SANCHEZ
VIDAL.

LECCIONES
DE
ÁLGEBRA.

TOMO I.

3.ª EDICION.

MADRID
1878

LECCIONES

DE

ÁLGEBRA

POR

BERNARDINO SANCHEZ VIDAL

CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS EN EL INSTITUTO DE MÚRCIA

TOMO I

TERCERA EDICION

MADRID:—1878
IMPRENTA DE JOSÉ CRUZADO
Peñon, 7

LECCIONES

DE

ÁLGEBRA

Bernardo Sanchez

LECCIONES

DE

ÁLGEBRA

POR

BERNARDINO SANCHEZ VIDAL

CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS EN EL INSTITUTO DE MÚRCIA

TOMO I

TERCERA EDICION

MADRID:—1878
IMPRENTA DE JOSÉ CRUZADO
Peñon, 7

Ref.º f.º 132. lib. 30-

1058

Bernardº Sanchez

ADVERTENCIA.

La favorable acogida que á mis *Lecciones de Algebra* ha dispensado el público inteligente, mereciendo ser recomendadas en los programas oficiales del Gobierno y adoptadas de texto en varias academias preparatorias, me estimula, una vez agotada la primera y segunda á publicar una tercera edicion de las mismas.

Escribí este Tratado para que pudiera servir de guia á los jóvenes que se dedican á la Facultad de Ciencias y á las carreras especiales. En esta tercera edicion, si bien me propongo el mismo objeto, he introducido algunas ligeras reformas,—que no alteran ni la extension ni el fondo de la obra,—para que á la vez pueda ser útil á los que estudian en los institutos y colegios privados. A este fin, he señalado con un asterisco los párrafos que pueden pasar por alto ó de que puede prescindir el alumno de segunda enseñanza; quedando así un Tratado de Algebra con la extension que ordinariamente se dá á esta asignatura en los referidos Institutos y colegios.

Para reducir algun tanto el volúmen de la obra he variado la forma de algunos cálculos y suprimido los ménos importantes. Tambien han quedado suprimidas algunas teorías por hallarse ya expuestas con igual extension en la tercera edicion de la *Aritmética*.

A pesar de haber revisado escrupulosamente los cálculos, y corregido las faltas de imprenta y otras de distinta índole, de que las primeras ediciones adolecian, no abrigo la pretension de que ésta se halle exenta de defectos y mucho ménos de que satisfaga por completo las exigencias de todas nuestras escuelas.

LECCIONES DE ALGEBRA

PRIMERA PARTE

DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES

LECCION PRIMERA

INTRODUCCION

Objeto del álgebra.—Signos algebráicos.—Cantidad algebráica y sus diferentes clases; términos semejantes, su reduccion y destruccion.

Objeto del Algebra.

1. Todas las cuestiones matemáticas, que son aquellas que pertenecen á la cantidad, se pueden reducir á dos clases; á cuestiones de números ó á cuestiones de cantidades propiamente dichas. Las primeras, que son aquellas que se refieren á los números, ya sean abstractos ya concretos, ó representantes de cantidades, puesto que expresan su valor, pueden corresponder á cualquiera clase de magnitud siempre que ésta sea comparable, ó lo que es lo mismo, medible.

Las segundas, que son aquellas que tienen lugar entre las cantidades mismas sin atender á su valor numérico, corresponden exclusivamente á la extension ya sea lineal, ya de superficie ó ya de volúmen, que es lo que constituye la Geometría.

De aquí la division de las matemáticas elementales en ARITMÉTICA y GEOMETRÍA.

2. La Aritmética se subdivide en Aritmética propiamente dicha,

Bernardo Sanchez

y Algebra; de la primera ya nos hemos ocupado en el primer tomo de esta obra, la segunda será el objeto del presente.

3 ALGEBRA *es la parte de las matemáticas que tiene por objeto simplificar y generalizar la resolucion de las cuestiones relativas á los números, determinando la série de operaciones que hay que ejecutar para hallar un cierto resultado.*

4. Al ocuparnos en nuestras LECCIONES DE ARITMÉTICA de las propiedades generales de los números, hemos visto lo conveniente que es representarlos de una manera general por medio de signos que, careciendo de los valores numéricos que cada uno de ellos pueda tener, expresen los números con las condiciones que se exigen en la cuestion.

Estos signos son las letras del alfabeto, y con ellas se puede representar cualquiera cantidad, haciendo uso de los acentos é índices, como allí se dijo.

5. En aritmética el uso de las letras, si bien es conveniente, no es de necesidad, puesto que sin él podrian demostrarse las propiedades generales de los números y resolver los problemas relativos á los mismos que allí corresponden; pero en el álgebra es necesario: sin el auxilio de las letras no podria cumplir esta parte de las matemáticas con el objeto que se propone.

En efecto, si empleásemos números particulares en la resolucion de algun problema ó cuestion, nos hallaríamos, al llegar al resultado final, con un número cuya formacion, segun los datos del problema, nos seria desconocida; porque una vez efectuadas todas las operaciones tan luégo como se presentan, ya no tendriamos rastro ni seña de ellas.

Si para evitar este inconveniente dejásemos indicadas todas las operaciones que hay que ejecutar, tendríamos el de no poder distinguir bien los datos en el caso de que dos ó más tuviesen el mismo valor y por lo tanto estuviesen representados por un mismo número.

Si en vez de números empleamos letras, los datos no podrán confundirse, porque cada una expresará un número diferente. Las operaciones necesarias para obtener el resultado final quedarán todas indicadas, por consiguiente sabremos de qué modo está compuesto dicho resultado segun los datos de la cuestion.

6. El resultado final de un problema que viene expresado por las operaciones necesarias y suficientes hechas con los datos, consti-

tuye lo que se llama *fórmula*, y esta fórmula que resuelve la cuestion, es general y sirve para todos los problemas de una misma especie.

Así, de la relacion D $(100+it)=Vit$ que en la regla de descuento hemos hallado (*Arit.* 385), se deducen todas las fórmulas relativas á los problemas de descuento sobre el valor actual de una letra; de modo que el descuento, que es lo que allí se busca, está dado por la fórmula $D=\frac{Vit}{100+it}$, y dando valores á V, i y t que representan respectivamente el valor actual de la letra, el interés y el tiempo, se obtiene lo que se pide en cada caso particular.

7. No siempre los datos que entran en una cuestion son números ya determinados; muchas veces, y es lo más general en álgebra, son resultados de varias operaciones hechas con números ó cantidades, en cuyo caso, estos resultados se dice que son *funciones* de los números ó cantidades de que dependen.

Ahora bien, ¿qué confusion no habria en los cálculos de la cuestion propuesta si se efectuasen con dichos resultados indicados? Esa confusion se evita sustituyendo cada uno de ellos por una letra que lo represente.

La aritmética, por su naturaleza, no efectúa cálculos sino con números determinados, mientras que el álgebra no sólo puede ejecutarlos con números determinados, que es la parte que tiene de comun con aquella, sino que tambien los efectúa con resultados de operaciones indicadas, ó sea, como ya hemos dicho, con funciones de otros números, que es en lo que el álgebra se diferencia de la aritmética: fundado en esto, hay quien define la aritmética diciendo que *es el cálculo de los números*, y el álgebra *el cálculo de las funciones*.

8. Habiendo tratado en aritmética con toda generalidad el cálculo de los números, cualquiera que sea su naturaleza, únicamente nos resta estudiar aquí el modo de efectuar las operaciones con las letras que representan los números ó funciones, objeto principal de esta primera parte.

Sabiendo el mecanismo de la composicion y descomposicion de la cantidad, debemos ocuparnos de la cuestion principal del álgebra, que consiste en establecer las relaciones que ligan entre sí á las diferentes cantidades de las que dependen la resolucion de cualquiera cuestion ó problema.

Signos algebráicos.

9. Los signos de que nos hemos de valer para indicar las operaciones y relaciones de igualdad ó desigualdad, son los mismos que hemos usado en aritmética.

10 Al coeficiente y exponente se les da mayor latitud en álgebra, pues considerados en aritmética como números que expresan las veces que la cantidad á que afectan está repetida por sumando ó factor, son por su naturaleza números enteros; al paso que aquí pueden ser enteros, quebrados ó inconmensurables, teniendo en cada uno de estos casos interpretacion distinta.

Una cantidad afectada del coeficiente 3, indica la suma de tres cantidades iguales á ella misma; pero el coeficiente $\frac{3}{5}$, por ejemplo, ó el número inconmensurable $\sqrt{2}$, no expresa la repeticion por sumando de la cantidad á que afecta, sino una parte de dicha cantidad igual á la que el coeficiente es de la unidad.

11. Si el exponente no es un número entero, no tiene la misma significacion que allí se le dió: ya veremos el modo de interpretarlo á su debido tiempo.

Cantidad algebráica y sus diferentes especies; términos semejantes, su reduccion y destruccion.

12. CANTIDAD ALGEBRÁICA *es toda aquella que está representada con letras, y en la cual no sólo se considera el valor numérico, sino tambien el modo que tiene de existir.*

Las cantidades algebráicas lo mismo que las numéricas, pueden ser enteras y fraccionarias: *cantidad algebráica* ENTERA, *es aquella que no tiene denominador, ni está bajo de ningun radical*; FRACCIONARIA, *es la que tiene denominador.*

Por esta definicion se comprende que la cantidad algebráica sólo es entera ó fraccionaria por su forma, y no por el valor numérico que representa; puesto que a, por ejemplo, cantidad algebráica entera puede representar un número no sólo fraccionario, sino tambien inconmensurable: mientras que una cantidad algebráica fraccionaria $\frac{a}{b}$, puede representar una cantidad numérica entera.

La cantidad algebráica puede ser además racional é irracional:

cantidad algebráica RACIONAL *es aquella que no está afectada del signo radical;* é IRRACIONAL *la que lo está.*

Esta definicion, como en el caso anterior, se refiere á la forma y no al valor numérico.

13. EXPRESION ALGEBRÁICA *es cualquiera reunion de letras ó de letras y números ligados por los signos ya conocidos.* Así, las letras a, b, c, etc., son expresiones algebráicas y de las más sencillas. Del mismo modo lo es $3a+5ab-\sqrt[3]{a^2b}$.

14. TÉRMINO *es cualquier conjunto de letras que no lleva interpuesto el signo + ni —.* Así, a es un término, $3a^2b$ es otro y $3a\sqrt{b}$ lo es tambien.

15. MONÓMIO *se llama la cantidad algebráica que tiene un solo término;* BINÓMIO *la que tiene dos;* TRINÓMIO *la que tiene tres* ; y en general POLINÓMIO *es la cantidad que tiene más de tres términos.*

16. Los términos pueden ser semejantes ó nó: TÉRMINOS SEMEJANTES *son los que tienen las mismas letras con los mismos exponentes*: así, $3a^2b$ y $5a^2b$ son términos semejantes; pero no lo serán $3a^2b$ y $5ab^2$, porque aunque tienen las mismas letras, éstas no tienen los mismo exponentes.

17. GRADO DE UN TÉRMINO ENTERO *es la suma de los exponentes de las letras que lo constituyen,* considerando con el exponente 1, aquellas que expresamente no le tengan.

18. Si en un polinómio existen varios términos semejantes precedidos de un mismo signo, se pueden reducir á uno sólo cuyo coeficiente, afectado del mismo signo, sea la suma de los coeficientes de dichos términos semejantes. Si hay varios términos semejantes precedidos unos del signo + y otros del signo —, podrán reducirse todos los que llevan el signo +, á uno; y todos los del signo — , á otro ; y estos dos á uno solo, cuyo coeficiente sea la diferencia de ambos coeficientes, afectada del signo que lleve el mayor. Es claro que si los coeficientes fueran iguales, su diferencia seria cero y el término desapareceria.

Estas operaciones se conocen con los nombres de *reduccion* y *destruccion* de los términos semejantes.

Haciendo la reduccion y destruccion de los términos semejantes en cada uno de los polinómios siguientes, se tendrá:

1.° $3a^2b+5b^3-3a^2b^2+5a^2b-5a^2b^2+9b^3+a^2b-$
$9a^2b+14b^3-8a^2b^2$;

2.° $7a^2b^3+5a^2b^2-2a^2b^3+4a^3b^2-7a^2b^2-3b^3+a^2b^2+3b^3=$
$5a^2b^3-a^2b^2+4a^3b^2$.

El término $3a^2b$ que lleva el signo $+$ y que está suprimido por ser principio de polinómio, se ha reducido con $+5a^2b$ dando el resultado $+8a^2b$, que reducido con $+a^2b$, da el término $9a^2b$ que hemos escrito: del mismo modo, reduciendo los términos $+5b^3$ y $+9b^3$, se tiene el resultado $+14b^3$: por último, hemos hallado el término $-8a^2b^2$, reduciendo los dos términos $-3a^2b^2$ y $-5a^2b^2$.

En el segundo polinómio, los términos $7a^2b^3$ y $-2a^2b^3$ se han reducido á $+5a^2b^3$; los términos $5a^2b^2$ y $-7a^2b^2$ á $-2a^2b^2$, que con el término $+a^2b^2$, se reduce á $-a^2b^2$; el término $4a^3b^2$ se escribe en el resultado, por no tener semejante con el cual pueda reducirse ni destruirse; finalmente los términos $-3b^3$ y $+3b^3$ se destruyen, por cuya razon no aparecen en el resultado.

LECCION II.

Cantidades negativas, modo de considerarlas.

Cantidades negativas, modo de considerarlas.

19. En aritmética sólo se considera el valor numérico de las cantidades, prescindiendo de la posicion relativa que puedan tener unas respecto de otras y de la manera que puedan influir en el resultado de un problema, en el cual se consideran cantidades que tienen distinto modo de existir; pero en el álgebra no solo hay que atender al valor numérico de las cantidades, sino tambien á su posicion relativa y modo de existir.

Si una cantidad x representa la diferencia de otras dos a y b, lo cual se consigna por la igualdad $x=a-b$ ó $x=b-a$, se hallará el valor numérico de dicha cantidad x, restando del valor numérico de la mayor de las cantidades a ó b, el valor numérico de la menor. Si x no expresara la diferencia en absoluto que hay entre a y b, sino que representase la cantidad que indica el resultado de la sustraccion $a-b$, es decir, si se obtuviese simplemente la igualdad

$$x=a-b, \quad [1]$$

no podria obtenerse aritméticamente el valor de x, ni su significacion, en el caso de ser $a<b$; puesto que el resultado pedido debe ser tal, que sumado con el número b, ha de dar el número a, lo cual es imposible; pero si observamos que siendo $b>a$, le excederá en una cierta cantidad d, tendremos $b=a+d$ ó $a=b-d$; y sustituyendo uno de estos valores, el de a por ejemplo, en la igualdad [1], se convertirá en $x=b-d-b$ ó $x=-d$; resultado que se llama negativo y que por mucho tiempo ha sido despreciado como expresion que carecia de sentido.

Examinando detenidamente este resultado y su procedencia, vemos que nos indica una cantidad que deberia restarse de otra si la hubiera; al paso que siendo $a>b$, la diferencia d, valor que entónces tendria x, nos indicaria una cantidad que deberia sumarse; por consiguiente, cada uno de estos valores obtenidos para x, tiende á un fin diverso; el uno á disminuir y el otro á aumentar en cuanto ellos valen, un cierto resultado. Estos valores considerados en absoluto, nos dan una primera idea de los dos modos distintos como pueden existir las cantidades; mas no basta la concepcion de estos dos modos de existencia, es necesario darles interpretacion física y real en cada uno de los casos en que se presentan, siempre que sean susceptibles de esta significacion; lo cual nos dará el medio de interpretar el resultado de un problema, que de otro modo se hubiera desechado como imposible ó absurdo.

Supongamos que el valor de $x=a-b$, nos indica la distancia que hay de un punto fijo O, á otro movible M,

X′ M′ O M A X

el cual se supone que, partiendo del punto O recorre hácia la derecha, en la direccion OX, una distancia $OA=a$, y despues ha retrocedido á la izquierda una distancia $AM=b$; de modo que, $x=a-b$ representará en posicion y en magnitud la distancia que media entre los dos puntos O y M de partida y de llegada.

Es evidente que si la cantidad a es mayor que b, el punto movible M tiene que retroceder ménos que lo que anduvo en la direccion OX; por consiguiente, el punto M estará á la derecha del orígen O y á una distancia OM igual á la diferencia $a-b$, la cual suponemos ser d; luego $x = a - b = d$, nos expresa en magnitud y posicion la distancia OM.

Si se tiene $a = b$, es claro que el punto de partida y de llegada se confunden en uno, puesto que la distancia que recorrió á la derecha es igual á la que retrocedió: luego $x = a - b = 0$, nos indica la distancia cero que separa á los dos puntos ó sea el orígen.

Si tenemos, por último, $a < b$, habiendo retrocedido hácia la izquierda el punto movible una distancia mayor que la que anduvo á la derecha, no solamente debió volver al orígen, sino recorrer hácia la izquierda una distancia OM′ igual en valor numérico á la diferencia d que hay entre los valores b y a; pero este valor que está dado por la igualdad $x = a - b = -d$, nos indica tambien en magnitud y posicion la distancia OM′ entre los dos puntos de partida y de llegada.

Como los valores d y $-d$, hallados para x, dependen de los valores generales que se les puede dar á a y b en cualquier otro caso de esta misma especie, tendrán la misma significacion que en el anterior; de donde podremos concluir, que el valor positivo ó negativo hallado como solucion de un problema, nos puede indicar, si se trata de la posicion de un punto con relacion á otro en una línea, la distancia á la que se halla dicho punto del orígen, y el sentido de izquierda á derecha ó de derecha á izquierda en que se ha de tomar, fijando de antemano que el positivo indique uno de estos.

20. Si en la igualdad $x = a - b$ representa x la fortuna de una persona cuyo haber está expresado por a, y lo que debe por b, es evidente que la diferencia $a - b = d$ expresará el caudal ó fortuna de dicha persona, siendo $a > b$; si se tiene $a = b$, la fortuna se reducirá á cero, es decir no tendrá nada; pero si $a < b$, entónces la igualdad $x = a - b$ se reducirá, como anteriormente, á $x = -d$, cuyo resultado nos indicará que la persona en cuestion no tiene fortuna, sino un débito representado por d; puesto que siendo d el exceso de lo que debe sobre lo que tiene, es claro que dando todo cuanto posee, queda debiendo aún dicha cantidad.

Conviniendo en llamar positivas á las cantidades de dinero que uno posee, y representándolas por cantidades precedidas del signo $+$, las deudas, ó sean las cantidades que uno ha de pagar, serán las negativas é irán precedidas del signo $-$: y recíprocamente, toda cantidad precedida del signo $-$, indicará una deuda; y precedida del signo $+$, será positiva y expresará una cantidad existente en caja.

21. Del mismo modo, conviniendo en que los grados de un termómetro contados sobre cero sean positivos, y negativos los que se cuenten bajo cero, é indicando los primeros con el signo $+$ y con el signo $-$ los segundos, tanto el valor $+d$ como el valor $-d$, hallados para x por la igualdad $x=a-b$, en la cual x representa la temperatura que marca un termómetro despues de haber descendido b grados desde la temperatura marcada por a grados, tendrán una significacion física, ya sea $a>b$, $a=b$ ó $a<b$.

Asimismo, tendrá interpretacion física y racional el valor negativo $-d$, en todas aquellas cantidades que sean susceptibles de tener dos modos de existencia enteramente opuestos; únicamente no tendrá significacion, y si la tiene es la de indicar la imposibilidad del problema de que proviene, en el caso de que la cantidad que representen no admita estos dos modos de existir.

22. Admitido que las cantidades, segun se consideran en álgebra, pueden tener dos modos distintos de existir, dando orígen á las cantidades positivas y negativas, nos vemos en la necesidad de establecer un punto de partida ú orígen de ambas cantidades, el cual no es otro que cero; de donde se deduce, que el cero en las cantidades algebráicas se considera bajo dos aspectos, ó como carencia de toda cantidad, ó como límite donde concluyen las negativas y principian las positivas.

Cuando la cantidad no es susceptible de existir sino de una manera, entónces el cero sólo indica la carencia de toda magnitud.

23. Tambien es necesario modificar la definicion de cada una de las operaciones que se hacen con la cantidad, de manera que comprenda no solo á las que tienen un mismo modo de existir, que es lo que hasta aquí hemos considerado, sino tambien á las que tengan dos modos opuestos.

24. Este nuevo modo de considerar á las cantidades nos obliga á establecer nuevas relaciones de magnitud; porque ahora no bastará que dos cantidades tengan un mismo valor numérico para que sean iguales, sino que además es necesario que tengan un mismo modo de existir.

25. Si de un minuendo m restamos un sustraendo s y representamos la diferencia por d, se tendrá $m-s=d$. Si s, siendo menor

que m, suponemos que aumenta, la diferencia d será una cantidad positiva, cuyo valor disminuirá á medida que s aumente. Cuando $s=m$, d se convierte en cero; y si todavía suponemos que s sigue aumentando, d irá disminuyendo y será negativo, de modo que podremos decir: 1.° *que toda cantidad positiva es mayor que cero*; 2.° *que toda cantidad negativa es menor que cero*; y 3.° *que de dos cantidades negativas es mayor la que tiene menor valor numérico*. Así, para indicar que una cantidad a es positiva ó negativa, se establece la relacion $a>0$ ó $a<0$.

* 26. No solo se puede admitir por analogía que las cantidades negativas son menores que cero, y que de dos negativas es mayor la que tiene menor valor numérico, sino que tambien podemos convencernos de ello directamente por el raciocinio, á pesar de parecer una paradoja el decir que haya una cantidad menor que cero, ó lo que es lo mismo, menor que nada.

En efecto, miéntras que las cantidades se consideraron con un sólo modo de existir, no se admitieron las cantidades negativas, y cuando se llegaba á resultados de esta especie, se desechaban como indicios de una imposibilidad de la operacion ó un absurdo en el problema; y entónces el cero no representaba más que la carencia de toda cantidad, en cuyo caso no se concebia ninguna que pudiese ser menor que cero; pero una vez admitidas las cantidades negativas como representantes de uno de los dos modos como la cantidad en general puede existir, su valor absoluto no debe considerarse con relacion al cero límite, sino con relacion al cero carencia de toda cantidad, menor que el cual no es admisible ninguna otra.

Cuando el cero es considerado como límite, no es una paradoja el decir que una *cantidad negativa es menor que cero*, sino que por el contrario es lo lógico y natural. En efecto, no representando el cero de un termómetro la cantidad cero de calor, sino un orígen de partida conocido, con el cual se relacionan otros grados de temperatura, ¿será un absurdo decir que cuando el termómetro marque diez grados bajo cero, ó sean —10°, haga ménos calor que cuando marca cero? Es claro que no, y se comprobaria fácilmente si el límite cero á que nos referimos cambiase en la escala termométrica, ó si esos mismos grados de temperatura que hemos marcado con cero y —10°, medidos en el termómetro centígrado, por ejemplo, los refiriésemos al termómetro de Fahrenheit, en el cual 32° equivalen al cero del centígrado, y —10° de éste, á 14° del de Fahrenheit. Donde vemos que el grado de calor marcado por cero es mayor que el marcado por —10°.

Este mismo raciocinio empleado en las cantidades de longitud contadas en una línea á derecha ó izquierda de un punto tomado como orígen, demuestra que el valor absoluto de una cantidad negativa es menor que cero considerado como límite, para lo cual bastaria solamente admitir el cero carencia á partir del cual se contasen todas las cantidades y en un sólo sentido.

Lo mismo sucederia si la cantidad se refiriese al tiempo trascurrido ántes ó despues de una época, la cual se toma por cero ó partida: así —100 años, con relacion al diluvio, expresaria una cantidad de tiempo en absoluto, menor que la que expresa la época del diluvio, si ambas las referimos al orígen que supondremos ser la creacion.

27. Cuando el cero límite es el mismo que el cero carencia, como sucede en las cantidades de dinero que una persona tiene ó debe, no es tan fácil formarse idea de la relacion de magnitud entre cero y una cantidad negativa; pues el valor real de estas cantidades es en este caso puramente convencional y solo por el efecto que producen al reunirlas con otras positivas, podemos deducir que una cantidad negativa sea menor que cero. En efecto, si hay dos personas de las cuales una tiene cero capital, pero que no tiene deudas, y otra que tiene —100 rs. de capital ó sea una deuda de 100 rs., es evidente que consideradas cada una en absoluto y sin otras condiciones, tan pobre es una como otra, puesto que de nada pueden disponer; pero si suponemos que estos mismos sujetos se asocian con otros contribuyendo y formando un capital social con lo que cada uno tiene, es indudable que el que no lleve nada, en nada altera el capital de la sociedad, mientras que el que lleva la deuda le disminuye en cuanto ella vale: luego si reuniendo á un capital una deuda da un resultado menor que cuando se le une cero, se puede admitir, en este sentido, que el capital negativo ó deuda es menor que cero. De otro modo: si cada una de esas dos mismas personas recibe 100 rs., la que no tenia nada se hallará con 100 rs.; mas la otra satisfaciendo, como debe, su deuda, se quedará sin nada; y como es evidente que si las fortunas de dos personas reciben un mismo aumento y los resultados son desiguales, dichas fortunas

tambien lo son, siendo menor la correspondiente al menor resultado, se sigue que el capital —100 rs. es menor que cero.

28. Del mismo modo se demostraria que de dos cantidades negativas es mayor la que tiene menor valor numérico.

29. De todo lo dicho se deduce *que las cantidades negativas deben considerarse en un sentido enteramente inverso al de las positivas, y si la cantidad no tiene este doble modo de existir, se considera como una imposibilidad en el problema de donde provienen.*

LECCION III.

Cálculo de las cantidades algebráicas.—Valor numérico de las expresiones algebráicas.

Cálculo de las cantidades algebráicas.

30. Consideradas en álgebra las cantidades bajo el doble aspecto de su valor numérico y modo de existir, debemos establecer la diferencia que hay entre el cálculo puramente aritmético y algebráico: diferencia de que ya nos hemos ocupado, aunque muy ligeramente en nuestras LECCIONES DE ARITMÉTICA.

31. ADICION *es la reunion de varias cantidades algebráicas cuyo valor numérico se toma en el sentido que indica el signo que á cada una de ellas precede.*

De esta definicion se deduce que la suma algebráica no lleva envuelta la idea de aumento, pudiendo ser su valor numérico menor que el de cualquier sumando.

32. La adicion se efectúa segun las dos reglas siguientes:

1.ª *Para sumar varias cantidades de un mismo signo, se escriben unas á continuacion de otras dentro de paréntesis, se efectúa la suma de sus valores numéricos y al resultado se le pone el signo de los sumandos.*

En efecto, como todos los sumandos expresan cantidades que se han de tomar en un mismo sentido, la suma deberá tomarse en el mismo, siendo su valor numérico igual á la suma de los valores numéricos de los sumandos.

Ejemplos. 1.° $(+3)+(+5)+(+8)+(+4)=+20$

2.° $(-5)+(-8)+(-2)+(-6)+(-3)=-24$

Observacion. El signo $+$ puede suprimirse en principio de diccion, y siempre que indique que una cantidad es positiva: así, el primer ejemplo se escribirá simplemente

$$3+5+8+4=20$$

2.ª *Para sumar varias cantidades de distinto signo, se efectúa la suma de todas las que llevan el signo* $+$, *luégo la de las que llevan el signo* $-$, *se halla la diferencia de sus valores numéricos y se pone al resultado el signo de la mayor en valor numérico.*

En efecto, toda cantidad afectada del signo $+$, tiende á aumentar el resultado en tanto cuanto vale, cualquiera que sea el sitio que ocupe entre los sumandos; y toda cantidad que lleva el signo $-$, tiende á disminuir dicho resultado en su valor numérico; luego una vez efectuadas las sumas de unas y otras cantidades, deberán tomarse una en un sentido y otra en el opuesto: por consiguiente el resultado será igual en valor numérico á la diferencia de los valores numéricos de ambas sumas, permaneciendo en el sentido de la mayor.

Ejemp. 1.° $3+(-5)+8+6+(-4)+(-3)+6=23-12=11$

2.° $8+(-9)+(-8)+4+5=17-17=0$

3.° $(-18)+12+(-16)+(-13)+14=-47+26=-21$

33. Sustraccion *es el análisis de la adicion y tiene por objeto, dada la suma de dos cantidades algebráicas y una de éstas, hallar la otra.*

De la definicion se deduce que *para restar una cantidad algebráica de otra, se escribe el minuendo, y á continuacion el sustraendo con signo contrario, y se efectúa la suma algebráica que resulta.*

La cantidad así hallada será la que se busca; porque componiéndose del minuendo con el signo que tiene y del sustraendo con signo cambiado, si le agregamos el sustraendo, éste se destruirá á consecuencia de hallarse repetido y con signos contrarios, quedando sólo el minuendo, que es lo que nos proponiamos.

Así, $8-(5)=8-5=3$, $8-(10)=8-10=-2$, $8-(-6)=8+6=14$, $-8-(4)=-8-4=-12$, $-8-(-12)=-8+12=4$,

34. Multiplicacion. *Multiplicar dos cantidades algebráicas es*

hallar otra que sea respecto de una de ellas en signo y magnitud, lo que la otra es de la unidad positiva.

De esta definicion se deduce que si la cantidad que hace de multiplicador es positiva ó lleva el signo $+$, el producto llevará el mismo signo que tenga el multiplicando, y si es negativa ó lleva el signo $-$, el producto llevará signo contrario. El valor numérico del producto siempre es igual al producto de los valores numéricos de los factores: luego *para multiplicar dos cantidades algebráicas, se efectúa el producto de sus valores numéricos y se le afecta el signo del multiplicando ó signo contrario, segun que el multiplicador lleve el signo $+$ ó $-$.*

Así, $5 \times 4 = 20$, $(-5) \times 4 = -20$, $5 \times (-4) = -20$, $(-5) \times (-4) = 20$.

Observacion. El producto lleva el signo $+$ cuando los dos factores tienen un mismo signo, y el signo $-$ cuando tienen signos contrarios; lo que se anuncia en la práctica diciendo: $+$ por $+$, ó $-$ por $-$, da $+$ en el producto; y $+$ por $-$, ó $-$ por $+$, da $-$.

35. Si hubiese más de dos factores que multiplicar, se hallaría el producto de los dos primeros, luégo el de éste por el tercero, despues el del último por el cuarto, y así sucesivamente. Si todos los factores no son positivos, el producto llevará el signo $+$ ó $-$, segun que sea par ó impar el número de factores negativos.

Ejemplos. 1.° $8 \times (-5) \times 4 \times (-3) = 480$

2.° $5 \times (-13) \times (-2) \times 4 \times (-1) = -520$

36. Division *es el análisis de la multiplicacion y tiene por objeto, dado el producto de dos cantidades algebráicas y una de éstas, hallar la otra.*

Como el producto del divisor por el cociente ha de ser igual en magnitud y signo al dividendo, cuando éste lleve el signo $+$, el cociente llevará el mismo que tenga el divisor, y si el dividendo tiene el signo $-$, el cociente llevará signo contrario.

El valor numérico del cociente es siempre igual al cociente de los valores numéricos del dividendo y divisor: de donde se deduce que, *para dividir dos cantidades algebráicas, se halla el cociente de sus valores numéricos, y se le pone el signo del dividendo ó signo contrario segun que el divisor lleve el signo $+$ ó $-$.*

Así, $\frac{20}{5} = 4$, $\frac{-20}{5} = -4$, $\frac{20}{-5} = -4$, $\frac{-20}{-5} = 4$.

Donde observamos que el cociente lleva el signo + ó —, segun que el dividendo y divisor tengan un mismo signo ó signos contrarios.

37. Elevacion á potencias. La definicion de potencia que hemos dado en aritmética, sólo conviene al caso de ser entero el exponente; mas para definirla de un modo general, diremos que *la potencia* ENÉSIMA *de una cantidad es otra que se forma respecto de la primera considerada como factor ó divisor, del mismo modo que el exponente* n *lo es respecto de la unidad positiva ó negativa considerada como sumando.*

Es decir, que si el exponente n es un número entero, la potencia *enésima* de a será igual al producto de n factores iguales á a: así, $a^n = a \times a \times a .....$ repetida n veces.

Si n es un número fraccionario de la forma $\frac{1}{m}$, la potencia *enésima* de a expresará la cantidad que repetida m veces como factor nos dé $a^1 = a$; es decir, la raíz *emésima* de a; porque en efecto, siendo n la *emésima* parte de la unidad, repitiéndola m veces como sumando, da 1; luego la cantidad que represente la expresion $a^n = a^{\frac{1}{m}}$, repetida por factor el mismo número m de veces que se ha repetido el exponente n para dar la unidad, nos debe de dar el mismo resultado $a^1 = a$: de donde

$$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}.$$

Si n fuese de la forma $\frac{p}{m}$, expresaria p veces la *emésima* parte de la unidad, y como una *emésima* parte de la unidad considerada como exponente de una cantidad, representa, segun acabamos de ver, la raíz *emésima* de la misma cantidad, repitiéndola p veces por factor, hallaremos el resultado: luego

$$a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} ...... = \left(\sqrt[m]{a}\right)^p = \sqrt[m]{a^p}: \quad (Arit.\ 308).$$

Si el exponente fuese un número inconmensurable, la potencia seria el límite hácia el cual van aproximándose los resultados de sustituir el número inconmensurable por números fraccionarios que se le vayan aproximando cada vez más.

Y por último, si el exponente n fuese negativo, siendo cualquiera su valor numérico é igual á $-m$, la potencia a^n expresaria la cantidad a considerada como divisor tantas veces como $-m$ contiene á la unidad negativa: así,

$$a^{-m}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{a}\times\frac{1}{a}\ldots\ldots=\frac{1}{a^m},$$

$$a^{-\frac{1}{m}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{m}}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a}},\qquad a^{-\frac{p}{m}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{m}}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^p}}.$$

De todo lo dicho anteriormente se deducen las reglas siguientes:

38. *Para elevar una cantidad á una potencia cuyo exponente sea un número entero y positivo* n, *se repite por factor* n *veces*. El resultado será negativo en el caso de ser negativa la cantidad é impar el exponente.

Así, $2^3=8$, $2^4=16$, $(-2)^4=16$, $(-2)^3=-8$.

39. *Para elevar una cantidad á una potencia cuyo exponente sea un número fraccionario* $\frac{m}{n}$, *se eleva á la potencia* m, *y del resultado se extrae la raíz* enésima.

Así, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $\quad(-a)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(-a)^m}$.

* 40. *Para elevar una cantidad á una potencia cuyo exponente sea un número inconmensurable, se reemplaza éste por números fraccionarios que se le vayan aproximando cada vez más, y los resultados obtenidos expresarán el valor de la potencia con un error tanto más pequeño cuanto mayor sea la aproximacion de los números fraccionarios al inconmensurable.*

Sea, por ejemplo, el número inconmensurable $\sqrt{p}$ el exponente de la potencia á que hemos de elevar la cantidad a, $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$ dos números que comprenden á $\sqrt{p}$. La potencia $a^{\sqrt{p}}$ se hallará comprendida entre $a^{\frac{m}{n}}$ y $a^{\frac{m+1}{n}}$, de modo que tomando por el valor de $a^{\sqrt{p}}$ cualquiera de las dos expresiones $a^{\frac{m}{n}}$ ó $a^{\frac{m+1}{n}}$, el error que se comete será menor que la diferencia que hay entre ambas expresiones, la cual será evidentemente tanto más pequeña cuanto mayor sea n, pudiendo ser dicha diferencia, como más adelante demostrarémos, menor que cualquiera cantidad por pequeña que sea.

41. *Para elevar una cantidad á una potencia cuyo exponente sea negativo, pudiendo tener un valor numérico cualquiera, se parte la unidad por la misma potencia de la cantidad cuyo exponente sea positivo.* Así, $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$.

42. Extraccion de raices. *La extraccion de raíces es el análisis de la elevacion á potencias; y tiene por objeto, dada una cantidad, hallar otra que elevada á la potencia que marque el índice del radical, nos reproduzca la primera.*

Cuando sea positiva la cantidad de que se ha de extraer la raíz, ésta se puede siempre obtener exacta ó aproximadamente, afectando al resultado el signo $\pm$, si depende de un radical de grado par, y sólo del signo $+$, si fuese de grado impar; pero si dicha cantidad fuese negativa, sólo podria obtenerse exacta ó aproximadamente el valor de las raíces que dependiesen de radicales de grado impar; pues las de grado par darian orígen á expresiones llamadas *imaginarias,* por no haber cantidad alguna que elevada á una potencia par, dé un resultado negativo.

43. Siguiendo el procedimiento que en Aritmética hemos usado para deducir las reglas que conducen á la extraccion de las raíces cuadrada y cúbica, tendremos por regla general que *para extraer la raíz enésima de un número, se divide éste en períodos de* n *cifras principiando por la derecha, (no importando que el último de la izquierda no las tenga), se halla la raíz enésima de este último período, que será una de las nueve cifras significativas, y la enésima potencia de esta cifra se resta del primer período; al lado de la resta se baja la primera cifra del siguiente período, y el número que resulta se divide por* n *veces la* (n—1) *potencia de la cifra hallada, y el cociente entero que se obtenga, será igual ó mayor que la segunda cifra. Para comprobar si la cifra hallada es la verdadera, se eleva la raíz hallada á la enésima potencia, y si el resultado se puede restar de los dos primeros períodos, la cifra será buena; pero si no se puede restar será señal de que es mayor, en cuyo caso se le disminuye de unidad en unidad hasta que dicha resta se pueda efectuar.*

Al lado de la nueva resta se baja la primera cifra del tercer período, y haciendo lo mismo que en el caso anterior, hallarémos la cifra *siguiente: y así se continúa hasta encontrar la última cifra de la raíz, que será exacta si el último resto es cero, é inexacta en el caso contrario.*

44. *Para extraer la raíz cuyo índice sea un número fraccionario* $\frac{n}{m}$ *de una cantidad, se eleva ésta á la potencia* m, *y del resultado se extrae la raíz* enésima.

Así, $$\sqrt[\frac{n}{m}]{a}=\sqrt[n]{a^m}$$

En efecto, la raíz $\frac{n}{m}$ de a, es la cantidad que elevada á la potencia $\frac{n}{m}$, ha de dar a; pero la potencia de una cantidad cuyo exponente es $\frac{n}{m}$, se obtiene (39), elevando dicha cantidad á la potencia n y extrayendo la raíz *emésima* del resultado; y como elevando la expresion $\sqrt[n]{a^m}$ á la potencia n nos da a^m, y extrayendo la raíz *emésima* del resultado, obtenemos la cantidad a, se sigue que $\sqrt[n]{a^m}$ es la raíz $\frac{n}{m}$ de a; que es lo que debiamos demostrar.

* 45. *Para extraer de una cantidad la raíz cuyo índice sea un número inconmensurable, se reemplaza éste por números conmensurables que se le vayan aproximando cada vez más; y los resultados obtenidos serán los valores aproximados de la raíz pedida, la cual es el límite hácia el que tienden dichos valores.*

46. *Para extraer de una cantidad la raíz cuyo índice es negativo, se parte la unidad por la raíz de la misma cantidad cuyo índice es positivo.*

Así, $$\sqrt[-m]{a}=\frac{1}{\sqrt[m]{a}}.$$

En efecto; $$\left(\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^m}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a;$$

luego $\frac{1}{\sqrt[m]{a}}$, es la raíz $-m$ de a: que es lo que debiamos demostrar.

Valor numérico de las expresiones algebráicas.

47. *Se entiende por* VALOR NUMÉRICO *de una expresion algebráica, el que resulta de poner en vez de las letras, números particulares, efectuando despues todas las operaciones indicadas.*

EJEMPLOS. 1.° Hallar el valor numérico del polinómio $3a^4+2a^3b+5a^2b^2+2ab^3-b^4$, siendo $a=2$, $b=-3$.

Sustituyendo dichos valores y efectuando sucesivamente las operaciones, se tiene

$$3\,.\,2^4+2\,.\,2^3\,.\,(-3)+5\,.\,2^2\,.\,(-3)^2+2\,.\,2\,.\,(-3)^3-(-3)^4=$$
$$3\,.\,16-2\,.\,8\,.\,3+5\,.\,4\,.\,9-2\,.\,2\,.\,27-81=48-48+180-108-81$$
$$=-9.$$

2.° Hallar el valor numérico de

$$y=\frac{3\,a^2\,b^{-1}c^{\frac{1}{3}}+5a^3\sqrt[3]{3\,a^2\,b}}{5a^3\,b^2-4a^2\sqrt[\frac{2}{3}]{9\,a^2\,b^{-4}}},$$

para los valores de $a=3$, $b=-1$, $c=8$.

Haciendo la sustitucion y efectuando las operaciones indicadas, se tiene:

$$y=\frac{3.3^2.(-1)^{-1}8^{\frac{1}{3}}+5\,.\,3^3\sqrt[3]{3\,.\,3^2.(-1)}}{5\,.\,3^3\,.(-1)^2-4\,.\,3^2\sqrt[\frac{2}{3}]{9\,.\,3^2\,.(-1)^{-4}}}=$$
$$\frac{3\,.\,9\,.(-1)\sqrt[3]{8}+5\,.\,27\sqrt[3]{3\,.\,9\,.\,(-1)}}{5\,.\,27\,.\,1-4\,.\,9\sqrt[\frac{2}{3}]{9.9.1}}=\frac{-27.2+135\sqrt[3]{-27}}{135-36\sqrt[\frac{2}{3}]{81}}$$
$$=\frac{-54+135.(-3)}{135-36(\sqrt{81})^3}=\frac{-54-405}{135-36.9^3}=\frac{-459}{135-26244}=$$
$$\frac{-459}{-26109}=\frac{17}{967}$$

* OBSERVACION. De las definiciones y convenios establecidos anteriormente, se deduce que toda expresion en que entren cantidades con exponentes enteros y fraccionarios, positivos y negativos, se puede trasformar en otra en la cual no entren más que exponen-

tes enteros positivos, y radicales de índices enteros tambien y positivos. En efecto, sea la expresion:

$$y=\left(\sqrt[-\frac{n}{m}]{\sqrt[-\frac{p}{q}]{a^{-\frac{r}{s}}}}\right)^{-t}.$$

Haciendo $x=\sqrt[-\frac{n}{m}]{\sqrt[-\frac{p}{q}]{a^{-\frac{r}{s}}}}$, se tendrá $y=\frac{1}{x^t}$.

De la igualdad anterior se saca, elevando á la potencia $-\frac{n}{m}$,

$$x^{-\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{x^n}=\sqrt[-\frac{p}{q}]{a^{-\frac{r}{s}}},$$

y elevando nuevamente á la potencia $-\frac{p}{q}$, se tiene,

$$\left(\sqrt[m]{x^n}\right)^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{\left(\sqrt[m]{x^n}\right)^{\frac{p}{q}}}=a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}$$

de donde se deduce

$$\sqrt[q]{\left(\sqrt[m]{x^n}\right)^p}=\sqrt[s]{a^r}, \quad \text{ó} \quad \sqrt[qm]{x^{np}}=\sqrt[s]{a^r}:$$

elevando á la potencia qm, y extrayendo despues la raíz np, se tendrá $x=\sqrt[nps]{a^{rqm}}$, y por último, sustituyendo el valor x en la expresion propuesta, se tiene $y=\frac{1}{\sqrt[nps]{a^{rqmt}}}$: expresion de la forma $\frac{1}{\sqrt[\alpha]{a^\beta}}$, en la cual α y β son números enteros y positivos.

LECCION IV.

Adicion de expresiones algebráicas.—Sustraccion de expresiones algebráicas.

Adicion de expresiones algebráicas.

En la adicion de expresiones algebráicas pueden considerarse dos casos principales, segun que se sumen monómios ó polinómios.

48. Adicion de monómios. *Para sumar monómios se escriben unos á continuacion de otros con el mismo signo que tengan, y el polinómio que resulte despues de hecha la reduccion y destruccion de los términos semejantes, será la suma pedida.*

Así, $(3a^2b)+(2ab^2)+(5a^2b)+(-3a^2b^2)+(4ab^2)+(-5a^2b)=$
$3a^2b+2ab^2+5a^2b-3a^2b^2+4ab^2-5a^2b=3a^2b+6ab^2-3a^2b^2.$

49. Adicion de polinómios. *Para sumar polinómios se escriben unos á continuacion de otros dentro de paréntesis, ó bien unos debajo de otros; y queda efectuada la suma, formando un sólo polinómio con todos los términos de los sumandos afectados de los mismos signos que tienen y haciendo la reduccion y destruccion de los que haya semejantes.* Así, se tendrá:

$$(3a^2b+\tfrac{2}{5}a^2b^2+2ab^2+b^3)+(\tfrac{5}{6}a^3b-3a^2b-2a^2b^2+3b^3)+$$
$$(4a^2b+a^2b^2-a^3b)+(ab^2-4b^3-a^2b^2)=3a^2b+\tfrac{2}{5}a^2b^2+2ab^2+b^3+$$
$$\tfrac{5}{6}a^3b-3a^2b-2a^2b^2+3b^3+4a^2b+a^2b^2-a^3b+ab^2-4b^3-a^2b^2=$$
$$4a^2b-\tfrac{8}{5}a^2b^2+3ab^2-\tfrac{1}{6}a^3b.$$

Escribiendo los sumandos unos debajo de otros, se tiene

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 3a^2b & +\tfrac{2}{5}a^2b^2 & +2ab^2 & +b^3 \\
+\tfrac{5}{6}a^3b & -3a^2b & -2a^2b^2 & & +3b^3 \\
-a^3b & +4a^2b & +a^2b^2 & & \\
 & & -a^2b^2 & +ab^2 & -4b^3 \\
\hline
=-\tfrac{1}{6}a^3b & +4a^2b & -\tfrac{8}{5}a^2b^2 & +3ab^2 &
\end{array}$$

50. En la adicion de monómios, lo mismo que en la de polinómios se verifica, que *el valor numérico de la suma es igual á la suma algebráica de los valores numéricos de los sumandos.*

En efecto, todo término positivo, sea cualquiera el lugar que ocupe, tiende á aumentar el resultado final en tanto cuanto él vale; así como todo término negativo tiende á disminuir dicho resultado en su valor numérico; y como en la suma se hallan todos afectados de sus mismos signos, y la reduccion y destruccion no altera en nada el valor numérico, se sigue que éste será igual á la suma de los valores numéricos de los sumandos.

Sustraccion de expresiones algebráicas.

51. SUSTRACCION DE MONÓMIOS. *Para restar un monómio de otro, se escribe el minuendo y á continuacion el sustraendo con signos cambiados.*

La sustraccion de $3a^2 b$ y $5a^2 b^2$, será $3a^2 b - 5a^2 b^2$.

Del mismo modo se obtendrá la resta de $3a^2b^2$ y $-2ab^3$ de la manera siguiente $3a^2 b^2 - (-2a b^3) = 3a^2b^2 + 2ab^3$.

52. SUSTRACCION DE POLINÓMIOS. *Para restar un polinómio de otro, se escribe el minuendo y á continuacion los términos del sustraendo con signos cambiados; el polinómio que resulte, despues de simplificado, será la resta pedida.*

Sea el polinómio $2a^2b - 3a^2 b^2 - 3a b^2 + 2 b^3$, del cual hemos de restar el polinómio $-2a b^2 - a^2 b^2 + 2b^3$.

Segun la regla, tendremos

$$(2a^2b - 3a^2 b^2 - 3ab^2 + 2b^3) - (-2ab^2 - a^2b^2 + 2b^3) =$$
$$2a^2 b - 3a^2 b^2 - 3ab^2 + 2b^3 + 2ab^2 + a^2 b^2 - 2b^3 =$$
$$2a^2 b - 2a^2 b^2 - ab^2.$$

La demostracion de esta regla, tanto en el primero como en el segundo caso, es muy sencilla; pues siendo la sustraccion el análisis de la adicion, y teniendo por objeto hallar la cantidad que sumada con el sustraendo ha de dar el minuendo, es claro que la cantidad formada segun la regla, componiéndose de todo el minuendo tal como se nos da, y de todos los términos del sustraendo con los signos mudados, sumada con el sustraendo dará por resultado el minuendo; porque todos los términos del sustraendo hallándose repetidos y con signos contrarios se destruirán: luego el polinómio hallado de la manera indicada expresará la resta pedida.

53. De la operacion de restar se deduce, que todo polinómio encerrado dentro de un paréntesis y afectado del signo ménos, equivale al mismo polinómio sin paréntesis, y cuyos términos tienen signos contrarios.

Así, el polinómio $-(3a^2b-4a^2b^2+5b^3,)$ equivale á $-3a^2b+4a^2b^2-5b^3$.

Recíprocamente. Cuando se quiere tener un polinómio con signos contrarios de los que tienen sus términos, no hay más que escribirle así dentro de un paréntesis y ponerle fuera el signo ménos.

Sea el polinómio que queremos tener con signos cambiados $-a^2-b^2-c^2+2ab+2ac-2bc$, el cual se reducirá á $-(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc)$.

54. Siempre que se haya de someter un polinómio á cualquier operacion, conviene, para que los cálculos sean más fáciles de ejecutar y estén ménos expuestos á errores, escribir sus términos en cierto órden con relacion á una de las letras que le constituyen, la cual toma el nombre de letra *ordenatriz*, y la operacion por medio de la cual esto se consigue, es lo que en álgebra se llama *ordenar un polinómio*.

Los polinómios se ordenan con relacion á las potencias ascendentes ó descendentes de la letra ordenatriz que se elige, escribiendo primero el término que contiene dicha letra con menor ó mayor exponente que en todos los demás, despues el término que le contenga con el exponente inmediatamente superior ó inferior, y así sucesivamente.

El polinómio $3a^2x^2+5a-3a^2x+5a^2x^3+6x^4$, ordenado con relacion á la letra x, será $6x^4+5a^2x^3+3a^2x^2-3a^2x+5a$.

55. Si al ordenar un polinómio con relacion á una letra sucediera que hubiese más de un término afectado de una misma potencia de la letra ordenatriz, se sacaria esta potencia por factor comun de todos los términos que la contuviesen, haciendo uso del paréntesis ó de una raya vertical, á la izquierda de la cual se escribe, ordenando con relacion á una nueva letra, el polinómio que resulta de sacar dicha potencia por factor comun.

Sea el polinómio que queremos ordenar con relacion á x,

$$2ax^2+5a^2x+a-5ab^2x+2b-4c^2x^2+3c^2x+2ab.$$

Haciendo uso del paréntesis, se tendrá

$$(2a-4c^2)x^2+(5a^2-5ab^2+3c^2)x+(a+2ab+2b),$$

y si hacemos uso de las rayas verticales, tendremos:

$$\begin{array}{r|l|l} 2\,a & x^2+5\,a^2 & x+a \\ -4c^2 & \quad -5\,ab^2 & \quad +2\,ab \\ & \quad +3\,c^2 & \quad +2\,b \end{array}$$

Del mismo, modo el polinómio $3\,a^2bx^3-2\,a^2x^2+2\,a^2x+2\,a^2-2b^2-4abx+abcx^2+2ax^3+5c^2x^3+3bx^2+2b^2x+3d$, ordenado con relacion á x, será:

$$(3a^2b+2a+5c^2)\,x^3-(2a^2-abc-3\,b)\,x^2$$
$$+(2a^2-4ab+2b^2)\,x+(2a^2-2b^2+3d),$$

ó bien

$$\begin{array}{r|l|l|l} 3a^2b & x^3-2a^2 & x^2+2a^2 & x+2a^2 \\ +2a & \quad +abc & \quad -4ab & \quad -2b^2 \\ +5c^2 & \quad +3b & \quad +2b^2 & \quad +3d. \end{array}$$

El uso de las rayas es preferible al de los paréntesis, porque cada término va afectado del mismo signo que tiene en el polinómio, y cuando se emplean los paréntesis sucede en muchas ocasiones, como en el ejemplo anterior, que aparecen términos con los signos cambiados.

LECCION V.

Multiplicacion de monómios.—Multiplicacion de un polinómio por un monómio.

Multiplicaciones de monómios.

56. *Para multiplicar monómios entre sí, se efectúa el producto de los coeficientes, y á continuacion se escriben las letras comunes á los factores, con un exponente igual á la suma de los que éstas tienen en los monómios, y las no comunes se escriben con sus mismos exponentes. El signo del resultado será $+$ ó $-$ segun que el número de factores negativos sea par ó impar.*

Es decir, que el producto de los monómios mA^pB^qC, $m'A^rB^sD^t$ y $m''B^uCE^z$, en los que m, m', m'' son los coeficientes, y p, q, r, s, t,

u, x, z, los exponentes, cuyos números pueden ser enteros, fraccionarios ó inconmensurables, positivos ó negativos, se obtendrá así:

$$mA^pB^qC \times m'A^rB^sD^t \times m''B^uC^xE^z = mm'm''A^{p+r}B^{q+s+u}C^{1+x}D^tE^z.$$

Para demostrar la exactitud de esta regla, principiarémos por la parte correspondiente á los coeficientes; pues la relativa á los signos, se demostró ya (34), y para ello considerarémos varios monómios que representarémos, para abreviar por mA, $m'B$, $m''C$..... siendo m, m' m''..... coeficientes de cualquier naturaleza.

El producto de dichos monómios, será:

$$mA \times m'B \times m''C..... = mAm'Bm''C.....$$

y como el órden de factores, cualquiera que éstos sean, puede variar sin que el producto varíe, (*Arit.* 312), se tendrá:

$$mA \times m'B \times m''C..... = mAm'Bm''C..... = mm'm''..... ABC.....$$

Además, sabemos que para efectuar el producto de varios factores, se multiplican los dos primeros, luégo este producto por el tercero y así sucesivamente: efectuarémos por lo tanto el producto de todos los coeficientes m, m', m''..... y este producto será el coeficiente del producto de los monómios, conforme al enunciado.

En cuanto á las letras debemos observar que no son otra cosa que factores componentes del monómio; por consiguiente, en el producto de dos ó más monómios deben entrar todas estas letras con sus mismos exponentes como factores del producto total; pero las letras comunes á dos ó más, entran una sola vez en el producto, con un exponente igual á la suma de los exponentes que tienen en los factores, y esto es lo que falta demostrar.

En primer lugar, como para multiplicar un producto por un número, basta multiplicar uno de sus factores por este número, y puesto que el órden de factores no altera el producto, podremos reemplazar el producto de varios factores por el de varios productos de estos factores: así tendremos

$$mA^pB^qC \times m'A^uB^rD^s \times m''B^tC^uE^x =$$
$$mm'm'' \times A^pA^u \times B^qB^rB^t \times CC^u \times D^s \times E^x.$$

Por consiguiente, sólo nos falta probar que el *producto de dos ó más potencias de una misma cantidad, es otra potencia de la misma cantidad cuyo exponente es la suma de los exponentes*; ó como se dice abreviadamente, que *para multiplicar dos ó más potencias de una misma cantidad, se suman los exponentes cualesquiera que éstos sean.*

Es decir, que $A^p \times A^q = A^{p+q}$.

Este principio se ha demostrado ya (*Arit.* 262), para el caso de que p y q sean números enteros; ahora vamos á demostrarlo para cuando sean fraccionarios ó inconmensurables, positivos ó negativos.

* 57. Sean en primer lugar p y q dos números fraccionarios $\frac{m}{n}$ y $\frac{r}{s}$; segun la definicion de potencia (37), se tiene:

$$A^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{A^m} \text{ y } A^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{A^r},$$

de cuyas dos igualdades podremos deducir la siguiente,

$$A^{\frac{m}{n}}\times A^{\frac{r}{s}}=\sqrt[n]{A^m}\times\sqrt[s]{A^r}$$

y como tenemos (*Arit.* 306), que

$$\sqrt[n]{A^m}\times\sqrt[s]{A^r}=\sqrt[ns]{A^{ms}}\times\sqrt[ns]{A^{rn}}=\sqrt[ns]{A^{ms+rn}},$$

y por otra parte, $\sqrt[ns]{A^{ms+rn}}=A^{\frac{ms+rn}{ns}}$, siendo además, $\frac{ms+rn}{ns}=\frac{m}{n}+\frac{r}{s}$, se tendrá por último,

$$A^{\frac{m}{n}}\times A^{\frac{r}{s}}=A^{\frac{ms+rn}{ns}}=A^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}},$$

ó lo que es lo mismo, $A^p\times A^q=A^{p+q}$; que es lo que debiamos demostrar.

* 58. Sean en segundo lugar p y q dos números inconmensurables.

Las expresiones A^p y A^q, no son otra cosa que los límites hácia los cuales se aproximan la expresiones que resultan de poner en vez de p y q números conmensurables que se les vayan aproximando cada vez más; para lo cual no hay más que observar que las dos expresiones $A^{\frac{m}{n}}$ y $A^{\frac{m+1}{n}}$ tienden á ser iguales á medida que n aumenta.

En efecto, sea $A>1$, y vamos á demostrar que la diferencia de $A^{\frac{m+1}{n}}$ y $A^{\frac{m}{n}}$ puede ser menor que una cantidad δ, por pequeña que sea, siendo n suficientemente grande.

Tenemos, segun se ha demostrado en Arimética (268), siendo n suficientemente grande.

$$A < \left(1 + \frac{\delta}{A^{\frac{m}{n}}}\right)^n,$$

de donde extrayendo la raíz *enésima*, y poniendo en vez de $\sqrt[n]{A}$ su igual (37), $A^{\frac{1}{n}}$, se tendrá $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}} < 1 + \dfrac{\delta}{A^{\frac{m}{n}}}$; restando ahora la unidad de ambos miembros, y multiplicando por $A^{\frac{m}{n}}$ estas cantidades que son desiguales, los resultados tambien lo serán, y se tendrá $(A^{\frac{1}{n}} - 1)\,A^{\frac{m}{n}} < \delta$, ó lo que es lo mismo, $A^{\frac{m+1}{n}} - A^{\frac{m}{n}} < \delta$; que es lo que debiamos demostrar.

Si $A < 1$, se tendrá $A^{\frac{m+1}{n}} < A^{\frac{m}{n}}$, de modo que se deberá tener

$$A^{\frac{m}{n}} - A^{\frac{m+1}{n}} < \delta.$$

Para ello, considerarémos la desigualdad demostrada en aritmética (269),

$$\left(1 - \frac{\delta}{A^{\frac{m}{n}}}\right)^n < A, \text{ de donde } 1 - \frac{\delta}{A^{\frac{m}{n}}} < A^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A},$$

multiplicando ahora estas dos cantidades por $A^{\frac{m}{n}}$, se tendrá, $A^{\frac{m}{n}} - \delta < A^{\frac{1}{n}} \times A^{\frac{m}{n}} = A^{\frac{m+1}{n}}$, y restando de ambos miembros la cantidad $A^{\frac{m+1}{n}} - \delta$, obtendremos, segun queriamos probar,

$$A^{\frac{m}{n}} - A^{\frac{m+1}{n}} < \delta.$$

Luego pudiendo ser la diferencia que hay entre $A^{\frac{m+1}{n}}$ y $A^{\frac{m}{n}}$ tan pequeña como se quiera á medida que n va siendo mayor, y comprendiendo los dos números $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$ al número inconmensurable p, estas fracciones van aproximándose á valer p, á medida que n aumenta, y las expresiones $A^{\frac{m}{n}}$ y $A^{\frac{m+1}{n}}$ que comprenden á A^p, se aproximarán á este valor cuanto se quiera; por consiguiente, A^p es el límite de las expresiones $A^{\frac{m}{n}}$ y $A^{\frac{m+1}{n}}$, á medida que n aumenta, lo cual debiamos demostrar.

* 59. Una vez probado que las expresiones A^p y A^q, en las que p y q son números inconmensurables, son los límites hácia los cuales tienden las expresiones que resultan de poner en vez de p y q números conmensurables que se les vayan aproximando cada vez más, podemos probar, fundándonos en los principios demostrados en Aritmética relativos á los límites, que

$$A^p \times A^q = A^{p+q}$$

En efecto, si representamos por p' q', p'' q'', p''' q''',... números conmensurables que se vayan aproximando cada vez más á los números inconmensurables p y q, tendremos, segun los casos anteriores,

$$A^{p'} \times A^{q'} = A^{p'+q'}$$
$$A^{p''} \times A^{q''} = A^{p''+q''}$$
$$A^{p'''} \times A^{q'''} = A^{p'''+q'''}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

por consiguiente, si estas expresiones son constantemente iguales, cualquiera que sea el grado de aproximacion de p' q', p'' q'',... en el límite tambien lo serán (*Arit.* 47); luego se tendrá, conforme queriamos demostrar, $A^p \times A^q = A^{p+q}$.

* 60. Sean, por último, los exponentes p y q dos números negativos é iguales á $-m$ y $-n$. Las expresiones A^p y A^q se convertirán en A^{-m} y A^{-n}, las cuales á su vez se reducirán (37) á $\frac{1}{A^m}$ y $\frac{1}{A^n}$; por lo tanto se tendrá,

$$A^{-m} \times A^{-n} = \frac{1}{A^m} \times \frac{1}{A^n} = \frac{1}{A^{m+n}},$$

y como $\frac{1}{A^{m+n}}$ es igual á $A^{-(m+n)} = A^{-m-n}$, se sigue, que la igualdad $A^p \times A^q = A^{p+q}$ se verifica áun en el caso de ser p y q dos números negativos, cualesquiera que sean sus valores numéricos.

Por consiguiente, queda demostrado que el producto de dos potencias de una misma cantidad, es igual á una potencia de la misma cantidad, cuyo exponente es la suma de los exponentes. Con lo cual queda justificada de un modo general, la multiplicacion de monómios.

EJEMPLOS.

1.° $$3a^2b^3c\times 2a^2b^2c^3d=6a^4b^5c^4d.$$
2.° $$-3a^2b^2c^3\times 6a^2b^3d^2f=-18a^4b^5c^3d^2f.$$
3.° $$3a^2b^3c^2d^3\times -4a^2b^3cf^2=-12a^4b^6c^3d^3f^2.$$
4.° $$2a^2b\times -3a^2b^3\times -4a^2b^3c^2\times 2af\times -ab^2=-48a^8b^9c^2f.$$
5.° $$a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}=a^{\frac{8+9}{12}}=a^{\frac{17}{12}},$$
6.° $$a^{\sqrt{2}}\times a^{\sqrt{3}}=a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$
7.° $$a^{-3}\times a^{-\frac{2}{3}}=a^{-\frac{11}{3}}.$$

Multiplicacion de un polinómio por un monómio.

61. *Para multiplicar un polinómio por un monómio, se multiplican todos los términos del multiplicando por el multiplicador, y el polinómio que resulte será el producto pedido.*

En efecto, ya se ha demostrado (*Arit.* 52) la igualdad
$$(a+b-c)\,d=ad+bd-cd,$$
para cualesquiera que sean los valores de a, b, c y d, igualdad que justifica la regla enunciada, siendo d una cantidad positiva

Así, $(3a^2b^2c+5ab^2c^3+ab^2-3a^2b^3+4a^3b-5ab^2c)\times 6a^2b^3c^2=$
$18a^4b^5c^3+30a^3b^5c^5+6a^3b^5c^2-18a^4b^6c^2+24a^5b^4c^2-30a^3b^5c^3.$

Si el monómio fuese una cantidad negativa, pondriamos á los términos del producto signos contrarios á los que tienen los del polinómio multiplicando. Así,
$$(3a^2b-5a^2b^2+4ab^3+2ab-3a^2b^3-6a^3b)\times -2a^2bc^2=$$
$$-6a^4b^2c^2+10a^4b^3c^2-8a^3b^4c^2-4a^3b^2c^2+6a^4b^4c^2+12a^5b^2c^2.$$

LECCION VI.

Multiplicacion de dos polinómios.—Regla de los signos deducida de la multiplicacion de dos binómios.—Observaciones respecto á la multiplicacion y casos particulares.

Multiplicacion de dos polinómios.

62. *Para multiplicar un polinómio por otro, se multiplica todo el multiplicando por cada término del multiplicador, y la suma de los productos parciales que resulten, será el producto total.*

Esta regla está fundada en la que hemos demostrado en aritmética (53 y 54 OBSERVS.). Así,

$$(a+b-c)\,(d+e-f)=ad+bd-cd+ae+be-ce-af-bf+cf.$$

EJEMPLO. Sea multiplicar el polinómio $3x^4-5a^2x^2+6a^3x-3a^4-3ax^3$, por el polinómio $3ax^2-5a^2x+2x^3+4a^3$.

Despues de ordenar los dos polinómios con relacion á x, se dispondrá la operacion del modo siguiente;

$$\begin{array}{ll}
\textit{Multdo.} & 3x^4-3ax^3-5a^2x^2+6a^3x-3a^4 \\
\textit{Multdr.} & 2x^3+3ax^2-5a^2x+4a^3 \\
\hline
\textit{Productos parciales.} & \left\{\begin{array}{l}
6x^7-6ax^6-10a^2x^5+12a^3x^4-6a^4x^3 \\
\quad +9ax^6-9a^2x^5-15a^3x^4+18a^4x^3-9a^5x^2 \\
\qquad -15a^2x^5+15a^3x^4+25a^4x^3-30a^5x^2+15a^6x \\
\qquad\quad +12a^3x^4-12a^4x^3-20a^5x^2+24a^6x-12a^7
\end{array}\right. \\
\hline
\textit{P. total.} & 6x^7+3ax^6-34a^2x^5+24a^3x^4+25a^4x^3-59a^5x^2+39a^6x-12a^7
\end{array}$$

63 Si los polinómios propuestos tuvieran más de un término con una misma potencia de la letra ordenatriz, no se alteraria en nada la regla que hemos dado, la disposicion de los cálculos seria la misma, si bien es cierto que se tendrian que hacer varias multiplicaciones parciales de polinómios más sencillos.

Sea, por segundo ejemplo, multiplicar el polinómio $2a^2x^3+2ax^2+a^2x+a^2-2ab-abx-bx^2+2abx^3+2b^2x^2+b^2$, por $a^2x^2+a^2x+2a^2-b^2-2abx-b^2x^2+b^2x$.

Despues de ordenados con relacion á x, dispondremos la operacion de la manera siguiente:

$$
\begin{array}{r|l|l|l|l|l}
\begin{matrix}2a^2\\+2ab\end{matrix} & x^3\ \begin{matrix}+2a\\-b\\+2b^2\end{matrix} & x^2\ \begin{matrix}+a^2\\-ab\end{matrix} & x\ \begin{matrix}+a^2\\-2ab\\+b^2\end{matrix} & & \\
\begin{matrix}a^2\\-b^2\end{matrix} & x^2\ \begin{matrix}+a^2\\-2ab\\-b^2\end{matrix} & x\ \begin{matrix}+2a^2\\-b^2\end{matrix} & & & \\
\hline
\begin{matrix}2a^4\\+2a^3b\\-2a^2b^2\\-2ab^3\end{matrix} & x^5\ \begin{matrix}+2a^3\\-a^2b\\+2a^2b^2\\-2ab^2\\+b^3\\-2b^4\end{matrix} & x^4\ \begin{matrix}+a^4\\-a^3b\\-a^2b^2\\+ab^3\end{matrix} & x^3\ \begin{matrix}+a^4\\-2a^3b\\+a^2b^2\\-a^2b^2\\+2ab^3\\-b^4\end{matrix} & x^2 & \\
 & \begin{matrix}+2a^4\\+2a^3b\\-4a^3b\\-4a^2b^2\\+2a^2b^2\\+2ab^3\end{matrix} & x^4\ \begin{matrix}+2a^3\\-a^2b\\+2a^2b^2\\-4a^2b\\+2ab^2\\-4ab^3\\+2ab^2\\-b^3\\+2b^4\end{matrix} & x^3\ \begin{matrix}+a^4\\-a^3b\\-2a^3b\\+2a^2b^2\\+a^2b^2\\-ab^3\end{matrix} & x^2\ \begin{matrix}+a^4\\-2a^3b\\+a^2b^2\\-2a^3b\\+4a^2b^2\\-2ab^3\\+a^2b^2\\-2ab^3\\+b^4\end{matrix} & x \\
 & & \begin{matrix}+4a^4\\+4a^3b\\-2a^2b^2\\-2ab^3\end{matrix} & x^3\ \begin{matrix}+4a^3\\-2a^2b\\+4a^2b^2\\-2ab^2\\+b^3\\-2b^4\end{matrix} & x^2\ \begin{matrix}+2a^4\\-2a^3b\\-a^2b^2\\+ab^3\end{matrix} & x\ \begin{matrix}+2a^4\\-4a^3b\\+2a^2b^2\\-a^2b^2\\+2ab^3\\-b^4\end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix}2a^4\\+2a^3b\\-2a^2b^2\\-2ab^3\end{matrix} & x^5\ \begin{matrix}+2a^4\\+2a^3\\-2a^3b\\-a^2b\\-2ab^2\\+2ab^3\\+b^3\\-2b^4\end{matrix} & x^4\ \begin{matrix}+5a^4\\+2a^3\\+3a^3b\\-5a^2b\\-a^2b^2\\+4ab^2\\-5ab^3\\-b^3\\+2b^4\end{matrix} & x^3\ \begin{matrix}+2a^4\\+4a^3\\-5a^3b\\-2a^2b\\+7a^2b^2\\-2ab^2\\+ab^3\\+b^3\\-3b^4\end{matrix} & x^2\ \begin{matrix}+3a^4\\-6a^3b\\+5a^2b^2\\-3ab^3\\+b^4\end{matrix} & x\ \begin{matrix}+2a^4\\-4a^3b\\+a^2b^2\\+2ab^3\\-b^4\end{matrix}
\end{array}
$$

Cuyo producto se ha obtenido, efectuando la multiplicacion de todo el multiplicando por cada una de las partes del multiplicador, lo que nos ha dado los tres productos parciales, cuya suma simplificada es el producto de los dos polinómios propuestos.

Regla de los signos deducida de la multiplicacion de dos binómios.

* 64. Aunque la regla de los signos en la multiplicacion se deduce de la definicion general de multiplicar que se da en álgebra, vamos por medio de la multiplicacion de dos binómios, y fundándonos tan sólo en la definicion aritmética, á probar rigorosamente dicha regla de los signos.

Sean dos binómios $A-B$ y $C-D$, cuyos términos A, B, C, D, son positivos y cuyos valores numéricos elegiremos convenientemente.

Segun lo demostrado en Aritmética (53 y 54), se tiene

$$(A-B)(C-D)=AC-BC-AD+BD.$$

Si suponemos primero $A>B$, y $C>D$, tendremos el caso de multiplicar dos cantidades positivas, en el cual el producto ha de ser positivo.

En efecto, el producto $(A-B)(C-D)$, es igual á $(A-B)C-(A-B)D$, donde vemos que esta diferencia es positiva, por ser $(A-B)$ factor comun al minuendo y sustraendo, y ser el segundo factor C del minuendo mayor que el factor D del sustraendo, y por consiguiente $(A-C)C>(A-B)D$: luego $(A-B)(C-D)>0$, cuando ambos factores son positivos.

Sea en segundo lugar $A>B$ y $C<D$.

En este caso el producto $(A-B)(C-D)$ que es igual á $(A-B)C-(A-B)D$, es negativo; porque el minuendo $(A-B)C$ es menor que el sustraendo $(A-B)D$, á consecuencia de tener el factor $C<D$; luego el producto de una cantidad positiva por una negativa, es negativo.

Supongamos, en tercer lugar, $A<B$ y $C>D$.

En el producto $(A-B)(C-D)=AC-BC-AD+BD$, saquemos A, factor comun del primer y tercer término, y B, del segundo y cuarto, lo que nos dará

$$(A-B)(C-D)=A(C-D)-(C-D)B.$$

El minuendo $A(C-D)$ es menor que el sustraendo $(C-D)B$; porque teniendo el factor comun $(C-D)$, el factor A del primero es menor que el factor B del segundo; luego el producto es negativo, conforme debia ser, segun la regla.

Sea por último $A<B$ y $C<D$.

Tenemos que los productos A (C—D) y (C—D) B son negativos, segun los casos anteriores; luego poniendo los signos de manifiesto, se tendrá $-A(C-D)-[-(C-D)B]=-A(C-D)+(C-D)B$. El valor numérico de A (C—D), es menor que el de (C—D) B; luego el signo del resultado será el del mayor, es decir positivo; por consiguiente el producto de dos cantidades negativas es positivo.

Con lo cual queda justificada la regla de los signos en todos los casos.

Observaciones respecto á la multiplicacion y casos particulares.

65. En la multiplicacion algebráica debemos observar: que

1.° El producto de dos ó más monómios es un monómio.

2.° El producto de un polinómio por un monómio, es otro polinómio de tantos términos como tiene el multiplicando; si éste es homogéneo, homogéneo será tambien el producto, y de un grado igual á la suma de los grados de uno de los términos del multiplicando y de otro del multiplicador.

3.° El producto de dos polinómios es otro polinómio, cuyo número de términos puede variar entre los límites 2 y $m \times n$, siendo m el número de términos del multiplicando y n el de los términos del multiplicador.

En efecto, si en el producto no hay reduccion ni destruccion, el número de sus términos será igual al número de términos del multiplicando repetido tantas veces como términos tiene el multiplicador, puesto que se compone de la suma de los productos parciales que resultan de multiplicar todo el multiplicando por cada término del multiplicador; y como cada uno de estos productos tiene tantos términos como el multiplicando, el producto se compondrá de un número de términos igual al producto de los del multiplicando por los del multiplicador.

Si hay reduccion, el número de términos será menor, y podrá llegar á ser 2, de cuyo número no puede bajar.

En efecto, en el producto de dos polinómios hay por lo ménos dos términos que no se pueden reducir ni destruir con ninguno de los otros, y son aquellos que provienen de la multiplicacion de los dos términos del multiplicando y multiplicador que tienen una letra con un exponente mayor ó menor que en todos los demás; y si hubiese más de un término con esta letra, que supondremos ser la ordenatriz, con un exponente mayor ó menor que en todos los demás, sacando esta letra con su exponente factor comun de los términos que vienen afectados de ella en ambos polinómios, el producto de estas dos partes no podrá reducirse ni destruirse con ninguna otra: porque el producto de estos dos términos ó de estas dos partes, contendrá á la letra citada con un exponente igual á la suma de los exponentes de los factores; y como estos son los mayores ó los menores, su suma será la mayor ó la menor, y por consiguiente teniendo la letra en cuestion un exponente mayor ó menor que en los demás términos ó partes, es claro que no se podrán reducir ni destruir con ningun otro; luego, por lo ménos, ha de haber en el producto estos dos términos ó estas dos partes.

66. De aquí se deduce que, si dos polinómios están ordenados con relacion á una letra, el producto vendrá tambien ordenado con relacion á la misma letra, y el primer término ó la primera parte de dicho producto será, sin reduccion alguna, igual al producto de los dos primeros términos del multiplicando y multiplicador; y el último igual al producto de los dos últimos ó últimas partes de ambos factores.

Si los factores de un producto son homogéneos, el producto tambien lo será, y su grado será la suma de los grados del multiplicando y multiplicador.

67. En la multiplicacion algebráica ocurre, con mucha frecuencia, tener que multiplicar la suma de dos cantidades por su diferencia, y formar el cuadrado de la suma ó de la diferencia de dos cantidades; por lo que conviene tener presente: que

El cuadrado de una suma es igual á la suma de los cuadrados de los sumandos, más el doble producto de éstos.

O lo que es lo mismo,

$$(a+b)^2=(a+b)\ (a+b)=a^2+2ab+b^2.$$

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual á la suma de los cuadrados de estas cantidades, ménos el doble producto de las mismas.

O bien, $(a-b)^2=(a-b)\ (a-b)=a^2-2ab+b^2$.

El producto de una suma de dos cantidades por su diferencia es igual á la diferencia de los cuadrados de estas dos cantidades.

Así, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Si multiplicamos $x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$ por el binómio $x-a$, hallaremos,

$$(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)(x-a)=x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2$$
$$+a^4x-ax^4-a^2x^3-a^3x^2-a^4x-a^5=x^5-a^5;$$

y en general,

$$(x^m+ax^{m-1}+a^2x^{m-2}+a^3x^{m-3}+\ldots+a^{m-1}x+a)(x-a)=$$
$$\left.\begin{matrix} x^{m+1}+ax^m+a^2x^{m-1}+\ldots+a^mx \\ -ax^m-a^2x^{m-1}-\ldots-a^mx-a^{m+1}\end{matrix}\right\}=x^{m+1}-a^{m+1}.$$

68. Estas mismas fórmulas sirven para descomponer estos resultados en factores; así,

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b),$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b),$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

y $x^{m+1}-a^{m+1}=(x^m+ax^{m+1}+a^2x^{m-2}\ldots+a^{m-1}x+a^m)(x-a)$.

69. Estos casos particulares que hemos considerado y que podemos llamar elementales, sirven para abreviar los cálculos en muchas ocasiones.

Sea, por ejemplo, multiplicar $a^2+2ab+b^2$, por $a^2-2ab+b^2$; como el primer factor es el cuadrado de $a+b$ y el segundo el de $a-b$, tendremos,

$$(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)^2(a-b)^2=$$
$$[(a+b)(a-b)]^2=(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4.$$

Del mismo modo se tendrá,

$$(a+b+c)(a+b-c)=[(a+b)+c][(a+b)-c]=$$
$$(a+b)^2-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2.$$

Si efectuamos, como caso particular, el producto de un polinómio por sí mismo, hallaremos,

$$(a+b+c+d+\ldots)(a+b+c+d+\ldots)=a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots$$
$$+2(ab+ac+ad\ldots+bc\ldots);$$

es decir, que el cuadrado de un polinómio es igual á la suma de los cuadrados de todos sus términos, más el doble producto de sus productos binarios, ó sean tomados de dos en dos.

LECCION VII.

División de un monómio por otro monómio.—Division de un polinómio por un monómio.

Division de un monómio por otro monómio.

70. La division en Algebra, lo mismo que en Aritmética, *es el análisis de la multiplicacion, y tiene por objeto, dado el producto de dos factores y uno de éstos, hallar el otro.*

En la division de un monómio por otro, hay que atender á signos, coeficientes, letras y exponentes.

71. *El cociente llevará el mismo signo que el divisor ó signo contrario, segun que el dividendo lleve el signo + ó —.*

En efecto, sabemos que cuando los dos factores llevan un mismo signo, el producto es positivo ó lleva el signo +; y si los dos factores llevan signos contrarios, el signo del producto es negativo; luego recíprocamente, cuando el producto lleve el signo +, los dos factores llevarán un mismo signo, y cuando lleve el signo —, los dos factores tendrán signos contrarios; y como el dividendo se considera como un producto cuyos factores son el divisor y cociente, queda justificada la regla relativa á los signos, la cual se suele enunciar abreviadamente diciendo,

+ dividido por +, da +; + dividido por —, da —;
— dividido por +, da —; y — dividido por —, da +;

de donde se deduce que teniendo el mismo signo el dividendo y divisor, el cociente lleva el signo +; y lleva el signo —, cuando el dividendo y divisor tienen signos contrarios.

Además, el signo del cociente no varía cambiando los signos al dividendo y divisor.

72. *El coeficiente del dividendo partido por el coeficiente del divisor, nos da el coeficiente del cociente.*

Sean los monómios qne se han de dividir mA y nB; si representamos por pC el cociente de la division del primero por el segundo, se tendrá $m\mathrm{A} = n\mathrm{B} \times p\mathrm{C} = np\mathrm{BC}$, y como el coeficiente del producto es igual al producto de los coeficientes de los factores, tendremos $m = np$, de donde $p = \frac{m}{n}$; luego el coeficiente del cociente de dos monómios es igual al cociente de los coeficientes del dividendo y divisor.

En cuanto á las letras, consideraremos dos casos; segun que sean comunes al dividendo y divisor ó que no lo sean.

Si las letras son comunes á los dos términos de la division, *se escribirán en el cociente con un exponente igual á la diferencia de los exponentes del dividendo y divisor*.

Sean dos monómios ma^pA y na^q B, que suponemos tienen la letra comun a elevada á las potencias cuyos exponentes respectivos son p y q; el monómio cociente, porque monómio tiene que ser (65 1.°), para que multiplicado por el divisor dé el dividendo, ha de contener á la letra a con un exponente tal que sumado con q, ha de dar el exponente p del dividendo; de modo que si llamamos d á este exponente, se tendrá por cociente un monómio de la forma ca^d C, y por lo tanto se deberá tener $ma^p \mathrm{A} = na^q \mathrm{B} \times ca^d \mathrm{C} = nca^{q+d}\mathrm{BC}$, de donde se deduce $p = q + d$, y $d = p - q$; luego las letras comunes al dividendo y divisor aparecen en el cociente con un exponente igual á la diferencia de exponentes, con lo cual queda justificada la regla.

73. De la igualdad $\frac{\mathrm{A}^m}{\mathrm{A}^n} = \mathrm{A}^{m-n}$ se deducen las expresiones A^{-d} y A^0; es decir, las cantidades con exponente *negativo* y con exponente *cero*.

De las primeras ya nos hemos ocupado (37), y hemos visto que vienen á reducirse á expresiones de la forma $\frac{1}{\mathrm{A}^d}$, puesto que, segun la definicion de potencia, ha de ser igual la expresion A^{-d} á lo que resulta de tomar la cantidad A por divisor tantas veces como el exponente contenga á la unidad negativa; luego A^{-d} se convierte en $\frac{1}{\mathrm{A}^d}$.

Esto está enteramente conforme con lo que de la division se deduce; en efecto, si la diferencia $m - n$ es negativa é igual á $-d$ se tendrá

$$\frac{\mathrm{A}^m}{\mathrm{A}^n} = \mathrm{A}^{m-n} = \mathrm{A}^{-d}.$$

Ahora bien, sabemos que un cociente no varía aunque dividendo y divisor se dividan por un mismo número; luego dividiendo por A^m los dos términos de la division anterior, se tendrá $\frac{A^m}{A^n} = \frac{1}{\frac{A^n}{A^m}}$,

pero $\frac{A^n}{A^m} = A^{n-m} = A^d$; luego, $\frac{A^m}{A^n} = \frac{1}{A^d} = A^{-d}$: donde se ve, que *toda cantidad con exponente negativo es igual á la unidad partida por la misma cantidad con exponente positivo.*

*74. En cuanto á la expresion A^0, podriamos considerarla, segun la definicion de potencia, como el límite de la expresion $A^{\frac{1}{n}}$ á medida que n crece indefinidamente; en efecto, creciendo n, la fraccion $\frac{1}{n}$ va disminuyendo, y si n llega á ser infinitamente grande, $\frac{1}{n}$ será infinitamente pequeña; luego el límite de $\frac{1}{n}$, cuando n es infinito, será *cero*; y por consiguiente, la expresion $A^{\frac{1}{n}}$ tiende hácia el límite A^0 á medida que n tiende hácia infinito.

Mas la expresion $A^{\frac{1}{n}}$ tiende tambien hácia el límite 1 á medida que n tiende hácia infinito, para lo cual basta probar que la diferencia entre la unidad y $A^{\frac{1}{n}}$ puede ser menor que una cantidad dada δ, por muy pequeña que sea; en efecto, de la desigualdad demostrada en Aritmética $(1 - \delta)^n < A$ se deduce, por una série de trasformaciones muy sencillas, $\delta > 1 - A^{\frac{1}{n}}$; luego pudiendo ser la diferencia que hay entre 1 y $A^{\frac{1}{n}}$ menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea, se sigue que el límite de $A^{\frac{1}{n}}$, cuando n tiende hácia el infinito, es la unidad.

Ahora bien, en Aritmética se ha demostrado que una cantidad variable no puede tender hácia dos límites sin que éstos sean iguales; luego el primer límite hallado A^0 será igual al segundo, que es la unidad; por consiguiente $A^0 = 1$.

75. Del mismo modo hallariamos por medio de la division que A^0 es

igual á la unidad: en efecto, si en la igualdad $\frac{A^m}{A^n}=A^{m-n}$ hacemos $m=n$, se tendrá $\frac{A^m}{A^m}=A^0$; pero el cociente de dividir una cantidad por sí misma es siempre la unidad; luego $\frac{A^m}{A^m}=1$; de donde $A^0=1$.

Una vez demostrado que el cociente de dos potencias de una misma cantidad es otra potencia cuyo exponente es la diferencia de exponentes, que A^0 es igual 1, y que $A^{-d}=\frac{1}{A^d}$, podremos dar la regla relativa á las letras y exponentes, que es, *las letras entran en el cociente con un exponente igual á la diferencia de exponentes del dividendo y divisor, considerando la letra que falte en uno de los términos con el exponente cero, lo cual no altera, por ser igual á la unidad toda cantidad con exponente cero.*

Sean los dos monómios mA^pB^q y $m'A^rC^s$, cuyo cociente será

$$\frac{mA^pB^q}{m'A^rC^s}=\frac{mA^pB^qC^0}{m'A^rB^0C^s},$$

el cual se puede descomponer en factores, así

$$\frac{mA^pB^q}{m'A^rC^s}=\frac{mA^pB^qC^0}{m'A^rB^0C^s}=\frac{m}{m'}\times\frac{A^p}{A^r}\times\frac{B^q}{B^0}\times\frac{C^0}{C^s}$$

y reemplazando estos factores por sus iguales $\frac{m}{m'}=c$, $\frac{A^p}{A^r}=A^{p-r}$, $\frac{B^q}{B^0}=B^q$ y $\frac{C^0}{C^s}=C^{-s}$, tendremos, poniendo en vez de C^{-s} su igual $\frac{1}{C^s}$,

$$\frac{m\,A^pB^q}{m'\,A^rC^s}=cA^{p-r}B^qC^{-s}=\frac{cA^{q-r}B^q}{C^s}.$$

La expresion A^{p-r} podrá ser igual á A^d, A^0, ó $A^{-d}=\frac{1}{A^d}$ segun que sea $p>=$ ó $<q$, quedando en el primer caso en el numerador de la fraccion cociente, desapareciendo en el segundo, por ser igual á la unidad, y en el tercero quedando en el denominador con un exponente igual á la diferencia.

76. De todo lo dicho anteriormente podremos concluir de un modo general, que *para dividir un monómio por otro, se divide el coeficiente del dividendo por el coeficiente del divisor, y lo que resulte será el coeficiente del cociente; á continuacion se escribirán las letras con un*

exponente igual á la diferencia de exponentes del dividendo y divisor, considerando con el exponente cero á la letra que falte en uno de los términos y que se halle en el otro; pasando al denominador las que resulten con exponente negativo, y no escribiendo las que aparezcan con el exponente cero. El signo será positivo si dividendo y divisor llevan un mismo signo, y negativo si llevan signos contrarios. Así se tendrá,

$$\frac{12a^2b^3c^2}{4ab^2c^2}=3ab,\quad \frac{-12a^2bc^3}{-4abc^2}=3ac,\quad \frac{\pm 12a^2b^4c^3}{\mp 3a^2bc^2}=-4b^3c,$$

y $$\frac{9a^2b^3c}{6ab^4d^2}=\frac{3ac}{2bd^2},\quad \frac{-3a^2b^3c^4d^3}{6a^2bc^6f^2}=-\frac{b^2d^3}{2c^2f^2}.$$

77. De donde concluiremos que la division de un monómio por otro será exacta, es decir, dará por cociente un monómio entero, siempre que se verifique: 1.° *que el coeficiente del dividendo sea divisible por el del divisor;* 2.° *que no haya letra en el divisor que no esté en el dividendo;* 3.° *que ningun exponente de las letras del divisor sea mayor que su correspondiente del dividendo.*

Cuando falte alguna de estas tres condiciones, la division será inexacta.

Division de un polinómio por un monómio.

78. *Para dividir un polinómio por un monómio, se divide cada uno de los términos del dividendo por el divisor, y la suma algebráica de estos cocientes será el cociente pedido.*

En efecto, el cociente de una suma es igual á la suma de los cocientes de los sumandos; luego

$$\frac{a+b-c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}.$$

Sea, por ejemplo, dividir $18a^4b^5c^3+30a^3b^3c^5+6a^3b^5c^2-18a^4b^6c^2+24a^3b^4c^2-30a^3b^5c^3$, por el monómio $6a^2b^3c^2$.

Efectuando las divisiones de cada término del dividendo por el divisor, hallaremos el cociente $3a^2b^2c+5ab^2c^3+ab^2-3a^2b^3+4a^2b-5ab^2c$.

Del mismo modo tendremos,

$$\frac{-6a^4b^2c^2+10a^4b^3c^2-8a^3b^4c^2-4a^3b^2c^2+6a^4b^4c^2+12a^3b^2c^2}{-2a^2bc^2}=$$
$$3a^2b-5a^2b^2+4ab^3+2ab-3a^2b^3-6a^3b.$$

Donde vemos que la division de un polinómio por un monómio será exacta ó dará por cociente un polinómio entero, cuando todos los términos del dividendo sean divisibles por el monómio divisor.

LECCION VIII.

Division de un polinómio por otro.

Division de un polinómio por otro.

79. *Para dividir un polinómio por otro se empieza por ordenarles con relacion á una letra cualquiera; despues se divide la primera parte del dividendo por la primera del divisor, y hallaremos la primera parte del cociente, la cual se multiplicará por todo el divisor, y el producto se restará del dividendo; la primera parte del resto la dividiremos por la primera del divisor, y nos dará la segunda parte del cociente, que se multiplicará por todo el divisor, y el producto se restará del resto anterior; y así se continuará hásta llegar á un resto cero, ó á una cuya primera parte dividida por la primera del divisor de un término en el cociente que contenga á la letra ordenatriz con un exponente menor que la diferencia de los exponentes de esta letra en los últimos términos respectivos del dividendo y divisor. En el primer caso la division será exacta; en el segundo no lo será.*

Para demostrar esta regla, recordaremos que, segun la definicion de dividir, el dividendo debe ser el producto del divisor por el cociente; y como en el producto de dos polinómios hay, por lo ménos, dos términos que no sufren reduccion alguna, que son aquellos que están afectados de una letra cualquiera con un exponente mayor ó menor que en todos los demás, y que se sabe que estos términos provienen de la multiplicacion de aquellos del multiplicando y multiplicador que vienen afectados de la misma letra con un exponente tambien mayor ó menor que en todos los demás, se sigue que, si al dividendo y divisor los ordenamos con relacion á una letra, la primera parte del dividendo será, sin reduccion alguna, el producto de la primera parte del divisor por la primera del cociente; luego si ordenamos el dividendo y divisor con relacion á una letra, y dividimos la primera parte del primero por la primera del segundo, hallaremos la primera parte del cociente.

Hallada esta primera parte del cociente y recordando que el producto de dos polinómios se forma de la suma de los productos parciales que resultan de multiplicar todo el multiplicando por cada uno de los términos ó partes del multiplicador, uno de los sumandos de que el dividendo se compondrá será el producto de todo el divisor por esta primera parte hallada del cociente; de modo que, si efectuamos este producto y lo restamos del dividendo, habremos quitado uno de los sumandos de que se compone, y el resto nos representará la suma de los productos de todo el divisor por las partes restantes del cociente; pero este resto se halla tambien ordenado; luego, lo mismo que en el caso anterior, si dividimos su primera parte por la primera del divisor, hallaremos la segunda del cociente, que multiplicada por el divisor y restada del resto anterior, nos dará un nuevo resto, que expresará la suma de los productos del divisor por la tercera, cuarta, etc., parte del cociente, y así iremos hallando cada una de las diferentes partes de que éste se compone.

Si llegamos á un resto cero, la division será exacta y el polinómio hallado será el cociente que multiplicado por el divisor nos reproducirá el dividendo, en cuyo caso el último término del cociente multiplicado por el último del divisor, ha de dar el último del dividendo; de donde se deduce que la letra ordenatriz tendrá en este término un exponente igual á la diferencia de los exponentes de los últimos términos del dividendo y divisor.

Si, por el contrario, hemos llegado á un resto cuya primera parte dividida por la primera del divisor, nos da una en el cociente en la cual la letra ordenatriz tenga un exponente menor que la diferencia de los exponentes de dicha letra en los últimos términos del dividendo y divisor, entónces la division no puede ser exacta en términos enteros; pues si lo fuera, el último término contendria á la letra ordenatriz con un exponente igual á la diferencia de los exponentes de los últimos términos del dividendo y divisor, como ya hemos visto; y como por hipótesis es menor que dicha diferencia, el término que resulte, al multiplicarle por el último del divisor, tendrá me nor exponente que el último del dividendo, y ya no podrá reducirse ni destruirse con ninguno de los términos de éste.

Sea, por ejemplo, dividir el polinómio $6x^7+3ax^6-34a^2x^5+24a^3x^4+25a^4x^3-59a^5x^2+39a^6x-12a^7$, por $3x^4-3ax^3-5a^2x^2+6a^3x-3a^4$.

Como ya están ordenados, dispondremos la operacion del modo siguiente:

$$\begin{array}{l|l}
6x^7+3ax^6-34a^2x^5+24a^3x^4+25a^4x^3-59a^5x^2+39a^6x-12a^7 & 3x^4-3ax^3-5a^2x^2+6a^3x-3a^4 \\ \cline{2-2}
\quad +6ax^6+10a^2x^5-12a^3x^4+\ 6a^4x^3 & 2x^3+3ax^2-5a^2x+4a^3 \\ \cline{1-1}
\qquad 9ax^6-24a^2x^5+12a^3x^4+31a^4x^3 & \\
\qquad\quad +\ 9a^2x^5+15a^3x^4-18a^4x^3+\ 9a^5x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -15a^2x^5+27a^3x^4+13a^4x^3-50a^5x^2 & \\
\qquad\qquad -15a^3x^4-25a^4x^3+30a^5x^2-15a^6x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 12a^3x^4-12a^4x^3-20a^5x^2+24a^6x & \\
\qquad\qquad\quad +12a^4x^3+20a^5x^2-24a^6x+12a^7 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Dividiendo el primer término $6x^7$ por el primero del divisor $3x^4$, hallamos el primer término del cociente $2x^3$, que multiplicado por el divisor, y restado el producto del dividendo, nos ha dado el resto que hay debajo de la primera raya. Dividido su primer término $9ax^6$ por el primero del divisor, da el segundo término $3ax^2$ del cociente, y así hemos seguido hallando los demás términos hasta el último, que multiplicado por el divisor y restado el producto del resto anterior, ha dado cero, y por consiguiente division exacta.

80. Por el ejemplo anterior vemos que una vez hallado un término del cociente, al multiplicarle por el divisor, no debemos efectuar la multiplicacion del primer término; pues su producto sabemos que será igual al primer término del dividendo parcial que se divide, el cual se destruirá al efectuar la resta: por lo que no se ha escrito en ninguna de las divisiones parciales efectuadas. En cuanto á la resta de los productos parciales que se van formando, sólo diremos que no hay más que escribir los términos del producto con signos contrarios debajo de los correspondientes del dividendo que se considera, y en seguida hacer la reduccion y destruccion.

Sea, por segundo ejemplo, dividir $9ax^5+30a^2x^4+31a^3x^3+28a^4x^2+12a^5x+2a^6$, por $3ax^3+5a^2x^2+4a^3x+6a^4$.

Dispuesta la operacion como en el ejemplo anterior, se tendrá:

$$
\begin{array}{l|l}
9ax^5+30a^2x^4+31a^3x^3+28a^4x^2+12a^5x+2a^6 & 3ax^3+5a^2x^2+4a^3x+6a^4 \\
\hline
-15a^2x^4-12a^3x^3-18a^4x^2 & 3x^2+5ax-2a^2 \\
\cline{1-1}
15a^2x^4+19a^3x^3+10a^4x^2 & \\
\quad -25a^3x^3-20a^4x^2-30a^5x & \\
\cline{1-1}
\quad -6a^3x^3-10a^4x^2-18a^5x & \\
\qquad +10a^4x^2+8a^5x+12a^6 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad -10a^5x+14a^6 &
\end{array}
$$

Donde vemos que la division es inexacta, pues da el cociente entero $3x^2+5ax-2a^2$, y el resto $-10a^5x+14a^6$.

81. Cuando en las divisiones de polinómios enteros se quiere obtener el cociente exacto, es *necesario agregar al cociente entero hallado, el cociente indicado del resto por el divisor*. Así, en el ejemplo anterior, el cociente verdadero será

$$3x^2+5ax-2a^2+\frac{-10a^5x+14a^6}{3ax^3+5a^2x^2+4a^3x+6a^4}.$$

De este modo el valor numérico del cociente es igual al cociente de los valores numéricos del dividendo y divisor.

Sea, por tercer ejemplo, dividir el polinómio $2a^4x^5+2a^4x^4+5a^4x^3+2a^4x^2+3a^4x+2a^4-4a^3b-6a^3bx+4a^3x^2+2a^3x^3+2a^3x^4+2a^3bx^5-2a^2b^2x^5-2a^3bx^4+3a^3bx^3-5a^3bx^2+5a^2b^2x+a^2b^2+2ab^3-3ab^3x-2a^2bx^2-5a^2bx^3-a^2bx^4-2ab^3x^5-2ab^2x^4-a^2b^2x^3+7a^2b^2x^2+b^4x-b^4-2ab^2x^2+4ab^2x^3+2ab^3x^4+b^3x^4-5ab^3x^3+ab^3x^2-2b^4x^4+b^3x^3+b^3x^2+2b^4x^3-3b^4x^2$, por $2a^2x^3+2ax^2+a^2x+a^2-2ab-abx-bx^2+2abx^3+2b^2x^2+b^2$.

Despues de ordenados los polinómios, dispondremos la operacion del modo siguiente:

$$
\begin{array}{r|l|l|l|l|l|}
2a^4 & x^5 + 2a^4 & x^4 + 5a^4 & x^3 + 2a^4 & x^2 + 3a^4 & x + 2a^4 \\
+2a^3b & \quad +2a^3 & \quad +2a^3 & \quad +4a^3 & \quad -6a^3b & \quad -4a^3b \\
-2a^2b^2 & \quad -2a^3b & \quad +3a^3b & \quad -5a^3b & \quad +5a^2b^2 & \quad +a^2b^2 \\
-2ab^3 & \quad -a^2b & \quad -5a^2b & \quad -2a^2b & \quad -3ab^3 & \quad +2ab^3 \\
 & \quad -2ab^2 & \quad -a^2b^2 & \quad +7a^2b^2 & \quad +b^4 & \quad -b^4 \\
 & \quad +2ab^3 & \quad +4ab^2 & \quad -2ab^2 & & \\
 & \quad +b^3 & \quad -5ab^3 & \quad +ab^3 & & \\
 & \quad -2b^4 & \quad -b^3 & \quad +b^3 & & \\
 & & \quad +2b^4 & \quad -3b^4 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l|l|l}
2a^2 & x^3 + 2a & x^2 + a^2 & x + a^2 \\
+2ab & \quad -b & \quad -ab & \quad -2ab \\
 & \quad +2b^2 & & \quad +b^2 \\
\hline
a^2 & x^2 + a^2 & x + 2a^2 & \\
-b^2 & \quad -2ab & \quad -b^2 & \\
 & \quad +b^2 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
-2a^3 & x^4 - a^4 & x^3 - a^4 & x^2 \\
+a^2b & \quad +a^3b & \quad +2a^3b & \\
-2a^2b^2 & \quad +a^2b^2 & \quad -a^2b^2 & \\
+2ab^2 & \quad -ab^3 & \quad +a^2b^2 & \\
-b^3 & & \quad -2ab^3 & \\
+2b^4 & & \quad +b^4 & \\
\hline
+2a^4 & x^4 + 4a^4 & x^3 + a^4 & x^2 \\
-2a^3b & \quad +2a^3 & \quad +4a^3 & \\
+2ab^3 & \quad +4a^3b & \quad -3a^3b & \\
-2a^2b^2 & \quad -5a^2b & \quad -2a^2b & \\
 & \quad +4ab^2 & \quad +7a^2b^2 & \\
 & \quad -6ab^3 & \quad -2ab^2 & \\
 & \quad -b^3 & \quad -ab^3 & \\
 & \quad +2b^4 & \quad +b^3 & \\
 & & \quad --2b^4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
-2a^3 & x^3 - a^4 & x^2 - a^4 & x \\
+a^2b & \quad +a^3b & \quad +2a^3b & \\
-2a^2b^2 & \quad +2a^3b & \quad -a^2b^2 & \\
+4a^2b & \quad -2a^2b^2 & \quad +2a^3b & \\
-2ab^2 & \quad -a^2b^2 & \quad -4a^2b^2 & \\
+4ab^3 & \quad +ab^3 & \quad +2ab^3 & \\
-2ab^2 & & \quad --a^2b^2 & \\
+b^3 & & \quad +2ab^3 & \\
-2b^4 & & \quad -b^4 & \\
\hline
+4a^4 & x^3 + 4a^3 & x^2 + 2a^4 & x \\
+4a^3b & \quad -2a^2b & \quad -2a^3b & \\
-2a^2b^2 & \quad +4a^2b^2 & \quad -a^2b^2 & \\
-2ab^3 & \quad -2ab^2 & \quad +ab^3 & \\
 & \quad +b^3 & & \\
 & \quad -2b^4 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
-4a^3 & x^2 - 2a^4 & x - 2a^4 \\
+2a^2b & \quad +2a^3b & \quad +4a^3b \\
-4a^2b^2 & \quad +a^2b^2 & \quad -2a^2b^2 \\
+2ab^2 & \quad -ab^2 & \quad +a^2b^2 \\
-b^3 & & \quad -2ab^3 \\
+2b^4 & & \quad +b^4 \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

La division se ha practicado en este ejemplo lo mismo que en los anteriores; porque la regla que hemos dado es general para cualesquiera que sean los polinómios. Lo único que en este caso, lo mismo que en todos los de la misma especie, hay que observar, es que los cálculos son algo más largos y que las divisiones parciales que se ejecutan de la primera parte de cada dividendo parcial, por la primera del divisor, dan por lo regular orígen á divisiones de otros polinómios mucho más sencillos que los propuestos, y á los que se les aplica absolutamente las mismas reglas.

82. De todo lo que antecede podremos deducir que la division de polinómios dará por cociente un polinómio entero cuando, ordenados el dividendo y divisor con relacion á una letra, la primera

parte del dividendo lo mismo que las primeras partes de cada uno de los restos que se obtienen segun el procedimiento, sean exactamente divisibles por la primera parte del divisor, y que el último resto sea cero; si falta alguna de estas condiciones, la division no puede ser exacta en polinómios enteros.

Respecto á la letra con relacion á la cual se han de ordenar, es indiferente, aunque en general se elige la que se halla repetida en mayor número de términos. Sólo hay un caso en el que es preferible una á todas las demás, el cual estudiaremos en la leccion siguiente.

En la division, lo mismo que en las demás operaciones, se ordenan los polinómios, como ya hemos dicho en otra parte, con el objeto de que los cálculos sean más sencillos y estén sujetos á menor número de errores, de modo que podria ejecutarse la division sin ordenar los polinómios; pero no se crea por esto que en ese caso sería indiferente principiar la operacion por un término cualquiera del dividendo, y dividirle por otro del divisor; es necesario tener presente que los términos en el producto no provienen en general del producto directo de dos términos del multiplicando y multiplicador, sino que son el resultado de la reduccion y destruccion de estos productos; por consiguiente para hallar el cociente hay que buscar aquellos términos del dividendo que no han sufrido reduccion alguna y dividirles por el término del divisor que se sabe ha entrado en su formacion, y de ese modo podremos hallar los términos del cociente; mas para evitar esta molestia de ir buscando los términos convenientes que se han de dividir, se ha principiado por ordenarles, en cuyo caso la operacion queda siempre reducida á dividir la primera parte del dividendo por la primera del divisor, con lo cual estamos seguros que siempre hallamos con exactitud una parte del cociente.

LECCION IX.

Casos particulares de la division.—Resto de la division de un polinómio ordenado con relacion á x, por el binómio $x-a$; ley del cociente y condicion para que la division sea exacta.—Condiciones para que $x^m \pm a^m$ sea divisible por $x \pm a$.

Casos particulares de la division.

83. Cuando en el dividendo hay una ó más letras que no se hallan en el divisor, conviene, en vez de ordenar con relacion á una letra comun á los dos términos de la division, ordenar el dividendo con relacion á una de las letras que no entran en el divisor; y la operacion queda reducida á varias divisiones parciales independientes las unas de las otras, hallándose así más fácilmente el resultado.

Sea $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$ un polinómio ordenado con relacion á x, y M otro polinómio independiente de dicha letra; si tratásemos de dividir el primero por el segundo, observariamos que el cociente seria de la misma forma que el dividendo; pues no conteniendo el divisor á la letra x, cada una de las partes del dividendo dividida por el divisor, daria otra en el cociente afectada de la misma potencia de la letra ordenatriz; cuya parte del cociente multiplicada por el divisor, destruiria únicamente á aquella parte del dividendo que estuviese afectada de la misma potencia; de modo que si llamamos $A'x^4+B'x^3+C'x^2+D'x+E'$ al cociente, se deberá tener

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=M\,(A'x^4+B'x^3+C'x^2+D'x+E')$$
$$=MA'x^4+MB'x^3+MC'x^2+MD'x+ME';$$

de donde se deducen las igualdades

$$A=MA',\quad B=MB',\quad C=MC',\quad D=MD',\quad E=ME',$$

las cuales demuestran que los coeficientes A', B', C', D', y E' son los cocientes de dividir por M los coeficientes A, B, C, D y E: por consiguiente; *para efectuar la division de un polinómio ordenado con relacion á una letra, por un polinómio independiente de dicha letra, se efectúan las divisiones de cada uno de los coeficientes de las dife-*

rentes potencias de la letra ordenatriz por el polinómio divisor, y á cada uno de estos cocientes parciales se le afecta de la potencia correspondiente, y se obtendrá de este modo el cociente pedido.

Sea, por ejemplo, dividir el polinómio $(a^4-a^2b^2+2ab^3+2b^4)x^3+(3a^4b-4a^3b^2+3a^2b^3+2ab^4+2b^5)x^2-(2a^4+a^3b^2-4a^3b-4a^2b^3+4a^2b^2+6ab^4-4b^5)x+(a^4-4a^3b+8a^2b^2-8ab^3+4b^4)$, ordenado con relacion á x, por el polinómio independiente de esta letra, $a^2-2ab+2b^2$.

Efectuando las divisiones de cada uno de los coeficientes de las diferentes potencias de x, por el divisor, y afectando á cada resultado la potencia que le corresponda, se hallará por cociente $(a^2+2ab+b^2)x^3+(3a^2b+2ab^2+b^3)x^2-(2a^2+ab^2-2b^3)x+(a^2-2ab+2b^2)$.

84. De donde se deduce que un polinómio ordenado con relacion á x será divisible por un polinómio independiente de esta letra cuando todos los coeficientes de las diferentes potencias de la letra ordenatriz sean divisibles por el divisor.

85. Si efectuamos la division de 1 por el binomio $1-x$, hallaremos por cociente $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\dots$ prolongado indefinidamente, y si damos á x el valor 2, el dividendo siendo 1, y el divisor $1-2=-1$, el cociente deberá ser $\frac{1}{-1}=-1$, lo cual no sucede á primera vista; pues dando á x el mismo valor 2, se convierte en $1+2+4+8+16+\dots$ número que cada vez va siendo mayor, y que por consiguiente jamás llegará á ser igual á -1; pero si recordamos (81) que el cociente exacto de una division se obtiene agregando al cociente entero hallado, el cociente indicado del resto por el divisor, veremos que cualquiera que sea el término en que paremos la division, se verifica la igualdad; así:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\frac{x^7}{1-x},$$

en la cual dando á x el valor 2, se hallará;

$$\frac{1}{1-2}=-1=1+2+4+8+16+32+64+\frac{128}{1-2}=$$
$$1+2+4+8+16+32+64-128=127-128=-1.$$

86. Sabiendo que el cuadrado de la suma ó diferencia de dos cantidades es igual á la suma de los cuadrados de estas cantidades, más ó ménos el doble producto de las mismas, se podrá obtener el

cociente de un trinómio de esta especie, por un binómio cuyos términos sean las raíces cuadradas de los dos términos cuadrados: así

$$\frac{4a^2b^2+9a^2c^4\pm 12a^2bc^2}{2ab\pm 3ac^2}=2ab\pm 3ac^2.$$

Del mismo modo, recordando que $x^2-a^2=(x+a)\,(x-a)$, dividiendo la diferencia de dos cuadrados por la diferencia de las raíces, hallaremos por cocientes la suma de las mismas: así

$$\frac{16a^2b^4c^6-9a^4b^2d^4}{4ab^2c^3-3a^2bd^2}=4ab^2c^3+3a^2bd^2.$$

87. Si efectuamos las divisiones de los binómios x^3-a^3, x^4-a^4, x^5-a^5 y en general x^m-a^m, por el binómio $x-a$, hallaremos los cocientes respectivos:

$$(x^3-a^3):(x-a)=x^2+ax+a^2,$$
$$(x^4-a^4):(x-a)=x^3+ax^2+a^2x+a^3,$$
$$(x^5-a^5):(x-a)=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(x^m-a^m):(x-a)=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\dots+a^{m-2}x+a^{m-1}.$$

Cuyos cocientes satisfacen á una ley fácil de retener, puesto que todos los términos son positivos y homogéneos con relacion á sus dos letras, todos tienen la unidad por coeficiente, los exponentes de la x son desde el $m-1$ hasta cero y los de la a desde cero hasta $m-1$, y además la division siempre es exacta.

Para demostrar esto último no hay más que observar que en la division

$$\begin{array}{l|l} x^m-a^m & x-a \\ \cline{2-2} -x^m+ax^{m-1} & x^{m-1} \\ \cline{1-1} a(x^{m-1}-a^{m-1}) & \end{array}$$

la primera resta es $a\,(x^{m-1}-a^{m-1})$; lo cual prueba que si la diferencia de las dos potencias x^{m-1} y a^{m-1} fuese divisible por $x-a$, lo seria tambien la diferencia de las dos potencias x^m y a^m cuyos exponentes tienen una unidad más; pero se sabe que x^2-a^2 es divisible por $x-a$; luego, segun lo dicho anteriormente, lo será tambien x^3-a^3; siéndolo x^3-a^3, lo será x^4-a^4, y en general tambien lo será x^m-a^m.

Podemos considerar como casos especiales del anterior las divisiones siguientes:

$$\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1,$$

$$\frac{x^4-1}{x-1}=x^3+x^2+x+1,$$

$$\frac{x^m-1}{x-1}=x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\ldots+x+1.$$

Resto de la division de un polinómio ordenado con relacion á x, por el binómio $x-a$; ley del cociente y condicion para que la division sea exacta.

88. *El resto de la division de un polinómio ordenado con relacion á* x, *por el binómio* x—a, *es igual al mismo polinómio en el cual se ha sustituido* a *por* x.

Sea $A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m$, un polinómio ordenado con relacion á x; supongamos que se ha efectuado la division de este polinómio por el binómio $x-a$, y hemos continuado la operacion hasta hallar un resto de un grado menor que el divisor con relacion á x, es decir, independiente de esta letra; llamenos R á este resto, representemos por Q el cociente entero de la division, y se tendrá la igualdad

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m=Q\,(x-a)+R,$$

la cual deberá verificarse para cualquier valor que se le dé á x, puesto que su primer miembro no es otra cosa que el resultado de las operaciones que están indicadas en el segundo.

Esto supuesto, si á x le damos el valor a, el segundo miembro se reducirá á R; porque siendo Q una cantidad finita y entera, al multiplicarla por el factor $a-a=o$, dará un producto igual á cero; de modo que se tendrá

$$A_0a^m+A_1a^{m-1}+A_2a^{m-2}+\ldots+A_m=R \qquad [1];$$

donde vemos que el resto R de la division es el mismo polinómio propuesto, en el cual se ha sustituido a en vez de x; segun queriamos demostrar.

Este principio se puede demostrar de este otro modo: sea el mismo polinómio $A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_{m-1}x+A_m$, en el cual poniendo a en vez de x, y llamando R al resultado, se tiene la igualdad [1].

Esto supuesto, el polinómio propuesto se podrá poner bajo la forma $A_0(x^m - a^m) + A_1(x^{m-1} - a^{m-1}) + A_2(x^{m-2} - a^{m-2}) + \ldots + A_{m-1}(x-a) + R$.

En este polinómio, que es el propuesto, todos los términos, á excepcion de R, son divisibles por $x-a$ (87); de modo que efectuando la division hallaremos por cociente la suma de los cocientes de dividir cado uno de los primeros términos por $x-a$, y por resto el término R; pero R es el polinómio dado en el que se ha puesto a en vez de x; luego el resto de la division es etc.

89. Pasemos á determinar la ley del cociente de esta division, para lo cual efectuemos la operacion y veamos qué ley siguen los términos del cociente, y si esta es general:

$$\begin{array}{r|r|r|l|l} A_0x^m + A_1 & x^{m-1} + A_2 & x^{m-2} + A_3 & x^{m-3} + \ldots & x-a \\ + A_0a & + A_0a^2 & + A_0a^3 & & \\ & + A_1a & + A_1a^2 & & \\ & & + A_2a & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} A_0x^{m-1} + A_0a & x^{m-2} + A_0a^2 & x^{m-3} + \ldots \\ + A_1 & + A_1a & \\ & + A_2 & \end{array}$$

Desde luégo se observa en el cociente hallado que *la letra* x *aparece en el primer término con un exponente igual al que tiene dicha letra en el primer término del dividendo disminuido en una unidad, y que este exponente va disminuyendo de unidad en unidad hasta reducirse á cero.*

En cuanto á los coeficientes de las diferentes potencias de la letra ordenatriz, tambien se forman segun una ley constante: en efecto, *uno cualquiera de estos coeficientes se forma multiplicando por* a *el coeficiente del término anterior, y agregando al producto el coeficiente del término que ocupa el mismo lugar en el dividendo*; así el tercer coeficiente $A_0a^2 + A_1a + A_2$, se obtiene multiplicando por a el coeficiente anterior $A_0a + A_1$, y agregando al producto el coeficiente A_2 del tercer término del dividendo.

Para demostrar que esta ley es general, usaremos un método muy frecuente en Algebra y que ya hemos aplicado anteriormente, consiste en admitir que la ley es cierta para un término cualquiera, y hacer ver que tambien lo es para el siguiente y por lo tanto para todos.

Supongamos que la ley se verifica para un término cualquiera $(A_0a^{m-n} + A_1a^{m-n-1} + A_2a^{m-n-2} + \ldots + A_{m-n})\,x^{m-n-1}$, y vamos á demostrar que tambien se verifica para el siguiente: en efecto, este término multiplicado por x destruirá al término del dividendo que le ha producido y que corresponde á la potencia $m-n$ de x; mas como despues hay que multiplicarle por $-a$, y el producto restarle del resto anterior, se tendrá para primera parte del resto siguiente $(A_0 a^{m-n+1} + A_1 a^{m-n} + A_2 a^{m-n-1} + \ldots A_{m-n} a + A_{m-n-1}) x^{m-n-1}$, cuyo coeficiente está formado de la suma que resulta de agregar al coeficiente A_{m-n-1} del dividendo, el producto de a por el coeficiente del último término hallado; y como este coeficiente es el del término que sigue en el cociente, es claro que este segundo término se forma segun la ley, puesto que la letra x viene con un exponente igual al anterior disminuido en una unidad.

Demostrado que si la ley se verifica para un término cualquiera se verifica tambien para el siguiente, tendremos que como por la division hallamos que el segundo y tercero se forman segun la ley, segun lo que acabamos de demostrar, el cuarto tambien se formará; formándose el cuarto, tambien se formará el quinto, y todos los demás.

Sea, por ejemplo, dividir el polinómio $x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 5x + 6$ por el binómio $x-2$.

Segun la ley anterior se hallará

$$\frac{x^5+4x^4-7x^3+8x^2-5x+6}{x-2} = x^4+6x^3+5x^2+18x+31+\frac{68}{x-2}.$$

Del mismo modo hallaremos

$$\frac{x^6-16x^4+16x^3+19x^2-14x+6}{x-3} = x^5+3x^4-7x^3-5x^2+4x-2.$$

En este segundo ejemplo se ve que cuando en el dividendo falta algun término, hay necesidad de suponer que existe con el coeficiente cero; así al formar el segundo término del cociente, hemos dicho, 1 por 3 es 3, y cero, 3; que afectado de la potencia correspondiente de x, nos ha dado el término $3x^4$.

90. Tambien se puede observar que el último resto se obtiene multiplicando el coeficiente del último término del cociente por la segunda parte del binómio, y agregando á este producto el último término del dividendo; y como el coeficiente del último término del cociente se forma de la misma manera, lo mismo que todos los demás, vendremos á deducir, si procedemos en un órden inverso, que para hallar el último resto se multiplica el primer coeficiente del dividendo por a, al producto se le agrega el segundo coeficiente, este producto se vuelve á multiplicar por a, se le agrega el tercer coeficiente, y así se continúa hasta haber agregado el último, en

cuyo caso se obtiene la resta final; pero esta resta hemos dicho que es el mismo polinómio dividendo en el cual se ha sustituido x por el número a; de donde se deduce que: *Para sustituir en un polinómio ordenado con relacion á* x, *un número por la letra ordenatriz, se multiplica el primer coeficiente por el número que se ha de sustituir, al producto se le agrega el segundo coeficiente, la suma algebráica se multiplica otra vez por el número, y así se continúa hasta haber agregado el último término; el número hallado así, será lo que resulte de hacer la sustitucion.*

Sea, por ejemplo, sustituir x por el número 2 en el polinómio $3x^4-5x^3+6x-8$.

Aplicando la regla, se hallará $3\times2=6; 6-5=1; 1\times2=2$, $2+0=2$; $2\times2=4$, $4+6=10$; $10\times2=20$, $20-8=12$: luégo 12 es el resultado pedido.

91. En la division de un polinómio ordenado con relacion á x, por el binómio $x-a$, se obtiene por resto el mismo polinómio en el cual se ha sustituido a por x; pero si la division ha de ser exacta, el último resto tiene que ser cero; luego para que un polinómio ordenado con relacion á x sea divisible por el binómio $x-a$, es menester que sustituyendo en dicho polinómio x por a, se reduzca á *cero*; y recíprocamente, si en un polinómio ordenado con relacion á x sustituimos x por a, y dicho polinómio se reduce á cero, el polinómio será divisible por $x-a$.

Condiciones para que $x^m \mp a^m$ sea divisible por $x \mp a$.

92. El binómio $x^m - a^m$ es, como hemos visto anteriormente, divisible por $x-a$: este caso y los siguientes no son sino casos particulares del general que ya hemos considerado; por consiguiente si queremos hallar el cociente y resto de la division, aplicaremos las reglas sabidas y hallaremos:

1.° *Que* x^m-a^m *es siempre divisible por* $x-a$; porque poniendo en el dividendo, a en vez de x, se tiene $a^m-a^m=0$, condicion necesaria para que la division sea exacta (91).

2.° *Que el binómio* x^m+a^m *nunca es divisible por* $x-a$; porque poniendo a en vez de x, se halla $a^m+a^m=2a^m$, que no es *cero*.

3.° *Que* x^m-a^m *es divisible por* $x+a$ *cuando el exponente* m *es* *número par*, porque el bonómio $x+a$ se puede poner bajo la forma $x-(-a)$; de modo que es necesario para que la division sea exacta que poniendo $-a$ en vez de x, el resultado sea cero; pero $(-a)^m-a^m$ se reduce á $a^m-a^m=0$ si m es par, y á $-2a^m$ cuando es impar; luego solo será el binómio x^m-a^m divisible por $x+a$ cuando m sea par.

4.° *Que el binómio* x^m+a^m *es divisible por* $x+a$ *cuando* m *es un número impar.*

En efecto, si m es impar, por la sustitucion de $-a$ por x se obtiene el resultado $(-a)^m+a^m=-a^m+a^m=0$; luego dicho binómio x^m+a^m es divisible por $x+a$ en el caso de ser impar el exponente m. En el caso de ser m par, no será divisible.

LECCION X.

Cantidades primas; principios relativos á las mismas.

Cantidades primas; principios relativos á las mismas.

93. *Se dice que una cantidad algebráica es* MÚLTIPLE *de otra, ó que es* DIVISIBLE *por ésta, cuando el cociente de la primera por la segunda, es otra cantidad entera.*

Así, $6a^2b^3c^2$ es divisible por $3a^2bc$; porque el cociente de la primera por la segunda es $2b^2c$, cantidad entera.

Del mismo modo a^2-b^2 es una cantidad múltiple de $a+b$, y de $a-b$.

La cantidad que divide exactamente á otra se llama DIVISOR *de ésta.*

Así; en los ejemplos anteriores, las cantidades $3a^2bc$ y $2b^2c$ son divisores de $6a^2b^3c^2$, lo mismo que $a+b$ y $a-b$ lo son de a^2-b^2.

Cantidad PRIMA *es la que no se puede dividir mas que por sí misma y por la unidad.*

Las cantidades a, a^2-b, $2a+b-3c$ son cantidades primas.

Se dice que dos cantidades son primas entre sí cuando no tiene más divisor comun que la unidad.

Es necesario no confundir las cantidades primas con las cantidades primas entre sí; dos cantidades pueden no ser primas y sin embargo ser primas entre sí. Las cantidades x^2-a^2 y a^2-b^2 no son primas, pero son primas entre sí.

* 94. *Toda cantidad prima que no divide á otra cantidad es prima con ella.*

En efecto, el único divisor comun distinto de la unidad que podian tener ambas, era la cantidad prima, y ésta no lo es; luego son primas entre sí.

* 95. *Toda cantidad prima que divide al producto de varias cantidades enteras divide, por lo ménos, á una de ellas.*

Consideraremos dos casos: 1.° que sean sólo dos los factores; 2.° que sean más de dos.

Primer caso. Sea P una cantidad prima que divide al producto de las dos cantidades enteras A y B, y vamos á demostrar que P tiene que dividir, por lo ménos, á uno de los factores A ó B.

Cuando A, B y P son números enteros, ya hemos demostrado que el principio se verifica (*Arit.* 131); ahora lo probaremos para cualquiera que sea el número de letras que contengan estas cantidades.

Para ello, si nosotros probamos que siendo el principio verdadero cuando tienen estas cantidades n letras, lo es tambien cuando tienen $n+1$, el principio quedará demostrado; pues siendo cierto cuando son números, ó sea, cuando tienen *cero* letras, tambien lo será cuando tengan *una* siendo verdadero cuando tienen una letra, lo será tambien si tienen *dos*, y lo mismo si tuvieran *tres*, *cuatro*, etc. letras.

Esto supuesto, admitamos que el principio se verifica en el caso de que A, B y P contengan n letras, y vamos á demostrar que tambien lo es cuando tienen $n+1$.

Consideremos cada uno de los cuatro casos siguientes, que se pueden presentar.

1.° *Una de las cantidades* A *ó* B *tiene* n+1 *letras, la otra y* P *no tienen más que* n.

Supongamos que A sea un polinómio que contiene á la letra x que no se halla en B ni en P; ordenémosle con relacion á esta letra, y se tendrá $A=ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots$ siendo a, b, c,... cantidades enteras que sólo tienen n letras. Multiplicando A por B, se tiene $AB=Bax^m+Bbx^{m-1}+Bcx^{m-2}+\ldots$ Siendo AB divisible por P, su igual $Bax^m+Bbx^{m-1}+Bcx^{m-2}+\ldots$ tambien lo será, y por consiguiente los coeficientes Ba, Bb, Bc,... de las diferentes potencias de x, serán divisibles por P (84); pero dividiendo P á estos coeficientes tiene que dividir, segun la hipótesis, á uno de los factores; luego si no divide á B, tiene que dividir á las cantidades a, b, c...; y dividiendo á estas cantidades, que son los coeficientes de las diferentes potencias de x en el polinómio A, tiene que dividir evidentemente á dicho polinómio: luego P divide á A ó B.

2.° *Las dos cantidades* A *y* B *contienen* n+1 *letras, y* P *no tiene más que* n.

Supongamos que dividiendo P al producto AB, no divida á A ni á B. En este caso habria en estas cantidades términos que no serian divisibles por P y términos qué lo serian; de modo que representando por A' y B' las sumas de los términos que son divisibles respectivamente en A y en B, y por A'' y B'' la de los términos que no lo son, se tendrá,

$$A=A'+A'',$$
$$B=B'+B'',$$

de donde se deduce, $AB=A'B'+A''B'+A'B''+A''B''$.

Las tres primeras partes del segundo miembro son divisibles por P, puesto que siéndolo A' y B', lo serán sus múltiplos. La cuarta $A''B''$ no es divisible; pues para que lo fuese, era necesario que todos sus términos lo fueran tambien; pero si ordenamos A'' y B'' con relacion á x y representamos por ax^m y bx^n sus primeros términos, el primer término del producto será, sin reduccion alguna, abx^{m+n} cuyo término no es divisible por P; porque siendo P una cantidad prima que no divide á a ni á b, no puede dividir al producto ab; y no siendo el primer término del producto $A''B''$ divisible por P, este producto tampoco lo será.

Ahora bien, siendo las tres primeras partes del segundo miembro divisibles por P, y no siéndolo la cuarta, la suma de las cuatro tampoco lo será, y por consiguiente AB no es divisible por P, lo cual es contra el supuesto: luego si AB es divisible por P, el producto $A''B''$ tiene que ser cero, por consiguiente $A''=0$ ó $B''=0$, lo cual nos dice que A ó B es divisible por P, segun queríamos demostrar.

3.° *Que P y uno de los factores tengan* n+1 *letras, y el otro factor tenga* n.

Suponiendo que A tiene $n+1$ letras, que el cociente de dividir AB por P sea Q y que F, F′, F″, F‴... son cantidades primas cuyo producto es B, se tendrá $AB = AFF'F''F'''... = PQ$.

Siendo el primer miembro divisible por la cantidad prima F, el segundo miembro PQ tambien lo será; pero F tiene n letras, P tiene $n+1$, y Q tendrá n ó $n+1$, luego, segun uno de los casos anteriores, F tiene que dividir necesariamente á uno de los factores P ó Q; á P no puede dividirle por ser cantidad prima, luego dividirá á Q; de modo que llamando Q′ al cociente entero de dividir Q por F, se tendrá $AF'F''F'''... = PQ'$.

Del mismo modo veremos que F′ dividirá á Q′, y nos dará, llamando Q″ al cociente, $AF''F'''...=PQ''$; y continuando de la misma manera hasta haber dividido por el último factor, y representando el último cociente por Q_1, se tendrá $A = PQ_1$, cuya igualdad prueba que A es divisible por P, segun queriamos demostrar.

4.° *Que las tres cantidades* A, B *y* P *contengan* n+1 *letras.*

Supongamos que A no sea divisible por P, y que dividimos una de estas cantidades, la de mayor grado, por la otra: sea A la que se divide por P hasta llegar á un resto de menor grado que el divisor con relacion á la letra ordenatriz x, supongamos además que todos los términos del cociente y resto no son enteros, y que reducidos todos á un comun denominador M, dicho cociente y resto se representan por $\frac{Q}{M}$ y $\frac{R}{M}$ de modo que se tendrá $A = P \times \frac{Q}{M} + \frac{R}{M}$, y multiplicando por M, será $MA = PQ + R$.

Esta igualdad nos prueba que, si de antemano hubiéramos multiplicado el dividendo A por M, operacion que en nada altera la demostracion, el cociente y resto hubieran sido enteros; pues siendo M la cantidad conveniente por que se ha de multiplicar el dividendo para que el cociente sea entero, dicha cantidad ha de ser independiente de la letra ordenatriz x, y por consiguiente no contendrá más que n letras, y no siendo A divisible por P, AM tampoco lo será, y por lo tanto R no puede ser cero. En efecto, si R fuese cero, ó MA fuera divisible por P, segun el tercer caso, P tenia que dividir á A ó á M; pero A no es divisible por hipótesis, y á M no puede dividirle porque M no tiene más que n letras y P tiene $n+1$; luego R no puede ser cero.

Esto supuesto, multipliquemos la igualdad anterior por B, y tendremos $MAB=PBQ+RB$.

El primer miembro MAB es divisible por P, por ser un múltiplo de AB que lo es por hipótesis; el sumando PBQ es tambien evidentemente divisible, y siendo divisibles por P la suma y uno de los sumandos, el otro tambien tendrá que serlo; luego RB es divisible por P.

Probado que P tiene que dividir á RB, observaremos que si R fuese independiente de x, R tendria n letras, P y B tendrian $n+1$, y nos hallariamos en el tercer caso, y por consiguiente P dividiria á B; pero si R no es independiente de x, haremos con P, R y B lo mismo que se ha hecho con P, A y B, y tendremos, llamando M' la cantidad por que hay que multiplicar el dividendo P para que el cociente Q' y el resto R' sean cantidades enteras, $M'P=RQ'+R'$; R' no puede ser cero; porque para que lo fuese era necesario que $M'P$ fuese divisible por cada uno de los factores primos de R, y como estos factores dependen de x, no podrian dividir á M, y por consiguiente, segun el tercer caso, tendrian que dividir á P; lo cual es imposible por ser P una cantidad prima.

Multiplicando la igualdad anterior por B, se tiene

$$M'PB=RBQ'+R'B,$$

y por ser $M'PB$ divisible por P, y RBQ' siendo un múltiplo de RB, que tambien lo es, se deduce que P tiene que dividir á $R'B$.

Siendo $R'B$ divisible por P, podrá suceder que R' sea ó no independiente de x; si R' es independiente de x, segun el tercer caso, P dividirá á B y el principio quedaria demostrado; si no es independiente de x, dividiremos nuevamente P por R', y se tendrá, llamando M'' á la cantidad por que hay que multiplicar para que el cociente Q'' y el resto R'' sean enteros, $M''P=R'Q''+R''$; del mismo modo que anteriormente probariamos que R'' no puede ser cero, y que multiplicando esta igualdad por B resulta $M''PB=R'BQ''+R''B$, de donde se deduciria tambien que $R''B$ es divisible por P.

Continuando así dividiendo P por los restos que se van obteniendo y como ninguno puede dividirle, y además cada uno va siendo de un grado menor que el anterior por lo ménos en una unidad, llegaremos á un último resto R_1 independiente de la letra ordenatriz x.

Ahora bien, como todos estos restos multiplicados por B, segun vemos por la demostracion, son divisibles por P, el último tambien lo será; luego R_1B será divisible por P; pero R_1 es independiente de x; luego, segun el tercer caso, P dividirá á B, lo cual queriamos demostrar.

Estos son los únicos casos que se pueden considerar; porque en aquel en que P tuviese $n+1$ letras, y las cantidades A y B no tuviesen más que n no podria dividir P al producto AB. Luego siendo verdadero el principio para el caso de que alguna ó todas las cantidades tengan $n+1$ letras, en la hipótesis de serlo cuando sólo tienen n, el principio queda demostrado: porque como ya hemos dicho, siendo verdadero cuando A, B y P son números, lo será tambien cuando dependan de una letra; siendo cierto cuando dependan de una letra, lo será cuando dependan de dos, y lo mismo de tres, cuatro, y en general de n letras.

Segundo caso. Si el producto tiene más de dos factores A, B, C, D, por ejemplo, podremos descomponerle en dos, uno A y otro el producto BCD; de modo que dividiendo P al producto de A por BCD, tiene que dividir, segun el primer caso, á uno de los factores A ó BCD; si no divide á A, dividirá á BCD, y como BCD se puede á su vez, descomponer en el producto de B por CD, si P no divide á B, por la misma razon que ántes, dividirá á CD; y dividiendo á CD, tiene que dividir necesariamente á C ó á D; que es lo que se queria probar.

Consecuencias. 1.ª *Una cantidad entera, igual al producto de varias cantidades enteras, no puede tener más divisores primos que los que tengan sus factores.*

2.ª *Toda cantidad prima que divida á la potencia de una cantidad entera tiene que dividir á esta cantidad.* (*Arit.* 131, cons. 1.ª)

3.ª *Si dos cantidades enteras son primas entre sí, sus potencias tambien lo serán.* (*Arit.* 131, cons. 2.ª)

* 96. *Si una cantidad entera es prima con cada uno de los factores enteros de un producto, es prima tambien con el producto*, y recíprocamente, *toda cantidad entera prima con el producto de varios factores enteros es prima tambien con cada uno de estos factores* (*Arit.* 132.)

* 97. *Dos productos de factores primos no pueden ser iguales, como estos factores no sean respectivamente iguales tambien.*

Se demuestra como su equivalente en Aritmética (135.)

* 98. *Toda cantidad entera que divide al producto de otras dos cantidades enteras, y es prima con una de ellas, divide necesariamente á la otra.*

Sea AB el producto de las dos cantidades enteras A y B, divisible por la cantidad P prima con A, y vamos á demostrar que P tiene que dividir á B.

En efecto, si representamos por $F, F', F'', F'''...$ los factores primos de A, y por Q el cociente de dividir AB por P, se tendrá $BFF'F''F'''...=PQ$.

Siendo el primer miembro divisible por F, el segundo tambien lo será; y siendo F una cantidad prima que divide al producto PQ, tiene que dividir (95) á uno de los factores; pero siendo P una cantidad prima con A, no puede ser disivible por F; luego F tiene que dividir á Q; de modo que llamando Q' al cociente, se tendrá $BF'F''F'''...=PQ'$.

Del mismo modo probaremos que F' tiene que dividir á Q', y llamando Q'' al cociente, tendremos $BF''F'''...=PQ''$.

Continuando del mismo modo hasta haber dividido por el último factor, y llamando Q_1 al último cociente, llegaremos á la igualdad $B=PQ_1$, que prueba ser divisible B por P, segun queríamos demostrar.

* 99 *Si una cantidad entera es divisible por varias cantidades enteras primas entre sí dos á dos, es divisible tambien por sus productos binarios, ternarios, etc.* (*Arit.* 133.)

LECCION XI.

Máximo comun divisor de dos ó más cantidades algebráicas, principios en que se funda la investigacion del *m. c. d.* de varias cantidades.—Máximo comun divisor de monómios.—Máximo comun divisor de dos polinómios ordenados con relacion á una letra x, en los que los coeficientes de las diferentes potencias de esta letra sean primos entre sí.

Máximo comun divisor de dos ó más cantidades algebráicas, principios en que se funda la investigacion del *m. c. d.* de varias cantidades.

100. *Se llama* MÁXIMO COMUN DIVISOR *de dos ó más cantidades algebráicas el producto de las menores potencias de los factores primos comunes á todas estas cantidadas.*

La investigacion del *m. c. d.* de dos ó más cantidades se funda en la definicion y en los principios que á continuacion se demuestran.

101. *El* m. c. d. *de dos cantidades no se altera multiplicando ó partiendo una de ellas por una cantidad prima con la otra.*

Sean A y B dos cantidades, M su *m. c. d.*, el cual se compondrá, segun la definicion, del producto de las menores potencias de los factores primos comunes á las cantidades A y B.

Si multiplicamos ó partimos una de estas dos cantidades, A por ejemplo, por una cantidad P prima con B, el *m. c. d.* no habrá variado; pues los factores primos que hubiera comunes en A y B, esos mismos habrá en AP y B ó en $\frac{A}{P}$ y B; puesto que siendo P prima con B, al multiplicar ó partir A por esta cantidad, ni aumentan ni disminuyen los factores primos que hay comunes en A y B, ni aumentan ni disminuyen tampoco los exponentes de las potencias de estos factores; luego el *m. c. d.* no sufre alteracion.

102. *Si la division de dos polinómios no es exacta y da un cociente entero y un resto, el* m. c. d. *de estos polinómios es el mismo que el del resto y el de menor grado.*

Sean A y B dos polinómios ordenados con relacion á x, Q el cociente entero de dividir el de mayor grado por el de menor, R el resto de la division; si suponemos que A sea el dividendo, se tendrá

$$A = BQ + R. \quad [1]$$

Sea D el *m. c. d.* de A y B: por dividir D á B, dividirá á BQ, por ser múltiplo de B, á consecuencia de ser Q una cantidad entera: de donde dividiendo D á BQ y á A, dividirá tambien á R. Esto supuesto, si llamamos A' B' y R' los cocientes enteros de dividir A, B y R por D, y dividimos la igualdad [1] por D, se tiene $A' = B'Q + R'$.

Las cantidades B y R, que, como hemos visto, son divisibles por D, no pueden tener otro factor diferente, y por consiguiente otro *m. c. d.* diferente de D: en efecto, si tuvieran además del factor comun D, otro factor a distinto, este factor se hallaria en B' y R', por consiguiente dividiria á $B'Q$ y R'; y dividiendo á estas dos cantidades, dividiria tambien á A' (*Arit.* 78); luego A' y B', lo mismo que sus múltiplos A y B, tendrian el factor comun a distinto de los que hay en D; y D, que es el *m. c. d.* de A y B, no contendria todos los factores comunes á A y B, lo cual es contra la definicion; luego B y R no pueden tener más factores comunes que los que hay en D. Tampoco tienen ménos factores, porque D divide á estas cantidades; luego el *m. c. d.* de A y B es el mismo qne el de B y R, segun queriamos demostrar.

Observacion. Es necesario, para que este principio sea cierto, que el cociente de la division de un polinómio por el otro sea entero; porque si no lo fuera y contuviese términos fraccionarios, reduciéndolos á un comun denominador, la igualdad [1] se convertiria, representando por $\frac{Q'}{M}$ el cociente, en $A=B\frac{Q'}{M}+R$, de la cual no se podria deducir que todo divisor de A y B tenia que dividir á $B\frac{Q'}{M}$, y por consiguiente al resto R; porque puede hallarse ese divisor en M, y destruirse en el producto de B por $\frac{Q'}{M}$; y no siendo divisible $B\frac{Q'}{M}$ por cualquier divisor de B, no se puede concluir que R lo sea: luego es condicion precisa que el cociente de la division sea entero.

103. *El* m. c. d. *de varias cantidades algebráicas es el mismo que el del* m. c. d. *de dos y todas las demás.*

Sean A, B, C, D... varias cantidades, cuyo *m. c. d.* llamaremos M; sea M′ el *m. c. d.* de las dos cantidades A y B; sea por último M_1 el *m. c. d.* de M′ y C, D... y vamos á demostrar que M es igual á M_1.

En efecto, siendo M el *m. c. d.* de A, B, C, D... se compondrá de todos los factores comunes á estas cantidades; pero los factores comunes á A y B se hallan contenidos en M′; luego M es un factor comun á M′, C, D... y por consiguiente, ó es el *m. c. d.* M_1, ó está contenido en él. Si $M=M_1$, el principio está demostrado; si no, se tendrá que $\frac{M_1}{M}$ será igual á una cantidad entera.

Del mismo modo, siendo M_1 el *m. c. d.* de M′, C, D... se compondrá de todos los factores comunes á estas cantidades; pero todo factor de M′ lo es de A y B; luego M_1 es un factor comun á las cantidades A, B, C, D... y por consiguiente, ó es igual al *m. c. d.* M de estas cantidades, ó está contenido en él. Si $M_1=M$, el principio está demostrado; si no, se tendrá que $\frac{M}{M_1}$ será igual á una cantidad entera; luego si $\frac{M_1}{M}$ es una cantidad entera, y $\frac{M}{M_1}$ tambien lo es, es necesario que M sea igual á M_1 ; que es lo que se queria demostrar.

CONSECUENCIA. *Para hallar el* m. c. d. *de varias cantidades se hallará primero el de dos de ellas, luégo el de éste y la tercera, despues el del último hallado y la cuarta, y así sucesivamente: el último* m. c. d. *hallado será el de todas ellas.*

* 104. *Si se dividen varias cantidades enteras por su* m. c. d., *los cocientes no tienen más factor comun que la unidad.*

Sean A, B, C, D... varias cantidades enteras; M su *m. c. d.*; representemos por A', B', C', D'... los cocientes de dividir estas cantidades por M, y vamos á demostrar que A', B', C', D'... no tienen más divisor comun que la unidad.

En efecto, de las igualdades

$$A = MA', B = MB', C = MC', D = MD' ... [2]$$

se deduce que, si los cocientes A', B', C', D'... tuvieran un factor comun a distinto de la unidad, el *m. c. d.* de las cantidades A, B, C, D... no sería M, sino Ma, puesto que se ha de componer de todos los factores comunes á las cantidades A, B, C, D...; y como por hipótesis dicho *m. c. d.* es M, resulta que a no puede ser factor comun á todos los cocientes de dividir A, B, C, D... por su *m. c. d.* M.

Recíprocamente, *si los cocientes* A', B', C', D'... *de dividir varias cantidades enteras* A, B, C, D... *por un divisor comun* M, *no tienen más divisor comun que la unidad, dicho divisor* M *será el* m. c. d. *de las cantidades* A, B, C, D...

En efecto, de las igualdades [2] se deduce que si M no fuese el *m. c. d.*, sería porque no contendria todos los factores comunes á las cantidades A, B, C, D...; pero los factores comunes á estas cantidades que no se hallen en M deben estar evidentemente en A', B', C', D'...; y como en estos no hay más factor comun que la unidad, se sigue que dichas cantidades no pueden tener más factores comunes que los que hay en M; luego M es el *m. c. d.*, segun queríamos probar.

CONSECUENCIA. De este principio se deduce que *si se dividen varias cantidades enteras por un divisor comun á todas ellas, el* m. c. d. *vendrá dividido por el mismo divisor.*

En efecto, dividiendo las igualdades [2] por un divisor a comun á A, B, C, D... se tendrá, llamando A'', B'', C'', D''... á los cocientes,

$$A''=\frac{MA'}{a},\ B''=\frac{MB'}{a},\ C''=\frac{MC'}{a},\ D''=\frac{MD'}{a}...$$

y como a no puede dividir á todas las cantidades A', B', C', D'... tendrá que dividir á M, y tendremos, llamando M' al cociente,

$$A''=M'A',\ B''=M'B',\ C''=M'C',\ D''=M'D';$$

y como A', B', C', D' son primos entre sí, el producto de todos los factores comunes, ó sea el *m. c, d.* de A'', B'', C'', D''... es M'; pero M' es el cociente de dividir M por a; luego el *m. c. d.* viene dividido por a, segun queriamos demostrar.

Máximo comun divisor de monómios.

105. *El* m. c. d. *de dos ó más monómios se determina hallando el* m. c. d. *de los coeficientes, y afectando despues al resultado las letras comunes á todos con un exponente igual al menor que tengan estas letras*. El monómio que resulte será el *m. c. d.* pedido. (*Arit.* 140.)

EJEMPLOS. I. *Hallar el* m. c. d. *de* $12a^3b^9c^4$ *y* $18a^5b^2d^3$.

El *m. c. d.* de los coeficientes es 6; las letras comunes son a y b, y los menores exponentes de estas letras son 3 y 2; luego el *m. c. d.* pedido será $6a^3b^2$.

II. *Hallar el* m. c. d. *de* $16a^2b^3c^6$, $24ab^3c^6d$, $40a^4b^6c^4f$, *y* $48\,a^2b^4c^6d^2$.

El *m. c. d.* de los coeficientes es 8, y las letras comunes afectadas de los menores exponentes son ab^3c^4; luego el *m. c. d.* pedido será $8ab^3c^4$.

Máximo comun divisor de dos polinómios ordenados con relacion á una de sus letras x, en los que los coeficientes de las diferentes potencias de esta letra son primos entre sí.

106. Sean A y B dos polinomios que, ordenados con relacion á una de sus letras x, tienen sus coeficientes primos entre sí; supongamos que A no sea de menor grado que B, y que efectuamos la division de A por B. Si B divide á A, es claro que B será el *m. c. d.* de los dos polinómios A y B; porque los cocientes de dividir A y B por

B tienen que ser primos, por ser el segundo la unidad; luego B será el *m. c. d.* de A y B. Si B no divide á A, dará un resto R de un grado menor que el divisor con relacion á la letra ordenatriz; y si suponemos que ningun término del cociente es fraccionario, el *m. c. d.* de los polinómios A y B será (102) el mismo que el de los polinómios B y R.

Si todos los términos del cociente no son enteros, no podremos concluir que el *m. c. d.* de A y B es el mismo que el de B y R (102 OBS.); por consiguiente, para reducirle á este caso, es menester que dicho cociente sea entero. Ahora bien, si en el cociente hay términos fraccionarios, será porque no todos los primeros términos de los dividendos parciales que se obtienen en la division de A por B sean divisibles por el primer término del divisor B; por consiguiente, los factores que haya en este primer coeficiente, que serán independientes de la letra ordenatriz x y que no se hallaren en el primer término del dividendo parcial que se divide, deben hallarse como denominador en el término correspondiente del cociente; luego si despues de hallado todo el cociente, reducimos sus términos á un comun denominador, en éste no se hallarán sino factores contenidos en el primer coeficiente de B; y como por hipótesis, los coeficientes de los polinómios A y B son primos entre sí, este denominador comun, que llamaremos M, será una cantidad prima con B; de modo que si hubiéramos multiplicado A por M, los términos del cociente hubieran sido enteros, y el *m. c. d.* de AM y B seria el mismo que el de B y R; pero el *m. c. d.* de AM y B es el mismo que el de A y B (101); luego si multiplicamos el polinómio A por una cantidad conveniente para que los términos del cociente sean enteros en la division de los dos polinómios dados A y B, y continuamos la operacion hasta hallar un resto R de menor grado que B, el *m. c. d.* de A y B, será el mismo que el de B y R; y la cuestion queda reducida á hallar el *m. c. d.* de dos polinómios de menor grado que los propuestos.

Esta cantidad por la que hay que multiplicar el dividendo para que los términos del cociente sean enteros, será el coeficiente del primer término del divisor, si este coeficiente y el primero del dividendo no tienen factores comunes; y si el dividendo es de un grado superior en una unidad, conviene multiplicarlo por el cuadrado de dicho coeficiente, para no tener que repetir esta operacion en la division parcial que sigue.

Si los dos primeros coeficientes respectivos del dividendo y divisor tuviesen factores comunes, se multiplicaria el dividendo por el producto de los que se hallaran en el primer término del divisor y no se hallasen en el primero del dividendo.

Esto supuesto, para que los dos polinómios B y R estén en las mismas condiciones que A y B, es menester que los coeficientes de las diferentes potencias de x en el polinómio R, no tengan ningun factor comun; luego lo primero que se verá es si dichos coeficientes tienen algun factor comun, y si lo tienen, dividiremos por él todos los coeficientes, lo que equivale á dividir R por dicho factor comun; el *m. c. d.* no se habrá alterado, porque este factor comun no puede dividir á todos los coeficientes de B, por ser primos entre sí; y por consiguiente, siendo primo con B, se podrá dividir R por él, sin que el *m. c. d.* se altere (101), y llamar al cociente R_1.

Teniendo ya R_1 sus coeficientes primos entre sí, diremos de B y R_1 lo mismo que se ha dicho de A y B; es decir, que si R_1 divide á B, el *m. c. d.* de B y R_1 será R_1, y por consiguiente el de A y B; si R_1 no divide á B y dá términos fraccionarios en el cociente, se multiplicará B por una cantidad conveniente M', para que el cociente de la division de B por R_1 sea entero, y continuaremos hasta hallar una resta R' de menor grado que el divisor R_1, y como anteriormente veremos que el *m. c. d.* de B y R_1 es el mismo que el de R_1 y R'; y por lo tanto el de A y B será tambien el de R_1 y R' con lo cual queda reducida la investigacion del *m. c. d.* de los dos polinónios propuestos á la de otros dos más sencillos.

Para hallar el *m. c. d.* de R_1 y R' principiaremos por quitar de R' el factor comun que puedan tener sus coeficientes; con esto el *m. c. d.* no se habrá alterado, y nos hallaremos en el caso de tener dos polinómios R_1 y R_1', cuyos coeficientes son primos entre sí, y á los cuales podremos aplicar los mismos razonamientos que anteriormente. Así, si R_1' divide á R_1, el *m. c. d.* de A y B será R_1'; si no le divide, dividiremos R_1 por R_1', con las modificaciones indicadas, hasta hallar un resto R'' de un grado menor que el divisor, y así continuaremos hasta hallar un resto que divida al anterior, el cual será el *m. c. d.* pedido, ó hasta encontrar uno que sea independiente de la letra ordenatriz, en cuyo caso los polinómios serán primos entre sí; pues ningun factor independiente de x puede dividir á los dos polinómios sin dividir á sus coeficientes, y como estos son primos entre sí por hipótesis, dichos polinómios no pueden tener factores comunes.

De todo lo dicho anteriormente se deduce que:

107. *Para hallar el* m. c. d. *de dos polinómios ordenados con relacion á una de sus letras, siendo primos los coeficientes de las diferentes potencias de la letra ordenatriz, se divide el de mayor grado por el de menor, multiplicando, si fuera necesario, el dividendo por una cantidad conveniente para que los términos del cociente sean enteros; si la division es exacta, el divisor será el* m. c. d. *pedido; si la division no es exacta y llegamos á obtener un resto de un grado menor que el que tiene el divisor, se dividirá el resto por el factor comun que tengan sus coeficientes; y dividiendo el divisor por este resto privado de dicho factor comun, teniendo cuidado como ántes de multiplicar, si fuese necesario, el dividendo por una cantidad conveniente, para que el cociente sea entero, llegaremos á obtener un cociente exacto, ó un resto de un grado menor que el anterior; en el primer caso, el último divisor será el* m. c. d. *pedido; si hallamos un resto, continuaremos dividiendo cada resto por el siguiente, haciendo las modificaciones indicadas de multiplicar los dividendos por cantidades convenientes para que los cocientes sean enteros, y dividir los restos ántes de pasar á ser divisores, por el factor comun que puedan tener sus coeficientes, hasta llegar á un resto cero; en cuyo caso el último divisor será el* m. c. d. *de los dos polinómios, ó hasta obtener un resto independiente de la letra ordenatriz, que será señal de que los polinómios son primos entre sí.*

Ejemplos. I. Hallar el *m. c. d.* de los polinómios dependientes de la sola letra x, $A=x^5+4x^4+4x^3-x^2-18x+4$, y $B=x^4+6x^3+5x^2-14x-4$, cuyos coeficientes son primos entre sí.

Dividiendo el de mayor grado por el de menor, se hallará

$$\begin{array}{r|r|r|r|r||l}
x^5+4 & x^4+4 & x^3-1 & x^2-18 & x+4 & x^4+6x^3+5x^2-14x-4 \\
-6 & -5 & +14 & +4 & & \overline{\quad x-2 \quad} \\
\hline
-2x^4-1 & x^3+13 & x^2-14 & x+4 & & \\
+12 & +10 & -28 & -8 & & \\
\hline
\mathrm{R}= 11 & x^3+23 & x^2-42 & x-4 & &
\end{array}$$

el cociente $x-2$, y la resta $\mathrm{R}=11x^3+23x^2-42x-4$, que pasará á ser divisor, por tener sus coeficientes primos entre sí.

Pasemos á la segunda division, ó sea á la del divisor por el resto, y para evitar los términos fraccionarios, multipliquemos por 11 el nuevo dividendo lo mismo que la primer resta hallada, y tendremos

$$\begin{array}{r|r|r|r||l}
11x^4+66 & x^3+55 & x^2-154 & x-44 & 11x^3+23x^2-42x-4 \\
-23 & +42 & +\ 4 & & \overline{x+43} \\ \hline
\multicolumn{4}{r||}{43\,x^3+97\,x^2-150\,x-44} & \\
43.11x^3+1067 & x^2-1650 & x-484 & & \\
-\ 989 & +1806 & +172 & & \\ \hline
R'= & \multicolumn{3}{r||}{78\,x^2+\ 156\,x-312} &
\end{array}$$

Como en este resto R′ tienen los coeficientes el factor comun 78, dividiendo por él, se obtendrá para divisor de la operacion siguiente el resto simplificado $R_1'=x^2+2x-4$.

Efectuando la division del resto anterior por R_1', se tiene

$$\begin{array}{r|r|r||l}
11x^3+23 & x^2-42 & x-4 & x^2+2x-4 \\
-22 & +44 & & \overline{11x+1} \\ \hline
\multicolumn{3}{r||}{x^2+\ 2\,x-4} & \\
\multicolumn{3}{r||}{-x^2-\ 2\,x+4} & \\ \hline
\multicolumn{3}{c||}{0} &
\end{array}$$

Y como el cociente es exacto, se sigue que x^2+2x-4 es el *m. c. d.* de los dos polinómios propuestos.

II. Sea, por segundo ejemplo, hallar el *m. c. d.* de los dos polinómios $A=x^4+2ax^3+a^2x^2+2a^3x+a^2b+2ab^2x+4a^2bx^2+bx^2+2abx^3$, y $B=x^4+2ax^3+ax^2+2a^2x+ab+2b^2x+4abx^2+2bx^3+bx^2$, los cuales, ordenados con relacion á x, tienen sus coeficientes primos entre sí, y por tanto se les puede aplicar la regla dada.

Dividiendo A por B, se tendrá

$$\begin{array}{r|l|l|l||r|l|l|l}
x^4+2a & x^3+\ a^2 & x^2+2a^3 & x+a^2b & x^4+2a & x^3+\ a & x^2+2a^2 & x+ab \\
+2ab & \quad +4a^2b & \quad +2ab^2 & & +2b & \quad +4ab & \quad +2b^2 & \\
 & \quad +\ b & & & & \quad +\ b & & \\ \cline{5-8}
-2a & x^3-\ a & x^2-2a^2 & x-ab & 1 & & & \\
-2b & \quad -4ab & \quad -2b^2 & & & & & \\
 & \quad -\ b & & & & & & \\ \cline{1-4}
R=\ 2ab & x^3+\ a^2 & x^2+2a^3 & x+a^2b & & & & \\
-2b & \quad +4a^2b & \quad -2a^2 & \quad -ab & & & & \\
 & \quad -4ab & \quad +2ab^2 & & & & & \\
 & \quad -\ a & \quad -2b^2 & & & & &
\end{array}$$

el cociente 1, y el resto R, cuyos coeficientes tienen el factor comun $a-1$; de modo que dividiéndole por este factor, se hallará el divisor de la operacion siguiente

$$\begin{array}{r|l|l}
R_1=2bx^3+\ a & x^2+2a^2 & x+ab. \\
+4ab & \quad +2b^2 &
\end{array}$$

Dividiendo B por R_1, será, despues de multiplicar por $4b^2$, para que los términos del cociente sean enteros,

$$
\begin{array}{r|l|l|l||l|l|l}
4b^2x^4+8ab^2 & x^3+4ab^2 & x^2+8a^2b^2 & x+4ab^3 & 2bx^3+a & x^2+2a^2 & x+ab \\
+8b^3 & +16ab^3 & +8b^4 & & +4ab & +2b & \\
\cline{5-7}
 & +4b^3 & & & \multicolumn{3}{l}{2bx+4b^2-a} \\
-2ab & x^3-4a^2b & x^2-2abx^2 & & & & \\
-8ab^2 & -4b^3 & & & & & \\
\cline{1-4}
8b^3 & x^3+4ab^2 & x^2+8a^2b^2 & x+4ab^3 & & & \\
-2ab & +16ab^3 & -2ab^2 & & & & \\
 & -4a^2b & +8b^4 & & & & \\
 & -4ab^2 & x^2-8a^2b^2 & x-4ab^3 & & & \\
 & -16ab^3 & -8b^4 & +a^2b & & & \\
 & +4a^2b & +2a^3 & & & & \\
 & +a^2 & +2ab^2 & & & & \\
\cline{2-4}
R'= & \multicolumn{3}{l}{a^2x^2+2a^3x+a^2b} & & &
\end{array}
$$

El nuevo resto R' tiene el factor comun a^2; dividiéndole por él, y efectuando la division de R_1 por el resto $R_1'=x^2+2ax+b$, privado de este factor comun, se tiene

$$
\begin{array}{r|l|l||l}
2bx^3+a & x^2+2a^2 & x+ab & x^2+2ax+b \\
\cline{4-4}
+4ab & +2b^2 & & 2bx+a \\
-4ab & x^2-2b^2x & & \\
\cline{1-3}
\multicolumn{3}{c||}{ax^2+2a^2x+ab} & \\
\multicolumn{3}{c||}{-ax^2-2a^2x-ab} & \\
\cline{1-3}
\multicolumn{3}{c}{0} &
\end{array}
$$

Donde vemos que la division es exacta; y por consiguiente el *m. c. d.* de los polinómios A y B será $x^2+2ax+b$.

En el caso actual, la única dificultad que se presenta, cuando los polinómios tienen más de una letra, es la de quitar el factor comun de los coeficientes de los restos ántes de pasar á ser divisores; pero si se observa que estos coeficientes, de ser polinómios, son muy sencillos, podremos, aplicándoles el mismo método del *m. c. d.*, determinar el factor comun que puedan tener, aunque rara vez se apela en la práctica á este medio, pues se distingue en general á primera vista cuál es el factor comun que tienen.

LECCION XII.

Máximo comun divisor de dos polinómios en general.—Máximo comun divisor de dos polinómios dependientes de dos letras.

Máximo comun divisor de dos polinómios en general.

* 108. Sean en general dos polinómios A y B, cuyo *m. c. d.* queremos hallar. Representemos por A' el *m. c. d.* monómio de todos los términos de A, y por B' el de los términos de B; sean A_1 y B_1 los cocientes respectivos de dividir A y B por A' y B'; de modo que se tendrá $A=A'A_1$ y $B=B'B_1$.

Si ahora ordenamos A_1 y B_1 con relacion á una de sus letras comunes x, y suponemos hallado el *m. c. d.* polinómio de los coeficientes de las diferentes potencias de x, y representamos por A'' el de A_1 y por B'' el de B_1, se tendrá, llamando A''' y B''' los cocientes respectivos de dividir A_1 y B_1 por A'' y B'', $A_1 = A''\,A'''$ y $B_1 = B''\,B'''$; cuyos valores sustituidos en las igualdades anteriores, nos darán $A=A'\,A''\,A'''$ y $B=B'\,B''\,B'''$.

Si ahora suponemos hallados los máximos comunes divisores de A' y B', de A'' y B'', y de A''' y B''', y los llamamos D', D'' y D''', el máximo comun divisor de los dos polinómios A y B será igual al producto $D'\,D''\,D'''$ de los tres máximos comunes divisores hallados.

En efecto, todo divisor monómio comun á los dos polinómios tiene que estar contenido en A' y B', y por consiguiente en su máximo comun divisor D'; además no puede haber más factores monómios comunes que los que hay en D', puesto que D' es el producto de todos ellos; luego D' expresa el producto de todos los factores monómios comunes á los dos polinómios dados y debe formar parte del *m. c. d.* de dichos polinómios.

Del mismo modo se probará que D'' es el producto de todos los factores polinómios independientes de la letra ordenatriz comunes á los polinómios A y B, y que no puede haber factor comun de esta especie que no esté en D''; luego D'' debe formar parte del *m. c. d.* Lo mismo probaríamos que todos los factores comunes á los dos polinómios dependientes de todas las letras se hallan contenidos en D'''; luego en D' D'' D''' se hallarán todos los factores comunes á los dos polinómios A y B, ya sean estos factores monómios, ya polinómios independientes de la letra ordenatriz, ó ya dependan de esta letra; y por consiguiente dicho producto D' D'' D''' será el máximo comun divisor pedido.

La cuestion queda pues reducida á determinar, primero los factores A', B'; A'', B''; y A''', B'''; y despues los máximos comunes divisores D', D'' y D''', cuyo producto es el *m. c. d.* de los dos polinómios A y B.

En primer lugar, no hay dificultad en hallar el factor monómio comun á todos los términos de A, ó sea A', lo mismo que B'; por consiguiente dividiendo A y B por estos factores, obtendremos los cocientes A_1 y B_1, que ya no tendrán factores comunes monómios.

Si ahora ordenamos A_1 y B_1 con relacion á una de sus letras x, hemos de hallar el *m. c. d.* de todos los coeficientes de A_1 y B_1, operacion que en general no ofrece dificultad, por ser polinómios mucho más sencillos que A_1 y B_1, y además independientes de la letra x; de modo que principiaremos por hallar el *m. c. d.* de los dos coeficientes más sencillos; luégo el de éste y un tercer coeficiente; despues el del último hallado y el cuarto, y así sucesivamente, hasta hallar el de todos; para todo lo cual se ordenarán estos coeficientes con relacion á una nueva letra, y sus coeficientes tendrán ya dos letras ménos; de modo que al aplicarles este mismo procedimiento se obtendrán polinómios que cada vez tendrán una letra ménos, y llegaremos por último, si ántes no encontramos el *m. c. d.* buscado, á polinómios que solo contendrán una letra, en cuyo caso no habrá dificultad. Una vez halladas las cantidades A'' y B'' que expresan los máximos comunes divisores independientes de x en los polinómios respectivos A_1 y B_1, dividiremos por ellas dichos dos polinómios y hallaremos los cocientes A''' y B''', que serán polinómios cuyos coeficientes son primos entre sí.

Halladas estas cantidades A', A'' y A''', lo mismo que B', B'', B''', pasemos á determinar los máximos comunes divisores D', D'' y D''' de estas cantidades.

El máximo comun divisor D' no ofrece dificultad, puesto que siendo A' y B' monómios, se les aplicará la regla (105) correspondiente á los monómios.

El máximo comun divisor D''' se determinará segun se ha dicho ya (107); puesto que siendo primos sus coeficientes, se les podrá aplicar la regla citada.

En cuanto al *m. c. d.* D'', sólo diremos que los dos polinómios A'' y B'' tienen una letra ménos, de modo que si los ordenamos con relacion á una nueva letra, podemos aplicarles las mismas reglas que se han dicho respecto á los polinómios A_1 y B_1; es decir, que hallaremos el *m. c. d.* de sus coeficientes, los cuales tendrán ya dos letras ménos, y se hallarán estos polinómios descompuestos en el producto de dos factores; así,

$$A''=A_1''A_1''' \text{ y } B''=B_1''\ B_1''',$$

de los cuales A_1''' y B_1''' tendrán sus coeficientes primos entre sí, y por consiguiente podremos hallar su *m. c. d.* por la regla (107) ya sabida. El de los nuevos polinómios A_1'' y B_1'' teniendo ya dos letras ménos, será fácil hallarlo por la misma regla; y sinó, se hará lo mismo que con A'' y B''; continuando así hasta llegar á polinómios de una sola letra, en cuyo caso no hay dificultad. Una vez hallados estos máximos comunes divisores, su producto será el *m. c. d.* D'' que tratábamos de hallar, y conocidas las cantidades D', D'' y D''', tendremos conocido el *m. c. d.* de los dos polinómios A y B.

Por todo lo que precede se ve que la cuestion de hallar el *m. c. d.* de dos polinómios A y B queda reducida á determinar el de otros polinómios que tengan una letra ménos, como son los coeficientes de las diferentes potencias de la letra ordenatriz; de modo que si de antemano admitiéramos que se sabe determinar el *m. c. d.* de dos polinómios de n letras, se sabria, por el procedimiento anterior, determinar el de otros que tuviesen una letra más; pero el *m. c. d.* de polinómios dependientes de una sola letra se sabe determinar sin dificultad por la regla (107); luego podremos determinar el de dos polinómios dependientes de dos letras. Determinado el *m. c. d.* de polinómios de dos letras, se determinaria el de tres, y así sucesivamente. De todo lo dicho se deduce que:

* 109. *Para hallar el* m. c. d. *de dos polinómios cualesquiera* A *y* B *se principia por determinar el* m. c. d. *monómio* A' *de todos los términos de* A (105); *luégo el de los de* B, *que llamaremos* B'; *despues el* m. c. d. *de* A' *y* B', *que llamaremos* D', *y que se guardará para formar parte del* m. c. d. *pedido.*

Dividiremos A *y* B *por* A' *y* B', *y los cocientes respectivos* A_1 *y*

B_1 *los ordenaremos con relacion á una letra comun á los dos; hallaremos los máximos comunes divisores de los coeficientes de las diferentes potencias de la letra ordenatriz en* A_1 *y* B_1, *los cuales llamaremos* A'' *y* B''; *determinaremos el* m. c. d. *de* A'' *y* B'' *y se tendrá otro de los factores* D'' *del* m. c. d. *pedido.*

Por último, dividiremos A_1 *y* B_1 *por las cantidades respectivas* A'' *y* B'', *y hallando el* m. c. d. *de los cocientes, tendremos el tercer factor* D''' *del* m. c. d. *que buscamos, el cual será igual al producto de las tres cantidades* D', D'', D'''.

Ejemplo. Hallar el *m. c. d.* de los dos polinómios $A=6a^4b^2x^5+6a^5b^2x^4-6a^4b^3x^3-6a^2b^4x^5-6a^3b^4x^4+6a^2b^5x^3+6a^4b^2x^4+6a^5b^2x^3-12a^4b^3x^2-6a^2b^4x^4-6a^3b^4x^3+12a^2b^5x^2+6a^5b^3x^2-12a^4b^4x-6a^3b^5x^2+12a^2b^6x$, y $B=4a^4b^4x^5-4a^3b^5x^5+4a^5b^4x^4-4a^4b^5x^4-16a^4b^5x^3+8a^3b^6x^3-4a^2b^4x^5+4ab^5x^5-4a^3b^4x^4+4a^2b^5x^4+16a^2b^5x^3-8ab^6x^3+4a^4b^4x^4-4a^3b^5x^4+8a^5b^4x^3-8a^4b^5x^2+8a^3b^6x^2-4a^2b^4x^4+4ab^5x^4-8a^3b^4x^3+8a^2b^5x^2-8ab^6x^2+4a^6b^4x^2-4a^5b^5x^2-8a^5b^5x+8a^4b^6x-4a^4b^4x^2+4a^3b^5x^2+8a^3b^5x-8a^2b^6x$.

En el primer polinómio se ve desde luégo el factor $6a^2b^2x$ comun á todos los términos, de modo que se tendrá, dividiendo por $A'=6a^2b^2x$,

$$A_1=a^2x^4+a^3x^3-a^2bx^2-b^2x^4-ab^2x^3+b^3x^2+a^2x^3+a^3x^2-2a^2bx-b^2x^3-ab^2x^2+2b^3x+a^3bx-2a^2b^2-ab^3x+2b^4.$$

En el polinómio B se halla el factor $4ab^4x$ comun á todos sus términos, y por consiguiente se tendrá, como anteriormente, dividiéndole por $B'=4ab^4x$

$$B_1=a^2x^4-a^2bx^4+a^4x^3-a^3bx^3-4a^3bx^2+2a^2b^2x^2-ax^4+bx^4-a^2x^3+abx^3+4abx^2-2b^2x^2+a^3x^3-a^2bx^3+2a^4x^2-2a^3bx+2a^2b^2x-ax^3+bx^3-2a^2x^2+2abx-2b^2x+a^5x-a^4bx-2a^4b+2a^3b^2-a^3x+a^2bx+2a^2b-2ab^2.$$

Ordenando A_1 y B_1 con relacion á x, se tiene

$$A_1=(a^2-b^2)x^4+(a^3+a^2-ab^2-b^2)x^3+(a^3-a^2b-ab^2+b^3)x^2+(a^3b-2a^2b-ab^3+2b^3)x-2a^2b^2+2b^4.$$

$$B_1=(a^3-a^2b-a+b)x+(a^4-a^3b-a^2+ab+a^3-a^2b-a+b)x^3$$

$-(4a^3b - 2a^2b^2 - 4ab + 2b^2 - 2a^4 + 2a^2)x^2 - (2a^3b - 2a^2b^2 - 2ab + 2b^2 - a^5 + a^4b + a^3 - a^2b)x - 2a^4b + 2a^3b^2 + 2a^2b - 2ab^2.$

En los coeficientes de A_1 se halla el factor comun $a^2 - b^2$, y en los de B_1 está el factor $a^3 - a^2b - a + b$; de modo que dividiendo por ellos, se tendrá

$$A'' = a^2 - b^2 \text{ y } B'' = a^3 - a^2b - a + b,$$

$$A''' = x^4 + (a+1)x^3 + (a-b)x^2 + (ab - 2b)x - 2b^2,$$

$$B''' = x^4 + (a+1)x^3 + (2a - 2b)x^2 + (a^2 - 2b)x - 2ab.$$

Hallados los factores A' y B', A'' y B'', A''' y B''', en que respectivamente se descomponen los polinómios A y B, pasemos á determinar los máximos comunes divisores D', D'' y D''' de estos factores, y se tendrá que el *m. c. d.* de A' y B', ó sea D', será igual á $2ab^2x$; el de A'' y B'' será $D'' = a - b$; porque $A'' = a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$, y $B'' = a^3 - a^2b - a + b = (a^2 - 1)(a - b)$.

El *m. c. d.* de A''' y B''' se hallará por la regla (107) de las divisiones sucesivas: así,

Primera division.

$$\begin{array}{r|l|l|l||l|l|l|l}
x^4 + a & x^3 + \ a & x^2 + ab & x - 2b^2 & x^4 + a & x^3 + 2a & x^2 + a^2 & x - 2ab \\
+1 & \ - \ b & -2b & & +1 & -2b & -2b & \\
\cline{5-8}
-a & x^3 - 2a & x^2 - a^2 & x + 2ab & 1 & & & \\
-1 & +2b & +2b & & & & & \\
\cline{1-4}
- \ a & x^2 - a^2 & x + 2ab & & & & & \\
+ \ b & +ab & -2b^2 & & & & &
\end{array}$$

El resto de esta division tiene en sus coeficientes el factor comun $b - a$; de modo que dividiendo por él, se tendrá por nuevo divisor $x^2 + ax - 2b$. Continuando la regla, tendremos

Segunda division.

$$\begin{array}{r|l|l|l||l}
x^4 + a & x^3 + 2a & x^2 + \ a^2 & x - 2ab & x^2 + ax - 2b \\
+1 & \ -2b & -2b & & \\
\cline{5-5}
\multicolumn{4}{l||}{-ax^3 + 2bx^2} & x^2 + x + a \\
\multicolumn{4}{l||}{\quad x^3 + 2ax^2} & \\
\multicolumn{4}{l||}{\quad - \ ax^2 + 2bx} & \\
\multicolumn{4}{l||}{\qquad ax^2 + a^2x} & \\
\multicolumn{4}{l||}{\qquad\quad -a^2x + 2ab} & \\
\multicolumn{4}{c||}{0} &
\end{array}$$

Donde vemos que el *m. c. d.* de A''' y B''', ó sea D''', es $x^2 + ax$

—$2b$, y por consiguiente el *m. c. d.* de los dos polinómios A y B, será

$$D'D''D''' = 2ab^2x\,(a-b)\,(x^2+ax-2b) =$$
$$2a^2b^2x^3 - 2ab^3x^3 + 2a^3b^2x^2 - 2a^2b^3x^2 - 4a^2b^3x + 4ab^4x.$$

Máximo comun divisor de dos polinómios dependientes de dos letras.

* 110. Cuando los polinómios cuyo *m. c. d.* queremos hallar, no tienen más que dos letras, conviene modificar la regla general del modo siguiente:

Para hallar el *m. c. d.* de dos polinómios dependientes de sólo dos letras x é y se principia por hallar el *m. c. d.* monómio de todos los términos en ambos polinómios, y despues de hallado el de estos dos máximos comunes divisores y anotado para formar parte del *m. c. d.*, se dividen los polinómios dados A y B por el factor comun monómio que cada uno tiene. Los cocientes A_1 y B_1 se ordenan con relacion á x, se halla el *m. c. d.* de los coeficientes de las diferentes potencias de la letra ordenatriz en ambos polinómios, que por depender sólo de y, los representaremos por Y é Y'; los cocientes respectivos A_2 y B_2 los ordenaremos con relacion á y, hallaremos el *m. c. d.* de sus coeficientes, que representaremos por X y X'; dividiendo por ellos los polinómios A_2 y B_2, y llamando A' y B' á los cocientes, se tendrán los polinómios A_1 y B_1 bajo la forma $A_1 = YXA'$ y $B_1 = Y'X'B'$.

Hallando ahora el *m. c. d.* de Y é Y', el de X y X', el de A' y B', y multiplicándolos entre sí, se tendrá la cantidad que, multiplicada por el *m. c. d.* monómio hallado anteriormente, nos dará el *m. c. d.* de los dos polinómios dados A y B; porque dicho producto se compondrá de todos los factores comunes á ambos polinómios, ya sean monómios, ya sean dependientes sólo de x, ó de y, ó de estas dos letras.

La ventaja que tiene este método sobre el general es la de aplicar el procedimiento indicado en la investigacion del máximo comun divisor á polinómios más sencillos que los que se obtendrian por la regla general.

* 111. Si uno de los polinómios es independiente de una letra contenida en el otro, el *m. c. d.* tampoco contendrá á esta letra, y

este $m.\ c.\ d.$ se puede hallar más fácilmente que por el método general, ordenando con relacion á esta letra el polinómio que la contiene, y hallando en seguida el $m.\ c.\ d.$ de sus coeficientes y del otro polinómio.

La demostracion está fundada en el número (83).

LECCION XIII.

Mínimo comun múltiplo de dos ó más cantidades algebráicas.—Polinómios racionales y enteros con relacion á una letra. Divisores enteros relativos.—Máximo comun divisor relativo.

Mínimo comun múltiplo de dos ó más cantidades algebráicas.

112. *Se llama* MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO *de dos ó más cantidades algebráicas, el producto de las mayores potencias de los factores primos distintos que hay en todas estas cantidades.*

En la investigacion del $m.\ c.\ m.$ distinguiremos dos casos; segun que sean dos ó más de dos las cantidades cuyo $m.\ c.\ m.$ queremos hallar.

PRIMER CASO. Sean A y B dos cantidades monómias ó polinómias cuyo $m.\ c.\ m.$ queremos hallar.

Si representamos por D el máximo comun divisor de A y B, se tendrá, llamando A' y B' los cocientes respectivos de dividir A y B por D, $A = DA'$ y $B = DB'$.

Las menores potençias de los factores primos comunes á los dos polinómios A y B se hallan en D; los factores comunes de A y B que se hallan más veces repetidos en A que en B, y los factores que entran en A y no en B, se hallan en A'; finalmente, los factores comunes á los dos polinómios que se repiten más en B que en A, y los que hay en B y no se encuentran en A, están en B'; luego el producto $DA'B' = A'DB'$ nos expresará el de todos los factores distintos elevados á las mayores potencias que se hallan en los dos polinómios

A y B; y por consiguiente, dicho producto A'DB' será el *m. c. m.* pedido; pero A'DB' es igual á AB' é igual tambien á A'B; de donde podremos concluir, como en Aritmética, que:

113. *Para hallar el* m. c. m. *de dos cantidades, se multiplica una de ellas por el cociente de dividir la otra por el máximo comun divisor.*

SEGUNDO CASO. Sean varias cantidades A, B, C, D... cuyo mínimo comun múltiplo queremos hallar.

Aplicando los razonamientos hechos en Aritmética (119) se deducirá que:

114. *Para hallar el* m. c. m. *de varias cantidades, se halla primero el de dos, luégo el de éste y una tercer cantidad, despues el del último hallado y una cuarta, y así sucesivamente, hasta hallar el de la última cantidad y el del último* m. c. m. *hallado, que será el de todas las cantidades dadas.*

115. Cuando las cantidades se puedan descomponer en sus factores primos, no hay que recurrir á la teoría del *m. c. d.*, sino que se forma, como en Aritmética (144), el producto de todos los factores primos elevados á sus mayores potencias, y se obtendrá el *m. c. m.* pedido.

Así, el *m. c. m.* de las cantidades $3a^2b$, $(6a^2 - 6b^2)$, $4ab$, $12a(a+b)$, $3a^2b(a-b)$, y $2a-b$, será $12a^2b(a^2-b^2)(2a-b)$.

En efecto, descomponiendo en sus factores primos cada una de las cantidades dadas, se tiene $3a^2b$, $2.3\,(a+b)\,(a-b)$, 2^2ab, $2^2.3a(a+b)$, $3a^2b(a-b)$, y $(2a-b)$.

El producto de todos estos factores primos, elevados á sus mayores potencias, es

$$3.2^2a^2b(a+b)\,(a-b)\,(2a-b) = 12a^2b(a^2-b^2)\,(2a-b).$$

Polinómios racionales y enteros con relacion á una letra. Divisores enteros relativos.

*116. Ya hemos dicho lo que se entiende en general por cantidad algebráica racional y entera, y hemos efectuado las cuatro operaciones fundamentales con cantidades de esta especie, y hallado el *m. c. d.* de dos ó más; pero en muchas ocasiones, sobre todo en el Algebra superior, que es la que se ocupa principalmente de la teoría general de ecuaciones, se consideran monómios ó polinómios que sólo son racionales y enteros con relacion á una ó varias letras principales, en cuyo caso se les llama cantidades enteras y racionales con relacion á estas letras, ó más generalmente *funciones racionales y enteras de estas letras*. Así, una funcion racional y entera de x puede ser $2ax^3 - \frac{2}{3}bx^2 + \frac{3}{4}\sqrt{b}\,.\,x + \frac{8ab}{cd}$; porque sólo hay que atender, para que un polinómio de esta especie sea racional y entero con relacion á una letra x, á que dicha letra no se halle en los denominadores, debajo de ningun radical, ni afectada de exponentes negativos ó fraccionarios; cumpliendo con estas condiciones, pueden ser de cualquiera naturaleza los coeficientes, como en el ejemplo anterior, y sin embargo ser la funcion racional y entera con relacion á x.

* 117. Las operaciones que hasta aquí hemos hecho con cantidades enteras, se hacen igualmente con las funciones ó cantidades enteras relativas; es decir, que sólo son enteras con relacion á una ó varias letras, pudiendo dejar de serlo con relacion á las demás; sólo tenemos que hacer varias observaciones respecto de algunos resultados.

Por ejemplo, en la division de dos polinómios enteros en general con relacion á todas sus letras, se trata de hallar otro monómio ó polinómio de la misma especie que multiplicado por el divisor nos dé el dividendo; y para que esto sea posible, hemos visto que era necesario: 1.°, que ordenados con relacion á una letra el primer término ó primera parte del dividendo, lo mismo que las primeras partes de los restos parciales que en la série de los cálculos vamos obteniendo, sean siempre divisibles por la primera parte del divisor; 2.°, que el último resto sea cero. Cuando estas dos condiciones se verifican, se dice que el cociente hallado cumple con la condicion de ser entero, y la division es exacta; si falta alguna de las dos condiciones citadas, la division es inexacta.

Cuando el dividendo y divisor son polinómios enteros con relacion á una letra principal x, puede pedirse otro polinómio entero, con relacion á la misma letra, que multiplicado por el divisor dé el dividendo; y entónces, á la única condicion que hay que atender para que la division sea exacta, es que el último resto sea cero, sin cuidarse de que sean ó no divisibles las primeras partes del dividendo y restos sucesivos por la primera parte del divisor. Si llegamos á obtener un resto de menor grado que el divisor con relacion á la letra principal x ó un resto independiente de dicha letra, la division ya no puede ser exacta; pues si continuamos la operacion de dividir, nos veremos obligados á escribir la letra principal en el denominador, ó afectarle de un exponente negativo; en cuyo caso el cociente ya no será entero con relacion á esta letra.

El divisor de esta especie que divide exactamente á una cantidad cualquiera, se llama, para distinguirle de los divisores enteros ordinarios, *divisor relativo.*

Esto supuesto, estableceremos algunos principios respecto á divisores relativos.

*118. *Si una funcion entera de* x *es un divisor relativo de otra funcion entera de la misma letra, el producto de la primera por un factor independiente de* x *tambien será divisor relativo de la segunda.*

En efecto, sea la funcion entera $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Tx+U$, y $A'x^n+B'x^{n-1}+C'x^{n-2}+\ldots+T'x+U'$ un divisor relativo de la primera; sea M un factor independiente de x, y vamos á demostrar que $M(A'x^n+B'x^{n-1}+\ldots+T'x+U')$, es tambien un divisor relativo de la primera funcion.

Por ser $A'x^n+B'x^{n-1}+C'x^{n-2}+\ldots+T'x+U'$ un divisor relativo de la funcion $Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+U$, se tendrá

$$\frac{Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+U}{A'x^n+B'x^{n-1}+\ldots+U'}=A''x^{m-n}+B''x^{m-n-1}+\ldots+U''.$$

Si ahora dividimos ambas cantidades por el factor M independiente de x, se tiene la igualdad

$$\frac{Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+U}{M(A'x^n+B'x^{n-1}+\ldots+U')}=\frac{A''}{M}x^{m-n}+\frac{B''}{M}x^{m-n-1}+\ldots+\frac{U''}{M},$$

cuyo segundo miembro es una funcion racional y entera con relacion á x, y por consiguiente $M(A'x^n+B'x^{n-1}+\ldots+U')$ es un divisor relativo de la funcion propuesta.

*119. Del principio anterior se deduce que una cantidad entera con relacion á una letra que tenga un divisor relativo entero tambien con relacion á la misma letra, puede tener cuantos se quiera, multiplicando ó partiendo dicho divisor relativo por una cantidad entera ó fraccionaria independiente de la letra principal.

*120. *Toda funcion entera de primer grado con relacion á* x *que* *divide al producto de varias funciones enteras, divide necesariamente, por lo ménos, á una de estas funciones.*

Pueden ocurrir dos casos, segun que sólo sean dos los factores, ó un número mayor que dos.

PRIMER CASO. Sea $ax+b$ una cantidad entera de primer grado que divide al producto AB de dos funciones enteras de x, y vamos á demostrar que tiene que dividir necesariamente, por lo ménos, á una de dichas funciones.

En efecto, si $ax+b$ divide al producto AB, una de estas funciones ha de ser necesariamente divisible por esta cantidad.

Supongamos que no divide á B, vamos á demostrar que necesariamente ha de dividir á A: por no dividir $ax+b$ á B, dará la division un resto independiente de x; y se tendrá, llamando R, y Q al resto y cociente,

$$B = (ax + b)\,Q + R;$$

multiplicando por A, se tiene

$$AB = (ax + b)\,QA + RA.$$

El primer miembro es divisible por $ax+b$; el primer sumando del segundo miembro tambien lo es evidentemente; luego el segundo RA tambien lo será. Siendo $ax+b$ un divisor relativo de la cantidad entera RA, lo será tambien (118) el producto de este divisor por una cantidad R independiente de x; luego $\frac{RA}{R(ax+b)} = \frac{A}{ax+b}$ será igual á una cantidad entera con relacion á x; por consiguiente, A es divisible por $ax+b$, segun queriamos demostrar.

SEGUNDO CASO. Que sean varios factores enteros A, B, C, D... Si $ax+b$ divide al producto de estos factores, dividirá por lo ménos á uno de ellos. La demostracion la misma que ya se ha dado (95 SEGUNDO CASO).

CONSECUENCIA. 1.ª *Si una cantidad entera de primer grado es un divisor relativo de la potencia de una funcion entera, tambien lo será de su raíz* (95 CONS. 2.ª).

2.ª *El producto de varias funciones enteras de* x *no puede tener más divisores relativos de primer grado que los que tengan sus factores* (95 CONS. 1.ª), *ó estos multiplicados por cantidades independientes de* x (119).

3.ª *Una funcion entera no puede admitir más que una sóla descomposicion de factores primos de primer grado en* x (*Aritmética* 135).

Máximo comun divisor relativo.

* 121. *El* m. c. d. *relativo de dos funciones enteras de* x, *es el polinómio de mayor grado con relacion á esta letra que divide á las dos.*

De esta definicion se deduce que, si dividimos dichas dos funciones por su *m. c. d.*, los cocientes serán primos entre sí; ó si tienen algun factor comun será independiente de la letra x. En efecto, si pudieran tener un factor comun dependiente de x, este factor multiplicado por el *m. c. d.*, sería un divisor comun y de mayor grado; por consiguiente, éste y no aquél, seria el *m. c. d.*; luego dichos cocientes son primos entre sí. De donde vemos que el *m. c. d.* relativo, lo mismo que el ordinario, se compone de todos los factores primos en x comunes á las dos funciones dadas, elevados á sus menores potencias.

La investigacion del *m. c. d.* relativo está fundada en los mismos principios en que se funda el método ordinario, y se demuestran de la misma manera. La única diferencia que existe es que no hay necesidad de multiplicar los dividendos por cantidades convenientes para que los términos del cociente sean enteros, ni suprimir los factores comunes que haya en las restas ántes de pasar á ser divisores; pues como sólo han de ser enteros con relacion á x, basta llevar las divisiones parciales hasta hallar un resto de un grado menor que el divisor, sin atender á que los términos hallados sean ó no enteros. Así:

* 122. *Para hallar el* m. c. d. *relativo de dos polinómios enteros con relacion á* x, *se divide el de mayor grado por el de menor; si la division es exacta, el de menor grado será el* m. c. d.; *si da un resto, se divide el divisor por el resto: si la nueva division es exacta, el último divisor será el* m. c. d.; *si no es exacta, se continuará dividiendo el primer resto por el segundo, éste por el tercero, y así sucesivamente hasta llegar á un resto cero ó independiente de* x: *en el primer caso el último divisor será el* m. c. d. *pedido; en el segundo los polinómios serán primos entre sí.*

* 123. El *m. c. d.* relativo de varios polinómios enteros de x, se halla como el *m. c. d.* ordinario; es decir, determinando primero el de dos, luégo el de esta y un tercero, y así sucesivamente; el último *m. c. d.* relativo hallado, será el de todos.

Si aplicamos á los dos polinómios $x^5+4x^4+4x^3-x^2-18x+4$ y $x^4+6x^3+5x^2-14x-4$, cuyo *m. c. d.* ordinario hemos visto (107 EJEM. I) que es x^2+2x-4, el procedimiento del *m. c. d.* relativo, hallaremos que éste será igual á $\frac{78}{121}x^2+\frac{156}{121}x-\frac{312}{121}$, cuyo *m. c. d.* relativo no es otra cosa que el *m. c. d.* ordinario multiplicado por el factor comun $\frac{78}{121}$; en efecto, $\frac{78}{121}x^2+\frac{156}{121}x-\frac{312}{121}=\frac{78}{121}(x^2+2x-4)$.

* 124. En el Algebra superior, que es en donde más uso se hace de la teoría del *m. c. d.*, es indiferente emplear uno ú otro método; se elige aquél que da los cálculos más sencillos; porque para el objeto que allí se aplica, no importa que venga ó no el verdadero *m. c. d.* multiplicado ó partido por una cantidad independiente de x.

LECCION XIV.

Fracciones algebráicas, su simplificacion y modo de reducirlas á un comun denominador.— Cálculo de las cuatro operaciones con fracciones algebráicas.

Fracciones algebráicas, su simplificacion y modo de reducirlas á un comun denominador.

125. Al tratar de las fracciones de un modo general en nuestras Lecciones de Aritmética, hemos tenido que considerarlas, para que correspondan á toda clase de números, no como el número que expresa una ó varias partes de la unidad, sino como el cociente indicado de dividir el numerador por el denominador. Bajo este punto de vista, se demostraron, cual correspondia, las reglas que debian emplearse en los cálculos de estas expresiones, y como en Álgebra no podemos considerar las fracciones sino bajo el mismo aspecto, es decir, como el cociente indicado del numerador por el denominador,

todo cuanto en aquella teoría general hemos expuesto, es aplicable á las fracciones algebráicas.

Así, en esta leccion, sólo nos ocuparemos de la parte material del cálculo, pues respecto á la parte teórica nos referiremos á la Aritmética (*Lecc. XIX.*)

126. *Para simplificar una fraccion algebráica, se quitan del numerador y denominador los factores comunes; para lo cual se dividirán ambos términos por su máximo comun divisor (Aritmética* 155*).*

Ejemplos. I. Simplificar la fraccion $\frac{12a^2b^3c^6}{18a^3b^3c^4}$.

El factor que hay comun en los dos términos de esta fraccion es $6a^2b^3c^4$; luego dividiendo por él, se tendrá

$$\frac{12a^2b^3c^6}{18a^3b^3c^4}=\frac{2c^2}{3a}.$$

II. Sea, en segundo lugar, la fraccion que hemos de simplificar $\frac{6a^2x+24x^2}{9ax-12x^3}$; quitando de ambos términos el factor $3x$ que tienen comun, se tendrá

$$\frac{6a^2x+24x^2}{9ax-12x^3}=\frac{2a^2+8x}{3a-4x^2}.$$

III. Quitando el factor comun $a+x$ de los dos términos de la fraccion siguiente, se tiene

$$\frac{a^2-x^2}{2a^2+2ax}=\frac{(a+x)(a-x)}{2a(a+x)}=\frac{a-x}{2a}.$$

IV. Sea la fraccion $\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}$, en cuyos dos términos existe el factor comun $a+b+c$, de modo que poniéndolo de manifiesto y simplificando, se tiene

$$\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}=\frac{(a+b-c)^2}{a^2-(b+c)^2}=$$

$$\frac{(a+b+c)(a+b+c)}{(a+b+c)(a-b-c)}=\frac{a+b+c}{a-b-c}.$$

V. Sea, por último ejemplo, $\frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$.

Como en sus dos términos no aparecen, á primera vista, factores comunes, les aplicaremos el procedimiento del *m. c. d.*; y hallaremos que es $x+2$; de modo que dividiendo por él, se tendrá

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}=\frac{x-3}{x+5}.$$

127. *Para reducir dos ó más fracciones algebráicas á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de las demás. Si los denominadores tienen factores comunes, se halla el* m. c. m. *de todos ellos, el cual será el denominador comun; el numerador de cada fraccion se obtendrá multiplicando el de cada una de las propuestas por el cociente de dividir el* m. c. m. *por el denominador correspondiente (Arit.* 158).

Ejemplos. I. Reducir á un comun denominador las fracciones $\frac{3a}{2b}$, $\frac{ab}{c}$, $\frac{2ab}{3de}$ y $\frac{a-b}{2b-c}$.

Multiplicando los dos términos de cada fraccion por el producto de los denominadores de los demás, se trasforman las fracciones anteriores en

$$\frac{9acde(2b-c)}{6bcde(2b-c)},\ \frac{6ab^2de(2b-c)}{6bcde(2b-c)},\ \frac{4ab^2c(2b-c)}{6bcde(2b-c)}\ \text{y}\ \frac{6bcde(a-b)}{6bcde(2b-c)}.$$

II. Sean las fracciones que hemos de reducir á un comun denominador

$$\frac{3a}{2b},\ \frac{5ab}{4cd},\ \frac{3b}{4a^2},\ \frac{a-b}{2a(a+b)},\ \frac{2a-b}{4bc(a-b)}\ \text{y}\ \frac{3ab-2bc}{2a(a^2-b^2)}.$$

El $m.\ c.\ m.$ de los denominadores es, como fácilmente se ve, $4a^2bcd(a^2-b^2)$; los cocientes de dividir este $m.\ c.\ m.$ por los denominadores respectivos, son $2a^2cd(a^2-b^2)$, $a^2b(a^2-b^2)$, $bcd(a^2-b^2)$, $2abcd(a-b)$, $a^2d(a+b)$ y $2abcd$; luego las fracciones reducidas á un comun denominador serán

$$\frac{6a^3cd(a^2-b^2)}{4a^2bcd(a^2-b^2)},\ \frac{5a^3b^2(a^2-b^2)}{4a^2bcd(a^2-b^2)},\ \frac{3b^2cd(a^2-b^2)}{4a^2bcd(a^2-b^2)},\ \frac{2abcd(a-b)^2}{4a^2bcd(a^2-b^2)},$$

$$\frac{a^2d(a+b)(2a-b)}{4a^2bcd(a^2-b^2)}\ \text{y}\ \frac{2abcd(3ab-2bc)}{4a^2bcd(a^2-b^2)}.$$

Cálculo de las cuatro operaciones con fracciones algebráicas.

128. *Para sumar fraccciones algebráicas, se reducen á un comun denominador si no le tienen, se suman los numeradores, y á la suma se le pone por denominador el denominador comun.*

129. *Para restar fracciones algebráicas, se reducen á un comun*

denominador, se restan los numeradores, y á la resta se le pone por denominador el denominador comun.

130. *Para multiplicar fracciones algebráicas, se multiplican los numeradores, y el producto se parte por el de los denominadores.*

131. *Para dividir fracciones algebráicas, se multiplica la primera por la segunda invertida.*

Todas estas reglas se demuestran como sus equivalentes en Aritmética.

Ejemplos. Efectuando, segun las reglas dadas, los cálculos siguientes, se tiene:

I. $$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}+\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2-b^2}=$$
$$\frac{a(a^2+b^2)(a+b)+b(a-b)(a^2+b^2)+a^2(a^2-b^2)+b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)\,(a^2-b^2)}=$$
$$\frac{(a^2+b^2)[a(a+b)+b(a-b)+b^2]+a^2(a^2-b^2)}{a^4-b^4}=$$
$$\frac{(a^2+b^2)(a^2+ab+ab-b^2+b^2)+a^4-a^2b^2}{a^4-b^4}=$$
$$\frac{(a^2+b^2)(a^2+2ab)+a^4-a^2b^2}{a^4-b^4}=\frac{a^4+a^2b^2+2a^3b+2ab^3+a^4-a^2b^2}{a^4-b^4}=$$
$$\frac{2a^4+2a^3b+2ab^3}{a^4-b^4}=\frac{2a(a^3+a^2b+b^3)}{a^4-b^4}.$$

II. $$\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a+x)^2-(a-x)^2}{(a-x)\,(a+x)}=$$
$$\frac{a^2+2ax+x^2-a^2+2ax-x^2}{a^2-x^2}=\frac{4ax}{a^2-x^2}.$$

III. $$\frac{a+x}{a^2-x^2}\times\frac{a-x}{a^2+x^2}=\frac{(a+x)(a-x)}{(a^2-x^2)(a^2+x^2)}=\frac{a^2-x^2}{(a^2-x^2)(a^2+x^2)}=\frac{1}{a^2+x^2}.$$

IV. $$\frac{3ab-2cd}{2ab-cd}:\frac{2ab+3cd}{2bc+ad}=\frac{(3ab-2cd)\,(2bc+ad)}{(2ab-cd)\,(2ab+3cd)}.$$

132. Siendo el objeto de esta primera parte del Algebra el cálculo de las cantidades algebráicas, debemos pasar, despues de explicadas las cuatro operaciones fundamentales, la teoría del máximo comun divisor, mínimo comun múltiplo y cálculo de fracciones á la elevacion á potencias y extraccion de raíces; mas como para des-

arrollar esta teoría de un modo general, necesitamos de las combinaciones que con un número de objetos se pueden hacer, nos ocuparemos de la teoría de las combinaciones y permutaciones con toda extension, á cuyo objeto dedicaremos las dos lecciones siguientes.

LECCION XV.

Coordinaciones.—Permutaciones.—Combinaciones.

Coordinaciones.

133. *Se llaman* COORDINACIONES *ó* ARREGLOS *de* m *objetos tomados de* n *en* n, *los diferentes grupos que con estos* m *objetos se pueden formar tomándolos de* n *en* n, *de modo que cada uno no éntre más que una vez en cada grupo, y uno de éstos se diferencie de los demás en los objetos que le forman ó en el órden en que están colocados.*

Así, con las cuatro letras a, b, c, d se podrán formar las doce coordinaciones de dos letras, arreglándolas de todas las maneras posibles del modo siguiente:

$$ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc;$$

cuyas coordinaciones se diferencian, como se ve, unas en las letras con que se forman, y otras en el órden en que éstas están colocadas.

* 134. Aunque el nombre de *coordinaciones* es más propio que el de *arreglos* para designar estos diferentes grupos, nosotros, sin embargo, admitiremos el segundo, con el objeto de poder expresar con su letra inicial A el número de estos arreglos en un caso dado, para que no se confunda con el número de combinaciones que lo expresaremos con la letra inicial C.

Esto supuesto, vamos á determinar el número de arreglos que con m objetos se pueden formar tomados de n en n.

135. *El número de arreglos ó coordinaciones que se pueden for-*

mar con m *objetos tomados de* n *en* n, *es igual al producto de los* n *números naturales decrecientes á partir del número* m.

Sean los m objetos las m primeras letras del alfabeto, y representemos por A_m^n el número de arreglos de n letras que con m se pueden formar.

El número de arreglos de una letra que con m se pueden formar, es evidentemente igual á m; porque serán las letras $a, b, c, d, \ldots\ldots l$ puestas unas á continuacion de otras; luego $A_m^1 = m$.

Si á la derecha de cada una de estas letras ponemos las $m-1$ restantes, tendremos todos los arreglos de dos letras que con m se pueden formar. Así,

$$\begin{array}{l} ab,\ ac,\ ad, \ldots\ldots\ al, \\ ba,\ bc,\ bd, \ldots\ldots\ bl, \\ ca,\ cb,\ cd, \ldots\ldots\ cl, \\ da,\ db,\ dc, \ldots\ldots\ dl, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ la,\ lb,\ lc, \ldots\ldots\ lk \end{array}$$

son los arreglos de dos letras que con m se pueden formar; porque cada uno se diferencia de los que están en una misma fila en la última letra, y de los que están en distinta fila en las letras ó en el órden en que están colocadas.

Cada una de estas filas tiene evidentemente $m-1$ arreglos, y el número de filas es m; luego $A_m^2 = m(m-1)$.

Del mismo modo, colocando á la derecha de cada arreglo de dos letras cada una de las $m-2$ restantes, hallaremos los arreglos de tres letras que se pueden formar con m; porque todos los que empiecen por un mismo arreglo se diferenciarán en la última letra, y los que tienen la última letra comun, se diferencian entre sí en el arreglo de dos que le preceden; y así formaremos un número de filas igual al número de arreglos de dos letras, y cada fila contendrá $m-2$ grupos; por consiguiente, se tendrá $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$.

Continuando del mismo modo, obtendremos por analogía la fórmula que resuelve el problema

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1).$$

*136. Para poder decir que esta fórmula es general, es necesario probar que, si es verdadera para el caso en que el número de objetos ó letras que entra en cada grupo es $n-1$, lo es tambien cuando entren n; porque siendo verdadera para grupos de una, dos y tres letras, como hemos visto, lo será para cuatro; siéndolo para cuatro, lo será tambien para cinco, y en general para n.

Supongamos que los arreglos de m letras tomadas de $n-1$ en $n-1$, se hayan formado, como ya hemos dicho, colocando á la derecha de cada arreglo de $n-2$, las $m-n+2$ letras restantes, y que el número que de estos arreglos resulta sea A_m^{n-1}.

Si á la derecha de cada uno de estos arreglos colocamos cada una de las $m-n+1$ letras restantes, obtendremos tantas filas cuantas exprese el número de arreglos de $n-1$ letras, que hemos supuesto ser A_m^{n-1}; es decir, un número de filas representado por A_m^{n-1}, y cada una de estas filas contendrá tantos arreglos de n letras como letras dejan de entrar en cada uno de los que tienen $n-1$, que son $m-(n-1)=m-n+1$; luego el número total de arreglos que así resultan será igual á $A_m^{n-1}\times(m-n+1)$.

Ahora bien, estos arreglos son todos los que con m letras se pueden formar tomándolas de n en n. En efecto, los arreglos de n letras los formamos poniendo á la derecha de los que tienen $n-1$, cada una de las letras restantes; y por consiguiente, no habrá arreglo de n letras que no esté formado de este modo: además, estos arreglos son todos distintos; porque los que principian por un mismo arreglo de $n-1$ letras, se diferencian por la última que es distinta; y los que están terminados por una misma letra, se diferencian en el arreglo de $n-1$ que le precede; por consiguiente, todos son diferentes en las letras ó en el órden en que están colocadas; luego son los arreglos pedidos: de modo que se tendrá

$$A_m^n = A_m^{n-1}\times(m-n+1).$$

*137. De esta fórmula se puede deducir fácilmente la que anteriormente hemos hallado.

En efecto, si damos á n los valores sucesivos $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots n$, se obtendrá, partiendo de la igualdad evidente $A_m^1=m$,

$$\begin{aligned}
A_m^1 &= m\\
A_m^2 &= A_m^1\times(m-1)\\
A_m^3 &= A_m^2\times(m-2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_m^n &= A_m^{n-1}\times(m-n+1).
\end{aligned}$$

Multiplicando ahora estas igualdades, y dividiendo por los factores comunes A_m^1, A_m^2, A_m^3..... A_m^{n-1}, que se hallan en los dos miembros de la igualdad que resulta, se tiene la misma fórmula

$$A_m^n = m\,(m-1)\,(m-2).....(m-n+1).$$

EJEMPLOS. I. *Hallar cuántos números hay de tres cifras significativas diferentes.*

El número de estos números será igual al de arreglos que se pueden formar con las nueve cifras significativas tomadas de tres en tres, que será como ya se sabe, $A_9^3 = 9\times8\times7 = 504$.

II. *¿Cuántos arreglos se pueden formar con doce letras tomadas de cinco en cinco?* $A_{12}^5 = 12\times11\times10\times9\times8 = 95040$.

III. *¿Cuántos números se pueden formar con cuatro cifras diferentes?*

Tantos como arreglos se pueden formar con las diez cifras tomadas de cuatro en cuatro; es decir, $A_{10}^4 = 10\times9\times8\times7 = 5040$.

Permutaciones.

138. *Se llaman* PERMUTACIONES *los diferentes grupos que se pueden formar con* m *objetos, colocándolos de todas las maneras posibles, de modo que en cada uno entren los* m *objetos, y sólo se diferencien en el órden en que están colocados.*

Así, con una letra a, sólo se puede formar una permutacion a; con dos letras a y b, se forman las dos permutaciones ab y ba; con las tres letras a, b y c, las seis permutaciones abc, acb, cab, bac, bca, cba.

139. *El número de permutaciones que se pueden formar con* m *objetos es igual al producto de los números enteros consecutivos desde uno hasta* m.

En efecto, el número de permutaciones que se pueden formar con m objetos es igual al número de arreglos que se pueden formar con estos objetos tomados de m en m; por consiguiente, si en la fórmula que dá el número de arreglos hacemos $n=m$, y representamos por P_m el número de permutaciones de m objetos, se tendrá

$$P_m = A_m^m = m\,(m-1)\,(m-2)...(m-m\times1);$$

ó escribiendo en un órden inverso los factores de este producto, será

$$P_m = 1\times2\times3...m.$$

*140. Esta fórmula se puede obtener tambien directamente.

En efecto, ya hemos visto que con una letra no se puede formar más que una permutacion; de donde, $P_1 = 1$.

Con las dos letras a y b, se forman las dos permutaciones ab y ba; por consiguiente, $P_2 = P_1 \times 2 = 1 \times 2$.

Con las tres letras a, b y c, se forman las seis permutaciones abc, acb, cab, bac, bca, cba; que se obtienen colocando á la derecha de cada permutacion de dos letras, la letra restante, y haciendo pasar esta letra por todos los lugares; así, la permutacion ab de dos letras, ha dado las tres primeras permutaciones; y la permutacion ba, las tres últimas; y éstas son todas distintas entre sí, porque se diferencian en la colocacion de la última letra c, que pasa por todos los lugares ó en la permutacion de las dos letras primeras que es diferente; luego $P_3 = P_2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3$.

Del mismo modo veremos que si en cada una de las permutaciones de tres letras a, b, c, se pone la cuarta letra d, y se hace pasar por todos los lugares, hallaremos que cada permutacion de tres letras, da cuatro permutaciones de cuatro; y por consiguiente el número total será $P_4 = P_3 \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$.

Todas estas permutaciones serán diferentes; porque se diferenciarán en la colocacion de la última letra, ó en el órden en que están colocadas las demás, por pertenecer á permutaciones distintas de tres letras.

Continuando del mismo modo, llegaremos á deducir que

$$P_m = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots m.$$

*141. Lo mismo que anteriormente probaremos que esta fórmula es general: para ello haremos ver que siendo cierta para $m-1$ letras, lo es tambien para m; porque una vez demostrado esto, como ya hemos visto que con una letra no se forma más que una permutacion, con dos, dos permutaciones, y con tres seis, sabremos las que se pueden formar con cuatro, despues con cinco, y en general con m.

Supongamos, pues, que con $m-1$ letras se forman P_{m-1} del mismo modo que hemos indicado, y vamos á determinar el número de las que se pueden formar con m, ó sea P_m.

Si á la derecha de cada una de las P_{m-1} permutaciones colocamos la letra restante, y le hacemos ocupar todos los lugares posibles corriéndola de derecha á izquierda, cada permutacion de $m-1$ letras dará evidentemente m permutaciones de m; porque $m-1$ son los lugares distintos que puede ocupar la última letra que se considera; por consiguiente, el número de grupos formado así será $P_{m-1}\times m$.

Lo que falta probar es que todos estos grupos son las permutaciones de m letras: para ello observaremos que no hay permutacion de m letras que por este medio no quede formada; porque partiendo de que se dan formadas las de $m-1$ letras, si colocamos la última letra restante en cada una de estas permutaciones, y en todos los lugares, se tendrán evidentemente todas las letras combinadas de todas las maneras posibles. Además, todos estos grupos son diferentes; porque se diferencian en la colocacion de la última letra que hemos considerado, ó en el órden en que lo están las $m-1$ primeras, por ser permutaciones distintas de $m-1$ letras; luego se tendrá de un modo general,

$$P_m=P_{m-1}\times m.$$

Si damos en esta fórmula á m los valores sucesivos 2, 3,.. m, tendremos, principiando por la igualdad evidente $P_1=1$,

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 \\ P_2 &= P_1 \times 2 \\ P_3 &= P_2 \times 3 \\ &\dots\dots \\ &\dots\dots \\ P_m &= P_{m-1}\times m. \end{aligned}$$

Multiplicando estas igualdades entre sí, y quitando los factores comunes, se tiene

$$P_m=1\times 2\times 3 \dots m.$$

EJEMPLOS. I. *¿Cuántos números de diez cifras diferentes se pueden formar?*

El número de permutaciones que se pueden formar con las diez cifras; es decir,

$$P_{10}=1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10=3628800.$$

II. *¿De cuántas maneras se pueden colocar en una mesa siete personas?*

De tantas cuantas permutaciones se pueden hacer con siete objetos; es decir,

$$P_7=1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7=5040.$$

III. *¿Cuántas palabras se pueden formar con cinco letras?*

Tantas como permutaciones se pueden hacer con estas cinco letras; ó lo que es lo mismo,

$$P_5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Combinaciones.

142. *Se llaman* COMBINACIONES *de* m *objetos tomados de* n *en* n, *los diferentes grupos que se pueden formar con estos* m *objetos, de modo que en cada grupo no entren más que* n, *y uno cualquiera se diferencie de los demás por lo ménos en un objeto, y no en el órden en que están colocados.*

Así, con tres letras a, b, c, no se pueden formar más que las tres combinaciones de dos letras, ab, ac, bc, mientras que arreglos hemos formado seis, porque cada una de estas combinaciones da dos arreglos.

143. *El número de combinaciones de* n *objetos que se pueden formar con* m *es igual al cociente de dividir el número de arreglos de* m *letras tomadas de* n *en* n, *por el número de permutaciones de* n *letras.*

En efecto, representemos por C_m^n el número de combinaciones de m letras tomadas de n en n, y supongamos que se tienen todas las combinaciones de n letras que se pueden formar con m.

Si formamos todas las permutaciones que se pueden hacer con cada combinacion de n letras, es evidente que tendremos todos los arreglos que con m letras se pueden formar tomadas de n en n; porque cada combinacion se diferencia de las demás por lo ménos en una letra, y las permutaciones de cada combinacion se diferencian entre sí en el órden en que están colocadas; pero con cada combinacion se puede formar P_n permutaciones, luego con C_m^n combinaciones se formarán $C_m^n \times P_n$, y como de este modo hallamos el número A_m^n de arreglos, se tiene,

$$C_m^n \times P_n = A_m^n;$$

de donde se deduce

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots n}.$$

144 Si en la fórmula anterior reemplazamos A_m^n y P_n por sus valores $A_m^n = A_m^{n-1} \times (m-n+1)$ y $P_n = P_{n-1} \times n$, se tiene

$$C_m^n = \frac{A_m^{n-1} \times (m-n+1)}{P_{n-1} \times n} = \frac{A_m^{n-1}}{P_{n-1}} \times \frac{m-n+1}{n},$$

y segun lo demostrado anteriormente, tendremos

$$C_m^n = C_m^{n-1} \times \frac{m-n+1}{n}.$$

Fórmula que sirve para determinar el número de combinaciones de n letras en funcion del número de combinaciones de $n-1$; por cuyo medio, sabiendo que el número de combinaciones de una letra que con m se pueden formar es m, se sabrá que el número de combinaciones de dos letras será $C_m^2 = m \times \frac{m-1}{2}$; el de tres será $C_m^3 = C_m^2 \times \frac{m-2}{3} = m\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}$, y así sucesivamente.

Ejemplos. I. *¿Cuántos extractos, ambos, ternos, cuaternos y quinternos se pueden formar con los 90 números de la lotería?*

Extractos. $C_{90}^1 = \frac{A_{90}^1}{P_1} = \frac{90}{1} = 90$

Ambos. $C_{90}^2 = \frac{A_{90}^2}{P_2} = \frac{90 \times 89}{1 \times 2} = 4005.$

Ternos. $C_{90}^3 = \frac{A_{90}^3}{P_3} = \frac{90 \times 89 \times 88}{1 \times 2 \times 3} = 117480.$

Cuaternos. $C_{90}^4 = \frac{A_{90}^4}{P_4} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 2555190.$

Quinternos. $C_{90}^5 = \frac{A_{90}^5}{P_5} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 43949268.$

II. *¿Con siete factores distintos, cuántos productos de á tres se pueden formar?*

Tantos como combinaciones se pueden hacer con siete cosas tomadas de tres en tres: es decir,

$$C_7^3 = \frac{A_7^3}{P_3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35.$$

LECCION XVI.

Principios relativos á las combinaciones.—Probabilidades.

Principios relativos á las combinaciones.

* 145. *El número de combinaciones de* m *objetos tomados de* n *en* n *es igual al número de combinaciones de estos mismos objetos tomados de* m — n *en* m — n.

Como el número de combinaciones de m letras tomadas de n en n es lo mismo que el número de productos distintos de n factores que con m se pueden formar, se sigue que, dividiendo el producto de las m letras por cada una de las combinaciones, que son productos distintos de n de estos factores, obtendremos tantos cocientes diversos de $m-n$ factores, que serán combinaciones de $m-n$ letras, cuantos productos distintos ó combinaciones de n letras tengamos; luego el número de combinaciones que con m letras se pueden formar de n en n, es igual al número de combinaciones que con estas mismas m letras se pueden formar de $m-n$ en $m-n$.

De otro modo. El número de combinaciones de m letras tomadas de n en n, es

$$C_m^n=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} \qquad [1]$$

y tomándolas de $m-n$ en $m-n$ será, poniendo $m-n$ en vez de n,

$$C_m^{m-n}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)}.$$

Reduciendo ambas expresiones á un comun denominador, para lo cual multiplicaremos los dos términos de la primera por el producto $1.2.3\ldots(m-n)$; y los de la segunda por $1.2.3\ldots n$, se tendrá

$$C_m^n=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots(m-n)}$$

y $$C_m^{m-n}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)\times n\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots(m-n)};$$

donde vemos que cada uno de los numeradores es el producto de la série natural de los números desde 1 hasta m, y el denominador comun el producto de la série de los números naturales desde 1 hasta n por el de la série de los números desde 1 hasta $m-n$, y por consiguiente ambas fracciones son iguales: luego $C_m^n = C_m^{m-n}$ segun queriamos demostrar.

* 146. De la primera fórmula de estas dos se deduce, representando por p la diferencia $m-n$, esta otra

$$C_m^n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p},$$

la cual se usa en muchas ocasiones con preferencia á la hallada en el número anterior.

* 147. Puesto que el número de combinaciones que se pueden formar con m objetos tomados de n en n, es el mismo que el que se obtiene tomándolos de $m-n$ en $m-n$, cuando n exceda á la mitad de m, en vez de aplicar la fórmula que da el número C_m^n, aplicaremos la que da C_m^{m-n}, la cual en este caso es más sencilla. Sea, por ejemplo, hallar el número de combinaciones de 10 objetos tomados de 7 en 7.

En vez de aplicar la fórmula que da las combinaciones tomadas de 7 en 7,

$$C_{10}^7 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 120,$$

emplearemos esta otra que da las que se pueden formar tomándolas de 3 en 3,

$$C_{10}^{10-7} = C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120,$$

que, como se ve, es más sencilla.

* 148. *El número de combinaciones de* m *objetos tomados de* n *en* n *es igual al número de combinaciones de* m — 1 *tomados de* n *en* n, *más el número de combinaciones de estos mismos* m — 1 *objetos tomados de* n — 1 *en* n — 1.

Las combinaciones de m letras a, b, c, $d \ldots l$, tomadas de n en n, se pueden dividir en dos clases; combinaciones de n letras que no contengan una de ellas l, y otras que la contengan.

La primera clase se compondrá, evidentemente, de todas las combinaciones de $m-1$ letras tomadas de n en n, y la segunda, de todas las combinaciones de $m-1$ letras tomadas de $n-1$ en $n-1$, á las cuales se le agrega la letra restante l; pero el número de las combinaciones de la primera especie es C^n_{m-1}, y el de la segunda es C^{n-1}_{m-1}; y como estas dos clases constituyen las combinaciones que se pueden formar con m objetos tomados de n en n, ó sea C^n_m, se tendrá, segun queriamos demostrar, $C^n_m = C^n_{m-1} + C^{n-1}_{m-1}$.

* 149. *El número de combinaciones que da la fórmula [1] es siempre un número entero.*

Por la naturaleza del número que esta fórmula representa, se deduce inmediatamente que debe ser entero; sin embargo, se puede demostrar este principio directamente, y sin atender á la naturaleza del número que viene á representar, poniendo esta fórmula primero bajo la forma

$$C^n_m = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p}$$

como ya hemos visto anteriormente, y probando que todos los factores primos del divisor se hallan en el dividendo, y que ninguno de estos factores viene en éste elevado á menor potencia que lo está en aquél, todo lo cual se demuestra muy fácilmente.

En efecto, en el divisor no entran más factores primos que los contenidos en la série natural de los números desde 1 hasta n, ó hasta p segun que n sea mayor ó menor que p, y como n y p son respectivamente menores que m, y en el dividendo entran los factores primos que hay comprendidos entre 1 y m, se sigue que todos los del divisor se hallan en el dividendo. Ahora falta probar que ninguno de los factores primos del divisor viene elevado á mayor potencia.

Sea a uno de los factores primos comprendidos en la série de los números desde 1 hasta n, y veamos cuál será la mayor potencia á que estará elevado en el denominador. Para ello dividamos n por a y llamando n' al cociente entero, se tendrá que el mayor múltiplo del factor a que se encontrará en la série de los números desde 1 hasta n, será $n'a$; por consiguiente, en dicha série se hallarán los múltiplos a, $2a$, $3a$... $n'a$; y sacando en ellos los n' factores a que hay, se tiene $(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n')\, a^{n'}$; lo que prueba que el factor a se halla repetido n' veces, mas las que esté contenido en $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n'$; pero haciendo con este producto lo mismo que con el anterior, tendremos, llamando n'' al cociente entero de dividir n' por a, que en la série $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n'$

se halla el factor a repetido n'' veces, mas las que estén en la nueva série $1.2.3...n''$, y continuando así llegaremos á una última série que no le contendrá ninguna vez, que será cuando el último cociente sea menor que a, lo cual llegará á suceder por ser dichos cocientes cada vez menores y siempre enteros. De modo que llamando n''', n^{IV}... los cocientes sucesivos, se vendrá á deducir que el factor a se halla repetido en la série $1.2.3...n$, la suma de los cocientes $n'+n''+n'''+...$ ó lo que es lo mismo, la mayor potencia de a que se hallará en esta série, será $a^{n'+n''+n'''+....}$

Análogamente probaremos que en la série $1.2.3...p$, se halla el mismo factor con un exponente igual á $p'+p''+p'''+....$ y en la série $1.2.3...m$, con el exponente $m'+m''+m'''+...$; por consiguiente en el denominador se hallará el factor a con un exponente $n'+n''+n'''+...+p'+p''+p'''+...$ y en el numerador con el exponente $m'+m''+m'''+...$ Ahora nos falta probar que

$$m'+m''+m'''+...\nless n'+n''+n'''+...p'+p''+p'''+...$$

Para ello, de la igualdad $m-n=p$, se saca $m=n+p$, y de ésta se deduce $\frac{m}{a}=\frac{n}{a}+\frac{p}{a}$.

Llamando r, r' y r'' los restos de las divisiones de m, n y p por a, de los cuales alguno podrá ser cero, se tendrá

$$m'+\frac{r}{a}=n'+p'+\frac{r'+r''}{a},$$

de donde deduciremos, segun sea $r'+r''<a$ ó $r'+r''\overset{=}{>}a$,

$$m'\overset{=}{>}n'+p'.$$

Del mismo modo, se tiene

$$m''\overset{=}{>}n''+p''$$

$$m'''\overset{=}{>}n'''+p'''$$

. . . .

. . . .

y sumando ordenadamente estas relaciones se viene á obtener

$$m'+m''+m'''+...\overset{=}{>}n'+n''+n'''+...+p'+p''+p'''+...$$

y por consiguiente, el factor a no se halla elevado á mayor potencia en el divisor que en el dividendo, y como lo que hemos dicho del factor a se puede decir de otro factor primo cualquiera, el principio queda demostrado.

Probabilidades.

* 150. *Se llama* PROBABILIDAD *de un acontecimiento, la relacion del número de casos favorables al número total de casos posibles, cuando todos estos casos son igualmente posibles.*

Si en una urna, por ejemplo, hay 11 bolas negras y 7 blancas y se saca una á la suerte, la probabilidad de sacar negra será $\frac{11}{18}$ y la de sacar blanca $\frac{7}{18}$; porque el número de casos igualmente posibles es igual al de bolas, es decir 18; el de casos posibles para las negras 11, y para las blancas 7; por consiguiente las relaciones $\frac{11}{18}$ y $\frac{7}{18}$ serán las probabilidades de sacar una negra ó una blanca; y como $\frac{11}{18}$ es mayor que $\frac{7}{18}$, se dice que hay más probabilidad de sacar en este caso una negra que una blanca.

EJEMPLOS. *Tomando 30 números de la lotería, ¿qué probabilidad hay de ganar un extracto, un ambo, un terno, un cuaterno ó un quinterno?*

Como en cada extraccion se sacan cinco números, el número de casos posibles es el número C_{90}^{5} de combinaciones que con 90 objetos se pueden hacer de 5 en 5, ó lo que es lo mismo (144 EJ. I.)

$$C_{90}^{5}=43949268.$$

El número de casos favorables para sacar un extracto, es decir, para que uno de los cinco números sacados en cada extraccion, sea uno de los 30 que tenemos, es igual al número de combinaciones que se pueden hacer con los 60 números restantes tomados de 4 en 4, repetido tantas veces como números tenemos, es decir, 30; porque si á cada combinacion de 4 números que con los 60 restantes se pueden hacer, ponemos uno de los 30 que tenemos, tendremos todas las combinaciones en que de los cinco números que salgan, uno será de los 30 que tenemos; pero

$$C_{60}^{4} = \frac{60 \times 59 \times 58 \times 57}{1.2.3.4} = 487635;$$

luego el número de casos posibles favorables para obtener un extracto será $C_{60}^{4} \times 30 = 487635 \times 30 = 14629050$; y por consiguiente, la probabilidad de sacar un extracto tomando 30 números á la lotería, será

$$\frac{C_{60}^{4} \times 30}{C_{90}^{5}} = \frac{14629050}{43949268} = \frac{1}{3} \text{ próximamente.}$$

Para los ambos, el número total de casos posibles es como ántes 43949268; y el de favorables posibles que contengan dos de nuestros 30 números, será $C_{6}^{3} \times C_{30}^{3} = 34220 \times 435 = 14885700$; luego la probabilidad de sacar un ambo, llevando 30 números á la lotería, es

$$\frac{C_{60}^{3} \times C_{30}^{2}}{C_{90}^{5}} = \frac{14885700}{43949268} = \frac{1}{3} \text{ próximamente.}$$

Del mismo modo, la probabilidad para acertar tres números ó sea un terno, es

$$\frac{C_{60}^{2} \times C_{30}^{3}}{C_{90}^{5}} = \frac{1770 \times 4060}{43949268} = \frac{7186200}{43949268} = \frac{1}{6} \text{ próximamente;}$$

y para una quinterna, será

$$\frac{C_{30}^{5}}{C_{90}^{5}} = \frac{142506}{43949268} = \frac{1}{308} \text{ próximamente.}$$

II. *Si una persona toma tres números de la lotería, ¿qué probabilidades tiene para sacar un extracto, un ambo y un terno?*

Para un extracto, $\dfrac{C_{87}^{4} \times 3}{C_{90}^{5}} = \dfrac{6677685}{43949268} = \dfrac{1}{6}$ próximamente.

Para un ambo, $\dfrac{C_{87}^{3} \times C_{3}^{2}}{C_{90}^{5}} = \dfrac{317985}{43949268} = \dfrac{1}{138}$ próximamente.

Para un terno, $\dfrac{C_{87}^{2}}{C_{90}^{5}} = \dfrac{3741}{43949268} = \dfrac{1}{11748}$.

LECCION XVII.

Potencias en general de los monómios.—Potencias de un binómio, ó sea fórmula del binómio de Newton.

Potencias en general de los monómios.

151. *La emésima potencia de un producto es igual al producto de las emésimas potencias de los factores.*

Cuando el exponente m es entero y positivo, ya lo hemos demostrado en Aritmética (264); demostrémoslo ahora para los demás casos.

Sea el exponente un número fraccionario $m = \frac{p}{q}$, y vamos á probar que tambien se verifica que $(ABC)^m = A^m B^m C^m$.

En efecto, segun la definicion general de potencia (37),

$$(ABC)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ABC)^p} = \sqrt[q]{A^p B^p C^p};$$

y como la raiz de un producto es igual al producto de las raices de los factores (*Arit.* 293), se tiene $(ABC)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{A^p}.\sqrt[q]{B^p}.\sqrt[q]{C^p}$; y por lo dicho ya (37), será $(ABC)^{\frac{p}{q}} = A^{\frac{p}{q}}.B^{\frac{p}{q}}.C^{\frac{p}{q}}$, segun queríamos demostrar.

Si m fuese un número inconmensurable, la potencia *emésima* del producto ABC sería el límite de las potencias que se obtendrian reemplazando por m números conmensurables que se les fueran aproximando cada vez más; y como en todas estas sustituciones se verifica el principio, segun los dos casos anteriores, en el límite tambien se verificará.

Por último, si m fuese una cantidad cualquiera negativa, é igual á $-n$, se tendria (37),

$$(ABC)^{-n} = \frac{1}{(ABC)^n} = \frac{1}{A^n B^n C^n} = A^{-n} B^{-n} C^{-n};$$

lo cual prueba que tambien es cierto el principio en este caso.

152. *Para elevar un monómio á una potencia cualquiera, se elevan á esta potencia el coeficiente y cada una de las letras ó factores que le constituyen, y su producto será la potencia pedida.*

Así, $\left(3a^2b\sqrt[3]{c}\right)^m = 3^m a^{2m} b^m \sqrt[3]{c^m}$.

En efecto, la potencia *emésima* de un producto es igual al producto de las *emésimas* potencias de los factores (151).

153. Podemos considerar como caso particular aquel en que el exponente de la potencia á que se ha de elevar el monómio sea entero y positivo, en cuyo caso la potencia se reduce al producto de tantos factores iguales al monómio dado, como unidades tiene el exponente; y segun las reglas de la multiplicacion, *el resultado será positivo siempre que el exponente sea par, cualquiera que sea el signo del monómio; será tambien positivo en el caso de ser el exponente impar, pero positivo tambien el monómio; y únicamente será negativo cuando siendo el monómio negativo, sea impar el exponente de la potencia.* El valor numérico se obtendrá *elevando á la misma potencia el coeficiente, y multiplicando los exponentes de las letras por el de la potencia.*

Así, $(3a^2bc^3)^4 = 81a^8b^4c^{12}$, $(2a^2b^3c)^5 = 32a^{10}b^{15}c^5$,
$(-3a^2bc^3)^4 = 81a^8b^4c^{12}$, $(-2a^2b^3c)^5 = -32a^{10}b^{15}c^5$.

Potencias de un binómio, ó sea fórmula del binómio de Newton.

154. La fórmula del binómio de Newton tiene por objeto elevar un binómio á una potencia cualquiera, sin formar todas las inferiores. Esta fórmula, debida al inmortal Newton, por lo cual lleva su nombre, fué admitida sin demostracion; pues este gran geómetra sólo dió la regla para elevar directamente un binómio á cualquier potencia, y no se cuidó de demostrarla. Despues se han dado varias demostraciones, de las cuales expondremos, en esta primera parte, la más sencilla, que se funda en la teoría de las combinaciones y permutaciones.

Para ello principiaremos por demostrar la ley que sigue el producto de varios factores de primer grado en x de la forma $x+a$, $x+b$, $x+c$,... $x+l$, los cuales tienen todos por primera parte comun x y los segundos términos son todos desiguales, cuya ley se enuncia segun la regla siguiente:

155. *El producto de varios binómios de la forma* x + a, x + b... *que tienen la primera parte* x *comun, es igual á un polinómio ordenado con relacion á* x, *cuyo primer término es una potencia de esta letra que tiene por exponente un número igual al de factores que se multiplican, y este exponente va disminuyendo de unidad en unidad hasta llegar á ser cero; los coeficientes de estas diferentes potencias de* x *son: el del primer término, la unidad; el del segundo, la suma de los segundos términos de los binómios; el del tercero, la suma de los productos binarios de los segundos términos; el del cuarto, la suma de los productos ternarios; y en general el coeficiente de un término cualquiera, es igual á la suma de los productos de los segundos términos de los binómios tomados de tantos en tantos, cuantos términos hay ántes del que se considera; el último término, es el producto de todos los segundos términos de los binómios.*

Esta ley se vé comprobada en el caso de ser dos, tres, cuatro, etc., los factores.

En efecto, si multiplicamos el factor $(x+a)$ por $(x+b)$, tendremos:

$$\begin{array}{rr|l}
 & x+a & \\
 & x+b & \\
\hline
(x+a)(x+b)=x^2 & +a & x+ab. \\
 & +b &
\end{array}$$

Multiplicando ahora este producto por $x+c$, y luégo por $x+d$, se tiene:

$$\begin{array}{rr|r|l}
(x+a)(x+b)=x^2 & +a & x+ab & \\
 & +b & & \\
 & x+c & & \\
\hline
(x+a)(x+b)(x+c)=x^3 & +a & x^2+ab & x+ab \\
 & +b & +ac & \\
 & +c & +bc & \\
 & x+d & & \\
\hline
(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4 & +a & x^3+ab & x^2+abc \;|\; x+abcd \\
 & +b & +ac & +abd \\
 & +c & +bc & +acd \\
 & +d & +ad & +bcd \\
 & & +bd & \\
 & & +cd &
\end{array}$$

En cuyos productos vemos confirmada la ley que hemos enunciado. Para probar que esta ley es general, demostraremos que si se verifica para un número cualquiera m de factores, se verifica tambien para $m+1$; porque siendo verdadera para cuatro, como acabamos de ver, lo será para cinco, siéndolo para cinco, lo será para seis, y así sucesivamente. Sea, pues, el producto de m factores de la forma $x+a$, $x+b$, $x+c$,... igual á

$$x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+P_3x^{m-3}+\dots+P_{n-1}x^{m-n+1}+$$
$$P_nx^{m-n}+\dots+P_{m-1}x+P_m$$

en el cual un coeficiente cualquiera P_n expresa la suma de los productos distintos de n segundos términos de los binómios, y vamos á demostrar que la ley se verifica tambien introduciendo un factor más $x+l$. En efecto, formando el nuevo producto se obtiene

$$\begin{array}{l}
x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\dots+P_nx^{m-n}+\dots+P^m \\
x+l \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
x^{m+1}+P_1 & x^m+P_2 & x^{m-1}+\dots+P_n & x^{m-n+1}+\dots+P_ml. \\
+l & +P_1l & +P_{n-1}l &
\end{array}$$

En donde vemos que los exponentes de x siguen la misma ley enunciada; en cuanto á los coeficientes, el primero es la unidad, el segundo es P_1+l; pero P_1 es la suma de los segundos términos de los m binómios; luego P_1+l es la de los $m+1$ que ahora se multiplican; el tercero es P_2+P_1l, pero P_2 es la suma de los productos binarios de los m segundos términos de los binómios, y P_1l es la de los productos binarios correspondientes al último segundo término y los m primeros; luego P_2+P_1l, es la suma de todos los productos binarios de los segundos términos. Y en general el $n+1$ coeficiente $P_n+P_{n-1}l$, nos expresa tambien la suma de los productos de todos los segundos términos tomados de n en n; porque P_n es la suma de los productos distintos de los m primeros segundos términos, y $P_{n-1}l$, expresa la suma de los productos de los m primeros segundos términos tomados de $n-1$ en $n-1$, multiplicados por l, y por consiguiente (148), $P_n+P_{n-1}l$ es la suma de todos los productos distintos que se pueden formar con los $m+1$ segundos términos tomados de n en n; por último el término final P_ml expresa el producto de todos los segundos términos de los binómios; luego la ley es general, y se tiene, suponiendo un número m de binómios,

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+l)=$$
$$x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\dots+P_nx^{m-n}+\dots+P_m. \quad [1]$$

156. Como el segundo miembro no es más que el resultado de las operaciones indicadas en el primero, deberá verificarse esta igual-

dad sean cualesquiera los valores de las cantidades a, b, c,... l; de modo que haciéndolas todas iguales á la cantidad a, el producto de los m primeros factores se convertirá en la *emésima* potencia del binómio $x+a$.

En cuanto al segundo miembro tendremos que, el primer término x^m no habrá cambiado, el coeficiente P_1 del segundo término siendo la suma de los segundos términos de los binómios, se habrá convertido en $P_1 = a+a+a...+a$ repetido m veces, ó sea $P_1 = ma$, el tercer coeficiente P_2 expresa la suma de los productos binarios de los segundos términos; por consiguiente haciéndose éstos iguales, se convertirá cada producto en el cuadrado de a, es decir, en a^2, y se hallará repetido tantas veces como combinaciones de dos letras se pueden formar con m, y por consiguiente dicho tercer coeficiente será

$$C_m^2 \times a^2 = m\frac{m-1}{2}a^2.$$

En general el coeficiente que ocupa el lugar $n+1$, que es P_n, expresa la suma de los productos distintos que se pueden formar con los m segundos términos de los binómios tomados de n en n, de modo que uno de estos productos se convertirá cuando los segundos términos sean iguales á a, en la enésima potencia de esta letra, es decir, en a^n, la cual se hallará repetida tantas veces como combinaciones se pueden formar con m letras tomadas de n en n, es decir, que

$$P_n = C_m^n \times a^n.$$

El último término se convierte en a^m; luego la fórmula [1] se convertirá, haciendo $a = b = c = d ... = l$, en la fórmula llamada de *Newton*

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + ... + C_m^n a^n x^{m-n} + ... + a^m.$$

157. Representando por T_{n+1} el término $C_m^n\, a^n\, x^{m-n}$ que se llama *término general*, porque dando á n los valores 1, 2, 3... hasta $m-1$, da todos los términos á partir del segundo, y reemplazando C_m^n por su valor $\dfrac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1.2.3.4...n}$ se tiene

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1.2.3...n}a^n x^{m-n}.$$

158. Si en este término general ponemos $n+1$ en vez de n, hallaremos el término siguiente T_{n+2}, y nos dará

$$T_{n+2} = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(m-n)}{1.2.3...n(n+1)}a^{n+1}x^{m-n-1},$$

cuyo término se puede poner bajo la forma,

$$T_{n+2}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\times\frac{m-n}{n+1}a^{n+1}x^{m-n-1}.$$

Comparando el término T_{n+2} con el anterior T_{n+1}, es decir, el término que ocupa el lugar $n+2$, con el que ocupa el lugar $n+1$, se verá que se obtiene aquel multiplicando el coeficiente de éste por el exponente $m-n$ de x, y partiendo el producto por el número de términos ya formados, aumentando una unidad al exponente de a y disminuyéndosela al de x.

De aquí se deduce el enunciado de la fórmula del binómio, que es el siguiente:

159. *Para elevar un binómio* (x+a) *á una cierta potencia, se eleva el primer término* x *á esta potencia, y así se obtiene el primer término del resultado, y para abtener cada uno de los restantes se multiplica el coeficiente del término anterior por el exponente que tenga* x, *se parte el producto por el número de términos que hay ya formados, despues se aumenta una unidad al exponente de* a *y se le disminuye al de* x.

Así, se tiene

$$(x+a)^9=x^9+9x^8a+36x^7a^2+84x^6a^3+126x^5a^4+$$
$$126x^4a^5+84x^3a^6+36x^2a^7+9xa^8+a^9.$$

* 160. *El número de términos de la emésima potencia de un binómio es evidentemente igual á* m+1, *y los coeficientes de los que están á igual distancia de los extremos, son iguales.*

En efecto, el coeficiente de un término cualquiera es el número de combinaciones que se pueden formar con m objetos, tomados de tantos en tantos como términos hay ántes de aquel que se considera; luego el coeficiente del término que tenga n ántes de sí, será C_m^n. Siendo $m+1$ el número total de términos, el que tenga n despues de sí, estará ocupando el lugar $m+1-n$, y por consiguiente tendrá delante $m-n$, y su coeficiente será C_m^{m-n}, y como se tiene (145) $C_m^n=C_m^{m-n}$, estos dos términos tienen el mismo coeficiente, segun queriamos demostrar.

Este principio se puede demostrar tambien fácilmente por la simetría del desarrollo.

* 161. *Los coeficientes de los términos del desarrollo, van creciendo hasta la mitad, y decrecen de la mitad en adelante.*

En efecto, la cantidad por la cual hay que multiplicar un coeficiente cualquiera para obtener el siguiente es (158), $\frac{m-n+1}{n}$, de modo que segun sea esta cantidad mayor ó menor que la unidad, los términos irán creciendo ó disminuyendo.

Ahora bien, si hacemos $\frac{m-n+1}{n}>1$, [1] se tendrá, multiplicando por n estas dos cantidades que son desiguales, $m-n+1>n$, y agregando á ambas la misma cantidad n, será $m+1>2n$, ó $2n<m+1$, de donde dividiendo por 2, se halla que la relacion [1] se verificará siempre que se tenga $n<\frac{m+1}{2}$; pero $m+1$ es el número de términos del desarrollo, luego siempre que n, que es el número de términos que van formados, sea menor que la mitad del número de términos del desarrollo, dichos términos tendrán coeficientes cada vez mayores.

Si m es un número impar $\frac{m+1}{2}$ será entero, y en ese caso podremos hacer $n=\frac{m+1}{2}$ de donde $\frac{m-n+1}{n}=1$, que nos dice que cuando m es impar hay dos términos en el centro que tienen coeficientes iguales y mayores que en todos los demás.

Si m es par, $m+1$ será impar, en cuyo caso no podremos igualar el número entero n al número fraccionario $\frac{m+1}{2}$, lo que prueba que cuando á n se le haya dado el valor $\frac{m}{2}$, se tendrá el coeficiente del término $\frac{m}{2}+1$, el cual será mayor que todos los demás.

Así, en el desarrollo del número (159) en que m es el número impar 9, hay dos términos medios que tienen el mayor coeficiente 126; pero en el desarrollo de $(x+a)^6=x^6+6x^5a+15x^4a^2+20x^3a^3+15x^2a^4+6xa^5+a^6$, en que el exponente es par, hay un solo término medio que tiene el coeficiente 20 mayor que en todos los demás.

162. Si el segundo término del binómio es negativo, no hay más que poner en el desarrollo los signos + y — alternados, pues serán las potencias de a alternativamente pares é impares y tendremos

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + m\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2} -$$

$$m\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}a^3x^{m-3} + \ldots \pm C_m^n a^n x^{m-n} \mp \ldots \pm a^m.$$

* 163. Si en las fórmulas que dan las potencias de $(x+a)^m$ y $(x-a)^m$ hacemos $x=a=1$, se obtiene; de la primera,

$$2^m = 1 + m + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \ldots C_m^n + \ldots C_m^m,$$

y de la segunda,

$$0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \ldots \pm C_m^n \mp \ldots \pm C_m^m;$$

de donde se deduce, que:

1.° *La suma de los coeficientes de la emésima potencia de un binómio* (x+a), *es siempre igual á la emésima potencia de* 2.

2.° *La suma de los coeficientes del lugar par, es igual siempre á la suma de los de lugar impar, pues su diferencia es cero.*

3.° *El número total de combinaciones que se puede hacer con* m *objetos tomados de todas las maneras posibles desde* 1 *en* 1, *hasta* m *en* m, *es igual á la emésima potencia de* 2 *disminuida en una unidad, es decir, á* 2^m-1.

164. Cuando se quiere aplicar la fórmula del binómio al desarrollo de una potencia de un binómio cualquiera, tal como $3a^2b+2cd$, no hay más que reemplazar x por $3a^2b$ y a por $2cd$, en el desarrollo de esa misma potencia de $(x+a)$.

* 165. El binómio $x+a$ puede ponerse bajo la forma $x\left(1+\frac{a}{x}\right)$ y haciendo $\frac{a}{x}=y$, se tiene $x+a=x(1+y)$, de donde

$$(x+a)^m = x^m(1+y)^m.$$

En esta expresion sólo hay que desarrollar la *emésima* potencia del binómio $(1+y)$, en cuyo desarrollo sólo entran las potencias de y; sustituyendo despues, en vez de x el valor que tenga en cada caso particular, y en vez de y la expresion $\frac{a}{x}$ en la cual se haya hecho la misma sustitucion, se tendrá la potencia de un binómio dado, como en la práctica se acostumbra.

* 166. La fórmula del binómio, tal como la hemos demostrado, sólo comprende el caso de ser el exponente m entero y positivo, ya consideraremos, en el segundo tomo de esta obra, su generalidad para los demás casos.

LECCION XVIII.

Cuadrado de un polinómio.—Cubo de un polinómio.—Potencia de un grado cualquiera de un polinómio, expresion del término general.

Cuadrado de un polinómio.

167. *El cuadrado de un polinómio cualquiera es igual al cuadrado del primer término, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo; más el duplo de la suma de los dos primeros por el tercero, más el cuadrado del tercero; y así sucesivamente hasta obtener el duplo de la suma de todos los términos ménos el último multiplicada por el último, más el cuadrado del último término.*

Sea un polinómio cualquiera cuyo cuadrado queremos hallar, y que supondremos, para fijar las ideas, que tiene ocho términos $a+b+c+d+e+f+g+h$; representémosle por P y haciendo $x=a+b+c+d+e+f+g$, se tendrá

$$P^2=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2.$$

Donde vemos que el cuadrado de un polinómio de un número n de términos, se podrá hallar, sabiendo determinar el de un polinómio que tiene un término ménos; y como este se determinará á su vez, sabiendo hallar el que tiene dos ménos que el propuesto, y así sucesivamente, llegaremos á hacer depender el cuadrado de un polinómio, del de un binómio, que ya se sabe determinar.

Así, haciendo ahora $y=a+b+c+d+e+f$, se tendrá

$$x^2=(y+g)^2=y^2+2yg+g^2.$$

Del mismo modo haciendo $z=a+b+c+d+e$, se tiene

$$y^2=(z+f)^2=z^2+2zf+f^2;$$

de la misma manera se hará $u=a+b+c+d$, de donde

$$z^2=(u+e)=u^2+2ue+e^2;$$

haciendo despues $v=a+b+c$, se tendrá

$$u^2=(v+d)^2=v^2+2vd+d^2,$$

y por último, siendo $t=a+b$, tendremos

$$v^2=(t+c)^2=t^2+2tc+c^2,$$

y

$$t^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Sumando ahora estas igualdades y quitando de ambos miembros las cantidades comunes x^2, y^2, z^2... se tendrá

$$P^2=a^2+2ab+b^2+2tc+c^2+2vd+d^2+2ue+e^2+2zf+f^2+2yg+g^2 \\ +2xh+h^2,$$

en la cual sustituyendo en vez de t, v, u... sus valores respectivos, se tendrá

$$P^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2+ \\ 2(a+b+c+d)e+e^2+2(a+b+c+d+e)f+f^2+ \\ 2(a+b+c+d+e+f)g+g^2+2(a+b+c+d+e+f+g)h+h^2,$$

que justifica la regla dada.

Cubo de un polinómio.

168. *El cubo de un polinómio cualquiera es igual al cubo del primer término, más el triplo del cuadrado del primer término por el segundo, más el triplo del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo; más el triplo del cuadrado de la suma de los dos primeros por el tercero, más el triplo de la suma de los dos primeros por el cuadrado del tercero, más el cubo del tercero; y así sucesivamente hasta obtener el triplo del cuadrado de la suma de todos los términos ménos el último por este último, más el triplo de la suma de estos términos por el cuadrado del último, más el cubo del último.*

Se demuestra de la misma manera que en el cuadrado.

Sea $a+b+c+d+e$ el polinómio cuyo cubo queremos hallar, representémosle por P, hagamos $x=a+b+c+d$, y se tendrá

$$P^3=(x+e)^3=x^3+3x^2e+3xe^2+e^3. \quad [1]$$

Haciendo ahora $y=a+b+c$, se tendrá:

$$x^3=(y+d)^3=y^3+3y^2d+3yd^2+d^3. \quad [2]$$

Por último, haciendo $z=a+b$, se tiene:

$$y^3=(z+c)^3=z^3+3z^2c+3zc^2+c^3$$

y

$$z^3=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \quad [3]$$

Sumando las igualdades [1], [2], [3], y quitando los sumandos x^3, y^3, y z^3, comunes de ambos miembros, se tiene:

$$P^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3z^2c + 3zc^2 + c^3 + 3y^2d + 3yd^2 + d^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3;$$

y poniendo ahora en vez de z, y, x, sus valores, se tendrá:

$$P^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 + 3(a+b+c+d)^2e + 3(a+b+c+d)e^2 + e^3;$$

que justifica la regla.

Potencia de un grado cualquiera de un polinómio, expresion del término general.

* 169. Siguiendo el mismo método que en el cuadrado y cubo de un polinómio, podríamos deducir la formacion de la 4.ª, 5.ª... potencias de un polinómio cualquiera; pero estas reglas van siendo cada vez más complicadas á medida que el exponente de la potencia aumenta, por lo cual no las daremos, y sólo haremos ver que la *emésima* potencia de un polinómio se puede hacer depender siempre de las potencias de otro polinómio que tiene un término ménos, las de éste de las de otro que tenga dos términos ménos, y por consiguiente de un binómio.

En efecto, sea un polinómio $a+b+c+d+e$... Representando por x la suma de todos los términos ménos el primero, se tendrá $x=b+c+d+e+$... y siendo P el polinómio, tendremos

$$P^m = (a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \ldots + C^n_m a^{m-n}x^n + \ldots + x^m;$$

donde vemos que la *emésima* potencia del polinómio P depende de las potencias de x, que es un polinómio que tiene un término ménos.

Haciendo con x lo mismo que con P se tendrá, estableciendo la igualdad $y=c+d+e+\ldots$

$$x^m = (b+y)^m = b^m + mb^{m-1}y + \ldots + C^n_m b^{m-n}y^n + \ldots + y^m;$$

y haciendo $z=d+e+\ldots$, se tendrá

$$y^m = (c+z)^m = c^m + mc^{m-1}z + \ldots + C^n_m c^{m-n}z^n + \ldots + z^m;$$

y así sucesivamente, hasta llegar á la *emésima* potencia de un binómio; en cuyo caso se tendrá la *emésima* potencia de P, en funcion de las potencias de polinómios que tienen uno, dos, tres, etc., términos ménos.

* 170. Para hallar la expresion del término general del desar-

rollo de la *emésima* potencia de un polinómio, hallaremos las expresiones de los términos generales de los binómios.

$$P=a+x,\quad x=b+y,\quad y=c+z,\quad z=d+u,\quad u=e+f\ldots$$

El del primero es, como ya se sabe,

$$T_{n+1}=C^n_m a^{m-n}x^n.\quad [1]$$

El término general de $x^n=(b+y)^n$, será

$$T_{p+1}=C^p_n b^{n-p}y^p.\quad [2]$$

El del binómio $y^p=(c+z)^p$, es

$$T_{q+1}=C^q_p c^{p-q}z^q.\quad [3]$$

El de $z^q=(d+u)^q$, será

$$T_{r+1}=C^r_q d^{q-r}u^r.\quad [4]$$

Y suponiendo que u sea ya el último binómio $u=e+f$, se tendrá para su término general,

$$T_{s+1}=C^s_r e^{r-s}f^s.$$

Este término nos da todas las potencias de u, dando á s valores desde 1 hasta r; por consiguiente, poniendo en el término [4] en vez de u^r, la expresion del término general, hallaremos $C^r_q\times C^s_r d^{q-r}e^{r-s}f^s$, que nos dará todas las potencias de z, dando respectivamente á r y s valores desde 1 hasta q y r; luego sustituyendo en el término general [3] en vez de z^q, la expresion de su término general anterior, se tendrá, $C^q_p\times C^r_q\times C^s_r c^{p-q}d^{q-r}e^{r-s}f^s$, que nos dará todas las potencias de y^p.

Del mismo modo, la expresion que se obtiene sustituyendo la anterior en [2], que es $C^p_n\times C^q_p\times C^r_q\times C^s_r b^{n-p}c^{p-q}d^{q-r}e^{r-s}f^s$, nos da las potencias de x^n; luego el término general será

$$T=C^n_m\times C^p_n\times C^q_p\times C^r_q\times C^s_r a^{m-n}b^{n-p}c^{p-q}d^{q-r}e^{r-s}f^s.$$

Si reemplazamos por C^n_m, C^p_n, $C^q_r\cdots$ sus valores (145), se tendrá por expresion del término general, quitando los factores comunes al numerador y denominador,

$$\frac{1.2.3.4.5\ldots\ldots m}{1.2\ldots(m-n)\times1.2\ldots(n-p)\times1.2\ldots(p-q)\times1.2\ldots(q-r)\times1.2\ldots(r-s)\times1.2\ldots s}a^{m-n}b^{n-p}c^{p-q}d^{q-r}e^{r-s}f^s.$$

Y si observamos que $m-n+n-p+p-q+q-r+r-s+s=m$, podremos reemplazar $m-n$, $n-p$, $p-q$, $q-r$, y $r-s$, por n', p', q', r', s', teniendo presente que se ha de verificar la igualdad de condicion $n'+p'+q'+r'+s'+s=m$, y la expresion del término general se convertirá entónces en

$$T=\frac{1.2.2.3\ldots\ldots m}{1.2\ldots n'\times1.2\ldots p'\times1.2\ldots q'\times1.2\ldots r'\times1.2\ldots s\times1.2\ldots s}a^{n'}b^{p'}c^{q'}d^{r'}e^{s'}f^s.$$

Observacion. Como las cantidades n', p', q'... no tienen que satisfacer á más condicion que ser enteras, positivas, y que su suma sea igual á m, puede suceder que algunas de estas cantidades sea *cero*, y entónces esta fórmula no tendria interpretacion ni sentido, así como no la tendria la fórmula de las combinaciones

$$C_m^n=\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots(m-n)},$$

haciendo en ella $n=0$, ó $m=n$; pero esta fórmula, lo mismo que la que expresa el término general, tendrá aplicacion, áun en estos casos, si convenimos en representar por 1 el producto de los términos $1.2.3\ldots n$, en el caso de ser $n=0$, ó suponer que es 1 la série de los términos $1.2.3\ldots(m-n)$, cuando se tenga $m=n$; esto equivale á no considerar aquellos productos que terminen en el factor *cero*.

Con este convenio, la fórmula es aplicable en todos los casos.

LECCION XIX.

Raíces en general de los monómios.—Raíz cuadrada de los polinómios.

Raíces en general de los monómios.

171. *La raiz* EMÉSIMA *de un producto es igual al producto de las raices* EMÉSIMAS *de los factores.*

Cuando el índice de la potencia es entero y positivo, ya lo hemos demostrado (*Arit.* 293), demostrémoslo ahora para los demás casos, es decir, para cuando el índice m de la raíz sea fraccionario ó inconmensurable, positivo ó negativo.

Sea el índice un número fraccionario $m=\frac{p}{q}$, y demostremos que se verifica tambien la igualdad

$$\sqrt[m]{ABC}=\sqrt[m]{A}.\sqrt[m]{B}.\sqrt[m]{C}.$$

En efecto, se tiene (44) que

$$\sqrt[\frac{q}{p}]{ABC}=\sqrt[p]{(ABC)^q}=\sqrt[p]{A^qB\,C^q}, \qquad [1]$$

y como p es un número entero, se tendrá (*Arit.* 293),

$$\sqrt[p]{A^qB^qC^q}=\sqrt[p]{A^q}.\sqrt[p]{B^q}.\sqrt[p]{C^q}=A^{\frac{q}{p}}.B^{\frac{q}{p}}.C^{\frac{q}{p}};$$

pero $\quad A^{\frac{q}{p}}=\sqrt[\frac{p}{q}]{A}$ (39); luego, $\sqrt[p]{A^qB^qC^q}=\sqrt[\frac{p}{q}]{A}.\sqrt[\frac{p}{q}]{B}.\sqrt[\frac{p}{q}]{C}$,

y sustituyendo este valor en la igualdad [1], se tiene

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{ABC}=\sqrt[\frac{p}{q}]{A}.\sqrt[\frac{p}{q}]{B}.\sqrt[\frac{p}{q}]{C},$$

segun queriamos demostrar.

Si m es un número inconmensurable, la raíz *emésima* del producto será el límite hácia el cual se aproximan las raíces de ese producto sustituyendo por el número inconmensurable números conmensurables que se les vayan aproximando cada vez más, y como en todos estos casos la raíz del producto, es, segun lo demostrado anteriormente, igual al producto de las raíces del mismo grado de los factores, en el límite tambien serán iguales (*Arit.* 47 SEGUNDO); luego siendo m inconmensurable, se verifica tambien el principio.

Sea, por último, m un número negativo $-n$, cuyo valor puede ser entero, quebrado ó inconmensurable, y se tendrá

$$\sqrt[-n]{ABC}=\frac{1}{\sqrt[n]{ABC}};$$

pero $\quad \dfrac{1}{\sqrt[n]{ABC}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}.\sqrt[n]{C}}=\sqrt[-n]{A}.\sqrt[-n]{B}.\sqrt[-n]{C};$

luego $\quad \sqrt[-n]{ABC}=\sqrt[-n]{A}.\sqrt[-n]{B}.\sqrt[-n]{C},$

segun queriamos probar.

172. *Para extraer la raíz de un grado cualquiera de un monómio, se extrae la raíz del mismo grado del coeficiente, y de las letras ó factores que le constituyan, y el producto de estas raíces será la raíz pedida.* Así,

$$\sqrt[m]{6a^2bc^3\sqrt{d}}=\sqrt[m]{6}\sqrt[m]{a^2}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c^3}\sqrt[m]{\sqrt{d}}=\sqrt[m]{6}\,a^{\frac{2}{m}}b^{\frac{1}{m}}c^{\frac{3}{m}}\sqrt[2m]{d}.$$

En efecto, el monómio propuesto se puede considerar como el producto del coeficiente por el producto de las potencias de las letras que le forman, y como la raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores (161), la regla queda justificada.

173. Podemos considerar como caso particular aquel en que el índice de la raíz sea un número entero y positivo, y siguiendo la regla general, veremos que *para extraer la raiz* EMÉSIMA *de un monómio, se extrae la raiz* EMÉSIMA *del coeficiente, y se parten los exponentes de la letra por el índice entero* m, *el resultado llevará el doble signo* $\pm$ *si el índice es par, y el signo de la cantidad si fuese impar. Si el índice es par y la cantidad lleva el signo* —, *la raiz es* IMAGINARIA. Así,

$$\sqrt[4]{81a^8b^4c^{12}} = \pm 3a^2bc^3,$$

$$\sqrt[5]{32a^{10}b^{15}c^5} = 2a^2b^3c, \text{ y } \sqrt[5]{-32a^{10}b^{15}c^5} = -2a^2b^3c.$$

Desde luégo se comprende que todo monómio, cuya raíz hemos de hallar, no siempre será una potencia exacta del mismo grado que indica el índice del radical, como ha sucedido en los tres casos anteriores; pues para que así suceda y podamos obtener una raíz exacta, es necesario que el coeficiente sea una potencia exacta del mismo grado que indica el índice de la raíz, y que todos y cada uno de los exponentes de las letras del monómio sean divisibles por el índice de la misma. Si falta alguna de estas condiciones, la raíz hallada no puede ser racional y entera como se pide, y entónces se dice que no es exacta.

174. Cuando el monómio, cuya raíz queremos hallar, no tiene raíz exacta, por faltar alguna de las dos condiciones citadas, queda indicada la raíz con el signo $\sqrt{}$ dando orígen á los radicales, como ya sabemos; y aquí, lo mismo que en Aritmética, podremos, fundándonos en el mismo principio de que la raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores, simplificar estas expresiones radicales, sacando fuera todo cuanto sea posible.

Para ello, si el coeficiente no es una potencia del mismo grado que indica el índice del radical, se verá si se puede descomponer en dos factores de los cuales uno sea la mayor potencia posible del mismo grado que el índice; y respecto á las letras se formará otro producto de dos factores, de los que uno contenga á dichas letras con los mayores exponentes divisibles por el índice, y de este modo habremos descompuesto el monómio en el producto de otros dos, uno que tendrá raíz exacta y que podremos obtener, y otro que no la tendrá, por lo cual quedará indicada. Así,

$$\sqrt[4]{48a^5b^{11}c^4d^2}=\sqrt[4]{16a^4b^8c^4\times 3ab^3d^2}=\sqrt[4]{16a^4b^8c^4}.\sqrt[4]{3ab^3d^2}=$$
$$2ab^2c\sqrt[4]{3ab^3d^2}.$$

175. Recíprocamente, cuando una cantidad multiplica á un radical, puede introducirse esta cantidad debajo del signo, multiplicando la cantidad subradical por una potencia del mismo grado que indica el índice del radical, de la cantidad que hay fuera como factor. Así,

$$2ab^2c\sqrt[4]{3ab^3d^2}=\sqrt[4]{16a^4b^8c^4}.\sqrt[4]{3ab^3d^2}=\sqrt[4]{16a^4b^8c^4\times 3ab^3d^2}=$$
$$\sqrt[4]{48a^5b^{11}c^4d^2}.$$

Raiz cuadrada de los polinómios.

176. La extraccion de la raíz cuadrada de un polinómio está fundada en los dos principios siguientes.

177. *Si un polinómio, que suponemos ser el cuadrado de otro llamado raíz, está ordenado con relacion á una letra cualquiera, el primer término de dicho polinómio es, sin reduccion alguna, el cuadrado del primer término de la raíz, ordenada tambien con relacion á la misma letra.*

En efecto, el cuadrado de un polinómio es el producto que resulta de multiplicar este polinómio por sí mismo; luego, si está ordenado el primer término del producto será (66) el producto de los dos primeros términos de los factores, y como éstos son iguales, este producto se convierte en el cuadrado del primer término del polinómio que se multiplica, segun queríamos demostrar.

178. *Si un polinómio y su raíz cuadrada están ordenados con relacion á una letra, y restamos de este polinómio el cuadrado de los* n *primeros términos de la raíz, el primer término del resto será, sin reduccion alguna, el duplo del primer término de la raíz por el término* n+1.

Representemos por A la suma de los n primeros términos de la raíz del polinómio P, y por B la suma de los términos restantes: supongamos ordenados con relacion á una letra el polinómio P y su raíz, de modo que se tendrá

$$P=(A+B)^2=A^2+2AB+B^2,$$

y restando de ambos miembros el cuadrado A^2 de la suma de los n primeros términos de la raíz, hallaremos, llamando R al resto,

$$P-A^2=R=2AB+B^2$$

Sean ax^α y bx^β los primeros términos de los polinómios A y B; el primer término del producto 2AB será $2abx^{\alpha+\beta}$, el cual no podrá reducirse ni destruirse con ninguno de los demás términos del mismo producto (66); tampoco podrá reducirse ni destruirse con ninguno de los términos del cuadrado B^2, por venir afectado de una potencia de la letra ordenatriz x mayor que en todos los términos de B^2 cuya mayor potencia tiene el exponente $2\beta<\alpha+\beta$; pero dicho primer término $2abx^{\alpha+\beta}$ es el duplo del primer término de la raíz por el primero de B, que es el $(n+1)$ de la misma; luego el primer término del resto es, sin reduccion alguna, el duplo del primer término de la raíz por el término $n+1$, segun queríamos demostrar.

179. *Para extraer la raíz cuadrada de un polinómio se ordena con relacion á una letra, se extrae la raíz cuadrada del primer término y se obtendrá el primer término de la raíz, el cual se eleva al cuadrado y se resta del polinómio propuesto, lo que equivale á tachar el primer término; despues se divide el primer término del resto por el duplo del primer término de la raíz, y el cociente será el segundo término; se escribe á la derecha del duplo del primero con el signo que tenga, se multiplica el binómio que resulte por dicho segundo término, y el producto se resta del resto anterior, lo que nos dará un nuevo resto cuyo primer término dividido por el duplo del primer término de la raíz, nos dará el tercer término, que se escribirá á la derecha del duplo de los dos primeros y multiplicando por él el trinómio que resulte, se restará el producto del resto anterior; se volverá á dividir el primer término del resto por el duplo del primer término de la raíz, y así se continuará hasta llegar á un resto cero, ó un resto cuyo primer término dividido por el duplo del primer término de la raíz dé un término en el cual la letra ordenatriz tenga un exponente menor que la mitad del exponente de esta letra en el último término del polinómio ordenado con relacion á las potencias decrecientes de la misma; en el primer caso, la raíz hallada será exacta; en el segundo, no.*

Sea el polinómio P ordenado con relacion á las potencias decrecientes de una letra x; segun el principio (177), el primer término de P será, sin reduccion alguna, el cuadrado del primer término de la raíz que vamos buscando; luego si extraemos, segun la regla, la raíz cuadrada de este término, hallaremos exactamente el primer término de la raíz.

Despues elevamos al cuadrado este término y el resultado lo restamos de P, lo cual equivale, como hemos dicho, á tachar el primer término, y segun el principio (178) el primer término del resto, que llamaremos R, será, sin reduccion, el duplo del primer término de la raíz por el segundo; luego dividiendo el primer término del resto R por el duplo del primer término de la raíz, hallaremos exactamente el segundo término de dicha raíz.

En seguida, colocamos este segundo término á la derecha del duplo del primero, y el binómio que resulta se multiplica por el segundo término hallado, lo que equivale á formar el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo; cuyo producto se resta del resto R, y como este resto se obtuvo restando de P el cuadrado del primer término de la raíz, el nuevo resto R', hallado segun la regla, es el que se obtiene restando de P el cuadrado del primer término, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término de la raíz, es decir, el cuadrado de la suma de los dos primeros términos; luego segun el principio demostrado (178), dividiendo el primer término de nuevo resto R', por el duplo del primer término de la raíz, hallaremos exactamente el tercer término de esta, y del mismo modo iremos hallando sucesivamente todos los demás.

Si llegamos al resto cero, la raíz hallada por la regla anterior, será la raíz exacta; pues restando su cuadrado del polinómio propuesto, da cero de resto. Si llegamos á obtener un resto cuyo primer término dividido por el duplo del primer término de la raíz, da un término en el cual la letra ordenatriz tiene un exponente menor que la mitad del exponente de esta letra en el último término del polinómio dado, podremos no continuar la série de operaciones, seguros de que el polinómio propuesto no tiene raíz exacta; pues si la tuviera, el último término sería el cuadrado del último término de la raíz, y por lo tanto el exponente de la letra ordenatriz sería la mitad del exponente de esta letra en el último término del polinómio, y como por hipótesis es menor que dicha mitad, el cuadrado de este término dará una potencia de la letra ordenatriz de menor grado que la que tiene en el último término del polinómio; luego no se podrá ya destruir con ningun término de éste, y la raíz será inexacta.

180. Además de estos carácteres para saber si un polinómio entero tiene ó nó raíz cuadrada entera exacta, hay otros más sencillos que nos indican desde luégo cuando no la tiene.

Así, si un polinómio ordenado con relacion á una letra no tiene por primero y último término dos que sean cuadrados perfectos, no puede tener raíz cuadrada exacta; lo cual se deduce de la formacion del cuadrado (167).

Si alguno de los primeros términos de las restas que sucesivamente se obtienen en la série de los cálculos, no es divisible por el duplo del primer término de la raíz, tampoco puede tener raíz cuadrada exacta entera.

Sea por ejemplo, extraer la raíz cuadrada del polinómio.

$$4a^2x^6+a^6-4a^6x+4a^3x^5-7a^4x^4+2a^5x^2+4a^4x^3+4a^6x^2-4a^5x^3.$$

Despues de ordenado con relacion á x, dispondremos la operacion del modo siguiente:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{4a^2x^6+4a^3x^5-7a^4x^4\left.\begin{matrix}-4a^5\\+4a^4\end{matrix}\right|x^3+\left.\begin{matrix}4a^6\\+2a^5\end{matrix}\right|x^2-4a^6x+a^6}\\
\underline{-4a^2x^6}\\
\qquad \underline{-4a^3x^5-a^4x^4}\\
\qquad\qquad -8a^4x^4\\
\qquad\qquad \underline{+8a^4x^4+4a^5x^3-4a^6x^2}\\
\qquad\qquad\qquad 4a^4x^3+2a^5x^2\\
\qquad\qquad\qquad \underline{-4a^4x^3-2a^5x^2+4a^6x-a^6}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
\quad\Bigg\|\quad
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\underline{2ax^3+a^2x^2-2a^3x+a^3}}\\
4ax^3+a^2x^2 & 4ax^3+2a^2x^2-2a^3x\\
\underline{\qquad a^2x^2} & \underline{\qquad -2a^3x}\\
\multicolumn{2}{l}{4a^3x^5+a^4x^4-8a^4x^4-4a^5x^3+4a^6x^2}\\
\multicolumn{2}{l}{4ax^3+2a^2x^2-4a^3x+a^3}\\
\multicolumn{2}{l}{\underline{\qquad\qquad +a^3}}\\
\multicolumn{2}{l}{4a^4x^3+2a^5x^2-4a^6x+a^6}
\end{array}$$

LECCION XX.

Raíz cúbica de los polinómios.—Raíz de un grado cualquiera de los polinómios.

Raíz cúbica de los polinómios.

181. *Si un polinómio, que suponemos ser el cubo de otro llamado raíz, está ordenado con relacion á una letra, el primer término de di-*

cho polinómio es, sin reduccion alguna, el cubo del primer término de la raíz ordenada con relacion á la misma letra.

En efecto, el cubo de un polinómio es el producto que resulta de multiplicar este polinómio por el cuadrado del mismo, luego, si estos factores están ordenados con relacion á una letra, el primer término del producto será, sin reduccion alguna, el producto de los dos primeros términos de los factores; pero el del uno es el cuadrado del primer término; luego el primer término del polinómio es el cubo del primer término de la raíz.

182. *Si un polinómio y su raíz cúbica están ordenados con relacion á una misma letra, y restamos de este polinómio el cubo de la suma de los* n *primeros términos de la raíz, el primer término de resto será, sin reduccion alguna, el triplo del cuadrado del primer término de la raíz, por el* n+1 *término.*

Representemos por A la suma de los n primeros términos de la raíz cúbica de un polinómio P, y por B la de los términos restantes de dicha raíz, la cual lo mismo que P supondremos ordenados con relacion á una misma letra; de modo que tendremos $P=(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$, y restando de ambos miembros el cubo A^3 de la suma de los n primeros términos; se tendrá

$$P-A^3=R=3A^2B+3AB^2+B^3.$$

Sean ax^α y bx^β los primeros términos de los polinómios A y B, el primer término del producto $3A^2B$ será $3a^2bx^{2\alpha+\beta}$ el cual no podrá reducirse ni destruirse con ninguno de los términos del mismo producto (66); tampoco podrá reducirse ni destruirse con ninguno de los términos del producto $3AB^2$ ni del cubo B^3, por venir afectado de una potencia de la letra ordenatriz x mayor que en todos los términos de $3AB^2$ y B^3 cuyas mayores potencias tienen los exponentes $\alpha+2\beta<2\alpha+\beta$; y $3\beta<2\alpha+\beta$; pero dicho primer término $3a^2bx^{2\alpha+\beta}$ es el triplo del cuadrado del primer término de la raíz por el primer término de B que es el $n+1$; luego el primer término del resto es el triplo del cuadrado del primer término de la raíz por el $n+1$ término de la misma, segun queríamos demostrar.

183. *Para extraer la raíz cúbica de un polinómio, se ordena con relacion á las potencias de una letra, se extrae la raíz cúbica del primer término y se obtiene el primer término de la raíz, cuyo cubo se resta del polinómio; el primer término de la resta se divide por el triplo del cuadrado del primer término de la raíz; y el cociente será exacta-*

mente el segundo término de esta raíz; á la derecha del triplo del cuadrado del primer término se escribe el triplo del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo, se multiplica esta suma por el segundo término, y el producto se resta del resto anterior; el primer término del resto se divide por el triplo del cuadrado del primer término de la raíz, y hallaremos el tercer término; se colocará á la derecha del triplo del cuadrado de la suma de los dos primeros el producto del triplo de la suma de los dos primeros términos por el tercero, más el cuadrado del tercero, se multiplicará el resultado por dicho tercer término y el producto se restará del resto anterior; y así continuaremos hasta hallar un resto cero, ó un resto en el cual nos veamos obligados á escribir en la raíz un término en el cual la letra ordenatriz tenga un exponente menor que la tercera parte del exponente de esta letra en el último término del polinómio. En el primer caso, la raíz será exacta; en el segundo, no.

De la misma manera que en la raíz cuadrada de los polinómios, se demuestra esta regla con el auxilio de los dos principios (181 y 182).

Sea, por ejemplo, extraer la raíz cúbica del polinómio $8x^6+8a^6+12ax+12ax^5+30a^2x^4+30a^4x^2+25a^3x^3$. Despues de ordenado con relacion á x, dispondremos la operacion del modo siguiente:

$\sqrt[3]{8x^6+12ax^5+30a^2x^4+25a^3x^3+30a^4x^2+12a^5x+8a^6}$	$2x^2+ax+2a^2$
$-8x^6$	$12x^4+6ax^3+a^2x^2$
	ax
$-12ax^5-6a^2x^4-a^3x^3$	$12ax^5+6a^2x^4+a^3x^3$
$24a^2x^4+24a^3x^3$	$12x^4+12ax^3+3a^2x^2+12a^2x^2+6a^3x+4a^4$
$-24a^2x^4-24a^3x^3-30a^4x^2-12a^5x-8a^6$	$2a^2$
0	$24a^2x^4+24a^3x^3+6a^4x^2+24a^4x^2+12a^5x+8a^6$

El primer término $8x^6$ debe ser, segun el principio (181), el cubo del primer término de la raíz; luego extrayendo, segun dice la regla, la raíz cúbica de este término, hallaremos el primer término $2x^2$ de la raíz, cuyo cubo $8x^6$ restaremos del polinómio propuesto que llamaremos P; el primer término $12ax^5$ del resto que llamaremos R, es sin reduccion, segun el principio (182), el triplo del cuadrado del primer término de la raíz por el segundo; luego dividiendo $12ax^5$ por $12x^4$, hallaremos, conforme á la regla, el segundo término ax de la raíz.

Una vez hallados estos dos términos, debemos restar del polinómio P, el cubo de su suma, y como ya hemos restado el cubo del primer término, sólo nos falta restar el triplo del cuadrado del primer término por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo; pero colocando á la derecha del triplo del cuadrado del primer término, el triplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo, y multiplicando este trinómio por el segundo, se hallan las tres partes que hay que restar de R, lo que está conforme con la regla; hecho esto, hallamos $24a^2x^4$ por primer término de la nueva resta R′, el cual dividido por el triplo del cuadrado del primer término, ó sea por $12x^4$, hallamos para tercer término $2a^2$, y colocando á la derecha de $12x^4+12ax^3+3a^2x^2$, que es el triplo del cuadrado de la suma de los dos primeros términos, el triplo de esta suma multiplicada por el tercer término, y el cuadrado del mismo, y multiplicando el resultado por dicho tercer término, hallamos la cantidad que restada de R′ nos da cero, y como esto equivale á haber restado del polinómio P el cubo del polinómio hallado $2x^2+ax+2a^2$, habiendo obtenido por resto cero, es señal que el polinómio hallado es la raíz exacta de P.

184. Si hubiéramos hallado un resto cuyo primer término dividido por el triplo del cuadrado del primer término de la raíz, diese un término para esta raíz en el cual la letra ordenatriz tuviese un exponente menor que la tercera parte del exponente de esta letra en el último del polinómio dado, era señal de que no tenia dicho polinómio raíz cúbica exacta. En efecto, si la tuviera, el cubo del último término de la raíz deberia ser igual al último término del polinómio, y por consiguiente el exponente de la letra ordenatriz de aquél, seria igual á la tercera parte del exponente de la misma letra en éste; y como, por hipótesis, el exponente es menor que esta tercera parte, su cubo será de menor grado con relacion á esta letra que el último del polinómio; luego no se podrá destruir con ninguno de ellos, y la raíz no será exacta.

185. Se conocerá además que un polinómio no tiene raíz cúbica exacta, cuando ordenado con relacion á una letra, el primero y último término no sean cubos perfectos; ó cuando alguno de los primeros términos de los restos que se hallan, no sea exactamente divisible por el triplo del cuadrado del primer término de la raíz.

Raíz de un grado cualquiera de los polinómios.

186. *Si un polinómio que suponemos ser la* EMÉSIMA *potencia de*

otro llamado raíz, está ordenado con relacion á una letra, el primer término de dicho polinómio es, sin reduccion alguna, la EMÉSIMA *potencia del primer término de la raíz ordenada con relacion á la misma letra.*

En efecto, la *emésima* potencia de un polinómio es el producto de m factores iguales á este polinómio; luego si éste está ordenado con relacion á una letra, el producto de los dos primeros tambien lo estará, y su primer término será el cuadrado del primer término de la raíz; el de los tres primeros será el cubo; el de los cuatro, la cuarta potencia; y en general el de los m, será la *emésima* potencia del primer término de la raíz.

187. *Si un polinómio y su raíz* EMÉSIMA *están ordenados con relacion á una misma letra, y restamos de este polinómio la* EMÉSIMA *potencia de la suma de los* n *primeros términos de la raíz, el primer término del resto será, sin reduccion alguna,* m *veces la* (m—1) *potencia del primer término de la raíz, por el término* n+1.

Representemos por A la suma de los n primeros términos de la raíz *emésima* de un polinómio P, y por B la suma de los términos restantes de dicha raíz, en la cual, lo mismo que en P, supondremos están ordenados con relacion á una misma letra, de modo que tendremos

$$P=(A+B)^m=A^m+mA^{m-1}B+\ldots+C^n_m A^{m-n}B^n+\ldots+B^m,$$

y restando de ámbos miembros la *emésima* potencia A^m de la suma de los n primeros términos, se tendrá

$$P-A^m=mA^{m-1}B+\ldots+C^n_m A^{m-n}B^n+\ldots+B^m.$$

Sean ax^α y bx^β los primeros términos de los polinómios A y B; el primer término del producto $mA^{m-1}B$ será $ma^{m-1}bx^{(m-1)\alpha+\beta}$ el cual no podrá reducirse ni destruirse con ninguno de los términos del mismo producto (66); tampoco podrá reducirse ni destruirse con ninguno de los términos de los demás productos, para lo cual basta probar que no puede reducirse ni destruirse con ninguno de los términos del producto general $C^n_m A^{m-n}B^n$. En efecto, el primer termino del resto viene afectado de una potencia de la letra ordenatriz x cuyo exponente es $(m-1)\alpha+\beta$, y la mayor potencia del término general tiene por exponente $(m-n)\alpha+n\beta$, y como

$$(m-1)\alpha+\beta-[(m-n)\alpha+n\beta]=m\alpha-\alpha+\beta-m\alpha+n\alpha-n\beta=$$
$$(n-1)\alpha-(n-1)\beta>0,$$

por ser $\alpha>\beta$, nos prueba que el primer término de $mA^{m-1}B$ viene afectado de una potencia de x mayor que en todos los términos del producto general $C_m^n\, A^{m-n}B^n$ y por tanto no puede reducirse ni destruirse con ninguno; pero dicho primer término es igual á m veces, la $m-1$ potencia del primer término de la raíz del polinómio P multiplicado por el primer término de B, que es el $n+1$ de dicha raíz; luego el primer término del resto es igual, sin reduccion alguna, á m veces la $m-1$ potencia del primer término de la raíz, por el término $n+1$ de la misma, segun queríamos demostrar.

188. *Para extraer la raiz* EMÉSIMA *de un polinómio, se ordena con relacion á una letra, se extrae la raiz* EMÉSIMA *del primer término, y obtenemos el primer término de la raiz, el cual se eleva á la* EMÉSIMA *potencia y el resultado se resta del polinómio propuesto; el primer término del resto se divide por* m *veces la* (m—1) *potencia del primer término de la raiz, y se obtiene el segundo término, se eleva el binómio hallado á la* EMÉSIMA *potencia y se resta el resultado del polinómio propuesto; el primer término del resto se divide por* m *veces la* (m—1) *potencia del primer término de la raiz, y el cociente es el tercer término de ésta, se eleva la raiz hallada á la* EMÉSIMA *potencia y ésta se resta del polinómio propuesto, y así se continúa hasta llegar á un resto* CERO, *en cuyo caso la raiz hallada es la raiz emésima exacta del polinómio dado; ó un resto cuyo primer término dividido por* m *veces la* (m—1) *potencia del primer término de la raiz, nos dé un término en el cual la letra ordenatriz tenga un exponente menor que la* EMÉSIMA *parte del exponente de la misma letra en el último término del polinómio, en cuyo caso el polinómio propuesto no tiene raiz* EMÉSIMA *exacta.*

Esta regla se demuestra del mismo modo que se hizo en la raíz cuadrada, con el auxilio de los dos principios correspondientes (186 y 187).

189. En general un polinómio ordenado con relacion á una letra no puede tener raíz *emésima* exacta, si su primero y último término no son *emésimas* potencias exactas, ó si alguno de los primeros términos de los restos que se obtienen en la série de los cálculos no es divisible por m veces la $(m-1)$ potencia del primer término de la raíz.

190. Hemos supuesto en la extraccion de raíces de los polinómios, que estos se ordenan con relacion á las potencias decrecientes de una letra, y en esta hipótesis hemos dicho que debemos parar

la série de operaciones que se practican para extraer la raíz de un polinómio, cuando hallemos un resto que nos dé un término en la raíz que contenga á la letra ordenatriz con un exponente respectivamente menor que la mitad, tercera, y en general emésima parte del exponente que dicha letra tiene en el último término del polinómio, segun se trate de la raíz cuadrada, cúbica y en general *emésima*; pero si se hubieran ordenado con relacion á las potencias crecientes, entónces los términos de la raíz tambien vendrian ordenados con relacion á las potencias crecientes de esta letra, y como si un polinómio tiene raíz *emésima* exacta, su último término ha de ser exactamente la emésima potencia del último término de la raíz, si llegamos sin hallar un resto cero, á un resto que nos dé en la raíz un término de mayor grado con relacion á la letra ordenatriz, que la *emésima* parte del exponente de la misma letra en el último término del polinómio, debemos no continuar la operacion, pues cada vez hallaremos términos de mayor grado y nunca llegaremos á encontrar raíz exacta.

LECCION XXI.

Radicales algebráicos, multiplicidad de sus valores.

Radicales algebráicos, multiplicidad de sus valores.

* 191. Al hablar en Aritmética de los radicales, sólo nos hemos ocupado de su valor numérico, el cual por su naturaleza es real, positivo y único; porque una vez hallado un número que elevado á una potencia marcada por el índice nos dá la cantidad que hay debajo del radical, cualquier otro número distinto elevado á la misma potencia, debe dar un resultado mayor ó menor que dicha cantidad subradical; y por consiguiente, este valor numérico es único.

En lo que hasta aquí llevamos dicho respecto de los radicales, únicamente nos hemos referido al valor numérico que pueden tener; y sólo hemos indicado algunos casos de imposibilidad y de multiplicidad, que es á lo que da orígen la teoría de radicales cuando se considera, no bajo su aspecto aritmético, sino bajo el aspecto algebráico.

En Aritmética no hemos considerado las cantidades negativas; por consiguiente, $\sqrt[m]{-A}$ es una expresion inadmisible aritméticamente, y por lo tanto no hay valor numérico que represente este radical; esta expresion, siendo puramente algebráica, no puede ser representada sino por otra que tambien lo sea; así, si m es un número impar, $\sqrt[m]{-A}$ indicará la expresion algebráica que, elevada á la potencia m, nos reproduce $-A$.

Desde luégo se comprende que esta expresion no puede ser de ningun modo una cantidad positiva, pues cualquier cantidad positiva elevada á una potencia cualquiera da siempre un resultado positivo; luego esta expresion es una cantidad negativa que se obtiene hallando el valor aritmético de $\sqrt[m]{A}$ y tomándole con el signo —; así, si se tiene $\sqrt[m]{A}=a$, ó lo que es lo mismo $a^m=A$, como m es impar, se tendrá $(-a)^m=-a^m=-A$. En el caso de ser m un número par, $\sqrt[m]{-A}$ nos indica una operacion cuyo resultado es imposible de obtener, pues no hay cantidad positiva ni negativa que elevada á una potencia par, nos dé un resultado negativo $-A$; por cuya razon estas expresiones á que el Algebra da orígen, se les llama *expresiones imaginarias*.

Por último, si consideramos la expresion $\sqrt[m]{A}$, en la cual A es una cantidad positiva, y m puede ser par ó impar, veremos que en el primer caso, si llamamos a á la raiz *emésima* de A obtenida por las reglas dadas ya sea A un número, un monómio ó un polinómio, tendremos que el valor de $\sqrt[m]{A}$ considerado aritméticamente, no puede ser más que a y sólo a; pues cualquier otro número elevado á la misma potencia daria un resultado distinto de A. En Algebra tenemos, que no sólo a es un valor de $\sqrt[m]{A}$, sino que $-a$ tambien lo es; porque tanto a como $-a$, elevados á la potencia par m, nos dan el mismo resultado $a^m=A$.

192. De lo que llevamos dicho resulta, que un radical tiene siempre en general un valor numérico real y positivo, que se obtiene por

medio de las reglas dadas para la extraccion de la raíz *emésima*, ya sea la cantidad subradical un número, ó una cantidad algebráica monómia ó polinómia, y cuyo valor numérico se conoce con el nombre de *determinacion aritmética.*

Que en algunos casos no sólo tiene este valor aritmético positivo, sino que tiene otro igual á él pero negativo, el cual correspondiendo exclusivamente al Algebra, se le llama *valor algebráico*; y por último, que en otros muchos casos no hay esta determinacion aritmética ni valores reales algebráicos, y sólo se obtiene una expresion imaginaria, la cual es puramente algebráica.

193. Esto supuesto, distinguiremos en los radicales dos clases de valores ó determinaciones: valores aritméticos, y valores algebráicos.

Entenderemos por VALOR ARITMÉTICO Ó DETERMINACION ARITMÉTICA de un radical, cuya cantidad subradical puede ser un número ó una cantidad algebráica monómia ó polinómia, *la raiz que se obtiene aplicando las reglas dadas para la extraccion de raices de cantidades ya sean numéricas ó algebráicas.*

Así, los valores aritméricos ó determinaciones aritméticas de los radicales $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$ y $\sqrt[4]{16a^4b^8}$, serán 3, $a+b$ y $2ab^2$.

VALOR ALGEBRÁICO *de un radical, será toda expresion de cualquiera naturaleza que sea, que elevada á la potencia marcada por el índice, reproduzca la cantidad subradical.*

En los valores algebráicos de un radical se hallan comprendidos los numéricos.

194. *El valor aritmético de un radical es único.*

En efecto, una vez hallada por las reglas del cálculo la cantidad que elevada á la potencia marcada por el índice dá la cantidad subradical, cualquiera otra cantidad de la misma naturaleza, pero de distinto valor numérico, elevada á la misma potencia, dará un resultado diferente, y por lo tanto distinto de la cantidad subradical.

*195 *Un radical tiene tantos valores algebráicos como unidades tiene su índice, los cuales se obtienen multiplicando su raiz aritmética por las* m *raices emésimas de la unidad.*

Sea el radical de segundo grado $\sqrt{A}$, cuya raíz aritmética representaremos por a, de modo que se tendrá $\sqrt{A}=a$, ó $A=a^2$.

Representemos por x uno cualquiera de los valores algebráicos de

$\sqrt{A}$, y veamos cómo hallar todas las expresiones que elevadas al cuadrado nos dan A, ó sean todos los valores de x.

Por ser x un valor algebráico de $\sqrt{A}$, se tendrá

$$x=\sqrt{A}, \text{ ó } x^2=A \quad [1].$$

Si ahora hacemos $x=ay$, representando por y todos los valores que multiplicados por a nos dan los valores de x, se tendrá, elevando al cuadrado, $x^2=a^2y^2$; y poniendo este valor en la igualdad [1], se tiene $a^2y^2=A$; pero $a^2=A$; luego dividiendo por $a^2=A$, se tendrá $y^2=1$.

Donde vemos que y expresa la cantidad que elevada al cuadrado nos dá 1; es decir, los valores de y son las raíces cuadradas de la unidad; pero de la igualdad anterior se saca

$$y^2-1=(y-1)(y+1)=0;$$

y los valores de y que reducen á cero este producto, que son las raíces cuadradas de 1, son los que hacen $y-1=0$, é $y+1=0$, que son $y=1$, é $y=-1$; luego los dos valores únicos del radical $\sqrt{A}$, son $+a$ y $-a$; y como $a=\sqrt{A}$, se tendrá que los dos valores serán

$$x=\pm\sqrt{A}.$$

Sea en general $\sqrt[m]{A}$ un radical cuya raíz aritmética llamaremos a; representemos por x un valor cualquiera algebráico de este radical, de modo que tendremos

$$a^m=A, \text{ y } x=\sqrt[m]{A}; \text{ de donde } x^m=A.$$

Hagamos ahora $x=ay$, representando por y la cantidad que multiplicada por a nos da un valor algebráico de $\sqrt[m]{A}$, y es claro que x podrá recibir tantos valores como tenga y.

Elevando á la potencia m, se tiene $x^m=a^my^m$; cuyo valor de x^m sustituido en la anterior, será $a^my^m=A$; y dividiendo por $a^m=A$, hallaremos $y^m=1$; luego y expresa la raíz *emésima* de la unidad; pero se demuestra en Algebra superior, que hay m valores algebráicos que, puestos en vez de y, verifican la relacion $y^m=1$, de los cuales si m es par, dos son reales é iguales respectivamente á $+1$ y -1; y si m es impar, uno solo es real é igual á $+1$; luego si representamos estos valores de y por $1, y', y'', y'''$... los valores de x serán a, ay', ay'', ay'''... y el principio quedará demostrado.

Vemos que la demostracion de este principio está fundada en que la igualdad $y^m=1$ puede quedar satisfecha para m expresiones distintas de y que serán las m *emésimas* raíces de la unidad; y como esta verdad la hemos de demostrar en Algebra superior, con independencia del principio que ahora nos ocupa, podemos admitirla, sin incurrir en círculo vicioso, pues todo se reducia á ponerlo despues de haber demostrado el principio de Algebra superior; y con el objeto de no llevar hasta allí esta teoría de radicales incompleta, lo admitimos desde luégo como demostrado.

* 196. Respecto á las cantidades con exponente fraccionario, podremos observar, que siendo equivalentes á radicales cuyo índice es el denominador de la fraccion exponente, debemos considerar tambien en estas expresiones dos clases de valores, aritméticos y algebráicos. Lo que de estas expresiones llevamos dicho hasta ahora, sólo se refiere á los valores aritméticos.

El cálculo de los radicales algebráicos se puede, por consiguiente, referir á los valores aritméticos, ó á todos los valores tanto aritméticos como algebráicos. En el primer caso, se efectúan las reglas tal como se han dado en Aritmética, y se demuestra como allí se hizo.

Si nos referimos al cálculo de estos radicales considerándolos con todos sus valores, es necesario justificar esas mismas reglas, y hacer ver que son generales áun para los valores algebráicos.

LECCION XXII.

Cálculo de los radicales algebráicos.

Cálculo de los radicales algebráicos.

* 197. Nada tenemos que añadir á lo dicho en Aritmética respecto á la suma y resta de radicales; pero como hay que hacer la reduccion y destruccion de los que sean semejantes, es menester probar que la simplificacion que allí se hizo es posible hacerla sin que varíen los valores, tanto algebráicos como aritméticos, de un radical.

Así, se tendrá en general $\sqrt[m]{a^m A} = a\sqrt[m]{A}$.

En efecto; todo valor de $a\sqrt[m]{A}$ elevado á la potencia m, dará evidentemente $a^m A$; y todo valor de $\sqrt[m]{a^m A}$ elevado á la misma potencia, da tambien el mismo resultado; luego todo valor de la primera lo es de la segunda; pero la primera tiene m valores diferentes que corresponden á los m de $\sqrt[m]{A}$; luego los m primeros valores de $a\sqrt[m]{A}$ lo son de $\sqrt[m]{a^m A}$; y como esta expresion no tiene más que m valores, éstos serán los mismos de la primera expresion; luego segun queríamos probar, se tendrá $\sqrt[m]{a^m A} = a\sqrt[m]{A}$.

* 198. *La raiz de un producto es igual al producto de las raices de los factores; ó el producto de dos radicales de un mismo índice es igual á un radical del mismo índice cuya cantidad subradical es el producto de las cantidades subradicales de los factores.*

Es decir, que $\sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{AB}$.

En efecto, todo valor x del producto $\sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B}$ elevado á la potencia m, dá $x^m = AB$; y como todo valor del radical $\sqrt[m]{AB}$ elevado á m, dá tambien AB, se sigue que los valores del producto $\sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B}$ están comprendidos en los de $\sqrt[m]{AB}$; además, como en el factor $\sqrt[m]{A}$ hay m valores distintos, multiplicándolos por uno de los valores de $\sqrt[m]{B}$, tendremos m valores distintos tambien, y todos estarán comprendidos en los m valores de $\sqrt[m]{AB}$, y por consiguiente serán iguales respectivamente á éstos. Los que resulten de multiplicar los m valores de $\sqrt[m]{A}$ por otro de los de $\sqrt[m]{B}$, serán iguales tambien á los de $\sqrt[m]{AB}$, y por tanto serán los mismos que se obtuvieron anteriormente, aunque vendrán en distinto órden, y lo mismo sucede con los demás productos; luego todos los valores de $\sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B}$ son los mismos que los de $\sqrt[m]{AB}$, segun queríamos probar.

* 199. *El cociente de dos radicales de un mismo índice es igual á un radical del mismo índice, cuya cantidad subradical es el cociente de las cantidades subradicales.*

Se demuestra de la misma manera que se ha hecho en el principio anterior.

* 200. *Para elevar un radical á una potencia cuyo exponente es primo con el índice, se eleva á dicha potencia la cantidad subradical.*

Es decir, que si m y n son números primos entre sí, se tendrá

$$\left(\sqrt[m]{A}\right)^n=\sqrt[m]{A^n}.$$

En efecto, si elevamos el primer miembro $\left(\sqrt[m]{A}\right)^n$ á la *emésima* potencia, se tendrá

$$\left(\left(\sqrt[m]{A}\right)^n\right)^m=\left(\sqrt[m]{A}\right)^{nm}=\left(\left(\sqrt[m]{A}\right)^m\right)^n=A^n;$$

de donde se deduce que todo valor de la expresion $\left(\sqrt[m]{A}\right)^n$ elevado á la potencia m, da un valor A^n; y como todo valor de $\sqrt[m]{A^n}$ elevado á la misma potencia m, dá tambien A^n, se sigue que todos los valores de la expresion $\left(\sqrt[m]{A}\right)^n$ están comprendidos en los valores de la expresion $\sqrt[m]{A^n}$; pero en esta hay m valores, y vamos á demostrar que en $\left(\sqrt[m]{A}\right)^n$ tambien hay m, y no puede haber más.

Para ello observaremos que $\sqrt[m]{A}$ tiene m valores, que podremos representar por A', A'', A'''... en cuyo caso los de $\left(\sqrt[m]{A}\right)^n$ serán A'^n, A''^n, A'''^n... los cuales vamos á demostrar que son desiguales.

Supongamos que dos sean iguales, de modo que se tenga

$$A'^n=A''^n \quad [1];$$

siendo A' y A'' valores de $\sqrt[m]{A}$, se tendrá

$$A'^m=A''^m \quad [2].$$

Si suponemos ahora que m es mayor que n, y dividimos m por n, tendremos, llamando q al cociente y r al resto, que la igualdad anterior se convertirá en

$$A'^{nq+r}=A''^{nq+r}.$$

Elevando los dos miembros de la igualdad [1] á la potencia q, se tendrá $A'^{nq}=A''^{nq}$; y dividiendo la anterior por ésta se tiene

$$A'^r=A''^r.$$

Supongamos que se divide ahora n por r, y que se tenga $n=rq'+r'$; la igualdad [1] se convertirá, sustituyendo en vez de n

este valor en $A'^{rq'+r'}=A''^{rq'+rq'}$; la cual dividida por la igualdad anterior elevada á la potencia q', nos dará

$$A'^{r'}=A''^{r'}.$$

Continuando así, hallaremos una siguiente igualdad

$$A'^{r''}=A''^{r''};$$

en la cual r'' será el resto de la division de r por r'; y continuando del mismo modo llegaremos á una última, en la cual el exponente de las cantidades A' y A'' será la unidad; pues siendo estos exponentes los restos sucesivos que se obtienen de aplicar á m y n el procedimiento del *m. c. d.*, tenemos que llegar forzosamente al resto 1, por ser m y n números primos entre sí, y en ese caso dicha última igualdad será

$$A'=A'';$$

lo cual no es posible, por ser A' y A'' dos valores distintos de $\sqrt[m]{A}$; luego A'^n no puede ser igual á A''^n, y por consiguiente los m valores A'^n, A''^n, A'''^n... de la expresion $\left(\sqrt[m]{A}\right)^n$, son los mismos m valores que los de la expresion $\sqrt[m]{A^n}$; que es lo que se queria probar.

* 201. *Para elevar un radical á una potencia cuyo exponente es un divisor del índice, se divide éste por el exponente de la potencia.*

Es decir, que $\left(\sqrt[mn]{A}\right)^n=\sqrt[m]{A}.$

En efecto, representemos por x un valor cualquiera de $\sqrt[mn]{A}$, de modo que se tenga $x=\sqrt[mn]{A}$; si elevamos á la potencia mn, se tendrá

$$x^{mn}=(x^n)^m=A, \quad \text{y} \quad x^n=\sqrt[m]{A};$$

donde vemos que todo valor x de la expresion $\sqrt[mn]{A}$, elevado á la potencia n, dá un valor de $\sqrt[m]{A}$; luego los valores de $\left(\sqrt[mn]{A}\right)^n$, son los mismos que los de $\sqrt[m]{A}$.

* 202. *Para elevar un radical á una potencia cuyo exponente tiene un factor comun con el índice, se parten ambos por este factor.*

Así, $\left(\sqrt[mp]{A}\right)^{np}=\left(\sqrt[m]{A}\right)^n=\sqrt[m]{A^n}.$

En efecto, segun lo demostrado en el número anterior, se tiene

$$\left(\sqrt[mp]{A}\right)^{np}=\left(\left(\sqrt[mp]{A}\right)^p\right)^n=\left(\sqrt[m]{A}\right)^n;$$

pero segun lo demostrado (200), se tiene, siendo m y n primos en–

tre sí, $\left(\sqrt[m]{A}\right)^n = \sqrt[m]{A^n}$; luego se tendrá, segun queriamos probar,

$$\left(\sqrt[mp]{A}\right)^{np} = \sqrt[m]{A^n}.$$

* 203. *La raíz de un radical es igual á otro que tiene por índice el producto de los índices.*

Es decir, que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}$.

En efecto, todo valor x de la primera expresion, dá

$$x = \sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}, \quad x^m = \sqrt[n]{A}, \quad \text{y} \quad x^{mn} = A;$$

luego todo valor de $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$, lo es de la expresion $\sqrt[mn]{A}$, segun queríamos probar.

* 204. En Aritmética, como no considerábamos más que los valores aritméticos de los radicales, demostramos que se podian reducir dos ó más á un mismo índice sin que su valor variase, fundados en que se podian multiplicar ó partir el índice y exponente de la cantidad subradical por un mismo número sin que el valor del radical cambiase; pero aquí, que no solamente consideramos el valor aritmético, sino los m valores algebráicos que tiene un radical del índice m, no podemos hacer esa trasformacion sin aumentar el número de sus valores.

En efecto, si el radical $\sqrt[m]{A}$ tiene m valores, la expresion $\sqrt[mn]{A^n}$ tiene mn; y por consiguiente, no se puede hacer con los radicales esta trasformacion sin tener en cuenta el aumento del número de sus valores. Mas como en la multiplicacion y division de radicales de distinto índice es necesario hacerla, probaremos que los resultados obtenidos segun las reglas dadas en Aritmética tienen todos los valores que deben tener, siempre que los radicales se reduzcan al mínimo comun índice de todos los índices. Así diremos:

* 205. *Para multiplicar dos ó más radicales de distinto índice, se reducirán al mínimo comun índice, y se multiplicarán las cantidades subradicales.*

Es decir, que si m y n son primos entre sí, se tendrá

$$\sqrt[m]{A} \times \sqrt[n]{B} = \sqrt[mn]{A^n B^m}.$$

En efecto, si elevamos $\sqrt[m]{A} \times \sqrt[n]{B}$ á la potencia mn, se tendrá

$$\left(\sqrt[m]{A} \times \sqrt[n]{B}\right)^{mn} = \left(\sqrt[m]{A}\right)^{mn} \times \left(\sqrt[n]{B}\right)^{mn} = A^n \times B^m;$$

lo que prueba que todo valor de la primera expresion $\sqrt[m]{A}\times\sqrt[n]{B}$ es un valor de la segunda $\sqrt[mn]{A^nB^m}$.

Demostrado que cualquier valor de la primera expresion lo es de la segunda, falta probar que la primera contiene los mn valores de la segunda: para ello representemos por A', A'', A'''... los m valores de $\sqrt[m]{A}$, y por B', B'', B'''... los n de $\sqrt[n]{B}$, los cuales multiplicados entre sí dan todos los valores del producto $\sqrt[m]{A}\times\sqrt[n]{B}$; pero al multiplicar todos los m valores de $\sqrt[m]{A}$ por todos los n de $\sqrt[n]{B}$, hallamos un número de productos igual á mn (65-3.º), que es lo que se queria demostrar.

Ahora falta probar que todos estos productos son diferentes.

En efecto, dos productos que tengan un factor comun, no pueden ser iguales; pues el otro factor es distinto; luego los que podria creerse eran iguales, son los compuestos de factores diferentes, y vamos á probar que tambien son desiguales.

Supongamos que son iguales, y que se tiene $A'B''=B'A''$; elevando á la potencia n, se tendrá $A'^nB''^n=B'^nA''^n$; y como B' y B'' son valores de $\sqrt[n]{B}$, tendremos $B'^n=B''^n=B$; y dividiendo la igualdad anterior por esta, será $A'^n=A''^n$.

Pero A' y A'' son valores de $\sqrt[m]{A}$; luego $A'^m=A''^m$; y haciendo con estas dos igualdades lo que se hizo con las igualdades [1] y [2] del número (200), se deducirá tambien que $A'=A''$, lo cual no es cierto; luego los mn productos son diferentes.

Si los exponentes no son primos entre sí, y tienen un factor comun p, se tendrá $\sqrt[mp]{A}\times\sqrt[np]{B}=\sqrt[mnp]{A^nB^m}$.

En efecto, segun ya se ha demostrado, (203 y 198) se tiene

$$\sqrt[mp]{A}\times\sqrt[np]{B}=\sqrt[p]{\sqrt[m]{A}}\times\sqrt[p]{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[p]{\sqrt[m]{A}\times\sqrt[n]{B}};$$

pero tambien hemos demostrado anteriormente que siendo m y n primos entre sí, como aquí suponemos serlo, se verifica la igualdad

$$\sqrt[m]{A}\times\sqrt[n]{B}=\sqrt[mn]{A^nB^m};$$

luego se tendrá $\sqrt[mp]{A}\times\sqrt[np]{B}=\sqrt[p]{\sqrt[mn]{A^nB^m}}=\sqrt[mnp]{A^nB^m}$; que es lo que se queria demostrar.

* 206. Análogamente se probará que $\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[mn]{\frac{A^n}{B^m}}$ si m y n son primos entre sí; y que $\frac{\sqrt[mp]{A}}{\sqrt[np]{B}} = \sqrt[mnp]{\frac{A^n}{B^m}}$; con lo cual queda justificado todo el cálculo de los radicales algebráicos.

LECCION XXIII.

Cálculo de las expresiones imaginarias de segundo grado.—Teoremas relativos á los módulos de las expresiones imaginarias.

Cálculo de las expresiones imaginarias de segundo grado.

207. *Toda expresion imaginaria de la forma* $\sqrt[2n]{-A}$ *se puede trasformar en dos factores, uno real y otro imaginario de la forma* $\sqrt[2n]{A} \times \sqrt[2n]{-1}$.

En efecto, representemos por x el valor de la expresion $\sqrt[2n]{-A}$, de modo que se tenga $x = \sqrt[2n]{-A}$.

Los valores de x han de ser tales que elevados á la potencia $2n$, han de dar la cantidad $-A$; luego

$$x^{2n} = -A \quad [1].$$

Si llamamos a á la determinacion aritmética de $\sqrt[2n]{A}$, tendremos $a^{2n} = A$, y haciendo ahora $x = ay$, se tendrá $x^{2n} = a^{2n}\, y^{2n}$; de modo que sustituyendo en [1] el valor de x^{2n}, tendremos

$$a^{2n}\, y^{2n} = -A;$$

y poniendo en vez de a^{2n} su valor A, hallaremos $Ay^{2n} = -A$, de donde se saca $y^{2n} = -1$, ó $y = \sqrt[2n]{-1}$; por consiguiente, los valores de x

estarán representados por $x=a\sqrt[2n]{-1}=\sqrt[2n]{A}.\sqrt[2n]{-1}$, en donde $\sqrt[2n]{A}$ expresa la determinacion aritmética; luego

$$\sqrt[2n]{-A}=\sqrt[2n]{A}.\sqrt[2n]{-1},$$

que es lo que se queria probar.

208 Toda expresion imaginaria se puede trasformar, segun se demuestra en Trigonometría, en una expresion imaginaria de segundo grado de la forma $a+b\sqrt{-1}$, por consiguiente al tratar en esta parte de las expresiones imaginarias, sólo nos referiremos á las de segundo grado y de la forma $a+b\sqrt{-1}$.

Desde luégo, toda expresion de segundo grado $\sqrt{-B}$, se puede convertir segun el número anterior, en $\sqrt{B}\sqrt{-1}$, de modo que llamando b á la determinacion aritmética de $\sqrt{B}$, la expresion $\sqrt{-B}$ se podrá poner bajo la forma $b\sqrt{-1}$; luego si agregamos una cantidad real cualquiera, tendremos que la forma general de las expresiones imaginarias de segundo grado, será $a+b\sqrt{-1}$, en la cual a podrá ser cero.

* 209. Como las expresiones imaginarias no son cantidades, no podemos someterlas á los cálculos sino convencionalmente. Tampoco puede haber tipo de comparacion entre ellas, y por consiguiente relaciones de magnitud. Una cantidad con exponente imaginario es una expresion imaginaria y no tiene interpretacion, ni se puede demostrar que $a^{\sqrt{-1}}\times a^{\sqrt{-2}}$ sea igual á $a^{\sqrt{-1}+\sqrt{-2}}$, sino que se admite por analogía; además á nada se opone esta suposicion. Del mismo modo admitiremos por analogía para el cálculo de las expresiones imaginarias, todas las reglas dadas en el cálculo de cantidades reales.

210. *Las potencias de* $\sqrt{-1}$ *son*: $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$ ó $+1$, *segun que el exponente sea de la forma* $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ ó $4n$.

En efecto, se tiene evidentemente

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^2=-1,$$
$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}=-\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^4=((\sqrt{-1})^2)^2=(-1)^2=+1.$$

Si ahora damos al exponente los valores sucesivos $5=4+1$, $6=4+2$, $7=4+3$ y $8=2\times4$, se reproducirán las mismas expresiones $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$ y $+1$; y en general si damos á los exponentes los valores $4n$, $4n+1$, $4n+2$ y $4n+3$, siendo n un número entero y positivo, se tendrá

$$(\sqrt{-1})^{4n}=((\sqrt{-1})^4)^n=(+1)^n=+1,$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+1}=(\sqrt{-1})^{4n}\times(\sqrt{-1})^1=+1\times\sqrt{-1}=+\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2}=(\sqrt{-1})^{4n}\times(\sqrt{-1})^2=+1\times-1=-1,$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+3}=(\sqrt{-1})^{4n}\times(\sqrt{-1})^3=+1\times-\sqrt{-1}=-\sqrt{-1},$$

que es lo que se queria demostrar.

211. *Los resultados de las operaciones fundamentales hechas con expresiones imaginarias de la forma* a+b $\sqrt{-1}$, *son expresiones imaginarias de la misma forma.*

En efecto, si sumamos dos expresiones imaginarias de esta forma, se tiene

$$(a+b\sqrt{-1})+(a'+b'\sqrt{-1})=a+a'+(b+b')\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1};$$

si las restamos, se tendrá

$$a+b\sqrt{-1}-(a'+b'\sqrt{-1})=a-a'+(b-b')\sqrt{-1}=A'+B'\sqrt{-1};$$

multiplicándolas, se tiene

$$(a+b\sqrt{-1})\ (a'+b'\sqrt{-1})=aa'+ba'\sqrt{-1}+ab'\sqrt{-1}-bb'$$
$$=aa'-bb'+(ab'+ba')\sqrt{-1}=A''+B''\sqrt{-1};$$

dividiéndolas, será

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}{(a'+b'\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}=$$
$$\frac{aa'+ba'\sqrt{-1}-ab'\sqrt{-1}+bb'}{a'^2-(b'\sqrt{-1})^2}=\frac{aa'+bb'+(ba'-ab')\sqrt{-1}}{a'^2+b'^2}=$$
$$\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}\sqrt{-1}=A'''+B'''\sqrt{-1}.$$

Donde vemos que los resultados de las cuatro primeras operaciones hechas con expresiones de la forma $a+b\sqrt{-1}$, son expresiones de la misma forma.

Pasemos á la elevacion á potencias.

Aplicando á la expresion $a+b\sqrt{-1}$ la fórmula del binómio, tendremos

$$(a+b\sqrt{-1})^m = a^m + ma^{m-1}b\sqrt{-1} - m\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 -$$

$$m\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^3\sqrt{-1} + m\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}a^{m-4}b^4$$

$$+m\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5}a^{m-5}b^5\sqrt{-1}$$

$$-m\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2.3.4.5.6}a^{m-6}b^6 - \ldots$$

en cuyo desarrollo, separando la parte real de la parte imaginaria, se tiene

$$(a+b\sqrt{-1})^m = a^m - m\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 +$$

$$m\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}a^{m-4}b^4 -$$

$$m\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2.3.4.5.6}a^{m-6}b^6 + \ldots$$

$$+\left(ma^{m-1}b - m\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^3 +\right.$$

$$\left. m\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5}a^{m-5}b^5 - \ldots\right)\sqrt{-1},$$

donde vemos que se tiene tambien la igualdad

$$(a+b\sqrt{-1})^m = \mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1}.$$

Si en vez de la expresion $a+b\sqrt{-1}$, elevásemos la expresion $a-b\sqrt{-1}$, veríamos que la parte real A era la misma, y la parte que multiplica á $\sqrt{-1}$ seria la misma que anteriormente, pero tomada con el signo —; luego

$$(a-b\sqrt{-1})^m = \mathrm{A} - \mathrm{B}\sqrt{-1}.$$

Que la raíz de un grado cualquiera de una expresion imaginaria de la forma $a+b\sqrt{-1}$ es una expresion de la misma forma, se demuestra fácilmente en la Trigonometría, sólo demostraremos ahora que se verifica esta condicion para raíces cuyo exponente sea una potencia de 2.

Sea en primer lugar la raíz cuadrada de las expresiones $a+b\sqrt{-1}$ y $a-b\sqrt{-1}$; si hacemos

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=x$$

y

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}-\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=y$$

se tendrá, elevando al cuadrado,

$$a+b\sqrt{-1}+2\sqrt{(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})}+a-b\sqrt{-1}=$$
$$2a+2\sqrt{a^2+b^2}=x^2,$$
$$a+b\sqrt{-1}-2\sqrt{(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})}+a-b\sqrt{-1}=$$
$$2a-2\sqrt{a^2+b^2}=y^2,$$

donde vemos que cualquiera que sea el signo de a, el valor de x^2 es siempre positivo, y el de y^2, es negativo.

De estas igualdades se saca

$$x=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ é } y=\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\times\sqrt{-1},$$

de donde sumando y restando, se tiene

$$x\pm y=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\pm\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\times\sqrt{-1};$$

pero segun las primeras igualdades, se tiene

$$x\pm y=2\sqrt{a\pm b\sqrt{-1}},$$

luego

$$2\sqrt{a\pm b\sqrt{-1}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\pm\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1},$$

dividiendo por 2 y separando estas fómulas, tenemos segun queríamos probar,

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}$$

y

$$\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1},$$

que como se ve son expresiones de la forma $A\pm B\sqrt{-1}$.

Si consideramos la raíz 2^n de una expresion $a+b\sqrt{-1}$, hallaremos el resultado por una série de n raíces cuadradas sucesivas, y como todas estas raíces serán, como acabamos de probar, de la forma $A+B\sqrt{-1}$, la última tambien lo será.

Teoremas relativos á los módulos de las expresiones imaginarias.

212. *Se llama módulo de una expresion imaginaria de la forma* $a+b\sqrt{-1}$, *la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos cantidades reales* a *y* b. Así, el módulo de la expresion $a+b\sqrt{-1}$ es $\sqrt{a^2+b^2}$; el de la expresion $a-b\sqrt{-1}$ será tambien $\sqrt{a^2+b^2}$.

213. *Se llaman expresiones imaginarias conjugadas aquellas que sólo se diferencian en el signo de la cantidad* b. Así, $a+b\sqrt{-1}$ y $a-b\sqrt{-1}$, son expresiones conjugadas; lo mismo que las expresiones $-3+5\sqrt{-1}$ y $-3-5\sqrt{-1}$. Dos expresiones conjugadas tienen un mismo módulo: el de las dos primeras hemos visto que es $\sqrt{a^2+b^2}$, el de las dos segundas, será $\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$.

214. *El módulo del producto de dos expresiones imaginarias es igual al producto de los módulos de estas expresiones.*

Para demostrar esto multipliquemos dos expresiones cualesquiera imaginarias, y tendremos,

$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})=aa'-bb'+(ab'+ba')\sqrt{-1}.$$

El módulo de este producto, es

$$\sqrt{(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2}=\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+a^2b'^2+b^2a'^2},$$

y sacando a^2+b^2 factor comun, se tiene

$$\sqrt{(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}=$$
$$\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a'^2+b'^2}.$$

Si el número de factores es mayor que dos, el principio se verificará lo mismo; de donde se deduce que el *módulo de una potencia es igual á la potencia del módulo.*

Así, $(a+b\sqrt{-1})^n$, tendrá por módulo $(\sqrt{a^2+b^2})^n$.

215. *El módulo de un cociente es igual al cociente de los módulos.*

Sea el cociente $\dfrac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}=A+B\sqrt{-1}$, multiplicando por el divisor, se tendrá

$$a+b\sqrt{-1}=(a'+b'\sqrt{-1})(A+B\sqrt{-1}),$$

de donde deduciremos, segun el número anterior, la igualdad

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a'^2+b'^2}\times\sqrt{A^2+B^2},$$

de donde se deduce $\sqrt{A^2+B^2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$, segun queriamos probar.

216. *Para que una expresion imaginaria sea cero, es menester que lo sea su módulo; y recíprocamente.*

En efecto, la expresion $A+B\sqrt{-1}$ no puede ser cero como no lo sean separadamente A y B; porque A, cantidad real, no puede destruir á $B\sqrt{-1}$ que es imaginaria, luego tiene que ser cero cada una de estas dos partes por separado, si lo es la expresion; pero siendo $A=0$ y $B=0$, el módulo $\sqrt{A^2+B^2}$ se reduce á $\sqrt{0+0}=0$.

Recíprocamente, si el módulo es cero, se ha de tener $A^2+B^2=0$; pero cualesquiera que sean los valores reales de A y B, elevados al cuadrado darán resultados positivos; luego A^2+B^2, siendo la suma de dos cantidades positivas, no puede reducirse á cero si no lo es cada una de estas cantidades; pero siendo cero A^2 y B^2, lo son A y B; y por consiguiente la expresion $A+B\sqrt{-1}$ tambien lo es.

217. *Para que un producto de expresiones imaginarias sea cero, basta que lo sea uno de los factores.*

En efecto, el módulo del producto es igual al producto de los módulos de los factores; luego si alguna expresion de las que se multiplican es cero, su módulo tambien lo será; pero siéndolo el módulo, lo es el producto de los módulos, que es el módulo del producto, y por consiguiente el producto de las expresiones será cero.

LECCION XXIV.

Explicacion de algunas contradicciones aparentes que se observan en el cálculo de radicales y expresiones imaginarias.

Explicacion de algunas contradicciones aparentes que se observan en el cálculo de radicales y expresiones imaginarias.

218. A veces se les hace sufrir á expresiones radicales, reales ó imaginarias, ciertas trasformaciones admitidas por las reglas del

cálculo dadas anteriormente, y obtenemos expresiones que ó son ménos ó más generales que las propuestas, lo cual hace creer que dichas dos expresiones no sean equivalentes de un modo general. Cuando esto sucede, es porque al hacer la trasformacion, hacemos tácitamente un convenio que pasa desapercibido y que en general no se tiene en cuenta, pero una vez puesto de manifiesto, se vé hasta qué punto las expresiones son equivalentes, ó en qué sentido se dice que lo son.

Pongamos algunos ejemplos y veamos lo que sucede.

* 219. Se ha dicho en Aritmética, y se admite en los radicales algebráicos respecto de sus determinaciones aritméticas, que se puede multiplicar el índice de un radical por un número, siempre que la cantidad subradical se eleve á una potencia que tenga por exponente el mismo número; es decir, que $\sqrt{a^2}=\sqrt[4]{a^4}$; en efecto, ambas nos dan por expresion aritmética a.

Si aplicamos esta regla al radical $\sqrt{-a^2}$ hallaremos,

$$\sqrt{-a^2}=\sqrt[4]{(-a^2)^2}=\sqrt[4]{a^4}=a,$$

de donde se deduce el absurdo de que una expresion imaginaria $\sqrt{-a^2}$, sea igual á una cantidad real a.

Este absurdo proviene de no tener en cuenta que la expresion $\sqrt{-a^2}$ no tiene valor ninguno aritmético y por consiguiente, no podemos establecer ese principio en donde no existe objeto; por tanto la trasformacion no es aritmética sino puramente algebráica, y como tal vamos á probar que los dos valores imaginarios $\pm a\sqrt{-1}$ de la primera expresion, están comprendidos en la otra, y además hay otros dos reales correspondientes á la trasformacion que le hemos hecho sufrir; porque segun hemos dicho al hablar de los valores múltiples de los radicales, estos valores crecen en número, á medida que crece el índice del radical, por consiguiente siendo el índice del segundo doble del primero, el número de valores tambien será doble; pero entre ese número doble de valores se hallan siempre los dos del primer radical.

En efecto, todos los valores de $\sqrt[4]{a^4}$, se obtienen multiplicando la determinacion aritmética del radical, por las cuatro raíces cuartas de la unidad (195); y como las raíces cuartas de la unidad son evidentemente $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$, puesto que todas estas expresiones elevadas á la cuarta potencia, nos dan 1; se sigue que los cuatro valores de $\sqrt[4]{a^4}$, serán $+a$, $-a$, $+a\sqrt{-1}$ y $-a\sqrt{-1}$; los dos últimos corresponden á las dos expresiones $\sqrt{-a^2}$ y $\sqrt[4]{a^4}$: los dos primeros sólo pertenecen á la expresion $\sqrt[4]{a^4}$ y resultan de la trasformacion que hemos hecho.

Luego con saber que cuando á un radical se le hace sufrir la trasformacion citada, resulta una expresion algebráica que contiene no sólo los valores de la primera, sino otros extraños, es claro que no podrá igualarse nunca ninguno de estos valores extraños á ninguno de los valores de la segunda expresion; y al llamar equivalentes estas dos expresiones, sólo se debe entender en la parte de valores comunes; de modo que en realidad, lo que esta igualdad $\sqrt{-a^2} = \sqrt[4]{a^4}$; expresa, es que los valores de $\sqrt{-a^2}$ están comprendidos en los de $\sqrt[4]{a^4}$; pero no es posible que cada uno de los cuatro valores algebráicos diferentes de $\sqrt[4]{a^4}$, sean los de $\sqrt{-a^2}$, que no tiene más que dos.

* 220. Sea la expresion $3a\sqrt{ab^2}+2b\sqrt{a^3b^4}$ [1]; la cual, despues de simplificados los radicales, se convierte en $3ab\sqrt{a}+2ab^3\sqrt{a}$; y sacando $\sqrt{a}$ factor comun, se tendrá por último $3a\sqrt{ab^2}+2b\sqrt{a^3b^4}=(3ab+2ab^3)\sqrt{a}$.

Considerando á cada radical con el doble signo $\pm$, el primer miembro es suceptible de cuatro valores, mientras que el segundo no tiene más que dos; luego estas expresiones no pueden ser equivalentes.

En este ejemplo consiste la dificultad en que para hacer la última trasformacion, hemos supuesto tácitamente que los valores de $3a\sqrt{ab^2}$ y $2b\sqrt{a^3b^4}$, ó de sus equivalentes $3ab\sqrt{a}$ y $2ab^3\sqrt{a}$, se han de tomar, nó de cualquier modo que se combinen, pues entónces no hubiéramos podido sacar el factor comun $\sqrt{a}$, sino pareados el primero con el primero, y el segundo con el segundo, y de ese modo hemos podido sacar factor comun $+\sqrt{a}$ ó $-\sqrt{a}$; luego para que las dos expresiones $3a\sqrt{ab^2}+2b\sqrt{a^3b^4}$ y $(3ab+2ab^3)\sqrt{a}$ sean equivalentes, es menester que afectando á los radicales el doble signo, se corresponda el $+$ con el $+$ y el $-$ con el $-$; pues esa es la condicion tácita que hemos supuesto para poder sacar como factor comun el radical $\sqrt{a}$.

* 221. Sea la expresion

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{-a\times-a}=\sqrt{a^2}=\pm a.$$

La expresion $\sqrt{a^2}$ tiene los dos valores $\pm a$, mientras que la primera, siendo el cuadrado de $\sqrt{-a}$, no tiene más que el valor $-a$; luego el valor extraño $+a$, es falso.

Esta dificultad proviene de no tener en cuenta los valores múltiples de los radicales, y de no atender á las coddiciones en que tácitamente convenimos.

El valor $+a$ que aparece como falso por no estar comprendido en el primer miembro, por ser este primer miembro el cuadrado de $\sqrt{-a}$, proviene de suponer que $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ sea $(\sqrt{-a})^2$, y para ello ha sido preciso admitir tácitamente que de los dos signos que deben acompañar á los dos radicales $\sqrt{-a}$ y $\sqrt{-a}$, se han de tomar los iguales, es decir, $+\sqrt{-a}\times+\sqrt{-a}$, y $-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}$, y en esta hipótesis claro es que el producto de ambos radicales se reduce al cuadro de $+\sqrt{-a}$ ó de $-\sqrt{-a}$, que siempre es $-a$; pero como además se pueden hacer otras dos combinaciones tomando el $+\sqrt{-a}$ con $-\sqrt{-a}$ y al contrario, se sigue que en realidad debe haber cuatro valores, de los cuales dos se han reducido, como ya hemos visto, á $-a$. Veamos los otros dos valores correspondientes á estas dos combinaciones qué nos dan. Si representamos por a' la raíz aritmética de a, los radicales propuestos se convertirán en $+a'\sqrt{-1}$ y $-a'\sqrt{-1}$, cuyo producto es $-a'^2\times-1$, puesto que el radical $\sqrt{-1}$ tienen ya un mismo signo en ambos factores, y nos da $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$; luego la combinacion $+\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}$, nos da el resultado $-a'^2\times-1=+a'^2$; y como a es la determinacion aritmética de $\sqrt{a}$, a'^2 será igual a; luego $+\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=+a$; del mismo modo demostrariamos que la otra combinacion $-\sqrt{-a}\times+\sqrt{-a}$ es tambien igual á $+a$; por consiguiente, los cuatro valores á que dá origen el producto

$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$, considerados con toda generalidad, se reducen á $\pm a$, que es el valor hallado.

* 222. Sea multiplicar $\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-b}$.

Si aplicamos la regla de la multiplicacion, hallamos

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{-a\times-b}=\sqrt{ab};$$

cuyo resultado puede llevar el signo $+$ ó el signo $-$, y tener

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=+\sqrt{ab}, \text{ ó } \sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}.$$

En efecto, llamando a' y b' las determinaciones aritméticas de $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$, se tiene $\sqrt{-a}=a'\sqrt{-1}$, y $\sqrt{-b}=b'\sqrt{-1}$; luego

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=a'\sqrt{-1}\times b'\sqrt{-1}=a'b'\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}.$$

En esta expresion, si $\sqrt{-1}$ puede representar los dos valores de que es susceptible sin restriccion alguna; así $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\pm1$; en cuyo caso $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\pm a'b'=\pm\sqrt{ab}$; pero si hacemos la hipótesis que los dos radicales han de llevar el mismo signo, entónces $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$, y la expresion del producto será $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-a'b'=-\sqrt{ab}$.

* 223 Sea, por último, la expresion $\sqrt[4]{a}\times\sqrt{-1}$, que se ve es imaginaria, puesto que viene afectada de $\sqrt{-1}$.

Si para efectuar el producto reducimos los radicales á un mismo índice, tenemos

$$\sqrt[4]{a}\times\sqrt{-1}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{(-1)^2}=\sqrt[4]{a};$$

donde vemos, que una cantidad imaginaria $\sqrt[4]{a}\times\sqrt{-1}$, es igual á una cantidad real $\sqrt{a}$, lo cual es absurdo.

Si en $\sqrt[4]{a}\times\sqrt{-1}$, representa $\sqrt[4]{a}$ solamente la raíz aritmética de $\sqrt[4]{a}$, entónces $\sqrt[4]{a}\times\sqrt{-1}$ es evidentemente imaginaria y nada más que imaginaria; en cuyo caso habria un absurdo en la igualdad anterior. Pero entónces la trasformacion es inadmisible, pues aumentando los valores de $\sqrt{-1}$ al multiplicar el índice del radical se obtienen los radicales $\sqrt[4]{a}$ y $\sqrt{-1}$ considerados con toda su generalidad, y por tanto no es absurdo decir que $\sqrt[4]{a}\times\sqrt{-1}$ sea igual á

$\sqrt[4]{a}$, sino que así debe ser; porque entre los valores de $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1}$, los hay reales y los hay imaginarios, y nada impide el igualar los valores reales de $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1}$, al valor real aritmético de la expresion $\sqrt[4]{a}$.

Para justificar esta igualdad no hay más que probar que los valores de $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1}$ son los mismos que los de $\sqrt[4]{a}$.

Para ello, los cuatro valores de $\sqrt[4]{a}$ son los que se obtienen multiplicando la raíz cuarta aritmética de a, que llamaremos a', por las cuatro raíces cuartas de la unidad, que son $+1, -1, +\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$, en las que $\sqrt{-1}$ no tiene más signo que el que le precede; luego las cuatro raíces cuartas de a, serán

$$+a', -a', +a'\sqrt{-1} \text{ y } -a'\sqrt{-1}.$$

Los valores de $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1}$ se obtendrán multiplicando cada uno de los cuatro valores de $\sqrt[4]{a}$ por cada uno de los dos valores de $\sqrt{-1}$; que son, como hemos visto, $+\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$; por consiguiente, dichos valores serán $+a'\sqrt{-1}$, $-a'\sqrt{-1}$, $+a'\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -a'$, y $-a'\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = +a'$, puesto que aquí $\sqrt{-1}$ lleva el mismo signo en todos los factores, y por tanto $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$; luego los cuatro primeros valores son:

$$+a'\sqrt{-1}, -a'\sqrt{-1}, -a' \text{ y } +a'.$$

Multiplicando ahora los valores de $\sqrt[4]{a}$ por el otro valor $-\sqrt{-1}$, se tendrán los cuatro valores

$$-a'\sqrt{-1}, +a'\sqrt{-1}, +a' \text{ y } -a',$$

que son absolutamente los mismos cuatro anteriores; luego los ocho valores que parece debia tener la expresion $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1}$, se reducen á sólo los cuatro valores $+a'$, $-a'$, $+a'\sqrt{-1}$ y $-a'\sqrt{-1}$, que son precisamente los mismos que los de $\sqrt[4]{a}$; por consiguiente, considerando á los radicales con toda su generalidad, no es un absurdo decir que $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1} = \sqrt[4]{a}$.

SEGUNDA PARTE.

Ecuaciones y desigualdades.

LECCION XXV.

Definiciones.—Trasformaciones generales que se les puede dar á las ecuaciones.—Regla para plantear y resolver un problema en el caso de no contener más que una incógnita.

Definiciones.

224. *Se llama* IDENTIDAD *ó* ECUACION IDÉNTICA *la expresion de la igualdad que existe entre dos cantidades idénticas.* Así, $a=a$, $3=3$, $a-b=a-b$, $ax+b=ax+b$, son identidades. El carácter distintivo de las identidades es el de ser verificadas para cualquier valor que se dé á cada una de las letras que entran en ellas; pues el primer miembro, que es todo lo que hay ántes del signo $=$, es siempre idénticamente igual al segundo, que es lo que hay despues de dicho signo.

225. *Se llama* IGUALDAD, *la expresion que resulta de reunir con el signo $=$ dos cantidades iguales en valor, pero no en forma.* Así, $3\times4=12$, $ab=P$, $A=BQ+R$, son igualdades; porque se supone que el valor numérico del primer miembro es igual al valor numérico del segundo, sin embargo de no ser idénticamente iguales dichos miembros. El carácter distintivo de las igualdades es el de verificarse siempre entre cantidades conocidas, y de ser generalmente uno de los miembros de la igualdad el resultado de las operaciones indicadas en el otro. Cuando en ambos miembros se efectúan todas

las operaciones indicadas con las cantidades que en ellos entran, se debe llegar siempre á una identidad.

226. *Se llama* ECUACION *la igualdad de dos cantidades en que entran una ó más incógnitas, las cuales se han de determinar con la condicion de que se verifique dicha igualdad.*

Así, $3x-11=2x+5$, es una ecuacion; pues para que se verifique es necesario darle á la incógnita x el valor 16, y sólo dándole este valor se podrá verificar, convirtiéndose en la igualdad, $3\times16-11=2\times16+5$, de la cual, efectuando todas las operaciones indicadas, se obtiene la identidad $37=37$.

El carácter distintivo de las ecuaciones es el no poderse verificar para cualquier valor que se le dé á la incógnita ó incógnitas que en ella entren, sino que éstas no pueden recibir más que un número limitado de valores, y á veces es imposible que la ecuacion se verifique para ningun valor, llamándose en este caso *ecuacion absurda* ó *imposible de verificar*.

227. De las anteriores definiciones resulta que áun cuando las tres palabras *ecuacion*, *igualdad* é *identidad* vienen á significar ó expresar en el fondo una misma cosa, que es la igualdad de dos cantidades, hay sin embargo una gran diferencia entre ellas. En la identidad como en la ecuacion puede haber cantidades desconocidas, ó ser todas conocidas como en la igualdad; pero no se pueden confundir con ellas, pues es necesario que el primer miembro sea idéntico al segundo, lo cual no se verifica ni en la ecuacion ni en la igualdad. Las incógnitas de una identidad ó ecuacion idéntica, pueden recibir todos los valores que queramos, porque siempre el primer miembro será idéntico al segundo.

La igualdad no admite cantidades desconocidas, en lo cual se diferencia de la ecuacion que siempre tiene por lo ménos una.

228. Las ecuaciones se dividen en *determinadas* é *indeterminadas*. Se dice que una ecuacion es *determinada* cuando no tiene más que una incógnita, é *indeterminada* cuando tiene más de una.

Las ecuaciones, ya sean determinadas ó indeterminadas, se dividen tambien en *grados* que se marcan por el mayor exponente de la incógnita, si la ecuacion es determinada, y por la mayor suma de los exponentes de las incógnitas en un término cualquiera, si es indeterminada. Así, una ecuacion puede ser de primero, segundo, tercero, etc., grado, segun que el mayor exponente, ó la mayor suma de exponentes de las incógnitas en uno de sus términos, sea uno, dos, tres, etc.

229. *Se llama* SISTEMA DE ECUACIONES *el conjunto de dos ó más ecuaciones que se han de verificar para unos mismos valores de las incógnitas.*

Se dice que un sistema de ecuaciones es *determinado* cuando hay tantas ecuaciones diferentes como incógnitas; si el número de ecuaciones distintas de que consta un sistema es menor que el número de incógnitas, se llama *indeterminado*; y se dice que es *imposible* ó *más que determinado* en el caso de tener más ecuaciones que incógnitas; se llama imposible porque varias de estas ecuaciones no se pueden verificar sino condicionalmente, por lo cual se les llama *igualdades* ó *ecuaciones de condicion* á las relaciones de igualdad que se han de verificar entre las cantidades conocidas para expresar la condicion de que todas las ecuaciones se verifiquen por unos mismos valores de las incógnitas.

230. Resolver una ecuacion es hallar el valor ó los valores de las incógnitas que puestos en vez de ellas en las ecuaciones las verifiquen, convirtiéndolas en igualdades y éstas á su vez en identidades.

Trasformaciones generales que se les puede dar á las ecuaciones.

231. *Los valores de las incógnitas de una ecuacion no varian aunque se aumente ó disminuya una misma cantidad á los dos miembros de la misma.*

Es decir, que los mismos valores de las incógnitas que verifican á la ecuacion, $A=B$, verifican tambien á la ecuacion $A\pm M=B\pm M$; y recíprocamente los valores de las incógnitas de la segunda, son los mismos que los de la primera.

En efecto, los valores de las incógnitas que hacen que se verifique la ecuacion $A=B$, verifican tambien á la segunda ecuacion; pues siendo M siempre igual á M cualesquiera que sean los valores de las incógnitas, como A es igual á B por la hipótesis, es claro que $A\pm M$ será igual á $B\pm M$.

Recíprocamente, siendo constantemente $M=M$ para cualesquiera que sean los valores de las incógnitas, estos valores solo tendrán que satisfacer á la condicion de ser $A=B$; es decir, que los valores que han de verificar á la ecuacion $A\pm M=B\pm M$ son los mismos que verifican á $A=B$; luego se puede reemplazar una de estas ecuaciones por la otra, pues los valores de las incógnitas son los mismos.

Estas ecuaciones que se verifican por unos mismos valores de las incógnitas se les llama *ecuaciones equivalentes*.

232. *En toda ecuacion se puede, sin que los valores de las incógnitas se alteren, pasar un término cualquiera de un miembro á otro, cambiándole el signo.*

En efecto, pasar un término cualquiera de un miembro á otro con el signo cambiado, equivale á sumar ó restar á los dos miembros una misma cantidad, lo cual hemos visto no altera en nada los valores de las incógnitas.

Así, la ecuacion $ax-b=cx+d$, se puede trasformar en $ax-cx=d+b$, pasando el término $-b$ al segundo miembro, y el cx al primero; lo cual se obtiene agregando á los dos miembros la cantidad b, y restando despues de dichos dos miembros cx; así,

$$ax-b+b-cx=cx+d+b-cx,$$

la cual se reduce á la ecuacion anterior, haciendo la destruccion de los términos semejantes.

233. *Los valores de las incógnitas de una ecuacion no se alteran, aunque se multipliquen sus dos miembros por una cantidad independiente de las incógnitas.*

Es decir que los valores de las incógnitas que verifican á la ecuacion $A=B$, verifican tambien á $AM=BM$, siendo M un número independiente de dichas incógnitas; y recíprocamente, los valores de las incógnitas de la segunda son los mismos que los de la primera. En efecto, los valores que verifican á la ecuacion $A=B$, verifican evidentemente á $AM=BM$; pues M siempre es igual M.

Recíprocamente, siendo M independiente de las incógnitas de la ecuacion, éstas sólo tienen que satisfacer, para que el producto AM sea igual á BM, que los factores A y B sean iguales, es decir que estos valores sólo tienen que satisfacer á la ecuacion $A=B$; luego las soluciones de la primera ecuacion son las mismas que las de la segunda, y por consiguiente se puede reemplazar la una por la otra.

234. *Toda ecuacion cuyos coeficientes de las incógnitas sean fraccionarios, se puede trasformar en otra que tenga dichos coeficientes enteros.*

En efecto, si reducimos todos los coeficientes fraccionarios á un comun denominador, podemos multiplicar por él los dos miembros de la ecuacion sin que se alteren, como ya hemos visto, los valores de las incógnitas, con lo cual los denominadores habrán desaparecido.

Así, la ecuacion $\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}x+4$, se podrá trasformar en $9x-6=8x+48$, para lo cual reduciendo á un comun denominador, se tiene $\frac{9}{12}x-\frac{6}{12}=\frac{8}{12}x+4$, y multiplicando por 12, se halla la trasformada anterior.

Esta operacion se conoce con el nombre de quitar los denominadores de una ecuacion; de modo que podremos decir que, *para quitar los denominadores de una ecuacion; se multiplican los términos enteros por el* m. c. m. *de los denominadores, y los numeradores de los fraccionarios por el cociente de dividir dicho* m. c. m. *por el denominador correspondiente,* lo que equivale á multiplicar toda la ecuacion por el *m. c. m.* lo cual no altera los valores de las incógnitas.

* 235. *Si se multiplican los dos miembros de una ecuacion por una cantidad dependiente de las incógnitas, la ecuacion resultante contendrá todos los valores de las incógnitas que verifican á la ecuacion dada, y además podrá contener alguna otra solucion extraña.*

Sea la ecuacion $A=B$ si la multiplicamos por M, cantidad dependiente de las incógnitas, se tiene $AM=BM$ de donde se deduce

$$AM-BM=0, \text{ ó } (A-B)\,M=0.$$

Los valores de las incógnitas que verifican á la ecuacion $A=B$, verifican evidentemente $AM=BM$, ó á cualquiera de sus trasformadas $AM-BM=0$, ó $(A-B)\,M=0$; pero los valores que verifican á la ecuacion $AM=BM$, son los que hacen que $(A-B)\,M$ sea igual á cero; ahora bien, $(A-B)\,M$ puede ser cero, siendo $A=B$, ó $M=0$, luego los valores de las incógnitas de la ecuacion $AM=BM$, además de los valores que verifican á la ecuacion $A=B$, puede tener los valores extraños que hacen $M=0$; luego si se multiplican los dos miembros de una ecuacion por una cantidad dependiente de las incógnitas, la ecuacion resultante puede tener las soluciones extrañas que provienen de igualar á cero el factor porque se multiplicaron.

236. *Los valores de las incógnitas de una ecuacion no se alteran aunque se partan sus dos miembros por un número independiente de dichas incógnitas.*

Es decir, que los valores de las incógnitas de la ecuacion $A=B$, son los mismos que los de la que resulta de dividirla por una cantidad M independientes de dichas incógnitas,

$$\frac{A}{M}=\frac{B}{M}.$$

En efecto, los valores, que verifiquen á la primera ecuacion A=B, verifican evidentemente á la segunda; pues M siempre es igual M. Recíprocamente, los valores que verifiquen á la segunda ecuacion, tienen que satisfacer, pues M=M, á la condicion precisa de A=B; es decir á la primera ecuacion, luego las soluciones de la primera ecuacion son las mismas que las de la segunda y recíprocamente; luego se puede reemplazar una de estas ecuaciones por la otra.

237. Del principio anterior se deduce que siempre que los coeficientes de las incógnitas y cantidades constantes tengan un factor comun, se podrán dividir por él los dos miembros de la ecuacion, sin que por ello cambien los valores de las incógnitas.

* 238. *Si se dividen los dos miembros de una ecuacion por un factor* M *dependiente de las incógnitas, la ecuacion que resulta puede tener ménos soluciones que la propuesta.*

En efecto, sea la ecuacion A=B cuyos dos miembros A y B se dividen por un factor M dependiente de las incógnitas; de modo que llamando A' y B' los cocientes respectivos, se tendrá $A'=B'$.

Si multiplicamos esta ecuacion $A'=B'$ por el factor M, la ecuacion que resulta $A'M=B'M$, que es la ecuacion A=B, puesto que $A'M=A$ y $B'M=B$, contiene las soluciones de la ecuacion $A'=B'$, y además puede contener otras que resultan de igualar á cero el factor M (235); luego si las soluciones de la ecuacion A=B contienen las de la ecuacion $A'=B'$, más otras soluciones de M=O, es claro que la ecuacion $A'=B'$ puede tener ménos soluciones que la propuesta, segun queríamos demostrar.

* 239. Del principio anterior se deduce, que cuando los dos miembros de una ecuacion sean divisibles por una cantidad dependiente de las incógnitas, se podrá dividir por ella, siempre que se agreguen á las soluciones de la ecuacion que resulte, las correspondientes á la ecuacion que se obtiene de igualar á cero la cantidad porque se divide.

Reglas para plantear y resolver un problema en el caso de no contener más que una incógnita.

240. *Se llama* PROBLEMA *toda cuestion en que se pide hallar una ó más cantidades desconocidas llamadas* INCÓGNITAS, *por la relacion ó relaciones que tienen con otras conocidas llamadas* DATOS.

Plantear un problema ó ponerle en ecuacion es hallar las ecuaciones que ligan las incógnitas con los datos segun las condiciones indicadas en el enunciado.

Los problemas se dice que son *determinados*, *indeterminados* ó *imposibles*, segun que el sistema de ecuaciones que resulta de plantearle sea determinado, indeterminado, ó imposible: en el primer caso, hay un número finito y determinado de valores para las incógnitas que verifican las condiciones del problema; en el segundo, hay un número infinito de valores para las incógnitas; y en el tercero, no hay ningun sistema ó conjunto de valores que puedan verificar las condiciones del problema.

En todo problema se debe atender. 1.° al modo de plantearle ó ponerle en ecuacion; 2.° á la resolucion de las ecuaciones, ó sea la investigacion del valor ó valores de las incógnitas que le verifican; 3.° á la verificacion ó comprobacion de dichos valores; 4.° á la discucusion, ó sea la interpretacion y modo de considerar los valores de las incógnitas de un problema, segun ciertas hipótesis hechas sobre los datos ó condiciones del mismo.

Las dificultades que en cada una de estas partes se presentan, dependen de la naturaleza de las condiciones dadas en el enunciado de un problema, y por consiguiente del grado de las ecuaciones que resultan al ponerle en ecuacion, y del número de ecuaciones que se obtienen. Nosotros principiaremos por el caso más sencillo: que la ecuacion que resulte sea de primer grado, y no contenga más que una incógnita; aunque la regla que vamos á dar para plantear un problema, es general para cualquiera que sea la ecuacion.

Difícil es comprender en una regla general el modo de plantear un problema en ecuacion, cuando tantos y tan variados pueden ser los enunciados de los problemas que se pueden presentar; pero siempre se reduce á poner en práctica las operaciones que tendríamos que hacer si, conociendo los valores de las incógnitas, quisiéramos ver si cumplian con las condiciones enunciadas, lo cual siempre es fácil; por consiguiente, fácil debe ser tambien el plantear un problema cualquiera, una vez bien comprendidas las condiciones á que han de satisfacer las incógnitas. Así diremos, que

241. *Para plantear un problema ó ponerle en ecuacion, se suponen conocidos los valores de las incógnitas que se buscan, las cuales pueden ser elegidas á nuestro arbitrio en algunos casos, y se representan por las últimas letras del alfabeto; en seguida se indican todas las operaciones que se harian con estas incógnitas, si realmente fuesen conocidas, para comprobar el problema; lo que dá origen á una igualdad que, conteniendo los valores desconocidos de las incógnitas, será la ecuacion de donde deberemos deducir dichos valores.*

Sea, por ejemplo, plantear el siguiente:

PROBLEMA. *Cuatro amigos fueron á un café á cenar, con la condicion de que cada uno habia de gastar todo el dinero que llevase: así lo hicieron, y resultó: que el primero pagó la* tercera parte *de la cena; el segundo la* cuarta parte ; *el tercero la* sexta, *y el cuarto dió* 60 *reales que tenia, con lo cual quedó pagado todo el gasto; se quiere saber cuánto importa la cuenta.*

Suponiendo conocido el valor de la cena, y llamándole x, se obtendrá la ecuacion que resuelve el problema haciendo con x las mismas operaciones que hariamos si conociésemos el valor de la cena, para comprobarle; así, como el primero dió la tercera parte del valor de la cena, es claro que siendo este x, daria $\frac{x}{3}$; el segundo daria $\frac{x}{4}$; el tercero pagaria $\frac{x}{6}$, y el cuarto los 60 reales que dió, cuyas sumas reunidas deben componer el valor total de la cena; por consiguiente, se deberá tener

$$x=\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+60;$$

cuya ecuacion se trasformará quitando los denominadores, para lo cual multiplicaremos por 12, mínimo comun múltiplo de todos ellos, en

$$12x=4x+3x+2x+720.$$

Si pasamos al primer miembro todos los términos que tienen x, con lo cual el valor de la incógnita no se altera (232), se hallará,

$$12x-4x-3x-2x=720;$$

y reduciendo, se tiene la nueva ecuacion

$$3x=720;$$

de la cual se deduce, dividiendo por 3 ambos miembros,

$$x=\frac{720}{3}=240;$$

luego el valor de la cena es 240 reales, de los cuales pagó el primero 80, el segundo 60, el tercero 40, y el cuarto los 60 que faltan, cuyos números componen la suma de 240.

242. *Para resolver una ecuacion determinada de primer grado, ó sea para hallar el valor de la incógnita que satisface á dicha ecuacion, se principia por quitar los denominadores si los hay* (234) *despues se pasan al primer miembro todos los términos que tienen incógnita, y al segundo los que no la tienen* (232); *se efectúan las operaciones indicadas que se puedan, y se saca la incógnita factor comun si está en más de un término; por último, dividiendo los dos miembros de la ecuacion por todo lo que multiplica á la incógnita, se hallará el valor de ésta.*

En efecto, sea la ecuacion

$$x-\frac{5x+3}{6}+\frac{17}{60}=\frac{3x-5}{12}-\frac{2x}{5}+4.$$

Si mulplicamos esta ecuacion por el *m. c. m.* de los denominadores, que es 60, el valor de la incógnita no habrá cambiado y se podrá reemplazar dicha ecuacion por la siguiente, que no tiene denominadores,

$$60x-50x-30+17=15x-25-24x+240.$$

Pasando ahora los términos que tienen incógnita al primer miembro, y los que no la tienen al segundo, se hallará

$$60x-50x-15x+24x=240-25+30-17;$$

y efectuando las operaciones, se tendrá

$$19x=228;$$

cuya ecuacion dividida por 19, número que multiplica á la incógnita, nos dará para valor de ésta

$$x=\frac{228}{19}=12;$$

único valor que verifica á la ecuacion propuesta.

Si queremos comprobarlo, no tenemos más que sustituir por el valor 12 la incógnita x, y se hallará la igualdad

$$12-\frac{5.12+3}{6}+\frac{17}{60}=\frac{3.12-5}{12}-\frac{2.12}{5}+4;$$

en la cual, ejecutando las operaciones parciales que hay indicadas, se tiene

$$12-\frac{63}{6}+\frac{17}{60}=\frac{31}{12}-\frac{24}{5}+4.$$

Efectuando las sumas indicadas en ambos miembros, se obtiene la identidad

$$\frac{107}{60}=\frac{107}{60};$$

con lo cual queda verificada la ecuacion.

LECCION XXVI.

Resolucion de ecuaciones de primer grado con una incógnita.—Problemas que dan orígen á ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Resolucion de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

343. Resolver los ejemplos siguientes:

EJEMPLO. I. $3x+32-\frac{5x}{6}=\frac{3x+8}{4}+42-\frac{x}{12}.$

SOLUCION. $x=\frac{144}{18}=8;$

EJEMPLO II. $2ax+b-\frac{cx}{d}+2ab=\frac{2ax}{bc}-ax+2b.$

SOLUCION. $x=\frac{b^2cd-2ab^2cd}{3abcd-bc^2-2ad}=\frac{b^2cd(1-2a)}{3abcd-bc^2-2ad}.$

EJEMPLO III.

$$\frac{5b(2a-b)}{b^2-a^2}-\frac{3a+b}{2ab(a+b)}x+\frac{a}{2a-b}x=\frac{3a-b}{2ab(b-a)}x+\frac{5ab}{2}.$$

Solucion. $x=\frac{5b(2a-b)}{2}.$

Ejemplo IV. $\frac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}-3x+\frac{a^2}{(a+1)^3}=\frac{x}{a}-\frac{3a}{a+1}.$

Solucion. $x=\frac{a}{a+1};$

Problemas que dan orígen á ecuaciones de primer grado con una incógnita.

244. Problema I. *Descomponer un número* N *en dos partes cuya diferencia sea* d.

Si conociésemos una de las dos partes, la otra seria lo que le faltase á la que se conoce para valer N; luego llamando á una de estas partes x, la otra será $N-x$; y como la diferencia de estas dos partes ha de valer d, se tendrá la ecuacion

$$x-(N-x)=d;$$

ó si se quiere, $N-x-x=d$, segun que x sea la mayor ó la menor de las dos partes.

Así, suponiendo que x expresa la mayor de las dos partes, consideraremos la primera ecuacion, de la cual se deduce fácilmente,

$$x=\frac{N+d}{2};$$

que nos dice que la mayor de las dos partes es igual á la mitad de la suma del número más la diferencia, y la menor será

$$N-\frac{N+d}{2}=\frac{2N-N-d}{2}=\frac{N-d}{2},$$

que es la mitad de la diferencia del número que se ha de dividir y la diferencia de las dos partes.

Ejemplo. *Dividir el número* 100 *en dos partes que se diferencien en* 36 *unidades*.

Segun las fórmulas anteriores, se tendrá:

$$\text{Parte mayor}=\frac{100+36}{2}=68.$$

$$\text{Parte menor}=\frac{100-36}{2}=32.$$

Cuyas dos partes cumplen con las condiciones del problema.

245. Este problema se suele tambien enunciar diciendo: *hallar dos números conociendo su suma y diferencia.*

En cuyo caso la traduccion de las anteriores fórmulas será: *el mayor de los dos números es igual á la mitad de la suma más la mitad de la diferencia, y el menor igual á la mitad de la suma ménos la mitad de la diferencia.*

Problema II. *Una persona tiene impuesto la mitad de su capital al* 3 *por* 100; *la tercera parte al* 5, *y el resto al* 8 *por* 100. *Gana en todo* 21600 *reales al año: se quiere saber cuánto capital tiene.*

Sea x el capital; y como la mitad está impuesto al 3 por 100, producirá esta mitad una ganancia igual á $\frac{3x}{200}$; la tercera parte ganará al 5 por 100, $\frac{5x}{300}$; y el resto, que será $x-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x}{6}$, que está impuesta al 8, producirá una ganancia de $\frac{8x}{600}$; y como la suma de las tres ganancias ha de dar la ganancia total, que es 21600 reales, se tendrá

$$\frac{3x}{200}+\frac{5x}{300}+\frac{8x}{600}=21600 \text{ rs.};$$

de la cual se deduce el valor de $x=480000$ que resuelve el problema como es fácil comprobar.

Problema III. *En un viaje de* 210 *leguas, dice una persona que ha andado* $3\frac{1}{2}$ *veces más en diligencia que á caballo,* $2\frac{2}{7}$ *veces más en ferro-carril que en diligencia, y por mar la mitad que por ferro-carril más tres leguas; se desea saber cuánto anduvo á caballo, en diligencia, por ferro-carril y por mar.*

Llamemos x á lo que ha andado á caballo; lo que en diligencia anduvo, será $3\frac{1}{2}x$; en ferro-carril andaria $2\frac{2}{7}.3\frac{1}{2}x$, y por mar $\frac{2\frac{2}{7}.3\frac{1}{2}x}{2}+3$; y como todo compone el viaje de 210 leguas, se tendrá la ecuacion

$$x+3\tfrac{1}{2}x+2\tfrac{2}{7}.3\tfrac{1}{2}x+\frac{2\frac{2}{7}.3\frac{1}{2}x}{2}+3=210.$$

de la cual se deduce el valor de $x=12$, cuya comprobacion es bien fácil.

Problema IV. *Un correo parte de Madrid y camina* 5 *leguas* *cada* 3 *horas*; 12 *horas despues parte otro con objeto de alcanzarle, y camina* 11 *leguas cada* 5 *horas: ¿A las cuántas horas le alcanzará?*

Supongamos que el segundo correo tarda en alcanzarle x horas; el primero llevará andando $x+12$; pero si éste anda 5 leguas en cada tres horas, en una andará $\frac{5}{3}$ de legua; el segundo andará, por una razon análoga, $\frac{11}{5}$; por consiguiente, el primero habrá andado $\frac{5}{3}(x+12)$ leguas, y el segundo $\frac{11}{5}x$; y como este número de leguas es el mismo que los dos han andado, se tendrá la ecuacion

$$\frac{11}{5}x=\frac{5}{3}(x+12);$$

de la cual se deduce, $x=37\frac{1}{2}$ horas.

PROBLEMA V. *Un platero tiene dos rieles de plata de diferente ley; el primero tiene* 0,845 *de fino, y el segundo* 0,920; *quiere hacer una pieza de* 6 *onzas, que tenga una ley de* 0,895 *de fino: ¿Cuánto debe tomar de cada riel?*

Estando la ley que ha de tener la pieza comprendida entre las leyes de los rieles, el problema será posible; lo cual no se verificaria, si hubiera de ser de una ley mayor que el de mayor ley, ó menor que el de menor; porque entónces habria que aumentar plata fina en el primer caso, ó liga en el segundo.

Esto supuesto, si nosotros llamamos x la cantidad que hay que tomar del primer riel, del segundo habrá que tomar $6-x$; y como en cada unidad de peso del primer riel, hay 0,845 de fino, en x unidades habrá $x\times0,845$; por la misma razon en $6-x$ unidades del segundo riel, habrá $(6-x)\times0,920$; y como entre los dos ha de haber el fino que corresponda á 6 onzas de la ley de 0,895, ó sean, $6\times0,895$, se tendrá la ecuacion

$$x\times0,845+(6-x)\times0,920=6\times0,895;$$

de donde se deduce $x=2$, cuyo resultado nos dice, que tomando 2 onzas del primer riel y 4 del segundo, se hallarán 6 onzas de la ley de 0,895 de fino, como es fácil comprobar.

PROBLEMA VI. *Una persona emplea su capital en un negocio que le produce un* 25 *por* 100 *cada año: esta persona gasta anualmente en el sustento de su familia* 50000 *reales; y al cabo de tres años halla que le faltan* 21125 *reales, para que su capital primitivo se halle* *aumentado en sus tres quintas partes: se quiere saber qué capital tenia esta persona al principio de la especulacion.*

Sea x el capital con que se pone á negociar esta persona; al cabo del primer año se hallará con el capital

$$x+\frac{x}{4}-50000=\frac{5x-200000}{4}$$

Al cabo del segundo año, tendrá

$$\frac{5x-200000}{4}+\frac{5x-200000}{16}-50000=\frac{25x-1800000}{16}.$$

Por último, al fin del tercer año se hallará con el capital

$$\frac{25x-1800000}{16}+\frac{25x-1800000}{64}-50000=\frac{125x-12200000}{64}$$

y como este capital ha de ser igual al primitivo aumentado de sus tres quintas partes, ménos 21125, se tendrá la ecuacion

$$\frac{125x-12200000}{64}=x+\frac{3}{5}x-21125,$$

de la cual se deduce el valor de $x=480000$ reales, que es el capital que se tenia al principiar esta especulacion.

Problema VII. *Preguntándole un hijo á su padre qué edad tenia cada uno, le contestó: hace 1 año que tenia yo el* triplo *de tu edad, y dentro de 13 años, no tendré más que el* doble.

Sea x, la edad del padre; $x-1$ será el triplo de la edad del hijo, y por consiguiente $\frac{x-1}{3}$ seria la edad del hijo hace un año, y por tanto la edad actual será $\frac{x-1}{3}+1$; dentro de 13 años, la edad del padre ha de ser doble de la del hijo; luego la ecuacion será

$$x+13=2\left(\frac{x-1}{3}+1+13\right),$$

de la cual se deduce que la edad del padre es $x=43$ años, y la del hijo 15; lo que es fácil comprobar.

Problema VIII. *Un platero tiene un riel que contiene plata y cobre y pesa 10 libras: se quiere saber, empleando el método de las densidades, cuánto tiene de cada metal.*

Averiguada la densidad del riel, se ve que es de 10; y se sabe que la de la plata es de 10,5; y la del cobre de 8,8.

Siendo la densidad la relacion del volúmen al peso, se deduce que el volúmen será igual al peso partido por la densidad.

Ahora bien, si llamamos x al peso de plata que contiene el riel, el del cobre vendrá expresado por $10-x$; el volúmen de la plata será $\frac{x}{10,5}$, y el del cobre $\frac{10-x}{8,8}$; y como ambos volúmenes han de componer el del riel, que es $\frac{10}{10}=1$, se tendrá la ecuacion

$$\frac{x}{10,5}+\frac{10-x}{8,8}=1;$$

de la cual se deduce $x=7,412$ onzas de plata; y por tanto las de cobre serán $10-7,412=2,588$.

LECCION XXVII.

Discusion de los valores de la incógnita de una ecuacion de primer grado, interpretacion de los valores positivos y negativos.—Interpretacion de las expresiones $\frac{0}{A}$, $\frac{B}{0}$ y $\frac{0}{0}$ cuando resultan para valores de la incógnita de una ecuacion.—Regla para hallar el límite de una fraccion cuando en sus dos términos existe una cantidad variable que tiende hácia infinito.—Interpretacion de las expresiones $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, y $0\times\infty$.

Discusion de los valores de la incógnita de una ecuacion de primer grado, interpretacion de los valores positivos y negativos.

246. Al resolver un problema de primer grado con una incógnita, ya se nos den los datos por números particulares, ya de un modo general, ó sea por letras, como en el problema primero que hemos resuelto (244), llegamos siempre á un cierto valor de la incógnita que satisface á la ecuacion propuesta, y este valor, segun los que tienen los datos en cada caso particular, da orígen á expresiones que es necesario interpretar y ver hasta qué punto satisfacen las condiciones del problema, lo cual constituye lo que se llama discusion de los valores de la incógnita de una ecuacion.

247. Toda ecuacion de primer grado con una incógnita, puede reducirse á la forma

$$Ax=B \quad [1],$$

siendo A una cantidad entera y positiva, y B una cantidad entera tambien, pero que puede ser positiva ó negativa.

En efecto, despues de quitados los denominadores, y hecha la trasposicion de términos, podemos efectuar las operaciones indicadas, ó sacar x por factor comun, de modo que llamando A al coeficiente de x, y B á la cantidad constante, la ecuacion propuesta se reducirá, ó se podrá reemplazar por la ecuacion $Ax=B$, y si en esta el coeficiente A es negativo, podremos multiplicarla por -1, lo cual equivale á cambiar el signo á todos sus términos, y llegaremos á la ecuacion [1], en la que A es entero y positivo, y B siendo entero, puede ser positivo ó negativo.

248. *La incógnita de una ecuacion determinada de primer grado tiene siempre un valor de la forma* $\frac{B}{A}$ *que la satisface, y no tiene más que uno.*

Hemos visto que toda ecuacion de primer grado con una incógnita se puede reducir, sin que el valor de ésta se altere, á la ecuacion [1]; por consiguiente todo valor de la incógnita que verifique á la ecuacion propuesta, debe verificar á la trasformada [1], y recíprocamente; pero á la ecuacion [1] solo la verifica el valor de $x=\frac{B}{A}$; luego á la propuesta la verifica tambien éste y sólo este valor.

El valor de la incógnita de una ecuacion determinada de primer grado siendo de la forma $\frac{B}{A}$, es claro que tendrá que ser siempre real y conmensurable, á no ser que los datos sean números inconmensurables ó expresiones imaginarias; y siendo conmensurable, podrá ser entero ó fraccionario, positivo ó negativo, ó bien de la forma $\frac{0}{A}$, $\frac{B}{0}$ ó $\frac{0}{0}$.

Estas expresiones ó valores verifican siempre á la ecuacion de donde provienen y la convierten en una igualdad; pero no siempre verifican á las condiciones del problema, como vamos á ver en esta leccion.

249. Si $B>0$, el valor de x es positivo, el cual podrá ser entero

ó fraccionario, y en ambos casos este valor satisface, en general, no sólo á la ecuacion sino al problema que le dió orígen, y digo en general, porque hay casos especiales en los que el valor positivo de la incógnita no cumple con todas las condiciones que la naturaleza del problema exige, en cuyo caso hay que desecharle. En efecto, si el número que representa x ha de ser por su naturaleza entero, y resulta fraccionario, es claro que esto indica una imposibilidad en el problema; pues no cumple con la condicion precisa de ser entero. Si por el contrario, lo que se busca es una fraccion, ó un número fraccionario, y hallamos que es entero, tambien vendremos á concluir que el problema no puede verificarse en todas sus condiciones, y por consiguiente es imposible. A excepcion de estos dos casos de exclusion, el valor positivo de la incógnita satisface siempre al problema de donde proviene.

250. Si $B<0$, el valor de x es negativo; y entónces hay que considerar varios casos. En primer lugar podrá ser entero ó fraccionario, y esto en nada alterará su significacion en el problema, á no ser que como en el caso anterior, circunstancias especiales excluyan uno de estos valores.

Si circunstancias especiales no excluyen el valor fraccionario, ó el entero, podrá suceder que el valor que representa x en el problema, pueda ser tomado en los dos distintos sentidos de que hemos hablado al ocuparnos de las cantidades negativas, y en ese caso, si no hay en el problema condiciones que determinen de antemano uno de estos sentidos, el valor negativo lo mismo que el positivo, satisface á la cuestion, con sólo tener en cuenta que el valor negativo se ha de contar en un sentido contrario al que se contaria si fuese positivo.

Así, si x representa el haber de una persona, y hallamos un valor negativo $-a$, diremos que aquella persona lo que tiene es una deuda $-a$ de a reales. Si expresa la distancia de un punto á otro considerado como orígen, en una línea en la cual se ha convenido que las cantidades positivas se cuenten á la derecha, el valor $-a$ nos indicará que dicho punto se halla á la izquierda y á la distancia a; si representa la época en que ocurrió un suceso con relacion á otra que se toma por orígen ó punto de partida, el valor positivo ó negativo sólo nos indicará si dicho suceso ocurrió despues ó ántes de esta época; y el tiempo trascurrido será siempre el valor numérico de la cantidad, es decir a. Si expresa la longitud ó latitud de un lugar, el valor positivo ó negativo hallado para la incógnita, nos indicará el sentido en que se ha de tomar, es decir, si es oriental ú occidental, si se trata de la longitud; y si de la latitud, nos indicará si es boreal ó austral; y lo mismo diríamos de cualquier problema en el cual el valor de la incógnita pudiera tomarse en dos sentidos opuestos, y que en el enunciado del mismo problema no hubiera condiciones restrictivas que marcasen ya uno de estos dos sentidos.

251. Si en el enunciado del problema hay condiciones que marcan el sentido en que debe tomarse la incógnita, el cual está indicado por el valor positivo de la misma, el valor negativo nos indicará una imposibilidad en el problema, y como tal deberá desecharse.

Así, si tratamos en determinar el tiempo que trascurrió desde una época dada, á un cierto acontecimiento, y hallamos un valor negativo, diremos que el problema es imposible; pues en vez de haber trascurrido tiempo desde dicha época hasta el acontecimiento, que es lo que tratamos de hallar, vemos que dicho acontecimiento ocurrió ántes de la época que se nos da. Si tratamos de hallar la distancia á que se encontraran dos móviles que corren en una misma direccion, y que parten de dos puntos fijos, y hallamos para valor de la incógnita un valor negativo, nos indica desde luégo que el problema es imposible; pues deberia tomarse este valor en el sentido contrario, lo que no puede ser por estar ya determinada en el problema la direccion en que dichos móviles corren; de modo que en vez de encontrarse á una cierta distancia que es lo que buscamos, se han debido encontrar ya ántes, por consiguiente se nos pide en el problema, lo que no es posible que se verifique, lo cual está marcado por el valor negativo.

252. Como el valor de una incógnita nos indica, segun sea positivo ó negativo, el sentido en que dicho valor se ha de tomar, cuando el valor negativo nos indique, por las condiciones restrictivas, una imposibilidad, si variamos en el problema esta condicion, lo cual equivale á tomar ciertas cantidades en sentido contrario de aquel en que ántes se tomaron, obtendremos un nuevo problema de condiciones restrictivas tambien, que se verificará para el mismo valor hallado, considerado positivamente.

Si no está bien clara la condicion que ha de cambiarse para que el problema modificado tenga por solucion el mismo número hallado, se puede determinar fácilmente, traduciendo al lenguaje vulgar la ecuacion que resulta de cambiar x en $-x$ en la ecuacion propuesta; porque en efecto, si representamos por x' el valor $-x$, y ponemos en la ecuacion propuesta x' en vez de x, hallaremos para x' el mismo valor negativo que podemos representar por $-a$, de modo que se tendrá $x'=-a$; pero $x'=-x$; luego $-x=-a$, ó $x=a$ será el valor de la ecuacion que se obtiene cambiando x en $-x$, en la propuesta.

253. Si la cantidad que representa x no es por su naturaleza susceptible de poderse tomar en dos sentidos enteramente opuestos, y hallamos sin embargo para valor de x una cantidad negativa, debemos concluir que el problema es imposible de verificar en todas sus condiciones físicas.

Lo mismo que en el caso anterior, podremos hallar otro problema que tenga por solucion el mismo valor numérico, pero positivo, el cual se obtendrá, como hemos dicho, traduciendo la ecuacion que se obtiene cambiando x en $-x$ en la ecuacion del problema dado, lo que dará orígen á un problema de la misma naturaleza, pero con la diferencia de que ciertas condiciones deberán tomarse en sentido contrario de aquel en que se tomaban en el problema propuesto.

254. Sucede á veces que siendo el problema posible, áun teniendo en cuenta las condiciones restrictivas que marcan uno de los sentidos en que la incógnita se debe tomar, hallamos sin embargo un valor negativo para la incógnita de la ecuacion, y por consiguiente aparece como imposible; lo cual indica que hay algun vicio cometido en el planteo del problema. En efecto, al poner un problema en ecuacion, tenemos que hacer algunas veces, hipótesis particulares en que nos apoyamos, y si al hacer estas hipótesis alguna de ellas es falsa, llegaremos á un valor negativo que nos dirá, no que el problema sea imposible, sino que alguna de las hipótesis que hemos hecho en el planteo de la ecuacion es falsa. Por eso, en un problema cualquiera, ántes de concluir diciendo que es imposible, es necesario que estemos seguros de no haber cometido ningun error en los cálculos, ni haber hecho ninguna hipótesis falsa en el planteo de la ecuacion.

255. De todo lo dicho respecto á los valores negativos de la incógnita de una ecuacion, resulta:

1.° *Que el valor negativo de la incógnita de una ecuacion expresa la solucion del problema de un modo general, cuando la* *cantidad que dicha incógnita representa, es susceptible de ser tomada en dos sentidos opuestos y no hay condiciones que marquen de antemano, en cuál de estos sentidos hay que tomarla.*

2.° *Que el valor negativo de una incógnita indica una imposibilidad en el problema, aunque la cantidad que represente sea susceptible de ser tomada en dos sentidos, siempre que alguna condicion exprese que ha de ser tomada en uno de estos; en cuyo caso, el valor negativo nos indicará que habrá de tomarse en el otro, lo cual es contra lo que en el enunciado se pide.*

3.° *Que el valor negativo de la incógnita indica una imposibilidad en el problema, siempre que la cantidad que represente no sea susceptible de ser tomada en dos sentidos distintos.*

4.° *Que el valor negativo de la incógnita puede indicar no una imposibilidad del problema, sino algun error en los cálculos, ó alguna hipótesis falsa hecha en el planteo de la ecuacion, y una vez corregido el error, ó deshecha aquella hipótesis falsa, llegamos á un valor positivo que es el que verifica al problema.*

5.° *Que el valor negativo de una incógnita de un problema puede convertirse en el valor positivo de otro problema de la misma naturaleza, en el cual ciertas cantidades ó ciertas condiciones que se tomaban en un sentido, se toman en sentido contrario; y que el enunciado del problema modificado se obtiene, traduciendo al lenguaje vulgar la ecuacion que resulta de sustituir en la propuesta* x *por*—x.

Interpretacion de las expresiones $\frac{0}{A}$, $\frac{B}{0}$ y $\frac{0}{0}$ cuando resultan para valores de la incógnita de una ecuacion.

256. Los valores de los datos de un problema, á veces son tales, qne reducen á cero á una de las cantidades generales A ó B y en algunas ocasiones á los dos, dando orígen á las expresiones $\frac{0}{A}$, $\frac{B}{0}$ y $\frac{0}{0}$ las cuales vamos á interpretar en esta discusion.

Si hacemos $B=0$ en la ecuacion $Ax=B$, y en el valor de la incógnita sacado de ella $x=\frac{B}{A}$, obtenemos $Ax=0$ y $x=\frac{0}{A}$, que nos dice que el valor de x es cero, puesto que cero partido por cualquier cantidad da cero de cociente, lo que está conforme con la ecuacion, pues el número que multiplicado por A da cero, no puede ser otro que cero.

Ahora bien, si nosotros buscamos un número que habia de cumplir con ciertas condiciones, y éstas se reducian á satisfacer la ecuacion $Ax=B$, en la cual $B=0$, se ve que no hay número que la verifique, y en ese caso el problema es imposible en este sentido; pero este valor sin embargo tendrá su significacion en cada caso especial, pues se denotará el orígen de toda cantidad ya sea positiva ó negativa.

La ecuacion es *absurda*, porque tratando de hallar el número que multiplicado por A nos produce *cero*, se ve que es imposible, pues no hay ningun número que cumpla con esta condicion; luego el valor $\frac{0}{A}=0$, nos indica en general una imposibilidad en el problema, tal como se pide, pero que tiene su interpretacion física tomando por solucion el valor *cero*, ó sea el orígen de las cantidades positivas y negativas. La ecuacion es absurda, pues no hay ninguna cantidad numérica que la satisfaga, y sólo desaparecerá el absurdo haciendo $x=0$, en cuyo caso se tiene la igualdad evidente $A\times0=0$.

257. Si ahora suponemos $A=0$ sin que B lo sea, la ecuacion propuesta y el valor de x, se reducirán á $0\times x=B$, y $x=\frac{B}{0}$.

Desde luégo se ve que la ecuacion $Ax=B$, es absurda en la hipótesis de ser $A=0$; pues no hay ningun número finito que puesto en vez de x la satisfaga, porque cualquier número multiplicado por cero da cero; y como B no lo es, se sigue que la ecuacion $0=B$, ó sea $0\times x=B$, ó $A\times x=B$, es absurda en el caso de ser $A=0$.

El valor $\frac{B}{0}$ expresa una cantidad *infinitamente grande*, ó sea *infinito*, que se representa por el signo ∞. Para convencernos de ello, observaremos que si el divisor de una division disminuye, el cociente aumenta; así, si hacemos sucesivamente $A=0{,}001$, $0{,}00001$, $0{,}00000001$, etc., los valores de la expresion $\frac{B}{A}$, serán

$$\frac{B}{0{,}001}=1000B, \frac{B}{0{,}00001}=100000B, \frac{B}{0{,}00000001}=100000000B$$

donde vemos, que si le damos á A un valor menor que cualquiera cantidad dada, el cociente $\frac{B}{A}$, podrá ser mayor que cualquiera cantidad dada tambien; luego si hacemos $A=0$, la expresion $\frac{B}{0}$ expresará una cantidad *infinitamente grande*, ó sea *infinito*.

Al hallar para valor de x una expresion de esta forma, ó sea, como hemos visto, un valor infinitamente grande ó infinito, es claro que no hay valor alguno infinito que pueda verificar al problema y á la ecuacion; luego esta expresion $\frac{B}{0}=\infty$ hallada para valor de un problema, nos indica que es imposible, y la ecuacion absurda; pero la ecuacion $Ax=B$, hemos visto que es evidentemente absurda haciendo $A=0$; luego el valor de $x=\frac{B}{0}$ está conforme con la ecuacion, y corresponde perfectamente, áun en este caso, para probarnos la imposibilidad del problema y el absurdo que dicha ecuacion expresa.

Estas soluciones, que se llaman *infinitas*, pueden ser positivas en unos casos, negativas en otros, en algunos indiferentemente positivas ó negativas, y en todos casos indican imposibilidad en el problema. En algunos problemas de geometría, pueden tener interpretacion estas raíces infinitas.

258. Si suponemos $A=0$ y $B=0$, la ecuacion y el valor de la incógnita se convierte en $0\times x=0$, y $x=\frac{0}{0}$; lo cual nos indica que cualquier número multiplicado por *cero* da *cero*, y por consiguiente la expresion $\frac{0}{0}$ podemos considerarla como *símbolo de indeterminacion*, puesto que la ecuacion queda satisfecha siempre para cualquier valor que se le dé á x. Además, podemos hacer ver, que $\frac{0}{0}$ puede ser el símbolo de la indeterminacion, ó sea una expresion que puede representar cualquier número.

En efecto, supongamos que los dos términos de la fraccion $\frac{B}{A}$ van decreciendo, y que permanece constante su relacion: en el límite esta relacion será tambien la misma; pero el límite es $\frac{0}{0}$; luego $\frac{0}{0}$

puede representar la relacion cualquiera $\frac{B}{A}$ de dos números; y como esta relacion es un número indeterminado, es claro que $\frac{0}{0}$ puede ser el símbolo de la indeterminacion.

259. Aunque generalmente la expresion $\frac{0}{0}$ indica el símbolo de la indeterminacion, hay casos en que no es así; sino que puede ser que un valor de una fraccion tome esta forma, á causa de haber en sus dos términos un factor comun, que se reduce á cero por una hipótesis particular; de modo, que si ántes de hacer esta hipótesis quitamos ese factor comun, lo cual está permitido, y despues hacemos la misma hipótesis, dicha fraccion puede ya no tener la forma $\frac{0}{0}$, sino representar un valor finito, cero ó infinito, segun que ese factor esté contenido en el numerador de la fraccion un número de veces igual, mayor ó menor que en el denominador.

Así, la expresion $x=\frac{a^2-ab-2b^2}{2a^2-3ab-2b^2}$, se reduce á $\frac{0}{0}$, haciendo $a=2b$.

En efecto, $x=\frac{4b^2-2b^2-2b^2}{8b^2-6b^2-2b^2}=\frac{0}{0}$; pero si ántes de hacer $a=2b$, observamos que el valor de x se puede simplificar quitando el factor $a-2b$ que hay en los dos términos, se tendrá para el valor simplificado $x=\frac{a+b}{2a+b}$; en el cual, si hacemos la hipótesis anterior $a=2b$, se tiene $x=\frac{2b+b}{4b+b}=\frac{3b}{5b}=\frac{3}{5}$. Luego el verdadero valor de x no es indeterminado como se podria haber creido, sino que es $\frac{3}{5}$.

Esto prueba, que para decir que la expresion $\frac{0}{0}$ es el símbolo de la indeterminacion, es necesario que la fraccion de donde proviene no pueda simplificarse.

Regla para hallar el límite de una fraccion cuando en sus dos términos existe una cantidad variable que tiende hácia infinito.

260. Cuando en los dos términos de una fraccion existe una

cantidad variable que tiende hácia infinito, dicha fraccion se convierte, al llegar á este límite, en $\frac{\infty}{\infty}$, cuya expresion todavía no sabemos interpretar; pero en muchos casos este límite $\frac{\infty}{\infty}$ suelen ser un número finito, y conviene saber cómo se determina; para ello seguiremos la siguiente regla:

261. *Para hallar el límite hácia el cual tiende una fraccion cuando en sus dos términos existe una cantidad variable, que tiende hácia infinito, no hay más que dividir sus dos términos por la potencia mayor á que esté elevada esta variable, hacerla luégo igual á infinito, y el valor á que se reduzca la expresion será el límite pedido.*

Para ver el valor final hemos de observar que toda cantidad finita partida por otra infinita da de cociente *cero*, por una razon análoga á la que dimos para demostrar que toda cantidad finita dividida por *cero*, da de cociente infinito.

Así el valor de x en la expresion $x=\frac{a^2-2b^2}{2a^2-2b^2}$, que se reduce á $x=\frac{\infty}{\infty}$, cuando $a=\infty$, es igual á $\frac{1}{2}$, haciendo lo que la regla anterior prescribe.

Interpretacion de las expresiones $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ y $0\times\infty$.

262. Vemos que la expresion $\frac{A}{\infty}$ es igual á *cero*; pues cuando el denominador de una fraccion es infinitamente grande, el valor de la misma es infinitamente pequeño; y del mismo modo podemos deducir, que $\frac{\infty}{A}=\infty$, lo mismo que $\frac{\infty}{0}$; pero las expresiones $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ y $0\times\infty$ es menester que veamos lo que representan. Para ello, consideraremos las dos fracciones $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$, con las cuales indicaremos y efectuaremos las operaciones que están marcadas en estas expresiones, haremos despues $x=0$ é $y=0$, y tendremos lo que se desea.

Así,

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}}=\frac{y}{x}; \text{ haciendo ahora } x=0 \text{ é } y=0, \text{ se tiene } \frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{0}{0};$$

luego la expresion $\frac{\infty}{\infty}$ indica en general, como $\frac{0}{0}$, el símbolo de indeterminacion.

Sea ahora $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}$; de donde, haciendo $x=0$ é $y=0$, se tiene $\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\frac{0}{0}$.

Y por último, de la expresion $x\times\frac{1}{y}=\frac{x}{y}$, se deduce, haciendo tambien $x=0$ é $y=0$, que $0\times\frac{1}{0}=0\times\infty=\frac{0}{0}$; luego estas tres expresiones indican lo mismo que $\frac{0}{0}$.

263. Hemos visto, que si los valores de la incógnita de una ecuacion son *cero* ó ∞, dicha ecuacion es *absurda*; y ahora vamos á probar, que *si la ecuacion es absurda, el valor de la incógnita ha de ser* CERO *ó* INFINITO.

En efecto, si la ecuacion $Ax=B$ es asurda, ningun valor finito de x puede verificarla; por consiguiente, las dos cantidades A y B no pueden ser números finitos á la vez; porque si lo fueran, el valor de $x=\frac{B}{A}$, que sería finito, la verificaria, y en ese caso no sería absurda, lo cual es contra la hipótesis.

Tampoco pueden ser las dos cero, ó las dos infinito, porque entónces se hallarian para valores de x expresiones de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, que acabamos de ver son símbolos de indeterminacion, y por consiguiente las ecuaciones idénticas $0\times x=0$, ó $\infty\times x=\infty$, quedarian satisfechas para cualquier valor de x, lo cual no puede ser, puesto que la ecuacion es absurda; luego A tiene que ser *cero* ó *infinito*, sin serlo B; ó B tiene que ser *cero* ó *infinito*, sin serlo A; pero de todas estas combinaciones resulta, para valores de x,

$$x=\frac{B}{0}=\infty,\quad ó\quad x=\frac{B}{\infty}=0,$$

$$x=\frac{0}{A}=0,\quad ó\quad x=\frac{\infty}{A}=\infty;$$

luego el valor de x es, como hemos dicho, *cero* ó *infinito*, segun se queria demostrar

LECCION XXVIII.

Ejemplos de discusion de problemas de primer grado con una incógnita.

Ejemplos de discusion de problemas de primer grado con una incógnita.

264. Problema I. *Un destajista toma un cierto número de jornaleros para hacer una obra, y se propone gastar diariamente una cierta cantidad; si paga los jornales á* m *reales, le sobran de la cantidad acordada* a *reales; y si los paga á* n, *faltan* b *reales. Se pregunta cuál es el número de jornaleros, y la cantidad que se propuso gastar diariamente.*

Sea c la cantidad que se propuso gastar cada dia, y x el número de jornaleros; y se tendrá que, pagando cada jornal á m reales, x jornales serán mx; y como entónces sobran a reales de los que se propuso gastar, tendremos

$$c=mx+a \quad [1].$$

Del mismo modo se hallará $c=nx-b$; y por consiguiente, la ecuacion que da el número de jornaleros, será

$$nx-b=mx+a \quad [2];$$

de la cual se deduce $x=\dfrac{a+b}{n-m}$.

La cantidad que diariamente deberá gastar será, segun la relacion [1],

$$c=m\frac{a+b}{n-m}+a=\frac{ma+mb+na-ma}{n-m}=\frac{mb+na}{n-m}.$$

El valor de x sacado de la ecuacion [2], representando el número de jornaleros que el destajista ha de tomar, tiene que ser por su naturaleza entero y positivo; y cualquier número que no cumpla con estas dos condiciones, nos indica una imposibilidad en el problema.

En efecto, demos á las cantidades conocidas en esta cuestion general valores particulares, y veamos lo que en cada caso se obtiene.

Demos en primer lugar los valores $a=9$, $b=17$, $m=7$, y $n=9$. El enunciado del problema será: *Un destajista toma un cierto número de jornaleros para hacer una obra, y se propone gastar diariamente una cantidad: pagando los jornales á 7 reales, le quedan de la cantidad diaria 9 reales; y pagando los jornales á 9 reales, le faltan 17. ¿Cuántos son los jornaleros y la cantidad que diariamente se propone gastar?*

Como este enunciado no se diferencia del general más que en los valores particulares de los datos, las fórmulas halladas nos darán los números que se buscan; así, el número de jornaleros será

$$x=\frac{9+17}{9-7}=\frac{26}{2}=13.$$

La cantidad que se propuso gastar diariamente, será

$$c=\frac{7\cdot17+9\cdot9}{9-7}=\frac{119+81}{2}=\frac{200}{2}=100,$$

lo cual es fácil comprobar.

Si ahora suponemos que $a=13$, $b=24$, $m=11$ y $n=15$; hallaremos para el número de jornaleros,

$$x=\frac{13+24}{15-11}=\frac{37}{4}=9\tfrac{1}{4};$$

resultado absurdo, pues el número de jornaleros ha de ser por su naturaleza un número entero; luego segun hemos dicho (249), el valor positivo de la incógnita de un problema, puede no satisfacer á este problema, si este número es fraccionario y por su naturaleza debia ser entero. Por consiguiente, el valor fraccionario positivo puede indicarnos imposibilidad en el problema, siempre que el número que represente la incógnita deba ser por su naturaleza un número entero. Si $n<m$, en ese caso el valor de x será negativo; y como el número que representa x no es susceptible de ser tomado en dos acepciones, el problema será imposible de verificar con semejante hipótesis.

En efecto, demos á los datos los valores particulares $a=9$, $b=17$, $m=9$ y $n=7$, y hallaremos para el número de jornaleros,

$$x=\frac{9+17}{7-9}=\frac{26}{-2}=-13.$$

Resultado que en el caso presente nos indica, que el problema es imposible y la ecuacion absurda: porque si consideramos el enunciado correspondiente á este caso, veremos, que pagando los jornaleros á m, ó sean 9 reales, sobran de la cantidad estipulada 9 reales; y pagándolos á n, ó sean 7 reales, en ese caso faltan 17, lo cual se ve que es absurdo; pues siendo menores los jornales en el segundo caso que en el primero, debia no faltar, sino sobrar más de lo que sobró en el primer caso; luego el valor negativo de una incógnita expresa una imposibilidad del problema, siempre que la cantidad que dicha incógnita represente no sea susceptible de ser tomada en dos sentidos distintos (255-3.°)

Pero hemos dicho en la leccion anterior, que el valor negativo de una incógnita, considerado positivamente, puede ser solucion de otro problema de la misma naturaleza, con sólo la diferencia de tomar ciertas condiciones en sentido contrario; y que el enunciado de este nuevo problema se obtiene traduciendo al lenguaje ordinario la ecuacion que resulta de sustituir x por $-x$ en la ecuacion que da el valor negativo. Así, si quisiéramos modificar este problema imposible, y obtener otro que quedase satisfecho para el mismo valor numérico de la incógnita tomado positivamente, sustituiriamos en la ecuacion [2] x por $-x$, y hallariamos $-nx-b=-mx+a$; ó cambiando los signos, tendremos la igualdad

$$nx+b=mx-a \quad [3];$$

que traducida al castellano, nos daria el siguiente enunciado:

Un destajista toma un cierto número de jornaleros para hacer una obra, y piensa gastar diariamente una cierta cantidad: pagando los jornales á m *reales, le faltan* a; *y pagándolos á* n, *le sobran* b. *Se quiere hallar el número de jornaleros y la suma que ha de gastar diariamente.*

El enunciado primitivo sirve para el caso de ser $n>m$, y éste para cuando $n<m$, y como el primero da un valor negativo si se tiene $n<m$, pues el valor de x es, $x=\frac{a+b}{n-m}$, éste dará un va-

lor positivo, por tener para x el valor $x=\frac{a+b}{m-n}$. Así dando á los datos generales en este problema modificado los valores $a=9$, $b=17$, $m=9$ y $n=7$ que en el propuesto daban el valor $x=-13$, hallaremos

$$x=\frac{9+17}{9-7}=\frac{26}{2}=13,$$

conforme debia suceder.

Si á n y m damos valores iguales, hallaremos, en ambos enunciados para valor de la incógnita, $x=\frac{a+b}{0}=\infty$, cuyo valor nos indica una imposibilidad en el problema y un absurdo en la ecuacion: en efecto, no hay ningun número finito de jornaleros que cumpla con las condiciones indicadas, luego el problema es imposible; la ecuacion es absurda; pues haciendo $m=n$, se obtiene $nx-b=nx+a$, de donde $0=a+b$, lo cual es absurdo pues a y b son dos números positivos cuya suma no puede ser cero; todo lo que está conforme con lo dicho en la leccion anterior (257).

PROBLEMA II. *Una persona tiene* a *años, otra tiene* b; *¿En qué tiempo la edad del primero seria* m *veces la del segundo?*

Sea x el tiempo que media entre la actualidad y la época en que la edad del primero es m veces la del segundo, tendremos

$$a+x=(b+x)m,$$

de donde se deduce $x=\frac{a-bm}{m-1}$.

El valor de x puede ser entero ó fraccionario, y como no hay condicion para excluir uno de estos valores, tanto el entero como el fraccionario satisfarán á la cuestion.

Puede ser además este valor positivo ó negativo: positivo siempre que sea $m \gtrless 1$ y $a \gtrless bm$; y negativo, siempre que sea $a \gtrless bm$ y $m \lessgtr 1$; pero como la cantidad que representa x puede tomarse en dos sentidos distintos, segun se cuente ántes ó despues de la época actual, y como no hay ninguna condicion restrictiva que marque uno de estos sentidos con exclusion del otro, se sigue que tanto el valor positivo como el negativo satisfacen á la cuestion, debiéndose tan sólo tener presente que el positivo se cuenta despues de la época actual, y el negativo ántes, y se enunciará diciendo que se verificó lo que se pide hace tanto tiempo, ó que se verificará despues de tanto tiempo.

Así, supongamos que la primera persona tenga 57 años, la segunda 9, y queremos saber cuándo la edad de la primera seria cuatro veces la de la segunda; hagamos $a=57$, $b=9$, y $m=4$ y se tendrá

$$x=\frac{57-9\times4}{4-1}=\frac{21}{3}=7;$$

y en efecto si la primera tiene 57 años y la segunda 9, dentro de 7 años, tendrán 64 y 16, donde vemos que 64 es cuatro veces 16, segun se pedia.

Si suponemos ahora que se tiene $a=48$, $b=32$ y $m=5$ se hallará

$$x=\frac{48-32\cdot5}{5-1}=\frac{48-160}{4}=\frac{-112}{4}=-28,$$

que prueba que si una persona tiene 48 años, y otra 32; hace 28 años que la primera tenia una edad 5 veces mayor que la segunda. En efecto, hace 28 años tendria la primera 20 años, y la segunda 4, donde vemos que $20=4\times5$, lo cual justifica el problema.

Los valores de x hallados en cada caso particular del problema en cuestion, deben estar por su naturaleza comprendidos entre ciertos límites, de los cuales no pueden pasar sin faltar al sentido de la cuestion. Estos límites son, si se trata de valores negativos, la edad del menor; porque debiéndose quitar el valor negativo de las edades de las dos personas, para encontrar la época pedida, si este valor negativo fuese igual ó mayor que la edad del menor, se llegaria á una imposible, pues daria orígen á edades negativas ó á la edad *cero*, que ambos indican carencia de la persona que la tiene; así una persona que tiene la edad *cero*, equivale á decir que no hay tal persona, que no existe ni ha existido, y decir que una persona tiene por edad un número negativo, es una cosa que no tiene sentido y por consiguiente inadmisible.

El límite superior está determinado por la edad del que más viva, á pesar de que podemos, aunque ambas personas mueran, hacer la hipótesis de que si vivieran á los cuantos años, la una tendria ó hubiera tenido si viviese m veces la edad de la otra.

Si hacemos $m=1$ sin que a sea igual b, hallaremos para x el valor $x=\frac{a-b}{0}$, que prueba que nunca la edad del primero será igual á la del segundo, pues por hipótesis a no es igual á b.

Esta solucion infinita nos indica que la ecuacion es absurda, pues se reduce por esta hipótesis á $a+x=b+x$, de la cual se deduce $a=b$, lo que segun la hipótesis no es cierto.

Además este valor no es otra cosa sino el límite hácia el cual se va aproximando á valer x á medida que m se va aproximando á valer 1. En efecto si $m>1$, es necesario que vaya disminuyendo para aproximarse á valer 1; pero á medida que m disminuye, el numerador aumenta, por disminuir el sustraendo, y el denominador disminuye por disminuir el minuendo; luego la fraccion por esta doble razon aumentará, y como el numerador tiende á valer la cantidad finita $a-b$, y el denominador decrece cuanto se quiera hasta cero, el valor de x crecerá indefinidamente en valor numérico, luego el límite es infinito. Lo mismo se prueba cuando $m<1$.

Si hacemos $a=b$ sin ser $m=1$, hallaremos para x el valor $x=-a$, cuyo resultado indica un imposible, pues hemos dicho que el límite de los valores negativos es la edad del menor, porque quitando de la edad del menor un número igual de años, llegamos á la edad *cero* de una persona que indica carencia de la misma; luego el problema es imposible en este caso. La ecuacion se verifica para el sólo valor de $x=-a$; porque entónces se reduce á $0=0\times m$; pero fuera de este caso indica un absurdo, pues no siendo $m=1$, $a+x$, nunca puede ser igual á $(a+x)\,m$. En efecto, si dos personas tienen la misma edad, debieron nacer á un mismo tiempo, y como para las dos corre éste de la misma manera, en cualquier época que se les considere tendrán siempre la misma edad, y por consiguiente pedir cuándo la del uno será *doble*, *triple*, etc., de la del otro, es pedir un imposible.

Si hacemos por último $a=b$, y $m=1$, entónces el valor de x se reduce á $x=\frac{0}{0}$, que nos indica el símbolo de la indeterminacion, pues el numerador del valor de x se reduce á cero con independencia del denominador; y así debe ser, porque si dos personas nacen á un mismo tiempo, en cualquier época tendrán ambas la misma edad.

265. PROBLEMA III. *Dos móviles* M *y* M' *parten á un mismo tiempo de los puntos* A *y* B *que distan* d *kilómetros, y recorren en una*

misma direccion la recta YX; *el uno con una velocidad de* a *kilómetros por hora, y el otro de* b; *¿A qué distancia del punto* B *se encontrarán?*

$$\begin{array}{cccccc} & & M & M' & & \\ \text{———} & | \text{———} & | \text{———} & | \text{———} & | \text{———} & . \\ Y & E' & A & B & E & X \end{array}$$

Representemos por x la distancia del punto B al punto E de encuentro, en cuyo caso la distancia AE estará representada por $x+d$.

Suponiendo que el movimiento de los móviles es uniforme, es decir, que en tiempos iguales corren espacios iguales, el tiempo que el móvil M empleará en correr el espacio AE, estará representado por $\frac{x+d}{a}$, y el que emplea el móvil M′ en correr el espacio BE, será $\frac{x}{b}$; y como estos tiempos son iguales, se tendrá

$$\frac{x}{b}=\frac{x+d}{a} \qquad [1],$$

de donde se deduce fácilmente $x=\frac{bd}{a-b}$.

La naturaleza de la cuestion no excluye los valores porque sean enteros ó fraccionarios, por lo cual no tendremos en cuenta esta condicion.

Por consiguiente, todo valor positivo satisfará á la cuestion, y el número que hallemos nos expresará la distancia del punto B al punto E de encuentro y que evidentemente estará á la derecha de dicho punto B. Así, haciendo $d=40$, $a=12$, y $b=7$, hallaremos, para el punto de encuentro de los dos móviles, la distancia

$$x=\frac{7\times40}{12-7}=\frac{280}{5}=56;$$

lo cual nos dice que se encontrarán á los 56 kilómetros; y si quisiéramos saber á qué tiempo se verificará el encuentro, no habrá más que partir el espacio 56 por la velocidad del móvil que parte de B, la cual es $b=7$, y hallaremos que el encuentro se verifica á las 8 horas de partir. Del mismo modo lo hubiéramos hallado dividiendo el espacio $56+40=96$ por la velocidad del móvil M que es 12; en efecto, 96 partido por 12, da 8 de cociente.

Si suponemos como caso especial $a=2b$, hallaremos para valor de x

$$x=\frac{bd}{2b-b}=\frac{bd}{b}=d,$$

lo cual está conforme con el problema; pues teniendo el móvil M doble velocidad que M′ en un mismo tiempo han de correr un espacio doble tambien, pero corriendo M′ la distancia d kilómetros, el móvil M correrá esa misma distancia, más la que media entre ellos que tambien es d, luego corre como debia $2d$.

El valor de x será positivo, y por tanto satisfará á todas las condiciones del problema siempre que se tenga $a>b$, lo cual está conforme con lo que debe ser, pues teniendo el móvil que va detrás mayor velocidad que aquel que vá delante, indudablemente tiene que alcanzarle á mayor ó menor distancia, siendo el punto de encuentro á tanta menor distancia, cuanta mayor sea la velocidad de M con relacion á la de M′; y esa misma distancia será tanto mayor cuanto más se aproxime la velocidad a á valer b.

En efecto, del valor de x se deduce, dividiendo por b,

$$x = \frac{d}{\frac{a}{b} - 1}.$$

A medida que la velocidad a es mayor que la velocidad b, el quebrado $\frac{a}{b}$ va aumentando, y el dominador va por consiguiente aumentando tambien, y cuando a sea infinitamente grande respecto de b, el valor de x será infinitamente pequeño.

Si a tiende á ser igual b, la fraccion $\frac{a}{b}$ tiende á valer la unidad, y el denominador tiende hácia cero; luego el valor de x es cada vez mayor á medida que a tiende á ser igual á b, y en el caso de ser $a=b$, el valor de x es infinito, lo cual prueba que no es posible que se encuentren en el espacio finito; es decir, que el problema es imposible, y la ecuacion absurda (257).

En efecto, si los móviles parten de dos puntos A y B que disten una cierta cantidad, y ambos llevan la misma velocidad, es claro que siempre les separará la misma distancia que tenian en el punto de partida, y como á medida que estas velocidades tiendan á ser iguales, el punto de encuentro irá distando de B cada vez más; cuando la diferencia sea menor que cualquier cantidad dada, ó lo que es lo mismo, cero, la distancia será mayor que cualquiera cantidad dada ó sea infinito.

La ecuacion es absurda, porque haciendo en ella esta hipótesis se obtiene $\frac{x}{a}=\frac{x+d}{a}$, de donde se deduce, $d=0$; lo cual es absurdo, pues se supone que d no es cero.

Si para evitar este absurdo suponemos que se tiene al mismo tiempo que $a=b$, $d=0$, el valor de x se reduce á $x=\frac{0}{0}$, que nos indica el símbolo de la indeterminacion; porque ambos términos se reducen á cero con independencia el uno del otro.

Realmente esto indica una imposibilidad en el problema, pues si parten juntos y con una misma velocidad siempre irán juntos, que es lo que indica el símbolo $\frac{0}{0}$, que en cualquier distancia que se les considere irán juntos; pero el problema no es posible que se verifique, porque en él se pide el punto en que se han de juntar, lo cual supone que están separados, y esto no se verifica.

Si suponemos que el valor de x es negativo, para lo cual se ha de tener $a<b$, en ese caso tendremos que el problema será imposible; pues aunque la cantidad que representa x es susceptible de dos modos distintos de existir, hay la condicion restrictiva de que los móviles parten de los dos puntos A y B, y en la direccion ABX, lo cual excluye que el punto de encuentro pueda tomarse á la izquierda de B (255—2.º)

Este problema que desde luégo es como hemos dicho imposible; pues llevando el móvil M que va detrás menor velocidad que el M' que va delante, cada vez se irán separando más y nunca se encontrarán, podrá hacerse posible haciendo dos modificaciones.

Primera, quitar la condicion restrictiva de que parten de los dos puntos A y B, y suponer que los móviles vienen corriendo de atrás, y en ese caso pedir el punto de la línea en que se encuentran. En este caso, como el punto puede estar lo mismo á la derecha que á la izquierda de B, es claro que el valor negativo lo mismo que el positivo satisfarán al enunciado del nuevo problema, teniendo sólo cuidado de contar el uno á la izquierda de B y el otro á la derecha; de modo que si el valor negativo hallado lo contamos á la izquierda de B, tendremos el punto de encuentro. Para probar que esto es así, no tenemos más que modificar la hipótesis falsa que hacemos al suponer que el punto de encuentro sea E, pues teniendo el móvil M menor velocidad que M', y caminando en la direccion ABX, no po—

drá encontrarse á la derecha de B; tampoco podrán hacerlo entre A y B; pues estando ya los dos en los puntos A y B, y teniendo el que va delante mayor velocidad, no pueden encontrarse entre A y B, ó sea á la derecha de A; luego tienen que haberse encontrado á la izquierda en un punto E'.

Llamemos como ántes x á la distancia que corre el móvil M' desde el punto de encuentro E' al punto B, y entónces la distancia E'A que corre el móvil M, estará representada por $x-d$, los tiempos en que estas distancias se andan son iguales; luego se tendrá

$$\frac{x}{b}=\frac{x-d}{a},\ \text{de donde}\ x=\frac{bd}{b-a};$$

pero este valor es el mismo que el que hemos hallado anteriormente, sólo que ántes era negativo y ahora es positivo; luego el valor negativo lo mismo que el positivo satisfacen al problema propuesto, en el cual se ha quitado la condicion restrictiva de partir de los dos puntos A y B, la cual excluye el caso de encontrarse ántes de tener los móviles esa posicion.

La ecuacion anterior es la misma ecuacion [1] en la cual hemos puesto$-x$ en vez de x, y cambiado los signos.

El segundo modo de hacer posible este problema es cambiar el sentido de alguna de las condiciones. Por ejemplo, suponer que los móviles en vez de correr en el sentido AB, que corran en el sentido BA; en ese caso, y con sólo esa modificacion, el problema será posible, y el valor negativo hallado anteriormente tomado en el sentido positivo, satisface al nuevo enunciado.

En efecto, si caminan en la direccion BA, el punto de encuentro se hallará evidentemente á la izquierda de A, tal como en E', y llamando x á la distancia AE' será $x-d$, y la ecuacion será como anteriormente,

$$\frac{x}{b}=\frac{x-d}{a}.$$

Si $d=0$ sin que a sea igual á b, entónces el valor de x es *cero*. Que nos dice que el problema es imposible, pues partiendo los dos móviles de un mismo punto y con distinta velocidad, jamás se enencontrarán.

La ecuacion es absurda, pues se reduce á $\frac{x}{b}=\frac{x}{a}$, lo cual no es cierto, porque teniendo estas fracciones iguales los numeradores, para que fuesen iguales debian serlo tambien los denominadores.

La solucion *cero* nos manifiesta que sólo están juntos en el orígen ó punto de partida, y fuera de él nunca: todo lo cual está conforme con lo dicho en la leccion anterior (256).

LECCION XXIX.

Ecuaciones de primer grado con más de una incógnita.—Método de eliminacion por sustitucion.—Método de eliminacion por reduccion.—Método de eliminacion por igualacion.

Ecuaciones de primer grado con más de una incógnita.

266. Los problemas y ecuaciones de primer grado que hasta ahora hemos considerado, no han tenido más que una incógnita; pero pudiera suceder que el problema contuviera dos ó más incógnitas que se hallasen ligadas con los datos por un cierto número de ecuaciones constituyendo lo que hemos llamado un *sistema de ecuaciones*.

Un sistema de ecuaciones hemos dicho que puede ser determinado, indeterminado, ó imposible, segun que el número de ecuaciones distintas de que consta sea igual, menor ó mayor que el número de incógnitas; por ahora nos ocuparemos solamente de los sistemas determinados; es decir, de los que contienen tantas incógnitas como ecuaciones. Llamaremos sistema de valores al conjunto de aquellos que verifican al sistema de ecuaciones propuesto.

267. *Toda ecuacion de primer grado que contenga varias incógnitas* x, y, z,... *puede reducirse siempre á la forma.*

$$ax+by+cz+\ldots=k \quad [1].$$

En efecto, podemos quitar los denominadores si los hay, con lo cual los valores de las incógnitas no varian (234) y se consigue que los coeficientes a, b, c, sean enteros lo mismo que la cantidad constante k; despues podemos hacer la trasposicion de términos; es decir, pasar al primer miembro todos los que tengan incógnitas y al segundo los que no, lo cual tampoco hace variar los valores de las incógnitas (232); se saca cada incóngita factor comun de todos lo términos que la contengan, y haciendo por último la reduccion y destruccion en cada coeficiente, lo mismo que en la cantidad constante, despues de efectuar las operaciones indicadas que sean posibles ejecutar, llegaremos á la ecuacion [1].

268. Se entiende por eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, deducir de estas ecuaciones otra que no contenga la incógnita que se elimina, y dé todos los valores que la otra incógnita pueda tener; es decir, todos los valores que unidos con otros ciertos valores de la incógnita eliminada, den todos los sistemas que verifican á las dos ecuaciones propuestas.

Una vez eliminada una incógnita entre dos ecuaciones y hallados los valores de la otra, podremos determinar los de la incógnita eliminada sustituyendo el valor ó cada uno de los valores hallados en una de las ecuaciones propuestas y de la que resulte, que no contendrá ya más que la incógnita que se eliminó, se deduce su valor ó sus valores.

Esto supuesto, entenderemos por eliminar una incógnita entre las ecuaciones de un sistema cualquiera, hallar otro que no contenga dicha incógnita mas que en una ecuacion, la cual será una de las propuestas, y que teniendo las mismas soluciones que el sistema dado, pueda reemplazarle.

Varios son los métodos de eliminacion, nosotros explicaremos los más principales que son: el de sustitucion, reduccion, igualacion y el de los factores indeterminados ó de Bezout.

Método de eliminacion por sustitucion.

269. Sean las dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned} ax+by&=k \\ a'x+b'y&=k' \end{aligned} \qquad [1]$$

entre las cuales hemos de eliminar, por el método de sustitucion, una de ellas, la y por ejemplo.

Si el valor de x, que verifica al sistema de ecuaciones propuento, fuese conocido, el valor de y se determinaria inmediatamente por una de las fórmulas $y=\frac{k-ax}{b}$ ó $y=\frac{k'-a'x}{b'}$, deducidas de las ecuaciones dadas; si x no es conocido, no por eso deja de venir dado el valor de y por una de estas dos expresiones.

Esto supuesto, si sustituimos el primer valor, por ejemplo, deducido de la primera ecuacion del sistema [1], en la segunda, hallaremos la ecuacion $a'x+b'\frac{k-ax}{b}=k'$, que unida con la primera, dará el sistema

$$\begin{aligned} ax+by&=k \\ a'x+b'\frac{k-ax}{b}&=k' \end{aligned} \qquad [2]$$

en el cual se halla eliminada la incógnita y, pues no está más que en una ecuacion, y además las soluciones del sistema [1], son las mismas que las del [2], y recíprocamente; por lo que se podrá reemplazar el primero por el segundo.

En efecto, supongamos que α y β son los valores respectivos de x é y que verifican al sistema de ecuaciones [1], y vamos á demostrar que estos mismos valores verifican á las ecuaciones [2]. Puesto que α y β verifican el sistema [1], se tendrá

$$\begin{aligned} a\alpha+b\beta&=k \\ a'\alpha+b'\beta&=k', \end{aligned}$$

de la primera se saca $\beta=\frac{k-a\alpha}{b}$, lo cual prueba que la expresion $\frac{k-ax}{b}$ se reduce á β, cuando ponemos α en vez de x; ahora, si en las ecuaciones [2] sustituimos x é y por α y β se tendrá

$$\begin{aligned} a\alpha+b\beta&=k \\ a'\alpha+b'\frac{k-a\alpha}{b}&=k' \end{aligned} \quad \text{ó} \quad \begin{aligned} a\alpha+b\beta&=k \\ a'\alpha+b'\beta&=k'. \end{aligned}$$

Luego las soluciones del primer sistema verifican al segundo.

Recíprocamente, si los valores α y β verifican al segundo sistema, vamos á demostrar que tambien verificarán al primero.

Siendo α y β soluciones del sistema [2], se tendrá

$$\begin{aligned} a\alpha+b\beta&=k \\ a'\alpha+b'\frac{k-a\alpha}{b}&=k', \end{aligned}$$

pero de la primera de estas ecuaciones se deduce $\beta=\frac{k-a\alpha}{b}$; luego poniendo en la segunda en vez de $\frac{k-a\alpha}{b}$, su igual β, se tendrá

$$a\alpha+b\beta=k$$
$$a'\alpha+b'\beta=k',$$

que son las ecuaciones del sistema [1] en el cual hemos puesto α y β en vez de x é y; luego estas ecuaciones quedan satisfechas por estos valores; y por consiguiente el sistema de ecuaciones [1], se puede reemplazar por el sistema [2], segun queriamos demostrar.

270. Sea, en general, un sistema cualquiera de ecuaciones

$$\begin{array}{ll} ax+by+cz+\ldots=k & \\ a'x+b'y+c'z+\ldots=k' & \\ a''x+b''y+c''z+\ldots=k'' & [3] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

en el cual tratamos de eliminar una incógnita cualquiera x.

Despejando x en cualquiera de las ecuaciones, en la primera, por ejemplo, sustituyendo el valor $x=\dfrac{k-by-cz-\ldots}{a}$ en las demás, y agregando á las ecuaciones que resulten la primera, de la cual se sacó el valor de la incógnita que se quiere eliminar, tendremos el nuevo sistema

$$\begin{array}{ll} ax+by+cz+\ldots\ldots\ldots=k & \\ a'\dfrac{k-by-cz-\ldots}{a}+b'y+c'z+\ldots=k' & \\ a''\dfrac{k-by-cz-\ldots}{a}+b''y+c''z+\ldots=k'' & [4] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

en el cual la x está eliminada, por no hallarse contenida más que en la primera ecuacion y por ser reemplazable el primero por este sistema, como vamos á ver.

Supongamos que los valores de $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma\ldots$ verifican al sistema [3], y vamos á probar que estos mismos valores verifican al sistema [4]. En efecto, se tiene por hipótesis

$$\begin{array}{ll} a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots=k & \\ a'\alpha+b'\beta+c'\gamma+\ldots=k' & \\ a''\alpha+b''\beta+c''\gamma+\ldots=k'' & [5] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

de cuya primera ecuacion se deduce el valor $\alpha=\frac{k-b\beta-c\gamma-\ldots}{a}$, que nos prueba que la expresion $\frac{k-by-cz-\ldots}{a}$ se reduce á α, cuando se reemplaza y, z... por sus valores β, γ..., esto supuesto, se tendrá, sustituyendo estos mismos valores en el sistema [4],

$$\begin{aligned}
&a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots\ldots\ldots=k\\
&a'\frac{k-b\beta-c\gamma-\ldots}{a}+b'\beta+c'\gamma+\ldots=k'\\
&a''\frac{k-b\beta-c\gamma-\ldots}{a}+b''\beta+c''\gamma+\ldots=k''\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

el cual se reduce al sistema [5], si ponemos en vez de $\frac{k-b\beta-c\gamma-\ldots}{a}$ su valor α; luego el sistema [4] queda satisfecho por los mismos valores de las incógnitas del sistema [3].

Recíprocamente, el sistema de valores que verifica al sistema [4], verifica al sistema [3].

Sea α, β, γ... el sistema de valores que verifica al sistema [4]; por verificar á la primera ecuacion, se tendrá

$$\alpha=\frac{k-b\beta-b\gamma-\ldots}{a},$$

y por consiguiente dicho sistema se reduce por estos valores al sistema [5]; pero el sistema [5] no es otra cosa que el sistema [3] en el cual se ha sustituido por x, y, z... los valores α, β, γ...; luego el sistema [3] se verifica para los mismos valores de las incógnitas que verifican el sistema [4]; y por consiguiente el primer sistema se puede reemplazar por el segundo.

Método de eliminacion por reduccion.

271. Sean las dos ecuaciones entre las cuales vamos á eliminar una de sus incógnitas,

$$\left.\begin{aligned}ax+by&=k\\a'x+b'y&=k'\end{aligned}\right\}\quad[6]$$

Si en estas ecuaciones fueran iguales los coeficientes de una misma incógnita, la ecuacion que resultase de sumarlas ó restarlas, segun que estos coeficientes tuvieran signos contrarios ó un mismo signo, no contendria á esta incógnita, y esta ecuacion que resulta unida con una de las propuestas tendria, como más adelante probaremos, las mismas soluciones que el sistema propuesto, y por consiguiente una de las incógnitas quedaria eliminada.

Pero si estos coeficientes no son iguales, siempre podremos hacer que lo sean multiplicando cada una de estas ecuaciones por un número conveniente, lo cual sabemos no altera los valores de las incógnitas.

Sea x la incógnita que queremos eliminar en el sistema [6] por el método de reduccion; si los coeficientes a y a' son primos entre sí, multiplicando la primera ecuacion por a' y la segunda por a, hallaremos el sistema

$$\begin{aligned} aa'x+ba'y&=ka' \\ aa'x+ab'y&=ak' \end{aligned} \qquad [7]$$

en el cual los coeficientes de x son iguales, de modo que sumando ó restando segun que estos coeficientes tengan signos contrarios ó un mismo signo, con el objeto que se destruyan, hallaremos una ecuacion que unida con una de las propuestas darán el sistema

$$\begin{aligned} ax+by&=k \\ (ab'-ba')y&=ak'-ka' \end{aligned} \qquad [8]$$

en el cual sólo la primera ecuacion contendrá la x, de modo que si demostramos que este sistema tiene las mismas soluciones que el propuesto, la incógnita x estará eliminada.

Para ello, pasemos en el sistema [6] las cantidades k y k' al primer miembro, y llamando á los primeros miembros que resultan A y A$'$ tendremos que el sistema propuesto estará representado por

$$\begin{aligned} A&=0 \\ A'&=0 \end{aligned} \qquad [9]$$

y el sistema [8] será, en este caso,

$$\begin{aligned} A&=0 \\ aA'-a'A&=0 \end{aligned} \qquad [10].$$

Todo sistema de valores que verifique al sistema propuesto [9], reducirá á cero á la cantidad A, y siendo $A=0$, el sistema [10], se reduce á $A=0$, $aA'=0$ y como por hipótesis $A'=0$, se sigue que los mismos valores que verifican á las ecuaciones [9], verifican á las [10].

Recíprocamente, todo sistema de valores que verifica al sistema [10], verifica tambien al [9]. En efecto, todo par de valores que verifique al sistema [10], hace que $A=0$ y por consiguiente que $aA'=0$, y como a no es cero, se deberá tener $A'=0$; luego todo sistema de valores que verifique al sistema [10], hace que se verifique $\begin{matrix} A=0 \\ A'=0 \end{matrix}$ ó sea el sistema [9], que es lo que se queria demostrar.

Si a y a' no fuesen primos entre sí, podriamos llegar al sistema [7], en que la incógnita x tiene un mismo coeficiente en ambas ecuaciones, multiplicando cada una por el cociente que resulta de dividir el $m.\ c.\ m.$ de los dos coeficientes por el coeficiente que tiene en la misma ecuacion.

272. Si fuese un sistema de varias ecuaciones

$$A=0,\ A'=0,\ A''=0,\ A'''=0... \quad [11],$$

principiaremos por eliminar una incógnita entre la primera y segunda, luégo entre la primera y tercera, despues entre la primera y la cuarta, y así sucesivamente hasta llegar á la última, lo cual nos dará un sistema que tendrá una ecuacion ménos y que no contendrá la incógnita eliminada; de modo que agregando á este sistema la primera ecuacion del sistema propuesto, tendremos un sistema de tantas ecuaciones como el propuesto, y en el que la incógnita eliminada no se hallará mas que en una ecuacion; por tanto la incógnita se hallará verdaderamente eliminada, si probamos que este sistema puede reemplazar al primero.

Para ello, representemos por m y m', n y n', p y p' etc., los números por los cuales hay que multiplicar las ecuaciones primera y segunda, primera y tercera, primera y cuarta etc., para eliminar una incógnita x por ejemplo; y tendremos efectuando estas eliminaciones parciales el sistema

$$A=0,\ mA-m'A'=0,\ nA-n'A''=0,\ pA-p'A'''=0... \quad [12]$$

Todo sistema de valores que verifica á las ecuaciones [11], verifica evidentemente á las ecuaciones [12]. Recíprocamente, el sistema de valores que verifica al sistema [12], verifica al [11]; porque siendo $A=0$, las demás ecuaciones se reduce á

$$-m'A'=0, \quad -n'A''=0, \quad -p'A'''=0,...$$

de donde se deduce, que se debe tener $A'=0$, $A''=0$, $A'''=0$,... que no son otra cosa que las ecuaciones del sistema [11]; luego si las soluciones del primer sistema son las mismas que las del segundo, y las de éste las mismas que las de aquel, es claro que el sistema [11] puede reemplazarse por el [12].

Método de eliminacion por igualacion.

273. Sean en primer lugar las dos ecuaciones

$$\begin{array}{l} ax+by=k \\ a'x+b'y=k' \end{array} \quad [13],$$

en las cuales vamos á eliminar por el método de igualacion la x, por ejemplo.

Si en ambas ecuaciones sacamos el valor de x, se tendrá:

$$x=\frac{k-by}{a} \text{ y } x=\frac{k'-b'y}{a'};$$

y como el valor de x que satisfaga á la primera ecuacion unido con un cierto valor de y, ha de verificar tambien á la segunda; las dos expresiones que dan el valor de x, deberán ser iguales, y por tanto se deberá tener, $\frac{k-by}{a}=\frac{k'-b'y}{a'}$; á cuya ecuacion, si agregamos una del sistema [13], se hallará el sistema

$$\begin{array}{l} ax+by=k \\ \frac{k-by}{a}=\frac{k'-b'y}{a'} \end{array} \quad [14],$$

en el cual la incógnita x se halla eliminada. En efecto, dicha incógnita no se halla más que en una ecuacion, y además, todo sistema de valores que verifique á las ecuaciones [13,] verifica evidentemente á la primera ecuacion del [14]; y como del sistema [13] se deduce, llamando α y β los valores que le verifican, que $\alpha=\frac{k-b\beta}{a}$ y $\alpha=\frac{k'-b'\beta}{a'}$, se tendrá la igualdad evidente $\frac{k-b\beta}{a}=\frac{k'-b'\beta}{a'}$, que es la segunda del sistema [14]; luego los mismos valores que verifican al sistema [13], verifican al [14].

Recíprocamente, los valores α y β que verifican al [14], nos dan $\frac{k-b\beta}{a}=\frac{k'-b'\beta}{a'}$, $a\alpha+b\beta=k$; de la segunda se saca $\alpha=\frac{k-b\beta}{a}$; y como $\frac{k-b\beta}{a}$ es igual á $\frac{k'-b'\beta}{a'}$, se deberá tener tambien

$\alpha=\frac{k'-b'\beta}{a'}$; de donde se deduce, $a'\alpha+b'\beta=k'$, que es la segunda ecuacion del sistema [13]; y como la primera de este sistema es la misma que la primera del [14], se sigue que las dos ecuaciones del sistema [13] se verifican para los mismos valores que verifican al [14]; luego se puede reemplazar el primer sistema por el segundo.

274. Sea en general un sistema cualquiera,

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz+\ldots=k \\ a'x+b'y+c'z+\ldots=k' \\ a''x+b''y+c''z+\ldots=k'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad [15],$$

Despejando el valor de x en cada una de estas ecuaciones, se tendrá

$$x=\frac{k-by-cz\ldots}{a},\ x=\frac{k'-b'y-c'z\ldots}{a'},\ x=\frac{k''-b''y-c''z\ldots}{a''};\ldots$$

y como este valor ha de ser igual en todas las ecuaciones, una vez dados los valores correspondientes á las demás incógnitas, podremos igualar á la primera expresion cada una de las demás, lo cual nos dará un sistema de ecuaciones que tendrá una ménos que el propuesto, y en el que no entrará la x; y si á este sistema agregamos una ecuacion de las dadas, la primera por ejemplo, hallaremos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz+\ldots=k \\ \dfrac{k-by-cz\ldots}{a}=\dfrac{k'-b'y-c'z\ldots}{a'} \\ \dfrac{k-by-cz\ldots}{a}=\dfrac{k''-b''y-c''z\ldots}{a''} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad [16],$$

que resulta de eliminar la x en el sistema propuesto [15].

En efecto, en este sistema sólo entra la x en una ecuacion, y queda satisfecho para los mismos valores de las incógnitas del sistema dado; por que siendo α, β, γ... estos valores, se deberá tener

$$\begin{array}{l} a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots=k \\ a'\alpha+b'\beta+c'\gamma+\ldots=k' \\ a''\alpha+b''\beta+c''\gamma+\ldots=k'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

de donde se deduce,

$$\alpha=\frac{k-b\beta-c\gamma\ldots}{a},\alpha=\frac{k'-b'\beta-c'\gamma\ldots}{a'},\alpha=\frac{k''-b''\beta-c''\gamma\ldots}{a''}$$

donde vemos que la primera ecuacion del sistema [16] se verifica, y todas las demás tambien, porque se reducen todas á $\alpha=\alpha$, lo cual es evidente.

Recíprocamente, los valores $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ que verifican al sistema [16]. verifican tambien al [15].

En efecto, por hipótesis se tiene

$$a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots=k.$$

$$\frac{k-b\beta-c\gamma\ldots}{a}=\frac{k'-b'\beta-c'\gamma\ldots}{a'}$$

$$\frac{k-b\beta-c\gamma\ldots}{a}=\frac{k''-b''\beta-c''\gamma\ldots}{a''}$$

. . . .

. . . .

De la primera, que no es más que la primera del sistema [15], la cual ya queda satisfecha, se deduce, $\alpha=\dfrac{k-b\beta-c\gamma\ldots}{a}$; y poniendo este valor en las demás ecuaciones se tendrá:

$$\alpha=\frac{k'-b'\beta-c'\gamma\ldots}{a'}$$

$$\alpha=\frac{k''-b''\beta-c''\gamma\ldots}{a''};$$

de las cuales se deducen fácilmente estas otras:

$$a'\alpha+b'\beta+c'\gamma+\ldots=k'$$

$$a''\alpha+b''\beta+c''\gamma+\ldots=k''$$

. . . .,

que son las restantes del sistema [15]; luego estas ecuaciones del sistema [15] quedan sastisfechas para los mismos valores que satisfacen á las ecuaciones del sistema [16], y por consiguiente se puede reemplazar el primer sistema por el segundo.

LECCION XXX.

Resolucion de un sistema determinado de ecuaciones de primer grado.—Ejemplos de resolucion de sistemas determinados de ecuaciones de primer grado.

Resolucion de un sistema determinado de ecuaciones de primer grado.

275. Resolver un sistema de ecuaciones es hallar los valores de las incógnitas que le satisfacen. En la resolucion de un sistema de ecuaciones de primer grado principiaremos por el caso más sencillo de dos ecuaciones con dos incógnitas.

276. Sea el sistema de dos ecuaciones

$$ax+by=k$$
$$a'x+b'y=k' \qquad [1].$$

Si por cualquiera de los métodos explicados eliminamos una de las incógnitas, la y por ejemplo, el sistema [1] se podrá reemplazar por otro compuesto de una de las ecuaciones dadas y la que resulta de eliminar la y, de ésta podremos sacar el valor de x; y sustituyendo este valor en la primera ecuacion, resultará otra que no contendrá más que la incógnita y; de ella sacaremos el valor de esta incógnita, el cual, unido al que hemos hallado para x, nos dará el sistema de valores que verifican á las dos ecuaciones propuestas.

Apliquemos cada uno de los métodos explicados al sistema propuesto [1], y hallaremos por todos ellos los mismos valores para las incógnitas x é y.

Método de sustitucion. Sacando el valor de y de la primera ecuacion y sustituyéndolo en la segunda, se tendrá

$$y=\frac{k-ax}{b}$$

$$a'x+b'\frac{k-ax}{b}=k' \qquad [2];$$

quitando denominadores y haciendo la trasposicion de términos en la segunda ecuacion, se tiene, despues de cambiar todos los signos,

$$(ab'-ba')x=kb'-bk' \qquad [3];$$

de la cual se deduce el valor de la incógnita,

$$x=\frac{kb'-bk'}{ab'-ba'};$$

que, sustituido en la primera ecuacion, dará

$$y=\frac{k-a\dfrac{kb'-bk'}{ab'-ba'}}{b}=\frac{k(ab'-ba')-a(kb'-bk')}{b(ab'-ba')};$$

y efectuando las operaciones indicadas, se tiene, dividiendo los dos términos por el factor comun b, $y=\dfrac{ak'-ka'}{ab'-ba'}$.

Los dos valores de las incógnitas $x=\dfrac{kb'-bk'}{ab'-ba'}$, é $y=\dfrac{ak'-ka'}{ab'-ba'}$, que satisfacen al sistema [2], son, segun hemos demostrado en la leccion anterior, los que verifican el sistema propuesto [1], como es fácil comprobar.

* 277. Como el valor de una de las incógnitas se deduce siempre de la ecuacion que resulta de eliminar la otra entre ambas ecuaciones, y como es indiferente eliminar una ú otra de las incógnitas, se sigue que podríamos determinar los valores de estas incógnitas, eliminando primero una y luégo la otra, sin recurrir á la sustitucion del valor hallado ya anteriormente.

En efecto, una vez hallado el valor de x deducido de la ecuacion [3], podemos hallar el de y, eliminando del mismo modo la incógnita x en el sistema propuesto; así obtendremos, sacando el valor de x en la primera ecuacion, y sustituyéndolo en la segunda,

$$x=\frac{k-by}{a}$$

$$a'\frac{k-by}{a}+b'y=k' \qquad [4];$$

de cuya segunda ecuacion se deduce fácilmente el valor de la incógnita $y=\dfrac{ak'-ka'}{ab'-ba'}$; que es el mismo que ya hemos hallado.

Método de reduccion. Sea el mismo sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} ax+by&=k \\ a'x+b'y&=k' \end{aligned} \qquad [5];$$

eliminando por este método la y, hallaremos que se podrá reemplazar este sistema por el siguiente:

$$ax+by=k$$
$$(ab'-ba')\,x=kb'-bk' \qquad [6];$$

cuya segunda ecuacion se ha obtenido restando del producto de la primera por b', el que resulta de multiplicar la segunda por b; pero de esta segunda se saca $x=\frac{kb'-bk'}{ab'-ba'}$; cuyo valor sustituido en la primera ecuacion, nos da como anteriormente para y, el valor $y=\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'}$; estos valores satisfaciendo al sistema [6] que resulta de eliminar la y en el sistema [5], verifican, como ya hemos demostrado, á este sistema, que es el propuesto.

* 278. El valor de x lo hemos deduciendo de la ecuacion segunda del sistema [6] que ha resultado de eliminar la y entre las dos del sistema [5], cuyo valor es el que, unido con el correspondiente de y, verifica á dicho sistema; pero si en vez de eliminar la y, hubiéramos eliminado la x, la ecuacion que hubiéramos hallado en y, nos hubiera dado el valor de esta incógnita; lo cual nos prueba, que una vez hallado el valor de una incógnita, de la ecuacion que resulta de eliminar la otra, podremos, sin recurrir á la sustitucion de este valor, hallar el de esta otra incógnita, eliminando la primera, es decir, la que quedó sin eliminar.

Así, nosotros hemos eliminado la y, y hemos hallado el sistema [6], de cuya segunda ecuacion hemos deducido el valor de la incógnita x: eliminemos pues en el mismo sistema [5], en vez de la incógnita y, la incógnita x, y hallaremos el sistema

$$ax+by=k$$
$$(ab'-ba')\,y=ak'-ka';$$

de cuya segunda ecuacion se deduce el valor de $y=\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'}$, que es el mismo que hallamos anteriormente.

Método de igualacion. Consideremos el mismo sistema,

$$ax+by=k$$
$$a'x+b'y=k' \qquad [7].$$

Eliminando por este método la y, hallaremos que el sistema propuesto se podrá reemplazar por el siguiente:

$$ax+by=k$$
$$\frac{k-ax}{b}=\frac{k'-a'x}{b'} \qquad [8].$$

De la segunda ecuacion, que no contiene más que una incógnita, se deduce, $x=\frac{kb'-bk'}{ab'-ba'}$; y sustituyendo este valor en la primera ecuacion, hallaremos, despues de efectuar todas las operaciones, $y=\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'}$, que son los valores que verifican al sistema [8], y por consiguiente al sistema propuesto [7].

* 279. Lo mismo que en los casos anteriores, como no hay preferencia en cual de las incógnitas se ha de eliminar primero, si en vez de y hubiéramos eliminado x, el sistema que hubiera reemplazado al propuesto hubiera sido,

$$ax+by=k$$
$$\frac{k-by}{a}=\frac{k'-b'y}{a'},$$

cuya segunda ecuacion nos hubiera dado el valor de y; por consiguiente, en todos estos métodos podemos reemplazar siempre el sistema de ecuaciones propuesto por el que resulta de eliminar primero una incógnita y luégo la otra, y las dos ecuaciones obtenidas se verificarán para los mismos valores que el sistema propuesto; y como cada una de estas ecuaciones no tiene más que una incógnita, podremos conocer el valor de cada una de ellas directamente sin recurrir al método de sustitucion.

Este procedimiento, que se usa con ventaja en muchos casos cuando el sistema sólo tiene dos ecuaciones, es muy pesado cuando el sistema tiene tres ó más, por lo cual no se emplea, y si se sigue el método de sustituir el valor de la incógnita que ya se conoce en una ecuacion que sólo contenga á esta incógnita y otra, de la cual se podrá deducir el de esta otra.

280. De todo lo dicho anteriormente se deduce, que *para resolver un sistema determinado de dos ecuaciones de primer grado, se elimina una de las incógnitas, se halla el valor de la otra incógnita en la ecuacion que resulte, se sustituye este valor en una de las ecuaciones dadas, y se deduce el valor de la segunda incógnita, con lo que el problema queda resuelto.*

Tambien se puede, como hemos visto, eliminar primero una incógnita y, *y de la ecuacion que resulte sacar el valor de la otra incógnita* x; *eliminar despues la* x, *y sacar el valor de la* y *en la ecuacion que se* *obtenga; y los dos valores hallados para* x *y para* y, *serán los del sistema propuesto.*

* 281. Pasemos á la resolucion de un sistema determinado de un número cualquiera n de ecuaciones de primer grado.

Sea un sistema determinado cualquiera de primer grado con n ecuaciones,

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ D=0,\ E=0... \quad [1].$$

Si eliminamos una incógnita cualquiera entre estas ecuaciones por uno de los métodos explicados, y representamos por $B'=0$, $C'=0$, $D'=0$, $E'=0...$ las ecuaciones que resultan de la eliminacion de esta incógnita entre la primera y segunda ecuacion, entre la primera y tercera etc., el sistema propuesto se podrá reemplazar, segun hemos demostrado en la leccion anterior, por este otro:

$$A=0,\ B'=0,\ C'=0,\ D'=0,\ E'=0... \quad [2],$$

en el cual ninguna de las ecuaciones, á excepcion de la primera, contiene á la incógnita eliminada.

Ahora bien, si nosotros suponemos resuelto el sistema de ecuaciones

$$B'=0,\ C'=0,\ D'=0,\ E'=0... \quad [3],$$

el cual tiene una ecuacion y una incógnita ménos que el propuesto, podremos hallar el valor de la incógnita eliminada, que es la que falta en este sistema, sustituyendo en la ecuacion $A=0$ del primer sistema, los valores de las incógnitas restantes; y despejando de la ecuacion que resulta el valor de la única incógnita que contiene, se tendrá el valor de la que se busca, con lo cual se tendrán hallados los valores de todas las incógnitas; luego la resolucion del sistema propuesto queda reducida á la del sistema [3], que tiene una incógnita y una ecuacion ménos.

Si en este sistema eliminamos otra incógnita, y llamamos $C''=0$, $D''=0$, $E''=0...$ las ecuaciones que resultan de eliminar esta incógnita entre las ecuaciones primera y segunda, primera y tercera... podremos reemplazar este sistema [3] por el siguiente:

$$B'=0,\ C''=0,\ D''=0,\ E''=0...$$

en el cual la incógnita nuevamente eliminada, sólo se hallará en la primera ecuacion ; por consiguiente , si suponenos resuelto el sistema

$$C''=0,\ D''=0,\ E''=0... \quad [4],$$

que ya tiene dos ecuaciones y dos incógnitas ménos que el propuesto, podremos deducir el valor de la incógnita últimamente eliminada, de la ecuacion que resulta de sustituir en $B'=0$, los valores hallados de las incógnitas restantes que entren en ella; y una vez obenidos estos valores, se conocerá, como ya hemos dicho, el de la incógnita que falta, que es la primera que se eliminó.

Del mismo modo, el sistema [4] puede reducirse á otro que tenga una incógnita y una ecuacion ménos; y éste á su vez á otro que tenga tambien otra incógnita y otra ecuacion ménos, y así sucesivamente, hasta llegar á un sistema de dos ecuaciones, el cual ya se sabe resolver; y hallados los valores de las dos incógnitas que contiene, se sustituirán sus valores en la ecuacion del sistema anterior que contenga una tercer incógnita, de la cual se deducirá el valor de esta tercer incógnita: una vez hallados estos tres valores, se sustituirán en otra ecuacion del sistema que antecede, en la que se halle una cuarta incógnita, de donde se sacará el valor de esta última; y así se continuará, hasta haber hallado el de todas las incógnitas. Así diremos por regla general, que

282. *Para resolver un sistema determinado de un número cualquiera de ecuaciones de primer grado, se elimina primero una incógnita entre una ecuacion y cada una de las demás, y se obtiene así un nuevo sistema de una ecuacion y una incógnita ménos, en éste se elimina otra incógnita entre una de sus ecuaciones y cada una de las demás; lo cual nos da otro sistema que ya tiene dos ecuaciones y dos incógnitas ménos que el propuesto; y se continúa del mismo modo hasta llegar á un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, del cual se deducen los valores de éstas; una vez hallados, se sustituyen en una ecuacion del sistema anterior que contenga una tercer incógnita, de la cual se deducirá su valor; los tres valores hallados se sustituirán en una ecuacion del sistema que antecede que contenga una cuarta incógnita, de cuya ecuacion se deducirá el valor de esta cuarta incógnita, y así se continuará hasta haber obtenido los valores de todas las incógnitas.*

Ejemplos de resolucion de sistemas determinados de ecuaciones de primer grado.

283. Ejemplo I. Sean las ecuaciones que se han de resolver

$$9x-4y=17$$
$$3x+5y=50 \qquad [1].$$

Eliminando la y por el primer método ó sea el de sustitucion, se tiene

$$y=\frac{9x-17}{4}$$

$$3x+5\frac{9x-17}{4}=50,$$

de la segunda ecuacion se deducen la série de trasformadas

$$12x+45x-85=200,\quad 57x=285,\quad x=\frac{285}{57}=5,$$

y sustituyendo el valor de x en la primera, ó sea en el valor de y, se halla $y=\frac{9\times5-17}{4}=\frac{45-17}{4}=\frac{28}{4}=7$; luego los valores de las incógnitas que verifican al sistema propuesto son $x=5$ é $y=7$ como es fácil comprobar.

Por el método de reduccion, se hallará eliminando la x,

$$9x-4y=17$$
$$19y=133$$

cuya segunda ecuacion se ha obtenido restando la primera del sistema propuesto, de la segunda multiplicada por 3, con cuya operacion los coeficientes de la x en ambas ecuaciones son iguales, y al restarlos se destruyen.

De esta segunda ecuacion se saca $y=\frac{133}{19}=7$, y sustituyendo este valor en la primera, se hallará

$$9x-4\times7=17,\text{ de donde } x=\frac{17+28}{9}=\frac{45}{9}=5.$$

Eliminando la x por el tercer método, se tiene

$$x=\frac{4y+17}{9}\quad\text{y}\quad x=\frac{50-5y}{3},$$

de donde
$$\frac{4y+17}{9}=\frac{50-5y}{3}$$
$$x=\frac{4y+17}{9}$$

de la primera ecuacion, se deduce

$$12y+51=450-45y \text{ ó } 57y=399 \text{ é } y=\frac{399}{57}=7.$$

Sustituyendo este valor de y en el que tenemos de x, se hallará

$$x=\frac{4\cdot 7+17}{9}=\frac{45}{9}=5,$$

donde vemos que por los tres métodos hemos hallado los mismos valores para las incógnitas, como debia suceder.

284. Ejemplo II. Sea el sistema de tres ecuaciones

$$\begin{array}{l} 3x+5y-2z=7 \\ 2x-2y+3z=19 \\ 6x+8y-3z=15 \end{array} \quad [1].$$

Eliminando por el segundo método la z entre estas ecuaciones, se hallará el nuevo sistema

$$\begin{array}{r} 3x+5y-2z=7 \\ 13x+11y=59 \\ 8x+6y=34 \end{array} \quad [2],$$

en el cual la segunda ecuacion se ha obtenido sumando con el doble de la segunda del sistema [1], el producto de la primera por 3, con lo cual los coeficientes de la z se hacen iguales, y al sumar ambas ecuaciones se destruyen los términos que contienen esta incógnita.

La tercera se ha obtenido sumando la segunda con la tercera.

Si eliminamos ahora entre las dos últimas ecuaciones del sistema [2], que ya no contiene á la z, otra incógnita, la y por ejemplo, hallaremos que el sistema de estas dos ecuaciones podrá reemplazarse por este otro

$$\begin{array}{r} 13x+11y=59 \\ 10x=20 \end{array}$$

y por consiguiente el sistema [2], podrá ser reemplazado por

$$\begin{array}{r} 3x+5y-2z=7 \\ 13x+11y=59 \\ 10x=20 \end{array} \quad [3].$$

De la tercer ecuacion de este último sistema, se saca

$$x=\frac{20}{10}=2.$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion segunda, se tendrá

$$13\times 2+11y=59 \text{ ó sea, } 11y=59-26=33,$$

de donde

$$y=\frac{33}{11}=3;$$

por último, sustituyendo estos valores en la primera ecuacion, se halla

$$3\times 2+5\times 3-2z=7 \text{ ó } 2z=6+15-7=14,$$

de donde se obtiene el valor de la tercer incógnita $z=7$.

Cuyos valores satisfacen al sistema propuesto, como es fácil comprobar.

285. **Ejemplo** III. Sean las ecuaciones

$$3x+5y-2z=35$$
$$4x-5y+3u=16$$
$$9x+4z-6u=13$$
$$3y+6z-5u=24$$

Aplicando cualquiera de los métodos de eliminacion hallaremos los valores $x=5$, $y=8$, $z=10$, $u=12$, que verifican á las ecuaciones propuestas, como es fácil comprobar.

286. En este ejemplo podemos observar, que como nuestro propósito es reemplazar el sistema propuesto por otro en el cual la incógnita que se elimina no entre más que en una ecuacion, desde luégo se escribirá ésta, que podrá ser cualquiera del sistema propuesto, con tal que contenga á la incógnita en cuestion; despues se pueden escribir todas las ecuaciones del mismo sistema que no contengan á la citada incógnita, y por último las que resulten de eliminar la misma incógnita entre cada dos que la contengan.

Esto nos prueba que si cada una de las ecuaciones del sistema propuesto no contiene todas las incógnitas, será mucho más sencillo el cálculo de los valores de éstas; así como tambien se simplificará considerablemente este cálculo si al eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, se elimina á la vez otra ú otras de las demás, que es lo que ha sucedido en el ejemplo anterior; pues al eliminar la z entre la segunda y tercera ecuacion del sistema [2], se eliminó tambien la y, y por consiguiente de la ecuacion resultante hemos podido sacar desde luégo el valor de x, puesto que esta ecuacion no contiene otra incógnita.

287. **Ejemplo** IV. Sea el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, cuyos coeficientes son fraccionarios, el que tratamos de resolver,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{2}=27 \\ \dfrac{4x}{5}+\dfrac{7z}{8}-\dfrac{u}{4}=9 \\ x+\dfrac{5y}{6}-\dfrac{2u}{31}=27 \\ y+z+u=180 \end{array}\right\} \quad [1].$$

Este sistema se podrá sustituir, quitando los denominadores, por el siguiente

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+6z=324 \\ 32x+35z-10u=360 \\ 186x+155y-12u=5022 \\ y+z+u=180 \end{array}\right\} \quad [2].$$

Que resuelto por cualquiera de los métodos explicados, hallaremos para valores de las incógnitas $x=15$, $y=24$, $z=32$, $u=124$.

288. Ejemplo V. Sea por último el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{2z}=27 \\ \frac{4}{5x}+\frac{7}{8z}-\frac{1}{4u}=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{5}{6y}-\frac{2}{31u}=27 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=180 \end{array}\right\} \quad [1].$$

Si quitásemos los denominadores segun las reglas dadas, hallaríamos ecuaciones de *tercer grado*, por hallarse en el segundo miembro el producto de las tres incógnitas; pero observando que éstas entran en todas las ecuaciones de la misma manera, podemos evitar esta dificultad, haciendo

$$x'=\frac{1}{x},\ y'=\frac{1}{y},\ z'=\frac{1}{z},\ u'=\frac{1}{u} \quad [2],$$

de donde se deducen los valores

$$x=\frac{1}{x'},\ y=\frac{1}{y'},\ z=\frac{1}{z'},\ u=\frac{1}{u'} \quad [3].$$

En efecto, el sistema [1] de este ejemplo, se convierte haciendo la sustitucion de estas nuevas incógnitas, en el siguiente

$$\begin{array}{l} \frac{x'}{3}+\frac{y'}{4}+\frac{z'}{2}=27 \\ \frac{4x'}{5}+\frac{7z'}{8}-\frac{u'}{4}=9 \\ x'+\frac{5y'}{6}-\frac{2u'}{31}=27 \\ y'+z'+u'=180, \end{array}$$

el cual no es otro que el sistema [1], del ejemplo anterior, en el que se han reemplazado las incógnitas x, y, z, u, por x', y', z', u'.

Una vez resuelto este sistema y hallados, como ya hemos visto, los valores $x'=15$, $y'=24$, $z'=32$, $u'=124$, se determinarán los valores de las incógnitas x, y, z, u, del sistema propuesto, por medio de las relaciones [3], de este modo

$$x=\frac{1}{15},\ y=\frac{1}{24},\ z=\frac{1}{32},\ u=\frac{1}{124},$$

que son los valores que verifican al sistema propuesto, como es fácil comprobar.

LECCION XXXI.

Sistemas indeterminados de ecuaciones de primer grado.—Sistemas más que determinados ó imposibles de verificar, si no hay ecuaciones de condicion.—Sistemas de ecuaciones incompatibles.—Problemas que dan orígen á ecuaciones de primer grado con varias incógnitas.

Sistemas indeterminados de ecuaciones de primer grado.

289. Ya hemos dicho que cuando en un sistema de ecuaciones hay menor número de éstas que de incógnitas, el sistema se llama indeterminado.

Sea una ecuacion con dos incógnitas

$$ax+by=k \qquad [1],$$

y tratemos de hallar los valores de las incógnitas que verifican á esta ecuacion. Si despejamos una de ellas, la y por ejemplo, hallaremos

$$y=\frac{k-ax}{b} \qquad [2],$$

cuyo valor sustituido en la ecuacion propuesta, nos da la identidad

$$ax+k=ax+k,$$

la cual nos prueba, que cualquiera que sea el valor de x unido con el valor de y sacado de la expresion [2], se obtiene un sistema de valores que verifica á la ecuacion propuesta; luego para hallar los va–

lores que verifican á la ecuacion [1], se despeja una de las incógnitas en funcion de la otra, se le dan á ésta valores cualesquiera, y se deducen los correspondientes á la primera, y cada par de valores así obtenidos, será una solucion de la ecuacion.

290. Sea un sistema de m ecuaciones con $m+n$ incógnitas. Si de las $m+n$ incógnitas suponemos n conocidas, podremos hallar por medio de las m ecuaciones, los valores de las m incógnitas restantes, cuyos valores vendrán expresados en funcion de las n incógnitas que hemos supuesto conocidas. Estos valores sustituidos en las ecuaciones dadas, darán m identidades entre las n incógnitas, y por consiguiente quedarán satisfechas para cualquiera que sea el sistema de valores que á estas n incógnitas se les dé; pero á cada uno de estos sistemas de valores, corresponde otro para las m incógnitas, y la reunion de estos dos sistemas constituye uno que verifica á todas las ecuaciones; y como las n incógnitas pueden recibir cuantos sistemas de valores queramos, las $m+n$ podrán recibir tambien un número indeterminado de sistemas de valores.

Sea, por ejemplo, hallar los valores que verifican á las ecuaciones

$$\begin{array}{r} 3x+5y-4z+6u=8 \\ 3x-3y-5z+5u=5 \\ 2y+2z-3u+4v=10 \end{array} \qquad [3].$$

Si suponemos conocidos los valores de u y v, y pasamos los términos que contienen estas incógnitas al segundo miembro, hallaremos

$$\begin{array}{r} 3x+5y-4z=8-6u \\ 3x-3y-5z=5-5u \\ 2y+2z=10+3u-4v \end{array} \qquad [4].$$

Eliminando primero la x, y despues la z, hallaremos para las incógnitas, los valores

$$y=\frac{4v-5u-4}{14}, \quad z=\frac{37+13u-16v}{7}, \quad x=\frac{428+45u-148v}{42}$$

los cuales vienen en funcion de las dos incógnitas u y v; si ahora damos á estas dos incógnitas valores particulares, á cada sistema que les demos, obtendremos otro para las incógnitas restantes x, y, z, y los dos reunidos constituirán el que satisface á las ecuaciones propuestas.

291. Al definir el sistema determinado de ecuaciones, hemos tenido cuidado de advertir que el número de ecuaciones distintas

que lo forman, sea igual al número de incógnitas; y esto es, porque á veces aparecen en un sistema dado tantas ecuaciones como incógnitas, pero no son distintas, sino que alguna ó algunas, provienen ó se deducen de otras, y en ese caso el sistema es indeterminado por no cumplir con la condicion de que todas sus ecuaciones sean diferentes, lo cual se conoce en general en la série de los cálculos.

Sea el sistema que tiene tantas ecuaciones como incógnitas

$$\begin{aligned} 2x+3y-5z&=14\\ 3y+5z-3u&=13\\ 4x-5y+2u&=10\\ -2x+19y-15z-4u&=22. \end{aligned}$$

Si eliminamos la x, este sistema se podrá reemplazar por este otro

$$\begin{aligned} 2x+3y-5z&=14\\ 3y+5z-3u&=13\\ 11y-10z-2u&=18\\ 22y-20z-4u&=36 \end{aligned}$$

en el cual la cuarta ecuacion es el doble de la tercera; por lo tanto el sistema propuesto, se reduce realmente al siguiente

$$\begin{aligned} 2x+3y-5z&=14\\ 3y+5z-3u&=13\\ 11y-10z-2u&=18 \end{aligned}$$

que como se ve es indeterminado; luego indeterminado es tambien el sistema propuesto.

Sistemas más que determinados ó imposibles de verificar, si no hay ecuaciones de condicion.

292. Si se tienen $m+n$ ecuaciones con m incógnitas, el sistema se llama más que determinado, y en general es imposible verificarle para unos mismos valores de las incógnitas.

En efecto, de m ecuaciones que contengan las m incógnitas, se puede hallar el sistema de valores que verifican á estas m ecuaciones, y como en la investigacion de estos valores no hemos tenido en cuenta para nada las n ecuaciones restantes, es claro que en general estas n ecuaciones no se verificarán para los valores hallados, á ménos que no haya ciertas relaciones de condicion, cuyas relaciones se obtendrán sustituyendo los valores hallados de las m incógnitas, en las n

ecuaciones restantes, ó sea eliminando las m incógnitas entre las $m+n$ ecuaciones.

En algunos casos sucede que hay en un sistema que tiene más ecuaciones que incógnitas, algunos coeficientes de estas incógnitas indeterminados, los cuales se han de determinar con la condicion de que se verifiquen todas las ecuaciones; y entónces puede suceder una de tres cosas: que el número de estos coeficientes sea mayor, igual ó menor que la diferencia entre el número de ecuaciones y el de las incógnitas; en los dos primeros casos el problema es posible por lo general, el tercer caso queda todavía imposible de verificar.

En efecto, si eliminamos entre las $m+n$ ecuaciones las m incógnitas que contienen, hallaremos n ecuaciones de condicion que se deberán verificar á expensas de los valores que se les den á los coeficientes indeterminados; ahora bien, si estos son n, ó un número mayor que n, el problema será posible; pero si el número de coeficientes indeterminados es menor que n, este sistema de ecuaciones de condicion no se verificará en general, pues deducidos los valores de estos coeficientes, de un número de ecuaciones de condicion menor que el que tenemos, quedarán algunas ecuaciones de condicion de que no habremos hecho uso, y que en general no se verificarán para los valores hallados de los coeficientes.

Sea, por ejemplo, hallar los valores convenientes de los coeficientes indeterminados a, b, c, para que se verifique el sistema

$$\begin{aligned} ax+2y &= 2 \\ 3x+by &= 4 \\ 4y+cx &= 6 \qquad [6]. \\ 2x+3y &= 12 \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones se saca

$$x=\frac{2b-8}{ab-6}, \qquad y=\frac{4a-6}{ab-6} \qquad [7],$$

y sustituyendo estos valores en las dos últimas, tendremos

$$\frac{16a-24}{ab-6}+\frac{2bc-8c}{ab-6}=6$$

$$\frac{4b-16}{ab-6}+\frac{12a-18}{ab-6}=12$$

de donde sacaremos $a=\dfrac{2b+19}{6b-6}$, $\qquad c=\dfrac{6b-29}{6b-6}$

en estas fórmulas podremos dar á b valores cualesquiera á excepcion de $b=1$, porque entónces resultan para a, y c, valores infinitos, y para cada uno de estos valores, hallaremos los correspondientes de a y c, que deben tener para que las cuatro ecuaciones se verifiquen á la vez.

Sistema de ecuaciones incompatibles.

293. Sucede en algunos casos que las ecuaciones de que consta un sistema no se pueden verificar absolutamente para ningun sistema de valores finitos de las incógnitas, y entónces se dice que aquellas ecuaciones son *incompatibles*.

Si no se reconoce esto tan luégo como se ve el sistema, se viene á conocer en la série de los cálculos llegando á ecuaciones absurdas, como $12=7$, $8=0$, etc.

Sea, por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x+3y-z&=1 \\ x+2y-2z&=2 \\ 6x+10y-6z&=3, \end{aligned}$$

Si eliminamos primero la z, se tendrá

$$\begin{aligned} 2x+3y-z&=1 \\ 3x+4y&=0 \\ 6x+8y&=3 \end{aligned}$$

Si eliminamos ahora la y en las dos últimas ecuaciones, hallaremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 2x+3y-z&=1 \\ 3x+4y&=0 \\ 0&=3, \end{aligned}$$

y como es imposible que se verifique, por contener el absurdo de $3=0$, se sigue que el propuesto tampoco puede verificarse para ningun valor de las incógnitas.

Se puede reconocer el absurdo en las ecuaciones propuestas, observando que el primer miembro de la tercera ecuacion, es igual á la suma de los dos primeros miembros de las dos primeras ecuaciones multiplicada por 2, y por consiguiente su segundo miembro, debia ser igual tambien á la suma de los segundos miembros de las dos primeras ecuaciones multiplicada por dos, es decir á 6, lo cual no es cierto, pues como vemos es 3.

Problemas que dan orígen á ecuaciones de primer grado con varias incógnitas.

294. Problema I. Preguntándole un hijo á su padre qué edad tenian ambos, le contestó el padre: *hace 3 años que la undécima parte de mi edad era igual á la tercera parte de la tuya, y dentro de 5 años tres veces la quinta parte de tu edad equivaldrá á la cuarta parte de la que yo tenga ménos un año.*

Sea x la edad del padre é y la del hjio, y se tendrá, que la edad que tenia cada uno hace 3 años era $x-3$ é $y-3$, y como la undécima parte de la primera es igual á la tercera de la segunda, se hallará por primera ecuacion

$$\frac{x-3}{11}=\frac{y-3}{3};$$

la edad que cada uno tendrá dentro de 5 años será $x+5$ é $y+5$; y como la cuarta parte de la primera ménos un año ha de ser igual á tres veces la quinta de la segunda, se hallará por segunda ecuacion

$$\frac{x+5}{4}-1=\frac{y+5}{5}\times 3;$$

cuyas dos ecuaciones se reducen, despues de quitados los denominadores y hecha la trasposicion, á

$$11y-3x=24$$
$$5x-12y=55.$$

Resuelto este sistema de ecuaciones hallamos para las incógnitas los valores $x=47$, é $y=15$ que son las edades respectivas del padre y del hijo, como es fácil comprobar.

295. Problema II. *Se tienen tres operarios para hacer una obra: el primero y segundo la hacen en $16\frac{2}{13}$ dias; el primero y el tercero en $17\frac{1}{7}$; y por último, el segundo y tercero la concluyen en $18\frac{2}{3}$ dias. Se quiere saber cuánto tiempo necesitará cada uno para hacer la obra, y cuántos si trabajan todos.*

Sean x, y, z, los tiempos que necesitan respectivamente el primero, segundo y tercero para hacer la obra, y representemos por 1 la obra que han de hacer.

Es claro, que si el primero hace la obra en x dias, en un dia hará $\frac{1}{x}$; el segundo hará tambien en un dia $\frac{1}{y}$, y por consiguiente entre los dos harán $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; pero como los dos la hacen en $16\frac{2}{13}$ dias ó sea en $\frac{210}{13}$ de dia, corresponde á cada dia 1 partido por $\frac{210}{13}$, ó lo que es lo mismo, $\frac{13}{210}$ de la obra; y por consiguiente, tendremos por primera ecuacion,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{13}{210}.$$

Del mismo modo hallaremos las otras dos,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{7}{120}$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{56}.$$

Haciendo ahora, segun ya hemos indicado (288),

$$x'=\frac{1}{x},\ y'=\frac{1}{y},\ z'=\frac{1}{z},\ \text{de donde},\ x=\frac{1}{x'},\ y=\frac{1}{y'},\ z=\frac{1}{z'},$$

para que no resulten ecuaciones de un grado superior al primero al quitar los denominadores, y resolviendo el sistema de ecuaciones que resulte, hallaremos los valores de las incógnitas $x=30$, $y=35$, $z=40$.

Luego el primer operario hará la obra en 30 dias, el segundo en 35, el tercero en 40, y los tres juntos la harán en $11\frac{37}{73}$ dias; como es fácil comprobar.

296. PROBLEMA III. *En una sociedad compuesta de hombres, mujeres y niños, hay que repartir 300 reales: si se le da á cada niño una peseta, le toca á cada uno de los demás á $2\frac{1}{2}$ reales; si se le da á cada hombre una peseta, resulta para cada uno de los otros 2 reales; y por último, si se da una peseta á cada mujer, recibe cada uno de los otros $2\frac{2}{7}$ reales. Se quiere saber cuántos hombres, mujeres y niños hay en la sociedad.*

Sean x los hombres, y las mujeres, y z los niños. Puesto que dando á cada niño una peseta, cada uno de los demás recibe $2\frac{1}{2}$ reales, la suma total que se reparte, estará expresada por $4z+2\frac{1}{2}y+2\frac{1}{2}x$; del mismo modo lo estará, por las dos cantidades, $4x+2y+2z$, y $4y+2\frac{2}{7}z+2\frac{2}{7}x$; luego las tres ecuaciones que resuelven el problema, serán:

$$4z+2\tfrac{1}{2}y+2\tfrac{1}{2}x=300$$
$$4x+\ 2y+\ 2z=300$$
$$4y+2\tfrac{2}{7}z+2\tfrac{2}{7}x=300;$$

las cuales se convierten en las siguientes, quitando los denominado res y ordenando:

$$4x+\ 2y+\ 2z+\ 300$$
$$5x+\ 5y+\ 8z=\ 600$$
$$16x+28y+16z=2100;$$

de cuyas ecuaciones se deducen para las incógnitas los valores siguientes: $x=45$, $y=35$, y $z=25$; donde vemos que, 45 será el número de hombres, 35 el de mujeres, y 25 el de niños; como se puede comprobar fácilmente.

297. Problema IV. *Un platero tiene tres rieles que contienen:*
El primero 5 *onzas de oro,* 10 *de plata y* 15 *de cobre.*
El segundo 8 *id. de id.* 12 *de id. y* 24 *de id.*
El tercero 6 *id. de id.* 4 *de id. y* 2 *de id.*
¿Cuántas onzas debe tomar de cada uno para formar un cuarto riel, que contenga 7 *onzas de oro,* 9 *de plata y* 13 *de cobre?*

Sean x, y, z, los números de onzas que es necesario tomar respectivamente de cada uno de los tres primeros rieles para formar el cuarto.

Si se observa que en el primer riel, de las 30 onzas que contiene, 5 son de oro, 10 de plata, y 15 de cobre; en una onza de este riel habrá $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ de oro, $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ de plata, y $\frac{15}{30}=\frac{1}{3}$ de cobre; y en las x onzas que se toman, habrá $\frac{x}{6}$ de oro, $\frac{x}{3}$ de plata, y $\frac{x}{2}$ de cobre: del mismo modo veremos, que en las y onzas que se toman del segundo riel, $\frac{2y}{11}$ son de oro, $\frac{3y}{11}$ de plata, y $\frac{6y}{11}$ de cobre; y en las z onzas que se toman del tercero, habrá $\frac{z}{2}$ de oro, $\frac{z}{3}$ de plata, y $\frac{z}{6}$ de cobre; luego como ha de tener el lingote que se quiere formar 7 onzas de oro, 9 de plata y 13 de cobre, se deberá tener el sistema de ecuaciones,

$$\frac{x}{6}+\frac{2y}{11}+\frac{z}{2}=7$$
$$\frac{x}{3}+\frac{3y}{11}+\frac{z}{3}=9$$
$$\frac{x}{2}+\frac{6y}{11}+\frac{z}{6}=13.$$

Que resuelto, como ya se sabe, nos dará los valores $x=12$, $y=11$, $z=6$ que son las onzas que respectivamente se han de tomar del primero, segundo y tercer riel, para formar el que se pide.

LECCION XXXII.

Método de eliminacion por factores indeterminados ó de Bezout.

Método de eliminacion por factores indeterminados ó de Bezout.

*298. El método de eliminacion de Bezout consiste en multiplicar cada ecuacion por una cantidad indeterminada, sumar las ecuaciones que resulten é igualar á cero los coeficientes de todas las incógnitas ménos una; se despeja el valor de la incógnita cuyo coeficiente no se igualó á cero, y sustituyendo en él los valores de las cantidades indeterminadas, deducidos de las ecuaciones que resultan de igualar á cero los coeficientes, tendremos el valor de dicha incógnita; se hace lo mismo con cada una de las demás, y así se hallan los valores de las otras incógnitas.

Sea, en primer lugar, el sistema de dos ecuaciones

$$ax+by=k$$
$$a'x+b'y=k' \qquad [1].$$

Multiplicando la primera ecuacion por m, la segunda por m', y sumando las ecuaciones que resulten, tendremos

$$(am+a'm')x+(bm+b'm')y=km+k'm' \qquad [2].$$

Igualando á cero, primero el coeficiente de y, y luégo el de x, se hallará

$$bm+b'm'=0,\ (am+a'm')x=km+k'm'\ [3],\ x=\frac{km+k'm'}{am+a'm'}.$$

$$am+a'm'=0,\ (bm+b'm')y=km+k'm'\ [4],\ y=\frac{km+k'm'}{bm+b'm'}.$$

De la primera de estas dos relaciones se deduce la igualdad

$$m=-\frac{b'm'}{b},$$

la cual prueba que para cada valor que demos á m', resultará otro correspondiente á m, cuyos dos reunidos anularán el coeficiente de y; pero si para evitar fracciones hacemos $m'=-b$, hallaremos para m el valor b'; luego

$$m'=-b \text{ y } m=b'$$

son un par de valores que anulan al coeficiente de y; de modo que, sustituyendo estos valores en el de x, hallaremos

$$x=\frac{kb'-bk'}{ab'-ba'}.$$

De la segunda relacion sacaremos para m y m' los valores

$$m'=a \text{ y } m=-a'$$

que sustituidos en el valor de y, obtendremos

$$y=\frac{-ka'+ak'}{-ba'+ab'}=\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'};$$

y los valores hallados de este modo para x é y son los que verifican el sistema propuesto.

Para demostrarlo, pasemos en el sistema [1] las cantidades k y k' al primer miembro, y las ecuaciones $ax+by-k=0$ y $a'x+b'y-k'=0$ representémoslas por $A=0$ y $A'=0$.

Llamemos m y m' los valores de las indeterminadas que anulan al coeficiente de y, y n, n' los que anulan al coeficiente de x en la ecuacion [2]; de modo, que las ecuaciones finales que dan respectivamente el valor de x y el valor de y, ó sean las ecuaciones [3] y [4], estarán representadas por las últimas del sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{array}{l}A=0\\A'=0\end{array}\left|\begin{array}{l}Am=0\\A'm'=0\end{array}\right\},\ Am+A'm'=0\\[1ex]\begin{array}{l}A=0\\A'=0\end{array}\left|\begin{array}{l}An=0\\A'n'=0\end{array}\right\},\ An+A'n'=0\end{array}\right\}\quad [5].$$

Es decir, que la ecuacion $Am+A'm'=0$ no contiene más que la incógnita x, pues las cantidades m y m' se han elegido con la condicion de anular al coeficiente de y; del mismo modo la ecuacion

$An+A'n'=0$, no contiene más que la incógnita y. Luego si demostramos que las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix}A=0\\A'=0\end{matrix}\right\}$ son las mismas que las del sistema [5]; y recíprocamente, que el sistema [5] tiene las mismas soluciones que el sistema propuesto $\left.\begin{matrix}A=0\\A'=0\end{matrix}\right\}$, estará justificado el método de Bezout.

La primera parte es bien sencilla: en efecto, todo par de valores que verifique á $A=0$ y $A'=0$, verificará tambien á $Am=0$ y $A'm'=0$, que son las mismas ecuaciones multiplicadas por los números m y m'; verificando á las ecuaciones $Am=0$ y $A'm'=0$, su suma $Am+A'm'=0$ tambien quedará verificada; pues siendo cero las cantidades A y A', lo son Am y $A'm'$, y por consiguiente su suma.

Del mismo modo veremos, que todo par de valores que verifique á las ecuaciones $A=0$ y $A'=0$, debe verificar tambien á la ecuacion $An+A'n'=0$; luego queda demostrado que todo par de valores que verifique al sistema propuesto $A=0$ y $A'=0$, verifica tambien al sistema [5].

Recíprocamente, todo par de valores que verifique el sistema [5] debe verificar el sistema propuesto.

En efecto, multiplicando la primera ecuacion por n' y la segunda por m', y restando despues, se tiene

$$\left.\begin{matrix}Am+A'm'=0\\An+A'n'=0\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}Amn'+A'm'n'=0\\Anm'+A'm'n'=0\end{matrix}\right\} A(mn'-nm')=0 \quad [6].$$

Multiplicando ahora la primera por n y la segunda por m y restando tambien, tendremos

$$\left.\begin{matrix}Am+A'm'=0\\An+A'n'=0\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}Amn+A'nm'=0\\Amn+A'mn'=0\end{matrix}\right\} A'(mn'-nm')=0 \quad [7],$$

donde vemos, que todo par de valores que verifica el sistema [5], ó sea á las ecuaciones $Am+A'm'=0$, y $An+A'n'=0$, verifica tambien á las ecuaciones [6] y [7]. Ahora bien, en estas ecuaciones podrá suceder una de dos cosas, que el factor $mn'-nm'$ no sea igual cero, ó que lo sea; si $mn'-nm'$ no es igual á cero, entónces tiene que serlo forzosamente cada uno de los otros factores, es decir A y A'; luego los mismos valores que verifican al sistema [5] verifican al sistema propuesto, segun queriamos demostrar.

Si el factor $mn'-nm'$ es igual á 0, no hay razon para decir que lo sean los otros factores A y A'; y por consiguiente, no se puede concluir que los mismos valores que verifican al sistema [5] verifican tambien al sistema propuesto.

En este caso nos hallaremos siempre que sean iguales las relaciones $\frac{m}{m'}$ y $\frac{n}{n'}$; pero $\frac{m}{m'}=-\frac{b'}{b}$, y $\frac{n}{n'}=-\frac{a'}{a}$; luego se tendrá

$$\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'} \text{ ó } mn'-nm'=0,$$

siempre que se verifique la condicion

$$\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a} \text{ ó } ab'-ba'=0;$$

pero al tratar de la discusion de los valores de x é y, observaremos que siempre que esta condicion se verifique, las ecuaciones son incompatibles en general, y que aun en este caso, los valores hallados para x é y, tanto por este método como por los demás, satisfacen á la cuestion; pues servirán para indicarnos que las ecuaciones son incompatibles ó indeterminadas, como ya veremos más adelante.

* 299. El método de los factores indeterminados tal como Bezout lo empleó, no es el que hemos explicado, pues consistia en multiplicar cada ecuacion ménos la última, por una indeterminada; despues se sumaban estas ecuaciones, y de la suma se restaba la última ecuacion; en seguida se igualaban á cero los coeficientes de las incógnitas que se querian eliminar; para esto se hacia uso de las indeterminadas por las cuales se multiplicaron las ecuaciones dadas, y sustituyendo en el valor de la incógnita cuyo coeficiente no se igualaba á cero, los valores de estas indeterminadas sacados de las ecuaciones de condicion que anulaban á los demás coeficientes, se tenia el valor de esta incógnita, y del mismo modo se obtenian los demás valores de todas las otras incógnitas.

En este método el número de indeterminadas es igual al número de los coeficientes que se igualan á cero; por consiguiente, resultan para valores de estas indeterminadas un sistema único de valores, que es el que se deduce del sistema determinado de ecuaciones que se obtiene igualando á cero todos los coeficientes ménos uno; pero los valores que por este medio se hallan, son en general fraccionarios, y la sustitucion de estos valores en el de la incógnita cuyo valor se busca es bastante pesado; y sobre todo tiene el grande inconveniente de ser este método ineficaz en el caso de ser incompatibles las ecuaciones que resultan de igualar á cero los coeficientes ménos uno; siendo incompatibles no podemos deducir los valores de las indeterminadas, y por consiguiente el valor de las incógnitas queda sin determinar; en cuyo caso el método se dice que *cae en defecto*.

Estos dos inconvenientes se evitan por la modificacion debida á *M. Gergonne*; que consiste en emplear tantas indeterminadas como ecuaciones, segun se ha dicho al principio; por este medio, los valores de todas las indeterminadas ménos una, vienen en funcion de esta una, y segun los valores que á ésta se le den, así serán los que resulten para las otras; por consiguiente entre los infinitos que ésta podrá recibir, elegiremos aquel que haga que sean enteros todos los demás; y en otros casos cuando el sistema de ecuaciones que resulta de igualar á cero los coeficientes sea incompatible, podremos valernos tambien de esta indeterminada para hacer que sea compatible, y por consiguiente que se verifique en todos los casos.

* 300 El único inconveniente que á primera vista aparece en este método reformado, es que, siendo indeterminados los valores de las cantidades en funcion de las cuales vienen los valores de las incógnitas, podrá creerse que tambien lo serán los valores de estas incógnitas, y por consiguiente que podrá haber vários valores de x é y que satisfagan á las ecuaciones dadas; pero si consideramos los valores de estas incógnitas $x=\frac{km+k'm'}{am+a'm'}$, $y=\frac{km+km'}{bm+b'm'}$, y dividimos los dos términos de las fracciones que los representan por m', hallaremos que estos valores se convierten en

$$x=\frac{k\frac{m}{m'}+k'}{a\frac{m}{m'}+a'},\quad y=\frac{k\frac{m}{m'}+k'}{b\frac{m}{m'}+b'}$$

los cuales dependen de la relacion $\frac{m}{m'}$, y como esta relacion es constante cualesquiera que sean los valores de m y m', puesto que se han de deducir de las relaciones $bm+b'm'=0$ y $am+a'm'=0$ y éstas nos dan $\frac{m}{m'}=-\frac{b'}{b}$ y $\frac{m}{m'}=-\frac{a'}{a}$, se sigue que los valores de x é y deducidos de las fórmulas anteriores serán únicos y se hallarán reemplazando la relacion $\frac{m}{m'}$ por sus valores respectivos $-\frac{b'}{b}$ y $-\frac{a'}{a}$.

* 301. Sean ahora tres ecuaciones con tres incógnitas;

$$\begin{aligned} ax+by+cz&=k\\ a'x+b'y+c'z&=x' \qquad [8].\\ a''x+b''y+c''z&=k'' \end{aligned}$$

Multipliquemos la primera por m, la segunda por m' y la tercera por m'', sumemos, y se tendrá

$$\begin{aligned} &(am+a'm'+a''m'')\,x+(bm+b'm'+b''m'')\,y+\\ &(cm+c'm'+c''m'')\,z=km+k'm'+k''m'' \qquad [9]. \end{aligned}$$

Si igualamos á cero los coeficientes de y y de z, tendremos

$$\begin{aligned} bm+b'm'+b''m''&=0\\ cm+c'm'+c''m''&=0 \qquad [10], \end{aligned}$$

y la ecuacion anterior se convertirá en

$$(am+a'm'+a''m'')x=km+k'm'+k''m'';$$

de la cual sacaremos $x=\dfrac{km+k'm'+k''m''}{am+a'm'+a''m''}$; de modo que, hallando los valores de m, m' y m'' que anulan á los coeficientes de z y de y, y sustituyéndolos en la expresion del valor de x, hallaremos el valor de esta incógnita. Por un procedimiento análogo hallaremos el de las otras dos.

Resolviendo las ecuaciones [10], y hallando los valores de m y m' en funcion de m'', tendremos

$$m=\frac{(c'b''-b'c'')m''}{cb'-bc'},\ m'=\frac{(bc''-cb'')m''}{cb'-bc'}.$$

Si ahora hacemos $m''=cb'-bc'$, con objeto de que los valores de m y m' sean enteros, hallaremos que los valores de m, m' y m'' que anulan á los coeficientes de y y z, son

$$m''=cb'-bc',\ m'=bc''-cb'',\ m=c'b''-b'c'';$$

de modo que, sustituyendo estos valores en el de x, hallaremos

$$x=\frac{kb'c''-kc'b''+ck'b''-bk'c''+bc'k''-cb'k''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

Para hallar el valor de y, tendremos que igualar á cero los coeficientes de x y z en la ecuacion [9], y se tendrá

$$\begin{aligned} am+a'm'+a''m''&=0\\ cm+c'm'+c''m''&=0; \end{aligned}$$

de las cuales sacamos los valores $m''=ac'-ca'$, $m'=ca''-ac''$, $m=a'c''-c'a''$; y sustituyendo estos valores en la expresion $y=\dfrac{km+k'm'+k''m''}{bm+b'm'+b''m''}$, hallaremos

$$y=\frac{ak'c''-ac'k''+ca'k''-ka'c''+kc'a''-ck'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

Y por último, tendremos del mismo modo

$$z=\frac{ab'k''-ak'b''+ka'b''-ba'k''+bk'a''-kb'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''};$$

cuyas fórmulas generales resuelven el sistema propuesto.

* 302. Si son en general m ecuaciones con m incógnitas las que por este método se han de resolver, se multiplicará cada una por un factor indeterminado, se sumarán las ecuaciones resultantes, y nos dará una ecuacion que contendrá las m incógnitas, cuyos coeficientes y cantidad constante serán funciones de las indeterminadas por las cuales se multiplicaron las propuestas.

Se igualarán á cero todos los coeficientes ménos uno, y hallaremos así $m-1$ ecuaciones de condicion, de las que podremos deducir los valores de $m-1$ indeterminadas en funcion de la última, á la cual se le dará por valor, para evitar quebrados, el denominador de las fracciones de las demás, y el sistema de valores que así hallemos para las indeterminadas se sustituirá en el de la incógnita cuyo coeficiente no se igualó á cero, con lo cual quedará determinado el valor de esta incógnita; y lo mismo se hará con todas las demás.

Vemos pues, que por este método, lo mismo que por los demás, lo que se hace es reducir la resolucion de un sistema de ecuaciones á otro que tenga una ecuacion y una incógnita ménos; y como continuando así llegaremos á obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que ya se sabe resolver, es claro que quedará resuelto el sistema propuesto.

Ejemplo I. Sean las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r}3x-5y+4z=17\\7x+4y-2z=16\\-8x+2y+3z=21\end{array}\right.\qquad[1].$$

Aplicando el método de Bezout, se tendrá

$$(3m+7m'-8m'')\,x+(-5m+4m'+2m'')\,y+$$
$$(4m-2m'+3m'')\,z=17m+16m'+21m''\qquad[2].$$

Igualando á cero los coeficientes de y y z, tendremos

$$\left.\begin{array}{r}-5m+4m'+2m''=0\\4m-2m'+3m''=0\end{array}\right.\ [3],\qquad x=\frac{17m+16m'+21m''}{3m+7m'-8m''}.$$

De las ecuaciones [3] se deduce, $m''=-6$, $m'=23$, $m=16$; cuyos valores, sustituidos en la fórmula anterior, nos dan

$$x=\frac{17\cdot16+16\cdot23-21\cdot6}{3\cdot16+\ 7\cdot23+\ 8\cdot6}=\frac{514}{257}=2.$$

Igualando ahora á cero los coeficientes de x y z, hallaremos

$$\left.\begin{array}{l}3m+7m'-8m''=0\\4m-2m'+3m''=0\end{array}\right\}[4],\qquad y=\frac{17m+16m'+21m''}{-5m+\ 4m'+\ 2m''}.$$

De las ecuaciones [4] se saca, $m''=34$, $m'=41$, $m=-5$; cuyos valores sustituidos en el de y, nos dan

$$y=\frac{-17\cdot5+16\cdot41+21\cdot34}{5\cdot5+\ 4\cdot41+\ 2\cdot34}=\frac{1285}{257}=5.$$

Por último, igualando á cero los coeficientes de x é y, tendremos

$$\left.\begin{array}{l}3m+7m'-8m''=0\\-5m+4m'+2m''=0\end{array}\right\}[5],\qquad z=\frac{17m+16m'+21m''}{4m-\ 2m'+\ 3m''}.$$

De las ecuaciones [5] se saca, $m''=47$, $m'=34$, $m=46$; cuyos valores nos dan para z,

$$z=\frac{17\cdot46+16\cdot34+21\cdot47}{4\cdot46-\ 2\cdot34+\ 3\cdot47}=\frac{2313}{257}=9;$$

donde vemos que los valores de las incógnitas son,

$$x=2,\ y=5,\ z=9,$$

como fácilmente se puede comprobar.

Ejemplo II. Sean las tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\left.\begin{array}{l}3x+6y-4z=-9\\4x+8y+3z=\ 88\\3x-5y+4z=\ 21\end{array}\right\}[6].$$

Si aplicamos á estas ecuaciones el método verdadero de Bezout, hallaremos

$$(3m+4m'-3)x+(6m+8m'+5)y+(-4m+3m'-4)z=$$
$$-9m+88m'-21\quad[7].$$

Igualando á cero los coeficientes de x é y, para hallar el valor de z, tendremos

$$\left.\begin{array}{l}3m+4m'-3=0\\6m+8m'+5=0\end{array}\right\}[8],\qquad z=\frac{-9m+88\,m'-21}{-4m+\ 3\,m'-\ 4}.$$

De las ecuaciones de condicion [8] hemos de deducir los valores de m y m'; de modo, que si para eliminar la m', multiplicamos la primera por 2, y luego restamos, hallaremos el absurdo $8=0$; por consiguiente, el sistema [8] de ecuaciones es incompatible; luego no es posible hallar por este método el valor de z, y el método de Bezout, tal como él es, cae en defecto en este caso.

Apliquemos este mismo método reformado, y hallaremos

$$(3m+4m'+3m'')x+(6m+8m'-5m'')y+(-4m+3m'+4m'')z$$
$$=-9m+88m'+21m'' \qquad [9]$$

Igualando á cero los coeficientes de x é y, para hallar el valor de z, tendremos

$$\left.\begin{array}{l}3m+4m'+3m''=0\\ 6m+8m'-5m''=0\end{array}\right\} [10] \qquad z=\frac{-9m+88m'+21m''}{-4m+3m'+4m''}.$$

Multiplicando por 2 la primera de las ecuaciones [10], y luego restando, con objeto de eliminar la m', hallamos $8m''=0$; de donde se deduce el valor $m''=0$. Siendo $m''=0$, las ecuaciones [10] se convierten en

$$\begin{array}{l}3m+4m'=0\\ 6m+8m'=0\end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{l}3m+4m'=0\\ 3m+4m'=0;\end{array}$$

donde vemos que las dos ecuaciones se reducen á una, de la cual se saca $m=-\frac{4m'}{3}$; y dando á m' el valor 3, para evitar quebrados, tendremos que los valores de las indeterminadas que reducen á cero los coeficientes de x é y, son $m''=0$, $m'=3$, $m=-4$; cuyos valores sustituidos en el valor de z, nos dan

$$z=\frac{9\cdot4+88\cdot3}{4\cdot4+3\cdot3}=\frac{300}{25}=12.$$

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, hallaremos para valores de las otras incógnitas $y=6$ y $x=1$; que son los valores que unidos con el valor hallado para z, dan el sistema que verifica á las ecuaciones propuestas.

LECCION XXXIII.

Regla de *Kramer* para hallar los valores de las incógnitas de un sistema de ecuaciones. Principio en que se funda la demostracion de esta regla.—Demostracion de la regla de *Kramer*.

Regla de *Kramer* para hallar los valores de las incógnitas de un sistema de ecuaciones. Principio en que se funda la demostracion de esta regla.

* 303. La regla de *Kramer* tiene por objeto hallar las fórmulas generales que dan los valores de las incógnitas de un sistema cualquiera de ecuaciones, sin emplear ningun método de eliminacion; es decir,

dado un sistema cualquiera de ecuaciones, hallar directamente y sin cálculo, las fórmulas que dan los valores de las incógnitas.

* 304. Para enunciar la regla consideraremos un sistema cualquiera de ecuaciones

$$
\begin{array}{l}
ax+by+cz+du+\ldots=k \\
a'x+b'y+c'z+d'u+\ldots=k' \\
a''x+b''y+c''z+d''u+\ldots=k'' \\
a'''x+b'''y+c'''z+d'''u+\ldots=k''' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

El denominador comun, se halla tomando los dos primeros coeficientes a *y* b, *y formando con ellos los dos arreglos* ab *y* ba, *entre los cuales se pone el signo ménos*, ab—ba.

Se toma despues el tercer coeficiente c, *se coloca á la derecha de cada arreglo, y se le hace pasar hácia la izquierda por todos los lugares posibles, cambiando de signo al término siempre que esta letra cambie de lugar; así obtendremos el polinómio*

$$abc-acb+cab-bac+bca-cba;$$

el cual, como se ve, no es otra cosa que las permutaciones que se pueden hacer con los tres coeficientes a, b, c.

Se toma en seguida el cuarto coeficiente d, *se coloca tambien á la derecha de cada término, y despues se hace pasar hácia la izquierda por todos los lugares, teniendo cuidado de cambiar de signo al término cada vez que esta letra cambie de lugar; y así hallaremos el nuevo polinómio*

$$abcd-abdc+adbc-dabc-acbd+acdb-adcb+dacb+$$
$$cabd-cadb+\ldots$$

que expresa las permutaciones que se pueden hacer con los cuatro coeficientes a, b, c, d.

Y así se continúa hasta hacer lo mismo con el coeficiente de la última incógnita.

Hecho esto, se le pondrá á la segunda letra un acento, á la tercera dos, á la cuarta tres, y así sucesivamente, hasta la última, que se le pondrán m—1 *acentos, con lo cual tendremos formado el denominador comun de los valores de las incógnitas.*

Para obtener el numerador de cada una, se reemplaza en el denominador comun, por el término conocido, el coeficiente de la incógnita cuyo valor se busca, quedando los mismos acentos.

Para demostrar esta regla se necesita probar ántes el siguiente principio:

El denominador comun, que representarémos por D, hallado segun la regla de KRAMER, *se reduce á cero reemplazando una letra cualquiera por otra de las que entran en dicho denominador, conservando los mismos acentos.*

Así, el polinómio

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'',$$

se reduce á cero, poniendo en vez de c una de las letras a ó b,

$$ab'a''-aa'b''+aa'b''-ba'a''+ba'a''-ab'a''=0$$
$$ab'b''-ab'b''+ba'b''-ba'b''+b'ba''-bb'a''=0.$$

Para demostrar este principio observarémos que, segun la formacion del denominador comun D, sus términos son las diferentes permutaciones que con los m coeficientes se pueden formar; luego si hay un término en el que una letra cualquiera d ocupe el lugar correspondiente á m acentos, y otra letra cualquiera h, la que se ha de sustituir por d, está ocupando el lugar correspondiente á n acentos, habrá otro que sólo se diferenciará del anterior en que la d estará en el lugar de la h, y la h en el de la d; es decir, que si hay un término cualquiera

$$\ldots\ldots d^{(m)} \ldots\ldots h^{(n)} \ldots\ldots \qquad [1].$$

habrá otro de la forma

$$\ldots\ldots h^{(m)} \ldots\ldots d^{(n)} \ldots\ldots \qquad [2].$$

Los puntos que hemos puesto en ambos términos, denotan letras comunes en los dos.

En efecto, como los términos del denominador se han formado arreglando de todas las maneras posibles los coeficientes de las incógnitas, es claro que siendo los términos [1] y [2] dos arreglos diferentes, se deberán hallar en el denominador D; y lo mismo sucederá con otros dos términos en que estas letras ocupen el lugar de m_1 y n_1 acentos; por consiguiente, el denominador comun D se podrá descomponer en pares de términos de la forma [1] y [2].

Ahora bien, si nosotros reemplazamos h por d, estos términos se convierten en

$$\ldots\ldots d^{(m)} \ldots\ldots d^{(n)} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots d^{(m)} \ldots\ldots d^{(n)} \ldots\ldots;$$

es decir, se hacen iguales; luego si probamos que estos pares de términos tienen siempre signos contrarios, se destruirán al hacer

$d=h$, ó al sustituir una de estas letras por la otra, y el polinómio D se reduce á cero.

Que estos pares de términos tienen signos contrarios, es fácil probar; en efecto, sea p el número de letras que hay comprendidas entre la letra $d^{(m)}$ y $h^{(n)}$, en cuyo caso, si partimos del término [1], y suponemos que la letra h va cambiando de lugar hasta colocarse en el sitio de la letra d, ó sea para obtener el término

$$\ldots\ldots h^{(m)}d^{(m+1)}\ldots\ldots \qquad [3],$$

habrá tenido necesidad de pasar dicha letra h por $p+1$ lugares, y por consiguiente el término [1] habrá tenido que cambiar $p+1$ veces de signo, correspondiente al número de veces que la letra h ha cambiado de lugar.

Ahora, para pasar del término [3] al término [2], es necesario suponer que cada letra que está á la derecha de d, pasa á la izquierda; y como para pasar la d al lugar correspondiente á los n acentos, tiene que hacerlo pasando p letras á su izquierda, se sigue que el término [3] para pasar al término [2], tiene que cambiar de signo un número de veces p, correspondiente al número de veces que cada letra cambia de lugar: por consiguiente, si para pasar del término [1] al [3], ha tenido que cambiar $p+1$ veces de signo, y para pasar del [3] al [2], ha cambiado p veces, para pasar el término [1] al término [2], habrá tenido que cambiar de signo $p+1+p=2p+1$ veces; y como $2p+1$ es un número impar, se sigue que el signo del término [2] es contrario al que tiene el término [1]; pues habiéndose obtenido el signo del término [2], cambiando el signo del término [1] un número impar de veces, es claro que los signos de estos términos son contrarios; luego si el primer término tiene el signo $\pm$, el segundo tendrá el signo $\mp$.

Demostrado que estos pares de términos tienen signos contrarios, y visto que se hacen iguales cuando se reemplaza la letra d por h, es claro que se destruirán, y el polinómio se reducirá á cero.

Demostracion de la regla de Kramer.

* 305. Una vez demostrado el principio de que el denominador comun, formado segun la regla, se reduce á cero cuando se sustituye una letra por otra de las que en él entran, podemos pasar á la demostracion de esta regla.

Sea el sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{l}
ax+by+cz+du+\ldots=k \\
a'x+b'y+c'z+d'u+\ldots=k' \\
a''x+b''y+c''z+d''u+\ldots=k'' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

y supongamos que el denominador comun formado segun la regla lo hemos ordenado con relacion á los acentos de la letra coeficiente de la incógnita cuyo valor queremos hallar; es decir, que si queremos hallar el valor de x, ordenaremos con relacion á los acentos de la letra a; si el de y, ordenaremos por los acentos de b, y así sucesivamente.

Esto supuesto, si tratamos de hallar el valor de y, por ejemplo, tendremos, llamando B, B_1, B_2... á los diferentes coeficientes de b, b', b''...

$$D=Bb+B_1b'+B_2b''+B_3b'''+\ldots$$

Multiplicando ahora la primera ecuacion por B, la segunda por B_1, la tercera por B_2, etc., y sumando segun se hace en el método de Bezout, se tendrá

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l}
Ba & x+Bb & y+Bc & z+Bd & u+\ldots=Bk+B_1k'+B_2k''+\ldots \\
+B_1a' & +B_1b' & +B_1c' & +B_1d' & \\
+B_2a'' & +B_2b'' & +B_2c'' & +B_2d'' & \\
+\,. & +\,. & +\,. & +\,. & \\
. & . & . & . &
\end{array}
$$

El coeficiente de y es el valor de D; es decir, el denominador comun formado segun la regla, y cada uno de los coeficientes de las demás incógnitas, es el mismo denominador en el cual se ha reemplazado la letra b, por las letras respectivas a, c, d...; luego estos coeficientes se reducirán á cero, segun el principio demostrado, y por consiguiente la ecuacion anterior se convierte en

$$(Bb+B_1b'+B_2b''+\ldots)\,y=Bk+B_1k'+B_2k''+\ldots$$

de donde se saca $y=\dfrac{Bk+B_1k'+B_2k''+\ldots}{Bb+B_1b'+B_2b''+\ldots}$, cuyo valor, se halla conforme con la regla; pues el denominador está formado segun la misma y el numerador se ha obtenido sustituyendo en este denominador el coeficiente b de la incógnita por la cantidad constante k, dejando los mismos acentos.

Si en vez de obtener el valor de y hubiéramos querido obtener el de otra incógnita cualquiera, y justificar que su valor estaba conforme con la regla, hubiéramos ordenado D con arreglo á los acentos de la letra que sirve de coeficiente á esta incógnita, y haciendo lo mismo con las ecuaciones dadas, hubiéramos llegado á otra ecuacion, en que no entraria más incógnita que aquella cuyo valor se busca, pues todas las demás aparecerian con un coeficiente cero, por ser el denominador comun formado segun la regla, en el cual se ha sustituido una letra por otra; de modo que sacando el valor de esta incógnita, se veria que la fórmula que lo dá está formada segun la regla.

EJEMPLO I. Sean las ecuaciones

$$ax+by=k$$
$$a'x+b'y=k'.$$

El denominador comun de los valores de las incógnitas formado segun la regla, será $ab'-ba'$.

El numerador del valor de cada incógnita se hallará reemplazando en este denominador en vez del coeficiente de la incógnita que se despeja la cantidad constante; luego se tendrá

$$x=\frac{kb'-bk'}{ab'-ba'},\quad y=\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'}.$$

EJEMPLO II. Sea el sistema de tres ecuaciones

$$ax+by+cz=k$$
$$a'x+b'y+c'z=k'$$
$$a''x+b''y+c''z=k''$$

El denominador comun, será

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'',$$

y los valores de las incógnitas vendrán expresados por

$$x=\frac{kb'c''-kc'b''+ck'b''-bk'c''+bc'k''-cb'k''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$
$$y=\frac{ak'c''-ac'k''+ca'k''-ka'c''+kc'a''-ck'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$
$$z=\frac{ab'k''-ak'b''+ka'b''-ba'k''+bk'a''-kb'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''};$$

cuyos valores hallados tanto en este ejemplo como en el anterior, son los que ya hemos determinado en las lecciones anteriores.

* 306. Por medio de las fórmulas halladas segun la regla de Kramer, podremos determinar los valores de las incógnitas reemplazando

por los coeficientes y cantidades constantes, los números particulares que representen en cada caso particular.

LECCION XXXIV.

Discusion general de los valores de las incógnitas de un sistema de dos ecuaciones de primer grado.—Discusion general de los valores de las incógnitas de un sistema cualquiera de ecuaciones de primer grado.

Discusion general de los valores de las incógnitas de un sistema de dos ecuaciones de primer grado.

*307. Al resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado, hemos hallado que los valores de x é y que verifican á las ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + b'y &= k' \qquad [1] \end{aligned}$$

son $$x = \frac{kb' - bk'}{ab' - ba'} \quad \text{é} \quad y = \frac{ak' - ka'}{ab' - ba'},$$

cuyos valores vamos á discutir de un modo general.

*308. Los valores de x é y serán positivos, y en general cumplirán con las condiciones físicas del problema, siempre que los dos términos de las fracciones que expresan estos valores sean de un mismo signo; y digo que en general cumplirán con las condiciones del problema, porque puede haber algun caso en el cual el número ó números que estas incógnitas representan deban ser por su naturaleza números enteros, y en ese caso todo valor fraccionario, aunque sea positivo, deberá desecharse por no cumplir con esta condicion precisa; de aquí, que no todos los valores de las incógnitas que verifican á la ecuacion ó ecuaciones de donde provienen, verifican siempre á todas las condiciones físicas del enunciado; y la razon es, que no se pueden expresar en estas ecuaciones todas las condiciones físicas, y por otra parte que una misma ecuacion ó un mismo sistema de ecuaciones, puede corresponder á más de un problema; es decir, que una ecuacion puede ser muy bien la traduccion algebráica de dos ó más enunciados de problemas distintos entre sí.

* 309. Si uno ó los dos numeradores de los valores de x é y tienen signos contrarios al que lleva el denominador comun, entónces uno de los valores, ó los dos serán negativos; y diremos de ellos lo mismo que se ha dicho en las ecuaciones de primer grado con una incógnita (255).

*310. Supongamos ahora que sin ser cero el denominador comun, lo fuesen los numeradores; es decir, que se tiene

$$ab'-ba'=|=0,\ kb'-bk'=0,\ ak'-ka'=0.$$

No siendo $ab'-ba'=0$, las igualdades $kb'-bk'=0$ y $ak'-ka'=0$, no se pueden verificar sino siendo $k=k'=0$. En efecto, si k y k' no fuesen cero, tendrian que serlo a, a', b y b', lo cual no puede ser; porque entónces $ab'-ba'$ tambien seria cero, lo que es contra la hipótesis, ó tendria que ser $kb'=bk'$, y $ak'=ka'$, que tampoco puede ser, porque se tendria $\frac{b'}{b}=\frac{k}{k}$ y $\frac{k'}{k}=\frac{a'}{a}$, de donde $\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a}$ ó $ab'=ba'$, y por consiguiente $ab'-ba'=0$, lo que no es verdad.

Luego si los numeradores de los valores de las incógnitas son cero sin serlo el denominador comun, las cantidades k y k', tienen tambien que ser necesariamente cero.

Las fórmulas dan cero en este caso para valores de las incógnitas; y así debe ser, pues las ecuaciones [1], se reducen por esta hipótesis, segun hemos demostrado, á

$$ax+by=0$$
$$a'x+b'y=0,$$

y quedan verificadas por los valores $x=0$ é $y=0$.

Estos valores hallados para las incógnitas de un problema, indican en general una imposibilidad en él, aunque en algunos casos expresan soluciones de fácil interpretacion.

*311. Si solamente fuera cero uno de los numeradores, sin serlo el otro ni el denominador comun, y se tuviera

$$kb'-bk'=0,\ ak'-ka'=|=0,\ ab'-ba'=|=0,$$

se veria que k y k' no podrian ser cero; porque entónces $ak'-ka'$ seria igual cero, lo cual es contra la hipótesis; por una razon análoga se probaria que tampoco pueden ser cero b y b', porque entónces tendria que serlo tambien el denominador comun; luego si

$kb'-bk'=0$, se debe tener necesariamente $kb'=bk'$ de donde

$$k=\frac{bk'}{b'}.$$

Ahora bien, segun la hipótesis, el valor de x es cero, y el de y es $y=\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'}$, el cual se convierte, poniendo en vez de k su valor, en

$$y=\frac{ak'-a'\frac{bk'}{b'}}{ab'-ba'}=\frac{ab'\,k'-ba'\,k'}{b'\,(ab'-ba')}=\frac{k'}{b'},$$

como debe suceder; pues siendo cero el valor de x, por ser $kb'-bk'=0$, sin serlo k, k', b y b', debe tenerse $k=\frac{bk'}{b'}$, y sustituyendo este valor en las ecuaciones [1], se convierten en

$$ax+by=\frac{bk'}{b'}$$

$$a'x+b'y=k',$$

las cuales dan para $x=0$, el valor de $y=\frac{bk'}{bb'}=\frac{k'}{b'}$, que es el que anteriormente hemos hallado por la fórmula general.

Este caso tampoco ofrece dificultad.

* 312. Supongamos ahora que el denominador es cero, sin que lo sean los numeradores; es decir, que se tiene

$$ab'-ba'=0,\quad kb'-bk'=|=0 \text{ y } ak'-ka'=|=0.$$

Admitamos además que el denominador $ab'-ba'$ se reduce á cero por la hipótesis de ser $ab'=ba'$ y no porque lo sean las cantidades a, a', b y b'.

Los valores de x é y vienen bajo la forma

$$x=\frac{A}{0}=\infty \text{ é } y=\frac{B}{0}=\infty,$$

que nos dicen que no hay valores finitos que verifiquen á las ecuaciones dadas, y por consiguiente dichas ecuaciones deben ser incompatibles.

En efecto, si de la relacion $ab'=ba'$ sacamos el valor de una de las cantidades que entran en ella, y la sustituimos en las ecuaciones dadas, pondremos de manifiesto la incompatibilidad. Saquemos, por ejemplo, el valor de b', y tendremos $b'=\frac{ba'}{a}$, sustituyamos este valor en la segunda ecuacion, y tendremos que el sistema [1] se convertirá en el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + \frac{ba'}{a}y &= k', \end{aligned} \quad \text{de donde} \quad \begin{aligned} ax + by &= k \\ ax + by &= \frac{ak'}{a'}. \end{aligned}$$

Estas dos últimas ecuaciones tienen iguales sus primeros miembros, luego sus segundos tambien deberán serlo para que sean compatibles; pero sus segundos miembros no son iguales, pues si lo fueran, se tendria $k = \frac{ak'}{a'}$ ó $ka' = ak'$, ó $ak' - ka' = 0$, lo cual no es verdad, pues ninguno de los numeradores es cero segun la hipótesis; por consiguiente, las ecuaciones del sistema [1] son incompatibles como lo manifiestan los valores infinitos de las incógnitas.

Vemos, pues, que los valores hallados por las fórmulas generales son verdaderos áun siendo el denominador comun $ab' - ba' = 0$, único caso en que parecia caer en defecto el método de Bezout, pues vemos que los valores infinitos hallados para las incógnitas nos expresan que no hay valores finitos que puedan verificar á las ecuaciones de donde provienen, y por tanto son incompatibles como acabamos de ver.

* 313. Si para evitar la incompatibilidad que resulta por la hipótesis anterior, admitiésemos que $k = \frac{ak'}{a'}$ ó $ak' = ka'$ ó $ak' - ka' = 0$, se tendria que el valor de y seria de la forma $\frac{0}{0}$ y el de x de la forma infinita $\frac{A}{0}$.

Pero será muy fácil probar que siendo y de la forma indeterminada, el de x es tambien de la misma forma. En efecto, siendo $ab' - ba' = 0$ y $ak' - ka' = 0$, se tiene $\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$ y $\frac{a'}{a} = \frac{k'}{k}$, de donde podremos deducir fácilmente la relacion siguiente

$$\frac{b'}{b} = \frac{k'}{k} \text{ ó } kb' - bk' = 0,$$

y por tanto siendo cero el numerador y denominador de y, el numerador de x tambien lo es.

* 314. Esto prueba que si el valor de una de las incógnitas

es infinito, el de la otra tambien lo es; y si el uno viene bajo la forma indeterminada, el otro viene tambien bajo la misma forma.

*315. Si los valores de x é y son de la forma indeterminada por ser $\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a}=\frac{k'}{k}$, dichos valores son reales y verdaderamente indeterminados; pues en ese caso las dos ecuaciones propuestas no son mas que una, como se puede ver introduciendo en ellas esta condicion. En efecto, si llamamos m la relacion constante que hay entre las cantidades b y b', a y a', k y k', tendremos

$$\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a}=\frac{k'}{k}=m,$$

de donde se deduce $b'=bm$, $a'=am$, $k'=km$, y sustituyendo estos valores en la segunda ecuacion del sistema propuesto [1], se tendrá

$$\begin{aligned} ax\ +by\ &=k \\ amx+bmy&=km, \end{aligned}$$

cuya segunda ecuacion es igual á la primera multiplicada por m; luego el sistema de las dos ecuaciones propuestas se reduce á una sola ecuacion con dos incógnitas, $ax+by=k$, la cual se puede verificar por un número indeterminado de valores de x é y.

Luego los valores $x=\frac{0}{0}$ é $y=\frac{0}{0}$, hallados en este caso para x é y por las fórmulas generales, indican el caso de indeterminacion de estos valores.

Pero no se vaya á creer que áun cuando dichos valores son indeterminados, como las expresiones lo indican, se puede dar á estas incógnitas valores totalmente arbitrarios; de ningun modo esto es así, pues ambos valores aunque indeterminados, tienen que satisfacer á la ecuacion $ax+by=k$; por consiguiente una vez dado un valor cualquiera á una de estas incógnitas, el otro está determinado ya por esta ecuacion.

*316. Hemos supuesto hasta aquí que el denominador $ab'-ba'$ es cero, sin que lo sea ninguna de las cantidades que entran en él, sino por verificarse la relacion $\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a}$, y en esta hipótesis hemos visto que cuando ninguno de los numeradores es cero, los valores de las incógnitas son de la forma $\frac{\text{A}}{0}$ y $\frac{\text{B}}{0}$ ó lo que es lo mismo infinitos, y las ecuaciones son incompatibles; y que cuando además de ser $\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a}$, ó $ab'-ba'=0$, es tambien cero uno de los numeradores, el otro tambien lo es, y el sistema de ecuaciones es indeterminado; pero el denominador $ab'-ba'$ puede ser cero siendo $a=0$ y $b=0$, $a=0$ y $a'=0$, $b'=0$ y $b=0$, y por último siendo $b'=0$ y $a'=0$; cuyos casos pueden reducirse á los dos primeros, porque los dos últimos darian orígen á consideraciones de la misma especie respecto á los valores de las incógnitas; pues lo que de la x é y digamos en estos dos casos primeros, se diria de la y y x en los dos últimos.

Así, sea por ejemplo, $a=0$ y $b=0$, en cuyo caso $ab'-ba'=0$, y los valores de x é y se reducen á $x=\frac{kb'}{0}=\infty$ é $y=-\frac{ka'}{0}=-\infty$, que son, segun vemos, infinitos; y por consiguiente las ecuaciones deben ser incompatibles: en efecto, segun la hipótesis en que estamos, las ecuaciones propuestas se convierten en

$$0=k$$
$$a'x+b'y=k',$$

cuya primera ecuacion es evidentemente absurda, y por consiguiente el sistema es incompatible.

Si para evitar la incompatibilidad hacemos $k=0$, en cuyo caso se tendrá $a=0$, $b=0$, $k=0$, el sistema propuesto de las dos ecuaciones se reduce á la sola ecuacion $a'x+b'y=k'$, en la cual los valores de x é y son indeterminados; pero introduciendo esta nueva hipótesis en las fórmulas que dan los valores de estas incógnitas, hallamos que se reducen ambos á la forma indeterminada como debia suceder.

* 317. Sea, en segundo lugar, $a=0$ y $a'=0$: el denominador comun $ab'-ba'$, se reduce á cero, y los valores de las incógnitas toman la forma $x=\frac{A}{0}$ é $y=\frac{0}{0}$, los cuales no están conformes con lo que hemos dicho (314) aunque es verdad que sólo tiene esta excepcion lo que allí dijimos; es decir, que sólo siendo cero los coeficientes de una misma incógnita en ambas ecuaciones, puede ser infinito ó indeterminado uno de los valores de las incógnitas sin que el otro lo sea.

Veamos qué expresan estos valores. Desde luégo el primero nos indica que las ecuaciones son incompatibles: pues no hay ningun valor finito de x que los verifique; y en efecto, dichas ecuaciones se reducen segun la hipótesis que nos ocupa, á

$$by=k$$
$$b'y=k';$$

es decir, á un sistema de dos ecuaciones con una incógnita, y por consiguiente imposible de verificar para un mismo valor de esta incógnita, á no ser que se verifique la ecuacion de condicion $\frac{k}{b}=\frac{k'}{b'}$.

Por lo tanto, los valores $x=\frac{A}{0}$ é $y=\frac{0}{0}$ expresan en general una incompatibilidad en las ecuaciones de donde provienen.

Si admitimos la igualdad $\frac{k}{b}=\frac{k'}{b'}$ con el objeto de hacer que las ecuaciones propuestas sean compatibles, los valores de las incógnitas serán ambos de la forma $\frac{0}{0}$, y por consiguiente aparecen ser indeterminados, lo cual no es verdad; pues de las ecuaciones anteriores y de la relacion $\frac{k}{b}=\frac{k'}{b'}$, se tiene $y=\frac{k}{b}=\frac{k'}{b'}$, que no es indeterminado como aparece por las fórmulas; lo cual prueba, que aquellos valores toman la forma de $\frac{0}{0}$, á causa de haber algun factor comun en los dos términos, que se reduce á cero por la hipótesis en que nos hallamos; para ponerlo de manifiesto, sacaremos de la relacion anterior $\frac{k}{b}=\frac{k'}{b'}$, esta otra $\frac{k'}{k}=\frac{b'}{b}$, que igualaremos á m, y nos dará, $\frac{k'}{k}=\frac{b'}{b}=m$; de donde, $k'=km$, y $b'=bm$.

Si ahora hacemos $\frac{a'}{a}=n$, de donde $a'=an$, y sustituimos estos valores de a', b' y k' en los valores de x é y, hallarémos

$$x=\frac{kbm-bkm}{abm-ban}=\frac{0}{ab(m-n)}=\frac{0}{0};$$
$$y=\frac{akm-ank}{abm-ban}=\frac{ak(m-n)}{ab(m-n)}=\frac{k}{b};$$

luego el valor de x es de la forma indeterminada, como debia serlo, pues siendo cero su coeficiente en ambas ecuaciones, cualquier valor que á x se le dé hará nulo este término; y el valor de y es como debia ser $\frac{k}{b}=\frac{k'}{b'}$; y el venir ambos bajo la forma indeterminada, era por haber en los dos términos de la fraccion el factor a, que se reduce á cero por nuestra hipótesis.

* 318. Supongamos ahora que se tiene $a=0$, $b=0$ y $a'=0$; en este caso los valores de las incógnitas son $x=\frac{kb'}{0}$ é $y=\frac{0}{0}$; las ecuaciones propuestas se reducen á $\begin{matrix}0=k\\ b'y=k';\end{matrix}$ que, como se ve, son incompatibles, á causa de la ecuacion $0=k$; pero si, para evitar esta incompatibilidad, hacemos $k=0$, dichas ecuaciones se reducen á la única $b'y=k'$; de donde, $y=\frac{k'}{b'}$; cuyo valor debe estar comprendido en las fórmulas generales; en efecto, estas se reducen, por esta nueva hipótesis, á $x=\frac{0}{0}$ é $y=\frac{0}{0}$.

El primero es, como debe serlo, indeterminado; pues la ecuacion es independiente de x; el segundo aparece bajo la forma indeterminada, á causa de haber en sus dos términos un factor comun que se reduce por nuestra hipótesis á cero: en efecto, hagamos $\frac{a'}{a}=m$, de donde $a'=am$; sustituyamos este valor en el de y, y hallaremos

$$y=\frac{ak'-kam}{ab'-bam}=\frac{k'-km}{b'-bm}$$

cuyo valor se reduce á $\frac{k'}{b'}$, por la hipótesis de ser $k=0$, $b=0$, que es lo que debia ser.

* 319. Si por último hacemos $a=0$, $b=0$, $a'=0$, $b'=0$, los valores de las incógnitas se reducen á $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, y las ecuaciones propuestas se convertirán en $\begin{matrix}0=k\\ 0=k',\end{matrix}$ que son evidentemente incompatibles; luego los valores indeterminados hallados para las incógnitas de un problema pueden en algunos casos indicarnos una incompatibilidad en las ecuaciones. La incompatibilidad desaparece si además de las hipótesis hechas, agregamos las dos siguientes $k=0$

y $k'=0$, en cuyo caso los valores de las incógnitas son realmente indeterminados, pues no hay ecuaciones.

* 320. Cuando $k=0$ y $k'=0$, los valores de x é y son generalmente cero, como lo manifiestan las fórmulas; pero si además de ser $k=0$ y $k'=0$, suponemos $\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a}$, de donde $ab'-ba'=0$, los valores de x é y son indeterminados; y en esta hipótesis gozan de una propiedad muy notable, y es, que su relacion es constante: en efecto, las ecuaciones propuestas se reducen, por ser $k=0$ y $k'=0$, á

$$\begin{matrix} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{matrix} \quad \text{ó} \quad \begin{matrix} ax=-by \\ a'x=-b'y, \end{matrix}$$

de donde se deduce, $\frac{x}{y}=-\frac{b}{a}$ y $\frac{x}{y}=-\frac{b'}{a'}$; y como además se tiene, $\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a}$, ó lo que es lo mismo, $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$, la relacion de los valores de las incógnitas a é y, que satisfacen á las ecuaciones propuestas, es constante é igual á $-\frac{b}{a}=-\frac{b'}{a'}$.

* 321. Resumiendo todo cuanto llevamos dicho en esta discusion, tendremos que:

Cuando el denominador comun no es cero, los valores de las incógnitas son finitos, positivos ó negativos, los cuales podrán ser, en cuanto á su valor numérico, enteros, fraccionarios, y áun cero. Los valores positivos satisfacen siempre á la ecuacion y al problema, á ménos que deban ser estos números por su naturaleza enteros ó fraccionarios, y entónces deberán excluirse en el primer caso los fraccionarios, y en el segundo los enteros. Los valores negativos generalmente se interpretan cambiando el sentido en que deben tomarse estas cantidades, lo cual equivale á un cambio de condicion; y en general son susceptibles de todo cuanto hemos expuesto en la discusion de las ecuaciones de primer grado con una incógnita (256). El valor cero indica generalmente imposibilidad en el problema, aunque á veces tiene su interpretacion física.

Si el denominador comun se reduce á cero sin que lo sea ninguno de los coeficientes de las incógnitas, los valores de x é y son los dos infinitos, ó indeterminados. En el primer caso las ecuaciones son incompatibles; en el segundo indeterminadas.

* 322. Si alguno ó algunos de los coeficientes de las incógnitas

son cero, pueden presentarse varios casos; pero en cualquiera de ellos, si uno de los valores de x ó de y viene bajo la forma infinita, las ecuaciones son incompatibles cualquiera que sea el valor de la otra incógnita. Si los dos valores son de la forma $\frac{0}{0}$, indican el símbolo de la indeterminacion, excepto en el caso de ser ceros los coeficientes de una misma incógnita en ambas ecuaciones, sin que lo sean las cantidades conocidas k y k'.

* 323. Por último, cuando las cantidades k y k' son cero, los valores de las incógnitas son en general cero, y nada ofrecen de particular; pero si además se verifica la igualdad $\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a}$ ó $ab'-ba'=0$, los dos valores vienen bajo la forma indeterminada, y gozan de la notable propiedad de ser su relacion constante é igual á $-\frac{b}{a}=-\frac{b'}{a'}$.

Discusion general de los valores de las incógnitas de un sistema cualquiera de ecuaciones de primer grado.

* 324. La discusion de las fórmulas que dan los valores de las incógnitas de un sistema de tres ó más ecuaciones, da orígen á cálculos bastante pesados, y por otra parte no es de gran utilidad; por lo que no nos ocuparémos sino muy superficialmente de esta discusion, consignando tan sólo algunas observaciones generales que es necesario tener presente, y notar ciertos errores que podrian deducirse por analogía de lo que llevamos dicho de la discusion en el caso de no tener más que dos incógnitas.

* 325. En primer lugar hemos visto que los valores de x é y son los dos de la forma infinita ó indeterminada siempre que sea cero el denominador y no lo sea ninguno de los coeficientes; y podria creerse, que sucede lo mismo en el caso de ser tres ó más el número de ecuaciones, lo cual no ės verdad; pues cuando las incógnitas son tres, por ejemplo, y el denominador es cero, los valores pueden ser todos de la forma infinita ó de la forma indeterminada, ó unos de la primera y otros de la segunda forma.

En efecto, sean las tres ecuaciones

$$ax+by+cz=k$$
$$a'x+b'y+c'z=k'$$
$$a''x+b''y+c''z=k''.$$

El denominador comun de los valores de las incógnitas es

$$D=ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'';$$

el cual puede escribirse de las tres maneras siguientes:

$$D=a(b'c''-c'b'')+a'(cb''-bc'')+a''(bc'-cb'),$$
$$D=b(c'a''-a'c'')+b'(ac''-ca'')+b''(ca'-ac'),$$
$$D=c(a'b''-b'a'')+c'(ba''-ab'')+c''(ab'-ba').$$

Si suponemos $b'c''=c'b''$ y $cb''=bc''$, de donde $bc'=cb'$, dicho denominador D se reduce evidentemente á cero.

El numerador del valor de x, se obtiene poniendo en el denominador las cantidades conocidas k, k' y k'' en vez de a, a' y a''; y por consiguiente, dicho numerador se reduce tambien á cero, y nos da para x el valor de la forma $\frac{0}{0}$. Pero como el numerador de y, lo mismo que el de z, se forma poniendo en el denominador las cantidades conocidas k, k' y k'', en vez de los coeficientes b, b' y b'' para y, y en vez de c, c' y c'' para z, no hay razon para suponer que estos numeradores se reduzcan á cero, pues en ellos no entran las cantidades $b'c''-c'b''$, $cb''-bc''$ y $bc'-cb'$, que por nuestra hipótesis se reducen á cero. Así el valor de x puede venir bajo la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, y ser infinitos los valores de las otras incógnitas.

* 326. Sin embargo, siempre que hallemos para valor de una incógnita una expresion de la forma $\frac{A}{0}$, debemos concluir, cualesquiera que sean los valores de las demás, que las ecuaciones de donde provienen estos valores, son *incompatibles* ó imposibles de verificar en números finitos.

En efecto, si nosotros suponemos que el valor de x es de la forma $\frac{A}{0}$, podremos admitir que en el sistema propuesto se han eliminado todas las incógnitas á excepcion de la x, y dicho sistema se podrá reemplazar por otro en el cual existirá la ecuacion $Dx=A$, cuyo coeficiente D será cero, y por consiguiente la ecuacion absurda, pues no hay ningun número finito que la verifique; y siendo esta ecuacion imposible de verificar, el sistema de que forma parte tambien lo será; pero este sistema equivale al propuesto, luego el sistema propuesto es incompatible, segun queriamos probar.

* 327. Si hallamos para una incógnita el valor $\frac{0}{0}$, no podemos asegurar que el sistema es indeterminado; pues ya hemos visto que las otras incógnitas pueden tener un valor infinito, en cuyo caso seria, por lo dicho anteriormente, imposible de verificar en números enteros.

* 328. Si todos los valores de las incógnitas son de la forma $\frac{0}{0}$, en general indican que el sistema es *indeterminado*; pero tambien puede indicar que las ecuaciones son *incompatibles*.

En efecto, sean las ecuaciones

$$\begin{aligned} ax &+by +cz = k \\ max &+mby+mcz=pk \\ nax &+nby+ncz=p'k, \end{aligned}$$

las cuales son incompatibles siempre que m no sea igual á p, ni n á p'; y sin embargo, los valores de x, y y z, vienen bajo la forma indeterminada.

* 329. Para ver si el símbolo $\frac{0}{0}$, hallado como valor de una incógnita, es realmente el carácter de ser indeterminado el sistema de ecuaciones, ó indica incompatibilidad ó, por último, que hay algun factor comun que le hace tomar esta forma debiendo ser finito y determinado dicho valor, no hay más que introducir estas hipótesis en las ecuaciones dadas, y ver á qué se reducen: si del sistema que resulte se pone de manifiesto su naturaleza, no hay que seguir adelante; pero si da otro sistema en el cual no hay señales para concluir si es indeterminado, imposible ó determinado, entónces se le aplica el método directo de resolucion, y por los valores que encontremos deduciremos qué interpretacion se les debe dar á los hallados por las fórmulas. Así, si en la série de los cálculos hallamos una ecuacion absurda, concluiremos que las ecuaciones son incompatibles; si hallamos una ecuacion idéntica, se dirá que es indeterminado; y por último, si hallamos valores determinados para las incógnitas, diremos que el sistema tambien es determinado.

LECCION XXXV.

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita, su division en completas ó incompletas: resolucion de estas últimas.—Resolucion de la ecuacion completa de segundo grado ya tenga ó no la unidad por coeficiente el cuadrado de la incógnita.

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita, su division en completas é incompletas: resolucion de estas últimas.

330 Las *ecuaciones de segundo grado* son aquellas en que la incógnita aparece, despues de quitados los denominadores, elevada á la segunda potencia, y no viene debajo de ningun radical, ni elevado á exponente fraccionario, ni á mayor potencia que la segunda.

Así, las ecuaciones

$$3x^2-4=x^2+28,\ 4x^2-8=2x+16,\ \text{y}\ \tfrac{3}{4}\,x^2+\tfrac{2}{5}x+6=0,$$

son ecuaciones de segundo grado y pueden reducirse á

$$2x^2=32,\ \text{ó}\ x^2=16;\ 4x^2-2x=24,\ \text{ó}\ 2x^2-x-12=0;$$
$$\text{y}\ 15x^2+8x+120=0.$$

Las ecuaciones de segundo grado vienen á veces bajo una forma aparente de primer grado; pero se les puede dar la forma verdadera por medio de operaciones sencillas. Así, las ecuaciones

$$\frac{8}{3x+2}-2x=6-\tfrac{2}{3}x,\ \frac{4}{x+3}=\frac{6}{3x-2}+4,\ \text{y}\ x+2\sqrt{x}=120,$$

que á primera vista parecen ecuaciones de primer grado, se reducen á ecuaciones de segundo haciendo desaparecer los denominadores en las dos primeras, y el radical en la segunda. En efecto, estas ecuaciones se convierten en las siguientes:

$$6x^2+31x+6=0,\ 6x^2+11x+1=0,\ x^2-244x+14400=0;$$

cuyas tres ecuaciones, como se vé, son de segundo grado.

331. Las ecuaciones de segundo grado pueden ser *completas* ó *incompletas*: se dice que una ecuacion de segundo grado es *completa* cuando además del término que contiene á la incógnita elevada á la segunda potencia, hay otro que viene afectado de la primera potencia, y un tercero independiente de esta incógnita. Toda ecuacion completa de segundo grado puede reducirse á la forma

$$ax^2+bx+c=0,$$

en la cual el primer término es siempre positivo, y los coeficientes a, b y c son cantidades enteras; para lo cual no hay más que quitar los denominadores si los hay, y cambiar los signos á toda la ecuacion si el primer término fuera negativo, lo que, como ya sabemos, no altera en nada los valores de las incógnitas; los coeficientes b y c pueden ser por lo tanto positivos ó negativos.

Si la ecuacion del segundo grado carece del segundo ó tercer término, ó de los dos, se dice que es *incompleta*; así, la forma de las ecuacienes incompletas de segundo grado es una de estas tres: $ax^2+bx=0$, $ax^2+c=0$, ó $ax^2=0$.

332 Aunque la resolucion de las ecuaciones incompletas está comprendida en la de las ecuaciones completas, vamos, sin embargo, á resolverlas directamente.

Sea, en primer lugar, la ecuacion más sencilla $ax^2=0$, la cual no puede ser satisfecha sino para $x=0$, pues cualquier otro valor puesto en vez de x no podria reducir el primer miembro á cero.

Sea, en segundo lugar, la ecuacion $ax^2+c=0$ ó $ax^2=-c$, la cual dividida por a y llamando q al cociente de dividir c por a, se convierte en $x^2+\frac{c}{a}=0$ ó $x^2+q=0$ y $x^2=-\frac{c}{a}$ ó $x^2=-q$. Donde vemos que x expresa la raíz cuadrada de $-\frac{c}{a}=-q$, y si representamos esta raiz por α, se tendrá que tanto $+\alpha$, como $-\alpha$, elevada al cuadrado nos darán la cantidad $-\frac{c}{a}=-q$; luego los valores de x serán α y $-\alpha$, ó lo que es lo mismo $\sqrt{-\frac{c}{a}}=\sqrt{-q}$, y $-\sqrt{-\frac{c}{a}}=-\sqrt{-q}$, y por consiguiente los valores de x son $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}=\pm\sqrt{-q}$.

333. La ecuacion $ax^2+c=0$, que se reduce, como ya hemos visto, á $x^2=A$, nos expresa el problema de extraer la raíz cuadrada de un número A; este problema, que no tenia más que una solucion en Aritmética, admite dos, como ya hemos visto al tratar de los valores de los radicales, y no puede tener más que estos dos. En efecto,

siendo a la raíz cuadrada aritmética de A, tendremos $a^2=A$ y por consiguiente $x^2=a^2$; pasando al primer miembro el término a^2, y descomponiendo lo que resulta en el producto de la suma por su diferencia, se tendrá $x^2-a^2=(x+a)(x-a)=0$.

Para que este producto sea nulo es necesario que lo sea uno de sus factores, de modo que igualando á cero cada uno de estos, hallarémos los valores de x que anulan á este producto, y por consiguiente que satisfacen á la ecuacion $x^2=A$; luego los únicos valores de x serán $x=-a$ y $x=a$ ó $x=-\sqrt{A}$ y $x=\sqrt{A}$.

Sea, por último, la ecuacion $ax^2+bx=0$, la cual dividida por a y llamando p al cociente de dividir b por a, se convierte en

$$x^2+\frac{b}{a}x=0 \text{ ó } x^2+px=0:$$

sacando x factor comun, se halla $x\left(x+\frac{b}{a}\right)=0$ ó $x(x+p)=0$, cuyo producto no puede hacerse cero sino por los valores de $x=0$ y $x=-\frac{b}{a}=-p$.

Luego los valores de la incógnita de la ecuacion incompleta de segundo grado $ax^2+bx=0$, son 0, y $-\frac{b}{a}=-p$.

334. Los valores de la incógnita de una ecuacion de segundo grado, lo mismo que los de otra ecuacion cualquiera, se llaman *raíces* de esta ecuacion; así diremos que las raíces de una ecuacion son los números reales ó imaginarios, conmensurables ó inconmensurables, que puestos en vez de la incógnita satisfacen á dicha ecuacion.

Resolucion de la ecuacion completa de segundo grado ya tenga ó nó la unidad por coeficiente el cuadrado de la incógnita.

335. Sea la ecuacion general de segundo grado completa

$$ax^2+bx+c=0 \qquad [1],$$

dividiendo por a y representando por p y q los cocientes de dividir b y c por a, tendremos

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \text{ ó } x^2+px+q=0 \qquad [2],$$

siendo como ya hemos dicho $p=\frac{b}{a}$ y $q=\frac{c}{a}$.

Es evidente que si nosotros hallamos las raíces de la ecuacion [2], tendremos las de la ecuacion [1], sustituyendo por $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$ las cantidades p y q; por consiguiente tratemos de resolver esta ecuacion [2].

Muchos métodos se pueden emplear de los cuales explicaremos los tres más principales.

* 336. PRIMER MÉTODO. Este método está fundado en las propiedades de las raíces, que son las siguientes:

1.ª *En toda ecuacion de segundo grado reducida á la forma ordinaria* $x^2+px+q=0$, *el coeficiente* p *del segundo término es igual á la suma de las raíces con signo mudado.*

2.ª *En toda ecuacion de segundo grado reducida á la forma* $x^2+px+q=0$, *la cantidad constante* q *es igual al producto de las raíces.*

Sea la ecuacion general de segundo grado

$$x^2+px+q=0 \qquad [3],$$

y supongamos que α es un número que puesto en vez de x satisface á esta ecuacion, es decir, que se tiene

$$\alpha^2+p\alpha+q=0, \text{ de donde } q=-\alpha^2-p\alpha \qquad [4];$$

siendo α raíz de la ecuacion [1], su primer miembro será divisible por el factor $x-\alpha$ (91), de modo que ejecutando la division, se tendrá

$$\begin{array}{l|l} x^2+p\big| x+q & x-\alpha \\ \quad\;+\alpha\big| & \hline \hline \alpha^2+p\alpha+q=0 & x+p+\alpha \end{array}$$

pero el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente; luego se tendrá

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x+p+\alpha)=0.$$

Esta igualdad prueba que, si α es una raíz de la ecuacion [1], $-p-\alpha=-(p+\alpha)$ es otra raíz; pues el producto $(x-\alpha)(x+p+\alpha)$ no puede ser cero sino haciendo $x=\alpha$ ó $x=-p-\alpha$.

Si representamos estas raíces por x' y x'', tendremos $x'=\alpha$ y $x''=-p-\alpha$, cuyas igualdades sumadas y multiplicadas sucesiva y ordenadamente, nos dan

$$x'+x''=\alpha-p-\alpha=-p \text{ ó } p=-(x'+x'') \qquad [5]$$

y $$x'x''=-p-x^2=q \text{ ó } q=x'x'' \qquad [6]$$
que justifican las propiedades enunciadas; que como vemos, son generales y se demuestran con independencia de los valores numéricos que puedan tener las raíces.

Esto supuesto, si de las relaciones [5] y [6] pudiéramos deducir los valores de x' y x'' en funcion de los coeficientes p y q, el problema quedaria resuelto: veamos pues, cómo hallamos estos valores.

Desde luégo se observa que, si aplicamos á estas ecuaciones cualquiera de los métodos de eliminacion explicados anteriormente, hallarémos una ecuacion final que sólo se diferenciará de la propuesta en que en vez de la incógnita x, viene la incógnita que no se eliminó entre estas relaciones: en efecto, sacando el valor de x'' en la relacion [5] y sustituyéndolo en la [6], hallarémos $x'(-p-x')=q$ ó $x'^2+px'+q=0$; es decir, la ecuacion [1] en la cual hemos puesto x' en vez de x; luego no podemos emplear ninguno de los métodos de eliminacion explicados hasta ahora.

Si observamos que la primera de estas relaciones nos da conocida la suma de las raíces x' y x'', que es igual á $-p$; es evidente que, si llegamos á conocer la diferencia de estas mismas raíces, el problema estará resuelto; pues conociendo la suma y la diferencia de dos cantidades, podemos conocer ya estas cantidades (245).

Para conocer esta diferencia, elevarémos al cuadrado la ecuacion $x'+x''=-p$, y de la ecuacion resultante restarémos el cuádruplo de la segunda, que es $4x'x''=4q$, y tendremos

$$\left.\begin{array}{r} x'^2+x''^2+2x'x''=p^2 \\ 4x'x''=4q \end{array}\right\} \text{ de donde } x'^2+x''^2-2x'x''=p^2-4q.$$

El primer miembro es el cuadrado de $x'-x''$; luego si extraemos la raíz cuadrada de ambos miembros y suponemos $x'>x''$; en cuyo caso el valor del radical será positivo, tendremos

$$x'-x''=\sqrt{p^2-4q}.$$

Conociendo ya la suma y la diferencia de las dos cantidades x' é x'', tendremos conocida cada una de ellas; así se hallará (245), siendo como hemos supuesto $x'>x''$,

$$x'=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

ó reuniendo los dos valores en uno, y representándolos por la incógnita x, se tendrá la fórmula que dá los valores de la incógnita de la ecuacion de segundo grado,

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

* 337. SEGUNDO MÉTODO. Este método consiste en formar una ecuacion que tenga la misma forma que la propuesta, y en la cual los valores de la incógnita sean una funcion conocida de las indeterminadas α y β, identificar en seguida ambas ecuaciones, y de las relaciones que resulten sacar los valores de las indeterminadas, los cuales sustituidos en el valor de x, nos darán las raíces pedidas.

Sea la ecuacion propuesta $x^2+px+q=0$.

Hagamos $x=\alpha+\beta$; de donde pasando α al primer miembro y elevando al cuadrado, se tendrá

$$(x-\alpha)^2=\beta^2 \text{ ó } x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0.$$

Esta ecuacion es de la misma forma que la propuesta, de modo que si las identificamos, el valor de $x=\alpha+\beta$ será el mismo en ambas ecuaciones; más para que dichas ecuaciones sean idénticas, es necesario que se tenga $-2\alpha=p$ y $\alpha^2-\beta^2=q$; de la primera de estas relaciones se saca el valor de α, que es $\alpha=-\frac{p}{2}$, y de la segunda se obtendrá, despues de sustituido el valor de α,

$$\beta=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

sustituyendo estos valores en el que tenemos de x, hallarémos para valores de la incógnita, $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, que son los mismos que hemos hallado por el método anterior.

338. TERCER MÉTODO. Este método, que es el que generalmente se explica en los textos de matemáticas, consiste en hacer que el primer miembro de la ecuacion $x^2+px=-q$ sea el cuadrado de un binómio cuya primera parte es x; para lo cual no hay más que agregar á los dos miembros una misma cantidad, lo que no altera en nada el valor de la incógnita (231), despues se extrae la raíz cuadrada de dichos dos miembros, y se despeja la x de la ecuacion de primer grado que resulta.

Sea, como siempre, la ecuacion de segundo grado

$$x^2+px+q=0:$$

pasando el término q al segundo miembro, se tendrá

$$x^2+px=-q;$$

si consideramos ahora el primer miembro como los dos primeros términos del cuadrado de un binómio cuya primera parte es x, la segunda será $\frac{px}{2x}=\frac{p}{2}$, puesto que el segundo término del cuadrado de un binómio es igual al duplo de la primera parte por la segunda; luego dividiendo el segundo término px por el duplo $2x$ de la primera, hallaremos la segunda parte del binómio $\frac{p}{2}$; de modo que, agregando á los dos miembros el cuadrado $\frac{p^2}{4}$ de esta segunda parte, tendremos

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q \text{ ó } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Si ahora extraemos de ambos miembros la raíz cuadrada, se hallará

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \qquad (*)$$

de donde se deduce fácilmente $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, que es la misma fórmula hallada por los métodos anteriores, y que traducida al lenguaje vulgar, dará la regla siguiente:

(*) No ponemos en el primer miembro $x+\frac{p}{2}$ el doble signo $\pm$, por inútil; en efecto el signo $-$ antepuesto á dicho primer miembro, nos daria

$$-\left(x+\frac{p}{2}\right)=-x-\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

y cambiando todos los signos, seria

$$x+\frac{p}{2}=\mp\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

que es la misma fórmula que hay en el texto, aunque invertidos los valores.

339. *Las raíces de una ecuacion de segundo grado, reducida á la forma* $x^2+px+q=0$, *son iguales á la mitad del coeficiente del segundo término tomado con signo contrario, más ó ménos la raíz cuadrada del cuadrado de esta mitad disminuido de la cantidad constante.*

340. Una vez hallados los valores de la incógnita de la ecuacion de segundo grado cuyo primer coeficiente es la unidad, podemos obtener los correspondientes á la ecuacion cuyo primer coeficiente es a, ó sean las raíces de la ecuacion $ax^2+bx+c=0$, sustituyendo en la fórmula hallada las cantidades p y q por sus valores $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$.

Así, las raíces de la ecuacion

$$ax^2+bx+c=0 \qquad [7],$$

serán

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}},$$

ó reduciendo los quebrados que hay debajo del radical á un comun denominador, y extrayendo la raíz cuadrada de éste, se tendrá

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad [8],$$

cuya fórmula, traducida al lenguaje vulgar, nos da la siguiente regla.

341. *Las raíces de una ecuacion de segundo grado, reducida á la forma* $ax^2+bx+c=0$, *son iguales al coeficiente del segundo término mudado el signo, más ó ménos la raíz cuadrada del cuadrado de dicho coeficiente, ménos el cuádruplo del primer coeficiente por la cantidad conocida, partido todo por el doble del primer coeficiente.*

342. Esta fórmula se simplifica cuando el coeficiente b del segundo término es un número par igual á $2b'$; en efecto, sustituyendo este valor en la ecuacion y en el valor de x, se hallará

$$ax^2+2b'x+c=0 \text{ y } x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a},$$

y sacando el factor comun 4 que hay debajo del radical, como ya sabemos (*Arit.* 300), se tendrá, despues de dividir por 2 ambos términos de la fraccion,

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a},$$

cuya fórmula es fácil traducir al lenguaje ordinario.

* 343. Por un procedimiento análogo al empleado en el tercer método, podriamos hallar directamente la fórmula [8] sin qüitar el coeficiente a; en efecto, si pasamos en la ecuacion [7] el término c al segundo miembro, se tendrá $ax^2+bx=-c$. Si ahora suponemos que el primer miembro es la suma de los dos primeros términos del cuadrado de un binómio cuya primera parte es $x\sqrt{a}$, y la segunda $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, (la cual se obtiene dividiendo el segundo término bx, que suponemos ser el duplo de la primera parte por la segunda, por el duplo de la primera $2x\sqrt{a}$,) hallaremos, agregando á los dos miembros el cuadrado de esta segunda parte $\frac{b^2}{4a}$, la ecuacion

$$ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=\frac{b^2}{4a}-c \text{ ó } \left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a},$$

y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, será

$$x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}} \quad (*);$$

pasando al segundo miembro el término $\frac{b}{2\sqrt{a}}$ y dividiendo por $\sqrt{a}$, será $x=\frac{-b}{2\sqrt{a}\sqrt{a}}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ ó lo que es lo mismo

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

que es la misma fórmula hallada anteriormente.

* 344. Cuando el coeficiente a de la ecuacion de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ es una cantidad muy pequeña, ó se supone que disminuye y se va aproximando á cero, la ecuacion tiende á reducirse á la de primer grado $bx+c=0$, cuya raíz es $-\frac{c}{b}$; por consiguiente, una de las raíces de la ecuacion propuesta tiende á valer $-\frac{c}{b}$ cuan-

(*) Por una razon análoga á la expuesta en el número (340), no se pone en el primer miembro el doble signo $\pm$.

do a es muy pequeña; la otra raíz tenderá á valer la diferencia entre $-\frac{b}{a}$ y $-\frac{c}{b}$; y como $\frac{b}{a}$, tiende hácia infinito cuando a decrece, en el límite, es decir, cuando $a=0$, las raíces serán $-\infty$ y $-\frac{c}{b}$.

Esta consideracion nos da un medio para hallar las raíces aproximadas de la ecuacion $ax^2+bx+c=0$ cuando a es muy pequeña. En efecto, de esta ecuacion se saca

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b} \qquad [9],$$

de modo que despreciando el término $\frac{ax^2}{b}$, por ser muy pequeño, puesto que a lo es tambien, se hallará un primer valor aproximado de x, que será $x=-\frac{c}{b}$, y como el término que se desprecia contiene la primera potencia de a, se dice que el error que se comete es de *primer órden*.

Llamemos á este error E_1 y el verdadero valor de la incógnita x será

$$x=-\frac{c}{b}+E_1,$$

el cual sustituido en la expresion [9], nos dará

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b}+E_1\right)^2=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\left(\frac{c^2}{b^2}-\frac{2cE_1}{b}+E_1^2\right)$$

ó bien
$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}+\frac{2acE_1}{b^2}+\frac{aE_1^2}{b}.$$

Los dos últimos términos son de *segundo* y *tercer órden* con relacion á a, de modo que despreciándolos, obtendremos el valor de x con un error de *segundo órden*; y se tendrá

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3},$$

cuyo error representaremos por E_2, y tendremos

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}+E_2.$$

Sustituyendo este valor en la expresion [9] y despreciando los últimos términos, que serán de *tercero*, *cuarto y quinto órden* con relacion á a, se hallará el valor aproximado de x

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5},$$

y así sucesivamente, hasta hallar el valor de x con un error tan pequeño como se quiera.

Restando el valor hallado del segundo coeficiente mudado el signo, hallarémos el otro valor de la incógnita.

LECCION XXXVI.

Discusion de las raíces de la ecuacion $ax^2+bx+c=0$.—Casos particulares.

Discusion de las raíces de la ecuacion $ax^2+bx+c=0$.

345. Hemos dicho que toda ecuacion de segundo grado con una incógnita se puede reducir á la forma

$$ax^2+bx+c=0 \quad [1],$$

en la cual a es una cantidad entera y positiva, b y c cantidades enteras tambien, pero que pueden ser positivas ó negativas; en el caso de que alguna de estas cantidades sea cero, la ecuacion de segundo grado es incompleta, á no ser que a sea la que se reduce á cero, en cuyo caso la ecuacion se convierte en una de primer grado. Ya nos ocuparemos en esta discusion de todos estos casos, y veremos que á todos corresponde la fórmula general hallada para valores de la incógnita

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad [2].$$

346. Antes de entrar de lleno en la discusion de las raíces de la ecuacion de segundo grado [1], probaremos que *dicha ecuacion no puede tener más que dos raíces*. En efecto, hemos visto que si x' es

una raíz de la ecuacion [1], el primer miembro de esta ecuacion, que se puede poner bajo la forma

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \qquad [3],$$

es divisible por el binómio $x-x'$; y como a es independiente de x, tendrá que dividir á la cantidad que hay dentro del paréntesis, y nos dará un cociente de primer grado de la forma $x-x''$; por consiguiente, se podrá poner bajo la forma $a(x-x')(x-x'')$: de modo, que tendremos

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')=0 \qquad [4],$$

siendo x' y x'' raíces de la ecuacion, puesto que haciendo $x=x'$ ó $x=x''$, queda satisfecha; y por lo tanto, admitiendo que tiene esta ecuacion una raíz x', se deduce que tiene tambien otra x'', y que su primer miembro se puede descomponer en el producto del factor a, por el de los dos binómios que resultan de restar de x cada una de estas dos raíces.

Esto supuesto, vamos á demostrar que no puede tener otra raíz x''', diferente de x' y x''. En efecto, si x''' fuese raíz de la ecuacion [1], su primer miembro, reducido á la forma de la ecuacion [4], seria divisible por el binómio $x-x'''$, y esto no puede suceder á no ser que se tenga $x'''=x'$ ó $x'''=x''$, porque la cantidad $x-x'''$, siendo prima con cada uno de los factores del producto $a(x-x')(x-x'')=ax^2+bx+c$, tiene que serlo tambien con este producto; luego la ecuacion [1] no puede tener más que dos raíces.

347. Probado ya que la ecuacion de segundo grado [1] no puede tener más que dos raíces, veamos ahora de qué naturaleza podrán ser.

Todo radical de segundo grado puede dar orígen á una cantidad *real* ó *imaginaria*, segun que la cantidad subradical sea positiva ó negativa; y en el caso de ser real, podrá ser *conmensurable* ó *inconmensurable*, segun que dicha cantidad subradical sea ó nó un cuadrado perfecto; y como las raíces de la ecuacion de segundo grado [1] depende de la fórmula [2], en donde hay el radical $\sqrt{b^2-4ac}$, es claro que estas raíces podrán ser en primer lugar *reales* ó *imaginarias*, segun que la cantidad b^2-4ac sea positiva ó negativa, y además podrán ser, siendo reales, conmensurables ó inconmensurables, segun que dicha cantidad b^2-4ac sea ó nó un cuadrado perfecto.

348. Si en la ecuacion [1] y en la fórmula [2] ponemos de manifiesto los signos que pueden tener las cantidades b y c, obtendremos las cuatro combinaciones siguientes:

$$1.^{a} \qquad ax^2+bx+c=0, \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$2.^{a} \qquad ax^2-bx+c=0, \qquad x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$3.^{a} \qquad ax^2+bx-c=0, \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a};$$

$$4.^{a} \qquad ax^2-bx-c=0, \qquad x=\frac{b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}.$$

A la simple inspeccion de este cuadro se vé, que en la 3.ª y 4.ª ecuacion, correspondientes al caso de ser c negativo, ó lo que es lo mismo, $c<0$, se cumple la condicion de ser la cantidad subradical positiva, y por consiguiente serán reales sus raíces; en cuanto á la 1.ª y 2.ª, que corresponden al caso de ser $c>0$, podrán ser reales ó imaginarias, segun se tenga $b^2-4ac \geqq 0$, ó $b^2-4ac<0$.

Por lo tanto, haremos sucesivamente las tres hipótesis

$$b^2-4ac>0,\ b^2-4ac=0 \text{ y } b^2-4ac<0,$$

y veremos la naturaleza de las raíces en cada uno de estos casos.

349. Sea en primer lugar $b^2-4ac>0$.

En esta hipótesis la ecuacion podrá ser una de las cuatro anteriores, y se verificará que las raíces serán *reales* y *desiguales*, puesto que la una es siempre la suma de dos cantidades, y la otra la diferencia de estas mismas cantidades; además, podrán ser *conmensurables* ó *inconmensurables*, segun que b^2-4ac sea ó nó un cuadrado perfecto: en el primer caso hallaremos los valores exactos de las raíces; en el segundo podremos determinarlas con un grado de aproximacion tan grande como se quiera.

Podrán ser además las raíces, en el caso que nos ocupa, de un mismo signo ó de signos contrarios: serán de un mismo signo en los dos primeros casos, es decir, cuando $c>0$; y de signos contrarios en los dos últimos, correspondientes, á $c<0$. En efecto, siendo $c>0$, la cantidad subradical b^2-4ac es menor que b^2, y por consiguiente el valor del radical es menor que b, y el signo de las dos raíces será el que lleve en la fórmula el coeficiente b, que, como ya se sabe, es contrario al que tiene en la ecuacion.

Si se tiene $c<0$, la cantidad subradical es entónces b^2+4ac, cantidad evidentemente mayor que b^2, y por consiguiente el valor del radical es en este caso mayor que b, y por lo tanto dichas raíces, tendrán los signos que lleve la cantidad mayor $\sqrt{b^2+4ac}$; es decir, la una será positiva y la otra negativa, siendo la mayor en valor absoluto la positiva cuando $b<0$, y la negativa cuando $b>0$.

350. De lo dicho anteriormente se deduce, que las raíces tendrán un mismo signo ó signos contrarios, segun que c sea *positivo* ó *negativo*; es decir, $c>0$ ó <0.

En el caso de tener las dos raíces un mismo signo, serán las dos positivas ó negativas, segun que b sea *negativo* ó *positivo*, ó lo que es lo mismo, segun que se tenga $b<0$ ó >0.

En el caso de ser de signos contrarios, que, como ya hemos dicho, sucede cuando $c<0$, será la mayor en valor numérico la positiva, cuando b sea negativo, es decir, $b<0$; y lo será la negativa, cuando $b>0$.

351. Lo que acabamos de exponer está conforme con lo que de las propiedades de las raíces hemos dicho ya (336).

En efecto, sabemos que el coeficiente del segundo término de la ecuacion [1] reducida á la forma $x^2+px+q=0$, es igual á la suma de las raíces con signo mudado, y la cantidad constante q, es igual al producto de dichas raíces; por consiguiente, siendo positivo el coeficiente a en la ecuacion [1], los signos que tendrán las cantidades p y q, al reducir esta ecuacion á la forma $x^2+px+q=0$, serán los mismos que tengan b y c. Ahora bien, si $c>0$, se tendrá $q>0$, y las dos raíces deberán ser de un mismo signo, puesto que su producto es positivo; si $c<0$, será $q<0$ tambien, y las raíces deberán ser de signos contrarios, conforme hemos visto. Cuando las raíces son de un mismo signo, la suma tendrá el mismo que lleven estas raíces; y como esta suma es de signo contrario al que tiene el coeficiente p, y p tiene el mismo signo que b, se sigue que cuando $b<0$, las dos raíces serán positivas; y cuando $b>0$, ambas serán negativas; es decir, siempre de signo contrario al que tenga b.

Cuando las raíces de la ecuacion [1] son de signo contrario, la suma llevará el signo que tenga la mayor en valor numérico, que será la que corresponda á la suma de la cantidad b con el radical

$\sqrt{b^2+4ac}$; pero esta suma será positiva cuando $b<0$, y negativa cuando $b>0$; luego la suma de las raíces será positiva cuando el coeficiente b sea negativo, y será negativa cuando b sea positivo; por consiguiente, el coeficiente b y la suma de las raíces tendrán siempre signos contrarios, como debia suceder.

352. Supongamos en segundo lugar $b^2-4ac=0$.

Para que este caso se verifique, es necesario que se tenga $c>0$, y por consiguiente, la ecuacion no podrá ser más que la 1.ª ó 2.ª, es decir,

$$ax^2+bx+c=0 \quad ó \quad ax^2-bx+c=0,$$

cuyas fórmulas respectivas son

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ó \quad x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

las cuales se reducen, por esta hipótesis, á

$$x=\frac{-b\pm0}{2a} \quad y \quad x=\frac{b\pm0}{2a};$$

fórmulas que nos dan, separando sus valores

$$x=-\frac{b}{2a},\ x=-\frac{b}{2a}; \quad y \quad x=\frac{b}{2a},\ x=\frac{b}{2a};$$

donde vemos que las raíces son iguales, tanto en una como en otra ecuacion, é iguales al cociente de dividir el coeficiente del segundo término con signo mudado por el doble del coeficiente del primero.

Para justificar que así debe suceder, no hay más que introducir en estas ecuaciones la condicion $b^2-4ac=0$, para lo cual no hay más que sacar el valor de una de las cantidades a, b ó c, y sustituirle en la ecuacion; así, sacando el valor c y sustituyéndolo en las ecuaciones 1.ª y 2.ª, tendremos:

$$ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=0 \quad y \quad ax^2-bx+\frac{b^2}{4a}=0,$$

las cuales se convierten en

$$\left(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=0 \quad y \quad \left(\sqrt{a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=0,$$

ó lo que es lo mismo

$$\left(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)=0$$

y
$$\left(\sqrt{a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)=0,$$

cuyos factores igualados á cero, dan para cada ecuacion dos raíces iguales, como ya se ha dicho, al cociente de dividir el coeficiente del segundo término mudado el signo, por el doble del primero.

353. De lo dicho anteriormente se deduce que, si se tiene un trinómio ax^2+bx+c en el cual se verifica que el cuadrado del coeficiente del segundo término es igual al cuádruplo de los coeficientes extremos, ó lo que es lo mismo que se tenga $b^2-4ac=0$, dicho trinómio será un cuadrado perfecto.

Recíprocamente, si un trinómio de la forma ax^2+bx+c es un cuadrado perfecto, se deberá tener $b^2-4ac=0$. En efecto, igualando á cero dicho trinómio, hallaremos para valores de x, dos que serán iguales á $\pm\frac{b}{2a}$, segun que b sea negativo ó positivo. Porque si ax^2+bx+c es un cuadrado perfecto, el segundo término deberá ser el duplo del producto de las raíces cuadradas de los extremos, de modo que se tendrá

$$bx=2\sqrt{a}\,x\times\sqrt{c}=2x\sqrt{ac},$$

de donde dividiendo por x y elevando al cuadrado, será $b^2=4ac$ ó $b^2-4ac=0$, segun queríamos demostrar.

354. Si se tiene por último $b^2-4ac<0$, la ecuacion será una de las dos primeras correspondientes al caso de ser $c>0$, pues si c fuese negativo, la cantidad subradical seria b^2+4ac, la cual no puede ser menor que cero.

Siendo $b^2-4ac<0$, podremos igualarle á una cantidad negativa $-\delta^2$; de modo que los valores de las incógnitas serán imaginarios de la forma

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{-\delta^2}}{2a}=\frac{-b\pm\delta\sqrt{-1}}{2a}$$

ó
$$x=\frac{b\pm\sqrt{-\delta^2}}{2a}=\frac{b\pm\delta\sqrt{-1}}{2a},$$

segun que b sea un número positivo ó negativo.

Al hallar estas expresiones imaginarias para valores de x, debemos concluir diciendo que la ecuacion de donde estos valores provienen es absurda, y el problema á que pertenecen es imposible de ser verificado.

Esta segunda parte es evidente; pues si los valores de la incógnita de un problema son imaginarios ó provienen de una ecuacion absurda, es claro que no existen tales valores con las condiciones que en el enunciado se piden.

En cuanto á que la ecuacion es absurda, fácil es probar. En efecto, siendo $b^2-4ac=-\delta^2$, se tiene $b^2+\delta^2=4ac$, de donde $c=\frac{b^2+\delta^2}{4a}$, cuyo valor sustituido en la ecuacion [1], la convierte en

$$ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}+\frac{\delta^2}{4a}=0,$$

y sacando a factor comun, se tendrá

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{\delta^2}{4a^2}\right)=0,$$

cuya ecuacion se reduce á

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{\delta^2}{4a^2}\right\}=0,$$

la cual se ve que es evidentemente absurda, pues la cantidad que hay dentro de los corchetes, siendo la suma de dos cantidades positivas, jamás podrá reducirse á cero, cualquiera que sea el valor que se le dé á x; luego es absurda, puesto que no hay valor alguno para la incógnita que pueda verificarla.

Observacion. Cuando las raíces de una ecuacion de segundo grado son imaginarias, cualquier número que se ponga en vez de x, dará un resultado del mismo signo que tenga el coeficiente del primer término, segun se desprende de la última ecuacion.

Casos particulares.

355. Si suponemos que se tiene $c=0$, la ecuacion [1] se reduce á la ecuacion incompleta $ax^2+bx=0$, cuyas raíces sabemos que son 0, y $-\frac{b}{a}$, ó 0 y $\frac{b}{a}$ segun que b sea mayor ó menor que cero.

Pero haciendo $c=0$ en la fórmula general [2], se halla

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2}}{2a}=\frac{-b\pm b}{2a},$$

de donde $x=\frac{0}{2a}=0$ y $x=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$.

Cuando b es menor que cero, se tiene, poniendo el signo de manifiesto, como sucede en la primera de las cuatro combinaciones anteriores (348), $x=\frac{b\pm b}{2a}$ de donde $x=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}$ y $x=\frac{0}{2a}=0$, que son los mismos valores hallados para la incógnita de la ecuacion incompleta $ax^2+bx=0$.

Sea, en segundo lugar, $b=0$.

La ecuacion [1] se convierte en una de estas dos $ax^2+c=0$ ó $ax^2-c=0$, de las cuales se deducen $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ó $x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Si hacemos la hipótesis $b=0$ en la fórmula general [2], hallarémos

$$x=\frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a}=\pm\sqrt{-\frac{4ac}{4a^2}}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

cuya fórmula corresponde al caso de ser $c>0$.

Si suponemos $c<0$, se hallará para x el valor

$$x=\frac{\pm\sqrt{4ac}}{2a}=\pm\sqrt{\frac{4ac}{4a^2}}=\pm\sqrt{\frac{c}{a}},$$

conforme hemos hallado anteriormente.

Luego de la fórmula general [2] podemos sacar las correspondientes á las ecuaciones incompletas de segundo grado, ya sean de la forma $ax^2\pm bx=0$, ya de la forma $ax^2\pm c=0$.

Supongamos ahora $a=0$.

Por esta hipótesis, la ecuacion de segundo grado [1], se convierte en la de primero $bx+c=0$; de la cual se saca $x=-\frac{c}{b}$.

Haciendo tambien $a=0$, en la fórmula general, se halla

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2}}{0}=\frac{-b\pm b}{0};$$

de donde $x=\frac{0}{0}$ y $x=\frac{-2b}{0}=-\infty$;

lo cual no está conforme con el resultado verdadero; puesto que el valor de x no es ni indeterminado ni infinito, sino igual á $-\frac{c}{b}$.

Pero si consideramos por separado cada una de las fórmulas que dan orígen á estos resultados, tendremos para la primera

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Si multiplicamos los dos términos de esta fraccion por

$$-b-\sqrt{b^2-4ac},$$

se hallará $$x=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})};$$

y como el numerador es el producto de la suma de dos cantidades por su diferencia, se tendrá

$$x=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Si ahora hacemos $a=0$, el valor anterior de x se convertirá en

$$x=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2}}=\frac{2c}{-b-b}=\frac{2c}{-2b}=-\frac{c}{b},$$

que es el valor hallado anteriormente.

En cuanto al otro valor $-\infty$, deberemos observar que la fórmula que lo ha producido es $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; la cual se reduce, multiplicando los dos términos de la fraccion por $-b+\sqrt{b^2-4ac}$, y simplificando despues, á $x=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$; expresion que se va aproximando á valer $\frac{2c}{0}$, á medida que a se va aproximando á valer cero: por consiguiente, este valor infinito de x, no se puede considerar sino como el límite hácia el cual se va aproximando la segunda raíz de la ecuacion [1], á medida que el coeficiente a va aproximándose á cero.

356. Hagamos ahora cero á cada dos coeficientes, y sea en primer lugar $b=0$, y $c=0$.

Segun estas hipótesis, la ecuacion [1] se convierte en $ax^2=0$, de donde $x=0$; pero de la fórmula general [2] se saca, haciendo las mismas hipótesis, $x=\dfrac{0\pm0}{2a}=0$, resultado conforme al hallado directamente.

Sea en segundo lugar $a=0$, y $c=0$.

La ecuacion se reduce á $bx=0$, de donde $x=0$.

Haciendo estas hipótesis en la fórmula general, se halla para primera raíz, $\frac{0}{0}$, y para la segunda infinito; pero multiplicando los dos términos de la fraccion que nos da la primera raíz, por $-b-\sqrt{b^2-4ac}$, vemos que ésta se reduce á cero, como debia suceder; y si aparecia bajo la forma indeterminada, era por hallarse el factor comun á los dos términos $2a$, el cual se reduce á cero.

La segunda, que por la sola hipótesis de $c=0$, se reduce á $-\dfrac{b}{a}$, se debe considerar como el límite hácia el cual tiende esta fraccion á medida que a se aproxima á cero.

Sea en tercer lugar $a=0$, y $b=0$.

La ecuacion se convierte en $c=0$, que es evidentemente absurda. La fórmula general da en este caso valores indeterminados; pero haciendo las trasformaciones como anteriormente para poner de manifiesto los factores comunes que pueda haber en los dos términos, se halla que estos valores son de la forma infinita; lo cual debia suceder, pues no hay ningun valor de x que pueda verificar á la ecuacion $c=0$.

Sea, por último, $a=0$, $b=0$, y $c=0$. La ecuacion se reduce á $0=0$, y los valores de las raíces, como debia suceder, son de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

RESÚMEN.

$$\begin{array}{l} b^2-4ac>0, \\ \text{raíces reales} \\ \text{desiguales.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} b^2-4ac=\delta^2, \\ \text{conmensurables.} \\[2ex] b^2-4ac \neq \delta^2, \\ \text{inconmensurables.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} c>0, \\ \text{de un mismo signo.} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} b<0, \\ \text{positivas.} \\ b>0, \\ \text{negativas.} \end{array} \right. \\[4ex] \begin{array}{c} c<0, \\ \text{de signo contrario.} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} b<0, \\ \text{mayor en valor numérico la positiva.} \\ b>0, \\ \text{idem idem la negativa.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} b^2-4ac=0, \\ \text{raíces reales iguales.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Raíces positivas ó negativas, segun se tenga} \\ \qquad b<0, \text{ ó } b>0. \\ \text{Primer miembro de la ecuacion cuadrado perfecto.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} b^2-4ac<0, \\ \text{raíces imaginarias.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuacion absurda; y poniendo en vez de } x \text{ un número} \\ \text{cualquiera, da un resultado del mismo signo que el} \\ \text{coeficiente } a \text{ del primer término.} \end{array} \right.$$

Casos particulares.

$$c=0 \begin{cases} x'=0, \\ x''=-\frac{b}{a} \end{cases} \quad b=0 \begin{cases} x'=+\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ x''=-\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{cases} \quad a=0 \begin{cases} x'=-\frac{c}{b} \\ x''=\infty\text{, lim. de } x' \\ \text{cuando } a \text{ disminuye.} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} b=0 \\ c=0 \end{array}\right\} \text{Raíces nulas.} \qquad \begin{array}{l} a=0 \\ c=0 \end{array} \begin{cases} x'=0 \\ x''=\infty \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right\} \text{Raíces infinitas.}$$

$$a=0,\ b=0,\ c=0 \begin{cases} \text{Raíces indeterminadas.} \\ \text{Ecuacion, indeterminada tambien.} \end{cases}$$

Del mismo modo discutiríamos las raíces de la ecuacion general de segundo grado reducida á la forma $x^2+px+q=0$. Cuya discusion recomendamos á los alumnos.

LECCION XXXVII.

Ejemplos de resolucion de ecuaciones de segundo grado.—Problemas que dan orígen á ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Ejemplos de resolucion de ecuaciones de segundo grado.

EJEMPLO I. $b-\frac{2x^2}{a}=\frac{12x^2}{b}-6a.$

SOLUCION. $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2ab}.$

EJEMPLO II. $1-\frac{2}{x+2}=\frac{9}{5}-\frac{18}{5x}.$

SOLUCION. $x=\pm 3.$

EJEMPLO III. $x^2-8x-65=0.$

SOLUCION. $x=4\pm\sqrt{16+65}=4\pm\sqrt{81}=4\pm 9=\begin{cases}13\\-5.\end{cases}$

EJEMPLO IV. $35x^2+x-12=0.$

SOLUCION. $x=\frac{4}{7},\quad x=-\frac{3}{5}.$

EJEMPLO V. $9x^2+18x+10=0.$

Empleando la regla anterior con la modificacion correspondiente al caso de ser par el coeficiente del segundo término, se hallará la

SOLUCION. $x=-1\pm\frac{1}{3}\sqrt{-1}.$

EJEMPLO VI. $(4a^2-9b^2)x^2-4(a^2+ab^2)x+(a+b^2)^2=0.$

SOLUCION. $x=\frac{a+b^2}{2a\mp 3b}.$

Problemas que dan orígen á ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

PROBLEMA I.—*Dividir el número* 100 *en dos partes cuyo producto sea* 2331.

Como la suma de las dos partes que se buscan ha de ser 100, y su producto 2331, estas dos partes serán (336) las raíces de la ecuacion de segundo grado $x^2-100x+2331=0$, de la cual se saca fácilmente, por la regla conocida, $x=63$, $x=37$.

PROBLEMA II. *Un banquero ha descontado la cantidad 1470 reales á un cierto tanto por ciento de descuento, de dos pagarés: uno, cuyo valor es de 12720 rs., se ha de cobrar á los ocho meses, y el otro, que tiene por valor 25750 rs., se cobrará á los cuatro meses. Se quiere saber á qué tanto por ciento los ha descontado.*

Siendo x el tanto por ciento, y D el descuento del primer pagaré, se hallará por la fórmula de Aritmética relativa al descuento,

$$D=\frac{12720\times\frac{2}{3}x}{100+\frac{2}{3}x}.$$

Del mismo modo hallaremos el descuento D′ correspondiente al segundo pagaré, $D'=\frac{25750\times\frac{1}{3}x}{100+\frac{1}{3}x}$, y como los dos descuentos han de componer la cantidad 1470 rs. que el banquero descontó, se tendrá la ecuacion

$$\frac{12720\times\frac{2}{3}x}{100+\frac{2}{3}x}+\frac{25750\times\frac{1}{3}x}{100+\frac{1}{3}x}=1470,$$

de la cual se sacan los valores $x=9$, $x=-\frac{7350}{37}$; donde vemos que descontó los pagarés el banquero al 9 por 100, como es fácil comprobar.

La solucion negativa debe desecharse como extraña á la cuestion.

PROBLEMA III. *En una fábrica en que trabajan 20 operarios, hombres y niños, de los cuales éstos son en mayor número, se les paga diariamente 192 rs.; á cada hombre se le da tantos reales como niños hay, y á cada niño tantos reales como hombres; se quiere saber cuál es el número de unos y otros.*

Sea x el número de hombres que suponemos ser menor que el de niños: es claro que el número de éstos será $20-x$, y como cada hombre tiene tantos reales como número de niños hay, y cada niño tantos como hombres, se tendrá

$$x(20-x)+(20-x)x=192,$$

de donde se sacan los valores $x=12$, $x=8$; y como por hipótesis se tiene que el número de hombres ha de ser menor que el de niños, se

17

deberá tener $x<20-x$ ó $2x<20$, de donde $x<\frac{20}{2}=10$; es decir, que el número de hombres ha de ser menor que la mitad del número total de operarios, y por tanto se tendrá $x=8$, en cuyo caso el de niños, será $20-8=12$.

Si no hubiera la condicion de ser el número de hombres menor que el de niños, se hubiera tenido indistintamente 8, número de hombres y 12 el de niños, ó 12 número de hombres y 8 el de niños.

Problema IV. *Hallar la profundidad de un pozo, sabiendo que una piedra que se deja caer produce un golpe en el fondo que se oye á los 5 segundos de arrojar la piedra.*

Sea x la profundidad del pozo. Se sabe por la Física que un cuerpo que cae en el espacio corre en el primer segundo de su caida $4,^{m}9$ próximamente (*), y que despues los espacios corridos son proporcionales á los cuadrados de los tiempos empleados en correrlos; de modo que las raíces cuadradas de estos espacios serán proporcionales á los tiempos.

Así, el tiempo que tarda la piedra en llegar al fondo se calculará por la proporcion $\sqrt{4,9}:\sqrt{x}::1:t$, de donde $t=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4,9}}$.

Se sabe además que el sonido corre próximamente 337 metros por segundo; por consiguiente, el tiempo que el sonido ha empleado próximamente para llegar desde el fondo al oido del observador estará dado por las veces que 337 esté contenido en x, es decir, por

$$t'=\frac{x}{337}.$$

Pero el tiempo total que ha tardado la piedra en caer, y oirse el golpe producido en el fondo, es 5 segundos; luego se tendrá la ecuacion

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4,9}}+\frac{x}{337}=5 \qquad [1].$$

de donde se deducen los valores

(*) La experiencia ha hecho ver que en Madrid corre un cuerpo en el primer segundo de su caida $4,^{m}8996$ (*E. Rodriguez, Manual de Física.*)

Para la velocidad del sonido véase la misma obra de Física.

$$x=\frac{337\times3844,38}{49} \text{ y } x=\frac{337\times15,62}{49}=107,42.$$

Desde luégo se comprende que una de estas dos raíces debe ser extraña á la cuestion, pues la profundidad del pozo es única. Y no nos debe llamar la atencion que hallemos una solucion extraña; pues al hacer racional la ecuacion [1], hemos tenido que elevarla al cuadrado.

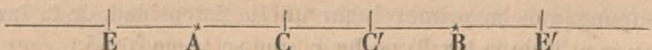
Para saber cuál de estos dos valores corresponde á la cuestion, observaremos que, si despreciamos el tiempo que tarda el sonido para llegar al oido del observador, se tendrá $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4,9}}=5$, de donde $x=4,9\times25=122,5$; pero como el sonido tarda algo en llegar al oido del observador desde que es producido en el fondo, es claro que la piedra habrá corrido un espacio menor que $122,^{m}5$.

Luego de los valores hallados tomaremos el menor; es decir, $x=107,42$, que serán los metros de profundidad que tendrá el pozo.

Discusion del problema de las luces.

PROBLEMA VI. *Determinar sobre la recta que une dos luces, el punto que está igualmente iluminado por cada una.*

Para resolver este problema es necesario saber que las intensidades de una misma luz en dos puntos distintos, están en razon inversa de los cuadrados de las distancias de estos puntos á la luz.



Sean A y B dos luces, cuyas intensidades respectivas á la unidad de distancia, son a y b; sea C el punto que está en la línea AB, igualmente iluminado por cada una de las luces; llamemos d á la distancia AB que media entre ambas, y x á la distancia AC.

Esto supuesto, si llamamos y á la intensidad de las luces A y B en el punto C, puesto que dicho punto suponemos está igualmente iluminado, se tendrá, segun el principio citado, $x^2 : 1 :: a : y$, de donde $y=\frac{a}{x^2}$; pero tambien se tiene $(d-x)^2 : 1 :: b : y$, de donde $y=\frac{b}{(d-x)^2}$;

por consiguiente, la ecuacion que resuelve el problema, será

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2} \qquad [1];$$

de la cual se saca fácilmente el valor de la incógnita

$$x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{d}{1\pm\sqrt{\frac{b}{a}}} \qquad [2].$$

De la ecuacion [1] se pudo deducir inmediatamente el valor de la incógnita [2], extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros; así, $\frac{\pm\sqrt{a}}{x}=\frac{\pm\sqrt{b}}{d-x}$, y como las cuatro combinaciones á que dan orígen los dobles signos se reducen á dos distintas, segun hemos visto (339 (*)), sólo consideraremos la ecuacion $\frac{\sqrt{a}}{x}=\pm\frac{\sqrt{b}}{d-x}$, de la cual se sacan los mismos valores de la incógnita que anteriormente hemos obtenido, y que escritos separadamente son

$$x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}},\ x=\frac{d}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

Los valores de las distancias del punto C á la luz B, estarán dados por las fórmulas

$$d-x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}},\ d-x=\frac{d}{1-\sqrt{\frac{a}{b}}}.$$

Supongamos en primer lugar que la intensidad de la luz A sea mayor que la de la luz B; es decir, que se tenga $a>b$.

Los dos valores de x son positivos; pues siendo $a>b$, la fraccion $\frac{b}{a}$ es menor que la unidad, lo mismo que su raíz cuadrada; el primer valor es mayor que $\frac{1}{2}d$; el segundo es mayor que d, porque el primero tiene por denominador una cantidad menor que 2, y el otro una cantidad menor que la unidad; lo cual nos dice que hay dos puntos igualmente iluminados por ambas luces: uno C′ entre los puntos A y B, más próximo á la luz B que á la luz A, y otro E′ á la derecha de B, y que por consiguiente ha de estar más próximo de B que de A; lo cual está conforme con las condiciones físicas, pues siendo la intensidad de la luz A mayor que la de la luz B, es claro que el punto que se halle igualmente iluminado por ambas, ha de estar más próximo de la luz que tenga menor intensidad.

Si examinamos las distancias de la luz B al punto buscado, veremos que la primera es menor que $\frac{1}{2}d$, y la segunda negativa; es decir, que se debe contar á la derecha del punto B, puesto que las positivas se cuentan á la izquierda con relacion al punto B.

Si suponemos ahora $a<b$, es decir, que la intensidad de la luz A es menor que la de la luz B, hallaremos todo lo contrario. En efecto, el primer valor que ántes era mayor que $\frac{1}{2}d$, ahora es menor, lo que prueba que el punto C comprendido entre A y B, é igualmente iluminado por ambas luces, está ahora, como debia suceder, más próximo á la luz A que á la luz B. El segundo valor aparece negativo, pues siendo $b>a$, la fraccion $\frac{b}{a}$ es mayor que la unidad, y tambien su raíz; luego el denominador es negativo, y por consiguiente el valor de x; lo cual nos prueba que hay un segundo punto E á la izquierda de A, que tambien está iluminado igualmente por ambas luces.

Si examinamos las distancias de la luz B á los dos puntos C y E, hallaremos que ambas son positivas; pues siendo $b>a$, la fraccion $\frac{a}{b}$ es menor que la unidad; luego los dos puntos se encontrarán á la izquierda de B, pues así hemos convenido en contar las cantidades positivas con relacion á B, el uno á una distancia mayor que $\frac{1}{2}d$, y el otro á otra distancia mayor que d; todo lo cual está conforme con lo dicho anteriormente.

Sea, por último, $a=b$.

El primer valor se reduce á $\frac{1}{2}d$, y el segundo á infinito. Esto nos prueba que sólo el punto medio de la línea que separa las dos luces está igualmente iluminado por ambas. El valor infinito no es otra cosa sino el límite de la distancia del otro punto que hay igualmente iluminado, á medida que las intensidades a y b tienden á ser iguales, es decir, que mientras que estas intensidades no son iguales, hay siempre dos puntos sobre la línea AB, igualmente iluminados;

uno entre A y B, y otro á la derecha de la luz B, ó á la izquierda de la luz A, segun que se tenga $a>b$ ó $a<b$, cuyo segundo punto se va alejando cada vez más, á medida que las intensidades tienden á ser iguales; y este punto se dice que se halla en el infinito, cuando $a=b$. Las fórmulas que dan las distancias del punto buscado á la luz B, están enteramente conformes.

Si suponemos que la intensidad de una luz va disminuyendo, el punto que hay entre ambas igualmente iluminado, se va aproximando á la luz de menor intensidad; y esta distancia que media entre esta luz y el punto buscado, tenderá á ser nula á medida que la intensidad de esta luz tienda á ser cero; lo cual está conforme con los valores que hallaremos haciendo estas hipótesis en las fórmulas: así, si $a=0$, se tendrá $x=0$, $d-x=d$; y si $b=0$, entónces se tiene $x=d$, $d-x=0$.

Si hacemos $a=0$ y $b=0$, hallaremos $x=\frac{0}{0}$, $d-x=\frac{0}{0}$, como debe ser, pues todos los puntos se hallan á oscuras.

Si se tiene $d=0$, se halla cero para valor de x, correspondiente al punto intermedio que siempre hay entre ambas luces, el cual se reduce ahora al punto A.

Si al mismo tiempo que $d=0$, hacemos $a=b$, hallaremos que el primer valor de x es cero, y el segundo indeterminado, como debe ser: el primero corresponde al punto medio, y como las dos luces tienen la misma intensidad, cualquier otro punto se hallará tambien igualmente iluminado por entrambas.

LECCION XXXVIII.

Ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas.—Ecuaciones bicuadradas, discusion de sus raíces.—Trasformacion de la expresion $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ en la suma ó diferencia de dos radicales sencillos $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$.

Ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas.

* 357. Toda ecuacion de segundo grado con dos incógnitas, se puede reducir á la forma

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0,$$

siendo el coeficiente a entero y positivo, y los demás coeficientes b, c, d, e y f números enteros positivos ó negativos. Para ello basta quitar los denominadores si los hay, pasar todos los términos al primer miembro, reunir todos los que vengan afectados de la misma manera con relacion á las incógnitas, y cambiar por último todos los signos á la ecuacion, si el primer término fuera negativo.

Si consideramos un sistema de dos ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas

$$ay^2+bxy+cx^2+y\,d+ex+f=0$$
$$a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x+f'=0 \qquad [1],$$

y tratamos de hallar los valores de x é y que las verifican, tendremos que principiar por eliminar una de las incógnitas, para lo cual sacaremos su valor en una de las ecuaciones, y lo sustituiremos en la otra; y es claro que los valores sacados de esta ecuacion, sustituidos en el valor de la incógnita eliminada, darán todos los sistemas de valores que verifican el sistema de ecuaciones propuesto. Pero siendo generalmente irracional el valor que se saca para la incógnita que se elimina, por provenir de una ecuacion de segundo grado, al sustituirle en la otra ecuacion, dará una que contendrá un término irracional, el cual se hará desaparecer dejándole sólo en un miembro y elevando la ecuacion al cuadrado, dando orígen así á una ecuacion en general de cuarto grado, que no sabemos todavía resolver.

Este método, además de ser bastante largo, tiene el inconveniente de podernos dar soluciones extrañas á la cuestion.

En efecto, si resolvemos una de las ecuaciones dadas con relacion á y, hallaremos dos valores de la forma

$$y=A+\sqrt{B} \qquad [2], \qquad y=A-\sqrt{B} \qquad [3],$$

siendo A y B funciones de x.

Si ahora sustituimos cada uno de estos valores en la otra ecuacion, hallaremos dos ecuaciones irracionales de la forma

$$p+q\sqrt{B}=0 \qquad [4], \qquad p-q\sqrt{B}=0 \quad [5].$$

Esto supuesto, es evidente que todo par de valores de x é y que verifique al sistema propuesto [1], tiene que verificar al sistema [2] y [4], ó al sistema [3] y [5]; y recíprocamente, todo sistema de valores que verifique á uno de los sistemas [2] y [4], ó [3] y [5], verificará necesariamente al sistema [1]; de modo que las soluciones del sistema [1], serán las soluciones del sistema de las ecuaciones [2] y [4] y el de las ecuaciones [3] y [5], y recíprocamente, el sistema propuesto no podrá tener más soluciones que las que tengan estos dos últimos sistemas. Por consiguiente, cualquier valor de x sacado de la ecuacion [4] por ejemplo, si lo sustituimos en la relacion [3], no nos dará para y valores convenientes al sistema [1], así como los valores de x sacados de la ecuacion [5], no se podrán unir con los correspondientes á la ecuacion [2].

Ahora bien, como para resolver las ecuaciones [4] y [5] hay que principiar por hacerlas racionales, para lo cual se deja el radical sólo en un miembro y se eleva al cuadrado toda la ecuacion, vemos que al ejecutar esta trasformacion en ambas ecuaciones nos dan la única ecuacion

$$p^2 = q^2 \mathrm{B} \qquad [6],$$

que tendrá por raíces todos los valores de x que verifican á las ecuaciones [4] y [5], de modo que no sabremos en cuál de estas dos ecuaciones hemos de sustituir cada una de las raíces de la ecuacion [6], para hallar los valores correspondientes de y que verifican el sistema [1]; y por consiguiente, si de antemano no pudiéramos distinguirlos, nos veríamos expuestos á tomar por soluciones de la cuestion, números que no verifican á las ecuaciones propuestas. Para evitar esto, lo que se hace es sustituir estos valores de x, sacados de la ecuacion [6], en la ecuacion [4], y los que verifiquen á esta ecuacion se sustituyen en la ecuacion [2], y los que no la verifiquen se sustituirán en la ecuacion [3]; los sistemas de valores que así resulten serán los que verifican á las ecuaciones propuestas.

*358. Para evitar el inconveniente de que en el número anterior hemos hablado, se reemplaza el sistema propuesto por otro que se componga de una de las ecuaciones dadas y la que resulta de eliminar entre ambas el cuadrado de una de las incógnitas, lo cual es posible, y se demuestra como lo hicimos en el número (271); con lo que dicho sistema quedará reducido á otro en el cual una de las ecuaciones es de primer grado con relacion á la incógnita cuyo cuadrado se eliminó; de esta ecuacion se despejará la incógnita, y su valor sustituido en la otra nos dará una de cuarto grado, cuyas raíces, sustituidas en la expresion del valor de la incógnita que se eliminó, darán todas las soluciones del sistema propuesto.

En efecto, si multiplicamos la primera de las ecuaciones [1] por a'

y la segunda por a y despues restamos, hallaremos la ecuacion

$$(ab'-ba')xy+(ac'-ca')x^2+(ad'-da')y+(ae'-ea')x= fa'-af' \quad [7],$$

que unida con una de las ecuaciones propuestas

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0 \quad [8],$$

dará un sistema que podrá reemplazar al sistema [1], como se demostró en el número (271).

De esta ecuacion de primer grado en y se saca

$$y=-\frac{(ac'-ca')x^2+(ae'-ea')x+af'-fa'}{(ab'-ba')x+ad'-da'} \quad [9],$$

cuyo valor sustituido en la ecuacion [8], da una ecuacion de cuarto grado que podrá reducirse á

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0 \quad [10],$$

y el sistema [1] podrá reemplazarse, como ya hemos visto, por el sistema [7] y [8] y éste por el sistema [8] y [10], segun lo demostrado ya, número (269). De modo que resolviendo la ecuacion [10], que no contiene más que la incógnita x, y sustituyendo cada uno de los valores hallados en la ecuacion [9], encontraremos todos los pares de valores que verifican á las ecuaciones propuestas.

EJEMPLO I. Resolver el sistema de dos ecuaciones

$$x^2+y^2=820$$
$$x^2-y^2=532.$$

Si sumamos, con objeto de eliminar el cuadrado y^2, se podrá reemplazar este sistema por el siguiente

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=820 \\ 2x^2&=1352 \end{aligned} \quad \text{ó} \quad \begin{aligned} x^2+y^2&=820 \\ x^2&=676, \end{aligned}$$

de la segunda se saca $x=\pm\sqrt{676}=\pm 26$.

Sustituyendo cada uno de estos valores en la primera ecuacion, hallaremos

$$676+y^2=820, \text{ ó } y^2=144, \text{ ó } y=\pm 12.$$

Por consiguiente el sistema propuesto podrá verificarse por los sistemas de valores

$$\begin{array}{llll} x=26, & x=26, & x=-26, & x=-26 \\ y=12, & y=-12, & y=12, & y=-12. \end{array}$$

EJEMPLO II. Sea el sistema de dos ecuaciones

$$x+y=40$$
$$x^2+y^2=1088.$$

Sacando el valor de y de la primera y sustituyéndole en la segunda, se halla una ecuacion que resuelta nos da los valores $x=32$, $x=8$.

Sustituyendo cada uno de estos valores en el de y, sacado de la primera ecuacion, tendremos

$$y=40-32=8, \quad y=40-8=32,$$

donde vemos que las soluciones son

$$x=32, \quad x=8,$$
$$y=8; \quad y=32.$$

Ejemplo III. Sean las ecuaciones

$$x^2+y^2+x+y=2808$$
$$x^2-y^2+x-y=1704.$$

Sumando, para eliminar el cuadrado de y, se hallarán sucesivamente

$$2x^2+2x=4512, \quad x^2+x=2256,$$

$$x=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}+2256}=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{9025}=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{95}{2}=\begin{cases}47\\-48.\end{cases}$$

Sustituyendo cada uno de estos valores en la primera ecuacion, hallaremos por la del primero, $x=47$,

$$2209+y^2+47+y=2808, \text{ ó } y^2+y=552.$$

$$y=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}+552}=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2209}=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{47}{2}=\begin{cases}23\\-24.\end{cases}$$

La sustitucion del segundo valor -48, nos da la misma ecuacion $y^2+y=552$, y por consiguiente los mismos valores para y, que son 23 y -24.

Luego los valores que verifican á las ecuaciones propuestas, son

$$x=47, \quad 47, \quad -48, \quad -48,$$
$$y=23; \quad -24; \quad 23; \quad -24.$$

Ecuaciones bicuadradas, discusion de sus raíces.

* 359. Las ecuaciones bicuadradas son aquellas que tienen la forma

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad [1].$$

Para resolver una ecuacion bicuadrada, se iguala el cuadrado de la incógnita á una nueva incógnita, se resuelve la ecuacion de segundo grado que resulta, y las raíces cuadradas de las de esta ecuacion, serán las de la propuesta.

Así, para resolver la ecuacion [1], haremos $x^2=y$; y sustituyendo este valor en dicha ecuacion, resultará la de segundo grado $ay^2+by+c=0$, cuyas raíces sabemos que son (340),

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Sustituyendo cada uno de estos valores de y en la ecuacion $x^2=y$, y despejando á x, tendremos

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\ \text{y}\ x=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

cuyas fórmulas dan las cuatro raíces de la ecuacion [1].

* 360. Dependiendo las raíces de la ecuacion bicuadrada de la de segundo grado $ay^2+by+c=0$, tendremos que, representando por y' é y'' las raíces de esta ecuacion, se hallarán para raíces de la primera, $x=\pm\sqrt{y'}$, y $x=\pm\sqrt{y''}$.

Ya hemos visto que y' é y'' pueden ser *reales* ó *imaginarias;* en el caso de ser reales, pueden ser *iguales* ó *desiguales*; siendo desiguales, pueden ser de *un mismo signo* ó de *signos contrarios*; y en el caso de ser de un mismo signo, pueden ser las dos *positivas* ó las dos *negativas*.

Si las dos raíces y' é y'' son *reales*, *desiguales* y *positivas*, las cuatro raíces de la ecuacion bicuadrada serán *reales* é iguales en valor numérico de dos en dos, pero de signos contrarios.

Si las raíces y' é y'' son *reales*, *desiguales* y *negativas*, las cuatro raíces de la ecuacion bicuadrada serán *imaginarias*.

Si las raíces y' é y'' son *reales*, *desiguales* y de *signos contrarios*, es decir, una *positiva* y otra *negativa*, las dos raíces de la ecuacion bicuadrada, correspondientes á la raíz positiva de la ecuacion de segundo grado, serán *reales*; y las dos que corresponden á la raíz negativa, serán *imaginarias*; luego la ecuacion bicuadrada tendrá en este caso dos raíces *reales* y dos *imaginarias*.

Si las raíces y' é y'' fuesen *iguales*, podrá suceder que ambas sean *positivas* ó *negativas:* en el primer caso las cuatro raíces serán *reales* é *iguales* en valor numérico, siendo dos positivas y dos negativas; en el segundo las cuatro raíces serán *imaginarias*. El primer miembro de la ecuacion será en este caso un cuadrado perfecto.

Por último, si las raíces y' é y'' son *imaginarias*, las cuatro raíces de la ecuacion bicuadrada tambien lo serán.

Luego la ecuacion bicuadrada puede tener sus cuatro raíces *reales*, que será cuando y' é y'' sean *reales* y *positivas*, ya sean ó no iguales; dos raíces *reales* y dos *imaginarias*, que será cuando y' é y'' sean *reales* y de *signos contrarios*; y las cuatro *imaginarias*, que será cuando las raíces y' é y'' sean *imaginarias* ó *reales negativas*, sean ó no iguales.

Trasformacion de la expresion $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ en la suma ó diferencia de dos radicales sencillos $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$.

* 361. La resolucion de las ecuaciones bicuadradas nos ha dado para valores de la incógnita valores de la forma $x=\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, en los cuales, si B no es un cuadrado perfecto, hay que principiar por hallar la raíz de B con un cierto grado de aproximacion, sumar despues este valor algebráicamente con A, y extraer por último la raíz del resultado; cuyas operaciones se hacen demasiado pesadas cuando hay que hallar dicho resultado con bastante aproximacion.

Pero si nosotros pudiéramos trasformar esta expresion en otra de la forma $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, siendo a y b cantidades racionales, podriamos por medio de cálculos más breves hallar el resultado con toda la aproximacion que se quisiera; pues en vez de acumularse los errores, como por el método primero sucede, podriamos calcular $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$, ambos por exceso ó defecto, ó uno por exceso y otro por defecto, segun que tuvieran que restarse ó sumarse, en cuyo caso dichos errores se destruirian en parte.

Así, pues, conviene averiguar las condiciones á que deben satisfacer A y B, para que se pueda trasformar $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ en $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$.

* 362. Para resolver esta cuestion debemos demostrar que, si se tiene la igualdad $m+\sqrt{n}=m'+\sqrt{n'}$, se debe tener tambien $m=m'$ y $n=n'$.

En efecto, pasando m' al primer miembro y elevando al cuadrado la igualdad que resulta, se tendrá

$$(m-m')^2+2(m-m')\sqrt{n}+n=n',$$

de donde $2(m-m')\sqrt{n}=n'-n-(m-m')^2$.

Igualdad que no se puede verificar, sino siendo $m=m'$, pues de lo contrario una cantidad irracional $2(m-m')\sqrt{n}$, seria igual á una cantidad racional $n'-n-(m-m')^2$, lo cual es absurdo; luego para que la igualdad propuesta $m+\sqrt{n}=m'+\sqrt{n'}$ sea cierta, tiene que serlo tambien la igualdad $2(m-m')\sqrt{n}=n'-n-(m-m')^2$, y para que ésta lo sea, es necesario que se tenga $m=m'$, en cuyo caso $n'=n$; segun queríamos demostrar.

* 363 Una vez demostrado este principio, veremos qué condiciones han de satisfacer las cantidades A y B para que se tenga

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}.$$

Si elevamos esta igualdad al cuadrado, se tendrá esta otra

$$A\pm\sqrt{B}=a+b\pm2\sqrt{ab}=a+b\pm\sqrt{4ab},$$

y segun el principio anterior, se tendrá $a+b=A$ y $4ab=B$ ó $ab=\frac{B}{4}$; por consiguiente, las dos cantidades indeterminadas a y b, son, (336-2.ª), las raíces de la ecuacion

$$x^2-Ax+\frac{B}{4}=0, \qquad [2]$$

que serán conmensurables, si A^2-B es un cuadrado perfecto (347): luego la condicion que han de satisfacer las cantidades A y B, para que se pueda verificar la trasformacion indicada, es que la cantidad A^2-B sea un cuadrado perfecto que representaremos por C^2.

Resolviendo esta última ecuacion, hallaremos $x=\frac{A\pm\sqrt{A^2-B}}{2}$, y se tendrán las igualdades

$$a=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} \quad \text{y} \quad b=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2};$$

por consiguiente, la fórmula propuesta se podrá poner bajo la forma

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

y si, como hemos supuesto, se verifica que A^2-B sea un cuadrado perfecto C^2, se tendrá, como deseábamos, la trasformacion pedida

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

Cuando A^2-B no es un cuadrado perfecto, la trasformacion anterior no tiene ventaja y por consiguiente no se practica.

* 364. Si $\sqrt{B}$ fuese una expresion imaginaria de la forma $B\sqrt{-1}$, podremos tambien aplicarle la regla precedente, sustituyendo en la condicion anterior la cantidad $-B^2$, en vez de B. En efecto, la expresion $A\pm\sqrt{B}$, se convierte en $A\pm B\sqrt{-1}$, y la raíz de $A\pm B\sqrt{-1}$, se podrá convertir en otra expresion de la misma forma $a\pm b\sqrt{-1}$. Para ello se verá que la condicion $C=\sqrt{A^2-B}$ se reduce á $C=\sqrt{A^2+B^2}$, y por consiguiente, se tendrá

$$a=\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2} \quad \text{y} \quad b=\frac{A-\sqrt{A^2+B^2}}{2},$$

donde vemos que el valor de a es evidentemente positivo y el de b negativo; de modo que representando el primero por a^2 y el segundo por b^2, se tendrá

$$\sqrt{A\pm B\sqrt{-1}}=\sqrt{a^2}\pm\sqrt{-b^2}=a\pm b\sqrt{-1}.$$

LECCION XXXIX.

Máximos y mínimos.—Ejemplos y problemas de máximos y mínimos que pueden resolverse por ecuaciones de segundo grado.

Máximos y mínimos.

* 365. La teoría de los *máximos y mínimos* es una de las más importantes del Algebra por sus muchas aplicaciones, y aunque despues nos hemos de ocupar de un modo general de los máximos y

mínimos de las funciones de una variable, conviene indicar aquí el modo de hallar los de aquellas que igualadas á una letra, dan orígen á ecuaciones de segundo grado con relacion á esta variable.

* 366. Si se tiene una expresion $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=y$, en la cual las letras a, b, c, a', b', c' son números cualesquiera, y x es una letra que puede recibir todos los valores que queramos, se dice que dicha letra x es una *variable*, y la fraccion que ocupa el primer miembro, ó sea su valor representado por la letra y que está en el segundo, se dice que es una funcion de esta variable, y como á medida que x varía, variará tambien en general y, se sigue que la funcion y será otra variable cuyos valores dependerán de los que se le hayan dado á x.

* 367. Si creciendo de una manera contínua ó sea por grados insensibles la variable de una funcion, aumenta ó disminuye ésta, y luégo disminuye ó aumenta, es claro que tendrá que pasar por ciertos límites en los cuales dejará de aumentar ó disminuir, para principiar á disminuir ó aumentar, y cada uno de estos límites, que corresponderá á un cierto valor α de la variable, y que no es otra cosa sino el valor *máximo* ó *mínimo* de la funcion, será evidentemente mayor ó menor que los valores que recibe esta misma funcion, para valores de la variable inmediatamente superiores é inferiores al valor α.

De modo que si aumentando de una manera contínua la variable de una funcion, ésta aumenta ó disminuye, y luégo disminuye ó aumenta, se dice que dicha funcion pasa por un *máximo* ó un *mínimo*; entendiendo por *máximo* ó *mínimo* de una funcion, aquel valor que recibe para un cierto valor α de la variable, mayor ó menor que el que dicha funcion recibe para valores de la variable infinitamente próximos á α tanto superiores como inferiores.

* 368. Una funcion puede, aumentando siempre la variable, aumentar ó disminuir, y luégo disminuir ó aumentar, para volver despues á aumentar ó disminuir, y así sucesivamente, y como al verificarse estos cambios tiene que pasar dicha funcion por un máximo ó un mínimo, se sigue que una funcion puede tener varios máximos y varios mínimos.

De aquí se deduce que la pabra *máximo* ó *mínimo*, no indica el mayor ó el menor de los valores que pudiera recibir una funcion;

porque en ese caso no se concibe que una misma funcion pueda tener varios máximos ó varios mínimos, á ménos que estos no fueran iguales. Así, la palabra máximo ó mínimo sólo indica valores de una funcion mayores ó menores relativamente á los que esta funcion recibe para valores de la variable inmediatamente superiores ó inferiores á aquel que la redujo á un máximo ó mínimo.

* 369. Las expresiones algebráicas cuyos máximos y mínimos se pueden hallar por medio de las ecuaciones de segundo grado, son en general trinómios de segundo grado con relacion á una variable x, ó fracciones cuyos términos son á lo más de segundo grado en x.

Sea, por ejemplo, hallar los máximos y mínimos de la expresion

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=y \qquad [1].$$

A cada valor α que demos á la variable independiente x, recibirá un cierto valor β la funcion y. Y recíprocamente, si damos á la funcion y el valor β, hallaremos el correspondiente á la variable x, resolviendo con relacion á esta incógnita la ecuacion [1].

Ahora bien, como x no puede recibir más que valores reales, es claro que y no podrá recibir valores cualesquiera, sino que deberán estar sujetos á hallarse comprendidos entre ciertos límites, pasados los cuales resultarian para x valores imaginarios; lo cual no debe ser, pues, como ya hemos dicho, los valores de x han de ser siempre reales; y estos límites, que comprenden á los valores de y, serán precisamente los máximos ó mínimos de la funcion propuesta.

* 370. Segun lo dicho anteriormente, *para hallar los máximos y mínimos de una expresion de la forma* $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, *se iguala dicha expresion á una indeterminada* y, *se resuelve la ecuacion que resulta con relacion á* x, *se vé cuáles son los límites de los valores de* y *que hacen reales los valores de* x, *y estos límites serán los máximos y mínimos pedidos.*

Resolviendo la ecuacion [1] con relacion á x, se halla

$$x=\frac{b-b'y\pm\sqrt{(b'^2-4a'c')y^2-(2bb'-4ca'-4ac')y+b^2-4ac}}{2(a'y-a)} \qquad [2],$$

cuyo valor se puede poner bajo la forma

$$x=\frac{b-b'y\pm\sqrt{Ay^2+By+C}}{2(a'y-a)}\qquad[3];$$

ó sacando A factor comun debajo del radical, y llamando p y q á los cocientes de dividir B y C por A, se tendrá

$$x=\frac{b-b'y\pm\sqrt{A(y^2+py+q)}}{2(a'y-a)}\qquad[4];$$

y si llamamos y' é y'' las raíces que resultan de igualar á cero el trinómio y^2+py+q, se tendrá, por último,

$$x=\frac{b-b'y\pm\sqrt{A(y-y')(y-y'')}}{2(a'y-a)}\qquad[5].$$

Como los valores de x han de ser reales, segun se ha dicho ya, es necesario que los valores que se le den á y hagan positiva la cantidad subradical $A(y-y')(y-y'')$, y los límites que comprendan á los valores de y que cumplen con esta condicion, serán los máximos ó mínimos que se buscan.

Para hallar estos límites consideraremos tres casos, segun que A sea mayor, menor ó igual á cero.

1.° Supongamos $A>0$. Si las raíces y' é y'' son reales y desiguales, y suponemos que se tiene $y'>y''$, será necesario, para que $A(y-y')(y-y'')$ sea positivo, y por consiguiente el valor de x sea real, que los dos factores $(y-y')$ é $(y-y'')$ sean de un mismo signo, lo cual exige que los valores de y no se hallen comprendidos entre las raíces y' é y''; por tanto, y ha de ser mayor que y', ó menor que y''; en el primer caso el menor valor que podremos dar á y será y', y en el segundo el mayor valor será y''. Cualquier valor que diéramos á y mayor que y'' y menor que y' daria para x valores imaginarios.

Un mínimo será, por consiguiente, y' y un máximo y''.

Sustituyendo estos valores mínimo y máximo en la igualdad [5], se obtendrán los valores correspondientes de x.

Luego cuando las raíces y' é y'' de la ecuacion de segundo grado que resulta de igualar á cero el trinómio y^2+py+q, son reales y desiguales, siendo además $A>0$, la fraccion propuesta tiene un máximo igual á la menor de las raíces, y un mínimo igual á la mayor.

No hacemos mencion del máximo *infinito* y del mínimo *ménos infinito*, porque estos corresponden generalmente á valores infinitos de x, ó á valores que vienen bajo la forma indeterminada; pero no debe dejar de observarse que, pudiendo tener y cualquier valor, ya sea mayor que y', ya menor que y'', podrá llegar á valer la funcion propuesta un número positivo infinitamente grande, y otro infinitamente grande tambien en valor numérico, pero negativo.

Si las raíces y' é y'' fuesen iguales ó imaginarias, la cantidad subradical $A(y-y')\,(y-y'')$ seria positiva, cualquier valor que se le diera á y, pues el trinómio Ay^2+By+C se reduciria en el primer caso á un cuadrado perfecto (353), y en el segundo tendria, para cualquier valor de y, el mismo signo que su primer coeficiente (254 OBS.), y en este caso que nos ocupa es positivo. Luego pudiendo tener y todos los valores que queramos, permaneciendo x constantemente real, la funcion propuesta no puede tener, en estos dos casos, ni máximo ni mínimo finitos, pues puede variar desde $-\infty$ á $+\infty$; cuyos límites podremos tomar como máximo y mínimo en absoluto.

2.° Sea, en segundo lugar, $A<0$. Si las raíces y' é y'' son reales y desiguales, y suponemos que se tiene $y'>y''$, será necesario, para que la cantidad subradical $A(y-y')\,(y-y'')$ sea positiva, y por consiguiente el valor de x real, que se tenga $y>y''$, pero $y<y'$; es decir, que los valores de y han de estar comprendidos entre y'' é y'; luego el máximo será $y=y'$, y el mínimo $y=y''$; cuyos valores, máximo y mínimo, sustituidos en vez de y en la igualdad [5], nos darán los correspondientes de x. Luego cuando $A<0$, y las raíces y' é y'' de la ecuacion de segundo grado que resulta de igualar á cero el trinómio y^2+py+q, son reales y desiguales, la funcion propuesta tiene un máximo igual á la mayor de las raíces, y un mínimo igual á la menor.

Si las raíces y' é y'' son iguales ó imaginarias, el trinómio $A(y^2+py+q)$ es constantemente del mismo signo que A, es decir, negativo; porque en el primer caso y^2+py+q es un cuadrado perfecto, y cualquier valor que se le dé á y hace que sea positivo; en el segundo permanece con el mismo signo que su primer término, es decir, positivo; luego siendo el trinómio y^2+py+q positivo, cualquiera que sea el valor que se le dé á y, en el caso de ser $y'=y''$ ó y' é y'' imaginarias, al multiplicar este trinómio por A, que es negativo, dará un resultado constantemente negativo, y el valor de x será, por consiguiente, imaginario. Luego la funcion propuesta no tiene en ninguno de estos dos casos ni máximo ni mínimo.

3.º Sea, por último, $A=0$. En este caso la cantidad subradical se reduce á $By+C=B\left(y+\frac{C}{B}\right)$, y se considerarán tres casos especiales, segun que el número B sea positivo, negativo ó cero.

Si B es positivo, el factor que hay dentro del paréntesis tiene que ser positivo tambien para que x sea real, y por consiguiente se deberá tener $y>-\frac{C}{B}$; luego la funcion tendrá un mínimo que será $y=-\frac{C}{B}$, y no tendrá ningun máximo. El valor de x correspondiente al mínimo se hallará sustituyendo este valor en vez de y en la igualdad [3], en la cual se supone $A=0$.

Si B es negativo, el factor $y+\frac{C}{B}$ tiene que ser negativo tambien para que x sea real, y por consiguiente se deberá tener $y<-\frac{C}{B}$. El valor $y=-\frac{C}{B}$ será un máximo de la funcion propuesta, la cual no tendrá ningun mínimo.

Si se tiene por último $B=0$, los valores de x serán siempre reales ó imaginarios, segun que C sea positivo ó negativo; luego y puede recibir todos los valores que queramos, desde $-\infty$ hasta $+\infty$, siendo los valores de x reales cuando $C>0$, é imaginarios cuando se tiene $C<0$; por consiguiente, la funcion no tiene máximos ni mínimos finitos.

Ejemplos y problemas de máximos y mínimos que pueden resolverse por ecuaciones de segundo grado.

EJEMPLO I. Sea la expresion $\frac{4x^2-40x+76}{9-4x}=y$.

Despejando la x, tendremos $x=\frac{10-y\pm\sqrt{y^2-14y+24}}{2}$.

La condicion para que x sea real, es $y^2-14y+24>0$ ó

$(y-3)(y-8)>0$; de donde se deduce que la funcion tiene un máximo $y=3$, que corresponde á $x=\frac{1}{2}$, y un mínimo $y=8$, que corresponde á $x=1$.

Ejemplo II. Sea la expresion cuyo máximo y mínimo queremos hallar $\frac{x^2-10x+24}{4-x}=y$.

Quitando denominadores, y hallando el valor de x, se tendrá

$$x=\frac{10-y\pm\sqrt{y^2-4y+4}}{2}.$$

La condicion para que x sea real, es $y^4-4y+4>0$ ó $(y-2)^2>0$; la cual se verifica para cualquier valor que se le dé á y, tanto positivo como negativo. Luego la expresion no tiene máximo ni mínimo finitos.

Ejemplo III. Sea la expresion $\frac{x^2-5x+4}{x^2-x+\frac{1}{2}}=y$.

Despejando el valor de x, hallaremos

$$x=\frac{5-y\pm\sqrt{-y^2+8y+9}}{2(1-y)}.$$

La condicion para que x sea real, será $-y^2+8y+9>0$ ó $(9-y)(y+1)>0$, de donde se deduce, que y no puede recibir más valores que los comprendidos entre -1 y 9; luego el máximo de la funcion propuesta será $y=9$, que corresponde al valor de $x=\frac{1}{4}$, y el mínimo $y=-1$, correspondiente á $x=\frac{3}{2}$.

Ejemplo IV. Hallar el máximo y mínimo de la expresion

$$\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+1}=y.$$

Hallando el valor de x, se tiene $x=\frac{y+1\pm\sqrt{2(y+1)}}{y-1}$.

Para que el valor de x sea real, es necesario que se tenga $y+1>0$; luego la funcion tiene un mínimo $y=-1$, que corresponde á $x=0$, y no tiene ningun máximo finito, pues puede crecer sin volver á disminuir hasta ∞.

Ejemplo V. Sea, por último, hallar el máximo y mínimo de la expresion $\frac{x^2-3x+2}{x^2+4x-6}=y$.

Despejando la x, tendremos $x=\dfrac{3+4y\pm\sqrt{40y^2+8y-1}}{2(1-y)}$.

La condicion para que el valor de x sea real, es $40y^2+8y-1>0$; y como en este trinómio se verifica la condicion $b^2-4ac<0$, igualándole á cero dará dos raíces y' é y'' imaginarias (254); y por consiguiente, sustituyendo por y un número cualquiera, hallaremos siempre un resultado positivo; luego los valores de x son siempre reales, cualesquiera que sean los valores que le demos á y; la funcion no tiene por lo tanto máximo ni mínimo finitos, puesto que puede recibir todos los valores desde $+\infty$ á $-\infty$.

Problema I. *Dividir un número en dos partes cuyo producto sea un máximo.*

Sea N el número, una de las partes x, la otra será evidentemente $N-x$; representemos por P el producto que ha de ser un máximo, y se tendrá

$$x(N-x)=P \quad \text{ó} \quad x^2-Nx=-P;$$

de donde se deduce $x=\dfrac{N}{2}\pm\sqrt{\dfrac{N^2}{4}-P}$.

La condicion para que x sea real, es $\dfrac{N^2}{4}-P>0$.

De modo, que el mayor valor que le podremos dar á P será $P=\dfrac{N^2}{4}=\left(\dfrac{N}{2}\right)^2$; luego el mayor producto que se puede obtener con las dos partes en que se descompone un número, es el cuadrado de la mitad de este número; y por consiguiente, cada una de estas partes es igual á la mitad del número, ó lo que es lo mismo; *si se tienen dos números cuya suma es constante, el producto de estos dos números será el máximo cuando los dos sean iguales, é iguales por consiguiente á la mitad de la suma.*

Consecuencia. *Para dividir un número* N *en* m *partes cuyo producto sea un máximo, es necesario que estas partes sean iguales, é iguales por consiguiente á la* emésima *parte del número* N.

En efecto, siendo una de las partes en que se ha de dividir el número N, menor que N, el producto ha de ser necesariamente menor que N^m, y por consiguiente dicho producto, que es variable, segun varíen las m partes en que se divide N, tendrá un valor mayor que todos los demás, que será el máximo que se pide.

Una vez visto que este producto tiene necesariamente un máximo, vamos á demostrar que si entre las m partes en que se divide N hay dos desiguales, el producto correspondiente á esta descomposicion no es un máximo.

Para ello, supongamos que las m partes en que N se ha dividido, sean a, b, c, d,... l, y que entre ellas hay dos, c y d, que no son iguales; re presentemos por P′ el producto de todas, á excepcion de estas dos partes desiguales, y por P el de todas, de modo que se tendrá

$$P=cd\times P' \qquad [1].$$

Esto supuesto, el producto cd formado por los dos factores desiguales c y d, cuya suma es $c+d$, es, segun el problema anterior, menor que el producto de las dos partes $\frac{c+d}{2}$ y $\frac{c+d}{2}$, cuya suma es tambien $c+d$; por consiguiente, si se tiene

$$cd<\frac{c+d}{2}\times\frac{c+d}{2},$$

se puede en la igualdad [1] reemplazar el producto de las dos partes c y d, cuya suma es $c+d$, por el de las dos partes $\frac{c+d}{2}$ y $\frac{c+d}{2}$, que dan la misma suma, y entónces tendremos

$$P<\frac{c+d}{2}\times\frac{c+d}{2}\times P';$$

lo cual prueba lo que queríamos demostrar; es decir, que si entre las m partes en que se ha dividido el número N, hay dos desiguales, el producto correspondiente no es el máximo; luego para que se obtenga el mayor producto, es necesario que sean iguales las m partes en que el número N se divide.

Problema II. *De todos los triángulos que tengan un mismo perímetro, ¿Cuál es el mayor?*

Se demuestra en Geometría que el área de un triángulo en funcion de sus tres lados, es $A=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$.

El área A del triángulo cuyos lados son a, b y c, y su perímetro

2P, será la mayor cuando el producto de los tres factores variables P—a, P—b, P—c, sea el mayor posible; pero el producto de estos tres factores cuya suma es constante é igual á $3P-(a+b+c)=3P-2P=P$ será el mayor, segun hemos demostrado anteriormente, cuando dichos factores sean iguales; mas para que estos factores sean iguales es menester que se tenga $a=b=c$, y el triángulo es en ese caso equilátero, y nos dá para valor de su área

$$A=\sqrt{P(P-a)^3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

LECCION XL.

Teoría de las desigualdades é inecuaciones: sus trasformaciones.—Inecuaciones de primero y segundo grado.

Teoria de las desigualdades é inecuaciones; sus trasformaciones.

* 371. Se llama *desigualdad* toda expresion de la forma $A>B$ ó $A<B$.

Inecuacion es una desigualdad que contiene una ó varias cantidades indeterminadas ó incógnitas, y hay que determinarlas con la condicion de que dicha desigualdad se verifique. Esto se consigue mediante trasformaciones análogas á las que se han hecho con las ecuaciones, y que dan por resultado no el valor de la incógnita ó cantidad indeterminada, como en las ecuaciones se obtiene, sino un límite ya inferior, ya superior, de los valores que la incógnita puede recibir, y á veces dos que comprenden un número reducido de valores, precisando cuanto es posible la cuestion.

* 372. Con las desigualdades é inecuaciones no se pueden hacer todas las trasformaciones que se hacen con las ecuaciones; están sujetas á ciertas restricciones, que es necesario tener muy presentes para no incurrir en graves errores.

* 373. *Una desigualdad no se altera sumando ó restando á sus dos miembros una misma cantidad.*

Sea la desigualdad $A>B$. Si á los dos miembros se les añade una misma cantidad C, los resultados serán evidentemente desiguales, permaneciendo la desigualdad en el mismo sentido. Lo mismo sucede si restamos de ambos miembros una misma cantidad; la primera resta será mayor que la segunda, por tener mayor minuendo que ésta, siendo iguales los sustraendos; luego si se tiene una de las desigualdades $A>B$, ó $A<B$, se tendrá tambien una de las dos desigualdades siguientes:

$$A\pm C>B\pm C, \text{ ó } A\pm C<B\pm C.$$

* 374. *En toda desigualdad se puede pasar de un miembro á otro un término cualquiera cambiándole el signo.*

En efecto, sea la desigualdad $A-B>C+D$.

Si queremos pasar el término B al segundo miembro, y el D al primero, se tendrá, agregando á los dos miembros la cantidad $B-D$,

$$A-B+B-D>C+D+B-D, \text{ ó } A-D>C+B,$$

lo cual justifica el teorema.

* 375. *Una desigualdad no se altera multiplicando ó partiendo sus dos miembros por una misma cantidad positiva.*

Sea la desigualdad $A>B$. Si multiplicamos los dos miembros A y B por una cantidad positiva P, se obtendrán los productos AP y BP, de los cuales el primero será evidentemente mayor que el segundo, por tener ambos el factor comun P, y el factor A del primero mayor que el factor B del segundo. Del mismo modo, si en vez de multiplicar hubiésemos dividido por P los dos miembros de la desigualdad propuesta, el cociente de dividir el primer miembro por P, seria mayor que el que resulta de la division del segundo por el mismo número, por tener ambos el mismo divisor, y ser el dividendo A mayor que el dividendo B; luego si se tiene $A>B$, ó $A<B$, se tendrá tambien

$$AP>BP, \text{ ó } AP<BP; \frac{A}{P}>\frac{B}{P}, \text{ ó } \frac{A}{P}<\frac{B}{P}.$$

* 376. *Se pueden multiplicar ó partir los dos miembros de una desigualdad por una cantidad negativa, cambiando el signo de la desigualdad.*

Sea la desigualdad $A>B$, en la cual pueden ocurrir varios casos, segun que A y B sean positivos, que sean negativos, ó que A sea positivo y B negativo.

Si A y B son positivos, para que se tenga $A > B$, el valor numérico de A será mayor que el de B, luego los productos de estas dos cantidades por una misma cantidad negativa N, serán negativos, teniendo el primero mayor valor numérico que el segundo; y como de dos cantidades negativas, es la menor la que tiene mayor valor numérico, se tendrá $-AN < -BN$.

Si A y B son negativos, el valor numérico de A será menor que el valor numérico de B; y al multiplicar estas dos cantidades negativas por la cantidad negativa tambien $-N$, obtendremos dos productos positivos, de los cuales el primero tendrá menor valor numérico que el segundo; luego si se tiene $A > B$, siendo A y B negativos, multiplicando por $-N$, se hallará $-AN < -BN$.

Sea, por último, A positivo y B negativo. Al multiplicar estas cantidades por $-N$, obtendremos el primer producto negativo y el segundo positivo, y por consiguiente se tendrá tambien $-AP < -BP$.

De un modo análogo probaríamos que dividiendo los dos miembros de una desigualdad por una cantidad negativa, hay que cambiar el signo de dicha desigualdad; luego si se tiene $A > B$ ó $A < B$, se tendrá, multiplicando por la cantidad negativa $-N$,

$$-AN < -BN, \text{ ó } +AN > -BN; \; -\frac{A}{N} < -\frac{B}{N}, \text{ ó } -\frac{A}{N} > -\frac{B}{N}.$$

CONSECUENCIAS. 1.ª *Si se cambian los signos á los términos de una desigualdad, hay que cambiar tambien el signo de ésta.* Así, si se tiene $A > B$ ó $A < B$, se tendrá $-A < -B$, ó $-A > -B$.

En efecto, esto equivale á multiplicar los dos miembros por -1; y, como ya se ha dicho, hay que cambiar el signo de la desigualdad.

2.ª *En toda desigualdad que haya términos fraccionarios, se podrán quitar los denominadores, multiplicando sus dos miembros por el* m. c. m. *de todos los denominadores; permaneciendo la desigualdad con el mismo signo ó signo contrario, segun que la cantidad porque se multiplique sea positiva ó negativa.*

* 377. *Se pueden sumar dos ó mas desigualdades que se verifiquen en un mismo sentido, permaneciendo la suma en un mismo sentido.*

Sean las desigualdades

$$A > B, \; A' > B', \; A'' > B''.$$

Si sumamos ordenadamente, la suma de los primeros miembros, que son todos mayores que los segundos, será evidentemente mayor que la de éstos; de modo que se tendrá, segun queriamos demostrar, $A+A'+A''>B+B'+B''$.

Dos ó más desigualdades en sentidos contrarios no se pueden sumar, pues la suma puede dar orígen á una desigualdad en uno ó en otro sentido, ó á una igualdad.

* 378. *Se pueden restar ordenadamente dos desigualdades que se verifiquen en sentido contrario, poniendo á la resta el signo de la que sirvió de minuendo.* Así, de las desigualdades $A>B$ y $A'<B'$, se deduce $A-A'>B-B'$. En efecto, el minuendo A de la primer diferencia, es mayor que el minuendo B de la segunda; y como además el sustraendo de la segunda es mayor que el de la primera, se tiene evidentemente que la primera diferencia $A-A'$, es mayor que la segunda $B-B'$.

Dos desigualdades que se verifican en un mismo sentido no se pueden restar, porque pueden dar orígen á otra desigualdad en el mismo sentido, en sentido contrario, ó á una igualdad.

* 379. *Se pueden multiplicar ordenadamente varias desigualdades que se verifican en un mismo sentido, si los dos miembros de cada una son positivos.*

En efecto, sean las desigualdades, cuyos miembros son positivos, $A>B$, $A'>B'$, $A''>B''$.

El producto $AA'A''$ de los primeros miembros, será un número positivo, lo mismo que el producto $BB'B''$ de los segundos; además, como todos los factores del primero son mayores que los del segundo, se tendrá $AA'A''>BB'B''$.

Consecuencia. *Se puede elevar una desigualdad á una potencia cuyo exponente sea entero y positivo, siempre que los dos miembros sean positivos.* Así, de la desigualdad $A>B$ se deduce, siendo m un número entero y positivo y positivas la cantidades A y B, $A^m>B^m$.

* 380. *Toda desigualdad se puede elevar á una potencia de grado impar.*

En efecto, sea la desigualdad $A>B$. Si A y B son positivas, ya lo hemos demostrado. Si A es positiva y B negativa, A^{2n+1} será positiva, y B^{2n+1} será negativa; luego se tendrá evidentemente $A^{2n+1}>B^{2n+1}$. Si A y B son negativas, las potencias A^{2n+1} y B^{2n+1} lo serán tambien; pero siendo $A > B$, el valor numérico de A será menor que el de B; luego el valor numérico de A^{2n+1} será tambien menor que el de B^{2n+1}, y por consiguiente será $A^{2n+1} > B^{2n+1}$, con lo cual queda demostrado el principio.

* 381. *Se puede extraer una raíz de grado impar de los dos miembros de una desigualdad.*

Sea la desigualdad $A > B$. Si A y B son positivas, sus raíces de grado impar tambien lo serán, y además la primera será mayor que la segunda. Si A es positiva y B negativa, sus raíces de grado impar serán la primera positiva y la segunda negativa, y por consiguiente aquella mayor que ésta. Por último, si A y B son negativas, negativas serán tambien sus raíces de grado impar, mayor en valor numérico la segunda que la primera; luego si se tiene $A > B$, se tendrá, cualesquiera que sean los signos de A y B, $\sqrt[2n+1]{A} > \sqrt[2n+1]{B}$.

* 382. *Se puede extraer una raíz de grado par de los dos miembros de una desigualdad, siempre que se tomen para estas raíces cantidades positivas.*

Sea la desigualdad $A^{2n} > B^{2n}$. La raíz del grado $2n$ de una cantidad A^{2n} es, segun ya se ha demostrado (173), $\pm A$. Por consiguiente, las raíces del grado $2n$ de los dos miembros de la desigualdad propuesta, serán $\pm A$ y $\pm B$. Ahora bien, como A^{2n} y B^{2n} son cantidades positivas, ya sean positivas ó negativas las cantidades A y B, el valor numérico de A será mayor que el de B, puesto que se tiene $A^{2n} > B^{2n}$; luego si tomamos el signo de estas raíces, de modo que las cantidades $\pm A$ y $\pm B$ sean positivas, se verificará el enunciado. Así, si A y B son positivas, se deducirá de la desigualdad $A^{2n} > B^{2n}$, $A > B$. Si A y B son negativas, se deducirá entónces $-A > -B$. Si A es positiva y B negativa, se tendrá $A > -B$. Por último, si A es negativa y B positiva, será $-A > B$.

* 383. *Se pueden dividir ordenadamente dos desigualdades que se verifican en sentidos contrarios, y cuyos miembros son positivos quedando los cocientes en el sentido de la que sirvió de dividendo.*

Sean las dos desigualdades $A > B$ y $A' < B'$, cuyos miembros son positivos, de los cuales deduciremos $\frac{A}{A'} > \frac{B}{B'}$.

En efecto, el primer dividendo A es mayor que el segundo B, y además el primer divisor A', es menor que el segundo B'; luego se tendrá evidentemente que el primer cociente es mayor que el segundo, segun queríamos demostrar.

Inecuaciones de primero y segundo grado.

* 384. Cuando en una desigualdad existen una ó varias cantidades desconocidas cuyos valores se han de hallar con la condicion de que la desigualdad quede satisfecha, tendremos, por analogía á lo que con respecto de las igualdades y ecuaciones hemos dicho, una INECUACION.

Las inecuaciones, lo mismo que las ecuaciones, pueden ser de primero, segundo, tercero, etc. grado; nosotros sólo nos ocuparemos de las inecuaciones de primer grado con una ó más incógnitas, y de las de segundo con una sola incógnita.

* 385. Toda inecuacion de primer grado con una incógnita puede reducirse á una de éstas $Ax > B$ ó $Ax < B$, en la cual A es una cantidad entera y positiva, y B una cantidad entera, positiva ó negativa. Para ello, no hay más que quitar los denominadores si los hay, multiplicando los términos enteros por el mínimo comun múltiplo de todos ellos, y el numerador de cada fraccion por el cociente de dividir dicho *m. c. m.* por el denominador correspondiente, dejando la inecuacion en el mismo sentido ó sentido contrario, segun que el *m. c. m.* sea positivo ó negativo (375 y 376). Despues se pasan todos los términos que tienen incógnita al primer miembro y los que no la tienen al segundo (374), se efectúan las operaciones indicadas que resulten si la inecuacion es numérica, ó se saca la incógnita factor comun si es algebráica, representando por A el coeficiente de la incógnita y por B la cantidad constante. Si A es negativa, se le cambian los signos á toda la inecuacion, cambiando el sentido de la misma (376 CONS. 1.ª), y queda reducida á una de las dos formas indicadas al principio.

Si dividimos por A cada una de las inecuaciones propuestas, hallaremos $x > \frac{B}{A}$ ó $x < \frac{B}{A}$.

De modo que si suponemos que A lo mismo que B pueden ser positivas ó negativas, las dos inecuaciones podrán reducirse á una sola

$Ax>B$, de la cual se deducirá $x\gtrless\frac{B}{A}$, segun que A sea positiva ó negativa.

386. En las inecuaciones de primer grado con una incógnita, puede recibir ésta, segun vemos, una infinidad de valores, pues sólo determinamos un límite superior ó inferior de estos valores; así, en el primer caso, cuando $x>\frac{B}{A}$, dando á x valores mayores que la fraccion $\frac{B}{A}$, la inecuacion queda satisfecha convirtiéndose en desigualdad tan pronto como se sustituye x por uno de estos valores: si se considera la segunda $x<\frac{B}{A}$, dando á x valores menores que esta fraccion, queda tambien satisfecha la inecuacion. En algunos casos no se excluye la igualdad, y entónces x no sólo puede recibir valores mayores que $\frac{B}{A}$, sino que tambien puede ser igual á este valor.

De aquí se deduce que una incógnita puede á veces satisfacer á más de una inecuacion; en efecto, sean las dos inecuaciones $Ax>B$ y $A'x>B'$, de las cuales se deducen los límites $x\gtrless\frac{B}{A}$ y $x\gtrless\frac{B'}{A'}$.

Con estos límites se pueden hacer las siguientes combinaciones.

Si A y A′ son positivas, se tendrá $x>a$, y $x>a'$, representando por a y a' los cocientes respectivos de dividir B por A, y B′ por A′: donde vemos que si $a>a'$, dando á x valores mayores que a, ambas inecuaciones quedarán satisfechas; luego se hallarán para x una infinidad de valores.

Si A y A′ son negativas, los límites serán $x<a$ y $x<a'$; de modo que ambas inecuaciones quedarán satisfechas dando á x valores menores que el menor de los dos valores a ó a'; por consiguiente, tambien se verificarán para una infinidad de valores de x.

Si A y A′ son de signos contrarios, los límites de los valores de x serán $x>a$ y $x<a'$, ó $x<a$ y $x>a'$.

Ahora podrá suceder que los límites de los valores de x sean contradictorios ó no; en el primer caso las inecuaciones propuestas serán incompatibles, en el segundo x podrá recibir todos los valores que queramos, con tal de hallarse comprendidos entre los límites

a y a'; este caso puede darnos un número limitado de soluciones, cuando x además de verificar las condiciones que las inecuaciones indican, tiene que satisfacer á la de ser un número entero, en cuyo caso x no podrá valer más que los números enteros que haya comprendidos entre a y a'. Los límites serán contradictorios, en el primer caso, si se tiene $a \underset{>}{=} a'$ y en el segundo, cuando $a \underset{<}{=} a'$.

* 387. Si se tuviesen varias inecuaciones con una incógnita

$$Ax > B,\quad A'x > B',\quad A''x > B'',$$

se hallaria para límites respectivos

$$x \gtrless \frac{B}{A},\quad x \gtrless \frac{B'}{A'},\quad x \gtrless \frac{B''}{A''},$$

los cuales estarian todos en un mismo sentido, ó unos en un sentido y otros en sentido contrario. En el primer caso, dando á x valores mayores que el mayor de los límites, ó menores que el menor, segun que sean inferiores ó superiores, se tendrán todos los valores de x que satisfacen á las inecuaciones propuestas; en el segundo caso se darán á x valores comprendidos entre los límites inferiores y superiores más próximos.

Así, si x tiene que ser menor que a, a', a'',... y mayor que a_1, a_1', a_1'',... siendo el menor de los primeros límites a'' y el mayor de los segundos a_1'', x sólo podrá recibir los valores comprendidos entre estos dos límites; y las inecuaciones serian incompatibles si dichos dos límites fueran contradictorios.

* 388. Consideremos dos inecuaciones con dos incógnitas

$$ax + by > k \text{ y } a'x + b'y > k',$$

de las cuales se deducirán los límites

$$x \gtrless \frac{k - by}{a} \text{ y } x \gtrless \frac{k' - b'y}{a'}.$$

Si a, y a', son de un mismo signo, se tendrán para x dos límites inferiores ó superiores, segun que a, y a', sean positivas ó negativas, en cuyo caso podremos dar á y un valor arbitrario β, y á x valores mayores ó menores que la mayor ó menor de las expresiones $\frac{k - b\beta}{a}$ y $\frac{k' - b'\beta}{a'}$, segun que dichos límites sean inferiores ó superiores.

Si a y a' son de signos contrarios, siendo $a > 0$ y $a' < 0$, se tendrá $x>\frac{k-by}{a}$ y $x<\frac{k'-b'y}{a'}$; y para que estos límites no sean contradictorios, se deberá tener

$$\frac{k-by}{a}<\frac{k'-b'y}{a'}.$$

De esta inecuacion se deducirá un límite de los valores de y, y sustituyendo valores convenientes de esta incógnita que satisfagan á la inecuacion anterior, obtendremos para cada valor β de y dos expresiones $\frac{k-b\beta}{a}$ y $\frac{k'-b'\beta}{a'}$ que comprenderán los valores de y; de modo que dando á x valores comprendidos entre estas dos expresiones, estos valores unidos con el valor de $y=\beta$, nos darán todos los sistemas que verifican á las inecuaciones propuestas.

389. Sean ahora las tres inecuaciones con tres incógnitas

$$ax+by+cz>k,\ a'x+b'y+c'z>k',\ a''x+b''y+c''z>k'',$$

de las cuales deduciremos los límites de x

$$x\gtrless\frac{k-by-cz}{a},\ x\gtrless\frac{k'-b'y-c'z}{a'},\ x\gtrless\frac{k''-b''y-c''z}{a''},$$

los cuales podrán ser todos inferiores, todos superiores ó uno inferior y los otros dos superiores, ó uno superior y los otros dos inferiores, segun que los tres coeficientes a, a', a'', sean positivos, negativos, uno positivo y los otros dos negativos, ó uno negativo y los otros dos positivos.

En los dos primeros casos se les dará á y y z dos valores β y γ cualesquiera, y dando á x valores mayores ó menores que la mayor ó menor de las cantidades $\frac{k-b\beta-c\gamma}{a}$, $\frac{k'-b'\beta-c'\gamma}{a'}$ y $\frac{k''-b''\beta-c''\gamma}{a''}$, segun que los límites sean inferiores ó superiores, se tendrán las soluciones que verifican á las inecuaciones dadas.

Si todos los límites no son en un mismo sentido, sino que se tiene, por ejemplo

$$x>\frac{k-by-cz}{a},\ x<\frac{k'-b'y-c'z}{a'}\ \text{y}\ x<\frac{k''-b''y-c''z}{a''},$$

será necesario para que estos límites no sean contradictorios, que se tenga

$$\frac{k-by-cz}{a}<\frac{k'-b'-c'yz}{a'} \text{ y } \frac{k-by-cz}{a}<\frac{k''-b''y-c''z}{a''};$$

cuyas inecuaciones podrán reducirse á

$$\text{B}y+\text{C}z>\text{K} \quad \text{y} \quad \text{B}'y+\text{C}'z>\text{K}'.$$

De estas dos deduciremos los límites de los valores de y y de z; de modo, que dando á y y á z dos valores β y γ comprendidos entre estos límites, resultarán para límites de x

$$x>\frac{k-b\beta-c\gamma}{a},\ x<\frac{k'-b'\beta-c'\gamma}{a'} \text{ y } x<\frac{k''-b''\beta-c''\gamma}{a''};$$

por consiguiente, dando á x valores comprendidos entre los dos límites más próximos, se tendrán las soluciones que verifican á las inecuaciones dadas.

De la misma manera se obtendrian los límites de las incógnitas de un número cualquiera de inecuaciones.

* 390. Sea, por último, la inecuacion de segundo grado con una incógnita

$$x^2+px+q=\left\{x-\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\right\}\left\{x-\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\right\}>0.$$

Para que este producto sea positivo, es necesario que se tenga

$$x>-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \text{y} \quad x>-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

ó

$$x<-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \text{y} \quad x<-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Las dos primeras condiciones quedan satisfechas haciendo

$$x>-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

y las dos segundas quedan tambien satisfechas si se hace

$$x<-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

luego los límites de la incógnita de la inecuacion de segundo grado $x^2+px+q>0$, son

$$x\gtrless-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

cuyos signos $>$ y $<$ corresponden á los signos $+$ y $-$ del radical.

LECCION XLI.

Análisis indeterminado de primer grado. Condicion para que una ecuacion de primer grado con dos ó más incógnitas pueda tener soluciones enteras. Simplificacion de una ecuacion dada.—Regla para hallar las fórmulas que dan las soluciones enteras y positivas de una ecuacion de primer grado con dos incógnitas. Simplificaciones que pueden hacerse.

Análisis indeterminado de primer grado. Condicion para que una ecuacion de primer grado con dos ó más incógnitas pueda tener soluciones enteras. Simplificacion de una ecuacion dada.

* 391. El *análisis indeterminado* tiene por objeto hallar las soluciones enteras y positivas de un sistema de ecuaciones, cuyo número de incógnitas es mayor que el de ecuaciones.

* 392. *Para que una ecuacion entera de primer grado, con dos ó más incógnitas, pueda ser verificada por valores enteros, es necesario que el* m. c. d. *de todos los coeficientes divida á la cantidad constante.*

En efecto, sea la ecuacion general de primer grado con varias incógnitas, cuyos coeficientes y cantidad constante son números enteros,

$$ax+by+cz+...=k \qquad [1].$$

Supongamos que $a, b, c,...$ tengan un factor comun m; dividamos por este factor, y llamando $a', b', c',...$ los cocientes de dividir $a, b, c,...$ por m, se tendrá

$$a'x+b'y+c'z+...=\frac{k}{m} \qquad [2].$$

Si m divide á k y da un cociente entero k', la ecuacion propuesta [1], lo mismo que la [2], se podrá verificar, sin dificultad alguna, por valores enteros de las incógnitas. Pero si m no divide á k, la ecuacion [2] no podrá verificarse por valores enteros de las incógnitas; porque poniendo en vez de $x, y, z,...$ números enteros, el primer miembro se reduce á un número entero, mientras que el segundo es un número fraccionario $\frac{k}{m}$. La ecuacion [1] tampoco puede tener soluciones enteras:

porque si en ella sustituimos tambien en vez de las incógnitas, números enteros, resultará un número entero múltiplo de m, mientras que el segundo miembro k no lo es; y por consiguiente es condicion precisa para que una ecuacion se pueda resolver en números enteros, que todo divisor comun á los coeficientes de las incógnitas, lo sea tambien de la cantidad constante. Cuando esto no se verifique, la ecuacion no se podrá resolver en números enteros.

* 393. Antes de aplicar á las ecuaciones propuestas el método que se sigue en el análisis indeterminado para hallar las fórmulas que dan las soluciones enteras y positivas, conviene simplificar estas ecuaciones cuanto sea posible.

Sea la ecuacion con dos incógnitas

$$Ax+By=K \quad (*)$$

cuyos coeficientes A, B y K no tienen factor alguno comun, porque si lo tuvieran podriamos dividir por él. Si tuvieran factores comunes de dos en dos, podrian tenerlos A y B, A y K, ó B y K. En el primer caso, la ecuacion propuesta no se podria resolver en números enteros, segun hemos visto anteriormente. Si A y K tuviesen el factor comun m, ó B y K tuviesen el factor n, ó se verificasen á la vez estas dos cosas, dividiriamos primero la ecuacion dada por m, y hallariamos, llamando a y K′ los cocientes de dividir A y K por m,

$$ax+\frac{By}{m}=K';$$

cuya ecuacion no puede verificarse con números enteros, á ménos que y no sea un múltiplo de m, puesto que B y m son primos entre sí; de modo, que haciendo $y=my'$, y simplificando se tendrá $ax+By'=K'$.

Si B y K tienen además el factor n, B y K′ tambien lo tendrán, pues m y n son primos entre sí; de modo, que dividiendo ahora por n la ecuacion anterior, y llamando b y k los cocientes de dividir respectivamente B y K′ por n, se tendrá la ecuacion $\frac{ax}{n}+by'=k$; la cual no se puede verificar en números enteros, si no se tiene la con-

(*) En toda esta teoría, del análisis indeterminado, supondremos que los coeficientes de las incógnitas y cantidades constantes son números enteros.

dicion de $x = nx'$, siendo x' un número entero. Sustituyendo este valor y simplificando, se halla la ecuacion totalmente simplificada $ax' + by' = k$, cuyos coeficientes son primos entre sí.

Sea, en segundo lugar, la ecuacion con tres incógnitas $Ax + By + Cz = K$, en la cual los coeficientes A, B, C y K no tienen ningun factor comun. Supongamos que estas cantidades puedan tener factores comunes de tres en tres. Si A, B y C tuviesen un factor comun, la ecuacion no se podria resolver, como ya hemos visto, en números enteros. Si las tres cantidades que tienen un factor comun m, son A, B y K, dividiendo por él y llamando A', B' y K' los cocientes respectivos de dividir A, B y K por m, se tendrá $A'x + B'y + \frac{Cz}{m} = K'$.

Para que esta ecuacion pueda verificarse en números enteros, es necesario evidentemente que se tenga $z = mz'$, siendo z', un número entero; de modo, que sustituyendo este valor y simplificando, se hallará $A'x + B'y + Cz' = K'$.

Si ahora suponemos que A, C y K tienen un factor comun n, y luégo suponemos que el factor comun p lo tengan los tres coeficientes B, C y K, repitiendo sucesivamente las operaciones hechas anteriormente, llegaremos á la ecuacion $ax' + by' + cz' = k$, cuyos coeficientes a, b, c y k serán primos de tres en tres.

Esta ecuacion no podrá simplificarse más; porque si tuvieran dos de los coeficientes un factor comun, podria ser satisfecha por valores enteros de las incógnitas sin condicion necesaria.

En general, una ecuacion con m incógnitas se puede simplificar de modo que sus coeficientes sean primos entre sí de m en m. Cuando esto se consigue se dice que las ecuaciones están totalmente simplificadas, y los valores hallados para las incógnitas de estas ecuaciones, hay que sustituirlos en las igualdades de condicion que hemos establecido $x = mx'$, $y = ny'$, $z = pz'$,... para obtener los de las incógnitas del sistema propuesto.

En todo lo que sigue del análisis indeterminado, supondremos que las ecuaciones están totalmente simplificadas.

Regla para hallar las fórmulas que dan las soluciones enteras y positivas de una ecuacion de primer grado con dos incógnitas. Simplificaciones que pueden hacerse.

* 394. El caso más sencillo que podemos considerar en el aná–

lisis indeterminado, es el de resolver una ecuacion con dos incógnitas. Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$ax + by = k \qquad [1].$$

Si uno de los coeficientes, a por ejemplo, fuese la unidad, despejando á x, hallaríamos la expresion $x = k - by$; en la cual dando á y valores enteros cualesquiera, resultarian para x valores enteros tambien; y si además de enteros quisiéramos fuesen positivos, dariamos á y valores enteros y positivos que verificasen la desigualdad $k - by > 0$; de donde se halla el límite de los valores de y, que es $y < \frac{k}{b}$.

* 395. Si ninguno de los coeficientes es la unidad, podremos hacer depender la ecuacion [1] de otra, en la cual una de las incógnitas tenga la unidad por coeficiente.

Despejemos la incógnita que en la ecuacion propuesta tenga menor coeficiente, de modo que si suponemos $a < b$, se tendrá

$$x = \frac{k - by}{a}.$$

Dividamos k y b por a, y llamemos p y q los cocientes enteros, k_1 y r los restos, que supondremos ser iguales ó menores que la mitad del divisor a, para lo cual no hay más que ejecutar las divisiones por exceso ó defecto segun convenga; de modo, que se tendrá

$$k = ap + k_1,\ b = aq + r, \text{ de donde } by = aqy + ry.$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad anterior, se hallará, despues de simplificar, $x = p - qy + \frac{k_1 - ry}{a}$.

Para que los valores de x sean enteros, es necesario que los valores de y sean tales, que reduzcan la expresion $\frac{k_1 - ry}{a}$ á un número entero cualquiera t; de modo, que haciendo

$$t = \frac{k_1 - ry}{a}, \text{ se tendrá } x = p - qy + t.$$

La cuestion, como se vé, queda reducida á determinar los valores enteros de y y de t, en la ecuacion

$$t = \frac{k_1 - ry}{a}, \text{ ó sea } at + ry = k_1 \qquad [2],$$

la cual tiene los coeficientes a, r y k_1 respectivamente más sencillos que b, a y k.

Si con la ecuacion [2] hacemos lo mismo que se ha hecho con la propuesta, tendremos, llamando p_1 y q_1 los cocientes respectivos de dividir k_1 y a por r, y k_2 y r_1 los restos, que como ya sabemos serán menores que la mitad del divisor r,

$$y=\frac{k_1-at}{r}=p_1-q_1t+\frac{k_2-r_1t}{r}.$$

Para que los valores de y sean enteros, es necesario que cada uno de los valores enteros de t hagan que la expresion $\frac{k_2-r_1t}{r}$ sea igual á un número entero tambien, que representaremos por t'; de modo, que se tendrá $t'=\frac{k_2-r_1t}{r}$, é $y=p_1-q_1t+t'$; de donde se deduce la ecuacion

$$rt'+r_1t=k_2 \qquad [3];$$

cuyos coeficientes son más pequeños que los de la ecuacion [2], y por consiguiente que los de la propuesta; de ella deduciremos, de la misma manera que anteriormente,

$$t=\frac{k_2-rt'}{r_1}=p_2-q_2t'+\frac{k_3-r_2t'}{r_1}.$$

Para que los valores de la indeterminada t sean enteros, haremos, como anteriormente,

$t''=\frac{k_3-r_2t'}{r_1}$, en cuyo caso se tiene $t=p_2-q_2t'+t''$.

Por consiguiente, la ecuacion [3] queda reducida á la ecuacion más sencilla, $r_1t''+r_2t'=k_3$.

De esta, lo mismo que de las anteriores, sacaremos

$$t'=\frac{k_3-r_1t''}{r_2}=p_3-q_3t''+\frac{k_4-r_3t''}{r_2}.$$

El valor de t' será entero si, representando por t''' un número entero, se le dan á t'' valores que verifiquen la igualdad $t'''=\frac{k_4-r_3t''}{r_2}$, en cuyo caso se tendrá $t'=p_3-q_3t''+t'''$.

Continuando del mismo modo, y observando que los coeficientes r, r_1, r_2, r_3, etc., que tienen las indeterminadas y, t, t' etc., en las ecuaciones [2], [3] etc., son los diferentes restos que se hallan al aplicar á b y a las operaciones del *m. c. d.*, llegaremos necesariamente á un resíduo igual á la unidad, puesto que los coeficientes b y a son por hipótesis primos entre sí.

Supongamos que hemos llegado á este último resto, y que se tenga $r_3=1$: en este caso, la última ecuacion de condicion se convertirá en

$t''' = \dfrac{k_4 - t''}{r_2}$, de la cual se deduce $r_2 t''' + t'' = k_4$ [4].

En esta ecuacion, el coeficiente de t'' es la unidad, y por consiguiente se tendrá $t'' = k_4 - r_2 t'''$; de modo, que dando valores enteros á t''', se hallarán valores enteros para t''; siendo t'' y t''' números enteros, los valores de t' tambien serán enteros, y lo mismo los de t, y y x.

Ahora, para hallar las fórmulas que directamente nos dan los valores de las incógnitas x é y, no tenemos más que eliminar las indeterminadas t, t' y t'' entre las fórmulas que hemos hallado en las ecuaciones [1], [2], [3] y [4]: así, efectuando esta eliminacion por el método de sustitucion, hallaremos para x é y las fórmulas que resuelven la cuestion en números enteros, y que serán de la forma

$$x = \alpha + At, \text{ é } y = \beta + Bt;$$

siendo t la última indeterminada, en la cual hemos suprimido los acentos por ser ya inútiles.

* 396. Cuando en el numerador de alguna de las fracciones que se igualan á las indeterminadas t, t', t''... hay un factor comun, se simplifica mucho el cálculo, poniendo de manifiesto dicho factor; y como éste será siempre primo con el denominador, podrá suprimirse haciendo dicha funcion igual al producto de una indeterminada por el factor de que se trata.

Supongamos que la fraccion $\dfrac{k_1 - ry}{a}$ tiene en su numerador el factor m, el cual puesto de manifiesto, y llamando k_1' y r' los cocientes de dividir k_1 y r por m, se tendrá $\dfrac{m(k_1' - r'y)}{a}$; y como los coeficientes a, b y k son primos entre sí dos á dos, a tiene que ser tambien un número primo con k_1 y r, y por consiguiente con m. Siendo el número a primo con m, y debiendo dividir á $m(k_1' - r'y)$, dividirá necesariamente á $k_1'-r'y$; de modo, que se deberá tener $\frac{k_1-r'y}{a}=t$, de donde se deduce $\frac{k_1-ry}{a}=mt$.

Donde vemos, que en vez de la ecuacion [2], hallaremos, mediante esta simplificacion, la ecuacion de coeficientes más sencillos $at+r't=k_1'$.

* 397. Una vez halladas las fórmulas $x=\alpha+\mathrm{A}t$ é $y=\beta+\mathrm{B}t$, que dan las soluciones enteras dando á t valores enteros, podremos establecer las condiciones para que sean los valores de x é y, además de enteros, positivos; para lo cual sólo daremos á la indeterminada t los valores comprendidos entre los límites que se deduzcan de las desigualdades $\alpha+\mathrm{A}t>0$ y $\beta+\mathrm{B}t>0$; cuyos límites podrán comprender un número infinito de valores enteros para t, en cuyo caso será tambien infinito el número de soluciones enteras y positivas de la ecuacion propuesta; estos límites podrán comprender un número limitado de valores enteros para t, y por último no comprender ningun número entero, teniendo en el primero de estos dos casos la ecuacion propuesta un número limitado tambien de soluciones enteras y positivas, y en el segundo ninguna solucion.

Ejemplo I. Hallar las soluciones enteras y positivas de la ecuacion $37x-53y=123$.

Despejando x, por ser la incógnita que tiene menor coeficiente, será

$$x=\frac{53y+123}{37}=y+3+\frac{16y+12}{37}.$$

Para que x pueda ser un número entero, es necesario que sea un número entero tambien la fraccion $\frac{16y+12}{37}=\frac{4(4y+3)}{37}$; y como 4 y 37 son dos números primos entre sí, tendrá que dividir necesariamente 37 á $4y+3$; de modo, que haciendo

$$t=\frac{4y+3}{37}, \text{ se tendrá } x=y+3+4t;$$

y despejando el valor de y en esta ecuacion de condicion, hallaremos

$$y=\frac{3+37t}{4}=-1+9t+\frac{1+t}{4}.$$

Si hacemos ahora $t'=\frac{1+t}{4}$, en cuyo caso $y=-1+9t+t'$, se hallará $4t'=1+t$, de donde $t=4t'-1$: fórmula que dará valores enteros para t, siempre que á t' demos tambien valores enteros.

Sustituyendo en los valores de x é y el valor de t, hallaremos las fórmulas que dan las soluciones enteras de la ecuacion propuesta $x=-11+53t'$ é $y=-10+37t'$.

Si queremos que las soluciones sean además de enteras positivas, hallaremos los límites de los valores enteros que debemos dar á t', por medio de las desigualdades $-11+53t'>0$ y $-10+37t'>0$.

De la primera se deduce $t'>\frac{11}{53}$, y de la segunda $t'>\frac{10}{37}$; luego dando á t' valores mayores que el mayor de estos dos límites, se tendrán todas las soluciones enteras y positivas de la ecuacion dada. Así, á t' se le podrán dar los valores $t'=1, 2, 3,...$ y los valores correspondientes de las incógnitas serán $x=42, 95, 148,...$ $y=27, 54, 91,...$

Ejemplo II. Hallar las soluciones enteras y positivas de la ecuacion $139x+447y=453$.

Despejando la x, se hallará

$$x=\frac{453-447y}{139}=3-3y+\frac{36-30y}{139}.$$

Haciendo $\frac{6(6-5y)}{139}=6t$, hallaremos

$$\frac{6-5y}{139}=t \text{ y } x=3-3y+6t.$$

De la primera relacion se saca $5y+139t=6$, de donde

$$y=\frac{6-139t}{5}=1-28t+\frac{1+t}{5}.$$

Haciendo $\frac{1+t}{5}=t'$, se tendrá $t=-1+5t'$ é $y=1-28t+t'$.

Eliminando la indeterminada t, hallaremos las fórmulas que dan para x é y valores enteros

$$y=29-139t',$$
$$x=-90+447t'.$$

Si queremos hallar los límites de los valores de t', para que las soluciones de la ecuacion propuesta sean además de enteras positivas, haremos $29-139t'>0$ y $-90+447t'>0$, de donde sacaremos $t'<\frac{29}{139}$ y $t'>\frac{90}{447}$.

Cuyos límites nos dicen que no tiene la ecuacion propuesta soluciones positivas.

EJEMPLO III. Sea la ecuacion cuyas soluciones enteras y positivas queremos hallar $1155x+483y=4305$.

Esta ecuacion es divisible por 7, de modo que efectuando la division, se tendrá $165x+69=615$.

El coeficiente de y, y la cantidad constante tienen el factor comun 3, de modo que simplificando se tendrá, despues de hacer $x=3x'$,

$$165x'+23\,y=205.$$

El coeficiente de x' y la cantidad 205, tienen el factor comun 5, haciendo $y=5\,y'$, se hallará simplificando

$$33x'+23\,y'=41.$$

Esta ecuacion está totalmente reducida, y aplicándole el método del análisis indeterminado, hallaremos

$$y'=\frac{41-33x'}{23}=1-x'+\frac{18-10x'}{23}.$$

Como el numerador de la fraccion anterior, tiene el factor 2, se podrá poner bajo la forma $\frac{2(9-5x')}{23}$, y debiendo dividir 23 al numerador para que el valor de y' sea entero, dividirá necesariamente á $9-5x'$, por ser primos entre sí 2 y 23, de modo que haciendo

$$\frac{2(9-5x')}{23}=2t \text{ ó } \frac{9-5x'}{23}=t,$$

se tendrá $\qquad y'=1-x'+2t.$

De la relacion de condicion se deduce

$$5x'+23t=9,\quad x'=\frac{9-23t}{5}=1-5t+\frac{4+2t}{5},$$

y haciendo $\qquad \frac{2(2+t)}{5}=2t' \text{ ó } \frac{2+t}{5}=t',$

hallaremos $x'=1-5t+2t'$,

de la relacion $\frac{2+t}{5}=t'$, se saca $t=-2+5t'$.

Sustituyendo este valor de t, en el de x', se hallará

$$x'=1+10-25t'+2t'=11-23t',$$

y sustituyendo este valor de x' y el de t en el valor de y', tendremos $y'=1-11+23t'-4+10t'=-14+33t'$.

Sustituyendo ahora los valores de x' é y', en los de x é y hallaremos las fórmulas que dan las soluciones enteras

$$x=33-69t' \quad \text{é} \quad y=-70+165t'.$$

Si queremos hallar los límites de los valores de t' para que los de x é y sean positivos, haremos

$$33-69t'>0 \text{ y } -70+165t'>0,$$

de donde deduciremos $t'<\frac{33}{69}$ y $t'>\frac{70}{165}$.

Límites, que como en el caso anterior, no comprenden ningun valor entero de t', y por consiguiente la ecuacion propuesta tiene soluciones enteras, pero negativas.

Ejemplo IV. Sea, por último, la ecuacion con dos incógnitas, cuyas soluciones enteras y positivas queremos hallar,

$$21x+13y=500.$$

Despejando á y, y continuando el cálculo, hallaremos sucesivamente.

$$y=\frac{500-21x}{13}=38-2x+\frac{6+5x}{13}=38-2x+t;$$

$$6+5x=13t,$$

$$x=\frac{13t-6}{5}=3t-1-\frac{2t+1}{5}=3t-1-t';$$

$$2t+1=5t',$$

$$t=\frac{5t'-1}{2}=2t'+\frac{t'-1}{2}=2t'+t'';$$

$$t'-1=2t'',$$

$$t'=1+2t''.$$

Hallando ahora los valores de x é y en funcion de t'', tendremos, haciendo la sustituciones sucesivas,

$$t=2+4t''+t''=2+5t'',$$
$$x=6+15t''-1-1-2t''=4+13t'',$$
$$y=38-8-26t''+2+5t''=32-21t''.$$

De modo, que quitando los acentos como innecesarios, hallaremos las fórmulas $x=4+13t$ é $y=32-21t$, que nos dan las soluciones enteras de la ecuacion propuesta, para lo cual no hay más que dar valores enteros á la indeterminada t.

Si queremos hallar los límites de los valores que t puede recibir, para que los de x é y sean además de enteros positivos, estableceremos las relaciones siguientes:

$$4+13t>0 \text{ y } 32-21t>0;$$

de donde se deducirá $t>-\frac{4}{13}$ y $t<\frac{32}{21}$.

Por consiguiente, los únicos valores que t podrá recibir, serán $t=0$ y $t=1$, á los cuales corresponden

$$\begin{matrix} x=4 \\ y=32 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} x=17 \\ y=11. \end{matrix}$$

LECCION XLII.

Análisis de las fórmulas $x=\alpha+At$, $y=\beta+Bt$. Consecuencia que de este análisis resulta.—Casos particulares en que puede hallarse con facilidad una primera solucion.—Problemas.

Análisis de las fórmulas $x=\alpha+At$ $y=\beta+Bt$. Consecuencia que de este análisis resulta.

* 398. Hemos visto en la leccion anterior que, aplicando á la ecuacion de coeficientes enteros y totalmente reducida

$$ax+by=k \qquad [1],$$

el método general del análisis indeterminado, llegamos á obtener las fórmulas de la forma

$$x=\alpha+At \text{ é } y=\beta+Bt;$$

las cuales dan los valores enteros de x é y, siempre que á la indeterminada t demos valores enteros, tanto positivos como negativos.

De la forma de estas fórmulas se deduce á primera vista, que las cantidades α y β indican ya una solucion de la ecuacion [1], pues corresponden al valor especial $t=0$.

Respecto de los coeficientes A y B que tiene la indeterminada t en las fórmulas, observaremos que en todos los ejemplos que hemos resuelto, A es igual al coeficiente que tiene y en la ecuacion propuesta, tomado con el mismo signo que tiene ó con signo contrario; y B es igual al coeficiente de x, tomado con signo contrario ó con el mismo que tiene.

Para probar que esta propiedad es general, y que por consiguiente se verifican siempre las igualdades

$$A=\pm b \text{ y } B=\mp a,$$

dando orígen á las fórmulas generales de los valores de las incógnitas

$$x=\alpha\pm bt \text{ é } y=\beta\pm at,$$

partiremos siempre de la hipótesis que α y β forman una solucion de la ecuacion [1], correspondiente al valor $t=0$.

Siendo α y β una solucion de la ecuacion propuesta, se tendrá $a\alpha+b\beta=k$; cuya igualdad, restada de la ecuacion [1], dará

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0.$$

Despejando ahora á $x-\alpha$, ó $y-\beta$, tendremos

$$x-\alpha=-\frac{b(y-\beta)}{a}.$$

Siendo $x-\alpha$ una cantidad entera, el segundo miembro tiene que serlo tambien; por consiguiente, a tiene que dividir al producto $b(y-\beta)$; pero a es prima con b; luego tiene que dividir necesariamente al factor $y-\beta$, ó lo que es lo mismo, este factor será igual al producto de a por una cantidad entera t, ya sea positiva ó negativa; de modo que se tendrá, poniendo el signo de manifiesto,

$$y-\beta=\mp at, \quad \text{de donde} \quad y=\beta\mp at.$$

Sustituyendo el valor de $y-\beta$ en el de $x-\alpha$, se hallará

$$x-\alpha=-\frac{\mp bat}{a}=\pm bt, \quad \text{de donde} \quad x=\alpha\pm bt.$$

Por consiguiente, los valores enteros de las incógnitas de la ecuacion [1], estarán dados por las fórmulas generales

$$x=\alpha\pm bt \quad \text{é} \quad y=\beta\mp at,$$

los cuales se obtienen dando á t valores enteros y positivos.

De otro modo, si en la ecuacion [1] sustituimos x é y por las expresiones $\alpha+At$ y $\beta+Bt$, tendremos

$$a(\alpha+At)+b(\beta+Bt)=k,$$

ó efectuando las operaciones,

$$a\alpha+aAt+b\beta+bBt=k;$$

pero ya hemos visto, que siendo α y β una solucion de la ecuacion propuesta, se tiene $a\alpha+b\beta=k$; de modo, que restando esta igualdad de la anterior, y sacando t factor comun, se tendrá $(aA+bB)t=0$.

Verificándose esta igualdad para cualquier valor que se le dé á t, se deberá tener necesariamente

$$aA+bB=0, \quad \text{de donde} \quad \frac{A}{B}=-\frac{b}{a}.$$

Esto supuesto, de los valores generales

$$x=\alpha+At \quad \text{é} \quad y=\beta+Bt,$$

se deduce que A y B tienen que ser números primos, pues si pudieran tener un factor comun n, los valores de x é y podrian ser enteros, dando á t valores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n}$; lo cual es imposible, porque todas las igualdades de condicion que hemos establecido en el procedimiento, exigen que los valores enteros que se le den á y, hagan que lo sean tambien los de t; éstos á su vez tienen que hacer enteros á los de t', en la segunda igualdad, y así sucesivamente; luego cada una de las indeterminadas t, t', t''... no puede recibir sino valores enteros, para que los valores de x é y lo sean tambien.

Siendo A y B números primos entre sí, las fracciones $\frac{A}{B}$ y $-\frac{b}{a}$ no pueden ser iguales si no son idénticas (*Arit.* 157); luego se deberá tener $A=\pm b$ y $B=\mp a$, y por consiguiente, las fórmulas generales se reducirán, como ántes, á

$$x=\alpha\pm bt \quad \text{é} \quad y=\beta\mp at.$$

Si damos á t los valores 0, 1, 2, 3,... se obtendrán para x y para y las dos séries de valores

$$x=\alpha,\ \alpha+b,\ \alpha+2b,\ \alpha+3b,...$$
$$y=\beta,\ \beta-a,\ \beta-2a,\ \beta-3a,...$$

y

$$x=\alpha,\ \alpha-b,\ \alpha-2b,\ \alpha-3b,...$$
$$y=\beta,\ \beta+a,\ \beta+2a,\ \beta+3a,...$$

las cuales se podrán reducir á estas dos:

$$x=...\ \alpha-3b,\ \alpha-2b,\ \alpha-b,\ \alpha,\ \alpha+b,\ \alpha+2b,\ \alpha+3b,...$$
$$y=...\ \beta+3a,\ \beta+2a,\ \beta+a,\ \beta,\ \beta-a,\ \beta-2a,\ \beta-3a....;$$

cuyos números satisfacen en su formacion á una ley constante; así, los valores de x se obtienen á partir del valor α, agregando ó disminuyendo al anterior la cantidad b, y los correspondientes de y se hallarán partiendo del valor β, disminuyendo ó aumentando en en a al valor anterior.

* 399. De esta ley se deduce que, si por cualquier medio hallásemos una solucion entera de la ecuacion propuesta, podriamos hallar las demás; pues todas se hallarian comprendidas en las fórmulas $x=\alpha\pm bt$ é $y=\beta\mp at$ siendo α y β la primera solucion que hemos determinado.

Casos particulares en que puede hallarse con facilidad una primera solucion.

* 400. Puesto que de lo dicho anteriormente se deduce que una vez obtenida una primera solucion de una ecuacion de la forma $ax+by=k$, se pueden deducir todas las demás por medio de las fórmulas $x=\alpha\pm bt$ é $y=\beta\mp at$, conviene que examinemos todos aquellos casos especiales en que podemos hallar inmediatamente una solucion, sin necesidad de aplicar el método general del análisis indeterminado.

* 401. Si la ecuacion es de la forma

$$ax+by=0,$$

quedará evidentemente satisfecha por el sistema de valores $x=0$ é $y=0$: luego las fórmulas generales serán $x=bt$ é $y=-at$, en las cuales t puede recibir valores enteros positivos y negativos.

Sea la ecuacion $7x-5y=0$.

Haciendo $x=5t$, é $y=7t$, tendremos las fórmulas generales que nos dan las soluciones enteras, dando á t valores enteros positivos ó negativos.

* 402. Si el coeficiente de una incógnita es un divisor de la cantidad constante, hallaremos una primera solucion igualando esta incógnita al cociente que resulta de dividir la cantidad constante por este divisor, y la otra incógnita haciéndola igual á cero.

Sea la ecuacion $31x+11y=1331$.

Haciendo $x=0$, é $y=\frac{1331}{11}=121$, tendremos la primera solucion 0 y 121; y por las fórmulas

$$x=0\pm 11t \quad \text{é} \quad y=121\mp 31t,$$

hallaremos todas las demás, dando á t valores enteros y positivos.

* 403. Siempre que se verifique que la cantidad constante k, sea igual á la suma ó diferencia algebráicas de los coeficientes de las incógnitas, ó en general de dos múltiplos am y bn de estos coeficientes, se hallará una primera solucion haciendo $x=m$ é $y=\pm n$.

Sea la ecuacion $19x+17y=36$.

Como se verifica la igualdad $19+17=36$, haciendo $x=1$ é $y=1$, se tendrá una primera solucion, y las fórmulas generales serán

$$x=1\pm 17t \quad \text{é} \quad y=1\mp 19t.$$

Sea, en segundo lugar, la ecuacion

$$11x-13y=59.$$

Como en esta ecuacion se verifica evidentemente la relacion

$$11\times 3-13\times -2=59,$$

tendremos una primera solucion haciendo $x=3$ é $y=-2$, y por consiguiente las fórmulas generales serán

$$x=3\pm 13t \quad \text{é} \quad y=-2\pm 11t.$$

Consideremos, por último, la ecuacion $23x+17y=48$.

En esta ecuacion se tiene

$$23-17=6, \quad \text{de donde} \quad 23\times 8-17\times 8=48.$$

Por lo tanto, una primera solucion será $x=8$ é $y=-8$, y las fórmulas generales serán

$$x=8\pm 17t \quad \text{é} \quad y=-8\mp 23t.$$

Problemas.

I. *Se quiere hacer un pago de 223 reales con pesetas y napoleones.*

Si representamos por x el número de pesetas, y por y el de napoleones, se tendrá la ecuacion $4x+19y=223$, cuyas soluciones enteras y positivas resolverán la cuestion.

Como en esta ecuacion se verifica la igualdad $4\times5-19=1$, de donde $4\times5\cdot223-19\times223=223$, se tendrá por primera solucion entera $x=5\cdot223=1115$ é $y=-223$, y por consiguiente las fórmulas generales, serán

$$x=1115-19t \text{ é } y=-223+4t;$$

y como los valores de x é y han de ser positivos además de enteros, los valores de t se hallarán comprendidos entre los límites $t>\frac{223}{4}=55\frac{3}{4}$ y $t<\frac{1115}{19}=58\frac{13}{19}$; luego los únicos valores que puede recibir t, son 56, 57 y 58; y por consiguiente, el problema sólo tiene las tres soluciones siguientes:

$$t=56,\ldots\ x=51,\ y=1;$$
$$t=57,\ldots\ x=32,\ y=5;$$
$$t=58,\ldots\ x=13,\ y=9.$$

II. *En un dia de campo se han gastado 2625 rs. por una reunion de hombres y mujeres que pasa de treinta personas y no llega á cuarenta; cada hombre ha pagado 95 rs. y cada mujer 50. Se quiere saber cuántos hombres y cuántas mujeres formaban la reunion.*

Sea x el número de hombres, é y el de mujeres y se tendrá la ecuacion $95x+50y=2625$, que simplificada, se reduce á $19x+10y=525$.

Como en esta ecuacion se verifica la igualdad $-19+10\cdot2=1$, de donde $19\times-525+10\times2\cdot525=525$, se hallará una primera solucion, haciendo $x=-525$ é $y=2\cdot525=1050$, y por tanto las fórmulas generales, serán

$$x=-525+10t \text{ é } y=1050-19t.$$

Y como los valores de x é y han de ser enteros y positivos, se tendrá $-525+10t>0$ y $1050-19t>0$, de donde $t>\frac{525}{10}=52\frac{1}{2}$ y $t<\frac{1050}{19}=55\frac{5}{19}$, luego los únicos valores enteros que puede recibir la indeterminada t son 53, 54 y 55: por consiguiente las soluciones enteras y positivas que verifican á la ecuacion, son las siguientes:

$$t=53\ldots\ x=5,\ y=43;$$
$$t=54\ldots\ x=15,\ y=24;$$
$$t=55\ldots\ x=25,\ y=3.$$

De estas tres soluciones se deben desechar la primera y tercera; pues no cumplen con la condicion de formar una reunion que pase de 30 personas y no llegue á 40; únicamente la segunda cumple con esta condicion, y por lo tanto diremos que la reunion se compone de 39 personas; 15 hombres y 24 mujeres, como es fácil comprobar.

LECCION XLIII.

Soluciones enteras y positivas de un sistema de m ecuaciones con $m+1$ incógnitas.—Soluciones enteras y positivas de un sistema cuyo número de incógnitas es superior en más de una unidad al de ecuaciones.

Soluciones enteras y positivas de un sistema de m ecuaciones con $m+1$ incógnitas.

* **404.** En la investigacion de las soluciones enteras y positivas de un sistema de m ecuaciones con $m+1$ incógnitas, principiaremos por el caso más sencillo de dos ecuaciones con tres incógnitas, y sean estas

$$\begin{aligned} ax+by+cz&=k \\ a'x+b'y+c'z&=k' \end{aligned} \qquad [1].$$

Segun lo que ya hemos dicho anteriormente (392), estas ecuaciones, despues de simplificadas (393), no pueden ser satisfechas por números enteros si los coeficientes a, b y c, lo mismo que a', b' y c' no son primos entre sí; suponiendo que esta condicion se verifica, tratemos de hallar las soluciones enteras de este sistema.

Eliminemos por el método de reduccion una de las incógnitas, la z por ejemplo, y obtendremos la ecuacion

$$(ac'-ca')x+(bc'-cb')y=kc'-ck' \qquad [2],$$

que, una vez simplificada, podrá reducirse á

$$Ax+By=K \qquad [3].$$

Si los coeficientes A y B son primos entre sí, esta ecuacion tendrá soluciones enteras, las cuales se obtendrán por las fórmulas $x=\alpha'+Bt$ é $y=\beta'-At$, cuyos valores enteros de x é y unidos con ciertos valores enteros de z darán las soluciones enteras del sistema de ecuaciones propuesto. Para determinar estos valores de z, sustituiremos en una de las ecuaciones [1] los valores generales de las fórmulas anteriores, y obtendremos la nueva ecuacion

$$(aB-bA)t+cz=k-a\alpha-b\beta \qquad [4],$$

que deberá ser satisfecha por valores enteros de z y t; de modo que si esta ecuacion simplificada cumple con la condicion de tener sus coeficientes primos entre sí, tendrá una infinidad de soluciones enteras, que se deducirán de las fórmulas

$$z=\gamma+(aB-bA)t_1 \quad \text{y} \quad t=\delta+ct_1.$$

Sustituyendo, ahora, el valor de t en las fórmulas anteriores, obtendremos otras de la forma

$$x=\alpha+Mt_1, \quad y=\beta+Nt_1 \quad \text{y} \quad z=\gamma+Pt_1,$$

las cuales, dando á t_1 valores enteros, tanto positivos como negativos, darán todas las soluciones enteras del sistema propuesto.

* 405. Si los coeficientes de la incógnita que se elimina son primos entre sí, no hay necesidad de aplicar el método del análisis indeterminado más que á la ecuacion [2], pues la [4]. que resulta de sustituir en una de las propuestas las fórmulas generales de la ecuacion [2], contiene, despues de simplificada, á la incógnita z con un coeficiente igual á la unidad.

En efecto, si suponemos que α y β sea una primera solucion de la ecuacion [2], las fórmulas generales serán

$$x=\alpha+(bc'-cb')t \quad \text{é} \quad y=\beta+(ca'-ac')t,$$

cuyas expresiones sustituidas en una de las ecuaciones propuestas, en la primera por ejemplo, darán, despues de toda reduccion

$$(ba'-ab')t+z=\frac{k-a\alpha-b\beta}{c} \qquad [5].$$

Ahora bien, siendo α y β una primera solucion de la ecuacion [2], se tendrá $ac'\alpha-ca'\alpha+bc'\beta-cb'\beta=kc'-ck'$, de donde se deduce $c(k'-a'\alpha-b'\beta)=c'(k-a\alpha-b\beta)$.

Siendo el primer miembro de esta igualdad divisible por c, el segundo tambien lo será; pero c es por hipótesis, un número primo con c', luego c tiene que dividir necesariamente al factor $k-a\alpha-b\beta$, de modo que llamando γ al cociente, se tendrá

$$\frac{k-a\alpha-b\beta}{c}=\gamma.$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion [5], se hallará

$$(ba'-ab')t+z=\gamma, \qquad [6]$$

de donde $$z=\gamma+(ab'-ba')t.$$

Donde vemos que la ecuacion [5] da inmediatamente el valor de z, en funcion de t; y las fórmulas que dan las soluciones enteras del sistema de ecuaciones propuesto, serán

$$x=\alpha+(bc'-cb')t,\ y=\beta+(ca'-ac')t,\ z=\gamma+(ab'-ba')t.$$

* 406. Si los coeficientes de la incógnita que se elimina tienen el factor comun m, no llegaremos á obtener la ecuacion [6], y sí otra en la cual la incógnita que se eliminó tendrá por coeficiente el factor comun m que tenian los coeficientes.

De todo lo dicho podremos deducir que:

* 407. *Para hallar las soluciones enteras de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, se principia por eliminar la incógnita cuyos coeficientes sean primos entre sí, y si ninguna goza de esta propiedad, se eliminará aquella cuyos coeficientes tengan el menor factor comun; despues se hallan las fórmulas que dan las soluciones enteras de la ecuacion resultante, las cuales sustituidas en una de las ecuaciones propuestas, darán una nueva ecuacion cuyas incógnitas serán la indeterminada* t *de las fórmulas anteriores y la incógnita eliminada, la cual tendrá por coeficiente la unidad, si sus coeficientes en las ecuaciones propuestas eran primos entre sí; y si no lo eran, tendrá por coeficiente el factor comun que tuvieran.*

EJEMPLO I. Sean las ecuaciones

$$3x+5y-7z=4$$
$$7x+3y-9z=10.$$

Eliminando la y que tiene los coeficientes más pequeños, obtendremos la ecuacion

$$26x-24z=38 \text{ ó } 13x-12z=19,$$

la cual se verifica evidentemente por los valores $x=19$, $z=19$; luego las fórmulas generales serán

$$y=19+12t,\quad z=19+13t,$$

que sustituidas en la primera de las ecuaciones propuestas, dan, despues de hecha toda reduccion,

$$y-11t=16, \text{ de donde } y=16+11t.$$

Luego las fórmulas que dan las soluciones enteras de las ecuaciones propuestas, son

$$x=19+12t,\quad y=16+11t \text{ y } z=19+13t.$$

II. Sean las dos ecuaciones

$$8x+6y-7z=13$$
$$12x-9y+5z=7.$$

Si eliminamos la z que tiene sus coeficientes primos entre sí, hallaremos la ecuacion $124x-33y=114$, la cual se podrá reducir á $62x'-11y'=19$, haciendo $x=3x'$ é $y=2y'$, segun se ha explicado ya (393).

Las fórmulas que resuelven esta ecuacion, son

$$x'=-2+11t,\quad y'=-13+62t;$$

y por tanto las de la ecuacion anterior serán

$$x=-6+33t,\ y=-26+124t,$$

las cuales sustituidas en una de las ecuaciones propuestas, en la primera por ejemplo, dan la ecuacion

$$7z-1008t=-217 \quad ó \quad z-144t=-31,$$

de la cual se saca la tercer fórmula $z=-31+144t$, que unida con las dos primeras dan las soluciones enteras del sistema propuesto.

Si en vez de eliminar la z como se debe segun la regla, hubiéramos eliminado cualquiera de las otras dos incógnitas cuyos coeficientes no son primos entre sí, hubiéramos llegado á una de las ecuaciones

$$48x-11z=53 \quad ó \quad 36y-31z=25,$$

segun que fuese y ó x la incógnita eliminada; de la segunda se deducen inmediatamente las fórmulas

$$y=5+31t \ \text{ y } \ z=5+36t,$$

las cuales sustituidas en la primera de las ecuaciones dadas, tendremos, haciendo todas las reducciones $4x-33t=9$.

Donde vemos que el coeficiente de la incógnita x, es el factor comun 4 que tienen los dos coeficientes 8 y 12 en las ecuaciones propuestas.

De esta ecuacion se deduce inmediatamente la primera solucion $x=27$ y $t=3$; por consiguiente las fórmulas serán

$$x=27+33t_1 \text{ y } t=3+4t_1,$$

sustituyendo, ahora, el valor de t en las fórmulas anteriores, hallaremos las que resuelven el problema en números enteros, que son

$$x=27+33t_1,\ y=98+124t_1,\ z=113+144t_1.$$

* 408. Si además de ser enteros los valores de x, y, z, quisiéramos que fueran positivos, estableceriamos esta condicion, haciendo que sea mayor que cero cada una de las expresiones que dan los

valores de las incógnitas, y de las desigualdades que resultan se deducirán los límites de los valores enteros que puede recibir la indeterminada t ó t_1. Así, en el ejemplo presente tendremos

$$-6+33t>0, \quad -26+124t>0, \quad -31+144t>0,$$

ó si se consideran las otras fórmulas, se tendrán las relaciones

$$27+33t_1>0, \quad 98+124t_1>0, \quad 113+144t_1>0.$$

De las primeras se deducen los límites

$$t>\frac{2}{11}, \quad t>\frac{13}{62}, \quad t>\frac{31}{144};$$

donde vemos que dando á t valores mayores que el mayor de estos límites, hallaremos una infinidad de soluciones enteras y positivas del sistema propuesto.

De las segundas desigualdades, sacaremos los límites

$$t_1>-\frac{9}{11}, \quad t_1>-\frac{49}{62}, \quad t_1>-\frac{113}{144},$$

que tambien dan para t_1, una infinidad de valores enteros, que cumplen con la condicion de hacer positivos los de las incógnitas de la cuestion.

* 409. Consideremos, ahora, un sistema cualquiera de m ecuaciones con $m+1$ incógnitas.

Si eliminamos una de las incógnitas, podremos reemplazar el sistema propuesto por otro compuesto de una de las ecuaciones dadas que contenga la incógnita eliminada, y de las $m-1$ ecuaciones que resultan de la eliminacion y que no la contienen. Este segundo sistema lo podremos reemplazar por otro compuesto de la primera ecuacion del primero, más otra del segundo que no contiene á la incógnita eliminada, más las $m-2$ ecuaciones que resultan de eliminar una tercer incógnita entre las $m-1$ ecuaciones anteriores. Eliminando despues otra nueva incógnita, obtendremos otro sistema que reemplazará al primero, y que se compondrá de una ecuacion del propuesto, otra que no contiene á la incógnita que primeramente se eliminó, otra que no contendrá tampoco á la segunda, otra que contendrá á la últimamente eliminada y $m-3$ que contendrán á las $m-2$ incógnitas restantes, y eliminando sucesivamente cada una de estas incógnitas, llegaremos á obtener una última ecuacion con dos incógnitas á la cual asociando una ecuacion de cada uno de los sistemas anteriores, obtendremos uno que reemplazará al primero y que se compondrá de una ecuacion del sistema propuesto, de otra que tendrá una incógnita ménos, resultado de la eliminacion de dicha incógnita en el sistema dado, de otra del sistema que se deriva inmediatamente por la eliminacion de una nueva incógnita, y así sucesivamente hasta obtener una ecuacion de tres incógnitas, y la última que tendrá dos.

De esta última podremos deducir las fórmulas que dan los valores enteros de las dos incógnitas que contiene en funcion de una indeterminada t, cuyas fórmulas sustituidas en la ecuacion anterior que tiene una incógnita más, darán otra ecuacion dependiente de esta tercer incógnita y de la indeterminada t, que una vez resuelta dará en general los valores de la tercer incógnita y de t en funcion de una nueva indeterminada t_1; de modo, que sustituyendo el valor de t en las fórmulas halladas anteriormente, tendremos las fórmulas que dan los valores de tres incógnitas en funcion de la sola indeterminada t_1.

Estas fórmulas las sustituiremos en la ecuacion anterior que además de estas tres incógnitas contendrá una cuarta, dando orígen así á otra ecuacion dependiente de esta cuarta incógnita y de la indeterminada t_1; resolveremos esta ecuacion y hallaremos las fórmulas correspondientes en funcion de una nueva indeterminada t_2, se sustituirá el valor de t_1 en los valores de las tres primeras incógnitas, y obtendremos las fórmulas que dan los valores de las cuatro primeras incógnitas en funcion de la indeterminada t_2.

Continuando del mismo modo, llegaremos á obtener en funcion de una última indeterminada t_n, las fórmulas generales que dan las soluciones enteras del sistema propuesto.

* 410. Si quisiéramos que además de ser estas soluciones enteras fuesen positivas, hariamos que fuesen mayor que cero las expresiones que dan los valores de las incógnitas, y de las desigualdades que resultasen, deduciriamos una série de límites para los valores de la indeterminada t_n; si todos estos límites están en un mismo sentido, dando á t_n valores mayores ó menores que el mayor ó menor límite, segun que éstos sean inferiores ó superiores, tendremos lo que se desea; pero si unos de los límites son superiores y otros inferiores, daremos á t_n los valores enteros que haya comprendidos entre el límite menor de los primeros y mayor de los segundos; si entre estos dos límites no hay comprendido ningun número entero, ó son

contradictorios, el sistema propuesto no podrá admitir soluciones positivas.

Aplicando cuanto hemos dicho al sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas

$$2x+3y+4z+7u=11$$
$$3x+5y-7z+2u=1$$
$$6x-2y+2z-3u=3,$$

hallaremos las fórmulas generales

$$x=28-67t,\quad y=-184+454t$$
$$z=-85+211t,\quad u=121-296t.$$

Siendo los límites de los valores de t contradictorios, como fácilmente podremos ver, el sistema propuesto no puede tener soluciones enteras positivas.

Soluciones enteras y positivas de un sistema cuyo número de incógnitas es superior en más de una unidad al de ecuaciones.

*411. Sea el caso más sencillo de una ecuacion con tres incógnitas

$$ax+by+cz=k \qquad [1],$$

en la cual podrá suceder que haya dos coeficientes primos entre sí, ó que cada dos tengan un factor comun.

Si hay dos coeficientes a y b que son primos entre sí, se pasará el tercer término cz al segundo miembro, y haciendo $k-cz=k'$, tendremos

$$ax+by=k' \qquad [2].$$

Resolviendo esta ecuacion por los métodos ya explicados, hallaremos las fórmulas que dan los valores enteros de las incógnitas, las cuales serán de la forma $x=\alpha+bt$, $y=\beta-at$, siendo α y β números dependientes de k' que verifican la ecuacion [2]; de modo que si ponemos en ellos en vez de k' su valor $k-cz$, las fórmulas anteriores se reducirán á otras de la forma

$$x=A+A'z+bt,\quad y=B+B'z-at,$$

las cuales darán todas las soluciones enteras de la ecuacion propuesta, dando á z y t valores enteros.

Si además de ser las soluciones enteras, quisiéramos que fuesen positivas, estableceriamos las relaciones

$$A+A'z+bt>0 \text{ y } B+B'z-at>0,$$

de las cuales deduciriamos los límites de los valores de z y t.

* 412. Si los coeficientes a, b y c tienen de dos en dos un factor comun, pasaremos, como ántes, uno de los tres primeros términos, el cz por ejemplo, al segundo miembro; y representando por m el factor comun que tienen los coeficientes a y b de los términos que quedan en el primero, y por a' y b' los cocientes primos entre sí que resultan de dividir a y b por el factor comun m, tendremos que la ecuacion propuesta [1] se podrá poner bajo la forma

$$a'x+b'y=\frac{k-cz}{m} \qquad [3];$$

y como el primer miembro ha de ser un número entero, el segundo tambien tendrá que serlo; de modo que tendremos, llamando t á este número entero

$$\frac{k-cz}{m}=t \qquad [4],$$

cuyo valor sustituido en la ecuacion [3], dará la siguiente

$$a'x+b'y=t \qquad [5].$$

Resolviendo la ecuacion [4], en la cual m y c son primos entre sí, hallaremos las fórmulas generales de la forma

$$t=\delta-ct_1\ , \quad \text{y} \quad z=\gamma+mt_1\ .$$

Sustituyendo el valor de t en la ecuacion [5], resultará la nueva ecuacion, que reemplazará á la propuesta, $a'x+b'y=\delta-ct_1$, de la cual deduciremos los valores $x=\alpha-b't_2$ é $y=\beta+a't_2$, siendo α y β números que dependen de la indeterminada t_1; por consiguiente estas dos incógnitas dependerán de las dos indeterminadas t_1 y t_2, mientras que la tercer incógnita z sólo dependerá de la indeterminada t_1; de modo que, si observamos que en las dos primeras habrá términos independientes de t_1 y de t_2, términos dependientes de t_1 y otros que lo serán de t_2, podremos decir que los valores de x, y, z serán de la forma

$$x=A+A't_1-b't_2\ , \quad y=B+B't_1+a't_2\ , \quad z=\gamma+mt_1\ ;$$

donde vemos que cuando los coeficientes de las incógnitas que quedan en el primer miembro tienen un factor comun, hay que aplicar el método del análisis indeterminado á una ecuacion más que en el caso anterior.

* 413. Si se trata de hallar las soluciones enteras y positivas de una ecuacion con un número cualquiera de incógnitas, se pasan todas ménos dos al segundo miembro, teniendo cuidado de dejar en el

primero aquellas dos cuyos coeficientes sean primos entre sí; se resuelve la ecuacion que resulte con relacion á estas dos incógnitas, cuyas fórmulas vendrán en funcion entera de las demás incógnitas y de una indeterminada t, como ha sucedido anteriormente; y dando despues á t y á estas incógnitas restantes valores enteros, hallaremos valores enteros tambien para las otras dos.

Si cualquiera que sean las incógnitas que se pasen al segundo miembro, las dos que quedan en el primero tienen en sus coeficientes un factor comun, se les aplica el mismo método que ya se ha dicho (412).

* 414. Si se da un sistema cualquiera de ecuaciones con un número cualquiera tambien de incógnitas, pero que le exceda en más de una unidad, pasaremos á los segundos miembros el número de incógnitas suficientes para que en los primeros no quede más que un número de incógnitas que sólo exceda al de ecuaciones en una unidad, aplicaremos al sistema resultante el método que ya se ha explicado (409) y tendremos, suponiendo que son m las ecuaciones, los valores de $m+1$ incógnitas en funcion de las restantes y de una indeterminada t, á las cuales dando valores enteros, resultarán valores enteros tambien para las otras.

Si además de enteros quisiéramos que fuesen positivos, estableceriamos estas condiciones como ya se sabe (410).

LECCION XLIV.

Análisis indeterminado de segundo grado.

Análisis indeterminado de segundo grado.

* 415. La investigacion de las soluciones enteras y positivas de una ecuacion general de segundo grado es una de las cuestiones más difíciles del Álgebra; y no es posible resolverla por medio de la elemental sino en ciertos casos particulares que son los que nosotros vamos á considerar.

Primer caso. Sea la ecuacion de segundo grado con dos incógnitas, que carece de uno de los cuadrados de éstas, y que, siendo sus coeficientes enteros, se halla simplificada (393),

$$bxy+cx^2+dy+ex+f=0 \quad [1].$$

Resolviéndola con relacion á la incógnita cuyo cuadrado falta, tendremos;

$$y=-\frac{cx^2+ex+f}{bx+d} \quad [2].$$

Efectuando la division del trinómio cx^2+ex+f por el binómio $bx+d$, multiplicando de antemano, si fuese necesario, los dos miembros de la igualdad [2] por un factor conveniente m, para que los términos del cociente sean enteros, tendremos, llamando al cociente entero $px+q$, R al resto, el cual podrá ser cero, y cambiando por último los signos, la igualdad

$$-my=\frac{mcx^2+mex+mf}{bx+d}=px+q+\frac{\mathrm{R}}{bx+d} \quad [3].$$

Como ya hemos dicho, el resto R podrá ser ó no cero.

Si $\mathrm{R}=0$, se tendrá evidentemente

$$mcx^2+mex+mf=(px+q)\,(bx+d),$$

ó

$$-my(bx+d)=(px+q)\,(bx+d);$$

de donde se deduce, trasponiendo y sacando $bx+d$ factor comun, $(bx+d)\,(my+px+q)=0$.

Esta ecuacion queda satisfecha haciendo $bx+d=0$ y $my+px+q=0$; de la primera se deduce el valor $x=-\frac{d}{b}$, el cual, si es entero y positivo, anulará por sí á la ecuacion propuesta cualquiera que sea el valor que se le dé á la otra incógnita y, de modo que se podrán formar tantas soluciones enteras y positivas cuantas queramos, uniendo al valor constante $-\frac{d}{b}$, que suponemos ser positivo y entero, cualquier valor entero y positivo tambien de y.

Si establecemos ahora la ecuacion $my+px+q=0$, hallaremos, segun el análisis indeterminado del primer grado, las fórmulas que dan los valores enteros y positivos de x é y, en el caso de ser posible, para lo cual es necesario que se verifiquen algunas condiciones, de las cuales la principal es que m y n sean primos entre sí.

Si R no es igual á cero, es necesario para que la ecuacion propuesta se verifique en números enteros, que los valores enteros que se le den á x, reduzcan la cantidad $bx+d$ á un divisor de R; luego deberemos principiar por descomponer el número R en sus divisores simples y compuestos, y despues igualando el binómio $bx+d$ á cada uno de estos divisores, tomados sucesivamente con el signo $+$ y $-$, los valores enteros deducidos de estas ecuaciones de condicion, deberán formar parte de las soluciones que buscamos.

Sustituiremos cada uno de estos valores enteros en la ecuacion [3], y se desecharán todos aquellos que no hagan que el segundo miembro sea un múltiplo de m; y sólo formarán las soluciones que se piden, aquellos que dando por resultado en el segundo miembro un múltiplo de m, hacen que y reciba valores enteros; cada par de valores de x é y que cumpla con estas condiciones, será una solucion entera de la ecuacion.

* 416. Si además de enteras queremos que las soluciones sean positivas, desecharemos todo par de valores de x é y que no cumplan con esta doble condicion.

Segundo caso. Si la ecuacion de segundo grado carece no sólo del cuadrado de una de las incógnitas, sino tambien del producto de las mismas, se tendrá

$$cx^2+dy+ex+f=0 \qquad [2],$$

de donde

$$y=-\frac{cx^2+ex+f}{d} \qquad [3]:$$

Si ahora sustituimos en esta expresion, en vez de x, la série natural de los números 1, 2, 3,... hasta $(d-1)$, podrá suceder una de dos cosas: que haya un número α que reduzca á un número entero el valor de y, ó que no lo haya. Si α da para y un número entero, todos los valores de x deducidos de la fórmula

$$x=\alpha+dt \qquad [4],$$

en la cual se le da á t valores enteros, ya sean positivos ó negativos, dará tambien para y valores enteros.

En efecto, se tiene por hipótesis $y=-\frac{c\alpha^2+e\alpha+f}{d}=\beta$, siendo β un número entero.

Si sustituimos en la expresion [3] el valor general de x [4], hallaremos, despues de efectuar los cálculos,

$$y=-\frac{c\alpha^2+e\alpha+f}{d}-(2c\alpha+e)\,t-cdt^2;$$

ó

$$y=\beta-(2c\alpha+e)t-cdt^2.$$

Lo cual prueba que, si α es un valor entero de x que hace que el de y lo sea tambien, cualquier valor de x deducido de la fórmula $x=\alpha+dt$ cumple con la misma condicion; y las fórmulas generales que darán las soluciones enteras de la ecuacion [1], serán

$$x=\alpha+dt \text{ é } y=-\beta-(2c\alpha+e)t-cdt^2.$$

Si no hay ningun número entero menor que d que puesto en vez de x en la expresion [3] dé un valor entero tambien para y, tampoco puede haberlo mayor.

En efecto, si hubiese un número entero α' mayor que d, que diese para y un valor entero tambien, cualquier valor deducido de la fórmula $x=\alpha'+dt$, tambien lo sería, segun acabamos de demostrar; y como $\alpha'>d$, si dividimos α' por d, y llamamos q al cociente y r al resto de la division, el cual será menor que d, se tendrá $\alpha'=dq+r$.

Dando ahora á t el valor $-q$, hallaremos para x el valor menor que d, $x=dq+r-dq=r$; lo cual es imposible, pues por hipótesis, ningun valor entero menor que d da para y otro valor entero.

Si r fuese igual á cero, el valor $x=0$ daria para y un valor entero, lo cual tambien es contra la hipótesis; luego si ninguno de los valores 0, 1, 2,... $(d-1)$ puestos en vez de x, dan para y un valor entero, podemos asegurar que tampoco lo dará ningun valor de x mayor que d.

De lo dicho se deduce que para hallar las soluciones enteras de la ecuacion $cx^2+dy+ex+f=0$, se sustituirán en la expresion $y=-\frac{cx^2+ex+f}{d}$ la série de los números 0, 1, 2,... $(d-1)$; y si hallamos que uno de estos números, α por ejemplo, da para y otro número entero β, se obtendrán todas las demás soluciones por las fórmulas halladas anteriormente,

$$x=\alpha+dt \text{ é } y=\beta-(2c\alpha+e)t-cdt^2.$$

Si llegamos á sustituir el número $(d-1)$, y no hemos hallado ningun valor entero para y, podremos concluir que la ecuacion propuesta no tiene soluciones enteras.

* 417. Si quisiéramos que las soluciones fuesen además de enteras positivas, estableceríamos las condiciones

$$\alpha+dt>0 \text{ y } \beta-(2c\alpha+e)t-cdt^2>0;$$

de donde deduciriamos (385 y 390) los límites

$$t>-\frac{\alpha}{d},\quad t\gtrless\frac{-(2c\alpha+e)\pm\sqrt{(2c\alpha+e)^2+4cd\beta}}{2cd}.$$

Dando ahora á t valores enteros comprendidos entre los dos límites más próximos, hallaremos las soluciones enteras y positivas de la ecuacion propuesta.

Aplicando cuanto hemos dicho anteriormente á los ejemplos siguientes, hallaremos:

I. Ecuacion: $2xy+4x^2+3y-6x+2=0$.

Soluciones enteras: $\begin{matrix} x=-1, & x=-2, & x=1, & x=-4, \\ y=-12; & y=30; & y=0; & y=+18. \end{matrix}$

II. Ecuacion: $3xy-5x^2-4y+2x-6=0$.

Soluciones enteras:

$$\begin{matrix} x=1, & x=2, & x=3, & x=-2, & x=5, & x=-6, & x=38, \\ y=-9; & y=11; & y=9; & y=-3; & y=11; & y=-9; & y=65. \end{matrix}$$

III. Ecuacion: $8x^2-5y+15x-32=0$.

Fórmulas generales: $\begin{matrix} x=2-5t, \\ y=6-47t+40t^2. \end{matrix}$

Condiciones para que x é y sean positivas:

$$t<\frac{2}{5},\quad t\gtrless\frac{47\pm\sqrt{1249}}{80}.$$

TERCERA PARTE.

Fracciones contínuas, progresiones, exponenciales y logaritmos.

LECCION XLV.

Fracciones contínuas, su objeto, método general para convertir una cantidad fraccionaria ó inconmensurable en fraccion contínua.—Regla para convertir una fraccion ordinaria en fraccion contínua.—Expresar en fraccion contínua un número inconmensurable, tal como $\sqrt{5}$.

Fracciones contínuas, su objeto, método general para convertir una cantidad fraccionaria ó inconmensurable en fraccion contínua.

* 418. Se da el nombre de *fraccion continua* á toda expresion de la forma

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}},$$

que se compone de un número entero a, el cual podrá ser cero, seguido de una fraccion que tiene por numerador la unidad y por denominador un número entero y positivo b, seguido de otra fraccion cuyo numerador es la unidad, y cuyo denominador es otro número entero y positivo c, seguido de otra fraccion de la misma forma que las anteriores, y así sucesivamente.

Los números a, b, c, d,... se llaman *cocientes incompletos* de la fraccion contínua; las cantidades $a, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d},\ldots$ se llaman *fracciones integrantes*.

Las expresiones

$$a,\quad a+\frac{1}{b},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}},\ldots$$

reducidas á fracciones ordinarias, ó sean las expresiones

$$a,\ \frac{ab+1}{b},\ \frac{(ab+1)c+a}{bc+1},\ \frac{[(ab+1)c+a]d+ab+1}{(bc+1)d+b},\ldots$$

se llaman *reducidas ó fracciones convergentes.*

* 419. El objeto de las fracciones contínuas es hallar por medio de fracciones ordinarias irreducibles y de términos sencillos, valores aproximados de cantidades conmensurables ó inconmensurables.

En la reduccion de cantidades conmensurables ó inconmensurables á fracciones contínuas, debemos distinguir dos casos; que éstas cantidades sean conocidas, ó lo que es lo mismo, provengan de una division ó de una extraccion de raíces, ó que sean los valores de la incógnita de una ecuacion.

* 420. Para convertir una cantidad conocida A, conmensurable ó inconmensurable, en fraccion contínua, hallaremos por medio de la division ó de la extraccion de raíces, la mayor parte entera a que contiene la cantidad propuesta A, de modo que dicha cantidad se hallará comprendida entre a y $a+1$; llamando $\frac{1}{y}$ á la cantidad, menor que la unidad, que le falta á la parte entera a para ser igual á la cantidad dada A, tendremos la ecuacion de primer grado

$$A=a+\frac{1}{y} \qquad [1],$$

de la cual deduciremos el valor de y; y hallando la mayor parte entera contenida en él, y llamándola b, tendremos, como ántes, que dicho valor se hallará comprendido entre b y $b+1$, de modo que podremos establecer la ecuacion

$$y=b+\frac{1}{z} \qquad [2],$$

siendo z una cantidad mayor que la unidad.

Despejaremos el valor de z, y llamando c á la mayor parte entera que contiene, se hallará comprendido entre c y $c+1$, y por tanto se deberá tener

$$z=c+\frac{1}{u} \qquad [3],$$

y así sucesivamente.

Poniendo ahora en las ecuaciones [1], [2], [3],... los valores de y, z, u,... hallaremos la fraccion contínua

$$A=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

* 421. Si la cantidad que queremos convertir en fraccion contínua no fuese conocida, y sí el valor de una incógnita x de una ecuacion, hallaremos por tanteos dos números enteros y consecutivos a y $a+1$, que comprendan al valor de x; haremos

$$x=a+\frac{1}{y} \qquad [1],$$

siendo y una cantidad mayor que la unidad; sustituyendo este valor en la ecuacion dada, tendremos otra cuya incógnita será y; hallaremos ahora otros dos números consecutivos b y $b+1$ que comprendan al valor de y, estableceremos la igualdad

$$y=b+\frac{1}{z} \qquad [2],$$

en la que z es mayor que la unidad, sustituiremos este valor de y en la ecuacion anterior, y hallaremos una nueva ecuacion en z; determinaremos como ántes dos números c y $c+1$ que comprendan al valor de z, haremos

$$z=c+\frac{1}{u} \qquad [3],$$

sustituiremos el valor de z en la ecuacion anterior, y así sucesivamente.

Poniendo ahora en las igualdades [1], [2], [3],... los valores de y, z, u,... tendremos el valor de x bajo la forma de fraccion contínua

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

Regla para convertir una fraccion ordinaria en fraccion contínua.

* 422. *Para convertir una fraccion ordinaria en fraccion contínua se ejecutan con sus dos términos las mismas operaciones que para hallar su máximo comun divisor, y los cocientes que resulten serán los cocientes incompletos de la fraccion contínua.*

En efecto, sea la fraccion ordinaria $\frac{A}{B}$ la que queremos reducir á fraccion contínua. Aplicándole el método general expuesto anteriormente, principiaremos por hallar la mayor parte entera que dicha fraccion contiene, para lo cual dividiremos A por B, y llamando a al cociente entero, y R al resto, tendremos

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
A & B & R & R' & R'' & R''' \\ \cline{2-6}
 & a & b & c & d & e \\
R & R' & R'' & R''' & R^{IV} &
\end{array}$$

que la fraccion dada se podrá poner bajo la forma siguiente

$$\frac{A}{B}=a+\frac{R}{B}=a+\frac{1}{\frac{B}{R}}.$$

La fraccion $\frac{B}{R}$, que es el valor de la incógnita y usada en el método general, es conocida; hallemos la mayor parte entera contenida en ella por la division de B por R, que es la segunda empleada en el *m. c. d.*; de modo, que llamando b al cociente entero, y R′ al resto, hallaremos, como anteriormente

$$\frac{B}{R}=b+\frac{R'}{R}=b+\frac{1}{\frac{R}{R'}}.$$

Haciendo lo mismo con la fraccion $\frac{R}{R'}$, que es el valor de la incógnita z del método general, tendremos

$$\frac{R}{R'}=c+\frac{R''}{R'}=c+\frac{1}{\frac{R'}{R''}}.$$

De la misma manera hallaremos

$$\frac{R'}{R''}=d+\frac{R'''}{R''}=d+\frac{1}{\frac{R''}{R'''}};\ \frac{R''}{R'''}=e+\frac{R^{IV}}{R'''}=\text{etc.}$$

Y continuando así esta série de operaciones, llegaremos á una en que el resto de la division será cero, puesto que cada uno de ellos es menor que el anterior por lo ménos en una unidad.

Supongamos, para fijar las ideas, que este último resto sea R^{IV}, es decir, que $R^{IV}=0$; en este caso, el valor de la fraccion propuesta se podrá expresar por medio de las igualdades establecidas anteriormente, por la fraccion contínua

$$\frac{A}{B}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}},$$

en la cual los cocientes incompletos a, b, c, d, e son los cocientes que se obtienen en las divisiones que se practican para hallar el *m. c. d.* de los números A y B, conforme hemos dicho en la regla.

Ejemplo I. Sea la fraccion $\frac{1384}{753}$ la que queremos convertir en fraccion contínua.

Aplicando á los dos números 1384 y 753 el procedimiento del *m. c. d.*, hallaremos los cocientes incompletos de la fraccion contínua; así,

1384	753	631	122	21	17	4	1
631	1	1	5	5	1	4	4
	122	21	17	4	1	0	

La fraccion contínua equivalente á la fraccion propuesta, será, segun la regla,

$$\frac{1384}{753}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}}}}.$$

EJEMPLO II. Sea la fraccion propia $\frac{123}{478}$ la que se quiere convertir en fraccion contínua.

Como la parte entera de esta fraccion es cero, la fraccion contínua equivalente no tendrá parte entera. Así hallaremos,

478	123	109	14	11	3	2	1
109	3	1	7	1	3	1	2
	14	11	3	2	1	0	

Luego será $$\frac{123}{478}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}}.$$

* 423. Si fuese una fraccion decimal la que se quisiera convertir en fraccion contínua, podria suceder que esta decimal fuese exacta, periódica pura, periódica mixta, ó inexacta de un número infinito de cifras. En los tres primeros casos se hallaria la fraccion ordinaria equivalente á la fraccion decimal propuesta, y esta fraccion ordinaria se convertiria en fraccion contínua segun la regla anterior. En el cuarto caso, es decir, cuando la decimal no sea exacta, y por consiguiente sólo nos exprese el valor aproximado de una cantidad, podremos hallar tambien en fraccion contínua este valor aproximado segun la siguiente regla:

* 424. *Para convertir una fraccion decimal inexacta en fraccion contínua, aumentaremos ó disminuiremos su última cifra en una unidad, segun que la decimal esté aproximada por defecto ó por exceso, obteniendo así dos límites que comprenden el verdadero valor de la cantidad propuesta; reduciremos simultáneamente á fracciones contínuas ambos límites, y continuaremos la operacion hasta llegar á dos cocientes distintos, en cuyo caso la fraccion contínua que expresa el valor aproximado de la cantidad dada, será la que tenga por cocientes incompletos los cocientes que sea n comunes á ambas operaciones.*

En efecto, supongamos que la cantidad X se halla comprendida entre otras dos A y B, y que desarrollando cada una de estas tres cantidades en fraccion contínua, hallamos los valores siguientes:

$$A=a+\frac{1}{\alpha},\quad \alpha=b+\frac{1}{\alpha'},\quad \alpha'=c+\frac{1}{\alpha''},\ldots$$

$$B=a+\frac{1}{\beta},\quad \beta=b+\frac{1}{\beta'},\quad \beta'=c+\frac{1}{\beta''},\ldots$$

$$X=a'+\frac{1}{x},\quad x=b'+\frac{1}{x'},\quad x'=c'+\frac{1}{x''},\ldots$$

Estando el valor de X comprendido entre los de A y B, y teniendo estas dos últimas cantidades una misma parte entera a, necesariamente la cantidad X tendrá la misma parte entera y por tanto tendremos $a'=a$; las fracciones $\frac{1}{\alpha}$ y $\frac{1}{\beta}$ comprenderán la fraccion $\frac{1}{x}$, luego el valor de x estará comprendido entre α y β. Del mismo modo deduciremos que $b'=b$, y que el valor de x' se halla comprendido entre los valores de α' y β', lo cual dará que $c'=c$, y que α'' y β'' comprenden á x'', y así de todos los demás; luego los cocientes incompletos que sean comunes á las dos primeras fracciones contínuas, pertenecerán tambien á la tercera.

Ejemplo. Sea el número, notable por el uso frecuente que de él se hace en análisis, $e=2,71828\ldots$, el que se quiere convertir en fraccion contínua.

Estando aproximado el número e por defecto en ménos de una unidad del quinto órden, aumentaremos á su última cifra una unidad, y obtendremos por límite superior del número e la decimal 2,71829 cuyos dos límites se podrán poner bajo la forma $\frac{271828}{100000}$ y $\frac{271829}{100000}$.

Aplicando, ahora, á estas fracciones la regla para convertirlas en fracciones contínuas, hallaremos, segun el cuadro siguiente de operaciones, los cocientes incompletos comunes á las dos fracciones 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1.

271828	100000	71828	28172	15484	12688	2796	1504	1292	212
	2	1	2	1	1	4	1	1	6
71828	28172	15484	12688	2796	1504	1292	212	20	

271829	100000	71829	28171	15487	12684	2803	1472	1331	141
	2	1	2	1	1	4	1	1	9
71829	28171	15487	12684	2803	1472	1331	141	62	

Luego el número vendrá expresado aproximadamente por la fraccion contínua

$$e=2,71828...=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}}}$$

Expresar en fraccion contínua un número inconmensurable, tal como $\sqrt{5}$

* 425. Aplicando el método general que hemos expuesto para convertir una cantidad cualquiera en fraccion contínua al número inconmensurable $\sqrt{5}$, hallaremos que:

El mayor número de unidades que contiene $\sqrt{5}$, es 2; luego se tendrá $\sqrt{5}=2+\frac{1}{x}$, de donde $x=\frac{1}{\sqrt{5}-2}$.

Multiplicando los dos términos de la fracccion que expresa el valor de x por $\sqrt{5}+2$, con el objeto de hacer racional el denominador, tendremos $x=\sqrt{5}+2$.

La parte entera de x será por consiguiente 4, de modo que se tendrá $x=4+\frac{1}{y}$ ó $\sqrt{5}+2=4+\frac{1}{y}$, de donde se deduce $\sqrt{5}=2+\frac{1}{y}$; y como se tiene tambien que $\sqrt{5}=2+\frac{1}{x}$, se sigue que los valores de las incógnitas x é y son iguales, y por tanto se debe tener $y=x$; luego el valor de x vendrá expresado por $x=4+\frac{1}{x}$.

Poniendo ahora en esta expresion, en vez de x su valor $4+\frac{1}{x}$, y lo mismo en la que resulte, luégo en la otra, y así sucesivamente, hallaremos que el valor de $\sqrt{5}$, será

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\text{etc.}}}}$$

* 426. En el curso de esta obra tendremos ocasion de ocuparnos del caso en que la cantidad que se quiere convertir en fraccion contínua sea el valor de la incógnita de una ecuacion.

LECCION XLVI.

Formacion de las reducidas de una fraccion contínua.—Procedencia de las fracciones contínuas.

Formacion de las reducidas de una fraccion contínua.

* 427. Ya hemos dicho al principio de esta teoría que se llaman reducidas de una fraccion contínua general, cada una de las expresiones a, $a+\frac{1}{b}$, $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$, etc. reducida á fraccion ordinaria; de donde se deduce que la primera reducida es $\frac{a}{1}$ la segunda $\frac{ab+1}{b}$,

la tercera $\dfrac{a\left(b+\dfrac{1}{c}\right)+1}{b+\dfrac{1}{c}}=\dfrac{abc+a+c}{bc+1}=\dfrac{(ab+1)c+a}{bc+1}$. En general una reducida cualquiera se obtiene agregando al último cociente incompleto de la reducida anterior la fraccion integrante que sigue; así, la cuarta reducida la hallaríamos poniendo en la tercera en vez del último cociente incompleto c, la suma de éste con la fraccion integrante que sigue; es decir, $c+\dfrac{1}{d}$.

* 428. *Para formar una reducida cualquiera se multiplican los dos términos de la reducida anterior por el cociente incompleto correspondiente á la reducida que se quiere formar, y á estos productos se les agrega respectivamente los términos de la reducida que está dos lugares ántes.*

En efecto, la primera y segunda reducida de la fraccion contínua general, son como hemos visto, $\dfrac{a}{1}$ y $\dfrac{ab+1}{b}$ las cuales se obtienen inmediatamente considerando el primer cociente incompleto para la primera, y reduciendo el número misto $a+\dfrac{1}{b}$ en fraccionario para la segunda; pero la tercera vemos que despues de poner en vez del último cociente b, el número misto $b+\dfrac{1}{c}$, y hechas todas las operaciones, se reduce á la fraccion $\dfrac{(ab+1)c+a}{bc+1}$, la cual se forma segun la regla enunciada.

La cuarta reducida la obtendremos poniendo en la tercera en vez del último cociente incompleto c, el número misto $c+\dfrac{1}{d}$; así, se tendrá

$$\frac{(ab+1)\left(c+\dfrac{1}{d}\right)+a}{b\left(c+\dfrac{1}{d}\right)+1}$$

Multiplicando los dos términos de este quebrado por d, y haciendo las reducciones, resulta

$$\frac{(ab+1)(cd+1)+ad}{b(cd+1)+d}=\frac{[(ab+1)c+a]d+ab+1}{(bc+1)d+b}.$$

Donde vemos que esta cuarta reducida se forma tambien segun la regla.

Esto supuesto, si nosotros demostramos que si una reducida cualquiera se forma segun la ley enunciada, la reducida siguiente se forma tambien segun la misma, tendremos justificada la regla; pues verificándose para la cuarta reducida, como acabamos de ver, se verificará tambien para la quinta, y así sucesivamente.

Para esto supongamos tres reducidas consecutivas $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$, cuyos cocientes incompletos correspondientes sean p, q y r, es decir las mismas letras porque vienen expresadas las fracciones pero minúsculas, admitamos además que la tercer reducida se forma segun la regla, de modo que se tenga $R=Qr+P$ y $R'=Q'r+P'$, y por tanto

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}.$$

Para formar la reducida siguiente, tenemos que poner en ésta en vez de r el número misto $r+\frac{1}{s}$; de modo que se tendrá

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'}.$$

Multiplicando los dos términos de esta fraccion por s, y haciendo todas las reducciones, se hallará

$$\frac{S}{S'}=\frac{Qrs+Q+Ps}{Q'rs+Q'+P's}=\frac{(Qr+P)s+Q}{(Q'r+P')s+Q'};$$

y poniendo en vez de $Qr+P$ y $Q'r+P'$, sus iguales R y R', se hallará por último,

$$\frac{S}{S'}=\frac{Rs+Q}{R's+Q'};$$

luego esta última reducida se forma segun la regla, que es lo que se queria demostrar.

EJEMPLO I. Hallar las reducidas de las fracciones contínuas

$$A=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}}}}\qquad B=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}.$$

Las de A serán $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{2\cdot 5+1}{1\cdot 5+1}=\frac{11}{6}$, $\frac{11\cdot 5+2}{6\cdot 5+1}=\frac{57}{31}$, $\frac{57\cdot 1+11}{31\cdot 1+6}=\frac{68}{37}$, $\frac{68\cdot 4+57}{37\cdot 4+31}=\frac{329}{179}$, $\frac{329\cdot 4+68}{179\cdot 4+37}=\frac{1384}{753}$.

Del mismo modo hallaremos que las reducidas de B, son $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{8}{31}$, $\frac{9}{35}$, $\frac{35}{136}$, $\frac{44}{171}$, $\frac{123}{478}$.

EJEMPLO II. Sean las fracciones contínuas ilimitadas, cuyas reducidas queremos hallar,

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\text{etc.}}}}}}}}\qquad \pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\text{etc.}}}}}$$

Las de e serán $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{19}{7}$, $\frac{87}{32}$, $\frac{106}{39}$, $\frac{193}{71}$,...

Las de π son $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{103993}{33102}$,...

Las segundas, que nos dan valores aproximados de π, expresan la relacion aproximada del diámetro á la circunferencia.

Procedencia de las fracciones contínuas.

* 429. *La fraccion contínua de un número limitado de fracciones integrantes, proviene de una cantidad conmensurable; ó lo que es lo mismo, la fraccion contínua limitada es equivalente á una cantidad conmensurable.*

En efecto, si formamos las reducidas de una fraccion contínua limitada, llegaremos á una última que expresará el valor exacto de dicha fraccion contínua; y como esta última reducida es, segun su formacion, un quebrado ordinario, y por consiguiente cantidad conmensurable, se sigue que la fraccion contínua limitada es equivalente á una cantidad comensurable, segun queríamos demostrar.

Recíprocamente, *toda cantidad conmensurable reducida á fraccion contínua, da orígen á una fraccion contínua limitada.*

En efecto, las cantidades conmensurables que se pueden convertir en fraccion contínua, son las fraccionarias, y hemos visto en la leccion anterior, que éstas se reducen á fraccion contínua considerando por cocientes incompletos los cocientes que resultan de aplicar el procedimiento del máximo comun divisor á los dos términos del quebrado que se nos dá; y como el número de cocientes que resultan en el cálculo del máximo comun divisor de dos números es limitado (*Arit.* 104), se sigue que la fraccion contínua equivalente á una cantidad conmensurable es límitada.

* 430. *La fraccion contínua ilimitada proviene de una cantidad inconmensurable.*

En efecto, si proviniese de una cantidad conmensurable, seria limitada; lo cual es contra la hipótesis.

Recíprocamente, *toda cantidad inconmensurable reducida á fraccion contínua da una que es ilimitada.*

Porque si fuera limitada, provendria de una cantidad conmensurable, lo cual es contra la hipótesis.

Las fracciones contínuas pueden ser, segun vemos, de dos clases, *limitadas ó ilimitadas*: las primeras son las que constan de un número limitado de fracciones integrantes, y las segundas de un número ilimitado.

Las fracciones contínuas ilimitadas pueden ser de dos clases, *periódicas* y no *periódicas*: las periódicas son aquellas en las cuales un cierto número de cocientes incompletos, llamado *período*, se repite periódica é indefinidamente; y las segundas son aquellas en las cuales esto no se verifica.

Las fracciones periódicas pueden ser tambien de dos clases, *periódicas puras* y *periódicas mistas*: las primeras son aquellas en las cuales el período principia en el primer cociente incompleto, y las segundas aquellas cuyo período no empieza en este primer cociente.

* 431. *Toda fraccion contínua periódica, es una de las raices de una ecuacion de segundo grado de coeficientes racionales.*

Sea en primer lugar, una fraccion contínua periódica pura

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{}{\vdots\, +\cfrac{1}{l+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{}{\vdots\, +\cfrac{1}{l+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}}}}}}$$

la cual se podrá poner evidentemente bajo la forma

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{}{\vdots\, +\cfrac{1}{l+\cfrac{1}{x}}}}};$$

pues si x representa la fraccion contínua que contiene un número infinito de períodos, aunque se quite uno de éstos, todavía quedará un número infinito, y por consiguiente puede representarse tambien por x.

Sean $\frac{K}{K'}$ y $\frac{L}{L'}$ las reducidas correspondientes á los dos últimos cocientes incompletos k y l del período; el valor de x, ó sea la reducida siguiente, será (428)

$$x=\frac{Lx+K}{L'x+K'};$$

de donde se deduce la ecuacion de segundo grado

$$L'x^2+(K'-L)x=K,$$

cuyos coeficientes L', K'—L, y K, son cantidades conmensurables y enteras. Las raíces de esta ecuacion son de signo contrario; la positiva será el valor de la fraccion contínua periódica.

Sea, en segundo lugar, la fraccion contínua periódica mixta.

$$y=m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{u+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{l+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}}}}}}$$

Representando, como ántes, por x el valor de la fraccion periódica pura, se tendrá

$$y=m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{u+\cfrac{1}{x}}}}}\qquad x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{l+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}}$$

Sean $\frac{U}{U'}$ y $\frac{V}{V'}$ las dos últimas reducidas correspondientes á la parte no periódica de y; de modo, que segun lo formacion de las reducidas, se tendrá

$$y=\frac{\mathrm{V}x+\mathrm{U}}{\mathrm{V}'x+\mathrm{U}'} \qquad [1];$$

pero segun el caso anterior, se tiene

$$x=\frac{\mathrm{L}x+\mathrm{K}}{\mathrm{L}'x+\mathrm{K}'} \qquad [2].$$

De la relacion [1] se deduce $x=\frac{\mathrm{U}-\mathrm{U}'y}{\mathrm{V}'y-\mathrm{V}}$; cuyo valor, sustituido en la ecuacion [2], dará una de segundo grado en y de coeficientes conmensurables, segun se queria demostrar.

Si la ecuacion de segundo grado que resulta en y tuviera sus dos raíces positivas, no sabríamos cuál de estas corresponde á la fraccion contínua dada; pero esta duda desaparece observando que x representa una cantidad positiva; luego tomando sólo el valor positivo de x deducido de la ecuacion [2], y sustituyéndolo en la relacion [1], hallaremos un valor sólo para y, que será el de la fraccion contínua.

Ejemplos, Sean las fracciones periódicas

$$x=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}} \quad \text{é } y=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}}}}}}$$

Formando las reducidas de la primera segun la regla (428), se hallan $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{16}{7}$, $\frac{23}{10}$, $\frac{23x+16}{10x+7}$; luego la ecuacion que da el valor de x será $x=\frac{23x+16}{10x+7}$; ó lo que es lo mismo, quitando denominadores y reduciendo despues,

$$10x^2+7x-23x-16=0, \text{ ó } 10x^2-16x-16=0, \text{ ó } 5x^2-8x-8=0;$$

de donde se deduce, tomando la raíz positiva, el valor de la fraccion contínua periódica $x=\frac{4+\sqrt{56}}{5}$, como es fácil comprobar reduciendo esta expresion á fraccion contínua.

Sustituyendo en la segunda la parte periódica por su valor x, se convertirá en

$$y=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}}$$

de donde se deducirán las reducidas $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{15}{11}$, y $\frac{15x+4}{11x+3}=y$.

De esta relacion sacaremos el valor de x, que será $x=\frac{3y-4}{15-11y}$; y sustituyéndolo en la ecuacion anterior $5x^2-8x-8=0$, hallaremos, despues de hechas todas las reducciones,

$$659y^2-1808y+1240=0.$$

Como esta ecuacion tiene sus dos raíces positivas, sabremos cuál es la que expresa el valor de la fraccion contínua, sustituyendo el valor positivo de x hallado anteriormente, en la fórmula que da el valor de y; así hallaremos para valor de la fraccion contínua periódica mista,

$$y=\frac{904-\sqrt{56}}{659},$$

como es fácil comprobar.

* 432. Recíprocamente, *las raíces inconmensurables de una ecuacion de segundo grado cuyos coeficientes son racionales, se desarrollan en fracciones contínuas periódicas.*

Sea, en primer lugar, una ecuacion que tenga sus raíces de signos contrarios, tal como

$$ax^2+bx-c=0 \qquad [3],$$

en la cual los coeficientes a y c son positivos, y b puede ser positivo ó negativo; pero todos enteros.

Consideremos primeramente la raíz positiva, la cual podremos expresar haciendo $n=b^2+4ac$, por

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{n}}{2a},$$

Sea p la mayor parte entera contenida en el valor de x, y hagamos $x=p+\frac{1}{x_1}$, siendo x_1 una cantidad positiva mayor que la unidad.

Para determinar el valor de x_1, sustituiremos en la ecuacion [3] el valor de x, y hallaremos, despues de hacer toda reduccion,

$$(ap^2+bp-c)x_1{}^2+(2ap+b)x_1+a=0 \qquad [4].$$

Siendo las raíces de la ecuacion [3] de signos contrarios, las de la ecuacion [4] tambien lo serán, y el valor positivo de x_1 será el correspondiente á la raíz que vamos reduciendo á fraccion contínua; así, expresando esta condicion en la última ecuacion, se tendrán que verificar (349), las relaciones

$$ap^2+bp-c=-a', \text{ y } 2ap+b=-b',$$

siendo a' un número entero positivo, y b' entero positivo ó negativo. Por lo tanto, la ecuacion [4] se convertirá en

$$a'x_1{}^2+b'x_1-a=0.$$

La raíz positiva de esta ecuacion será

$$x=\frac{-b'+\sqrt{b'^2+4aa'}}{2a'}=\frac{-b'+\sqrt{n}}{2a'};$$

porque de las relaciones de condicion anteriores, se deduce

$$b'^2=b^2+4abp+4a^2p^2, \text{ y } 4aa'=-4a^2p^2-4abp+4ac;$$

y sumando, se tiene

$$b'^2+4aa'=b^2+4ac=n.$$

Representando por p_1 la mayor parte entera del valor de x_1, y haciendo lo mismo que anteriormente, hallaremos

$$x_1=p_1+\frac{1}{x_2},$$

y por la sustitucion de este valor de x_1 en la ecuacion anterior, obtendremos otra que se reducirá fácilmente á la forma

$$a''x_2{}^2+b''x_2-a'=0.$$

Esta ecuacion, como las anteriores, tiene sus raíces de signos contrarios, y sus coeficientes satisfacen tambien á la condicion $b''^2+4a'a''=n$.

Continuando del mismo modo obtendremos la série de ecuaciones de segundo grado

$$\begin{aligned} ax^2 &+bx &-c &=0\\ a'x_1^2 &+b'x_1 &-a &=0\\ a''x_2^2 &+b''x_2 &-a' &=0\\ a'''x_3^2 &+b'''x_3 &-a'' &=0\\ &\ldots \end{aligned}$$

cuyos coeficientes enteros se hallarán ligados por las relaciones

$$\begin{aligned} b^2+4ac &= n\\ b'^2+4aa' &= n\\ b''^2+4a'a'' &= n \qquad [5]\\ &\ldots\\ &\ldots \end{aligned}$$

y los valores de las incógnitas de dichas ecuaciones estarán dados por las fórmulas

$$x=p+\frac{1}{x_1},\ x_1=p_1+\frac{1}{x_2},\ x_2=p_2+\frac{1}{x_3},\ x_3=p_3+\frac{1}{x_4},\ldots$$

de las cuales se deduce el valor de la raíz positiva de la ecuacion propuesta

$$x=p+\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2+\cfrac{1}{p_3+\text{etc.}}}}$$

cuya fraccion contínua vamos á demostrar que es periódica. Para ello observaremos, que de las relaciones [5] se deduce que los coeficientes a, a', a'', a''',... son menores que $\frac{1}{4}n$, y que los valores absolutos de b, b', b'', b''',... son menores que $\sqrt{n}$; de modo, que representando por q la mayor parte entera de $\frac{1}{4}n$, y por r la de $\sqrt{n}$, si combinamos cada uno de los q valores positivos que puede tener el coeficiente del cuadrado de la incógnita en la ecuacion de segundo grado, con cada uno de los r que puede tener el de la primera potencia de la misma, tomados alternativamente con signo $+$ y $-$, hallaremos á lo más $2qr$ combinaciones diferentes, que corresponderán á $2qr$ ecuaciones diferentes tambien; pero una vez hechas estas combinaciones, á la siguiente se obtendrá una de las anteriores, y por lo tanto la ecuacion á que corresponda tendrá el primero y segundo coeficientes respectivamente idénticos al primero y segundo de una de las anteriores ecuaciones; pero si suponemos que los coeficientes idénticos son $a^{(s+t)}=a^{(s)}$ y $b^{(s+t)}=b^{(s)}$, y que se tienen las ecuaciones

$$a^{(s)}x_s{}^2+b^{(s)}x_s-a^{(s-1)}=0,$$

y
$$a^{(s+t)}(x_{s+t})^2+b^{(s+t)}x_{s+t}-a^{(s+t1-)}=0 \qquad [6],$$

las cuales, segun nuestra hipótesis, se reducen á

$$a^{(s)}x_s{}^2+b^{(s)}x_s-a^{(s-1)}=0, \quad \text{y} \quad a^{(s)}x_s{}^2+b^{(s)}x_s-a^{s+t-1}=0,$$

probaremos que estas ecuaciones son idénticas si demostramos la igualdad $a^{(s-1)}=a^{(s+t-1)}$; lo cual es muy sencillo, porque de las relaciones [5] se deduce

$$(b^{(s+t)})^2+4a^{(s+t-1)}\times a^{(s+t)}=n=(b^{(s)})^2+4a^{(s-1)}\times a^{(s)};$$

de donde se saca, segun la hipótesis en que estamos,

$$(b^{(s)})^2+4a^{(s+t-1)}\times a^{(s)}=(b^{(s)})^2+4a^{(s-1)}\times a^{(s)},$$

ó
$$a^{(s+t-1)}=a^{(s-1)};$$

y por tanto, las dos ecuaciones [6] son idénticas, y dan para sus incógnitas un mismo valor; de modo que se tendrá para valor de x una fraccion contínua periódica de la forma

$$x=p+\cfrac{1}{p_1+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{p_s+\cfrac{1}{p_{s+1}+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{p_s+\cfrac{1}{p_{s+1}+\text{etc.}}}}}}}}$$

Luego la raíz positiva de la ecuacion propuesta se reduce á fraccion contínua periódica.

La raíz negativa goza tambien de la misma propiedad, y para demostrarlo cambiaremos x en $-x$ en la ecuacion propuesta, y la trasformada que resulte tendrá sus raíces iguales á las de la propuesta, pero de signos mudados; y por tanto, la raíz positiva de esta será la negativa de aquella; pero dicha raíz positiva de la trasformada se convierte, como acabamos de demostrar, en fraccion contínua periódica; luego la raíz negativa de la propuesta goza de la misma propiedad.

* 433. Sea, en segundo lugar, una ecuacion de segundo grado cuyas raíces sean de un mismo signo, y supongamos que ambas sean positivas, de modo que se tendrá

$$ax^2-bx+c=0, \quad \text{y} \quad x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

en la cual los coeficientes a, b y c son números enteros y positivos.

Al convertir las raíces de esta ecuacion en fraccion contínua, puede suceder una de dos cosas: que la mayor parte entera contenida en cada una de ellas sea la misma, ó que sea diferente; si cada una de las raíces tiene la mayor parte entera diferente, representando por p la mayor, y haciendo $x=p+\frac{1}{x_1}$ en la ecuacion propuesta, hallaremos una trasformada en x_1 de segundo grado tambien, y cuyas raíces, sustituidas en la expresion $x=p+\frac{1}{x_1}$, deben dar los dos valores de x; ahora bien, siendo p la mayor parte entera de los valores de x, el uno tendrá que ser mayor que p y el otro menor, y por tanto serán de la forma $p+\frac{1}{\alpha}$ y $p-\frac{1}{\alpha'}$; luego x_1 tiene dos valores de signos contrarios; pero estos valores son las raíces de la ecuacion trasformada de segundo grado que se obtiene reemplazando en la propuesta x por $p+\frac{1}{x_1}$; luego las raíces de esta trasformada son de signos contrarios y reducibles por consiguiente, segun el caso anterior, á fracciones contínuas periódicas.

Siendo periódicas las fracciones contínuas correspondientes á los valores de x_1 las correspondientes á las raíces de la ecuacion propuesta tambien lo serán.

La menor de estas raíces, que corresponde al valor negativo de x_1, será de la forma

$$p-\frac{1}{x_1}=p-\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2+\text{etc.}}};$$

pero se podrá reducir fácilmente, por una série de trasformaciones muy sencillas, á una de las formas

$$p-\frac{1}{x_1}=p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(p_1-1)+\cfrac{1}{p_2+\text{etc.}}}}$$

ó

$$p-\frac{1}{x_1}=p-1+\cfrac{1}{(p_2+1)+\cfrac{1}{p_3+\text{etc.}}},$$

segun que p_1 sea mayor ó igual que la unidad.

Si las dos raíces tienen una misma parte entera p, haciendo $x=p+\frac{1}{x_1}$ en la ecuacion propuesta, hallaremos una trasformada en x_1 de segundo grado, cuyas dos raíces serán positivas como las de la propuesta, las cuales podrán tener tambien la misma parte entera p_1; de modo que haciendo $x_1=p_1+\frac{1}{x_2}$ en esta trasformada, hallaremos otra que tendrá sus raíces positivas tambien, y que como las anteriores podrán tener la misma parte entera p_2; pero repitiendo esta série de operaciones, llegaremos á una trasformada cuyas raíces tendrán parte entera diferente, porque si todas tuvieran la misma parte entera, las dos raíces serian iguales, lo cual es contra la hipótesis. Las raíces de esta última trasformada estarán expresadas en fracciones contínuas periódicas; luego las de la propuesta tambien lo estarán.

Por último, si las raíces de la ecuacion de segundo grado son negativas, cambiando x en $-x$, se obtendrá una trasformada de segundo grado tambien, cuyas raíces serán iguales á las de la propuesta, pero de signos mudados, y por tanto positivas; estas serán equivalentes, segun hemos visto, á fracciones contínuas periódicas; luego las de la propuesta tambien lo serán, con lo cual queda demostrado el teorema.

* 434. Proponemos como ejemplo, convertir en fraccion contínua las raíces de las ecuaciones que anteriormente hemos hallado, $5x^2-8x-8=0$, y $659y^2-1808y+1240=0$.

LECCION XLVII.

Propiedades más importantes de las reducidas.—Método de las fracciones contínuas para encontrar una solucion entera de una ecuacion de primer grado entre dos variables.

Propiedades más importantes de las reducidas.

435. *El numerador de la diferencia de dos reducidas consecutivas es* $+1$ *ó* -1, *segun que aquella de la cual se resta sea de lugar par ó impar, considerando á cero como primera reducida si la fraccion contínua no tiene parte entera.*

Sean $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$ tres reducidas consecutivas cualesquiera, de las cuales la tercera será (428) $\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}$.

Restando de cada reducida la que le precede, hallaremos

$$\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{QP'-PQ'}{P'Q'},\ \frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}-\frac{Q}{Q'}=$$
$$\frac{QQ'r+PQ'-QQ'r-QP'}{Q'(Q'r+P')}=\frac{-(QP'-PQ')}{Q'(Q'r+P')};$$

donde vemos que los numeradores de estas dos diferencias son iguales y de signo contrario; pero restando de la segunda reducida la primera hallaremos $\frac{ab+1}{b}-\frac{a}{1}=\frac{ab+1-ab}{b}=\frac{+1}{b}$; luego el numerador de la diferencia siguiente, es decir, el de la que resulta de restar de la tercera la segunda será -1; el de la siguiente $+1$, y así sucesivamente. Con lo cual queda justificado el teorema, y por consiguiente demostrada la igualdad

$$QP'-PQ'=\pm 1,$$

en la cual P y P′ son los dos términos de una reducida cualquiera, y Q y Q′ los de la reducida siguiente; debiéndose tomar el signo $+$ si $\frac{Q}{Q'}$ es de lugar par, y el signo $-$ si fuese de lugar impar.

* 436. *Las reducidas son fracciones irreducibles.*

En efecto, si los dos términos Q y Q′ de una reducida cualquiera tuvieran un factor comun α distinto de la unidad, el primer miembro de la igualdad

$$QP' - PQ' = \pm 1$$

seria divisible por este factor; siendo el primer miembro divisible por α, el segundo miembro ± 1 tambien seria divisible, lo cual no es cierto; luego los dos términos de la reducida $\frac{Q}{Q'}$ son primos entre sí, y por tanto dicha reducida es irreducible.

CONSECUENCIAS. 1.ª *Si una fraccion ordinaria reducible se convierte en fraccion contínua, y despues se forman las reducidas, la última será el valor de la fraccion propuesta totalmente simplificada.*

2.ª *La diferencia de dos reducidas consecutivas cualesquiera es* ± 1 *dividido por el producto de los denominadores de las mismas, segun que la reducida minuendo sea par ó impar.*

* 437. *Las reducidas de lugar impar son menores que la fraccion contínua total, y las de lugar par mayores. Y cuando es limitada la fraccion contínua, la última reducida es igual á dicha fraccion.*

Sean $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$ tres reducidas de la fraccion contínua general cuyos cocientes incompletos son a, b, c,... p, q, r, s, t,... Segun la formacion de las reducidas, se tiene (428) $\frac{R}{R'} = \frac{Qr+P}{Q'r+P'}$. Si ahora representamos por y todo el resto de la fraccion contínua á partir del cociente incompleto r, es decir, si hacemos

$$y = r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t + \text{etc.}}} \qquad [1]$$

y sustituimos r por y en la reducida anterior, hallaremos la fraccion $\frac{Qy+P}{Q'y+P'}$, que nos expresará el valor de la fraccion contínua total, la cual podremos representar por x; de modo que se tendrá $x = \frac{Qy+P}{Q'y+P'}$.

Si ahora restamos de x cada una de las reducidas consecutivas $\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$, hallaremos las dos diferencias

$$x-\frac{P}{P'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{P}{P'}=\frac{(QP'-PQ')y}{P'(Q'y+P')}=\frac{\pm y}{P'(Q'y+P')}$$
$$x-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{-(QP'-PQ')}{Q'(Q'y+P')}=\frac{\mp 1}{Q'(Q'y+P')} \quad [2].$$

donde vemos que si la reducida $\frac{P}{P'}$ es, para fijar las ideas, de lugar impar, en cuyo caso $\frac{Q}{Q'}$ es de lugar par, la diferencia $QP'-PQ'$ es positiva, y hay que tomar los signos superiores; lo cual nos prueba que la diferencia $x-\frac{P}{P'}$ es positiva, y $x-\frac{Q}{Q'}$ negativa, y por tanto la reducida de lugar impar $\frac{P}{P'}$ es menor que la fraccion contínua x, y $\frac{Q}{Q'}$, que es de lugar par, es mayor, segun se queria demostrar.

Consecuencia. *El valor de la fraccion contínua total está comprendido entre dos reducidas consecutivas.*

* 438. *Una reducida cualquiera se aproxima más á la fraccion contínua total que la reducida anterior.*

En efecto, de las igualdades [2] se deduce que la diferencia entre el valor de la fraccion contínua x y la reducida $\frac{Q}{Q'}$, es menor que la diferencia entre la misma fraccion y la reducida anterior $\frac{P}{P'}$; porque prescindiendo del signo, el valor absoluto de la diferencia $x-\frac{Q}{Q'}=\frac{1}{Q'(Q'y+P')}$, es menor que el de la diferencia $x-\frac{P}{P'}=\frac{y}{P'(Q'y+P')}$, por ser y, numerador de la primera diferencia, mayor que 1, segun indica la igualdad [1], y el denominador de la misma $P'(Q'y+P')$, menor que el denominador de la segunda diferencia $Q'(Q'y+P')$; pues teniendo ambos denominadores el factor comun $Q'y+P'$, el otro factor P' es menor que Q' segun se deduce de su formacion (428); luego por esta doble razon la diferencia segunda es menor que la primera, y la reducida $\frac{Q}{Q'}$ se aproxima más á la fraccion contínua que la reducida anterior $\frac{P}{P'}$, segun queriamos demostrar.

CONSECUENCIA. Siendo la fraccion contínua mayor que las reducidas de lugar impar, y menor que las de lugar par, y aproximándose cada reducida á la fraccion contínua más que la anterior, se sigue que las reducidas del lugar impar van aumentando, y las de lugar par disminuyendo, y las de ambas clases van convergiendo hácia el valor de la fraccion contínua total, por cuya razon se les llama tambien á las reducidas fracciones *convergentes*.

* 439. *El error que se comete tomando una reducida cualquiera por el valor de la fraccion contínua total, es menor que la unidad dividida por el denominador de dicha reducida multiplicado por la suma de este denominador y el de la reducida precedente; ó menor que la unidad dividida por el cuadrado del denominador de la reducida que se considera;* ó por último, *menor que la unidad dividida por dicho denominador multiplicado por el de la reducida anterior.*

En efecto, el valor absoluto de la diferencia entre una reducida y la fraccion contínua total x, prescindiendo del signo, es

$$x-\frac{Q}{Q'}=\frac{1}{Q'(Q'y+P')} \qquad [3];$$

pero siendo y mayor que la unidad, segun se deduce de la igualdad [1], si la suprimimos en el denominador, es claro que dicho denominador habrá disminuido, y por tanto el quebrado $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$ será mayor que $x-\frac{Q}{Q'}$, luego la diferencia que hay entre $\frac{Q}{Q'}$ y x es menor que $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$, es decir, menor que la unidad dividida por el denominador Q' de la fraccion dada multiplicado por la suma $Q'+P'$ de dicho denominador y el de la precedente.

Si en la igualdad [3], además de suprimir y, suprimimos la cantidad P', la fraccion que resulta $\frac{1}{Q'Q'}=\frac{1}{Q'^2}$ será mayor que $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$

y con más razon que la diferencia $x - \frac{Q}{Q'}$, luego la unidad dividida por el cuadrado del denominador de la reducida que se considera es mayor que la diferencia entre dicha reducida y la fraccion contínua total, y por consiguiente, es un límite del error que se comete tomando la una por la otra.

Por último, suprimiendo el sumando $Q'y$ del segundo factor que hay en el segundo miembro de la igualdad [3], hallaremos la fraccion $\frac{1}{P'Q'}$ que será mayor que todos los anteriores $\frac{1}{Q'^2}$, $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$ y $\frac{1}{Q'(Q'y+P')}$; y por tanto expresa tambien un límite del error que se comete al tomar la reducida $\frac{Q}{Q'}$ por el valor de la fraccion contínua total.

El órden de aproximacion de estos límites es aquel en que los hemos enunciado, y de todos ellos el que generalmente se usa en las aplicaciones es el segundo.

* 440. Del principio anterior se deduce que *para hallar el valor de una fraccion contínua en ménos de una cantidad* $\frac{1}{\delta}$, *bastará llegar hasta una reducida cuyo denominador sea igual ó mayor que la raiz cuadrada de* δ.

Si la fraccion contínua es limitada, no sólo obtendremos reducidas que se diferencien de ella en ménos de una cantidad dada, sino que podremos llegará la última la cual expresa el valor exacto de dicha fraccion. Respecto á las fracciones contínuas ilimitadas observaremos que siempre podremos llegar á obtener una reducida cuyo denominador sea igual ó mayor que una cantidad dada δ por muy grande que sea; pues segun la formacion de las reducidas van creciendo sus términos indefinidamente, á medida que crece el número de cocientes incompletos que se consideran. Por lo tanto siempre podremos llegar á una reducida $\frac{Q}{Q'}$ cuyo denominador Q' sea igual ó mayor que la raíz cuadrada de δ, en cuyo caso tendremos $Q' \geqq \sqrt{\delta}$ de donde $Q'^2 \geqq \delta$ y dividiendo la unidad por cada una de estas cantidades, se halla

$$\frac{1}{Q'^2}<\frac{1}{\delta}; \text{ pero } \frac{1}{Q'^2}>x-\frac{Q}{Q'}, \text{ luego } x-\frac{Q}{Q'}<\frac{1}{\delta}.$$

Donde vemos que la reducida $\frac{Q}{Q'}$ se diferencia de la fraccion contínua total x en una cantidad menor que la fraccion dada $\frac{1}{\delta}$, segun queriamos demostrar.

* 441. *Una reducida cualquiera se aproxima más á la fraccion contínua total, que cualquiera otra fraccion que tenga sus términos respectivamente menores que los suyos.*

Sea una reducida cualquiera $\frac{Q}{Q'}$ y una fraccion $\frac{m}{n}$ cuyos términos m y n son respectivamente menores que Q y Q', y vamos á demostrar que $\frac{Q}{Q'}$ se aproxima á la fraccion contínua más que el quebrado $\frac{m}{n}$.

En efecto, sea $\frac{P}{P'}$ la reducida anterior á la propuesta, y supongamos que el quebrado $\frac{m}{n}$ no sea igual á esta reducida, pues si fuera igual, se aproximaria ménos á la fraccion contínua que $\frac{Q}{Q'}$ (438), y el principio quedaria demostrado. Siendo $\frac{P}{P'}$ y $\frac{m}{n}$ fracciones diferentes, habrá entre ellas una diferencia

$$\frac{P}{P'}-\frac{m}{n}=\frac{Pn-mP'}{nP'};$$

pero la que hay entre $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{P}{P'}$ es, prescindiendo del signo,

$$\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{1}{P'Q'} \quad \text{y como} \quad \frac{1}{P'Q'}<\frac{Pn-mP'}{nP'},$$

por tener el numerador 1 igual ó menor que $Pn-mP'$ y el denominador $P'Q'$ mayor que nP', porque ambos tienen el factor comun P' y el otro factor Q′ del primero es mayor, por hipótesis que el segundo factor n del segundo.

Siendo la diferencia de $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{P}{P'}$ menor que la de $\frac{P}{P'}$ y $\frac{m}{n}$, se sigue que la fraccion $\frac{m}{n}$ no puede hallarse comprendida entre las reducidas $\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$, luego tiene que ser menor que la menor ó mayor que la mayor; pero x, valor de la fraccion contínua total, se halla comprendido entre las dos reducidas (437 CONS.), es decir, es mayor que la una y menor que la otra.

Esto supuesto, si las colocamos en órden de magnitud, se tendrá una de estas combinaciones

$$\frac{m}{n},\ \frac{P}{P'},\ x,\ \frac{Q}{Q'};\quad \text{ó}\quad \frac{P}{P'},\ x,\ \frac{Q}{Q'},\ \frac{m}{n};$$

en el primer caso, $\frac{m}{n}$ se diferencia de x más que la fraccion que se halla intermedia $\frac{P}{P'}$; pero esta fraccion se diferencia de x más que $\frac{Q}{Q'}$; luego con más razon $\frac{m}{n}$ se diferenciará de x más que $\frac{Q}{Q'}$. En el segundo caso se ve evidentemente que $\frac{Q}{Q'}$ se aproxima más á x que $\frac{m}{n}$; luego vemos que $\frac{Q}{Q'}$ se aproxima más á la fraccion contínua total que la fraccion $\frac{m}{n}$ cuyos términos son menores que los de la reducida, segun se queria demostrar.

Método de las fracciones contínuas para encontrar una solucion entera de una ecuacion de primer grado entre dos variables.

* 442. La teoría de las fracciones contínuas suministra un medio de hallar directamente una primera solucion entera de la ecuacion de primer grado con dos variables

$$ax+by=k.$$

En efecto, siendo a y b números primos entre sí, como se ha supuesto (393), si desarrollamos el quebrado irreducible $\frac{a}{b}$ en fraccion contínua, hallaremos una que será limitada (429) y cuya última reducida será la misma fraccion irreducible $\frac{a}{b}$. Esto supuesto, sea $\frac{m}{n}$ la reducida anterior á la última y tendremos, segun hemos visto (435),

$$an - bm = \pm 1;$$

multiplicando esta igualdad por $\pm k$, se hallará

$$a \times (\pm nk) + b \times (\mp mk) = k;$$

de modo que haciendo $x = \pm nk$ é $y = \mp mk$, la ecuacion propuesta queda satisfecha; luego $\pm nk$ y $\mp mk$ es una primera solucion de la ecuacion $ax + by = k$; las demás estarán comprendidas, como ya lo hemos visto, en las fórmulas

$$x = \pm nk \mp bt \text{ é } y = \mp mk \pm at.$$

* 443. Por este método se puede ver que *si los coeficientes* a *y* b *tienen un factor comun* α, *la ecuacion dada no puede tener soluciones enteras, á no ser que este factor se halle tambien en la cantidad constante* k.

En efecto, supongamos que a y b tengan el factor comun α y se tenga $a = \alpha a'$ y $b = \alpha b'$; la última reducida que es una fraccion irreducible $\frac{a'}{b'}$ expresará el valor de $\frac{a}{b}$, de modo que llamando $\frac{m}{n}$ á la reducida anterior, se hallará

$$a'n - b'm = \pm 1 \quad \text{de donde} \quad \pm a'nk \mp b'mk = k;$$

multiplicando y partiendo los dos términos del primer miembro de la última igualdad por α, se tendrá

$$a'\alpha \times \frac{\pm nk}{\alpha} + b'\alpha \times \frac{\mp mk}{\alpha} = k, \quad \text{ó} \quad a \times \frac{\pm nk}{\alpha} + b \times \frac{\mp mk}{\alpha} = k;$$

pero siendo m y n números primos entre sí, (436) y debiendo dividir α á los productos nk y mk para que los valores de x é y sean enteros, es menester que α divida á k, lo cual queriamos demostrar.

LECCION XLVIII.

Progresiones por diferencia y cociente.—Suma de potencias semejantes y enteras de los términos de una progresion por diferencia.—Aplicacion á las pilas de balas.

Progresiones por diferencia y cociente.

444. Las progresiones por diferencia y cociente véanse en nuestra tercera edicion de la Aritmética, lecciones XLVI y XLVII; recomendando tan solo aquí á los alumnos el desarrollo de los cálculos á que da orígen la resolucion del problema de *hallar dos de las cinco cantidades que entran en una progresion, conociendo las otras tres*, cuyo problema da orígen á diez combinaciones, y cuyas fórmulas, en ambas progresiones, son las siguientes:

En las progresiones por diferencia.

	Datos.	Incógnitas.	Valores.
1.ª	a, r, n;	l, S.	$\begin{cases} l=a+(n-1)r, \\ S=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)r]. \end{cases}$
2.ª	a, r, l;	n, S.	$\begin{cases} n=\dfrac{l-a}{r}+1, \\ S=\dfrac{(l+a)(l-a+r)}{2r}. \end{cases}$
3.ª	a, r, S;	n, l.	$\begin{cases} n=\dfrac{r-2a\pm\sqrt{(r-2a)^2+8rS}}{2r}, \\ l=a+(n-1)r. \end{cases}$
4.ª	a, n, l;	r, S.	$r=\dfrac{l-a}{n-1}$, $S=\frac{1}{2}n(a+l)$.
5.ª	a, n, S;	r, l.	$r=\dfrac{2(S-an)}{n(n-1)}$, $l=\dfrac{2S-an}{n}$.
6.ª	a, l, S;	r, n.	$r=\dfrac{l^2-a^2}{2S-(l+a)}$, $n=\dfrac{2S}{a+l}$.
7.ª	r, n, l;	a, S.	$\begin{cases} a=l-(n-1)r, \\ S=\frac{1}{2}n[2l-(n-1)r]. \end{cases}$
8.ª	r, n, S;	a, l.	$\begin{cases} a=\dfrac{2S-n(n-1)r}{2n}, \\ l=\dfrac{2S+n(n-1)r}{2n}. \end{cases}$

Datos.	Incógnitas.	Valores.
9.ª r, l, S;	a, n.	$\begin{cases} a=l-(n-1)r, \\ n=\dfrac{r+2l\pm\sqrt{(r+2l)^2-8rS}}{2r}. \end{cases}$
10.ª n, l, S;	a, r.	$a=\dfrac{2S-ln}{n}$, $r=\dfrac{2(nl-S)}{n(n-1)}$.

En las progresiones por cociente.

Datos.	Incógnitas.	Valores.
1.ª a, q, n;	l, S.	$l=a\times q^{n-1}$, $S=\dfrac{a(q^n-1)}{q-1}$.
2.ª a, q, l;	n, S.	$n=.....$ (*), $S=\dfrac{lq-a}{q-1}$.
3.ª a, q, S;	n, l.	$n=.....$, $l=\dfrac{a+S(q-1)}{q}$.
4.ª a, n, l;	q, S.	$q=\sqrt[n-1]{\dfrac{l}{a}}$, $S=\dfrac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}$
5.ª a, n, S;	q, l.	$\begin{cases} q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+...+1=\dfrac{S}{a}\text{(**)}. \\ l=a\times q^{n-1}. \end{cases}$
6.ª a, l, S;	q, n.	$q=\dfrac{S-a}{S-l}$, $n=.....$
7.ª q, n, l;	a, S.	$a=\dfrac{l}{q^{n-1}}$, $S=\dfrac{l(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}$.
8.ª q, n, S;	a, l.	$a=\dfrac{S(q-1)}{q^n-1}$, $l=\dfrac{Sq^{n-1}(q-1)}{q^n-1}$.
9.ª q, l, S;	a, n.	$a=lq-S(q-1)$, $n=.....$
10.ª n, l, S;	a, q.	$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{q}\right)^{n-1}+\left(\dfrac{1}{q}\right)^{n-2}+...+1=\dfrac{S}{l}. \\ a=l\times\left(\dfrac{1}{q}\right)^{n-1}. \end{cases}$

(*) El valor de n en esta combinacion, lo mismo que en la 3.ª, 6.ª y 9.ª, proviene de una ecuacion exponencial, de que en breve nos ocuparemos.

(**) El valor de q en esta combinacion, lo mismo que en la 10.ª, depende de una ecuacion de grado $n-1$, cuya resolucion corresponde al álgebra superior. (*Algebra, II tomo.*)

Suma de potencias semejantes y enteras de los términos de una progresion por diferencia.

* 445. Sea la progresion por diferencia

$$\div a.b.c\ldots h.k.l,$$

cuya razon es r, y n el número de términos. Segun la definicion, se tiene la série de igualdades $b=a+r$, $c=b+r$,... $k=h+r$, $l=k+r$, que elevadas á la potencia $m+1$, dan

$$b^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)a^m r+\frac{(m+1)m}{2}a^{m-1}r^2+\ldots$$

$$c^{m+1}=b^{m+1}+(m+1)b^m r+\frac{(m+1)m}{2}b^{m-1}r^2+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k^{m+1}=h^{m+1}+(m+1)h^m r+\frac{(m+1)m}{2}h^{m-1}r^2+\ldots$$

$$l^{m+1}=k^{m+1}+(m+1)k^m r+\frac{(m+1)m}{2}k^{m-1}r^2+\ldots$$

Sumando miembro á miembro estas últimas igualdades, suprimiendo los términos b^{m+1}, c^{m+1}, ... k^{m+1}, comunes á los dos miembros, y por último, pasando al primer miembro el término a^{m+1}, se tendrá

$$l^{m+1}-a^{m+1}=(m+1)r(a^m+b^m+c^m+\ldots+k^m)$$
$$+\frac{(m+1)m}{2}r^2(a^{m-1}+b^{m-1}+c^{m-1}+\ldots+k^{m-1})+\ldots$$

Establezcamos ahora, para abreviar, las igualdades siguientes

$$S_1=a+b+c+\ldots+k+l$$
$$S_2=a^2+b^2+c^2+\ldots+k^2+l^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_m=a^m+b^m+c^m+\ldots+k^m+l^m,$$

y tendremos, sustituyendo estas cantidades S_1, S_2 ... S_m en la igualdad anterior,

$$l^{m+1}-a^{m+1}=(m+1)r(S_m-l^m)+\frac{(m+1)m}{2}r^2(S_{m-1}-l^{m-1})+\ldots$$

de donde se saca la fórmula

$$S_m=l^m+\frac{l^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)r}-\frac{m}{2}r(S_{m-1}-l^{m-1})-\frac{m(m-1)}{2\cdot 3}r^2(S_{m-2}-l^{m-2})-$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4}r^3(S_{m-3}-l^{m-3})-\ldots-\frac{m(m-1)\ldots[m-(p-1)]}{2.3.4\ldots(p+1)}r^p(S_{m-p}-l^{m-p})-\ldots$$

en la cual el último término corresponde al valor de $p=m+1$. Así, dando á m los valores sucesivos 0, 1, 2, 3,... en cuyo caso deberemos parar en los términos que corresponden á los valores de $p=1$, $p=2$, $p=3$, $p=4$, etc., hallaremos las fórmulas particulares que dan las sumas de las potencias de los términos de una progresion aritmética, cuyos exponentes respectivos son 0, 1, 2, 3, etc.

* 446. Consideremos como caso particular la progresion de la série natural de los números $\div 1 . 2 . 3 . 4 . \ldots N$, en la cual se tiene $a=1$, $r=1$, $l=N$; por consiguiente, tendremos que la fórmula general anterior se convertirá en

$$S_m=N^m+\frac{N^{m+1}-1}{m+1}-\frac{m}{2}(S_{m-1}-N^{m-1})-\frac{m(m-1)}{2\cdot 3}(S_{m-2}-N^{m-2})-$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4}(S_{m-3}-N^{m-3})-\ldots-\frac{m(m-1)\ldots[m-(p-1)]}{2.3.4.\ldots(p+1)}(S_{m-p}-N^{m-p})-\ldots$$

y haciendo sucesivamente $m=0, 1, 2, 3$, etc., en cuyo caso deberemos parar en los términos del desarrollo correspondientes á los términos en que p tiene los valores respectivos $p=1, 2, 3, 4$, etc., y que por ser cero dichos términos no se escriben, tendremos

$$S_0=N^0+\frac{N-1}{1}=1+N-1=N.$$

$$S_1=N+\frac{N^2-1}{2}-\frac{1}{2}(S_0-N^0)=\frac{2N+N^2-1-N+1}{2}=\frac{N(N+1)}{2}$$

$$S_2=N^2+\frac{N^3-1}{3}-\frac{2}{2}(S_1-N)-\frac{2.1}{2.3}(S_0-N^0)=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$S_3=N^3+\frac{N^4-1}{4}-\frac{3}{2}(S_2-N^2)-\frac{3.2}{2.3}(S_1-N)-\frac{3.2.1}{2.3.4}(S_0-N^0)=\frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

. . . .

Aplicacion á las pilas de balas.

* 447. En los arsenales y parques de artillería se hallan las balas de un mismo calibre arregladas en pilas, las cuales pueden ser *triangulares*, *cuadrangulares* ó *rectangulares*.

PILAS TRIANGULARES. Estas pilas se componen de capas de balas que forman triángulos equiláteros, y de los cuales cada uno tiene en su lado una bala ménos que en el triángulo ó capa inferior, de modo que la última capa superior la forma una sola bala.

Para calcular las balas que contiene una pila de esta especie, llamemos n al número de las que se compone el lado del triángulo que forma la capa inferior, y C_n el número de balas de esta base, y se tendrá que dicha base se compone de n filas, de las cuales la primera contiene 1 bala, la segunda 2, la tercera 3, y así sucesivamente hasta la *enésima*, que contiene n; luego el número total de balas de esta primera capa, será

$$C_n = 1 + 2 + 3 \dots + n = \frac{n^2+n}{2} \quad (450, \text{ EJ. IV}).$$

Si en esta fórmula hacemos sucesivamente n igual á los números 1, 2, 3,... n, se hallará que el número de balas contenidas en cada capa, será

$$C_1 = \frac{1^2+1}{2},\ C_2 = \frac{2^2+2}{2},\ C_3 = \frac{3^2+3}{2}, \dots\ C_n = \frac{n^2+n}{2}.$$

De modo, que llamando P_t al número total de balas que contiene la pila, se hallará

$$P_t = \frac{1^2+1}{2} + \frac{2^2+2}{2} + \frac{3^2+3}{2} + \dots \frac{n^2+n}{2};$$

ó lo que es lo mismo,

$$P_t = \frac{1^2+2^2+3^2+\dots n^2}{2} + \frac{1+2+3+\dots+n}{2}.$$

Donde vemos, que el numerador de la primera fraccion es la suma de los cuadrados de los n primeros números enteros, y el del segundo la suma de estos números; por consiguiente, segun el número anterior, se tendrá la fórmula que da el número de balas de una pila triangular.

$$P_t = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)\,(n+2)}{6}.$$

EJEMPLO. *Hallar el número de balas que contiene una pila triangular, cuya capa inferior tiene por lado 25 balas.*

Segun la fórmula hallada, se tendrá que el número de balas de la pila triangular, será

$$P_t = \frac{25 \times 26 \times 27}{6} = 25 \times 13 \times 9 = 2925.$$

PILAS CUADRANGULARES. Están compuestas de capas de balas que forman cuadrados, de los cuales cada uno contiene en su lado una bala ménos que el inmediato inferior; de modo, que la última capa superior no tiene más que una bala.

Para hallar el número de balas que contiene una pila de esta especie, observaremos que, siendo n el número de balas que tiene el lado de la capa inferior, dicha capa se formará de $n \times n = n^2$; la inmediata superior, cuyo lado tiene una bala ménos, contendrá $(n-1)(n-1)=(n-1)^2$; la que sigue tendrá $(n-2)(n-2)=(n-2)^2$, y así sucesivamente, hasta la antepenúltima, que tendrá $3 \times 3 = 3^2$; la penúltima $2 \times 2 = 2^2$, y la última 1×1 ó 1. De modo, que llamando P_c al número de balas de la pila cuadrangular, se tendrá

$$P_c = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (458).$$

Ejemplo. *Determinar el número de balas de una pila cuadrangular, cuya base inferior tiene por lado una fila de 25 balas.*

Segun la fórmula, se hallará

$$P_c = \frac{25 \times 26 \times 51}{6} = 25 \times 13 \times 17 = 5525.$$

Pilas rectangulares. Se diferencian estas pilas de las cuadrangulares, en que sus capas son rectángulos en vez de ser cuadrados, de modo que cada una contiene una fila ménos, y cada fila una bala ménos que la capa inmediata inferior; así, la última capa superior está formada por una fila, que supondremos contiene $m+1$ balas.

Esto supuesto, la primer capa contendrá $m+1$ balas; la segunda contendrá dos filas de $m+2$ balas; la tercera tres filas de $m+3$, y así sucesivamente; la última contendrá, suponiendo que son n el número de capas, n filas de $m+n$ balas. Luego el número total de balas que una pila de esta especie contendrá, será, llamándole P_r,

$$P_r = (m+1) + 2(m+2) + 3(m+3) + \ldots n(m+n) =$$
$$m(1+2+3+\ldots+n) + (1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) =$$
$$m\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Y reduciendo á un comun denominador, se halla por último

$$P_r = \frac{n(n+1)(3m+2n+1)}{6}.$$

Si se quisiera determinar el número de balas que contiene una pila rectangular, por el que tienen las dos filas de la base, ó sea de la capa inferior, observaríamos, que habiendo representado por $m+1$ el número de balas que tiene la capa superior, la fila mayor de la base es $m+n$, y la menor es n; de modo, que llamando N al número de balas que tiene la fila mayor de la base, y n al de la menor, se tendrá

$$N=m+n;\ \text{de donde},\ m=N-n.$$

Sustituyendo el valor de m en la fórmula anterior, hallaremos la nueva fórmula

$$P_r=\frac{n(n+1)\ (3N-n+1)}{6},$$

que da el número de balas de una pila rectangular, conociendo el número de balas que contiene cada una de las filas dela capa inferior.

EJEMPLO I. *Hallar el número de balas que contiene una pila rectangular de* 10 *capas, y cuya fila superior tiene tambien* 10 *balas.*

Aplicando la primera fórmula, se halla

$$P_r=\frac{10\times11\times(27+20+1)}{6}=10\times11\times8=880.$$

EJEMPLO II. *Hallar el número de balas que contiene una pila rectangular, cuya base tiene por lados dos filas que contienen la mayor* 19 *balas y la menor* 10.

Aplicando la segunda fórmula, hallaremos

$$P_r=\frac{10\times11\times(57-10+1)}{6}=10\times11\times8=880.$$

* 448. Cuando las pilas se hallan truncadas, y por consiguiente la capa superior se forma de varias filas, se hallará el número de balas que esta pila truncada contiene, determinando el número de balas que contenga la pila total, despues el de la pila que falta, y la diferencia de estos dos números será el número de balas del tronco de pila.

LECCION XLIX.

Ecuaciones exponenciales, su resolucion.—Condiciones para que el valor de x sea conmensurable en la ecuacion exponencial.—Casos particulares en que se simplifica la resolucion de la exponencial.

Ecuaciones exponenciales, su resolucion.

* 449. Se llama *ecuacion exponencial*, aquella en la cual viene la incógnita como exponente; así $a^x=b$ es una ecuacion exponencial, y de las más sencillas.

* 450. *La expresion* a^x, *en la cual* a *es mayor ó menor que la unidad, puede representar cualquiera cantidad dada positiva.*

En efecto, hemos visto en la leccion quinta, que la diferencia $A^{\frac{m+1}{n}} - A^{\frac{m}{n}}$, ó $A^{\frac{m}{n}} - A^{\frac{m+1}{n}}$, segun que A sea mayor ó menor que la unidad, puede ser menor que δ, dando á n un valor suficientemente grande; lo cual prueba que, si á x le damos valores tan poco diferentes unos de otros como queremos, la expresion a^x recibirá tambien valores tan poco diferentes entre sí como se quiera; lo cual se expresará diciendo que, si x varia por la ley de continuidad, la exponencial a^x varia del mismo modo.

Esto supuesto, sea $a > 1$. Si damos á x valores negativos desde $-\infty$ hasta 0, y luégo positivos desde 0 hasta $+\infty$, hallaremos para valores de la exponencial a^x los siguientes:

$$x = -\infty, \ldots -n, \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots +n, \ldots +\infty,$$

$$a^x = \quad 0, \ldots \frac{1}{a^n}, \ldots \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, \ldots a^n, \ldots \quad \infty;$$

luego si á x damos valores que crecen desde $-\infty$ hasta $+\infty$, la expresion a^x crecerá desde 0 hasta ∞.

Recíprocamente, si la expresion a^x la igualamos á una cierta cantidad b, y hacemos que b crezca desde 0 hasta ∞, x crecerá desde $-\infty$ hasta $+\infty$; por tanto, no hay cantidad positiva que no pueda estar representada por a^x, en la cual a es mayor que la unidad.

Si $a < 1$, se podrá representar por una fraccion de la forma $\frac{1}{a_1}$, en la cual a_1 será mayor que la unidad; y entónces, dando á x valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$, hallaremos para a^x los valores siguientes:

$$x = -\infty, \ldots -n, \ldots -2, -1, 0, 1, \quad 2, \ldots \quad n, \ldots \infty,$$

$$a = \quad \infty, \ldots \quad a_1^n, \ldots \quad a_1^2, \quad a_1, 1, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1^2}, \ldots \frac{1}{a_1^n}, \ldots 0,$$

resultados completamente distintos de los hallados cuando $a > 1$.

Por estas dos séries de valores hallados para a^x, vemos, segun queríamos demostrar, que cualquiera cantidad positiva b puede estar representada por a^x, en la cual $a \gtrless 1$, siendo x una cantidad real conmensurable ó inconmensurable, positiva ó negativa, pero única; pues en la série de valores dados á x, desde $-\infty$ hasta

$+\infty$, solo hay uno para el cual la expresion a^x puede valer una cierta cantidad b.

* 451. Cuando la cantidad a es positiva y diferente de la unidad, acabamos de ver que a^x puede representar cualquiera cantidad positiva; vemos además que dicha expresion nunca puede valer una cantidad negativa, pues una cantidad a positiva elevada á cualquier potencia, siempre da un resultado positivo.

Si con el objeto de obtener de la expresion a^x resultados negativos, suponemos que a es un número negativo, y consideramos la exponencial $(-a)^x=b$, hallaremos que la expresion $(-a)^x$ no es contínua; es decir, que á valores de x que siguen la ley de continuidad, no corresponden, como en a^x, valores que siguen la misma ley de continuidad en la expresion $(-a)^x$. Para demostrarlo demos á x valores sucesivos de la forma $x=\frac{2n}{2m+1}$, $\frac{2n+1}{2m+1}$ y $\frac{2n+1}{2m}$, y hallaremos que la expresion $(-a)^x$ pasa alternativamente de positiva á negativa, de negativa á imaginaria, y así sucesivamente; luego la expresion $(-a)^x$ no puede representar cualquiera cantidad, ya sea positiva, ya negativa; por lo cual no se consideran las exponenciales de esta especie.

* 452. Segun la discusion que acabamos de hacer, vemos que siempre hay para x un valor real conmensurable ó inconmensurable, positivo ó negativo, que verifica á la ecuacion $a^x=b$, en la cual a y b son cantidades positivas, y a distinta de la unidad; además que este valor es único, pues en la série de valores que recibe x, desde $-\infty$ hasta $+\infty$, siguiendo la ley de continuidad, sólo habrá uno, y nada más que uno, para el cual la exponencial a^x recibirá el valor particular b. Hallar este valor en un caso dado, es lo que constituye la resolucion de la exponencial $a^x=b$.

* 453. Para proceder con método en la resolucion de la exponencial

$$a^x=b \qquad [1],$$

distinguiremos los seis casos que se pueden presentar; tres que corresponden al caso de ser $a>1$, y otros tres cuando $a<1$, los cuales se hallan comprendidos en el siguiente cuadro:

$$a>1, \begin{cases} b>1 \begin{cases} b>a \\ b<a \end{cases} \\ b<1 \end{cases} \qquad a<1, \begin{cases} b<1 \begin{cases} b<a \\ b>a. \end{cases} \\ b>1 \end{cases}$$

PRIMER CASO. $a>1$, $b>1$, $b>a$.

Siendo $a>1$, dando á x valores sucesivos desde 1 en adelante, a^x irá creciendo cada vez más, á partir de a; luego llegaremos á encontrar un valor entero α de x que dé $a\alpha=b$, en cuyo caso la ecuacion queda resuelta, y el valor de x es α; ó llegaremos al encontrar dos números m y $m+1$, que comprenderán al valor de x; porque se tendrá

$$a^m<b \text{ y } a^{m+1}>b;$$

luego x tendrá que ser mayor que m y menor que $m+1$.

Hagamos, pues, $x=m+\frac{1}{y}$.

Siendo y una cantidad mayor que la unidad, y puesto que este valor de x ha de verificar á la ecuacion [1], sustituyámoslo, y se tendrá

$$a^{m+\frac{1}{y}}=b;$$

de donde se deduce, dividiendo por a^m, y despues elevando á la potencia y,

$$\left(\frac{b}{a^m}\right)^y=a, \text{ ó } a_1{}^y=a \qquad [2],$$

representando por a_1 la fraccion $\frac{b}{a^m}$.

Si comparamos esta ecuacion [2] con la propuesta, veremos que ambas se hallan en las mismas condiciones. En efecto, en la ecuacion propuesta se tiene $a>1$, y en ésta se tiene tambien $a_1>1$, porque de la relacion $a^m<b$ se saca $\frac{b}{a^m}>1$, ó $a_1>1$; en aquella se tiene $b>a$, y en ésta tambien se verifica que $a>a_1$, como se deduce de la relacion $a^{m+1}>b$, dividiendo por a^m. En efecto, $a>\frac{b}{a^m}$, ó $a>a_1$; luego si la ecuacion $a_1{}^y=a$, se halla en las mismas condiciones que la propuesta $a^x=b$, podremos hallar del mismo modo la parte entera de la incógnita y, sustituyendo en la ecuacion [2] la série natural de los números 1, 2, 3,... hasta llegar á uno que nos dé el valor exacto de y, ó hallar dos números n y $n+1$, que nos den $a_1{}^n<a$ y $a_1{}^{n+1}>a$, en cuyo caso el valor de y se hallará comprendido entre n y $n+1$, de modo que podremos hacer $y=n+\frac{1}{z}$.

Lo mismo que anteriormente sustituiremos este valor de y en la ecuacion [2], puesto que debe verificarla, y hallaremos otra de la forma $a_2^z = a_1$, con la cual haremos lo mismo que con las anteriores, puesto que se halla en el mismo caso, y obtendremos el valor $z=p+\frac{1}{u}$, y la nueva ecuacion $a_3{}^u=a_2$.

Continuando de la misma manera, iremos obteniendo la série de valores $u=q+\frac{1}{v}$, $v=r+\frac{1}{w}$, etc.

Si ahora sustituimos todos estos valores sucesivamente en el de x, hallaremos la fraccion contínua

$$x=m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}},$$

que expresará el valor de x exacta ó aproximadamente, segun lleguemos á un último cociente exacto ó no.

Segundo caso. $a>1, b>1, b<a$.

Si hacemos $x=0$ en la ecuacion [1], se tiene $a^0=1$; pero haciendo $x=1$, se halla $a^1=a$; y como se tiene $b>1$ y $b<a$, es claro que el valor de x estará comprendido entre 0 y 1; de modo que podremos hacer $x=\frac{1}{y}$.

Sustituyendo este valor en la ecuacion [1], hallaremos

$$a^{\frac{1}{y}}=b, \quad \text{de donde } b^y=a;$$

cuya ecuacion se halla en el primer caso, por ser $b>1$, $a>1$, y $a>b$; luego se hallará para valor de y una fraccion contínua, y por tanto la ecuacion quedará resuelta.

Tercer caso. $a>1, b<1$.

Siendo $b<a$, como fácilmente se ve, x no puede recibir en la exponencial $a^x=b$, valores positivos, pues el valor 0 da ya un resultado $a^0=1$ mayor que b; luego el valor de x ha de ser menor que cero, es decir, negativo; esto supuesto, hagamos $x=-y$, y la ecuacion propuesta se convertirá en $a^{-y}=b$ ó $\frac{1}{a^y}=b$, de donde $a^y=\frac{1}{b}$.

Pero siendo $b<1$, la fraccion $\frac{1}{b}$ será >1; y como $a>b$, la ecuacion $a^y=\frac{1}{b}$ se halla en uno de los dos casos anteriores, y por tanto podremos hallar, como ya se ha dicho, el valor de la incógnita y, el cual, tomado con el signo —, dará el de x.

CUARTO CASO. $a<1$, $b<1$, $b<a$.

Siendo $a<1$, la expresion a^x hemos visto que decrece indefinidamente á medida que el exponente x va aumentando; de modo, que si á x le damos los valores sucesivos 1, 2, 3,... llegaremos á encontrar uno que dé el valor exacto de x, que verifica á la ecuacion propuesta, $a^x=b$, ó hallaremos dos números consecutivos m y $m+1$, que darán $a^m>b$ y $a^{m+1}<b$, y por consiguiente el valor de x estará comprendido entre estos dos números.

Hagamos, pues, $x=m+\frac{1}{y}$. Siendo y mayor que la unidad, y puesto que este valor de x ha de verificar á la ecuacion propuesta, sustituyéndole se hallará lo mismo que en el primer caso, $a^{m+\frac{1}{y}}=b$ ó $a_1{}^y=a$; pero de las relaciones $a^m>b$ y $a^{m+1}<b$, se deduce que esta ecuacion $a_1{}^y=a$ se halla en las mismas condiciones que la propuesta $a^x=b$; por tanto, podremos hallar, lo mismo que en el primer caso, una série de valores

$$y=n+\frac{1}{z},\quad z=p+\frac{1}{u},\quad u=q+\frac{1}{v},\ \text{etc};$$

los cuales darán por valor de x una fraccion contínua.

QUINTO CASO. $a<1$, $b<1$, $b>a$. Se reduce al cuarto caso, del mismo modo que el segundo se redujo al primero.

SEXTO CASO. El valor de x es negativo como en el tercer caso, y se reduce al cuarto ó quinto, del mismo modo que aquel se redujo al primero ó segundo.

EJEMPLO Sea hallar el valor de x, que verifica á la ecuacion

$$10^x=200.$$

Dando á x los valores 1, 2, 3, etc., se ve que el valor de x se halla comprendido entre 2 y 3; de modo que haremos $x=2+\frac{1}{y}$.

Sustituyendo este valor de x en la ecuacion propuesta, hallaremos, despues de toda reduccion,

$$2^y=10.$$

Sustituyendo en vez de y los números 1, 2, 3, etc., se halla que el valor de y está comprendido entre 3 y 4; por tanto, haremos $y=3+\frac{1}{z}$.

Sustituyamos este valor en la ecuacion anterior, y hallaremos despues de toda reduccion $(1,25)^z=2$, el valor de z se halla en esta ecuacion comprendido entre 3 y 4, de modo que haremos $z=3+\frac{1}{u}$.

Sustituyendo este valor de z en la ecuacion anterior, se hallará $(1,024)^u=1,25$, en esta ecuacion el valor de u se halla comprendido entre 9 y 10, por consiguiente, haremos $u=9+\frac{1}{v}$.

Sustituyendo este valor en la ecuacion anterior, hallaremos $(1,009)^v=1,024$, en donde el valor de v se halla comprendido entre 2 y 3, de modo que haciendo $v=2+\frac{1}{w}$, tendremos, sustituyendo estos valores en el de x, la fraccion contínua

$$x=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}}$$

Y formando las reducidas se hallará segun la regla (428)

$$2,\ \frac{7}{3},\ \frac{23}{10},\ \frac{214}{93},\ \frac{451}{196},$$

esta última se diferencia del valor de x en ménos de la cantidad $\frac{1}{196(196+93)}=\frac{1}{56644}$; por consiguiente, si la reducimos á fraccion decimal, se hallará una cuyo error principiará en la quinta cifra: así se tendrá $x=2,30102$ número cuyas cuatro primeras cifras decimales son exactas.

Condiciones para que el valor de x sea conmensurable en la ecuacion exponencial.

* 454. Como el valor de x que verifica á la exponencial $a^x = b$, viene bajo la forma de una fraccion contínua, conviene saber cuándo ésta será limitada ó ilimitada, es decir, cuándo x será conmensurable ó inconmensurable.

Sean, en primer lugar, a y b dos números enteros y veamos á qué condiciones tienen que satisfacer para que x sea un número conmensurable $\frac{m}{n}$.

Si el valor de x, que verifica á la ecuacion exponencial propuesta, es conmensurable é igual á $\frac{m}{n}$, se deberá tener

$$a^{\frac{m}{n}} = b, \text{ de donde } a^m = b^n.$$

Esta relacion manifiesta que todo factor primo α de a, tiene que estar contenido necesariamente en b, pues de lo contrario dividiendo por él, el primer miembro seria entero y el segundo fraccionario, luego para que las igualdades anteriores puedan verificarse, es necesario como condicion precisa que a y b contengan los mismos factores primos. Luego si se tiene, por ejemplo,

$$a = \alpha^p \beta^q \gamma^r \delta^s, \text{ se deberá tener } b = \alpha^{p'} \beta^{q'} \gamma^{r'} \delta^{s'}.$$

Sustituyendo estos valores en la relacion $a^m = b^n$, tendremos

$$\alpha^{pm} \beta^{qm} \gamma^{rm} \delta^{sm} = \alpha^{p'n} \beta^{q'n} \gamma^{r'n} \delta^{s'n}.$$

Para que esta última igualdad se verifique, es necesario que cada factor primo se halle repetido en ambos miembros un mismo número de veces, pues de lo contrario dividiendo por aquel que en uno de los dos miembros estuviera elevado á mayor potencia, daria el absurdo de ser un número entero igual á un fraccionario; luego tendremos, por segunda condicion

$$pm = p'n, \quad qm = q'n, \quad rm = r'n, \quad sm = s'n,$$

$$\text{de donde } \frac{m}{n} = \frac{p'}{p}, \quad \frac{m}{n} = \frac{q'}{q}, \quad \frac{m}{n} = \frac{r'}{r}, \quad \frac{m}{n} = \frac{s'}{s}.$$

Recíprocamente, admitamos que se tengan las igualdades

$$a = \alpha^p \beta^q \gamma^r \delta^s, \quad b = \alpha^{p'} \beta^{q'} \gamma^{r'} \delta^{s'} \text{ y } \frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r} = \frac{s'}{s}.$$

Si hacemos $x=\frac{p'}{p}=\frac{q'}{q}=\frac{r'}{r}=\frac{s'}{s}$, se tendrá $px=p'$, $qx=q'$, $rx=r'$, $sx=s'$, y por consiguiente

$$a^x=\alpha^{px}\beta^{qx}\gamma^{rx}\delta^{sx}=\alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'}\delta^{s'}=b.$$

Luego para que x *sea conmensurable en la exponencial* $a^x=b$, *es necesario y suficiente que* a *y* b *se compongan de unos mismos factores primos, y los exponentes de* b *estén con los de* a *en una misma relacion.*

* 455. *Si los factores de* a *vienen elevados á la primera potencia, para que* x *sea conmensurable en la ecuacion exponencial* $a^x=b$, *es necesario que* b *sea una potencia exacta de* a.

En efecto, sea $a=\alpha\beta\gamma\delta$: se deberá tener por primera condicion $b=\alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'}\delta^{s'}$, y por segunda $p'=q'=r'=s'$; luego $b=\alpha^{p'}\beta^{p'}\gamma^{p'}\delta^{p'}=(\alpha\beta\gamma\delta)^{p'}=a^{p'}$, y por consiguiente la ecuacion exponencial se convierte en $a^x=a^{p'}$, de donde $x=p'$, que prueba que no sólo x es conmensurable sino entero é igual al exponente de la potencia que expresa b. Así, en la exponencial $10^x=b$, x no puede ser conmensurable mas que en los casos de ser b una potencia de 10 y entónces no sólo es conmensurable, sino entero.

* 456. Sean, en segundo lugar, a y b dos números fraccionarios de la forma $\frac{h}{h'}$ y $\frac{k}{k'}$. La igualdad $a^m=b^n$, se convertirá en

$$\left(\frac{h}{h'}\right)^m=\left(\frac{k}{k'}\right)^n \quad \text{ó} \quad h^m k'^n=h'^m k^n.$$

Siendo h y h' primos entre sí, lo mismo que k y k', sus potencias respectivas tambien lo serán; así, para que la igualdad anterior se verifique, es necesario que se tengan las igualdades $h^m=k^n$ y $h'^m=k'^n$, las cuales prueban que los numeradores de las dos fracciones que representan á las cantidades a y b, han de estar formados de los mismos factores primos, y estos elevados á exponentes cuya relacion sea igual en todos; y lo mismo se ha de verificar respecto á los denominadores.

Casos particulares en que se simplifica la resolucion de la exponencial.

* 457. La resolucion de la exponencial $a^x=b$, se simplifica notablemente, siempre que las cantidades a y b sean potencias de un mismo número primo.

Sea, por ejemplo, $8^x=128$, la ecuacion exponencial que queremos resolver. Siendo $8=2^3$, y $128=2^7$, la ecuacion anterior se convertirá en $(2^3)^x=2^7$ ó $2^{3x}=2^7$, de donde se deduce inmediatamente $3x=7$, de donde $x=2\frac{1}{3}$.

Si la ecuacion fuera $125^x=3125$, observariamos que 125 es igual 5^3, y 3125 es lo mismo que 5^5, luego la ecuacion propuesta se convertirá en $5^{3x}=5^5$ de donde $3x=5$ ó $x=1\frac{2}{3}$.

Si a se compone de factores primos elevados á la primera potencia, el valor de x será conmensurable ó inconmensurable, segun que b sea ó no una potencia exacta de a; en el primer caso x será igual al exponente de dicha potencia, en el segundo el valor de x será inconmensurable.

LECCION L.

De los logaritmos considerados como exponentes. Perfecta correspondencia entre ambos modos de considerarlos.—Demostracion de las propiedades de los logaritmos, y construccion de las tablas por las ecuaciones exponenciales.—Disposicion de las tablas de CALLET.

De los logaritmos considerados como exponentes. Perfecta correspondencia entre ambos modos de considerarlos.

458. La definicion que hemos dado en Aritmética diciendo que los logaritmos son: *los términos de una progresion por diferencia que principia por 0, correspondientes á los términos de una progresion por cociente que principia por 1*, se le llama elemental. Algebráicamente se definen los logaritmos diciendo que: *el logaritmo de un número cualquiera es el exponente de la potencia á que debe elevarse una cantidad constante, llamada base, para reproducir el número dado.*

Así como en Aritmética hemos deducido los logaritmos de dos progresiones, una por diferencia y otra por cociente, en esta otra manera de considerar los logaritmos, los deduciremos de la ecuacion exponencial $b^x=y$, en la cual b representa un número constante y en general mayor que la unidad, y un número positivo cualquiera y x el logaritmo de este número; el número constante b, que elevado á una potencia x ha de reproducir el número y cuyo logaritmo es x, es á lo que se da el nombre de *base* de los logaritmos.

459. Debiendo representar la exponencial b^x cualquier número positivo y, es necesario que la base b, sea *positiva* y distinta de la *unidad*; si no cumple con estas dos condiciones la exponencial b^x no podrá representar un número cualquiera.

No teniendo que satisfacer la base b á más condiciones que á ser positiva y distinta de la unidad, podremos elegir para valores de b, tantos números como queramos y como entónces los exponentes de las potencias de la base que nos reproduzcan un mismo número n, serán desiguales, se sigue que un mismo número podrá tener tantos logaritmos como queramos, y que todos dependerán del valor particular que demos á la base b; así, llamando x, x', x'',... los exponentes de las potencias á que hay que elevar las bases b, b', b'',... para que reproduzcan el mismo número n, es decir, que si se tiene $b^x=n$, $b'^{x'}=n$, $b''^{x''}=n$,... cada uno de estos exponentes x, x', x'',... será el logaritmo del número n, considerado respectivamente en los sistemas cuyas bases son b, b', b''...

460. Cualquier sistema que se considere se tendrá que *el logaritmo de la unidad es* 0, y *el logaritmo de la base es* 1.

En efecto, la exponencial $b^x=y$ nos da, haciendo sucesivamente $y=1$ é $y=b$,

$b^x=1$, de donde $x=0$ y $b^x=b$, de donde $x=1$.

461. A poco que se examinen los dos modos de considerar los logaritmos, veremos la exacta correspondencia que hay entre ellos.

En efecto, de la definicion aritmética se puede deducir la algebráica, y al contrario. Para demostrarlo consideraremos las dos progresiones que constituyen un sistema de logaritmos

$$\begin{array}{l} \because \ldots : q^{-n} : \ldots : q^{-3} : q^{-2} : q^{-1} : 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^n : \ldots \\ \div \ldots . (-nr) . \ldots . (-3r) . (-2r) . (-r) . 0 . r . 2r . 3r . \ldots . nr . \ldots \end{array} \quad [1].$$

Si ahora representamos por b la raíz aritmética del grado r de la cantidad q, tendremos $\sqrt[r]{q}=b$, de donde $q=b^r$ cuyo valor sustituido en la progresion anterior, convertirá el sistema [1], en el siguiente.

$$\begin{array}{l} \because \ldots : b^{-nr} : \ldots : b^{-3r} : b^{-2r} : b^{-r} : 1 : b^r : b^{2r} : b^{3r} : \ldots : b^{nr} : \ldots \\ \div \ldots . (-nr) . \ldots . (-3r) . (-2r) . (-r) . 0 . r . 2r . 3r . \ldots . nr . \ldots \end{array}$$

Donde vemos que el logaritmo del número representado por b^{nr}

será nr; es decir, el exponente de que está afectado el número constante b. Por cuya razon vemos que de la definicion aritmética de logaritmos, podemos deducir la definicion algebráica de los mismos diciendo que *logaritmo de un número es el exponente de la potencia á que debe elevarse una cantidad constante* b, *para reproducir el mismo número.*

Supongamos ahora, que de la definicion algebráica que se da de los logaritmos, queremos deducir la aritmética, con lo cual quedará demostrada la perfecta correspondencia que hay entre ambas definiciones.

Para ello consideremos la ecuacion exponencial $b^x=y$, que determina un sistema cualquiera de logaritmos por su base b.

Si á x le damos una série de valores en progresion por diferencia

$$x=\ldots-nr,\ldots-3r,-2r,-r,\ 0,\ r,\ 2r,\ 3r,\ldots\ nr,\ldots$$

cuya razon r sea tan pequeña como queramos, hallaremos para valores de y una série de números en progresion geométrica,

$$y=\ldots b^{-nr},\ldots\ b^{-3r},\ b^{-2r},\ b^{-r},\ 1,\ b^{r},\ b^{2r},\ b^{3r},\ldots\ b^{nr};\ldots$$

de donde deduciremos que los valores de x, ó sean *los logaritmos de los números, son los términos de una progresion por diferencia que principia por cero y que corresponden á dichos números considerados como términos de una progresion geométrica que principia por la unidad.*

Demostracion de las propiedades de los logaritmos, y construccion de las tablas por las ecuaciones exponenciales.

462. Una vez demostrada la perfecta correspondencia que hay entre las dos maneras de considerar los logaritmos, pasemos á justificar todas las propiedades de que éstos gozan, y que ya hemos considerado en la Aritmética.

En primer lugar observaremos, que debiendo ser la base b del sistema de logaritmos, como ya hemos dicho (459), un número positivo cualquiera distinto de la unidad, sólo los números positivos pueden tener logaritmos, y éstos tantos cuantas sean las bases que se consideren; pero una vez elegida una base cualquiera b, en este sistema un número n no puede tener más que un logaritmo, pues en la exponencial $b^x=n$, sólo puede recibir x un valor que la satisfaga.

463. Siendo la *base* de un sistema de logaritmos el número que tiene la *unidad* por logaritmo, (Aritmética 443), el número que tiene tambien la unidad por logaritmo en el sistema que se deduce de la exponencial $b^x=y$, es $b^1=y$; ó lo que es lo mismo, b es la base del sistema; por tanto, la base de un sistema tal como se ha definido en el método elemental de los logaritmos, es enteramente la misma que se obtiene considerando á éstos como exponentes.

464. Si la base de un sistema es, como generalmente se considera, mayor que la unidad, se tendrá que los logaritmos de los números mayores que 1 y menores que la base, serán mayores que 0 y menores que 1; el logaritmo de la base será la unidad, y el de cualquier potencia de la base será el exponente de esta potencia; el logaritmo de un número comprendido entre dos potencias de la base, estará comprendido entre los dos exponentes de estas potencias. Los logaritmos crecerán indefinidamente cuando los números lo hagan tambien; así, se tendrá $\log. \infty = \infty$.

El logaritmo de la unidad ya hemos dicho que es *cero*.

Los logaritmos de los números menores que la unidad, son menores que cero; es decir, negativos, y tanto mayores en valor numérico cuanto menores son los números á que corresponden; así, se tiene $\log. 0 = -\infty$.

Observacion. Cuando la base es menor que la unidad, sucede todo lo contrario; así, se tiene entónces $\log. 0=\infty$, $\log. \infty = -\infty$.

465. La justificacion de las propiedades de los logaritmos es muy sencilla por medio de la exponencial. En efecto, sean N, N′, N″, N‴,... varios números cuyos logaritmos, en un sistema b, sean $x, x', x'', x''',...$ lo cual se expresará por

$$N=b^x, N'=b^x, N''=b^{x'}, N'''=b^{x'''},...$$

de las cuales se deducirán fácilmente, segun las reglas del cálculo algebráico, las siguientes:

$$N\times N'\times N''\times N'''\times ...=b^x\times b^{x'}\times b^{x''}\times b^{x'''}\times ...=b^{x+x'+x''+x'''+...}$$

$$\frac{N}{N'}=\frac{b^x}{b^{x'}}=b^{x-x'},$$

$$N^m=(b^x)^m=b^{mx},$$

$$\sqrt[m]{N}=\sqrt[m]{b^x}=b^{\frac{x}{m}}.$$

Pero segun la definicion algebráica de los logaritmos, los expo–

nentes de la base b, en los últimos miembros, son los logaritmos de las cantidades que están en los primeros; luego traduciendo al lenguaje vulgar estas ecuaciones, hallaremos la justificacion de las propiedades conocidas.

466. Si quisiéramos construir unas tablas de logaritmos vulgares por medio de la exponencial $b^x=y$, que en este caso se reduce á $10^x=y$, veríamos por las mismas consideraciones que se hicieron en la Aritmética (457), que solo tendríamos que calcular los logaritmos de los números primos comprendidos entre 1 y el límite superior de las tablas; que bastaria calcular éstos con nueve cifras decimales exactas, para obtener los logaritmos de los números enteros desde 1 hasta 130000 con siete cifras decimales exactas; que sólo los números que fuesen potencias de 10 tendrán por logaritmos números conmensurables (455) y enteros, pues serán los exponentes de dichas potencias. Los logaritmos de los demás números compuestos, se hallarán sumando los logaritmos de los factores primos que los forman; y por último, que el logaritmo de un número primo cualquiera n, se calculará resolviendo la exponencial $10^x=n$, y hallando el valor de x con el grado de aproximacion que se quiera, segun se ha dicho anteriormente.

467. Si construidas unas tablas de logaritmos en una base cualquiera b, quisiéramos construir otras cuya base fuera b', no habria mas que *multiplicar los logaritmos del sistema dado, por la unidad partida por el logaritmo de la nueva base tomado en el sistema conocido*, cuya cantidad constante sabemos que se llama *módulo relativo* de los logaritmos.

Sean, en efecto, x y x' los logaritmos de un cierto número n tomados en dos sistemas cuyas bases son b y b'; de modo, que se tendrá $n=b^x$, y $n=b'^{x'}$.

Si suponemos construidas las tablas de logaritmos cuya base es b, y representamos los logaritmos de este sistema por $\log_b$, tendremos, tomando logaritmos en el sistema conocido,

$$\log_b n=x \log_b b=x, \text{ y } \log_b n=x' \log_b b';$$

de donde $$x=x'\log_b b' \text{ ó } x'=x\times\frac{1}{\log_b b'},$$

que prueba que el logaritmo x' del número n, correspondiente en el sistema que tiene por base b' es igual á x, logaritmo del mismo número en el sistema cuya base es b, multiplicado por $\frac{1}{\log_b b'}$; es decir, por la unidad dividida por el logaritmo de la nueva base b' tomado en el sistema cuya base es b.

Disposicion de las tablas de Callet.

* 468. Como las tablas generalmente usadas son las de Callet, conviene explicar la disposicion en que se hallan, para poder resolver por ellas todas las cuestiones relativas á los logaritmos.

* 469. La primera de las tablas, que está encabezada con el nombre de Chiliade I (*Kiliada* 1.ª, que significa reunion de mil unidades), contiene los números naturales desde 1 hasta 1200 en columnas verticales, encima de las cuales se halla la letra N, inicial de *nombre* (número). A la derecha de cada número se halla la mantisa del logaritmo correspondiente aproximada con ocho cifras decimales, formando unas segundas columnas, encima de las cuales se halla escrito *log.* inicial de *logarithmes* (logaritmos). No se escribe en las tablas la característica de los logaritmos, porque se sabe cuál es á la sola inspeccion del número (*Arit.* 448.)

Esta tabla, como se vé, no ofrece dificultad alguna, y seria por consiguiente fácil hallar el logaritmo de un número cualquiera contenido en ella, ó el número correspondiente á un logaritmo dado.

Pasemos á las tablas siguientes, que ya son algo más complicadas; y para que sea más fácil su comprension, reproduciremos una de las páginas de las tablas de Callet, en la cual no consideraremos las dos primeras columnas de la izquierda, por no tener una relacion directa con la teoría de los logaritmos.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
4440	647.3880	3928	4025	4123	4221	4319	4417	4514	4612	4710	98
41	4808	4906	5003	5101	5199	5297	5394	4492	5590	5688	1 10
42	5786	5883	5981	6079	6177	6274	6372	6470	6568	6665	2 20
43	6763	6861	6959	7056	7154	7252	7350	7447	7545	7643	3 29
44	7741	7838	7936	8034	8131	8229	8327	8425	8522	8620	4 39
4445	8718	8815	8913	9011	9108	9206	9304	9402	9499	9597	5 44
46	9695	9792	9890	9988	0085	0183	0281	0378	0476	0574	6 59
	648.										
47	0671	0769	0867	0964	1062	1160	1257	1355	1453	1550	7 69
48	1648	1745	1843	1941	2038	2136	2234	2331	2429	2526	8 78
49	2624	2722	2819	2917	3015	3112	3210	3307	3405	3503	9 88
4450	3600	3698	3795	3893	3990	4088	4186	4283	4381	4478	
51	4576	4674	4771	4869	4966	5064	5161	5259	5356	5454	
52	5552	5649	5747	5844	5942	6039	6137	6234	6332	6429	
53	6527	6624	6722	6820	6917	7015	7112	7210	7307	7405	
54	7502	7600	7697	7795	7892	7790	8087	8185	8282	8380	
4455	8477	8575	8672	8770	8867	8964	9062	9159	9257	9354	
56	9452	9549	9647	9744	9842	9939	0037	0134	0231	0329	
	649.										
57	0426	0524	0621	0719	0816	0914	1011	1108	1206	1303	
58	1401	1498	1595	1693	1790	1888	1985	2083	2180	2277	
59	2375	2472	2570	2667	2764	2862	2959	3056	3154	3251	
4460	3349	3446	3543	3641	3738	3835	3933	4030	4128	4225	
61	4322	4420	4517	4614	4712	4809	4906	5004	5101	5198	
62	5296	5393	5490	5588	5685	5782	5880	5977	6074	6172	
63	6269	6366	6463	6561	6658	6755	6853	6950	7047	7145	
64	7242	7339	7436	7534	7631	7728	7826	7923	8020	8117	
4465	8215	8312	8409	8506	8604	8701	8798	8895	8993	9090	
66	9187	9284	9382	9479	9576	9673	9771	9868	9965	0062	
	650.										
67	0160	0257	0354	0451	0548	0646	0743	0840	0937	1034	
68	1132	1229	1326	1423	1520	1618	1715	1812	1909	2006	
69	2104	2201	2298	2395	2492	2589	2687	2784	2881	2978	
4470	3075	3172	3270	3367	3464	3561	3658	3755	3852	3950	
71	4047	4144	4241	4338	4435	4532	4629	4727	4824	4921	
72	5018	5115	5212	5309	5406	5503	5601	5698	5795	5892	
73	5989	6086	6183	6280	6377	6474	6571	6669	6766	6863	
74	6960	7057	7154	7251	7348	7445	7542	7639	7736	7833	
4475	7930	8027	8124	8222	8319	8416	8513	8610	8707	8804	
76	8901	8998	9095	9192	9289	9386	9483	9580	9677	9774	
77	9871	9968	0065	0162	0259	0356	0453	0550	0647	0744	97
	651.										
78	0841	0938	1035	1132	1229	1326	1423	1520	1617	1714	1 10
79	1811	1908	2005	2102	2198	2295	2392	2489	2586	2683	2 19
4480	2780	2877	2974	3071	3168	3265	3362	3459	3556	3653	3 29
81	3749	3846	3943	4040	4137	4234	4331	4428	4525	4622	4 39
82	4719	4815	4912	5009	5106	5203	5300	5397	5494	5591	5 49
83	5687	5784	5881	5978	6075	6172	6269	6365	6462	6559	6 58
84	6656	6753	6850	6947	7043	7140	7237	7334	7431	7528	7 68
4485	7624	7721	7818	7915	8012	8109	8205	8302	8399	8496	8 78
86	8593	8690	8786	8883	8980	9077	9174	9270	9367	9464	9 87
87	9561	9657	9754	9851	9948	0045	0141	0238	0335	0432	
	652.										
88	0528	0625	0722	0819	0916	1012	1109	1206	1303	1399	
89	1496	1593	1690	1786	1883	1980	2076	2173	2270	2367	
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Estas segundas tablas contienen los números desde 1020 hasta 108000. La columna que se halla encabezada con la inicial N, contiene la série natural de los números desde 1020 hasta 10800. La siguiente, que se halla encabezada con la cifra 0, contiene las mantisas de los logaritmos, calculados con siete cifras decimales, de los números correspondientes que están á su izquierda; de modo, que la reunion de estas dos columnas puede considerarse como la continuacion de la primera tabla, y dan por lo tanto los logaritmos desde 1020 hasta 10800.

La columna que está encabezada con la cifra 0, vemos que está dividida en otras dos, de las cuales la primera de la izquierda se compone de números de tres cifras que van aumentando de unidad en unidad, y que no están colocados á igual distancia unos de otros; la segunda se compone de números de cuatro cifras que no dejan intérvalo alguno entre sí. Esto no es más que una simplificacion que consiste en no repetir las tres primeras cifras en todos aquellos logaritmos que las tengan iguales; así, por ejemplo, la plana que consideramos, cuyo primer logaritmo correspondiente al número 4440, tiene por mantisa 6473830, y los números que siguen hasta el 4446 inclusive, tienen todos por parte comun las tres primeras cifras; y en lo que difieren, que es en sus cuatro últimas, se hallan escritas. La misma simplificacion se hace en la columna de los números; pues aunque todos se componen de cuatro cifras, no se escriben así más que de cinco en cinco; de los intermedios solo se escriben las dos últimas. El número 4443, que es el cuarto de esta plana, y que sólo hemos escrito de él las dos últimas cifras 43, porque ya se sabe que las otras dos de la izquierda son las mismas que las del número de cuatro cifras inmediatamente superior, tiene su logaritmo por mantisa el número 6476763, cuyas cuatro últimas cifras son las que se hallan enfrente del número, y las tres primeras son las que primeramente se encuentran ascendiendo en la primera columna de que acabamos de hablar. Del mismo modo, la mantisa del logaritmo del número 4457, será 6490426; la del 4472, será 6505018. Desde el número 10000, cuyos logaritmos vienen calculados con ocho cifras decimales, los números aislados que forman la primera de estas dos nuevas columnas, contienen cuatro cifras.

Cuando dos números son décuplos el uno del otro, la parte decimal en ambos es la misma (*Arit.* 449); así, las dos columnas marcadas con N y 0, nos dan tambien de 10 en 10 los logaritmos de los números comprendidos entre 10200 y 108000; así, el logaritmo de 44580, tendrá por mantisa el número 6491401; la del logaritmo del número aumentado en 10 unidades 44590, será 6492375.

Para obtener los logaritmos de los números intermedios, tenemos las nueve columnas siguientes marcadas con las cifras 1, 2, 3,... hasta 9, las cuales contienen las cuatro últimas cifras decimales de los logaritmos de los números de cinco cifras, cuyas cuatro primeras se hallan en la primera columna N, y la última en la parte superior de la columna que se considera. Así, la que tiene la cifra 0 en su parte superior, contiene las cuatro últimas cifras de los logaritmos de los números desde 10200 hasta 108000, que terminan en un cero, y que puestas á la derecha de las tres ó cuatro primeras, segun que los logaritmos se hallen calculados con siete ú ocho decimales, que se hallen enfrente ó en la parte superior en la primera columna de los números aislados de que hemos hablado, constituyen toda la mantisa del logaritmo del número propuesto.

La columna marcada con la cifra 1, contiene las cuatro últimas cifras de los logaritmos de los números de cinco cifras terminados en 1; la marcada con la cifra 2, las de aquellas que terminen en 2; y así sucesivamente hasta la marcada con 9, que representa las de los números que terminan en 9. De este modo se tiene una tabla de los logaritmos correspondientes á los números de cinco cifras. Para buscar en ella el logaritmo de un número, se consulta la columna N, y en ella se hallarán las cuatro primeras cifras del número; una vez halladas, se correrá la vista hasta la columna que esté marcada con la última cifra del número dado, y en ésta se encontrarán las cuatro últimas cifras del logaritmo; cuyas tres ó cuatro primeras, segun que los logaritmos tengan siete ú ocho cifras decimales, se hallarán enfrente ó en la parte superior de la línea horizontal que se considera, en la columna primera de que ya hemos hecho mencion y que hemos llamado de números aislados. Así, la mantisa del logaritmo correspondiente al número 44638, se hallará buscando primero en la columna N el número 4463 y recorriendo despues la vista hasta la columna marcada con la última cifra 8, hallaremos las cuatro cifras 7047, que serán las cuatro últimas del logaritmo que se busca. En cuanto á las tres primeras, se hallan expresadas en la parte superior de la columna de los números aislados, y son

649; de modo que la parte decimal del logaritmo del número dado, será 6497047.

No deben pasar desapercibidas ciertas interrupciones que á primera vista se notan en las líneas que forman las columnas que dan las cuatro últimas cifras de un logaritmo. Así, por ejemplo, en la página que hemos tomado de modelo, á partir de las cuatro cifras 9988, que se hallan en la columna 3, sigue una línea en blanco; y la línea siguiente principia en blanco, y continúa hasta la columna 4, en donde se hallan las cuatro cifras 0085. Nótese tambien, que toda línea que principia en blanco, respecto á las columnas 0, 1, 2,... corresponde á un número de la primera columna que hemos llamado de números aislados; así, enfrente de la primera línea en blanco, se halla el número 648; enfrente de la segunda, el número 649; enfrente de la tercera, el número 650; y así sucesivamente. En la columna N, y enfrente de la línea que principia en blanco, se halla tambien que no hay número. Esto, que suele confundir á los principiantes, es muy sencillo de comprender, y apreciar la ventaja que ocasiona por su claridad.

Cuando consideramos el logaritmo de un número cualquiera, el primero por ejemplo, 44400, sus tres primeras cifras 647, son comunes á todos los logaritmos de los números que le siguen; pero llegaremos necesariamente á uno cuyo logaritmo no empezará en su parte decimal por las tres mismas cifras 647, sino que variarán; y como esto no ha de suceder precisamente en los números que terminen en la cifra 9, en cuyo caso no habria estos trozos de líneas en blanco, es necesario marcar hasta qué número corresponden dichas tres primeras cifras. Así, todas las mantisas de los logaritmos de los números 44400 hasta 44463, empezarán por las tres cifras decimales 647; pero la parte decimal del siguiente número 44464, que al ir á buscarla, segun se ha dicho, nos hallamos que las cuatro últimas cifras se hallan en blanco, no principia por las mismas tres cifras 647, sino por las siguientes 648, las cuatro últimas se hallan en la fila en que este número se encuentra, y en su columna correspondiente 4; por consiguiente, dicha parte decimal será 6480085.

A partir de este número, en todos los siguientes principian sus logaritmos por las tres cifras decimales 648, hasta llegar al número 44566, desde el cual principia á regir el número aislado siguiente de tres cifras 649, para primeras de la parte decimal de los logaritmos de los números que siguen.

Del mismo modo veremos que la parte decimal del logaritmo del número 44775, es 6510356.

Finalmente, la última columna á la derecha, contiene las diferencias que hay entre cada dos logaritmos consecutivos; en las dos tablitas que hay debajo separadas por una raya vertical, las partes de estas diferencias correspondientes á una décima, dos, tres, etc., hasta nueve. Estas diferencias vienen expresadas en unidades del último órden decimal, lo mismo que las correspondientes á las tablitas de que hemos hablado.

LECCION LI.

Uso de las tablas. Dado un número cualquiera, hallar por medio de las tablas su logaritmo. Dado el logaritmo de un número, hallar este número.

Uso de las tablas. Dado un número cualquiera, hallar por medio de las tablas su logaritmo.

* 470. Bajo el epígrafe de *uso de las tablas*, ó *manejo* de las mismas, se comprende el modo de resolver los dos problemas siguientes: 1.° *Dado un número cualquiera, hallar por medio de las tablas su logaritmo.* 2.° *Dado un logaritmo, hallar el número á que pertenece.* En cada uno de estos problemas se consideran varios casos, de los cuales vamos á ocuparnos en la presente leccion.

* 471. Primer caso. *Que el número dado para hallar su logaritmo sea entero, y esté comprendido entre* 1 *y* 1200. Se buscará este número en la columna N, y una vez hallado se verá enfrente la mantisa de su logaritmo en la columna marcada Log.; se le pone á ésta la característica correspondiente, que ya se sabe que es un número de unidades igual al de cifras que tiene el número ménos una,

y se tendrá el logaritmo pedido. Así, el logaritmo de 124 es 2,0934269; el de 565, es 2,75204845; y el de 1167, será 3,06707086.

* 472. Segundo caso. *Que el número dado sea entero, y se halle comprendido entre* 1020 *y* 10800. Se busca como ántes en la columna N el número dado, y enfrente, en la columna marcada con la cifra 0, se hallará la mantisa, si el número que hay allí contiene siete cifras; y si no tiene más que cuatro, ya hemos dicho que éstas son las últimas de la parte decimal del logaritmo; las primeras se hallarán en la columna de los números aislados, en la parte inmediata superior. Así, se tendrá: log. 2812=3,4490153; log. 4440=3,6473830; log. 4473=3,6505989; log. 10487=4,0206527.

* 473. Tercer caso. *Que el número entero, cuyo logaritmo queremos hallar, esté comprendido entre* 10200 y 108000. Se buscará en la columna N el número que forman las cuatro primeras cifras; en la columna marcada con la última cifra del número y en la misma línea horizontal en que se hallan las cuatro primeras del mismo, se hallarán las cuatro últimas cifras decimales del logaritmo: sus tres ó cuatro primeras se hallarán, ó en la misma fila horizontal, ó en la parte inmediata superior de la primera columnita de los números aislados. Si en la columna marcada por la última cifra del número y en la fila horizontal en que se hallan las cuatro primeras cifras del mismo no se halla número alguno, es decir, está en blanco, entónces se toman las cuatro que se hallan en la fila inmediata inferior, en la cual se hallarán tambien las tres ó cuatro primeras en la columna de los números aislados. Así, se tendrá; log. 44406=4,6474417; log. 44623=4,6495588; log. 44568=4,6490231; log. 104762=5,02020378.

* 474. Cuarto caso. *Que el número sea entero, mayor que* 108000 *y menor que* 1000000. Si el número dado es mayor que 108000 y menor que 1000000; es decir, si el número dado, siendo mayor que 108000, sólo consta de seis cifras, separaremos con una coma la última cifra, lo que equivale á dividir el número por 10, lo cual, como ya sabemos (*Arit.* 449), no altera en nada la parte decimal del logaritmo; en cuanto á la característica, ya sabemos que viene disminuida en una unidad; mas como al final hemos de ponerle la que por el número de cifras del número dado corresponda, no tenemos necesidad de tener en cuenta la variacion que experimenta, cualquiera que sea la operacion que con el número hagamos. Esto su-

puesto, hallaremos, segun el caso anterior, la mantisa del logaritmo correspondiente al número de las cinco primeras cifras, á la cual se le agrega la parte correspondiente á la cifra separada, que son las décimas del número dividido por 10; cuya parte se hallará en las tablitas que hay debajo de la diferencia que se halle más próxima en la columna marcada con la inicial Dif., enfrente de la cifra significativa igual á la última del número, ó sea la separada á la derecha. Sea, por ejemplo, hallar el logaritmo del número 445738. Separando la cifra de la derecha con una coma, tendremos el número 44573,8, y la parte decimal del logaritmo del número 44573, será, segun el caso anterior, 6490719; la diferencia más próxima en la columna Dif. es 98, y la parte que en la tablita que tiene debajo, correspondiente á la cifra separada 8, es 78 unidades del séptimo órden que se deben agregar á la mantisa hallada, lo cual da para mantisa del logaritmo que se busca, el número 6490797; luego el logaritmo del número propuesto, será 5,6490797.

* 475. Si el número es mayor que 1020000 y menor que 1080000, se hallará el logaritmo de la misma manera, determinando primero la mantisa del número de seis cifras, y luégo la parte correspondiente á la séptima; la característica será, como siempre, la que le corresponda al número de cifras. Así, se tendrá: log. 1042573= 6,01810647. En efecto, la mantisa del logaritmo del número 104257 es, segun el tercer caso, 01810522, y la parte correspondiente á la cifra separada 3, es, segun las tablitas de las diferencias, 125, luego la mantisa del logaritmo que se busca será 01810522+125= 01810647, y el logaritmo será 6,01810647.

* 476. Quinto caso. *Que el número cuyo logaritmo queremos hallar exceda al mayor número de las tablas, ó sea á 108000, en más de una cifra.* Para hallar el logaritmo de un número que se halle en este caso, se principia por separar á la derecha con una coma un número de cifras, tal que el número que quede á la izquierda se halle comprendido en el tercer caso, y por él se hallará la mantisa correspondiente; despues se determinará la parte que corresponde á las cifras separadas, multiplicando esta parte por la diferencia que se halle más próxima en la columna Dif.; de la derecha del producto se separan tantas decimales como cifras tenga la parte separada, y lo que resulte á la izquierda se agrega á la mantisa hallada; el resultado será la mantisa del logaritmo del número propuesto, á la cual, poniéndole

la característica correspondiente al número de cifras que dicho número tenga, dará el logaritmo buscado.

Sea, por ejemplo, hallar el logaritmo del número 44735826. Separemos las tres últimas cifras con una coma, y hallaremos el número 44735,826, cuyo logaritmo tendrá la misma mantisa que el del número propuesto; pero la mantisa del logaritmo de este número se compondrá de la mantisa del logaritmo del número que forma la parte entera, más la parte decimal correspondiente á las cifras separadas á la derecha. La mantisa del logaritmo de la parte entera 44735, es, segun el tercer caso, 6506474; la parte decimal correspondiente á las cifras separadas, se halla por la siguiente proporcion,

$$1 : \mathit{dif.}\ \text{de}\ \mathit{logaritmos} :: \mathit{dif.}\ \text{de}\ \mathit{números} : x;$$

ó representando por D la diferencia de los números, y por Δ la de los logaritmos, dicha parte decimal se hallará por la proporcion

$$1 : \mathrm{D} :: \Delta : x; \quad \text{de donde,} \quad x = \mathrm{D} \times \Delta.$$

En este ejemplo la proporcion anterior se convierte en $1 : 0{,}826 :: 97 : x$; de donde, $x = 0{,}826 \times 97 = 80{,}122$; por consiguiente, agregando á la mantisa hallada 6506474, el número 80, que resulta de multiplicar las cifras separadas 826 por la diferencia más próxima de las tablas, y separando de la derecha de este producto el mismo número de cifras que separamos en el propuesto, hallaremos la mantisa 6506554 del logaritmo del número 44735,826, que es la misma del logaritmo de dicho número propuesto. Poniendo á esta mantisa por característica un número igual al de las cifras que tiene el número dado ménos una, se hallará el logaritmo que se busca; luego log. $44735826 = 7{,}6506554$.

* 477. La parte decimal que anteriormente hemos hallado por medio de la proporcion $1 : \mathrm{D} :: \Delta : x$ se puede determinar directamente con el auxilio de las tablas de las diferencias. Así, despues de hallar en el ejemplo anterior la mantisa 6506474 correspondiente al logaritmo de la parte entera, hallaremos la parte decimal que corresponde á las cifras separadas á la derecha observando que, si los logaritmos se diferencian en 97 unidades del último órden cuando los números se diferencian en 1, cuando éstos se diferencien en 0.826, los logaritmos se diferenciarán en $0{,}826 \times 97$, ó lo que es lo mismo $(0{,}8+0{,}02+0{,}006) \times 97 = 0{,}8 \cdot 97 + 0{,}02 \cdot 97 + 0{,}006 \cdot 97$; pero el primer sumando expresa la parte decimal correspondiente á 8 décimas

que segun las tablas es 78 unidades de séptimo órden decimal, el segundo expresa la parte correspondiente á 2 centésimas, y como la parte correspondiente á 2 décimas es 19, á 2 centésimas corresponderá 1,9; del mismo modo el tercer sumando expresa la parte correspondiente á 6 milésimas que será 0,58 y la suma de estas tres partes nos darán 78+1,9+0,58=80,48 cuya parte entera 80 es la misma que hallamos por el método anterior.

El cálculo del logaritmo de un número entero mayor que el límite de las tablas, se dispone como en el ejemplo siguiente: Sea hallar el logaritmo del número 8346875

	log.	83468,00=4,9215200	
Parte correspondiente	á	0,7 =	36
Id	Id. á	0,0=5	3
	log.	83468,75=4,9215239	
Luego	log.	8346875 =6,9215239.	

La parte correspondiente á 0,75 resulta ser 38; pero aumentando una unidad por despreciarse un número de unidades del órden inferior mayor que 5, se halla el número 39 como igualmente hallariamos por la proporcion.

* 478. Si las seis primeras cifras del número cuyo logaritmo queremos hallar, componen un número comprendido entre 102000 y 108000, se hallará por el mismo procedimiento con sólo la diferencia de separar á la izquierda seis cifras en vez de cinco que son las que generalmente se separan. Sea, por ejemplo, hallar el logaritmo del número 106685359. Dispondremos el cálculo del modo siguiente:

	log.	106685,000=5,02810336	
Parte correspondiente	á	0,3 =	122
Id.	Id. á	0,05 =	20
Id.	Id. á	0,009=	4
	log.	106685,359=5,02810482	
Luego	log.	106685359 =8,02810482.	

La parte decimal correspondiente á las cifras separadas 359, hallada por las tablas es 145,96 de la cual como no hemos de tomar más que las unidades enteras, es 146, por sér mayor que 5 unidades del órden inferior la parte que se desprecia. Por la proporcion se hallaria el mismo número.

* 479. Determinar el logaritmo del número 796943987. Aplicando el método que acabamos de exponer, hallaremos

	log. 79694,0000	=	4,9014256
Parte correspondiente á	0,3	=	17
Id. id. á	0,09	=	5
Id. id. á	0,008	=	0
Id. id. á	0,0007	=	0
	log. 79694,3987	=	4,9014278
Luego	log. 796943987	=	8,9014278.

Este ejemplo, como todos aquellos en que el número cuyo logaritmo hemos de hallar sea crecido, conviene, para determinarle con mayor aproximacion, dividirle por el número que forman las dos ó tres primeras cifras del mismo; con esto se hallará un cociente cuyas seis primeras cifras darán un número comprendido entre 102000 y 108000, y se podrá determinar su logaritmo con ocho cifras decimales por el método anterior, y agregando á este logaritmo el del número que sirvió de divisor el cual está calculado con ocho cifras decimales, tendremos el logaritmo del dividendo (*Arit.* 434), que es el número propuesto. Así, dividamos el número anterior por 796, y hallaremos por cociente 1001185, 91, el logaritmo de este número, será

	log. 100118,000	=	5,00051217
Parte correspondiente á	0,5	=	217
Id. id. á	0,09	=	39
Id. id. á	0,001	=	0
	log. 100118.591	=	5,00051473
	log. 1001185,91	=	6,00051473
	log. 796	=	2,90091307
Luego	log. 796943987	=	8,90142780

* 480. Sexto caso. *Que el número dado sea una fraccion decimal ó contenga cifras decimales.* Si el número cuyo logaritmo se quiere hallar es decimal ó contiene cifras decimales, se corre la coma á derecha ó izquierda, segun convenga para que el número que quede á la izquierda de la coma se halle en los límites de las tablas, se busca el logaritmo de todo este número como en los casos anteriores, y despues se le disminuyen ó aumentan á la característica tantas unidades como lugares se corrió la coma á la derecha ó izquierda.

* 481. Séptimo caso. *Que el número dado sea una fraccion ordinaria.* Cuando hemos de hallar el logaritmo de una fraccion ordinaria se pueden seguir dos métodos, que son: convertir la fraccion ordinaria en decimal y queda reducido al caso anterior; ó bien con-

siderar á la fraccion como el cociente de dividir el numerador por el denominador, en cuyo caso su logaritmo se hallará restando del logaritmo del numerador el logaritmo del denominador. Si el número es mixto, se reducirá á fraccionario y queda reducido al caso anterior.

* 482. El método que acabamos de dar para hallar el logaritmo de una decimal, da orígen á logaritmos cuya característica es negativa, siendo positiva la mantisa, lo cual se expresa poniendo el signo encima de dicha característica.

Sea, por ejemplo, hallar el logaritmo de la fraccion 0,044652. Corriendo la coma á la derecha seis lugares, lo cual equivale á multiplicar por 10^6, y hallando el logaritmo del número 44652 que resulta, tendremos, log. 44652=4, 6498409, pero el número propuesto equivale á este dividido por 10^6, luego tendremos que quitar del logaritmo hallado 6 unidades, y como la característica no tiene más que 4, hallaremos para característica del logaritmo de la fraccion propuesta, —2, y dicho logaritmo se escribirá así, log. 0,044652=2,6498409; lo cual equivale á —2+0,6498409=—1,3501591.

Dado el logaritmo de un número hallar este número.

* 483. PRIMER CASO. *Què la mantisa del logaritmo cuyo número se busca, se halle en la primera tabla.* Se tendrá inmediatamente el número correspondiente á este logaritmo á la izquierda en la columna N. El número de cifras que tendrá la parte entera en este como en los demás casos, será igual al número de unidades más una que contenga la característica (*Arit.* 448). Así, se tendrá 2,75281643=log. 566; 0,07151381=log. 1,179; 4,78031731 =log. 60300.

* 484. SEGUNDO CASO. *Que el logaritmo dado tenga siete cifras decimales, que se hallen en las tablas.* Desde luégo se buscarán las tres primeras cifras en los números aislados de la primer columna á la izquierda de la marcada con la cifra 0, y á partir de estas tres cifras se irá corriendo la vista por líneas horizontales hasta hallar las otras cuatro en una de las columnas marcadas con las cifras 0, 1, 2,... Una vez halladas, se correrá la vista á la izquierda y en la misma fila horizontal, hasta la primera columna N, y allí

se encontrará un número de cuatro cifras á cuya derecha se colocará la cifra que marque la columna en que se hallen las cuatro últimas del logaritmo, despues se hará que el número tenga la parte entera correspondiente á la característica. Así, se tendrá 4,6495880= log. 44626; 2,6481843= log. 444,82; 7,8290399= log. 67459000.

* 485. Tercer caso. *Que el logaritmo dado, teniendo siete cifras decimales, no se halle en las tablas.* Si el logaritmo dado no se halla en las tablas, se principia por buscar las tres primeras cifras en la columna de los números aislados, y una vez halladas, se buscarán las cuatro últimas que más se aproximen por defecto, y es claro que el logaritmo dado se hallará entre este logaritmo y el inmediato superior, los cuales corresponden á dos números diferentes en una unidad. Se hallará el número correspondiente al menor, prescindiendo de la característica, y por tanto el número de cifras que ha de tener la parte entera del número, y la parte decimal, se hallará mediante el principio establecido de ser las diferencias de los logaritmos proporcionales á las diferencias de los números, cuando éstos son muy grandes y aquellas muy pequeñas. Así diremos, si cuando los logaritmos se diferencian en lo que marque las tablas, los números se diferencian en 1, cuando se diferencien en lo que se diferencia el logaritmo dado del más próximo inferior, en cuanto se diferenciarán los números; de donde se deducirá que la diferencia de los números vendrá expresada por el cociente de dividir la diferencia entre el logaritmo dado y el más próximo inferior, por la diferencia de las tablas, ó más sencillo, representando por D la diferencia de los logaritmos y por Δ la de las tablas, se tendrá

$$\Delta : 1 :: D : x \quad \text{de donde} \quad x = \frac{D}{\Delta}.$$

Sea hallar el número correspondiente al logaritmo 5,6490797; dispondremos el cálculo del modo siguiente:

$$\begin{array}{ll} \log.\ x \qquad\quad = 5,6490797 & D = 78 \\ \log.\ 44573,0 = \underline{4,6490719} & \Delta = 98 \end{array} \Big\} \frac{D}{\Delta} = \frac{78}{98} = 0,79$$

Luego log. 44573,8 = 4,6490797 y 5,6490797 = log. 445738.

* 486. Cuarto caso. *Que el logaritmo tenga ocho cifras decimales, que se hallen en las últimas tablas.* Se hallará el número correspondiente segun el segundo caso, y se hará que la parte entera corresponda á la característica.

* 487. Quinto caso. *Que teniendo el logaritmo ocho cifras de-*

cimales, no se hallen en las tablas. Este caso puede reducirse al tercero, prescindiendo de la última cifra decimal. Pero lo más conveniente es hallar un número de dos ó tres cifras que tenga su logaritmo menor que el propuesto, y las dos ó tres primeras cifras decimales iguales á las del logaritmo dado, se resta este logaritmo del propuesto, y la diferencia nos expresará (*Arit.* 437) el logaritmo del cociente que resulta de dividir el número que se busca por el número cuyo logaritmo hemos restado; por consiguiente hallando el logaritmo de ocho cifras más próximo inferior que se halle en las últimas tablas, por el mismo procedimiento que en el tercer caso, y multiplicando en seguida el número que resulte por aquel cuyo logaritmo se restó, hallaremos el número pedido.

Sea el logaritmo 8,90142780, y se tendrá

$$\begin{array}{ll} \log.\ x & =8,90142780 \\ \log.\ 796 & =2,90091307 \\ \hline \log.\ \dfrac{x}{796} & =6,00051473 \\ \log.\ 10118 & =5,00051217 \\ \hline \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} D=256 \\ \Delta=434 \end{array}\right\} \frac{D}{\Delta}=\frac{256}{434}=0,591$$

Luego $\log.\ 100118,591=5,00051473$ y $\log.\ 1001185,91=6,00051473$

$\log.\ (1001185,91\times796)=8,90142780$ de donde $x=796943987$.

* 488. QUINTO CASO. *Que el logaritmo sea negativo*. Se halla el número correspondiente al logaritmo como si fuera positivo, y la unidad partida por este número, será el número buscado (*Arit.* 451).

* 489. SEXTO CASO. *Que solo sea negativa la característica*. Se le agregará á este logaritmo un número de unidades suficiente para que la característica se convierta en 4, se hallará el número correspondiente á este logaritmo, y separando en él tantas cifras decimales como unidades se agregaron á la característica tendremos el número pedido.

LECCION LII.

De los complementos aritméticos.—Operaciones de la Aritmética por logaritmos.—Cálculo de expresiones algebráicas por logaritmos.—Ecuaciones exponenciales.—Observaciones respecto á los incrementos de los logaritmos y á los logaritmos de números negativos.

De los complementos aritméticos.

490. *Se llama complemento de un número, lo que le falta á éste para ser igual á la unidad del órden inmediato superior al mayor que el número contiene.* Así, el complemento del número 3748 será lo que le falte á este número para valer 10000, unidad del órden inmediato superior al mayor del número, que expresa millares.

Para hallar el complemento de un número se resta la primera cifra de la derecha de 10 y todas las demás de 9, el número que resulte será el complemento pedido. Así, el complemento del número anterior, será 6252; el del número 3,78324 es 6,21676.

El uso de los complementos es de una grande utilidad, sobre todo en el cálculo logarítmico. Sucede con mucha frecuencia en las aplicaciones de los logaritmos, que el resultado de una operacion se obtiene por medio de adiciones y sustracciones hechas con logaritmos, las cuales se pueden sustituir por medio de los complementos, á una sola adicion.

Supongamos que se tienen que ejecutar, para obtener un cierto resultado N, con los logaritmos l, l_1, l_2, l_3, l_4,... la série de operaciones.

$$N=l+l_1-l_2-l_3+l_4-l_5+l_6-l_7$$

si nosotros reemplazamos por los logaritmos que se han de restar, que son l_2, l_3, l_5 y l_7, las cantidades $10-l_2$, $10-l_3$, $10-l_5$, $10-l_7$, que son los complementos, habremos aumentado el resultado en tantas decenas como complementos se consideran, es decir, como números habiamos de restar; de modo que quitando del resultado el mismo número de decenas, hallarémos, representando estos complementos, $10-l_2$, $10-l_3$,... por C, C',...

$$N=l+l_1+C+C'+l_4+C''+l_6+C'''-40,$$

lo que nos prueba que para obtener un resultado compuesto de logaritmos de los cuales unos se han de sumar y otros se han de restar, se suman con los primeros los complementos de los segundos, y del resultado se quitan tantas decenas como complementos se han sumado.

Operaciones de la aritmética por logaritmos.

491. MULTIPLICACION Y DIVISION. Se pide el valor de la expresion $x=\frac{347}{1193}\times\frac{1065}{272}\times\frac{128}{397}$.

Segun las propiedades de los logaritmos, se tendrá

$$\log. x=\log. 347-\log. 1193+\log. 1065-\log. 272+\log. 128-\log. 397,$$

$$\begin{array}{rl}
\log.\ 347= & 2,54032947 \\
\log.\ 1065= & 3,02734961 \\
\log.\ 128= & 2,10720997 \\
\text{comp. log. } 1193= & 6,92335956 \\
\text{comp. log. } 272= & 7,56543110 \\
\text{comp. log. } 397= & 7,40120949 \\
\hline
 & 29,56488920
\end{array}$$

Luego $\log. x = \bar{1},56488920$

$$\begin{array}{ll}
\log. x\times10^5 =4,5648892 & D=102 \\
\log. 36718 =4,5648790 & \Delta=118 \\
\hline
\log. 36718,86=4,5648892 &
\end{array}
\quad \frac{D}{\Delta}=\frac{102}{118}=0,86$$

Luego $x=0,3671886.$

492. FORMACION DE POTENCIAS. Sea, por ejemplo, formar la octava potencia del número 23, se tendrá (*Arit.* 436),

$$\log. (23)^8=8\times\log. 23.$$

Para hallar el logaritmo de 23^8 en ménos de una unidad del séptimo órden decimal, debemos tomar el logaritmo de 23 aproximado por lo ménos con 9 cifras decimales; por lo cual se hallará este logaritmo mediante las tablas que hay en las de Callet inmediatamente despues á las que hemos explicado, en las cuales se hallan los logaritmos con 20 cifras decimales. Así, tendremos

$$\begin{array}{lll}
\log. 23 & = 1,361727836 & \\
8\times\log. 23 & =10,893822688 & \\
\text{Quitando 6 unidades} & =4,8938227 & D=55 \\
\log. 78310 & =4,8938172 & \Delta=56 \\
\hline
\log. 78310,98 & = 4,8938227 &
\end{array}
\quad \frac{D}{\Delta}=\frac{55}{56}=0,98$$

Luego $23^8=7831098000$

en ménos de una unidad de quinto órden.

493. EXTRACCION DE RAÍCES. Sea hallar, por ejemplo, la raíz séptima del número 8475327, se tendrá (*Arit.* 438),

$$\log.\sqrt[7]{8475327}=\frac{\mathrm{l\ g.}\ 8475327}{7},$$

$$\begin{array}{lll}\log.\ 84753{,}00 & = & 4{,}9281551\\ \text{por}\quad 0{,}2 & = & 10\\ \text{por}\quad 0{,}07 & = & 4\\ \hline \log.\ 84753{,}27 & = & 4{,}9281565\\ \log.\ 8475327 & = & 6{,}9281565\end{array}$$

$$\frac{\log.\ 8475327}{7}=\frac{6{,}9281565}{7}=0{,}9897366$$

Aumentando 4 unidades $=4{,}9897366$ $\quad \left.\begin{array}{l}D=21\\ \Delta=45\end{array}\right\}\frac{D}{\Delta}=\frac{21}{45}=0{,}47$

$$\log.\ 97664 \quad =4{,}9897345$$

$$\log.\ 97664{,}47=4{,}9897366$$

Luego $\sqrt[7]{8475327}=9{,}766447.$

Cálculo de expresiones algebráicas por logaritmos.

494. Sea la expresion $y=\left(\sqrt[\frac{n}{m}]{\sqrt[-\frac{p}{q}]{a^{-\frac{r}{s}}}}\right)^{-t}$,

$$\mathrm{Log.}\ y=-t\times\log.\sqrt[\frac{n}{m}]{\sqrt[-\frac{p}{q}]{a^{-\frac{r}{s}}}}=-t\times\frac{m}{n}\times\log.\sqrt[-\frac{p}{q}]{a^{-\frac{r}{s}}}=$$

$$-t\times\frac{m}{n}\times-\frac{p}{q}\times\log.a^{-\frac{r}{s}}=-t\times\frac{m}{n}\times-\frac{q}{p}\times-\frac{r}{s}\log.a.$$

y por último $\quad \log.\ y=-\dfrac{tmqr}{nps}\log.a,$

Sea, en segundo lugar, la expresion

$$x=\sqrt[\frac{1}{0,6}]{\frac{832\times\sqrt[3]{479}\times 2{,}5)^5}{34^3\times\sqrt[5]{71\frac{2}{3}}}}$$

$$\log.\ x=0{,}6\times\log.\frac{832\times\sqrt[3]{479}\times(2{,}5)^5}{34^3\times\sqrt[5]{\frac{215}{3}}}$$

$$\log.\ x=0{,}6\times\left\{\log.\ [832\times\sqrt[3]{479}\times(2{,}5)^5]-\log.\ 34^3\times\sqrt[5]{\frac{215}{3}}\right\}$$

$$\log.\ x=0{,}6\times[\log.832+\tfrac{1}{3}\log.479+5\log.2{,}5-(3\log.34+\tfrac{1}{5}\log.215-\tfrac{1}{5}\log.3)]$$

$$\begin{array}{lll}
\log.\ 832 & =2{,}92012333 & \\
\tfrac{1}{3}\log.\ 479 & =0{,}89344517 & \\
5\log.\ 2{,}5 & =1{,}98970004 & 3\log.\ 34=4{,}59443675 \\
\tfrac{1}{5}\log.\ 3 & =\underline{0{,}09542425} & \tfrac{1}{5}\log.\ 215=\underline{0{,}46648769} \\
 & 5{,}89869279 & \phantom{\tfrac{1}{5}\log.\ 215=}5{,}06092444 \\
 & \underline{5{,}06092444} & \\
 & 0{,}83776835 & \\
 & \underline{\times 0{,}6} & \\
\log.\ x & =0{,}502661010 & D=17 \\
\log.\ 3{,}1817 & =\underline{0{,}5026592} & \Delta=137 \\
\log.\ 3{,}181712 & =0{,}5026610 &
\end{array}
\qquad \frac{D}{\Delta}=\frac{17}{137}=0{,}12$$

Luego $x=3{,}181712.$

Ecuacione exponenciales.

495. *Se llama* CANTIDAD EXPONENCIAL, *aquella que está elevada á una potencia cuyo exponente es desconocido.* Las exponenciales se dividen en grados. Se llama *exponencial* de primer grado, la expresion de la forma a^x; del segundo, es la expresion a^{b^x}; de tercero, será $a^{b^{c^x}}$; y así sucesivamente.

496. ECUACION EXPONENCIAL *es aquella en que entran cantidades exponenciales, y su grado es el de la exponencial de mayor grado que contiene.*

Sea la ecuacion exponencial de primer grado $a^x=b$ la que hemos de resolver, por logaritmos, con relacion á x.

Tomando logaritmos, se halla x log. a=log. b, de donde

$$x=\frac{\log.\ b}{\log.\ a}.$$

Sea, en segundo lugar, la exponencial de segundo grado $a^{b^x}=c$, de donde se deduce b^x log. a=log. c, ó $b^x=\dfrac{\log.\ c}{\log.\ a}$; y volviendo á omart logaritmos, hallaremos

$$x \log b = \log \log c - \log \log a;$$

de donde se saca, $x = \frac{\log \log c - \log \log a}{\log b}$.

Del mismo modo hallarémos que el valor de x de la exponencial de tercer grado $a^{b^{c^x}} = d$, es

$$x = \frac{\log(\log \log d - \log \log a) - \log \log b}{\log c}.$$

La resolucion de una exponencial de un grado cualquiera, vemos por los ejemplos anteriores, que siempre se reduce á la de un grado inferior en una unidad; por consiguiente, siempre se la puede hacer depender de una de primer grado.

* 497. Sea la ecuacion exponencial

$$Aa^{mx+m'} + Bb^{nx+n'} + Cc^{px+p'} + \ldots = 0 \qquad [1].$$

Si hacemos $Aa^{m'} = A'$, $Bb^{n'} = B'$, $Cc^{p'} = C'$, etc., la ecuacion anterior se convertirá en

$$A'a^{mx} + B'b^{nx} + C'c^{px} + \ldots = 0 \qquad [2].$$

Haciendo, ahora, $b = a^\beta$, $c = a^\gamma$, etc., de donde $\beta = \frac{\log b}{\log a}$, $\gamma = \frac{\log c}{\log a}$, etc., tendremos la ecuacion

$$A'a^{mx} + B'a^{\beta nx} + C'a^{\gamma px} + \ldots = 0 \qquad [3],$$

la cual, haciendo $a^x = y$, se convierte en

$$A'y^m + B'y^{\beta n} + C'y^{\gamma p} + \ldots = 0 \qquad [4].$$

Una vez resuelta la ecuacion [4], y hallados los valores de y, los sustituiremos en la relacion $a^x = y$, de donde podremos sacar fácilmente los valores de x.

Observaciones respecto á los incrementos de los logaritmos, y á los logaritmos de números negativos.

* 498. Si examinamos en las tablas de logaritmos la columna de las diferencias, observaremos que estas diferencias van constantemente disminuyendo; así, los logaritmos de los números 18375 y 18376, se diferencian en 237 unidades del séptimo órden decimal, mientras que la diferencia de los números 93754 y 93755, es 46 unidades del mismo órden.

La razon es bien sencilla; en efecto, sean a y $a+1$ dos números enteros consecutivos; y se tendrá

$$\log(a+1)-\log a=\log\left(\frac{a+1}{a}\right)=\log\left(1+\frac{1}{a}\right);$$

pero á medida que a aumenta, $1+\frac{1}{a}$ tiende hácia la unidad; luego la diferencia tabular tiende á valer log. $1=0$.

Si los números reciben un incremento constante h, los logaritmos se diferenciarán en

$$\log(a+h)-\log a=\log\left(\frac{a+h}{a}\right)=\log\left(1-\frac{h}{a}\right),$$

cuya diferencia será tanto menor, cuanto mayor sea el número a.

Si la relacion del número al incremento fuera constante, es decir, si $\frac{h}{a}$ fuese una cantidad constante k, la diferencia de los logaritmos sería tambien constante é igual á $\log(1+k)$.

* 499. Hemos supuesto al hallar el logaritmo de un número mayor que el mayor de las tablas (476), que los incrementos de los logaritmos son proporcionales á los de los números, lo cual evidentemente no es exacto. En efecto, si al número a se le da un incremento d, su logaritmo recibirá otro Δ; si damos ahora al número $a+d$ el mismo incremento d, el logaritmo recibirá tambien un nuevo incremento algo menor que el primero, segun lo dicho anteriormente; así, cuando el incremento del número se ha hecho doble, el del logaritmo es un poco menor que el doble; y al contrario, cuando el incremento de un número se ha hecho mitad, el del logaritmo es un poco mayor que la mitad. De donde se deduce que, al hacer uso de esta proporcion en el primer problema, se hallan resultados menores que los verdaderos; y al pasar de los logaritmos á los números, los resultados son mayores.

Para calcular el límite del error que se comete por el empleo de esta proporcion, se necesita el conocimiento de las séries, de las cuales nos ocuparemos en el Algebra superior.

500. En el cálculo logarítmico puede ocurrir tener que operar con logaritmos de números negativos; y como estos números no tienen logaritmos, podria creerse que no era posible ejecutar aquel cálculo en que esto sucediera; pero si observamos que los signos de

los factores de un producto, por ejemplo, no alterarán éste en nada respecto de su valor numérico, y que solo indican el sentido en que debe tomarse, podremos hacer abstraccion del signo de aquellos números negativos cuyos logaritmos han de introducirse en el cálculo, ejecutar las operaciones como si todos los números fueran positivos, y tomar el resultado en el sentido que deba tomarse, con arreglo á los signos de los números que entren en su formacion. Así, si tuviéramos que hallar la 9.ª potencia del número negativo—3, haríamos el cálculo como si el número 3 no llevase el signo —, y tendríamos $9 \log 3 = 4{,}2940913$, el cual corresponde al número 19683; luego el valor de $3^9 = 19683$; y como $(-3)^9 = -3^9$, se tendrá que deberemos tomar el resultado obtenido con el signo —.

Del mismo modo se hallará por logaritmos el producto de los números $37 \times -2 \times 18 \times -32 \times -17$, efectuando las operaciones como si todos los números fuesen positivos, y el resultado se consideraria con el signo —, por ser el que corresponde al número impar de factores negativos.

LECCION LIII.

Interés compuesto.—Anualidades—Acumulacion de capitales.

Interés compuesto.

501. Ya hemos visto (*Arit.* 383) cuál es el objeto del interés compuesto, y hemos hallado tambien la fórmula

$$C = c(1+r)^t \qquad [1],$$

que expresa el valor C en que se convierte el capital c al cabo de un cierto tiempo t, prestado á interés compuesto, al r por real al año.

En esta fórmula se supone, segun el modo con que allí la hemos deducido, que t es un número exacto de años; pero ella es general aun siendo t un número fraccionario de año.

En efecto, si no sólo se han de apreciar los intereses que corresponden á uno ó más años enteros, sino á una fraccion cualquiera de año, es muy natural que, si no hay algun convenio en contra, se calculen de dia en dia en vez de hacerlo de año en año, y entónces es necesario calcular cuál será el interés que debe devengar un real diariamente, para que al año el capital c haya podido convertirse en $c\ (1+r)$, segun hemos visto en Aritmética. Sea x este interés, y, segun la misma fórmula, hallaremos para el número exacto de dias 360, que son los que se supone tiene el año comercial, la relacion

$$(1+x)^{360}=1+r, \quad \text{de donde} \quad 1+x=(1+r)^{\frac{1}{360}}.$$

Del mismo modo se hallará que, si t expresa n años y p dias, 1 real, al cabo de ese tiempo, se habrá convertido en $(1+x)^{360n+p}$, y a reales, por consiguiente, en $a(1+x)^{360n+p}$; ó reemplazando en vez de $1+x$ su valor, se hallará

$$a(1+x)^{360n+p}=a(1+r)^{\frac{360n+p}{360}}=a(1+r)^{n+\frac{p}{360}},$$

donde vemos que la fórmula es cierta cuando t expresa un número fraccionario de años.

Tambien se verifica esta fórmula aun en el caso de ser t un número negativo, solo que la interpretacion será distinta; si cuando t es un número positivo, expresa C en la fórmula [1] lo que el capital c valdrá dentro de n años, cuando t sea una cantidad negativa $-n$, C representará lo que el capital c, dinero efectivo en el dia, valia hace n años. En efecto, si se han colocado C reales hace n años, al tanto r por real, este capital debe valer en el dia en capital é intereses $C(1+r)^n$; y si este valor está representado por c, tendremos

$$C(1+r)^n=c, \quad \text{de donde} \quad C=c(1+r)^{-n};$$

luego la fórmula [1] se verifica aun en el caso de ser t un número negativo.

502. Probada la generalidad de la fórmula $C=c(1+r)^t$, ya sea t un número entero ó fraccionario, positivo ó negativo, podremos deducir de ella el valor de cualquiera de las cuatro cantidades C, c, r y t, conociendo las otras tres; lo cual da orígen á cuatro problemas distintos.

503. Para mayor facilidad, se aplica á estos problemas el cálculo logarítmico. Así *para hallar en lo que se convierte un capital* c *impuesto por* t *tiempo á interés compuesto, á un tanto* r *por real al año*, tendremos

$$\log C=\log c+t \log (1+r) \qquad [2].$$

504. *Para hallar el capital* c *que se ha de imponer á interés compuesto al tanto* r *por real al año, para que en* t *tiempo se convierta en el capital* C, se tendrá

$$\log c = \log C - t \log (1+r) \qquad [3].$$

505. *Para hallar el tiempo* t *que hemos de tener un capital* c *impuesto á interés compuesto, á un tanto* r *por real al año, para que se convierta en el capital* C, se tendrá la fórmula

$$t = \frac{\log C - \log c}{\log (1+r)} \qquad [4].$$

506. Por último, *para saber á qué tanto* r *por real anual hay que imponer un capital* c *á interés compuesto, para que en* t *tiempo se convierta en el capital* C, se hallará

$$\log (1+r) = \frac{\log C - \log c}{t} \qquad [5].$$

Sustituyendo en cada una de estas fórmulas los valores particulares que en cada caso especial tengan, y efectuando las operaciones indicadas, hallaremos los logaritmos de los resultados que se piden; de modo que dichos resultados serán los números correspondientes á estos logaritmos, á excepcion de la fórmula [4], que nos da directamente el valor de t.

507. Los banqueros y comerciantes sólo usan la fórmula general [1], cuando t expresa un número exacto de años; pero cuando t no llega á valer un año, ó es un número fraccionario, ó bien expresa un número de años cualquiera que puede ser cero, y además un cierto número de dias, calculan primero por la fórmula [1], en lo que se convierte el capital dado á los n años, y despues lo que este resultado producirá á interés simple en los dias que se tengan.

Sea, por ejemplo, hallar en lo que se convertirá el capital c, impuesto á interés compuesto por n años y p dias, al r por real al año.

Llamemos C' al capital en que se convierte el capital c en los n años, de modo que se tendrá $C' = c(1+r)^n$.

El número p de dias será una fraccion de año que podremos representar por f; de modo, que el capital C' impuesto por f tiempo á interés simple, nos dará $C' + C'rf = C'(1+rf)$; luego la fórmula será

$$C = C'(1+rf) = c(1+r)^n(1+rf);$$

en la cual, si hacemos $f=0$, resulta $C=c(1+r)^n$, como debia suceder.

Aplicando los logaritmos, hallaremos

$$\log C = \log c + n \log (1+r) + \log (1+rf) \qquad [6],$$

que nos dá el valor del logaritmo del capital C, conociendo el capital impuesto c, el tiempo n más f, y el tanto r de interés por real.

Despejando en esta fórmula log c, hallaremos

$$\log c = \log C - n \log (1+r) - \log (1+rf) \qquad [7],$$

la cual nos dá á conocer c, en funcion de C, r y $n+f$.

De la fórmula [7] se deduce fácilmente esta otra:

$$\frac{\log C - \log c}{\log (1+r)} = n + \frac{\log (1+rf)}{\log (1+r)}.$$

Representemos por Q el cociente de dividir log. C—log. c por log $(1+r)$, y por R el resto de esta division, se tendrá

$$\frac{\log C - \log c}{\log (1+r)} = Q + \frac{R}{\log (1+r)};$$

sustituyendo este valor en la relacion anterior, hallaremos

$$Q + \frac{R}{\log (1+r)} = n + \frac{\log (1+rf)}{\log (1+r)}.$$

En esta fórmula, n y Q son números enteros, $\frac{R}{\log (1+r)}$ y $\frac{\log (1+rf)}{\log (1+r)}$ son fracciones propias, de donde se deducirá

$$n = Q, \text{ y } \log (1+rf) = R \qquad [8];$$

la primera igualdad nos da á conocer n, y la segunda $1+rf$, y por tanto f; con lo cual se conoce el tiempo $n+f$, siendo n un número de años, y f una fraccion de año.

Si tratásemos de hallar el valor r, que es en realidad el que ofrece más dificultades, despejaríamos de la fórmula [7] el valor de log $(1+r)$, y hallariamos

$$\log (1+r) = \frac{\log C - \log c}{n} - \frac{\log (1+rf)}{n} \qquad [9].$$

Despreciando en esta fórmula la cantidad rf, y observando que $\log 1 = 0$, se tendrá para un valor aproximado de r,

$$\log (1+r) = \frac{\log C - \log c}{n}.$$

Este valor aproximado, que llamaremos r_1, es mayor que el verdadero, puesto que para obtenerle ha sido necesario despreciar el sustraendo $\frac{\log(1+rf)}{n}$, que es positivo. Sustituyendo este valor en la fórmula [9], hallaremos la expresion

$$\log(1+r) = \frac{\log C - \log c}{n} - \frac{\log(1+r_1 f)}{n},$$

que dará un segundo valor aproximado para r, que podremos llamar r_2, y que fácilmente podremos ver que es menor que el verdadero, pues se ha obtenido poniendo en el sustraendo $\frac{\log(1+rf)}{n}$, en vez de r, una cantidad r_1 mayor; por consiguiente, el valor de r se hallará comprendido entre r_1 y r_2.

Sustituyendo ahora, en la misma fórmula [9], r_2 por r, hallaremos otro valor aproximado de r, que podremos llamar r_3, y que será mayor que r; y así sucesivamente iremos determinando valores sucesivos r_4, r_5,... que irán comprendiendo el valor de r, por cuyo medio podremos llegar á obtenerle con un cierto grado de aproximacion.

Anualidades.

508. Se llama *anualidad*, una suma que se paga anualmente para reembolsar en un cierto número de años un capital y sus intereses compuestos.

La cuestion de anualidades se reduce al siguiente problema:

509. *¿Qué suma* a *es necesaria reembolsar anualmente para extinguir en* t *años un capital actual de* C *reales, el cual se supone que está impuesto á interés compuesto y á un tanto* r *por real al año?*

El capital C, al cabo de t años, se habrá convertido (501) en $C(1+r)^t$; por consiguiente, es necesario que las anualidades, unidas á sus intereses compuestos, compongan en t años la misma cantidad.

Esto supuesto, la anualidad a pagada al fin del primer año, producirá en los $t-1$ restantes $a(1+r)^{t-1}$; del mismo modo la segunda anualidad producirá $a(1+r)^{t-2}$; y así sucesivamente, se tendrá que las anualidades siguientes producirán las cantidades respectivas $a(1+r)^{t-3}$, $a(1+r)^{t-4}$, etc.; la penúltima $a(1+r)$, y la última a. Todas estas cantidades vienen á formar los términos de una progresion geométrica, cuyo primer término es a, la razon $1+r$, y el número de términos t; por consiguiente, la suma será $\frac{a[(1+r)^t-1]}{r}$; y como esta suma tiene que ser igual á la cantidad $C(1+r)^t$, se tendrá

$$C(1+r)^t=\frac{a[(1+r)^t-1]}{r} \qquad [10].$$

de donde
$$a=\frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t-1} \qquad [11],$$

cuya fórmula resuelve el problema.

Por esta expresion se ve que a es una cantidad positiva y mayor que Cr; es decir, mayor que el interés simple del capital C, como debia ser.

510. Dividiendo los dos términos de la fraccion que expresa el valor de a, por $(1+r)^t$, hallaremos la trasformada

$$a=\frac{Cr}{1-\frac{1}{(1+r)^t}},$$

en la cual, si hacemos $t=\infty$, obtendremos $a=Cr$; es decir, el interés simple anual del capital C. Cuando un capital está impuesto con la condicion de no pagar más que los intereses que anualmente devengue, entónces éstos intereses toman el nombre de *renta perpétua*.

511. De la fórmula [10] se pueden deducir estas otras:

$$C=\frac{a[(1+r)^t-1]}{r(1+r)^t} \quad [12], \qquad t=\frac{\log a-\log(a-Cr)}{\log(1+r)} \quad [13],$$

que dan á conocer el valor del capital C, en funcion de a, r y t; y el número de años t, en funcion de a, C y r.

El valor de r en funcion de C, a y t, depende de una ecuacion del grado t; por consiguiente, no se puede obtener directamente. Sin embargo, por el método de las aproximaciones sucesivas, podremos hallar valores que le comprendan y que se le vayan aproximando cada vez más; de modo que podremos hallar por este medio el valor de r, con cierto grado de aproximacion, sin necesidad de recurrir al álgebra superior.

Acumulacion de capitales.

512. La cuestion que se entiende con el nombre de *acumulacion de capitales*, tiene por objeto la resolucion del problema siguiente: *Una persona impone* a *reales al principio de cada año á interés compuesto: ¿Qué capital tendrá al cabo de* t *años, suponiendo* r *el tanto por real?*

Es claro que este último capital vendrá representado por la suma de las puestas, más los intereses compuestos de las mismas durante el tiempo que cada una está impuesta. Así, la primera se convertirá al cabo de los t años en $a(1+r)^t$; la segunda en $a(1+r)^{t-1}$; la tercera en $a(1+r)^{t-2}$, y así sucesivamente; la penúltima será $a(1+r)^2$, y la última $a(1+r)$; luego representando la suma de todas por C, se tendrá

$$C=\frac{a(1+r)[(1+r)^t-1]}{r}.$$

Esta fórmula da orígen á cuatro problemas distintos, siempre que dándose tres de las cuatro cantidades que contiene, se trate de determinar la cuarta.

FIN DEL TOMO PRIMERO.

ÍNDICE.

PRIMERA PARTE.

DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES.

SEGUNDA PARTE.

ECUACIONES Y DESIGUALDADES.

TERCERA PARTE.

FRACCIONES CONTÍNUAS, FRACCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMOS.

OBRAS DE MATEMÁTICAS

DE D. BERNARDINO SANCHEZ VIDAL.

Elementos de Aritmética, para uso de las escuelas de primera enseñanza (1860), 5 reales en Madrid y 6 en provincias.

Lecciones de Aritmética. Un tomo en 4.° tercera edicion (1878), 24 y 28.

Lecciones de Algebra. Tomo I. en 4.° tercera edicion (1878), 26 y 30.

Lecciones de Algebra. Tomo II. en 4.° (1878), 26 y 30.

Tablas de reduccion de las pesas y medidas legales de Múrcia á las métrico-decimales y vice-versa. (1867), 4 reales.

ECHEGARAY.

Problemas elementales de Geometría. Primera parte: Geometría plana (1865), 15 y 17 reales.

Problemas elementales de Geometría analítica. Primera parte. Analítica de dos dimensiones (1865), 8 y 10 reales.

Los pedidos se dirigirán á D. Eduardo Martinez (sucesor de Escribano), Príncipe, 25, librería; y Sres. de Anllo y Rodriguez, Olivo, 6 y 8, librería. Madrid.