provisto en su parte inferior de una articulacion que permite darle la posicion que se desea. En los extremos de su diámetro AB hay dos pequeñas aberturas llamadas *pínulas*, las cuales están divididas verticalmente por un hilo delgado. En el centro O está un quicio sobre el cual gira, con roce suave, una regla CD semejante á la regla AB y provista, como ella, de dos pínulas; esta regla se llama *alidada.*

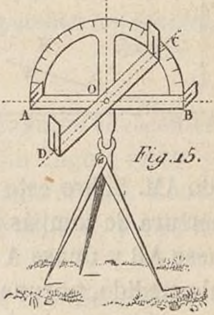


Fig. 15.

Para medir un ángulo por medio del grafómetro se coloca su centro sobre el vértice del ángulo y se coloca el plano del limbo horizontalmente. (Mas adelante veremos cómo puede efectuarse esta operacion.) Se dirige la alidada fija ó sea el diámetro AB segun uno de los lados del ángulo, y la alidada móvil en la direccion del otro lado; los hilos de las pínulas hacen el oficio de jalones. Hecho esto, no hay mas que leer sobre el limbo el número de grados comprendidos entre las dos alidadas.

Cuando se debe operar sobre extensiones de terreno algo considerables, se reemplazan las dos pínulas por dos anteojos puestos el uno sobre la alidada fija, y el otro sobre la móvil.

35. Problema. — *Construir un ángulo igual á otro ángulo dado*, CID (fig. 16).

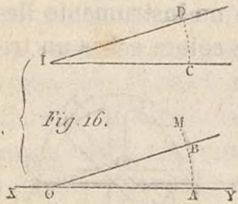


Fig. 16.

Sea XY la recta dada, y O el punto en donde debe construirse un ángulo igual á CID.

Desde el punto I, como centro, con un radio arbitrario, descríbase el arco CD; y desde el punto O, como centro y con el mismo radio descríbase el arco indefinido AM. Sobre este arco, y desde el punto A con una abertura de compás igual á la cuerda del arco CD, colóquese AB y únase A con B. El ángulo AOB será el ángulo pedido, porque los arcos AB y CD son iguales por ser descritos con el mismo radio, y tener sus cuerdas iguales; y por consiguiente, los ángulos en el centro AOB y CID correspondientes á estos arcos, son, pues, iguales tambien.

Advertencia. — Repitiendo esta construccion es fácil hacer un ángulo igual á la suma ó á la diferencia de dos ángulos dados; y tambien hacer un ángulo dado un cierto número de veces mayor.

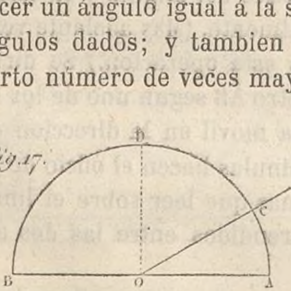


Fig. 17.

36. Cuando una recta OC (fig. 17) encuentra otra AB, de modo que forma con ella y á un mismo lado dos ángulos AOC y BOC, estos ángulos se llaman *adyacentes*.

TEOREMA. — *La suma de dos ángulos adyacentes es igual á dos rectos.*

En efecto, desde el vértice O de estos ángulos, como centro, descríbase con un radio cualquiera la semicircunferencia ACB : los ángulos tendrán por medida los arcos AC y BC, cuya suma es igual á dos cuadrantes. La suma de los ángulos propuestos equivale, pues, á dos rectos (55).

COROLARIO. — *Cuando dos ángulos adyacentes son iguales, estos ángulos son rectos.*

Tales son AOD y BOD.

OBSERVACIONES. — 1ª Cuando dos ángulos adyacentes son desiguales, el uno es mayor que un ángulo recto, y el otro mas pequeño. El primero se llama ángulo *obtuso*, y el segundo *agudo*. BOC es un ángulo obtuso, y AOC es un ángulo agudo.

2ª Dos ángulos cuya suma es igual á dos rectos se llaman *suplementarios*; y cada uno se llama *suplemento* del otro.

Dos ángulos adyacentes son suplementarios.

Dado un ángulo es fácil hallar su suplemento. Si se pide, por ejemplo, el suplemento de BOC, no hay mas que prolongar el lado BO, y el ángulo AOC obtenido de este modo será el suplemento pedido.

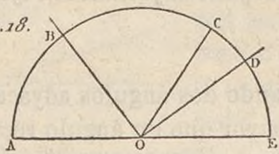
Si se da la medida del ángulo, es fácil encontrar la de su suplemento, sabiendo que la suma de los dos es igual á 180°. Si un ángulo, por ejemplo, es de 31° 47′, el otro será de 180° menos 31° 47′, es decir de 148° 13′.

57. RECÍPROCA DEL TEOREMA PRECEDENTE. — *Si dos ángulos* AOC y BOC (fig. 17) *que tienen el mismo vértice* O *y un lado comun* OC *son suplementarios, sus lados exteriores* AO y BO *están en línea recta.*

Porque, si del punto O como centro, con un radio cualquiera se describe un arco ACB, este arco equivaldrá á una semicircunferencia, puesto que la suma de los ángulos AOC y BOC equivalen á dos rectos; luego la cuerda que unirá los puntos A y B será un diámetro (**22**), y pasará por consiguiente por el centro O; luego AO y BO están en línea recta.

38. TEOREMA. — *La suma de todos los ángulos sucesivos* AOB, BOC, COD, DOE (fig. 18) *construidos á un mismo lado de una recta* AE, *y teniendo por vértice un mismo punto* O *de esta recta, es igual á dos ángulos rectos.*

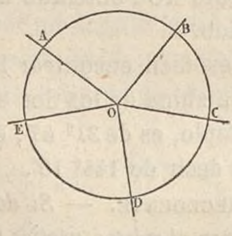
Fig. 18.



Porque, si desde el punto O como centro, y con un radio cualquiera, se describe una semicircunferencia ABCDE, los ángulos AOB, BOC, COD, DOE, tendrán respectivamente por medida los arcos AB, BC, CD, DE, cuya suma es igual á dos cuadrantes. La suma de estos ángulos es, por lo tanto, igual á dos rectos.

39. TEOREMA. — *La suma de todos los ángulos sucesivos* AOB, BOC, COD, DOE, EOA (fig. 19) *construidos al rededor de un mismo punto* O, *equivalen á cuatro ángulos rectos.*

Fig. 19.



En efecto, si desde el punto O como centro, con un radio cualquiera, se describe una circunferencia, los ángulos tendrán respectivamente por medida los arcos AB, BC, CD, DE, EA, cuya suma es igual á cuatro cuadrantes; la suma de estos ángulos equivale, pues, á cuatro rectos.

40. Teorema. — *Cuando dos rectas* AB y CD (fig. 20) *se cortan mútuamente, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

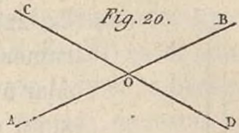


Fig. 20.

En efecto, la suma de los ángulos AOC y COB equivalen á dos ángulos rectos (36); y lo mismo sucede con la suma de los ángulos COB y BOD. Siendo estas dos sumas iguales se puede escribir :

$$AOC + COB = COB + BOD.$$

Suprimiendo en ambos miembros COB, resulta

$$AOC = BOD.$$

Del mismo modo se demuestra que COB es igual á AOD.

CAPITULO III

PROPIEDADES RELATIVAS Á LAS PERPENDICULARES

§ I. De las perpendiculares.

41. Dos rectas se llaman *perpendiculares* entre sí cuando forman un ángulo recto. Tales son las rectas AB y CD (fig. 21) que forman el ángulo recto AOC.

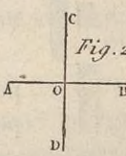


Fig. 21.

En este caso es fácil de comprender que los otros tres ángulos formados por estas rectas son tambien rectos. Porque, si AOC es recto, lo será BOC por ser su suplemento (36); y los ángulos BOD y AOD son respectivamente iguales á los primeros por serles opuestos por el vértice (40).

42. Mas adelante indicaremos el medio rigoroso para trazar perpendiculares entre sí. En la práctica se hace uso de un instrumento llamado *escuadra*. Se compone de dos reglas cuyos bordes se encuentran á ángulo recto (fig. 22). Cuando con ayuda de este instrumento, se quiere llevar una perpendicular á una recta, y que pase por un punto dado fuera de la recta, ó sobre la recta misma, se hace coincidir con la recta el borde de una buena regla, se apoya contra este borde uno de los lados de la escuadra y se la hace resbalar sobre dicha regla hasta que el otro lado pase por el punto dado; entonces se emplea de este lado como regla para trazar la perpendicular pedida.

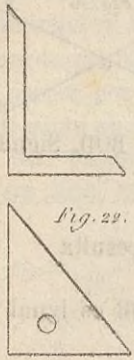


Fig. 22.

Por falta de escuadra y sobre todo en dibujos de pequeñas dimensiones, se puede emplear una hoja de papel doblado cuidadosamente en cuatro pliegues.

Tambien se pueden trazar perpendiculares por medio del semicírculo graduado, puesto que este instrumento permite construir ángulos de 90°.

43. Sobre el terreno se pueden levantar perpendiculares por medio del grafómetro; pero mas comunmente se emplea la *escuadra de agrimensores* (fig. 23). La parte esencial de este instrumento consiste en cuatro pínulas colocadas en las extremidades de dos rectas que se cortan á ángulo recto; estas pínulas están generalmente practicadas en una especie de caja redonda ú octogonal. Está caja se articula sobre su eje, terminado por un pi-

Fig. 23.

quete de hierro por medio del cual se fija el instrumento sobre el terreno.

Si se quiere, por medio de este instrumento, *levantar* una perpendicular á la recta AB (fig. 21) en el punto O, se coloca la escuadra en el punto O, y se la hace girar hasta que la direccion de dos pínulas opuestas sea la de la línea AB; la direccion de las otras dos pínulas es la de la perpendicular pedida, y no hay mas que colocar un jalon en esta direccion.

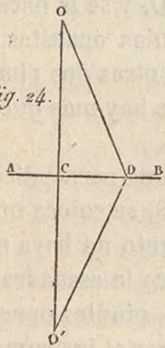
Si por el contrario se quiere *bajar* una perpendicular desde un punto dado C á una recta AB, se coloca un jalon en el punto C, si es que en este punto no haya nada que pueda servir de objetivo. Se coloca la escuadra sobre la direccion AB, de modo que dos pínulas opuestas estén en esta direccion, y se hace correr el instrumento en esta direccion hasta que mirando por las otras dos pínulas se vea el jalon C cortado longitudinalmente por los hilos reunidos de estas pínulas. El punto O, en donde se halla la escuadra, pertenece á la perpendicular pedida, la cual se halla entonces determinada por los dos puntos C y O.

44. Teorema. —*Por un mismo punto no se puede trazar á una recta mas que una perpendicular.*

Supongamos que se trata de un punto O (fig. 17) tomado sobre una recta AB. Del punto O como centro, y con un radio cualquiera, descríbase una semi-circunferencia. Si OD es una recta perpendicular á AB, los ángulos AOD y BOD serán iguales; y por consiguiente lo serán tambien los arcos AD y BD, y el punto D estará en medio de la semi-circunferencia ADB; y como no hay mas que un punto D que pueda estar en medio de la semi-circunferencia, y del punto D al punto O no se puede trazar mas que una recta, resulta que solo hay una recta que pase por D y O.

Supongamos en segundo lugar que se trata de un punto O (fig. 24) situado fuera de la recta AB, y sean, si es posible, OC y OD dos perpendiculares á esta recta. Hagamos girar la figura COD alrededor de AB hasta que venga á colocarse en CO'D. El ángulo O'CD será igual á OCD, y por consiguiente recto, porque se ha supuesto que OC es perpendicular á AB. Siendo estos dos ángulos suplementarios, sus lados externos O'C y OC están en línea recta (37). Y como podríamos hacer el mismo raciocinio con O'D y OD, resultaria que del punto O al punto O' se podrian trazar dos líneas rectas, lo que es imposible. Luego desde el punto O no se puede trazar á la recta AB mas que una perpendicular.

Fig. 24.



45. Toda recta, como OD, se llama *oblicua* con relacion á la perpendicular OC.

TEOREMA. — *Si por un punto* O (fig. 24) *fuera de la recta* AB, *se traza á esta recta una perpendicular* OC *y una oblicua* OD, *la perpendicular será mas corta que la oblicua.*

En efecto, si se repite el movimiento indicado en la demostracion precedente, se verá que O'C = OC, que O'D = OD, y que OCO' es una línea recta. Como esta recta OO' es mas corta que la línea quebrada OD + DO, tendremos que OC, que es la mitad de OO', será tambien mas corta que la línea OD que es la mitad de OD + DO'.

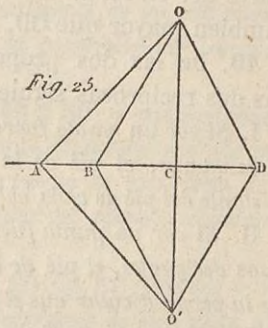
COROLARIO I. — Recíprocamente, *si una recta* OC *es la* *mas corta que se puede trazar desde el punto* O *á la recta* AB, *será perpendicular á esta recta.*

Porque, de no ser así, se podria bajar desde el punto O una perpendicular á AB, y en virtud del teorema anterior, esta perpendicular seria mas corta que OC, lo que es contrario á la hipótesis.

Corolario II. — *La mas corta distancia de un punto á una recta, es la perpendicular bajada desde este punto á la recta.*

Advertencia. —El punto C se llama *pié* de la perpendicular OC, y el punto D *pié* de la oblícua OD.

46. Teorema. —*Si por un punto* O (fig. 25) *fuera de una recta* AD *se trazan dos oblícuas* OB *y* OD *tales que el pié de la perpendicular* CO *esté igualmente distante del pié de cada oblícua, estas oblícuas son iguales.*



En efecto, si se hace girar la figura OCD al rededor de OC, la recta CD caerá sobre CB por ser los ángulos OCD y OCB iguales por rectos; y como CD = CB por hipótesis, el punto D caerá sobre B. Las rectas OD y OB que tienen las extremidades comunes coincidirán ; luego son iguales.

47. Teorema. —*Si por un punto* O (fig. 25) *fuera de la recta* AD *se trazan dos oblícuas cualesquiera, la que se separe mas del pié de la perpendicular es la mayor.*

Supongamos primero que se trata de las oblícuas OA y OB situadas de un mismo lado de la perpendicular OC. Hagamos girar la figura sobre AD hasta que el punto O venga á colocarse en O'; y tendremos O'B = OB y O'A=OA. Como la línea quebrada envolvente ó externa OA+AO' es mas larga que la línea quebrada envuelta ó interna OB+BO' (19), resulta que OA mitad de OA+AO' es mayor que OB mitad de OB+BO'.

Supongamos en segundo lugar que se trate de las oblícuas OA y OD situadas una á cada lado de la perpendicular, y admitamos que CA sea mayor que CB. Tomemos sobre la recta CB=CD y unamos los puntos O y B. Esta oblícua OB será igual á OD en virtud de la proposicion precedente; pero en virtud de la primera parte del teorema OA es mayor que OB; luego OA es tambien mayor que OD.

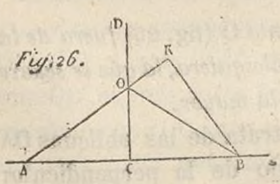
48. De las dos proposiciones precedentes resultan las dos recíprocas siguientes:

I. *Si por un punto fuera de una recta se trazan dos oblícuas iguales, el pié de la perpendicular estará igualmente distante del pié de cada oblícua.*

II. *Si por un punto fuera de una recta, se trazan dos oblícuas desiguales, el pié de la mayor se separará mas del pié de la perpendicular que el pié de la menor.*

49. Teorema.—*Todos los puntos de la perpendicular* CD (fig. 26) *levantada en el punto medio de la recta* AB *están igualmente distantes de los extremos de esta recta.*

Fig. 26.



Porque, sea O uno de estos puntos; si unimos O con A y B, las rectas OA y OB serán dos oblícuas iguales (46), pues CA=CB. Luego el punto O está á igual distancia de los extremos A y B.

50. Teorema.—*Todo punto* K (fig. 26) *situado fuera de la perpendicular* CD *levantada en el punto medio de*

la recta AB *dista desigualmente de los extremos de esta recta.*

Si se une K con A y B, una de estas rectas KA, por ejemplo, cortará la perpendicular en un punto O. Uniendo O con B, tendremos $KB < KO + OB$; y como OB es igual á OA en virtud del teorema que precede, se puede escribir $KB < KO + OA$, ó bien $KB < KA$.

51. De las dos proposiciones que preceden resultan las dos recíprocas siguientes:

I. *Todo punto equidistante de los extremos de una recta, pertenece á la perpendicular levantada en su punto medio.*

II. *Todo punto que diste desigualmente de los extremos de una recta, está situado fuera de la perpendicular levantada en su punto medio.*

Las proposiciones directas (49 y 50) y sus recíproca- (51) se reasumen ordinariamente diciendo que: *la perpendicular levantada en el punto medio de una recta es el lugar geométrico de todos los puntos del plano equidistantes de los extremos de esta recta.*

52. Teorema.—*Si una recta* CD (fig. 21) *tiene dos de sus puntos* C *y* D *equidistantes de los extremos de otra recta* AB, *la primera recta es perpendicular sobre el medio de la segunda.*

En efecto, los puntos C y D están igualmente distantes de los extremos de AB; luego pertenecen á la perpendicular levantada en su punto medio (51); y como dos puntos bastan para determinar una recta, esta perpendicular será la misma recta CD.

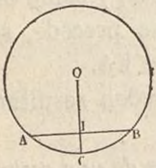
§ II. Propiedades del círculo que dependen de las perpendiculares.

53. Teorema.—*El punto medio de un arco, el de su*

cuerda y el centro del círculo están sobre una misma perpendicular á esta cuerda.

Sea C (fig. 27) el medio de un arco AB. Puesto que los arcos CA y CB son iguales, sus cuerdas lo serán tambien; el punto C está pues á igual distancia de los puntos A y B. Por otra parte, el punto O centro del círculo está igualmente distante de A y B. Si se traza la línea OC, esta recta tendrá dos de sus puntos á igual distancia de los extremos de la cuerda AB, y por consiguiente le será perpendicular en su punto medio (**52**).

Fig. 27.



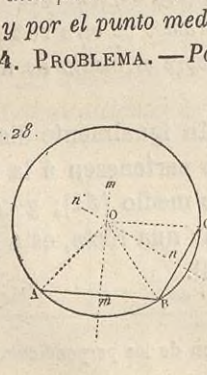
Corolario.—Por un mismo punto no se puede trazar mas que una perpendicular á una misma recta (**44**). De aquí resulta:

1° Que, *si del centro* O *de una circunferencia se baja una perpendicular á una cuerda* AB, *dividirá á la cuerda y al arco que subtiende en dos partes iguales.*

2° Que, *si se levanta una perpendicular en el punto medio* I *de una cuerda* AB, *esta perpendicular pasará por el centro, y por el punto medio del arco subtendido por la cuerda.*

54. Problema.—*Por tres puntos* A, B y C (fig. 28) *que no estén en línea recta, hacer pasar una circunferencia de círculo.*

Fig. 28.



Únase A con B y B con C; las rectas AB y BC serán dos cuerdas de la circunferencia pedida. En los puntos medios de estas cuerdas levántense las perpendiculares mm' y nn': estas perpendiculares pasarán por el centro (**53** corol. 2°) y se cortarán en dicho punto. Desde su punto de interseccion O, y con un radio igual á OA, descríbase una circunferencia, y pasará por los tres puntos A, B y C.

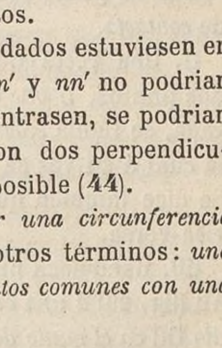
Fácilmente se puede comprender *a posteriori* lo que acabamos de exponer, si se observa que el punto O, por pertenecer á la perpendicular levantada en el punto medio de AB, está igualmente distante de A y de B; y perteneciendo tambien á la perpendicular levantada en medio de BC, equidista tambien de B y de C; de donde resulta que dicho punto está igualmente distante de los tres puntos A, B y C.

Corolario.—Para hallar el centro de un círculo ó de un arco dado, tómense tres puntos sobre este círculo ó sobre el arco, y determínese el centro de la circunferencia que pase por estos tres puntos.

Advertencia.—Si los tres puntos dados estuviesen en línea recta, las perpendiculares mm' y nn' no podrian encontrarse, porque si ellas se encontrasen, se podrian bajar desde el punto de interseccion dos perpendiculares sobre una recta, lo que es imposible (44).

Así pues, *es imposible hacer pasar una circunferencia por tres puntos en línea recta*. O, en otros términos: *una recta no puede tener mas que dos puntos comunes con una circunferencia.*

Fig. 29.



55. Teorema. — *Una recta* AB (fig. 29) *perpendicular á la extremidad de un radio* OC, *no puede tener mas que un punto comun con la circunferencia.*

Sea OD una recta cualquiera trazada desde el centro O á un punto D de la recta AB; esta recta OD, por ser oblícua, será mayor que la perpendicular OC. El punto D dista mas del centro que el punto C, y se halla por consiguiente situado fuera del círculo. Y como puede decirse otro tanto de cualquiera otro punto de la recta AB diferente de C, se sigue que la recta no puede tener con la circunferencia mas punto comun que el punto C.

Observaciones. I. —Una recta que *toca* de este modo á la circunferencia, es decir, que no tiene con ella mas que un punto comun, se llama *tangente* á esta circunferencia; y el teorema precedente puede enunciarse de este modo : *toda perpendicular en el extremo de un radio es tangente á la circunferencia.*

La circunferencia, á su vez, se llama *tangente* á la recta. Su punto comun se llama punto de *tangencia* ó de *contacto.*

II. Una recta que encuentra una circunferencia en dos puntos, ó en otros términos, una cuerda prolongada, se llama *secante* con relacion á esta circunferencia, la cual á su vez se llama *secante* con relacion á la recta. Se dice tambien que la recta *corta* la circunferencia y vice-versa.

56. Recíproca del teorema anterior. — *Toda tangente* AB (fig. 29) *á una circunferencia* O, *es perpendicular al radio* OC *en el punto de contacto.*

Pues, todo punto D de esta recta, diferente del punto C, estando situado fuera del círculo, el radio OC medirá la distancia mas corta desde el centro á la recta, y será por lo tanto perpendicular á esta recta (45 cor. 1°).

Corolario. — La comparacion de las dos proposiciones precedentes demuestra que, *por un punto tomado sobre una circunferencia, no se puede tirar mas que una tangente;*

y esta será la perpendicular levantada al extremo del radio que va al punto dado.

57. Problema.—*Por un punto fijo* A (fig. 30) *tomado fuera de una circunferencia* O, *trazar una tangente á esta circunferencia.*


Fig. 30.

Por el punto A y por el centro O trácese la recta AC. Desde el punto A como centro, y con un radio igual á OA descríbase un arco indefinido OE. Llevemos sobre este arco, y á partir del punto O, una abertura de compás OD igual al diámetro BC de la circunferencia dada, lo cual será siempre posible, porque OB, siendo menor que OA, BC que es el duplo de OB es menor que el duplo de OA, es decir, menor que el diámetro del círculo OA (25). Unase D con O y la recta DO cortará á la circunferencia dada en un punto I; la recta AI será la tangente pedida.

En efecto, siendo DO igual á BC, el radio OI es la mitad de DO; la recta AI trazada desde el centro A de la segunda circunferencia á I, punto medio de la cuerda DO, es perpendicular á esta cuerda (55) y por consiguiente perpendicular al extremo del radio OI de la circunferencia dada, y por lo tanto tangente á esta circunferencia.

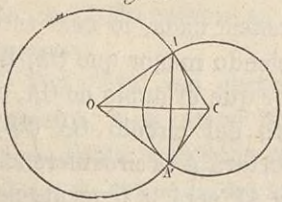
Advertencia.—Por la otra parte de AC se puede hacer una construccion igual, de modo que el problema admite dos soluciones AI y AI′.

§ III. De las circunferencias secantes y tangentes.

58. Dos circunferencias no pueden tener mas que dos puntos comunes sin coincidir; porque si tuviesen tres, la construccion del nº 54 hace ver que tendrian el mismo centro y el mismo radio. Dos circunferencias que solo tienen dos puntos comunes se llaman *secantes*; si no tienen mas que un punto comun se llaman *tangentes*, y el punto comun punto de *tangencia* ó de *contacto*.

59. Teorema. — *Si dos circunferencias* O *y* C (fig. 31) *tienen un punto comun* A *fuera de la línea* OC, *que une sus centros, han de tener necesariamente otro punto comun.*

Fig. 31.



En efecto, haciendo girar la figura OAC sobre OC, hasta que el punto A venga á colocarse en A′, tendremos evidentemente A′O igual AO, y por lo tanto el punto A′ pertenecerá á la circunferencia O; del mismo modo tendremos A′C = AC, luego el punto A′ pertenecerá á la circunferencia C. El punto A′ es por consiguiente un segundo punto comun á las dos circunferencias.

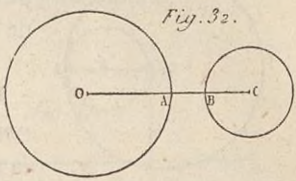
Advertencia. — *Si dos circunferencias* O *y* C *se cortan, la línea que une los centros* O *y* C *es perpendicular á la cuerda comun* AA′ *en su punto medio.*

Porque, la recta OC tiene dos puntos O y C equidistantes de los extremos AA′ (52).

Corolario. — *Si dos circunferencias se tocan, el punto de contacto está sobre la línea que une sus centros.*

Porque, si el punto comun estuviese situado fuera de la línea de los centros, habria un segundo punto comun; las circunferencias serian entonces secantes y no tangentes.

Fig. 32.



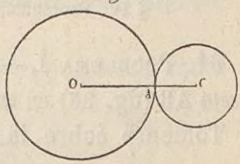
60. De lo que precede se deducen ciertos caracteres que sirven para apreciar la posicion relativa de dos circunferencias.

I. *Si dos circunferencias son externas una á otra* (fig. 32), *la distancia de los centros es mayor que la suma de sus radios.*

En efecto : $OC = OA + AB + BC$, y por lo tanto $OC > OA + BC$.

II. *Si dos circunferencias son* TANGENTES EXTERIORMENTE (fig. 33), *la distancia de sus centros es igual á la suma de sus radios.*

Fig. 33.



Porque estando situado el punto de contacto A sobre la línea de los centros (**59** cor.) $OC = OA + AC$.

III. *Si dos circunferencias son secantes* (fig. 31), *la distancia de los centros es menor que la suma de los radios, pero mayor que su diferencia.*

Porque en el triángulo OAC se tiene

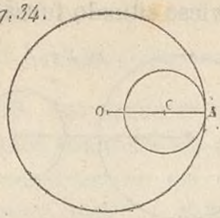
$$1^\circ \ OC < OA + AC \ (4),$$

$$y \ 2^\circ \ OA < OC + AC,$$

de donde resulta que $OA - AC < OC$.

IV. *Si dos circunferencias son* TANGENTES INTERIORMENTE (fig. 34), *la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios.*

Fig. 34.

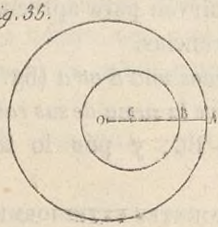


Porque, estando situado el punto de contacto sobre la línea de los centros, tendremos

$$OC = AC - OC.$$

V. *Si una de las dos circunferencias es interior á la otra* (fig. 35), *la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.*

Fig. 35.



En efecto,

$$OC = OA - BC - BA,$$

y por consiguiente

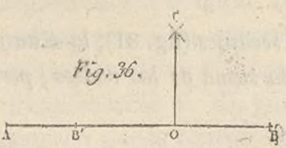
$$OC < OA - BC.$$

§ IV. Problemas relativos á las perpendiculares.

61. Problema I. — *Levantar una perpendicular á una recta* AB (fig. 36) *en un punto dado* O.

Tómense sobre la recta AB y desde el punto O dos longitudes iguales OB y OB′; desde los puntos B y B′ como centros, y con una abertura de compás mayor que OB, descríbanse dos arcos de círculo que se cortarán en un punto C (60); únanse los puntos C y O, y se tendrá la perpendicular pedida.

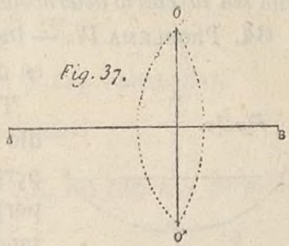
Fig. 36.



Porque, si se uniesen CB y CB′, estas distancias serian iguales; el punto C pertenece pues á la perpendicular levantada en el punto medio O de la recta BB′ (51); luego CO es esta perpendicular.

62. Problema II. — *Desde un punto* O (fig. 37) *fuera de una recta* AB, *bájese á esta una perpendicular.*

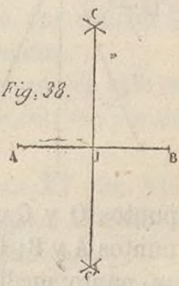
Fig. 37.



Desde el punto A como centro, y con una abertura de compás igual á AO, descríbase una circunferencia. Desde el punto B y con una abertura de compás igual á BO, descríbase una segunda circunferencia. Estas dos circunferencias que tienen un punto comun O, fuera de la línea que une sus centros, se cortarán en un segundo punto O′ (59); únanse OO′, y se tendrá la perpendicular pedida. Porque la recta AB tiene dos puntos A y B equidistantes de los extremos de OO′ (52).

63. Problema III. — *Dividir una recta dada* AB (fig. 38) *en dos partes iguales.*

Fig. 38.



Desde los puntos A y B como centros, y con un radio mayor que la mitad de AB, descríbanse dos arcos de círculo que se cortarán en un punto C (60) de los mismos centros; y con la misma abertura de compás, descríbanse otros dos arcos que se cortarán en un punto C′. Unanse C y C′ y esta recta cortará á la AB en un punto I, el cual será punto medio de la recta AB.

Porque, estando cada uno de estos dos puntos C y C′ equidistantes de los extremos A y B, pertenecen á la perpendicular levantada en el punto medio de esta recta (51); luego CC′ es esta perpendicular, y el punto I en donde corta á la AB es el punto medio de esta recta.

Corolario. — *La misma construccion sirve para levantar una perpendicular en el punto medio de una recta dada, sin que sea necesario determinarle antes.*

64. Problema IV. — *Dividir un arco dado* AMB (fig. 39) *en dos partes iguales.*

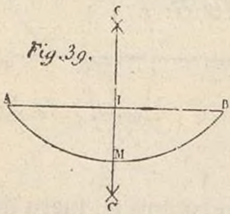


Fig. 39.

Trácese la cuerda AB, y en medio de esta cuerda levántese la perpendicular CC′ (**63** cor.); y esta perpendicular pasará por el punto medio M del arco dado (**53** cor. 2°).

Advertencia. — Para la ejecucion no hay necesidad de trazar la cuerda AB.

65. Problema. — 5° *Dividir un ángulo dado* MON (fig. 40) *en dos partes iguales.*

Desde el vértice O como centro, y con un radio cualquiera, descríbase el arco AB; de los puntos A y B, y con un radio mayor, á la simple vista, que la mitad de la cuerda del arco AB, descríbanse dos arcos de círculo que se cortarán en un punto C: únase O con C, y la recta OC dividirá el ángulo MON en dos partes iguales MOC y NOC.

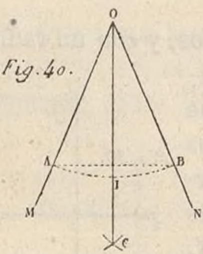


Fig. 40.

En efecto, por construccion, los puntos O y C están cada uno á igual distancia de los puntos A y B; la recta OC será, pues, perpendicular en su punto medio á la cuerda AB (**52**); luego pasa por el punto medio I del arco AB (**53**). Los arcos AI y BI son iguales, y por consiguiente los ángulos en el centro AOI y BOI tambien lo serán (**32**).

Observaciones. I. En la ejecucion no hay necesidad de trazar la cuerda AB.

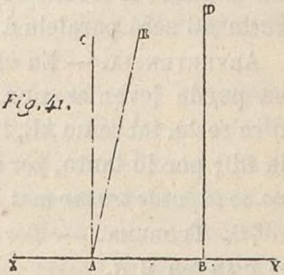
II. La recta OC que divide al ángulo MON en dos partes iguales, se llama *bisectriz* de este ángulo.

CAPITULO IV.

PROPIEDADES RELATIVAS Á LAS PARALELAS.

§ I. De las paralelas.

66. TEOREMA. — *Dos rectas* AC, BD (fig. 41) *perpendiculares á una tercera* XY, *no pueden encontrarse por mucho que se las prolongue.*



Porque, si se encontrasen en algun punto, habria desde este punto, trazadas dos perpendiculares á una recta, lo que es imposible (44).

ADVERTENCIA. — Dos rectas que, estando situadas en un mismo plano, no pueden encontrarse por mucho que se las prolongue, se llaman rectas *paralelas.*

El teorema precedente puede enunciarse de este modo: *Dos rectas perpendiculares á una tercera, son paralelas entre sí.*

67. POSTULADO. — *Si sobre una recta* XY (fig. 41) *se levanta una perpendicular* BD *y una oblicua* AE, *estas dos líneas suficientemente prolongadas se encontrarán.*

Esta proposicion que, sin tener la evidencia de un axioma, puede admitirse sin demostracion, es conocida bajo el nombre de *Postulado de Euclides*, y sirve de base á la teoría de las paralelas.

68. RECÍPROCA DEL TEOREMA **66**. — *Si dos rectas* AC, BD (fig. 41) *son paralelas, toda recta* XY *perpendicular á una de ellas* BD, *es perpendicular á la otra* AC.

Porque si XY no fuese perpendicular á AC, esta recta AC le seria oblícua, la cual, en virtud del postulado, encontraria á la perpendicular BD, y no le seria por tanto paralela: lo cual es contrario á la suposicion.

69. Problema. — *Por un punto* A (fig. 41) *fuera de una recta* BD, *trazar una paralela á esta recta.*

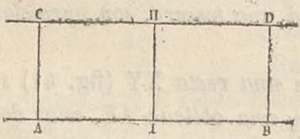
Del punto A bájese sobre BD la perpendicular AB; en el punto A levántese la AC perpendicular á AB; la recta AC será paralela á BD (**66**).

Advertencia. — En el punto A de una recta AB, solo se puede levantar una perpendicular AC; cualquiera otra recta, tal como AE, le seria oblícua, y encontraria á la BD; por lo tanto, *por un punto dado fuera de una recta, no se le puede trazar mas que una paralela.*

70. Teorema. — *Dos paralelas están equidistantes en toda su longitud.*

En otros términos: si de los dos puntos C y D (fig. 42) tomados á la distancia que se quiera sobre una de las dos rectas paralelas AB y CD, se bajan perpendiculares sobre la otra, estas perpendiculares CA y BD serán iguales.

Fig. 42.



Para demostrarlo, levantemos en I medio de AB la perpendicular IH. La recta IH siendo perpendicular á AB lo será tambien á su paralela CD (**68**). Esto sentado, hagamos girar la figura IBDH sobre IH hasta colocarse en IACH. Siendo los ángulos en I rectos, la recta IB tomará la direccion de IA; y como IB es igual á IA, el punto B caerá en A. Los ángulos en B y en A siendo rectos, la línea BD tomará la direccion AC, y el punto D caerá sobre algun punto de AC. La línea HD tomará la direccion HC, por ser los ángulos en H rectos, y el punto D caerá sobre la recta HC; pero, como tambien debe caer sobre AC, este punto será la interseccion de las rectas AC y HC; es decir, el punto C. Las rectas BD y AC teniendo los mismos extremos coincidirán, y por lo tanto son iguales.

71. Recíprocamente. — *Si sobre una recta* AB (fig. 42) *se levantan dos perpendiculares iguales* AC *y* BD *la recta* CD *que unirá sus extremos, será paralela á* AB.

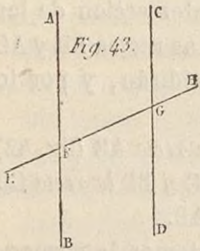
Sobre el punto medio I de AB levantemos la perpendicular IH, y coloquemos la figura IBDH sobre IACH. Por ser los ángulos en I rectos, IB coincidirá con IA; y como estas líneas son iguales, el punto B caerá en A. Los ángulos en B y en A son tambien rectos, luego BD coincidirá con AC; y como estas rectas son iguales por hipótesis, el punto D caerá en C. Las rectas DH y CH coincidirán por tener los mismos extremos; luego los ángulos IHD y IHC son iguales, y como son adyacentes serán rectos. Las rectas AB y CD siendo perpendiculares á IH, son paralelas entre sí (**66**).

Corolario. — Para trazar una paralela á la recta AB por un punto C tomado fuera de esta recta, bájese del punto C la recta CA perpendicular á AB; en un punto cualquiera B de esta última levántese una perpendicular BD igual á CA, y únase C con D; esta recta será la paralela pedida.

72. Teorema. — *Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí.*

Porque, si se traza una perpendicular á la tercera, será al mismo tiempo perpendicular á las otras dos (**68**); y estas siendo perpendiculares á una misma recta, son paralelas entre sí (**66**).

73. Teorema. — *Dos rectas* AB *y* CD (fig. 43) *son paralelas cuando estando cortadas por una tercera* EH, *forman con esta tercera ángulos internos* AFG, CGF *suplementarios.*



En efecto : los ángulos BFG y CGF son iguales por tener un mismo suplemento AFG (**56**). Los ángulos FGD y AFG, lo son tambien por tener un mismo suplemento CGF (**56**). De esto resulta que las dos porciones de rectas FB y GD están colocadas, respecto á EH, y de un lado de esta recta del mismo modo que las dos porciones de rectas GC y FA lo están del otro lado. De consiguiente, si dos de estas porciones de rectas se encontrasen, las otras se encontrarian tambien; y las dos rectas distintas AB y CD tendrian dos puntos comunes, lo cual es imposible (**12**). Luego estas rectas no pueden encontrarse, y de consiguiente son paralelas.

74. Recíprocamente, *si dos paralelas* AB *y* CD (fig. 43) *están cortadas por una secante* EH, *los ángulos interiores* AFG, CGF *son suplementarios.*

Porque, si esto no fuera así, se podria siempre, en el punto F, hacer con FG un ángulo igual al suplemento de CGF, y llevada así la recta, seria paralela á CD en virtud del teorema precedente. Se podria, pues, por un mismo punto F trazar dos paralelas á una misma recta CD, lo que es imposible (**69**, Esc.).

75. Escolios. — I. Los cuatro ángulos que tienen su vértice en F (fig. 43) y los cuatro ángulos que tienen su vértice en G, forman dos grupos que se corresponden.

Llámase *ángulos correspondientes*, á los que, en estos grupos, ocupan una posicion análoga: son los que, estando situados á un mismo lado de la secante EH, vuelven su abertura en un mismo sentido. Así, AFE y CGF son correspondientes; lo mismo sucede con AFG y CGH, etc.

Se llaman *ángulos alternos-internos*, á los que están situados interiormente á las paralelas, á una parte y otra de la secante: tales son los ángulos AFG y FGD, ó aun BFG y CGF.

II. Los ángulos interiores AFG y CGF siendo suplementarios, los ángulos correspondientes son iguales, pues AFE y CGF, por ejemplo, son entonces ambos suplemento de AFG.

Recíprocamente si dos ángulos correspondientes son iguales AFE y CGF, por ejemplo, los ángulos interiores AFG y CGF son suplementarios. Porque AFG siendo el suplemento de su adyacente AFE, es tambien el suplemento de CGF igual á AFE.

III. Los ángulos interiores AFG y CGF siendo suplementarios, los ángulos alternos-internos tales como AFG y FGD son iguales. Pues ambos son el suplemento de CGF.

Recíprocamente, si dos ángulos alternos-internos son iguales, AFG y FGD por ejemplo, los ángulos interiores AFG y CGF son suplementarios. Pues, CGF siendo el suplemento de su adyacente FGD, es tambien el suplemento de AFG igual á FGD.

IV. Los escolios precedentes y los dos teoremas que preceden, pueden resumirse en estas dos proposiciones:

E. Machetto

1ª *Si dos rectas paralelas están cortadas por una secante, los ángulos interiores son suplementarios y los ángulos correspondientes son iguales, así como los ángulos alternos-internos.*

2ª *Si los ángulos interiores son suplementarios, ó si los ángulos correspondientes son iguales, ó si los ángulos alternos-internos son iguales, las rectas cortadas por la secante son paralelas.*

76. Teorema. — *Dos ángulos* ABC, DEF (fig. 44), *que tienen sus lados respectivamente paralelos y la abertura dirigida en el mismo sentido, son iguales.*

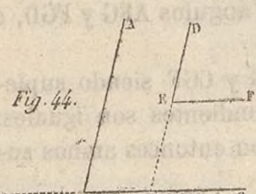


Fig. 44.

Porque, si se prolonga DE hasta encontrar á BC en G, los ángulos ABC y EGC serán iguales como correspondientes, relativamente á las paralelas AB, DG y á la secante BC. Los ángulos EGC y DEF serán iguales como correspondientes con relacion á las paralelas BC y EF y á la secante DG. Los ángulos ABC, DEF, ambos iguales á EGC, son, pues, iguales entre sí.

Escolio. — Si los ángulos propuestos volviesen su abertura en sentido contrario, como ABC′ y DEF, serian suplementarios.

77. Teorema. — *Dos ángulos* ABC, DEF (fig. 45) *que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales* (ó suplementarios).

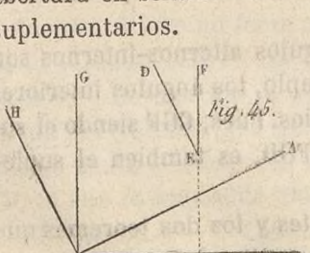


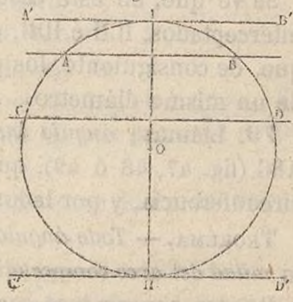
Fig. 45.

Por el vértice B, tracemos BH paralela á ED, y BG paralela á EF; los dos ángulos HBG y DEF, teniendo sus lados respectivamente paralelos, serán iguales (ó suplementarios). Pero, AB siendo perpendicular á DE, lo es á su paralela BH (68); asimismo BC, siendo perpendicular á EF, lo es á su paralela BG. Si de los dos ángulos ABH y CBG, iguales como rectos, se suprime la parte comun ABG, los restos HBG y ABC serán iguales. Luego, ABC y DEF son iguales (ó suplementarios).

§ II. Propiedades del círculo relativas á las paralelas.

78. Teorema. — *Dos paralelas* AB, CD (fig. 46), *interceptan sobre una circunferencia arcos iguales* AC, BD.

Fig. 46.



En efecto : desde el centro O de esta circunferencia, trácese sobre las dos paralelas una perpendicular comun OI; el punto I en que ella cortará la circunferencia será el punto medio del arco AB (53, corol. 1°); y tambien será el punto medio del arco CD. Luego se tendrá :

$$IA = IB \text{ y } IC = ID,$$

de donde se saca, restando estas igualdades miembro á miembro

$$IC - IA = ID - IB,$$

ó

$$AC = AD.$$

Escolio. — I. Este teorema subsistiria, si una de las dos paralelas fuese una tangente A'B'. Porque, si se une el centro al punto de contacto I, el radio OI será perpendicular á la tangente A'B' (56), y por consiguiente á su paralela CD (68); luego el punto I será el punto medio del arco CID, y se tendrá IC=ID.

II. El teorema subsistiria aun, si las dos paralelas fuesen ambas tangentes A'B' y C'D', por ejemplo; porque si, entre estas dos rectas, se traza una paralela CD, se tendrá, en virtud del escolio precedente, siendo H el punto de contacto de C'D',

$$IC = ID \text{ y } HC = HD;$$

de donde se saca, sumando estas igualdades,

$$IC + HC = ID + HD \text{ ó } ICH = IDH.$$

Se ve que, en este caso, cada uno de los dos arcos interceptados, ICH é IDH, es una semi-circunferencia, y que, de consiguiente, los puntos H é I son los extremos de un mismo diámetro.

79. Llámase *ángulo inscripto* á un ángulo tal como ABC (fig. 47, 48 ó 49), que tiene su vértice B sobre la circunferencia, y por lados dos cuerdas AB, BC.

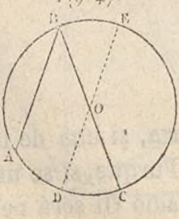
Teorema. — *Todo ángulo inscripto tiene por medida* (33) *la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

Pueden ocurrir tres casos :

1º El centro O (fig. 47) puede estar en uno de los lados BC del ángulo.

Trazando el diámetro DE paralela á AB, el ángulo DOC será igual al ángulo ABC, por ser correspondientes (75); pero, el ángulo central DOC tiene por medida el arco DC : luego el ángulo ABC tiene tambien la misma medida. Pero los ángulos DOC y BOE siendo iguales por ser opuestos por el vértice (40), el arco DC es igual al arco

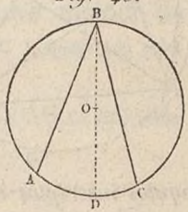
Fig. 47.



BE; las rectas AB y DE siendo paralelas, los arcos interceptados AD y BE son iguales (**78**). De esto resulta que los arcos DC y AD son iguales, por ser los dos iguales á BE, y de consiguiente que DC es la mitad de AC. Luego el ángulo ABC tiene por medida la mitad del arco AC.

2º El centro O (fig. 48) puede estar comprendido entre los lados del ángulo inscripto ABC.

Fig. 48.

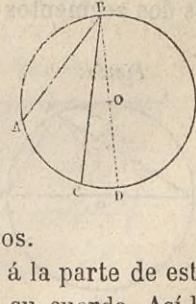


Tracemos el diámetro BD. El ángulo ABD tendrá por medida la mitad de AD, por lo que acaba de demostrarse; por lo mismo el ángulo DBC tendrá por medida la mitad de DC. Luego la suma de estos dos ángulos, es decir, el ángulo ABC, tendrá por medida la mitad de AD *mas* la mitad de DC, es decir, la mitad de AC.

3º El centro O (fig. 49) puede estar fuera del ángulo inscripto ABC.

Tracemos el diámetro BD. El ángulo ABD tendrá por medida la mitad de AD; el ángulo CBD tendrá por medida la mitad de CD. Luego la diferencia de estos dos ángulos, es decir, el ángulo ABC, tendrá por medida la mitad de AD *menos* la mitad de CD, es decir la mitad de AD *menos* CD, ó la mitad de AC.

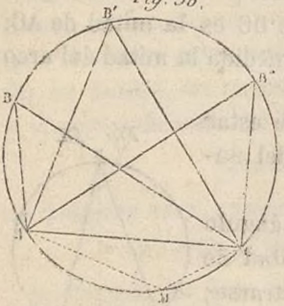
Fig. 49.



Luego, en los tres casos, el ángulo inscripto ABC tiene por medida el arco AC comprendido entre sus lados.

80. Llámase *segmento* de un círculo á la parte de este círculo comprendida entre un arco y su cuerda. Así la superficie ABB'B''CA (fig. 50) es un segmento : y tambien lo es la superficie AMCA.

Fig. 50.



Se dice que un ángulo está *inscripto en un segmento*, cuando su vértice está sobre el arco del segmento y que los lados terminan á los extremos de la cuerda. Así el ángulo ABC está inscripto en el segmento ABB'B''CA; el ángulo AMC lo está en el segmento AMCA.

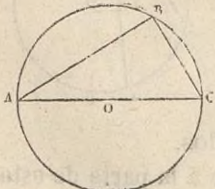
81. Teorema. — *Todos los ángulos inscriptos en un mismo segmento son iguales.*

Los ángulos ABC, AB'C, AB''C, por ejemplo, tienen cada uno por medida la mitad del arco AMC comprendido entre sus lados (**79**); luego todos estos ángulos son iguales.

Escolios. — I. Se dice que el segmento ABB'B''CA es *capaz* del ángulo ABC ; lo cual quiere decir que todos los ángulos inscriptos en este segmento son iguales al ángulo ABC.

II. Dos ángulos tales como ABC y AMC, inscritos en los dos segmentos que corresponden á la misma cuerda AC, son suplementarios. Porque el ángulo ABC tiene por medida la mitad del arco AMC, y el ángulo AMC tiene por medida la mitad del arco ABB'B''CA; luego la suma de estos dos ángulos tiene por medida la mitad de la suma de estos arcos, es decir, la mitad de la circunferencia entera, ó dos cuadrantes.

Fig. 51.



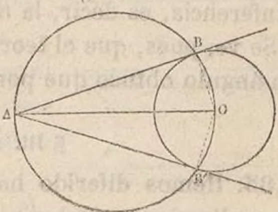
Luego la suma de estos dos ángulos es igual á la de dos rectos.

82. Teorema. — *Todo ángulo* ABC (fig. 51), *inscripto en un semi círculo, es recto.*

En efecto, tiene por medida la mitad de AMC (79), ó la mitad de una semi-circunferencia, es decir, un cuadrante.

83. Esta propiedad suministra un nuevo método de *trazar, por un punto externo* (fig. 52), *una tangente á una circunferencia* O.

Fig. 52.

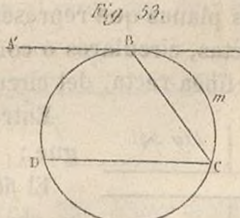


Para esto, únase A á O; y sobre la recta AO como diámetro, trácese una circunferencia, que cortará la primera en los puntos B y B′. Trazando AB, se tendrá una tangente á la circunferencia O. Porque, si se traza la recta BO, el ángulo ABO será recto por estar inscripto en un semicírculo; y la recta AB, siendo perpendicular al extremo del radio OB, será tangente.

Se tendrá una segunda tangente, uniendo el punto A á B′.

84. Teorema. — *El ángulo* ABC (fig. 53) *formado por una tangente* AB, *y por una cuerda que termina en el punto de contacto, tiene por medida la mitad del arco* BmC *subtendido por esta cuerda.*

Fig. 53.



En efecto, por el punto C, tracemos CD paralela á AB; los ángulos ABC y BCD serán iguales por alternos-internos (75). El ángulo inscripto BCD tiene por medida la mitad de BD (79); pero, los arcos BD y B*m* C son iguales por ser interceptados por las paralelas AA′ y CD (78). Luego el ángulo ABC tiene por medida la mitad del arco B*m*C.

Escolio. — El ángulo A′BC tiene por medida la mitad del arco BDC subtendido por la cuerda BC. Porque los dos ángulos adyacentes ABC y A′BC siendo suplementarios, la suma de estos ángulos tiene por medida dos cuadrantes, ó la mitad de la circunferencia; y como el primero ABC tiene por medida la mitad de B*m*C, el segundo tendrá por medida la mitad del resto de la circunferencia, es decir, la mitad de BDC.

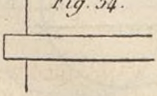
Se ve, pues, que el teorema subsiste, lo mismo por un ángulo obtuso que por un ángulo agudo.

§ III. Aplicaciones.

85. Hemos diferido hasta ahora indicar algunas de las aplicaciones de las perpendiculares, de las paralelas y de las propiedades del círculo que se refieren á ellas : están sacadas del dibujo lineal.

En los adornos de la arquitectura se emplean unas partes salientes que han recibido, en general, el nombre de *molduras*, y se extiende este nombre á las figuras planas que representan el perfil. Las molduras son rectas, circulares ó compuestas, segun se haga uso de la línea recta, del círculo ó de una y otro á la vez.

Fig. 54.



Entre las molduras rectas se distingue :

El *filete* ó *listel* (fig. 54), limitado arriba y abajo por líneas paralelas, ambas perpendiculares á la recta sobre la cual debe hacer saledizo el filete. Este saledizo es igual al espesor del filete.

La *platabanda* (fig. 55), es una moldura análoga al filete, pero cuyo espesor es un múltiplo del saledizo.

86. Se distingue mayor número de molduras circulares :

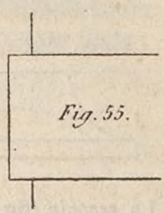
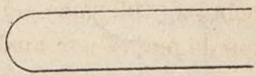
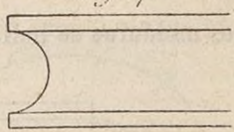


Fig. 55.

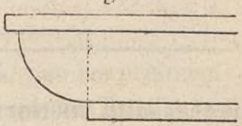
La *baqueta* (fig. 56). Se nota en ella lo que en término de arte se llama la *igualacion* de una semi-circunferencia con dos rectas paralelas, es decir, que esta semi-circunferencia se reune tangentemente con cada una de las dos rectas.

Fig. 56.


La *gola* (fig. 57). Obsérvase aquí la misma igualacion, pero la semi-circunferencia tiene una igualacion inversa.

Fig. 57.


El *cuarto bocel* (fig. 58); el *cuarto bocel al revés* (fig. 59); la *copada* (fig. 60); la *copada al revés* (fig. 61). La inspeccion de estas figuras basta para hacer comprender el trazado.

Fig. 58


El *talon recto* (fig. 62); el *talon al revés* (fig. 63); el *ci-*

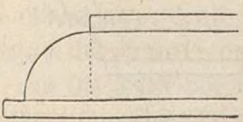
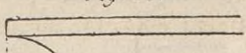
Fig. 59.


Fig. 60.


macio (fig. 64); *cimacio al revés* (fig. 65). Estas molduras ofrecen el ejemplo de dos circunferencias iguales, tangentes exteriormente, pero de las cuales solo un cuadrante está empleado en la figura.

Fig 61.

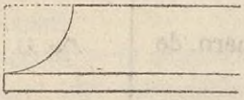
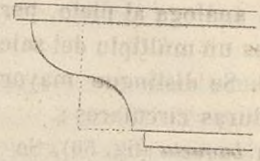


Fig. 62.



La *escocia* (fig. 66); la *escocia al revés* (fig. 67). En estas

Fig. 63.

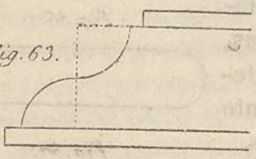
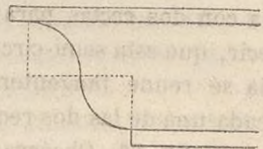


Fig. 64.



dos molduras se hallan dos circunferencias desiguales

Fig. 65.

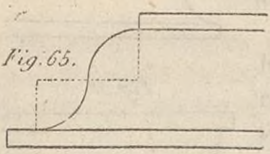
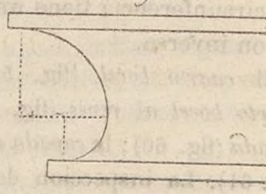


Fig. 66.



que se *igualan* inferiormente, es decir, que son tangen-

Fig. 67.

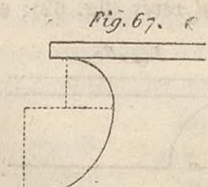
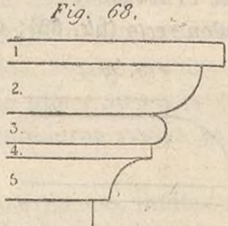


Fig. 68.



tes interiormente. Uno de los radios es el doble del otro y solo un cuarto de cada circunferencia se emplea en cada moldura.

87. La figura 68 ofrece un ejemplo de moldura compuesta. Distínguese en ella sucesivamente: 1° un filete; 2° un cuarto bocel; 3° una baquetilla; 4° una *orla*, especie de filete sin saledizo y una copada.

Fig. 69.

88. La figura 69 representa una *bóveda*. Esta bóveda ofrece un nuevo ejemplo de una semicircunferencia que se iguala con dos rectas paralelas.

La curva indicada por la figura 70 es la que se llama *asa de canasto* ó curva de tres centros. Para trazarla, se toman sobre una recta indefinida tres longitudes iguales AB, BC, CD; desde los puntos B y C como centros, con BC por radio, se describen dos arcos de círculo cuya interseccion determina el punto O; se tiran las rectas OB y OC, y se las prolonga arriba de AD. Hecho esto, desde los puntos B y C por centros, con el mismo radio BC, se trazan los arcos AM y ND. Es fácil de ver que cada una de las longitudes OM y ON así obtenidas es doble de BC; luego si del punto O como centro, con OM ó ON por radio, se traza el arco MN, este arco se igualará en M y en N con los dos primeros.

Fig. 70.

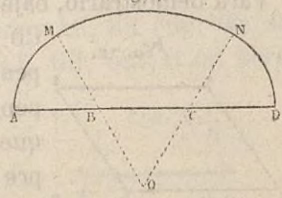
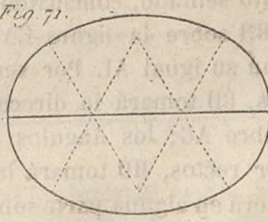


Fig. 71.



Se ve que cada una de las circunferencias trazadas desde los puntos B y C es tangente interiormente á la trazada desde el punto O.

Si se repite el mismo trazado del otro lado, se obtendrá la curva conocida bajo el nombre de *óvalo* (fig. 71).

CAPITULO V.

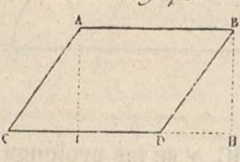
RECTAS CORTADAS POR PARALELAS, Y LÍNEAS PROPORCIONALES EN GENERAL

§ I. Líneas cortadas por paralelas.

89. Teorema. — *Las partes* AC *y* BD (fig. 72) *de dos paralelas interceptadas por otras dos paralelas* AB *y* CD, *son iguales.*

Para demostrarlo, bajemos de los puntos A y B sobre CD y su prolongamiento, las perpendiculares AI y BH. Estas perpendiculares serán iguales, puesto que dos paralelas se hallan siempre igualmente distantes (**70**); además serán paralelas entre sí (**66**),

Fig. 72.



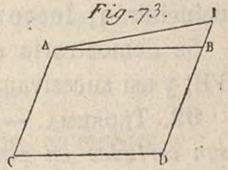
y los ángulos CAI y DBH serán iguales, por tener los lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido (**76**). Esto sentado, concibamos que se superponga la figura DBH sobre la figura CAI, de manera que BH coincida con su igual AI. Por ser los ángulos CAI y DBH iguales, BD tomará la direccion de AC, y el punto D caerá sobre AC; los ángulos AIC y DHD siendo iguales por ser rectos, HD tomará ladireccion de IC, y el punto D caerá en alguna parte sobre IC. El punto D debiendo caer á la vez sobre AC y sobre IC, caerá sobre el punto de interseccion C. Luego las rectas BD y AC coincidirán; luego son iguales.

Escolio. — Se demostraria del mismo modo que AB es igual á CD.

90. Recíproca del teorema anterior. — *Si, sobre dos paralelas, se toman dos partes iguales* AC, BD (fig. 73), *las rectas* AB *y* CD, *que unen los extremos de estas longitudes son paralelas.*

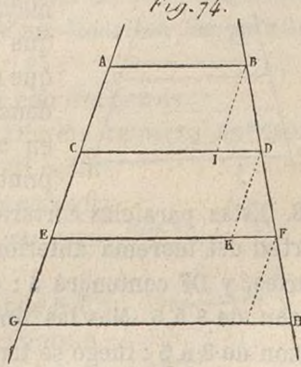
Supongamos por un momento que AB no es la paralela á CD que se puede trazar por el punto A, y sea AI esta paralela. En virtud del teorema anterior, se tendria AC = ID; pero, por hipótesis, se tiene AC = BD : luego se tendria ID = BD, lo cual es imposible. Luego AB es paralela á CD.

Fig. 73.



91. Lema. — *Cuando dos rectas* AG, BH (fig. 74) *son cortadas por paralelas* AB, CD, EF, GH, ect., *si las partes* AC, CE, EG, etc., *interceptadas en una de estas rectas son iguales, las partes* BD, DF, FH, etc., *interceptadas en la otra son tambien iguales.*

Fig. 74.



Para demostrar, por ejemplo, que BD es igual á DF, tracemos BI y DK paralelas á AG. En virtud del teorema del nº 89, se tendrá BI = AC, y DK = CE; mas, por hipótesis, AC = CE : luego BI = DK. Esto sentado, si se superpone la figura BID sobre la figura

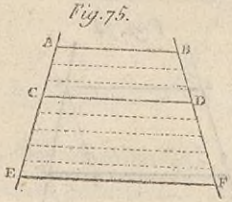
DKF, de modo que BI coincida con su igual DK, los ángulos IBD y KDF siendo iguales por correspondientes (75), BD tomará la direccion DF, y el punto D caerá en alguna parte sobre DF. Mas los ángulos BID y DKF siendo iguales, por tener sus lados paralelos y dirigidos en un mismo sentido (76), ID tomará la direccion de KF, y el punto D caerá en alguna parte sobre KF. El punto D debiendo caer á la vez sobre DF y sobre KF, caerá sobre el punto de interseccion F. Luego las rectas BD y DF coincidirán; luego son iguales.

Se demostraria del mismo modo que DF es igual á FH, y así sucesivamente.

92. Teorema. — *Dos rectas cualesquiera* AE, BF (fig. 75) *son cortadas en partes proporcionales por paralelas* AB, CD, EF.

Evaluemos AC y CE por medio de una unidad bastante pequeña para que cada una de ellas la contenga un número de veces exacto; y para mayor precision, supongamos que AC la contenga 3 veces y que CE la contenga 5 veces. Divídanse AC en 3 partes iguales, CE en 5, y trácense por todos los puntos de division paralelas á AB. Estas paralelas cortarán BF en partes iguales en virtud del teorema anterior; BD contendrá 3 de estas partes, y DF contendrá 5 : estas líneas serán pues en razon de 3 á 5. Mas las líneas AC y CE son tambien en razon de 3 á 5 : luego se tendrá la proporcion

Fig. 75.

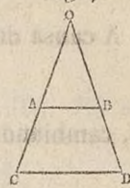


$$AC : CE = BD : DF,$$

lo cual demuestra el teorema.

Esta demostracion supone que AC y CE contienen cada una una misma línea un número de veces exacto; mas, como esta tercera línea puede ser tan pequeña como se quiera, esto llegará siempre á suceder en la práctica, y de consiguiente, la demostracion es general.

Fig. 76.



Corolario I. — *Dos paralelas* AB, CD (fig. 76) *cortan los lados de un ángulo* COD *en partes proporcionales.*

Esta proposicion es un caso particular de la anterior, y se demostraria del mismo modo. Se tiene pues

$$OA : AC = OB : BD.$$

Corolario II. — De esta proporcion, se deduce

$$OA : OA + AC = OB : OB + OD,$$

ó

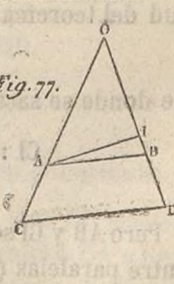
$$OA : OC = OB : OD,$$

es decir que : *cuando dos paralelas* AB, CD *cortan los lados de un ángulo* COD, *las distancias del vértice del ángulo, á los puntos de interseccion de sus lados con las paralelas son proporcionales.*

Esta proposicion se aplica con frecuencia.

95. Recíproca del corolario del teorema anterior. — *Si dos rectas* AB, CD (fig. 77) *cortan los lados de un ángulo* COD *en partes proporcionales, estas rectas son paralelas.*

Fig. 77.



Pues si AB no es la paralela á CD que se puede trazar por el punto A, sea AI esta paralela. En virtud de la proposicion directa, se tendria

$$OA : AC = OI : ID,$$

Mas por hipótesis se tiene

$$OA : AC = OB : BD.$$

A causa de la razon comun resulta

$$OI : ID = OB : BD$$

ó, cambiando los medios de posicion,

$$OI : OB = ID : BD.$$

Pero OI es menor que OB, mientras que ID es mayor que BD; luego esta última proporcion es falsa. Así pues, una recta AI, diferente de AB no puede ser paralela á CD; luego AB es paralela á CD.

94. TEOREMA. — *Las partes* AB *y* CD (fig. 78) *de dos paralelas comprendidas entre los lados de un ángulo* COD, *son proporcionales á las distancias* OB *y* OD *del vértice de este ángulo á los puntos de interseccion de uno cualquiera de sus lados* OD *con las dos paralelas.*

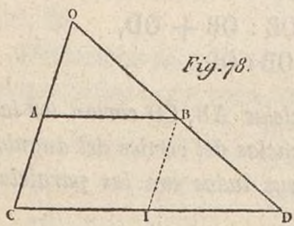


Fig. 78.

Para demostrarlo, tracemos BI paralela á OC. En virtud del teorema del nº **92** (cor. I), tendremos

$$CI : ID = OB : BD;$$

de donde se saca :

$$CI : CI + ID = OB : OB + BD,$$

ó

$$CI : CD = OB : OD.$$

Pero AB y CI son iguales como paralelas interceptadas entre paralelas (**89**); luego se tiene

$$AB : CD = OB : OD.$$

Escolio. — Del mismo modo se tendria :

$$AB : CD = AO : OC.$$

95. Teorema. — *Dos paralelas* AB, CD (fig. 79) *son cortadas en partes proporcionales por una série de secantes* OC, OG, OH, OD, *que parten de un mismo punto* O.

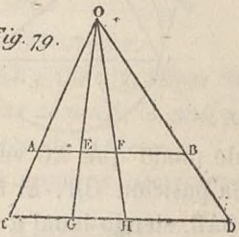


Fig. 79.

Sean, en efecto, E, F, G, H, los puntos de interseccion de las secantes intermediarias con las dos paralelas. En virtud del teorema anterior, se tendrá :

$$AE : CG = OE : OG,$$
$$EF : GH = OE : OG = OF : OH,$$
$$FB : HD = OF : OH.$$

Pero los lados del ángulo GOH siendo cortados en partes proporcionales por las dos paralelas (**92** cor. II), las segundas razones de las proporciones anteriores son iguales. Luego las primeras son iguales, y se tiene :

$$AE : CG = EF : GH = FB : HD,$$

que es lo que se tenia que demostrar.

§ II. Propiedades del círculo relativas á las líneas proporcionales.

96. Teorema. — *Si desde un punto* O (fig. 80) *tomado fuera de una circunferencia, se traza una tangente* OA *y una secante* OC, *la tangente es media proporcional entre la secante entera* OC *y su segmento exterior* OB.

Tírense, en efecto, AB y AC. El ángulo OAB, formado por la tangente OA y la cuerda AB que pasa por el punto de contacto, tiene por medida la mitad del arco AB (84); el ángulo inscripto BCA tiene la misma medida (79); luego estos dos ángulos son iguales.

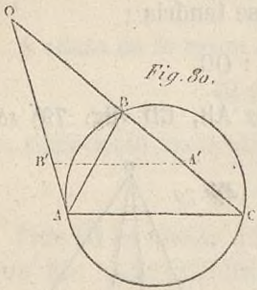


Fig. 80.

Esto sentado, volvamos la figura OAB sobre sí misma, de modo que AO venga á tomar la posicion OA' y OB la posicion OB'. El ángulo OA'B', que es el mismo que OAB, siendo igual á OCA, y estos ángulos teniendo la posicion de correspondientes, las rectas A'B' y CA son paralelas (75, esc. IV). Luego se tiene, en virtud del teorema del nº 92 (cor. II) :

$$OB' : OA = OA' : OC.$$

Sustituyendo OB' por su igual OB, y OA' por su igual OA, resulta :

$$OB : OA = OA : OC;$$

es decir que OA, es media proporcional entre OC y OB.

97. TEOREMA. — *Si desde un punto* O (fig. 81), *fuera de una circunferencia, se trazan dos secantes* OC *y* OE, *estas secantes son inversamente proporcionales á sus segmentos externos* OB *y* OD.

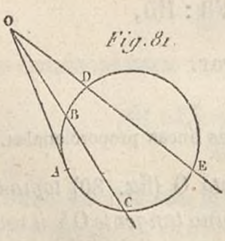


Fig. 81

Porque si se traza la tangente OA, se tendrá, en virtud del teorema precedente :

$$OB : OA = OA : OC,$$
$$OD : OA = OA : OE.$$

En estas dos proporciones, siendo igual el producto de los medios, lo son tambien los productos de los extremos, y se tiene:

$$OB \times OC = OD \times OE;$$

de donde se saca la proporcion

$$OC : OE = OD : OB,$$

que viene á ser la demostracion del teorema.

98. Teorema. — *Si dos cuerdas* AB *y* CD (fig. 82) *se cortan dentro de una circunferencia, las partes de la una son inversamente proporcionales á las partes de la otra.*

Tírense, en efecto, BC y AD; los ángulos inscriptos B y D son iguales por tener cada uno de ellos por medida la mitad del arco AC (**79**).

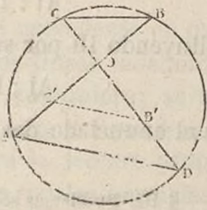


Fig. 82

Esto sentado, volvamos la figura COB sobre AOD, de modo que los ángulos en O, que son iguales por ser opuestos por el vértice, coincidan; OC tomará la posicion OC′; OB la posicion OB′, y BC la posicion B′C′. El ángulo OB′C′, que es el mismo que el ángulo B, siendo igual al ángulo D, y estos ángulos teniendo la posicion de correspondientes, las rectas B′C′ y DA son paralelas (**75**, escolio IV); luego se tiene, en virtud del teorema del nº **92** (cor. II):

$$OA : OC' = OD : OB'.$$

Sustituyendo OC′ por su igual OC, y OB′ por su igual OB, resulta:

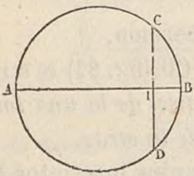
$$OA : OC = OD : OB,$$

que es el enunciado del teorema.

99. TEOREMA. — *La perpendicular* CI (fig. 83) *trazada de un punto de una circunferencia sobre un diámetro cualquiera* AB, *es media proporcional entre los dos segmentos* AI *é* IB *de este diámetro.*

Prolónguese, en efecto, la perpendicular CI hasta el punto D. El diámetro AB, por ser perpendicular á la cuerda CD, la divide en dos partes iguales; así CI = ID (53, corol. 1.). Pero siendo AB y CD dos cuerdas que se cortan en el círculo, se tiene, en virtud del teorema precedente :

Fig. 83.



$$AI : IC = ID : IB,$$

ó, sustituyendo ID por su igual IC,

$$AI : IC = IC : IB,$$

que es el enunciado del teorema.

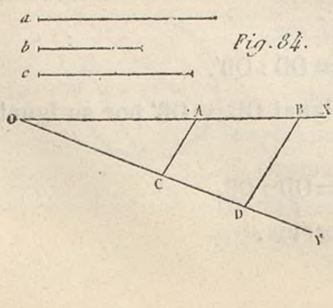
§ III. Problemas sobre las líneas proporcionales.

100. PROBLEMA I. — *Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas,* a, b, c (fig. 84).

El objeto de este problema es hallar una línea tal, que representándola por x, se tenga la proporcion

$$a : b = c : x.$$

Fig. 84.



Para resolverlo, trácense dos líneas indefinidas OX y OY, formando un ángulo cualquiera. Sobre el lado OX, tómense OA $= a$, y AB $= b$. Sobre OY, tómese OC $= c$. Únanse los puntos A y C, y trácese BD paralela á AC. La línea CD será la cuarta proporcional pedida; porque las paralelas AC y BD cortando los lados del ángulo BOD en partes proporcionales, se tiene (**92**) :

$$OA : AB = OC : CD,$$

ó

$$a : b = c : CD.$$

La línea CD es, pues, la línea buscada.

101. Problema II.—*Hallar una tercera proporcional á dos líneas dadas* a *y* b.

Se trata de hallar una línea tal, que designándola por x se tenga la proporcion

$$a : b = b : x.$$

Este problema solo difiere del precedente en que c es igual á b. Se trazarán, pues, dos líneas indefinidas OX y OY (fig. 84), bajo un ángulo cualquiera; se tomará $OA = a$, $AB = b$, $OC = b$; se unirá A á C; se trazará BD paralela á AC, y la línea CD será la tercera proporcional pedida, puesto que, á causa de las paralelas AC y BD, se tendrá la proporcion

$$OA : AB = OC : CD,$$

ó

$$a : b = b : CD.$$

102. Problema III.—*Hallar una media proporcional entre dos líneas dadas* a *y* b (fig. 85).

El objeto de este problema es hallar una línea tal que designándola por x, se tenga la proporcion

$$a : x = x : b.$$

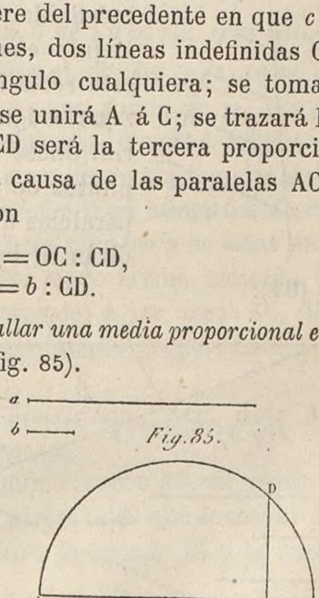


Fig. 85.

Para resolverlo, tómense, sobre una recta indefinida, $AB = a$, y, en seguida, BC $= b$. Sobre AC como diámetro trácese una semi-circunferencia, y en el punto B levántese sobre AC la perpendicular BD terminada á la circunferencia. Esta perpendicular BD será la media proporcional pedida; porque, en virtud del teorema del nº **99**, se tendrá

$$AB : BD = BD : BC$$

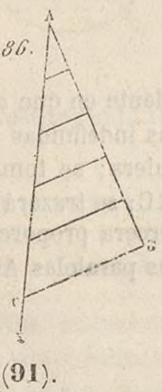
ó

$$a : BD = BD : b.$$

103. Problema IV. — *Dividir una recta en un número cualquiera de partes iguales.*

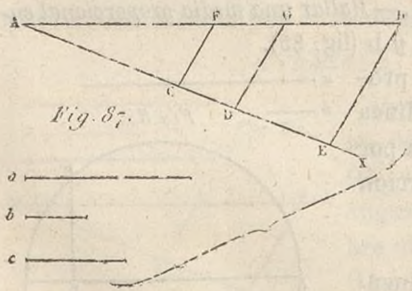
Supongamos, para mas precision, que se quiera dividir una recta dada AB (fig. 86) en 5 partes iguales.

Fig. 86.



Trácese por el punto A una recta indefinida AX que haga con AB un ángulo cualquiera. Tómense sobre esta recta indefinida, de A hácia C, 5 partes iguales de magnitud arbitraria. Unase C á B, y por todos los puntos de division de AC trácense paralelas á CB; estas paralelas dividirán la línea AB en 5 partes iguales (**91**).

Fig. 87.



104. Problema V. — *Dividir una recta en partes proporcionales á líneas dadas.*

Para fijar las ideas, supongamos que se trata de dividir una recta dada AB (fig. 87) en partes proporcionales á las tres líneas *a*, *b*, *c*.

Para esto trácese por el punto A una recta indefinida AX que haga con AB un ángulo cualquiera. Tómense sobre esta recta, $AC = a$, $CD = b$, $DE = c$. Unase B con E; y por los puntos C y D trácense CF y DG paralelas á BE. La línea AB estará dividida por los puntos F y G en partes proporcionales á las líneas dadas.

Pues se tendrá, en virtud del primer corolario del teorema del nº **92**,

$$AF : FG = AC : CD, \text{ ó } AF : AC = FG : CD;$$

y en virtud de este mismo teorema,

$$FG : GB = CD : DE, \text{ ó } FG : CD = GB : DE;$$

y, á causa de la razon comun,

$$AF : AC = FG : CD = GB : DE, \text{ ó } AF : a = FG : b = GB : c.$$

Escolio.—Se podria pedir el dividir una recta en partes proporcionales ó *números* dados m, n, p, por ejemplo. En tal caso, se toma una longitud arbitraria por unidad; sobre AX se toman, desde A á C un número m de estas unidades, y desde C á D un número n de estas unidades, y desde D á E un número p de estas mismas unidades. Se divide, del modo arriba indicado, la línea AB en partes proporcionales á las líneas AC, CD, DE; y estas partes serán igualmente proporcionales á los números m, n, p.

105. Problema VI. — *Dividir una recta dada* AB (fig. 88) *en media y extrema razon.*

Esto quiere decir, determinar sobre AB un punto I que divida esta línea en dos partes tales que la mayor AI sea media proporcional entre la menor IB y la recta entera AB.

Para resolver este problema, levántese en el punto B una perpendicular BO igual á la mitad de AB. Desde el punto O como centro, con OB por radio, trácese una circunferencia. Tírese la recta AO, la cual cortará la circunferencia en los puntos C y D.

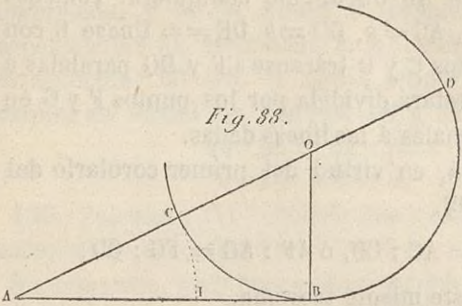


Fig. 88.

Finalmente, desde el punto A como centro, con AC por radio, descríbase el arco CI que cortará AB en un punto I. Este punto será el punto de division pedido.

En efecto: observemos en primer lugar que el radio OB siendo la mitad de AB, el diámetro CD es igual á AB. Observemos en segundo lugar que la recta AB es tangente á la circunferencia por ser perpendicular al extremo del radio OB (**55**).

Pero, en virtud del teorema del nº **96**, se tiene

$$AD : AB = AB : AC, \qquad [1]$$

de donde se saca

$$AD - AB : AB = AB - AC : AC \qquad [2]$$

Mas $AD - AB$ es igual á $AD - CD$, es decir, á AC ó á su igual AI. Por otra parte $AB - AC$ es igual á $AB - AI$ ó á IB. Finalmente, el último término AC puede ser sustituido por AI. Luego la proporcion [2] puede escribirse

$$AI : AB = IB : AI,$$

ó, mudando las razones,

$$AB : AI = AI : IB;$$

que es lo que se proponia demostrar.

SEGUNDA SECCION

DE LAS FIGURAS PLANAS

CAPITULO PRIMERO

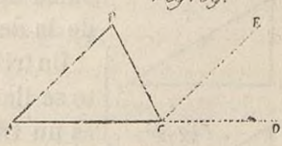
TRIÁNGULOS

§ I. Propiedades principales de los triángulos.

106. — Llámase *figura plana* á toda porcion de plano terminada por líneas rectas ó curvas.

Se llama *triángulo* á toda porcion de plano terminada por tres líneas rectas. Así ABC (fig. 89) es un triángulo. Las tres rectas AB, AC, BC que terminan este triángulo son sus *lados*; los vértices A, B, C, de sus tres ángulos son llamados los *vértices* del triángulo.

Fig. 89.



107. Teorema. — *La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos.*

Sea ABC (fig. 89) un triángulo cualquiera.

Prolónguese el lado AC, y por el vértice C trácese CE paralela á AB.

Los ángulos ABC y BCE son iguales como alternos-internos; los ángulos BAC y ECD son iguales por correspondientes. La suma de los tres ángulos del triángulo ABC es, pues, igual á la suma de los tres ángulos BCA, BCE, ECD formados al rededor del punto C y de un mismo lado de la recta AD. Pero, esta última suma es igual á la de dos rectos; luego la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.

Corolario I. — Cada uno de los ángulos de un triángulo, es el suplemento de la suma de los otros dos. Conociendo, pues, dos ángulos de un triángulo, se podrá obtener el tercero.

Si los dos ángulos dados están expresados en grados, se obtendrá el valor del tercero rebajando la suma de 180°. Si, por ejemplo, los dos ángulos dados tienen por valor 25° 38′ 13″ y 132° 17′ 49″, la suma será 157° 56′ 2″; la diferencia entre 180° y esta suma siendo igual á 22° 3′ 58″, este será el valor del tercer ángulo.

Corolario II. — Ningun triángulo puede tener dos ángulos rectos, ni dos obtusos, ni uno recto y otro obtuso; porque en uno y otro caso la suma de sus tres ángulos seria mayor de la de dos rectos.

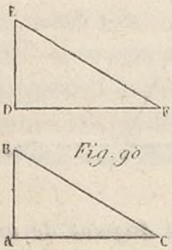


Fig. 90

Un triángulo que tiene un ángulo recto se llama *rectángulo*. Así ABC (fig. 90) es un triángulo rectángulo. El lado BC opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*, y los otros dos lados se llaman *catetos*. La suma de los ángulos B y C es igual á un ángulo recto: se dice, en tal caso, que estos dos ángulos son *complementarios* ó que cada uno de ellos es el *complemento* del otro.

Corolario III. — Llámase ángulo *externo* á un triángulo, á un ángulo tal como BCO (fig. 89) formado por un lado BC y la prolongacion CD de uno de los otros dos lados.

Todo ángulo externo de un triángulo es igual á la suma de los dos internos no adyacentes.

Porque el ángulo BCD, siendo la suma de los dos ángulos ECD, BCD, equivale á la suma de los ángulos A y B.

108. Teorema. — *En todo triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia.*

La primera parte de este teorema es evidente, segun la definicion de la línea recta. La segunda es una consecuencia de la primera.

Porque si a, b, c, designan los tres lados, expuestos por órden de magnitud, siendo el primero el mayor, se tendrá

$$a < b + c,$$
$$b < a + c,$$
$$c < a + b.$$

De la primera desigualdad, se saca

$$a - c < b \text{ y } a - b < c.$$

La segunda da, á su vez,

$$b - c < a.$$

Estas tres últimas desigualdades demuestran la segunda parte del teorema.

109. Llámase triángulo *isósceles* á un triángulo que tiene dos lados iguales. El tercer lado se llama *base* del triángulo.

Teorema. — *En todo triángulo isósceles, los ángulos opuestos á los lados iguales son iguales.*

Sea ABC (fig. 91) un triángulo isósceles, y sean CA y CB los lados iguales.

Si se une el vértice C al punto medio I de la base, la recta CI teniendo dos de sus puntos, C é I, á igual distancia de los extremos de AB, será perpendicular á AB.

Los ángulos cuyo vértice es el punto I siendo rectos, si se dobla CIB sobre CI, la recta IB vendrá á aplicarse sobre IA; y como I es el punto medio de AB, el punto B coincidirá con el punto A; además, el punto C no habrá variado la posicion; las rectas CB y CA cuyos extremos son los mismos, coincidirán. Lo mismo sucederá con los ángulos CBI y CAI; luego estos ángulos son iguales.

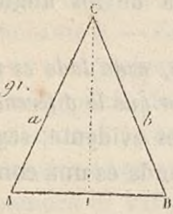


Fig. 91.

110. Recíproca del teorema anterior. *Si en un triángulo* ABC (fig. 91) *dos ángulos* A y B, *son iguales, los lados*, CB, CA, *opuestos á estos ángulos, son iguales, y el triángulo es isósceles.*

Para demostrarlo, trácese por el punto medio I de AB una perpendicular á esta línea, y dóblese la figura sobre esta perpendicular. Los ángulos cuyo vértice es I siendo rectos, IB tomará la direccion de IA; y el punto I siendo el punto medio de AB, el punto B caerá en A. Los ángulos B y A siendo iguales por hipótesis, el lado B*b* tomará la direccion del lado A*a*; estas dos rectas coincidiendo, encontrarán á la perpendicular en un mismo punto C; pero, este punto es equidistante de los extremos de AB; luego los lados CB y CA son iguales.

111. Un triángulo puede ser á la vez *isósceles y rectángulo*. El ángulo A (fig. 92) opuesto á la base es el ángulo recto; los otros dos, B y C, siendo iguales y complementarios, valen cada uno la mitad de un ángulo recto ó 45°.

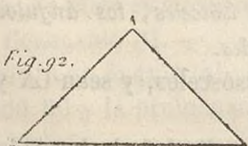
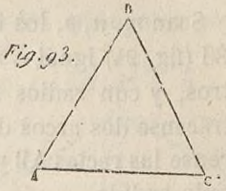


Fig. 92.

112. Llámase triángulo *equilátero* al que tiene sus tres lados iguales (fig. 93). Del teorema del nº **109** se deduce que los tres ángulos de todo triángulo equilátero son iguales, y que cada uno vale la tercera parte de dos ángulos rectos, ó $\frac{2}{3}$ de ángulo recto, ó 60°.

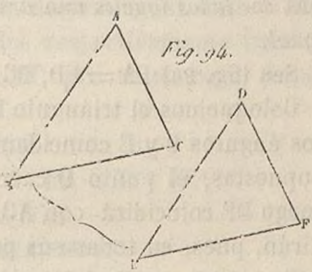


Del teorema del nº **110** se deduce que si un triángulo es *equiángulo*, es decir, si tiene sus tres ángulos iguales, es tambien *equilátero*.

113. Teorema. — *Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados iguales uno á uno.*

Sean ABC y DEF (fig. 94) dos triángulos que tienen sus lados iguales uno á uno, á saber : AB = DE, AC = DF y BC = EF.

Consideremos el triángulo DEF colocado sobre ABC, de modo que EF coincida con su igual BC. Los lados BA y ED siendo iguales, los puntos A y D serán equidistantes del punto B, y de consiguiente se encontrarán sobre la circunferencia que tendria el punto B por centro y BA por radio. Los lados CA y FD siendo iguales, los puntos A y D se encontrarán tambien sobre la circunferencia que tendria al punto C por centro y por radio CA. Mas, dos circunstancias distintas no pueden tener mas que un punto comun de un mismo lado de la recta que une á sus centros; luego los puntos D y A coinciden. De consiguiente los triángulos coincidirán; luego son iguales.



Corolario. — Un triángulo está determinado cuando se conocen sus tres lados.

Problema. — *Construir un triángulo conociendo los tres lados.*

Sean m, n, p, los tres lados dados. Trácese una recta BC (fig. 94) igual á m. De los extremos B y C como centros, y con radios respectivamente iguales á n y á p, trácense dos arcos de círculo que se cortarán en A. Tírense las rectas AB y AC; el triángulo ABC será el triángulo pedido.

Escolio. — Estos dos arcos de círculo se cortarán; porque siendo el triángulo posible, se tendrá (**108**) $m < n+p$ y $m > n-p$, es decir, que la distancia de los centros BC será menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia.

114. Teorema. — *Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales uno á uno, comprendiendo un ángulo igual.*

Sea (fig. 94) $BA = ED$, $BC = EF$ y el ángulo $B = E$.

Coloquemos el triángulo DEF sobre ABC, de modo que los ángulos B y E coincidan; á causa de las igualdades supuestas, el punto D caerá en A, y el punto F en C: luego DF coincidirá con AC. Los dos triángulos coincidirán, pues, en todas sus partes; luego son iguales.

Corolario. — Un triángulo está determinado cuando se conocen dos de sus lados y el ángulo comprendido.

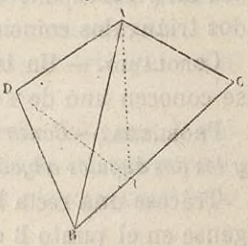
Problema. — *Construir un triángulo conociendo dos lados y el ángulo comprendido.*

Constrúyase el ángulo ABC (fig. 94) igual al ángulo dado; tómese BA y BC, respectivamente iguales á los dos lados dados, y tírese la recta AC; el triángulo ABC es el triángulo pedido.

115. Teorema. — *Cuando dos triángulos tienen dos lados iguales uno á uno y que los ángulos comprendidos entre estos* *lados son desiguales, el tercer lado opuesto al ángulo mayor, es el mayor.*

Sean ABC y ABD (fig. 94 *bis*) los dos triángulos propuestos, en los cuales supondremos AC = AD y el ángulo BAC > BAD. Siempre podrán ser colocados como lo indica la figura, de modo que dos lados iguales coincidan.

Fig. 94 bis



Trácese la bisectriz AI del ángulo total DAC, la cual será contenida necesariamente en el interior del mayor ángulo BAC, y cortará el lado BC en un punto I. Tírese la recta DI. Los triángulos DAI é IAC serán iguales, por tener un ángulo igual, DAI = IAC, comprendido entre dos lados respectivamente iguales, á saber, AI comun, y DA = AC por suposicion. Luego DI = IC.

Pero se tiene evidentemente :

$$BD < DI + IB, \quad ó \quad BD < IC + IB,$$

ó finalmente $$BD < BC;$$

que es lo que se tenia que demostrar.

Escolio. — De este teorema y del del nº **114**, se deduce inmediatamente esta Recíproca : *Si dos triángulos tienen dos lados iguales uno á uno y los terceros desiguales, los ángulos comprendidos por los lados iguales son desiguales, y el mayor es el que está opuesto al mayor lado.*

116. Teorema. — *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos iguales uno á uno.*

Sean (fig. 94) BC = EF, el ángulo B = E y el ángulo C = F. Sobrepóngase el triángulo DEF sobre ABC, de modo que EF coincida con su igual BC. Los ángulos B y

E siendo iguales, el lado ED tomará la direccion de BA, y el punto D caerá sobre BA. Por ser los ángulos F y C iguales, el lado FD tomará la direccion de CA, y el punto D caerá sobre CA. El punto D debiendo caer á la vez sobre BA y sobre CA, caerá sobre el punto A: luego los dos triángulos coincidirán; luego son iguales.

Corolario. — Un triángulo está determinado cuando se conocen uno de sus lados y los ángulos adyacentes.

Problema. — *Construir un triángulo, conociendo un lado y los dos ángulos adyacentes.*

Trácese una recta BC (fig. 94) igual al lado dado. Háganse en el punto B el ángulo CBA igual á uno de los ángulos dados, y en el punto C, el ángulo BCA igual al otro ángulo dado. Las rectas BA y CA se cortarán en un punto A, y el triángulo BAC será el triángulo pedido.

Escolio. — Cuando el triángulo es posible, la suma de los dos ángulos dados es menor que dos rectos, y las dos rectas trazadas por los puntos B y C se cortarán.

117. Teorema. — *Dos triángulos rectángulos son iguales, cuando tienen la hipotenusa igual y un cateto igual.*

Sean ABC y DEF (fig. 90) los dos triángulos rectángulos el uno en A y el otro en D; y sean BC = EF y AB = DE.

Sobreponiendo el triángulo DEF sobre ABC, de modo que DE coincida con AB, el lado DF tomará la direccion de AC, por ser rectos los ángulos D y A; y el punto F coincidirá con C; porque, de lo contrario, las dos oblícuas EF y BC no se separarian igualmente de la perpendicular AB y de consiguiente no serian iguales, lo cual es contrario á la hipótesis.

Corolario. — Un triángulo rectángulo está determinado cuando se conoce la hipotenusa y uno de los catetos.

Problema. — *Construir un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa y un cateto.*

Constrúyase el ángulo recto BAC (fig. 90). Sobre uno de sus lados tómese AB igual al lado dado; del punto B como centro, con un radio igual á la hipotenusa dada, descríbase un arco de círculo que cortará AC en un cierto punto C. Trácese la recta BC; el triángulo ABC será el triángulo pedido.

Escolio. — El arco de círculo descrito del punto B cortará la línea AC; porque suponiendo el triángulo posible, la hipotenusa será una oblícua mayor que el lado dado.

§ II. Triángulos semejantes.

118. Se dice que dos triángulos son *equiángulos entre sí*, cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales. Los lados opuestos á los ángulos iguales son llamados *lados homólogos* de estos triángulos; los vértices de los ángulos iguales son los *vértices homólogos*.

Llámase triángulos *semejantes* á los que tienen sus ángulos iguales uno á uno y sus lados proporcionales.

Vamos á ver que, en los triángulos, una de estas dos condiciones es consecuencia de la otra.

Teorema. — *Dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales tienen sus lados proporcionales, y son, de consiguiente, semejantes.*

Sean ABC y *abc* (fig. 95) dos triángulos que tienen sus ángulos iguales uno á uno, á saber : $A = a$, $B = b$ y $C = c$.

Superpóngase el triángulo *abc* sobre ABC, de modo que los ángulos iguales A y *a* coincidan, y que los otros ángulos iguales se correspondan. El lado *ab* tomará la

L. Hachette

posicion AD, el lado ac la posicion AE, y el lado bc la posicion DE. Los ángulos abc y ABC, siendo iguales por hipótesis, tambien lo serán ADE y ABC. Pero, estos últimos ocupan la posicion de correspondientes; de consiguiente las rectas DE y BC son paralelas. Luego se tiene:

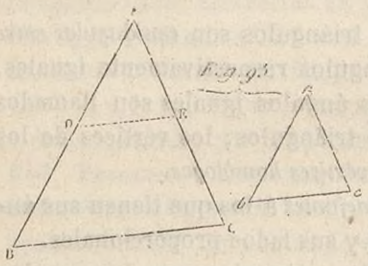
$$AD : AB = AE : AC \quad ó \quad ab : AB = ac : AC,$$
$$DE : BC = AD : AB \quad ó \quad bc : BC = ab : AB;$$

que es lo que se trataba de demostrar.

119. Recíproca del teorema anterior. — *Dos triángulos que tienen sus lados proporcionales son semejantes.*

Supongamos, en efecto, que se tengan (fig. 95) las proporciones:

$$[1] \quad ac : AC = ab : AB \quad y \quad bc : BC = ab : AB. \quad [2]$$



Tómese sobre AB una longitud AD igual á ab, y por el punto D trácese DE paralela á BC. Los triángulos ADE y ABC serán semejantes, por tener el ángulo A comun, los ángulos ADE y ABC iguales por correspondientes, como tambien los ángulos AED y ACB, por la misma razon.

Pero, á causa de las paralelas, se tiene:

$$[3] \quad AE : AC = AD : AB \quad y \quad DE : BC = AD : AB. \quad [4]$$

Las proporciones [1] y [3] tienen los tres últimos términos iguales, luego el primer término es el mismo, y $AE = ac$.

Las proporciones [2] y [4] tienen tambien sus tres últimos términos iguales; luego se tiene $DE = bc$.

De esto resulta que los triángulos ADE y abc son iguales, por tener sus tres lados iguales uno á uno. Pero ADE es semejante á ABC; luego *abc* lo es tambien.

120. Teorema. — *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.*

Supongamos, en efecto, que se tenga (fig. 95) el ángulo $A = a$, y la proporcion

$$ac : AC = ab : AB.$$

Tómese, como en la demostracion anterior, una longitud AD igual á ab, y trácese DE paralela á BC. Los triángulos ADE y ABC son semejantes, puesto que tienen el ángulo A comun é iguales los ángulos ADE y ABC por correspondientes.

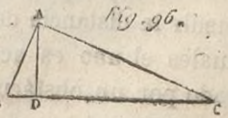
Se tendrá, pues :

$$AE : AC = AD : AB.$$

Esta proporcion y la anterior teniendo los tres últimos términos iguales, se deduce que los primeros son iguales y que se tiene $AE = ac$.

Los dos triángulos ADE y *abc* son pues iguales, por tener el ángulo $A = a$, comprendidos entre lados iguales uno á uno. Mas ADE es semejante á ABC; luego *abc* lo es tambien.

121. Teorema. — *Si del vértice* A (fig. 96) *del ángulo recto de un triángulo rectángulo, se baja la perpendicular* AD *sobre la hipotenusa, se forman dos triángulos parciales* ADB, ADC *semejantes al triángulo total.*



Porque los triángulos ADB y ABC, por ejemplo, son los dos rectángulos, el uno en D, el otro en A, y tienen además el ángulo B comun; de consiguiente (**107**), el tercer ángulo BAD del uno es igual al tercer ángulo ACB del otro. Luego estos dos triángulos son semejantes por tener sus ángulos iguales uno á uno.

Se demostraria del mismo modo que ADC es semejante á ABC.

COROLARIO I. — *Los triángulos parciales son semejantes entre sí*, por ser los dos semejantes al triángulo total.

122. COROLARIO II. — *Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento de esta que le es adyacente.*

En efecto, si se consideran los triángulos ABD y ABC, se tendrá, en virtud del teorema del nº **118**,

$$BD : AB = AB : BC.$$

Porque BD y AB estando opuestos á los ángulos iguales BAD, ACB son homólogos, y tambien lo son las hipotenusas AB y BC.

123. COROLARIO III. — *La perpendicular* AD *es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa.*

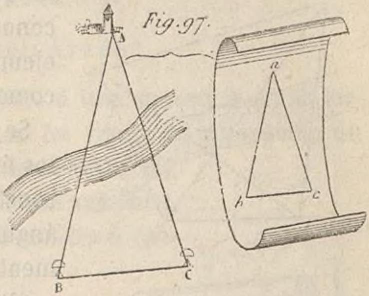
En efecto, la semejanza de los triángulos parciales da la proporcion

$$BD : AD = AD : DC.$$

Porque BD y AD son homólogos, por estar opuestos á los ángulos iguales BAD y ACD; tambien AD y DC son homólogos, por estar opuestos á los ángulos iguales ABD y DAC.

§ III. Aplicacion á la medida de las rectas inaccesibles.

124. Supongamos, en primer lugar, que se trate de medir la distancia de dos puntos A y B (fig. 97), de los cuales el uno es accesible, pero el otro se halla separado por un obstáculo que no se puede salvar. Se escoge sobre el terreno un tercer punto C, tal que la distancia BC pueda medirse directamente. A esta distancia se da el nombre de *base* de la operacion. Con el grafómetro se miden los ángulos ABC y ACD que forman con la base BC los radios visuales que van de sus extremos al punto inaccesible A.



Se traza despues sobre el papel una recta indefinida, sobre la cual se toma una longitud *bc* que tenga con BC una razon conocida; que contenga, por ejemplo, tantos milímetros como metros contiene BC. En los puntos *b* y *c*, se hacen, con un trasportador, ángulos respectivamente iguales á los que se han medido con el grafómetro. De este modo se tiene un pequeño triángulo *abc* semejante á ABC, por tener sus ángulos iguales uno á uno. Se mide *ab*, y el número de milímetros contenidos en esta línea representa el número de metros contenidos en la línea inaccesible AB.

Porque, en virtud de la semejanza de los dos triángulos, se tiene (**118**)

$$AB : ab = BC : bc.$$

Pero, BC vale 1000 veces *bc;* luego AB vale 1000 veces *ab*.

125. Supongamos, en segundo lugar, que se trate de medir la distancia de dos puntos inaccesibles A y B (fig. 98).

Se traza sobre el terreno una base CD la que se mide con mucho cuidado; y sobre el papel se traza una línea *cd* que esté con CD en razon conocida; que contenga, por ejemplo, tantos milímetros como metros contiene CD.

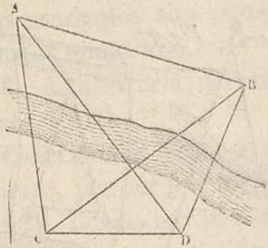
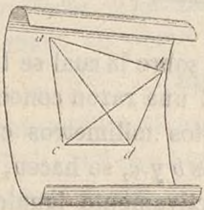


Fig. 98.



Se miden con el grafómetro los ángulos ACD, ADC, y se construyen sobre el papel los ángulos *acd*, *adc*, respectivamente iguales á los ángulos medidos; de este modo se forma un triángulo *acd* semejante á ACD, y se tiene,

$$ac : AC = 1 : 1000$$

Se miden los ángulos BDC, BCD, y se construyen sobre el papel los ángulos *bdc*, *bcd*, respectivamente iguales á los dos nuevos ángulos medidos; así se forma un triángulo *bcd* semejande á BCD; y se tiene

$$bc : BC = 1 : 1000$$

De estas dos proporciones se deduce

$$ac : AC = bc : BC.$$

Además el ángulo *acb*, que es la diferencia de los ángulos *acd* y *bcd*, es igual al ángulo ACB, que es la diferencia de los ángulos ACD y BCD. Luego, si se tira *ab*, los dos triángulos *acb*, ACB tienen un ángulo igual, comprendido entre lados proporcionales, y, de consiguiente, son semejantes (**120**). Luego se tiene

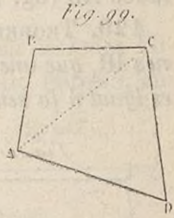
$$ab : AB = ac : AC = 1 : 1000.$$

Luego si se mide *ab*, el número de milímetros contenidos en esta línea, expresará el número de metros contenidos en la recta inaccesible AB.

CAPITULO II

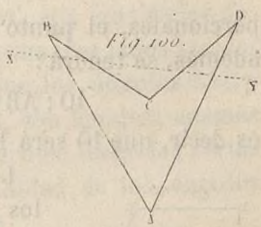
CUADRILÁTEROS

126. Se llama *cuadrilátero* á una superficie plana terminada por cuatro rectas. La figura 99 representa un cuadrilátero. Las cuatro lineas AB, BC, CD, DA, que lo terminan, son sus *lados*, cuyo conjunto forma el *perímetro* ó *contorno* del cuadrilátero.



Una línea tal como AC que une dos vértices opuestos, se llama *diagonal*. Todo cuadrilátero tiene dos diagonales, y cada diagonal lo divide en dos triángulos.

Un cuadrilátero es *convexo* cuando una recta trazada en el mismo plano no puede cortar al perímetro en mas de dos puntos. El cuadrilátero ABCD (fig. 100), que tiene un ángulo *entrante* BCD, no es convexo; porque, en este caso, una misma linea XY puede cortar sus cuatro lados. La Geometría elemental solo se ocupa de los cuadriláteros convexos.



127. Teorema. — *La suma de los cuatro ángulos de todo cuadrilátero es igual á cuatro ángulos rectos.*

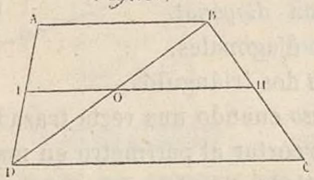
En efecto, si en el cuadrilátero ABCD (fig. 99), por ejemplo, se traza la diagonal AC, la suma de los cuatro ángulos del cuadrilátero será igual á la de los seis ángulos ABC, BCA, ACD, CDA, DAC, CAB, es decir, igual á la suma de los ángulos de los dos triángulos ABC y ADC. Mas, la suma de los ángulos de cada uno de estos triángulos es igual á dos rectos; luego la suma de los cuatro ángulos del cuadrilátero, es igual á cuatro rectos.

128. Un cuadrilátero se llama *trapecio* cuando tiene dos lados paralelos. La figura 101 representa un trapecio. Los lados paralelos AB, CD son las *bases* del trapecio.

Un trapecio se llama rectangular cuando uno de los lados AD (fig. 102) es perpendicular á las bases.

129. TEOREMA. —*En todo trapecio* ABCD (fig. 101) *la línea* IH, *que une los puntos medios de los lados no paralelos, es igual á la semi-suma de las bases.*

Fig. 101.



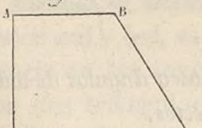
Trácese la diagonal DB, y por su punto medio O, llévese IH paralela á las bases.

Las paralelas IO y AB, cortando los lados del ángulo ADB en partes proporcionales, el punto I será el punto medio de AD; y además, se tendrá:

$$IO : AB = DO : DB = 1 : 2,$$

es decir, que IO será la mitad que AB.

Fig. 102.



Las paralelas OH y DC, cortando los lados del ángulo DBC en partes proporcionales, el punto H será el punto medio de BC; y además, se tendrá:

$$OH : DC = BO : BD = 1 : 2,$$

es decir, que OH será la mitad de DC.

Se tendrá pues:

$$IH = IO + OH = \tfrac{1}{2} AB + \tfrac{1}{2} DC = \tfrac{1}{2} (AB + DC).$$

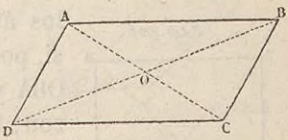
Pero, por los puntos I é H, no se puede trazar mas que una sola recta; luego, esta recta es igual á la semi-suma de las dos bases.

130. Un cuadrilátero se llama *paralelógramo*, cuando sus lados opuestos son paralelos dos á dos. La figura 103 representa un paralelógramo.

I. *En todo paralelógramo, los lados opuestos son iguales*, como paralelas interceptadas entre paralelas. Así, AB = CD, y AD = BC.

II. *Si un cuadrilátero* ABCD (fig. 103), *tiene dos lados* AD *y* BC *iguales y paralelos, es un paralelógramo*. Porque, en virtud del teorema del nº **90**, los otros dos lados, AB y CD, son tambien paralelos.

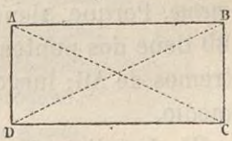
Fig. 103.



131. Teorema. — *Si en un cuadrilátero* ABCD (fig. 103), *los lados opuestos son iguales, este cuadrilátero es un paralelógramo.*

Porque si se traza la diagonal AC, son iguales los dos triángulos ABC y ADC, por tener sus tres lados iguales uno á uno. De aquí se deduce que los ángulos BAC y ACD, opuestos á los lados iguales, son iguales; además tienen la posicion de alternos-internos; luego las rectas AB y DC son paralelas. De la igualdad de los ángulos ACB y DAC se deduce asimismo el paralelismo de las rectas AD y BC. Luego el cuadrilátero es un paralelógramo.

Fig. 104.

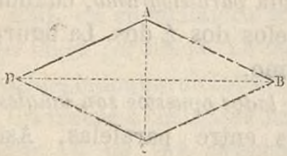


132. Un paralelógramo se dice *rectángulo* cuando tiene sus ángulos rectos (fig. 104).

Un paralelógramo se llama *rombo* ó *losange* cuando tiene sus cuatro lados iguales (fig. 105).

Cuando estas circunstancias se hallan reunidas, es decir, cuando los lados son iguales y los ángulos rectos, el paralelógramo se llama *cuadrado* (fig. 106).

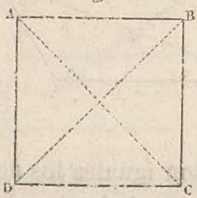
Fig. 105.



133. Teorema. — *En todo paralelógramo* ABCD (fig. 103), *las diagonales* AC *y* BD *se cortan mútuamente en dos partes iguales.*

Sea O el punto de interseccion de las dos diagonales. Los dos triángulos AOB y COD tienen el lado AB = CD, los ángulos OAB y OCD iguales entre sí, por alternos-internos, los ángulos OBA y ODC iguales por la misma razon; luego estos triángulos son iguales, por tener un lado igual é iguales los ángulos adyacentes. De aquí se deduce que OA = OC y OB = OD, como lados opuestos ó ángulos iguales. Luego el punto O es el punto medio de cada una de las dos diagonales.

Fig. 106.



134. Escolios. — I. *Las diagonales de un rectángulo* (fig. 104), *son iguales.* Esto resulta de la igualdad evidente de los triángulos BAD y CAD.

II. *Las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.* Porque, siendo los cuatro lados iguales, la recta BD tiene dos puntos, B y D, á igual distancia de los extremos de AC; luego es perpendicular á AC en su punto medio.

III. *Las diagonales de un cuadrado* (fig. 106) *son iguales entre sí, perpendiculares una á otra y se cortan en partes iguales*, puesto que un cuadrado es, á la vez, un paralelógramo, un rectángulo y un rombo.

CAPITULO III

POLÍGONOS

§ I. Propiedades principales de los polígonos. — Polígonos semejantes.

155. Llámase en general *polígono* á toda superficie plana terminada por líneas rectas. La figura ABCDEF (fig. 107) representa un polígono. Las rectas AB, BC,

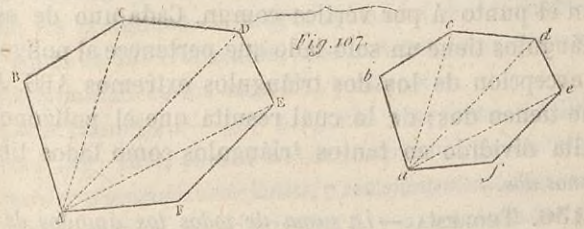


Fig. 107.

CD, etc., que la terminan, son sus *lados*: el conjunto de los lados forma su *perímetro*. Toda línea, tal como AC, AD, etc., que une dos vértices que no están sobre un mismo lado, se llama *diagonal*.

Los polígonos toman diversos nombres, segun el número de sus lados :

Un polígono de 3 lados se llama *triángulo*;

4	*cuadrilátero*;
5	*pentágono*;
6	*hexágono*;
8	*octógono*;
10	*decágono*;
12	*dodecágono*;
15	*pentedecágono*.

Los demás polígonos se designan por el número de sus lados; así se dice un polígono de 7, de 9, de 11, de 13 lados; etc.

En la Geometría elemental solo se consideran polígonos *convexos*, es decir, cuyo contorno ó perímetro no puede ser cortado por una recta mas que en dos puntos, ó que no tiene ángulos *entrantes*.

Si, en un polígono convexo ABCDEF (fig. 107), se trazan todas las diagonales que unen un vértice A á todos los demás, se divide al polígono en triángulos que tienen el punto A por vértice comun. Cada uno de estos triángulos tiene un solo lado que pertenece al polígono, á excepcion de los dos triángulos extremos ABC, AFE que tienen dos; de lo cual resulta que el polígono se halla dividido en tantos triángulos como lados tiene, *menos dos*.

136. TEOREMA.—*La suma de todos los ángulos de un polígono es igual á tantas veces dos ángulos rectos, como lados tiene, menos dos.*

Porque si se trazan todas las diagonales que parten de un mismo vértice, se divide el polígono en tantos triángulos como lados tiene, menos dos; la suma de los ángulos de todos estos triángulos es igual precisamente á la suma de los ángulos del polígono; por otra parte, la suma de los ángulos de cada triángulo vale dos rectas: luego, etc.

COROLARIO. Resulta, pues, de este teorema que:

La suma de los ángulos de un *pentágono* vale 6 ángulos rectos.

hexágono	8
octógono	12
decágono	16
dodecágono	20
etc.	etc.

157. Dos polígonos ABCDEF, *abcdef* (fig. 107), son llamados *semejantes* cuando tienen sus ángulos iguales uno á uno, y sus lados *homólogos* proporcionales. Por lados homólogos se entiende los que tienen la misma posicion en las dos figuras y que son, por consiguiente, adyacentes á dos ángulos iguales uno á uno. Los vértices de los ángulos iguales se llaman *vértices homólogos*; las diagonales que unen dos vértices homólogos son *diagonales homólogas*, etc.

En los polígonos, la proporcionalidad de los lados no es, como en los triángulos, una consecuencia necesaria de la igualdad de los ángulos, y *vice-versa.*

158. Teorema. — *Dos polígonos semejantes* ABCDEF, abcdef (fig. 107), *pueden ser descompuestos en un mismo número de triángulos semejantes, y semejantemente dispuestos.*

Desde los vértices homólogos A y *a*, trácense las diagonales homólogas AC, AD, AE, y *ac*, *ad*, *ae*. Los triángulos ABC y *abc* son semejantes, por tener un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, pues se tiene por hipótesis :

$$B = b \quad y \quad AB : ab = BC : bc.$$

De la semejanza de estos triángulos resulta la igualdad de los ángulos BCA y *bca*, y la proporcion :

$$BC : bc = AC : ac. \qquad [1]$$

Pero, siendo el ángulo BCD igual al ángulo *bcd*, si de ellos se restan respectivamente los ángulos iguales BCA y *bca*, las diferencias ACD y *acd*, serán iguales. Además se tiene por hipótesis :

$$BC : bc = CD : cd. \qquad [2]$$

Las primeras razones de las proporciones [1] y [2] son iguales ; luego :

AC : *ac* = CD : *cd*.

Los triángulos ACD y *acd*, tienen, pues, un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales; luego son semejantes.

Del mismo modo se demostraria la semejanza de los triángulos ADE y *ade*, y la de los triángulos AEF y *aef*.

Los dos polígonos están, pues, descompuestos en un mismo número de triángulos semejantes uno á uno y semejantemente dispuestos; que era lo que se trataba de demostrar.

Escolio.—Los triángulos semejantes uno á uno en que dos polígonos semejantes pueden descomponerse, se llaman *triángulos homólogos*. Esta descomposicion puede hacerse de muchas maneras.

139. Recíproca del teorema anterior.—*Si dos polígonos*, ABCDEF, abcdef (fig. 107), *están compuestos de un mismo número de triángulos respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, los dos polígonos son semejantes.*

Supongamos, en efecto, que los triángulos ABC, ACD, ADE, AEF, sean respectivamente semejantes á los triángulos *abc*, *acd*, *ade*, *aef*. Estos triángulos son equiángulos uno á uno, y sus lados homólogos son proporcionales.

De esto resulta en primer lugar: que el ángulo B es igual al ángulo *b*; que el ángulo BCD, suma de los ángulos BCA y ACD, es igual al ángulo *bcd*, suma de los ángulos *bca* y *acd* respectivamente iguales á los primeros; que el ángulo CDE, suma de los ángulos CDA y ADE, es igual al ángulo *cde*, suma de los ángulos *cda* y *ade* respectivamente iguales á los dos primeros; y así sucesivamente.

Luego 1º los dos polígonos tienen sus ángulos iguales uno á uno.

En segundo lugar, la semejanza de los mismos triángulos da las proporciones:

$$\text{AB} : ab = \text{BC} : bc = \text{AC} : ac,$$
$$\text{AC} : ac = \text{CD} : cd = \text{AD} : ad,$$
$$\text{AD} : ad = \text{DE} : de = \text{AE} : ae,$$
$$\text{AE} : ae = \text{EF} : ef = \text{AF} : af.$$

A causa de las razones comunes se tiene pues:

$$\text{AB} : ab = \text{BC} : bc = \text{CD} : cd = \text{DE} : de = \text{EF} : ef = \text{AF} : af;$$

es decir, que 2º los polígonos tienen sus lados homólogos proporcionales.

Luego, segun la definicion, estos polígonos son semejantes.

140. Teorema. — *Dos polígonos* ABCDE, abcde (fig. 108), *son semejantes, cuando los ángulos formados por dos lados homólogos* AE, ae, *con los lados y con las diagonales que se terminan á sus extremidades, son iguales uno á uno.*

En efecto: por suposicion, los ángulos BAE y *bae*; son iguales, y tambien los ángulos BEA y *bea*; luego los

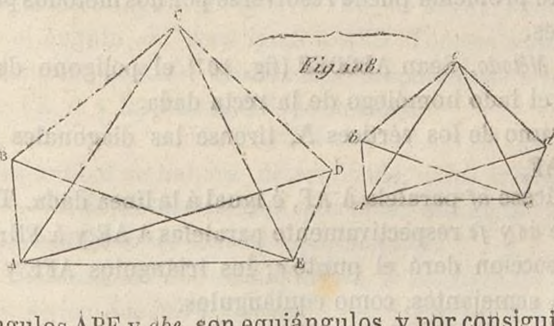


Fig. 108.

triángulos ABE y *abe*, son equiángulos y por consiguiente semejantes. De esta semejanza resulta la proporcion

$$\text{BE} : be = \text{AE} : ae.$$

Por una razon análoga, los triángulos ACE y *ace*, son semejantes, y se tiene

$$CE : ce = AE : ae.$$

De donde se deduce

$$BE : be = CE : ce.$$

Por otra parte el ángulo BCE, diferencia de los ángulos CEA y BEA, es igual al ángulo *bec*, diferencia de los ángulos *cea* y *bea*. Los dos triángulos BEC y *bec* son, pues, semejantes, por tener un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.

Continuando del mismo modo se demostraria la semejanza de todos los triángulos formados por las diagonales que parten de los vértices E y *e*. Los dos polígonos están, pues, compuestos de un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos; luego son semejantes.

141. Problema. — *Sobre una recta dada, construir un polígono semejante á otro dado.*

Este problema puede resolverse por dos métodos principales.

1er *Método.* Sean ABCDEF (fig. 107) el polígono dado, y AF el lado homólogo de la recta dada.

De uno de los vértices A, tírense las diagonales AE, AD, AF.

Trácese *af* paralela á AF, é igual á la línea dada. Trácense *ae* y *fe* respectivamente paralelas á AE y á FE; su interseccion dará el punto *e*; los triángulos AFE y *afe* serán semejantes, como equiángulos.

Trácense *ad* y *ed* respectivamente paralelas á AD y á ED; su interseccion dará el punto *d*; los triángulos AED y *aed* serán semejantes, como equiángulos.

Trácense tambien *ac* y *dc* respectivamente paralelas á AC y DC; su interseccion dará el punto *c*; los triángulos ADC y *adc* serán semejantes, como equiángulos.

Continuando del mismo modo, se formará un polígono *abcdef* semejante al polígono dado; puesto que los dos estarán compuestos de un mismo número de triángulos semejantes uno á uno y dispuestos en el mismo órden.

2° *Método*. Si no se pueden emplear las diagonales AE, AD, AC, se procederá de la manera siguiente:

Trácese siempre *af* igual á la recta dada considerada como homóloga del lado AF.

Hágase el ángulo *afe* igual á AFE, y tómese sobre *fe*, á partir del punto *f*, una cuarta proporcional á las líneas AF, *af* y FE; de modo que se tenga

$$AF : af = FE : fe.$$

El punto *e* estará determinado, y los triángulos AFE y *afe* serán semejantes, por tener un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.

Hágase el ángulo *fed* igual á FED; de lo cual resultará que el ángulo *aed* será igual á AED. Tómese sobre *ed*, á partir del punto *e*, una cuarta proporcional á las líneas FE, *fe* y ED; de modo que se tenga

$$FE : fe = ED : ed.$$

El pundo *d* se hallará determinado, y los triángulos AED y *aed* serán semejantes, por tener un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.

Y continuando del mismo modo, se formará un polígono *abcdef* que será semejante al polígono ABCDEF, por estar compuestos de un mismo número de triángulos semejantes uno á uno y dispuestos en el mismo órden.

§ II. Aplicacion al levantamiento de planos.

142. Levantar el plano de un terreno, es trazar en pequeño sobre el papel una figura semejante á la que tiene el terreno.

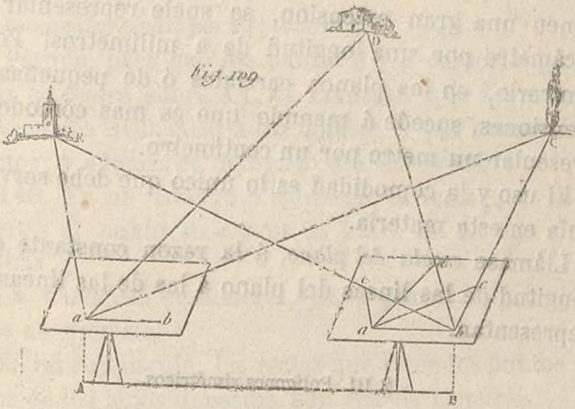
El medio mas espedito para levantar el plano de un terreno consiste en el empleo de la *plancheta.*

Se da este nombre á una tablilla de madera, muy bien arreglada, que descansa, en su centro, en un soporte de tres piés. La tablilla está sujeta al soporte por un gozne de tornillo, que la permite tomar todas las posiciones posibles en relacion con el soporte. La superficie de la plancheta está cubierta con un pliego de papel, bien liso. Para trazar allí rectas en la direccion de los rayos visuales, tiradas desde el ojo hácia los objetos mas notables del terreno, se emplea una *alidada*, semejante á la del grafómetro, provista de pínulas, pero enteramente libre y pudiéndose colocar en la plancheta, en todas las direcciones posibles, y se emplea la misma alidada, como una regla, para trazar rectas en la plancheta, en la direccion indicada por las pínulas.

Cuando se quiere levantar un plano por medio de la plancheta, se traza en el terreno una recta AB (fig. 109) que se mide y sirve de base á la operacion. Se traza otra *ab* en la plancheta y se la da una longitud que tenga con AB una relacion determinada, que encierre, por ejemplo, tantos milímetros como AB contenga de metros. Se coloca la plancheta en el punto A y se la dispone de modo : 1° Que no se incline á ningun lado (ya veremos mas tarde como se obtiene esto) ; 2° que el punto *a* se halle precisamente encima del punto A; 3° que dirigiendo la alidada segun *ab* se perciba el punto

B detrás de los hilos de las pínulas. Se tiran entonces las rectas aE, aD, aC dirigiendo la alidada hácia los puntos del terreno que se quiere fijar en el plano.

Se transporta en seguida la plancheta en el punto B y se la dispone de tal modo : 1º que no se incline hácia ningun lado ; 2º que el punto b esté exactamente encima de B ; 3º que dirigiendo la alidada segun ba, se perciba el punto A detrás de los hilos de las pínulas. Se trazan entonces las rectas bE, bD, bC, dirigiendo de nuevo la alidada hácia los puntos anteriormente observados.



Las intercesiones de estas nuevas rectas con las primeras, determinan, en el papel, los vértices e, d, c, de un polígono $abcde$ que es semejante al polígono ABCDE, en virtud de la proposicion del nº 140.

143. Cuando las diferentes líneas que forman el contorno del terreno pueden ser medidas con la cadena de agrimensor, se puede proceder del modo siguiente:

Se traza sobre el papel una línea af (fig. 107), que esté en razon determinada con uno de los lados del polígono que forma el terreno; se la tomará, por ejemplo, igual á tantos milímetros como metros tenga este lado. Se mide el ángulo AFE con el grafómetro; se hace el ángulo *afe* = AFE; se toma *ed* igual á tantos milímetros como ED contiene de metros. Y continuando así, se obtiene un polígono *abcdef* semejante á ABCDEF, como lo hemos visto en el nº **141** (2º método).

144. La reduccion mas cómoda consiste en representar, como hemos dicho, cada metro por un milímetro; pero es fácil comprender que esta razon no se puede emplear en todos los casos. En los planos que tienen una gran extension, se suele representar un decámetro por una longitud de 4 milímetros. Por el contrario, en los planos parciales ó de pequeñas dimensiones, sucede á menudo que es mas cómodo representar un metro por un centímetro.

El uso y la comodidad es lo único que debe servir de guia en esta materia.

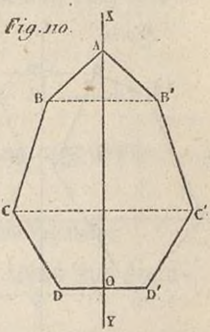
Llámase *escala del plano*, á la razon constante de la longitud de las líneas del plano á las de las líneas que representan.

§ III. Polígonos simétricos.

145. Un polígono ABCDD'C'B'A (fig. 110) se llama *simétrico*, cuando se le puede dividir por medio de una recta XY en dos partes ABCDO, AB'C'D'O, que coincidirian si se doblase la figura sobre XY. Esta línea XY se llama *eje de simetría*.

Los vértices B, B' *que se corresponden en una y otra parte del eje de simetría, se hallan situados sobre una misma perpendicular á este eje.* Porque, puesto que las dos partes de la figura coinciden, por hipótesis, cuando se dobla la figura sobre XY, las perpendiculares bajadas de los puntos B y B′ sobre esta línea, la cortarán en un mismo punto, y cada una será el prolongamiento de la otra. Lo mismo sucedería con los vértices C, C′; y así sucesivamente.

Fig. 110.



Además se ve que las rectas BB′, CC′, etc., son divididas en partes iguales por el eje XY.

Cuando uno de los lados DD′ *es cortado por el eje de simetría, este eje le es perpendicular y pasa por su punto medio* O. Porque, para que los puntos D y D′ coincidan al doblar la figura sobre XY, es menester que los ángulos adyacentes AOD, AOD′ sean iguales, y por consiguiente rectos; y además es necesario que OD′ = OD.

146. En un triángulo isósceles, la recta que va del vértice al punto medio de la base, es un eje de simetría.

Un triángulo equilateral, tiene por consiguiente, 3 ejes de simetría.

En un rectángulo, las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos, son ejes de simetría.

En el rombo ó losange, las diagonales son dos ejes de simetría.

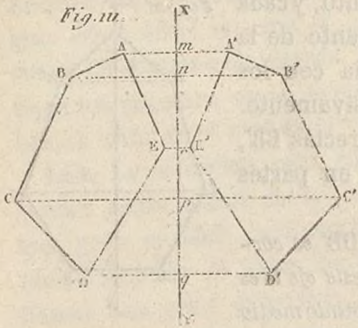
El cuadrado tiene 4 ejes de simetría, puesto que es, á la vez, un rectángulo y un rombo.

En el círculo, cada diámetro es un eje de simetría.

147. Dos polígonos son llamados *simétricos*, el uno con respecto al otro, cuando están compuestos de los mismos elementos (lados y ángulos) dispuestos en sentido contrario.

Dado que sea un polígono ABCDE (fig. 111), es fácil construir un polígono simétrico. Para esto, se traza en el plano del polígono dado, una recta cualquiera XY; de los vértices del polígono dado, se bajan sobre esta línea las perpendiculares Am, Bn, Cp, Dq, Er, y se prolongan de cantidades respectivamente iguales mA', nB', pC', qD', rE'; y se tiran las líneas A'B', B'C', C'D', D'E', E'A'.

Fig. 111.



Claro está, en efecto, que si se dobla la figura sobre XY, las perpendiculares mA' y mA coincidirán, y lo mismo sucederá con las perpendiculares nB' y nB; y así de las demás. Los vértices del polígono A'B'C'D'E' vendrán, pues, á colocarse sobre los vértices del polígono ABCDE, y los dos polígonos coincidirán. Estos dos polígonos tienen, pues, sus elementos iguales uno á uno; por otra parte, es evidente que estos elementos están dispuestos en órden inverso en los dos polígonos; luego, por definicion, estos dos polígonos son simétricos entre sí.

148. En la figura 111, los dos polígonos ABCDE y A B'C'D'E', son á la vez simétricos de forma y de posicion; de forma, por tener sus elementos iguales uno á uno y dispuestos en órden inverso; de posicion, porque los vértices que se corresponden se hallan á diferente lado de XY sobre una misma perpendicular á esta línea y á distancias iguales.

La línea XY es un eje de simetría respecto al conjunto de los dos polígonos. Se dice tambien que estos polígonos están colocados *simétricamente* con respecto á esta línea.

CAPITULO IV

POLÍGONOS REGULARES Y MEDIDA DE LAS CIRCUNFERENCIAS DE CÍRCULO

§ I. Propiedades principales de los polígonos regulares.

149. Un polígono es *regular* cuando tiene sus ángulos iguales y todos sus lados iguales.

Conocido el número de los lados de un polígono regular se puede deducir el valor comun de cada uno de sus ángulos.

Porque, si n indica el número de los lados ó de los ángulos del polígono propuesto, la suma de los ángulos valen juntos 2 rectos multiplicados por $n-2$ (**136**); y como todos son iguales, cada uno valdrá la n^a parte de la suma, ó

$$\frac{2(n-2)}{n}$$

tomando el ángulo recto por unidad. De aquí se deduce que el ángulo de un triángulo equilateral vale $\frac{2}{3}$ de ángulo recto;

del cuadrado	1 ángulo recto;
del pentágono regular	$\frac{6}{5}$ de ángulo recto;
del hexágono regular	$\frac{4}{3}$
del octógono regular	$\frac{3}{2}$
del decágono regular	$\frac{8}{5}$
del dodecágono regular	$\frac{5}{3}$
etc.	etc.

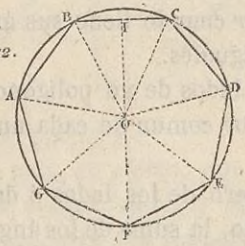
150. TEOREMA.—*Todo polígono regular* ABCDEFG (figura 112) *es inscriptible en un círculo.*

Es decir, que se puede trazar una circunferencia que pase por todos los vértices.

Por tres vértices consecutivos A, B, C, trácese una circunferencia, y sea O su centro; esta circunferencia pasará por los demás vértices del polígono.

Para demostrarlo, tracemos desde el punto O sobre BC la perpendicular OI, la que dividirá la cuerda BC en dos partes iguales; y tracemos las rectas OA y OD.

Fig. 112.



Doblando la figura sobre OI, por ser rectos los ángulos cuyo vértice es el punto I, IC tomará la direccion de IB; y como IB = IC, el punto C caerá en B. Los ángulos B y C siendo iguales por ser el polígono regular, el lado CD tomará la direccion de BA, y como estos lados son iguales, el punto D caerá en A; y las rectas OD y OA coincidirán. De esto resulta que las rectas OD y OA son iguales, y que, por consiguiente, la circunferencia trazada desde el punto O por centro con OA por radio, pasará por el punto D.

Del mismo modo se demostraria que esta circunferencia pasa por el punto E y por los demás vértices del polígono.

ESCOLIO. — Esta circunferencia se llama *circunscripta* al polígono.

151. RECÍPROCA. — *Si una circunferencia se divide en partes iguales, y si por los puntos consecutivos de division se trazan cuerdas, el polígono formado por ellas será regular.*

En efecto, sus lados serán iguales, como cuerdas correspondientes á arcos iguales; y sus ángulos serán iguales como inscriptos en segmentos iguales (ABC, BCD, CDE, etc., fig. 112).

Escolios.—I. El centro O de la circunferencia circunscripta á un polígono regular se llama *centro* del polígono. El radio OA de esta circunferencia es el *radio* del polígono. La perpendicular OI, trazada desde el centro sobre un lado, se llama la *apotema* del polígono.

II. El ángulo AOB formado por dos radios AO, OB que terminan á dos vértices consecutivos, se llama *ángulo central* del polígono. Todos los ángulos centrales AOB, BOC, COD, etc., de un mismo polígono regular, son iguales puesto que interceptan arcos iguales.

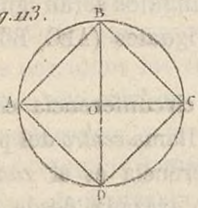
La suma de todos estos ángulos, siendo igual á 4 ángulos rectos, se vé que para conocer el valor de un ángulo central, basta dividir 4 rectos por el número de ángulos centrales, ó por el número de lados del polígono. De este modo se deduce que el valor de un ángulo central es:

por el triángulo equilátero	$\frac{4}{3}$ de ángulo recto;
el cuadrado	1 de ángulo recto;
el pentágono	$\frac{4}{5}$ de ángulo recto;
el hexágono	$\frac{2}{3}$ de ángulo recto;
el octógono	$\frac{1}{2}$ de ángulo recto;
el decágono	$\frac{2}{5}$ de ángulo recto;
el dodecágono	$\frac{1}{3}$ de ángulo recto;
etc.	etc.

III. Los radios OA, OB, OC, etc., dividen el polígono en tantos triángulos isósceles iguales como lados tiene.

IV. Siendo estos triángulos iguales, las perpendiculares, tal como OI, bajadas del centro sobre los lados, son todas iguales. De aquí resulta que si, desde el punto O como centro, con OI por radio, se traza una circunferencia, esta circunferencia pasará por los piés de todas estas perpendiculares, y será tangente á todos los lados.

Fig. 113.



Se enuncia esta propiedad diciendo que *todo polígono regular es circunscriptible al círculo.*

Al contrario, á la circunferencia tangente á todos los lados de un polígono regular se dice que es *inscripta* á este polígono.

132. PROBLEMA.—*Inscribir un cuadrado en un círculo.*

Trácense dos diámetros perpendiculares uno á otro, AC y BD (fig. 113), y únanse sus extremos por las rectas AB, BC, CD, DA.

Los cuatro ángulos centrales siendo iguales, lo son tambien los arcos correspondientes AB, BC, CD, DA. La circunferencia estando, pues, dividida en cuatro partes iguales en los puntos A, B, C, D, el polígono ABCD es regular.

COROLARIO.—Si cada uno de los arcos AB, BC, etc., se divide en dos partes iguales, la circunferencia estará dividida en 8 partes iguales, y los 8 puntos de division podrán servir de vértices al octógono regular inscripto. Doblando el número de divisiones, se obtendrán suce sivamente los polígonos regulares de 16, 32, 64, etc., lados.

133. PROBLEMA.—*Inscribir en un círculo un hexágono regular.*

Sea AB (fig. 114) el lado del hexágono. Trácense los radios OA y OB; el ángulo central AOB valdrá $\frac{2}{3}$ de ángulo recto (151, escol. II). Luego la suma de los ángulos OBA y OAB valdrá 2 rectos menos $\frac{2}{3}$ de recto, es decir, $\frac{4}{3}$ de recto; y como estos ángulos son iguales, puesto que el triángulo AOB es isósceles, cada uno de ellos valdrá la mitad de $\frac{4}{3}$, es decir, $\frac{2}{3}$ de ángulo recto. De esto resulta que el triángulo AOB es equiángulo y por consiguiente equilátero y que se tiene $AB = AO$, es decir, que el lado del hexágono regular inscripto es igual al radio de la circunferencia.

Fig. 114.

Para dividir una circunferencia en 6 partes iguales, bastará, pues, llevar sucesivamente sobre esta circunferencia 6 aberturas de compás consecutivas, iguales á su radio.

Uniendo los puntos de division consecutivos, se obtendrá el hexágono regular inscripto.

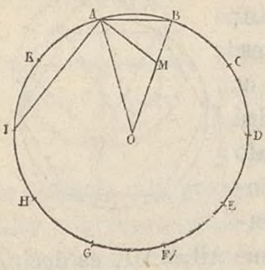
Corolarios. — I. La circunferencia está dividida en *tres* partes iguales en los puntos A, C, E; luego trazando AE, se tendrá el lado del triángulo equilateral inscripto.

II. Doblando al contrario sucesivamente el número de divisiones, se obtendrá los polígonos regulares de 12, 24, 48 lados y así sucesivamente.

154. Problema. — *Inscribir en un círculo un decágono regular.*

Sea AB (fig. 115) el lado del decágono regular; trácense los radios OA, OB; el ángulo central AOB valdrá $\frac{2}{5}$ de ángulo recto (151, escol. II). La suma de los ángulos OAB y OBA valdrán, pues, 2 rectos menos $\frac{2}{5}$, es decir, $\frac{8}{5}$ de ángulo recto; y como estos ángulos son iguales, puesto que el triángulo AOB es isósceles, cada uno de ellos valdrá la mitad de $\frac{8}{5}$, es decir, $\frac{4}{5}$ de ángulo recto, y será por consiguiente dos veces mayor que el ángulo central AOB.

Fig. 115.



Dividiendo el ángulo OAB en dos partes iguales por la recta AM, cada uno de los ángulos OAM, BAM, valdrá $\frac{2}{5}$ de ángulo recto. De esto resulta primeramente que el triángulo OMA es isósceles, y que se tiene AM = OM. En segundo lugar, que los triángulos MAB y AOB tienen sus ángulos respectivamente iguales; porque tienen el ángulo B comun, y el ángulo MAB = AOB = $\frac{2}{5}$ de ángulo recto. Estos triángulos, son, pues semejantes; y puesto que AOB es isósceles, MAB lo es tambien, y se tiene MA = AB; y por consiguiente OM = AB. De la semejanza de estos triángulos se deduce además la proporcion

$$MB : AB = AB : OA,$$

ó bien

$$MB : OM = OM : OB;$$

es decir, que el radio OB está dividido en el punto M en media y extrema razon (**105**), y que el lado AB del decágono regular inscripto es igual al mayor de los segmentos OM.

Luego para dividir una circunferencia en 10 partes iguales, se dividirá su radio en media y extrema razon, y se llevarán sobre esta circunferencia 10 aberturas de compás consecutivas iguales al mayor de los dos segmentos.

Uniendo los puntos de division consecutivos de la circunferencia, se obtendrá el decágono regular inscripto.

Corolario I. — La circunferencia está dividida en 5 partes iguales en los puntos A, C, E G, I; luego uniendo A á I, la línea AI será el lado del pentágono regular inscripto.

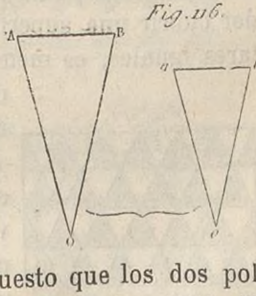
Corolario II. — Si se doblan, al contrario, sucesivamente el número de divisiones, se obtendrán los polígonos regulares de 20, 40, 80 lados y así sucesivamente.

155. Teorema. — *Dos polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes.*

En efecto, sus ángulos son iguales, puesto que el valor comun de los ángulos de un polígono regular depende únicamente del número de los lados (**149**); y sus lados homólogos forman una serie de razones idénticas, puesto que cada uno de los polígonos tiene todos sus lados iguales. Estos polígonos son, pues, semejantes.

156. Teorema. — *Los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados son proporcionales á sus radios.*

Fig. 116.



Sean en efecto AOB y *aob* (fig. 116) dos de los triángulos isósceles en que los dos polígonos pueden ser descompuestos (**151**, III). Los ángulos centrales AOB y *aob* son iguales, puesto que los dos polígonos tienen el mismo número de lados (**151**, II);

además, puesto que los triángulos son isósceles, los lados que comprenden estos ángulos son idénticamente proporcionales; luego estos triángulos son semejantes y se tiene la proporcion

$$\mathrm{AB} : ab = \mathrm{AO} : ao.$$

Sea n el número de lados de cada uno de los polígonos; multiplicando por n los dos términos de la primera razon de la proporcion anterior, lo cual no altera esta razon, se tendrá

$$\mathrm{AB} \times n : ab \times n = \mathrm{AO} : ao;$$

mas $\mathrm{AB} \times n$ es el perímetro del primer polígono, y $ab \times n$ es el perímetro del segundo; designando estos perímetros por P y p, se tendrá pues

$$P : p = \mathrm{AO} : ao;$$

lo que se queria demostrar.

§ II. Aplicacion al entarimado de los pisos.

157. Se emplean con frecuencia polígonos regulares en el enlosado y en el entarimado de los pisos.

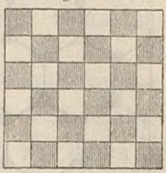
La suma de todos los ángulos formados al rededor de un mismo punto siendo igual á 4 rectos, para poder cubrir una superficie plana con polígonos regulares iguales, es menester que el ángulo de cada uno de estos polígonos sea una parte alícuota de 4 ángulos rectos.

Fig. 117.

Esto sucede con el triángulo equilátero, porque su ángulo, que vale $\frac{2}{3}$ de ángulo recto, es la 6ª parte de 4 rectos. Esto tiene igualmente lugar con el cuadrado, puesto que su ángulo siendo recto, es la 4ª parte de

4 rectos. Tambien esto se verifica con el hexágono, porque su ángulo, que vale $\frac{4}{3}$ de ángulo recto, es la 3ª parte de 4 rectos.

Fig. 118.



Luego se puede enlosar ó entarimar un piso con triángulos equiláteros ensemblándolos 6 por 6 (fig. 117), con cuadrados ensemblándolos 4 por 4 (fig. 118 y 119), ó con hexágonos regulares ensemblados 3 por 3 (fig. 120).

No se pueden emplear pentágonos regulares, porque el ángulo de estos polígonos, que vale $\frac{6}{5}$ de ángulo recto, no es una parte alícuota de 4 ángulos rectos. Mucho menos pueden emplearse polígonos de un número de lados superior á 6, porque entonces 3 ángulos de estos polígonos, darian una suma superior á

Fig. 119.

Fig. 120.

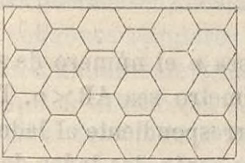


Fig. 121.

4 ángulos rectos.

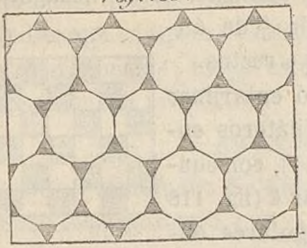
158. Pero se obtienen nuevas disposiciones de enlosado, empleando conjuntamente varias especies de polígonos regulares.

Por ejemplo se puede cubrir un piso con :

octógonos y cuadrados (fig. 121);

Fig. 122.

Fig. 123.



hexágonos y triángulos equiláteros (fig. 122);

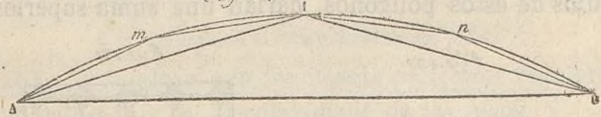
dodecágonos y triángulos equiláteros (fig. 123).

§ III. Propiedades del círculo que dependen de los polígonos regulares.

159. El perímetro de un polígono regular inscripto en una circunferencia es siempre menor que esta circunferencia; porque cada uno de sus lados es menor que el arco correspondiente.

Si se dobla el número de los lados de un polígono regular inscripto, el perímetro del nuevo polígono será mayor y de consiguiente se aproximará mas de la circunferencia. En efecto, sea AB (fig. 124) el lado de un

Fig. 124.



polígono regular inscripto, sea n el número de sus lados, de suerte que su perímetro sea $AB \times n$. Tómese el punto medio I del arco correspondiente al lado AB, y trácense IA é IB; estas rectas serán dos lados del polígono regular inscripto de un número de lados doble, y el perímetro de este polígono será $IA \times 2n$ ó

$$(IA + IB) \times n.$$

Pero, se tiene, segun la definicion de la línea recta,

$$IA + IB > AB,$$

por consiguiente

$$(IA + IB) \times n > AB \times n,$$

es decir, que el nuevo perímetro es mayor que el primero, y por consiguiente se aproxima mas de la circunferencia en la que estos dos polígonos están inscriptos.

Esta circunferencia es un *límite* hácia el cual tienden ó se aproximan los perímetros de los polígonos regulares inscriptos á medida que el número de sus lados va aumentando; y, en la práctica llega pronto, en efecto, un momento en que el perímetro del polígono se confunde sensiblemente con la circunferencia, porque los arcos vienen á ser bastante pequeños para confundirse en apariencia con los lados correspondientes.

Es, pues, permitido el considerar una circunferencia como el perímetro de un polígono regular cuyos lados son infinitamente pequeños y en número infinitamente grande.

160. Teorema. — *Las circunferencias de círculo son proporcionales á sus radios.*

Porque, segun lo que acabamos de decir, dos circunferencias pueden ser consideradas como los perímetros de dos polígonos regulares semejantes de un número de lados infinitamente grande; y desde luego se les puede aplicar el teorema del nº **156**.

Corolario I. — Siendo los diámetros el doble de los radios, se puede decir que *dos circunferencias son proporcionales á sus diámetros.*

Corolario II. — Para trazar una circunferencia que sea el doble, el triple, etc., de una circunferencia dada, basta emplear un radio doble, triple, etc.

161. Del teorema precedente resulta además que *la razon de una circunferencia á su diámetro es constante por todas las circunferencias.*

E. Hachette

Porque, si C y C′ designan dos circunferencias y D y D′ sus diámetros, se tendrá, en virtud de este teorema :

$$C : C' = D : D',$$

ó, cambiando el órden de los medios,

$$C : D = C' : D'.$$

Esta razon constante entre la circunferencia y el diámetro se representa por la letra griega π (pronúnciese *pi*), y se escribe de consiguiente

$$\frac{C}{D} = \pi;$$

de donde se saca

$$C = \pi D \quad ó \quad C = 2\pi R,$$

si R designa el radio.

Se ve, pues, que para obtener la longitud de una circunferencia cuando se conoce la de su diámetro, D ó 2R, basta multiplicar el nombre que expresa la longitud del diámetro por π.

Por métodos que no podemos explicar aquí [1], se encuentra que el número π tiene por valor 3,1415926..... ó aproximadamente 3,1416. Este número difiere poco de $\frac{22}{7}$, número dado por Arquímedes como valor aproximado de π. Por este último valor se ve que una circunferencia es igual á tres veces su diámetro, mas una cantidad un poco menor de la 7ª parte de su diámetro.

162. Conociendo el valor de π se pueden resolver varios problemas numéricos, de los que daremos algunos ejemplos.

I. *Un estanque circular tiene 24ᵐ de diámetro; hallar su circuito.*

1. Véase nuestra *Geometría teórica y práctica*, 4ª edicion, números **290** á **304**.

Multiplíquese el diámetro 24^m por la razon π de la circunferencia al diámetro, ó por 3,1416; lo cual da por resultado $75^m,3984$, ó aproximadamente $75^m,40$.

II. *Calcular el radio del meridiano de Paris, suponiendo que sea perfectamente circular.*

La longitud de este meridiano siendo de 40000000^m, para hallar su diámetro no hay mas que dividir este número por π, ó por 3,1415926, lo que da, á menos de un metro, 12732395^m. La mitad de este número, ó 6366197^m, es el radio pedido.

III. *Una rueda de coche tiene $1^m,80$ de diámetro; se pide cuántas vueltas dará por kilómetro.*

La circunferencia de esta rueda tiene de longitud $1^m,80 \times \pi$; para hallar el número de vueltas, no hay mas que dividir un kilómetro ó 1000^m por esta circunferencia ó por

$1^m,80 \times 3,1416$, lo que da $\dfrac{1000}{1,80 \times 3,1416}$,

ó 176,8..., ó cerca de 177 vueltas.

165. Hemos visto en el nº **29** el modo de comparar un arco con la circunferencia de que forma parte. Podemos ahora enseñar el modo de obtener el valor en números de la longitud de un arco.

Sean A la longitud de un arco, N el número de grados que contiene, R el radio de la circunferencia de la que forma parte, la que representaremos por C. Se tendrá

$$A : C = N : 360,$$

ó

$$A : 2\pi R = N : 360, \qquad [1]$$

de donde se saca

$$A = 2\pi R . \frac{N}{360};$$

es decir que : *para hallar la longitud de un arco, no hay mas que multiplicar la de la circunferencia entera por la razon entre el número de grados que contiene el arco y* 360.

EJEMPLO. — *Hallar la longitud de un arco de* 48° *y cuyo radio es de* 0m,60.

La fórmula da

$$A = 2 \times 3,1416 \times 0^m,6 \times \tfrac{48}{360} = 0^m,5026.$$

164. La proporcion establecida en el número que precede resuelve tambien el problema inverso; á saber: conociendo la magnitud de un arco y su radio, hallar el número de grados que contiene. En efecto, de la proporcion [1] se saca

$$N = 360^0 \times \frac{A}{2\pi R};$$

es decir que : *para hallar la graduacion de un arco cuya magnitud y radio son conocidos, no hay mas que multiplicar* 360° *por la razon de la magnitud del arco á la de la circunferencia entera.*

EJEMPLO. — *Sobre una circunferencia cualquiera, cuál es el arco cuya magnitud es igual al radio.*

En este caso, se tiene $A = R$; de consiguiente

$$N = \frac{360^0}{2\pi} = \frac{180^0}{\pi} = \frac{180^0}{3,1416},$$

ó

$$N = 57^0\ 17'\ 44'',3.$$

CAPITULO V.

MEDIDA DE LAS ÁREAS.

§ 1. Teoremas sobre la medida de las áreas.

165. Medir el área de una figura, es hallar su razon á otra área tomada por unidad.

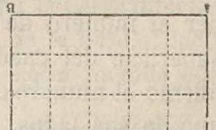
Ordinariamente se toma por unidad de área la del cuadrado cuyo lado es igual á la unidad lineal. Si, por ejemplo, la unidad lineal es el metro, la unidad de área es el área del cuadrado que tiene un metro de lado, la cual se llama *metro cuadrado*. Si se toma el decímetro por unidad de longitud, la unidad de área será el *decímetro cuadrado*, y así sucesivamente.

166. Teorema. — *El área del rectángulo tiene por medida el producto de su* base *por su* altura.

(Se llama *base* á uno cualquiera de los lados del rectángulo, ordinariamente al que ocupa la parte inferior de la figura, uno cualquiera de los lados adyacentes á la base se llama *altura*.)

El enunciado de este teorema significa que, para obtener el número de unidades de área contenidas en la superficie del rectángulo, es menester determinar el número de unidades *de longitud* contenidas en su base, el número de unidades *de longitud* contenidas en su altura, y hacer el producto de estos dos números.

Sean, en efecto, ABCD (fig. 125) un rectángulo, AB su base y AD su altura. Supongamos, para mas claridad, que AB contenga 5 veces la unidad de longitud, y que AD la contenga 3 veces. Divídase AB en 5 partes iguales, y, por todos los puntos de division, trácense paralelas á AD. Divídase AD en 3 partes iguales, y, por todos los puntos de division, trácense paralelas á AB. De este modo la figura total se halla dividida en figuras parciales que son cuadrados, por tener todos sus ángulos rectos y sus lados iguales por ser estos iguales, sea á las divisiones de AB (89), sea á las divisiones de AD, es decir, á la unidad lineal. Estas figuras parciales



son pues unidades de área, y falta solo determinar su número.

Puesto que el rectángulo ABCD se halla dividido en tantas líneas horizontales de unidades de área como unidades de longitud hay en la altura AD, es decir, en 3; que cada una de estas líneas contienen tantos cuadrados ó unidades de área como unidades lineales hay en AB, es decir, 5; el número total de unidades de área es pues, 5 × 3 ó 15.

Los razonamientos que preceden son independientes del número de unidades de longitud contenidas en la base AB y en la altura AD y de la magnitud de esa unidad de longitud.

Advertencia. — Si la base y la altura no contuviesen un número exacto de veces la unidad de longitud adoptada, se podria tomar una unidad mas pequeña, y tan pequeña que fuese contenida un número exacto de veces en AB y AD.

Corolario. — Cuando el rectángulo propuesto es un cuadrado, la base y la altura son iguales; y para obtener el número de unidades de área contenidas en la superficie del cuadrado, se ha de multiplicar por sí mismo el número de unidades de longitud que contiene uno de sus lados. Por esto en la Aritmética se da el nombre de *cuadrado* al producto de un número por sí mismo.

Si, por ejemplo, el lado de un cuadrado contiene 2 unidades de longitud, su superficie contendrá, 2 × 2 ó 4 unidades de área. Si el lado contiene 3 unidades de longitud, la superficie contendrá 3 × 3 ó 9 unidades de área; y así sucesivamente.

Un centímetro valiendo 10 milímetros, un centímetro cuadrado vale 10 × 10 ó 100 milímetros cuadrados. Por la misma razon, un decímetro cuadrado vale 100 centímetros cuadrados; un metro cuadrado vale 100 decímetros cuadrados; un decámetro cuadrado vale 100 metros cuadrados: un hectómetro cuadrado vale 100 decámetros cuadrados; y así sucesivamente.

APLICACIONES NUMÉRICAS. — I. *La tela de un cuadro, de forma rectangular, tiene* $2^{m},62$ *de longitud y* $1^{m},94$ *de altura; ¿cuál es su surperficie?*

La longitud es de 262 centímetros, la altura de 194 centímetros; la superficie es, pues, de 262 × 194 ó 50828 centímetros cuadrados, ó $5^{m.c.}$ $8^{d.c.}$ $28^{c.c.}$.

II. *El piso de una sala cuadrada tiene* $6^{m},51$ *de longitud; ¿cuál es su superficie?*

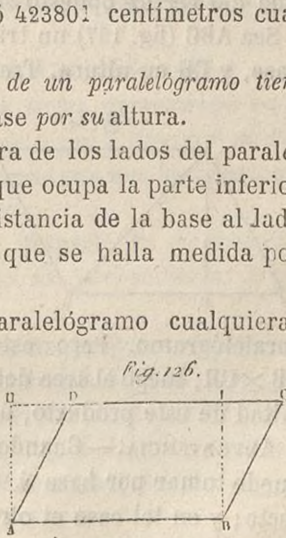
El lado del cuadrado es de 651 centímetros; luego la superficie es de 651 × 651 ó 423801 centímetros cuadrados ó bien $42^{m.c.}$ $38^{d.c.}$ $1^{c.c.}$.

167. TEOREMA. — *El área de un paralelógramo tiene por medida el producto de su* base *por su* altura.

(Llámase *base* uno cualquiera de los lados del paralelógramo, ordinariamente al que ocupa la parte inferior de la figura; la *altura* es la distancia de la base al lado que le es paralelo, distancia que se halla medida por la perpendicular comun.)

Sea ABCD (fig. 126) un paralelógramo cualquiera. Desde los puntos B y A bajemos sobre CD y su prolongacion las perpendiculares BI y AH. La figura ABIH será un rectángulo. Los triángulos rectángulos AHD y BIC son iguales; porque tienen sus hipotenusas iguales,

Fig. 126.



AD = BC como lados opuestos de un mismo paralelógramo, y los lados iguales AH = BI por la misma razon.

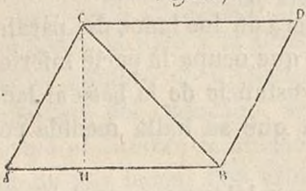
Puesto que, si de la figura total AHCB se quita el triángulo AHD, queda el paralelógramo ABCD; y si de esta misma figura total AHCB se quita el triángulo BIC, queda el rectángulo ABIH. El rectángulo es, pues, equivalente en superficie al paralelógramo. Pero el rectángulo ABIH tiene por medida AB × IB; luego el paralelógramo tiene la misma medida, es decir, su base AB multiplicada por su altura IB.

168. Teorema. — *El área de un triángulo tiene por medida la mitad del producto de su* base *por su* altura.

(Se puede tomar por *base* de un triángulo á uno cualquiera de sus lados; su *altura* es la perpendicular bajada del vértice opuesto sobre la base.)

Sea ABC (fig. 127) un triángulo cualquiera. Sea AB su base, y CH su altura. Tracemos CD paralela á AB, y BD paralela á AC, la figura ABCD será un paralelógramo. Los dos triángulos ABC, DCB son iguales por tener sus tres lados iguales uno á uno; el triángulo ABC es pues la mitad del paralelógramo. Pero este último tiene por medida AB × CH; luego el área del triángulo tiene por medida la mitad de este producto, ó $\frac{1}{2}$ AB × CH.

Fig. 127.

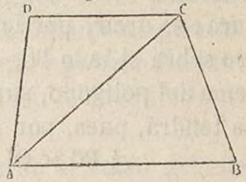


Advertencia. — Cuando el triángulo es rectángulo se puede tomar por base á uno de los lados del ángulo recto; y en tal caso el otro lado del ángulo recto es la altura del triángulo.

169. Teorema.—*El área de un trapecio tiene por medida el producto de su* altura *por la semi-suma de sus* bases. (Se llama *altura* de un trapecio á la distancia de los dos lados paralelos, á los cuales se da el nombre de *bases*, como anteriormente se ha dicho).

Sea ABCD (fig. 128) un trapecio. Llamemos h su altura. Tracemos la diagonal AC. El triángulo ABC tendrá por medida $\frac{1}{2}\,AB \times h$; puesto que su altura es igual á la del trapecio. Por la misma razon el triángulo ADC tendrá por medida $\frac{1}{2}DC \times h$; porque DC puede ser tomado por su base y entonces su altura es la del trapecio. El área de este último siendo la suma de las áreas de los dos triángulos se tendrá, pues, por expresion de su área.

Fig. 128.



$$\tfrac{1}{2}AB \times h + \tfrac{1}{2}\,CD \times h \text{ ó } h \times \tfrac{1}{2}\,(AB + CD).$$

Corolario.—Segun lo que se ha demostrado en el nº **129**, se puede decir que: *un trapecio tiene por medida el producto de su altura por la recta que une los puntos medios de los dos lados no paralelos.*

Advertencia.—Cuando el trapecio es rectangular (fig. 102), su altura es el lado AD perpendicular á sus dos bases.

170. Para medir el área de un polígono cualquiera ABCDEF (fig. 107), se le puede dividir en triángulos, por medio de diagonales tiradas por un mismo vértice, medir separadamente el área de cada triángulo, y sumarlas. En la Agrimensura se emplea otro método de que hablaremos mas lejos.

171. Teorema.—*El área de un polígono regular tiene* *por medida la mitad del producto de su perímetro por su apotema.*

Si desde el centro O de un polígono regular ABCDEFG (fig. 112) se trazan radios á todos los vértices, hemos visto que el polígono se halla dividido en tantos triángulos isósceles iguales como lados tiene. Puesto que, uno de estos triángulos, BOC por ejemplo, tiene por medida la mitad del producto de su base BC por su altura; es decir, por la perpendicular OI bajada del centro sobre el lado BC, ó en otros términos, por la apotema del polígono, suponiendo n el número de los lados, se tendrá, pues, por la medida del área del polígono

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{BC}\times\mathrm{OI}\times n \quad \text{ó} \quad \tfrac{1}{2}\,\mathrm{BC}\times n\times\mathrm{OI}.$$

Pero, $\mathrm{BC}\times n$, ó uno de los lados repetidos tantas veces como lados hay, es el perímetro del polígono; llamándolo P se tendrá luego, por la expresion del área del polígono regular,

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}\times\mathrm{OI},$$

lo cual viene á ser el enunciado del teorema.

Advertencia. —Por métodos sacados de la Trigonometría, se puede calcular la superficie de un polígono regular cuando se conoce el número de sus lados y la longitud de uno de ellos. Por estos métodos se halla, a representando el lado, que la superficie

del *triángulo equilátero* tiene por expresion	$0{,}4330.a^2$
del *cuadrado*	a^2
del *pentágono*	$1{,}7205.a^2$
del *hexágono*	$2{,}5981.a^2$
del *octógono*	$4{,}8284.a^2$
del *decágono*	$7{,}6942.a^2$
del *dodecágono*	$11{,}1962.a^2$
etc.	etc.

Por ejemplo, para conocer el área de un octógono regular, cuyo lado tiene 12^{m}, se tendria que multiplicar 12 por sí mismo, y el producto por 4,8284, lo que daria por resultado $695^{m.c.}$ $28^{d.c.}$ $96^{c.}$

172. Teorema.—*El área de un círculo tiene por medida la mitad del producto de su circunferencia por su radio.*

En efecto, un círculo pudiendo ser considerado como el límite de un polígono regular cuyos lados son infinitamente pequeños y en número infinitamente grande, se le puede aplicar la medida de estos polígonos. Pero entonces el perímetro se confunde con la circunferencia y la apotema con el radio.

Corolario.—Representando por R el radio del círculo, su circunferencia tendrá por expresion $2\pi R$; por consiguiente, su superficie se expresará por $\frac{1}{2}.2\pi R.R$ ó por πR^2. Es decir, que el *área de un círculo tiene por medida el producto del cuadrado de su radio por la razon de la circunferencia al diámetro.*

Aplicaciones numéricas.—I. *Un estanque circular tiene* 20^{m} *de diámetro; ¿cuál es su superficie?*

El diámetro siendo de 20^{m}, el radio es de 10^{m}; el cuadrado de este radio es de $100^{m.c.}$ Multiplicando por 3,1416, se tiene por la superficie pedida $314^{m.c.}$, 16.

II. *¿Cuál debe ser el radio de un círculo para que su superficie sea de un metro cuadrado?*

La superficie siendo expresada por πR^2, dividiéndola por π se tendrá el cuadrado del radio. Dividamos, pues, $1^{m.c.}$ por 3,141592, lo que da por cociente $0^{m.c.}$,318309. Este número expresando el cuadrado del radio, su raiz cuadrada 0^{m},564 expresará el radio mismo.

III. *La circunferencia de un círculo es de* 1 *metro; ¿cuál es su superficie?*

La circunferencia siendo de 1^m, el diámetro es el cociente de 1^m por π, es decir $\frac{1^m}{\pi}$; el radio vale, pues, $\frac{1^m}{2\pi}$, y la superficie, que es la mitad del producto de la circunferencia por el radio, valdrá $\frac{1}{2}\,1^m.\ \frac{1^m}{2\pi}$ ó $\frac{1^{m.c.}}{4\pi}$ ó $\frac{1^{m.c.}}{4.3,1416}$, es decir, $7^{m.c.},9577$ aproximadamente.

§ II. Aplicaciones á la agrimensura.

173. Sabido es que, para medir las tierras, el hectómetro cuadrado toma el nombre de *hectárea*, el decámetro cuadrado el nombre de *área*, y el metro cuadrado el nombre de *centiárea*.

I. *Sea propuesto medir un campo de forma rectangular, que tiene* $24^{decam.},7$ *de largo y* $13^{decam.},3$ *de ancho.*

La base del rectángulo tiene 247 metros, y su altura tiene 133; segun el teorema del nº **166**, la superficie del campo es, pues, 247×133 ó 32851 metros cuadrados, ó 3 hectáreas, 28 áreas y 51 centiáreas.

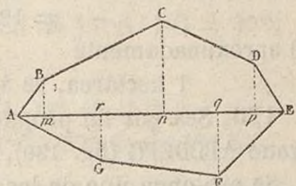
II. *Sea propuesto medir una pieza de tierra en forma de trapecio cuya altura es de* 97 *metros, y cuyas bases son respectivamente de* 231 *y* 145 *metros.*

La semi-suma de estas bases es de 188 metros; en virtud de la proposicion del nº **169**, la superficie pedida será pues $188^m \times 97$ ó 18236 metros cuadrados; ó lo que es lo mismo 1 hectárea, 82 áreas, 36 centiáreas.

174. Sea ahora propuesto medir un terreno poligonal ABCDEFG (fig. 129), cuyo interior es accesible. En lugar de dividirlo en triángulos, se le divide del modo siguiente, que disminuye mucho el número de operaciones que se tienen que efectuar sobre el terreno.

Por los dos vértices mas distantes, A y E, se traza la recta AE, á la cual se da el nombre de *directriz*. De todos los demás vértices B, C, D, F, G, se bajan sobre esta directriz las perpendiculares Bm, Cn, Dp, Fq, Gr. De este modo el polígono se halla dividido en triángulos rectángulos y en trapecios rectángulos, es decir, que tienen dos ángulos rectos. Este modo de dividir el terreno ofrece, entre otras ventajas, la de no tener que trasportar la escuadra de agrimensor sino sobre la directriz para determinar los puntos m, r, n, q, p. Además, una vez hecha la division, no es necesario trazar ninguna otra línea para medir el área de cada una de las figuras que componen el polígono.

Fig. 129.



Con la cadena de agrimensor se miden las perpendiculares Bm, Cn, Dp, Fq, Gr; y las diferentes partes Am, mr, rn, nq, qp, pE, de la directriz. Se tiene entonces :

$$\text{Triángulo } ABm = \tfrac{1}{2}\, Am \,.\, Bm;$$
$$\text{Trapecio } BmnC = \tfrac{1}{2}\, mn \,.\, (Bm + Cn);$$

y así de las demás.

Si se supone, por ejemplo, que se han hallado los valores siguientes :

$Am = 20^{m},5$	$Bm = 27^{m},2$
$mn = 60^{m},3$	$Cn = 52^{m},0$
$np = 57^{m},1$	$Dp = 43^{m},5$
$pE = 31^{m},8$	$Fq = 62^{m},1$
$qE = 55^{m},7$	$Gr = 48^{m},9$
$rq = 73^{m},6$	
$Ar = 40^{m},4$	

Se tendrá, efectuando sucesivamente las operaciones indicadas:

$$
\begin{aligned}
\textit{Área}\ \mathrm{ABCDEFG} = \tfrac{1}{2}\ [557^{\mathrm{m.c.}},60 &+ 4775,76 + 5453,05 \\
&+ 1383,30 + 3458,97 + 8169,60 \\
&+ 1975,56] \\
&= 12886^{\mathrm{m.c.}},92
\end{aligned}
$$

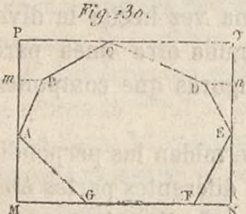
ó aproximadamente

1 hectárea, 28 áreas, 87 centiáreas.

175. Sea por fin propuesto medir el área de un polígono ABCDEFG (fig. 130), cuyo interior es inaccesible.

Se prolonga uno de los lados, FG por ejemplo. Desde los vértices extremos, A y E, se bajan sobre la prolongacion de FG las perpendiculares AM y EN las que se prolongan mas allá de los puntos A y E. Por el vértice C el mas distante de FG, se traza una paralela PO terminada á la interseccion con las rectas MA y NE. De esta manera se forma un grande rectángulo MNOP, circunscripto al polígono propuesto.

Fig. 130.



El método consiste á avaluar el área de este rectángulo y á restar el área comprendida entre el perímetro del polígono y el del rectángulo; la diferencia expresa evidentemente el área del polígono propuesto.

Para esto, de todos los vértices del polígono que no están situados sobre alguno de los lados del rectángulo, se bajan perpendiculares B*m*, D*n* sobre sus lados. Se miden estas perpendiculares con la cadena de agrimensor, así que las longitudes AM, A*m*, P*m*, PC, CO, O*n*, *n*E, EN, FN, FG, MG. Fácil es entonces de avaluar el área del rectángulo MNOP, las de los triángulos rectángulos AMG, AmB, DEn, ENF, y las de los trapecios rectángulos PCBm, COnD.

Suponiendo que se haya hallado :

$$m\text{B} = 20^{\text{m}};\ \text{D}n = 22^{\text{m}},3;\ \text{MA} = 50^{\text{m}},7;\ \text{A}m = 41^{\text{m}};$$
$$m\text{P} = 37^{\text{m}},8;\ \text{PC} = 76^{\text{m}},9;\ \text{CO} = 75^{\text{m}};\ \text{O}n = 39^{\text{m}},2;$$
$$n\text{E} = 48^{\text{m}},6;\ \text{EN} = 41^{\text{m}},2;\ \text{FN} = 43^{\text{m}},4;\ \text{MG} = 30^{\text{m}};$$

resultará :

$$\text{MN} = \text{PO} = 76^{\text{m}},9 + 75^{\text{m}} = 151^{\text{m}},9;$$
$$\text{MP} = \text{ON} = 50^{\text{m}},7 + 41^{\text{m}} + 37^{\text{m}},8 = 129^{\text{m}},5.$$

Se hallará por el área del rectángulo $19671^{\text{m.c.}},05$; y por la de las partes AMG, AmB, ect., exteriores al polígono :

$$\tfrac{1}{2}\left[1521^{\text{m.c.}} + 820^{\text{m.c.}} + 3662^{\text{m.c.}},82 + 3814^{\text{m.c.}},16 + 1083^{\text{m.c.}},78 + 1809^{\text{m.c.}},78\right]$$

ó $$6355^{\text{m.c.}},77.$$

Por consiguiente el área del polígono es igual á

$$19671^{\text{m.c.}},05 - 6355^{\text{m.c.}},77,$$

es decir, $13315^{\text{m.c.}},28$ ó aproximadamente 1 hectárea, 33 áreas y 15 centiáreas.

CAPITULO VI.

COMPARACION DE LAS ÁREAS.

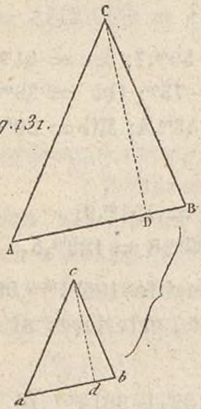
§ I. Teoremas principales sobre la comparacion de las áreas.

176. TEOREMA. — *Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

Sean ABC y *abc* (fig. 131) dos triángulos semejantes. Desde los vértices homólogos C y *c* bajemos sobre los lados opuestos las perpendiculares AD y *ad*.

Los triángulos propuestos siendo semejantes, sus lados homólogos son proporcionales, y se tiene :

Fig. 131.



$$AB : ab = AC : ac. \qquad [1]$$

Los triángulos rectángulos ACD y *acd*, teniendo el ángulo agudo A igual al ángulo *a*, son equiángulos, y por consiguiente semejantes : luego se tiene tambien :

$$CD : cd = AC : ac. \qquad [2]$$

Multiplicando ordenadamente las proporciones [1] y [2], y dividiendo por 2 los dos términos de la primera razon, se tiene :

$$\tfrac{1}{2}AB\times CD : \tfrac{1}{2}ab\times cd = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2;$$

Pero, $\frac{1}{2}AB\times CD$ es la medida del área del triángulo ABC, y $\frac{1}{2}ab\times cd$ la del área del triángulo *abc*; luego se tiene

$$ABC : abc = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2;$$

que es lo que se trataba de demostrar.

Advertencia.—En lugar de la razon $\overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$, se puede poner $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ ó $\overline{CB}^2 : cb^2$, puesto que de la proporcionalidad de los lados homólogos, resulta la proporcionalidad de sus cuadrados.

177. Teorema.—*Las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los lados homólogos.*

Sean ABCDEF y *abcdef* (fig. 107) dos polígonos semejantes. Desde los vértices homólogos A y *a*, trácense las diagonales AC, AD, AE, *ac*, *ad*, *ae*, que dividirán los dos polígonos en un mismo número de triángulos semejantes uno á uno.

En virtud de esta semejanza y del teorema anterior, tendremos sucesivamente :

$$\mathrm{ABC} : abc = \overline{\mathrm{BC}}^2 : \overline{bc}^2,$$
$$\mathrm{ACD} : acd = \overline{\mathrm{CD}}^2 : \overline{cd}^2,$$
$$\mathrm{ADE} : ade = \overline{\mathrm{DE}}^2 : \overline{de}^2,$$
$$\mathrm{AEF} : aef = \overline{\mathrm{EF}}^2 : \overline{ef}^2,$$

Mas los polígonos siendo semejantes, sus lados homólogos son proporcionales; de consiguiente los cuadrados de estos lados son tambien proporcionales. De esto resulta que las segundas razones de las proporciones anteriores son iguales; luego las primeras lo son tambien; y se tiene :

$$\mathrm{ABC} : abc = \mathrm{ACD} : acd = \mathrm{ADE} = ade = \mathrm{AEF} : aef.$$

Pero, en una série de razones iguales, la suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes como un antecedente cualquiera es á su consecuente. Aquí la suma de los antecedentes forma el polígono ABCDEF, y la suma de los consecuentes forma el polígono *abcdef*, luego se tiene

$$\mathrm{ABCDEF} : abcdef = \mathrm{ABC} : abc.$$

Comparando esta proporcion con la proporcion [1], se ve que tienen una razon comun ABC : *abc*; luego las dos segundas razones son iguales, y se tiene por fin

$$\mathrm{ABCDEF} : abcdef = \overline{\mathrm{BC}}^2 : bc^2.$$

ADVERTENCIA. — En lugar de la razon $\overline{\mathrm{BC}}^2 : bc^2$, se puede tomar la razon de los cuadrados de dos lados homólogos cualesquiera, y tambien la razon de los cuadrados de dos diagonales homólogas.

COROLARIO. — Si dos polígonos son semejantes y los lados del uno son 2, 3, 4, 5, 10 veces mas grandes que los lados homólogos del otro, el área del primero será 4, 9, 16, 25, 100 veces mayor que el área del segundo.

178. Teorema. — *Las áreas de dos polígonos regulares de un mismo número de lados son proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

Sean AB y *ab* (fig. 116, pág. 109) dos lados de estos polígonos; O y *o* sus centros; trácense los radios OA, OB y *oa*, *ob*.

Los ángulos O y *o* siendo una misma fraccion de 4 ángulos rectos, son iguales, y los triángulos isósceles AOB y *aob*, son semejantes. Luego se tiene, en virtud de la proposicion del nº **176**,

$$\mathrm{AOB} : aob = \overline{\mathrm{AO}}^2 : \overline{ao}^2.$$

Representando por *n* el número de los lados de cada uno de estos dos polígonos, y multiplicando por este número los dos términos de la primera razon, tendremos

$$\mathrm{AOB} \times n : aob \times n = \overline{\mathrm{AO}}^2 : \overline{ao}^2.$$

Pero los dos términos de la primera razon expresan precisamente las áreas de los dos polígonos; luego estas áreas son proporcionales á los cuadrados de los radios.

Advertencia. — En lugar de la razon de los cuadrados de los radios, se puede tomar la razon de los cuadrados de las apotemas; porque estas últimas son proporcionales á los radios.

179. Teorema. — *Las áreas de dos círculos son proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

Porque representando por A y *a* las áreas dos círculos y por R y *r* sus radios, se tiene (**172** corol.)

$$\mathrm{A} = \pi \mathrm{R}^2 \quad \text{y} \quad a = \pi r^2;$$

de donde resulta la proporcion idéntica

$$A : a = \pi R^2 : \pi r^2;$$

ó dividiendo por π los dos términos de la segunda razon,

$$A : a = R^2 : r^2.$$

Advertencia.—En lugar de la razon de los cuadrados de los radios, se puede poner la razon de los cuadrados de los diámetros, por ser estos proporcionales á los radios.

Corolario.—Si el radio de un círculo se vuelve 2, 3, 4,.... 10 veces mayor, su superficie se volverá 4, 9, 16,.... 100 veces mayor; y así sucesivamente.

180. Teorema.—*Dos rectángulos que tienen la misma altura son proporcionales á sus bases.*

Porque si A, B, H representan respectivamente el área, la base y la altura de un rectángulo; a, b, h, el área, la base y la altura de otro rectángulo, se tiene (**166**):

$$A = B \times H \quad y \quad a = b \times h;$$

de donde resulta la proporcion idéntica,

$$A : a = B \times H : b \times h,$$

es decir, que dos rectángulos son *proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

Mas si las alturas son iguales, esta altura viene á ser un factor comun á los dos términos de la segunda razon; y suprimiéndolo, queda

$$A : a = B : b.$$

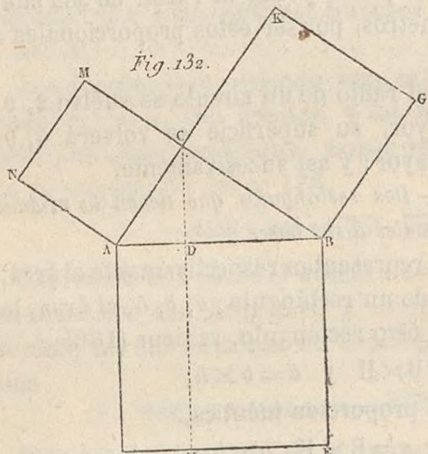
Advertencia.—Se demostraria del mismo modo que las áreas de dos rectángulos que tienen la misma base son proporcionales á sus alturas.

181. Teorema.—*Dos triángulos de misma altura son proporcionales á sus bases.*

La demostracion es la misma que la del teorema anterior.

182. TEOREMA.—*El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los dos catetos.*

Sea ABC (fig. 132) un triángulo rectángulo en C; sean ABEF, CBGK y ACMN, los cuadrados construidos sobre sus tres lados. Desde el vértice C bajemos sobre la hipotenusa AB y sobre su paralela FE la perpendicular comun CDH.



El triángulo ADC siendo semejante al triángulo total (**122**), se tiene la proporcion

$$AD : AC = AC : AB,$$

de donde se saca

$$AD \times AB = \overline{AC}^2,$$

ó, poniendo en lugar de AB su igual AF,

$$AD \times AF = \overline{AC}^2.$$

Pero, $AD \times AF$ es la medida del área del rectángulo ADHF, y $\overline{AC}^2$ es la medida del cuadrado ACMN; luego este rectángulo y este cuadrado son equivalentes.

Se demostraria del mismo modo que el rectángulo DBEH es equivalente al cuadrado CBGK.

Mas la suma de los rectángulos ADHF y DBEH forma el cuadrado ABEF construido sobre la hipotenusa; este cuadrado es, pues, equivalente á la suma de los cuadrados ACMN y CBGK construidos sobre los dos catetos.

Corolario. — Si el triángulo es á la vez rectángulo é isósceles, los cuadrados construidos sobre los catetos son iguales; y el cuadrado construido sobre la hipotenusa es el doble de cada uno de ellos.

183. Teorema. — *Los cuadrados* ACMN, CBGK (fig. 132) *construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo* ABC, *son proporcionales á los segmentos* AD, DB *de la hipotenusa* (determinados por la perpendicular CD, bajada del vértice del ángulo recto).

En efecto, la razon de estos cuadrados es igual á la de los rectángulos ADHF y DBEH, que les son respectivamente equivalentes. Pero, estos rectángulos teniendo la misma altura son en razon de sus bases AD y DB (**180**). Luego se tiene

$$\mathrm{ACMN} : \mathrm{CBGK} = \mathrm{AD} : \mathrm{DB},$$

ó bien
$$\overline{\mathrm{AC}}^2 : \overline{\mathrm{CB}}^2 = \mathrm{AD} : \mathrm{DB}.$$

§ II. Problemas sobre la comparacion de las áreas.

184. Problema I. — *Construir un cuadrado equivalente á un rectángulo dado.*

Sean B y H la base y la altura del rectángulo. Hállese una media proporcional entre estas dos líneas (**102**); representándola por x, tendremos

$$\mathrm{B} : x = x : \mathrm{H};$$

de donde se saca

$$x^2 = B \times H.$$

Pero, x^2 es la medida del área del cuadrado que tiene por lado x; y $B \times H$ es la medida del área del rectángulo dado. El cuadrado construido sobre la media proporcional entre B y H será, pues, equivalente al rectángulo dado.

185. Problema II. — *Construir un cuadrado equivalente á un rectángulo dado.*

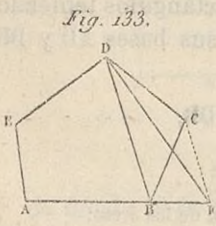
Hállese una media proporcional entre su base y la mitad de su altura; esta será el lado del cuadrado pedido.

La demostracion es la misma que la del problema anterior.

186. Problema III. — *Construir un cuadrado equivalente á un polígono dado.*

Sea ABCDE (fig. 133) el polígono dado. Trácese la diagonal DB que determina el triángulo BCD. Prolónguese AB y trácese CF paralela á esta diagonal; únanse despues los puntos D y F. Los triángulos DCB y DFB teniendo la misma base DE, y sus vértices C y F colocados en una misma paralela á la base, tienen sus alturas iguales (**70**); estos triángulos son, pues, equivalentes. Luego si del polígono dado se quita el triángulo DCB y se añade el triángulo equivalente DFB, se tendrá un nuevo polígono AFDE equivalente al primero. Mas este nuevo polígono tendrá un lado menos, puesto que AB y BF son en línea recta.

Fig. 133.



Repitiendo la misma construccion, se disminuirá sucesivamente el número de lados del polígono, hasta reducirlo á un triángulo equivalente. Construyendo entonces el cuadrado equivalente á este triángulo (185), se tendrá el cuadrado equivalente al polígono dado.

187. PROBLEMA. IV. — *Construir un cuadrado equivalente á un círculo.*

Este problema, conocido bajo el nombre de la CUADRATURA DEL CÍRCULO, ha ocupado durante mucho tiempo á los geómetras; mas está demostrado que no puede resolverse exactamente por medio de la regla y del compás. Se puede resolver por medio del cálculo, con toda la aproximacion que se quiera.

Porque, representando por R el rádio del círculo y por x el lado del cuadrado equivalente, tendremos

$$x^2 = \pi R^2; \quad \text{de donde se saca} \quad x = R\sqrt{\pi}.$$

Pero, la razon π se ha calculado hasta con 140 decimales; luego se podrá sacar su raiz cuadrada con un grado de aproximacion superior al que se necesita en las aplicaciones ordinarias. Si se toma por π el valor 3,14159..., se halla por su raiz cuadrada 1,77245, á menos de una media unidad del quinto órden decimal. Se tendrá, pues

$$x = R \times 1{,}77245,$$

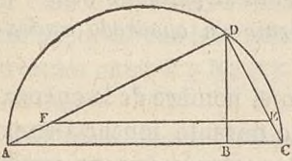
á menos de una mitad de la cienmilésima parte del radio.

Si, por ejemplo, el radio fuese de 100^m, el lado del cuadrado equivalente al círculo seria 177,245, á menos de un medio milímetro.

188. PROBLEMA V. — *Construir un cuadrado que tenga con otro dado la misma razon que los números* p *y* q.

Tómense sobre una recta indefinida una parte AB (fig. 134) igual á p unidades de magnitud arbitraria, y en seguida de AB, tómese otra parte BC igual á q de estas mismas unidades. Sobre AC descríbase una semi-circunferencia. Levántese en B la perpendicular BD, y trácense las rectas DA y DC. Tomando sobre DC, á partir del punto D, una longitud DE igual al cuadrado dado, y trazando por E una paralela EF á CA; la distancia DE será el lado del cuadrado pedido.

Fig. 134.



En efecto, el ángulo ADC siendo inscrito en un semicírculo, el triángulo ADC es rectángulo. La recta BD siendo la perpendicular bajada del vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa, se tiene, en virtud de la proposicion del nº **183**,

$$\overline{AD}^2 : \overline{DC}^2 = AB : BC. \qquad [1]$$

Pero las paralelas FE y AC dividiendo en partes proporcionales á los lados del ángulo ADC, se tiene la proporcion

$$AD : DC = DF : DE,$$

de donde se saca

$$\overline{AD}^2 : \overline{DC}^2 = \overline{DF}^2 : \overline{DE}^2. \qquad [2]$$

Las proporciones [1] y [2] teniendo una razon comun, las otras dos razones forman la proporcion

$$\overline{DF}^2 : \overline{DE}^2 = AB : BC,$$

ó

$$\overline{DF}^2 : \overline{DE}^2 = p : q,$$

es decir, que la razon del cuadrado construido sobre DF al cuadrado dado es igual á la razon de p á q.

189. PROBLEMA VI. — *Construir un polígono semejante á otro dado, y que tenga con este la razon de* p *á* q.

Sea P el área del polígono dado; X la del polígono pedido; a uno de los lados del polígono dado, x su homólogo en el polígono pedido.

Los polígonos siendo semejantes sus áreas están en razon de los cuadrados de los lados homólogos; luego se tiene

$$X : P = x^2 : a^2;$$

mas, segun el enunciado, se debe tener tambien

$$X : P = p : q,$$

de donde se saca, á causa de la razon comun,

$$x^2 : a^2 = p : q,$$

es decir, que el problema queda reducido á hallar el lado x de un cuadrado, que esté con el cuadrado dado a^2 en la misma razon que p y q; que es el problema anterior.

Conociendo el lado homólogo de a, no hay mas que construir sobre dicho lado un polígono semejante al polígono dado (**141**.)

190. PROBLEMA VII. — *Construir un cuadrado equivalente á la suma de dos cuadrados dados.*

Constrúyase un triángulo rectángulo cuyos catetos sean respectivamente iguales á los lados de los dos cuadrados dados; la hipotenusa de este triángulo será el lado del cuadrado pedido (**182**.)

191. PROBLEMA VIII. — *Construir un polígono* P″ *equivalente á la suma de dos polígonos semejantes dados* P y P′, *y que les sea semejante.*

Sean a y a' dos lados homólogos de los dos polígonos semejantes P y P′; sea x el lado homólogo del polígono semejante P″.

Tendremos en primer lugar (**177**):

$$P : P' = a^2 : a'^2 \qquad [1]$$

y

$$P'' : P = x^2 : a^2. \qquad [2]$$

De la primera proporcion se saca

$$P + P' : P = a^2 + a'^2 : a^2$$

ó, reemplazando $P + P'$ por su equivalente P″,

$$P'' : P = a^2 + a'^2 : a^2. \qquad [3]$$

Las proporciones [2] y [3] teniendo sus tres primeros términos iguales, el cuarto debe ser igual; es decir, que se debe tener

$$x^2 = a^2 + a'^2.$$

El problema se reduce, pues, á hallar el lado x de un cuadrado equivalente á la suma de dos cuadrados dados a^2 y a'^2; es decir, al problema anterior.

Habiendo determinado el lado x homólogo de a, se construirá sobre este lado un polígono semejante al polígono P (**141**); este será el polígono pedido.

192. Problema IX. — *Construir un círculo equivalente á la suma de otros dos círculos dados.*

Constrúyase un triángulo rectángulo cuyos catetos sean respectivamente iguales á los radios de los círculos dados; la hipotenusa de este triángulo será igual al radio del círculo pedido.

Pues, representando por R y R′ los radios de los círculos dados y por R″ la hipotenusa del triángulo rectángulo, se tendrá (**182**);

$$R''^2 = R^2 + R'^2;$$

de donde se saca, multiplicando por π los dos miembros de esta igualdad,

$$\pi R''^2 = \pi R^2 + \pi R'^2.$$

Mas $\pi R''^2$, πR^2, $\pi R'^2$, expresan respectivamente las áreas de los círculos que tienen R″, R y R′ por radios (**172**, corol.); luego el círculo que tiene por radio la hipotenusa del triángulo rectángulo es equivalente á la suma de los círculos dados.

SEGUNDA PARTE

GEOMETRIA DEL ESPACIO

CAPITULO PRIMERO

DE LA LÍNEA RECTA Y DEL PLANO

§ I. De la línea recta y del plano en general.

193. Teorema. — *Si una recta tiene dos puntos en un plano, estará toda ella en dicho plano.*

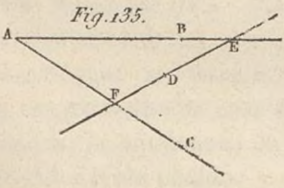
Este teorema es una consecuencia inmediata de la definicion del plano (6).

Corolario. — *Una recta solo puede encontrar á un plano en un punto, á menos de estar toda ella en dicho plano.*

194. Teorema. — *Dos planos que tienen tres puntos comunes, no situados en línea recta, coinciden en toda su extension.*

Sean A, B y C (fig. 135), tres puntos que no están en línea recta, y supongamos, si es posible, que por ellos pasan dos planos diferentes, que llamaremos M y P para fijar las ideas. Si por los puntos A y B se hace pasar una recta, estará toda ella situada en los planos M y P (**193**). De la misma manera, si por los puntos A y C se hace pasar una recta, estará tambien situada en los dos planos M y P.

Fig. 135.



Sea ahora D, un punto cualquiera del plano M; digo que pertenece tambien al otro plano P. En efecto, trácese en el plano M y por el punto D una recta EF que corte á las rectas AB y AC (prolongándolas si fuese necesario) en los puntos E y F. Por pasar la recta EF por los puntos E y F que están en el plano P, estará situada en dicho plano; luego el punto D que pertenece á la recta EF, estará tambien en el plano P. Del mismo modo se demostraria que otro punto cualquiera de uno de los dos planos, pertenece tambien al otro; luego los dos planos coinciden en toda su extension.

Corolarios. — I. *Tres puntos que no están en línea recta determinan la posicion de un plano.* Porque si por dos de estos puntos se hace pasar una recta y por esta recta un plano, se podrá hacer girar este plano al rededor de la recta hasta que pase por el tercer punto; en este caso el plano queda determinado de posicion, y á mas ningun otro plano podrá pasar por los mismos tres puntos sin confundirse con él.

Del mismo modo se verá que:

II. *Dos rectas que se cortan determinan la posicion de un plano.*

III. *Dos rectas paralelas determinan un plano.*

En primer lugar las dos paralelas están en un mismo plano, segun la definicion de las paralelas (66, Advert.). En segundo lugar por dos paralelas solo puede pasar un plano, pues si se toman dos puntos sobre una de ellas y otro punto sobre la otra, se tendrán tres puntos que no están en línea recta, y por consiguiente, solo puede pasar por ellos un plano.

195. Teorema. — *La interseccion de dos planos es una línea recta.* Por ser los planos superficies su interseccion ha de ser una línea. Digo ahora que esta línea será recta; porque si esta línea tuviese solamente tres puntos no situados en línea recta, los dos planos se confundirian en virtud del teorema precedente.

§ II. Rectas perpendiculares á un plano.

196. Teorema. — *Si una recta* AO (fig. 136) *es perpendicular á otras dos* OB *y* OC *que pasan por su pié* O *en el plano* MN, *tambien será perpendicular á otra recta* OD *que pasa por su pié en el mismo plano.*

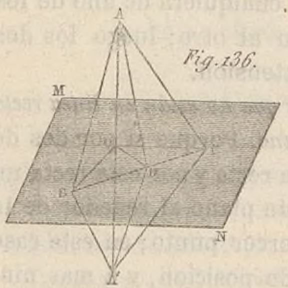


Fig. 136.

Para demostrarlo trácese una recta cualquiera BC que corte á las rectas OB, OD, OC; prolónguese AO por la parte inferior del plano MN de una cantidad OA′ igual á OA; únanse los puntos A y A′ con B, D y C.

Las rectas CA y CA′ son iguales porque están en un mismo plano con las AA′ y OC, y sus piés A y A′ están á igual distancia del pié O de OC perpendicular á AA′; por la misma razon BA y BA′ son iguales; luego los triángulos ABC y A′BC son iguales por tener sus tres lados iguales; de lo cual resulta que los ángulos ABC y A′BC son iguales.

Considerando ahora los triángulos ABD y A′BD, se ve que son iguales por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido; luego AD = A′D.

La recta OD tiene, pues, dos puntos O y D á igual distancia de los extremos de AA′, y como está en el mismo plano que AA′, una vez que se cortan, resulta que le es perpendicular: luego AO será perpendicular á OD.

Advertencia. — Siempre que una recta es perpendicular á todas las que pasan por su pié en un plano, se llama *perpendicular al plano;* y recíprocamente el plano se dice que es *perpendicular á la recta.*

197. TEOREMA.—*Todas las perpendiculares* OB, OC, OD (fig. 137) *levantadas en el espacio en un mismo punto* O *de una recta* AA′ *están situadas en un mismo plano perpendicular á esta recta.*

Hágase pasar un plano por las rectas OB y OC, y otro por las rectas OA y OD; todo consiste en demostrar que los dos planos se cortan segun la misma recta OD. En efecto, si no fuese así, es decir, que su interseccion fuese la recta OI, diferente de OD, se tendria, en virtud del teorema del nº **196**, que AO seria perpendicular á OI;pero OA es perpendicular á OD por hipótesis; luego en un mismo plano AOD se tendrian dos rectas OI y OD perpendiculares á AO en un mismo punto de esta recta, lo que es imposible. Resulta, pues, que los dos planos BOC y AOD, solo pueden cortarse segun la OD; luego el plano de las dos primeras perpendiculares OB y OC pasa por la OD. Del mismo modo se demostraria que pasa por todas las demás; luego todas ellas están en un mismo plano el cual es perpendicular á la AO en virtud del teorema del nº **196**.

Fig. 137.

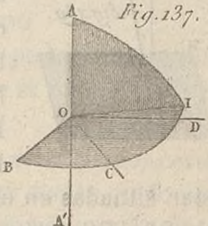
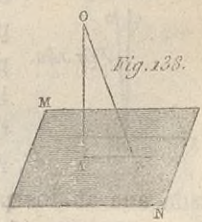


Fig. 138.



198. TEOREMA. — *Por un punto dado solo se puede trazar una perpendicular á un plano.*

Supongamos, en primer lugar, que el punto O (fig. 138) está fuera del plano MN, y sean, si es posible, OA y OB dos perpendiculares á este plano. Si unimos A con B, cada una de las rectas OA y OB será perpendicular á AB, por pasar por su pié y estar situadas en el plano MN; luego el triángulo AOB tendrá dos ángulos rectos, lo que es imposible.

Supongamos, en segundo lugar, que el punto O (fig. 139) está en el plano MN; y sea, si es posible, OA y OB dos perpendiculares á este plano. El plano que determinan estas dos rectas cortará al MN segun la recta OC, y cada una de las rectas OA y OB será perpendicular á la OC por pasar por su pié y estar situadas en el plano MN; y como las tres rectas OA, OB y OC están en un mismo plano, resultaria que en un mismo plano y en un mismo punto O de la recta OC, se podrian levantar dos perpendiculares OA y OB, lo que es imposible.

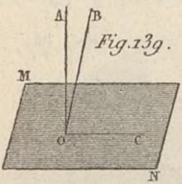


Fig. 139.

199. Teorema.—*Por un punto dado solo se puede trazar un plano perpendicular á una recta.*

Supongamos, en primer lugar, que el punto dado O (fig. 140) está sobre la recta AB, y admitamos que por este punto se pueden trazar dos planos perpendiculares á AB. Si se concibe por AB un tercer plano que corte á los otros dos, segun las rectas OC y OD, estas rectas serán perpendiculares á AB por pasar por su pié O y estar cada una en los primeros planos; pero como las tres rectas OC, OD y AB están situadas en el tercer plano, resultaria que en este plano se podrian trazar dos rec-

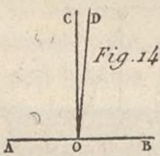


Fig. 140.

tas OC y OD perpendiculares á la AB, en un mismo punto O de esta recta, lo que es imposible.

Supongamos, en segundo lugar, que el punto O (fig. 141) está fuera de la recta AB, y admitamos que por este punto se pueden trazar dos planos perpendiculares á la AB.

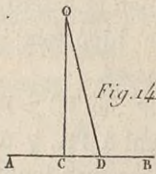


Fig. 141.

Desde luego se ve que estos dos planos no pueden cortar á la AB en un mismo punto, porque de lo contrario tendríamos que por este punto se podrian trazar dos planos perpendiculares á AB, lo que es imposible segun lo que acabamos de demostrar.

Sean pues C y D los puntos en que estos planos cortar á la recta AB, y únanse con O; estas rectas serán perpendiculares á la AB por pasar por su pié y estar situadas en planos perpendiculares á AB; luego nos resultaria el triángulo COD con dos ángulos rectos, lo que es imposible.

200. Cuando una recta encuentra á un plano sin serle perpendicular se llama *oblícua* al plano. El punto en que la recta encuentra al plano se llama *pié* de la oblicua.

TEOREMA.—*Si por un punto* O (fig. 142) *fuera de un plano* MN *se traza á este plano una perpendicular* OP *y diferentes oblícuas* OA, OB, OC: 1º, *una oblícua cualquiera será mayor que la perpendicular;* 2º, *las oblícuas cuyos piés se separan igualmente del pié de la perpendicular son iguales;* 3º, *de dos oblícuas cuyos piés distan desigualmente del pié de la perpendicular, la que más se separa será mayor.*

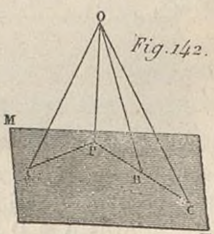


Fig. 142.

1° Uniendo A con P, el triángulo AOP es rectángulo en P; luego la hipotenusa OA es mayor que el lado OP.

2° Sea PA = PB: los triángulos rectángulos OPA y OPB tienen el cateto OP comun y los otros dos lados PA = PB por hipótesis; luego las hipotenusas OA y OB son iguales.

3° Sea PC > PA: tómese sobre PC una distancia PB igual á PA, y únase O con B. Por lo que acabamos de demostrar tenemos OA = OB; pero como las tres rectas OP, OB y OC están en un mismo plano y OP es perpendicular á PC, resulta que OC > OB; luego OC > OA.

Corolarios. — I. Las recíprocas de estas proposiciones el lector puede deducirlas con facilidad.

II. *La distancia de un punto á un plano es la perpendicular bajada desde dicho punto al plano.*

201. Teorema. —*Si del pié* O (fig. 143) *de una recta* AO *perpendicular á un plano* MN, *se baja una perpendicular* OD *á una recta cualquiera* BC *situada en este plano, y se une* A *con* D, *la recta* AD *será perpendicular á* BC.

En efecto, tómese CD = BD y únanse los puntos O con B y C, y el punto A con B y D. Las oblícuas OB y OC son iguales por separarse igualmente del pié D de la perpendicular OD; luego las oblícuas AB y AC son tambien iguales por separarse igualmente del pié de la perpendicular AO (**200**); por lo tanto, la recta AD que tiene dos puntos A y D á igual distancia de los extremos de BC será perpendicular á esta recta.

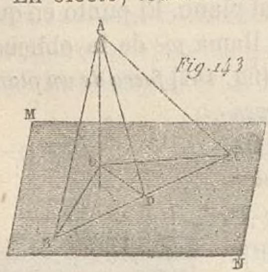


Fig. 143

§ III. De las rectas paralelas en el espacio y de las rectas paralelas á un plano.

202. Teorema.—*Si dos rectas son paralelas, todo plano perpendicular á una de ellas lo será tambien á la otra.*

Sean AO y ED (fig. 144) dos rectas paralelas, y MN un plano perpendicular á la recta AO; digo que tambien lo es á la ED.

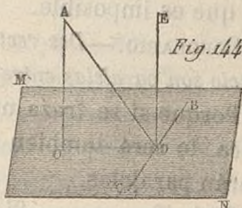


Fig. 144.

En efecto, únase O con D, y trácese en el plano MN la recta BC perpendicular á OD: ahora si unimos A con D esta recta será perpendicular á BC (**201**); pero BC es perpendicular á OD; luego la recta BC es perpendicular al plano de las rectas AD y OD; y como este plano es el de las paralelas AO y ED por tener con él tres puntos comunes A, O y D, resulta que BC tambien es perpendicular á ED.

Ahora en el plano AODE, la recta OD por ser perpendicular á AO, lo es tambien á su paralela ED; de lo cual resulta que ED es perpendicular á las rectas OD y BC que pasan por su pié en el plano MN; luego ED es perpendicular á este plano.

Corolario.—*Por un punto* D *fuera de una recta* AO *solo se puede trazar una paralela á la recta* DE. Porque si se pudiese trazar otra, resultaria que seria perpendicular al plano MN, y por consiguiente, que por un mismo punto se podrian trazar dos perpendiculares á un plano, lo que es imposible (**198**).

203. Teorema.—*Dos rectas perpendiculares á un plano son paralelas entre sí.*

Sean AO y ED (fig. 144) dos perpendiculares al plano MN; digo que ED es paralela á AO. Porque si esto no se verificase, por el punto D se podria trazar á la AO una paralela, la cual, segun el teorema precedente, seria perpendicular á MN; luego por un mismo punto D se podrian trazar á un mismo plano dos perpendiculares, lo que es imposible.

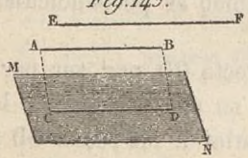
Corolario.—*Dos rectas paralelas á una tercera en el espacio son paralelas entre sí.*

Porque si se traza un plano perpendicular á la tercera, lo será tambien á las dos primeras (**202**); luego serán paralelas.

204. Teorema.—*Si una recta* AB (fig. 145) *es paralela á otra* CD *situada en un plano* MN, *no puede encontrar á este plano por mas que se la prolongue.*

Por ser las rectas AB y CD paralelas están en un mismo plano, el cual cortará al MN segun la recta CD. Para que la línea AB que está en el plano ABDC encontrase al plano MN, tendria que verificarlo en un punto comun á los dos planos, es decir, en un punto de su interseccion CD; pero como AB no puede encontrar á su paralela CD, tampoco podrá encontrar al plano MN.

Fig. 145.



Advertencia.—Una recta y un plano que no pueden encontrarse se llaman *paralelos* el uno respecto del otro.

El teorema precedente puede enunciarse así:

Si una recta es paralela á otra situada en un plano, es paralela á dicho plano.

205. Teorema.—*Si por una recta* AB (fig. 145) *paralela á un plano* MN *se traza un plano* ABDC, *que corte al* *primero segun una recta* CD, *la interseccion* CD *será paralela á* AB.

Porque si AB y CD, que están en un mismo plano, no fuesen paralelas, su punto de interseccion perteneceria á la vez á la recta AB y al plano MN que contiene á CD; luego la recta AB y el plano MN no serian paralelos, lo que es contra la hipótesis.

Corolario.—*Si* AB *es paralela al plano* MN, *cualquiera otra* EF *paralela á* AB *tambien será paralela á* MN.

Porque si por AB se hace pasar un plano que corte al MN segun la recta CD, esta recta será paralela á AB, y por consiguiente á EF; luego EF será paralela á MN en virtud del teorema del nº **204**.

206. Teorema.—*Si una recta* AB (fig. 145) *es paralela á un plano, y por un punto* C *de este plano se traza una paralela á* AB, *dicha recta estará toda ella en el mismo plano.*

Sea CD la paralela á AB; si CD no está en el plano MN, el plano ABDC de las dos paralelas cortará al MN segun una recta que pasará por el punto C, pero diferente de CD; y como esta recta seria paralela á AB (**205**), resultaria que por el punto C se podrian trazar dos paralelas á una misma recta AB, lo que es imposible (**202** corol).

Corolario.—*Si una recta es paralela á dos planos que se cortan será paralela á su interseccion.*

Porque si por un punto de esta interseccion se traza una paralela á la recta propuesta, esta paralela estará á la vez en los dos planos y por consiguiente se confundirá con su interseccion.

207. Teorema.—*Si una recta* AB (fig. 145) *es paralela á un plano* MN, *todos sus puntos distan igualmente de este plano.*

Si de los puntos A y B se bajan las perpendiculares

AC y BD al plano MN, estas perpendiculares resultan paralelas (**203**) y determinan un plano que contiene á la recta AB por pasar por dos de sus puntos A y B. Este plano corta al plano MN segun la recta CD paralela á AB (**205**); luego la figura ABCD es un rectángulo; luego AC = BD.

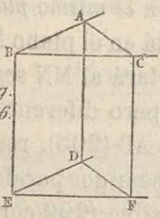
Advertencia. — La verdadera distancia entre una recta y un plano paralelos, se mide por la perpendicular bajada desde un punto cualquiera de la recta al plano.

§ IV. De los ángulos formados por rectas y por planos.

208. Teorema. — *Dos ángulos en el espacio que tienen sus lados paralelos y dirigidos en un mismo sentido son iguales.*

Sean ABC y DEF (fig. 146) dos ángulos situados en el espacio, pero de manera que los lados BA y ED sean paralelos y BC y EF tambien, y á mas que estén dirigidos en un mismo sentido á partir del vértice. Tómese BA = ED, BC = EF y trácense las rectas AD, BE, CF, AC y DF.

Fig. 146.



Por ser las rectas AB y DE iguales y paralelas, la figura ABED es un paralelógramo; luego AD es igual y paralela á BE. Las rectas BC y EF son tambien iguales y paralelas, luego la figura BCEF es un paralelógramo; luego CF es igual y paralela á BE. Ahora bien, si las rectas AD y CF son iguales y paralelas á BE, serán iguales y paralelas entre sí; luego ADFC es un paralelógramo; de lo cual resulta que AC = DF. Los triángulos ABC y DEF que tienen sus tres lados respectivamente iguales serán iguales; luego el ángulo ABC = DEF.

209. Ángulo de una recta con un plano.—Sea AO (fig. 147) una recta cualquiera que encuentra á un plano MN; si desde un punto cualquiera A de esta recta se baja la perpendicular AC al plano y se une O con C, el ángulo AOC es el que se llama ángulo de una recta con un plano.

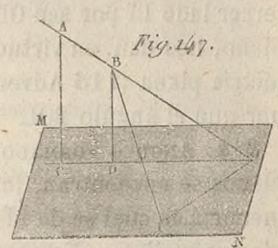


Fig. 147.

Obsérvese ahora que cualquiera que sea el punto de la recta AO desde el cual se baje la perpendicular al plano MN, resulta siempre la misma recta CO y por consiguiente el mismo ángulo AOC. En efecto, sea BD otra perpendicular bajada de un punto B de AO al plano MN; las dos rectas AC y BD por ser perpendiculares á un mismo plano son paralelas (**205**) y determinan un plano que contiene á la AO, puesto que pasa por dos de sus puntos A y B; y como los puntos C, D y O están en este plano y tambien en el plano MN, pertenecen á la interseccion de estos dos planos; luego están en línea recta.

Esta recta OC sobre la cual se hallan los piés de las perpendiculares bajadas de todos los puntos de AO sobre el plano MN, se llama *proyeccion* de AO sobre el plano MN. Así, pues, se dice tambien que, *el ángulo de una recta con un plano es el formado con la recta y su proyeccion sobre el plano.*

210. Teorema.—*El ángulo* BOD (fig. 147) *que forma una recta* BO *con su proyeccion* DO *sobre un plano* MN, *es menor que el que forma con otra recta cualquiera* OI *trazada por su pié en dicho plano.*

Para demostrarlo tómese OI=OD y únase B con I.

Los triángulos BOD y BOI que tienen BO comun, OI=OD por construccion y el tercer lado BD menor que el tercer lado BI por ser OD perpendicular y BI oblícua al plano, nos dan, en virtud de una proposicion de la Geometría plana (**115** Advert.), que el ángulo BOD es menor que el ángulo BOI.

211. Ángulo formado por dos planos.—Cuando dos planos se encuentran, forman una separacion mayor ó menor á la cual se da el nombre de *ángulo diedro* ó simplemente *diedro*. Estos planos se llaman *caras* y la interseccion *arista*.

Para designar un diedro se emplean ordinariamente cuatro letras, pero de modo que las dos de en medio estén en la arista y las otras dos extremas una en cada cara. Así, el ángulo diedro representado en la figura 148, se puede leer de las cuatro maneras siguientes:

ADCF, FCDA, BCDE, EDCB.

Se puede tambien designar un diedro por su arista y decir, por ejemplo, el diedro CD; pero si dos diedros tienen una misma arista, es preciso recurrir al primer medio.

La magnitud de las caras de un ángulo diedro no influye en nada sobre el valor de este ángulo; sucede lo mismo que en los ángulos formados por dos rectas, que es independiente de la longitud de sus lados.

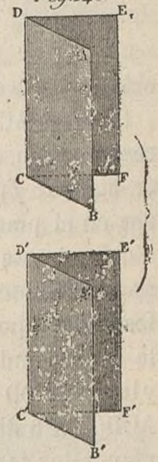
212. Si por un punto C de la arista del diedro ADCF (fig. 148) se levantan en cada una de sus caras, las perpendiculares CB, CF á esta arista, el ángulo BCF así formado se llama *ángulo plano* del diedro.

Los ángulos planos formados en cualquier punto de la arista son iguales. Porque si DA y DE son perpendiculares á la arista CD y situadas una en cada cara, las rectas DA y CB serán paralelas por estar situadas en el plano ADCB y ser perpendiculares á la CD; por la misma razon las DE y CF tambien lo son; luego el ángulo ADE y BCF son iguales (**208**).

213. LEMA.—*Dos diedros son iguales cuando sus ángulos planos tambien lo son.*

Sean CD y C′D′ (fig. 148) dos diedros, y BCF y B′C′F′ sus ángulos planos iguales. Colóquese el diedro C′D′ sobre el CD, de modo que los ángulos BCF y B′C′F′ coincidan. Las aristas CD y C′D′ por ser perpendiculares á CB y CF lo serán tambien al plano BCF, luego coincidirán (**198**). Las caras ABCD y A′B′C′D′ que pasan por las rectas CB y CD se confundirán (**194** corol. II), y lo mismo sucederá á las caras CDEF y C′D′E′F′ que pasan por las rectas CD y CF; luego los dos diedros coincidirán y por consiguiente son iguales.

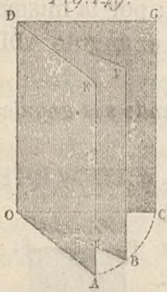
Fig. 148.



214. TEOREMA.—*La razon de dos ángulos diedros cualesquiera es igual á la de sus ángulos planos.*

Cualesquiera que sean los diedros propuestos siempre se les podrá colocar de manera que sus aristas coincidan y lo mismo dos de sus caras. Sean, pues, AODF y AODG (fig. 149) los dos diedros así colocados, y levántese en un punto O de la arista las perpendiculares OA, OB y OC situadas en cada una de las caras; estas perpendiculares estarán en un mismo plano (**197**). En este plano y desde el punto O como centro, descríbase el arco de círculo ABC: los diedros AODF y AODG tendrán respectivamente por ángunos planos, los ángulos AOB yAOC, los cuales están en la misma relacion que los arcos AB, AC. Evaluemos ahora estos arcos, tomando una unidad tan pequeña como sea necesario para que esté contenida en ellos un número exacto de veces (en la práctica siempre se llega á este resultado), y para fijar las ideas supongamos que AB contiene 3 veces la unidad y AC ocho veces; los dos arcos estarán en la relacion de 3 á 8.

Fig. 149.



Divídase AC en 8 partes iguales; al arco AB le corresponderán 3 de las mismas; trácese por los puntos de division y por O rádios; estos rádios, por estar situados en el plano AOC y pasar por el pié de OD perpendicular á este plano, serán perpendiculares á OD. El ángulo AOC quedará dividido en 8 ángulos parciales iguales entre sí por interceptar arcos iguales; al ángulo AOB le corresponden tres de los mismos. Si por estos radios y la arista OD se hacen pasar planos, dividirán al diedro AODG en 8 diedros parciales, que tendrán por ángulos planos los formados por los radios trazados del punto O á los puntos de division del arco AC; y como estos ángulos son iguales, los diedros pequeños tambien lo serán (213).

Por contener el diedro AODG, 8 de estos ángulos parciales, y el AODF evidentemente 3, resulta la proporcion

$$AODF : AODG = 3 : 8;$$

pero se ha dicho que

$$AOB : AOC = 3 : 8;$$

luego por tener las segundas razones iguales se tendrá

$$AODF : AODG = AOB : AOC,$$

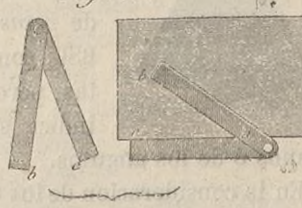
es decir que los diedros están en la misma relacion que sus ángulos planos.

Advertencia. — En virtud de este teorema se puede decir que un *diedro tiene por medida su ángulo plano*; lo que significa que, si se toma por unidad de medida de un ángulo diedro el que corresponde á la unidad de ángulo plano, la relacion de un diedro cualquiera con su unidad de medida es igual á la relacion de su ángulo plano con su unidad correspondiente.

Como la unidad de un ángulo plano es el ángulo recto, conviene tambien tomar por unidad de los ángulos diedros el que corresponde á este ángulo y que por esta razon se llama *diedro recto*.

215. Para medir los ángulos diedros se emplea en las artes un instrumento llamado *baivel* (fig. 150). Se compone de dos reglas unidas por una de sus extremidades por un eje al rededor del cual pueden girar con facilidad. Para usarlo se traza el ángulo plano correspondiente al diedro que se quiere medir; en seguida se hacen coincidir las reglas con los lados de este ángulo plano, por sus bordes internos si el diedro es saliente como el ángulo de una calle, ó por sus bordes externos si el diedro es hueco como el ángulo interior de una ha-

Fig. 150.



bitacion. Hecho esto, solo falta trasportar este ángulo sobre un plano para poder medirlo con el semi-círculo graduado.

Para ello, se aplica la arista interior *ac* del *baivel* contra el borde rectilíneo de una superficie bien plana; la regla *ab* que se apoya sobre esta superficie sirve para trazar una recta que formará con el borde rectilíneo del plano el ángulo pedido; se puede en seguida medir con la mayor comodidad este ángulo con el semi-círculo graduado.

216. Ángulos triedros. — Cuando tres planos concurren en un mismo punto, cortándose dos á dos segun tres rectas distintas, la reunion de estos tres planos forman lo que se llama un *ángulo triedro*, ó simplemente *triedro*.

La figura 151 representa un triedro. Los planos que le forman ASB, ASC, BSC, se llaman *caras*. Las intersecciones SA, SB, SC, de las caras del triedro, se llaman *aristas*, y el punto de concurso S de las tres caras, *vértice*. Se da tambien el nombre de *caras* á los ángulos ASB, ASC, BSC, comprendidos entre las aristas, pero el sentido en que se habla indica siempre si se trata de los planos ó de los ángulos.

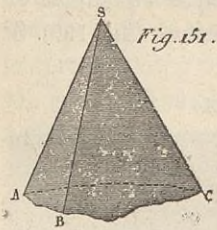


Fig. 151.

En la consideracion de los triedros se hace abstraccion de la longitud de sus aristas y de la extension de sus caras.

Se designa un triedro por la letra del vértice, y cuando es necesario se le añaden las otras tres colocadas en los extremos de las aristas: así se dirá, el triedro S ó el triedro SABC.

217. TEOREMA.—*Una cara de un triedro es siempre menor que la suma de las otras dos y mayor que la diferencia.*

Sea SABC (fig. 152) un triedro cualquiera.

1° Bastará para demostrar la primera parte del teorema considerar la mayor de las tres caras: sea ASC la mayor.

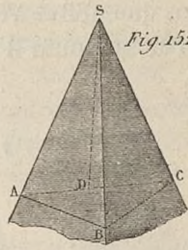


Fig. 152.

Trácese en el plano ASC una recta SD que forme con la SC un ángulo DSC igual al ángulo BSC; córtense las tres rectas SA, SD, SC, por una recta cualquiera ADC; tómese SB igual á SD y únase el punto B con A y C.

Los triángulos DSC y BSC son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre dos lados respectivamente iguales; luego DC=BC. Por otra parte se tiene que

$$AC < AB + BC;$$

restando del primer miembro DC y del segundo su igual BC, resulta

$$AC - DC < AB \quad ó \quad AD < AB.$$

Si se consideran los triángulos ASD y ASB, se ve que tienen dos lados iguales, y el tercer lado AD de uno de ellos menor que el AB del otro; luego el ángulo ASD opuesto á AD es menor que el ángulo ASB opuesto á AB (**115** Advert.). Se tiene, pues,

$$ASD < ASB;$$

y añadiendo al primer miembro de esta desigualdad DSC y al segundo su igual BSC, resulta

$$ASD + DSC < ASB + BSC$$

ó

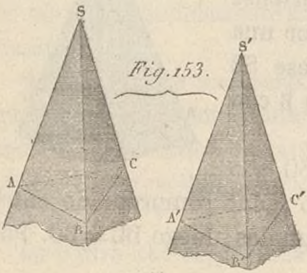
$$ASC < ASB + BSC.$$

2° En cuanto á la segunda parte del teorema se deducirá inmediatamente de la primera, del mismo modo que la del nº **108**.

218. TEOREMA. — *Dos triedros son iguales cuando tienen sus tres caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas.*

1º Sean los triedros S y S′ (fig. 153) cuyas caras ASB, BSC y A′S′B′, B′S′C′ forman ángulos agudos, y supongamos que ASB = A′S′B′, ASC = A′S′C′ y BSC = B′S′C′.

Por un punto B de la arista SB, trácense en los planos ASB y BSC las perpendiculares BA y BC á la recta SB; estas rectas encontrarán á las rectas SA y SC en los puntos A y C, por ser los ángulos ASB y BSC agudos: únase A con C; la arista SB perpendicular á las rectas AB y BC será



perpendicular al plano ABC (**196**). Efectuando las mismas construcciones en el triedro S′, tomando antes S′B′ = SB, resultará tambien que S′B′ será perpendicular al plano A′B′C′.

Los triángulos ABS y A′B′S′ son iguales por tener el lado SB = S′B′ y los ángulos adyacentes á estos lados tambien iguales; luego SA = S′A′ y AB = A′B′.

Por la misma razon los triángulos BSC y B′S′C′ son iguales; luego SC = S′C′ y BC = B′C′.

Por consecuencia los triángulos ASC y A′S′C′ son iguales, puesto que tienen el ángulo ASC = A′S′C′ é iguales los lados que los forman; luego AC = A′C′.

Por último, los triángulos ABC y A′B′C′ son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales.

Esto supuesto superpóngase el triedro S′ sobre el S, de modo que coincidan los triángulos iguales ABC y A'B'C': las aristas BS y B'S' por ser perpendiculares al plano de este triángulo coincidirán (198); y como BS=B'S', el punto S' caerá sobre el punto S; de lo cual resulta que las rectas SC y S'C' tambien coincidirán, y lo mismo las rectas SB y S'B'; luego los dos triedros coincidirán en toda su extension y serán iguales.

2º Sean ahora dos triedros cualesquiera S y S' (fig. 154), y supongamos tambien ASB = A'S'B', ASC = A'S'C' y BSC = B'S'C'. Tómese á partir de los puntos S y S' sobre las aristas de los dos triedros, seis distancias iguales SA, SB, SC, S'A', S'B', S'C'; trácense las rectas AB, AC, BC, A'B' A'C' B'C'.

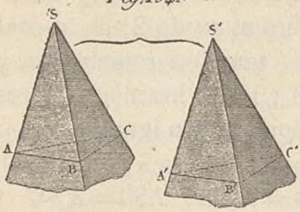
Los triángulos ASB y A'S'B' son iguales porque tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido; luego AB = A'B'. Se demuestra de la misma manera que AC = A'C' y BC = B'C'. De lo cual resulta que los triángulos ABC y A'B'C' tienen sus tres lados iguales y que por consiguiente son iguales.

Si consideramos ahora los triedros formados en B y B', vemos por las igualdades anteriores que sus tres caras son iguales; y como las caras ABS y CBS forman ángulos agudos, lo mismo que las caras A'B'S' y C'B'S' por ángulos en la base de triángulos isósceles, resulta que estos dos triedros están comprendidos en el primer caso; luego son iguales y por consiguiente el diedro SB es igual al diedro S'B'.

De la misma manera se demostraria que los diedros SA y S'A' son iguales á SC y S'C'; luego los dos triedros tienen todos sus elementos iguales, y dispuestos de la misma manera, son iguales.

219. Teorema.—*Dos triedros son iguales cuando tienen* *un diedro igual comprendido entre caras iguales é igualmente dispuestas.*

Fig. 154.



Sean los dos triedros S y S′ (fig. 154) en los cuales se supone que el diedro SA = S′A′ y las caras ASB = A′S′B′ y ASC = A′S′C′.

Colóquese el triedro S′ sobre el S de modo que los vértices S y S′ se confundan, y que el diedro S′A′ coincida con su igual SA.

Las rectas SB y S′B′ coincidirán por estar en un mismo plano y formar con SA un mismo ángulo; lo mismo sucederá con las rectas SC y S′C′; luego los dos triedros se confundirán y por consiguiente serán iguales.

220. Ángulos poliedros. — Cuando muchos planos que concurren en un mismo punto se cortan consecutivamente segun rectas distintas, su reunion es lo que se llama *ángulo poliedro*. La figura 155 representa un ángulo poliedro. Los planos ASB, BSC, CSD, DSE, ESA, se llaman *caras;* sus intersecciones SA, SB, SC, SD, SE, *aristas* y el punto de concurso S, *vértice* del ángulo poliedro.

En la Geometría elemental solo se consideran los ángulos poliedros *convexos*, es decir, los que una recta solo puede atravesarlos por dos puntos, y que por consecuencia no tienen ángulos entrantes.

En la consideracion de los ángulos poliedros se hace abstraccion de la longitud de sus aristas y de la extension de sus caras.

Se designa un ángulo poliedro por la letra del vértice seguida, si es necesario, de las letras colocadas en las aristas. Se dirá así, el ángulo S, ó bien SABCDE.

221. TEOREMA.—*En todo ángulo poliedro convexo la suma de sus caras es menor que cuatro ángulos rectos.*

Sea SABCDE (fig. 155) un ángulo poliedro cualquiera. Trácese un plano ABCDE que corte á todas sus aristas, y tómese en el interior del polígono ABCDE un punto cualquiera O; únase este punto con los puntos A, B, C, D, E.

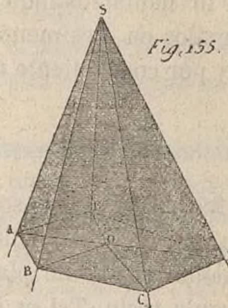


Fig. 155.

El número de triángulos que se han formado al rededor del punto O, es igual al de los formados en S; luego la suma de los ángulos de cada uno de estos grupos de triángulos son iguales. Pero como la suma de todos los ángulos en O valen cuatro rectos, si demostramos que la suma de los ángulos en la base del grupo de triángulos que se reunen en S es mayor que la suma de los ángulos en la base del grupo de triángulos que tienen por vértice comun O, quedará demostrado que los en S valen menos de cuatro rectos.

Para ello, fundándonos en el teorema del nº **217** y considerando los diferentes triedros que tienen por vértices los puntos A, B, C, D, E, se tiene

$$\begin{array}{lcl} SAE + SAB > EAB & \text{ó} & > EAO + OAB \\ SBA + SBC > ABC & \text{ó} & > ABO + OBC \\ SCB + SCD > BCD & \text{ó} & > BCO + OCD \\ SDC + SDE > CDE & \text{ó} & > CDO + ODE \\ SED + SEA > DEA & \text{ó} & > DEO + OEA \end{array}$$

Sumando ordenadamente estas desigualdades se ve que la suma de los ángulos en la base del grupo de triángulos cuyo vértice está en S, es mayor que la suma de los ángulos del polígono ABCDE, ó lo que es lo mismo, que la suma de los ángulos en la base del grupo de triángulos cuyo vértice comun está en O; luego, como ya lo habíamos indicado mas arriba, la suma de los ángulos en S es menor que la suma de los ángulos en O y por consiguiente menor que cuatro rectos.

§ V. De los planos perpendiculares entre sí.

222. Dos planos son *perpendiculares* entre sí, cuando forman un ángulo diedro recto, ó lo que es lo mismo, cuando el ángulo plano que le sirve de medida es un ángulo recto. Tal es ordinariamente la mútua posicion del techo con las paredes de una habitacion: las mismas paredes son en el mayor número de casos perpendiculares entre sí.

223. Teorema.—*Si dos planos* MN *y* OP (fig. 156) *son respectivamente perpendiculares, toda recta* AB *trazada en uno de estos planos y perpendicular á su interseccion* OD *es perpendicular al otro plano.*

Porque si se traza en el plano MN la recta BC perpendicular á OD, el ángulo ABC medirá el ángulo de los dos planos y por consiguiente será recto; pero el ángulo ABO es recto tambien; luego la recta AB que es perpendicular á la vez á las rectas BO y BC que pasan por su pié en el plano MN, será perpendicular á este plano (**196**).

Fig. 156.

Corolario.—I. *Si por un punto* B *de la interseccion de os planos perpendiculares entre si, se levanta una perpen-*

dicular al plano MN, *esta perpendicular estará situada en el otro plano* OP.

Porque si fuese otra diferente de AB, resultaria que se podrian levantar en un punto de un plano dos perpendiculares, lo que es imposible (**198**).

II. *Si por un punto* A, *tomado en el plano* OP *se baja una perpendicular al plano* MN, *estará toda ella situada en el plano* OP.

Porque si fuese otra recta diferente de AB, resultaria que desde un punto fuera de un plano, se le podrian bajar dos perpendiculares, lo que es imposible (**198**).

224. Teorema.—*Todo plano* OP (fig. 156) *que pasa por una recta* AB *perpendicular al plano* MN, *es perpendicular á este plano.*

Porque si se traza en el plano MN la recta BC perpendicular á la interseccion OD de los dos planos, los ángulos ABC y ABO serán rectos, puesto que AB es perpendicular al plano MN. De esto resulta que AB y BC son perpendiculares en un mismo punto de la interseccion OD y situadas una en cada plano; luego el ángulo ABC mide el ángulo de los dos planos, y como ABC es recto, se deduce que los dos planos son perpendiculares.

Corolario.—Se puede enunciar el mismo teorema del modo siguiente: *Todo plano* MN *perpendicular á una recta* AB *situada en un plano* OP, *es perpendicular á este plano.*

225. Teorema.—*Todo plano perpendicular á otros dos que se cortan, es perpendicular á su interseccion.*

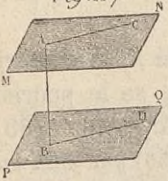
Porque si por el punto de interseccion de los tres planos se levanta una perpendicular al primero, estará situada en cada uno de los otros dos (**223** corol. I), y por consiguiente se confundirá con su interseccion.

§ VI. De los planos paralelos entre sí.

226. TEOREMA.—*Dos planos* MN, PQ (fig. 157) *perpendiculares á una recta* AB, *no pueden encontrarse por mas que se les prolongue.*

Porque si se encontrasen en un punto, que llamaremos O, resultaria que las rectas AC y BD trazadas desde este punto O á los puntos A y B, formarian dos ángulos BAC y ABD que serian rectos, puesto que AB es perpendicular á los dos planos; luego el triángulo ABO tendria dos ángulos rectos, lo que es imposible.

Fig. 157.



ADVERTENCIA.—Cuando dos planos no se pueden encontrar por mas que se les prolongue, se llaman *paralelos* entre sí. El teorema precedente puede enunciarse del modo siguiente: *Dos planos perpendiculares á una misma recta, son paralelos entre sí.*

227. TEOREMA. — *Si dos rectas que se cortan* AB, CD (fig. 158), *son respectivamente paralelas á otras dos que tambien se cortan* A'B', C'D', *el plano* MN *que determinan las dos primeras es paralelo al plano* M'N' *que determinan las dos últimas.*

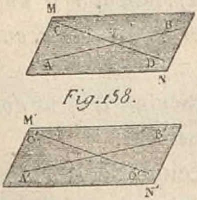
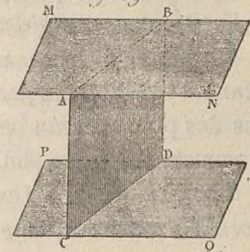


Fig. 158.

En efecto, la recta AB paralela á A'B' es paralela al plano M'N' (**204**); luego si el plano MN encontrase al plano M'N' la interseccion seria paralela á AB (**205**). Se demostraria de la misma manera que esta interseccion seria tambien paralela á CD. Y como esta interseccion no puede ser á la vez paralela á dos rectas que se cortan, resulta que los dos planos MN y M'N' no pueden encontrarse, es decir, que son paralelos.

228. TEOREMA.—*Las intersecciones* AB *y* CD (fig. 159) *de dos planos paralelos* MN *y* PQ *con un tercer plano* ABDC, *son paralelas.*

Fig. 159.



Porque, si no fuesen paralelas, por estar situadas en un mismo plano se encontrarian, y su punto de interseccion perteneceria á la vez al plano MN que contiene á la AB y al plano PQ que contiene á la CD; luego estos dos planos no serian paralelos, lo que es contra la hipótesis.

229. TEOREMA.—*Si dos planos* MN *y* PQ (fig. 157) *son paralelos, toda recta* AB *perpendicular á uno de ellos* MN *será perpendicular al otro.*

Para demostrarlo, trácese en el plano PQ una recta cualquiera BD que pase por el pié de AB; por las rectas AB y BD que se cortan en B hágase pasar un plano; este plano cortará al MN segun la recta AC paralela á BD (228).

Esto supuesto, se tiene que por ser AB perpendicular al plano MN, es perpendicular á AC que pasa por su pié en este plano; luego es perpendicular á su paralela BD. Y como lo mismo se demostraria de otra cualquiera, resulta que AB es perpendicular á todas las rectas que pasan por su pié en el plano PQ; luego es perpendicular á este plano.

COROLARIO.—I. *Por un punto* B *fuera de un plano* MN, *solo se le puede trazar otro paralelo* PQ.

Porque si se pudiesen trazar dos, resultaria que serian perpendiculares á la recta AB bajada desde el punto B perpendicularmente á MN; luego en un mismo punto de una recta se tendrian dos planos perpendiculares, lo que es imposible (**199**).

II. *Dos planos paralelos á un tercero, son paralelos entre sí.*

Porque si se traza una recta perpendicular al tercer plano, será tambien perpendicular á los otros dos; luego los dos planos serán perpendiculares á una misma recta y por consiguiente son paralelos (**226**).

230. Teorema.—*Las partes* AC *y* BD (fig. 159) *de dos paralelas comprendidas entre dos planos paralelos* MN *y* PQ, *son iguales.*

Porque si por las paralelas AC y BD se hace pasar un plano, cortará á los planos MN y PQ segun dos paralelas AB y CD (**228**); luego la figura ABCD será un paralelógramo, y por consiguiente AC = BD.

Corolario.—*Dos planos paralelos están por todas partes equidistantes uno de otro.*

Porque si se supone que AC y BD son perpendiculares á uno de estos dos planos, tambien lo serán al otro (**229**) y á mas paralelas (**205**); luego son iguales (**230**). Así, pues, estas perpendiculares miden la distancia de los dos planos, puesto que toda oblícua es mayor.

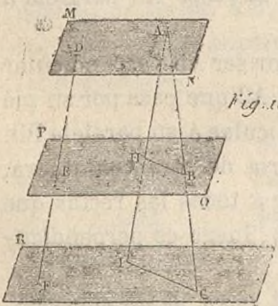


Fig. 160

231. Teorema. — *Dos rectas cualesquiera* ABC *y* DEF (fig. 160) *cortadas por tres planos paralelos* MN, PQ *y* RS, *quedan divididas en partes proporcionales.*

Para demostrarlo, trácese por el punto A una paralela á DEF; esta recta encontrará al plano PQ en un punto H y al plano RS en I; luego, en virtud del teorema precedente, se tendrá AH = DE y HI = EF. Si por las rectas AI y AC, que se cortan, se hace pasar un plano, cortará á los planos PQ y RS segun las rectas HB y IC que serán paralelas (228); se tendrá, pues:

$$AB : BC = AH : HI,$$

ó lo que es lo mismo,

$$AB : BC = DE : EF,$$

que es lo que se queria demostrar.

Corolario. — I. Se deduce de esta proporcion

$$AB : AB + BC = DE : DE + EF,$$

ó

$$AB : AC = DE : DF.$$

Corolario. — II. Resulta de la demostracion precedente que: *los lados* AI *y* AC *de un ángulo* IAC, *quedan divididos en partes proporcionales por dos planos paralelos* PQ *y* RS.

232. Teorema. — *Si dos planos* MN *y* PQ (fig. 159) *son paralelos, todo plano* ABCD *perpendicular á uno de ellos* PQ *lo será tambien al otro.*

Porque si por un punto C, tomado en la interseccion CD de los dos planos ABDC y PQ, se levanta en el plano ABDC, una perpendicular CA á esta interseccion, esta recta CA será perpendicular al plano PQ (225) y por consecuencia al plano MN (229); luego el plano ABDC que pasa por CA es perpendicular al MN (224).

§ VII. De las direcciones verticales y horizontales.

233. La direccion *vertical* es la que toma la *plomada*, es decir, un hilo fijo por su extremidad superior y solicitado por la otra por un peso.

En realidad, las verticales son rectas que se reunen en el centro de la tierra, suponiéndola esférica; pero en las aplicaciones ordinarias de la Geometría se pueden considerar como paralelas, atendida su mucha aproximacion.

Es de un uso contínuo el empleo de las verticales en las construcciones. Se da esta direccion á las aristas laterales de la mayor parte de los muros, á la de las jambas de puertas y ventanas, á las barras de las rejas, etc.

234. Se llama plano *horizontal*, todo plano perpendicular á la vertical del lugar que se considera. Si se traza por el centro de la tierra resulta el plano de *horizonte* racional; y si se traza por un punto de la superficie de la tierra, el plano de *horizonte sensible.*

En una extension poco considerable, las verticales se pueden considerar paralelas y lo mismo los planos horizontales (**202**, **226**).

Los planos horizontales son de un uso frecuente : los suelos y cielos rasos de nuestras habitaciones lo son; tambien la mayor parte de las superficies superiores de nuestros muebles ; la superficie del agua contenida en un vaso, ó la de una extension poco considerable de agua tranquila tambien se puede considerar horizontal.

235. Toda recta trazada sobre un plano horizontal, se llama *horizontal.* Tales son todas las líneas rectas trazadas sobre un entarimado, las aristas de las cornisas, balcones, zócalos, etc.

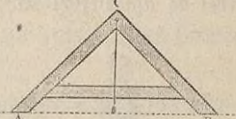
Si por un punto cualquiera de una recta horizontal se traza una vertical, las dos rectas serán perpendiculares entre *sí* (**196**). Recíprocamente, *toda perpendicular á una vertical es horizontal* (**197**).

Dos horizontales que se cortan, determinan un plano horizontal. Porque si por el punto de interseccion se traza una vertical, será perpendicular á las dos horizontales y por consiguiente al plano que determinan; luego este plano es horizontal.

236. Este último principio nos da el medio de asegurarnos que un plano es horizontal. Al efecto se emplean diversos instrumentos.

I. El *nivel de albañil* (fig. 161). Se compone ordinariamente de dos reglas de igual longitud ensambladas á ángulo recto y unidas por un travesaño. En un punto de la bisectriz del ángulo recto hay suspendida una plomada. La prolongacion de esta bisectriz está marcada en el travesaño y forma lo que se llama *línea de fé*. Las extremidades A y B de las dos reglas están en un mismo plano perpendicular á la línea de fé.

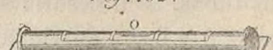
Fig. 161.



Para que un plano esté horizontal, es preciso que colocando el instrumento por las extremidades A y B, en una direccion cualquiera, la plomada coincida con la línea de fé. Basta para que esto tenga lugar, que se verifique en dos direcciones diferentes, puesto que siendo estas dos direcciones perpendiculares á la vertical son horizontales y por consecuencia su plano horizontal.

II. El *nivel de aire* (fig. 162). Su parte esencial consiste en un tubo de vidrio unido á una regla de cobre. El tubo está casi lleno de agua, dejando

Fig. 162.



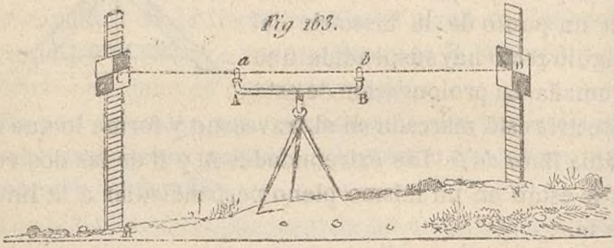
solo una pequeña porcion ocupada por una burbuja de aire. Cuando la regla está horizontal la burbuja está en medio del tubo; pero por poco que se incline, la burbuja se dirige hácia la extremidad mas elevada.

Un plano estará horizontal cuando colocando el nivel en dos direcciones diferentes, la burbuja de aire ocupe siempre el punto medio del tubo.

Este instrumento se emplea en todas las operaciones delicadas: los grafómetros, brújulas, etc., van acompañados ordinariamente de este instrumento.

237. Para trazar en el campo una visual horizontal, se hace uso de un instrumento que lleva el nombre de *nivel de agua* (fig. 163). Se compone de un tubo de hoja

Fig 163.



de lata AB, encorvado por sus extremidades en ángulo recto y sostenido por tres piés. El tubo está casi lleno de agua colorada. Por una propiedad de los líquidos, las superficies del agua en los dos tubos están siempre en un mismo plano horizontal, que es lo que se llama *nivel* del líquido. Cuando se coloca el ojo en este plano, el rayo visual que enrasa la superficie del agua en los dos tubos, es necesariamente horizontal. (Las extremidades A y B son de vidrio.)

Para fijar las extremidades de la horizontal formada por este rayo visual, se colocan en sus prolongaciones, tanto por delante como por detrás, *miras* ó reglas verticales con su division correspondiente, que llevan una tablilla pintada de dos colores y susceptible de resbalar á lo largo de la regla y fijarse por medio de un tornillo de presion. Se hace subir ó bajar cada tablilla hasta que su centro se coloque en la prolongacion del rayo visual *ab* ó *ba*. La recta CD que une los centros C y D de las tablillas, es una horizontal.

Se sirven de este instrumento para determinar la diferencia de nivel de dos puntos M y N del terreno. Esta diferencia es evidentemente igual á la de las longitudes CM y DN, que se pueden medir sobre las reglas por medio de las divisiones que se les han trazado.

238. Todo plano que pasa por una vertical, se llama *plano vertical*.

Se da ordinariamente la direccion vertical á los muros, puertas, postigos, vidrieras, etc.; tambien á la mayor parte de las caras laterales de los muebles, etc.

239. I. *Por una recta dada cualquiera, siempre se puede hacer pasar un plano vertical*. Porque si por un punto de esta recta se traza una vertical, esta vertical y la recta dada determinan un plano que es vertical.

II. *Dos planos, uno vertical y otro horizontal, son perpendiculares entre sí*. Porque el plano vertical contiene una vertical, la cual es perpendicular al plano horizontal (**224**).

III. Recíprocamente : *Todo plano perpendicular á otro horizontal, es un plano vertical*. Porque si por un punto de la interseccion comun se levanta una perpendicular al plano horizontal, ó lo que es lo mismo, una vertical, esta recta estará toda ella en el otro plano (**225** corolario I); luego es vertical.

IV. *La interseccion de dos planos verticales, es una vertical.* Porque el plano del horizonte por ser perpendicular á cada uno de ellos, lo es á su interseccion (225); luego ella es vertical.

CAPITULO II

DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

§ I. De los tetraedros.

240. Llámase *tetraedro* el cuerpo geométrico terminado por cuatro planos. SABC (fig. 164) representa un tetraedro. Los triángulos ASB, ASC, BSC, ABC, que le terminan se llaman *caras*. En un tetraedro hay 4 triedros, 6 diedros y 6 aristas. Los vértices S, A, B, C, de los 4 triedros, se llaman *vértices* del tetraedro. Cuando el tetraedro tiene una cara inferior colocada horizontalmente, como ABC, se le da ordinariamente el nombre de *base*, y al vértice S opuesto á la base, se le llama con especialidad *vértice* del tetraedro. No obstante eso, se puede tomar por base una cualquiera de sus caras, y por vértice el opuesto á esta base. La *altura* de un tetraedro es la longitud de la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base.

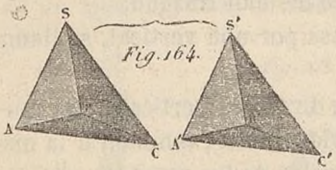


Fig. 164.

241. Teorema.—*Dos tetraedros* SABC *y* S'A'B'C' (fig. 164) *son iguales, cuando tienen tres caras iguales é igualmente dispuestas.*

Supongamos SAB=S'A'B', SAC=S'A'C', SBC=S'B'C'.

Desde luego se tiene que los triángulos ABC y A'B'C son iguales por tener sus tres lados iguales; luego los triedros de los dos tetraedros son iguales por tener sus caras iguales é igualmente dispuestas (**218**), y por consiguiente sus diedros tambien lo serán. Los dos tetraedros tienen, pues, todos sus elementos iguales é igualmente dispuestos; luego son iguales.

Corolario.—Un tetraedro queda determinado, siempre que se conozcan tres de sus caras y el órden como están dispuestas.

242. Teorema.—*Dos tetraedros* SABC *y* S'A'B'C' (fig. 164) *son iguales, cuando tienen un ángulo diedro igual* SA=S'A' *y las caras que le forman* SBA=S'B'A' *y* SCA=S'C'A', *tambien iguales é igualmente dispuestas.*

Porque si se hacen coincidir las caras iguales SCA y S'C'A', las caras SBA y S'B'A' estarán en un mismo plano puesto que los diedros SA y S'A' son iguales. Por ser los ángulos planos ASB y A'S'B' iguales, la línea S'B' coincidirá con SB; por la misma razon la A'B' coincidirá con AB; por consiguiente el punto B' caerá en B, y los dos tetraedros tendrán sus cuatro vértices comunes; luego coincidirán en toda su extension y son iguales.

Corolario.—Un tetraedro queda determinado cuando se conocen dos de sus caras, el diedro que forman y el modo como están dispuestos estos elementos.

243. Se llaman *tetraedros semejantes* los que tienen sus caras respectivamente semejantes y sus ángulos diedros iguales. Las caras respectivamente semejantes, se llaman *caras homólogas*. Se llaman *aristas homólogas* aquellas que en caras homólogas se oponen á ángulos iguales; *vértices* y *triedros homólogos* los que se oponen á caras homólogas, y *diedros homólogos* los comprendidos entre caras homólogas.

Los triedros homólogos son iguales por tener sus caras (ó ángulos planos) iguales é igualmente dispuestos, á causa de la semejanza de los triángulos que forman los tetraedros.

Se ve por lo dicho, que en la definicion de los tetraedros semejantes, se podria prescindir de la igualdad de los diedros homólogos, porque es una consecuencia de la igualdad de los triedros, la cual resulta de la semejanza de las caras. Pero se expresa esta igualdad de los diedros, para dar una idea mas completa de la semejanza de los tetraedros.

Las aristas homólogas son proporcionales como consecuencia de la semejanza de las caras homólogas.

244. Teorema. — *Si dos tetraedros* SABC, sabc (fig. 165) *son semejantes : 1° sus alturas* SH *y* sh *son proporcionales con sus aristas homólogas ; 2° sus bases* ABC, abc, *son proporcionales con los cuadrados de sus alturas.*

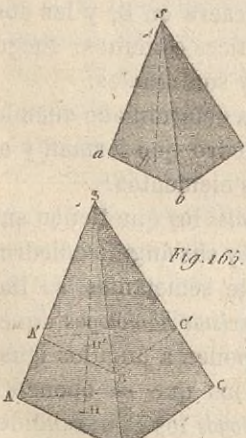


Fig. 165.

Como los triedros S y *s* son iguales, se les puede hacer coincidir : los puntos *a*, *b*, *c*, se colocarán sobre las aristas respectivas SA, SB, SC, en los puntos A', B', C'. Por ser las caras ASB y *asb* semejantes, los triángulos ASB y A'S'B' tambien lo serán ; luego A'B' será paralela á AB. Por una razon parecida A'C' será paralela á AC y B'C' á BC. Luego el plano A'B'C' será paralelo al plano ABC (**227**), y la recta SH que es perpendicular al

ABC, lo será tambien al A'B'C'. Ahora si H' es el punto donde la SH encuentra al A'B'C', la recta SH' será la altura del tetraedro SA'B'C', la cual será igual á *sh* por ser los tetraedros SA'B'C' y *sabc* iguales.

Esto supuesto, se tiene: 1° las rectas SA y SH que están cortadas por planos paralelos (**231** corol. II) dan

$$SH : SH' = SA : SA'. \qquad [1]$$

2° Los triángulos ABC y A'B'C' que tienen sus lados paralelos y por consecuencia sus ángulos iguales (**208**), son semejantes; luego son proporcionales con los cuadrados de sus lados homólogos, y se tiene

$$ABC : A'B'C' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2; \qquad [2]$$

pero de la semejanza de los triángulos ASB y A'S'B' se deduce

$$AB : A'B' = SA : SA';$$

de donde $\overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2.$ [3]

Por otra parte, de la proporcion [1] se deduce

$$\overline{SH}^2 : \overline{SH'}^2 = \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2. \qquad [4]$$

Se deduce tambien de las proposiciones [2], [3] y [4], á causa de las razones que tienen comunes

$$ABC : A'B'C' = \overline{SH}^2 : \overline{SH'}^2.$$

Sustituyendo ahora en esta proposicion en lugar de A'B'C' su igual *abc*, y en lugar de SH' su igual *sh*, resulta por último

$$ABC : abc = \overline{SH}^2 : \overline{sh}^2$$

que es lo que se queria demostrar.

245. TEOREMA.—*Dos tetraedros* SABC, sabc (fig. 165) *son semejantes, cuando tienen sus tres caras respectivamente semejantes y semejantemente dispuestas.*

Sean, por ejemplo, las tres caras ASB, ASC y BSC, respectivamente semejantes á las tres caras *asb*, *asc*, y *bsc*.

De los triedros S y *s* iguales por tener sus caras respectivamente iguales (**218**), resulta la igualdad de los diedros SA y *sa*. Tambien los triedros A y *a* son iguales por tener dos caras iguales é igual el diedro comprendido (**219**); luego el ángulo CAB es igual al ángulo *cab*. De la misma manera se demostraria que el ángulo ACB es igual al ángulo *acb*, ó que el ángulo ABC es igual al ángulo *abc*; luego los triángulos ABC y *abc*, son equiángulos y por consiguiente semejantes. Los dos tetraedros tienen, pues, sus cuatro caras respectivamente semejantes; luego son semejantes (**245**).

246. Teorema. —*Dos tetraedros* SABC *y* sabc (fig. 165) *son semejantes, cuando tienen un diedro igual,* SA = sa, *comprendido entre dos caras respectivamente semejantes y semejantemente dispuestas.*

Sean las caras ABS y ACS respectivamente semejantes á las caras *abs* y *acs*. Los triedros S y *s* son iguales por tener un diedro igual comprendido entre dos caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas (**219**); luego los ángulos BSC y *bsc* son iguales.

Pero de la semejanza de las caras ABS y *abs*, se deduce

$$SB : sb = SA : sa;$$

tambien de la semejanza de las caras ACS y *acs*, se tiene

$$SC : sc = SA : sa;$$

y como estas dos proporciones tienen una razon comun, se deduce

$$SB : sb = SC : sc;$$

luego los triángulos BSC y *bsc*, tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo comprendido; luego son semejantes.

Se demostraria de la misma manera la semejanza de los triángulos ABC y *abc*. Resulta, pues, que los dos tetraedros tienen sus cuatro caras respectivamente semejantes; luego son semejantes segun la definicion del nº **243**.

247. Llámase *tetraedro truncado* lo que queda de un tetraedro despues de separar la parte superior que resulta de cortarle por un plano paralelo á la base.

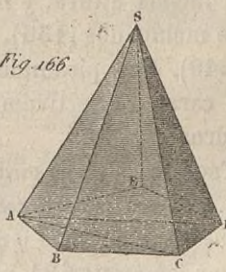
Así, pues, ABCA'B'C' (fig. 165), es un tetraedro truncado. Los planos ABC y A'B'C' se llaman *bases* del tetraedro truncado. *Altura* es la distancia HH' de las dos bases, medida como hemos visto por la perpendicular comun (**230**).

Resulta de lo que se ha dicho en el nº **244**, que las bases de un tetraedro truncado *son triángulos semejantes.*

§ II. De las pirámides.

248. Llámase *pirámide* á un cuerpo geométrico SABCDE (fig. 166), terminado por un polígono ABCDE y una serie de triángulos ASB, BSC, CSD, etc., que tienen un vértice comun S y por bases los diferentes lados AB, BC, etc. del polígono. El polígono toma el nombre de *base*, y el punto S de *vértice*. *Altura* de la pirámide es la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base ABCDE.

Fig. 166.



En la geometría elemental, solo se consideran las pirámides convexas, es decir, aquellas cuya base es un

Ev Hachett

polígono convexo (**155**). Las pirámides se distinguen por el número de lados de la base. El tetraedro no es otra cosa que una pirámide *triangular*, porque su base es un triángulo. Una pirámide es cuadrangular, pentagonal, etc., segun que su base sea un cuadrilátero, un pentágono, un exágono, etc.

Una pirámide es regular, cuando su base es un polígono regular, y su vértice está situado en la perpendicular levantada á la base en su centro. En este caso sus caras son triángulos isosceles iguales, puesto que las bases de estos triángulos son iguales por lados de un mismo polígono regular, y sus aristas laterales son iguales por oblícuas que se separan igualmente del pié de la perpendicular.

Si se trazan las diagonales AC, AD, etc. de la base de una pirámide, y por estas diagonales y su vértice S se hacen pasar planos, estos planos toman el nombre de *planos diagonales*. Dichos planos dividen á la pirámide en tetraedros que tienen por vértice comun el punto S y por base los triángulos ABC, ACD, ADE que componen la base de la pirámide. Estos tetraedros tienen todos una misma altura, y hay tantos como lados tiene la base menos dos (**155**).

(**249**). Dos pirámides son *semejantes* cuando tienen sus caras respectivamente semejantes y sus ángulos diedros iguales.

Teorema. — *Dos pirámides semejantes* SABCDE *y* sabcde (fig. 167) *se pueden descomponer en un mismo número de tetraedros semejantes y dispuestos de una misma manera.*

Por las aristas SA y *sa*, trácense los planos diagonales SAC, SAD y *sac*, *sad*. Las bases ABCDE y *abcde* que son semejantes quedarán descompuestas en un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, y las dos pirámides en un mismo número de tetraedros.

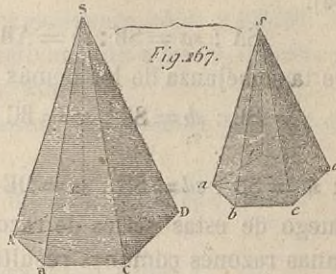


Fig. 267.

Los tetraedros SABC y *sabc* que tienen un diedro igual SB $=$ *sb*, comprendido entre dos caras respectivamente semejantes son semejantes (**246**); luego las caras ASC y *asc* son semejantes, y los diedros ASCB y *ascb* iguales. Ahora, si de los diedros BSCD y *bscd* que son iguales por hipótesis restamos los diedros ASCB y *ascb* que tambien lo son por lo que acabamos de demostrar, los restos ASCD y *ascd* tambien serán iguales; luego los tetraedros SACD y *sacd* resultan semejantes por tener dos caras respectivamente semejantes é igual el diedro comprendido (**246**).

Se demostraria de este modo, uno despues de otro, la semejanza de los tetraedros SADE y *sade* etc. : luego las dos pirámides están descompuestas en un mismo número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos, que es lo que se queria demostrar.

Advertencia. — I. Se ve sin dificultad la analogía que hay entre esta proposicion y la del nº **158**.

II. Fácilmente se demostrará la recíproca que dice: *si dos pirámides se componen de un mismo número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.* Esta proposicion es análoga á la del nº **159**.

Corolario. — I. *Dos pirámides semejantes tienen sus aristas homólogas proporcionales con sus alturas.*

Porque si H y *h* representan estas alturas, de la semejanza de los tetraedros SABC y *sabc* se deducirá (**244**).

$$SA : sa = SB : sb = AB : ab = H : h.$$

De la semejanza de los demás tetraedros resulta

$$SB : sb = SC : sc = BC : bc = H : h,$$

y

$$SC : sc = SD : sd = SE : se = DE : de = EA : ea = H : h.$$

Luego de estas series de razones iguales que tienen algunas razones comunes resulta

$$SA : sa = SB : sb = \text{etc.}$$
$$= AB : ab = BC : bc = \text{etc.} = H : h.$$

II. *Las bases de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus alturas.*

Desde luego se tiene, por ser las bases polígonos semejantes, que

$$ABCDE : abcde = \overline{AB}^2 ; \overline{ab}^2.$$

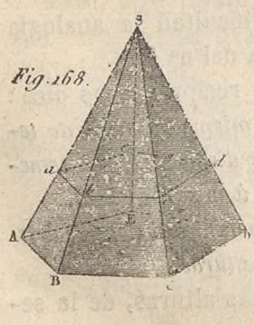
Por otra parte acabamos de demostrar que

$$AB : ab = H : h, \text{ de donde } \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = H^2 : h^2.$$

Esta proporcion y la anterior tienen una razon comun, luego

$$ABCDE : abcde = H^2 : h^2.$$

Fig. 168.



250. Teorema. — *Si una pirámide* SABCDE (fig. 168) *es cortada por un plano paralelo á la base, el polígono* abcde *de la seccion es semejante á la base* ABCDE.

En efecto, las rectas *ab* y AB son paralelas por intersecciones de dos planos paralelos *abcde* y ABCDE con un tercer plano ASB

(**228**). Por la misma razon lo son las rectas bc y BC, cd y CD, de y DE, etc. Los polígonos $abcde$ y ABCDE tendrán sus ángulos respectivamente iguales, puesto que sus lados son paralelos (**208**).

En virtud de los mismos paralelismos, se tiene además

$$ab : AB = sb : SB = bc : BC = sd : SD = cd : CD = se : SE,$$

y así sucesivamente.

De estas últimas igualdades resulta

$$ab : AB = bc : BC = cd : CD = \text{etc.}$$

De todo lo cual se deduce que los polígonos $abcde$ y ABCDE tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales; luego son semejantes.

Advertencia. — El cuerpo geométrico $abcde$ABCDE que queda de una pirámide, despues de quitar la parte superior que resulta de cortarle por un plano paralelo á la base, se llama *pirámide truncada*. Los polígonos semejantes $abcde$, ABCDE, cuyos planos son paralelos, son las dos *bases* del tronco de pirámide. Se llama *altura* de un tronco de pirámide la perpendicular bajada desde el punto de una de las bases sobre la otra.

II. La pirámide $sabcde$ es semejante á la pirámide total; pues, como es fácil demostrar las dos pirámides cumplen con las condiciones indicadas en el nº **249**. Bastaria para ello trazar los planos diagonales ASC y ASD.

§ III. De los prismas.

251. Se llama *prisma* á un cuerpo geométrico tal como ABCDEFGHIK (fig. 169) cuyas dos caras paralelas, llamadas *bases*, ABCDE y FGHIK son polígonos iguales teniendo al mismo tiempo sus lados paralelos, y que las demás caras ABGF, BCHG, CDIH, DEKI y EAFK son paralelógramos.

Fig. 169.

Altura de un prisma es la distancia de sus bases. Las aristas laterales AF, BG, CH, DI, etc., que reunen las dos bases, son iguales y paralelas; porque dos de estas aristas consecutivas pertenecen á lados opuestos de un mismo paralelógramo.

Los prismas se distinguen por el número de lados de sus bases : se dice prisma triangular, cuadrangular, pentagonal, etc., cuando sus bases son triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc. Todo plano que pase por dos aristas laterales, que no pertenecen á una misma cara, se llama *plano diagonal.* Los planos diagonales trazados por una misma arista AF dividen el prisma total en prismas triangulares de igual altura ABCFGH, ACDFHI, ADEFIK. El número de prismas triangulares que resultan es igual al número de lados de una de las bases menos dos.

En la Geometría elemental solo se consideran los prismas *convexos*, es decir, aquellos cuyas bases son polígonos convexos.

252. Teorema. — *Si se corta un prisma* ABCDEFGHIK (fig. 169) *por un plano paralelo á las bases, la seccion* LMNOP *es un polígono igual al de las bases.*

En efecto, las rectas LM y AB son paralelas por intersecciones de dos planos paralelos LMNOP y ABCDE con un tercer plano ABGF; luego la figura ABML es un paralelógramo, y se tiene tambien LM = AB. Del mismo modo se demostraria que las rectas MN, NO, OP, PL son respectivamente iguales y paralelas á las rectas BC, CD, DE, EA. Luego los dos polígonos LMNOP y ABCDE tienen sus lados respectivamente iguales; y como sus ángulos tambien son iguales por tener sus lados paralelos, resulta que dichos polígonos son iguales.

253. Un prisma es *recto* cuando sus aristas laterales son perpendiculares á las bases. En este caso las caras laterales son rectángulos.

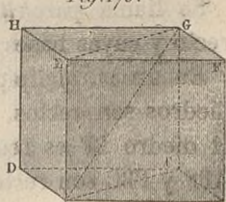
Dos prismas rectos de igual base é igual altura son superponibles: porque si se hacen coincidir las bases inferiores, las aristas laterales coincidirán tambien, por ser perpendiculares á estas bases é iguales á la altura comun (**198**); las bases superiores tendrán, pues, todos sus vértices comunes; luego los dos prismas coincidirán en toda su extension.

Un prisma recto es *regular* cuando sus bases son polígonos regulares.

Se llama *prisma truncado* lo que queda de un prisma despues de quitarle la parte superior que resulta de cortarle por un plano no paralelo á las bases. La seccion que resulta no es igual ordinariamente á la base del prisma, y las caras laterales del prisma truncado son generalmente trapecios.

254. Llámase *paralelipipedo* el prisma cuyas bases son paralelógramos. La figura 170 representa un paralelipípedo.

Fig. 170.



Las caras opuestas, tales como AEHD y BFGC, son iguales. La recta AE es igual y paralela á BF, por lados opuestos de un mismo paralelógramo ABFE; las rectas AD y BC son tambien iguales y paralelas por lados opuestos de un mismo paralelógramo ABCD; y como los ángulos DAE y CBF son iguales por tener sus lados paralelos y dirigidos en un mismo sentido, se deduce que los paralelógramos AEHD y BFGC son iguales.

Se ve tambien que los planos de estos paralelógramos son paralelos (**227**); de modo que *un paralelipípedo es un cuerpo geométrico limitado por seis caras paralelas dos á dos.*

De lo dicho resulta que dos caras opuestas cualesquiera de un paralelipípedo se pueden tomar por bases del prisma. Su altura será así la distancia de estas dos caras.

Todo plano diagonal, tal como ACGE, divide al paralelipípedo en dos prismas triangulares ABCEFG y ACDEGH que tienen bases iguales, por mitades de un mismo paralelógramo, y á mas igual altura.

Llámase *diagonal* de un paralelipípedo á toda recta, como AG, que une dos vértices opuestos A y G, es decir, dos vértices que no pertenecen á una misma cara.

255. Un paralelipípedo es *recto* cuando sus aristas laterales son perpendiculares á las bases. Las caras laterales son en este caso rectángulos; las bases solo pueden ser paralelógramos.

Se llama *paralelipípedo rectángulo* el paralelipípedo recto y cuyas bases son rectángulos.

En un paralelipípedo rectángulo (fig. 170) todos los diedros son rectos. Para demostrar, por ejemplo, que el diedro BF es recto, se observará que los ángulos ABF y FBC son rectos, por ser las caras ABFE y FBCG rectángulos; luego el ángulo ABC mide la inclinacion de estas caras; y como este ángulo ABC es recto por ser ABCD un rectángulo, se deduce que el diedro BF es recto.

Cada arista es perpendicular á las dos caras donde ella termina. La arista EH, por ejemplo, es perpendicular á las caras ABFE y DCGH; porque EH es perpendicular á las dos rectas AE y EF que pasan por su pié en el plano ABFE, y á las dos rectas HD y HG que pasan por su pié en el plano DCGH.

Las tres aristas AB, AD, AE que concurren en un mismo vértice A se llaman las *tres dimensiones* de un paralelipípedo rectángulo. Se las designa muchas veces con los nombres de *longitud*, *latitud* y *altura;* algunas veces, en lugar de esta última denominacion, se emplea la de *espesor* ó *profundidad.*

256. Teorema. — *Dos paralelipípedos rectángulos son iguales cuando tienen sus tres dimensiones respectivamente iguales.*

En efecto, las bases inferiores por ser rectángulos y tener igual base é igual altura, son superponibles. Luego, si se las hace coincidir, las aristas laterales tomarán dos á dos las mismas direcciones perpendiculares á las bases inferiores comunes; pero como estas aristas laterales son iguales á la tercera dimension de los paralelipípedos, resulta que los extremos de estas aristas coincidirán dos á dos. Los dos paralelipípedos rectángulos tendrán, pues, todos sus vértices comunes, y por consecuencia coincidirán en toda su extension; luego son iguales.

Advertencia. — El teorema anterior se puede enunciar de esta manera: *Dos paralelipípedos rectángulos de igual base é igual altura son iguales.*

Corolario. — Un paralelipípedo rectángulo queda determinado cuando se conocen sus tres dimensiones, ó cuando se conoce su base y su altura.

257. Teorema. — *En todo paralelipípedo rectángulo* ABCDEFGH (fig. 170) *el cuadrado de una diagonal* AG *es igual á la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones.*

En efecto, por ser la arista GC perpendicular al plano ABCD, el triángulo AGC es rectángulo en C, y se tiene (**182**)

$$\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2.$$

Pero el triángulo ACB que es rectángulo en B nos da tambien

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

Sustituyendo en la igualdad precedente en lugar de $\overline{AC}^2$ su igual resulta

$$\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CG}^2,$$

ó bien

$$\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2,$$

lo que corresponde al enunciado del teorema.

Aplicacion numérica. — Sean

$$AB = 9^m;\ AD = 6^m;\ AF = 2^m;$$

se tendrá $\quad \overline{AG}^2 = 81^{m.c} + 36^{m.c} + 4^{m.c} = 121^{m.c};$

de donde $\quad AG = 11^m.$

Corolario. — Se deduce de esta última proposicion que, *todas las diagonales de un paralelipípedo rectángulo son iguales.*

En un paralelipípedo hay cuatro diagonales.

258. Se da el nombre de *cubo* al paralelipípedo rectángulo que tiene iguales sus tres dimensiones. En este caso sus seis caras son cuadrados iguales, y todas sus aristas tambien son iguales.

Dos cubos son iguales cuando tienen una arista igual (**256**). Un cubo queda determinado cuando se nos da una de sus aristas.

Resulta del teorema precedente (**257**) que el cuadrado de la diagonal de un cubo es igual al triplo del cuadrado de su arista.

§ IV. De los poliedros.

259. Se da el nombre de *poliedro* á todo cuerpo geométrico terminado por planos. Estos planos se llaman *caras* del poliedro; las rectas que terminan las caras *aristas*, los extremos de las aristas *vértices*. Toda recta que une dos vértices que no pertenecen á una misma cara se llama *diagonal* del poliedro.

En la Geometría elemental solo se consideran los poliedros *convexos*, es decir, aquellos cuya superficie no puede ser cortada por una recta mas que en dos puntos.

Si por un vértice A (fig. 171) de un poliedro, se trazan rectas á los demás vértices, determinan una serie

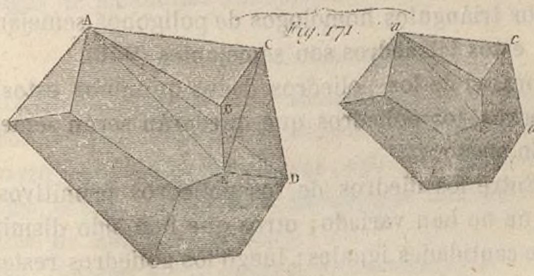


Fig. 171

de pirámides, tales como ABCDE, que tienen por vértice comun A, y por bases las diferentes caras del poliedro exceptuando las que concurren en el punto A :

la reunion de estas pirámides forman el mismo poliedro.

Todo poliedro se puede descomponer en pirámides; y como cada pirámide puede descomponerse á su vez en tetraedros (**248**), resulta que todo poliedro puede descomponerse en tetraedros que tengan por vértice comun uno de los vértices del poliedro.

260. Se llaman poliedros *semejantes* los que tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales y sus caras respectivamente semejantes y semejantemente dispuestas.

TEOREMA. — *Dos poliedros semejantes se pueden descomponer en un mismo número de tetraedros semejantes y colocados de la misma manera.*

Sean AB y *ab* (fig. 171) dos aristas homólogas de dos poliedros semejantes. Tómese sobre las caras del diedro AB, los vértices C y E, mas próximos al punto B; y considérese el tetraedro ABCE.

Sean *e* y *c* los vértices homólogos de E y C, y fórmese el tetraedro *abce*.

Los dos tetraedros así formados tienen un diedro igual, AB = *ab*, y las caras ABC, ABE semejantes á *abc* y *abe*, por triángulos homólogos de polígonos semejantes; luego estos tetraedros son semejantes (**246**).

Ahora, si de los poliedros dados quitamos estos dos tetraedros, los poliedros que quedarán serán semejantes. En efecto:

1° Entre los diedros de los poliedros primitivos los hay que no han variado; otros que han sido disminuidos de cantidades iguales; luego los poliedros restantes tendrán sus diedros iguales.

2° Las caras que pertenecian á los poliedros primitivos continuarán siendo semejantes; las que han sido disminuidas de triángulos homólogos resultarán semejantes; en fin, las caras nuevas son tambien semejantes, por caras homólogas de los tetraedros semejantes que hemos quitado; luego los poliedros restantes tienen sus caras semejantes.

Visto esto, se puede operar sobre los poliedros restantes del mismo modo que en los primitivos, y separar un nuevo par de tetraedros semejantes.

Por este proceder se llegará á descomponer los dos poliedros en un mismo número de tetraedros semejantes y dispuestos evidentemente de la misma manera.

Advertencia. — I. Los tetraedros semejantes que resultan de la descomposicion precedente se llaman *tetraedros homólogos*.

II. Se demostrará con facilidad la recíproca que dice: *Si dos poliedros se componen de un mismo número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

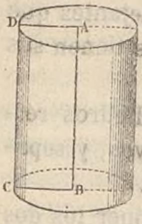
Corolario. — De la semejanza de las caras homólogas resulta la proporcionalidad de sus aristas homólogas; y de esta se deduce evidentemente la de sus diagonales homólogas, puesto que ellas son aristas homólogas de pirámides semejantes.

§ V. De los cuerpos redondos.

261. En la Geometría elemental, á mas de los poliedros se consideran otros cuerpos limitados en todo ó en parte por superficies curvas; estos cuerpos son: el *cilindro*, el *cono* y la *esfera*. Se les designa tambien con el nombre de *cuerpos redondos*.

262. *Cilindro* es un cuerpo engendrado por un rectángulo ABCD (fig. 172) que gira al rededor de uno de sus lados AB. Los lados AD y BC engendran círculos iguales, cuyos planos son perpendiculares á AB y que tienen sus centros en los puntos A y B.

Fig. 172.



El lado CD engendra una superficie curva que recibe el nombre de *superficie cilíndrica*. La recta AB al rededor de la cual se ejecuta el movimiento, se *llama* eje del cilindro. Los círculos AD y BC se llaman *bases*; y la longitud AB, que mide la distancia de las dos bases, *altura* del cilindro. Un cilindro puede considerarse como un prisma regular (253) cuya base fuese un polígono de un número infinito de lados infinitamente pequeños.

263. Llámanse *cilindros semejantes* los que están engendrados por rectángulos semejantes que giran al rededor de dos lados homólogos.

Teorema. — *Las bases de dos cilindros semejantes son entre sí como los cuadrados de sus alturas.*

Porque, llamando R y r los radios de las bases, H y h sus alturas, se tendrá segun la definicion

$$R : r = H : h; \text{ de donde } R^2 : r = H^2 : h^2;$$

multiplicando por π los dos términos de la primera razon resulta

$$\pi R^2 : \pi r^2 = H^2 : h^2,$$

conforme con el enunciado del teorema, puesto que las bases de los dos cilindros tienen respectivamente por medida πR^2 y πr^2.

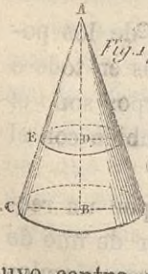


Fig. 173.

264. *Cono* es el cuerpo engendrado por un triángulo ABC (fig. 173) que gira al rededor de uno de sus catetos AB. El lado BC engendra un círculo cuyo centro está en B, y su plano es perpendicular á

AB : la hipotenusa AC engendra una superficie curva que se llama *superficie cónica*.

La recta AB alrededor de la cual se ejecuta el movimiento, se llama *eje* del cono; al círculo BC su base; al punto A *vértice*, y á la línea AC su *generatriz*. La longitud AB que mide la distancia del vértice á la base es la *altura* del cono.

Un cono puede considerarse como una pirámide regular (248) cuya base fuese un polígono de un número infinito de lados infinitamente pequeños.

265. Dos conos son semejantes cuando están engendrados por triángulos rectángulos semejantes que giran al rededor de catetos homólogos.

TEOREMA. — *Las bases de dos conos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus alturas.*

Igual demostracion que la del nº **263**.

266. Si en el triángulo generador ABC, se traza DE paralela á BC, esta recta describirá, cuando gire el triángulo, un círculo cuyo centro estará en D y cuyo plano será perpendicular al eje AB, y por consecuencia paralelo al plano del círculo BC. La porcion de cono comprendida entre los círculos paralelos BC y DE se llama *tronco de cono*. Los dos círculos BC y DE son las dos *bases* del tronco de cono; la parte DB de eje comprendida entre las dos bases, y que mide su distancia, es la *altura* del tronco de cono; la porcion EC de la hipotenusa *generatriz* ó *lado*.

Un tronco de cono se puede considerar como una pirámide regular truncada de bases poligonales regulares y de un número infinito de lados infinitamente pequeños.

Obsérvese que el cono deficiente ADE es semejante al cono total, por ser los triángulos generadores ADE y ABC semejantes.

267. *Esfera* es el cuerpo engendrado por un semicírculo ACB (fig. 174) que gira al rededor de su diámetro AB. Este cuerpo está terminado por una superficie única que se llama *superficie esférica*. Se designa á menudo esta superficie con la misma palabra *esfera*; no obstante el sentido en que se habla indica siempre si se trata de la superficie ó del cuerpo geométrico que ella determina.

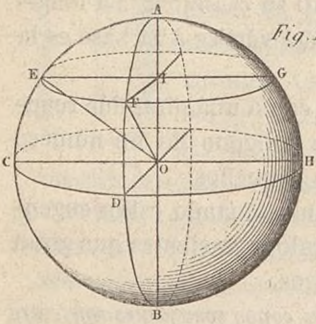


Fig. 174.

De la generacion de la esfera resulta que todos los puntos de su superficie equidistan del centro O del semi-círculo generador; por esta razon se le da el nombre de *centro* de la esfera.

Se puede definir la superficie esférica diciendo que es *aquella que tiene todos sus puntos á igual distancia de un punto interior llamado* centro.

Llámase *radio* toda recta que une el centro con un punto de la superficie esférica: segun lo que acabamos de decir, *todos los radios son iguales*.

Llámase *diámetro* toda recta que pasa por el centro y termina por ambos extremos en la superficie esférica.

Como cada diámetro se compone de dos radios, resulta que *todos los diámetros son iguales*.

268. Teorema. — *Un diámetro cualquiera de la esfera se puede considerar como su eje de revolucion.*

En efecto, sea AB (fig. 174) un diámetro cualquiera.

Por este diámetro hágase pasar un plano; este plano cortará á la superficie esférica, segun una línea curva ACB que tendrá todos sus puntos á igual distancia del centro O; luego esta curva será una circunferencia cuyo diámetro será AB. Por la misma línea AB hágase pasar otro plano, el cual cortará á la superficie esférica segun una curva ADB que tendrá todos sus puntos á igual distancia del centro O de la esfera; luego esta curva será tambien una circunferencia que tendrá por diámetro AB y que por consecuencia será igual á la ACB. Y como el plano ADB es cualquiera, se ve que la esfera se puede considerar engendrada por la revolucion del semicírculo al rededor de su diámetro AB.

269. Teorema. — *Toda seccion de la esfera por un plano, es un círculo.*

En efecto, sea EFG (fig. 174) la curva determinada sobre la superficie esférica por su interseccion con un plano. Del centro O de la esfera bájese á este plano, una perpendicular OI; tómense sobre la curva EFG dos puntos cualesquiera E y F, y únanse con O y con I. Los triángulos OIE y OIF son rectángulos en I, por ser OI perpendicular al plano EFG; por otra parte el lado OI es comun á los dos, y las hipotenusas OE y OF son iguales por radios de una misma esfera; luego son iguales y se tiene EI = FI. Y como los puntos E y F son dos puntos cualesquiera de la curva EFG, se deduce que esta curva tiene todos sus puntos equidistantes del punto I; es decir, que es una circunferencia cuyo centro es el pié I de la perpendicular bajada desde el centro de la esfera al plano secante.

Advertencia.—I. Cuando el plano secante pasa por el centro de la esfera, la interseccion es un círculo que tiene por centro y por radio el centro y radio de la esfera. Pero si el plano secante no pasa por el centro de la esfera, como el plano EFG por ejemplo, el radio EI del círculo de interseccion, por ser perpendicular á IO será menor que la oblícua OE, y por consiguiente, menor que el radio de la esfera.

Por esta razon, una seccion cuyo plano pase por el centro de la esfera, se llama *círculo máximo* de la esfera, mientras que si el plano de la seccion no pasa por el centro de la esfera, toma esta seccion el nombre de *círculo menor*. Así : ACB, ADB, CDH, son círculos máximos, y EFG es un círculo menor.

II. Los círculos menores disminuyen á medida que se apartan mas del centro de la esfera. Porque el triángulo rectángulo OIE da

$$\overline{OI}^2+\overline{IE}^2=\overline{OE}^2;$$

y como el segundo miembro es constante para una misma esfera, se ve que el término $\overline{EI}^2$ deberá disminuir á medida que $\overline{OI}^2$ aumente; ó lo que es lo mismo, que el radio IE del círculo menor, será menor á medida que la distancia OI del plano de este círculo al centro de la esfera sea mayor.

270. Teorema.—*Todo círculo máximo divide á la esfera en dos partes iguales.*

En efecto, sea CDH (fig. 174) la circunferencia correspondiente á un círculo máximo.

Inviértase la parte inferior de la esfera de modo que ocupe una posicion análoga á la de la parte superior y que las dos porciones coincidan segun la circunferencia CDH. En este movimiento, las distancias de los diferentes puntos de la porcion inferior de la superficie esférica al punto O, no habrán variado; por consecuencia, si las dos porciones no coincidiesen en toda su extension, resultaria que habria puntos que distarian desigualmente del centro, lo que es contra la propiedad fundamental de la superficie esférica; luego es preciso que las dos porciones de superficie coincidan : luego son iguales.

Advertencia. — Las dos mitades de superficie esférica separadas por un círculo máximo, se llaman *hemisferios*.

271. Cuando se toma por eje de revolucion de una esfera un diámetro cualquiera AB (fig. 174), el plano trazado perpendicularmente á este eje por el centro O, corta á la superficie de la esfera segun un círculo maximo CDH que se llama *ecuador*. Los extremos A y B del eje, se llaman *polos*. Los círculos determinados por planos paralelos al ecuador, se llaman *círculos paralelos*, ó simplemente *paralelos*; tal es el círculo EFG. Los círculos determinados por planos que pasan por el eje, se llaman *círculos meridianos*, ó simplemente *meridianos*; tales son los círculos ACB y ADB.

Todas estas denominaciones se han tomado de la geografía. El globo que habitamos se puede considerar como sensiblemente esférico. La recta al rededor de la cual ejecuta su movimiento de rotacion diurno, que da por resultado el dia y la noche, se llama *eje* de la tierra; los extremos de este eje son los *polos*. El plano trazado por el centro de la tierra perpendicularmente á su eje, se llama plano del *ecuador*, porque cuando el sol está en este plano la duracion del dia es igual á la de la noche para todos los puntos del globo. Todo círculo trazado por el eje de la tierra, se llama *meridiano*, porque cuando el sol está en este plano, es medio dia ó media noche para todos los lugares del globo por donde pasa este círculo.

272. Se llama *casquete esférico* á la porcion de superficie esférica separada por un plano. Así, la porcion de esfera que está en la parte superior del plano EFG (fig. 174), es un casquete esférico. Se puede suponer engendrado por un arco de circunferencia AE que gira al rededor del diámetro AB y que pasa por uno de sus extremos. La *altura* del casquete es la parte AB del eje comprendido entre el polo A y el centro I del círculo menor que limita el casquete.

Se llama *zona* la porcion de superficie esférica comprendida entre dos círculos paralelos; así, la porcion comprendida entre los círculos EFG y CDH, es una zona. La *altura* de la zona, es la parte del eje comprendida entre los centros de los dos círculos paralelos.

Se llama *segmento esférico* el volúmen comprendido entre un casquete esférico y el plano que lo termina. Este plano se llama *base* del segmento.

Llámase *sector esférico* el volúmen engendrado por un sector circular que gira al rededor de uno de sus radios. Así, EOA girando al rededor de OA engendrará un sector esférico. El casquete engendrado por el arco AE, se llama *base* del sector esférico.

CAPITULO III

DE LA MEDIDA DE LAS SUPERFICIES Y VOLÚMENES

§ I. De la medida de las superficies.

273. Como todas las caras de un poliedro son polígonos cuyas áreas sabemos determinar, tendremos que añadir poca cosa para completar esta parte.

TEOREMA. —*El área de la superficie lateral de un prisma recto, es igual al producto de su altura por el perímetro de su base.*

En efecto; esta superficie lateral se compone de una série de rectángulos que tienen por altura la del prisma. Si llamamos H á esta altura y B, B′, B″, B‴, etc., las bases de los rectángulos, ó á los lados de la base del prisma, se tendrá que la superficie que se trata de valuar tendrá por expresion :

$$B \times H + B' \times H + B'' \times H + \text{etc.},$$

ó
$$(B + B' + B'' + \text{etc.}) \times H,$$

es decir, el producto del perímetro de la base por la altura.

APLICACION. —*¿Cuánta tela de* $1^m,20$ *de ancho será menester para cubrir las paredes de un salon octogonal, cuya altura es de* $3^m,24$ *y el ancho de cada pared* $2^m,5$?

La superficie total de las paredes es igual á la de un prisma recto, cuya altura es de $3^m,24$ y el perímetro de su base $2^m,5 \times 8$, ó lo que es lo mismo, 20^m. La expresion de esta superficie será, pues, $3^m,24 \times 20$, ó $64^{m\,c},80$. Dividiendo este último resultado por $1^m,20$, el cociente 54^m será la cantidad de tela pedida.

274. Teorema.—*El área de la superficie lateral de un cilindro, es igual al producto de su altura por la circunferencia de su base.*

Porque un cilindro se puede considerar como un prisma recto cuya base es un polígono regular de un número infinito de lados infinitamente pequeños; luego el teorema precedente se podrá aplicar á este caso, sustituyendo en lugar del perímetro de la base del prisma, la circunferencia de la base del cilindro.

Si designamos la altura por H y el radio de la base por R, se tendrá por expresion de la superficie $2\pi R \times H$.

Aplicacion. — Para determinar la cantidad de plancha de hierro que se necesita para construir un tubo de 8^m de largo y $0^m,6$ de diámetro, se efectuará el producto

$$8^m \times 0^m,6 \times 3,1416;$$

el cual da $15^{mc},07968...$, ó aproximadamente $15^{mc},08$.

275. Teorema.—*El área de la superficie lateral de una pirámide regular, es igual al producto del perímetro de su base por la mitad de la perpendicular bajada desde el vértice á uno de los lados de dicha base.*

En efecto; esta superficie lateral se compone de una serie de triángulos isósceles iguales: sea l la altura de uno de estos triángulos, B la base de uno de ellos y n el número de triángulos. El área de uno de ellos, será igual á $\frac{1}{2}\, lB$; luego la superficie total estará representada por $\frac{1}{2}\, lB \times n$, ó $\frac{1}{2}\, l \times Bn$. Pero Bn es el perímetro de la base; luego la expresion anterior corresponde al enunciado del teorema.

276. Teorema.—*El área de la superficie lateral de un cono es igual á la mitad del producto de la circunferencia de su base por su generatriz.*

En efecto: un cono se puede considerar como una pirámide regular, cuya base es un polígono regular de un número infinito de lados infinitamente pequeños. Se puede, pues, aplicar el teorema precedente, observando que el perímetro de la base de la pirámide se convierte en la circunferencia de la base del cono, y que la perpendicular bajada desde el vértice de la pirámide á uno de sus lados de la base, pasa á ser la generatriz del cono.

Si se designa, pues, por R el radio de la base del cono y por G su generatriz, la expresion de la superficie será

$$\tfrac{1}{2}.\ 2\pi R.G, \quad \text{ó simplemente} \quad \pi RG.$$

Aplicacion.—Supongamos que la cubierta cónica de una torre circular tiene $8^m,5$ de diámetro en su base, y que su generatriz tiene $6^m,4$; la superficie de esta cubierta será

$$\tfrac{1}{2}.\ 6^m,4 \times 8^m,5 \times 3,1416 \quad \text{ó} \quad 85^{mc},45....$$

277. Teorema.—*El área de la superficie lateral de una pirámide regular truncada, es igual á la semi-suma de los perímetros de sus bases por la altura de una de sus caras.*

En efecto: esta superficie se compone de una serie de trapecios iguales. Llamando, pues, B y b las bases inferior y superior de uno de estos trapecios, h su altura y n el número de caras, se tendrá que la expresion de una de estas caras será $\frac{1}{2}(B+b)\times h$; luego la de la superficie total será $\frac{1}{2}(B+b)\times h\times n$, que se puede escribir así, $\frac{1}{2}(Bn+bn)\times h$.

Pero Bn representa el perímetro de la base inferior de la pirámide truncada, y bn el perímetro de su base superior; luego esta expresion corresponde al enunciado del teorema.

278. Teorema.—*El área de la superficie lateral de un cono truncado, es igual á la semi-suma de las circunferencias de sus bases multiplicada por su generatriz.*

En efecto : un cono truncado se puede considerar como una pirámide regular truncada, cuyas bases fuesen polígonos regulares de un número infinito de lados infinitamente pequeños. Se puede, pues, aplicar el teorema precedente, con solo observar que los perímetros de las dos bases del tronco de pirámide, deben reemplazarse por las circunferencias del cono truncado, y que la altura de uno de los trapecios que sirve de cara lateral al tronco de pirámide se convierte en la generatriz del tronco de cono.

Llamando R y r á los radios de las bases, y c á la generatriz, se tendrá por expresion de la superficie curva de un cono truncado

$$\tfrac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r) \, . \, c \quad \text{ó} \quad \pi \, . \, (R + r) \, . \, c.$$

Aplicacion.—Imaginemos un estanque circular cuyo muro forme talud; la superficie lateral de este muro será la de un tronco de cono. Supongamos que los radios de sus bases son respectivamente 7^m y 6^m, y que la generatriz tiene 3^m; el área de la superficie del muro será

$$3{,}1416 \times (7^m + 6^m) \times 3^m \quad \text{ó} \quad 122^{m\,c}{,}52\ldots$$

279. El área de la superficie lateral de un cono truncado, se puede determinar de otros dos modos diferentes que es útil conocer.

I. *El área de la superficie lateral de un cono truncado, es igual al producto de su generatriz por la circunferencia de la seccion hecha á igual distancia de las bases y paralelamente á las mismas.*

En efecto, sea ABCD (fig. 175), el trapecio que engendra el tronco de cono. Si se unen los puntos medios I y H de los lados no paralelos, la recta IH que resulta será paralela á las bases, y por consecuencia perpendicular al eje AC. Dicha recta al girar al rededor de este eje, describirá un círculo perpendicular á este eje y cuyo centro es el punto H. Además, la circunferencia de este círculo será igual á la semi-suma de las circunferencias de las bases, puesto que IH es igual á la semi-suma de las rectas AB y CD (**129**); y como las circunferencias son entre sí como sus radios [(**160**), resulta que la circunferencia que tiene por radio IH, es igual á la semi-suma de las que tienen por radios AB y CD. Pero el área de la superficie lateral de un tronco de cono es igual á

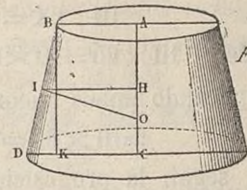


Fig. 175.

$$\tfrac{1}{2}\,(\text{circunf. AB} + \text{circunf. CD}) \times \text{BD};$$

luego se puede tambien escribir

$$\text{circunf. IH} \times \text{BD},$$

que es lo que se queria demostrar.

II. *El área de la superficie lateral de un cono truncado* ABCD (fig. 175), *es igual al producto de la altura* AC *por la circunferencia cuyo radio es la perpendicular* IO *levantada en el punto medio de su generatriz é interceptada entre este punto y el eje.*

Para demostrarlo, trácese BK paralela á AC; estas dos rectas resultan iguales. Los triángulos BDK y IOH son semejantes, por tener los ángulos K y H iguales por rectos, y los KBD y HIO iguales tambien por tener sus lados respectivamente perpendiculares: luego con sus lados homólogos se puede formar la proporcion

$$IH : BK = IO : BD;$$

de donde $IH \times BD = IO \times BK = IO \times AC.$

Multiplicando ambos miembros por 2π, resulta

$$2\pi IH \times BD = 2\pi IO \times AC.$$

Pero, segun la proposicion precedente, el primer miembro de esta igualdad expresa la superficie del tronco de cono; luego el segundo miembro, es decir, el producto de la circunferencia cuyo radio es OI por la altura del tronco de cono, es una nueva expresion de dicha superficie.

Advertencia.—La última expresion se puede aplicar al cono, puesto que subsiste por mas pequeña que sea la base superior del tronco de cono, y por consiguiente para el caso que se reduzca á cero, ó lo que es lo mismo, cuando el tronco de cono se haya convertido en cono.

280. Lema.—*El área de la superficie engendrada por una porcion de polígono regular* ABCD (fig. 176) *que gira al rededor del radio* AO *que pasa por uno de sus extremos, es igual al producto de la circunferencia inscripta por la parte de eje* AO *comprendida entre el punto* A *y el pié* P *de la perpendicular bajada desde el otro extremo* D *sobre el eje.*

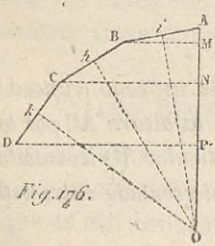


Fig. 176.

Trácense las perpendiculares BM, CN..., DP, al eje, y únanse los puntos medios i, h..., k, de los lados con O; estas líneas Oi, Oh..., Ok, serán iguales, y representarán el radio de la circunferencia inscripta.

La superficie engendrada por ABCD se compone de la del cono engendrado por AC y de la de los troncos de conos engendrados por los lados consecutivos BC.,., CD. Estas superficies parciales, segun lo anteriormente demostrado (**279** II), vienen expresadas por

$$\text{circunf. } Oi \times AM, \quad \text{circunf. } Oh \times MN.... \\ \text{circunf. } Ok \times NP.$$

Sumando estas cantidades y teniendo en cuenta que la circunf. Oi se puede considerar como factor comun, una vez que los radios Oi, Oh..., Ok, son iguales, resulta por expresion de la superficie total

$$\text{circunf. } Oi \times (AM + MN..., + NP),$$

ó bien

$$\text{circunf. } Oi \times AP$$

lo que está conforme con el enunciado de la proposicion.

281. TEOREMA.—*El área de un casquete esférico es igual al producto de su altura por una circunferencia máxima.*

En efecto, un casquete esférico se puede considerar como engendrado por una porcion de un polígono regular cuyos lados fuesen infinitamente pequeños y en número infinito. En este caso la circunferencia inscrita no seria otra cosa que la misma circunferencia del arco generador del casquete esférico; y la porcion de eje comprendido entre el extremo del arco y el pié de la perpendicular bajada desde el otro extremo sobre el eje, seria la misma altura del casquete.

Luego si se designa por h esta altura, y por R el radio del arco generador, ó lo que es lo mismo, el radio de la esfera, la expresion del área de la superficie del casquete será

$$2\pi R \times h.$$

Corolario.—*El área de una zona es igual al producto de su altura por una circunferencia máxima.*

En efecto, la zona comprendida entre los círculos EFG y CDH (fig. 174), es igual á la diferencia de los casquetes engendrados por los arcos AC y AE; luego la expresion de esta superficie es

$$2\pi R \times AO - 2\pi R \times AI$$

ó bien $$2\pi R\,(AO - AI)$$

en fin $$2\pi R \times OI.$$

Pero OI es precisamente la altura de la zona; luego esta expresion está conforme con el enunciado del teorema.

282. *El área de una esfera es cuádrupla de la de un círculo máximo.*

En efecto, la expresion hallada para determinar el área de un casquete cualquiera, se podrá aplicar al caso de una semi-esfera, con solo observar que la altura AO (fig. 177) no es otra cosa que el radio: luego la expresion de la superficie de la semi-esfera será $2\pi R \times R$, ó $2\pi R^2$; y por consiguiente la superficie total de la esfera $4\pi R^2$, es decir, igual á 4 veces πR^2, ó lo que es lo mismo, á 4 veces la superficie de un círculo máximo.

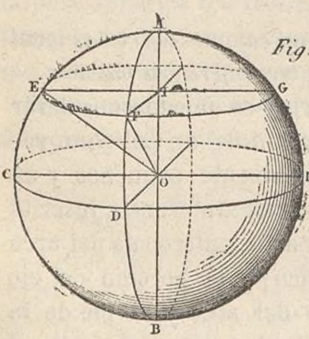


Fig. 177.

Aplicaciones.—I. *Considerando el globo terrestre como una esfera de radio igual á* 636,62 *miriámetros, se pide su superficie.*

La expresion de esta superficie es

$$4 \times 3{,}1415926 \times (636^{m},62)^2.$$

Efectuando las operaciones indicadas, resulta 5092961 miriámetros, y una fraccion que conviene despreciar.

II. *La altura del casquete esférico que forma una zona glacial, es de* 52,65 *miriámetros próximamente. ¿Cuál es la superficie de esta zona?*

La expresion de esta superficie es

$$2 \times 3{,}1415926 \times 636^{mir},62 \times 52^{mir},65.$$

Efectuando las operaciones indicadas, resulta 210600 miriámetros cuadrados, con un error menor que un miriámetro cuadrado.

III. *¿Cuál será el radio de una esfera cuya superficie equivale á* 1 *metro cuadrado?*

Si la superficie de la esfera equivale á 1 metro cuadrado, el área de un círculo máximo será igual á su cuarta parte ó $0^{m\,c},25$. Pero como el área de un círculo es igual al producto del número π por el cuadrado de su radio, resulta que dividiendo $0^{m\,c},25$ por 3,1415926, se tendrá el cuadrado del radio. Efectuando esta operacion se halla $0^{m\,c},079577...$, y extrayendo la raiz cuadrada se obtendrá por fin $0^{m},282$ igual al radio pedido.

§ II. De la medida de los volúmenes.

283. Determinar el volúmen de un cuerpo, es hallar su relacion con otro volúmen que se toma por unidad. Se elige por unidad de volúmen un cubo cuya arista es igual á 1 metro y al cual se le da el nombre de *metro cúbico*. La valuacion de los volúmenes geométricos se reduce siempre á la de medidas de longitud.

284. Teorema.—*El volúmen de un paralelipípedo rectángulo, es igual al producto de sus tres dimensiones.*

Sea MB (fig. 178) el paralelipípedo propuesto. El enunciado que precede significa que, para obtener el número de unidades contenidas en este paralelipípedo,

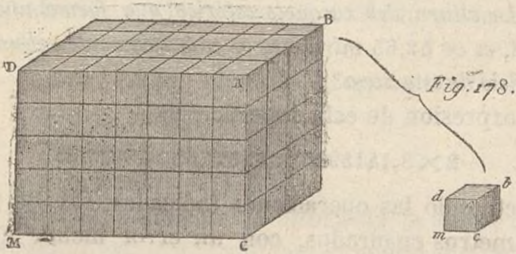


Fig. 178.

es necesario buscar el número de unidades de longitud que contiene cada una de las tres aristas AB, AC, AD, que concurren en un mismo vértice, y multiplicar los números que resulten entre sí.

En efecto: supongamos para fijar las ideas que la arista AB contiene 4 veces á la unidad de longitud *ab*, y que las aristas AC y AD la contienen respectivamente 5 veces y 7 veces. Divídase AB en 4 partes iguales y por los puntos de division trácense planos perpendiculares á AB; divídase tambien AC en 5 partes iguales, y por sus puntos de division trácense planos perpendiculares á AC; por último, divídase AD en 7 partes iguales y por los puntos de division trácense planos perpendiculares á AD.

El paralelipípedo MA quedará así dividido en pequeños paralelipípedos rectángulos que tendrán por altura, ancho y espesor, la unidad de longitud *ab* (**226**, **230** corol.). Luego todos estos paralelipípedos rectángulos son cubos que tienen por arista la unidad de longitud, es decir, que son unidades de volúmen; solo falta, pues, determinar su número.

Para ello, obsérvese que á lo largo de la arista AB hay tantos de estos cubos pequeños como unidades de longitud contiene AB; es decir, 4, los cuales forman una especie de columna colocada horizontalmente. Sobre la arista AD se pueden considerar tantas de estas columnas como unidades tiene AD, es decir, 7, las cuales forman una capa horizontal. En fin, á lo largo de la arista AC podemos considerar tantas de estas capas paralelas como unidades tenga AC, es decir, 5, las cuales componen el paralelipípedo propuesto. El número total de estos cubos pequeños es, pues, el producto de 4 por 7 y por 5, es decir, 140; luego el paralelipípedo propuesto contiene 140 unidades de volúmen.

Estos razonamientos son independientes del número de unidades de longitud de cada una de las aristas.

Si la unidad de longitud no está contenida un número exacto de veces en cada arista, es preciso recurrir á unidades cada vez mas pequeñas, hasta encontrar una que cumpla con esta condicion, lo que siempre se verifica en la práctica.

Corolario. En el caso de que el paralelipípedo rectángulo fuese un cubo, como las tres dimensiones son iguales, bastará para determinar el número de unidades de volúmen que contiene, multiplicar el número de unidades de longitud contenidas en una de sus aristas, tres veces consigo mismo.

Por ejemplo, si la arista del cubo contiene 2 unidades de longitud, el cubo contendrá $2 \times 2 \times 2$, ú 8 unidades de volúmen. Si la arista contiene 3 unidades de longitud, el cubo contendrá $3 \times 3 \times 3$, ó 27 unidades de volúmen; y así sucesivamente.

Por esta razon, en aritmética se da el nombre de *cubo* al producto de tres factores iguales.

Un centímetro tiene 10 milímetros, luego un centímetro cúbico tendrá $10 \times 10 \times 10$, ó 1000 milímetros cúbicos. Por la misma razon un decímetro cúbico es igual á 1000 centímetros cúbicos; un metro cúbico á 1000 decímetros cúbicos; y así sucesivamente.

Aplicaciones numéricas.—I. *¿Cuál es el volúmen de aire contenido en una sala rectangular que tiene* $10^{m},42$ *de largo, con* $7^{m},51$ *de ancho y* $3,^{m}85$ *de alto?*

El volúmen pedido, expresado en centímetros cúbicos será el producto de los tres números 1042, 751 y 385, es decir, 301278670 centímetros cúbicos: lo que corresponde á $301^{m.cúb}\ 278^{dec.cúb}\ 670^{cent.cúb}$.

II. *Un monton de madera tiene* $13^{m},4$ *de largo,* 5^{m} *de ancho y* $7^{m},2$ *de alto: ¿qué cantidad de madera hay en metros cúbicos?*

Las tres dimensiones equivalen á 134^{dec}, 50^{dec} y 72^{dec}; luego el volúmen del monton, expresado en decímetros cúbicos, será $134 \times 50 \times 72$ ó $482400^{dec.cúb}$. Este número corresponde á $482^{m.cúb},400^{dec.cúb}$.

III. *¿Cuál será en hectólitros la cantidad de agua que puede contener un depósito rectangular de* $6^{m},4$ *de largo,* $3^{m},5$ *de ancho y* $2^{m},7$ *de profundidad?*

El volúmen pedido, en decímetros cúbicos, será

$$64 \times 35 \times 27 \text{ ó } 60480^{dec.cub}.$$

Este número equivale á 60480 litros, ó á 604 hectólitros, 80 litros.

Advertencia. — El producto de las aristas AB y AD del paralelipípedo MB (fig. 179) expresa el área de su base superior BD ó tambien la de su base inferior. Para hallar, pues, la expresion del volúmen de un paraleli-

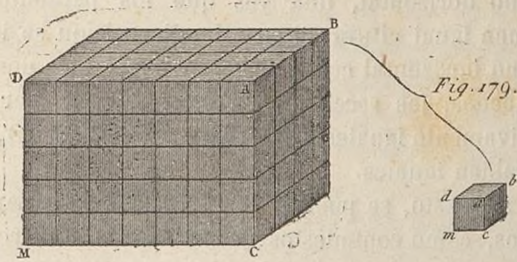


Fig. 179.

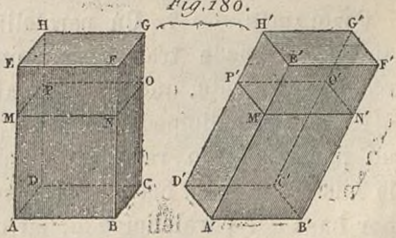
pípedo rectángulo, basta multiplicar el área de su base por su altura; es decir, que el número de unidades superficiales de la base multiplicado por el número de unidades lineales de la altura, dará el número de unidades de volúmen del paralelipípedo propuesto.

Esto es lo que se quiere expresar cuando se dice que *el volúmen de un paralelipípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Por ejemplo, si la base tiene 28 metros cuadrados y la altura 5 metros, el volúmen será 28 × 5 ó 140 metros cúbicos.

285. Lema. — *Dos paralelipípedos que tienen bases iguales é igual altura son equivalentes.*

Fig. 180.



En efecto: sean AG y A′G′ (fig. 180) dos paralelipípedos que tienen las bases ABCD y A′B′C′D′ iguales é igual altura. Concíbanse las bases inferiores ABCD y A'B'C'D' colocadas en un mismo plano horizontal; las bases superiores EFGH y E'F'G'H' estarán tambien en un mismo plano horizontal, una vez que los paralelipípedos tienen igual altura. Si en esta disposicion se traza un plano horizontal cualquiera que corte á los dos paralelipípedos, las secciones MNOP y M'N'O'P', por ser respectivamente iguales á las bases ABCD y A'B'C'D', serán tambien iguales.

Esto supuesto, se pueden considerar los dos paralelipípedos, como compuestos de un mismo número (un número infinitamente grande) de capas infinitamente delgadas, formando otros tantos paralelipípedos rectos que tienen una misma altura infinitamente pequeña y cuyas bases son respectivamente iguales á ABCD ó á A'B'C'D'. Luego, estos paralelipípedos elementales son iguales (253), de lo cual se deduce que los paralelipípedos propuestos son equivalentes.

Advertencia. — Se obtiene una imágen sensible del género de demostracion que acabamos de emplear, cuando con un dominó, fichas ó cartas se hace un monton que tenga la forma de un paralelipípedo rectángulo y luego despues se le vuelve oblícuo sin cambiar evidentemente su volúmen.

Corolarios. — I. Un paralelipípedo oblícuo cualquiera se puede transformar en otro paralelipípedo recto equivalente, que tenga igual base é igual altura.

II. Un paralelipípedo recto se puede transformar en un paralelipípedo rectángulo equivalente, que tenga la misma altura y base equivalente. Porque, tomando por base del paralelipípedo, su cara anterior, que es un rectángulo, se podrá considerar como un paralelipípedo oblícuo de base rectangular, y que segun el teorema, se podrá transformar en un paralelipípedo rectángulo equivalente. Si ahora se coloca el paralelipípedo en su posicion primitiva, se verá que su nueva base es un rectángulo equivalente á la que tenia antes.

III. De los dos corolarios que preceden se deduce que un paralelipípedo cualquiera, se puede transformar en otro paralelipípedo rectángulo equivalente, que tenga base equivalente é igual altura.

286. Teorema. — *El volúmen de un paralelipipedo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

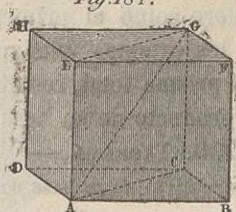
Porque siendo B su base y H su altura, se podrá transformar en otro paralelipípedo rectángulo equivalente, que tenga una base equivalente á B y la misma altura H. Y como la medida de este último es $B \times H$, resulta que el primero tendrá por medida la misma expresion.

287. Lema. — *Dos prismas que tienen bases iguales é igual altura, son equivalentes.*

Igual demostracion que la del nº **285**, considerando los dos prismas formados de un número infinito de prismas rectos y de altura infinitamente pequeña.

Corolario.—*Todo prisma triangular es mitad de un paralelipipedo de dupla base é igual altura.*

Fig. 181.



Sea ABCEFG (fig. 181) un prisma triangular. Complétense los paralelógramos ABCD y EFGH, y únase D con H. El cuerpo geométrico así determinado será un paralelipípedo, puesto que sus seis caras son paralelógramos. Este paralelipípedo tiene la base ABCD dupla del triángulo y además la misma altura. Pero los dos prismas ABCEFG y ACDEGH que le componen, tienen las bases ABC y ACD iguales por mitades de un mismo paralelógramo, y por altura comun la del prisma; luego son equivalentes. Por consiguiente cada uno de ellos, y en particular el prisma propuesto, es la mitad del paralelipípedo AG que tiene base dupla é igual altura.

288. Teorema. — *El volúmen de un prisma triangular es igual al producto de su base por su altura.*

Sean B y H la base y altura del prisma propuesto: el volúmen del paralelipípedo de dupla base é igual altura será $2\,B \times H$ (**286**); luego el volúmen del prisma triangular que es igual á su mitad será $B \times H$, ó lo que es lo mismo el producto de su base por su altura.

289. Teorema. — *El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Porque todo prisma se puede dividir en prismas de igual altura, por medio de planos diagonales triangulares (**251**): luego si llamamos H á esta altura y B, B′, B″, etc., las bases de los prismas triangulares, la suma de sus volúmenes estará expresada por

$$B \times H + B' \times H + B'' \times H + \text{etc.},$$

ó por $$(B + B' + B'' + \text{etc.}) \times H.$$

Pero como el primer factor ó la suma de las bases de los prismas triangulares, forma la base poligonal del prisma total, resulta, pues, que el volúmen es igual al producto de su base por su altura.

290. Teorema. — *El volúmen de un cilindro es igual al producto de su base por su altura.*

Porque un cilindro se puede considerar como un prisma regular, cuya base es un polígono de un número infinito de lados infinitamente pequeños.

Advertencia. — Si designamos por H la altura de un cilindro, y por R el radio de su base, la expresion de su volúmen será $\pi R^2 H$.

Aplicaciones. — I. *Determinar el volúmen de vapor que puede contener el cilindro de una máquina, sabiendo que la altura de este cilindro es de* $1^m,2$ *y el diámetro de su base* $0^m,6$.

La expresion del volúmen pedido será

$$3,1415926 \times (0^m,3)^2 \times 1^m,2.$$

Efectuando las operaciones indicadas resulta

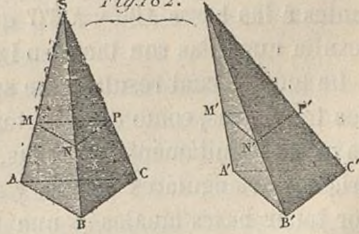
$$0^{m.\text{cúb}},339292, \text{ ó } 339^{\text{dec.cub}}\ 292^{\text{cent.cub}}.$$

II. *¿Cuál sera el radio de un depósito cilíndrico de* 3^m *de profundidad, para que pueda contener* 1000 *hectólitros de agua?*

Los 1000 hectólitros equivalen á 100 metros cúbicos. Divídase este volúmen por la altura 3^m del cilindro y el cociente $33^{m.c},3333$ expresará la superficie del círculo cuyo radio se pide. Dividiendo, pues, esta superficie por π ó 3,1416, el cociente $10^{m.c},6103$ será el cuadrado del radio; su raiz cuadrada ó $3^m,257$ dará con un error menor que un milímetro el radio pedido.

291. Lema I. — *Dos tetraedros que tienen bases iguales é igual altura, son equivalentes.*

Fig. 182.



Sean SABC y S'A'B'C' (fig. 182) los tetraedros cuyas bases ABC y A'B'C' suponemos iguales. Si se consideran estas bases colocadas en un plano horizontal, los vértices S y S' estarán situados en una misma horizontal, puesto que los dos tetraedros tienen una misma altura.

Ahora, si en esta disposicion, se cortan los dos tetraedros por un plano horizontal, las secciones MNP y M'N'P' serán iguales.

En efecto, los tetraedros SMNP y SABC son semejantes, por tener las tres caras que se reunen en S respectivamente semejantes (245). Luego, si llamamos h y H las alturas de estos tetraedros se tendrá (244)

$$\mathrm{MNP} : \mathrm{ABC} = h^2 : \mathrm{H}^2.$$

por una razon parecida, y observando al mismo tiempo que por tener los tetraedros SABC y S'A'B'C' por altura comun H, los tetraedros SMNP y S'M'N'P' tambien tendrán por altura comun h, se tendrá

$$\mathrm{M'N'P'} : \mathrm{A'B'C'} = h^2 : \mathrm{H}^2.$$

Y como estas dos proporciones tienen una razon comun se deduce:

$$\mathrm{MNP} : \mathrm{ABC} = \mathrm{M'N'P'} : \mathrm{A'B'C'},$$

ó $$\mathrm{MNP} : \mathrm{M'N'P'} = \mathrm{ABC} : \mathrm{A'B'C'};$$

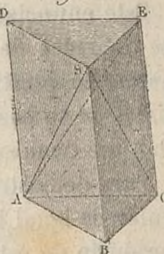
pero las bases ABC y A'B'C' son iguales; luego las secciones MNP y M'N'P' hechas por un mismo plano paralelo á las bases, son equivalentes; y como son semejantes á las bases ABC y A'B'C' que son iguales entre sí, resulta que ellas son tambien iguales.

De todo lo cual resulta, que se pueden considerar los dos tetraedros, como compuestos de un mismo número de capas infinitamente delgadas, formando otros tantos prismas triangulares rectos, y respectivamente iguales por tener bases iguales y una misma altura infinitamente pequeña; por consecuencia los dos tetraedros son equivalentes.

292. Lema II. — *El volúmen de un tetraedro es la tercera parte del de un prisma triangular de igual base é igual altura.*

Sea SABC (fig. 183) un tetraedro cualquiera. Compléntense los paralelógramos ABSD y CBSE, y únase D con E. El cuerpo geométrico así determinado será un prisma triangular, puesto que sus caras laterales son paralelógramos; sus bases triángulos iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; y por último estas bases son paralelas por estar determinadas por las rectas SD, SE y BA, BC respectivamente paralelas (**227**). Este prisma triangular tiene la misma base ABC que el tetraedro, y la misma altura; falta solo de mostrar que el tetraedro es su tercera parte.

Fig. 183.



Para esto únase A con E. El prisma triangular se podrá considerar como descompuesto en tres tetraedros SABC, SACE y SAED.

Comparando los tetraedros SABC y SACE, se ve, tomando por vértice el punto A, que sus bases SBC y SCE son iguales por mitades del paralelógramo CBSE : luego estos dos tetraedros tienen bases iguales é igual altura; luego son equivalentes (**291**).

Comparando tambien los tetraedros SACE y SAED se ve, tomando por vértice comun el punto S, que sus bases ACE y AED son iguales por mitad de un mismo paralelógramo ACED : luego estos dos tetraedros tienen tambien bases iguales y alturas tambien iguales, y por consecuencia son equivalentes.

De todo lo cual resulta que el prisma triangular ha quedado descompuesto en tres tetraedros equivalentes. Luego uno cualquiera de ellos, SABC por ejemplo, será la tercera parte del prisma triangular ABCDSE que tiene igual base y la misma altura.

293. TEOREMA. — *El volúmen de un tetraedro es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Este enunciado significa que para obtener el número de unidades de volúmen que contiene un tetraedro, es necesario multiplicar el número de unidades superficiales de su base por el número de unidades de longitud que tiene su altura, y dividir el producto por tres.

Para demostrarlo basta observar que un prisma triangular de igual base é igual altura tiene por medida el producto de esta base por esta altura; luego el tetraedro, que es su tercio, tendrá por medida el tercio de este producto.

294. TEOREMA. — *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Porque toda pirámide se puede descomponer, por medio de planos diagonales, en tetraedros que tengan la misma altura que dicha pirámide (248); llamando, pues, H á esta altura y B, B'', etc. á los triángulos en que ha quedado descompuesta la base, se tendrá por expresion de la suma de los volúmenes de los tetraedros

$$\tfrac{1}{3}\,B \times H + \tfrac{1}{3}\,B' \times H + \tfrac{1}{3}\,B'' \times H + \text{etc.},$$

ó

$$\tfrac{1}{3}\,(B + B' + B'' + \text{etc.}) \times H.$$

Pero el primer factor expresa el área del polígono que sirve de base á la pirámide; luego su volúmen será gual al tercio del producto de su base por su altura.

295. Teorema. *El volúmen de un cono es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Porque un cono se puede considerar como una pirámide regular, cuya base es un polígono de un número infinito de lados infinitamente pequeños.

Advertencia. — Si designamos por H la altura del cono y por R el radio de su base, la expresion de su volúmen será $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Aplicacion. — *¿Cuál es el volúmen de un cono cuya altura es de* $0^{m},50$ *y el radio de su base* $0^{m},25$?

La expresion del volúmen pedido es

$$\tfrac{1}{3} \times 3,14159 \times (0^{m},25) \times 0^{m},50.$$

Efectuando las operaciones indicadas resulta

$$0^{m.cub},03272489\ldots, \text{ ó } 32^{dec.cub} \text{ y } 725^{cent\ cub},$$

con menos error que un centímetro cúbico.

296. — Como todo poliedro se puede descomponer en pirámides, se obtendrá su volúmen sumando los volúmenes de todas ellas.

297. Teorema. — *El volúmen de una esfera es igual al tercio del producto de su superficie por el radio.*

En efecto, una esfera se puede considerar como compuesta de un número infinito de pirámides, que tienen por vértice comun el centro de la esfera, y por bases porciones infinitamente pequeñas de su superficie. La altura de cada una de estas pirámides, se confundirá sensiblemente con el radio de la esfera, y por consiguiente, la medida de una de ellas, será el tercio del producto de su base infinitamente pequeña por el radio. La suma de estas pirámides, ó el volúmen de la esfera, será, pues, igual al tercio de la suma de los productos de cada base por el radio, ó lo que es el mismo, al tercio del producto de la suma de las bases por el radio, en fin, al tercio de la superficie esférica por su radio.

ADVERTENCIA. — Si R es el radio de la esfera, la expresion de su superficie será $4\pi R^2$ (**282**) : luego la expresion de su volúmen será $\frac{1}{3} \times 4\pi R^2 \times R$, ó $\frac{4}{3}\pi R^3$.

APLICACIONES. — I. *¿Cuál será el volúmen de una bala que tiene 22 centímetros de diámetro?*

Si el diámetro tiene 22^{cent}, su radio será igual á 11^{cent}; luego la expresion del volúmen de la bala es

$$\frac{4}{3} \times 3{,}1416 \times (11)^3.$$

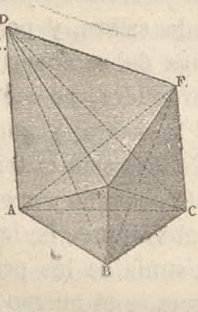
Efectuando las operaciones indicadas se halla

$$557^{cent.cub},293, \text{ ó } 5^{dec.cub}\ 575^{cent.cub}\ 293^{mil.cub}.$$

II. *¿Cuál será el diámetro de un depósito que tiene la forma de una semi-esfera para que pueda contener* 50 *hectólitros de agua?*

Divídase la capacidad, 50^{hectol} ó $5^{m\,cub}$ del depósito, por $\frac{2}{3} \times 3{,}1416$, y el cociente será el cubo del radio del depósito. Efectuando, pues, esta operacion, resulta $2^{m\,cub},387318$; luego la raiz cúbica $1^m,3365$ será el radio del depósito. Su diámetro ó el duplo del radio será, pues, $2^m,673$.

Fig. 184.



298. TEOREMA. — *El volúmen de un prisma triangular truncado* ABCDEF (fig. 184), *es igual al producto de una de sus bases por una media entre las tres perpendiculares bajadas desde los vértices opuestos* D, E, F, *á esta base.*

Trácese el plano AEC de modo que corte las caras

ABED y BCFE segun las rectas AE y EC; trácese tambien el plano DEC de modo que corte la cara ACFD segun DC. El prisma truncado quedará así descompuesto en los tres tetraedros EABC, EACD y ECDF.

Desígnense por d, e, f, las perpendiculares bajadas desde los puntos D, E, F, á la base ABC, prolongándola si fuese necesario.

El tetraedro EABC tendrá por medida $ABC \times \frac{1}{3} e$.

El tetraedro EACD, considerando su vértice en E y su base ACD, es equivalente al tetraedro que tenga por base ACD y cuyo vértice B esté situado sobre la recta EB paralela á la base comun, porque tendrán igual base é igual altura. Pero el tetraedro BACD se puede considerar como teniendo por vértice el punto D y por base ABC; luego el volúmen de este último será igual al del EACD, y por consiguiente su expresion será $ABC \times \frac{1}{3} d$.

El tetraedro ECDF, considerando su vértice en D y su base CEF, es equivalente al tetraedro que tenga la misma base CEF y su vértice A sobre una recta DA paralela á dicha base. Este tetraedro ACEF, tomando por vértice el punto E y por base ACF, es á su vez equivalente á un tercer tetraedro que tenga por base ACF y su vértice en B, sobre una recta EB paralela á esta base. Pero este último tetraedro BACF, se puede considerar como teniendo por vértice el punto F y por base ABC; luego su volúmen que es tambien igual al del tetraedro ECDF, tendrá por expresion $ABC \times \frac{1}{3} f$.

Sumando las tres expresiones que hemos hallado, obtendremos por expresion del volúmen del prisma truncado

$$ABC \times \tfrac{1}{3} d + ABC \times \tfrac{1}{3} e + ABC \times \tfrac{1}{3} f,$$

ó

$$ABC \times \tfrac{1}{3} (d + e + f).$$

Pero $\frac{1}{3}(d+e+f)$ es lo que se entiende por una media entre las tres cantidades d, e, f; luego la expresion hallada está conforme con el enunciado del teorema.

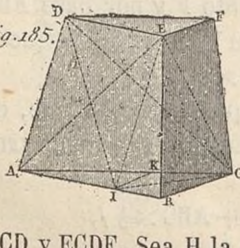
Corolarios.—I. Cuando las aristas AD, BE, CF, son perpendiculares á la base ABC, estas aristas y las cantidades designadas por d, e, f, serán iguales y se podrá decir, *que un tronco de prisma triangular recto, es igual al producto de la base perpendicular á las aristas laterales por el promedio de estas tres aristas.*

II. Si se corta un tronco de prisma triangular por un plano perpendicular á sus aristas laterales, se le divide en dos prismas rectos truncados que tienen por base comun la seccion hecha al prisma, la cual se llama *seccion recta.* Sumando las expresiones de los volúmenes de estos dos prismas, se descubre con facilidad que *el volúmen total es igual al producto de la seccion recta por el promedio de las tres aristas laterales.*

III. Cuando el prisma triangular no es truncado, las aristas laterales son iguales, y por consiguiente su promedio es igual á una de ellas. Se puede decir en este caso, que *el volúmen de un prisma triangular es igual al producto de la seccion recta por una de sus aristas laterales.*

299. Teorema.—*El volúmen de un tetraedro truncado, es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre ellas.*

Fig. 185.



Sea ABCDEF (fig. 185) un tetraedro truncado. Trácense los planos AEC y DEC, y el tetraedro truncado quedará descompuesto en tres tetraedros EABC, EACD y ECDF. Sea H la altura del tronco.

El tetraedro EABC, considerando que tiene por vértice el punto E y por base ABC, tendrá por medida $\frac{1}{3}$ ABC$\times$H, una vez que su altura es igual á la del tronco.

El tetraedro ECDF, considerando su vértice en C y su base DEF, tendrá por medida $\frac{1}{3}$ DEF$\times$H, porque su altura tambien es la del tronco.

Trácese EI paralela á DA, y únase I con C, y D con I. El tetraedro EACD, tomando por vértice el punto E y por base ACD, es equivalente al tetraedro IACD que tiene la misma base ACD y su vértice sobre una recta EI paralela á esta base, y por consecuencia, alturas tambien iguales. Pero el tetraedro IACD, considerando que tiene su vértice en D y por base AIC, tendrá por medida $\frac{1}{3}$ AIC$\times$H, ya que su altura es la del tronco.

El volúmen del tronco tendrá, pues, por expresion

$$\tfrac{1}{3}\,\mathrm{ABC}\times \mathrm{H}+\tfrac{1}{3}\,\mathrm{DEF}\times \mathrm{H}+\tfrac{1}{3}\,\mathrm{AIC}\times \mathrm{H},$$

ó

$$\tfrac{1}{3}\,\mathrm{H}\,(\mathrm{ABC}+\mathrm{DEF}+\mathrm{AIC}).$$

Solo falta, pues, demostrar que AIC es medio proporcional entre las bases ABC y DEF.

Para esto, obsérvese que DE y DF son respectivamente paralelas á AC y AB (**228**), y que los ángulos EDF y IAC son iguales (**208**).

Trácese IK paralela á BC y por consecuencia á EF; los ángulos AIK y DEF serán iguales por tener sus lados paralelos y dirigidos en un mismo sentido. Los triángulos AIK y DEF son iguales por tener el lado AI$=$DE por partes de paralelas comprendidas entre paralelas, y además los ángulos adyacentes respectivamente iguales.

Pero los triángulos AIK y AIC que tienen un mismo vértice I y sus bases en línea recta, tendrán una misma altura, y serán por consecuencia proporcionales con sus bases; luego

$$AIK : AIC = AK : AC. \quad [1]$$

Los triángulos AIC y ABC que tienen igual altura, por tener un mismo vértice y las bases en línea recta, serán tambien entre sí como sus bases; luego

$$AIC : ABC = AI : AB. \quad [2]$$

Pero, por ser IK y BC paralelas, se tiene

$$AK : AC = AI : AB.$$

Esta última proporcion y las anteriores, [1] y [2], tienen sus segundas razones iguales; luego las primeras tambien lo son, por consiguiente

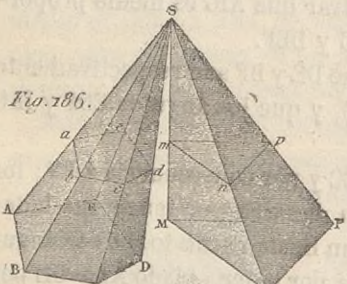
$$AIK \text{ ó } DEF : AIC = AIC : ABC,$$

que es lo que se queria demostrar.

500. Teorema.—*El volúmen de una pirámide truncada, es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre las mismas.*

Sea ABCDE*abcde* (fig. 186) un tronco de pirámide, y sea SABCDE la pirámide total. Constrúyase un tetraedro SMNP que tenga el mismo vértice S, y una base MNP equivalente al polígono ABCDE, colocada en el mismo plano de este polígono. Prolónguese el plano de la base superior *abcde* del tronco, el cual determinará en el tetraedro una seccion *mnp*. Desde luego digo que esta seccion será equivalente al polígono *abcde*.

Fig. 186.



En efecto: sea H la altura comun de las dos pirámides SABCDE y SMNP, y h la altura comun de las otras pirámides S*abcde* y S*mnp*. Las dos pirámides SABCDE y S*abcde*, son semejantes (**250** advert. II); luego (**249** corolario II)

$$abcde : ABCDE = h^2 : H^2.$$

Pero como los tetraedros S*mnp* y SMNP son tambien semejantes, se tendrá tambien

$$mnp : MNP = h^2 : H^2;$$

como esta proporcion y la anterior tienen una razon comun, resulta que

$$abcde : ABCDE = mnp : MNP,$$

ó $$abcde : mnp = ABCDE : MNP.$$

Pero ABCDE y MNP son equivalentes por hipótesis; luego *abcde* y *mnp* tambien lo serán.

Esto supuesto, tenemos que las pirámides ABCDE y SMNP son equivalentes por tener bases equivalentes é igual altura (**293**, **294**); por la misma razon las pirámides S*abcde* y S*mnp* tambien lo son; luego el tronco de pirámide ABCDE*abcde* será equivalente al tronco de tetraedro MNP*mnp*.

Pero el volúmen de este último es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre ellas; luego el tronco de pirámide tiene la misma medida. Pero el tronco de pirámide tiene la misma altura que el tronco de tetraedro; las bases del uno son respectivamente equivalentes á las bases del otro, y por consiguiente la media proporcional entre las dos bases del tronco de pirámide igual á la media proporcional entre las bases del tronco de tetraedro : luego el volúmen del tronco de pirámide tiene por medida el tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre las mismas.

Aplicacion.—*¿Cuál es la capacidad de un estanque de paredes inclinadas, sabiendo que el fondo es un cuadrado cuyo lado es igual á* 15^m; *y que los bordes superiores forman otro cuadrado cuyo lado tiene* 6^m, *y su profundidad* 2^m?

Este depósito tiene la forma de una pirámide truncada. El área de su base mayor es igual á $16^m \times 16^m$, ó $256^{m\,c}$; la de la menor $15^m \times 15^m$, ó $225^{m\,c}$; y la media proporcional entre estas dos bases es la raiz cuadrada del producto 256×225, es decir, 16×15, ó $240^{m\,c}$. Luego la expresion de la capacidad pedida es

$$\tfrac{1}{3} \times 2^m\,(256^{m\,c} + 225^{m\,c} + 240^{m\,c}).$$

Efectuando las operaciones indicadas, resulta

$$480^{m\,cub},666\ldots$$

301. Teorema.—*El volúmen de un tronco de cono, es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre ellas.*

Porque un tronco de cono se puede considerar como un tronco de pirámide regular cuyas bases fuesen polígonos de un número infinito de lados infinitamente pequeños.

Advertencia.—Llamando H á la altura de un tronco de cono, R el radio de la base mayor y r el radio de la menor, las áreas de estas bases estarán respectivamente expresadas por πR^2 y πr^2. La media proporcional entre estas bases, es la raiz cuadrada del producto $\pi R^2 \times \pi r^2$, ó de $\pi^2R^2r^2$, es decir, πRr. Luego la expresion del volúmen del tronco de cono es

$$\tfrac{1}{3}\,H\,(\pi R^2+\pi r^2+\pi Rr) \quad ó \quad \tfrac{1}{3}\,\pi H\,(R^2+r^2+Rr).$$

Aplicacion.—*¿Cuál es la capacidad de una cubeta cuyo fondo tiene* 2^m *de diámetro, la parte superior* $2^m,50$ *de diámetro y la profundidad de* $1^m,50$?

Se tiene que $H=1^m,50$; $R=1^m,25$, y $r=1^m$. Luego la expresion de la capacidad es

$$\tfrac{1}{3}\times 3,1416\times 1^m,50\,[(1^m,25)^2+(1^m)^2+1^m,25\times 1^m]$$

ó $$\tfrac{1}{3}\times 3,1416\times 1^m,50\times 3^{m\,c},8125.$$

Efectuando las operaciones indicadas, se hallará $5^{m\,cub},988675$, ó lo que es lo mismo 59 hectólitros y 89 litros próximamente.

302. Teorema.—*El volúmen de un sector esférico es igual al tercio del producto del área del casquete que le sirve de base por el radio de la esfera.*

La misma demostracion que la del nº **297**.

Advertencia.—Sea h la altura del casquete que sirve de base al sector, y R el radio de la esfera. La expresion del área del casquete (**281**) será $2\pi R\times h$; luego el volúmen del sector estará expresado por $2\pi R\times h\times\frac{1}{3}R$, ó por $\frac{2}{3}\pi R^2h$.

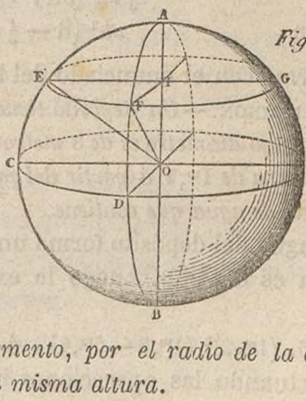


Fig. 187.

303. Teorema. — *El volúmen de un segmento esférico es igual al producto del área del círculo cuyo radio es la altura del segmento, por el radio de la esfera disminuido del tercio de la misma altura.*

Sea AB (fig. 187) el eje del segmento; $AI=h$ su altura; EI $= r$ el radio del círculo que termina el segmento; AO $=$ R el radio de la esfera; se tendrá

$$\mathrm{OI} = \mathrm{AO} - \mathrm{AI} = \mathrm{R} - h.$$

Además, la línea EI es media proporcional entre los segmentos AI y BI del diámetro AB, luego

$$\overline{\mathrm{EI}}^2 = \mathrm{AI} \times \mathrm{IB} \quad \text{ó} \quad r^2 = h \times (2\mathrm{R} - h).$$

Esto supuesto, el volúmen engendrado por el sector EOA tiene por medida (**302**)

$$\tfrac{2}{3}\,\pi\mathrm{R}^2 h.$$

El volúmen engendrado por el triángulo EIO, es igual al volúmen de un cono, y por consiguiente será

$$\tfrac{1}{3}\,\pi\overline{\mathrm{IE}}^2 \times \mathrm{OI},$$

ó $$\tfrac{1}{3}\,\pi h\,(2\mathrm{R} - h)\,(\mathrm{R} - h).$$

El volúmen del segmento que es igual á la diferencia de los dos volúmenes anteriores estará expresado por

$$\tfrac{2}{3}\,\pi\mathrm{R}^2 h - \tfrac{1}{3}\,\pi h\,(2\mathrm{R} - h)\,(\mathrm{R} - h),$$

ó $$\tfrac{1}{3}\,\pi h\,[2\mathrm{R}^2 - (2\mathrm{R} - h)\,(\mathrm{R} - h)],$$

ó $$\tfrac{1}{3}\,\pi h\,(3\mathrm{R}h - h^2),$$

por fin $$\pi h^2\,(\mathrm{R} - \tfrac{1}{3}\,h),$$

conforme con el enunciado del teorema.

APLICACION.—*Un depósito tiene la forma de una semiesfera cuyo diámetro es de* 3 *metros; está lleno de agua hasta una altura de* $1^{m},2$ *á partir del punto mas bajo; se pide la cantitad de agua que contiene.*

El agua del depósito forma un segmento esférico cuya altura es de $1^{m},2$. Luego la expresion de su volúmen será

$$3{,}1416.\,(1^{m},2)^2\,(1^{m},5 - 0^{m},4) \quad \text{ó} \quad 3{,}1416 \times 1^{m},44 \times 1^{m},1.$$

Efectuando las operaciones indicadas, resulta $4^{m\,cub},976...$, ó 49 hectólitros 76 litros próximamente.

CAPITULO IV

DE LA COMPARACION DE LAS SUPERFICIES Y DE LA DE LOS VOLÚMENES

§ I. Comparacion de superficies.

304. Teorema.—*Las superficies de dos poliedros semejantes, son proporcionales á los cuadrados de dos aristas homólogas cualesquiera.*

En efecto: sea S la superficie total de un poliedro; M, N, P, etc., las áreas de sus caras; A, B, C, etc., aristas del poliedro correspondientes á cada una de sus caras; sean tambien s, m, n, p, etc., a, b, c, etc., las magnitudes homólogas de un segundo poliedro semejante al primero.

Por ser los dos poliedros semejantes, sus caras homólogas tambien lo serán, y como las áreas de los polígonos semejantes son proporcionales con los cuadrados de sus lados homólogos, se tendrá

$$M : m = A^2 : a^2;\ N : n = B^2 : b^2;\ P : p = C^2 : c^2;\ \text{etc.} \quad [1]$$

Por otra parte, de la misma semejanza de los poliedros se deduce la proporcionalidad de sus aristas homólogas, luego

$$A : a = B : b = C : c = \text{etc.};$$

de donde $A^2 : a^2 = B^2 : b^2 = C^2 : c^2 = \text{etc.}$ [2]

Luego las proporciones [1] tendrán sus segundas razones iguales, por consiguiente

$$M : m = N : n = P : p = \text{etc.};$$

de lo cual $M + N + P + \text{etc.} : m + n + p + \text{etc.} = M : m,$

ó bien $S : s = M : m.$ [3]

De la primera de las proporciones [1] y de esta última, se deduce

$$S : s = A^2 : a^2,$$

y teniendo en cuenta la serie de razones [2], se puede escribir

$$S : s = A^2 : a^2 = B^2 : b^2 = C^2 : c^2 = \text{etc.},$$

que es lo que se queria demostrar.

305. TEOREMA.—*Las superficies laterales de dos cilindros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus alturas ó á los cuadrados de los radios de sus bases.*

Sean S y s las superficies laterales de dos cilindros semejantes, H y h sus alturas, R y r los radios de sus bases. Se tendrá (**274**)

$$S = 2\pi RH \quad \text{y} \quad s = 2\pi rh;$$

de donde resulta la proporcion idéntica

$$\frac{S}{s} = \frac{2\pi RH}{2\pi rh} = \frac{RH}{rh} = \frac{R}{r} \times \frac{H}{h}; \qquad [1]$$

pero por ser los cilindros semejantes, se tiene

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h}.$$

Sustituyendo en la relacion [1] una de estas razones por la otra, resulta

$$\frac{S}{s} = \frac{R}{r} \times \frac{R}{r} = \frac{R^2}{r^2},$$

ó

$$\frac{S}{s} = \frac{H}{h} \times \frac{H}{h} = \frac{H^2}{h^2}.$$

306. TEOREMA.—*Las superficies laterales de dos conos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus alturas ó á los cuadrados de los radios de sus bases.*

Se demuestra del mismo modo que el teorema precedente.

307. TEOREMA.—*Las superficies de dos esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

Sean S y s las superficies de dos esferas, R y r sus radios, se tendrá (**282**)

$$S = 4\pi R^2 \quad y \quad s = 4\pi r^2.$$

De donde la proporcion idéntica

$$S : s = 4\pi R^2 : 4\pi r^2,$$

suprimiendo el factor comun 4π de la segunda razon, resulta

$$S : s = R^2 : r^2;$$

que es lo que se queria demostrar.

§ II. Comparacion de volúmenes.

308. TEOREMA.—*Los volúmenes de dos tetraedros semejantes, son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas ó á los cubos de sus alturas.*

Sean SABC y $sabc$ (fig. 188) dos tetraedros semejantes, SH y sh sus alturas.

Se ha visto (**244**) que

$$ABC : abc = \overline{SH}^2 : \overline{sh}^2.$$

Se tiene tambien la proporcion evidente

$$\tfrac{1}{3}\,SH : \tfrac{1}{3}\,sh = SH : sh.$$

Multiplicando estas dos proporciones ordenadamente, resulta

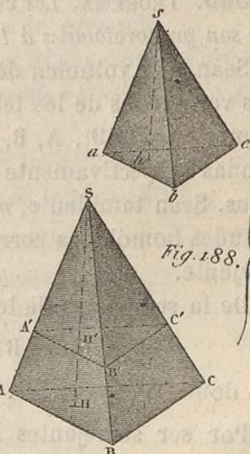


Fig. 188.

$$ABC \times \tfrac{1}{3}\, SH : abc \times \tfrac{1}{3}\, sh = \overline{SH}^3 : \overline{sh}^3.$$

Pero los dos primeros términos miden los volúmenes de los dos tetraedros; luego estos volúmenes son entre sí como los cubos de sus alturas.

Si se coloca el tetraedro *sabc* sobre el tetraedro SABC de modo que tome la posicion SA′B′C′, se tendrá que los planos A′B′C′ y ABC serán paralelos (**244**); la perpendicular SH quedará dividida de manera que se podrá formar la proporcion

$$SH : SH' = SA : SA' \quad \text{ó bien} \quad SH : sh = SA : sa;$$

de donde $\overline{SH}^3 : \overline{sh}^3 = \overline{SA}^3 : \overline{sa}^3.$

De lo cual resulta que los volúmenes de dos tetraedros, son entre sí como los cubos de sus aristas homólogas SA y *sa*, y por consecuencia, como los cubos de dos aristas homólogas cualesquiera, una vez que son proporcionales entre sí.

309. Teorema. *Los volúmenes de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

Sean V el volúmen del primer poliedro, M, N, P, etc. los volúmenes de los tetraedros, en que se supone descompuesto (**259**), A, B, C, etc. aristas cualesquiera tomadas respectivamente sobre cada uno de estos tetraedros. Sean tambien v, m, n, p, etc., a, b, c, *etc.* las magnitudes homólogas correspondientes á otro poliedro semejante.

De la semejanza de los poliedros se deduce (**260**)

$$A : a = B : b = C : c = \text{etc.};$$

de donde $A^3 : a^3 = B^3 : b^3 = C^3 : c^3 = \text{etc.}$ [1].

Por ser semejantes los tetraedros componentes resulta, en virtud del teorema precedente, que

$$M : m = A^3 : a^3;\ N : n = B^3 : b^3;\ P : p = C^3 : c^3;\ \text{etc. [2]}.$$

De estas proporciones y de la serie de razones iguales [1] se deduce

$$M : m = N : n = P : p = \text{etc.};$$

de donde

$$M + N + P + \text{etc.} : m + n + \text{etc.} = M : m,$$

de donde $$V : v = M : m,$$

y en virtud de la primera de las proporciones [2]

$$V : v = A^3 : a^3;$$

por fin, teniendo en cuenta la serie de razones iguales [1] se tiene

$$V : v = A^3 : a^3 = B^3 : b^3 = C^3 : c^3 = \text{etc.},$$

que es lo que se queria demostrar.

Corolario. — Si las aristas del primer poliedro son 2, 3, 4,...., 10 veces mayores que las aristas homólogas del segundo, el volúmen del primero es 8, 27, 64,...., 1000 veces mayor que el volúmen del segundo.

310. Teorema. — *Los volúmenes de dos cilindros semejantes son proporcionales á los cubos de sus alturas ó á los cubos de los radios de sus bases.*

Sean V y v los volúmenes, H y h las alturas, R y r los radios de sus bases : desde luego se tendrá (**290**)

$$V = \pi R^2 H \quad \text{y} \quad v = \pi r^2 h;$$

de donde se deduce la proporcion evidente

$$\frac{V}{v} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{R^2}{r^2} \times \frac{H}{h}; \qquad [1]$$

pero de la semejanza de los cilindros se tiene

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h}, \quad \text{de donde} \quad \frac{R^2}{r^2} = \frac{H^2}{h^2}.$$

Luego sustituyendo en la igualdad [1] en lugar de una de sus componentes su igual, resulta

$$\frac{V}{v}=\frac{R^2}{r^2}\times\frac{R}{r}=\frac{R^3}{r^3},$$

ó

$$\frac{V}{v}=\frac{H^2}{h^2}\times\frac{H}{h}=\frac{H^3}{h^3}.$$

311. Teorema. — *Los volúmenes de dos conos semejantes son proporcionales á los cubos de sus alturas, ó á los cubos de los radios de sus bases.*

Se demuestra del mismo modo que el teorema precedente.

312. Teorema. — *Los volúmenes de dos esferas son proporcionales á los cubos de sus radios.*

Sean V y v los volúmenes de dos esferas, R y r sus radios, se tendrá (**297**)

$$V=\tfrac{4}{3}\pi R^3 \quad y \quad v=\tfrac{4}{3}\pi r^3;$$

de donde se deduce la proporcion evidente

$$V : v=\tfrac{4}{3}\pi R^3 : \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

y suprimiendo el factor comun $\frac{4}{3}\pi$ de la segunda razon, resulta

$$V : v=R^3 : r^3,$$

que es lo que se queria demostrar.

Corolario. — Si una esfera tiene un radio doble del radio de otra, el volúmen de la primera es 8 veces mayor que el de la segunda; si es triplo será 27 veces mayor; si décuplo 1000 veces mayor, y así sucesivamente.

313. Teorema. — *Dos prismas de igual altura son entre sí como sus bases; y dos prismas que tengan bases iguales ó equivalentes son entre sí como sus alturas.*

Sean V y V' los volúmenes de dos prismas, B y B' sus bases, H y H' sus alturas; se tendrá (**289**)

$$V = B \times H \quad \text{y} \quad V' = B' \times H',$$

de lo cual se deduce la proporcion, evidente

$$V : V' = B \times H : B' \times H'.$$

Ahora bien, si las alturas son iguales, se podrán suprimir sin que se altere la proporcion, y resulta

$$V : V' = B : B';$$

por la misma razon, si las bases son iguales ó equivalentes resulta

$$V : V' = H : H'.$$

Corolario. — Esta proposicion se puede hacer extensiva á los paralelipípedos y á los cilindros; así, por ejemplo, *un paralelipípedo rectángulo y un cilindro que tengan igual altura son entre sí como sus bases.*

Si al mismo tiempo las bases son equivalentes, el paralelipípedo rectángulo y el cilindro son equivalentes.

Aplicacion. — Se presenta en la práctica el caso de hacer un cilindro equivalente á un cubo, cuando se trata de determinar las dimensiones de las medidas de capacidad del nuevo sistema. En este sistema se ha adoptado la forma cilíndrica que es menos incómoda que la cúbica. Para los áridos el cilindro tiene una altura igual al diámetro de su base.

Supongamos, pues, que se trata del hectólitro; sea R el radio de su base; la altura será $2R$; el volúmen estará, pues, representado por $\pi R^2 \times 2R$ ó $2\pi R^3$. Este volúmen debe ser igual á 1 hectólitro ó 100 decímetros cúbicos; luego dividiendo este número 100 por

$$2\pi \text{ ó } 2 \times 3{,}1416,$$

el cociente $15^{dec.cub},915$ será el cubo del radio. Extrayendo la raiz cúbica, se halla para valor del radio $2^{dec},515$; y por consecuencia $5^{dec},03$ ó $0^{m},503$ por altura del hectólitro.

314. TEOREMA. — *Dos pirámides de igual altura son entre sí como sus bases, y dos pirámides de bases iguales ó equivalentes son entre sí como sus alturas.*

Se demuestra del mismo modo que el teorema precedente.

COROLARIO. — Esta proposicion se puede hacer extensiva á los conos. Así, *dos conos de igual base son entre sí como sus alturas*; y *dos conos de igual altura son entre sí como sus bases*, ó lo que es lo mismo, *como los cuadrados de los radios de sus bases.*

FIN.

INDICE

FIN DEL ÍNDICE.

L. Hachette

14918. — Tipografía Lahure. — Calle de Fleurus, 9, Paris.

EN LA MISMA LIBRERIA

Tipografia Lahure, calle de Fleurus, 9, Paris.