NUEVA ENCICLOPEDIA MATEMÁTICA.--T. V

Tratado de Análisis Matemático

TOMO SEGUNDO

PRINCIPIOS GENERALES
DE LA
TEORÍA DE LAS FUNCIONES

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, correspondal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa y miembro de otras asociaciones matemáticas.

ZARAGOZA

Tipografía de Emilio Casañal, Coso, 100
1904

GALDEANO

ANÁLISIS MATEMÁTICO

2

NUEVA ENCICLOPEDIA MATEMÁTICA.--T. V

Tratado de Análisis Matemático

TOMO SEGUNDO

PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa y miembro de otras asociaciones matemáticas.

ZARAGOZA

Tipografía de Emilio Casañal, Coso, 100

1904

LIBRO PRIMERO

INTRODUCCIÓN Á LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES

CAPÍTULO I

Nociones acerca de los números irracionales y de los límites

1. Definiciones. No existe ningún número racional, como sabemos, que satisfaga á la ecuación $x^2 - 5 = 0$. La condición de ésta permite separar todos los números racionales positivos en dos clases: la primera que contenga todos los números cuyo cuadrado es menor que 5, y la segunda aquéllos cuyo cuadrado es mayor que 5. Todo número de la primera clase es menor que un número cualquiera de la segunda. Todo número de la segunda clase es mayor un número cualquiera de la primera, pues de dos números positivos es mayor el que tiene mayor cuadrado. Además en la primera clase no existe ningún número mayor que todos los demás de la misma clase, así como en la segunda no existe ningún número menor que los demás de la misma.

En efecto, si en la primera clase existe un número a mayor que los demás números de la misma, por pertenecer a á la primera clase, a^2 será menor que 5; y por ser a el número mayor de la primera clase, todo número racional $a + h$, mayor que a pertenecerá á la segunda; luego suponiendo que sea positivo el número racional h será

$$(a + h)^2 > 5;$$

pero la diferencia

$$(a+h)^2 - a^2 = h(2a+h)$$

puede suponerse menor que un número racional positivo cualquiera ε. Basta para esto hacer que

$$0 < h < \frac{\varepsilon}{2a+1}, \quad h < 1;$$

En particular, podemos elegir h de manera que dicha diferencia sea menor que el número positivo $5 - a^2$. Pero entonces de

$$(a+h)^2 - a^2 < 5 - a^2 \quad \text{resulta} \quad (a+h)^2 < 5.$$

lo que es contrario á que el número $a+h$ sea de la segunda clase.

Siempre que se haya podido dividir la totalidad de los números reales positivos y negativos en dos clases tales, que todo número de la primera clase sea menor que todo número de la segunda, y que no haya en la primera clase un número mayor ni en la segunda un número menor que los demás números de la misma clase, habremos definido un número irracional. La primera clase será inferior relativamente á un número irracional y la segunda superior.

Se dirá que un número irracional A es mayor que todo número racional de la clase inferior relativa á él. Todo número de esta clase se dirá ser menor que A; y análogamente se dirá respecto á la clase superior.

Para definir un número irracional, bastará tener un medio de descomponer en dos clases, análogas á las arriba descritas, todos los números racionales comprendidos entre dos números racionales a y b. Se completará la clase inferior, haciendo entrar en ella todos los números racionales menores que el menor de los dos números a y b, y análogamente respecto al mayor.

Se dice que dos números irracionales A y B son iguales, cuando los dos modos de descomposición que los definen son idénticos, de manera que todo número racional perteneciente á una de las dos clases inferior ó superior, relativas á uno de los dos números A y B, pertenezca también á la clase del mismo nombre relativa al otro. Además la identidad de las clases inferiores lleva consigo la de las superiores, y recíprocamente. De esta definición resulta que, si dos números irracionales son iguales á un tercer número irracional, serán iguales entre sí.

Sean A y B dos números irracionales desiguales. Las dos clases inferiores relativas á estos dos números no son idénticas. Hay un número racional que figura en una de ellas, por ejemplo la inferior relativa á B, y que no figura en la otra, figurando en la clase superior relativa á A. Entonces se dice que A es menor que B ó que B es mayor que A, escribiéndose

$$A < B, \qquad B > A.$$

Así, por definición, la desigualdad $A < B$ relativa á dos números irracionales A y B implica la existencia de un número racional a tal, que se tenga $A < a$, $a < B$, y tal número existe, cualesquiera que sean los números A y B que verifiquen la desigualdad $A < B$.

Esto es evidente, si los dos números A y B son racionales; y en el caso de ser solo B racional, resulta de que, en la clase superior relativa á A, de la que forma parte el número racional B, hay números racionales menores que B. Análogamente razonaremos en el caso de ser A racional y B irracional. Inversamente, de la existencia de un número racional a tal, que sea

$$A < a, \qquad a < B, \qquad \text{resulta} \qquad A < B,$$

pues, siendo A, B, C tres números cualesquiera, racionales ó no, de las desigualdades $A < B$, $B < C$, resulta $A < C$.

Las desigualdades propuestas en efecto, implican la existencia de números racionales tales que se tenga

$$A < a, \; a < B, \; B < b, \; b < C.$$

Pero a es menor que b, porque, si B es irracional, a pertenece á la clase inferior y b á la clase superior relativas á B.

Por último a es también menor que C, porque si C es irracional, b y por consiguiente a, que es menor que b, pertenece á la clase inferior relativa á C. Además de las desigualdades $A < a$, $a < C$, siendo a racional resulta la $A < C$.

Si se consideran dos números desiguales cualesquiera A y $B > A$, hay una infinidad de números racionales tales que se tenga

$$A < a < B$$

En efecto, después de haber elegido uno de estos números, se ve que existe otro también racional a' tal, que sea

$$A < a' < a \quad \text{y por consiguiente} \quad A < a' < a < B.$$

Todo número racional a'' comprendido entre a y a' satisface también á las desigualdades $A < a'' < B$, y todos ellos se dice que están comprendidos entre A y B.

Dados dos números racionales ó no, A y B; si se puede probar que se hallan comprendidos entre dos números racionales cuya diferencia sea menor que el número racional positivo ε, se puede afirmar que $A = B$, porque si se tuviese $A < B$, existirían dos números racionales a y b tales, que se tuviese

$$A < a < b < B,$$

y los números A y B no podrían hallarse entre dos números racionales a_1 y b_1 cuya diferencia fuese menor que $a - b$, porque de

$$a_1 < A < B < b_1, \quad \text{resultaría} \quad a_1 < A < a < b < B < b_1,$$
$$b_1 - a_1 > b - a.$$

Un número irracional se dice positivo, cuando es mayor que cero, y negativo en el caso contrario.

Dado un número irracional A se le puede adjuntar otro número irracional A′ tal que: un número racional a pertenecerá á la clase inferior ó superior relativamente á A′ según que el número racional $-a$ pertenezca á la clase superior ó á la inferior relativa al A, y el número A se puede deducir del A′ como éste de aquél. Uno de los números es positivo y el otro negativo. Se llaman iguales y de signo contrario.

Si A se halla comprendido entre $n\alpha$ y $(n+1)\alpha$, y se supone que α es tan pequeño como se quiera, se ve que un número irracional puede estar comprendido entre dos números racionales cuya diferencia sea tan pequeña como se quiera.

Sean $n\alpha$ y $m\beta$ dos valores aproximados de A y sea $\alpha = p\beta$, siendo p entero. Se tendrá

$$n\alpha < A < (n+1)\alpha \qquad m\beta < A < (m+1)\beta;$$

deduciremos de las primeras desigualdades que pueden escribirse así, $np\beta < A < (n+1)p\beta$, las siguientes:

$$np\beta < (m+1)\beta, \qquad m\beta < (n+1)p\beta,$$

$$\frac{m}{p} - 1 < n < \frac{m+1}{p};$$

y resultando de esto que n es la parte entera de $\frac{m}{p}$, se concluye:

$$m \geq np, \qquad m\beta \geq n\alpha$$

$$m+1 \leq (n+1)p, \qquad (m+1)\beta \leq (n+1)\alpha.$$

Así el valor aproximado por defecto en menos de β, es por lo menos igual al valor aproximado por defecto en menos de α; y el valor aproximado por exceso en menos de β es á lo más igual al valor aproximado por exceso en menos de α. Si

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_p, \ldots\ldots$$

expresa una serie de valores aproximados de un número irracional A en menos de $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots\ldots, \frac{1}{10^p}$ por defecto, los números que se encuentran sucesivamente no van nunca decreciendo; además, si se supone

$$u_p = \frac{P}{10^p}, \quad u_{p+1} = \frac{P'}{10^{p+1}},$$

siendo P y P′ enteros, P será la parte entera del cociente de P′ por 10, de modo que si los números u_p y u_{p+1} están escritos en forma de fracciones decimales, la parte entera y las p primeras cifras decimales de la fracción u_{p+1} serán la fracción u_p.

Al contrario, no van jamás creciendo los números

$$u_1 + \frac{1}{10}, \; u_2 + \frac{1}{100}, \ldots\ldots u_p + \frac{1}{10^p}, \ldots\ldots$$

Conviene observar que, siendo a un número racional menor que A, los términos de la serie $u_1, \ldots\ldots, u_p, \ldots\ldots$ anteriormente definida, acaban por exceder á a.

Supongamos, en efecto, que b sea un número racional mayor que a é inferior también á A. Si b es igual á una fracción $\frac{P}{10^p}$, u_p será por lo menos igual á b, y la proposición queda demostrada.

Si no es asi, podremos hallar una fracción decimal menor que b que difiera de b en menos que $b - a$ y que, por consiguiente, sea á la vez, superior á a é inferior á A, hallándonos en el primer caso. Observaremos que cada término de la serie va seguido de términos mayores que él.

De esto resulta que un número irracional positivo A se halla completamente definido por la serie de los valores aproximados $u_1, \ldots\ldots, u_p, \ldots\ldots$ en menos de $\frac{1}{10}, \ldots\ldots \frac{1}{10^p}, \ldots\ldots$ puesto que un número racional positivo a deberá hallarse en la clase inferior ó en la clase superior según que exista ó no exista en esta serie número igual ó superior á a.

2. Sumas de números irracionales. Supongamos dos números cualesquiera A, B racionales ó no. Sean a, a', b, b' núme-

ros racionales que satisfagan á las desigualdades

$a < \mathrm{A} < a'$, $b < \mathrm{B} < b'$ (1), se tendrá $a + b < a' + b'$. (2)

Sea ahora r un número racional. Si no existen dos números racionales a y b que satisfagan á las condiciones (1), tales que $r = a + b$, sucederá que para números racionales a y b cualesquiera, se tendrá que $r > a + b$. (3)

En efecto, si para dos de dichos números a y b se tuviese

$$r < a + b \quad \text{resultaría} \quad r - a < b < \mathrm{B},$$

y la suma de los dos números racionales $a < \mathrm{A}$ y $r - a < \mathrm{B}$ sería igual á r.

De igual manera, dado el número racional r, si no existen dos números racionales a' y b' que satisfagan á las condiciones (1) y tales que se tenga $r = a' + b'$, se verifica la relación

$$r < a' + b', \tag{4}$$

para números a' y b' que satisfagan á dichas condiciones.

Observaremos, por fin, que solo puede existir un número R racional ó no, para el que se tenga, cualesquiera que sean los números a, b, a', b' que satisfagan á las condiciones

$$a + b < \mathrm{R} < a' + b'.$$

En efecto, para cualquier número racional positivo ε, hay números racionales a, b, a', b' que satisfacen á las desigualdades (1) y á las siguientes:

$$a' - a < \frac{\varepsilon}{2}, \quad b' - b < \frac{\varepsilon}{2},$$

y por consecuencia á

$$(a' + b') - (a + b) < \varepsilon.$$

Pero dos números racionales ó no tales, que se hallen comprendidos entre números cuya diferencia es menor que ε, son iguales.

Esto sentado, pueden ocurrir dos casos: ó existe un número racional r que satisface á las desigualdades (3) y (4), es decir, mayor que la suma de dos números racionales cualesquiera, respectivamente menores que A y B y menor que la suma de dos números racionales cualesquiera mayores que A y B, ó no existe dicho número. El primer caso se presenta, especialmente, cuando los dos números A y B son racionales, y entonces el número r es precisamente $A + B$. Pero puesto que un número racional r que no fuera ni la suma de dos números racionales a y b respectivamente menores que A y B, ni la suma de dos números racionales a' y b' respectivamente mayores que A y B, satisfaría á la vez á las dos desigualdades

$$r > a + b, \qquad r < a' + b',$$

y esto para números cualesquiera racionales a, b, a', b' que satisfagan á las condiciones (1), se ve que si no existe el número r, será porque todo número racional, ó es la suma de dos números racionales a y b respectivamente menores que A y B, ó la suma de dos números racionales a' y b' respectivamente mayores que A y B. Si esto es así, coloquemos en una primera clase todos los números racionales que son la suma de dos números racionales respectivamente menores que A y B y en una segunda clase todos los números racionales que son la suma de dos números racionales respectivamente mayores que los números A y B. Cada número de la primera clase será menor que cada número de la segunda, en virtud de la desigualdad (2). En la primera no hay número mayor que todos los demás, porque de $a < A$, $b < B$ resultará que existen dos números a_1 y b_1 tales que

$$a < a_1 < A, \qquad b < b_1 < B,$$

y el número $a_1 + b_1 > a + b$ pertenece á la clase primera. Igualmente no existe en la segunda clase un número menor que todos los demás.

El número $A + B$ queda definido como mayor que la suma de dos números racionales cualquiera respectivamente menores que A y B y menor que la suma de dos números racionales cualesquiera respectivamente mayores que A y B.

3. Multiplicación. Sean A y B dos números positivos cualesquiera y a, b, a', b' números racionales positivos que verifiquen las desigualdades

$$a < \mathrm{A} < a', \qquad b < \mathrm{B} < b', \tag{1}$$

se tendrá:

$$ab < a'b'. \tag{2}$$

Si un número racional r positivo es tal, que no existan dos números racionales positivos a y b que satisfagan á las desigualdades (1) y á la igualdad $r = ab$, será

$$r > ab \tag{3}$$

y si r es tal que no existen dos números a' y b' que verifiquen las desigualdades (1) y la igualdad $r = a'b'$, será

$$r < a'b'; \tag{4}$$

entonces solo puede existir un número racional ó no r, que verifique simultáneamente las desigualdades (3) y (4), pues haciendo $a' - a = \varepsilon$ y $b' - b = \eta$, se tiene

$$a'b' - ab = a\eta + b\varepsilon + \varepsilon\eta < (a + b + 1)\delta,$$

suponiendo los números racionales ε y η menores que el número racional δ, menor que la unidad. Si se representa por α un número racional positivo cualquiera, bastará hacer

$$\delta < \frac{\alpha}{a + b + 1} \quad \text{para que se tenga} \quad a'b' - ab < \alpha.$$

Si existe un número racional r que verifique simultáneamente las desigualdades (3) y (4) para números cualesquiera a, b, a', b' que satisfacen á las condiciones (1), será el producto AB. Si no existe dicho número r, cada número racional positivo será ó el producto de dos números racionales positivos menores respectivamente que los números A y B ó el producto de dos números racionales positivos respectivamente mayores que A y B. De esta manera llegamos á descomponer la totalidad de los números racionales positivos en dos clases, de las que la primera comprende todos los números obtenidos multiplicando dos números racionales positivos respectivamente menores que A y B y la segunda comprende todos los números obtenidos multiplicando dos números racionales positivos respectivamente mayores que A y B. Cada número de la primera clase es menor que cada número de la segunda; no existe en la primera ningún número mayor ni en la segunda menor que todos los demás. Este número irracional positivo asi definido es el número AB.

4. Radicación. Si no existe ningún número racional que satisfaga á la ecuación $x^m = A$ (1), se podrán distribuir todos los números racionales positivos en dos clases que comprenderán, la primera todos los números racionales positivos cuya m^{sima} potencia sea un número menor que A y la segunda aquéllos cuya m^{sima} potencia sea mayor que A, y no habrá en la primera ningún número mayor ni en la segunda ninguno menor que todos los demás, pues si por ejemplo fuese a el número mayor de la primera clase, se tendría para cualquier número positivo racional h y $a' \geqq a + h$,

$$a^m < A < (a+h)^m < a^m + mha'^{m-1}.$$

Y si $a^m + \varepsilon$ expresase un número racional cualquiera comprendido entre a^m y A, sería preciso que se tuviese

$$a^m + \varepsilon < a^m + mha'^{m-1}, \quad h > \frac{\varepsilon}{ma'^{m-1}},$$

contra la hipótesis de ser h tan pequeño como se quiera. Igualmente se verá que no existe en la segunda clase un número inferior á todos los demás. Este modo de descomposición define un número irracional positivo, pues si X es dicho número, se tendrá $X^m = A$.

En efecto, si se representan por a y $a+h$ dos números racionales positivos, entre los que se halla comprendido X y por a' un número racional igual ó superior á $a+h$, los números a^m y $(a+h)^m < a^m + mha'^{m-1}$ comprenderán entre sí á X^m y A; pudiendo ser la diferencia entre los dos números racionales $a^m + mha'^{m-1}$ y a^m menor que cualquier número racional positivo, será preciso que X^m y A sean iguales. X es pues el único número positivo cuya potencia m^{sima} sea igual á A. Es la raíz m^{sima} aritmética de A.

La noción de las operaciones aritméticas se extiende á los números irracionales mediante la noción de *conjunto* expuesta en el primer capítulo del *Cálculo diferencial*. Pero tambien se puede definir un número irracional por medio de una serie infinita de números racionales.

Esta exposición de M. Tannery en su *Introduction a la Théorie des fonctions d'une variable* se funda en el concepto de *seccion* debido á Dedekind (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Brunswick, 1872), que se expresa como sigue:

«1.° Llamo *seccion* del dominio R de los números racionales, una división de los números racionales en dos categorias tales, que cada número de la primera categoría sea algebráicamente menor que cada número de la segunda.

2.° Todo número racional determinado *a engendra* una sección determinada (ó dos secciones no esencialmente distintas); porque un número racional cualquiera quedará clasificado en la primera ó en la segunda categoría, según que sea menor ó mayor que *a* (mientras que *a* podrá quedar inscrito arbitrariamente en una de las dos categorías).

3.° Hay una infinidad de secciones que *no pueden* ser engendradas por números racionales del modo indicado; para toda sección de esta especie se crea y se introduce un número *irracional* especial correspondiente á la sección.

4.° Por medio de las secciones correspondientes á dos números α y β reales cualesquiera *a*, se pueden definir las cuatro secciones correspondientes á las cuatro operaciones fundamentales.

5.° Los números irracionales así definidos forman, reunidos á los racionales un dominio R sin lagunas y continuo».

Se dice que una serie infinita de números racionales

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots,\ u_n,\ \ldots\ldots$$

está *dada*; cuando se da el medio de calcular un término cualquiera, conocido su lugar.

Se dice que una serie infinita de números racionales

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$$

tiene por límite un número racional U, cuando á cada número positivo racional ε corresponde un número entero positivo n tal, que el valor absoluto de $U - u_p$ sea menor que ε para todos los valores de p iguales ó superiores á n, de modo que $|U - u_p| < \varepsilon$.

Se dice que la serie infinita de números racionales $u_1, \ldots\ldots,$ $u_n, \ldots\ldots$, es *convergente*, si á cada número racional positivo ε se puede hacer corresponder un número entero positivo n tal, que se tenga

$$|u_p - u_q| < \varepsilon$$

para todos los valores de los enteros p y q iguales ó superiores á n. Esta desigualdad manifiesta que se debe tener para todos los valores enteros de p iguales ó superiores á n,

$$u_n - \varepsilon < u_p < u_n + \varepsilon.$$

Citaremos las siguientes proposiciones demostradas en la obra del Sr. Tannery:

Dada una serie convergente de números racionales que no tiene 0 por límite, todos sus términos acaban, después de cierto lugar n, por tener igual signo y mayor valor absoluto que cierto número racional positivo ε.

Sea $u_1, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$ una serie convergente de números racionales; ó admite por límite un número racional U, y en este caso se dice que aquélla define el número U, ó no es así, y entonces define un modo de descomposición de la totalidad de los números racionales en dos clases, conforme se han definido ya éstas.

Así no existe en la primera clase un número mayor que los demás, porque si a pertenece á la primera clase, los términos de la serie

$$u_1 - a, \quad u_2 - a, \quad \ldots\ldots, \quad u_n - a, \ldots\ldots$$

son después de cierto lugar todos positivos y mayores que cierto número racional ε. Si b es un número comprendido entre a y

$a + \varepsilon$, después del lugar n, los términos de la serie

$$u_1 - b, \quad u_2 - b, \quad \ldots\ldots, \quad u_n - b, \ldots\ldots$$

serán todos positivos y b pertenecerá á la primera clase. Lo mismo se razonará para la segunda.

Si se consideran varias series de números racionales

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n; \quad v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n; \quad w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n; \ldots\ldots$$

existe un número positivo A *al que son inferiores todos los términos de éstas series en valor absoluto.*

Dado un número positivo racional ε, existe un número entero positivo n tal, que bajo la condición de que los enteros p y q sean por lo menos iguales á n, se pueda afirmar que las cantidades $|u_p - u_q|$, $|v_p - v_q|$, $|w_p - w_q|$ ..... sean menores que ε. El número n puede, en efecto, determinarse por cada una de las series, y se tomará el mayor obtenido.

Si las tres series tienen á los números racionales U, V, W... por límites, á cada número positivo ε corresponde un entero n tal, que se tenga á la vez:

$$|u_p - \mathrm{U}| < \varepsilon, \quad |v_p - \mathrm{V}| < \varepsilon, \quad |w_p - \mathrm{W}| < \varepsilon,$$

con tal que p sea superior á n.

Si las dos series infinitas de números racionales

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots, \quad v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n, \ldots\ldots$$

son convergentes, también lo serán las series

$$u_1 + v_1, \ u_2 + v_2, \ \ldots, \ u_n + v_n, \ \ldots; \quad u_1 v_1, \ u_2 v_2, \ \ldots, \ u_n v_n, \ \ldots$$

Las dos series tienen respectivamente por límites $\mathrm{U} + \mathrm{V}$ y UV.

Considerando dichas dos series, y observando que al no tener cero por límite la segunda serie, después de cierto lugar, no se encuentran términos nulos; para probar la convergencia de la serie

$$\frac{u_1}{v_1}, \ \frac{u_2}{v_2}, \ldots\ldots, \frac{u_n}{v_n}, \ldots\ldots$$

observaremos que, no teniendo cero por límite la serie $v_1, v_2, \ldots,$ á partir de cierto lugar todos sus términos serán, en valor absoluto, superiores á cierto número racional positivo ω. Supongamos además que ε sea un número racional positivo cualquiera; habrá un entero positivo n tal que para $p \geq n$, se tenga

$$|v_p| > \omega, \quad |\alpha_p| < \varepsilon, \quad |\beta_p| < \varepsilon,$$

haciendo, para abreviar, $\alpha_p = u_p - u_n$, $\beta_p = v_p - v_n$, y tendremos

$$\frac{u_p}{v_p} - \frac{u_n}{v_n} = \frac{\alpha_p v_n - \beta_p u_n}{v_p v_n};$$

luego, designando por A un número racional positivo superior á los valores absolutos de las dos series propuestas, se tendrá

$$\left|\frac{u_p}{v_p} - \frac{u_n}{v_n}\right| < \frac{2A\varepsilon}{\omega^2}.$$

A, ω son dos números fijos y ε arbitrario. Se ve pues que, para un número racional positivo ε' tan pequeño como se quiera, siendo $p \geq n$, será

$$\left|\frac{u_p}{v_p} - \frac{u_n}{v_n}\right| < \varepsilon'.$$

La serie $w_1, w_2, \ldots\ldots$ define pues un número W racional ó no tal, que se tenga $U = VW$.

Definidas ya las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética para los números irracionales, se puede pasar al caso más general de la función racional.

Considerando las series (u), (v), (w), ..., en número finito y cuyos límites son U, V, W, ..., se podrá considerar la función $\dfrac{f(u, v, w \ldots\ldots)}{\varphi(u, v, w, \ldots\ldots)}$, en la cual el numerador y el denominador son polinomios enteros respecto á las variables $u, v, w, \ldots$ Si no se tiene $\varphi(U, V, W, \ldots\ldots) = 0$, la serie infinita, cuyo n^{simo} término es

$$\frac{f(u_n, v_n, w_n, \ldots\ldots)}{\varphi(u_n, v_n, w_n, \ldots\ldots)} \quad \text{tiene por límite} \quad \frac{f(U, V, W, \ldots\ldots)}{\varphi(U, V, W, \ldots\ldots)}.$$

CAPÍTULO II

Principios de la teoría de las cantidades complejas con n unidades principales

§ 1.º Definiciones, unidades principales y coordenadas

5. Definiciones. Todas las cantidades complejas que vamos á considerar, formarán un *Conjunto* C. Una cualquiera de aquéllas se llama un elemento.

Para establecer un cáculo de las cantidades complejas en armonía con las cantidades ordinariamente empleadas, fijaremos las siguientes condiciones:

1.ª Si a, b, c, ... son elementos del conjunto C, su suma, su diferencia, su producto y su cociente, dos á dos son también elementos del conjunto.

2.ª Las propiedades *conmutativa*, *asociativa* y *distributiva* se aplican á los elementos de C, de manera que tenemos

$$a+b=b+a, \quad (a+b)+c=(a+c)+b, \quad (a-b)+b=a \qquad (1)$$

$$ab=ba, \quad (ab)c=(ac)b, \quad a(b+c)=ab+ac. \qquad (2)$$

Y agregaremos la igualdad

$$\frac{a}{b}\,b=a \qquad (3)$$

que sirve de definición al cociente de los dos elementos a y b, de igual modo que la igualdad $(a-b)+b=a$ sirve de definición á su diferencia.

El conjunto C de cantidades complejas que consideramos es aquél en el cual tienen la forma

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots\ldots + \xi_n e_n$$

Los números $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n$ *reales, comensurables ó no* se llaman *coordenadas* de la cantidad compleja. Los n símbolos e_1, $e_2, \ldots\ldots, e_n$ se llaman *unidades principales.*

6. Condiciones. La primera condición á que han de satisfacer las unidades principales es que *han de ser linealmente distintas*, es decir, que no ha de existir entre ellas ninguna relación de la forma

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots\ldots + \lambda_n e_n = 0 \qquad (4)$$

en la cual $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n$ son números reales que no son á la vez nulos. Si existiera una relación lineal, el número de unidades principales sería inferior á n.

Consecuencias. 1.ª Si un elemento es nulo, sus n coordenadas son nulas separadamente.

2.ª Si dos cantidades

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

son iguales, sus coordenadas de igual lugar son iguales dos á dos, es decir, que

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots\ldots, \quad \alpha_n = \beta_n;$$

porque si $a = b$, la diferencia $a - b$ debe ser nula, las n coordenadas de esta diferencia son pues, nulas; pero estas coordenadas son precisamente

$$\alpha_1 - \beta_1, \quad \alpha_2 - \beta_2, \quad \ldots\ldots \quad \alpha_n - \beta_n.$$

3.ª Sean $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$, n elementos del conjunto C

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{1n} e_n, \\ a_2 = \xi_{21} e_2 + \xi_{22} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{2n} e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = \xi_{n1} e_1 + \xi_{n2} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{nn} e_n, \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Supongamos que no sea nulo el determinante

$$\Xi = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \dots\dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \dots\dots & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} \dots\dots & \xi_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

Sean además $\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots, \lambda_n$, n números reales indeterminados, que *no son todos nulos;* la cantidad

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots\dots + \lambda_n a_n$$

no podrá ser nula.

Se tiene que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots\dots + \lambda_n a_n = (\lambda_1 \xi_{11} + \lambda_2 \xi_{21} + \dots\dots + \lambda_n \xi_{n1})\, e_1$$
$$+ (\lambda_1 \xi_{12} + \lambda_2 \xi_{22} + \dots \lambda_n \xi_{n2})\, e_2 + \dots + (\lambda_1 \xi_{1n} + \lambda_2 \xi_{2n} + \dots + \lambda_n \xi_{nn})\, e_n,$$

Esta cantidad es un elemento del conjunto C, y no puede ser nula más que en el caso de ser nulas las n coordenadas, es decir. si se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \xi_{11} + \lambda_2 \xi_{21} + \dots\dots + \lambda_n \xi_{n1} = 0, \\ \lambda_1 \xi_{21} + \lambda_2 \xi_{22} + \dots\dots + \lambda_n \xi_{n2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 \xi_{n1} + \lambda_2 \xi_{n2} + \dots\dots + \lambda_n \xi_{nn} = 0, \end{array}\right\} \tag{7}$$

Pero no siendo nulo Ξ, estas ecuaciones darán las únicas soluciones $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots\dots = \lambda_n$, lo que es contra la hipótesis.

Respecto al producto $e_p e_q$ de dos unidades, se debe exigir que sea expresable por n unidades, de manera que

$$e_p e_q = \varepsilon_{1pq} e_1 + \varepsilon_{2pq} e_2 + \dots\dots + \varepsilon_{npq} e_n \tag{8}$$

Los números reales ε_{rpq} *son los que definen el sistema de las unidades principales, y su elección es arbitraria en ciertos límites que aprenderemos á conocer.*

Los teoremas expresados por las igualdades (1) quedan satisfechos para toda elección de los números ε_{rpq}, no sucediendo lo mismo á las igualdades (2). El teorema conmutativo exige que escribamos

$$e_p\, e_q = e_q\, e_p \quad \text{ó} \quad \varepsilon_{rpq} = \varepsilon_{rqp} \tag{9}$$

para

$$r = 1, 2, \ldots\ldots, n; \quad p = 1, 2, \ldots\ldots, n; \quad q = 1, 2, \ldots\ldots, n.$$

7. Según el teorema asociativo, debe tenerse

$$(e_p\, e_q)\, e_r = (e_p\, e_r)\, e_q \qquad (p, q, r = 1, 2, \ldots\ldots n) \tag{10}$$

ó, aplicando varias veces la fórmula (8),

$$(\varepsilon_{1pq} e_1 + \varepsilon_{2pq} e_2 + \ldots + \varepsilon_{npq} e_n)\, e_r = (\varepsilon_{1pr} e_1 + \ldots + \varepsilon_{npr} e_n)\, e_q$$

ó bien,

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{1pq}(\varepsilon_{11r} e_1 + \varepsilon_{21r} e_2 + \ldots + \varepsilon_{n1r} e_n) + \varepsilon_{2pq}(\varepsilon_{12r} e_1 + \ldots \\ &\qquad + \varepsilon_{n2r} e_n) + \ldots + \varepsilon_{npq}(\varepsilon_{1nr} e_1 + \ldots + \varepsilon_{nnr} e_n) \\ &= \varepsilon_{1pr}(\varepsilon_{11q} e_1 + \varepsilon_{21q} e_2 + \ldots + \varepsilon_{n1q} e_n) + \varepsilon_{2pr}(\varepsilon_{1nq} e_1 + \ldots \\ &\qquad + \varepsilon_{n2q} e_n) + \ldots + \varepsilon_{npr}(\varepsilon_{1nq} e_1 + \varepsilon_{2nq} e_2 + \ldots + \varepsilon_{nnq} e_n) \end{aligned}$$

Esta igualdad y sus análogas, dan cada una n relaciones entre las ε_{rpq}, cuyo tipo general es (para $p, q, r, k = 1, 2, \ldots\ldots n$)

$$\varepsilon_{1pq}\varepsilon_{k1r} + \varepsilon_{2pq}\varepsilon_{k2r} + \ldots + \varepsilon_{npq}\varepsilon_{knr} = \varepsilon_{1pr}\varepsilon_{k1q} + \ldots + \varepsilon_{npr}\varepsilon_{knq} \tag{11}$$

Con el fin de verificar las igualdades (9) y (11), observaremos que disponiendo de la definición de los símbolos $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$, podemos definirlos por la fórmula

$$e_p\, e_q = 0 \quad (12) \qquad \text{ó} \qquad e_p\, e_p = e_p \quad (13)$$

según que p y q sean iguales ó desiguales. Entonces los ε_{rpq} son todos nulos, excepto

$$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{222} = \varepsilon_{333} = \ldots\ldots = \varepsilon_{nnn} = 1;$$

y las igualdades (9) y (11) se verifican para este sistema particular de números ε_{rpq}, deduciéndose de este sistema una infinidad de otros sistemas.

Tomemos un sistema cualquiera de n^2 números ξ_{ij} sujetos á la sola condición de que sea distinto de cero el determinante

$$\Xi = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots\ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots\ldots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & & \xi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Y hagamos, conservando para $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$ las definiciones (12) y (13)

$$E_1 = \xi_{11}e_1 + \xi_{12}e_2 + \ldots\ldots + \xi_{1n}e_n,$$

$$E_2 = \xi_{21}e_1 + \ldots\ldots + \xi_{2n}e_n, \ldots\ldots E_n = \xi_{n1}e + \ldots\ldots + \xi_{nn}e_n. \qquad (14)$$

Las n cantidades $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ son linealmente distintas, y teniendo en cuenta las fórmulas (12) y (13), resulta que

$$E_pE_q = E_qE_p, \quad (E_pE_q)E_r = (E_pE_r)E_q. \qquad (15)$$

Además $E_p\,E_q$ se expresa en función lineal de $e_1, e_2, \ldots, e_n$, y por consiguiente también en función lineal de $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$, porque según la condición $\Xi \neq 0$, las ecuaciones (14) dan $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$ en función lineal de $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$.

Se tiene pues,

$$E_pE_q = \varepsilon'_{1pq}\,E + \varepsilon'_{2pq}\,E_2 + \ldots\ldots + \varepsilon'_{npq}\,E_n.$$

Los números ε'_{rpq} deben necesariamente verificar las igualdades (9) y (11) en virtud de las relaciones (15), que se han establecido directamente. Por otra parte existe una infinidad de sistemas de números ε'_{rpq}, porque éstos dependen tan sólo de los números ξ_{ij} que son absolutamente arbitrarios, con la condición $\Xi \neq 0$.

Haciendo abstracción del sistema $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$, se ha demostrado que las igualdades (9) y (11) pueden verificarse de infinidad de maneras.

8. *Caso particular*: $n = 2$. Hagamos por brevedad

$$\varepsilon_{111} = \lambda, \quad \varepsilon_{112} = \varepsilon_{121} = \mu, \quad \varepsilon_{122} = \nu,$$

$$\varepsilon_{211} = \lambda' \quad \varepsilon_{221} = \varepsilon_{212} = \mu', \quad \varepsilon_{222} = \nu'.$$

Se tiene entonces

$$e_1^2 = \lambda e_1 + \lambda' e_2, \quad e_1 e_2 = \mu e_1 + \mu' e_2, \quad e_2^2 = \nu e_1 + \nu' e_2.$$

Las varias condiciones á que deben satisfacer los seis coeficientes λ, λ', μ, μ', ν, ν' se sacan de las dos desigualdades

$$(e_1 e_2) e_1 = (e_1 e_1) e_2 \quad (e_2 e_1) e_2 = (e_1 e_2) e_1$$

ó

$$\mu(\lambda e_1 + \lambda' e_2) + \mu'(\mu' e_1 + \mu e_2) = \lambda(\mu e_1 + \mu' e_2) + \lambda'(\nu e_1 + \nu' e_2),$$
$$\mu(\mu e_1 + \mu' e_2) + \mu'(\nu e_1 + \nu' e_2) = \nu(\lambda e_1 + \lambda' e_2) + \nu'(\mu e_1 + \mu' e_2),$$

y se reduce á

$$\mu\mu' - \nu\lambda' = 0, \quad \mu\lambda' + \mu'^2 - \mu'\lambda - \nu'\lambda' = 0,$$
$$\mu^2 + \mu'\nu - \lambda\nu - \mu\nu' = 0. \quad (16)$$

Se puede hacer que ν sea cualquiera, pero distinta de cero. Las tres igualdades (16) se verifican, si se hace

$$\mu' = \frac{\lambda\nu + \mu\nu' - \mu^2}{\nu}, \quad \lambda' = \frac{\mu\mu'}{\nu} = \frac{\mu\lambda\nu + \mu^2\nu' - \mu^3}{\nu^3}.$$

De los seis coeficientes tres son arbitrarios y un cuarto sólo está sujeto á ser distinto de cero. Si se hace $\nu = 0$, se tendrá

$$\mu\mu' = 0, \quad \mu\lambda' + \mu'^2 - \mu'\lambda - \nu'\lambda' = 0, \quad \mu^2 - \mu\nu' = 0.$$

Se debe hacer $\mu = 0$ ó $\mu' = 0$; y solo hay que verificar la única igualdad

$$\mu'^2 - \mu'\lambda - \nu'\lambda' = 0,$$

lo que permite tomar de una manera arbitraria tres de los coeficientes. Si $\mu' = 0$, se tiene

$$(\mu - \nu')\lambda' = 0, \quad (\mu - \nu')\mu = 0,$$

lo que exige solamente $\mu = \nu'$, porque se supone μ distinto de cero, de modo que, además de λ, dos de los tres coeficientes μ, λ', ν' son arbitrarios.

Concluímos pues, reuniendo los dos casos $\nu \gtrless 0$ y $\nu = 0$, que *cuatro* de los seis coeficientes pueden siempre tomarse arbitrariamente.

§ 2.º Las cuatro operaciones sobre los elementos del conjunto C

9. Adición y sustracción. Sean

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots\ldots + \alpha_n e_n, \quad b = \beta_1 e_1 + \ldots\ldots + \beta_n e_n.$$

Se tiene inmediatamente

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)\, e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\, e_2 + \ldots\ldots + (\alpha_n + \beta_n)\, e_n,$$
$$a - b = (\alpha_1 - \beta_1)\, e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, e_2 + \ldots\ldots + (\alpha_n - \beta_n)\, e_n.$$

La suma y la diferencia de dos elementos del conjunto son elementos del conjunto.

10. Multiplicación. Formemos el producto ab. Se tiene

$$\begin{aligned} ab = {} & \alpha_1\beta_1 e_1^2 + \alpha_2\beta_1 e_2 e_1 + \alpha_3\beta_1 e_3 e_1 + \ldots\ldots + \alpha_n\beta_1 e_n e_1 \\ & + \alpha_1\beta_2 e_1 e_2 + \alpha_2\beta_2 e_2^2 + \alpha_3\beta_2 e_3 e_2 + \ldots\ldots + \alpha_n\beta_2 e_n e_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \alpha_1\beta_n e_1 e_n + \alpha_2\beta_n e_2 e_n + \alpha_3\beta_n e_3 e_n + \ldots\ldots + \alpha_n\beta_n e_n^2 \end{aligned}$$

Cada uno de los productos $e_p\, e_q$ se expresa en función lineal, con coeficientes reales, de las unidades principales, en virtud de la igualdad (8). Lo mismo sucede á ab. *Así* ab *forma parte del conjunto* C. Supongamos ahora que un término cualquiera del producto ab, por ejemplo, $\alpha_p\beta_q e_p e_q$ tenga su correspondiente $\beta_q\alpha_p e_q e_p$ en el producto ba, y que por otra parte

$$\alpha_p\beta_q = \beta_q\alpha_p, \qquad e_p e_q = e_q e_p,$$

se deberá concluir $ab = ba$.

Un razonamiento análogo manifestaría que lo mismo sucede respecto á las igualdades siguientes:

$$(ab)\, c = (ac)\, b, \qquad a\,(b + c) = ab + ac$$

Vemos pues que se verifican los teoremas (2) (núm. 5).

11. División. Relativamente á la división de dos cantidades complejas a y b del conjunto propuesto, partimos de la igualdad (3) (núm. 5) tomada como definición, lo que está completamente de acuerdo con la manera de proceder en los elementos del cálculo ordinario; y exigiremos además que el cociente $c = \frac{a}{b}$, ya tal como $cb = \frac{a}{b}\, b = a$, sea una cantidad de igual forma que a y b, es decir, que se halla en el conjunto C. Desde entonces la división de a por b se reduce á la determinación de las coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n$ del elemento c por la condición $cb = a$, ó

$$(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots \gamma_n e_n)(\beta_1 e_1 + \ldots \beta_n e_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

ó bien

$$\begin{aligned} &\gamma_1(\beta_1 e_1^2 + \beta_2 e_1 e_2 + \ldots\ldots + \beta_n e_1 e_n) \\ &+ \gamma_2(\beta_1 e_2 e_1 + \beta_2 e_2^2 + \ldots\ldots + \beta_n e_2 e_n) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \gamma_n(\beta_1 e_n e_1 + \beta_2 e_n e_2 \ldots\ldots + \beta_n e_n^2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots\ldots + \alpha_n e_n. \end{aligned}$$

Sustituyendo los productos $e_p e_q$ por sus valores sacados de (8) (núm. 6) é igualando después los coeficientes de e_1, $e_2, \ldots\ldots, e_n$ se obtienen, para determinar las n coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n$ las n ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} &\gamma_1(\varepsilon_{111}\beta_1 + \varepsilon_{112}\beta_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{11n}\beta_n) + \gamma_2(\varepsilon_{121}\beta_1 + \varepsilon_{122}\beta_2 + \ldots\ldots \\ &\quad + \varepsilon_{12n}\beta_n) + \ldots\ldots + \gamma_n(\varepsilon_{1n1}\beta_1 + \varepsilon_{1n2}\beta_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{1nn}\beta_n) = \alpha_1 \\ &\gamma_1(\varepsilon_{211}\beta_1 + \varepsilon_{212}\beta_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{21n}\beta_n) + \gamma_2(\varepsilon_{221}\beta_1 + \varepsilon_{222}\beta_2 + \ldots\ldots \\ &\quad + \varepsilon_{22n}\beta_n) + \ldots\ldots + \gamma_n(\varepsilon_{2n1}\beta_1 + \varepsilon_{2n2}\beta_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{2nn}\beta_n) = \alpha_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\gamma_1(\varepsilon_{n11}\beta_1 + \varepsilon_{n12}\beta_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{n1n}\beta_n) + \gamma_2(\varepsilon_{n21}\beta_1 + \varepsilon_{n22}\beta_2 + \ldots\ldots \\ &+ \varepsilon_{n2n}\beta_n) + \ldots\ldots + \gamma_n(\varepsilon_{nn1}\beta_1 + \varepsilon_{nn2}\beta_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{nnn}\beta_n) = \alpha_n. \end{aligned}$$

Consideremos el determinante

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{111}\beta_1 + \varepsilon_{112}\beta_2 + \cdots \varepsilon_{121}\beta_1 + \cdots + \varepsilon_{12n}\beta_n \cdots \varepsilon_{1n1}\beta_1 + \cdots + \varepsilon_{1nn}\beta_n \\ \varepsilon_{211}\beta_1 + \varepsilon_{212}\beta_2 + \cdots \varepsilon_{221}\beta_1 + \cdots + \varepsilon_{22n}\beta_n \cdots \varepsilon_{2n1}\beta_1 + \cdots + \varepsilon_{2nn}\beta_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varepsilon_{n11}\beta_1 + \varepsilon_{n12}\beta_2 + \cdots \varepsilon_{n21}\beta_1 + \cdots + \varepsilon_{n2n}\beta_n \cdots \varepsilon_{nn1}\beta_1 + \cdots + \varepsilon_{nnn}\beta_n \end{vmatrix}$$

Este determinante contiene dos clases de cantidades: Las primeras dependen del sistema de las *unidades principales*, tales son ε_{rpq}, las segundas dependen únicamente de la *cantidad compleja particular que sirve de divisor*, son las coordenadas $\beta_1, \ldots\ldots, \beta_n$ del elemento b.

La elección de las ε_{rpq} podría ser tal, que el determinante ε fuese nulo, cualesquiera que fuesen las coordenadas $\beta_1, \ldots\ldots, \beta_n$; por ejemplo, si se tomase $\varepsilon_{rpq} = 1$ para todos los valores $(r, p, q = 1, 2, \ldots\ldots, n)$. El sistema de las ecuaciones (18) sería entonces imposible ó indeterminado. También *excluímos* todo sistema de números ε_{rpq} para el que se presente este caso. Podemos convencernos de que el determinante ε puede no ser idénticamente nulo, considerando un caso particular, por ejemplo, el indicado en el n.º 6, que corresponde á las fórmulas (12) y (13).

Habiendo supuesto que el determinante ε no es *idénticamente* nulo, si las coordenadas del divisor b no anulan á ε, hallaremos, cualquiera que sea el dividendo a, un sistema único y determinado de coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n$, y por consiguiente, un valor único y determinado del cociente c. Pero, si al contrario, las coordenadas de b anulan á ε, ó bien no existe ningún sistema de coordenadas finitas $\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_n$ que verifiquen á las ecuaciones (18), ó existirá una infinidad, algúnas de las cuales sean indeterminadas, lo que dependerá de las coordenadas $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n$ del dividendo a.

12. Divisores de cero. Consideremos el caso en que $a = 0$, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots \alpha_n = 0$. Las ecuaciones (18) serán compatibles, y además el sistema de soluciones $\gamma_1 = \gamma_2 \ldots\ldots$

$= \gamma_n = 0$ admitirá una infinidad de otros valores, y esto, ya se suponga $b = 0$ ó $b \neq 0$.

Sea $b \neq 0$ y c una cantidad compleja cuyas coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots \gamma_n$ no sean todas nulas y verifiquen las ecuaciones (18).

Se tendrá

$$b \neq 0, \quad c \neq 0 \quad \text{y } \textit{sin embargo} \quad bc = 0.$$

Este hecho no se presenta nunca en el cálculo ordinario basado en las dos unidades principales 1 y $\sqrt{-1}$. El divisor considerado $b \neq 0$ se ha llamado por Weierstrass *un divisor de cero.*

La denominación, *divisor de cero*, dada al divisor b, se halla evidentemente fundada en la propiedad $bc = 0$ que supone $a = 0$; pero, reflexionando sobre lo que precede, se ve enseguida que esta propiedad del *divisor* b *de cero* depende únicamente del determinante ε que es nulo, sin intervenir en él la cantidad a, de modo que se debe definir un *divisor de cero* diciendo que es *un elemento del conjunto* C *para el que el determinante* ε *correspondiente es nulo.*

Teorema. *Si* b *y* c *no son nulos, siendo* b *un divisor de cero y* bc $= 0$, *será también* c *un divisor de cero.*

Esto resulta de las ecuaciones (18), suponiendo $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots\ldots = \alpha_n = 0$.

Basta, para verlo, observar que el determinante ε' de estas ecuaciones consideradas, no ya en $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n$, sino en $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n$ es nulo; porque si no fuese nulo, las ecuaciones (18) no darían mas que el único sistema de soluciones $\beta_1 = \beta_2 = \ldots\ldots = \beta_n = 0$, contra la hipótesis.

Esta propiedad de *un divisor de cero* $b \neq 0$, de existir además ciertas cantidades $c \neq 0$, tales que *el producto* bc *sea nulo*, es una *propiedad característica de los divisores de cero.*

Teorema. *El producto de un divisor de cero por una cantidad compleja cualquiera es también un divisor de cero.* En efecto, b divisor de cero equivale á $bc = 0$, teniendo c ciertos valores.

Resulta pues también que $kbc = 0$ ó $(kb)c = 0$; luego kb es divisor de cero.

CASO DE $n = 2$. Empleando las notaciones del n.º 7 y suponiendo $\nu \neq 0$, se tienen las dos condiciones

$$\mu' = \frac{\lambda\nu + \mu\nu' - \mu^2}{\nu}, \quad \lambda' = \frac{\mu\lambda\nu + \mu^2\nu' - \mu^3}{\nu^2}.$$

En este caso se verifica que

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 & \mu\beta_1 + \nu\beta_2 \\ \lambda'\beta'_1 + \mu'\beta_2 & \mu'\beta_1 + \nu'\beta_2 \end{vmatrix} = (\lambda\mu' - \mu\lambda')\beta_1^2 + (\lambda\nu' - \nu\lambda')\beta_1\beta_2 + (\mu\nu' - \nu\mu')\beta_2^2;$$

en virtud de las fórmulas (17) se tiene

$$\left.\begin{aligned} \lambda\mu' - \mu\lambda' &= \frac{(\lambda\nu - \mu^2)^2 + \mu\nu'(\lambda\nu - \mu^2)}{\nu^2} \\ &= \frac{\lambda\nu - \mu^2 + \mu\nu'}{\nu^2}(\lambda\nu - \mu^2), \\ \lambda\nu' - \nu\lambda' &= \frac{\nu' - \mu}{\nu}(\lambda\nu - \mu^2), \\ \mu\nu' - \nu\mu' &= -(\lambda\nu - \mu^2). \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Según esto, es necesario y suficiente, para que ε sea idénticamente nulo, que $\lambda\nu - \mu^2 = 0$.

Sea por el contrario $\lambda\nu - \mu^2 \neq 0$. Si $\beta_1 = \beta_2 = 0$, será ε nulo. Para que existan otros valores reales de β_1 y β_2 que anulen á ε, es necesario y suficiente que

$$(\lambda\nu' - \nu\lambda')^2 - 4(\lambda\mu' - \mu\lambda')(\mu\nu' - \nu\mu') \geqq 0,$$

y, en virtud de las fórmulas (19),

$$\frac{(\lambda\nu - \mu^2)^2}{\nu}\left[(\nu' - \mu)^2 + 4\mu\nu' + 4(\lambda\nu - \mu^2)\right] \geqq 0.$$

ó

$$(\mu + \nu')^2 + 4(\lambda\nu - \mu^2) \gtreqless 0 \quad (20)$$

Esta condición quedará particularmente satisfecha, si se hace

$$\lambda\nu - \mu^2 > 0;$$

luego: *Aún en el caso de ser* n = 2, *existen sistemas de unidades principales tales, que los conjuntos de cantidades complejas que dependen de ellas admiten divisores de cero.*

Caso particular. Sea $n = 2$, $e_1 = 1$, $e_2 = \sqrt{-1}$. Se tiene aquí

$$e_1^2 = e_1,\ e_1 e_2 = e_2,\ e_2^2 = -1;$$

luego: $\lambda = 1$, $\mu' = 1$, $\nu = -1$, $\mu = \lambda' = \nu' = 0$;

ν no es cero y nos hallamos en el caso de $n = 2$, pág. 27. Las condiciones (17) quedan satisfechas. Además ε no es idénticamente nulo, porque se tiene en nuestro caso $\mu^2 - \lambda\nu = 1$.

En fin, siendo $\mu + \nu'$ nulo y $\lambda\nu - \mu^2 < 0$, la condición (20) no queda satisfecha, y no existen valores reales de β_1 y de β_2 distintos de 0, anulando o á ε, lo que manifiesta directamente la expresión de ε, que es $\varepsilon = \beta_1^2 + \beta_2^2$; luego:

No hay otros divisores más que el cero, en el caso de tomarse 1 y $\sqrt{-1}$ *como unidades principales.*

§ 3.º Expresión de las cantidades complejas por medio de un sistema particular de unidades principales.

13. La cantidad e_0. Sea

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots\ldots + \alpha_n e_n$$

un elemento del conjunto C que *no sea divisor de cero.* Si se sustituyen en las ecuaciones (18) $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n$ respectivamente por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$, éstas darán un sistema único de valores finitos y determinados para las coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n$ de cierta cantidad compleja e_0. Esta cantidad compleja será pues, por definición, tal que $e_0 = \dfrac{a}{a}$.

Primera propiedad. *Un elemento cualquiera del conjunto* C *permanece invariable cuando se le multiplica por* e_0.

Si $\qquad c = be_0 = b\dfrac{a}{a} \qquad$ será $\qquad c = b.$

En efecto, para obtener las coordenadas de c, es necesario efectuar el producto ba é identificar con ca. Sean

1.° $b = 0$. Entonces es preciso que $c = 0$, luego $b = c$;

2.° $b \neq 0$. Entonces, puesto que a no es divisor de cero, las ecuaciones (18) determinan un sistema único de coordenadas $\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_n$ finitas y determinadas; luego, si se conoce un sistema de coordenadas que verifiquen á estas ecuaciones, habrá seguridad de que no existen otras. Pero el sistema

$$\gamma_1 = \beta_1, \quad \gamma_2 = \beta_2, \quad \ldots\ldots, \quad \gamma_n = \beta_n$$

satisface evidentemente, porque transforma en identidad la igualdad $ca = ba$; luego $c = b\dfrac{a}{a} = b$.

SEGUNDA PROPIEDAD. *Cualquiera que sea la cantidad compleja (no siempre divisor de cero) que sirve de punto de partida, se llegará siempre á la misma cantidad* e_0, ó lo que es igual: si a y a' son dos elementos de C no divisores de cero y $\dfrac{a}{a} = e_0$, $\dfrac{a'}{a'} = e'_0$, se tendrá $e_0 = e'_0$.

Según la primera propiedad, toda cantidad compleja, multiplicada sea por e_0, sea por e'_0, permanece invariable; luego, en particular, $ae_0 = a$, $ae'_0 = a$, es decir, que las coordenadas de e'_0 satisfacen á las mismas ecuaciones que las coordenadas de e_0, y por consiguiente, son idénticamente las mismas, porque el sistema de las ecuaciones de que dependen, admiten un sólo sistema de soluciones, por no ser a divisor de cero, luego $e'_0 = e_0$.

Observación. La fórmula $ae_0 = a$ ó $ae_0 = e_0 a = a$, manifiesta que *en el cálculo de las cantidades complejas, la cantidad* e_0 *se conduce absolutamente como* el 1 *en el cálculo ordinario.*

CÁLCULO DE e_0. Las coordenadas de e_0 están determinadas por las ecuaciones (18), cuando se hace en ellas

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \ldots\ldots, \quad \beta_n = \alpha_n.$$

Pero como en virtud de la segunda propiedad de e_0, esta cantidad permanece la misma, cualquiera que sea a (no siempre divisor de cero), se escribirá que las ecuaciones (18) se verifican, cualesquiera que sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$, lo que conduce á las n^2 ecuaciones

$$\begin{gathered}
\gamma_1 \varepsilon_{111} + \gamma_2 \varepsilon_{121} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{1n1} = 1, \quad \gamma_1 \varepsilon_{112} + \ldots\ldots \\
+ \gamma_n \varepsilon_{1n2} = 0, \quad \ldots\ldots, \quad \gamma_1 \varepsilon_{11n} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{1nn} = 0, \\
\gamma_1 \varepsilon_{211} + \gamma_2 \varepsilon_{221} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{2n1} = 0, \quad \gamma_1 \varepsilon_{212} + \ldots\ldots \\
+ \gamma_n \varepsilon_{2n2} = 1, \quad \ldots\ldots, \quad \gamma_1 \varepsilon_{21n} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{2nn} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\gamma_1 \varepsilon_{n11} + \gamma_2 \varepsilon_{n21} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{nn1} = 0, \quad \gamma_1 \varepsilon_{n12} + \ldots\ldots \\
+ \gamma_n \varepsilon_{nn2} = 0, \quad \ldots\ldots, \quad \gamma_1 \varepsilon_{n1n} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{nnn} = 1.
\end{gathered}$$

Los segundos miembros de estas ecuaciones son siempre 0 ó 1. Se debe tomar 1 cuando figure en el primer miembro un número ε_{rpq} con índices iguales, y 0 en el caso contrario. Aunque el número de ecuaciones excede al de incógnitas, son compatibles y admiten otro sistema de soluciones distinto de $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots\ldots = \gamma_n = 0$, como lo exigen la existencia y las propiedades de e_0.

Caso n $= 2$. Las $n^2 = 4$ ecuaciones son

$$\gamma_1\lambda + \gamma_2\mu = 1, \quad \gamma_1\mu + \gamma_2\nu = 0, \quad \gamma_1\lambda' + \gamma_2\mu' = 0, \quad \gamma_1\mu' + \gamma_2\nu' = 1$$

que pueden combinarse dos á dos de seis maneras. Combinando la segunda y la tercera, se debe tener $\mu\mu' - \lambda'\nu = 0$. Las otras cinco combinaciones dan:

$$\gamma_1 = \frac{\nu}{\lambda\nu - \mu^2} = \frac{-\mu'}{\lambda'\nu' - \mu'^2} = \frac{\nu' - \mu}{\lambda\nu' - \mu\mu'} = \frac{\mu'}{\lambda\mu' - \mu\lambda'} = \frac{-\nu}{\mu\nu' - \nu\mu'},$$

$$\gamma_2 = \frac{-\mu}{\lambda\nu - \mu^2} = \frac{\lambda'}{\lambda'\nu' - \mu'^2} = \frac{\lambda - \mu'}{\lambda\nu' - \mu\mu'} = \frac{-\lambda'}{\lambda\mu' - \mu\lambda'} = \frac{\mu}{\mu\nu' - \nu\mu'},$$

Cuando las unidades principales son 1 y $\sqrt{-1}$, se tiene $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, porque $\lambda = \mu' = 1$, $\nu = -1$, $\mu = \lambda' = \nu' = 0$. En este caso $e_0 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 = \gamma_1 + \gamma_2 \sqrt{-1} = 1$.

§ 4.° El sistema de las g.

14. Sea $g = \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{1n} e_n$ un elemento del conjunto C que no es un divisor de cero. Formando sus potencias sucesivas por medio de las fórmulas (8), reduciremos cada una de dichas potencias á la forma lineal con respecto á las unidades principales. Tendremos así

$$\begin{aligned} g &= \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{1n} e_n , \\ g^2 &= \xi_{21} e_1 + \xi_{22} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{2n} e_n , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^n &= \xi_{n1} e + \xi_{n2} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{nn} e_n , \end{aligned}$$

expresando con ξ_{ij} las coordenadas, que son cantidades reales funciones de aquélla de entre ellas cuyo índice es 1, y también de las cantidades ε_{rpq} que entran en las fórmulas (8).

Supongamos que el conjunto C satisfaga á la nueva condición de que para ningún sistema de valores de las coordenadas, sea nulo el determinante

$$\Xi = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \ldots\ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \ldots\ldots & \xi_{2n} \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} \ldots\ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix} .$$

Esta hipótesis puede hacerse, porque de otro modo debería ser imposible el hallar sistemas de números ε_{rpq} tales que, el determinante Ξ no sea idénticamente nulo; pero el empleo de un sistema particular de números ε_{rpq} manifiesta precisamente lo contrario, pues si tomamos el sistema ya empleado (7) para demostrar la posibilidad de satisfacer á las ecuaciones (9) y (11). En este sistema, todos los ε_{rpq} son nulos, excepto

$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{222} = \ldots\ldots = \varepsilon_{nnn} = 1$, y se tiene $e_p e_q = 0$

si $p \gtrless q$ con $e_p e_q = e_p$.

En el caso actual, se obtiene pues

$$g^i = \xi_{i1}e_1 + \xi_{i2}e_2 + \ldots + \xi_{in}e_n = \xi_{11}^i e_1 + \xi_{12}^i e_2 + \ldots + \xi_{1n}^i e_n;$$

luego, escribiendo $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots$ en vez de $\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots\ldots$, se tiene

$$\Xi = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots\ldots & \xi_n \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots\ldots & \xi_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots\ldots & \xi_n^n \end{vmatrix},$$

determinante distinto de cero, cualesquiera que sean las coordenadas $\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n$ de g, con tal de que dos cualesquiera de éstas no sean iguales.

Actualmente, pudiéndose resolver las ecuaciones (25) con respecto á las *unidades principales* $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$, dan

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = \alpha_{11}g + \alpha_{12}g^2 + \ldots\ldots + \alpha_{1n}g^n, \\ e_2 = \alpha_{21}g + \alpha_{22}g^2 + \ldots\ldots + \alpha_{2n}g_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n = \alpha_{n1}g + \alpha_{n2}g^2 + \ldots\ldots + \alpha_{nn}g_n, \end{array}\right\}, \qquad (25)$$

siendo α_{ij} cantidades reales.

Formemos todavía g^{n+1}, como hemos formado $g^2, \ldots, g^n$ y sustituyamos después, en su expresión, las unidades $e_1, e_2, \ldots$ por sus valores sacados de las ecuaciones (27), obtendremos una relación que podrá escribirse

$$g^{n+1} + \varepsilon_1 g^n + \varepsilon_2 g^{n-1} + \ldots\ldots + \varepsilon_n g = 0 \qquad (28)$$

(siendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots\ldots$ cantidades reales) ó bien

$$g^n + \varepsilon_1 g^{n-1} + \varepsilon_2 g^{n-2} + \ldots\ldots + \varepsilon_{n-1}g + \varepsilon_n e_0 = 0. \qquad (28')$$

De la ecuación (28′) se deduce igualmente, cualquiera que sea el entero positivo μ,

$$g^{\mu+n} + \varepsilon_1 g^{\mu+n-1} + \varepsilon_2 g^{\mu+n-2} + \ldots\ldots + \varepsilon_n g^{\mu} = 0.$$

Oservaciones. Vemos que:

1.° Según las relaciones (15) y la condición $\Xi \gtrless 0$, las cantidades

$$\frac{g}{g}, \frac{g^2}{g}, \ldots\ldots, \frac{g_n}{g} \quad ó \quad e_0, g, g^2, \ldots\ldots g^{n-1}$$

son linealmente independientes, como las $g, g^2, \ldots\ldots g^n$.

2.° Todo elemento de C puede expresarse en función lineal con coeficientes reales de las n cantidades

$$e_0, g, g^2, \ldots\ldots, g^{n-1}.$$

3.° Recíprocamente toda expresión lineal y homogénea con relación á estas cantidades, pertenece al conjunto.

Luego: *las* n *cantidades*

$$e_0, g^2, \ldots\ldots g^{n-1}$$

forman un sistema de n *unidades principales que pueden sustituirse á las* n *unidades* $e_1, e_2, \ldots e_n$.

15. Recapitulación. Poco tiempo después que Weierstrass publicó la teoría cuyos principios se acaban de exponer, el profesor de la universidad de Brunswick Herr R. Dedekind hizo ver en su memoria *Zur Theorie der aus* n *Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen* (1885) que el nuevo cálculo no difiere esencialmente del cálculo de los sistemas de cantidades que en el Suplemento XI á las *Lecciones sobre la teoría de los números* de Dirichlet desarrolla con el título de *cuerpos finitos.*

Considera el cuadro E de n^2 números cualesquiera

$$E \left\{ \begin{array}{l} e_{11}, e_{21} \ldots\ldots e_{n1} \\ e_{12}, e_{22} \ldots\ldots e_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_{1n}, e_{2n} \ldots\ldots e_{nn} \end{array} \right. \quad \text{y el determinante } e = \left| \begin{array}{l} e_{11}, e_{21} \ldots\ldots e_{n1} \\ e_{21}, e_{22} \ldots\ldots e_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_{1n}, e_{2n} \ldots\ldots e_{nn} \end{array} \right|$$

Dichas cantidades, asociadas por líneas, forman n sistemas de n cantidades del tipo $e_{1s}, \ldots\ldots, e_{ns}$.

Consideremos un sistema de n cantidades $e_1, \ldots\ldots, e_n$, á las que aplicaremos las n sustituciones

$$\left.\begin{array}{l}(e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n \mid e_{11}, e_{21}, \ldots\ldots, e_{n1}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n \mid e_{1n}, e_{2n}, \ldots\ldots, e_{nn}),\end{array}\right\} \qquad (29)$$

Las cantidades $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$ forman una *base*; sus diversos valores corresponden á las n sustituciones (29), de modo que *toda relación*

$$F(e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n) = 0 \qquad (30)$$

formada racionalmente con las n *cantidades de la base y con números reales ó imaginarios determinados, equivale por definición, á las* n *relaciones que se deducen efectuando las sustituciones* (29).

Citaremos el siguiente teorema fundamental:

Toda función racional entera x *de las* n *cantidades de la base se expresa de una sola manera bajo la forma*

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots\ldots + \xi_n e_n, \qquad (31)$$

siendo $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots$ *números (reales ó imaginarios) llamados coordenadas de* x.

Considera Herr Dedekind otro cuadro F de n^2 números f_{11}, $f_{21}, \ldots\ldots$ etc. asociados por columnas como los $e_{11}, \ldots\ldots$ estaban por líneas, siendo

$$f_s = \xi_1^{(s)} e_1 + \xi_2^{(s)} e_2 + \ldots\ldots + \xi_n^{(s)} e_n$$

un elemento del conjunto C; y se determinan análogamente los n elementos $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ por n sustituciones.

El sistema de las cantidades $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ es la *base complementaria*. Se puede cambiar la base $e_1, \ldots\ldots, e_n$ por otra base equivalente, por ejemplo,

$$c_q = e_1 f_{1q} + e_2 f_{2q} + \ldots\ldots + e_n f_{nq}$$

en cuyo caso, si el determinante de las coordenadas no es nulo, constituye una *base normal*, llegándose á expresar un elemento x cualquiera del conjunto por medio de la base normal.

LIBRO SEGUNDO

FUNCIONES DE VARIABLES REALES

CAPÍTULO I

Modos generales de expresar una función

§ 1.º Integral definida

15. *El problema de las cuadraturas* da origen al cálculo integral.

El cálculo integral es el inverso del diferencial. Su objeto es determinar una función y cuya derivada sea otra función dada $f(x)$, es decir, hallar la función que satisfaga á la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \qquad (1)$$

Admitamos que $f(x)$ sea una función continua entre los límites dentro de los que permanezca la variable y que exista una función y que satisfaga á la ecuación (1) adquiriendo el valor y_0 para $x = a$ y el valor Y para $x = b$.

Dividamos el intervalo (a, b) en n intervalos, y sean x_1, $x_2, \ldots\ldots, x_n$ los puntos de subdivisión, siendo $y_1, y_n, \ldots\ldots, y_n$ los valores correspondientes de y.

Si el intervalo $x_1 - a$ es suficientemente pequeño, el cociente $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - a}$ difiere poco de $f(a)$, y tendremos las relaciones aproximadas

$$y_1 - y_0 = (x_1 - a)\, f(a)$$
$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\, f(x_1)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\mathrm{Y} - y_{n-1} = (b - x_{n-1})\, f(x_{n-1}).$$

Sumando miembro á miembro, resulta

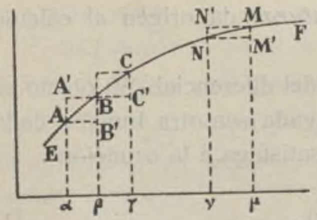
$$Y - y_0 = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})(fx_{n-1}),$$

igualdad aproximada, tanto más, cuanto mayor es el número de intervalos que se van aproximando á cero.

De manera que nos vemos conducidos á *estudiar la suma*

$$(x_1 - a)f(a) + \ldots\ldots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

Para facilitar la adquisición del concepto de integral definida, vamos en este primer examen á valernos de una representación gráfica correspondiente.



Consideremos el área del trapecio mixtilíneo $\alpha A N \nu$.

Descomponiendo esta área en rectángulos inscritos y circunscritos, y llamando $x_0, x_1, \ldots, x_n$ á las abscisas de los puntos $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ á las ordenadas correspondientes, tendremos que las sumas

$$s = (x_1 - x_0)y_0 + (x_2 - x_1)y_1 + \ldots\ldots + (x_n - x_{n-1})y_{n-1}$$
$$S = (x_1 - x_0)y_1 + (x_2 - x_1)y_2 + \ldots\ldots + (x_n - x_{n-1})y_n$$

de los rectángulos inscritos y circunscritos al trapecio mixtilíneo comprenden entre sí el área T de éste, de modo que

$$s < T < s + (S - s);$$

y si se representa por δ el mayor de los intervalos $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1}$, se ve que la diferencia $S - s$ tiende hacia cero con δ, porque dicha diferencia es menor que

$$\delta(y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \ldots\ldots + y_n - y_{n-1})$$

es decir, menor que $\delta(y_n - y_0)$.

Por consiguiente el área T es el límite hacia el que tiende la suma α, cuando cada uno de los intervalos $x_1 - x_0, x_2 - x_1 \ldots, x_n - x_{n-1}$ tiende hacia cero.

Si damos á la base del trapecio mixtilíneo considerado el incremento $\nu\mu$, el trapecio mixtilíneo $\nu NM\mu$ será el incremento del área, que estará comprendido entre los rectángulos $\nu NM'\mu$ y $\nu N'M\mu$, cuyas áreas están expresadas por $\nu N \,.\, \nu\mu$ y $\nu N' . \nu\mu$; tendremos pues

$$N\nu < \frac{\nu NM\mu}{\nu\mu} < N'\nu.$$

Tendiendo $\nu\mu$ hacia cero, en el límite *la derivada del área será la ordenada* $\nu N = f(x)$, correspondiente á la abscisa $O\nu = x$.

La cuestión de las cuadraturas se reduce pues á obtener una función cuya derivada es $f(x)$, problema fundamental del cálculo integral.

Esto sentado, si llamamos x_0 y X las abscisas extremas del trapecio mixtilíneo $\alpha AN\nu$, el límite de la suma

$$\Sigma = (x_1 - x_0)\,y_0 + (x_2 - x_1)\,y_1 + \ldots\ldots + (x - x_{n-1})\,y_{n-1}$$

se representa por

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \tag{1}$$

y se llama la *integral definida* $f(x)\,dx$.

Si x_0 permanece constante y X es variable, la integral (1) se reduce á una función de X cuya derivada es $f(X)$, es decir, una función *primitiva* de $f(x)$.

Si además $\varphi(X)$ expresa una función primitiva cualquiera de X, $\varphi(X) - \varphi(x_0)$ será aquélla de las funciones primitivas que se anula para $X = x_0$; y como la integral (1) representa esta misma función primitiva, se obtiene la fórmula

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0). \tag{2}$$

No estamos por ahora en el caso de obtener las integrales de cada función diferencial. Este problema es objeto del cálculo integral. Nos bastará, por ejemplo, decir que ya conocemos algunas integrales, puesto que siendo

$$mx^{m-1}\,dx, \quad \frac{dx}{x}, \quad \cos x\,dx, \quad \text{etc.}$$

las diferenciales de x^m, lx, sen x, etc., estas funciones serán las integrales de aquéllas.

16. Diferenciación bajo el signo $\int$. Sea $\varphi'(x) = f(x)$. Tendremos que la integral general de $f(x)\,dx$ será $\varphi(x) + C$, siendo C una constante arbitraria, y además que

$$u = \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a). \qquad (1)$$

La integral definida es función de sus límites a y b, y siendo

$$du = \frac{\partial u}{\partial a}\,da + \frac{\partial u}{\partial b}\,db$$

la expresión de su diferencial total, así como las derivadas parciales de (1),

$$\frac{\partial u}{\partial a} = -\varphi'(a) = -f(a), \quad \frac{\partial u}{\partial b} = \varphi'(b) = f(b),$$

resultará que

$$du = -f(a)da + f(b)db. \qquad (2)$$

17. Diferenciación con respecto á un parámetro. Sea

$$u = \int_a^b f(x, t)\,dx.$$

Si los límites a y b son independientes del parámetro t, se obtiene:

$$u + \Delta u = \int_a^b f(x, t + \Delta t)\,dx,$$

$$\Delta u = \int_a^b f(x, t + \Delta t)\,dx - \int_a^b f(x, t)\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)]\,dx;$$

luego

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \int_a^b \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}\, dx, \qquad \frac{du}{dt} = \int_a^b \frac{df(x, t)}{dt}\, dx.$$

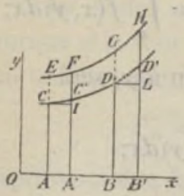
Si a y b dependen del parámetro t, resulta que siendo

$$\frac{\partial u}{\partial a} = -f(a, t), \quad \frac{\partial u}{\partial b} = f(b, t), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dx,$$

la diferencial total será

$$du = -f(a, t)da + f(b, t) + dt \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dx. \qquad (3)$$

18. Interpretación geométrica. Sea CD la curva cuya ecuación es $y = f(x, t)$.



Si $OA = a$, $OB = b$ tendremos

$$\int_a^b f(x, t)dt = \text{área ABDC}.$$

A un incremento dt de t, corresponden incrementos da y db de a y de b, cambiándose la curva CD en otra infinitamente próxima EH, y se tiene

$$u + du = \int_{a+da}^{b+db} f(x, t + dt)\, dx = \text{área A'GHB'}.$$

Pero área A'GHB' = AEFB — AEGA' + BFHB';

luego

du = A'GHB' – ACDB = (AEFB – ACDB) — AEGA' + BFHB',

y despreciando infinitamente pequeños de segundo orden,

$$du = \int_a^b f(x, t + dt)\, dx - \int_a^b f(x, t)\, dx - f(a, t)da + f(b, t)db$$

y en fin

$$du = dt \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dx - f(a, t)da + f(b, t)db.$$

19. Integración bajo el signo $\int$. Multiplicando por dy la integral definida $\int_a^b f(x, y)\,dx$ é integrando enseguida con respecto á y, se tiene que

$$\int dy \int_a^b f(x, y)\,dx,$$

y podremos obtener que

$$\int dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int f(x, y)\,dy,$$

En efecto, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b [dx\textstyle\int f(x,y)\,dy] = \displaystyle\int_a^b dx\,\frac{\partial \int f(x,y)}{\partial y}\,dy = \int_a^b f(x,y)\,dx;$$

luego, integrando los dos miembros con relación á y, será

$$\int_a^b dx \int f(x, y)\,dy = \int dy \int_a^b f(x, y)\,dx;$$

y tomando por límites de y las constantes c y d, resulta que

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx.$$

§ 2.º Convergencia uniforme

Sea la serie

$$u_1(x),\quad u_2(x),\ \ldots\ldots,\quad u_n(x),\ \ldots\ldots \tag{1}$$

cuyos términos son funciones determinadas de una variable x; y supongamos que esta serie sea convergente, cuando x toma un valor cualquiera comprendido en un intervalo (a, b) finito ó infinito. Resulta de la definición de la convergencia, que se puede hallar un número positivo N tal, que para $n \geqq N$ se tenga

$$| R_n(x) | < \varepsilon$$

siendo ε una cantidad dada previamente, y designando $R_n(x)$ el resto

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots\ldots \quad (1)$$

correspondiente á la suma de los n primeros términos.

El número N depende, en general, de ε y del valor x elegido en el intervalo (a, b).

Cuando N no depende mas que de ε, es decir, es el mismo para todos los valores de x comprendidos en el intervalo (a, b), se dice que la serie es *uniformemente convergente*, *equiconvergente ó convergente en igual grado* en este intervalo.

Las series uniformemente convergentes son interesantes, porque si la serie (1), por ejemplo, es uniformemente convergente en un intervalo (a, b), la suma

$$S_N = u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots + u_N(x)$$

representa á la función $f(x)$ definida por la serie con una aproximación cuyo límite superior ε es el mismo para todos los valores de x comprendidos en el intervalo (a, b), pudiéndose por consiguiente, por el estudio de la serie, reconocer la marcha de la función con cierta aproximación.

Esta ventaja no se obtiene cuando la serie sólo es convergente sin serlo uniformemente. En este caso, según el valor de x, hay que tomar un número de términos á veces pequeño y á veces considerable.

Aunque es difícil muchas veces el reconocer si una serie es uniformemente convergente, puede con frecuencia emplearse con éxito la siguiente regla:

Una serie de términos variables es uniformemente convergente en un intervalo dado, si sus términos son menores en valor absoluto que los términos correspondientes de una serie de términos positivos, convergente y numérica.

En efecto, si designamos por R_n y ρ_n los restos correspondientes de las dos series, tendremos

$$|R_n| < \rho_n.$$

Pero, puesto que la serie de comparación es numérica y convergente, se puede, dado ε, determinar un número N independiente de x, de modo que se tenga $\rho_n < \varepsilon$ y por tanto $|R_n| < \varepsilon$.

Ejemplo 1.º Sea la serie

$$\alpha_1 \operatorname{sen} \beta_1 x, \quad \alpha_2 \operatorname{sen} \beta_2 x, \ldots\ldots$$

en la que $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots$ representan cantidades cualesquiera, mientras que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ son cantidades positivas que forman una serie convergente. La serie propuesta es convergente en un intervalo cualquiera, porque sus términos son respectivamente inferiores ó iguales á los de la serie convergente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$

Ejemplo 2.º La serie

$$1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots$$

es uniformemente convergente para los valores de x cuyo módulo es menor $\alpha < 1$; porque para que sea

$$|x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots\ldots| < \varepsilon,$$

basta hacer

$$\left|\frac{x^{n+1}}{1 - x}\right| < \varepsilon,$$

y se satisface á esta condición, haciendo

$$\frac{\alpha^{n+1}}{1 - \alpha} < \varepsilon \quad \text{ó} \quad n + 1 < \frac{l(\varepsilon - \alpha\varepsilon)}{l\alpha}$$

lo que determina para n un valor independiente de x.

20. Que una serie puede ser convergente sin serlo uniformemente, lo pone de manifiesto el siguiente ejemplo: La serie

$$x(e^{-x} - 2e^{-2x}) + x(2e^{-2x} - 3e^{-3x}) + \ldots\ldots$$
$$+ x(ne^{-nx} - (n+1)e^{(n+1)x}) + \ldots\ldots$$

es convergente para cualquier valor de x, porque la suma de sus n primeros términos es

$$xe^{-x} - (n+1)xe^{-(n+1)x},$$

que para $n = \infty$ tiene por límite xe^{-x}; pero no es uniformemente convergente para los valores próximos á cero, porque para satisfacer á la condición

$$xe^{-x} - (n+1)xe^{-(n+1)x} < \varepsilon,$$

sería preciso que se verificara que

$$(n+1)e^{-(n+1)} > e^{-x} - \frac{\varepsilon}{x}$$

y que los valores de n susceptibles de satisfacer á esta desigualdad dependiesen de x y aumentasen, al tender x hacia cero.

Ejemplo de una serie que es función continua de la variable sin ser una serie uniformemente convergente. Sea

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}\right]$$

La suma de la serie es la función continua $\dfrac{x}{1+x^2}$.

Se tiene que $\qquad R_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

Tomándose n tan grande como se quiera, si x se halla comprendida en un intervalo que contenga el punto cero, se podrá siempre tomar $x = \dfrac{1}{n}$, y entonces será $R_n = \dfrac{1}{2}$; luego no se podrá jamás hallar un valor de n que para *todos los valores de* x sea siempre $R_n < \sigma$, siendo σ tan pequeña como se quiera.

Otro ejemplo nos ofrece la serie

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(2nxe^{-nx^2} - (2n+2)xe^{-(n+1)x^2}\right).$$

La suma de esta serie es $2xe^{-x^2}$, y esta serie representa una función continua de x, sin ser una serie uniformemente convergente, porque la expresión de R_n es

$$2(n+1)xe^{-(n+1)x^2}$$

y para $x = \frac{1}{n+1}$ el limite es 2, cuando $n = \infty$; de manera que la serie no es uniformemente convergente en un intervalo que comprende el punto cero.

Sea
$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)} =$$
$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x}\right].$$

La suma de dicha serie es

$$\lim_{n=\infty}\left(1 - \frac{1}{1+nx}\right).$$

Para x distinta de cero este límite es 1 y para $x = 0$ es cero. Luego la serie representa una función continua en todo punto x distinto de cero (siendo una función constante, discontinua en $x = 0$. El resto es

$$\frac{1}{1+nx}.$$

Si suponemos que x varía en un intervalo que no comprenda el punto cero (supongamos que sea siempre positiva y mayor que a), se tendrá

$$\frac{1}{1+nx} < \frac{1}{1+na},$$

y determinando n de modo que

$$\frac{1}{1+na} < \sigma,$$

se tiene para $x > a$ $\quad R_n(x) < \sigma$

y la serie es uniformemente convergente. Pero si $a = 0$, haciéndose n grande, se podrá hacer x suficientemente pequeña para que el producto nx sea tan pequeño como se quiera y $\frac{1}{1+nx}$ sea mayor que cualquier cantidad dada, y la serie no será uniformemente convergente en un intervalo que comprenda ó tenga en un extremo el punto cero.

De lo expuesto resulta inmediatamente que una condición *suficiente* pero *no necesaria* para la convergencia uniforme de una serie, es que la serie de los valores máximos que sus diversos términos adquieran en el intervalo dentro del que varían las variables, sea una serie convergente.

21. TEOREMA. *Si los términos de una serie* $u_1, u_2, \ldots$ *son funciones continuas de una variable x en un intervalo* (a, b) *en el que la serie es uniformemente convergente, la suma de la serie es una función* $f(x)$ *continua en el mismo intervalo.*

En efecto, escribamos

$$f(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + R_n$$

Por hipótesis se puede elegir n suficientemente grande para que se tenga

$$|R_n| < \varepsilon,$$

siendo x cualquiera en el intervalo (a, b) y ε una cantidad asignada previamente, tan pequeña como se quiera.

Se tendrá entonces para valores cualesquiera de x y de x' en el intervalo considerado,

$$f(x) - f(x') = (u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n) - (u_1 + \ldots + u_n) + R'_n - R_n$$

y

$$R'_n - R_n < 2\varepsilon.$$

Pero la función $u_1 + \ldots + u_n$, suma de un número limitado de términos continuos, es continua; luego se puede tomar x' bastante próxima á x, para que la diferencia de las cantidades comprendidas en los paréntesis sea menor en valor absoluto que ε; luego, para x' bastante próxima de x,

$$f(x') - f(x) < 3\varepsilon.$$

22. Integral. Siendo α y β dos números comprendidos en el intervalo (a, b), se tiene que

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta u_1 dx + \ldots + \int_\alpha^\beta u_n dx + \int_\alpha^\beta \mathrm{R}_n(x)dx.$$

Pero si se determina n como se ha indicado, representando ε_1 un número tan pequeño como se quiera, se tendrá

$$\left|\int_\alpha^\beta \mathrm{R}_n(x)dx\right| < \varepsilon_1(\beta - \alpha);$$

siendo ε_1 tan pequeño como se quiera; luego la serie

$$\int_\alpha^\beta u_1 dx + \int_\alpha^\beta u_2 dx + \ldots\ldots$$

es convergente y su suma es $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Así: *Se obtendrá la integral de la serie, integrando cada término entre los dos mismos límites y efectuando la suma de las integrales así obtenidas.*

23. Derivación. Supongamos que las funciones $u_1, \ldots, u_n \ldots$ tengan derivadas contínuas.

No siendo necesariamente convergente la serie de las derivadas de $f(x) = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n \ldots\ldots$

$$\frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots\ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots\ldots$$

ésta no representará siempre la derivada de $f(x)$; pero *si dicha serie es uniformemente convergente en un intervalo* (a, b), *representará en éste la derivada* de $f(x)$.

En efecto, suponiendo la serie $u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots$ uniformemente convergente, hagamos

$$\varphi(x) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots\ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots\ldots,$$

é integrando entre α y x, y designando por λ_n el valor que adquiere $u_n(x)$ para $x = \alpha$, tendremos

$$\int_{\alpha}^{x} \varphi(x)\, dx = (u_1 - \lambda_1) + (u_2 - \lambda_2) + \ldots\ldots$$

Pero puesto que las series $u_1, u_2, \ldots\ldots$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots$ son absolutamente convergentes, se puede sustituir el segundo miembro por

$$(u_1 + u_2 + \ldots\ldots) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots) = f(x) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots)$$

por consiguiente $\varphi(x) = f'(x)$, puesto que las λ son constantes.

§ 3.º SERIES ENTERAS

24. Las series de funciones más importantes son las *series enteras,* es decir, las series de la forma

$$u_0,\ u_1 x,\ \ldots\ldots,\ u_n x^n,\ \ldots\ldots \tag{1}$$

expresando x una variable cualquiera y $u_0, u_1, \ldots\ldots, u_n$, coeficientes constantes, cuyos módulos representaremos por a_0, $a_1, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$

PRIMER TEOREMA DE ABEL. *Si para un valor de la variable* x *cuyo módulo es* r', *los módulos de la serie* (1) *son inferiores á un número positivo y finito* M, *la serie será convergente para todo valor de* x *cuyo módulo es menor que* r'.

En efecto, demos á x un valor cuyo módulo r sea menor que r', y multipliquemos respectivamente por los números

$$a_0,\ a_1 r',\ \ldots\ldots,\ a_n r'^n,\ \ldots\ldots \tag{2}$$

los términos de la serie convergente

$$1,\ \frac{r}{r'},\ \frac{r^2}{r'^2},\ \ldots\ldots$$

Siendo, por hipótesis, los números (2) inferiores á M, obtendremos una nueva serie convergente

$$a_0,\ a_1 r,\ a_2 r^2,\ \ldots\ldots,\ a_n r^n,\ \ldots\ldots;$$

luego la serie propuesta es absolutamente convergente para todo valor de x cuyo módulo r es inferior á r'. Siendo

$$a_n r'^n < M,$$

podemos decir que: *Si una serie es convergente para un valor de* x *cuyo módulo es* ρ, *será también convergente para todo valor de* x *cuyo módulo es inferior á* ρ, y por consiguiente:

Si una serie entera es divergente para un valor x_1 *de* x, *es divergente para todo valor* x_2 *cuyo módulo es superior al de* x_1, pues si fuera convergente para $x = x_2$, lo sería para $x = x_1$, cuyo módulo es inferior al de x_2.

Si imaginamos que x varíe de modo que su módulo vaya creciendo, mientras permanecen finitos los módulos correspondientes de los diversos términos de la serie, estos módulos tienen, en general un límite L, y entonces la serie es convergente para todo valor de x cuyo módulo es inferior á L. A este número positivo se le llama *radio de convergencia*.

Ejemplos: 1.º La serie

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{n} + \ldots\ldots$$

ofrece un caso en que el radio de convergencia no es nulo ni infinito, éste es igual á la unidad.

La serie es convergente para $x = -1$ y divergente para $x = 1$.

La serie

$$1 + x + 4x^2 + \ldots\ldots + n^n x^n + \ldots\ldots$$

tiene cero por radio de convergencia, y es divergente para todos los valores de x.

2.º Teorema de Abel. *Si una serie entera es convergente para un valor* X *de la variable* x, *es uniformemente convergente para todos los valores de* x *que satisfacen á las desigualdades*

$$-1 < \frac{X}{x} \leqq 1.$$

Lema. Sean n cantidades $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$, *y n factores positivos* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$, *tales que cada uno no sea mayor que el anterior.*

Si se designa por ε *la expresión*

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_n u_n \tag{3}$$

y por s y S la menor y la mayor de las sumas

$$s_1 = u_1,\ \ s_2 = u_1 + u_2,\ \ldots\ldots\ \ s_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n,$$

se tendrá

$$\varepsilon_1 s \leqq \Sigma \leqq \varepsilon_1 S. \tag{4}$$

En efecto, se puede escribir

$$u_1 = s_1,\ \ u_2 = s_2 - s_1,\ \ldots\ldots,\ u_n = s_n - s_{n-1}$$

Por consiguiente

$$\Sigma = \varepsilon_1 s_1 + \varepsilon_2(s_2 - s_1) + \ldots\ldots + \varepsilon_n(s_n - s_{n-1}),$$

ó $$\Sigma = \varepsilon(_1 - \varepsilon_2) s_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) s_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_n s_n.$$

Pero por hipótesis los coeficientes de $s_1\ s_2, , \ldots\ldots, s_n$ son positivos ó nulos. Si pues en lugar de $s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n$ se sustituye sucesivamente s y S, se obtendrán un límite inferior $\varepsilon_1 s$ y un límite superior ε_1S de Σ, lo que demuestra las desigualdades del enunciado.

Para demostrar el teorema, observaremos que en la serie

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots\ldots + a_n X^n + \ldots\ldots$$

supuesta convergente, se puede hacer n bastante grande para que sea inferior en valor absoluto á ξ cada una de las sumas

$$a_n X^n$$
$$a_n X^n + a_{n+1} X^{n+1}$$
$$a_n X^n + a_{n+1} X^{n+1} + a_{n+2} X^{n+2}.$$

Determinado así el número n, demos en la serie (1) á la variable x un valor comprendido entre cero y X, que puede ser igual al uno ú otro de estos dos límites. La suma S de los términos, que en la serie (1) siguen al n^{simo}, puede escribirse

$$a_n X^n \left(\frac{x}{X}\right)^n + a_{n+1} X^{n+1} \left(\frac{x}{X}\right)^{n+1} + \ldots\ldots$$

siendo las cantidades

$$\left(\frac{x}{X}\right)^n, \left(\frac{x}{X}\right)^{n+1}, \ldots\ldots, \left(\frac{x}{X}\right)^{n+p},$$

positivas y cada una menor que la precedente.

Luego, en virtud del lema, la misma serie S es, en valor absoluto, inferior á $\varepsilon\left(\frac{x}{X}\right)^n$ y *á fortiori* á ε.

Luego existe un número n valedero para todo valor de x comprendido entre 0 y X inclusivamente, y tal que el resto $R_n(x)$ de la serie (1) sea inferior en valor absoluto á ε, lo que demuestra el segundo teorema de Abel.

Combinando este teorema con el del número 21, resulta que si una serie entera (1) es convergente para un valor X de la variable x, su suma es una función $\varphi(x)$ continua en el intervalo (0, X), comprendidos los límites de este intervalo. Si pues x tiende hacia X por valores inferiores en valor absoluto á $|X|$, el límite de $\varphi(x)$ es $\varphi(X)$.

Por ejemplo, sea

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots = \log(1 + x);$$

para x comprendido entre 0 y 1, la suma de la serie convergente $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\ldots$ es log 2.

25. Aplicaciones á la diferenciación é integración.

1.º Sea R el radio de convergencia de

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_n x_n + \ldots\ldots \qquad (5)$$

En todo intervalo (α, β) comprendido entre $-R$ y $+R$ la serie es uniformemente convergente y el teorema 22 aplicable.

Si elegimos, por ejemplo, el intervalo (o, x), siendo $x < \mathrm{R}$ en valor absoluto, se tiene

$$\int_0^x f(x)dx = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \ldots\ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots\ldots \qquad (6)$$

2.º Sea ahora la serie

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots\ldots + na_n x^{n-1} + \ldots\ldots \qquad (7)$$

cuyos términos son las derivadas de la serie (5).

Supongamos que X es un número cuyo módulo está comprendido entre $|x|$ y R, siendo R el radio de convergencia de la serie (5), suponiendo también que X y x tengan igual signo. La serie

$$1 + 2\left(\frac{x}{\mathrm{X}}\right) + 3\left(\frac{x}{\mathrm{X}}\right)^2 + \ldots\ldots \qquad (8)$$

es convergente, porque el límite de la relación de un término al precedente es $\frac{x}{\mathrm{X}}$, menor que 1.

Pero la serie (8) tiene todos sus términos positivos, y si se les multiplica respectivamente por los números

$$a_1,\ a_2\mathrm{X},\ a_3\mathrm{X}^2, \ldots\ldots \qquad (9)$$

se obtiene la serie (7); luego para probar la convergencia, basta demostrar que los multiplicadores (9) permanecen finitos, lo que se ve inmediatamente, por ser $a_n \mathrm{X}^{n-1}$ el producto del número fijo $\frac{1}{\mathrm{X}}$ por $a_n \mathrm{X}_n$, que es el término general de una serie convergente.

La serie (7) es pues absolutamente convergente en el intervalo ($-$ R, $+$ R) y, por consiguiente, uniformemente convergente en todo intervalo (α, β) comprendido en el anterior.

Luego (23) la serie (5) representa la derivada $f'(x)$. Así:

Una serie entera define, en el intervalo ($-$ R, R), *siendo* R *el radio de convergencia, una función continua cuya derivada es la serie formada por las derivadas de sus diversos términos.*

26. Derivadas sucesivas de una serie entera. Sea la serie entera

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots + a_n x^n + \dots\dots$$

convergente en el intervalo $(-R, +R)$. Su derivada

$$a_1 + 2a_2 x + \dots\dots + n a_n x^{n-1} + \dots\dots$$

es convergente en el mismo intervalo, pues si $X < R' < R$, la serie auxiliar

$$\frac{1}{R'} + \frac{2}{R'}\frac{X}{R'} + \frac{3}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^2 + \dots\dots + \frac{n}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^{n-1} + \dots\dots$$

es convergente, porque el límite de la relación de un término al precedente es un número $\frac{X}{R'} < 1$. Multiplicando los términos de esta serie respectivamente por $A_1 R'$, $A_2 R'^2$, ... $A_n R'^n$, ..., menores todos que un número fijo, porque $R' < R$, la nueva serie obtenida

$$A_1 + 2A_2 X + \dots\dots + n A_n X^{n-1} + \dots\dots$$

es convergente. Se demuestra de igual manera que la serie es divergente si $X > R$.

La suma de la serie $a_1 + 2a_2 x + \dots\dots$ es una función continua de la variable en el mismo intervalo que la serie primitiva. Y por ser uniformemente convergente en todo intervalo $(-R, +R')$, donde $R' < R$, representa la derivada de $f(x)$ en este intervalo.

Pero, pudiéndose tomar R' tan próximo á R como se quiera, resulta que la función $f(x)$ admite para todo valor de x comprendido entre $-R$ y $+R$, una derivada representada por la serie obtenida derivando

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots\dots + n a_n x^{n-1} + \dots\dots \quad (10)$$

Repitiendo el razonamiento, deduciremos que $f(x)$ admite una derivada segunda

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots\dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots\dots$$

y así sucesivamente. Por consiguiente la función $f(x)$ admite en el intervalo $(-\mathrm{R}, +\mathrm{R})$ una función ilimitada de derivadas, representadas por las series obtenidas diferenciando

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \ldots\ldots n a_n + 2 \cdot 3 \ldots\ldots n(n+1) a_{n+1} x + \ldots\ldots \quad (11)$$

Si se hace $x = 0$, resulta

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

de manera que el desarrollo $f(x)$ es idéntico á la fórmula de Mac Laurin.

27. Extensión de la fórmula de Taylor. Sea $f(x)$ la suma de una serie entera, convergente en el intervalo $(-\mathrm{R}, +\mathrm{R})$, x_0 un punto de este intervalo tal, que $|x_0| + |h| < \mathrm{R}$. La serie

$$a_0 + a_1 (x_0 + h) + a_2 (x_0 + h)^2 + \ldots\ldots + a_n (x_0 + h)^n + \ldots\ldots$$

cuya suma es $f(x_0 + h)$, puede sustituirse por otra serie á doble entrada, que se obtiene desarrollando las diversas potencias de $x_0 + h$ y escribiendo en una misma línea los términos de igual grado en h,

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots\ldots + a_n x_0^n + \ldots\ldots \\ \quad + a_1 h + 2 a_2 x_0 h + \ldots\ldots + n a_n x_0^{n-1} h + \ldots\ldots \\ \qquad\qquad + a_2 h^2 + \ldots\ldots + \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_n x_0^{n-2} h^2 + \ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (12)$$

Esta serie es absolutamente convergente.

En efecto, si se sustituye cada término por su valor absoluto, se tendrá la nueva serie á doble entrada con términos positivos

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 |x_0| + \mathrm{A}_2 |x_0|^2 + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n |x_0|^n + \ldots\ldots \\ + \mathrm{A}_1 |h| + 2\mathrm{A}_2 |x_0|\,|h| + \ldots\ldots + n\mathrm{A}_n |x_0|^{n-1} |h| + \ldots\ldots \\ \qquad\qquad + \mathrm{A}_2 |h|^2 + \ldots\ldots + \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \mathrm{A}_n |x_0|^{n-2} |h|^2 + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (13)$$

Si se suman los elementos de este cuadro por columnas verticales, se obtiene la serie

$$A_0 + A_1 [|x_0| + |h|] + \ldots\ldots + A_n [|x_0| + |h|]^n + \ldots\ldots$$

que es convergente, por ser $|x_0| + |h| < R$, por hipótesis. Puede pues, efectuarse la suma, sea por líneas sea por columnas. Efectuándose por columnas, se obtiene $f(x_0 + h)$, efectuándose por líneas, el resultado queda ordenado según las potencias de h, siendo los coeficientes de h, h^2, ... respectivamente $f'(x_0)$, $\dfrac{f''(x_0)}{1 . 2}$, ...; y podremos escribir suponiendo $|h| < R - |x_0|$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0) + \ldots\ldots \quad (14)$$

La fórmula (14) se aplica desde luego en el intervalo $(x_0 - R + |x_0|, x_0 + R - |x_0|)$; pero puede conseguirse que el segundo miembro de (14) sea convergente en un intervalo mayor.

Por ejemplo el desarrollo de $(1 + x)^m$, siende m entero y positivo, es válido desde $x = -1$ hasta $x = +1$. Sea x_0 un valor comprendido en este intervalo. Podremos escribir

$$(1 + x)^m = (1 + x_0 + x - x_0)^m = (1 + x_0)^m [1 + z]^m$$

$$\text{donde} \quad z = \frac{x - x_0}{1 + x_0}$$

y desarrollar $(1 + z)^m$ según las potencias de z.

Este desarrollo será válido para $|z| < 1$, es decir, para los valores de x comprendidos entre -1 y $1 + 2x_0$.

Si x_0 es positivo, el nuevo intervalo es mayor que el anterior, y por consiguiente, la nueva fórmula permitirá calcular el valor de la función para valores de la variable exteriores al intervalo primitivo.

28. Funciones mayorantes. (*). Lo expuesto permite establecer íntima analogía entre los polinomios y las series enteras. Así, dadas varias series enteras, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$, siendo $(-r, +r)$ la menor de las regiones de convergencia, y $|x| < r$, estas series son absolutamente convergentes, y se las puede combinar por adición y multiplicación, como los polinomios. Análogamente, todo polinomio entero en $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ puede desarrollarse en una serie entera convergente en el mismo intervalo.

Para extender estas propiedades, consideremos una serie entera

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

y sea $\varphi(x)$ otra serie entera

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots + \alpha_n x^n + \ldots\ldots$$

cuyos coeficientes α_i son positivos. Se dice que la función $\varphi(x)$ es *mayorante* respecto á la función $f(x)$, si cualquiera de los coeficientes α_n es superior al valor absoluto del coeficiente correspondiente de $f(x)$, de modo que

$$|a_0| < \alpha, \quad |a_1| < \alpha_1, \ldots\ldots, \quad |a_n| < \alpha_n, \ldots\ldots$$

La utilidad de las funciones mayorantes estriba en la propiedad siguiente:

Sea $P_n(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n)$ un polinomio que depende de los $n + 1$ primeros coeficientes de $f(x)$, que son reales y positivos. Si se sustituye en el polinomio a_0, a_1, ..., a_n por los coeficientes correspondientes de la función mayorante $\varphi(x)$, se

(*) El concepto de *función mayorante*, de que hace importantes aplicaciones M. Goursat en su *Cours d' Analyse mathématique* t. I, fué introducido por M. Meray en sus *Leçons nouvelles sur l' Analyse infinitesimal* (première partie) pág. 265. Dice: *Dada una función olótropa* f(x, y.....) *de variables cualesquiera, llamamos* FUNCIÓN MAYORANTE *de esta función en* x_0, y_0, ... *á toda función* φ(x, y, ...) *de las mismas variables con la propiedad de que para* $x = x_0$, $y = y_0$, ..., *su valor y los de sus derivadas de todos los órdenes sean reales, positivos y superiores á los módulos de los valores correspondientes de* f(x, y, ...) *y de sus derivadas semejantes.*

tendrá evidentemente

$$|P(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n) \leqq P(\alpha_0, \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n).$$

Por ejemplo, si $\varphi(x)$ es una función mayorante para $f(x)$, la serie que representa á $[\varphi(x)]^2$ será mayorante para $[f(x)]^2, \ldots$ y, en general, $[\varphi(x)]^n$ será mayorante respecto á $[f(x)]^n$. Igualmente si φ y φ_1 son funciones mayorantes respecto á f y f_1, el producto $\varphi\varphi_1$ será mayorante respecto al producto ff_1.

Dada una serie entera (fx) convergente en el intervalo $(-R, +R)$, la investigación de una función mayorante es un problema indeterminado; pero interesa especialmente elegir la función mayorante más simple que sea posible.

Sea r un número positivo inferior á R, pero tan próximo á R como se quiera. Siendo la serie absolutamente convergente, para $x = r$, si M es el límite superior del valor absoluto de los términos de dicha serie, se tiene para cualquier valor de n,

$$A_n r^n \leqq M \quad \text{ó} \quad |a_n| = A_n \leqq \frac{M}{r^n}.$$

La serie cuyo término general es $M\dfrac{x^n}{r^n}$, ó

$$M + M\frac{x}{r} + \ldots\ldots + \frac{Mx^n}{r^n} + \ldots\ldots = \frac{M}{1 - \dfrac{x}{r}}$$

es una función mayorante de $f(x)$. Cuando $f(x)$ no tiene término constante, se toma por función mayorante

$$\frac{M}{1 - \dfrac{x}{r}} - M.$$

Se puede tomar para r un número cualquiera $<$ R, y es claro que el número correspondiente M disminuye en general con x, pero nunca puede ser inferior á A_0, si A_0 no es nulo. Cuando esto sucede, se puede siempre hallar un número positivo $\rho < \mathrm{R}$ tal, que la función $\dfrac{\mathrm{A}_0}{1 - \dfrac{x}{\rho}}$ sea mayorante para $f(x)$.

En efecto, sea

$$\mathrm{M} + \mathrm{M}\frac{x}{r} + \mathrm{M}\frac{x^2}{r^2} + \ldots\ldots + \mathrm{M}\frac{x^n}{r^n} + \ldots\ldots$$

donde $\mathrm{M} > \mathrm{A}_0$, una primera mayorante. Tomemos un número $\rho < r\dfrac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{M}}$, y podremos escribir, suponiendo $n \geqq 1$,

$$|a_n \rho^n| = |a_n r^n| \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n < \mathrm{M}\frac{\rho}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1},$$

y por consiguiente $|a_n \rho^n| < \mathrm{A}_0$; por otra parte se tiene $|a_0| = \mathrm{A}_0$. La serie

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_0\frac{x}{\rho} + \mathrm{A}_0\frac{x^2}{\rho^2} + \ldots\ldots + \mathrm{A}_0\frac{x^n}{\rho^n} + \ldots\ldots$$

es pues mayorante.

El conocimiento de una progresión geométrica decreciente permite conocer la aproximación obtenida, cuando se sustituye la suma $f(x)$ de la serie por sus $n + 1$ primeros términos. Si la serie $\dfrac{\mathrm{M}}{1 - \dfrac{x}{r}}$ es mayorante para $f(x)$, el resto de la serie propuesta

$$a_{n+1}\,x^{n+1} + a_{n+2}\,x^{n+2} + \ldots\ldots$$

es menor en valor absoluto que el resto correspondiente de la serie

$$\mathrm{M}\left(\frac{x^{n+1}}{r^{n+1}} + \frac{x^{n+2}}{r^{n+2}} + \ldots\ldots\right) \quad \text{ó que} \quad \mathrm{M}\frac{\left(\dfrac{x}{r}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{x}{r}}$$

29. Sustitución de una serie por otra. Sea

$$z = f(y) = a_0 + a_1 y + \ldots\ldots + a_n y^n + \ldots\ldots \qquad (15)$$

una serie ordenada según las potencias de una variable y, y convergente cuando $|y| < \mathrm{R}$. Sea además

$$y = \varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_n x^n + \ldots\ldots \qquad (16)$$

otra serie convergente en el intervalo $(-r, +r)$. Si sustituimos en la serie (15) y, y^2, ... por sus desarrollos en serie según las potencias de x deducidos de la fórmula (16), obtendremos un cuadro de doble entrada

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 \qquad\qquad + \ldots\ldots + a_n b_0^n + \ldots\ldots \\ \quad + a_1 b_1 x + 2a_2 b_0 b_1 x \quad + \ldots\ldots + n a_n b_0^{n-1} b_1 x + \ldots\ldots \\ \quad + a_1 b_2 x^2 + a_2 (b_1^2 + 2 b_0 b_2) x^2 + \ldots\ldots \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (17)$$

Para que este cuadro á doble entrada sea absolutamente convergente, es necesario desde luego que la primera línea

$$a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \ldots\ldots$$

sea absolutamente convergente, ó que $|b_0| < \mathrm{R}$.

Esta condición es además suficiente, porque si queda satisfecha, se puede tomar por función mayorante de $\varphi(x)$ una expresión de la forma $\dfrac{m}{1 - \dfrac{x}{\rho}}$ en la que m es un número positivo cualquiera mayor que $|b_0|$ y en la que $\rho < r$. Puede pues suponerse que se haya tomado $m < \mathrm{R}$. Sea R' un número positivo comprendido entre m y R; la función $f(y)$ admite por función mayorante una expresión de la forma

$$\frac{\mathrm{M}}{1 - \dfrac{y}{\mathrm{R}}} = \mathrm{M} + \mathrm{M}\frac{y}{\mathrm{R}'} + \mathrm{M}\frac{y^2}{\mathrm{R}'^2} + \ldots\ldots$$

Si en esta se sustituye y por $\dfrac{m}{1-\dfrac{x}{\rho}}$, y se desarrollan las diversas potencias de y según las potencias crecientes de x, por la fórmula del binomio, se obtendrá un nuevo cuadro á doble entrada

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{M}+\mathrm{M}\left(\dfrac{m}{\mathrm{R}'}\right)+\ldots\ldots+\mathrm{M}\left(\dfrac{m}{\mathrm{R}'}\right)^n+\ldots\ldots \\ \quad+\mathrm{M}\dfrac{m}{\mathrm{R}'}\dfrac{x}{\rho}+\ldots\ldots+n\mathrm{M}\left(\dfrac{m}{\mathrm{R}'}\right)^n\dfrac{x}{\rho}+\ldots\ldots \\ \quad+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (18)$$

cuyos coeficientes son todos positivos y mayores que los módulos de los coeficientes correspondientes del cuadro (17); porque un coeficiente cualquiera del cuadro (17) se deduce de los coeficientes a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ... por adiciones y multiplicaciones, tan sólo. Si pues la serie (18) á doble entrada es absolutamente convergente, también lo será la (17). Y si en la serie (18) se sustituye x por su valor absoluto, será preciso, para que el cuadro (17) sea convergente, que las series obtenidas tomando los términos de una misma columna sean convergentes, es decir, que se tenga $|x| < \rho$. Cuando esta condición se cumple, la suma de los términos de la $(n+1)^{\text{sima}}$ columna es igual á

$$\mathrm{M}\left[\frac{m}{\mathrm{R}'\left(1-\dfrac{|x|}{\rho}\right)}\right]^n$$

y será necesario que se tenga también

$$m < \mathrm{R}'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right), \quad \text{es decir,} \quad |x| < \rho\left(1-\frac{m}{\mathrm{R}'}\right). \qquad (19)$$

Siendo consecuencia de esta última relación la precedente $|x| < \rho$, resulta que expresa la condición necesaria y suficiente para que la doble serie (18) sea absolutamente convergente; luego la doble serie (17) será también absolutamente convergente para valores de x que satisfagan á esta condición. Todos estos valores de x hacen convergente á la serie $\varphi(x)$; y el valor correspondiente de y es menor que R′ en valor absoluto, porque de las desigualdades

$$|\varphi(x)| < \frac{m}{1 - \frac{|x|}{\rho}}; \quad \frac{|x|}{\rho} < 1 - \frac{m}{R'},$$

resulta que $|\varphi(x)| < R'$. Si pues se efectúa la suma de la serie (17) por columnas, se obtiene

$$a_0 + a_1\varphi(x) + a_2[\varphi(x)]^2 + \ldots\ldots + a_n[\varphi(x)]^n + \ldots\ldots,$$

es decir, $\qquad f[\varphi(x)].$

Si se suma por líneas horizontales, se obtendrá una serie ordenada según las potencias crecientes de x, y se podrá escribir

$$f[\varphi(x)] = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n + \ldots\ldots, \quad (20)$$

expresándose los coeficientes c_0, c_1, ... por medio de los coeficientes de las dos series, con auxilio de las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} c_0 = a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \ldots\ldots + a_n b_0^n + \ldots\ldots \\ c_1 = a_1 b_1 + 2a_2 b_1 b_0 + \ldots\ldots \qquad + n a_n b_0^{n-1} b_1 + \ldots\ldots \\ c_2 = a_1 b_2 + a^2(b_1^2 + 2b_0 b_2) + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (21)$$

La relación (20) sólo queda establecida para el caso de que los valores de x satisfagan á la desigualdad (19); pero puede hacerse que subsista para un intervalo mayor, lo que exige el estudio de las funciones de una variable imaginaria.

Ejemplo. Cauchy ha demostrado que puede deducirse la fórmula del binomio del desarrollo de log $(1 + x)$. En efecto

$$(1 + x)^m = e^{m \log (1 + x)} = e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$$

haciendo

$$y = m \log (1 + x) = m\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\right),$$

lo que da, sustituyendo el segundo desarrollo en el primero,

$$(1+x)^m = 1 + m\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\right)$$
$$+ \frac{m^2}{1\,.\,2}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots\right)^2 + \ldots\ldots$$

Ordenando el segundo miembro según las potencias de x, se obtiene para coeficiente de x^n un polinomio de grado n en m, $P_n(m)$, que debe anularse para $m = 0, 1, 2, \ldots\ldots n - 1$ y reducirse á 1 para $m = n$, obteniéndose

$$P_n = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots n}.$$

30. DIVISIÓN DE LAS SERIES ENTERAS. Sea, en primer lugar, la inversa de una serie entera que principia por la unidad

$$f(x) = \frac{1}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots}$$

convergente en el intervalo $(-r, +r)$. Si hacemos

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots,$$

tendremos $f(x) = \dfrac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \ldots\ldots;$

y sustituyendo, $f(x) = 1 - b_1 x + (b_1^2 - b_2)x^2 + \ldots\ldots,$

serie valedera en cierto intervalo.

Sea ahora el cociente de dos series enteras convergentes

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots}. \qquad (22)$$

Si b_0 no es nulo, podremos escribir

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots)\,\frac{1}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots}$$

que es el producto de dos series enteras convergentes. El cociente podrá por consiguiente escribirse bajo la forma de una serie entera convergente para valores de x próximos á cero,

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots\dots \tag{23}$$

Quitando el denominador é identificando en los dos miembros, se obtienen las relaciones

$$a_n = b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \dots\dots + b_n c_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots\dots) \tag{24}$$

que determinan sucesivamente los coeficientes $c_0, c_1, \dots\dots$, coeficientes que también se determinan efectuando la división de los polinomios, según la regla conocida de esta operación.

En el caso de ser $b_0 = 0$, hagamos $\psi(x) = x^k \psi_1(x)$, siendo k un número entero, positivo y $\psi_1(x)$ una serie entera cuyo término constante no es nulo. Podremos escribir

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{x^k} \frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}$$

y, según lo expuesto,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} = c_0 + c_1 x + \dots\dots + c_{k-1} x^{k-1} + c_k x^k + \dots\dots$$

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{c_0}{x^k} + \frac{c_1}{x^{k-1}} + \dots + \frac{c_{k-1}}{x} + c_k + c_{k+1} x + \dots \tag{25}$$

El cociente es pues igual á la suma de una fracción racional que se hace infinita para $x = 0$ y de una serie entera convergente en cierto intervalo alrededor del origen.

Ejemplo. Desarrollar, según las potencias de z, la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}.$$

Haciendo $y = 2xz - z^2$, se puede escribir, cuando $|y| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - y}} = (1 - y)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} y + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} y^2 + \dots\dots,$$

y sustituyendo,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + \frac{2xz-z^2}{2} + \frac{3}{8}(2xz-z^2)^2 + \ldots\ldots$$

y ordenando según las potencias de z,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \ldots + P_n z^n + \ldots \qquad (26)$$

siendo $P_0 = 1,\quad P_1 = x,\quad P_2 = \dfrac{3x^2-1}{2}, \ldots\ldots$

Si diferenciamos la fórmula (26) con relación á z, tendremos

$$\frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}} = P_1 + 2P_2 z + \ldots\ldots + nP_n z^{n-1} + \ldots\ldots,$$

y en virtud de la fórmula (26),

$$(x-z)(P_0 + P_1 z + \ldots\ldots + P_n z^n + \ldots\ldots)$$
$$= (1-2xz+z^2)(P_1 + 2P_2 z + \ldots\ldots)$$

que da la relación recurrente

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}.$$

31. SERIES ENTERAS DE MUCHAS VARIABLES. Sea primero la serie doble $\Sigma\, a_{mn} x^m y^n$ en la que los números m y n varían desde o hasta $+\infty$, y en la que los coeficientes a_{mn} tienen cualquier signo. Podemos enunciar el siguiente

TEOREMA. *Si para un sistema de valores* $x = x_0$, $y = y_0$, *el valor absoluto de un término cualquiera de la serie* $\Sigma\, a_{mn} x^m y^n$ *es inferior á un número fijo, la serie es absolutamente convergente para todo sistema de valores de* x *é* y *tal, que sea* $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$.

En efecto, supongamos que para valores cualesquiera de los índices m y n, se tenga

$$|a_{mn} x_0^m y_0^n| < M \quad \text{ó} \quad |a_{mn}| < \frac{M}{|x_0|^m\, |y_0|^n}.$$

El valor absoluto del término general de la serie doble $\Sigma\, a_{mn} x^m y^n$ es menor que el término correspondiente de la serie doble $\Sigma\, \mathrm{M} \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^m \left|\dfrac{y}{y_0}\right|^n$, que es convergente siempre que $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ y cuya suma es $\dfrac{\mathrm{M}}{\left(1 - \left|\dfrac{x}{x_0}\right|\right)\left(1 - \left|\dfrac{y}{y_0}\right|\right)}$.

Representemos por r y ρ dos números positivos tales, que la doble serie $\Sigma\, |a_{mn}|\, r_m \rho_n$ sea convergente; y sea R el rectángulo formado por las cuatro rectas $x = r$, $x = -r$, $y = \rho$, $y = -\rho$.

Para todos los puntos tomados en el interior ó en uno de los lados del rectángulo, los términos de la serie á doble entrada

$$\mathrm{F}(x, y) = \Sigma\, a_{mn} x^m y^n \tag{27}$$

son todos menores en valor absoluto que los de la $\Sigma\, |a_{mn}|\, r^m \rho^n$; luego es absoluta y uniformemente convergente en el interior de R, y define por tanto una función continua de las dos variables x é y en esta región del plano.

Se demuestra, como para el caso de una variable, que las serie dobles obtenidas diferenciándolas un número cualquiera de veces, son absoluta y uniformemente convergentes en el rectángulo formado por las rectas $x = r - \varepsilon$, $x = -r + \varepsilon$, $y = \rho - \varepsilon'$, $y = -\rho + \varepsilon'$, siendo ε y ε' números positivos tan pequeños como se quiera. Estas series representan las derivadas parciales de los diferentes órdenes de $\mathrm{F}(x, y)$.

Por ejemplo, la suma de la serie $\Sigma\, m a_{mn} x^{m-1} y^n$ es igual á $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$, y la fórmula (27) puede escribirse así:

$$\mathrm{F}(x, y) = \sum \frac{\left(\dfrac{\partial^{m+n} \mathrm{F}}{\partial x^m \partial y^n}\right)}{1 \cdot 2 \ldots m \cdot 1 \cdot 2 \ldots n} x^m y^n \tag{28}$$

habiéndose tomado los valores de las derivadas parciales de $\mathrm{F}(x, y)$ para $x = y = 0$.

Si se agrupan los términos de igual grado en x é y de la serie doble, se obtendrá una serie simple, que puede escribirse

$$F(x, y) = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots\ldots + \varphi_n + \ldots\ldots \qquad (29)$$

expresando φ_n un polinomio homogéneo de grado x é y, cuya representación simbólica es

$$\varphi_n = \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(n)}.$$

Dicho desarrollo es equivalente al que daría la fórmula de Taylor.

Sea (x_0, y_0) un punto interior al rectángulo R, y $(x_0 + h, y_0 + k)$ un punto próximo tal, que se tenga $|x_0| + |h| < r$, $|y_0| + |k| < \rho$. En el interior del rectángulo formado por las cuatro rectas

$$x = x_0 \pm [r - |x|], \quad y = y_0 \pm [\rho - |y_0|],$$

la función $F(x, y)$ puede desarrollarse en serie entera ordenada según las potencias positivas de $x - x_0$ y de $y - y_0$,

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = \sum \frac{\left(\dfrac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} h^m k^n, \quad (30)$$

lo que se demuestra sustituyendo en la doble serie

$$\Sigma a_{mn}(x_0+h)^m(y_0+k)^n$$

cada término por su desarrollo según las potencias de h y de k, y observando que la nueva serie múltiple es absolutamente convergente en las condiciones enunciadas. Ordenando según las potencias de h y k, se obtiene la fórmula (30).

32. Funciones mayorantes. Dada una serie entera de n variables $f(x, y, z, \ldots\ldots)$, se dirá que otra serie de n variables $\rho(x, y, z, \ldots\ldots)$ es mayorante respecto á la primera, si un coeficiente cualquiera $\varphi(x, y, z, \ldots\ldots)$ es positivo ó superior al valor absoluto del coeficiente correspondiente de $f(x, y, z, \ldots\ldots)$, Si la serie $\Sigma\,|a_{mn}x^m y^n|$ es convergente para $x=r$, $y=\rho$, la función

$$\varphi(x,y)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}=M\,\Sigma\left(\frac{x}{r}\right)^m\left(\frac{\rho}{y}\right)^n$$

en la que M es superior á todos los términos de la serie $\Sigma\,|a_{mn}\rho^m r^n|$ es una función mayorante respecto á la serie $\Sigma\,a_{mn}x^m y^n$. La función

$$\psi(x,y)=\frac{M}{1-\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)}$$

es también una función mayorante, porque el coeficiente de $x^m y^n$ en $\psi(x,y)$ es igual al coeficiente de este mismo término en $M\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)^{m+n}$, y por consiguiente, es por lo menos igual al de $x^m y^n$ en $\varphi(x,y)$.

Igualmente la serie triple

$$f(x,y,z)=\Sigma\,a^{mnp}x^m y^n z^p,$$

absolutamente convergente para $x=r$, $y=r'$, $z=r''$, siendo r, r', r'' tres números positivos, admite por función mayorante á

$$f(x,y,z)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{r'}\right)\left(1-\frac{z}{r''}\right)},$$

que se puede substituir por cualquiera de las siguientes:

$$\frac{M}{1-\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{r'}+\frac{z}{r''}\right)},\quad \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left[1-\left(\frac{y}{r'}+\frac{z}{r''}\right)\right]}.$$

Cuando $f(x,y,z)$ no contiene término constante, se puede tomar también por función mayorante cualquiera de las precedentes, disminuida en M.

El teorema de la substitución de una serie entera por otra serie entera, se extiende al caso de más de una variable. Nos limitaremos á enunciar el siguiente

TEOREMA. *Si en una serie entera convergente de* p *variables,* $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p$, *se substituyen estas variables por* p *desarrollos en series enteras de* q *variables* $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q$, *que no tengan términos constantes, y convergentes, el resultado puede obtenerse bajo la forma de una serie entera ordenada con relación á las potencias de* $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q$, *siempre que los valores absolutos de estas variables sean inferiores á ciertos límites.*

33. FUNCIONES IMPLÍCITAS. Establecida la existencia de las funciones implícitas (*Calc. dif. p.* 53) bajo ciertas condiciones de continuidad, vamos ahora á examinarlas en el caso de que las ecuaciones que las definen sean desarrollables en series enteras, enunciando el siguiente

TEOREMA. *Sea* $F(x, y) = 0$ *una ecuación cuyo primer miembro puede desarrollarse en serie convergente, ordenada según las potencias ascendentes de* $x - x_0$, $y - y_0$, *sin tener dicha serie término constante y sin ser nulo el coeficiente de* $y - y_0$. *Esta ecuación admite una raíz y sólo una, que tiende hacia* y_0, *cuando* x *tiende hacia* x_0, *y puede desarrollarse en serie entera, ordenada según las potencias de* $x - x_0$.

Supongamos para más sencillez, $x_0 = y_0 = 0$. Separando en un miembro el término de primer grado en y, se puede escribir la ecuación así:

$$y = f(x, y) = a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots\ldots \quad (31)$$

Esto sentado, se puede satisfacer *formalmente* á dicha ecuación sustituyendo y por una serie

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n + \ldots\ldots, \quad (32)$$

y operando en el segundo miembro como si esta serie fuese convergente, pues identificando los dos miembros, obtendremos las condiciones

$$c_1 = a_{10}, \quad c_2 = a_{20} + a_{11}c_1 + a_{02}c_1^2, \ldots\ldots$$

En general, c_n se expresa por medio de los coeficientes a_{ik} en los que $i+k \leqq n$ y de los coeficientes $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_{n-1}$, mediante adiciones y multiplicaciones tan solo, de manera que podremos escribir

$$c_n = \mathrm{P}_n(a_{10}, a_{20}, a_{11}, \ldots\ldots, a_{0n}), \tag{33}$$

siendo P_n un polinomio cuyos coeficientes son enteros positivos. Para demostrar la legitimidad de las operaciones precedentes, basta demostrar que la serie obtenida es convergente para valores de x suficientemente pequeños.

Sea $$\varphi(x, \mathrm{Y}) = \Sigma b_{mn} x^m \mathrm{Y}^n$$

una función mayorante respecto á $f(x, y)$, en la que se tiene $b_{00} = b_{01} = 0$ siendo b_{mn} positivo y por lo menos igual á $|a_{mn}|$. Si se considera la ecuación auxiliar

$$\mathrm{Y} = \varphi(x, \mathrm{Y}) = \Sigma b_{mn} x^m \mathrm{Y}^n, \tag{34}$$

y se trata como arriba, de satisfacer á esta ecuación tomando por Y una serie entera en x,

$$\mathrm{Y} = \mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2 x^2 + \ldots\ldots + \mathrm{C}_n x^n + \ldots\ldots \tag{35}$$

obtendremos para los valores de los coeficientes $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots\ldots$

$$\mathrm{C}_1 = b_{10}, \qquad \mathrm{C}_2 = b_{20} + b_{11}\,\mathrm{C}_1 + b_{02}\,\mathrm{C}_1^2, \ldots\ldots$$

y en general,

$$\mathrm{C}_n = \mathrm{P}_n(b_{10}, b_{20}, \ldots\ldots, b_{0n}) \tag{36}$$

Comparando las relaciones (33) y (36) tendremos $|c_n| < \mathrm{C}_n$, porque todos los coeficientes del polinomio P_n son positivos, y se tiene $|a_{mn}| \leqq b_{mn}$. La serie (32) será pues convergente si la serie (35) lo es. Pero podemos tomar como función mayorante $\varphi(x, \mathrm{Y})$ una expresión de la forma

$$\varphi(x, \mathrm{Y}) = \frac{\mathrm{M}}{\left(1 - \dfrac{x}{r}\right)\left(1 - \dfrac{\mathrm{Y}}{\rho}\right)} - \mathrm{M} - \mathrm{M}\frac{\mathrm{Y}}{\rho},$$

siendo M, r, ρ tres números positivos, y la ecuación auxiliar (34) se reduce, después de quitar denominadores, á

$$Y^2 - \frac{\rho^2 Y}{\rho + M} + \frac{M\rho^2}{\rho + M} \frac{\frac{x}{r}}{1 - \frac{x}{r}} = 0.$$

Esta ecuación admite una raíz nula para $x = 0$, cuya expresión es

$$Y = \frac{\rho^2}{2(\rho + M)} - \frac{\rho^2}{2(\rho + M)} \sqrt{1 - \frac{4M(\rho + M)}{\rho^2} \frac{\frac{x}{r}}{1 - \frac{x}{r}}}.$$

La cantidad subrradical puede escribirse así:

$$\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-1}, \quad \text{haciendo} \quad \alpha = r\left(\frac{\rho}{\rho + 2M}\right)^2,$$

y se tiene todavía

$$Y = \frac{\rho^2}{2(\rho + M)}\left[1 - \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Esta raíz Y puede desarrollarse en serie convergente en el intervalo $(-\alpha, +\alpha)$, desarrollo que es idéntico al que daría la sustitución directa, es decir, al desarrollo (35). Por consiguiente, la serie (32) es *a fortiori* convergente en el intervalo $(-\alpha, +\alpha)$, que sólo es un límite inferior del mismo.

Del modo de obtener los coeficientes c_n, resulta que la suma y de la serie (32) satisface á la ecuación (31).

Escribámosla bajo la forma $F(x, y) = y - f(x, y) = 0$, y sea $y = P(x)$ la raíz que acabamos de obtener. Si se hace en $F(x, y)$, $y = P(x) + z$ y se ordena el resultado de la sustitución según las potencias de x y z, todos los términos deben ser divisibles por z, porque el resultado debe anularse para cualquier valor de x cuando $z = 0$; luego tendremos idénticamente

$$F[x, P(x) + z] = zQ(x, z),$$

siendo $Q(x, z)$ una serie entera en x y z; y si sustituimos z por $y - P(x)$ en $Q(x, z)$, se obtiene finalmente la identidad

$$F(x, y) = [y - P(x)]Q_1(x, y).$$

El término constante Q_1 debe ser igual á 1, porque el coeficiente de y debe ser tambien 1, y podemos escribir

$$F(x, y) = [y - P(x)]\,(1 + \alpha x + \beta y + \ldots\ldots) \qquad (37)$$

descomposición en un producto debida á Weierstrass.

34. Teorema general. Sea un sistema de p relaciones entre $p + q$ variables

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p) = 0 \end{array}\right\} \qquad (38)$$

en el cual $F_1, F_2, \ldots\ldots$ son nulas para $x_i = y_k = 0$ y desarrollables en series enteras en la proximidad.

Supongamos además que el determinante funcional

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots\ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p)}$$

no sea nulo para estos valores.

Entonces, *las ecuaciones* (38) *admiten un sistema de soluciones, y uno solo, de la forma*

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q), \ldots\ldots \quad y_p = \varphi_p(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q),$$

siendo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots, \varphi_p$ *series enteras en* $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q$, *que se anulan para* $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_q = 0$.

Limitándonos al caso de dos ecuaciones entre dos funciones u, v y tres variables independientes x, y, z.

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= au + bv + cx + dy + ez + \ldots\ldots \quad = 0 \\ F_2 &= a'u + b'v + c'x + d'y + e'z + \ldots\ldots = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (39)$$

Puesto que el determinante $ab' - bc'$ no es nulo, por hipótesis, podemos sustituir las dos ecuaciones (39) por dos ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{aligned} u &= \Sigma a_{mnpqr} x^m y^n z^p u^q v^r, \\ v &= \Sigma b_{mnpqr} x^m y^n z^p u^q v^r, \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

cuyos segundos miembros no contienen términos constantes ni de primer grado en u y en v.

Demostraremos de igual modo que arriba, que se satisface formalmente á estas ecuaciones tomando para u y v series enteras en x, y, z

$$u = \Sigma c_{ikl} x^i y^k z^l, \quad v = \Sigma c'_{ikl} x^i y^k z^l \qquad (41)$$

cuyos coeficientes se deducen de los coeficientes a_{mnpqr} y b_{mnpqr} por adiciones y multiplicaciones solamente.

Para establecer la convergencia de dichos desarrollos, basta compararlos con los desarrollos análogos obtenidos tratando de satisfacer á las dos ecuaciones auxiliares

$$U = V = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x+y+z}{r}\right)\left(1 - \dfrac{U+V}{\rho}\right)} - M\left(1 + \frac{U+V}{\rho}\right),$$

en las que M, r y ρ son números positivos cuyo significado se sabe. Estas dos ecuaciones se reducen á una sola ecuación de segundo grado

$$U^2 - \frac{\rho^2 U}{2\rho + 4M} + \frac{M\rho^2}{2\rho + 4M} \frac{\dfrac{x+y+z}{r}}{1 - \dfrac{x+y+z}{r}} = 0,$$

que admite una raíz nula para $x = y = z = 0$, cuya expresión es

$$U = \frac{\rho^2}{4(\rho + 2M)} - \frac{\rho^2}{4(\rho + 2M)} \sqrt{\frac{1 - \frac{x+y+z}{\alpha}}{1 - \frac{x+y+z}{r}}},$$

siendo $\alpha = r\left(\frac{\rho}{\rho + 4M}\right)^2.$

Esta raíz puede desarrollarse en serie entera mientras que los valores absolutos de x, y, z no excedan á $\frac{\alpha}{3}$. La series (41) son pues convergentes entre estos límites.

35. Fórmula de Lagrange. Sea

$$z = x + y\varphi(z) \tag{42}$$

una ecuación en la que $\varphi(z)$ es desarrollable en serie convergente según las potencias ascendentes de $z - x$, mientras que el valor de $z - x$ no exceda de cierto límite,

$$\varphi(z) = \varphi(x) + (z - x)\varphi'(x) + \frac{(z-x)^2}{1 \cdot 2}\varphi''(x) + \ldots\ldots$$

Según el teorema del núm. 33, esta ecuación admite una sola raíz, que tiende hacia x cuando y tiende hacia cero, y esta raíz se halla representada, para valores de y suficientemente pequeños, por la suma de una serie convergente

$$z = x + x_1 y + x_2 y^2 + \ldots\ldots$$

En general, si $f(z)$ es una función desarrollable según las potencias de $z - x$, después de haber sustituido z por el desarrollo anterior, se tendrá, para $f(z)$ un desarrollo ordenado según las potencias de y, que será todavía válido para valores de y comprendidos entre ciertos límites,

$$f(z) = f(x) + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots\ldots + A_n y^n + \ldots\ldots \tag{43}$$

El objeto de la fórmula de Lagrange es dar precisamente la expresión de los coeficientes $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots$ en función de x.

Este problema no es esencialmente distinto del problema general. El coeficiente A_n es, salvo el factor $n!$, la derivada n^{sima}, para $y = 0$ de $f(z)$, estando definida z por la ecuación (42).

El cálculo de dicha derivada se abrevia, mediante las siguientes observaciones debidas á Laplace.

Las derivadas parciales de la función z definida por la ecuación (42) con relación á las variables x é y se obtienen por las fórmulas

$$[1 - y\varphi'(z)]\,\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z), \qquad [1 - y\varphi'(z)]\,\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

de las que se deduce inmediatamente

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z)\,\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{44}$$

haciendo $u = f(z)$. Además, si $F(z)$ es una función cualquiera de z, se verifica inmediatamente que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F(z)\,\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[F(z)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right], \tag{45}$$

porque el desarrollo de cada una de las derivadas es

$$F'(z)f'(z)\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} + F(z)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Para demostrar que

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\varphi(z)^n\,\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

observaremos que es cierta en virtud de (44) para $n = 1$, y suponiendo que es cierta para cierto valor de n, se deducirá

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial y^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial y}\left[\varphi(z)^n\,\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

Pero en virtud de (44) y (45)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(z)^n \frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)^n \frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)^{n+1} \frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

Resulta pues, que

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial y^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\varphi(z)^{n+1} \frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

resultando la fórmula cierta para cualquier valor de n.

Supongamos ahora $y = 0$; z se reduce á x, u á $f(x)$; y la derivada n^{sima} de u con relación á y se reduce á

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\varphi(x)^n f'(x)\right].$$

La fórmula de Taylor da para el desarrollo de $f(z)$,

$$f(z) = f(x) + y\varphi(x)f'(x) + \frac{y^2}{1 \cdot 2}\frac{d}{dx}\left[\varphi(a)^2 f'(a)\right] + \ldots\ldots \qquad (46)$$

que es, como se vió anteriormente, la fórmula de Lagrange.

Ejemplo. La ecuación

$$z = x + \frac{y}{2}(z^2 - 1) \qquad (47)$$

admite una raíz igual á x para $y = 0$.

La fórmula de Lagrange da

$$z = x + \frac{y}{2}(x^2 - 1) + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{y}{2}\right)^2 \frac{d(x^2 - 1)^2}{dx} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n}\left(\frac{y}{2}\right)^n \frac{d^{n-1}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots \qquad (48)$$

Además, resolviendo la ecuación (47) tenemos

$$z = \frac{1}{y} \pm \frac{1}{y}\sqrt{1 - 2xy + y^2},$$

y con objeto de tener la raíz igual á x para $y = 0$, hay que tomar el signo —. Derivando con respecto á x los dos miembros de la fórmula (48) obtendremos la fórmula, salvo las notaciones

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots\ldots + X_n z^n + \ldots\ldots$$

que resulta inmediatamente de la (26) expresando X^n un polinomio de Legendre

$$X_n = \frac{1}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$$

36. Inversión. Sea

$$z = x_1 y + x_2 y^2 + \ldots\ldots + x_n y^n + \ldots\ldots \qquad (49)$$

una serie convergente en el intervalo $(-r, +r)$, en la que el primer coeficiente x_1 no es nulo.

Considerando á z como variable independiente, y á y como función de z, esta ecuación admite, según el teorema general (33), tan sólo una raíz, que tiende hacia cero con z, y esta raíz es desarrollable en serie ordenada según las potencias de z

$$y = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots\ldots + b_n z^n + \ldots\ldots \qquad (50)$$

Los coeficientes $b_1, b_2, \ldots\ldots$ se determinan sucesivamente sustituyendo y por su desarrollo, en la fórmula (49), y escribiendo que se obtiene una identidad. Tendremos

$$b_1 = \frac{1}{x_1}, \quad b_2 = -\frac{x_2}{x_1^3}, \quad b_3 = \frac{2x_2 - x_1 x_3}{x_1^5}, \ldots\ldots$$

Podemos obtener también la expresión general de los coeficientes b_n por medio de la fórmula de Lagrange. Hagamos

$$\psi(x) = x_1 + x_2 y + \ldots\ldots + x_n y^{n-1} + \ldots\ldots$$

La ecuación (49) puede escribirse así

$$y = z \frac{1}{\psi(y)},$$

y la fórmula de Lagrange da, para el desarrollo de la raíz que se anula con z,

$$y = z\frac{1}{\psi(0)} + \ldots\ldots + \frac{z^n}{1\,.\,2\ldots\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left(\frac{1}{\psi(y)}\right)_0^n + \ldots\ldots$$

expresando el subíndice o, que se hace $y = 0$, después de derivar.

37. Desarrollo de una función continua. Teorema de Weierstrass. *Si* ε *es un número positivo suficientemente pequeño dado previamente, se puede determinar un polinomio* P(x) *tal, que la diferencia* f(x) — P(x) *sea menor que* ε *en valor absoluto para todo valor de* x *en el intervalo* (a, b).

Demostración de M. Lebesgue. (*) Sea primero $\psi(x)$ una función continua en el intervalo $(-1, +1)$ definida de la manera siguiente: para $-1 \leqq x \leqq 0$ se tiene $\psi(x) = 0$, y para $0 \leqq x \leqq 1$ se tiene $\psi(x) = 2kx$, siendo k un factor constante dado.

Podemos escribir $\psi(x) = k\,[x + |x|]$. Además, para los valores de X comprendidos entre -1 y $+1$, se tiene

$$|x| = \sqrt{1 - (1 - x^2)},$$

y, para estos mismos valores de x, el radical puede desarrollarse en serie *uniformemente convergente* ordenada según las potencias de $(1 - x^2)$; $|x|$, y por consiguiente $\psi(x)$, puede representarse, en este intervalo, con la aproximación que se quiera, por un polinomio.

Tomemos ahora una función cualquiera continua en el intervalo (a, b), y supongamos que este intervalo se halla dividido en n intervalos parciales (a_0, a_1), (a_1, a_2), ... (a_{n-1}, a_n) en los que $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_{n-1} < a_n = b$, de manera que la oscilación de $f(x)$ (es decir, $\Delta = M - m$, siendo M y m los límites superior é inferior de $f(x)$ comprendidos en dicho intervalo) en cada uno de estos intervalos sea menor que

(*) *Bulletin des Sciences mathématiques*, p. 278 1898 y E. Goursat *Cours d'Analyse mathématique* t. I. pág. 159.

$\frac{\varepsilon}{2}$. Sea L la línea quebrada obtenida uniendo sucesivamente los puntos de la curva $y = f(x)$ cuyas abscisas son $a_0, a_1, \ldots.., b$. La ordenada de un punto de dicha línea es evidentemente una función continua de la abscisa $\varphi(x)$, y la diferencia $f(x) - \varphi(x)$ es menor en valor absoluto que $\frac{\varepsilon}{2}$.

En efecto, en el intervalo (a_{i-1}, a_i), por ejemplo, se puede escribir

$$f(x) - \varphi(x) = [f(x) - f(a_{i-1})] [1 - \theta] + [f(x) - f(a_i)] \theta,$$

donde $x - a_{i-1} = \theta(a_i - a_{i-1})$. Siendo positivo el factor θ é inferior á la unidad, la diferencia $f - \varphi$ es menor en valor absoluto que $\frac{\varepsilon}{2}(1 - \theta + \theta) = \frac{\varepsilon}{2}$.

Esta función $\varphi(x)$ puede descomponerse en una suma de n funciones análogas á la función $\psi(x)$.

Sean, en efecto, $A_0, A_1, \ldots..$ los vértices consecutivos de la línea poligonal L; $\varphi(x)$ es igual á la función continua ψ_1 representada en el intervalo (a, b) por la recta que corresponde al lado A_0A_1, más una función φ_1 representada por una línea poligonal $A'_0A', \ldots.. A'_n$ cuyo primer lado $A'_0A'_1$ está en el eje Ox; $\varphi_1(x)$ es á su vez la suma de dos funciones continuas ψ_2 y φ_2, de las que la primera ψ_2 es nula entre a y a_1 y está representada por la recta que corresponde á $A'_1 A'_2$ entre a_1 y b, mientras que φ_2 está representada por una línea poligonal $A''_0A''_1A''_2 \ldots.. A''_n$ cuyos vértices A''_0, A''_1, A''_2 están en Ox. Se llega finalmente á sustituir $\varphi(x)$ por una suma de n funciones $\varphi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots.. + \psi_n$, en la que ψ_h es una función continua nula entre a y a_h, representada por un segmento de recta comprendido entre a_{h-1} y b. Si se efectúa el cambio de variable $X = mx + n$, eligiendo convenientemente m y n, ψ_h estará definida en el intervalo $(-1, +1)$ por la igualdad

$$\psi_h = k[X + |X|],$$

y por consiguiente podrá estar representada por un polinomio con la aproximación que se quiera. Pudiendo hallarse representada cada una de las funciones ψ_i por un polinomio, en el intervalo (a, b), con una aproximación inferior á $\frac{\varepsilon}{2n}$, la suma de dichos polinomios diferirá de $f(x)$ en menos que ε.

De este teorema se deduce que: *Toda función continua en un intervalo* (a, b) *puede representarse por una serie uniformemente convergente de polinomios en este intervalo*, pues si se considera una serie de números positivos decrecientes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots \varepsilon_n, \ldots\ldots$, de modo que el término general ε_n tienda hacia cero, cuando n aumenta indefinidamente, según el teorema precedente, á cada número ε_i de esta serie podremos hacer corresponder un polinomio $P_i(x)$ tal, que la diferencia $f(x) - P_i(x)$ sea inferior en valor absoluto á ε_i, en todo intervalo (a, b). Esto sentado, la serie

$$P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + \ldots\ldots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)] + \ldots\ldots$$

es convergente, siendo su suma $f(x)$, cuando x está comprendido en el intervalo (a, b). Y claro es que la suma S_n de los x primeros términos es igual á $P_n(x)$. La diferencia $f(x) - S_n$, que es inferior á ε_n tiende pues hacia cero cuando n aumenta indefinidamente. Además la serie es uniformemente convergente, porque tomando n bastante grande, la diferencia $f(x) - S_n$ será menor que un número dado de antemano para todo valor de x comprendido en el intervalo (a, b).

CAPÍTULO II

Continuidad y discontinuidad

§ 1.º Funciones uniformemente continuas

38. La continuidad uniforme de una función tiene mucha semejanza con la convergencia uniforme de una serie.

Que una función es continua en un punto quiere decir, como se ha dicho ya, que dado un valor σ tan pequeño como se quiera, se puede hallar un entorno, para cuyos puntos la diferencia entre el valor de la función y el de ésta en a es menor que σ.

Si se trata de una función de una variable, el entorno de que se trata será cierto segmento de la recta representativa, de longitud ε.

Para todo el dominio ó campo de variación considerado, á un mismo valor σ fijado corresponderá un valor de ε.

Se pide ahora hallar un mismo valor ε que corresponda á todos los puntos del campo de variación.

Si se trata de un número finito de puntos, bastará calcular el valor de ε para cada uno, y considerar después el menor de todos, que valdrá para todos los puntos; pero en el caso de existir un número infinito de puntos, hay que hacer otras consideraciones.

Una continuidad de tal forma se llamará *continuidad uniforme*, que á primera vista parece más restringida que la simple continuidad, como la convergencia uniforme lo era respecto á la simple convergencia; pero el Sr. Cantor ha demostrado que la *continuidad uniforme no difiere de la continuidad ordinaria.*

En efecto, supongamos la función $f(x)$ continua desde a hasta b, y hallemos un intervalo á la derecha de a tal, que para un punto x se tenga

$$f(x) - f(a) \leqq \sigma.$$

La amplitud ε de tal intervalo puede ser varia, porque obtenida una, las menores que ella satisfacen á la misma condición.

Entre las varias ε tomemos la mayor de todas ó el *límite superior* de ellas.

Sea x_1 el punto que representa el extremo de dicho intervalo ε. Es fácil ver que en $x = x_1$ la diferencia $f(x) - f(a)$ es exactamente igual á σ en valor absoluto, esto es, que

$$f(x_1) - f(a) = \pm\, \sigma.$$

En efecto, empezemos por observar que, siendo por hipótesis $f(x)$ una función continua, lo será también la función $f(x) - f(a)$.

Se puede hacer ver que el valor de tal diferencia no puede ser ninguna de las cuatro cantidades

$$+\sigma - \varepsilon, \quad +\sigma + \varepsilon, \quad -\sigma - \varepsilon, \quad -\sigma + \varepsilon.$$

Si fuese, por ejemplo, $+\sigma - \varepsilon$, entonces, por efecto de la continuidad de la función, se podría hallar á la derecha de x_1 un segmento tal, que para todo punto del mismo, el valor absoluto de $f(x) - f(a)$ fuese diferente de $\sigma - \varepsilon$ en una cantidad ε_1 menor que ε, esto es, menor que σ; lo que es contra la hipótesis de que el segmento cuyo extremo es x_1 sea el límite superior de todos los segmentos en los que $f(x) - f(a) < \sigma$.

Si $f(x_1) - f(a)$ fuese igual á $+\sigma + \varepsilon$, entonces, por efecto de la continuidad, se podría hallar á la izquierda de x_1 un segmento tal, que en un punto del mismo, el valor absoluto de $f(x) - f(a)$ fuese diferente de $\sigma + \varepsilon$ en una cantidad $\varepsilon_1 < \varepsilon$, y por consiguiente mayor que σ, lo que es contradictorio con la hipótesis hecha respecto á x_1, pues por un punto cualquiera á la izquierda de x_1 el valor de $f(x) - f(a)$ debe ser menor que σ.

Establecido pues que en x_1 se tiene

$$f(x_1) - f(a) = \sigma$$

procedamos de igual manera desde x_1 hacia la derecha hasta el punto x_2 en el que sea

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \sigma.$$

Continuando así podremos establecer una serie de puntos.

$$a\, x_1\, x_2\, x_3 \,\ldots\ldots\, x_n\, x_{n+1} \,\ldots\ldots$$

tales que $$f(x_{n+1}) - f(x_n) = \sigma$$

Entre dos de estos puntos consecutivos se halla un segmento para dos de los que la diferencia de los valores de la función es menor que σ.

Pero si recorriendo todo el intervalo desde a hasta b, el número de tales puntos intermedios es *finito*, entonces el intervalo (a, b) quedará dividido en intervalos en número finito, cada uno de los cuales tiene la propiedad indicada. Tomando ahora el menor de todos estos intervalos de amplitud ε, en una amplitud menor que ε se satisfará á la condición indicada.

Falta ver que los puntos $x_1, x_2, \ldots\ldots$ no pueden ser en número infinito. En efecto, si fuesen en número infinito, entonces admitirían un punto-límite u, y por efecto de la continuidad de la función en u, se podría hallar un entorno de u tal, que para dos puntos cualesquiera del mismo fuese

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\sigma}{2}\,.\ (*)$$

Pero al mismo tiempo, por la naturaleza del punto-límite se hallarán contenidos infinitos puntos $x_n\, x_{n+1}$ y se deberá ser

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| = \sigma,$$

(*) E. Pascal. *Lezioni di calcolo infinitesimale* t. I pp. 34.

mientras que por otra parte, siendo $x_n\, x_{n+1}$ dos puntos del entorno deben ser

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \frac{\sigma}{2}.$$

La contradicción que resulta hace inadmisible la hipótesis de que los puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ sean en número infinito.

39. Como corolario resulta que: *Dada una función continua en un intervalo desde* a *hasta* b, *se puede dividir éste en un número finito de otros intervalos parciales tales, que en cada uno de ellos la diferencia entre dos valores cualquiera de la función sea menor que una cantidad* σ *tan pequeña como se quiera.*

40. Ya sabemos que se llama *oscilación* de la función en un intervalo, á la diferencia entre el límite superior y el límite inferior de los valores de la función en dicho intervalo.

Se puede decir que *siempre es posible la división en un número finito de intervalos parciales, de modo que en cada uno de éstos la oscilación de la función sea menor que* σ.

Basta para justificarlo, el emplear el procedimiento arriba indicado. Podemos ahora demostrar el

TEOREMA 1.º *Si una función continua está determinada en un número infinito de puntos, lo estará en los puntos-límites de la misma.*

En efecto, sea x' uno de dichos puntos-límites; debiendo ser la función continua en x', deberá tener un límite determinado cuando x se aproxima á x', y en x' el valor de la función no puede ser otro que dicho límite.

Siendo los puntos *irracionales* límites de los puntos *racionales*, podemos concluir que:

TEOREMA 2.º *Si una función continua está determinada en todos los puntos racionales de un segmento, está determinada también en los puntos irracionales.*

Considerando todos los valores que tiene una función en un intervalo, se tienen infinitos números que tendrán un *límite superior* y un *límite inferior*. Podrá suceder que no exista ningún valor de las variables para el cual el valor de la función sea propiamente el límite superior. Si esto no sucede, entonces el límite superior es uno de los valores de la función que es su valor *máximo* y también el límite inferior es el valor *mínimo*.

Se puede hacer ver que *para las funciones continuas existen efectivamente el valor máximo y el valor mínimo*, esto es, *que la función adquiere en un punto el valor representado, ya por el límite superior ya por el límite inferior.*

41. Teorema de Weierstrass. *Si una función admite un límite superior* S *en un segmento dado, se puede siempre hallar un segmento tan pequeño como se quiera tal, que el límite superior de los valores que la función adquiere en tal segmento es también* S.

Ante todo recordaremos que en un grupo infinito de puntos contenido en un segmento finito de una recta, existirá un punto de ésta tal, que á su derecha no existan otros puntos del grupo y que además, ó pertenece al grupo, y en un intervalo tan pequeño como se quiera á su izquierda existen siempre puntos del grupo, ó bien, perteneciendo al grupo, no se verifica la segunda propiedad, ó en fin, *no perteneciendo al grupo*, se verifica la segunda propiedad. En el primero y segundo caso dicho punto se llamará el *máximo* de los valores de la variable y en el tercero se dirá simplemente el *límite superior*. Evidentemente el límite superior es un punto-límite del grupo.

Análogamente se definirán el mínimo y el límite inferior.

Si no existe el máximo existe ciertamente el límite superior.

El concepto de la existencia de un máximo ó de un límite superior es independiente del de la existencia de los puntos límites de un grupo infinito.

Esto sentado, si consideramos una función, por ejemplo de una variable, definida en cierto segmento finito, todos los valores de la función correspondientes á los puntos del segmento representados á su vez sobre una recta formarán, en general, un grupo infinito de puntos sobre la misma. Suponiendo este grupo contenido en un intervalo finito, existirá un *límite superior* y un *límite inferior* de los valores de la función.

Si en particular existe un *máximo* y un *mínimo* de los valores de la función, esto quiere decir, que existirá un valor de la variable independiente para el cual la función adquiere el valor máximo ó mínimo.

Pero si en vez de admitir dicho grupo de puntos un máximo admite sólo un límite superior, entonces no se puede decir lo mismo de los valores de la variable, por esto es útil demostrar el teorema de Weierstrass.

Para ello, dividamos el segmento primitivo en dos partes, y consideremos los valores de la función para los puntos de dichos segmentos separadamente.

Si S_1 y S_2 son límites superiores de los valores de la función en los dos segmentos parciales, se puede ver inmediatamente que uno al menos de estos dos debe ser igual á S, porque si S fuese menor que ambos, no sería ya límite superior de los valores de la función en todo el intervalo, y por otra parte, si S fuese mayor que los dos límites S_1 y S_2, entonces habría valores de la función ó mayores que S_1 ó que S_2, lo que es imposible.

Sea ahora $S = S_1$, y dividamos el intervalo en el que el límite superior es S_1 en dos partes, en una de las cuales al menos, por igual razonamiento, el límite superior de los valores de la función debe ser todavía S. Continuando de esta manera, se ve que se puede hallar un intervalo, tan pequeño como se quiera, en el cual el límite superior de los valores es todavía S.

42. Límites de las funciones. Supongamos que una función y de una sola variable x, se aproxima á un valor límite a, y fijemos un número σ tan pequeño como se quiera. Se puede hallar solo á la derecha ó solo á la izquierda ó á ambos lados del punto a un segmento tal, que el valor de y para cualquier punto contenido en dicho segmento sea tal, que la diferencia $(A - y)$ sea menor en valor absoluto que σ, siendo A un número fijo. Diremos entonces que A es el límite de los valores de y para $x = a$, y escribiremos

$$\lim_{x=a} f(x) = A.$$

Distinguiremos el límite á la derecha, ó el límite á la izquierda ó el límite á ambos lados del punto a, según que el segmento se halle á la derecha, á la izquierda ó á los dos lados, y podrá suceder que el límite á la derecha sea distinto del límite á la izquierda, los cuales se expresan por los símbolos $a + 0$ y $a - 0$ (excluyéndose el punto a).

Si uno de los valores a ó A por ejemplo, es infinito, se dirá entonces que y tiene por límite $\pm\infty$ para $x = a$, si dado ω tan grande como se quiera, se puede hallar un entorno del punto a tal, que para todos los puntos de dicho entorno la y sea siempre el valor absoluto mayor de ω, teniendo el signo positivo ó negativo respectivamente.

Supongamos que sea $a = \infty$, esto es, que se considere el límite de y cuando el valor de la variable aumenta indefinidamente. Podemos entonces decir que y tiene por límite A para $x = \infty$, cuando dado σ tan pequeño como se quiera, se puede siempre hallar un valor m de x, de manera que para todo valor de x mayor que m, la y tenga un valor tal, que la diferencia $A - y$ sea en valor absoluto menor que σ.

En fin, diremos que y tiene por límite el ∞ para $x = \infty$, cuando, dado ω tan grande como se quiera, se pueda hallar un valor m de modo que la y sea siempre mayor que ω.

Para $x = a$, se tiene que

$$\lim\,(x - a)\operatorname{sen}\frac{1}{x-a} = 0 \text{ á derecha é izquierda}$$

$$\lim \frac{1}{(x-a)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x-a}} = \pm\infty \text{ á derecha ó izquierda}$$

$$\lim \frac{1}{x-a} = +\infty \text{ ó } -\infty, \text{ para } x = a, \text{ á derecha ó á izquierda.}$$

Para $x = +\infty$, $\lim \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$,

para $x = \pm\infty$, $\lim\left(x + \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right) = \pm\infty$.

Cuando al acercarse x á a por la derecha ó la izquierda, ó al crecer indefinido de x por valores positivos ó negativos no se halla la función en ninguno de los casos tratados, se dirá que la función y no tiene límite determinado para $x = a$ á derecha ó izquierda ó para $x = \pm \infty$.

Las cantidades

$$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x-a}, \quad y = 1 + \frac{1}{x-a} \operatorname{sen} \frac{1}{x-a}$$

para $x = a$ á derecha é izquierda, y las cantidades

$$y = \operatorname{sen} x, \quad y = x \operatorname{sen} x \quad \text{para} \quad x = \pm \infty$$

no tienen límites determinados.

Observación 1.ª Debemos tener presente que el *valor especial* de y para $x = a$ no es lo mismo que el *límite de los valores* de y á la derecha ó á la izquierda de a, porque el límite de y depende solamente de sus valores en los puntos $a + 0$ y $a - 0$ exteriores al punto-límite a, mas no del valor de y en este punto; y aunque en algunos casos estas cantidades pueden existir simultáneamente y ser iguales, en otros puede suceder que exista el valor límite de y á la derecha ó á la izquierda de a y que no exista el valor y_a ó no tenga significado alguno, como puede existir este valor y de y_a, sin existir un valor límite ó existir ambos, siendo diferentes. Así en la expresión

$$\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}$$

el valor y_a de y, para $x = a$, no tiene significado alguno, mientras que el valor límite á la derecha ó á la izquierda, es igual á 1.

Para x distinto de a, la derivada de

$$(x-a)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x-a} \quad \text{es} \quad y = 2(x-a) \operatorname{sen} \frac{1}{1-x} - \cos \frac{1}{x-a},$$

y para $x = a$ es

$$y_a = \lim_{h=0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h}}{h} = 0.$$

En este caso y_a tiene un valor determinado igual á cero, mientras que cuando se aproxima x indefinidamente por la derecha ó por la izquierda al valor a es indeterminado.

Observación 2.ª En general no se habla de límite de y para $x = a$ (á la derecha ó á la izquierda) sino cuando el valor y_a no está definido, ó cuando, siendo conocido, es diferente del valor del límite.

En general, cuando se habla de límite, domina la idea de no llegar al valor límite (*).

43. En el caso de una función de varias variables, por ejemplo dos, dada σ, debe poder obtenerse un entorno del punto $(a_1\ a_2)$ tal, que para todos los puntos de dicho entorno, la diferencia entre A é y sea menor que σ.

Pero este entorno puede ser de varias especies.

Puede suceder que existan uno ó varios segmentos de recta que partan del punto $(a_1\ a_2)$, y entonces esto quiere decir que la y tiene por límite A sólo cuando las variables (x_1, x_2) se aproximen á (a_1, a_2) de un modo especial y no de otro. O puede suceder que el entorno de que se trata sea un área plana que tenga el punto $(a_1\ a_2,)$ no como un punto interior, sino como un punto del contorno, lo que quiere decir que entonces y tiene A por límite, cuando el punto (x_1, x_2) se aproxima al $(a_1\ a_2)$ en ciertas direcciones, en número infinito, pero no en todas las direcciones; y puede ocurrir que el entorno comprenda siempre en su interior al punto $(a_1\ a_2)$ y entonces el límite subsiste, cualquiera que sea la dirección según la cual hagamos aproximarse el punto $(x_1\ x_2)$ al $(a_1\ a_2)$. Se ve que en este caso en vez de considerarse dos límites como en el caso de una variable, se pue-

(*) Dini. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, pág. 26.

den considerar infinitos límites diversos, según las infinitas direcciones, en las que se aproxima el punto $(x_1\ x_2)$ al $(a_1\ a_2)$.

Podemos observar también que la variable independiente x puede aproximarse de varios modos al valor a. Así, puede aproximarse de un modo *continuo*, es decir, recorriendo x todo el segmento rectilíneo, ó sus infinitos puntos; puede también aproximarse á a no pasando por los infinitos puntos del segmento, sino por un conjunto de infinitos puntos cuyo punto-límite sea a, ó *saltuariamente* (*).

§ 2.° Funciones discontinuas

44. Especies de discontinuidad. 1.° Cuando a no es un extremo del intervalo que se considera, en el caso de tener los valores $f(a+h)$ y $f(a-h)$ de $f(x)$ á derecha ó izquierda un límite determinado A diferente del valor de $f(x)$ en a, tendremos una *discontinuidad que puede suprimirse*, según la expresión de Riemann, si en vez de $f(a)$ se toma A por valor de la función en el punto a. evitable

2.° Si el punto en que $f(x)$ es discontinua no es un extremo del intervalo, y los valores de ésta á un lado de a tienen por límite $f(a)$ y al otro lado no tienen límite determinado, ó lo tienen distinto de $f(a)$, se dirá que $f(x)$ es *continua á un lado* (á derecha ó izquierda) de a y *discontinua al otro lado*, es decir, discontinua *á un solo lado de a*.

3.° Si á un lado de a hay discontinuidad de $f(x)$, y ésta es tal que los valores de $f(x)$ al mismo lado de a tienen un límite determinado, se dirá que es una discontinuidad *ordinaria* ó de *primera especie*, mientras que si los mismos valores de $f(x)$ no tienen un límite determinado, la discontinuidad será de *segunda especie*, y así las discontinuidades que pueden quitarse cambiando el valor de la función en el punto correspondiente, serán siempre discontinuidades ordinarias á los dos lados de este punto; y

(*) Pascal. *Obra cit.*

cuando la función $f(x)$ en un punto a, que no es un extremo del intervalo es discontinua, podrá suceder que sea continua á un lado de a y que tenga al otro una discontinuidad ordinaria, ó una discontinuidad de segunda especie, ó que siendo discontinua á los dos lados de a, tenga en ambos una discontinuidad ordinaria ó una discontinuidad de segunda especie ó tenga á un lado una discontinuidad ordinaria y al otro una discontinuidad de segunda especie; y cambiando el valor de la función en este punto, podremos quitar siempre la discontinuidad al menos á un lado si es de primera especie, pero no si es de segunda.

Así, cuando el punto de discontinuidad de $f(x)$ sea un extremo del intervalo, si la discontinuidad es de primera especie, podrá considerarse como de la que puede suprimirse cambiando el valor de la función en dicho punto.

Debe observarse que cuando á un lado de un punto a se tenga una discontinuidad de segunda especie, los valores de $f(x)$ al aproximarse x hacia a por el mismo lado formarán continuas oscilaciones (en número infinito) de amplitud mayor que cierto número dado (*), porque entonces estos valores de $f(x)$ no tendrán un límite determinado. Y de esto se tiene un ejemplo en la función que, para los valores de x diferentes de a es igual á $\operatorname{sen} \frac{1}{x-a}$ y para $x = a$ es cero, porque esta función, para $x = a$ á derecha é izquierda tiene una discontinuidad de segunda especie, y al aproximarse indefinidamente x hacia a, á uno ú otro lado, oscila continuamente entre -1 y $+1$.

Además puede notarse que una función continua á derecha ó izquierda de un punto a, ó que tenga simplemente una discontinuidad ordinaria á uno de los dos lados del mismo, podrá hacer en la proximidad al lado que se considera un número infinito de oscilaciones; pero la amplitud de estas se empequeñecerá fuera de todo límite, con aproximarse x hacia a.

Esto sucede en el punto $x = 0$ á la función que para x dis-

(*) Véase Dini. *Obra cit.*, págs. 29-30.

tinta de cero es igual á $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ y que para $x = a$ es cero ó tiene otro valor finito cualquiera.

Además debe observarse que una función podrá ser continua ó tener solamente una discontinuidad ordinaria á un lado de a, por ejemplo á la derecha, y ser después discontinua y aun discontinua de segunda especie á la izquierda de los puntos que se encuentran en la parte á derecha de todo entorno de a arbitrariamente pequeño (esto es, los puntos situados á la derecha de a y próximos cuanto se quiera de a); y viceversa, puede haber discontinuidad y también de segunda especie á la derecha de a, y continuidad á la izquierda de los puntos, próximos cuanto se quiera de a y que estén á la derecha de a.

En efecto, el haber continuidad á la derecha de un punto a, ó una discontinuidad ordinaria, lleva consigo el que para todo número positivo σ exista un número positivo ε tal, que en el intervalo $(a, a + \varepsilon)$, que tiene el extremo inferior en a, se tenga numéricamente

$$f(a + \varepsilon) - f(a + \delta) < \sigma \tag{1}$$

Por el contrario, el haber continuidad ó solo discontinuidad ordinaria á la izquierda de un punto $x = a + \varepsilon'$ que se encuentra á la derecha de a y próximo cuanto se quiera de a, implica que para todo número positivo σ_1 exista un intervalo $(a + \varepsilon' - \varepsilon_1, a + \varepsilon')$ *con el extremo superior en el punto fijo* $a + \varepsilon'$, para todo punto x en el cual se tenga numéricamente

$$f(a + \varepsilon' - \varepsilon) - f(x) < \sigma_1; \tag{2}$$

y esto demuestra inmediatamente lo arriba enunciado ya que una de las dos condiciones (1) y (2) no implica la otra, por cuanto con disminuir σ continúa existiendo siempre un intervalo $(a, a + \varepsilon)$ con extremo inferior en a y en el cual queda satisfecha la condición (1), no es necesario que al disminuir σ_1, deba continuar existiendo un intervalo $(a + \varepsilon' - \varepsilon'_1, a + \varepsilon')$ con el extremo superior en el *punto fijo* $a + \varepsilon'$ en el cual quede satisfecha la condición (2).

Supongamos ahora que la función $f(x)$ tenga una discontinuidad de primera ó de segunda especie á un lado del punto a, á la derecha, por ejemplo, y observemos que todos los números positivos σ diferentes de cero pueden distinguirse en números que satisfacen respectivamente y números que no satisfacen á la condición de que para ellos sea posible siempre hallar un intervalo á la derecha de a $(a, a + \varepsilon)$ en el cual sea siempre en valor absoluto

$$f(x) - f(a) < \sigma.$$

Entonces por las consideraciones expuestas acerca de la división de los números en dos clases, se verá que debe existir un número σ', límite inferior de los números σ para los cuales existe el intervalo $(a, a + \varepsilon)$, que realizará la división de los números en las dos clases indicadas, y este número σ' será diferente de cero, porque de otro modo no existiría en $f(x)$ la discontinuidad supuesta, y gozará de la propiedad que para todo número $\sigma > \sigma'$ existirá un intervalo $(a, a + \varepsilon)$ á la derecha de a, en el cual se tendrá siempre numéricamente $f(x) - f(a) < \sigma$, mientras que para todo número positivo $\sigma < \sigma'$, existirán en cualquier intervalo $(a, a + \varepsilon)$ valores de x para los cuales será numéricamente $f(x) - f(a) > \sigma$.

Este número σ' se llama el *salto* de la función en el punto a, *á la derecha*.

Análogamente habrá un *salto* σ' *á la izquierda*, cuando $f(x)$ sea discontinua á la izquierda. Y cuando $f(x)$ sea discontinua á ambos lados de a, se llamará *salto* de la función en el punto a, al mayor de los dos números que representan el salto á la derecha y á la izquierda.

Cuando $f(x)$ es continua á derecha ó izquierda de a ó tiene tan solo una discontinuidad ordinaria, por la notación de Dirichlet se suele indicar con $f(a + 0)$ ó $f(a - 0)$ el límite para h, positivo y tendiendo á cero, de los valores $f(a + h)$ ó $f(a - h)$

que se tienen para $f(x)$ en el lado correspondiente. Por tanto si hay continuidad á los dos lados, ó si hay una discontinuidad de las que pueden suprimirse cambiando el valor de la función en dicho punto a, las cantidades $f(a+0)$ y $f(a-0)$ serán iguales entre sí y en el primer caso serán iguales á $f(a)$.

Pero la misma cantidad no tendrá ningún significado, cuando la discontinuidad de $f(x)$ en el lado á que nos referimos de a, es de segunda especie.

En el caso de ser la discontinuidad para $x=a$, al menos á uno de los lados, á la derecha por ejemplo, una discontinuidad ordinaria, el salto de la función será evidentemente el valor absoluto de $f(a+0)-f(a)$, é igualmente el valor absoluto de $f(a-0)-f(a)$ será el salto de $f(x)$ en el caso en que se tenga una discontinuidad ordinaria á la izquierda de a (*).

Ejemplo. Como ejemplo de una discontinuidad de segunda especie tenemos la que ofrece la función definida por la serie:

$$\frac{1-x}{1+x}+\frac{2x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)}+\dots+\frac{2x^{k-1}(1-x)}{(1+x^k)(1+x^{k-1})}+\dots$$

pues se tiene sucesivamente que

$$\frac{1-x^m}{1+x^m}=-1+\frac{2}{1+x^m},$$

$$\frac{1}{1+x^m}=\frac{1}{1+x^{m-1}}+\frac{x^{m-1}(1-x)}{(1+x^m)(1+x^{m-1})},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)}$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}+\frac{1(1-x)}{2(1+x)};$$

(*) Dini *Fondamenti per la teorica delle funzione di variabili reale.*

y haciendo las sustituciones sucesivas,

$$\frac{1-x^m}{1+x^m}=\frac{2(1-x)}{2(1+x)}+\frac{2x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)}+\ldots.. + \frac{2x^{m-1}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^m)}$$

y por consiguiente

$$\lim_{m=\infty}\frac{1-x^m}{1+x^m}=2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{x^{k-1}(1-x)}{(1+x^{k-1})(1+x^k)}.$$

De esta igualdad resulta que la función dada es igual á

$+1$ ó -1, según que x es $<$ ó $>$ que 1,

0 ó ∞ si $x=1$ ó $x=-1$.

La función es discontinua en el punto $x=1$, donde pasa del valor $+1$ al -1 y en el punto $x=-1$ donde es infinita.

Ejemplos. Como ejemplo de funciones discontinuas tales que $f(x+h)$ y $f(x-h)$ tengan cuando h tienda hacia cero, límites diferentes de $f(x)$, se puede presentar la función $E(x)$ que representa el mayor entero contenido en x. Se tiene

$$E(n-0)=n-1,\quad E(n)=n,\quad E(n+0)=n.$$

Otro ejemplo ofrece la función (x) que representa la diferencia entre x y el entero más próximo, la cual es indeterminada para todos los valores de $x=$ entero $+\frac{1}{2}$. En este caso hacemos $(x)=0$.

Esta función es continua, excepto para los valores de $x=n+\frac{1}{2}$ siendo n entero, y se tiene entonces

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)=0,\quad \left(n+\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{2},\quad \left(n+\frac{1}{2}+0\right)=-\frac{1}{2}.$$

45. CONDENSACIÓN DE LAS SINGULARIDADES. Existen funciones que en un intervalo finito son discontinuas en un número infinito de puntos, separados por otros en que son continuas, y existen funciones que en un intervalo finito, son discontinuas en todos los puntos.

Para formar funciones de esta naturaleza, Hankel halló el *método de la condensación de las singularidades*, por medio del cual, partiendo de una función con un número limitado de singularidades, se forma una función con infinitas singularidades. (*)

Para dar una idea de este método, representemos por $\varphi(y)$ una función que entre $y = -1$ é $y = +1$, exceptuado el punto $y = 0$, sea continua y menor que una cantidad M, que en el punto 0 sea nula y que, cuando y tiende hacia cero, pasando separadamente por valores positivos y negativos, tienda hacia un límite diferente de cero, ó á dos límites de los cuales, uno por lo menos sea distinto de cero.

La función $\varphi(\text{sen}\, p\pi x)$ en la que p es entero, será nula y discontinua en los puntos donde $x = \frac{m}{p}$ (m entero) y será continua en los demás puntos.

En estos últimos puntos, la función

$$f(x) = \sum_1^\infty A_n \varphi(\text{sen}\, n\pi x) \qquad (1)$$

es también continua si $A_1, A_2, \ldots$ representan cantidades positivas tales, que la serie $\sum_1^\infty A_n$ sea convergente. En efecto, en este caso, á cada valor δ, tan pequeño como se quiera, corresponderá un valor α_1 de α tal, que la desigualdad

$$\sum_{n=\alpha+1}^{\alpha+\beta} MA_n < \delta$$

(*) Hankel. *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen.* Gomes Teixeira, *Curso de Analyse infinitesimal.*

quede satisfecha cuando $\alpha > \alpha_1$. Luego *a fortiori* la desigualdad

$$\left| \sum_{n=\alpha+1}^{\alpha+\beta} A_n \varphi(\operatorname{sen} n\pi x) \right| < \delta$$

quedará satisfecha, para los mismos valores de α; luego la serie (1) es uniformemente convergente, y por tanto la función $f(x)$ es continua en los puntos considerados (21).

Consideremos ahora los puntos en que la función $\varphi(\operatorname{sen} p\pi x)$ es discontinua y supongamos que p sea par.

Hagamos $n = ap + b$ siendo $b < p$. Tenemos

$$f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum_{a,b} A_{ap+b} \varphi \left[\operatorname{sen} (ap+b) \frac{m}{p} \pi \right],$$

refiriéndose el signo Σ á todos los valores enteros y positivos de a y de b, excluyendo los términos correspondientes á $b = 0$, que son nulos.

Tenemos de igual modo

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) = \Sigma A_{ap+b} \varphi \left[\operatorname{sen} (ap+b) \left(\frac{m}{p} + h\right) \pi \right],$$

ó separando los términos correspondientes á $b = 0$,

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) = \Sigma A_{ap+b} \varphi \left[\operatorname{sen} (ap+b) \left(\frac{m}{p} + h\right) \pi \right] + \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi\, [\operatorname{sen} (am\pi + aph\pi)].$$

Luego será

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum_{a,b} A_{ap+b} \left\{ \varphi \left[\operatorname{sen} (ap+b) \left(\frac{m}{p} + h\right) \pi \right] - \varphi \left[\operatorname{sen} (ap+b) \frac{m}{p} \pi \right] \right\} + \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi (\operatorname{sen} aph\pi),$$

y por ser la función

$$\sum_{a,b} A_{ap+b} \varphi \left[\operatorname{sen} (ap+b) \frac{m}{p} \pi \right]$$

continua, cuando b es distinto de cero,

$$\lim_{h=0}\left[f\left(\frac{m}{p}+h\right)-f\left(\frac{m}{p}\right)\right]=\lim_{h=0}\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\varphi\,(\text{sen } aph\pi).$$

Ya tienda h hacia cero pasando por valores positivos ó por valores negativos, á causa de ser la serie

$$\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen } aph\,\pi)$$

uniformemente convergente en la proximidad de $h=0$, se concluye, que para un valor tan pequeño como se quiera de δ, existe siempre un valor α_1 tal, que la desigualdad

$$\left|\sum_{a=\alpha+1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen } aph\,\pi)\right|<\frac{\delta}{3}$$

queda satisfecha para valores de α mayores α_1.

Además, por ser convergente la serie ΣA_{ap}, existe un número α_2 tal, que la desigualdad

$$\left|\lim_{h=0}\varphi(\text{sen } aph\,\pi)\sum_{a=\alpha+1}^{\infty}A_{ap}\right|<M\left|\sum_{a=\alpha+1}^{\infty}A_{ap}\right.<\frac{\delta}{3}$$

queda satisfecha cuando $\alpha>\alpha_2$.

Luego las dos desigualdades precedentes quedan satisfechas simultáneamente para los valores de m superiores á α_1 y α_2.

Determinado asi α, se tiene siempre un valor h_1 tal, que la desigualdad

$$\left|\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi(\text{sen } aph\,\pi)-\lim_{h=0}\varphi(\text{sen } aph\pi)\sum_{a=1}^{\infty}A_{pa}\right|<\frac{\delta}{3}$$

queda satisfecha cuando $|h|<h_1$.

De estas tres desigualdades resulta

$$\left|\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi(\text{sen } aph\pi)-\lim_{h=0}\varphi(\text{sen } aph\pi)\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\right|<\delta$$

cuando $|h| < h_1$; por tanto

$$\lim_{h=0} \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi(\text{sen}\, aph\pi) = \lim_{h=0} \varphi(\text{sen}\, aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap},$$

de donde

$$\lim_{h=0} \left[f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) \right] = \lim_{h=0} \varphi(\text{sen}\, aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}.$$

Como por hipótesis uno por lo menos de los dos valores

$$\lim_{h=0} \varphi(\text{sen}\, aph\pi) \quad \text{y} \quad \lim_{h=0} \varphi(-\text{sen}\, aph\pi)$$

correspondientes, el uno á valores positivos y el otro á valores negativos de h, es diferente de cero, la función $f(x)$ es discontinua en los puntos $x = \frac{m}{p}$.

Por un razonamiento semejante se demuestra que la función $f(x)$ es discontinua en los puntos $x = \frac{m}{p}$, cuando m es impar.

Luego la función es continua cuando se dan valores irracionales á x, y discontinua en todos los puntos en que x es racional.

Para aplicar el método anterior, basta formar una función $\varphi(y)$ que satisfaga á las condiciones impuestas á esta función. Sea

$$\varphi(y) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y(y+1)^{k-1}}{[(y+1)^k + 1][(y+1)^{k-1} - 1]},$$

que se deduce de la serie estudiada en el número 44 haciendo $x = y + 1$.

En efecto, siendo aquella serie igual á $+1$, 0, -1, según que sea $x < 1$, $x = 1$, ó $x > 1$, ésta será igual á $+1$, 0, ó -1, según que $y < 0$, $y = 0$, ó $y > 0$.

Ejemplo. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! [\varphi(\text{sen}\, n\pi x)^2]} \quad \text{es igual á} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$$

cuando x es un número irracional, y es infinita, cuando x es racional, porque en el primer caso la función $[\varphi(\text{sen } n\pi x)]^2$ es igual á $+1$, y en el segundo caso es nula, cuando $n = p$ y $x = \dfrac{m}{p}$; luego la función

$$f(x) = \frac{e - 1}{\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n![\varphi(\text{sen } n\pi x)]^2}}$$

es igual á cero cuando x es racional, y es igual á $+1$ cuando x es irracional.

Por tanto es totalmente discontinua en un intervalo cualquiera.

§ 3.° Funciones integrables.

46. Teorema de Darboux. Sean M, m y Δ el límite máximo, el mínimo y la oscilación de una función en un intervalo (a, b), y consideremos otro intervalo (x_0, x_1) comprendido en el primero, es decir, tal, que se tenga

$$x_0 \geqq a, \quad x_1 \leqq b.$$

El límite máximo M′ del segundo intervalo no podrá ser mayor que M, ni su límite mínimo m' menor que m; luego

$$M' \leqq M, \quad m' \geqq m, \quad \Delta' \leqq \Delta.$$

Sean ahora (a, c) y (c, b) dos intervalos consecutivos á los que corresponden respectivamente M, m, Δ y M′, m', Δ', y sea (x_0, x_1) un nuevo intervalo comprendido en $(a, b,)$ tal, que

$$x_0 \nless c < x_1;$$

este nuevo intervalo tiene una parte común con los otros dos (empiète). El límite máximo en (x_0, x_1) será á lo más igual al mayor de los dos números M y M'. Análogamente el límite mínimo será superior ó igual al menor de los dos números m y m'. En fin, la oscilación será á lo más igual á la suma $\Delta + \Delta'$ de las oscilaciones en los dos intervalos consecutivos (a, c) y (c, b).

Esto sentado, consideremos una función cualquiera $f(x)$, definida en un intervalo (a, b) y sujeta á permanecer comprendida entre dos límites fijos A y B. Las oscilaciones de la función en todo intervalo comprendido en (a, b) son evidentemente finitas é inferiores á B — A.

Intercalemos entre a y b $n - 1$ valores $x_1, \ldots\ldots, x_{n-1}$, y hagamos, para abreviar,

$$x_1 - a = \delta_1, \quad x_2 - x_1 = \delta_2, \ldots\ldots \quad a - x_{n-1} = \delta_n$$

Tendremos las tres sumas

$$M = M_1\delta_1 + \ldots\ldots + M_n\delta_n,$$
$$m = m_1\delta_1 + \ldots\ldots + m_n\delta_n,$$
$$\Delta = \Delta_1\delta_1 + \ldots\ldots + \Delta_n\delta_n,$$

entre las que existe la relación idéntica

$$\Delta = M - m.$$

Se puede demostrar que: *Cuando se tome* n *suficientemente grande y los intervalos* δ *tiendan hacia cero, las tres sumas, cualquiera que sea la función considerada, continua ó discontinua, tenderán cada una hacia un límite finito y determinado, que solo dependerá de la naturaleza de la función y de los valores extremos* a *y* b *que limitan el intervalo considerado.*

En efecto, supongamos que se pasa de un sistema de intervalos δ_i á otro subdividiendo éstos, por ejemplo,

$$a, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots\ldots, \quad y_{p-1}, x_1,$$
$$x_1 \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots\ldots, \quad z_{q-1}, x_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es fácil demostrar que en el nuevo sistema de intervalos, las sumas M y Δ se harán menores ó permanecerán constantes, y m ó será constante ó aumentará. Consideremos, por ejemplo, M.

Llamemos $\delta_1^1, \delta_1^2, \ldots\ldots \delta_1^p$ los p intervalos en que se descompone δ_1, tendremos:

$$\delta_1 = \delta_1^1 + \delta_1^2 + \ldots\ldots + \delta_1^p.$$

Sea M_1^i el límite máximo en δ_1^i. El término $M_1\delta_1$ de M se deberá sustituir, cuando se haya hecho la subdivisión, por

$$M_1^1\delta_1' + \ldots\ldots + M_1^p\delta_1^p.$$

Pero, los máximos $M_1^1, \ldots\ldots, M_1^p$ son todos iguales ó menores que M_1; luego

$$M_1^1\delta_1 + M_1^2\delta_1^2 + \ldots\ldots + M_1^p\delta_1^p \leqq M_1(\delta_1' + \ldots\ldots + \delta_1^p) \leqq M_1\delta_1$$

luego: *En toda subdivisión de los intervalos, por lejos que se continúe,* M *solo puede permanecer constante ó disminuir. Tiene pues, un límite.*

Análoga conclusión se obtendrá respecto á m.

Falta demostrar que *los tres límites permanecen siempre los mismos, de cualquier modo que los intervalos tiendan hacia cero.*

Con este objeto sea $\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_n$ un sistema de intervalos y

$$M = M_1\delta_1 + \ldots\ldots + M_n\delta_n$$

la suma correspondiente. Tomemos otro sistema de intervalos $\delta_1', \ldots\ldots, \delta_p'$ tal, que el mayor de éstos sea menor que el menor de los intervalos δ dividido por un entero h. Entonces se tendrá para cualquier valor de α y β,

$$\delta_\alpha' < \frac{\delta_\beta}{h}$$

y, sea

$$M' = M_1'\delta_1' + \ldots\ldots + M_p'\delta_p'$$

el valor de la suma M correspondiente á este nuevo sistema de intervalos.

Proponémonos con esto, no hallar un límite superior de la diferencia $M' - M$, sino un número mayor que $M' - M$.

Sean

$$a,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_{n-1},\ b;\quad a,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_{p-1},\ b$$

las dos series de valores de x, que determinan respectivamente los intervalos

$$\delta_1 = x_1 - a,\quad \delta_2 = x_2 - x_1,\ \ldots\ldots;$$
$$\delta'_1 = y_1 - a,\quad \delta'_2 = y_2 - y_1,\ \ldots\ldots$$

Intercalando estas dos series entre a y b, se tendrá

$$a,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_\mu,\ x_1,\ y_{\mu+1},\ \ldots\ldots\ldots,$$
$$y_\nu,\ x_2,\ y_{\nu+1},\ \ldots\ldots,\ y_\rho,\ x_3,\ \ldots\ldots,\ b$$

Siendo los intervalos δ' menores que los δ, entre dos valores consecutivos de y no pueden hallarse dos valores de x. Tendremos pues,

$$\delta_1 = x_1 - a = y_1 - a + y_2 - y_1 + \ldots + y_\mu - y_{\mu-1} + x_1 - y_\mu$$
$$\delta_2 = x_2 - x_1 = y_{\mu+1} - x_1 + y_{\mu+2} + \ldots\ldots + \ldots\ldots x_2 - y_\nu$$
$$\delta_3 = x_3 - x_2 = y_{\nu+1} - x_2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_3 - y_\rho$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y por consiguiente

$$\mathrm{M} = (y_1 - a)\,\mathrm{M}_1 + (y_2 - y_1)\,\mathrm{M}_1 + \ldots\ldots + (x_1 - y_\mu)\,\mathrm{M}_1$$
$$+ (y_{\mu+1} - x_1)\,\mathrm{M}_2 + \ldots\ldots + x_2 - y_\nu)\,\mathrm{M}_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{M}' = (y_1 - a)\,\mathrm{M}'_1 + (y_2 - y_1)\mathrm{M}'_2 + \ldots\ldots + (x_1 - y_\mu)\,\mathrm{M}'_{\mu+1}$$
$$+ (y_{\mu+1} - x_1)\,\mathrm{M}'_{\mu+1} + \ldots\ldots + (x_2 - y_\nu)\,\mathrm{M}'_{\nu+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{M}' - \mathrm{M} = (y - a)\,(\mathrm{M}'_1 - \mathrm{M}_1) + \ldots\ldots + (x_1 - y_\mu)\,(\mathrm{M}'_{\mu+1} - \mathrm{M}_1)$$
$$+ (y_{\mu+1} - x_1)\,(\mathrm{M}'_{\mu+1} - \mathrm{M}_2) + \ldots + (x_2 - x_\nu)\,(\mathrm{M}'_{\nu+1} - \mathrm{M}_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pero, hallándose comprendidos, por ejemplo, los intervalos $\delta'_1, \delta'_2, \ldots\ldots$ en δ, los límites máximos $M'_1, \ldots\ldots, M'_\mu$, son inferiores ó iguales á M_1; luego

$$\begin{aligned} M' - M \leqq (x_1 - y_\mu)(M'_{\mu+1} - M_1) + (y_{\mu+1} - x_1)(M'_{\mu+1} - M_2) \\ + (x_2 - y_\nu)(M'_{\nu+1} - M_2) + \ldots\ldots \\ + (x_3 - y_\rho)(M'_{\rho+1} - M_3) + \ldots\ldots \end{aligned}$$

y siendo cada una de las diferencias $M'_{\mu+1} - M_1, \ldots\ldots$, en valor absoluto inferior á $B - A$, se tiene

$$M' - M < \delta'_{\mu+1} + \delta'_{\nu+1} + \delta_{\rho+1} + \ldots\ldots)(B - A);$$

pero $$\delta'_{\mu+1} < \frac{\delta_1}{h}, \quad \delta'_{\nu+1} < \frac{\delta_2}{h}, \quad \ldots\ldots;$$

luego

$$M' - M < \frac{B - A}{h}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots\ldots) < \frac{(b - a)(B - A)}{h};$$

y la diferencia $M' - M$, *si es positiva*, será inferior á un número que tiende hacia cero, cuando h crece indefinidamente; podrá pues, hacerse menor que cualquier número dado.

Si ahora suponemos que en cada sistema de intervalos se haga tender á éstos hacia cero, vamos á demostrar que los límites de la suma M, para cada sistema de división, serán iguales.

Sea μ el límite de M en un primer sistema de división y μ' en otro. Si no son iguales, será por ejemplo $\mu' > \mu$.

Esto sentado, en el sistema de los intervalos correspondientes al límite μ se puede tomar un número de éstos bastante grande, para que la suma M correspondiente satisfaga á las desigualdades

$$\mu < M < \mu + \sigma < \mu;$$

Entonces, en el sistema correspondiente á μ', todas las sumas M' serán mayores que μ' y por consiguiente, que M.

Supongamos que se haya llevado la subdivisión bastante lejos, para que todos los intervalos correspondientes á la suma M′ sean menores que los intervalos correspondientes á M, divididos por h. Se tendrá

$$M' - M < \frac{(b-a)(B-A)}{h}.$$

Así se podrá hacer la diferencia positiva M′ — M menor que cualquier número dado, tomando h suficientemente grande. Esto es evidentemente imposible, si $\mu' > \mu$, puesto que la suma M′ es mayor que μ' y la suma M menor $\mu + \sigma$; luego

$$M' - M > \mu' - \mu - \sigma;$$

y como se puede hacer σ tan pequeña como se quiera, M′ — M se podrá hacer mayor que un número determinado; luego μ' no puede ser diferente de μ.

Termina el Sr. Darboux su demostración haciendo ver que la suma M se aproximará siempre á μ, cualquiera que sea el sistema de división adoptado, con tal que los intervalos tiendan hacia cero.

Así, para cualquier sistema de intervalos, si se subdivide indefinidamente de una manera cualquiera, haciendo tender sus intervalos hacia cero, la suma M, siempre decreciente, tenderá hacia un límite determinado μ.

Para llegar á la definición de la integral, según Riemann, basado en las conclusiones que preceden, M. Darboux divide las funciones discontinuas en dos clases, pues habiendo demostrado que las tres sumas

$$M = \delta_1 M_1 + \ldots\ldots + \delta_n M_n$$

$$m = \delta_1 m_1 + \ldots\ldots + \delta_n m_n$$

$$\Delta = \delta_1 D_1 + \ldots\ldots + \delta_n D_n$$

tienden hacia límites finitos y determinados, cuando todos los intervalos tienden hacia cero, llamando M_{ab}, m_{ab} y Δ_{ab} á estos límites, obtiene

$$\Delta_{ab} = \mathrm{M}_{ab} - m_{ab};$$

y como la naturaleza íntima de la función depende del límite Δ_{ab}, resulta que, para una primera clase de funciones, se tendrá

$$\Delta_{ab} = 0, \quad \mathrm{M}_{ab} = m_{ab},$$

y para la segunda clase, Δ_{ab} será en general una función de a y b distinta de cero.

Riemann da el carácter que permite reconocer si la suma

$$\Delta = \delta_1 \mathrm{D}_1 + \ldots\ldots + \delta_n \mathrm{D}_n$$

tiende hacia cero, pues tomando una cantidad fija σ, tan pequeña como se quiera, *para que la suma Δ tienda hacia cero, es necesario y suficiente que la magnitud total de los intervalos para los que la oscilación es mayor que σ, tienda hacia cero cuando* n *aumenta indefinidamente.*

Esta condición es necesaria, porque si no queda satisfecha, la contribución total de los intervalos, en que la oscilación es mayor que σ, á la suma Δ, es mayor que su longitud total l multiplicada por σ; y como l no tiende hacia cero, Δ será siempre mayor que $l\sigma$, y no tenderá hacia cero.

Dicha condición es suficiente; porque si queda satisfecha, la contribución de los intervalos en que la oscilación es mayor que σ, será menor que $l(\mathrm{B} - \mathrm{A})$. Por otra parte, siendo la magnitud total de los demás intervalos menor que $(b - a)$, se tendrá

$$\Delta < l(\mathrm{B} - \mathrm{A}) + \sigma\,(b - a),$$

tendiendo l hacia cero y pudiendo ser σ tan pequeña como se quiera, se puede concluir que Δ_{ab} es inferior á todo número positivo tan pequeño como se quiera; luego

$$\Delta_{ab} = 0.$$

Siendo $f(x)$ una función continua comprendida entre A y B, cuando x varia entre a y b, y x_1, x_1, ... una serie creciente de valores entre estos dos límites, y $\delta_1 = x_1 - a$, $\delta_2 = x_2 - x_1$, ..., consideremos la suma

$$\Sigma = \delta_1 f(a + \theta\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \theta_2\delta_2) + \dots.$$

dependiente de los intervalos δ y de las cantidades θ. Estudiemos su variación.

Representando M_i y m_i los límites máximo y mínimo de la función en el intervalo i, el término $\delta_i f(x_i + \theta_{i+1}\delta_{i+1})$ permanecerá comprendido entre $\delta_i M_i$ y $\delta_i m_i$ cuando θ_{i+1} varía, y se aproximará cuanto se quiera á una de estas cantidades; luego la suma Σ quedará comprendida entre

$$M = \delta_1 M_1 + \dots + \delta_n M_n \quad \text{y} \quad m = \delta_1 m_1 + \dots + \delta_n m_n$$

á las que podrá aproximarse cuanto se quiera; luego si se supone que todos los intervalos δ tienden hacia cero, aumentando su número indefinidamente, para que la suma Σ tenga un límite, *cualesquiera que sean* las θ, es necesario y suficiente que los límites M y m sean iguales, y por consiguiente que se tenga

$$M_{ab} = m_{ab}, \quad \Delta_{ab} = 0$$

luego: *la condición necesaria y suficiente para que la suma* Σ *tenga un límite, es que la magnitud total de los intervalos en los que las oscilaciones son mayores que* σ *tienda hacia cero, cuando todos los intervalos tienden hacia cero, siendo* σ *fija, pero tan pequeña como se quiera.*

Si esta condición queda satisfecha, el límite Σ se llama la integral de $f(x)$ entre los límites a y b, y se tiene

$$\lim \Sigma = \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Si Δ_{ab} no es nula, el límite de Σ dependerá de la elección de las cantidades θ, y podrá adquirir todos los valores intermedios entre M_{ab} y m_{ab}, en este caso Σ será *indeterminada*. (*).

(*) *Mémoire sur les fonctions discontinues*. Ann. Scient. de l' Ecole Normal Supérieur.

47. Integrabilidad. Las funciones continuas son susceptibles de integración. Esto resulta del teorema siguiente: *Dada una función* f(x) *continua en el intervalo* (a, b), *se puede asignar, para cada valor de* σ, *tan pequeño como se quiera, una cantidad* δ *tal, que si se subdivide el intervalo* (a, b) *en intervalos todos menores que* δ, *las oscilaciones de la función en estos intervalos sean menores que* σ.

Pero fundándonos en las consideraciones del núm. 39 unidas á las que acabamos de exponer, nos bastará indicar que siendo toda la función continua también *uniformemente continua*, y puesto que siendo continua una función en cierto intervalo, éste puede subdividirse en otros, de modo qne en cada uno de éstos la oscilación sea una cantidad tan pequeña cómo se quiera, podemos añadir que para la *función continua*, el número τ, por ejemplo, que representa la suma de todos los intervalos en los cuales la oscilación excede á un número fijo σ', puede hacerse siempre cero, y por consiguiente las funciones continuas son *integrables*.

También son integrables las funciones finitas discontinuas que tienen un número finito de puntos de discontinuidad en los que la función tiene un salto finito, entendiéndose por *salto*, en el caso de ser el límite de la función indeterminado, la diferencia de los valores extremos entre los cuales oscila el valor de la función al aproximarse al punto a.

Para demostrar este teorema, indiquemos con $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ los n puntos de discontinuidad de la función que consideramos, rodeados de ó incluidos en intervalos tan pequeños como se quiera. Si d es el máximo de todos éstos, la suma de los mismos es menor que nd. En todo lo restante del intervalo total de integración, la función es continua, y por esto se puede efectuar la división en intervalos parciales tales, que la oscilación en ellos sea siempre menor que una cantidad cualquiera fijada σ'. Los intervalos en los cuales la oscilación de la función *pueda ser* mayor que σ', son los que se hallan alrededor de los puntos de discontinuidad; pero la suma de éstos es menor que nd, y puede hacerse tan pequeña como se quiera, porque n es finito y d arbitrario; luego en nuestro caso el límite de τ es cero.

Existen otras clases de funciones discontinuas integrables; para distinguirlas recordemos que los puntos de discontinuidad pueden formar un grupo infinito de puntos; pero un grupo infinito de puntos puede ser de dos especies: ó es posible reunir todos los puntos del grupo en intervalos cuya suma pueda hacerse menor que cualquier cantidad asignable, ó no puede conseguirse esto.

En el primer caso el grupo infinito de puntos es un *grupo discreto* y en el segundo un *grupo lineal de puntos*.

Las funciones discontinuas, según correspondan á uno de estos dos casos, se llaman *punteada discontinua* ó *función discontinua lineal*.

Teniendo presentes estas consideraciones en el razonamiento qne nos ha conducido á demostrar la integrabilidad de las funciones continuas, resulta el teorema de Riemann, expresado bajo esta forma: *una función punteada discontinua es integrable*, pues para la punteada discontinua se verifica la propiedad fundamental, consistente en que todos los puntos de discontinuidad pueden encerrarse en intervalos, cuya suma puede hacerse tan pequeña como se quiera.

Ejemplo. Si $f(x)$ tiene el valor 1 en todos los puntos del grupo.

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots\ldots$$

y el valor 0 en los demás puntos del segmento comprendido entre 0 y 1, dicha función es integrable en el intervalo. Su valor es cero; porque si hacemos la división del segmento de 0 á 1 en segmentos parciales, resultan dos especies de éstos, á saber los que rodean á los puntos de discontinuidad y los demás. La suma

$$\Sigma f_r \delta_r$$

correspondiente á los segundos intervalos es cero, porque $f(x)$

es siempre cero en ellos, y la parte de la suma correspondiente á los primeros intervalos tendrá siempre un valor menor ó igual al producto de todos los intervalos por 1, que es el valor de la función en los puntos de discontinuidad; pero la suma de estos intervalos puede hacerse tan pequeña como se quiera; luego el límite de la suma es cero.

TEOREMA. *Si todos los términos de una serie uniformemente convergente son funciones integrables, la serie representa una función integrable, y la integración se efectúa integrando todos sus términos.*

Para demostrar este teorema, hay que ver primero que, si dos funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son integrables y las sumas

$$\Sigma \varphi_r \delta_r \quad \text{y} \quad \Sigma \psi_r \delta_r$$

tienen límites determinados y finitos, también tendrá un límite determinado y finito la suma de estas sumas. Además:

El producto de dos funciones integrables es también integrable. En efecto, supongamos que φ y ψ son siempre positivas en todo el camino de la integración.

Siendo M_φ y m_φ, M_ψ y m_ψ los límites superiores é inferiores de las funciones propuestas, tendremos que

$$M_\varphi - m_\varphi, \quad M_\psi - m_\psi, \quad M_{\varphi\psi} - m_{\psi\varphi}$$

son las oscilaciones de φ, ψ, $\varphi\psi$ en el intervalo δ_r, y tendremos sucesivamente

$$M_{\varphi\psi} \leqq M_\varphi M_\psi, \quad m_{\varphi\psi} \geqq m_\varphi m_\psi;$$

luego

$$M_{\varphi\psi} - m_{\varphi\psi} \leqq M_\varphi M_\psi - m_\varphi m_\psi$$
$$\leqq M_\varphi (M_\psi - m_\psi) + m_\psi (M_\varphi - m_\varphi);$$

é indicando con $D_\varphi^{(r)}$, D_ψ^r las oscilaciones de las tres funciones

φ, ψ, $\varphi\psi$, tendremos

$$D_{\varphi\psi}^{(r)} \leqq M_\varphi D_\psi^{(r)} + m_\psi D_\varphi^{(r)},$$

y con mayor razón

$$D_{\varphi\psi}^{(r)} \leqq M_\varphi D_\psi^{(r)} + M_\psi D_\varphi^{(r)}.$$

Si representamos por M y M' los límites superiores de los valores de φ y ψ en todo el intervalo de la integración, tendremos con mayor razón

$$D_{\varphi\psi}^{(r)} \leqq MD_\psi^{(r)} + M'D_\varphi^{(r)}$$

$$\Sigma\delta_r D_{\varphi\psi}^{(r)} \leqq M\Sigma\delta_r D_\varphi^{(r)} + M'\Sigma\delta_r D_\varphi^{(r)}.$$

Por ser integrables las funciones dadas, las sumas

$$\Sigma\delta_r D_\psi^{(r)} \quad \text{y} \quad \Sigma\delta_r D_\varphi^{(r)}$$

tenderán hacia cero; luego también tenderá hacia cero $\Sigma\delta_r D_{\varphi\psi}^{(r)}$, y el producto de las dos funciones φ y ψ será integrable.

Si las funciones son negativas, basta repetir el razonamiento para $\varphi + C$ y $\psi + C'$, siendo C y C' constantes que hagan positivas á las dos expresiones.

Si ahora se trata de una suma de infinitos términos, cada uno de los cuales representa una función integrable, consideraremos la expresión

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots = \sum_1^\infty u_h(x)$$

ó bien

$$f(x) = \sum_{h=1}^{h=n} u_h(x) + R_n(x),$$

pudiendo ser, en virtud de la hipótesis, R_n tan pequeño como se quiera para cualquier punto x.

No pudiendo el valor límite superior de f superar á la suma de los límites superiores de todos los sumandos (pues solo en el caso particularísimo de que todos los sumandos tengan el máximo ó el mínimo en el mismo punto corresponderá el máximo ó mínimo de la función á la suma de los máximos ó mínimos de los sumandos), se tendrá

$$M^{(f)} \leqq M^{(1)} + M^{(2)} + \ldots\ldots + M^{(R)}$$
$$(m)^{(f)} \geqq m^{(1)} + m^{(2)} + \ldots\ldots + m^{(R)}$$

y restando

$$D_r^{(f)} \leqq D_r^{(1)} + D_r^{(2)} + \ldots\ldots + D_r^{(R)}.$$

Si ahora para cualquiera x se tiene, en valor absoluto, que

$$R_n x) < \sigma;$$

la oscilación de R no puede exceder á 2σ; luego

$$D_r^{(f)} \leqq D_r^{(1)} + D_r^{(2)} + \ldots\ldots + 2\sigma$$
$$\Sigma\delta_r D_r^{(f)} \leqq \Sigma\delta_r D_r^{(1)} + \Sigma\delta_r D_r^{(2)} + \ldots\ldots + 2\sigma\Sigma\delta_r.$$

Siendo $\Sigma\delta_r = b - a$, por tender á cero las sumas del segundo miembro, pues suponemos que las funciones $u_1(x), (u_2x)$ son integrables; y por ser σ susceptible de hacerse tan pequeño como se quiera, el primer miembro se podrá hacer tan pequeño como se quiera, y la función f será integrable. En fin, su integral es la suma de las integrales de sus términos, pues si escribimos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \ldots\ldots + \int_a^b R_n(x)dx,$$

teniendo el segundo miembro un número finito de términos, bastará demostrar que

$$\int_a^b R_n(x)dx$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera, haciendo á n suficientemente grande. Entonces la serie de las integrales

$$\sum_{h=1}^{h-\infty} \int_a^b u_h(x)dx$$

será una serie convergente, y su valor el de la integral de $f(x)$.

Pero $R_n(x)$ puede hacerse menor que σ para cualquiera x comprendida en el intervalo de la integración; luego

$$\int_a^b R_n(x)dx < \int_a^b \sigma dx = (b-a)\sigma,$$

en valor absoluto. Queda pues demostrado que el primer miembro de esta desigualdad puede hacerse menor que cualquier valor, tan pequeño como se quiera.

§ 4.° Funciones continuas no derivables.

48. Sea

$$f(x) = \sum_0^\infty b^n \cos(\pi a^n x),$$

representando a un número entero impar y b un número positivo menor que 1.

La serie que define la $f(x)$ es uniformemente convergente, cualquiera que sea x, porque, siendo convergente la serie Σb^n, de los máximos para $b < 1$, á cada valor δ, por pequeño que sea, corresponde un valor m_1 tal, que la desigualdad

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} b^n < \delta$$

queda satisfecha cuando $m > m_1$. Luego la desigualdad

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} b^n \cos \pi a^n x \right| < \delta$$

queda satisfecha por los mismos valores de m, cualquiera que sea x, y la serie es uniformemente convergente, y por ser cada término de la serie una función continua, la función $f(x)$ es continua.

Weierstrass demuestra que esta función no tiene derivada de la manera siguiente:

Sea x_0 un valor cualquiera de x, m un entero positivo y α_m un entero tal que se tenga

$$-\frac{1}{2} < a^m x_0 - \alpha_m \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}.$$

Haciendo

$$a^m x_0 - \alpha_m = x^{m+1}$$

y
$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^n}$$

resulta

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \quad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m}.$$

por lo cual se concluye que x_0 está comprendida entre x' y x'' y que se puede dar á m un valor tan grande, que x' y x'' difieran de x_0 en tan poco como se quiera. Hemos construido pues á los dos lados de x_0 dos grupos de puntos cuyo punto límite es x_0.

Formemos ahora la relación incremental. Se tiene

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \sum_0^\infty b^n \frac{\cos \pi a^n x' - \cos \pi a^n x_0}{x' - x_0}$$

$$= \sum_0^{m+1} (ab)^n \frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{a^n (x' - x_0)} +$$

$$+ \sum_0^\infty b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} \pi x' - \cos^{m+n} \pi x_0}{x' - x_0}.$$

Pero podemos escribir

$$\frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{a^n(x' - x_0)} =$$

$$= - \pi \operatorname{sen} \frac{1}{2} a^n \pi (x' + x_0) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a^n \pi (x' - x_0)}{\frac{1}{2} a^n \pi (x' - x_0)}$$

y los dos últimos factores del segundo miembro oscilan entre -1 y $+1$. El primero puede alcanzar este límite, pero el segundo no, mientras que x' no coincida con x_0.

Por consiguiente, tenemos en valor absoluto,

$$\sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{a^n (x' - x_0)} <$$

$$< \sum_{0}^{m-1} (ab)^n \pi < \frac{\pi (ab)^m}{ab - 1}$$

por ser la suma una progresión geométrica cuya razón es ab.

Examinemos ahora la segunda parte de la suma.

Por ser a un número entero impar, sustituyendo el valor de x' y el x_0, se tiene

$$\cos^{m+n} \pi x' = \cos a^n (a_m - 1) \pi = (-1)^{a_m - 1}$$

$$\cos^{m+n} \pi x_0 = \cos a^n (a_m \pi + \pi x_{m+1}) =$$

$$= (-1)^{a_m} \cos a^n \pi x_{m+1}.$$

Tenemos pues que

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} \pi x' - \cos a^{m+n} \pi x_0}{x' - x_0} =$$

$$= (-1)^{a_m - 1} (ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{1 + \cos a^n \pi x_{m+1}}{a^m (x' - x_0)}$$

$$= (-1)^{a_m} (ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{1 + \cos a^n \pi x_{m+1}}{1 + x_{m+1}}.$$

Los términos comprendidos en la suma son todos positivos; porque hallándose x_{m+1} siempre entre $-\frac{1}{2}$ y $+\frac{1}{2}$, el denominador será positivo y comprendido entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$, mientras que el numerador estará siempre comprendido entre 0 y 2.

El primero de estos términos

$$\frac{1 + \cos \pi x_{m+1}}{1 + x_{m+1}}$$

está comprendido entre $\frac{2}{3}$ y 4, porque el numerador está comprendido entre 1 y 2, no pudiendo ser $\cos \pi x_{m+1}$ negativo, ya que x_{m+1} es menor ó igual á $\frac{1}{2}$ en valor absoluto.

Representando ε' un número comprendido entre -1 y $+1$, y η' un número mayor que 1, tendremos pues

$$\frac{f(x') - f(x)_0}{x' - x_0} = \varepsilon' \frac{\pi(ab)^m}{ab - 1} + (-1)^{a_m} (ab)^m \frac{2}{3} \eta'$$

y análogamente resultará que

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = \varepsilon'' \frac{\pi(ab)^m}{ab - 1} - (-1)^{a_m} (ab)^m \frac{2}{3} \eta''$$

Eligiendo a y b de modo que

$$\frac{\pi}{ab - 1} < \frac{2}{3} \quad \text{ó} \quad ab > \frac{3}{2}\pi + 1,$$

en cada una de las anteriores fórmulas prevalecerá el signo del segundo termino, y las dos relaciones incrementales tendrán constantemente signos opuestos. Además por ser $ab > 1$, sus valores absolutos crecerán más allá de todo límite al crecer m, y por consiguiente al aproximarse los dos puntos x' y x'' al x_0. Así pues, la función $f(x)$ no tendrá para ningún valor de x^0 derivada determinada finita ó infinita.

Esto no se opone á que, para ciertos valores de x_0, pueda determinarse un grupo especial de puntos que tengan por punto-límite al x_0, y que para el mismo, el límite de la relación incremental sea determinado.

§ 5.° Integrales definidas singulares de Cauchy.

49. Definición. Se llama *integral definida singular*, según Cauchy, una integral de la forma

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)dx$$

en la que ε y ε' son infinitamente pequeños, pero de signos iguales, y en la que a es un valor de x que hace á $f(x)$ infinita. Se supone, por otra parte, $f(x)$ finita entre $a-\varepsilon$ y $a-\varepsilon'$. Las reglas para decidir cuando dichas integrales son finitas ó infinitamente pequeñas se fundan en el

Teorema I. *Sea* G *una cantidad comprendida entre el mayor y el menor valor que pueda tomar* f(x) *cuando* x *varía desde* x_0 *hasta* X; *se tiene, suponiendo que la función* φ(x) *sea siempre positiva ó siempre negativa entre dichos límites*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)dx = G\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx;$$

y si f(x) *es continua entre* x_0 *y* X,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)dx = f(x_0+\theta\,\overline{X-x_0})\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx,$$

expresando θ *un número comprendido entre* 0 y 1.

En efecto, sean M el máximo y m el mínimo de $f(x)$ entre x_0 y X, es evidente que $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ estará comprendida entre las expresiones

$$\int_{x_0}^{X} m\varphi(x)\,dx = m\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx \quad \text{y} \quad M\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx;$$

pero $G\displaystyle\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx$ es la expresión de las cantidades comprendidas entre las dos anteriores; de manera que si $f(x)$ es continua, pasará por el valor G comprendido entre x_0 y X; luego G es de la forma $f(x_0 + \theta\,\overline{X - x_0})$, hallándose θ comprendido entre 0 y 1, lo que demuestra el teorema.

Ejemplo. Para saber si es nula la integral singular

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}\sqrt{x}}\,dx,$$

se escribirá bajo la forma

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\sqrt{x}\cos x}{\operatorname{sen}\sqrt{x}}\,\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

ó, designando con ξ un valor de x comprendido entre ε y ε',

$$\frac{\sqrt{\xi}\cos\xi}{\operatorname{sen}\sqrt{\xi}}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,\frac{\sqrt{\xi}\cos\xi}{\operatorname{sen}\sqrt{\xi}}\left(\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon}\right);$$

el factor exterior al paréntesis es finito é igual á 2 para $\xi = 0$, el segundo tiene cero por límite; luego la integral singular es nula.

TEOREMA II. *Sean* α *un exponente menor que* 1, $\varphi(x)$ *una función de* x *que permanece inferior á una cantidad fija para valores de* x *próximos á* a, *la integral singular*

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}}\,dx$$

es nula cuando se supone á ε *y* ε' *infinitamente pequeños de igual signo.*

Supongamos que ε y ε' son positivos, entonces llamando M al máximo de $\varphi(x)$, cuando x varía desde a hasta $a+\varepsilon'$, se tendrá

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha}\,dx < \mathrm{M}\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

ó $$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha}\,dx < \frac{\mathrm{M}}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}-\frac{1}{\varepsilon'^{\alpha-1}}\right).$$

Cuando ε y ε' tienden hacia cero, el segundo miembro de esta fórmula tiende hacia cero, y por consiguiente la integral singular tiende hacia cero.

TEOREMA III. *Sean* α *un exponente mayor ó igual á* 1, $\varphi(\mathrm{x})$ *una función de* x *que permanece superior en valor absoluto á una cantidad fija, y que no cambia de signo para valores de* x *próximos á* a; *la integral singular*

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha}\,dx$$

puede hacerse tan grande como se quiera, eligiendo convenientemente ε *y* ε'.

Supongamos que ε y ε' son positivos y $\varphi(x)$ también. Llamemos m al mínimo de $\varphi(\varepsilon)$ cuando x varía entre a y $a+\varepsilon'$; se tendrá

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha}\,dx > m\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{dx}{(x-a)^\alpha};$$

si $\alpha = 1$, se tendrá

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha} > m\log\frac{\varepsilon'}{\varepsilon};$$

que será tan grande como se quiera cuando ε' sea suficientemente pequeño; luego la integral singular se podrá hacer tan grande como se quiera, si $\alpha > 1$.

Ejemplo. La integral singular

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{e^x dx}{\sqrt{x}},$$

es nula; y las siguientes pueden ser tan grandes como se quiera,

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{e^x dx}{x}, \quad \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{e^x dx}{x^2}, \quad \int_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon'} \frac{x}{1-x}\, dx.$$

§ 6.º Integrales en las que la función ó los límites se hacen infinitos

50. Caso de la función infinita. Supongamos que $f(x)$ se hace infinita para $x = a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k$, comprendidos entre x_0 y X, en la integral $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ que expresa el límite hacia el que tiende la expresión

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_0}^{a_1-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{a_1+\eta_1}^{a_2-\varepsilon_2} f(x)dx + \int_{a_2+\eta_2}^{a_3-\varepsilon_3} f(x)dx + \ldots \\ &\qquad + \int_{a_k+\eta_k}^{X} f(x)\,dx, \end{aligned}\right\} (1)$$

cuando los números positivos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots\ldots$ tienden hacia cero. La expresión (1) generalmente no tiene límite; pero hay casos en que este límite existe y permanece el mismo, para cualquier modo de variar las ε y las η al tender hacia cero.

Para decidir si una integral $\int_{x_0}^{X} \mathrm{f(x)dx}$ *tiene un valor bien determinado, se forman las integrales singulares tales como*

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx, \qquad \int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)\,dx,$$

expresando a *un valor que hace á* f(x) *infinita entre los límites* $\mathrm{x_0}$ *y* X; *y si todas estas integrales singulares son nulas, la integral* $\int_{x_0}^{X} \mathrm{f(x)dx}$ *está bien determinada.*

Se demuestra este teorema de Cauchy, probando que, si la integral singular $\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx$ es nula, la integral

$$\int_{p}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx, \tag{2}$$

en la que p expresa un número tal, que entre p y a, $f(x)$ no se hace infinita y se tiene un valor determinado. En efecto, la suma (1) que sirve para definir la expresión $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, puede ser descompuesta en integrales de la forma (2). Pero se tiene que

$$\int_{p}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx = \int_{p}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx.$$

Si la integral singular que figura en esta fórmula tiene por límite cero, de cualquier manera que ε y ε' tiendan hacia cero, se podrán tomar ε y ε' bastante pequeños para que aquélla sea siempre menor que $\frac{\mathrm{E}}{2}$ en valor absoluto, de modo que, si representamos $\int_{p}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx$ por $\varphi(\varepsilon)$, la fórmula precedente se podrá escribir

$$\varphi(\varepsilon') = \varphi(\varepsilon) + \int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx;$$

y se ve que $\varphi(\varepsilon')$ podrá hallarse comprendida entre límites $\varphi(\varepsilon) + \frac{E}{2}$ y $\varphi(\varepsilon) - \frac{E}{2}$, ó si se quiere, llamando A y B dos números fijos cuya diferencia sea E, se puede decir que $\varphi(\varepsilon')$ queda comprendida entre A y B para valores suficientemente pequeños de ε'. Pero podrá también hacerse de modo que $\varphi(\varepsilon')$ se halle comprendida entre otros dos números A′ y B′ cuya diferencia B′ — A′ sea menor que $E < \frac{E}{2}$; y como $\varphi(\varepsilon')$ debe quedar comprendida entre A y B, se puede suponer á A′ y B′ comprendidos entre A y B. Se vería tambien que $\varphi(\varepsilon')$ puede hallarse comprendida entre otros dos números fijos A″ y B″ cuya diferencia sea menor que $E'' < \frac{E'}{2}$, y por consiguiente comprendidos entre A′ y B′, y así sucesivamente. Tendremos pues

$$A \leqq A' \leqq A'' \ldots\ldots \leqq A^{(m)} < B^{(m)} \leqq B^{(m-1)} \ldots\ldots \leqq B;$$

de manera que no creciendo los números A, A′ A′, A″, ... más allá que B, tienen un límite *a*; y no decreciendo los números B, B′, ... hasta un valor menor que A, tienen un límite *b*. Por consiguiente *a* es igual á *b*, porque $A^{(m)} - B^{(m)}$ puede tomarse tan pequeño como se quiera, luego su límite $a - b$ es nulo.

En fin, pudiendo $\varphi(\varepsilon')$ hallarse comprendida entre $A^{(m)}$ y $B^{(m)}$, diferirá del límite *a* en menos de $A^{(m)} - B^{(m)}$ ó $E^{(m)}$, es decir, en menos de una cantidad menor que cualquiera otra dada; luego $\varphi(\varepsilon')$ tiene por límite $a = b$.

Ejemplo. La integral $\int_{-1}^{+1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, aunque la cantidad colocada bajo el signo $\int$ se hace infinita para $x = -1$ $x = +1$, es finita, porque las integrales singulares

$$\int_{-1+\varepsilon}^{-1+\varepsilon'} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int_{+1-\varepsilon}^{1-\varepsilon'} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

son nulas, pues la cantidad bajo el signo en la primera, puede escribirse así:

$$\frac{e^x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}} \quad \text{ó} \quad \frac{e^x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x}};$$

pero el exponente del factor que anula al denominador es < 1; y como $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-x}}$ no es nulo ni infinito para $x = -1$, la primera integral singular es nula. Se verá de igual manera que también es nula la segunda integral singular.

51. Integrales entre límites infinitos. Teorema I. *Para que la integral*

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{ó} \quad \int_{-\infty}^a f(x)dx,$$

en la cual f(x) *no se hace infinita cuando se hace variar* x *desde* a *hasta* ∞, *tenga un valor bien determinado, basta que la integral singular*

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} f(x)dx \quad \text{ó} \quad \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon'} f(x)dx$$

en la que ε *y* ε' *crecen indefinidamente, tenga un valor nulo, cualquiera que sea el modo de crecer de estas dos cantidades.*

Basta repetir el razonamiento hecho para demostrar el teorema demostrado en la pág. 119.

Teorema II. *Si* $\alpha > 1$ *y el límite de* $f(x)\,x^\alpha$ *es nulo para*

$x = \infty$, *la integral singular*

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,dx \tag{1}$$

es nula cuando ε *y* ε' *tienden hacia* $+\infty$.

En efecto, si el límite de $f(x)\,x^{\alpha}$ es nulo, hagamos

$$f(x)\,x^{\alpha} = \varphi(x);$$

la integral singular se escribirá

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\,dx;$$

y llamando M á una cantidad igual al mayor valor que pueda tomar $\varphi(x)$ entre los límites ε y ε', se ve que la integral (1) es menor en valor absoluto que

$$M\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{x^{\alpha}} \quad \text{ó} \quad \frac{M}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon'^{\alpha-1}}\right),$$

cantidad evidentemente nula para $\varepsilon = \infty$ y $\varepsilon' = \infty$, cuando $\alpha > 1$, porque M tiene o por límite para $x = \infty$.

De igual manera se demuestra que: *Si* $\alpha > 1$ *y el límite de* $f(x)x^{\alpha}$ *es nulo para* $x = -\infty$, *la integral* (1) *es nula cuando se suponen* ε *y* ε' *iguales á* $-\infty$.

Si $\alpha < 1$ ó $= 1$ *y además el límite de* $f(x)x^{\alpha}$ *es finito para* $x = \infty$, *ó si* $f(x)x^{\alpha}$ *crece conservando el mismo signo, la integral*

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,dx$$

es infinita para $\varepsilon = \infty$, *siempre que sea* ε *suficientemente grande.*

En efecto, haciendo $\varphi(x) = f(x)x^{\alpha}$, la integral dada será igual á

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\,dx,$$

y llamando M á una cantidad inferior en valor absoluto al valor mínimo que adquiere $\varphi(x)$ entre los límites ε y ε', valor que se puede suponer mayor que cero, se ve que

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\, dx > \mathrm{M} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

$$\text{si } \alpha = 1 \text{ se tiene } \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\, dx > \mathrm{M} \log \frac{\varepsilon'}{\varepsilon};$$

$$\text{si } \alpha < 1, \text{ se tiene } \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^{\alpha}} > \frac{\mathrm{M}}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon'^{\alpha-1}}\right).$$

En los dos casos la integral es infinita para $\varepsilon' = \infty$.

Teorema III. *Si* $\alpha < 1$ ó $= 1$ *y además la expresión* $f(x)x^{\alpha}$ *es finita ó infinita, pero diferente de cero para* $x = -\infty$, *la integral* $\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)dx$ *es infinita para* $\varepsilon' = -\infty$, *siempre que* ε *sea negativo y suficientemente grande en valor absoluto.*

Ejemplo 1.º La integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ es finita, porque el límite de $x^2 \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ para $x = \infty$ es nulo.

Ejemplo 2.º La integral $\int_2^{\infty} \frac{dx}{lx\sqrt{1+x^2}}$ es infinita pues considerando la integral singular

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{\log x\sqrt{1+x^2}} = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{x \log x} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

se ve que es mayor que la mitad de

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{xlx} = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dlx}{lx} = [llx]_{\varepsilon}^{\varepsilon'} = ll\varepsilon' - ll\varepsilon = l\frac{l\varepsilon'}{l\varepsilon},$$

que es tan grande como se quiera tomando ε' suficientemente grande con respecto á ε. La integral es pues infinita.

TEOREMA DE CAUCHY. *La serie*

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots\ldots + \varphi(n) + \ldots\ldots$$

y la integral definida $\int_0^\infty \varphi(x)dx$ *tienen al mismo tiempo valores finitos ó infinitos, cuando* $\varphi(x)$ *expresa una función indefinidamente decreciente desde* 0 *hasta* ∞, *y que tiene por límite cero.*

En efecto, se tiene

$$\int_0^\infty \varphi(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx + \int_1^2 \varphi(x)dx + \int_2^3 \varphi(x)dx + \ldots\ldots$$

Evidentemente

$$\int_0^n \varphi(x)dx < \varphi(a) + \varphi(1) + \ldots\ldots + \varphi(n-1); \qquad (1)$$

si pues, la serie es convergente para $n = \infty$, el segundo miembro será finito y también el primero. Pero además

$$\int_0^n \varphi(x)dx > \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots\ldots + \varphi(n);$$

y si el segundo miembro es infinito para $n = \infty$, la serie será divergente y la integral infinita. Igualmente, si la integral es finita, el primer miembro de (2) es finito, el segundo miembro también, y la serie es convergente.

Ejemplo 1.º La serie $\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots\ldots$ es convergente, si k es > 1. En efecto $\varphi(n) = \frac{1}{n^k}$, y se tiene

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^k} = \left[-\frac{1}{(k-1)\,x^{k-1}}\right]_1^\infty = \frac{1}{k-1},$$

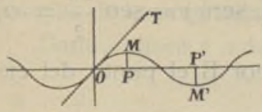
cantidad finita, cuando se supone $k > 1$. Se ve de igual modo que la serie es divergente para $k < 1$ ó para $k = 1$.

Ejemplo 2.º La serie cuyo término general es $\frac{1}{nln}$ es divergente, porque $\int_2^\infty \frac{dx}{xlx} = [llx]_2^\infty$ es infinito.

La serie cuyo término general es $\frac{1}{nll\ldots n}$ es divergente.

52. Representación geométrica de las funciones.

1. Sea $y = \operatorname{sen} x$, la *sinusoide*. Se tiene



para $x = 0, \quad y = \operatorname{sen} 0 = 0,$

» $x = \frac{\pi}{2}, \quad y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1,$

» $x = \pi, \quad y = \operatorname{sen} \pi = 0.$

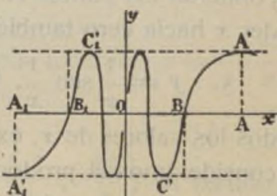
Se ve además que la función crece desde $x = 0$ hasta llegar al máximo en $x = \frac{\pi}{2}$, que luego decrece hasta cero, conservando su concavidad hacia el eje de las x, y luego se repiten estas alteraciones en el lado de las y negativas. En fin, que en $x = 0$, π, ... $\frac{dy}{dx} = +1, -1, \ldots\ldots$, y dichos puntos son de inflexión.

2. $y = \cos x$, *cosinusoide*. Análoga discusión que la anterior. Pero en $x = 0$, coseno es $= 1$, etc.

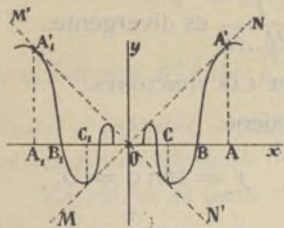
3. $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Esta curva es continua, excepto para $x = 0$.

Haciendo tender á x hacia el infinito, para valores cualesquiera, positivos ó negativos, y se halla siempre comprendido entre $+1$ y -1.

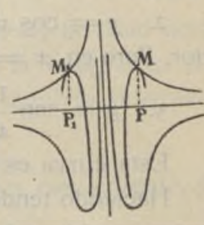


Hagamos tender á x hacia ∞ para valores positivos. La y tendrá cero por límite, y la curva se aproximará al eje de las y sin llegar á él. Si damos $\frac{1}{x}$ la serie de valores $\frac{\pi}{2}$, $2\frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$, ... Tendremos, para $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$, y designando por A el punto cuya abscisa es $x = \frac{2}{\pi}$, será A' el punto cuya ordenada es $y = 1$ y cuya abscisa es $x = \frac{2}{\pi}$.



Para $x = \frac{2}{2\pi}$, será $y = \text{sen}\,\frac{2\pi}{2} = 0$; y expresando por B el punto del eje de abscisas para el que $x = \frac{2}{2\pi}$, la ordenada será $y = 0$; y así sucesivamente.

4. $y = x\,\text{sen}\,\frac{1}{x}$. Trazados los ejes ortogonales y las bisectrices de sus ángulos, se ve que la curva está comprendida en el ángulo MOM' y su opuesto por el vértice, pues para cualquier valor dado á $\frac{1}{x}$, $\text{sen}\,\frac{1}{x}$ oscila entre $+1$ y -1; luego los valores extremos son $+x$ y $-x$, esto es, será siempre $y \leqq x$, $y \geqq -x$. Pero $y = x$ representa la bisectriz OM é $y = -x$ la bisectriz ON; luego la curva tiene sus puntos en la una ó en la otra de dichas rectas.



A los valores $\frac{2}{\pi}$, $\frac{2}{2\pi}$, ... de x corresponderán los puntos A', B, ...; y al tender x hacia cero también tiende y hacia cero. Etcétera.

5. $y = \frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}$. Esta función queda determinada para todos los valores de x, excepto para $x = 0$. Siendo la función que consideramos el producto de dos factores, será continua si estos son continuos, y efectivamente lo son, excepto para $x = 0$.

Al tender x hacia ∞, tendrá y por límite cero. Además sen $\frac{1}{x}$ está comprendido siempre entre $+1$ y -1, por consiguiente las dos curvas cuyas ecuaciones son

$$y = +\frac{1}{x}, \quad y = -\frac{1}{x}$$

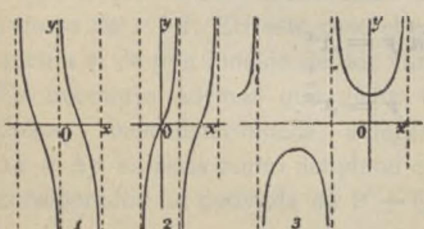
comprenden entre sí á la curva que tratamos de describir. Dichas ecuaciones representan dos hipérbolas cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas.

Dando ahora á x la serie de valores

$$\frac{2}{\pi}, \ \frac{2}{2\pi}, \ldots\ldots \text{ para } x = \frac{2}{\pi} \text{ será } y = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{x};$$

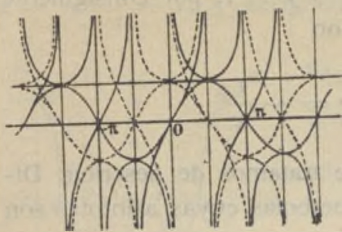
luego el punto M $\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ que es punto de la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, pertenece á la curva.

Para $x = \frac{2}{2\pi}$ es $y = 0$; luego el punto N $\left(\frac{2}{2\pi}, 0\right)$ pertenece á la curva.



Para $x = \infty$ es lim $y = 0$; luego la curva, á partir de M, se aproxima indefinidamente al eje de las x. Para $x = \frac{2}{3\pi}$ se tiene: $y = \frac{1}{x}$, y el punto P $\left(\frac{2}{3\pi}, -\frac{3\pi}{2}\right)$ es un punto de la hipérbola $y = -\frac{1}{x}$ y de la curva que se busca.

Para $x = \frac{2}{5\pi}$, $y = \frac{1}{x}$; el punto φ $\left(\frac{2}{5\pi}, \frac{5\pi}{2}\right)$ es común á la curva y á la hipérbola $y = \frac{1}{x}$. La curva al acercarse x á cero, efectúa innumerables oscilaciones de una á otra hipérbola. (*)



Las curvas $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sec x$, $y = \cot x$ se hallan representadas por los números 1, 2, 3 en la figura correspondiente; y también se hallan representadas todas las funciones circulares en la última figura.

6. *Estudiar las variaciones de la función*

$$y = x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x - \frac{2}{3} \operatorname{sen} x$$

cuando x *varía desde cero hasta* $\frac{\pi}{2}$.

7. *Estudiar las variaciones de la función* $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

8. *Estudiar las variaciones de* $x^x - x$.

9. *Variaciones de* $\frac{a^x}{x}$.

10. *Estudiar la función* $y = x^x$.

11. « » » $y = x^{\frac{1}{x}}$.

(*) C. Alasia. *Exercici ed applicazioni di calcolo infinitesimale.*

LIBRO TERCERO

FUNCIONES DE VARIABLES COMPLEJAS

CAPÍTULO I

Series

§ 1.º DEFINICIONES

53. Sea $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \equiv \mathrm{P} + \mathrm{Q}i$.

Para que $f(z)$ sea una función determinada de $z = x + iy$, no basta que se halle determinado su valor cuando se dan los valores de x é y. En este caso el estudio de la función f se reduciría al de una función de dos variables reales independientes. Es necesario además que dicha función tenga una derivada única y bien determinada, independiente de los incrementos Δx y Δy en cada punto del plano que corresponde al valor de z considerado. La derivada de $\mathrm{P} + \mathrm{Q}i$ es

$$\frac{\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} dy + \sqrt{-1}\left(\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} dy\right)}{dx + dy\sqrt{-1}};$$

y para que sea independiente de la relación $\dfrac{dy}{dx}$ es decir, del modo de tender $dx + dy\sqrt{-1}$ hacia cero, es necesario que

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial Q}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial Q}{\partial y}}{\sqrt{-1}},$$

y por consiguiente, que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Si entre cada dos puntos de una región A del plano en que están rèpresentados los valores de z se puede trazar una línea continua que no corte su contorno, la región considerada se llama una *área continua*. Si en todos los puntos de esta región $f(z)$ tiene una derivada, se dice que $f(z)$ es una *función monógena* (de derivada *única)* de z en el área A. El área considerada puede ser todo el plano, como sucede en el caso de e^z, sen z, ...

Una función monógena $f(z)$ se llama *uniforme* ó *monódroma* cuando á cada punto del plano corresponde un sólo valor de aquélla.

Una función de una variable imaginaria z puede ser monógena solo en una parte del área en que está determinada. En este caso se halla la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{a^n},$$

cuando a representa un entero positivo impar y b una cantidad positiva menor que 1, con la condición

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab - 1}$$

pues, cuando $z \leqq 1$, la serie es convergente; y en todos los puntos tales que $|z| < 1$, la función tiene una derivada finita; pero en los puntos que satisfacen á la condición $|z| = 1$, la función no tiene derivada, pues si $z = \cos \omega + i \operatorname{sen} \omega$, se tendrá que

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} b^n [\cos(a^n \omega) + i \operatorname{sen}(a^n \omega)],$$

y la función $\sum_{0}^{\infty} b^n \cos(a^n \omega)$ no tiene derivada con respecto á ω.

Cuando una región del plano en que está determinada una expresión analítica ó función monógena $f(z)$, se compone de muchas áreas separadas, $f(z)$ puede representar en estas áreas diferentes funciones monógenas completamente independientes. Esta observación fué demostrada por Weierstrass del modo siguiente:

Sea $\varphi(z)$ una expresión igual á $+1$, cuando $|z| < 1$ é igual á -1, cuando $|z| > 1$. Haciendo

$$F_0(z) = \frac{f_1(z) + f_2(z)}{2}, \quad F_1(z) = \frac{f_1(z) - f_2(z)}{2},$$

la expresión $F_0(z) + F_1(z)\varphi(z)$ es igual á $f_1(z)$, cuando $|z| < 1$ é igual á $f_2(z)$, cuando $|z| > 1$.

Hay varias expresiones analíticas que satisfacen á las condiciones impuestas á $\varphi(z)$, por ejemplo (*) la expresión

$$\varphi(z) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}(1-z)}{(1+z^{k-1})(1+z^k)}.$$

Pues por ser (pág. 92)

$$\varphi(z) = \lim_{m=\infty} \frac{1-z^m}{1+z^m},$$

se deduce que $\varphi(z) = 1$, cuando $|z| < 1$ y $\varphi(z) = -1$, cuando $|z| > 1$.

Una función monódroma, finita y continua en el interior de un área C, se llama ***sinéctica*** en el interior de dicha área (Cauchy).

(*) **Gomes Teixeira**, *Curso de Analyse infinitesimal*, t. I, pág. 341.

54. Funciones no monódromas, polítropas ó multiformes son las que adquieren más de un valor para cada valor de la variable ó en cada punto de la región correspondiente.

Ejemplo 1.° Sea $z = x + iy = re^{\theta i}$, la función

$$\log lz = \log lr + \theta\sqrt{-1}$$

es politropa, multiforme ó mejor, infinitiforme en el interior de un círculo descrito desde el origen de coordenadas como centro con radio r.

En efecto, haciendo recorrer á z una circunferencia de radio r, lr permanecerá constante, pero θ variará, y cuando el punto haya descrito la circunferencia, θ habrá aumentado en 2π, lz habrá aumentado en $2\pi i$.

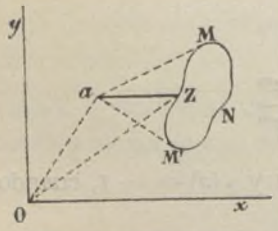
Ejemplo 2.° Sea $u = \sqrt{(z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-c)}$. Tenemos que

$$\operatorname{mod}\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots\ldots} = \sqrt{\operatorname{mod}(z-a)}\sqrt{\operatorname{mod}(z-b)}\ldots\ldots$$

$$\arg\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots\ldots} = \frac{1}{2}\arg(z-a) + \frac{1}{2}\arg(z-b) + \ldots\ldots$$

Consideremos, por ejemplo, el punto a.

Si el punto z describe el contorno MM'N, el ángulo que el vector $z - a$ forma con el eje las x irá primero aumentando hasta llegar á la posición extrema aM' para disminuir luego hasta la otra posición extrema aM. El ángulo, después de recorrer el punto z el contorno, habrá adquirido de nuevo su valor primitivo.

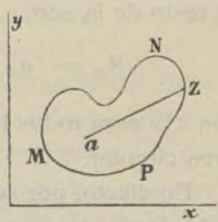


Si suponemos que el punto a se halla en el interior del contorno que describe el punto z, cuando lo haya recorrido, el argumento del vector habrá aumentado en 2π; luego en este caso el argumento de la expresión habrá variado en $\pm\pi$ por cada punto que se halla en el interior del contorno.

Si todos los puntos $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ están en el interior del contorno, la expresión de u será

$$u = (r_1 r_2 \ldots)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta_1 + 2\pi}{2} + \ldots \right) + i \left(\operatorname{sen} \frac{\theta_1 + 2\pi}{2} + \ldots \right).$$

En general, si



$$u = (z - a_1)^{\frac{p_1}{q_1}} (z - a_2)^{\frac{p_2}{q_2}} \ldots\ldots,$$

para cada punto a, por ejemplo, el argumento aumenta en $\dfrac{2p_1\pi}{q_1}$, y la función queda multiplicada por $j_1 = \cos \dfrac{2p_1\pi}{q_1} + i \operatorname{sen} \dfrac{2p_1\pi}{q_1}$, que es una raíz primitiva de la ecuación binomia $x^{q_1} = 1$. Después de una segunda vuelta quedará multiplicada otra vez por j_1; y en fin, si designamos por u_0 el valor primitivo de la función, su valor final será de la forma

$$u_0 j_1^{m_1} j_2^{m_2} \ldots\ldots$$

§ 2.° Serie de potencias, círculo de convergencia.

55. Esfera compleja y plano complejo. Si consideramos una variable compleja $z = x + iy$ representada en el *plano complejo de Gauss*, que es tan solo imagen geométrica de la variabilidad compleja, se podrán referir los puntos de aquél á la *esfera compleja*, mediante la proyección estereográfica polar, es decir, que considerando la esfera de radio 1 y cuyo centro se halle en el origen, desde el punto $P \equiv (0, 0, 1)$ de la esfera (*polo*), proyectaremos todos los puntos M (x, y) del plano complejo (ξ, η) en M' sobre la esfera.

Teorema. *Si en un punto z_0 del plano complejo, distinto del origen* 0, *la serie de potencias*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots = \sum_0^\infty a_n z^n \qquad (1)$$

converge, y describimos con centro en o *un círculo que deje al punto* z_0 *al exterior, en toda el área del círculo y en la circunferencia, la serie* (1) *converge absolutamente y en igual grado.*

Vamos á demostrar que dado un número ε tan pequeño como queramos, se puede obtener un número m tan grande, que el resto de la serie

$$R_m = |a_m|\ |z|^m + |z_{m+1}|\ |z|^{m+1} + \ldots\ldots$$

sea $< \varepsilon$ para todos los valores de z cuyos índices se hallan en el área circular.

En efecto, por ser la serie $\Sigma a_n z_0^n$ convergente, en virtud de la hipótesis, tendremos

$$\lim_{n=\infty} (a_n z_0^n) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n=\infty} (|a_n|\ |z_0|^n) = 0.$$

Fijemos una cantidad positiva finita g tal, que para todos los valores de n se tenga

$$|a_n|\ |z_0|^n < g. \tag{2}$$

Podemos escribir

$$R_m = |a_m|\ |z_0|^m \zeta^m + |a_{m+1}|\ |z_0|^{m+1} \zeta^{m+1} + \ldots\ldots$$

siendo $\left(\zeta = \dfrac{|z|}{|z_0|}\right)$, y por la desigualdad (2),

$$R_m < g\,(\varepsilon^m + \varepsilon^{m+1} + \ldots\ldots). \tag{3}$$

Si expresamos por r el radio del círculo considerado, y hacemos $\dfrac{r}{|z_0|} = q$, será $\zeta < q < 1$, y la desigualdad (3) se reduce á

$$R_m < g\,\frac{\zeta^m}{1-\zeta} \quad \text{y} \quad R_m < g\,\frac{q^m}{1-q};$$

luego basta tomar m suficientemente grande para que se tenga

$g \dfrac{q^m}{1-q} < \varepsilon$, lo que siempre es posible por ser $q < 1$; de modo que, para todos los puntos del área circular y de la circunferencia, será $R_n < \varepsilon$.

Corolario. *Si en un punto z la serie de potencias* (1) *es divergente, con mayor razón será divergente en cualquier punto distante del origen más que z.*

56. Círculo de convergencia. La existencia del *círculo de convergencia* se deduce inmediatamente de las anteriores consideraciones. Para ello distribuyamos todos los círculos de centro O (ó sus radios) en dos clases A y B. Diremos que un círculo pertenece á la primera clase, *si en el interior del círculo* la serie es convergente y á la segunda clase, cuando *al exterior* del círculo la serie es divergente.

Todo círculo pertenecerá á la una ó á la otra clase; porque si no pertenece á la clase A, en algún punto interno al círculo la serie es divergente y entonces, por el corolario anterior, es divergente con mayor razón en todo el exterior del círculo que, por consecuencia, pertenecerá á B. Análogamente, si un círculo no es de la clase B, pertenecerá á la clase A. Además, si un círculo es de la clase A, cualquier círculo concéntrico y menor que A pertenece á dicha clase, y análogamente se dirá para la clase B. En fin, no puede existir más que *un solo* círculo perteneciente á las dos clases.

La repartición de los círculos de centro O en las dos clases, satisfacen, por consecuencia, á las condiciones fundamentales que aseguran la existencia de un círculo C, límite de las dos clases, dotado de la propiedad característica de que todo círculo de centro O pertenece á la clase A y todo círculo exterior á la clase B, de modo que: *en todo punto interior á C la serie de potencias converge y en todo punto exterior la serie es divergente.* Respecto á los puntos de la circunferencia, nada puede afirmarse en general. Dicho círculo es el círculo de convergencia.

57. Serie derivada. Sea la serie $\sum_{1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, de las derivadas de la serie (1) de potencias, diremos que: *La serie de las derivadas de una serie de potencias tiene el mismo círculo de convergencia que ésta*, es decir que:

1.º *En cualquier punto interior á C, la serie de los módulos*

$$\Sigma\, n\,|a_n|\; |z|^{n-1}$$

es convergente, y 2.º en cualquier punto exterior es divergente.

En efecto, si z_0 es un punto interior á C, será $|z| < R$; y para demostrar la convergencia de la serie de los módulos

$$\Sigma\, n\; |a_n|\; |z_0|^{n-1},$$

tomaremos un punto z_1 interior á C, pero más próximo á la circunferencia que z_0, de modo que $|z_1| > |z_0|$; y tendremos que

$$\Sigma\, n\; |a_n|\; |z_0|^{n-1} = \Sigma\, n\; |a_n|\; |z_1|^{n-1} \left(\frac{|z_0|}{|z_1|}\right)^{n-1};$$

y haciendo $q = \dfrac{|z_0|}{|z_1|}$ será $q < 1$, y los términos de

$$\Sigma\, n\; |a_n|\; |z_0|^{n-1} = \Sigma\, n\; |a_n|\; |z_1|^{n-1} q^{n-1}$$

se deducen de los de la serie convergente $\Sigma\, nq^{n-1}$, que al multiplicar por $|a_n|\; |z_1|^{n-1}$, no solo permanecen finitos, sino que por la convergencia en z_1 de la serie primitiva, decrecen; luego la serie $\Sigma\, n\; |a_n|\; |z_0|^{n-1}$ también es convergente.

Si ahora z_1 es un punto exterior á C, la serie $\Sigma\, n\; |a_n|\; |z_1|^{n-1}$ es divergente; porque si fuese convergente, lo sería también la serie $\Sigma\, n\; |a_n|\; |z_1|^n$ y la $\Sigma\; |a_n|\; |z_1|^n$, lo que es absurdo, siendo z_1 exterior al círculo de convergencia de la serie primitiva; lo que demuestra el teorema.

Observación 1.ª De lo expuesto resulta que en todo campo interior al círculo C, la serie derivada converge en igual grado. En dicho campo es por tanto legítima la derivación por serie; de manera que siendo $w = \Sigma\, a_n z_1^{\,n}$, la cantidad w admitirá las derivadas parciales finitas y continuas

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \Sigma\, na_n z^{n-1}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = i\, \Sigma\, na_n z^{n-1},$$

de las que resulta la condición:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y},$$

es decir que: *una serie de potencias* $w = \Sigma a_n z^n$ *representa en el interior del círculo de convergencia una función finita, continua y monódroma de la variable compleja* z.

Observación 2.ª No solo la derivada primera, sino las de todos los órdenes sucesivos de dicha función, tienen el mismo círculo de convergencia; de manera que todas son funciones finitas, continuas y monódromas de la variable compleja z en el círculo de convergencia.

58. Teorema de Hadamard. Suponiendo que la serie $\Sigma a_n z^n$ es convergente en cualquier punto z_0 distinto del origen, entonces por ser

$$\lim_{n=\infty} |a_n|\,|z_0|^n = 0,$$

podremos tomar m tan grande que se tenga siempre

$$|a_n|\,|z_0|^n < 1 \quad \text{para} \quad n \geqq m \quad \text{ó} \quad |a_n| < \frac{1}{|z_0|^n} \quad (n \geqq m).$$

De esto resulta que, para una serie de potencias convergente en cualquier punto distinto del origen $z = 0$, todos los términos

$$|a_1|,\ \sqrt{|a_2|},\ \sqrt[3]{|a_3|},\ \ldots\ldots \sqrt[n]{|a_n|},\ \ldots\ldots \qquad (1)$$

deben permanecer inferiores á una cantidad finita g.

Si ahora dividimos los números positivos g en dos clases A y B, colocando en la primera todo número a tal, que en la serie (1) haya siempre términos $> a$ y en la segunda un número b tal, que de cierto punto en adelante, todos los términos sean $< b$. Esta repartición de los números comprendidos entre 0 y g en dos clases, satisface á las condiciones fundamentales arriba citadas que aseguran la existencia de un número límite α, sección de las dos clases; de manera que todo número $< \alpha$ pertenece á la clase A y todo número $> \alpha$ pertenece á la clase B; y con este precedente podemos enunciar el teorema de Hadamard:

El radio R del círculo de convergencia es precisamente igual al inverso del número α, es decir, $R = \frac{1}{\alpha}$.

En efecto, sea $|z| < \frac{1}{\alpha}$, y tomemos ε positivo y tan pequeño que sea

$$(\alpha + \varepsilon)\,|z| = q < 1.$$

Puesto que $\alpha + \varepsilon$ pertenece á B, desde cierto valor de n en adelante, se tiene siempre que

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \alpha + \varepsilon, \quad \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| \leqq q, \quad |a_n|\,|z|^n \leqq q^n;$$

luego la serie $\Sigma\,|a_n|\,|z|^n$ tiene, desde cierto término en adelante, sus términos menores que los de la progresión $\Sigma\, q^n$ cuya razón q es < 1, y por tanto es convergente.

Sea pues $|z| > \frac{1}{\alpha}$ y hagamos $\varepsilon = \alpha - \frac{1}{|z|}$.

El número $\alpha - \varepsilon = \frac{1}{|z|}$ pertenece á la clase A; luego hay siempre valores de n tan grandes como se quiera, tales que sea

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|} \quad \text{ó} \quad |a_n|\,|z|^n > 1;$$

luego la serie, en este caso, es divergente.

COROLARIO 1.º *El radio del círculo de convergencia de una serie de potencias depende tan solo de los módulos de los coeficientes.* Esto resulta de que la serie de los módulos es convergente en el interior del círculo y divergente en el exterior. Además la serie será convergente en todo el plano, cuando sea $\alpha = 0$, ó cuando

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0;$$

y, en efecto, si $\alpha = 0$, un número positivo ε tan pequeño como se quiera, pertenece á la clase B, por lo que desde cierto valor de n en adelante, se tiene $\sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon$; viceversa si

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \text{ será } \alpha = 0;$$

luego: *La condición necesaria y suficiente para que la serie de potencias $\Sigma\, a_n z^n$ sea convergente en todo el plano, es que se tenga*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

§ 3.º Extensión de la fórmula de Taylor.

59. Tenemos que

$$z = \rho(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega) = \rho e^{i\omega}.$$

Sea $$F(z) = F\left(\rho e^{i\omega}\right) = \varphi(\rho) + i\psi(\rho)$$

una función de z que suponemos admite derivadas hasta el orden n, finitas para los valores de z desde o hasta z.

Desarrollando según la fórmula de Mac Laurin $\varphi(\rho)$ y $\psi(\rho)$, resulta

$$F(z) = F(0) + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{\rho^a}{a!} \left[\varphi^a(0) + i\psi^a(0)\right] + R_n$$

$$R_n = \frac{\rho^n}{(n-1)!m} \left[(1-\theta_1)^{n-m} \varphi^n(\theta_1\rho) + i(1-\theta_2)^{n-m} \varphi^n(\theta_2\rho)\right],$$

y derivando a veces $F(z)$ respecto á ρ,

$$e^{ai\omega} F^a(z) = \varphi^a(\rho) + i\psi^a(\rho);$$

pero $$\theta_1 \rho e^{i\omega} = \theta_1 z, \quad \theta_2 \rho e^{i\omega} = \theta_2 z$$

y $$e^{ni\omega} F^n(\theta_1 z) = \varphi^n(\theta_1 \rho) + i\psi^n(\theta_1 \rho),$$
$$e^{ni\omega} F^n(\theta_2 z) = \varphi^n(\theta_2 \rho) + i\psi^n(\theta_2 \rho);$$

luego $$F(z) = F(o) + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{z^a}{a!} F^a(o) + R_n \qquad (1)$$

$$R_n = \frac{(1-\theta_1)^{n-m}}{(n-1)!\,m} \left\{ z^n F^n(\theta_1 z) \right\}_R + i \frac{(1-\theta_2)^{n-m}}{(n-1)!\,m} \left\{ z^n F^n(\theta_2 z) \right\}_I,$$

representando por $\{A\}_R$ y $\{A\}_I$ la parte real y el coeficiente de i de A.

Haciendo en R_n,

$$z^n = Be^{ib}, \quad \frac{(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!\,m} F^n(\theta_1 z) = Ce^{ic},$$

$$\frac{(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!\,m} F^n(\theta_2 z) = De^{id},$$

puede dársele la forma

$$R_n = BC \cos(b+c) + BDi \operatorname{sen}(b+d) = He^{ih}$$

de donde

$$H^2 = B^2C^2 \cos^2(b+c) + B^2D^2 \operatorname{sen}^2(b+d).$$

Suponiendo ahora $C \leq D$, tenemos $H \leq 2B^2C^2$, y por tanto $H = \lambda BC\sqrt{2}$, siendo λ un factor comprendido entre o y 1; luego tenemos

$$R_n = \lambda \sqrt{2}\, e^{ia} \frac{z^n (1-\theta_1)^{n-m}}{(n-1)!\,m} F^n(\theta_1 z), \qquad (2)$$

donde $a = h - b - c$.

Si fuese $D > C$, se deduciría del mismo modo la fórmula, haciendo $H = \lambda BD\sqrt{2}$.

Aplicando las fórmulas (1) y (2) á la función $f(z+z_0)$ y sustituyendo en el resultado z por $Z - z_0$, se obtiene

$$f(Z) = f(z_0) + (Z - z_0) f'(z_0) + \ldots + \frac{(Z - z_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(z_0) + R_n,$$

$$R_n = \lambda \sqrt{2}\, e^{ai} \frac{(Z - z_0)^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)!\, m} f^n[z_0 + \theta(Z - z)],$$

forma del resto de Darboux, que se verifica cuando las funciones $f(z)$, $f'(z)$, ... son finitas para todos los valores que adquiere z cuando recorre la recta que une los puntos z_0 y Z.

60. Desarrollo del binomio. Consideremos la función $u = (1 + z)^k$, siendo k real; y partiremos de $u = 1$ correspondiente á $z = 0$. Tenemos

$$(1 + z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{n-1} C_a^k z^a + R_n$$

$$R_n = \lambda \sqrt{2} \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!} z^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^{n-1} (1 + \theta z)^{k-1}.$$

Si el módulo ρ de $z = \rho e^{i\omega}$ es menor que 1, la cantidad

$$\frac{k(k-1)\ldots\ldots(k-n+1)}{(n-1)!} \rho^n$$

tiende hacia cero cuando n tiende hacia el infinito, y además tenemos que

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right| = \frac{1-\theta}{\sqrt{1 + \theta^2\rho^2 + 2\theta\rho \cos \omega}} \leq \frac{1-\theta}{1-\theta\rho} < 1.$$

Luego R_n tiende hacia cero cuando n tiende hacia el infinito, y el binomio puede ser desarrollado en serie ordenada según las potencias de z por la fórmula

$$(1 + z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} C_a^k z^a.$$

Si el módulo de z es > 1, la serie es divergente, pues el módulo del cociente de dos términos consecutivos tiende hacia ρ cuando a tiende hacia el infinito. Luego se tiene un valor de a, á partir del que los módulos de los términos de la serie crecen indefinidamente.

61. LEMA. *Si la serie*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (z = x + iy)$$

es convergente en un círculo de radio dado, y si en todos los puntos del exterior de este círculo que tienen el mismo módulo ρ, *el módulo de* F(z) *es menor que una cantidad positiva* L, *el módulo de cada término de la serie será también menor que* L.

En efecto, multiplicando la serie propuesta por z^{-m} se tiene

$$z^{-m}F(z) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n z^{n-m}$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n z^{n-m} + R,$$

representando R una cantidad cuyo módulo tiende hacia cero, cuando k tiende hacia el infinito. Pero, como por hipótesis,

$$|z^{-m}F(z)| < L\rho^{-m},$$

y como, por pequeño que sea el valor que se atribuye á una cantidad positiva δ, se tiene siempre un valor k_1 tal, que $|R| < \delta$, cuando $k > k_1$ tenemos

$$|z^{-m}F(z) - R| < L\rho^{-m} + \delta$$

ó

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n z^{n-m}\right| < L\rho^{-m} + \delta.$$

Dando en esta desigualdad á z los valores

$$\rho, \quad \rho e^{i\theta}, \quad \rho e^{2i\theta}, \ldots\ldots, \quad \rho e^{(a-1)i\theta}$$

y á k un valor mayor que los valores de k_1 correspondientes á estos valores de z, tenemos

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m}\right| < L\rho^{-m} + \delta$$

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n e^{n-m} e^{(n-m)i\theta}\right|$$
$$< L\rho^{-m} + \delta$$

. . . .

que sumando da

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} (1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots\ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta})\right.$$
$$+ \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} (1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots\ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta})$$
$$\left. + ac_m \right| < a(L\rho^{-m} + \delta)$$

ó, haciendo

$$1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots\ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta} = \frac{1 - e^{ia(n-m)\theta}}{1 - e^{i(n-m)\theta}} = A,$$

y dando á la cantidad θ un valor que no sea raiz de la ecuación $1 - e^{i(n-m)\theta} = 0$, esto es, un valor tal que A sea finito, será

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1} c_n A \rho^{n-m} + ac_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n A \rho^{n-m}\right| < a(L\rho^{-m} + \delta)$$

ó $$\left|c_m + \frac{B}{a}\right| \leqq L\rho^{-m} + \delta,$$

representando por B la parte de la anterior desigualdad independiente de c_m.

De esta desigualdad resulta

$$|c_m| \leqq L\rho^{-m} + \delta; \qquad (1)$$

porque si fuese $|c_m| > L\rho^{-m} + \delta$, se podría dar á a un valor tan grande, que fuera

$$|c_m| - \frac{|B|}{a} > L\rho^{-m} + \delta$$

ó *á fortiori*

$$\left|c_m + \frac{B}{a}\right| > L\rho^{-m} + \delta$$

ya que $$\frac{|B|}{a} + \left|c_m + \frac{B}{a}\right| \geqq |c_m|.$$

De la desigualdad (1) resulta el lema enunciado, porque si fuese $|c_m| > L\rho^{-m}$, se podría dar á δ un valor tan pequeño que fuese $|c_m| > L\rho^{-m} + \delta$.

60. Teorema. *Si una función* f(z) *es susceptible de ser desarrollada en serie uniformemente convergente dentro de un círculo de radio* R *con el centro en el origen de coordenadas*

$$f(z) = P_0(z) + P_1(z) + \ldots\ldots + P_n(z) + \ldots\ldots, \quad (1)$$

y si las funciones $P_0(z)$, $P_1(z)$, ... *son susceptibles de ser desarrolladas en series ordenadas según las potencias de* z, *convergentes dentro del mismo círculo:*

$$P_n(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} z + \ldots\ldots + A_m^{(n)} z^m + \ldots\ldots, \quad (2)$$

la función f(z) *será también susceptible de ser desarrollada en una serie ordenada según las potencias de* z:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + \ldots\ldots + A_m z^m + \ldots\ldots \quad (3)$$

y será

$$A_m = A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots\ldots + A_m^{(n)} + \ldots\ldots \quad (4)$$

Este teorema ha sido demostrado por Weierstrass de la manera siguiente:

Sea ρ una cantidad positiva menor que R. Por ser la serie (1) uniformemente convergente en la circunferencia de radio ρ, á cada valor de la cantidad positiva δ, tan pequeño como se quiera, corresponderá un valor n_1 de n tal, que la desigualdad

$$|P_{n+1}(z) + P_{n+2}(z) + \ldots\ldots + P_{n+p}(z)| < \delta$$

quede satisfecha para todo valor de n superior á n_1 y para todos los valores de z cuyo módulo sea ρ, cualquiera que sea p.

Pero tenemos que

$$P_{n+1}(z) + \dots + P_{n+p}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m (A_m^{(n+1)} + \dots + A_m^{(n+p)});$$

luego, en virtud del lema, tenemos la desigualdad

$$[A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots\dots + A_m^{(n+p)}] < \delta \rho^{-m},$$

de donde se concluye la convergencia de la serie (4). Considerando ahora otro número positivo ρ_1 tal, que sea $R > \rho_1 > \rho$, podemos dar á n_1 un valor tal, que

$$|A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots\dots + A_m^{(n+p)} < \delta \rho_1^{-m}$$

por grande que sea p, y por consiguiente

$$\left| \lim_{p=\infty} (A_m^{(n+1)} + \dots\dots + A_m^{(n+p)} \leqq \delta \rho_1^{-m}.\right.$$

Haciendo, por brevedad,

$$A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \dots\dots + A_m^{(n)} = A_m'$$

$$\lim_{p=\infty} \left(A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots\dots + A_m^{(n+p)}\right) = A_m''$$

resulta $\qquad A_m = A_m' + A_m'', \qquad |A_m''| \leqq \delta \rho_1^{-m},$

y se obtiene para los valores de z cuyo módulo ρ es inferior á ρ_1 la desigualdad

$$|A_0''| + |A_1'' z| + \dots\dots + |A_m'' z^m| + \dots\dots$$

$$< \delta \left[1 + \frac{\rho}{\rho_1} + \dots\dots + \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^m + \dots\dots \right] < \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho},$$

de la que resulta la serie

$$A_0'' + A_1'' z + \dots\dots + A_m'' z^m + \dots\dots$$

que es absolutamente convergente.

Además, es absolutamente convergente la serie

$$P_0(z) + P_1(z) + \ldots\ldots + P_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m (A_m^{(0)} + \ldots\ldots + A_m^{(n)}$$

$$= A_0' + A_1' z + \ldots\ldots + A_m' z^m + \ldots\ldots$$

Luego la serie

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots\ldots$$

es absolutamente convergente.

Tenemos enseguida

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_m' + A_m''\right) z^m = \sum_{a=0}^{n} P_a(z) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m'' z^m,$$

de donde

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{a=n+1}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m'' z^m,$$

y por tanto,

$$\left| \sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \right| < \delta + \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}.$$

Puesto que se puede dar á δ un valor tan pequeño como se quiera, se deduce de esta desigualdad

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m$$

según se quería demostrar. (*)

Ejemplo. La función $f(z) =$ sen (sen z) da la serie

$$f(z) = \text{sen}\, z - \frac{\text{sen}^3 z}{3!} + \frac{\text{sen}^5 z}{5!} - \ldots\ldots$$

que es uniformemente convergente para cualquier valor de z.

(*) Esta demostración es de Weierstrass. *Monatsbericht der kön, Akademie de Wissenschaften zu Berlin* 1880.

La función

$$\operatorname{sen}^n z = \left(z - \frac{z^3}{z!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\ldots\right)^n$$

puede desarrollarse en serie ordenada según las potencias de z; luego, en virtud del teorema último, también puede desarrollarse la función sen (sen z) según las potencias de z.

63. Aplicando el teorema anterior á las series ordenadas según las potencias de $z - a$, se obtiene el

Teorema *La serie*

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots\ldots + c_n(z - a)^n + \ldots\ldots \qquad (1)$$

es convergente en el interior de un círculo de centro a *y radio* R, *cuando* $|z - a| < R$, *y si* z_0 *representa un punto del interior de este círculo, las derivadas* $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, ... *existen y son finitas y respectivamente iguales á las sumas de las derivadas de primero, de segundo, ... orden de los términos de la serie propuesta, es decir:*

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z_0 - a)^{n-1},$$

$$f''(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1) c_n (z_0 - a)^{n-2}, \text{ etc.}$$

Además, si $|z_0 - a| + |z - z_0| < R$, *tendremos*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \ldots\ldots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \ldots\ldots$$

En efecto, haciendo en la serie propuesta $z = z_0 + h$, tendremos

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0 + h - a)^n,$$

Esta serie, considerada como función de h, es uniformemente convergente, cuando $|z_0 + h - a| < R$ ó *a fortiori*, cuando $|z_0 - a| + |h| < R$.

Desarrollando enseguida los binomios y ordenando según las potencias de h, tendremos, en virtud del teorema anterior

$$f(z_0+h)=f(z_0)+hf_1(z_0)+\ldots..$$

donde $$f_1(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z_0-a)^{n-1},$$

$$f_2(z_0)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(z_0-a)^{n-2}, \ldots..$$

Haciendo ahora $h=z-z_0$, resulta

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)f_1(z_0)+\ldots..+(z-z_0)^n f_n(z)+\ldots..$$

con la condición $|z_0-a|+|z-z_0|<\mathrm{R}$; luego

$$\lim \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)=f_1(z_0).$$

Y como cada una de las funciones $f_1(z), f_2(z), \ldots..$ se deduce de la anterior de igual manera que $f'(z_0)$ se deduce de $f(z_0)$, el teorema queda demostrado.

Corolario 1.º *Si la serie* (1) *es convergente en el interior del círculo de radio* R *y de centro* a, *la funcion es continua dentro del mismo círculo*, pues en todos los puntos interiores á este círculo $f(z)$ tiene una derivada finita.

Respecto á la continuidad de las derivadas de las series, enunciaremos los teoremas siguientes, análogos á los relativos á las funciones reales.

1.º *Si la serie* $\mathrm{f(x)}=\Sigma\,\mathrm{f}_n(\mathrm{x})$ *es uniformemente convergente en una área dada, la función* f(x) *es continua en los puntos de esta área en que todas las funciones* $\mathrm{f}_1(\mathrm{x}), \mathrm{f}_2(\mathrm{x}), \ldots..$ *son continuas.*

2.º *Si una serie* $\Sigma\,\mathrm{f}_n(z)$ *fuese convergente en una área dada, y en la misma fuese uniformemente convergente la serie* $\Sigma\,\mathrm{f}'_n(z)$, *formada con las derivadas de los términos de la serie precedente, tendríamos* $f'(z)=\Sigma\,f'_n(z)$ *en el área considerada.*

§ 4.° FUNCIONES REGULARES.

64. DEFINICIÓN. Si una función $f(z)$ es desarrollable en serie, en la proximidad del punto z_0, según las potencias ascendentes de $z - z_0$, de modo que exista un número tal que sea

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots\ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots\ldots$$

cuando $|z - z_0| < R$, se dice que *la función* f(z) *es regular en el punto* z_0.

Ejemplo 1.° Sea $(1 + z)^k$. Tenemos

$$(1 + z)^k = (1 + z_0)^k \left[1 + \frac{z - z_0}{1 + z_0}\right]^k$$
$$= (1 + z_0)^k \Sigma C_n^k \left(\frac{z - z_0}{1 + z_0}\right)^n$$

cuando $|z - z_0| < |1 + z_0|$, por consiguiente es regular en todo el plano, excepto en el punto $z_0 = -1$, cuando k no es entero ni positivo.

Ejemplo 2.° Se tiene que

$$e^z = e^{z - z_0} e^{z_0} = e^{z_0}\left[1 + z - z_0 + \ldots\ldots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} + \ldots\ldots\right]$$

y la función e^z es regular en todo el plano.

Ejemplo 3.° De la igualdad

$$\log(1 + z) = \log(1 + z_0) + \log\left(1 + \frac{z - z_0}{1 + z_0}\right)$$
$$= \log(1 + z_0) + \frac{z - z_0}{1 + z_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{z - z_0}{1 + z_0}\right)^2 + \ldots\ldots$$

que se verifica cuando $|z - z_0| < |1 + z_0|$, se concluye que $\log(1 + z)$ es regular en todo el plano excepto en el punto $z_0 = -1$.

TEOREMA 1.º *Si una función uniforme, regular en todos los puntos de una área continua* A, *es constante en todos los puntos de una línea finita contenida en el área* A, *es constante en toda el área.*

Tomando un punto a de la línea dada, tendremos, para todos los valores de z representados por los puntos comprendidos en un círculo de centro a y de radio R,

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots\ldots + c_n(z - a)^n + \ldots\ldots$$

$$f(z) = f(a) + (z - a)f'(a) + \ldots\ldots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^n(a) + \ldots\ldots$$

Pero por ser constante $f(z)$ en todos los puntos de la línea dada, tenemos $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, ...; luego será $f(z) = f(a)$ en todo el círculo considerado.

Tomando enseguida un punto b del círculo anterior, y repitiendo el razonamiento, resulta que $f(z) = f(b) = f(a)$ en todos los puntos del segundo círculo y en parte del anterior, tomando un punto c de este círculo hállase lo mismo $f(z) = f(a) = f(b) = f(c)$ ..... y así sucesivamente.

TEOREMA 2.º *Si dos funciones uniformes, regulares en todos los puntos de una área continua* A, *son iguales en todos los puntos de una línea finita contenida en el área* A, *son iguales en toda el área*, pues siendo nula la diferencia de las dos funciones en todos los puntos de la línea dada, será nula en toda el área.

TEOREMA 3.º *Si una función uniforme y regular en el punto* a, *se anula así como todas sus derivadas hasta el orden* m — 1, *cuando* $z = a$, *tendremos*

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z),$$

siendo $\varphi(z)$ *una función regular en la proximidad del punto* a.

En efecto, siendo por hipótesis

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots\ldots$$

y $\quad c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \ldots\ldots,$ tenemos

$$f(z) = z - a)^m \left[\frac{1}{m!} f^m(a) + \frac{z-a}{(m+1)!} f^{m+1}(a) + \ldots\ldots\right].$$

TEOREMA 4.° *Los puntos en que una función uniforme y regular en una área* A, *tienen un mismo valor, están separados por intervalos finitos, si la función no es constante.*

En efecto, por no ser constante la función $f(z)$ en el área A, las derivadas $f'(a)$, $f''(a)$, ... no pueden ser todas iguales á cero, y si $f^m(a)$ es la primera derivada que no se anula, se tendrá

$$f(z) - f(a) = (z-a)^m \left[\frac{1}{m!} f^m(a) + \frac{z-a}{(m+1)!} + \ldots\ldots\right]$$

y por consiguiente es posible dar á δ un valor suficientemente pequeño, para que el módulo de su primer término sea mayor que el módulo de la suma de los siguientes, cuando $|z-a| \overline{\overline{<}} \delta$; luego en el círculo de centro a y de radio δ, la diferencia $f(z) - f(a)$ no puede ser nula en ningún punto diferente de a.

TEOREMA 5.° *La suma de dos expresiones uniformes, regulares en todos los puntos del área* A, *es una expresión regular en los mismos puntos.*

Siendo $f(z)$ y $F(z)$ las dos expresiones dadas, tenemos

$$f(z) = \Sigma c_n (z-a)^m, \quad F(z) = \Sigma\, C_n (z-a)^n$$

$$f(z) + F(z) = \Sigma\,(c_n + C_n)\,(z-a)^n.$$

TEOREMA 6.° *El producto de dos expresiones uniformes, regulares en todos los puntos de una área* A *es una expresión regular en los mismos puntos.*

TEOREMA 7.° *El cociente de dos expresiones* $\varphi(z)$ *y* $\psi(z)$ *uniformes, regulares en el área* A, *es regular en los puntos de esta en que el denominador* $\psi(z)$ *no se anula*, pues haciendo

$$\psi(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots\ldots,$$

donde c_0 es distinto de cero, tenemos

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_0 \left[1 + \frac{(z-a)\,(c_1 + c_2)\,(z-a) + \ldots\ldots}{c_0}\right]^{-1}$$

$$= c_0\,[1 + P(z-a)]^{-1},$$

haciendo

$$\frac{(z-a)\,[c_1+(e-a)c_2+\ldots\ldots]}{c_0}=P_0(z-a).$$

Dando á $|z-a|$ un valor suficientemente pequeño para que sea $P|z-a|<1$, podremos desarrollar $[\psi(z)]^{-1}$ en serie ordenada según las potencias de $z-a$, y tendremos

$$\frac{1}{\psi(z)}=c_0\left\{1-P(z-a)+[P(z-a)^2]-\ldots\ldots+\ldots\ldots\right\}$$

serie uniformemente convergente en la proximidad de a, lo mismo que las series que resultan de $P(z-a)$, $P(z-a)^2$ etc.; luego la función $[\psi(z)]^{-1}$ es susceptible de desarrollarse en serie ordenada según las potencias de $z-a$ en la proximidad de a. Esta función es, pues, regular en el punto a, así como $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\varphi(z)\,\dfrac{1}{\psi(z)}$.

65. Las funciones uniformes y regulares en todos los puntos del plano se llaman *holomorfas*, tales son los polinomios racionales, las funciones e^z, sen z, ... es decir, todas las funciones susceptibles de desarrollo en serie según las potencias ascendentes de z.

66. TEOREMA DE WEIERSTRASS. *Dada la serie de cantidades* $o, a_1\ a_2, \ldots\ldots$ *colocadas según el orden creciente de sus módulos que satisfacen á la condición*

$$\lim_{c=\infty}|a_c|=\infty$$

se puede formar una función transcendente entera por la fórmula

$$f(z)=z^{n_0}\prod_{c=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{n}e^{n_c S_c},\quad S_c=\sum_{k=1}^{m_c}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^{k}, \tag{1}$$

cuyas raices son o, $a_1\ a_2, \ldots\ldots$ *y cuyos grados respectivos de multiplicidad son* $n_0, n_1, \ldots\ldots$

RECÍPROCAMENTE. *Si* $f_1(z)$ *representa una función entera cuyas raíces son* o, a_1, $a_2, \ldots\ldots$ *y los grados respectivos de multi-*

plicidad $n_0, n_1, \ldots\ldots$, *esta función puede descomponerse en factores que hacen explícitas estas raices, por medio de la fórmula*

$$f_1(z) = e^{\varphi(z)} z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c}, \qquad (2)$$

representando $\varphi(z)$ *una función entera.*

Demostración de Mittag-Leffler. De la serie

$$\log \left(1 - \frac{n}{a_c}\right)^{n_c} = - n_c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

que se verifica cuando $\left|\frac{z}{z_c}\right| < 1$, se deduce

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = e^{-n_c S_c (1, \infty)} \qquad (3)$$

escribiendo, por brevedad,

$$S_c (u, \nu) = \sum_{k=u}^{\nu} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k.$$

Por consiguiente tenemos

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c (1, m_c)} = e^{-n_c S_c (m_c + 1, \infty)} \qquad (4)$$

donde m_c representa un número entero ó cero, debiendo en este caso representar $e^{n_c S_c (1, m_c)}$ la unidad.

Consideremos ahora una serie de cantidades positivas ε_1, $\varepsilon_2, \ldots\ldots$ tales, que $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$ sea convergente, y demos á m_c un valor tan grande que sea

$$n_c \,|S_c (m_c + 1, \infty)| < \varepsilon_c, \qquad (5)$$

para cualquier valor que se dé á z que satisfaga á la condición $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, lo que siempre es posible, por ser en este caso la serie $S_c(1, \infty)$ uniformemente convergente. El producto ΠE_c en el que

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c S_c(1, m_c)} = E_c,$$

representa una función regular en todos los puntos del plano, que se anula en los puntos $a_1, a_2, \ldots\ldots$, En efecto, consideremos un punto cualquiera z_0 del plano, y los puntos próximos á éste, es decir, los puntos que satisfacen á la condición $|z - z| \leqq \rho$, donde ρ es una cantidad tan pequeña como se quiera.

Por ser $\lim\limits_{c=\infty} a_c = \infty$, es siempre posible dar á c_1 un valor suficientemente grande para que la desigualdad $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon$ quede satisfecha por todos los valores de c mayores que c_1, y por todos los valores que satisfagan á la condición $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$.

Además, por ser convergente la serie $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_c$, siempre es posible dar á c_2 un valor suficientemente grande y á δ un valor suficientemente pequeño para que la desigualdad

$$\sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

quede satisfecha para todos los valores de c superiores á c_2, cualquiera que sea p.

Luego las dos desigualdades precedentes quedan satisfechas al mismo tiempo por los valores de c mayores que la mayor de las cantidades c_1 y c_2 en la región del plano determinada por la condición $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$.

De las desigualdades precedentes y de la (5) resulta que la desigualdad

$$\sum_{t=c}^{c+p} |n_t S_t(m_t + 1, \infty)| < \delta \tag{6}$$

queda satisfecha para todos los valores superiores á c_1 y c_2, en la región del plano determinada por la condición $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$.

Además la fórmula (4) da

$$\sum_{t=c}^{c+p} \mathrm{E}_t = e^{-\sum_{t=c}^{c+p} n_t \mathrm{S}_t(m_t + 1,\, \infty)}$$

de la que resulta

$$\sum_{t=c}^{c+p} \log \mathrm{E}_t = -\sum_{t=c}^{c+p} n_t \mathrm{S}_t(m_t + 1, \infty),$$

y en virtud de la desigualdad (6),

$$\left| \sum_{t=c}^{c+p} \log \mathrm{E}_t \right| < \delta\, ;$$

luego la serie $\sum\limits_{t=c}^{\infty} \log \mathrm{E}_t$ es uniformemente convergente en la región considerada del plano.

Esto sentado, supongamos primero que z_0 es diferente de a_c, y que á ρ se dé un valor tan pequeño que sea $|z - z_0| < |z - a_c|$. El segundo miembro de la igualdad

$$\log \mathrm{E}_c = n_c \log\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

$$= n_c \log\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right) + n_c \log\left(1 - \frac{z_0}{a_c}\right)$$

$$+ n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k}\left(\frac{z_0 + z - z_0}{a_c}\right)^k$$

es susceptible de ser desarrollado en serie ordenada según las potencias de $z - z_0$, y tenemos $\log \mathrm{E}_c = \mathrm{P}(z - z_0)$, indicando la notación $\mathrm{P}(z - z_0)$ de Weierstrass una serie ordenada según las potencias enteras de $z - z_0$.

Si aplicamos el teorema del núm. 64, tendremos que

$$\sum_{c=1}^{\infty} \log \mathrm{E}_c = \mathrm{P}_1(z - z_0),$$

y por consiguiente

$$\prod_{c=1}^{\infty} \mathrm{E}_c = e^{\mathrm{P}_1(z-z_0)}.$$

De esta fórmula resulta enseguida

$$\prod_{c=1}^{\infty} \mathrm{E}_c = 1 + \mathrm{P}_1(z - z_0) + \ldots\ldots + \frac{\mathrm{P}_1^n (z - z_0)}{n!} + \ldots\ldots$$

ó
$$\prod_{c=1}^{\infty} \mathrm{E}_c = \mathrm{P}_2(z - z_0),$$

lo que prueba que la función $\prod_1^{\infty} \mathrm{E}_c$ es regular en el punto z_0, según se quería demostrar.

Supongamos ahora que z_0 representa una raíz a_j de la función que queremos formar. Dando, en este caso, á ρ un valor suficientemente pequeño para que en el área plana determinada por la condición $|z - a_j| \overline{<} \rho$ no exista otra raíz de la función considerada, tendremos

$$\frac{\prod_1^{\infty} \mathrm{E}_c}{\left(1 - \dfrac{z}{a_j}\right)^{n_j}} = e^{\mathrm{P}_3(z-a_j)}$$

ya que el primer miembro no tiene la raíz a_j y por tanto,

$$\prod_1^{\infty} \mathrm{E}_c = \frac{(-1)^{n_j}}{a_j} (z - a_j)^{a_j} e^{\mathrm{P}_2(z-a_j)}$$

de donde resulta, como en el caso anterior, que la función $\prod_1^{\infty} \mathrm{E}_c$ es regular en el punto a_j.

Las raíces a_1, a_2, ... de la función que vamos á formar, son todas diferentes de cero.

Para que la función tenga también la raíz 0, basta multiplicar

$\prod_1^\infty E_c$ por z^{n_0}. En efecto, tenemos

$$z^{n_0}\prod_1^\infty E_c = (z_0 + z - z_0)^{n_0} P_2(z - z_0) = P_4(z - z_0),$$

y por tanto, la nueva función que se obtiene es también regular en todo el plano.

De todo lo que precede se concluye la primera parte del teorema de Weierstrass, esto es, que se puede construir, mediante la fórmula (1) una función que sea regular en todo el plano y que se anule en los puntos o, $a_1, a_2, \ldots\ldots$

Para demostrar la segunda parte del teorema, basta notar que el cociente de la función $f_1(z)$ dada por la función $f(z)$, que acabamos de formar, no puede ser nulo ni infinito en ningún punto del plano. Luego este cociente representa una función $F(z)$ regular en todo el plano, que no se anula en ningún punto.

Por ser, en la proximidad del punto z_0,

$$F(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots\ldots, \quad \left(b_0 \lesseqgtr 0\right),$$

tendremos

$$lF(z) = lb_0 + l\left[1 + \frac{(z - z_0)[b_1 + b_2(z - z_0) + \ldots\ldots]}{b_0}\right];$$

luego si se dan á $|z - z_0|$ valores suficientemente pequeños para que sea

$$\frac{|z - z_0|\,|b_1 + b_2(z - z_0) + \ldots\ldots|}{|b_0|} < 1,$$

tendremos en virtud del teorema núm. 64 que

$$\log F(z) = P(z - z_0);$$

luego la función $F(x)$ es entera. Representando esta función por $\varphi(z)$, será $F(z) = e^{\varphi(z)}$ y

$$f_1(z) = e^{\varphi(z)} f(z)$$

según se quería demostrar.

67. Factores primarios de las funciones enteras.

Weierstrass designa con el nombre de *factores primarios* á cada uno de los factores

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) e^{n_c S}$$

que figuran en las fórmulas (1) y (2) del número anterior.

Lo mismo para descomponer una función entera dada en factores primarios que para hallar una función entera que tenga raíces dadas, es necesario conocer, para cada valor de c un valor de m_c que satisfaga á la desigualdad

$$n_c \,|\, S_c (m_c + 1, \infty) \,| < \varepsilon_c,$$

y para ello basta, como vamos á ver, el dar á m_c valores tales, que sea convergente la serie

$$\sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|. \tag{6}$$

En efecto, si esta serie es convergente, podemos dar á ε_c el valor

$$\varepsilon_c = \lambda \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|, \tag{7}$$

designando λ una cantidad independiente de z y de c.

Pero, por ser

$$n_c \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| < \sum_{k=m+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k$$

y

$$\sum_{k=m_c+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k = \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right| \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|},$$

la desigualdad (5) puede ser sustituída por la siguiente:

$$\left|\frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}}\right| \frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|} < \varepsilon_c,$$

la cual queda satisfecha, puesto que se puede dar á λ el valor máximo $\frac{1}{1-\varepsilon}$ que adquiere $\frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|}$ cuando se verifica que $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$.

Ejemplo. Hallar la forma general de las funciones enteras cuyas raíces son $0, 1, -1, 2, -2, \ldots\ldots, c, -c, \ldots\ldots$

Puesto que la serie $\sum_{c=1}^{\infty}\left|\frac{z^2}{a_c^2}\right| = \sum_{c=1}^{\infty}\frac{|z|^2}{c^2}$ es convergente, cualquiera que sea z, podemos hacer $m_c = 1$, y tendremos

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{c}\right)e^{\frac{z}{c}}\left(1+\frac{z}{c}\right)e^{-\frac{z}{c}}\right],$$

ó

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

donde $\varphi(z)$ representa una función entera de z.

68. Desarrollo en serie de $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$.

Derivando los logaritmos de los dos miembros de la fórmula (2) (63) tendremos

$$\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \varphi'(z) + \frac{n_0}{z} + \sum_{c=1}^{\infty}\frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c}(z-a_c)}, \tag{8}$$

puesto que

$$\frac{1}{z - a_c} = -\frac{1}{a_c}\left[1 + \frac{z}{a_c} + \ldots\ldots + \left(\frac{z}{z_c}\right)^{m_c - 1}\right]$$
$$+ \frac{z^{m_c}}{a_c^{m_c}(z - a)}.$$

Para completar la demostración de la fórmula (8) vamos á demostrar que la serie que entra en el segundo miembro es uniformemente convergente, cuando la serie (6) lo es.

En efecto, por ser esta serie uniformemente convergente y por tender $|a_t|$ hacia el infinito con t, á cada valor de δ, por pequeño que sea, corresponderá un valor t_1 tal, que las desigualdades

$$\lambda \sum_{c=t}^{t+p} \left|\frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c+1}}\right| < \delta, \quad \left|\frac{z}{a_t}\right| < \varepsilon$$

quedará satisfecha, cuando $t > t_1$ y $|z| < \delta$, expresando ρ una cantidad tan grande como se quiera. Luego *a fortiori* tenemos

$$\sum_{c=t}^{t+p} \left|\frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c+1}}\right| \frac{1}{\left|1 - \frac{z}{a_c}\right|} < \delta,$$

y finalmente

$$\sum_{c=t}^{t+p} \left|\frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c}(z - a_c)}\right| < \delta,$$

de donde se concluye que la serie que entra en el segundo miembro de (8) es uniformemente convergente en cualquier área, por grande que sea.

69. Polos y puntos esenciales. Vamos á considerar las funciones uniformes no enteras, regulares en todo el plano, excepto en los puntos aislados $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_c, \ldots\ldots$ tales que sea $\lim\limits_{c=\infty} |a_c| = \infty$, en la proximidad de los cuales tenemos que

$$f(z) = P(z - a_c) + G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right), \qquad (1)$$

donde

$$G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = \sum_{t=1}^{m} A_t \left(\frac{1}{z - a_c}\right)^t. \qquad (2)$$

Estos puntos fueron llamados por Weierstrass *polos*, cuando m es finito y puntos *singulares esenciales*, cuando m es infinito.

Las funciones consideradas resultan de la generalización de las funciones racionales.

Una función racional $f(z)$ se descompone en fracciones simples bajo la forma

$$f(z) = \Sigma \frac{A^a}{(z - a_1)^a} + \Sigma \frac{B^b}{(z - a_2)^b} + \ldots..$$

Si ahora representamos por z_0 un punto diferente de $a_1, a_2, \ldots$, tenemos

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z - a_1)^a}\left(1 - \frac{z - a_0}{z_0 - a_1}\right)^{-a} + \ldots..$$

de donde resulta (60),

$$f(z) = P(z - z_0),$$

siendo $f(z)$ una función regular en la proximidad de z_0; si pues z_0 representa uno de los puntos $a_1, a_2, \ldots.. a_1$, por ejemplo, aplicando la descomposición anterior sólo á los entornos correspondientes á $a_2, a_3, \ldots\ldots$, tendremos

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z - a_1)^a} + P_1(z - a_1)$$

y el punto a_1 es un polo.

La fórmula

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

que da la descomposición de la función seno en factores, da

$$\log \operatorname{sen} z = \log z + \sum_{c=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z^2}{c^2\pi^2}\right)$$

y derivando respecto á z,

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - c^2\pi^2},$$

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - c\pi} + \frac{1}{z + c\pi}\right)$$

que da la descomposición de $\cot z$ en fracciones simples, que hacen explícitos los polos $0, c\pi, -c\pi$ de la función.

Desarrollando el binomio que entra en el segundo miembro de la penúltima fórmula, tenemos

$$\cot z = \frac{1}{z} - 2z \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2\pi^2} + \frac{z^2}{c^4\pi^4} + \ldots\ldots\right)$$

cuando $|z| < \pi$, en virtud de 60 se tiene que

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{c^2} - \frac{2z^3}{\pi^4} \sum_1^{\infty} \frac{1}{c^4} - \frac{2z^5}{\pi^6} \sum_1^{\infty} \frac{1}{c^6} - \ldots\ldots$$

70. TEOREMA DE MITTAG-LEFFLER. *Dadas las cantidades* $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_c, \ldots\ldots$ *colocadas en el orden creciente de sus módulos, que satisfacen á la condición* $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, *y dadas las funciones*

$$G_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right),\quad G_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right), \ldots\ldots,\quad G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right), \ldots\ldots$$

que son de la forma (2), (pág. 153) *siempre es posible formar una función* f(z) *de la forma*

$$f(z) = \sum_{c=1}^{\infty} \left[G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) + P_c(z)\right]$$

que sea regular en todos los puntos del plano, diferentes de $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_c \ldots\ldots$ *de la cual estos puntos sean polos ó puntos singulares esenciales.*

RECÍPROCAMENTE: *Toda función* $f_1(z)$ *regular en todo el plano, excepto en los puntos* $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_c, \ldots\ldots$ *que son polos ó puntos singulares esenciales, puede reducirse á la forma*

$$f_1(z) = \varphi(z) + \sum_{c=1}^{\infty}\left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z)\right],$$

donde $\varphi(z)$ *representa una función entera de* z.

En efecto, por ser uniformemente convergente la serie

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = -\frac{A_1}{a_c}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-1} + \frac{A_2}{a^2_c}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-2} - \ldots$$

cuando z es diferente de a_c, y por ser cada término de esta serie susceptible de desarrollarse en serie ordenada según las potencias de z, cuando $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, tendremos en virtud del teorema 60

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(c)}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k. \tag{3}$$

Consideremos ahora una serie de cantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_c, \ldots\ldots$ tales que la suma $\sum_1^{\infty}\varepsilon_c$ sea convergente; y dése á m_c un valor tan grande que tengamos

$$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty} A_k^{(c)}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k\right| < \varepsilon_c, \tag{4}$$

para cualquier valor atribuído á z que satisfaga la condición $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, lo que es siempre posible, por ser uniformemente convergente la serie (3) en la región del plano determinada por la condición $\left|\frac{z}{a_c}\right| < 1$. La suma

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z), \quad F_c(z) = G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) - \sum_{k=0}^{m_c} A_k^{(c)}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

satisface á las condiciones del teorema, pues si z_0 es un punto diferente de los puntos $a_1, a_2, \ldots\ldots$ y ρ una cantidad positiva tan pequeña como se quiera, por ser $\lim\limits_{c=\infty} |a_c| = \infty$ y convergente la serie $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_c$, es siempre posible dar á c_1 un valor tan grande, que las desigualdades

$$\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon, \quad \sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

queden satisfechas, al mismo tiempo por todos los valores de c superiores á c_1, en la región determinada por la condición $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$, para cualquier valor de p; y se concluirá de estas desigualdades y de la (4) que

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \sum_{k=m_c+1} A_k^{(t)} \left(\frac{z}{a_t}\right)^k \right| < \delta$$

ó

$$\sum_{t=c}^{c+p} |F^t(z)| < \delta$$

quedan satisfechas por los valores de c superiores á c_1, en la región del plano determinada por la condición $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$; luego la serie $\sum\limits_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ es uniformemente convergente en la región definida por la condición $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$.

Esto sentado, como z_0 es diferente de a_c, supongamos que se da á ρ un valor suficientemente pequeño para que sea $|z - z_0| < |z - a_c|$.

El segundo miembro de la igualdad

$$G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = \sum_{t=1}^{m} \frac{A_t}{z_0 - a_c}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right)^{-1}$$

es susceptible (60) de ser desarrollado en serie ordenada según las potencias de $z - z_0$ en la región del plano determinada por la condición $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$; luego lo mismo sucede á la función $F_c(z)$, y tenemos (60),

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = P(z - z_0).$$

La función $\sum_{1}^{\infty} F_c(z)$ es pues regular en el punto z_0. Consideremos ahora un punto singular a_j de la función que queremos formar. Dando en este caso á ρ un valor suficientemente pequeño para que en la región determinada por la condición $|z - a_j| \overline{\overline{<}} \rho$ no exista otro punto singular de la función considerada, tenemos que

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) - F_j(z) = P_1(z - a_j),$$

puesto que el primer miembro no tiene el punto singular a_j, y por tanto que

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = G_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right) + P_3(z - a_j);$$

luego a_j es un polo ó un punto singular esencial de la función $\Sigma F_c(z)$.

Los puntos singulares $a_1, a_2, \ldots\ldots$ de la función que hemos formado, son diferentes de cero.

Para que o sea un punto singular de esta función, de modo que en su entorno tengamos

$$f(z) = P_2(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right), \quad G_0\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{z}\right)^c,$$

basta hacer

$$f(z) = \sum_{c=1}^{m} F_c(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right).$$

En efecto, la función

$$G_0\left(\frac{1}{z}\right) = G_0\left(\frac{1}{z\left(1+\frac{z-z_0}{z_0}\right)}\right)$$

es (60) regular en la proximidad de cualquier punto z_0 diferente de 0; y en la proximidad del punto 0, la función $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ es regular.

Para demostrar la 2.ª parte del teorema, basta notar que la diferencia entre $f(z)$ y $F_c(z)$ no tiene puntos singulares, y por tanto es igual á una función entera $\varphi(z)$ (*).

§ 5.º Algunas series.

71. Polinomios de Legendre. En la pág. 63 se desarrolló en serie la función

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}}$$

cuyo desarrollo podemos escribir así:

$$y = 1 + \frac{1}{2}z(2x-z) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^2(2x-z)^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ldots 2n} z^n(2x-z)^n + \ldots\ldots$$

que puede deducirse del desarrollo

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots\ldots 2n} x^n + \ldots\ldots$$

haciendo $1-2zx+z^2 = 1 - z(2x-z)$.

(*) Gomes Teixeira *Curso de Analyse infinitesimal*.

Sean r el valor absoluto de z y ρ el de x. Cuando se desarrollan las expresiones entre paréntesis y se efectúan las multiplicaciones, la serie de los valores absolutos de los términos así obtenidos, se reduce á

$$1 + \frac{1}{2} r(2\rho + r) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} r^2 (2\rho + r)^2 + \dots\dots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots\dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots\dots 2n} r^n (2\rho + r)^n + \dots\dots$$

que es el desarrollo de $[1 - r(2\rho + r)]^{-\frac{1}{2}}$; siendo convergente para

$$r^2 + 2\rho r - 1 < 0 \quad \text{ó} \quad r < -\rho + \sqrt{\rho^2 + 1}.$$

La serie considerada es pues absolutamente convergente para

$$|z| < - |x| + \sqrt{x^2 + 1},$$

y su suma no cambia, cuando se invierte el orden de sus términos. Pero si se ordena con arreglo á las potencias ascendentes de z, la expresión del coeficiente de z^n será

$$X_n = \frac{1 \cdot 3 \dots\dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \dots\dots n} x^n - \frac{1 \cdot 3 \dots\dots (2n-3)}{1 \cdot 2 \dots\dots (n-2)} \frac{x^{n-2}}{2}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \dots\dots (2n-5)}{1 \cdot 2 \dots\dots (n-4)} \frac{x^{n-4}}{2 \cdot 4}$$

$$+ (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \dots\dots (2n-2p-1)}{1 \cdot 2 \dots\dots (n-2p)} \frac{x^{n-2p}}{2 \cdot 4 \dots\dots 2p} + \dots\dots$$

El desarrollo de y puede por tanto escribirse bajo la forma

$$y = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots\dots + X_n z^n + \dots\dots$$

Los coeficientes de las potencias sucesivas de z son los *polinomios de Legendre.* Estas funciones se presentan en la teoría de la atracción de los cuerpos esféricos, por lo que Gauss las llamó *funciones esféricas*.

El polinomio X_n puede escribirse bajo la forma

$$X_n = \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2n-1}\frac{x^{n-2}}{2}\right.$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-3)}\frac{x^{n-4}}{2 \cdot 4} - \ldots\ldots$$

$$\left. + (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)}\frac{x^{n-2p}}{2 \cdot 4 \ldots 2p} + \ldots\right].$$

Pero $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} = \dfrac{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}$,

pues supuesto que esta identidad se verifica, se demuestra que subsiste cuando se sustituye n por $n+1$. Pero se verifica para $n=1$, $n=2$, ...; luego la expresión del término en x^{n-2p} del producto $2 \cdot 4 \ldots 2nX_n$ es

$$(-1)^p \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots\ldots(2n-2p+1)}\frac{x^{n-2p}}{2 \cdot 4 \ldots 2p},$$

es decir,

$$(-1)^p \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots p}(2n-2p)(2n-2p-1)\ldots\ldots (n-2p+1)\,x^{n-2p},$$

ó también

$$(-1)^p \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots p}\frac{d^n x^{2n-2p}}{dx^n},$$

concluyéndose que el producto $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2nX_n$ es la derivada n^{sima} del polinomio

$$(x^2-1)^n = x^{2n} - \frac{n}{1}x^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{2n-4} - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots p}x^{2n-2p} + \ldots\ldots;$$

luego $$X_n = \frac{1}{2 . 6 \ldots\ldots 2n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

fórmula debida á Olinde Rodrigues.

Los polinomios X_n tienen propiedades análogas á las funciones de Sturm.

72. Serie hipergeométrica. Se llama *serie hipergeométrica* á la serie entera

$$1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 . 2 . \gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1 . 2 \ldots n . \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n + \ldots\ldots$$

no siendo los enteros α, β, γ, ... negativos.

La relación del término n^2 de lugar $n+2$ al precedente es

$$\frac{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}{n^2 + (\gamma+1)n + \gamma} x;$$

su límite, para $n = \infty$ es igual á x. El radio de convergencia de la serie hipergeométrica es pues 1.

Si $x = 1$, los términos acaban por hacerse del mismo signo.

Apliquemos la *regla de convergencia de Gauss:*

Si en una serie positiva se tiene

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + an^{p-1} + a_1 n^{p-2} + \ldots\ldots + a_{p-1}}{n^p + bnx^{p-1} + b_1 n^{p-2} + \ldots\ldots + b_{p-1}},$$

los términos decrecen á partir de cierto lugar, y tienden hacia cero para $b - a > 0$, *terminando por aumentar indefinidamente para* $b - a < 0$, *y tienen un límite que no es nulo para* $b - a = 0$. *La serie es convergente para* $b - a > 1$, *en los demás casos es divergente.*

La aplicación de dicha regla ó *criterio* da los resultados siguientes:

1.° $\alpha + \beta - \gamma + 1 > 0$. Los términos aumentan indefinidamente en valor absoluto.

2.° $\alpha+\beta-\gamma-1=0$. Los términos tienen un límite que no es nulo.

3.° $\alpha+\beta+\gamma-1<0$. Los términos tienden hacia cero.

La serie es convergente tan sólo cuando α, β, γ verifican á la desigualdad $\alpha+\beta-\gamma<0$.

Si $x=-1$, se ve que la relación de un término al precedente termina por hacerse negativa cuando n es suficientemente grande. Los términos son pues, á partir de cierto lugar, alternativamente positivos y negativos. Según lo que precede, no tienden hacia cero más que cuando se tiene $\alpha+\beta-\gamma-1<0$, y en este caso, sus valores absolutos van decreciendo. La serie sólo es pues convergente para

$$\alpha+\beta-\gamma-1<0;$$

y, por otra parte, solo es absolutamente convergente cuando $\alpha+\beta-\gamma<0$.

La serie hipergeométrica es un caso particular de la serie

$$1+\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q)(1-q^{\gamma})}x$$

$$+\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\beta})(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}x^2+\ldots\ldots$$

llamada *serie de Heine* que se reduce á aquélla haciendo $q=1$.

Cuando la serie hipergométrica es convergente, su suma se representa por $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ y se llama *función de Gauss*.

73. Polinomios de Hermite. La derivada n^{sima} de $y=e^{-x^2}$ es de la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n}=P_n e^{-x^2},$$

expresando P_n un polinomio entero en x de grado n. Estos polinomios se llaman *polinomios de Hermite*.

Tres polinomios consecutivos verifican la relación recurrente

$$P_{n+1}+2xP_n+2nP_{n-1}=0, \tag{1}$$

porque derivando n veces la ecuación

$$y' + 2xy = 0,$$

se obtiene $\quad y^{(n+1)} + 2xy^{(n)} + 2ny^{(n-1)} = 0;$

y si se divide por e^{-x^2}, se obtiene la ecuación (1).

§ 6.° Funciones analíticas

74. Definiciones. *Función analítica* es toda función de un número cualquiera de variables x, y, z ..... que en la proximidad de un sistema de valores $x_0, y_0, z_0, \ldots$.. puede desarrollarse en serie entera ordenada según las potencias de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0, \ldots$.. y convergente mientras que los valores absolutos de estas diferencias no excedan de ciertos límites. Estas funciones resultan unas de otras. Dadas una ó varias funciones analíticas, la integración ó la diferenciación y las operaciones algebráicas, tales como la multiplicación, división, combinación por sustitución, etc., conducen á nuevas funciones analíticas. Pero siendo analíticas las funciones más simples, tales como los polinomios, la exponencial y las funciones circulares, las primeras funciones estudiadas por los geómetras han sido necesariamente analíticas. Además, á pesar del papel fundamental de las funciones analíticas, no debe olvidarse que sólo forman un grupo particular en el conjunto de las funciones continuas (*).

Según Weierstrass, *función analítica* es el conjunto de todos los elementos $P(x - a)$ que se deducen unos de otros por el método de *prolongación*, y *expresión analítica* es toda expresión que se sabe calcular por medio de operaciones analíticas cualesquiera conocidas. (Adición, multiplicación, división. . . . .)

75. Prolongación analítica. Sea

$$P_0(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (1)$$

(*) Goursat *Cours d' Analyse mathématique* t. I p. 456.

una serie entera con relación á $x - x_0$, cuyo círculo de convergencia tiene el radio R_0 y el centro x_0. La suma de esta serie define una función de x para todos los valores de x tales, que $|x - x_0| < R_0$.

La serie (1) según Weierstrass es un *elemento de función analítica.*

Sea x_1 un punto interior al círculo C_0. Si se hace

$$x - x_0 = x_1 - x_0 + h, \qquad h = x - x_1,$$

existirá (57 y 63) una serie ordenada según las potencias de h cuya suma será la de la propuesta y convergente siempre que se tenga

$$|x - x_1| < R_0 - |x_1 - x_0|,$$

es decir, mientras que el punto x sea interior al círculo descrito desde x_1 como centro, tangente interiormente al círculo C_0. Expresamos esta serie por

$$P_1(x - x_1) = b_0 + b_1(x - x_1) + \ldots.. + b_n(x - x_n)^n + \ldots..$$

Los coeficientes $b_0, b_1, \ldots.., b_n, \ldots..$ son los valores, para $x = x_1$, de las funciones

$$P_0(x - x_0), \frac{d}{dx} P_0(x - x_0), \ldots, \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{d^n}{dx^n} P_0(x - x_0), \ldots$$

Sea R_1 el radio del círculo de convergencia C_1 de la serie $P_1(x - x_0)$.

Dos casos pueden presentarse: ó bien se tendrá, cualquiera que sea el punto x_1 situado en el interior del círculo C_0,

$$R_1 = R_0 - |x_1 - x_0|;$$

ó bien para ciertos puntos, por lo menos, se tendrá

$$R_1 > R_0 - |x_1 - x_0|.$$

En el primer caso, la función definida por la primera serie $P(x - x_0)$ se halla realmente contenida en el círculo de convergencia C_0; no pudiendo continuarse ó prolongarse más allá. Un ejemplo de este caso ofrece la serie presentada por Herr Lerch *(Acta Mathematica* t. X, p, 87.)

$$P(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} x^{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n},$$

cuyo círculo de convergencia tiene por radio 1. Si se hace $x = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ siendo $r < 1$, y si se supone $\varphi = \frac{p}{q} 2\pi$, siendo p y q enteros, se verá que, para este valor de la variable

$$P(x) = \sum_{n=1}^{n=q-1} x^{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} + \sum_{n=q}^{n=\infty} r^{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}.$$

La segunda parte de la serie del segundo miembro es real, y el valor absoluto de la primera es menor que $q - 1$. La segunda parte, además crece indefinidamente cuando r tiende hacia 1 por valores crecientes; luego lo mismo sucede á $|P(x)|$ cuando el punto x se aproxima á la circunferencia del círculo C_0, permaneciendo en el radio que termina en el punto cuya afija es

$$\cos \frac{p}{q} 2\pi + i \operatorname{sen} \frac{p}{q} 2\pi,$$

concluyéndose de esto que dicho punto no puede hallarse en el interior del círculo de convergencia de una serie $P_1(x - x_1)$ deducida de $P(x)$ como se ha indicado anteriormente. Además, en todo el arco de la circunferencia del círculo C_0 se halla una infinidad de puntos cuya afija tiene la forma indicada. Todos los círculos de convergencia de las series tales como $P(x - x_1)$ son pues tangentes interiormente al círculo C_0. Lo mismo sucederá á la serie $\sum_{n=1}^{n=\infty} x^{n^2}$ y á otras series análogas.

El segundo caso es el que se presenta con más frecuencia. En este caso, los dos círculos C_0 y C_1 tienen una parte común $[C_0, C_1]$, y podemos enunciar el siguiente

TEOREMA *En todo punto ξ interior á la vez á los dos círculos* C_0 *y* C_1 *las dos series* $P_0(x - x)$ y $P_1(x - x_1)$ *representan la misma función.*

En efecto, para todo punto x' situado en el interior del círculo C'_1 descrito desde el punto x_0 como centro y tangente interiormente á C_0, las dos funciones $P_0(x - x_0)$ y $P_1(x - x_1)$ son iguales, así como sus derivadas. Esto es evidente para las derivadas, si se considera á éstas como los límites del incremento de la función al de la variable, y resulta evidente también, si se comparan los dos desarrollos

$$P_0(x'-x_0)+\frac{h}{1}P'_0(x'-x_0)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}P_0^{(n)}(x'-x_0)+\ldots$$

$$P_1(x'-x_1)+\frac{h}{1}P'_1(x'-x_1)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}P_1^{(n)}(x'-x_1)+\ldots$$

desarrollos en los que $P_0^{(n)}(x' - x_0)$ y $P_1^{(n)}(x' - x_1)$ expresan los valores para $x = x'$ de las n^{simas} derivadas con relación á x de $P_0(x - x_0)$ y $P_1(x - x_1)$, que se obtienen sustituyendo, en estas últimas funciones, x por $x' + h$ y desarrollando después según las potencias de h. Estas dos series enteras en h deben tener valores iguales para valores suficientemente pequeños de h, y por consiguiente, deben tener sus coeficientes correspondientes iguales (21). Si pues ξ es interior al círculo C'_1, las dos series $P_0(x - x_0)$ y $P(x - x_1)$ tienen el mismo valor en este punto, así como todas sus derivadas.

Si pues se consideran, en general, dos puntos cualesquiera, se les puede suponer ligados de la manera siguiente. Imaginemos una serie formada por un número finito de puntos, tan próximos como se quiera,

$$x_1,\ \xi,\ \xi_2,\ \ldots\ldots,\ \xi_n,\ \xi, \qquad (1)$$

de los cuales x_1 y ξ sean respectivamente el primero y el último y una serie correspondiente de círculos

$$C_1,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots\ldots,\ \Gamma_n,\ \Gamma,$$

tales que el centro de cada uno sea el punto correspondiente de la serie (1) y que cada círculo contenga en su interior el centro del círculo siguiente. Llamaremos á la figura formada por estos círculos, *cadena de círculos* entre x_1 y ξ. (Es con frecuencia cómodo suponer que cada círculo contenga también el centro del círculo precedente, con el fin de que pueda *descender* la cadena yendo de ξ y x_1 como se *asciende* yendo de x_1 á ξ(*)).

Siendo los puntos x_1 y ξ interiores al espacio $[C_0, C_1]$, supondremos formada la cadena por círculos que sean todos interiores á este espacio y que no sean tangentes al límite. Se podrán tomar, por ejemplo, los puntos $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n$ en el segmento de recta que une x_1 á ξ.

Esto sentado, en todo el punto del círculo c_1, las dos series $P_0(x - x_0)$ y $P_1(x - x_1)$ tienen los mismos valores, así como todas sus derivadas y diremos que en este círculo *coinciden* éstas. El punto ξ_1 es interior á los círculos c_1, C_0, C_1. Si en cualquiera de las dos series se sustituye x por $\xi_1 + x - \xi_1$ y se ordena con relación á $x - \xi_1$, se formarán dos series idénticas enteras en $x - \xi$, pudiéndose representar cualquiera de ellas por $\omega_1(x - \xi_1)$. Esta última serie converge seguramente en el círculo Γ_1, interior á los círculos C_0 y C_1, y coincide, tanto con $P_0(x - x_0)$ como con $P_1(x - x_1)$. El punto ξ_2 es interior á los círculos C_0, C_1, Γ_1. Bi en las series $P_0(x - x_0)$, $P_1(x - x_1)$, $\omega_1(x - x_1)$ se sustituye x por $\xi_2 + x - \xi_2$ y se ordena con relación $x - \xi_2$, se formarán tres series idénticas enteras en $x - \xi_2$ de las que una cualquiera puede representarse por $\omega(x = \xi_2)$. Esta última converge en todo el círculo Γ_2 interior á C_0 y á C_1 y coincide con $P_0(x - x_0)$ y $P_1(x - x_1)$. Se continuará del mismo modo, y se llegará así por un número *finito* de operaciones á una serie entera en $x - \xi$,

$$\omega(x = \xi),$$

convergente en el círculo Γ de centro ξ, interior á los círculos

(*) *Elements de la théorie des fonctions elliptiques*, par J. Tannery et J. Molk p. 78.

C_0 y C_1 y que coinciden, en este círculo, tanto con $P_0(x = x_0)$ como son $P_1(x = x_1)$, quedando demostrado el teorema

Ejemplo. Sea

$$P(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = \ldots\ldots$$

en la que el radio del círculo de convergencia es 1. En un punto interior x de este círculo, las derivadas sucesivas son

$$P'(x) = 1 - x + x^2 = \ldots\ldots = \frac{1}{1+x},$$

$$P''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \ldots\ldots, P^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1.2\ldots\ldots(n-1}{(1+x)^n}.$$

Por consiguiente, siendo x_1 un punto interior á C,

$$P(x) = P(x_1) + \frac{x - x_1}{1 + x_1} - \frac{1}{2}\frac{(x - x_1)^2}{(1 + x_1)^2} + \frac{1}{3}\frac{(x - x_1)^3}{(1 + x_1)^3} - \ldots\ldots$$

$$= P(x_1) + P\left(\frac{x - x_1}{1 + x_1}\right).$$

Se ve por otra parte que la serie

$$P\left(\frac{x - x_1}{1 + x_1}\right),$$

entera en $x - x_1$, es convergente mientras se tenga

$$|x - x_1| < |1 + x_1|,$$

es decir, mientras que el punto x se halle situado en el interior de c_1, descrito desde el punto x_1 como centro y que pasa por el punto -1. Así, el círculo de convergencia de la serie

$$P(x_1) + P\left(\frac{x - x_0}{1 + x_1}\right)$$

es en general parcialmente exterior al círculo C, y se tiene de este modo un primer medio de continuar la función $P(x)$ fuera del círculo C, que podrá emplearse sucesivamente.

Por otra parte, si x' es un punto cualquiera exterior ó interior al círculo C, pero cuya afija no es real negativa y menor que -1 (ó $=-1$), la serie

$$P\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)=\frac{x-x'}{1+x'}-\frac{1}{2}\frac{(x-x')^2}{(1+x')^2}+\frac{1}{3}\frac{(x-x')^3}{(1+x')^3}-\dots$$

entera en $x-x'$, es convergente mientras que x satisfaga á la condición

$$|x-x'|<|1+x'|,$$

es decir, mientras que x se halle en el interior del círculo C′ descrito desde x' como centro y que pasa por el punto -1; y como la derivada con relación á x de $P\left(\frac{x-x'}{1+x}\right)$ es igual á

$$\frac{1}{1+\frac{x-x'}{1+x'}}\,\frac{1}{1+x'}=\frac{1}{1+x},$$

las funciones $P(x)$ y $P\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)$

tienen en x todas sus derivadas iguales, concluyéndose que, si se designa por a un valor de x que satisfaga simultáneamente á las condiciones

$$|a|<1, \quad |a-x'|<|1+x'|,$$

las dos funciones

$$P(x), \quad P\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)-P\left(\frac{a-x'}{1+x'}\right)+P(a)$$

coinciden, así como sus derivadas en el punto a, y coincidirán por consiguiente, en toda la región común á los dos círculos respectivamente concéntricos con los dos círculos C y C′ y de radios un poco menores y por consiguiente, en un punto cualquiera de la región común á los dos círculos C y C′, que contiene el punto a. Si se suprimen las porciones de las dos circunferencias C y C′, tales que cada una es interior al círculo de que no forme parte, se define en el área ((C, C′)) una función única (fx), holoforma en el área, pero no en el contorno (*).

El dominio de existencia de una función analítica puede extenderse sucesivamente, mientras sea posible su prolongación analítica. De esto resultan obstáculos que impiden dicha prolongación analítica, los cuales son los *puntos singulares*.

Sea L una línea arbitraria que parte del punto inicial a. Todos los puntos de L, interiores al círculo de convergencia C_a, pueden ser alcanzados por medio de un número *finito* de elementos. No sucede lo mismo respecto á un punto α de la circunferencia C_a ó exterior á ésta, ocurriendo dos casos posibles:

1.º Existe una serie de potencias $P(x|\alpha)$ que coincide con $P(x|a)$ en la región común á los dominios C_a y C_α. La función analítica es entonces holomorfa ó *regular* en α. El punto α es un punto ordinario.

2.º Si es imposible formar dicha serie, el punto α es un *punto singular*, el cual es punto frontera que sirve de separación entre los puntos de la línea L que se pueden alcanzar por la prolongación, siguiendo la línea L á partir de a y los otros puntos de dicha línea. El conjunto de los puntos de este tipo, relativos á todos los elementos, constituye la *frontera* del dominio de existencia de esta función. El conjunto de los puntos singulares es el conjunto de los puntos en que la función no es regular, es siempre *cerrado*, porque un punto ordinario es el centro de un círculo cuyos puntos no son ninguno singular.

Respecto á las singularidades citaremos el caso de la serie

$$1 + ax^c + \ldots\ldots + a^n x^{c^n} + \ldots\ldots \qquad (a \text{ const} > 0;\ c \text{ entero} > 0)$$

cuyo círculo de convergencia tiene por radio la unidad, porque la relación de un término al precedente tiende hacia cero ó al

(*) Tannery et Molk. *Elements de la Théorie des fonctions elliptiques* p. 85-87.

infinito según $|x|$ es < 1 ó > 1. *Dicho círculo es una línea singular para la función definida por la serie.* (*)

Citaremos que el profesor M. Pringsheim demostró que: *La función definida por una serie entera* tiene en general *como cortadura (coupure) su círculo de convergencia.* Resultando de estas consideraciones la existencia de funciones analíticas que cesan de existir en toda una región del plano, es decir, *teniendo espacios lagunares.*

Respecto á la expresión, *por medio de integrales ó de series*, de las funciones analíticas que tienen líneas singulares ó espacios lagunares, citaremos con M. Fouet el ejemplo presentado por M. Poincaré, con la serie

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x - b_n},$$

siendo C un contorno (que tiene en cada punto una tangente y un radio de curvatura) que divide el plano en dos regiones, una interior y otra exterior á dicho contorno. Se supone que la serie Σa_n converge absolutamente, que todos los puntos b_n se hallan en el interior de C ó en C y forman un conjunto denso en cualquier arco de C. En estas condiciones, *en el exterior* de C, la serie $\varphi(x)$ tiene sus elementos holomorfos y converge uniformemente, siendo, por tanto, holomorfa. Además, se obtiene que el círculo de convergencia relativo á cada uno de los puntos de todo dominio exterior á C, es tangente exteriormente á C. La función analítica $\varphi(x)$ tiene pues la región interior á C como espacio lagunar.

(*) Omitimos la demostración expuesta en la obra *Leçons élem sur la théor. des. fonc. analytiques par Edouard. A. Fouet*, pag. 308.

CAPÍTULO II

Integrales

---

§ 1.º REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA

76. FÓRMULA FUNDAMENTAL. Sean z una variable imaginaria, r su módulo y p su argumento. Se tendrá

$$z = r(\cos p + i \operatorname{sen} p) = re^{pi}$$

Supongamos que $f(z)$ sea finita, así como su derivada para todo valor de z cuyo módulo r es menor que cierto límite R, y que permaneciendo el módulo constante, cuando el ángulo p varíe de una manera contínua desde α hasta $\alpha + 2\pi$, la función vuelva á adquirir el mismo valor para $p = \alpha + 2\pi$ que para $p = \alpha$; *tendremos que*

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(z)\,dp \qquad (1)$$

para todo módulo r *menor que* R.

En efecto, derivando respecto á r y p, resulta que

$$\frac{\partial f(z)}{\partial r} = f'(z)\frac{dz}{dr} = f'(z)e^{pi}, \quad \frac{\partial f(z)}{\partial p} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial p} = f'(z)rie^{pi};$$

luego
$$\frac{\partial f(z)}{\partial r} = \frac{1}{ri}\frac{\partial f(z)}{\partial p}.$$

Pero, como por hipótesis $f'(z)$ permanece finita y contínua para todo valor de z cuyo módulo es menor que R, lo mismo sucederá á los dos miembros de esta ecuación. Así pues, multiplicándolos por $dr \, . \, dp$ é integrándolos con relación á r desde o hasta r, y con relación á p desde α hasta $\alpha + 2\pi$, tendremos

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} dp \int_{0}^{r} \frac{\partial f(z)}{\partial r} dr = \int_{0}^{r} \frac{dr}{ri} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\partial f(z)}{\partial p} dp;$$

pero

$$\int_{0}^{r} \frac{\partial f(z)}{\partial r} dr = f(z) - f(0), \quad \int \frac{\partial f(z)}{\partial p} dp = f(z) = f\left(re^{pi}\right);$$

luego

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\partial f(z)}{\partial p} dp = f\left[re^{(\alpha+2\pi)i}\right] - f\left(re^{\alpha i}\right).$$

Por hipótesis el segundo miembro de esta ecuación es nulo; luego

$$\int_{0}^{r} \frac{dr}{ri} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\partial f(z)}{\partial p} dp = 0 \quad \text{é} \quad \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} [f(z) - f(0)]\, dp = 0;$$

luego

$$f(0) \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} dp = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(z) dp, \quad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(z) dp. \quad (1)$$

Si se hace en (1) $\alpha = 0$, resulta

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f\left(re^{pi}\right) dp \qquad (2)$$

que para $\alpha = -2\pi$ es, cambiando p en $-p$,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{-2\pi} f\left(re^{-pi}\right) dp.$$

Sustituyendo $f(z)$ por $F(x + z)$ en (1), resulta

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F\left(x + re^{pi}\right) dp. \qquad (3)$$

Así, una función $F(x)$ de una variable x, real ó imaginaria, puede hallarse representada por una integral definida, siempre que $f(x+re^{pi})$ permanezca finita y contínua, así como su derivada, para el valor atribuído á r y para todo valor menor, y siempre que dicha función vuelva á obtener el mismo valor, cuando p aumenta en 2π.

Ejemplo 1.º Sea $f(z)=\frac{1}{1-z}$. Esta función y su derivada se hacen infinitas para $z=1$, valor cuyo módulo $r=1$; pero son finitas y continuas para cualquier valor del módulo menor que 1. Se puede pues, aplicar la fórmula (2) que será, para $r<1$:

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dp}{1-z};$$

y tendremos que

$$2\pi=\int_0^{2\pi}\frac{dp}{1-r\cos p-ir\operatorname{sen}p}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(1-r\cos p+ir\operatorname{sen}p)}{1-2r\cos p+r^2}\,dp;$$

y separando las partes reales y las imaginarias:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1-r\cos p}{1-2r\cos p+r^2}=2\pi,\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}p\,dp}{1-2r\cos p+r^2}=0.$$

2.º Sea $f(z)=e^{az}$, función finita y contínua, lo mismo que su derivada, para cualquier valor de z. Se tendrá para cualquier valor del módulo r,

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ar\cos p+i\,.\,ar\operatorname{sen}p}\,dp;$$

haciendo $ar = b$; y separando las cantidades reales y las imaginarias, resulta

$$\int_0^{2\pi} e^{b\cos p} \cos(b \operatorname{sen} p)\,dp = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{b\cos p} \operatorname{sen}(b \operatorname{sen} p)\,dp = 0.$$

3.° Sea $f(z) = \log(1 - z)$, de donde $f'(z) = -\dfrac{1}{1 - z}$.

La función y su derivada se hacen infinitas para $z = 1$, cuyo módulo es 1. Es preciso pues, suponer en la fórmula (2) $r < 1$. Entonces, haciendo crecer á p de una manera contínua desde un valor α hasta otro $\alpha + 2\pi$, la función $\log(1 - z)$ tomará, para $p = \alpha + 2\pi$, el mismo valor que para $p = \alpha$.

En efecto, hagamos

$$1 - z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta);$$

ρ y θ estarán determinadas por las ecuaciones

$$\rho\cos\theta = 1 - r\cos p, \qquad \rho\operatorname{sen}\theta = -r\operatorname{sen} p;$$

de las que resulta $\rho = +\sqrt{1 - 2r\cos p + r^2}$,

$$\cos\theta = \frac{1 - r\cos p}{\sqrt{1 - 2r\cos p + r^2}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{-r\operatorname{sen} p}{\sqrt{1 - 2r\cos p + r^2}}.$$

Se conocen pues los valores de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ en función de p. Si pues se da á p un primer valor arbitrario α, se obtienen por estas fórmulas los valores de $\cos\theta$ y de $\operatorname{sen}\theta$ á los que corresponden una infinidad de valores del arco θ. Elijamos uno de estos valores, que representarémos por θ.

Haciendo crecer p de una manera contínua desde α hasta $\alpha + 2\pi$, los valores de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ variarán también de una manera contínua, á partir del valor inicial θ que corresponde á $p = \alpha$; y cuando p llegue al límite superior $\alpha + 2\pi$, θ habrá vuelto al valor inicial θ, ó bien diferirá de él en una ó varias circunferencias.

Pero si se supone $r < 1$, se tendrá $\theta = \theta$ para $p = \alpha + 2\pi$, lo mismo que para $p = \alpha$, pues por la fórmula

$$\cos\theta = \frac{1 - r\cos p}{\sqrt{1 - 2r\cos p + r^2}}$$

vemos, que si se tiene $r < 1$, $\cos\theta$ permanece positivo para todos los valores de p; luego el extremo móvil del arco variable θ, medido á partir de un punto fijo de la circunferencia, se hallará siempre en el primero ó en el cuarto cuadrante; y puesto que su seno y su coseno vuelven á tomar para $p = \alpha + 2\pi$, los mismos valores que para $p = \alpha$, el arco θ volverá también á tomar el valor θ que se le había asignado para $p = \alpha$.

Habiendo hecho

$$1 - z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sén}\,\theta) = \rho e^{\theta i},$$

la fórmula (2) da $0 = \int_0^{2\pi} (\log\rho + \theta i)\,dp$ de la que se deducen

$$\int_0^{2\pi} \log\left(\sqrt{1 - 2r\cos p + r^2}\right) dp = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \text{arc tg}\,\frac{-r\,\text{sen}\,p}{1 - r\cos p} = 0.$$

77. Indices. Cuando una función primitiva $F(x)$ admite varias determinaciones, se elije uno de los valores iniciales $F(a)$ y se sigue la variación continua de esta determinación, cuando x varía en el mismo sentido desde a hasta b. Por ejemplo, sea la integral

$$\int_a^b \frac{P'Q - PQ'}{P^2 + Q^2}\,dx = \int_a^b \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\,dx, \quad \left(f(x) = \frac{P}{Q}\right)$$

siendo P y Q dos funciones continuas en el intervalo (ab), que no se anulan al mismo tiempo. Una función primitiva es *arc tg* $f(x)$.

Si Q no se anula entre a y b, $f(x)$ no se hace infinita y arc tg $f(x)$ permanece comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$; pero no sucede lo mismo, en general, si la ecuación $Q = o$ tiene raíces en este intervalo. Para ver cómo debe modificarse la fórmula, conservaremos siempre la notación arc tg x para el arco comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, y supondremos que Q se anula una sola vez entre a y b para un valor de c de x. Tendremos

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'} + \int_{c+\varepsilon'}^b,$$

siendo ε y ε' números positivos muy pequeños, y no haciéndose $f(x)$ infinita entre a y $c - \varepsilon$ ni entre $c + \varepsilon'$ y b; tendremos pues

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2} = \text{arc tg}\, f(c-\varepsilon) - \text{arc tg}\, f(a)$$

$$+ \text{arc tg}\, f(b) - \text{arc tg}\, f(c+\varepsilon') + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}.$$

Se pueden presentar varios casos. Supongamos, para fijar las ideas, que $f(x)$ se haga infinita al pasar de $+\infty$ á $-\infty$; $f(c-\varepsilon)$ será positiva y muy grande, arc tg $f(c-\varepsilon)$ se hallará muy próximo á $\frac{\pi}{2}$, $f(c+\varepsilon')$ será negativa y muy grande, arc tg $f(c+\varepsilon')$ muy próximo á $-\frac{\pi}{2}$. En cuanto á la integral $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}$, su valor será muy pequeño. Pasando al límite, resulta

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = \pi + \text{arc tg}\, f(b) - \text{arc tg}\, f(a).$$

Se vería de igual manera que sería preciso restar π si $f(x)$ pasase de $-\infty$ á $+\infty$. En el caso general, se dividirá el intervalo (a, b) en intervalos parciales bastante pequeños para que, en cada uno de ellos, $f(x)$ solo se haga infinita una vez, y razonando para uno de los intervalos como acaba de hacerse, resulta

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = \text{arc tg}\, f(b) - \text{arc tg}\, f(a) + (\text{N} - \text{N}')\pi,$$

expresando N el número de veces que $f(x)$ se hace infinito pasando de $+\infty$ á $-\infty$ y N' el número de veces que $f(x)$ pasa de $-\infty$ á $+\infty$. Este número $\text{N} - \text{N}'$ se llama *índice* de la función $f(x)$ entre a y b.

Observación respecto al desarrollo de las funciones. Cauchy empleó la fórmula (1) para el desarrollo de las funciones en series, habiendo llegado á la conclusión de que se tratará más adelante:

Una función F(x) *de una variable* x *real ó imaginaria, puede desarrollarse en serie convergente según las potencias enteras y positivas de* x *mientras el módulo de* x *sea menor que aquél para el cual la función ó su derivada primera se hacen infinitas ó discontinuas.* Así, no cesando de ser finitas y continuas las funciones

$$e^x, \quad \text{sen}\, x, \quad e^{x^2}, \quad \cos(1 - x^2),$$

serán siempre desarrollables según las potencias ascendentes de x. Pero dejando de ser finitas y continuas para el caso en el que el módulo de x es 1, las funciones

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}, \quad \log(1-x), \quad \text{arc tg}\, x,$$

así como sus derivadas, sólo serán desarrollables cuando el módulo de x sea menor que la unidad.

En fin, las funciones lx, $e^{\frac{1}{x}}$, $\cos\frac{1}{x}$ son discontinuas, así como sus derivadas para $x = 0$; por tanto no son desarrollables en serie según las potencias ascendentes de x.

§ 2.° Integrales dobles.

78. Nociones generales. Sea $f(x, y)$ una función de dos variables x é y. Hagamos variar á x entre x_0 y X y á y entre y_0 é Y. Supongamos además que $f(x, y)$ sea contínua para todos los valores de x é y considerados. Para pasar de una suma simple á una suma doble, dividiremos los intervalos (x_0, X) é (y_0, Y) en otros intervalos, de modo que tendremos la series de puntos

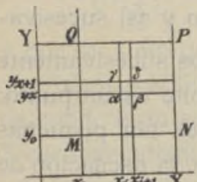
$$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-1}, X, \quad y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{p-1}, Y.$$

Podremos pues, considerar la doble suma

$$S = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=p-1} f(x_i, y_k)\,(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k), \quad (1)$$

que se extiende á todos los valores de i y de k, respectivamente desde o hasta $n - 1$ y desde o hasta $p - 1$; y vamos á demostrar que:

Siendo x_0 *y* X, y_0 *é* Y *valores fijos, si todos los intervalos* $x_{i+1} - x_i$ *é* $y_{k+1} - y_k$ *tienden hacia cero según una ley cualquiera, á medida que su número aumenta indefinidamente, la expresión considerada tiene un límite determinado.*



Formemos el rectángulo MNPQ con las rectas $x = x_0$, $x = X$, $y = y$, é $y = Y$. Este rectángulo quedará dividido por las rectas correspondientes á las subdivisiones

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$ é $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{p-1}$.

Para formar la suma S, consideremos todos los puntos (x_i, y_k) y el valor de la función en dichos puntos, que multiplicaremos por el área del rectángulo correspondiente; y efectuaremos la suma.

Esto sentado, principiaremos por demostrar el siguiente

Lema. *Dado un número* ε *tan pequeño como se quiera, se* *puede hallar una cantidad δ tal, que en el interior de todo rectángulo cuyos lados son paralelos á los ejes de coordenadas, contenido en el rectángulo* MNPQ, *y cuyos lados son menores que δ, la oscilación de la función* f(x, y) *sea menor que ε, siendo ε tal que*

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon$$

para todo punto (x′, y′) *cuyas coordenadas satisfacen á las desigualdades*

$$|x' - x| < \delta, \quad |y' - y| < \delta.$$

Sabemos que la función considerada es continua cuando dado un número positivo ε tan pequeño como se quiera, se puede determinar una cantidad positiva δ conforme expresa el enunciado, y entendemos por oscilación de la función en una área la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función en dicha área.

Dividamos MN y PQ en cierto número de partes iguales, y hagamos lo mismo con cada una de las partes obtenidas, continuando así indefinidamente. Habremos descompuesto, con este procedimiento, el rectángulo MNPQ en una red de rectángulos iguales cada vez más pequeños, y se llegará al momento en que la oscilación de la función en cada uno de dichos rectángulos sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$; porque si así no sucediese, se tendría necesariamente un primer rectángulo en el cual la oscilación sería mayor que $\frac{\varepsilon}{2}$, luego en un segundo rectángulo y así sucesivamente. Estos rectángulos hallándose contenidos sucesivamente unos en otros, tienden hacia cero; luego su límite es un punto; y en el interior de un rectángulo de dimensiones tan pequeñas como se quiera, alrededor de dicho punto límite, la oscilación de la función sería superior á $\frac{\varepsilon}{2}$, lo que es contradictorio con la hipótesis de la continuidad de la función. Basta pues tomar para valor de δ la menor de las dimensiones de los rectángulos, cuando la oscilación en todos ellos se ha hecho inferior á $\frac{\varepsilon}{2}$.

Demostración del teorema. Adoptemos una ley particular de subdivisión por la cual se pase de un modo de subdivisión al siguiente, conservando siempre las rectas de la subdivisión anterior. Bajo estas condiciones, designemos por $M_{i,k}$ el máximo de la función f en el rectángulo correspondiente al punto (x_i, y_k), y formemos la suma

$$\Sigma\Sigma\, M_{i,k}\,(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k),$$

que tendrá un límite cuando los rectángulos tiendan hacia cero, según la ley indicada, pues dicha suma no puede más que disminuir cuando se pasa de un modo de subdivisión al siguiente, y además permanece superior á

$$m(X - x_0)\,(Y - y_0),$$

designando por m el mínimo de $f(x, y)$ en el rectángulo MNPQ; y si μ es el límite de (2), la suma S tendrá en las mismas condiciones el mismo límite, pues podemos llegar á un modo de subdivisión bastante lejano en la serie, para que en todo rectángulo (i, k), se tenga

$$|M_{i,k} - f(x_i, y_k)| < \varepsilon,$$

para lo que bastará que los lados de todos los rectángulos sean inferiores á δ (según el lema); luego las sumas (1) y (2) diferirán en menos de

$$\varepsilon\,\Sigma\Sigma(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k) \quad \text{ó} \quad \varepsilon(X - x_0)\,(Y - y_0),$$

y por ser ε tan pequeño como se quiera, S tendrá á μ por límite.

Además el límite será siempre μ, cualquiera que sea la ley de subdivisión adoptada. Para verlo, nos basta comparar la suma S correspondiente á un modo de subdivisión (x, y) según la ley adoptada con la suma S′ correspondiente á otro modo cualquiera de subdivisión, que expresaremos por (z, t). Si pues damos previamente un número ε tan pequeño como se quiera, y tomamos un modo de subdivisión (x, y) bastante lejano en la serie, para que cada uno de los intervalos $x_{i+1} - x_i$ é $y_{k+1} - y_k$ sea menor que δ, suponiendo además que los intervalos (z, t) sean bastante pequeños para que entre dos x y dos y consecutivas haya por lo menos una z y una t; al rectángulo (i, k) corresponderá en la suma S el término

$$f(x_i, y_k)\,(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k).$$

Si además en S′ descomponemos cada rectángulo (z, t) que se solapa *(empiète)* con varios rectángulos (x, y), en una suma de rectángulos contenido cada uno completamente en uno solo de éstos rectángulos, podremos comparar la parte de la suma S′ que proviene del rectángulo (i, k), con la parte de la suma S que proviene del mismo rectángulo; y como el valor de la función f que se asocia á cada uno de los rectángulos parciales que forman el rectángulo (i, k) es el valor de esta función para un punto situado en un rectángulo (x, y) limítrofe del punto (i, k), resulta que este valor diferirá de (fx_i, y_k) en menos de ε. Por consiguiente, la diferencia de las dos partes consideradas S y S′ será menor que ε multiplicada por la suma de las áreas de los rectángulos parciales, es decir

$$\varepsilon(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k);$$

luego $$|S' - S| < \varepsilon\,(X - x_0)\,(Y - y_0).$$

Pero S tiene por límite μ; luego S′, en virtud de la desigualdad precedente, tendrá el mismo límite que se expresa por

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy.$$

Esta expresión recuerda que el límite representado por ella es la suma de los elementos $f(x, y)dxdy$, en los que dx y dy son positivos, y se dice que esta integral doble se extiende al área del rectángulo MNPQ.

Cálculo de la integral. Consiste en el cálculo sucesivo de dos integrales definidas, pues si escribimos la suma

$$\Sigma\Sigma f(x_i, y_k)\,(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k)$$

bajo la forma

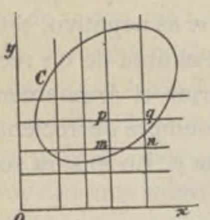
$$\sum_k \left[(y_{k+1} - y_k) \sum_i f(x_i, y_k)\ (x_{i+1} - x_i) \right],$$

y hacemos tender todos los intervalos $(x_{i+1} - x_i)$ hacia cero, dejando constantes las y, la suma última se reducirá á

$$\int_{x_0}^{X} f(x, y_k)\, dx;$$

si sustituimos y hacemos aproximarse hacia cero los intervalos $(y_{k+1} - y_k)$, tendremos

$$\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx.$$



Generalización. Sea una área plana cualquiera limitada por una curva C. Tracemos una serie de paralelas á los ejes coordenados, y coloquemos por orden creciente las abscisas de las paralelas á Oy y de las ordenadas de las Ox. Tendremos una red de rectángulos. El rectángulo (i, k) corresponderá al punto (x_i, y_k), siendo sus lados $x_{i+1} - x_i$ é $y_{k+1} - y_k$.

Formemos la suma

$$\Sigma\Sigma f(x_i, y_k)\ (x_{i+1} - x_i)\ (y_{k+1} - y_k), \tag{3}$$

extendida á todos los puntos (x_i, y_k) contenidos en el interior ó en el perímetro del área. Algunos rectángulos *irregulares* tales como *mnpq*, podrán salir en parte del área limitada por C, y figuran en la suma. Vamos á demostrar que *la suma anterior tiende hacia un límite cuando todos los rectángulos tienden hacia cero, según una ley cualquiera.*

Adoptemos, para comenzar, una ley particular de subdivisión, por la que se pasará á la siguiente conservando las rectas de la subdivisión precedente. Sea $M_{i,\,k}$ el máximo de la función f en el rectángulo (i, k), y consideremos la suma

$$\Sigma\Sigma M_{i,\,k}(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k). \tag{4}$$

Se ve inmediatamente que esta suma tiene un límite, cuando los rectángulos tienden hacia cero según la ley indicada, pues no puede más que disminuir, cuando se pasa de un modo de subdivisión al siguiente; y también para los rectángulos irregulares la disminución de la suma podrá provenir de que el área que debe tenerse en cuenta se halla reducida. Además estas sumas son superiores á

$$m\Sigma\Sigma(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k),$$

expresando m el mínimo de $f(x, y)$ en el interior de una curva fija exterior á C, y aproximándose á ella tanto como se quiera. Si m es positivo, la suma (4) será positiva; si m es negativo, esta suma será superior á m R, expresando por R el área de un rectángulo cualquiera que contenga en su interior el área entera limitada por C. En ambos casos la suma (4), siempre decreciente y superior á una cantidad fija, tendrá un límite μ. Lo mismo sucederá á la suma (3).

Por último, se tendrá siempre un límite igual á μ, cualquiera que sea la ley de subdivisión adoptada.

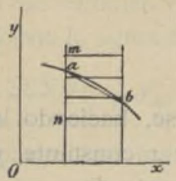
Vamos á hallar un límite superior de $|S' = S|$. Con este objeto, observemos desde luego que los rectángulos regulares dan para esta diferencia una parte igual á lo más á

$$\varepsilon\Sigma\Sigma\,(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k),$$

no comprendiendo más que rectángulos regulares. Esta expresión es menor que εR. Sea M el máximo de f. Los rectángulos irregulares dan en S y en S′ una parte inferior al producto de M por la suma de los rectángulos irregulares s, y tendremos

$$|S' - S| < \varepsilon R - 2Ms.$$

Para demostrar que s tiende hacia cero, consideremos dos paralelas consecutivas al eje de las y, y sea además ab uno de los arcos que limitan en C. Varios rectángulos irregulares pueden hallarse atravesados por ab, en el caso de la figura. La suma



de los arcos de estos rectángulos será igual á su altura común h por la suma mn de sus bases. Supondremos además que los lados de estos rectángulos sean menores que δ; luego mn será menor que 2δ aumentado en la proyección de la cuerda ab sobre Oy, cualquiera que sea el número de los rectángulos. La suma de los rectángulos considerada será pues menor que $h(2\delta + \overline{ab})$; luego

$$s < 2\delta\Sigma h + \Sigma h\overline{ab}, \quad \text{ó por ser} \quad h < \delta, \quad s < 2\delta\Sigma h + \delta\Sigma\overline{ab}.$$

Pero Σh es finita, porque designando con λ el número máximo de veces que una paralela á Oy encuentra á la curva C y con l la distancia de las paralelas extremas á Oy que encuentran á la curva, se tiene $\Sigma h < l\lambda$.

Además la suma de las cuerdas ab es finita, pues la suma de sus proyecciones sobre Ox es menor que $l\lambda$, y la suma de sus proyecciones sobre Oy menor que $l'\lambda'$, expresando λ' el número máximo de veces que una paralela á Ox encuentra á C y por l' la distancia de las paralelas extremas á Ox que encuentran á la curva; luego

$$\Sigma\,\overline{ab} < l\lambda + l'\lambda',$$

siendo s el producto de δ por un factor que permanece finito, tiende hacia cero, cuando todos los rectángulos tienden hacia cero. Queda demostrada la existencia de la suma (3).

De un modo más general podemos considerar la suma

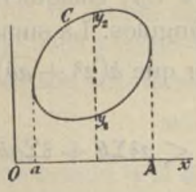
$$\Sigma\Sigma f(x'_i, y'_k)\,(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k)$$

en la que x'_i é y'_k expresan las coordenadas de un punto cualquiera situado en el rectángulo (i, k), pues el límite es el mismo. En efecto, $f(x'_i, y'_k)$ difiere de $f(x_i, y_k)$ en menos de ε si las dimensiones de los rectángulos son menores que δ, y porque las dos sumas difieren en menos de

$$\varepsilon\Sigma\Sigma(x_{i+1}-x_i)(y_{k+1}-y_k),$$

tienen el mismo límite.

El cálculo de esta integral podrá efectuarse, haciendo la suma en la hipótesis de ser x constante, y tendremos para cada incremento dx



$$dx\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dy,$$

designando y_1 é y_2 ($y_1 > y_2$) las ordenadas de los puntos de intersección de C con una paralela á Oy cuya abscisa es x.

Sumando enseguida con relación á x, resultará

$$\int_a^A dx\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dy.$$

a y A son dos constantes que representan las abscisas de las paralelas extremas á Oy que encuentran á la curva.

Los límites y_1 é y_2 de la primera integral son funciones de x.

En el caso de ser $f(x, y) = 1$, el valor de la integral doble $\int\int dxdy$ estará dado por

$$\int_a^A dx\int_{y_1}^{y_2} dy = \int_a^A (y_2 - y_1)\,dx.$$

79. Integrales triples. De una suma doble se pasa á una suma triple. Supongamos el caso de tres variables x, y, z que consideraremos como las coordenadas de un punto en el espacio, y tracemos tres sistemas de planos respectivamente paralelos á los de coordenadas que dividirá el espacio en una red de paralelepípedos rectángulos. A cada punto (x_i, y_i, z_i) asociaremos el paralelepípedo cuyos lados son las expresiones positivas $(x_{i+1} - x_i)$, $(_{k+1} - y_k)$, $(z_{l+1} - z_l)$. Sean además V un volumen y $f(x, y, z)$ una función contínua de x, y, z. Si se forma la suma triple

$$\Sigma\Sigma\Sigma f(x_i, y_k, z_l)\,(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k)\,(z_{l+1} - z_l),$$

extendida á todos los puntos (x_i, y_k, z_l) situados en el interior del volumen, se demostrará, como en el caso de dos dimensiones, que esta suma tiene un límite que es siempre el mismo, cualquiera que sea la ley según la cual los paralelepípedos tiendan á cero. Entre estos habrá algunos *irregulares*, es decir, que salen parcialmente del volumen V. La suma de estos paralelepípedos irregulares tiende hacia cero, como se puede demostrar repitiendo y extendiendo la demostración á que nos referimos, pues si suponemos la superficie S comprendida en el volumen limitado por dos superficies poliedrales variables, la una exterior y la otra interior á S, siendo superficies tales, que el volumen comprendido pueda hacerse inferior á una cantidad ε previamente dada; en estas condiciones, los paralelepípedos irregulares, á partir de cierto momento, se hallarán todos comprendidos entre las superficies poliedrales y, por consiguiente, la suma de los volúmenes de estos paralelepípedos tiende hacia cero. El límite se representará por

$$\int\int\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \tag{1}$$

y se dirá que esta integral triple se halla extendida al volumen V.

80. Integrales múltiples Cuando se pasa á considerar n dimensiones, no es posible la representación geométrica, pero puede extenderse el razonamiento, considerando en una *multiplicidad* ó *variedad* de n dimensiones el conjunto continuo de los valores de n magnitudes x_1, x_2, ... x_n que satisfagan á una ó varias desigualdades de la forma

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) > 0, \tag{2}$$

y supondremos que los valores de x que satisfacen á estas desigualdades, permanecen inferiores en valor absoluto á un número fijo; por ejemplo, la variedad que satisface á la desigualdad

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 < R^2.$$

Sea ahora una sucesión de valores crecientes de x_1, de x_2, ..., de x_n. Formaremos la suma múltiple

$$\Sigma\Sigma \ldots\ldots \Sigma f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\, \Delta x_1 \Delta x_2 \ldots\ldots \Delta x_n,$$

expresando Δx_1, Δx_2, ... los incrementos positivos de x_1, x_2, al pasar de un valor al siguiente, extendiéndose esta suma á los valores considerados de x_1, x_2, ..., x_n que satisfacen á las desigualdades (2). Dicha suma tiene un límite que se representa por

$$\int\int \ldots\ldots \int f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots\ldots dx_n,$$

y es una integral múltiple de orden n, extendida al *continuum* definido por las desigualdades (2).

81. Integrales de diferentes órdenes. Se llama *integral primera* de una función $f(x)$ la función cuya derivada es $f(x)$, y de igual manera llamaremos *integral de orden n* de una función $f(x)$ una función y tal, que se tenga

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x); \tag{1}$$

integrando una, dos, ..., n veces, y designando por x_0, C_0, C_1, ..., C_{n-1} constantes, se tendrá sucesivamente

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + C_0,$$

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx^2 + C_0 x + C_1$$

. . . .

$$y = \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} \ldots\ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^n + C_0 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$+ \ldots\ldots + C_{n-2}x + C_{n-1}.$$

Como C_0, C_1, ... son arbitrarias, llamando $P(x)$ á un polinomio arbitrario de grado $n - 1$, se podrá escribir

$$y = \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} \ldots\ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^n + P(x). \tag{2}$$

La solución más general de la ecuación (1) contiene pues el polinomio arbitrario $P(x)$ de grado n. *Las diversas soluciones de* (1) *sólo podrán diferir entre sí por un polinomio arbitrario de grado* n — 1.

Vamos ahora á demostrar que las integraciones sucesivas que concurren á formar la solución y, pueden sustituirse por una sola. En efecto, la integral de primer orden será, despreciando la constante,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx; \tag{3}$$

la de segundo orden, será

$$\int_{x_0}^{x} dx \left[\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\right],$$

ó integrando por partes, y despreciando las constantes,

$$x\int_{x_0}^{x} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} x f(x)\,dx; \tag{4}$$

la integral de tercer orden será

$$\int_{x_0}^{x} x \left[\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\right] dx - \int_{x_0}^{x} dx \int x f(x)\,dx$$

ó, integrando por partes, y despreciando las constantes,

$$\frac{x^2}{2}\int_{x_0}^{x} f(x)dx - x\int_{x_0}^{x} xf(x)dx + \int_{x_0}^{x} \frac{x^2}{2} f(x)dx. \quad (5)$$

Los resultados (3), (4) y (5) pueden escribirse así:

$$\int_{x_0}^{x} f(z)dz$$

$$x\int_{x_0}^{x} f(z)dz - \int_{x_0}^{x} zf(z)\,dz \quad \text{ó} \quad \int_{x_0}^{x} \frac{x-z}{1} f(z)dz,$$

$$\frac{x^2}{2}\int_{x_0}^{x} f(z)dz - x\int_{x_0}^{x} zf(z)dz - \int_{x_0}^{x} \frac{z^2}{2} f(z)dz$$

$$\text{ó} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^2}{1 \cdot 2} f(z)dz. \quad (6)$$

Para la integral de orden n se induce la fórmula

$$y = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f(z)dz \quad (6)$$

Y en efecto, podemos verificar que esta función: 1.º tiene á $f(x)$ por derivada n^{sima}; 2.º que se anula, así como sus $n-1$ primeras derivadas para $x = x_0$, pues tenemos, aplicando las reglas de diferenciación bajo el signo $\int$,

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-2}}{(n-2)!} f(z)dz + \left[\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f(x)\right]_{z=x};$$

pero el término en el que se hace $z = x$ es nulo; luego

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-2}}{(n-2)!} f(z)dz$$

y sucesivamente

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-3}}{(n-3)!} f(z)\,dz,$$

. . . .

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} (x-z)^0 f(z)\,dz = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz.$$

Las $n-1$ primeras derivadas de y son pues nulas para $x - x_0$, y diferenciando todavía, resulta

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

La fórmula (6) es una solución de (1), y se obtendrá, agregando un polinomio arbitrario $P(x)$ de grado $n-1$, la solución más general,

$$y = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f(z)\,dz + P(x). \tag{7}$$

Una integral de orden n se calcula pues por una integración única.

82. Fórmula de Taylor. En efecto, la solución más general y de

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x) \tag{1}$$

es

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f(z)\,dz + P(x);$$

y designando por $f^n(x)$ la derivada n^{sima} de $f(x)$, la solución más general de $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$

será

$$y = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(z)\,dz + P(x) \tag{2}$$

Pero $f(x)$ es una solución de (1). Se tendrá pues,

$$f(x) = P(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(z)\,dz. \tag{8}$$

Para determinar la forma de $P(x)$, observaremos que la integral así como sus $n - 1$ primeras derivadas son nulas para $x = x_0$; luego $f(x) - P(x)$ deberá ser nula, así como sus $n - 1$ primeras derivadas para $x = x_0$; luego

$$f(x_0) - P(x_0) = 0, \quad f'(x_0) - P'(x_0) = 0, \ldots\ldots$$
$$f^{n-1}(x_0) - P^{n-1}(x_0) = 0.$$

Se conoce $P(x)$ así como sus $n - 1$ primeras derivadas para $x = x_0$; luego

$$P(x) = P(x_0) + \frac{x - x_0}{1} P'(x_0) + \ldots\ldots$$

$$P(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0),$$

La ecuación (3) se reduce pues, á

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x)\,dz$$

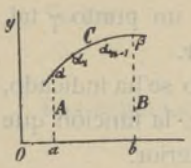
que es la fórmula de Taylor, en la que el resto tiene la forma

$$R = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(z)\,dz.$$

§ 3.º Integrales curvilíneas

83. Definición. Vamos á generalizar la noción de suma de elementos de la forma $f(x_i)\,dx_i$.

Consideremos una función $P(x, y)$ de las dos variables x é y; y tomemos en el plano de las x, y dos puntos α y β cuyas coordenadas son (a, A) y (b, B), que uniremos por una curva C. Si dividimos el arco $\alpha\beta$ en cierto número de intervalos, mediante los puntos de subdivisión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{n-1}$ cuyas coordenadas son respectivamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$, formaremos la suma



$$\mathrm{P}(a, \mathrm{A})(x_1 - a) + \mathrm{P}(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \ldots + \mathrm{P}(x_{n-1}, y_{n-1})(b - x_{n-1}),$$

análoga á la que conduce á la integral definida, con la diferencia de que P depende además de y.

Cuando todos los intervalos (α_i, α_{i+1}) tienden hacia cero, su número aumenta indefinidamente, y esta suma tiende hacia un límite. Para demostrarlo, consideraremos el caso más sencillo en el que la curva $\alpha\beta$ es tal, que á cada valor de x corresponde un sólo valor de y. Sea $y = \varphi(x)$ la ecuación de la curva $\alpha\beta$, y supongamos que $\varphi(x)$ es continua desde a hasta b. Haciendo $\mathrm{P}[(x, \varphi(x)] = \mathrm{F}(x)$, la suma anterior se reduce á

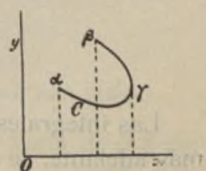
$$\mathrm{F}(a)(x_1 - a) + \mathrm{F}(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + \mathrm{F}(x_{n-1})(b - x_{n-1});$$

luego tiene por límite la integral definida

$$\int_a^b \mathrm{P}[(x, \varphi(x)]dx$$

que se representa por $\displaystyle\int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}(x, y)dx;$

Este símbolo se dice que es *una integral curvilínea* tomada á lo largo de la curva C desde α hasla β. Para que esta integral tenga un sentido, no basta dar sus puntos extremos, es necesario indicar además el camino seguido entre α y β.



Puede suceder que la curva $\alpha\beta$ quede cortada por una paralela al eje Oy en más de un punto. En este caso, dividiremos la curva en cierto número de partes para las que á cada valor de x sólo corresponde un valor de y. Los extremos de estos arcos serán los puntos en que la tangente á la curva es paralela á Oy. En la figura, el arco $\alpha\beta$ contiene un punto γ tal, que la tangente correspondiente es paralela á Oy.

La integral desde α hasta β se calculará como se ha indicado, y lo mismo desde γ hasta β; pero en este caso, la función que sustituye á P no es la misma que en el caso anterior.

Lo mismo se definirá la integral curvilínea

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{Q}(x, y)dy,$$

tomada á lo largo de C, en la que la variable es y, la cual es el límite de

$$\mathrm{Q}(a, \mathrm{A})(y_1 - \mathrm{A}) + \mathrm{Q}(x_1, y_1)(y_2 - y_1) + \ldots.\\ + \mathrm{Q}(x_{n-1}, y_{n-1})(\mathrm{B} - y_{n-1}).$$

Por último podremos también considerar las coordenadas x é y en el caso de ser funciones de un parámetro t, de manera que

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

Estas dos funciones se considerarán como continuas cuando t varía desde t_0 hasta t_1. Entonces la integral curvilínea $\int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}dx$, se expresará por

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{P}(f, \varphi)f'(t)dt.$$

Las integrales curvilíneas más importantes de que se tratará más adelante, se presentan bajo la forma

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}(x, y)dx + \mathrm{Q}(xy)dy \quad \text{ó} \quad \int_{t_0}^{t_1} [\mathrm{P}(f, \varphi)f' + \mathrm{Q}(f, \varphi)\varphi']dt.$$

Ejemplo 1.° Integrar z²dz *á lo largo de una recta de longitud* 1 *que pase por el origen y que forme un ángulo de* 45° *con el eje de las* x.

Se tiene

$$z^2 dz = (x + yi)^2 (dx + idy).$$

Las ecuaciones de la recta son

$$x = r\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = r\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Expresando r la distancia al origen del punto (x, y), se tendrá

$$dx = dr\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad dy = dr\frac{\sqrt{2}}{2};$$

luego $$z^2 dz = \frac{r^2}{4}(1 + i)^3 dr\sqrt{2}.$$

La integral buscada será:

$$\frac{(1+i)^3}{4}\sqrt{2}\int_0^1 r^2 dr = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)^3.$$

2.° *Integrar la función* $\sqrt{z}\,dz$ *á lo largo de la elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Las ecuaciones de la elipse pueden escribirse así:

$$x = a \cos\varphi, \quad y = b \operatorname{sen}\varphi;$$

se tendrá pues,

$$\sqrt{z}\,dz = \sqrt{a\cos\varphi + ib\operatorname{sen}\varphi}\,(ib\cos\varphi - a\operatorname{sen}\varphi)d\varphi.$$

Al recorrer la elipse el punto z ó (x, y), φ varía de 0 á 2π; luego

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{a\cos\varphi + ib\operatorname{sen}\varphi}\,(ib\cos\varphi - a\operatorname{sen}\varphi)d\varphi$$

3.° *Integrar* dz *á lo largo de la circunferencia de radio* R *descrita desde el origen como centro.*

Tenemos $x = \mathrm{R}\cos\theta$, $y = \mathrm{R}\operatorname{sen}\theta$,

$$z = x + iy = \mathrm{R}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = \mathrm{R}e^{\theta i}, \quad dz = i\mathrm{R}e^{\theta i}\,d\theta.$$

Cuando el punto z describe la circunferencia, θ varía desde o hasta 2π; luego

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{R}ie^{\theta i}\,d\theta - i\mathrm{R}\int_0^{2\pi} e^{\theta i}\,d\theta = 0.$$

TEOREMA. *Si* M *representa el módulo máximo de la función* f(z) *sobre el contorno* $z_0 z Z$ *y* s *la longitud del mismo, la integral* ∫fz(dz) *tomada á lo largo de dicho contorno tendrá un módulo menor que* Ms.

En efecto, llamando σ la longitud de la parte $z_0 z$ del contorno, á partir de z_0, é I al valor de la integral, se tendrá

$$\mathrm{I} = \int_0^s f(x+iy)\left(\frac{dx}{d\sigma} + i\,\frac{dy}{d\sigma}\right) d\sigma.$$

Y si R y ω son el módulo y el argumento de $f(x + iy)$, siendo 1 el módulo de $\dfrac{dx + idy}{d\sigma}$ y α su argumento, resultará

$$\mathrm{I} = \int_0^s \mathrm{R}e^{(\omega+\alpha)i}\,d\sigma.$$

Pero la integral I es el límite de una suma de términos de la forma $\Delta\sigma \mathrm{R}e^{(\omega+\alpha)i}$, cuyo módulo es menor que la suma $\Sigma\mathrm{R}\Delta\sigma$ de los módulos de los dos sumandos, y por consiguiente menor que $\Sigma\mathrm{M}\Delta\sigma = \mathrm{M}\Sigma\Delta\sigma = \mathrm{M}s$; luego el módulo del límite es $\leqq \mathrm{M}s$.

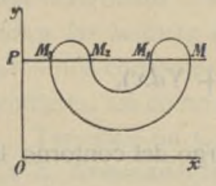
DEFINICIÓN. Se llama *contorno cerrado simple* una línea contínua cerrada que no se atraviesa.

TEOREMA DE RIEMANN. I. *La integral doble*

$$\int\int\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}\right) dx\,dy$$

tomada para todos los puntos de una área limitada por un contorno cerrado simple C, *es igual á la integral*

$$\int (\mathrm{X}dy + \mathrm{Y}dx)$$



tomada á lo largo del contorno C, *considerado como descrito por un observador que deja siempre á su izquierda al área, es decir, marchando en sentido directo.*

En efecto, integrando primero el término $\int\int \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} dxdy$ con relación á x, dejando y constante, tendremos por expresión la integral indefinida $\int \mathrm{X}dy$.

Sea OP el valor constante dado á y en la integración parcial efectuada respecto á x; y llamemos X_k el valor de X en un punto K del plano. El valor de la integral definida que buscamos es la suma de los elementos, tales como $\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} dxdy$, obtenidos haciendo variar x en el área C. Si entonces la recta $y = \mathrm{OP}$ encuentra al contorno C en los puntos consecutivos M, M_1, M_2, M_3, ..., la integral buscada se obtendrá haciendo variar á x desde PM_3 hasta PM_2, desde PM_1 hasta PM, ..., de modo que esta integral será

$$\int (\mathrm{X}_{\mathrm{M}} - \mathrm{X}_{\mathrm{M}_1} + \mathrm{X}_{\mathrm{M}_2} - \mathrm{X}_{\mathrm{M}_3} + \ldots\ldots) dy \quad \text{ó} \quad \int_{\mathrm{C}} \mathrm{X}dy;$$

porque para calcular $\int(\mathrm{X}_{\mathrm{M}} + \ldots\ldots)dy$, será preciso hacer variar á y desde el valor que toma en el punto más bajo hasta el punto más elevado del contorno C, y entonces los puntos M, M_1, ... se mueven en sentido directo, de manera que la integral $\int\int \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} dx\, dy$ es igual á la integral simple $\int \mathrm{X}dy$ tomada á lo largo del contorno C en sentido directo.

Análogamente se ve que la integral $\int \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} dxdy$, extendida á todos los puntos del área, comprendida en el interior del contorno C, es igual á la integral simple $\int Y dx$ tomada á lo largo del contorno C, pero en sentido retrógrado, ó á la integral $\int - Y dx$ tomada en sentido directo; luego

$$\iint \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dxdy = \int (Xdy + Ydx),$$

hallándose tomada en sentido directo á lo largo del contorno la integral del segundo miembro.

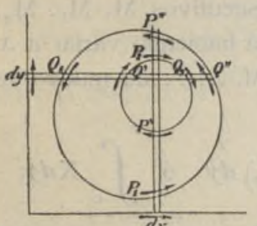
TEOREMA II. *La integral doble*

$$\iint \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy$$

tomada para todos los puntos de una área limitada por el contorno cerrado C, *es igual á la integral simple*

$$\int (Ydy - Xdx)$$

tomada á lo largo del contorno en sentido directo.



Este teorema se demuestra como el anterior.

Tambien pueden verse estas conclusiones en la figura adjunta, en la que la dirección de las flechas marca el sentido en que ha de tomarse la integral.

CONCLUSIÓN. Observaremos que *la condición necesaria y suficiente para que* Xdy + Y dx *sea una diferencial exacta es que* $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}$ pues si por ejemplo,

$du = Xdy + Ydx$, será $\frac{\partial u}{\partial x} = Y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = X$; luego $\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x}$.

Si pues $Xdy + Ydx$ es una diferencial exacta, $\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}$ es nulo; luego en virtud del primer teorema de Riemann: *la in-*

tegral tomada á lo largo de un contorno cerrado C *de una diferencial exacta es nula*, ó lo que es lo mismo: *Las integrales de una diferencial exacta tomadas á lo largo de dos contornos que tienen las mismas extremidades son iguales*, siempre que entre estos dos contornos la diferencial sea finita, bien determinada y continua, así como sus derivadas parciales.

TEOREMA DE CAUCHY. 1.° *Si entre dos contornos* zz_0Z *y* $z_0z'Z$, *terminados en las mismas extremidades, que forman reunidos un contorno simple, no existe ningún punto para el que la función* $f(z)$ *cese de ser sinéctica, las integrales de* $f(z)$ *tomadas entre los mismos límites* z_0 *y* Z *á lo largo de los dos contornos* z_0zZ *y* $z_0z'Z$ *son iguales.*

Para demostrar este teorema, demostraremos su equivalente, á saber:

La integral de $f(z)dz$, *tomada á lo largo de un contorno cerrado simple* C *en el interior del que* $f(z)$ *permanece sinéctica, es nula.*

En efecto, si $X + Yi$ es una función sinéctica de $x + iy$ en el interior de C, se tiene que

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x},$$

las fórmulas del teorema de Riemann

$$\iint\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dxdy = \int(Xdy + Ydx)$$

$$\iint\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dxdy = \int(Ydy - Xdx)$$

se reducen á

$$o = \int(Xdy + Ydx), \quad o = \int(Xdx - Ydy):$$

Sumándolas después de multiplicar la primera por i, resulta

$$o = \int(X + iY)(dx + idy) \quad \text{ó} \quad o = \int(fx)dz,$$

que se expresa por el segundo enunciado. Si ahora observando que á lo largo del contorno cerrado $z_0 z Z z' z_0$ la integral de $f(z)$ es nula, y se compone de la integral á lo largo de $z_0 z Z$ y de la integral á lo largo de $Z z' z_0$; por ser esta segunda igual y de signo contrario á la integral tomada á lo largo del contorno $z_0 z' Z$, queda demostrado el primer enunciado del teorema.

Teorema de Cauchy. *El valor de la integral* $\int f(z)dz$ *no cambia, si se deforma el contorno de la integración de una manera contínua, pero arbitraria, siempre que no pase por ningún punto en el que la función* $f(z)$ *deje de ser sinéctica y no alteren los extremos de la integral.*

En efecto, consideremos un contorno de integración A cuyas extremidades son z_0 y Z y el que se obtiene deformándolo, sin hacerle pasar por ningún punto en el que $f(z)$ cese de ser sinéctica. Sea B este segundo contorno. Si los dos contornos forman por su reunión un contorno simple, el teorema queda demostrado. Pero si se cortan en puntos $\zeta_1, \zeta_2, \ldots\ldots \zeta_n$, las integrales de $f(z)$ tomadas entre z_0 y ζ_1, ζ_1 y ζ_2, ..., ζ_n y Z son iguales, según se ha demostrado; luego las integrales tomadas á lo largo de A y B son iguales.

Teorema. *Si la función* $f(z)$ *es sinéctica en todos puntos de una área* C *limitada por un contorno cerrado simple, la integral*

$$V = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

tomada á lo largo de un contorno contenido en el área C, *es una función sinéctica del límite superior, cuya derivada es* $f(z)$.

En efecto, esta integral es finita, por hallarse tomada á lo largo de un contorno finito, es monodroma porque, cualquiera que sea el camino interior á C para volverse de Z á Z, la integral adquiere un incremento nulo, que es el valor de $\int f(z)dz$ tomado á lo largo del contorno cerrado que pasa por Z y es interior á C. Pero la derivada de la integral con relación á Z es $f(Z)$; luego es única y está bien determinada, por lo que la integral es una función contínua de su límite superior, pues si se hace $z = \varphi(\sigma) + i\psi(\sigma)$, siendo σ el arco del contorno de integración, contado á partir de z_0, y s es el arco total, tendremos

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \int_0^s f(\varphi + i\psi)\,(\varphi' + i\psi')d\sigma = \mathrm{V};$$

luego $\dfrac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{Z}} = \dfrac{d\mathrm{V}}{ds} : \dfrac{d\mathrm{Z}}{ds}$ ó $\dfrac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{Z}} = [f(\varphi + i\psi)\,(\varphi' + i\psi')]_{\sigma = s} : \dfrac{d\mathrm{Z}}{ds}$:

pero $\dfrac{d\mathrm{Z}}{ds}$ es el valor de $\dfrac{dz}{d\sigma}$ ó $\varphi' + i\psi'$ para $\sigma = s$; luego

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{Z}} = [f\varphi + i\psi)]_{\sigma = s} = [f(z)]_{\sigma = s} = f(\mathrm{Z}).$$

Corolario. *La integral de una función sinéctica es sinéctica.*

84. Hemos visto (53) que si P y Q satisfacen á las ecuaciones

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \tag{1}$$

la función $f(z) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}i$ tiene una derivada única, llamándose según Cauchy, monógena. Se puede decir también que representa *una función analítica de* x + iy. Representando por $f'(z)$ dicha derivada, tendremos que

$$f'(z) = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + i\,\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + i\,\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}}{i}.$$

y que siendo $f(z)$ y $f'(x)$ continuas y hallándose bien determinadas para todo punto (x, y) situado en una región del plano contenida en un *contorno simple*, se entiende por integral definida

$$\int_c f(z)dz,$$

tomada á lo largo de una curva situada en esta región y que va del punto z_0 al Z, la integral curvilínea tomada según esta curva

$$\int_c (P + iQ)\,(dx + idy),$$

es decir,
$$\int_c (Pdx - Qdy) + i(Qdx + Pdy),$$

resultando, como se ha visto, el teorema de Cauchy: *La integral considerada es independiente del camino seguido para ir de* z_0 á Z. Observaremos ahora que de las ecuaciones (1) se deducen las siguientes:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y},$$

y por tanto,
$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y también} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0. \qquad (2)$$

Recíprocamente, sea una función $P(x, y)$ que satisfaga á la ecuación (2).

Se podrá determinar una función Q tal, que $P + iQ$ sea una función analítica de $x + iy$. La función Q está dada por la integral curvilínea

$$Q = \int_{(x_0,\, y_0)}^{(x_1,\, y_1)} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \frac{\partial P}{\partial x}\,dy,$$

integral en la que la condición de integrabilidad (*) se halla satisfecha, puesto que se supone verificada la ecuación (2). Este

(*) Para que la expresión $Mdx + Ndy$ sea la diferencial exacta de du de una función u, es necesario y suficiente que se verifique la ecuación $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, en virtud de ser $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$.

resultado manifiesta que el estudio de las funciones de una variable compleja se reduce al de la ecuación

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0,$$

que se llama *ecuación de Laplace*, así como *función armónica* á toda función que verifica á esta ecuación.

De las propiedades de las funciones armónicas puede deducirse el teorema de Cauchy, ya demostrado: *Si una función analítica* f(z) *es uniforme y continua en el interior de un círculo cuyo centro sea el origen, se puede representar por una serie ordenada según las potencias enteras y crecientes de las variable* z *en el interior de dicho círculo.*

85. Factor de Darboux. Vamos á extender al caso de las funciones de variables imaginarias la fórmula demostrada para el caso de las funciones de variables reales,

$$\int_a^b F(x) f(x) dx = f(\xi) \int_a^b F(x) dx,$$

en la que ξ expresa un número comprendido entre a y b.

Consideremos en primer lugar la igualdad

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi).$$

La extensión más natural consiste en escribir

$$\int_a^b [\varphi x) + i\psi(x)] dx = (b - a) [\varphi(\xi) + i\psi(\xi')],$$

siendo ξ y ξ' números comprendidos entre a y b. Fundándonos en el teorema: *El módulo de una suma de cantidades imaginarias es menor que la suma de los módulos de estas cantidades*, consideremos la expresión

$$\text{mod}\,(a + a' + \ldots\ldots) = \theta\,(\text{mod}\,a + \text{mod}\,a' + \ldots\ldots),$$

hallándose θ comprendido entre o y 1. (*), y sea

$$J = \int_a^b f(x)dx, \quad \text{donde} \quad f(x) = \varphi(x) + i\psi(x),$$

hallándose expresada J por medio de la suma de los valores que toma su diferencial cuando x varía por grados iguales á dx. Entonces, por el teorema precedente, se tendrá

$$|J| = \theta\Sigma\,|f(x)dx|,$$

ó, según la definición de la integral definida,

$$|J| = \theta \int_a^b |f(x)dx|,$$

es decir, expresando ξ un número comprendido entre a y b, y aplicando el teorema citado respecto á las funciones reales,

$$|J| = \theta(b-a)|f(\xi)|.$$

Sean ξ y ω los argumentos de J y $f(\xi)$; tendremos

$$J = e^{i\xi}\,|J|, \qquad f(\xi) = e^{i\omega}\,|f(\xi)|.$$

La fórmula precedente se reduce á

$$J = \theta e^{i(\xi-\omega)}\,f(\xi)\,(b-a),$$

El factor $\theta e^{i(\xi-\omega)}$ es una cantidad imaginaria cuyo módulo es < 1. Este factor, llamado por Hermite, factor de Darboux, lo designa por la letra λ, de manera que se tiene

$$J = \lambda(b-a)f(\xi).$$

86. FÓRMULA DE DARBOUX. Supongamos ahora que la función bajo el signo $\int$ sea un producto de dos funciones reales $F(x)$ y $f(x)$, siendo una de ellas constantemente positiva entre los límites de la integración; se tendrá la igualdad

$$\int_a^b F(x)f(x)dx = f(\xi)\int_a^b F(x)dx,$$

hallándose ξ comprendido entre a y b.

(*) *Cours d' Hermite* p. 44.

Si expresamos por α, β, γ, ... cantidades reales y por A, B, C, ... cantidades positivas, se demuestra esta fórmula observando que la fracción

$$\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots\ldots}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots}$$

es una media entre las cantidades α, β, γ.

Supongamos que A, B, C, ... sean los valores de $F(x)\,dx$ cuando x crece desde a hasta b, por grados iguales á dx, y que α, β, γ, ... sean los valores correspondientes de $f(x)$. La fracción considerada se reducirá á

$$\int_a^b f(x) F(x)\,dx \ : \int_a^b F(x)\,dx.$$

M. Darboux ha generalizado esta fórmula, suponiendo $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$. Sea

$$J = \int_a^b f(x) F(x)\,dx.$$

Se tendrá

$$|J| = \theta \int_a^b |f(x) F(x)\,dx|$$

y aplicando la fórmula correspondiente á las cantidades reales

$$|J| = \theta \left| f(\xi) \int_a^b F(x)\,dx \right|.$$

deduciéndose que

$$J = \lambda f(\xi) \int_a^b F(x)\,dx.$$

M. Darboux ha deducido, como sigue, de esta fórmula la extensión del teorema de Taylor á las funciones imaginarias.

Sea t una variable auxiliar y $f(x)$ una función imaginaria cuyas derivadas se representan por $f'(x)$, $f''(x)$, ... Sea la integral

$$J = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{1.2\ldots\ldots n}(t-a)^{n+1}f^{n+1}[tx+(1-x)a]dx$$

en la que $(t-a)^{n+1}f^{n+1}[tx+(1-x)a]$ es la derivada de orden $n+1$, con relación á x, de $f[tx+(1-x)a]$.

Obtendremos el valor de dicha integral, mediante la fórmula

$$\int UV^{n+1}dx = \Theta - (-1)^n \int VU^{n+1}dx,$$

en la que V y U expresan dos funciones cualesquiera y V^{n+1}, U^{n+1} sus derivadas de orden $n+1$ respecto á x, siendo

$$\Theta = UV^n - U'V^{n-1} + \ldots\ldots + (-1)^n U^n V.$$

En efecto, supongamos $U = \frac{(1-x)^n}{n!}$, entonces $U^{n+1} = 0$, y resulta:

$$\int \frac{(1-x)^n}{n!}V^{n+1}dx = V + \frac{1-x}{1}V' + \ldots + \frac{(1-x)^n}{n!}V^n.$$

Sea ahora $V = f[tx + (t-x)a]$,

y por consiguiente

$$V^i = (t-a)^i f^i[tx+(1-x)a].$$

Haciendo $x=1$, $x=0$ y restando, se obtiene el valor de la integral definida

$$J = f(t) - f(a) - \frac{t-a}{1}f'(a)\ldots\ldots\frac{(t-a)^n}{n!}f^n(a).$$

La integral considerada es pues el resto en la serie de Taylor, y la fórmula de M. Darboux lo da bajo la forma siguiente:

$$J = \frac{\lambda(1-\theta)^n}{1.2\ldots\ldots n}f^{n+1}(\xi),$$

si se hace $\xi = \theta x + (1-\theta)a$, siendo $(0 < \theta < 1)$.

§ 4.° Cálculo de los residuos

87. Definiciones. Cauchy llamó *residuo* de una función monódroma y y monógena $f(z)$ para un valor de c de z que hace $f(x) = \infty$, á la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int f(z)\,dz$$

tomada á lo largo de un contorno circular infinitamente pequeño, descrito desde el punto c como centro y recorrido en sentido directo.

El *residuo integral* de una función, relativo á un contorno cerrado simple, es la suma de los residuos de esta función relativos á todos los infinitos situados en el interior del contorno.

Cuando la función de la que se ha de obtener el residuo es un producto $\varphi(z)\psi(z)$, y dicho residuo se ha de tomar con relación á un contorno que solo contiene los infinitos de $\varphi(z)$, se le representa por la notación

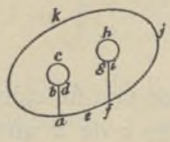
$$\Re((\varphi(z)))\psi(z).$$

Si, por ejemplo, se quiere representar el residuo de la función $f(z)$ relativo á un infinito c, y se sabe que $f(z)\,(z - c)$ no es ya nulo ni infinito para $z = c$, se podrá escribir así dicho residuo:

$$\Re\,\frac{(z - c)f(z)}{((z - c))}\,.$$

Teorema I. *La integral de una función monódroma y monógena, tomada á lo largo de un contorno cerrado simple es igual al residuo integral de esta función relativo á dicho contorno, ó si se quiere, á la suma de los residuos de esta función relativos á cada uno de los infinitos contenidos en el contorno, multiplicada por i.*

Supongamos que haya dos infinitos α y β de $f(z)$ en el interior del contorno cerrado simple $aefjka$. Describamos una circunferencia alrededor de cada infinito, bcd y ghi, y unamos un punto de cada una de estas circunferencias con otro punto del contorno dado; formaremos así un nuevo contorno $abcdaefghifjka$ que constituye un contorno cerrado en el que no están contenidos los infinitos de $f(z)$; se tiene pues,



$$(abcdaefghifjka) = 0,$$

designando, para abreviar, por (ABC......) la integral de $f(z)dz$ tomada á lo largo del contorno ABC..... Además, se tiene

$$(abcdaefghijka) = (ab) + (bcd) + (da) + (aef)$$
$$+ (fg) + (ghi) + (if) + (fjka).$$

pero (ab) y (da) son dos integrales cuyos límites se hallan invertidos, y lo mismo (fg) é (if), además $(abcdafghifjka) = 0$; luego

$$0 = (bcd) + (ghi) + (aef) + (fjka)$$
$$= (bcd) + (ghi) + (aefjka).$$

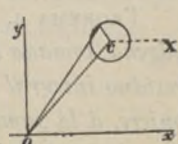
Pero $(bcd) = -(dcb)$, $(aefjka)$ y (dcb) son las integrales de $f(z)dz$ á lo largo de dichos contornos; luego

$$(bcd) = -2\pi i \mathfrak{R}_\alpha f(z), \quad (ghi) = -2\pi i \mathfrak{R}_\beta f(z),$$

$$\int f(z)dz = 2\pi i\,[\mathfrak{R}_\alpha f(z) + \mathfrak{R}_\beta f(z)]$$

$$\int f(z)dz = 2\pi i \mathfrak{R} f(z).$$

Teorema II. *El residuo de la función* $\frac{\mathrm{f(z)}}{\mathrm{z-c}}$, *en la que* f(z) *representa una función monódroma y monógena que no es ni nula ni infinita para* z = c, *es igual á* f(c).



En efecto, por definición, se tiene

$$\Re \frac{f(z)}{z-c} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{z-c},$$

hallándose tomada la integral á lo largo de un contorno circular infinitamente pequeño descrito alrededor de c como centro, y siendo ε el radio y zc un vector, tendremos $z = c + \overline{cz}$; y si θ es el ángulo de $\overline{cz}$ con el eje Ox, resulta

$$z = c + \varepsilon e^{\theta i}. \quad dz = \varepsilon e^{\theta i}.\, id\theta;$$

$$\int \frac{f(z)}{z-c}\,dz = \int_0^{2\pi} f(c + \varepsilon e^{\theta i})\, id\theta.$$

Siendo ε tan pequeño como se quiera, para $\varepsilon = 0$ se tendrá

$$\int \frac{f(z)}{z-c}\,dz = \int_0^{2\pi} if(c)d\theta = 2\pi i f(c)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{z-c} = \Re \frac{f(z)}{z-c} = f(c). \qquad (2)$$

Teorema III. *El residuo de la función* $\dfrac{f(z)}{(z-c)^m}$ *en la que* m *es un exponente entero, positivo, mayor que* 1, *y en la que* f(z) *es una función finita diferente de cero para* z = c, *está dado por la fórmula*

$$\Re \frac{f(z)}{(z-c)^m} = \frac{d^{m-1}f(c)}{dc^{m-1}} \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(m-1)}$$

En efecto, diferenciando $m - 1$ veces con respecto á c, resulta

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{(z-c)^2} = 1\,.\,\Re \frac{f(z)}{(z-c)^2} = \frac{df(c)}{dc}$$

$$\frac{1\,.\,2}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{(z-c)^3} = 1\,.\,2\,.\,\Re \frac{f(z)}{(z-c)^3} = \frac{d^2f(c)}{dc^2}$$

. . . .

$$\frac{1 \cdot 2 \ldots\ldots (m-1)}{2\pi i} \int \frac{f(z)dz}{(z-c)^m}$$

$$= (m-1)! \, \Re \frac{f(z)}{(z-c)^m} = \frac{d^{m-1} f(c)}{dc^{m-1}}.$$

TEOREMA IV. *Si* f(z) *representa una función tal, que* $zf(z)$ *es nula para* $z = \infty$, *la integral de* f(z) *tomada á lo largo de un contorno circular de radio infinito será nula, y se tendrá* $\Re f(z) = 0$.

En efecto, $$\Re f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int f(z) dz.$$

Para valuar esta integral, se hará

$$z = re^{\theta i}, \quad dz = re^{\theta i} i d\theta, \quad \text{de donde} \quad dz = izd\theta;$$

y se obtendrá, haciendo $r = \infty$,

$$\Re f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} zf(z) d\theta = 0;$$

porque $zf(z) = 0$ para $r = \infty$.

TEOREMA V. *Si el módulo de* z *es infinito y su argumento se halla comprendido entre* θ_0 *y* θ_1, *la integral* $\int f(z)dz$, *tomada á lo largo de un arco de círculo de radio infinito, descrito desde el origen como centro y cuyos extremos tienen por ángulos polares* θ_0 *y* θ_1, *es nula.*

En efecto, el valor de la integral es

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(re^{\theta i}) re^{\theta i} i d\theta \quad \text{ó} \quad i \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(z) z d\theta;$$

si pues, al variar θ desde θ_0 hasta θ_1, $zf(z)$ es igual á 0 para $r = \infty$, la integral será nula.

TEOREMA VI. *La diferencia de las integrales de* fz(dz) *tomadas entre los mismos límites, pero á lo largo de dos caminos diferentes, que no se cortan,* $z_0 z' Z$ y $z_0 z'' Z$, *es igual al residuo de* f(z) *relativo al contorno cerrado* $z_0 z' Z z'' z_0$, *limitado por los dos contornos, multiplicado por* $2\pi i$.

En efecto, según el teorema I, se tiene

$$(z_0 z' Z z'' z_0) = (z_0 z' Z) + (Z z'' z_0) = 2\pi \mathfrak{R} i$$

ó

$$(z_0 z' Z) = (z_0 z'' Z) + 2\pi \mathfrak{R} i.$$

Ejemplo 1.º Sea

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z - 1)(z + 1)}.$$

Esta función se hace infinita para $z = 1$; pero el producto

$$(z - 1) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1} = \mathrm{F}(z)$$

conserva un valor finito. El residuo de $f(z)$ correspondiente á $z = 1$ será pues $\mathrm{F}(1) = \frac{1 + 1}{1 + 1} = 1$. El residuo de esta misma función, correspondiente á $z = -1$, se obtendrá formando el producto

$$(z + 1) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 1}; \text{ y para } z = -1, \ \frac{2}{-2} = -1.$$

Ejemplo 2.º $f(z) = \frac{1}{\cos z}$, que se hace infinita para $z = \frac{\pi}{2}$;

pero el cociente $\frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z} = \frac{0}{0}$ para $z = \frac{\pi}{2}$, es 1, valor del residuo de $\frac{1}{\cos z}$ para $z = \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 3.º $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z + 1)^2}$. Se tiene

$$(z + 1)^2 f(z) = z^2 - 1 = \mathrm{F}(z), \quad \mathrm{F}'(z) = 2z, \quad \mathrm{F}'(-1) = -2.$$

El residuo de dicha función, relativo á $x = -1$ es -2.

88. Aplicación. Vamos á obtener la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx = 2\pi i \Sigma \mathfrak{R} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}}, \qquad m < n.$$

El residuo es relativo á todas las raices de $1 + x^{2n} = 0$, situadas sobre el eje de las x: α, α^3, ..., α^{2n-1}, siendo

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{2n} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}.$$

El residuo de $\dfrac{x^{2m}}{1 + x^{2n}}$ con relación á α^{2k+1} es

$$\alpha^{(2k+1)2m} \lim \frac{x - \alpha^{2k+1}}{1 + x^{2n}} \quad \text{para} \quad x = \alpha^{2k+1}$$

ó
$$\frac{\alpha^{(2k+1)2m}}{2n\alpha^{(2k+1)(2n-1)}} = -\frac{\alpha^{(2k+1)(2m+1)}}{2n};$$

luego
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx = -\frac{2\pi i}{2n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \alpha^{(2k+1)(2m+1)}$$

$$= \frac{2\pi i}{2n} \frac{\alpha^{2m+n} + \alpha^{2m+1}}{\alpha^{2m+1} - 1}.$$

Y sustituyendo α por su valor,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m} dx}{1 + x^{2n}} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen}\dfrac{2m+1}{2n}\pi}$$

ó
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m} dx}{1 + x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \operatorname{sen}\dfrac{m+1}{2n}\pi}.$$

Y en fin, haciendo $x^{2n} = z$ y $\dfrac{2m+1}{2n} = a$,

resulta
$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}}{1 + z} dz = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

LIBRO CUARTO

FUNCIONES

CAPÍTULO I

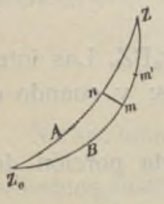
Desarrollo en serie de las funciones sinécticas

§ 1.º Teoremas de Cauchy y de Laurent

89. Desarrollo de una función sinéctica. Siendo $f(z)$ una función sinéctica en cierta porción del plano, consideremos la integral definida

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

cuando se va del punto z_0 al Z por dos caminos z_0CZ y z_0DC muy próximos el uno del otro y situados en la parte del plano de que se trata. A cada punto m de la primera curva hagamos corresponder un punto n de la segunda, de manera que el punto z_0 se corresponde á sí mismo, como el punto Z. Expresemos por d un cambio infinitamente pequeño en una de las curvas y por δ el cambio de m en n.



Si se va de un punto m de la primera curva á un punto próximo m' de la misma, la función experimenta un cambio expresado por $df(z)$; y siendo monódroma la función, adquirirá el mismo valor, cuando siga el camino $z_0 m n$ en vez del camino z_0Dn. Resulta pues, que el valor de la función en el punto n, en la segunda integral, difiere del valor de la función en el punto m en la primera, en una cantidad igual á la variación de esta función correspondiente al cambio mn, que se designa con $\delta f(z)$.

Además, siendo la función monógena, es decir, admitiendo la misma derivada para los dos cambios mm' y mn, se tiene

$$df(z) = f'(z)dz, \quad \delta f(z) = f'(z)\delta z; \tag{1}$$

luego

$$\delta f(z) \,.\, dz = df(z) \,.\, \delta z.$$

Esto sentado, calculemos la variación de la integral definida, cuando se sustituye el camino z_0CZ por el infinitamente próximo z_0DZ. Se tiene

$$\delta \int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \int_{z_0}^{Z} [\delta f(z)dz + f(z) \,.\, d\delta]z,$$

pero, en virtud de (1), esta expresión se reduce á

$$\int_{z_0}^{Z} [df(z)_0\, \delta z + f(z) \,.\, d\delta z],$$

ó

$$\int_{z_0}^{Z} d[f(z)\delta z] = [f(z)\delta z]_{z_0}^{Z}$$

Hallándose fijos los extremos, δz_0 y δZ son nulas; luego la variación de la integral es nula.

Sean ahora dos líneas cualesquiera z_0AZ, z_0BZ. Las integrales á lo largo de los dos contornos son iguales; y cuando el punto vuelve á z_0, la integral es nula.

Cuando la función $f(z)$ es sinéctica en cierta porción del plano, la integral

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

es también una función sinéctica, pues desde luego es monódroma, porque todos los caminos que van de z_0 á z conducen al mismo valor. Además es monógena, porque llamando $F(z)$ á la integral, tenemos que

$$F(z+h)-F(z)=\int_{z}^{z+h} f(z)dz=[f(z)+\varepsilon]h,$$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z)+\varepsilon, \quad \lim \frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z).$$

Así, $F(z)$ tiene una derivada única $f(z)$, cualquiera que sea el camino seguido.

Sea $f(z)$ una función sinéctica en el interior del círculo descrito desde el origen como centro con el radio R. Vamos á ver que es desarrollable en serie según las potencias de z y convergente en dicho círculo.

Tenemos que la integral definida

$$\int \frac{f(z)-f(t)}{z-t}\, dz$$

obtenida recorriendo una circunferencia r de radio mayor que la distancia Ot de un punto t, situado en el interior del círculo R, al centro O, es nula; luego

$$\int \frac{f(t)dz}{z-t}=\int \frac{f(z)\,dz}{z-t};$$

hallándose tomadas las integrales á lo largo de la misma circunferencia, y

$$f(t)\int \frac{dz}{z-t}=\int \frac{f(z)}{z-t}\, dz.$$

No haciéndose infinita la función $\frac{1}{z-t}$ mas que para $z=t$, podremos sustituir á la circunferencia r, la circunferencia infinitamente pequeña de radio ρ; y tendremos

$$z-t=\rho e^{\theta i} \qquad dz=i\rho e^{\theta i}d\theta$$

$$i\int_{0}^{2\pi} d\theta=2\pi i, \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-t}\, dz;$$

y desarrollando $\frac{1}{z-t}$, tendremos finalmente

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int \frac{f(z)}{z}\,dz + t\int \frac{f(z)}{z^2}\,dz + \ldots\ldots\right].$$

Llamando $u_0, u_1, \ldots\ldots$ á los coeficientes de la serie, resulta

$$f(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \ldots\ldots$$

Y si se hace $z = re^{\theta i}$, un coeficiente cualquiera está dado por la fórmula

$$u_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta i}\right) e^{-n\theta i}\,d\theta,$$

en la que r expresa un radio arbitrario menor que el radio R del círculo de convergencia.

TEOREMA DE CAUCHY. *Para que una función sea desarrollable en una serie ordenada según las potencias enteras, positivas y crecientes de la variable y convergente en un círculo descrito desde el origen como centro, es necesario y suficiente que la función sea sinéctica en el mismo círculo.*

Estas condiciones son necesarias, porque una serie ordenada según las potencias crecientes de la variable es sinéctica en el círculo de convergencia. Dichas condiciones son también suficientes, porque se ha demostrado que cuando una función es sinéctica en un círculo de radio R, es desarrollable en una serie ordenada según las potencias crecientes de la variable y convergente en el mismo círculo.

Establecida la posibilidad del desarrollo, vamos á determinar los coeficientes. Consideremos la serie

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots\ldots$$

Tendremos derivando,

$$f'(z) = u_1 + 2u_2 z = 3u_3 z^2, + \ldots, \quad f''(z) = 1 \, . \, 2u_2 + 2 \, . \, 3u_3 z + \ldots$$

Estas series son convergentes en el círculo R y continuas. Si se hace en ellas $z = 0$, se tiene

$$u_0 = f(0), \quad u_1 = f'(0), \quad 1 \cdot 2\, u_2 = f''(0), \ldots\ldots$$

y obtenemos la serie de Mac-Laurin

$$f(z) = f(0) + f'(0)\frac{z}{1} + f''(0)\frac{z^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$$

en la que

$$f^n(0) = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})\, e^{-\theta n i}\, d\theta. \qquad (a)$$

Se obtiene inmediatamente la serie de Taylor:

Si la función f(z) *es sinéctica en un círculo descrito alrededor del punto* z_0 *como centro, se desarrolla en una serie ordenada según las potencias crecientes de* $z - z_0$, *convergente en el mismo círculo, y se tiene*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\frac{z - z_0}{1} + f''(z_0)\frac{(z - z_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots;$$

ó $$f(z + h) = f(z) + f'(z)\frac{h}{1} + f''(z)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots,$$

y la fórmula (a) se reduce á

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z + re^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta,$$

siendo r un radio arbitrario menor que el radio del círculo de convergencia relativo al punto z.

90. Teorema de Laurent. *Si una función es sinéctica en la parte del plano comprendida entre dos círculos cuyo centro es el origen, es desarrollable en una doble serie ordenada según las potencias enteras positivas y negativas de la variable y convergente en esta parte del plano.*

Sea t un punto situado en la corona circular comprendida entre las circunferencias de radios R y $R' < R$. Describamos una circunferencia con un radio $r < \mathrm{R}$ y otra con un radio $r' > \mathrm{R}'$ pero menor que Ot. La integral

$$\int \frac{f(z)-f(t)}{z-t}\,dz,$$

obtenida recorriendo cada una de las dos circunferencias y en el mismo sentido, tiene el mismo valor; y tendremos

$$\int_r \frac{f(z)-f(t)}{z-t}\,dz = \int_{r'} \frac{f(z)-f(t)}{z-t}\,dz,$$

$$\int_r \frac{f(z)}{z-t}\,dz - f(t)\int_r \frac{dz}{z-t} = \int_{r'} \frac{f(z)}{z-t}\,dz - f(t)\int_{r'} \frac{dz}{z-t};$$

pero $\int_{r'} \frac{dz}{z-t} = 0$, porque la circunferencia de radio r' no comprende al punto $z = t$ que hace infinita á la función bajo el signo $\int$. Además $\int_r \frac{dz}{z-t} = 2\pi i$; luego

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_r \frac{f(z)}{z-t}\,dz + \int_{r'} \frac{f(z)}{t-z}\,dz.\right.$$

Siendo en la primera integral el módulo de z mayor que el de t, la cantidad $\frac{1}{t-z}$ puede ser desarrollada en serie convergente, según las potencias positivas crecientes de $\frac{t}{z}$. En la segunda, al contrario, por ser el módulo de z menor que el de t, la cantidad $\frac{1}{t-z}$ se desarrollará en una serie convergente, según las potencias crecientes de $\frac{z}{t}$; luego

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\begin{array}{l} \int_r \frac{f(z)}{z}\,dz + t\int_r \frac{f(z)}{z^2}\,dz + \ldots\ldots \\ + t^{-1}\int_r f(z)\,dz + t^{-2}\int_{r'} f(z)z\,dz + \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Las integrales definidas tienen valores finitos y determinados. Se las puede tomar á lo largo de una circunferencia arbitraria comprendida entre las circunferencias R y R′, girando de derecha á izquierda. Si pues se hace $z = re^{\theta i}$, y se sustituye t por z, se tendrá la doble serie

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots\ldots + u_{-1} z^{-1} + u_{-2} z^{-2} + \ldots\ldots$$

en la cual

$$u_n = \frac{r^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\theta r})\, e^{-n\theta i}\, d\theta,$$

$$u_n = \frac{r^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})\, e^{n\theta i}\, dz.$$

Extensión. En el caso de ser $f(x, y, z)$, haciendo

$$u = x + th, \quad v = y + tk, \quad w = z + tl,$$

se obtendrá

$$f(x + h,\ y + k,\ z + l) = f(x, y, z) + \sum_1^{\infty} \frac{(hD_x f + kD_y f + lD_z f)^n}{n!}$$

$$D_{xyz}^{n+n'+n''} f(x, y, z) = \frac{n!\, n'!\, n''!}{r^n\, r'^{n'}\, r''^{n''}} \frac{1}{(2\pi)^3}$$

$$\times \int\int\int_0^{2\pi} f(x + re^{\theta i}, y + r' e^{\theta' i}, \ldots)\, e^{-n\theta i - \ldots}\, d\theta\, d\theta'\, d\theta''.$$

§ 2.° Aplicación á la ecuación de Lagrange

91. Determinación de la raíz. La serie de Lagrange tiene por objeto obtener una de las raíces de una ecuación de la forma, $z - a - \alpha f(z) = 0$, pudiendo ser cualquiera la función $f(z)$, con la condición de permanecer holoforma en una parte del

plano. Una cuestión fundamental de Astronomía es la resolución de la célebre ecuación de Kepler $u = nt + e \operatorname{sen} u$, pues las coordenadas de un planeta no se expresan en función uniforme del tiempo, pero se las puede obtener en función uniforme de la anomalía excéntrica u, que está dada en función del tiempo por la relación precedente, en la que n es la media del movimiento. Dicha ecuación es un caso particular de la ecuación

$$z = a + \alpha f(z).$$

Aunque hemos demostrado que esta ecuación tiene una sola raíz desarrollable en serie (33), vamos á demostrarlo, apoyándonos en el siguiente

LEMA (*). *Si* $\mathrm{F} = 0$ *y* $\Phi = 0$ *son dos funciones holoformas, las ecuaciones*

$$\mathrm{F} = 0, \qquad \mathrm{F} + \Phi = 0$$

tienen el mismo número de raíces comprendidas en un contorno cerrado S, *si se tiene constantemente á lo largo de este contorno* $\left|\frac{\Phi}{\mathrm{F}}\right| > 1$. *Los números* μ *y* μ' *de las raíces de estas ecuaciones están expresados por las fórmulas*

$$\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{S})} d[\log(\mathrm{F}(z))], \quad \mu_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{S})} d[\log(\mathrm{F}(z)) + \Phi(z)]$$

y obtendremos

$$\mu_1 - \mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{S})} d\left[\log\left(1 + \frac{\Phi}{\mathrm{F}}\right)\right].$$

Ahora bien, á lo largo del contorno de integración, el módulo de $\frac{\Phi}{\mathrm{F}}$ es, por hipótesis, menor que 1: luego el valor de $\log\left(1 + \frac{\Phi}{\mathrm{F}}\right)$ es el mismo á la llegada que á la partida, y la integral que da $\mu_1 - \mu$ es nula; luego $\mu_1 = \mu$.

Apliquemos esto á la ecuación: $z - a - \alpha f(z) = 0$.

(*) *Cours d' Hermite* p. 130.

Suponiendo que a es la afija de un punto situado en el interior del contorno S, y que α se halle determinado por la condición de que se tenga en todos los puntos del contorno $\left|\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right| < 1$, entonces la ecuación propuesta tiene igual número de raíces que la ecuación $z-a=0$, es decir, una sola.

92. Desarrollo en serie. Acabamos de ver que la ecuación

$$F(z) = z - a - \alpha f(z) = 0$$

tiene una sola raíz en el interior del contorno S, cuando se verifica á lo largo de este contorno la condición $\left|\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right| < 1$. En vez de expresar esta raíz ζ por medio de una integral curvilínea efectuada á lo largo de S, vamos á desarrollarla en serie convergente, lo que es ventajoso para el cálculo numérico.

Sea $\pi(z)$ una función holomorfa cualquiera de z. El residuo de la función $\frac{\pi(z)}{F(z)}$ relativo á la raíz ζ del denominador tiene por valor $\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)}$, y por consiguiente:

$$\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(S)} \frac{\pi(z)dz}{F(z)}.$$

Para desarrollar en serie, partiremos de la identidad:

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{1}{z-a-\alpha f(z)} = \frac{1}{z-a} + \alpha\frac{f(z)}{(z-a)^2} + \ldots..$$

$$+ \alpha^n \frac{F^n(z)}{(z-a)^n F(z)}.$$

Sea además

$$J_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{(S)} \frac{f^k(z)\pi(z)}{(z-a)^{k+1}}dz$$

y

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(S)} \frac{\alpha^n F^n(z)\pi(z)}{(z-a)^n F(z)}.$$

Multiplicando los dos miembros por $\pi(z)dz$ é integrando á lo largo del contorno, obtendremos:

$$\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = J_0 + \alpha J_1 + \ldots\ldots + \alpha^{n-1} J_{n-1} + R_n.$$

Sean ahora σ el perímetro de la curva S, z_0 la afija de uno de sus puntos y λ el factor de Darboux, podremos escribir:

$$R_n = \frac{\lambda\sigma}{2\pi} \frac{\pi(z_0)}{F(z_0)} \left[\frac{\alpha f(z_0)}{z_0 - a}\right]^n.$$

Mas por verificarse á lo largo del contorno la condición $\bmod \left[\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right] < 1$, el resto R_n tiende hacia cero cuando n aumenta más allá de todo límite, y obtendremos

$$\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = J_0 + \alpha J_1 + \ldots\ldots + \alpha^n J_n + \ldots\ldots,$$

siendo convergente la serie del segundo miembro. Es fácil de obtener la expresión de los coeficientes J. Hemos visto, en efecto, que se tiene generalmente

$$\frac{1}{1\ 2 \ldots\ldots n} D^n \Phi(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(S)} \frac{\Phi(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}};$$

luego, haciendo $\Phi(z) = f(z)\pi(z)$,

$$J_k = \frac{D_k^a[f^k(a)\pi(a)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots k};$$

y obtenemos la fórmula

$$\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} D_a^n[f^n(a)\pi(a)],$$

que es una primera forma analítica de la serie de Lagrange. Hagamos

$$\pi(z) = \Phi(z)F'(z) = \Phi(z)[1 - \alpha f'(a)],$$

que puede escribirse todavía, aislando el primer término de la primera parte correspondiente á $n = 0$, y escribiendo, por brevedad, Φ y f en vez de $\Phi(a)$ y $f(a)$,

$$\Phi(\zeta) = \Phi + \Sigma \frac{\alpha^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} D_a^{n+1}(\Phi f^{n+1})$$

$$- \Sigma \frac{\alpha^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n} D_a^n(\Phi f^n f') = \Phi + \Sigma \frac{\alpha^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} D_a^n[(\Phi f^{n+1})$$

$$- (n+1)\Phi f^n f'],$$

que se reduce á

$$\Phi(\zeta) = \Phi(a) + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} D_a^n[\Phi'(a) f^{n+1}(a)],$$

que es la forma analítica más empleada de la serie de Lagrange para las aplicaciones.

Haciendo $nt = a$ en la ecuación de Kepler $z = nt + e \operatorname{sen} z$, y empleando para efectuar las diferenciaciones la expresión de una potencia cualquiera de sen a en función lineal de los senos ó cosenos de los arcos múltiplos, se obtiene:

$$z = a + e \operatorname{sen} a + \frac{e^2}{2 \cdot 2} 2 \operatorname{sen} 2a + \frac{e^3}{2 \cdot 3 \cdot 2^2}(3^2 \operatorname{sen} 3a - 3 \operatorname{sen} a)$$

$$+ \frac{e^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^3}(4^3 \operatorname{sen} 4a - 4 \cdot 2^3 \operatorname{sen} 2a)$$

$$+ \frac{e^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^4}\left(5^4 \operatorname{sen} 5a - 5 \cdot 3^4 \operatorname{sen} 3a + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \operatorname{sen} a\right) + \ldots$$

$$\cos z = \cos a + \frac{e}{2}(\cos 2a - 1) + \frac{e^2}{2 \cdot 2^2}(3 \cos 3a - 3 \cos a)$$

$$+ \frac{e^3}{2 \cdot 3 \cdot 2^3}(4^2 \cos 4a - 4 \cdot 2^2 \cos 2a)$$

$$+ \frac{e^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4}\left(5^3 \cos 5a - 5 \cdot 3^3 \cos 3a + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cos a\right)$$

$$+ \frac{e^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5}\left(6^4 \cos 6a - 6 \cdot 4^4 \cos 4a + \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} 2^4 \cos 2a\right) + \ldots$$

Para terminar estas consideraciones acerca de la aplicación de la fórmula de Lagrange á la célebre ecuación que relaciona la anomalía excéntrica z á la anomalía media x, $z = x + e \operatorname{sen} z$, en la que se supone $e < 0{,}6627434\ldots\ldots$ observaremos que siendo la solución

$$z = x + e \operatorname{sen} x + \frac{e^2}{1 \cdot 2} \operatorname{sen} 2x + \ldots + \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \operatorname{sen}^n x + \ldots$$

el módulo de $z - x$ es menor que $1{,}19867864$. El radio vector del planeta, $1 - e \cos z$, se obtiene aplicando la fórmula

$$\varphi(a) = \varphi(x) + \alpha\psi(x)\varphi'(x) + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \{\varphi'(x)[\psi(x)]^n\} + \ldots$$

obteniéndose

$$1 - e \cos z = 1 - e \cos x + \frac{e^2}{1} \operatorname{sen}^2 x + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{e^n}{(n-1)!} \frac{d^{n-2} \operatorname{sen}^n x}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots \text{(*)}$$

93. APLICACIÓN Á LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE. Cuestiones importantes de Mecánica celeste conducen á obtener el desarrollo en serie ordenada según las potencias de α de la cantidad $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$, siendo como sabemos los coeficientes X_n de las potencias de α los polinomios de Legendre (71), de los cuales se pasa á las funciones llamadas de Laplace, sustituyendo la variable x por la expresión: $\cos\psi \cos\psi + \cos A \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi$, que representa el tercer lado de un triángulo esférico.

Jacobi dió otro origen á los polinomios de Legendre, resultando sus propiedades inmediatamente de la forma de su expresión.

Hagamos $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{2}$ en la ecuación $z = a + \alpha f(z)$.

(*) Rouché et Levi *Analyse infinitesimal*, t. II, p. 190.

Obtendremos una ecuación de segundo grado $\alpha z^2 - 2z + 2a - \alpha = 0$. cuyas raíces son $\frac{1 \pm \sqrt{1 - 2a^2 + a\alpha}}{\alpha}$.

Debiendo reducirse á a para $\alpha = 0$ la que es desarrollable por la serie de Lagrange, será

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a\alpha + \alpha^2}}{\alpha}$$

Esto sentado, hagamos en la primera forma de la serie de Lagrange $\pi(z) = 1$. Resultará entonces, por ser $f'(z) = z$:

$$\frac{1}{1 - \alpha\zeta} = \Sigma \frac{\alpha^n}{2^n . 1 . 2 \ldots\ldots n} D^n(\alpha^2 - 1)^n,$$

es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2a\alpha + \alpha^2}} = \Sigma \frac{\alpha^n}{2 . 4 . 6 \ldots\ldots 2n} D^n(a^2 - 1)^n$$

La expresión general de los polinomios de Legendre es pues,

$$X_n = \frac{1}{2 . 4 . 6 \ldots\ldots 2n} D^n(x^2 - 1)^n.$$

Consecuencias. 1.ª En primer lugar, la ecuación $X_n = 0$ tiene reales todas sus raíces, que son además distintas y se hallan comprendidas entre -1 y $+1$, pues la ecuación $(x^2 - 1)^n = 0$ tiene por raíces $+1$ y -1, cada una con el orden de multiplicidad n; luego la derivada $D_x(x^2 - 1)^n = 0$ admite á -1 y $+1$ como raíces con el grado $n - 1$ de multiplicidad y además, en virtud del teorema de Rolle, una raíz real x_0 comprendida entre -1 y $+1$. Continuando así, se demuestra la proposición.

2.ª La función X_n satisface á la ecuación diferencial de segundo orden

$$(x^2 - 1)\frac{d^2 X_n}{dx^2} + 2x \frac{dX_n}{dx} - n(n + 1)X_n = 0, \qquad (1)$$

pues haciendo $y = (x^2 - 1)^n$, resulta

$$y' = 2nx(x^2 - 1)^{n-1}, \quad 2nxy(x^2 - 1)y' = 0.$$

Derivando $n + 1$ veces seguidas, tenemos

$$n(u + 1)y^{(n)} - 2xy^{(n+1)} - (x^2 - 1)y^{(n+2)} = 0,$$

y multiplicando por $2^n \,.\, n!$ resulta la ecuación (1).

§ 3.º Propiedades de las funciones

94. Teorema I. *Si una función es sinéctica en cierta parte del plano, todas sus derivadas son también funciones sinécticas en la misma extensión.*

Sea z_0 un punto cualquiera tomado en esta parte del plano, puesto que la función $f(z)$ es desarrollable en una serie convergente

$$f(z) = u_0 + u_1(z - z_0) + u_2(z - z_0)^2 + \ldots\ldots$$

en un círculo de centro z_0 con un radio conveniente, se deduce que

$$f'(z) = u_1 + 2u_2(z - z_0) + 3u_3(z - z_0)^2 + \ldots\ldots$$

Siendo convergente esta serie en el mismo círculo, la función $f'(z)$ es sinéctica en el mismo; y, como el punto z_0 puede tomarse arbitrariamente en la parte del plano, para la que $f(z)$ es sinéctica, la función $f'(z)$ tiene la misma propiedad para esta extensión. Lo mismo se deduce para las demás derivadas.

Corolario I. *Una función sinéctica no puede ser constante en una parte finita del plano por pequeña que sea.*

Sea z_0 un punto de dicha parte del plano. Por ser constante la función en la proximidad de z_0, todas sus derivadas son nulas en este punto, y la serie de Taylor se reduce á

$$f(z) = f(z_0);$$

luego la función es constante en el círculo de convergencia descrito desde z_0 como centro; y continuando el razonamiento, se verá que la función es constante en toda la extensión del plano para el que es sinéctica. Lo mismo se concluiría si la función fuese constante á lo largo de una línea finita por pequeña que fuera.

COROLARIO II. *Una función sinéctica no puede tener nulas todas sus derivadas en un punto*, pues si esto sucediera sería constante.

TEOREMA II. *Si una función sinéctica en cierta parte del plano se anula para un valor* $z = a$ *comprendido en esta región, es divisible por* $(z - a)^n$, *siendo* n *un número entero finito.*

En efecto, desarrollando según la serie de Taylor, se tiene

$$f(z) = f'(a)\,\frac{z-a}{1} + f''(a)\,\frac{(z-a)^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots$$

luego:

$$\frac{f(z)}{z-a} = f'(a) + f''\,\frac{(z-a)}{1\,.\,2} + \ldots\ldots$$

Siendo el cociente $\dfrac{f(z)}{z-a}$ desarrollable en serie convergente en un círculo descrito desde a como centro, es una función sinéctica en la proximidad de a, y por consiguiente en la misma región del plano que la función propuesta. Sea $\varphi(z)$ esta función. Tendremos

$$f(z) = (z-a)\,\varphi(z).$$

Si la cantidad a no anula á $f'(z)$, a es una raíz simple de la ecuación $f(z) = 0$. Pero si se anulan por a las $(n-1)$ primeras derivadas, tendremos

$$f(z) = (z-a)^n\left[\frac{f^n(a)}{n!} + \frac{f^{n+1}(a)}{(n+1)!}\,(z-a)\right] + \ldots\ldots,$$

y el cociente $\dfrac{f(z)}{(z-a)^n}$ es una función sinéctica en la misma región del plano que la función $f(z)$. Si se representa por $\varphi(z)$ el cociente, se tiene

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z).$$

Siendo finito el número de las derivadas que se anulan para $z = a$, toda raíz es de un grado entero y finito de multiplicidad.

Escolio. En una parte finita del plano, la ecuación $f(z) = 0$ sólo admite un número finito de raíces; porque si admitiese una infinidad de ellas, los puntos correspondientes estarían infinitamente próximos, y la función sería nula en ellos, lo que es imposible. Siendo $a, b, c, \ldots\ldots, l$ las raíces, la función $f(z)$ se escribirá así:

$$f(z) = \left(1 - \frac{z}{a}\right)\left(1 - \frac{z}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right)\cdots\cdots\left(1 - \frac{z}{l}\right)\varphi(z),$$

siendo $\varphi(z)$ una función sinéctica que no se anula en la región considerada del plano.

TEOREMA III. *Si una función* f(z) *monódroma y monógena, se hace infinita para* z = a, *cualquiera que sea el camino seguido para llegar á este punto, se podrá escribir bajo la forma*

$$f(z) = \frac{A_0}{(z - a)^n} + \frac{A_1}{(z - a)^{n-1}} + \cdots\cdots + \frac{A_{n-1}}{z - a} + \psi(z),$$

siendo $\psi(z)$ *monódroma y monógena, y no haciéndose infinita para* $z = a$.

En efecto, haciéndose nula la función $\frac{1}{f(z)}$ para $z = a$, y permaneciendo finita y continua, se tiene que

$$\frac{1}{f(z)} = (z - a)^n \varphi(z); \quad \text{luego} \quad f(z) = \frac{\frac{1}{\varphi(z)}}{(z - a)^n} = \frac{\chi(z)}{(z - a)^n}.$$

El valor a es un infinito de grado finito y entero n de multiplicidad.

Si se desarrolla la función $\chi(z)$ en serie según las potencias crecientes de $(z - a)$, la función propuesta se escribirá así:

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \psi(z)$$

según el enunciado. Para que la función tenga estas propiedades, es necesario que se haga infinita para $z = a$, cualquiera que sea el camino recorrido para llegar á dicho punto, lo que no se verifica para la función $e^{\frac{1}{z}}$, que cuando $z = 0$ se hace nula, infinita ó indeterminada, según el camino recorrido.

Teorema IV. *Una función monódroma y monógena en toda la extensión del plano, se hace necesariamente infinita para un valor finito ó infinito de la variable.*

En efecto, llamando M al máximo del módulo de la función $f(z)$ en el círculo de radio r descrito alrededor del origen, si en

$$f^n(0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})\, e^{-n\theta i} d\theta,$$

sustituimos cada elemento de la integral definida por su módulo ó por un módulo mayor $Md\theta$, es evidente que el módulo de la integral definida será menor que $\int_0^{2\pi} Md\theta$ ó que $2\pi M$, y tendremos

$$\text{mod}\, f^n(0) < n!\,\frac{M}{r^n}.$$

Supongamos ahora que $f(z)$ no se hace infinita para ningún valor finito ni infinito de z, es decir, que el módulo de la función permanezca menor que una cantidad finita M en toda la extensión del plano. En este caso se podría tomar el radio r infinitamente grande, y se tendría, en virtud de la fórmula precedente, $f^n(0) = 0$; y teniendo la función todas sus derivadas nulas, sería una constante. Si pues, la función no es una constante, debe hacerse infinita, sea para un valor finito, sea para un valor infinito de z.

Corolario I. *Una función monódroma y monógena en toda la extensión del plano, se hace necesariamente nula para un valor finito ó infinito de la variable*, pues si la función $f(z)$ no se hiciese nula, la función $\frac{1}{f(z)}$ no se haría infinita, lo que es imposible.

Puede suceder que el mismo valor de z haga á una función, á la vez, nula é infinita. Así, la función $e^{\frac{1}{z}}$ se hace infinita cuando el punto z viene al origen por un camino situado á la derecha del eje de las y, haciéndose nula cuando viene por un camino situado á la izquierda del eje de las y. De igual manera e^z se hace nula ó infinita para valores infinitos de z.

Corolario II. *Una función monódroma y monógena en toda la extensión del plano, adquiere todos los valores posibles.*

La función $f(z)$ adquiere necesariamente el valor A, porque la función $f(z) - A$ toma el valor cero.

Teorema V. *Dos funciones monódromas y monógenas que admiten los mismos ceros y los mismos infinitos, cada uno del mismo grado de multiplicidad, son iguales, salvo un factor constante.*

En efecto, sean $f(z)$ y $F(z)$ las dos funciones propuestas. No haciéndose el cociente $\frac{F(z)}{f(z)}$ de estas dos funciones ni infinito ni nulo, es una constante A; y tendremos $F(z) = A f(z)$.

Escolio. Una función queda completamente definida salvo un factor constante, cuando se conocen sus ceros y sus infinitos, distinguiéndose las funciones unas de otras por la distribución de sus ceros y de sus infinitos en el plano.

Teorema VI. *Toda función monódroma y monógena, que no se hace infinita más que para* $z = \infty$, *sin hacerse indeterminada, es una función entera.*

Sea $u = f(z)$ la función propuesta, y hagamos $z = \frac{1}{t}$; tendremos $u = f\left(\frac{1}{t}\right)$ ó $u = \varphi(t)$, que se hace infinita para $t = 0$, sin hacerse indeterminada; luego, en virtud del teorema III, podrá escribirse bajo la forma

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{t^n} + \frac{A_1}{t^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{t} + \psi(t).$$

No haciéndose $\psi(t)$ infinita para ningún valor de t, es una constante A_n; luego

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{t^n} + \frac{A_1}{t^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{t} + A_n$$

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + A_{n-1} z + A_n;$$

de modo que $f(z)$ es una función entera de grado n.

Teorema VII. *Toda función monódroma y monógena que sólo admite un número limitado de infinitos, es una fracción racional.*

Consideremos desde luego la función $f(z)$, que sólo admite n infinitos simples $a, b, c, \ldots\ldots, l$, y que toma un valor finito y determinado P para $z = \infty$.

Haciéndose infinita la función para $z = a$, tendremos

$$f(z) = \frac{A}{z - a} + \varphi(z),$$

no haciéndose ya infinita $\varphi(z)$ para $z = a$. Haciéndose $\varphi(z)$ infinita para $z = b$, tendremos

$$\varphi(z) = \frac{B}{z - b} + \chi(z)$$

Y continuando de esta manera, llegaremos á una función que no tendrá infinito, que será por consiguiente una constante P, y resultará

$$u = f(z) = \frac{A}{z - a} + \frac{B}{z - b} + \ldots\ldots + \frac{L}{z - l} + P.$$

Cuando los infinitos sean múltiples, tendremos

$$u = \frac{A_0}{(z-a)^p} + \frac{A_1}{(z-a)^{p-1}} + \dots\dots + \frac{A_{p-1}}{z-a}$$

$$+ \frac{B_0}{(z-b)^q} + \frac{B_1}{(z-b)^{q-1}} + \dots\dots + \varphi(z),$$

haciéndose $\varphi(z)$ infinita, tan sólo para $z = \infty$, por lo que será entera.

Si se reducen las fracciones simples al mismo denominador, la función u será una fracción racional cuyo término más elevado es del grado n, si n es el número de infinitos. A cada valor de u corresponden n valores de z, es decir, que la función adquiere el mismo valor en n puntos del plano. Esta función admite también n ceros. Así, el número de ceros es también igual al de los infinitos.

Teorema VIII. *Toda función monógena que admite* m *valores para cada valor de* z, *se hace necesariamente infinita.*

Sean $u_0, u_1, \dots\dots, u_{m-1}$ los m valores que adquiere la función u para un mismo valor de z; y consideremos una función simétrica de estas m cantidades, por ejemplo su suma

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_{m-1}.$$

Cuando la variable z describe un contorno cerrado, estos valores de la función se permutan entre sí, según cierta ley; pero la función simétrica no cambia, y por consiguiente es monódroma; y como debe hacerse infinita, es necesario que uno de los términos de la suma se haga infinito.

Teorema IX. *Toda función monógena que tiene* m *valores para cada valor de* z *y que sólo admite un número limitado de infinitos es raíz de una ecuación algebráica.*

Consideremos las funciones simétricas

$$u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{m-1}, \quad u_0u_1 + u_1u_2 + \dots\dots,$$

$$u_0u_1u_2 + \dots\dots, \quad \dots\dots, \quad u_0u_1u_2 \dots\dots u_{m-1}.$$

Cada una de estas funciones simétricas es una fracción racional, porque es monódroma y no tiene más que un número limitado de infinitos. Luego la función u satisface á una ecuación algebráica de grado m, cuyos coeficientes son fracciones racionales en z. Además es irreducible, porque si u satisficiese á una ecuación de grado menor, no tendría m valores.

COROLARIO. *Una función definida por una ecuación algebráica irreducible de grado* m *toma* m *valores para cada valor de la variable.*

Si partimos de $z = z_0$ con cierto valor inicial $u = u_0$, y se sigue un camino cualquiera del plano, estos caminos darán m valores de la función, porque si adquiriese un número menor, satisfaría á una ecuación de grado menor (*).

95. PROPIEDADES DE LOS PUNTOS SINGULARES ESENCIALES. Se dirá que un punto O que no es para una función monótropa $f(z)$ ni un polo (infinito), ni un punto ordinario (**) es *un punto singular esencial aislado* para dicha función, si en el interior de un círculo cuyo centro es O, la función es monótropa y si fuera de O, no tiene en dicho círculo más puntos singulares que polos.

Por ejemplo, la función $e^{\frac{1}{z}}$ tiene en el punto $z = 0$ un punto singular esencial aislado, punto que ni es un polo, ni un punto ordinario. Vamos á ver que la función es indeterminada en la proximidad de un punto singular esencial. En efecto, sea la ecuación

$$e^{\frac{1}{z}} = \mathrm{A},$$

siendo A una constante distinta de cero. Para obtener sus raices, hagamos $\mathrm{A} = \mathrm{R}e^{\alpha i}$ y $\frac{1}{z} = p + qi$. Tendremos $e^{p+qi} = \mathrm{R}e^{\alpha i}$,

(*) *Briot et Bouquet.* Théor. des fonct. doubl. périodiques.

(**) Punto *ordinario* es aquél en cuyo entorno puede desarrollarse la función por la fórmula de Taylor.

siendo el módulo del primer miembro e^p y su argumento igual á q. Se tiene pues

$$e^p = \mathrm{R} \quad \text{ó} \quad p = \log \mathrm{R},$$

y $\quad q = \alpha + 2k\pi;\quad$ luego

$$z = \frac{1}{\log \mathrm{R} + (\alpha + 2k\pi)i},$$

expresando k un entero arbitrario positivo ó negativo.

Cuando k aumenta indefinidamente, estos valores de z tienden hacia cero; por consiguiente la ecuación (1) tiene una infinidad de raíces en la proximidad de $z = 0$, es decir, que *por pequeño que sea el radio de un círculo descrito desde el origen como centro, habrá siempre una infinidad de raíces de dicha ecuación contenidas en el interior de este círculo.*

Weierstrass demostró que en la proximidad de un punto singular esencial, *la función* f(z) *se aproxima tanto como se quiera á cualquier valor dado*, es decir, que dado un numero ε, tan pequeño como se quiera, existirán siempre, en el centro de un círculo de centro a y un radio arbitrariamente pequeño, puntos z para los cuales

$$|f(z) - \mathrm{A}| < \varepsilon.$$

El Sr. Picard demuestra este teorema como sigue (*).

Ante todo observaremos que la función puede admitir una infinidad de polos. Así la función

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}$$

tiene $z = 0$ por punto singular esencial, y admite los polos $z = \frac{1}{k\pi}$ (k entero) en número infinito. Para demostrar el teorema, consideremos la función

$$\frac{1}{f(z) - \mathrm{A}}. \tag{2}$$

(*) *Traité d' Analyse* t II p. 120.

Pueden presentarse dos casos: Ó esta función tiene una infinidad de polos en la proximidad del punto singular esencial a, y entonces la ecuación $f(z) - A = 0$ tiene una infinidad de raíces en la proximidad de a, siendo el teorema evidente, pues la función no sólo se aproxima tanto como se quiera á A, sino que llega á ser exactamente igual, ó la función (2) no tiene una infinidad de polos en la proximidad de a. Si esto se verifica, podremos emplear la fórmula de Laurent, ó sea el desarrollo

$$\frac{1}{f(z) - A} = A_0 + A_1(z - a) + \ldots + \frac{B_1}{z - a} + \frac{B_2}{(z - a)^2} + \cdots$$

en el interior de cierto círculo C. La primera serie será convergente en el interior de C, la segunda en todo el plano, excepto en a. Pero si se hace $\frac{1}{z - a} = x$, se podrá elegir x de manera que su módulo sea superior á cualquier número dado R, de modo que el módulo de

$$B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots$$

sea superior á cualquier cantidad dada previamente. A este valor de x corresponde un punto z tan próximo como se quiera de a, para el cual sea él el módulo de $f(z) - A$ inferior á cualquier número ε, tan pequeño como se quiera, lo que demuestra el teorema.

Observación. Una función monótropa ó uniforme puede hallarse en tres casos con respecto á los puntos singulares aislados.

1.° La función $f(z)$ puede tomar todos los valores que se quiera en la proximidad de a. Este el caso general.

2.° Puede tener un valor excepcional que no pueda adquirir la función en el entorno del punto a. Por ejemplo, la función $1 : \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ no puede hacerse nula en el entorno del punto $z = 0$. Tenemos pues el valor excepcional A.

3.° Pueden hallarse dos valores excepcionales. Por ejemplo, la ecuación $e^{\frac{1}{z}} = \mathrm{A}$ no tendrá raíces en la proximidad del origen, si $\mathrm{A} = 0$ y si $\mathrm{A} = \infty$.

96. Teorema de Cauchy sobre los ceros y los infinitos. *Sea* f(z) *una función monódroma y monógena, sin puntos esenciales en el interior de un contorno cerrado simple* C, *que tiene en el mismo los ceros* $a_1, a_2, \ldots\ldots$ *con los grados de multiplicidad respectivos* $m_1, m_2, \ldots\ldots$ *y los infinitos* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ *con los grados de multiplicidad respectivos* $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots$, *Sea* F(z) *una función sinéctica en el interior de dicho contorno*, C; *se tendrá*

$$m_1 \mathrm{F}(a_1) + m_2 \mathrm{F}(a_2) + \ldots\ldots - \mu_1 \mathrm{F}(\alpha_1) - \mu_2 \mathrm{F}(\alpha_2) - \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \mathrm{F}(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

tomándose la integral á lo largo del contorno C, *ó más exactamente, á lo largo de un contorno infinitamente poco distinto de* C *é interior á él.*

En efecto, se tiene

$$f(z) = \frac{(z - a_1)^{m_1}(z - a_2)^{m_2}\ldots\ldots}{(z - \alpha_1)^{\mu_1}(z - \alpha_2)^{\mu_2}\ldots\ldots}\theta(z),$$

no siendo $\theta(z)$ ni nulo ni infinito para $z = a_1, a_2, \ldots \alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Tomemos las derivadas logarítmicas de los dos miembros de esta fórmula, y tendremos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum \frac{m_i}{z - a_i} - \sum \frac{\mu_j}{z - \alpha_j} + \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}.$$

Multipliquemos los dos miembros por $\mathrm{F}(z) \dfrac{dz}{2\pi\sqrt{-1}}$ é integremos á lo largo del contorno C, observando que la integral $\displaystyle\int \frac{dz}{z - a} \mathrm{F}(z)$ tomada á lo largo de un contorno cerrado que contiene el punto a, es igual á $2\pi\sqrt{-1}\ \mathrm{F}(a)$ y que $\theta'(z)$ es finito, tendremos

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \mathrm{F}(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \Sigma m_i \mathrm{F}(a_i) - \Sigma \mu_j \mathrm{F}(\alpha_j) \qquad (1)$$

Corolario I. Si el contorno C contuviese un sólo cero, sin infinito alguno de $f(z)$, se tendría

$$\mathrm{F}(a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \mathrm{F}(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

y en particular $\quad a = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz,$

que permite sustituir el cálculo de una raíz por el cálculo de una integral definida, cuando esta raíz se halla separada.

Corolario II. Supongamos que en la fórmula (1) se haga $\mathrm{F}(z) = 1$, se reducirá á la

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \Sigma m_i - \Sigma m_j\,,$$

Luego: *El número de los ceros disminuído en el número de los infinitos de una función monódroma y monógena, sin puntos esenciales en el interior del contorno* C, *es igual á la integral*

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \qquad (2)$$

tomada á lo largo de este contorno, siempre que un cero ó un infinito de orden de multiplicidad k *se cuente por* k *ceros ó infinitos.*

Puede valuarse la integral (2) como sigue: Siendo la integral indefinida $\frac{1}{2\pi i}\log f(z)$, para obtener la integral definida (2) es necesario sustituir z por su valor inicial, cuando se le hace describir el contorno de integración, después por el valor final, y obtener la diferencia de los dos resultados; pero aunque los valores inicial y final son los mismos, no sucede lo mismo á los valores correspondientes de $\frac{1}{2\pi i} \log f(z)$, pues

$$\frac{1}{2\pi i} \log f(z) = \frac{1}{2\pi i} [\log \operatorname{mod} f(z) - i \arg f(z)].$$

Aunque el logaritmo del módulo adquiere el valor inicial, cuando z ha terminado su revolución en el contorno de la integración, el argumento se ha modificado, de manera que la integral (2) es igual á la alteración sufrida por el argumento de $f(z)$ dividida por 2π, luego:

COROLARIO III. *El número de los ceros de* f(z) *contenidos en el contorno* C, *disminuído en el número de infinitos es igual á la variación del argumento de la función cuando la variable recorre el contorno* C, *dividida por* 2π.

Si escribimos la función bajo la forma $X + Y\sqrt{-1}$ y su argumento es uno de los valores de arc tg $\frac{Y}{X}$, $\frac{Y}{X}$ se hará infinito varias veces. Sean N y n los números de veces que, cuando camina z á lo largo de C, se hace infinita, pasando del negativo al positivo ó del positivo al negativo, respectivamente; la variación del argumento de $f(z)$ ó de arc tg $\frac{X}{Y}$ será igual á $\frac{N-n}{2}\pi$; cuando por ejemplo, arc tg $\frac{Y}{X}$ ha pasado dos veces, pasando del negativo al positivo, ha crecido en π; luego:

COROLARIO IV. *El número de ceros de* f(z) *contenidos en el contorno* C, *disminuído en el número de infinitos contenidos en el mismo contorno, es igual al número* $\frac{N-n}{2}$, *expresando* N *el número de veces que* $\frac{Y}{X}$ *pasa del negativo al positivo y* n *el número de veces que pasa del positivo al negativo, haciéndose infinita.*

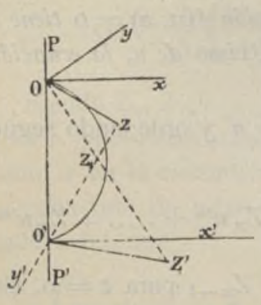
CAPÍTULO II

Funciones algebráicas

§ 1.º PRINCIPIOS GENERALES

97. Ya hemos dicho que si una función es continua, monótropa y tiene una derivada determinada, cuando la variable se mueve en una parte del plano, es *holomorfa* en esta región y que los valores de la variable para los que la función se hace nula son las *raíces* ó los *ceros* de la función.

Cuando una función u es holomorfa, excepto en algún punto z, en el que se hace infinita, de manera que la función $\frac{1}{u}$ quede holomorfa en la proximidad de este punto, este punto se llama un *polo* ó un *infinito* de dicha función, por ejemplo una fracción racional. En este caso se dice que dicha función es *meromorfa* en dicha región del plano, es decir semejante á las fracciones racionales.



EMPLEO DE LA ESFERA. Para estudiar la variación de una función, cuando la variable z se hace muy grande, se hace $z = \frac{1}{z'}$, y se dan á la nueva variable valores muy pequeños. Esta transformación se representa considerando una esfera de radio igual á la unidad, tomado los extremos O y O′ de diámetro como orígenes, en los dos planos tangentes en dichos puntos de las dos variables z y cuyos radios vectores están ligados por la relación

$$\frac{O'z'}{1} = \frac{1}{Oz} \quad \text{ó} \quad zz' = 1$$

A una curva descrita por z corresponde otra curva descrita por z'; si la primera curva es cerrada y se halla descrita en sentido positivo, sin comprender el origen, lo mismo sucede á la segunda curva; pero si la primera descrita en sentido positivo comprende el origen, la segunda que comprende también el origen se halla descrita en sentido negativo, si el radio de la primera aumenta indefinidamente, el de la segunda tiende hacia cero.

En Álgebra se demuestra que: *La variación del argumento de un polinomio entero, según el contorno de una área positiva recorrida en sentido positivo, es igual al producto por 2π del número de las raíces comprendidas en esta área* (CAUCHY).

98. CONTINUIDAD DE LAS RAÍCES. Sea $f(z, u) = 0$ una ecuación cuyo primer miembro es un polinomio entero irreducible. Si para un valor atribuído á z, la ecuación en u tiene m raíces, al variar z de una manera continua, estas m raíces varían también de una manera continua. Esta propiedad resulta del siguiente

TEOREMA. *Si para* $z = a$, *la ecuación* $f(u, a) = 0$ *tiene* n *raíces iguales á* b, *para un valor de* z *próximo de* a, *la ecuación tiene* n *raíces próximas á* b.

Sustituyendo z y u por $a + z'$ y $b + u'$ y ordenando según las potencias de u' se tiene

$$f(a + z', b + u') = Z_0 + Z_1 u' + \ldots\ldots + Z_n u'^n + \ldots\ldots + Z_m u'^m,$$

anulándose los polinomios $Z_0, Z_1, \ldots\ldots, Z_{n-1}$ para $z = 0$, sin anularse Z_n

Tracemos, tomando a como centro, una circunferencia de radio ρ suficientemente pequeño para que no comprenda ninguna raíz de Z_n, y sea A el menor módulo de Z_n en el círculo ρ y B el mayor módulo de cada uno de los polinomios $Z_{n+1}, \ldots\ldots, Z_n$ en el mismo círculo. Tendremos

$$f(a + z', \; b + u') = Z_n u'^n (1 + P + Q)$$

haciendo por brevedad

$$P = \frac{Z_{n+1}}{Z_n} u' + \ldots\ldots + \frac{Z_m}{Z_n} u'^{m-n},$$

$$Q = \frac{Z_0}{Z_n} \frac{1}{u'^n} + \ldots\ldots + \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \frac{u'}{1}.$$

Si se hace mover á u' en la circunferencia de un círculo de centro b y un radio $r < 1$, se tendrá

$$|P| < \frac{B}{A} (r + r^2 + \ldots\ldots) = \frac{B}{A} \frac{r}{1-r},$$

tomándose r de modo que

$$\frac{B}{A} \frac{r}{1-r} \leqq \frac{1}{2} \quad \text{es decir,} \quad r \leqq \frac{A}{A+2B};$$

entonces el módulo de P será menor que $\frac{1}{2}$, y al moverse u' en esta circunferencia, se tendrá

$$|Q| < \frac{1}{A}\left(\frac{|z_0|}{r^n} + \frac{|Z_1|}{r^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{|Z^{n-1}|}{r}\right)$$

Siendo $Z_0, Z_1, \ldots\ldots$ funciones continuas que se anulan para $z' = 0$, podremos hallar un radio $\rho' < \rho$ tal, que al moverse el punto z en la circunferencia de centro a y radio ρ', el módulo de cada uno de estos polinomios sea menor que un número dado C tal, que

$$\frac{C}{A}\left(\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^{n-1}} + \ldots\ldots\right) \leqq \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{C}{A} \frac{1-r^n}{r^n(1-r)} \leqq \frac{1}{2},$$

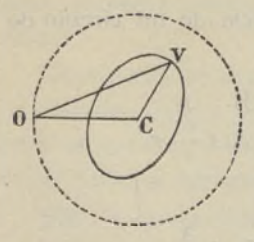
para lo que basta hacer $\quad C \leqq \dfrac{Ar^n(1-r)}{2(1-r^n)}.$

Esto hecho, el módulo de Q será menor que $\frac{1}{2}$ para todos los valores de z' situados en ρ' y de u' situados en r, con el mismo módulo que P.

Concibamos que permaneciendo el punto z' fijo en el interior del círculo ρ', la variable u' describa la circunferencia r en sentido positivo, tendremos

$$f(a+z',\ b+u') = Z_n u'_n(1+P+Q)$$

que es un polinomio entero en u'. El argumento de u'^n aumenta en $2\pi n$. El factor $1+P+Q$ es una función monótropa de u', que designaremos por v. Indiquemos con C el punto que corresponde á $v=1$. La distancia Cv es igual al módulo de $P+Q$, menor que la unidad.



Cuando la variable u' describe la circunferencia r, el punto v describe una curva cerrada situada en el círculo cuyo centro es C y el radio es igual á 1; luego el argumento vuelve á adquirir su valor primitivo, y el argumento del polinomio $f(a+z',\ b+u')$ sólo aumenta en $2\pi n$; luego este polinomio admite n raíces en el interior del círculo r.

99. Definición de una función algebráica. Los puntos en que una raíz se hace infinita son las raíces del coeficiente de la mayor potencia de u en la ecuación. Su número es á lo más igual á $m'-m$, siendo m el grado de la ecuación con relación á u y m' el grado con relación á z y u.

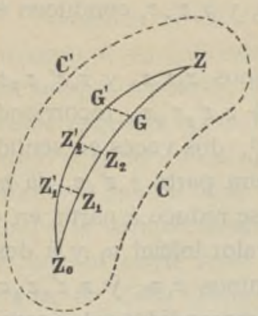
Se obtienen los puntos en los que la ecuación admite raíces finitas iguales entre sí, eliminando u entre las ecuaciones

$$f(z,\ u) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

cuyo número es á lo más igual á $m'(m'-1)$.

Los *polos* y los *puntos múltiplos* son las dos clases de puntos singulares de las funciones algebráicas.

Teorema. *Cuando por deformaciones sucesivas, se puede conducir la curva* A *que va de un punto* z_0 *á un punto* Z, *á la curva* B, *que une los mismos puntos sin atravesar ningún punto* *por el que la raíz considerada se haga infinita ni igual á otra, estas dos curvas conducen en Z al mismo valor de la función.*



Supongamos que las dos curvas A y B envuelven una área que no tiene ningún punto singular. Sea M el menor módulo de las diferencias de las raíces, tomadas dos á dos, para un punto cualquiera z de esta área.

Según el último teorema se puede asignar un radio ρ tal, que si z se mueve en un círculo de radio ρ cuyo centro sea un punto cualquiera del área, cada una de las raíces experimentará una variación cuyo módulo sea menor que $\frac{M}{2}$.

Imaginemos que el centro del círculo ρ describa una curva G, intermedia entre A y B; la envolvente de este círculo se compondrá de otras dos curvas C y C′ situadas á uno y otro lado de G. Esto sentado, consideremos una curva G′ próxima á G y situada entre las curvas C y C′. Señalemos sobre G y G′ dos sistemas de puntos correspondientes

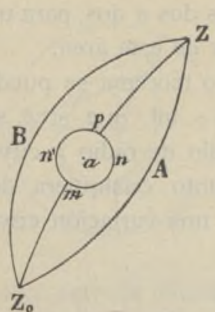
$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots,\ Z;\qquad z_0,\ z'_1,\ z'_2,\ \ldots\ldots,\ Z$$

tales, que el área $z_0 z_1 z_1' z_0$ esté comprendida en el círculo descrito desde el punto z_0 como centro, con el radio ρ, que el área $z_1 z_2 z'_2 z'_1 z_1$ está comprendida en el círculo descrito desde z_1 como centro con el mismo radio ρ, etc.

Bastará para esto el tomar por z_1 y z'_1 los puntos en que la primera circunferencia corta á las curvas G y G′, para z_2 y z'_2 los en que la segunda circunferencia corta á las mismas curvas, y así sucesivamente.

Si partimos de z_0 con el valor inicial de u_0, los dos caminos $z_0 z_1$, $z_0 z'_1 z_1$ conducen en z_1 á valores que difieren cada uno de u_0 en una cantidad menor que $\frac{M}{2}$, y que por consiguiente, difieren entre sí en menos que M; siendo la diferencia entre dos raíces en el punto z_1 mayor que M, los valores de éstas tienen que ser iguales. Así los dos caminos z_0z_1 y $z_0z'_1z_1$ conducen en z_1 al mismo valor u_1.

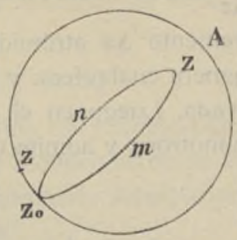
Considerando enseguida los dos caminos $z_0z_1z_2$ y $z_0z'_1z'_2z_2$, se puede sustituir el segundo por $z_0z'_1z_1 + z_1z'_2z'_2z_2$, recorriendo la transversal $z_1z'_1$ dos veces en sentido contrario; la primera parte $z_0z'_1z_1$ da u_1, como z_0z_1. Esto se reduce á partir en el punto z_1 con el valor inicial u_1 y á describir los dos caminos z_1z_2, y $z_1z'_1z'_2z_2$.



Hallándose comprendidos estos caminos en el círculo de radio ρ descrito desde el punto z_1 como centro, conducen en z_2 al mismo valor u_2, y así sucesivamente.

TEOREMA. *Una función algebráica es holomorfa en toda parte del plano limitada por una curva* A *que puede reducirse á un punto, sin franquear ningún punto en que la raíz considerada se haga infinita ó igual á otra.*

Supongamos que entre las dos curvas A y B haya un punto singular a en el cual la ecuación admite una raíz infinita ó una raíz múltiple b, pero tal, que cuando la curva A, al deformarse pase por este punto, la función u conserve un valor finito ó permanezca raíz simple, y por consiguiente difiera de la raíz múltiple b. Este punto a se presentará en la cuestión actual como un punto ordinario. En efecto, las curvas A y B pueden sustituirse por las líneas z_0mnpZ y $z_0mn'p$Z formadas por dos partes comunes y las dos mitades de un círculo muy pequeño cuyo centro es el punto a. Sobre estos dos nuevos caminos se recorre primero la parte z_0m con el mismo valor inicial u_0, lo que conduce en m al mismo valor u_1, que por hipótesis es finito ó difiere de la raíz múltiple b en una cantidad finita. Las dos semi-circunferencias conducen en p al mismo valor u_2; porque si los valores obtenidos fuesen distintos, diferirían poco entre sí, y diferirían de b en cantidades finitas; pero en la proximidad de a las raíces que difieren entre sí poco son las que difieren muy poco de b. En fin, la última parte pZ conducirá en Z al mismo valor de la función.



Tomemos en la curva un punto Z próximo al z_0. La curva z_0AZ puede reducirse por hipótesis, á la línea infinitamente pequeña z_0Z sin franquear ningún punto singular, en el que la raíz se haga infinita ó igual á otra; de lo que resulta que, si la variable describe la curva z_0AZ, la función cuyo valor inicial es u_0, adquiere en Z el mismo valor que si la variable hubiese descrito la línea infinitamente pequeña z_0Z. La curva cerrada A conduce pues, en z_0, al valor inicial u_0.

Supongamos ahora que la variable vaya desde el punto z_0 á un punto cualquiera situado en la parte del plano considerada, por dos caminos z_0mz y z_0nz situados en esta parte del plano. Pudiéndose reducir la curva cerrada z_0Az_0 á la curva cerrada z_0mznz_0, sin franquear ningún punto singular, ésta conducirá, como la primera al valor inicial u_0, concluyéndose que los dos caminos z_0mz y z_0nz conducen en z al mismo valor de la función. Así la función u tiene un valor único en cada uno de los puntos situados en la parte del plano limitada por la curva A, es pues una función monótropa en esta parte del plano. A un incremento Δz corresponde un incremento Δu, y tendremos que

$$(f'_z\Delta z + f'_u\Delta u) + \frac{1}{2}(f''_{zz}\Delta z^2 + f''_{zu}\Delta z\Delta u + f''_{uu}\Delta u^2) + \ldots = 0.$$

Si hacemos $\Delta u = v\Delta z$, y dividimos por Δz, tendremos

$$(f'_z + vf'_u) + \frac{1}{2}\Delta z(f''_{zz} + 2vf''_{zu} + v^2f''_{uu}) + \ldots\ldots = 0$$

Por ser u raíz simple de la ecuación $f(z, u) = 0$, la cantidad $f'_u = 0$ es diferente de cero. Para $\Delta z = 0$ la ecuación precedente tiene una raíz simple finita $\lambda = -\frac{f'_z}{f'_u}$. Según el teorema de la continuidad, á un valor muy pequeño de Δz corresponde un valor de v muy próximo á λ y uno sólo; luego la relación $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ tiende hacia un límite finito y determinado λ, cuando el incremento Δz atribuído á la variable tiende hacia cero de una manera cualquiera; y por consiguiente la función admite una derivada. Luego en el área A, la función algebráica es continua, monótropa y admite una derivada, es pues holomorfa.

§ 2.º Ley de la permutación de las raíces

Supongamos que en el punto a, la ecuación admite una raiz b de orden n; en un punto z_1 próximo á a, tendrá n raices $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ próximas á b.

Si la variable z parte de z_1, teniendo la función el valor inicial u_1, y describe un círculo muy pequeño alrededor de a, en sentido positivo, la función vuelve á adquirir su valor u_1, ó bien como su variación sólo puede ser muy pequeña, se cambia en otra de las n raices precedentes, por ejemplo en u_2. En el primer caso, al reproducirse, es una función monótropa de z en la proximidad de a; en el segundo caso, si se describe la circunferencia otra vez, con el valor inicial u_2, es imposible que se vuelva á obtener u_2, porque el movimiento inverso conduciría á u_1; se llegará pues á u_1 ó á una nueva raiz u_3. En el primer caso, las raíces u_1 y u_2 se permutan entre sí, cuando la variable z gira alrededor de a; en el segundo caso, si se describe la circunferencia por tercera vez con el valor inicial u_3 obtenido á la segunda vuelta, es imposible volver á hallar u_3 ó u_2, porque el movimiento inverso conduciría á u_2 ó u_1. Se llegará pues á u_1 ó á una nueva raiz u_4. En el primer caso, las tres raices u_1, u_2, u_3, forman un *sistema circular*, es decir, cada una de ellas se cambia en la inmediata, cuando el punto z gira alrededor de a. Si continuando así se llega á la última raíz u_n, las n raíces próximas á b formarán un sólo sistema circular. Así:

TEOREMA. *Cuando en el punto* a *la ecuación admite una raíz* b *de orden* n, *las* n *raíces próximas de* b *para un valor de* z *próximo de* a *forman uno ó varios sistemas circulares.*

100. OBTENCIÓN DE LOS SISTEMAS CIRCULARES. Si se hace $z = a + z'$, $u = b + u'$, tendremos

$$f(a + z', b + u') = \Sigma A_{\alpha\beta} u'^{\alpha} z'^{\beta} = 0. \tag{1}$$

En el primer miembro habrá por lo menos un término independiente de u' y un término por lo menos independiente de z', sin lo que el primer miembro de la ecuación sería divisible por una potencia de u' ó por una potencia de z'.

Entre los términos independientes de z', el que contiene u' con menor grado, es del grado n, porque la ecuación admite n raíces iguales á cero, para $z' = 0$.

Consideremos primero el caso particular en que, entre los términos independientes de u' haya uno que contenga z' en la primera potencia. Agrupando los dos términos citados, la ecuación tendrá la forma

$$(Az' + Bu'^{n}) + \varphi(z', u') = 0, \tag{2}$$

siendo todos los términos de $\varphi(z', u')$ infinitamente pequeños respecto al uno ó al otro de los primeros. Si se hace

$$z' = z''^{n}, \qquad u' = vz'',$$

los dos primeros términos contendrán z''^{n} como factor, y cada uno de los términos siguientes una potencia de z'' superior á n. Se podrán pues dividir por z''^{n} todos los términos, y tendremos

$$(A + Bv^{n}) + z''\psi(z'', v) = 0, \tag{3}$$

siendo $\psi(z'', v)$ un polinomio entero en z'' y v.

Para $z'' = 0$, la ecuación (3) se reduce á la ecuación binomia

$$A + Bv^{n} = 0 \quad \text{ó} \quad v^{n} = -\frac{A}{B} \tag{4}$$

que admite n raíces simples, finitas y diferentes de cero, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, que suponemos colocadas de modo que sus argumentos estén en progresión aritmética cuya razón sea $\frac{2\pi}{n}$.

Según el teorema de la continuidad, para un valor muy pequeño de z'', la ecuación (3) admite n raíces simples respectivamente próximas á las precedentes, siendo cada una de ellas una función holomorfa de z'' en la proximidad de $z''=0$. Las representaremos por

$$v_1+\varepsilon_1,\quad v_2+\varepsilon_2,\ \ldots\ldots,\ v_n+\varepsilon_n,$$

siendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ cantidades muy pequeñas que se anulan con z''. Se obtienen así las n raíces de la ecuación (1), próximas á cero

$$u_1'=(v_1+\varepsilon_1)z'^{\frac{1}{n}},\quad u_2'=(v_2+\varepsilon_2)z'^{\frac{1}{n}},\ldots,\quad u_n'=(v_n+\varepsilon_n)z'^{\frac{1}{n}},$$

dando á $z'^{\frac{1}{n}}$ uno cualquiera de sus n valores.

Cada una de estas raíces se compone de dos partes, una infinitamente pequeña de orden $\frac{1}{n}$ y otra de orden superior. La ley de permutación de los valores aproximados

$$v_1 z'^{\frac{1}{n}},\quad v_2 z'^{\frac{1}{n}},\quad \ldots\ldots,\ v^n z'^{\frac{1}{n}}$$

es fácil de percibir. Cuando z describe un círculo muy pequeño alrededor de a, el argumento de $z'^{\frac{1}{n}}$ aumenta en $\frac{2\pi}{n}$, lo que se reduce á sustituir v_1 por v_2, v_2 por v_3, ... v_n por v_1 Los n valores aproximados forman pues un sistema circular.

Los valores exactos tienen la misma propiedad. En efecto, reduciéndose el valor aproximado de la primera raíz á $v_2 z''^{\frac{1}{n}}$, el valor exacto adquiere la forma $(v_2+\varepsilon'_1)z'^{\frac{1}{n}}$.

Es imposible que sea igual á una raíz distinta de la segunda; porque si se tuviese por ejemplo

$$(v_2+\varepsilon'_1)z'^{\frac{1}{n}}=(v_3+\varepsilon_3)z'^{\frac{1}{n}},$$

se deduciria $v_2-v_1=\varepsilon_3-\varepsilon'_1$, y la cantidad infinitamente pequeña $\varepsilon_3-\varepsilon'_1$ sería igual á la cantidad finita v_2-v_3. Se tiene pues $\varepsilon'_1 = \varepsilon_2$, y la raíz u'_1 se cambia en la raíz u'_2. Igualmente u'_2 se cambia en u'_3, etc.

La fórmula $u = v'^{\frac{1}{n}}$, en la que v designa una de las raíces de la ecuación (3), representa el sistema circular de las n raíces de la ecuación (2), cuando se hace girar á la variable z alrededor del punto a.

TEOREMA. *El grupo de las* n *raíces próximas á cero se descompone en sub-grupos tales, que la relación de cada una de las raíces de un mismo sub-grupo á una misma potencia conmensurable de* z' *tenga un mismo límite determinado, finito y distinto de cero.*

Tracemos en un plano (*) dos ejes rectangulares $O\alpha$, $O\beta$, y señalemos los puntos cuyas coordenadas son los exponentes α y β en los diferentes términos de la ecuación

$$\Sigma A_{\alpha\beta} u'^{\alpha} z'^{\beta} = 0.$$

A los términos independientes de z' corresponden puntos situados en el eje $O\alpha$. El primero de entre ellos tiene una abscisa igual á n. A los términos independientes de u' corresponden puntos situados en el eje $O\beta$. El primero de ellos tiene una ordenada igual á l.

Concibamos una recta móvil aplicada al principio al eje $O\alpha$. Hagámosla girar alrededor del punto n de izquierda á derecha, hasta que encuentre á uno ó varios de los otros puntos. Hagámosla girar enseguida alrededor del último de estos puntos, siempre en el mismo sentido, hasta que encuentre otro ú otros puntos; y continuando de este modo, la recta llegará á una última posición en que pase por el punto l, situado en el eje $O\beta$. Habremos formado, procediendo así, una línea quebrada convexa entre los puntos n y l tal, que prolongando cada uno

(*) *Puiseux, Mémoire sur les fonctions algébriques.* (Jour de Math. pures et app. t. XV; 1850.)

de sus lados, deje sobre ellas los demás puntos. Vamos á ver que cada uno de los lados de dicha línea da un sub-grupo de raíces.

Hagamos $u' = vz'^{\mu}$, siendo v una cantidad finita que no se anula con z'. El grado del término $A_{\alpha\beta}u'^{\alpha}z'^{\beta}$ con relación á z' es $\alpha\mu + \beta$. Además la recta $y - \beta = -\mu(x - \alpha)$, trazada por el punto (α, β), cuyo coeficiente angular es $-\mu$, corta al eje $O\beta$ en un punto cuya ordenada $\alpha\mu + \beta$ es igual al grado de dicho término. Resulta pues, que los términos de igual grado están en línea recta y que la recta se aleja del origen paralelamente á sí misma, á medida que aumenta el grado del término.

Consideremos desde luego el primer lado de la línea convexa, que parte del punto $(\alpha = n, \beta = 0)$. En este lado se hallan varios puntos á los que corresponden términos de igual grado

$$Au'^{n} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, u'^{\alpha} z'^{\beta} + A_{\alpha_1\beta_1} u'^{\alpha_1} z'^{\beta_1},$$

que supondremos ordenados según las potencias decrecientes de u'. Siendo estos términos de igual grado, tendremos

$$n\mu = \alpha\mu + \beta = \alpha_1\mu + \beta_1,$$

$$\mu = \frac{\beta}{n - \alpha} = \frac{\beta_1}{n - \alpha_1}.$$

Así el exponente μ es un número conmensurable $\frac{q}{p}$. Hagamos $z' = z''_{p}$, de donde $u' = vz''_{q}$. Los términos del primer grupo serán del grado

$$nq = \alpha q + \beta p = \alpha_1 q + \beta_1 q$$

con relación á z'' y los otros de un grado superior.

Se podrá pues, dividir por z''^{nq} todos los términos de la ecuación (1), y resultará

$$\left(Av^{n} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, v^{\alpha} + A_{\alpha_1\beta_1}\, v^{\alpha_1}\right) + z''\varphi(v, z'') = 0$$

$$v^{\alpha_1}\left(Av^{n-\alpha_1} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, v^{\alpha-\alpha_1} + A_{\alpha_1\beta_1}\right) + z''\varphi(v, z'') = 0,$$

siendo $\varphi(v, z'')$ un polinomio entero en v y z''. La ecuación

$$Av^{n-\alpha_1} + \Sigma A_{\alpha\beta} v^{\alpha-\alpha_1} + A_{\alpha_1\beta_1} = 0 \qquad (6)$$

admite $n - \alpha_1$ raíces finitas y diferentes de cero, por consiguiente, para un valor muy pequeño de z'', la ecuación (5) admite $n - \alpha_1$ raíces próximas respectivamente de las anteriores, lo que da para la ecuación (1) un primer sub-grupo de $n - \alpha_1$ raíces de la forma $vz'^{\frac{q}{p}}$ tales, que la relación de cada una de ellas á $z'^{\frac{p}{q}}$ tiende hacia un límite finito distinto de cero.

Consideremos ahora el segundo lado de la línea convexa que da una nueva manera de formar un grupo de términos

$$A_{\alpha_1\beta_1} u'^{\alpha_1} z'^{\beta_1} + \Sigma A_{\alpha\beta} u'^{\alpha} z'^{\beta} + A_{\alpha_2\beta_2} u'^{\alpha_2} z'^{\beta_2}$$

de grado menor que los demás. Se tiene

$$\alpha_1\mu + \beta_1 = \alpha\mu + \beta = \alpha_2\mu + \beta_2$$

$$\mu = \frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

El exponente μ es todavía un número conmensurable $\frac{q}{p}$; pero de valor mayor que el precedente, porque á medida que el lado gira en sentido indicado, el valor de μ aumenta. Se hará, como anteriormente $z' = z''^{p}$, de donde $u' = vz''^{q}$. Todos los términos de la ecuación son divisibles por $z''^{\alpha_1 q + \beta_1 p}$, y ésta se reduce á

$$v^{\alpha_2}(A_{\alpha_1\beta_1} v^{\alpha_1 - \alpha_2} + \Sigma A_{\alpha\beta} v^{\alpha - \alpha_2} + A_{\alpha_2\beta_2}) + z''\varphi(v, z'') = 0. \quad (7)$$

Admitiendo la ecuación

$$A_{\alpha_1\beta_1} v^{\alpha_1 - \alpha_2} + \Sigma A_{\alpha\beta} v^{\alpha - \alpha_2} + A_{\alpha_2\beta_2} = 0 \qquad (8)$$

$\alpha_1 - \alpha_2$ raíces finitas y diferentes de cero, se concluye que, para un valor muy pequeño de z'', la ecuación (7) admite $\alpha_1 - \alpha_2$ raíces próximas respectivamente de las anteriores, lo que da para la ecuación (1) un segundo sub-grupo $\alpha_1 - \alpha_2$ raíces de la forma

$vz'^{\frac{q}{p}}$ tales que, la relación de cada una de ellas á $z'^{\frac{q}{p}}$ tiende hacia un límite finito distinto de cero. Se continuará de este modo, hasta ver que el último lado dará un sub-grupo de $\alpha_h - 0$ raíces.

Puesto que

$$(n - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \ldots\ldots + (\alpha_h - 0) = n,$$

se han obtenido las n raíces de la ecuación (1) próximas á cero.

Teorema. *Cada sub-grupo se descompone en sistemas circulares.*

Sea por ejemplo, el primer sub-grupo. Se tiene

$$\mu = \frac{\beta}{n-\alpha} = \frac{\beta_1}{n-\alpha_1} = \frac{q}{p};$$

suponiéndose irreducible la fracción $\frac{q}{p}$, los denominadores $n-\alpha$ y $n-\alpha_1$ son múltiplos de p, que designaremos por kp y k_1p. La ecuación (6) se reduce á

$$\mathrm{A}v^{k_1 p} + \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta} v^{(k_1 - k)p} + \mathrm{A}_{\alpha_1\beta_1} = 0.$$

Si se hace $v^p = \lambda$, esta ecuación se reduce á

$$\mathrm{A}\lambda^{k_1} + \mathrm{A}_{\alpha\beta}\lambda^{k_1 - k} + \mathrm{A}_{\alpha_1\beta_1} = 0. \qquad (10)$$

A una raíz simple de esta ecuación corresponden p raíces simples de la ecuación (9), dadas por la ecuación binomia $v^p = \lambda$. Estas raíces $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_p$ tienen el mismo módulo, y las suponemos colocadas en un orden tal, qne sus argumentos estén en progresión aritmética cuya razón es $\frac{2q\pi}{p}$. La ecuación (5) admite p raíces simples respectivamente próximas de las anteriores

$$v_1 + \varepsilon_1, \quad v_2 + \varepsilon_2, \ldots\ldots, \quad v_p + \varepsilon_p$$

y cada una de ellas es una función holomorfa de z'' en la proximidad de $z'' = 0$. La ecuación (1) admite las p raíces

$$u'_1 = (v + \varepsilon_1) z'^{\frac{q}{p}}, \ \ldots\ldots, \ u'_p = (v_p + \varepsilon_p) z'^{\frac{q}{p}}.$$

Los valores aproximados

$$v_1 z'^{\frac{q}{p}}, \quad v_2 z'^{\frac{q}{p}}, \ \ldots\ldots, \ v_p z'^{\frac{q}{p}}$$

forman un sistema circular; porque, cuando la variable z gira alrededor del punto a, el argumento de $z'^{\frac{q}{p}}$ aumenta en $\dfrac{2q\pi}{p}$; lo que se reduce á sustituir v_1 por v_2, v_2 por v_3, ... v_p por v_1. Se verá, como anteriormente que los valores exactos tienen la misma propiedad. Este sistema circular de p raíces puede representarse por la fórmula $u' = vz'^{\frac{q}{p}}$, siendo v una cualquiera de las raíces de la ecuación (5) que, para $z' = 0$, se reducen á una raíz de la ecuación binomia $v^p = \lambda$, que es una función holomorfa de z''.

Así cada una de las raíces simples de la ecuación (10) da un sistema circular de p raíces.

Supongamos ahora que la ecuación (10) tenga una raíz múltiple de λ de orden n'. Cada una de las raíces $v_1, v_2, \ldots, v_p$ de la ecuación binomia $v^p = \lambda$ será una raíz de orden n' de la ecuación (9). Para un valor muy peqneño de z'', la ecuación (5) admite n' raíces próximas á v_1, n' próximas á v_2, ..., n' próximas á v_p. De esto se concluye que la ecuación (1) admite n' raíces que tienen el mismo valor aproximado $v_1 z'^{\frac{q}{p}}$, otras n' con el mismo valor aproximado $v_2 z'^{\frac{q}{p}}$, etc. Los valores aproximados de estas pn' raíces están representados por la fórmula $v_1 z'^{\frac{p}{p}}$, al girar la variable z' alrededor de a. De esto resulta que sus valores exactos podrán representarse por la fórmula

$u' = (v_1 + v')z'^{\frac{q}{p}}$, en la que v' es una cantidad infinitamente pequeña. Esto se reduce á sustituir v por $v_1 + v'$ en la ecuación (5) que toma la forma

$$\Sigma A'_{\alpha\beta}\, v'^{\alpha}\, z''^{\beta} = 0. \tag{11}$$

Siendo v_1 raíz de orden n' del paréntesis, el primer término será $A'v'^{n'}$. Para un valor muy pequeño de z'' la ecuación (11) admitirá pues n' raíces muy pequeñas. Si las ecuaciomes análogas á la ecuación (10) no admiten más que raíces simples, estas n' raíces se dispondrán en sistemas circulares de p' raíces, representados cada uno por una fórmula tal, como $v' = wz''^{\frac{q}{p}}$, siendo w una función holomorfa de $z''' = z''^{\frac{1}{p}} = z'^{\frac{1}{pp'}}$ que no se anula para $z''' = 0$.

La ecuación (1) admitirá pues la solución

$$u' = \left(v_1 + wz'^{\frac{q'}{pp'}}\right) z'^{\frac{q}{p}} = v_1 z'^{\frac{q}{p}} + wz'^{\frac{q_1}{pp'}}$$

designando q_1 el número entero $q' + qp'$ primo con p'. Es fácil ver que esta fórmula da un sistema circular de pp' raíces. Continuando el procedimiento se llegará á obtener expresiones aproximadas distintas para los n valores infinitamente pequeños de u.

Ejemplo 1.º Sea la ecuación de grado n en s y m en z.

$$F\binom{n\ \ m}{s,\ z} = a(s - s_0)^6 + b(s - s_0)^4 (z - z_0)^3$$
$$+ c(s - s_0)^3 + d(z - z_0)^7 = 0$$

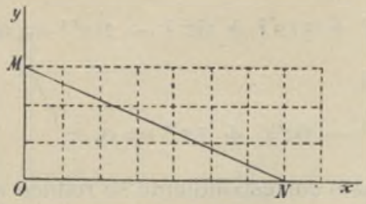
que para $z = z_0$ tiene tres raíces desiguales

$$s_0 - \sqrt[3]{\frac{c}{a}},\ s_0 - \alpha\sqrt[3]{\frac{c}{a}},\ s_0 - \alpha^2\sqrt[3]{\frac{c}{a}},\ \left(\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$$

y tres raíces iguales con el mismo valor $s = s_0$.

Haciendo $s - s_0 = s'$, $z - z_0 = z'$, resulta

$$as'^6 + bs'^4 z'^3 + cs'^3 + dz'^7 = 0.$$



Para obtener el primer término del desarrollo en serie de las tres raíces iguales, haremos

$$cs'^3 + dz'^7 = 0$$

Los dos términos de esta ecuación estarán representados por los puntos M y N de la figura, reduciéndose el polígono correspondiente á un solo lado.

Haciendo $s' = c_1 z'^{\mu}$, será $\mu = \dfrac{7}{3}$.

La ecuación $c \cdot c_1^3 z'^7 + dz'^7 = 0$ ó $cc_1^3 + d = 0$ dará los tres valores de c_1,

$$-\sqrt[3]{\frac{d}{c}},\ -\alpha\sqrt[3]{\frac{d}{c}},\ -\alpha^2\sqrt[3]{\frac{d}{c}},\quad \left(\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$$

siendo el desarrollo de s,

$$s = s_0 + c_1(z - z_0)^{\frac{7}{3}} + \ldots .$$

Ejemplo 2.°

$$s^3 - 3z^2 s + 2z^3 - 2iz^2(z - i)^2 = 0,$$

su discriminante es

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3z^2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3z^2 \\ 0 & -6z^2 & 3[2z^3 - 2iz^2(z-i)^2] & 0 \\ 0 & 0 & -6z^2 & 3[2z^3 - 2iz^2(z-i)^2] \end{vmatrix}$$

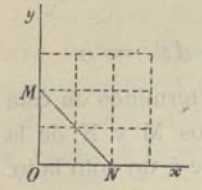
ó $$D = -324z^4(z - i)^2 (z^2 - 1).$$

La ecuación propuesta tiene raíces iguales para $z = \infty$, 0, 1, $i - 1$.

Consideremos la raíz $z = i$, para la que $s_1 = s_2 = i$, $s_3 = -2i$, y hagamos, $s = i + s'$, $z = i + z'$ en la ecuación propuesta, que se transformará en

$$s'^3 + 3i \, . \, s'^2 - 3z'^2 s' - 6iz's' + 5iz'^2 + 6z'^3 - 2iz'^4 = 0.$$

La ecuación aproximada será



$$3s'^2 - 6z's' + 5z'^2 = 0.$$

El polígono correspondiente se reduce á la recta MPN; el ángulo φ que da el coeficiente angular de esta recta está dado por

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{2} = 1.$$

Haciendo $s_1 = c_1 z'^{\mu_1} = c_1 z'$, para determinar c_1 tendremos la ecuación

$$c_1^2 z'^2 - 2z' \, . \, c_1 z' + \frac{5}{3} z'^2 = 0,$$

ó $$c_1^2 - 2c_1 = -\frac{5}{3}, \quad c_1 = 1 \pm i\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Las dos raíces s_1 y s_2 iguales para $z = i$, no forman ciclo, siendo $z = i$ un punto doble sin ramificación; sus desarrollos son respectivamente

$$s_1 = i + \left(1 + i\sqrt{\frac{2}{3}}\right)(z - i) + \ldots\ldots$$

$$s_2 = i + \left(1 - i\sqrt{\frac{2}{3}}\right)(z - i) + \ldots\ldots$$

Para la raíz s_3, que tiene en $z = i$ el valor $s_3 = -2i$, el desarrollo es

$$s_3 = -2i - 2(z - i) + \ldots\ldots$$

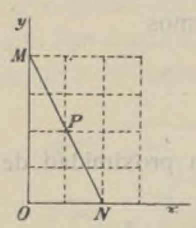
Ejemplo 3.º Harkness, Morley y Landfriet. *(Theorie der algebraischen Functionen)*. Sea

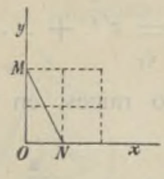
$$(s^2 - z^2)^2 - sz^2 - z^4 = 0.$$

Para $z = 0$ tiene cuatro raíces iguales $s = 0$.

Haciendo $s = s'$, $z = z'$, la ecuación aproximada es

$$s'^4 - 2z's'^2 + z'^2 = 0;$$





y tendremos $\mu_1 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, y haciendo en dicha ecuación $s' = c_1 z'^{\frac{1}{2}}$, resulta después de suprimir el factor común z'^2,

$$(c_1^2 - 1) = 0 \quad \text{que da} \quad c_1^2 = 1.$$

Las cuatro raíces s_1, s_2, s_3, s_4 de la ecuación propuesta forman en el punto $z = 0$ dos ciclos, cuyo primer término es

$$c_1 z'^{\frac{1}{2}} (c_1 = \pm 1).$$

Para separar estos ciclos, calcularemos un nuevo término del desarrollo. Con este objeto, hagamos en la ecuación propuesta

$$s' = (c_1 + \zeta_1) z'^{\mu_1} = (c_1 + \zeta_1) z'^{\frac{1}{2}}; \quad (\zeta_1 = 0 \text{ para } z' = 0)$$

y tendremos, después de dividir por z'^2,

$$\zeta_1^4 + 4c_1\zeta_1^3 + 4\zeta_1^2 - z'\zeta_1 - c_1 z'^{\frac{1}{2}} - z'^2 = 0,$$

y haciendo $z' = z_1^2$,

$$\zeta_1^4 - 4c_1\zeta_1^3 + 4\zeta_1^2 - z_1^2\zeta_1 - c_1 z_1 - z_1^4 = 0.$$

La ecuación aproximada es

$$4\zeta_1^2 - c_1 z_1 = 0.$$

Tendremos, procediendo como en los anteriores ejemplos,

$$\zeta_1 = c_2 z'^{\mu_2} = c_2 z_1^{2\mu_2} \qquad 2\mu_2 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{4}$$

y para determinar c_2 se tiene

$$4c_2^2 - c_1 = 0, \quad 4c_1 c_2^2 = c_1^2 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2\sqrt{c_1}}.$$

Luego, por la segunda aproximación, obtenemos

$$s' = c_1 z'^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{c_1}} z'^{\frac{3}{4}} + \ldots\ldots;$$

y los desarrollos de las cuatro raíces, en la proximidad de $z = 0$, son

$$s_1 = z^{\frac{2}{4}} + \frac{1}{2} z^{\frac{3}{4}} + \ldots\ldots, \qquad s_2 = -z^{\frac{2}{4}} - \frac{1}{2} i z^{\frac{3}{4}} + \ldots\ldots,$$

$$s_3 = z^{\frac{2}{4}} - \frac{1}{2} z^{\frac{3}{4}} + \ldots\ldots, \qquad s_4 = -z^{\frac{2}{4}} + \frac{1}{2} i z^{\frac{3}{4}} + \ldots\ldots$$

Uno de las ciclos contiene las raíces s_1 y s_2, el otro las s_3 y s_4.

101. Polos de una función algebráica. Sea

$$Zu^m + Z_1 u^{m-1} + \ldots\ldots + Z_m = 0$$

la ecuación, ordenada según las potencias decrecientes de u.

Haremos $z = a + z'$, $u = \frac{1}{u'}$, y se buscarán las raíces infinitamente pequeñas de la ecuación transformada

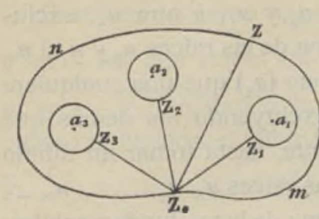
$$Z_0 + Z_1 u' + \ldots\ldots + Z_m u'^m = 0 \quad \text{ó} \quad \Sigma A_{\alpha\beta} u'^{\alpha} z'^{\beta} = 0.$$

Para estudiar las raíces, cuando z es muy grande, se hace $z = \frac{1}{z'}$, y se dan á z' valores muy pequeños. La ecuación propuesta se transforma en una ecuación algebráica entre z' y u.

§ 3.° Sistemas de lazos fundamentales

102. Sea $f(u, z) = 0$ una ecuación irreducible cuyo primer miembro es un polinomio entero en z y u de grado m respecto á u.

Sean a_1, a_2, a_3, ... los puntos críticos de la región considerada. Desde el punto z_0 trácense rectas hasta la proximidad de cada punto crítico y después una circunferencia muy pequeña cuyo centro sea cada uno de dichos puntos. Todos los caminos que van desde z_0 hasta un punto z de la región, se pueden reducir á la recta z_0z precedido de los lazos formados por cada una de las rectas que van á cada uno de los puntos críticos, por la circunferencia y después por la distancia de z_0 á esta recorrida en sentido inverso. Así el camino z_0mz se reduce al lazo (a_1) descrito en sentido positivo, seguido de la recta z_0z. El camino Z_0nz se reduce á los dos lazos (a_3), (a_2) descritos en sentido negativo, seguidos de la recta $z_0\, z$.



Esto sentado, supongamos que la variable z parte del punto z_0, teniendo la función el valor inicial u_0 y que describe la recta z_0z_1. La función adquirirá en z_1 cierto valor. Supongamos que esta raíz pertenece á un sistema circular de p raíces que se permutan alrededor del punto crítico a_1. Cuando la variable haya descrito la circunferencia que rodea á a_1, en sentido positivo, se obtendrá en z_1 otra raíz. Si se vuelve enseguida á z_0 por la recta z_1z_0, la función tendrá en z_0 un valor u_1 distinto del primero. Si se describe por segunda vez el lazo, con el valor u_1, se llegará á z_1 con la raíz precedente, una segunda vuelta conducirá á otra raíz y así sucesivamente hasta llegar al valor inicial. Tendremos pues el sistema de p lazos binarios

$$(a)_0^1,\ (a)_1^2,\ \ldots\ldots,\ (a)_{p-2}^{p-1},\ (a)_{p-1}^0.$$

Un lazo relativo á otro punto crítico, unirá otras raíces entre sí, ó una de las raíces anteriores, y así sucesivamente.

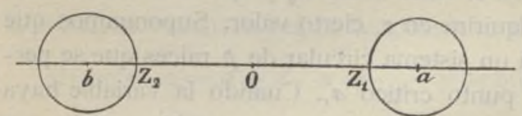
Definición. Sean u_0, u_1, ..., u_{m-1} las m raíces de la ecuación $f(z_0, u) = 0$. Se llaman *lazos fundamentales* á los sistemas de $m - 1$ lazos binarios que permiten pasar de la raíz u_0 á las demás.

Para formar un sistema de esta clase, después de haber descompuesto los lazos complejos en lazos simples, se tomará un lazo (a_1) que une la raíz u_0 á otra u_1, excluyendo los demás lazos que unen u_0 á u_1. Entre los que quedan, se tomará otro lazo (a_2) que una cualquiera de las raíces u_0 y u_1, á otra u_2, excluyéndose los demás lazos que unen una de las raíces u_0 y u_1 á u_2. Entre los que quedan se tomará un lazo (a_3) que una cualquiera de las raíces u_0, u_1, u_2 á otra u_3, excluyendo los demás que unen u_0, u_1, u_2 á u_3 y así sucesivamente, hasta tomar un último lazo (a_{m-1}) que una cualquiera de las raíces $u_0, u_1, \ldots, u_{m-2}$ á otra raíz u_{m-1}, y este será un sistema de lazos fundamentales.

Ejemplo. Sea la ecuación

$$u^3 - 3u + 2z = 0.$$

Hay dos puntos críticos a y b situados en el eje Ox, el uno $z = 1$, para el que la ecuación admite la raíz doble $u = 1$ y la raíz simple $u = -2$; el otro $z = -1$, para el que la ecuación admite la raíz doble $u = -1$ y la raíz simple $u = 2$.



Las tres raíces de la ecuación son reales para todo valor real de z tal, que se tenga $z^2 < 1$, es decir, en todos los puntos de la recta finita ab.

Para estudiar las dos raíces próximas á la unidad alrededor del punto crítico a, haremos

$$z = 1 + z', \quad u = 1 + u'.$$

La ecuación se reduce á

$$(2z' + 3u'^2) + u'^3 = 0.$$

Los dos valores infinitamente pequeños de u', cuyos valores aproximados son

$$u' = \pm \sqrt{-\frac{2}{3}}\, z'^{\frac{1}{2}}$$

se permutan cuando z gira alrededor del punto crítico a. Siendo en z_1 reales y próximos en valor á la unidad, son positivos.

Cuando se cambia el signo de z, los tres valores de u cambian de signo. Resulta pues, que dos raíces se permutan también alrededor del punto b, y que estas dos raíces tienen en z_2 valores reales y negativos próximos á -1.

Tomaremos como origen de los lazos el punto $z=0$. Para $z=0$, las tres raíces de la ecuación son $u_0=0$, $u_1=\sqrt{3}$. $u_2=-\sqrt{3}$. Cuando la variable z describe la recta Oz_1, teniendo la función el valor inicial $u_0=0$, la ecuación

$$-u(3-u^2)+2z=0$$

muestra que u conserva un valor positivo, y por consiguiente adquiere en z_1 un valor próximo á 1. Quando la variable gira enseguida alrededor del punto a, esta raíz se cambia en otra raíz positiva próxima á 1. Volviendo la variable de z_1 á O, esta nueva raíz, diferente de la primera, queda positiva; y por consiguiente adquiere en el punto O el valor $u_1=\sqrt{3}$. Así pues el lazo (a) une las dos raíces u_0 y u_1. De igual manera el lazo (b) une las dos raices u_0 y u_2. Los dos lazos binarios $(a)_0^1$, $(b)_0^2$ forman un sistema de lazos fundamentales.

Si se hace $z=\frac{1}{z'}$, $u=\frac{1}{u'}$, la ecuación se reduce á

$$(z+2u'^3)-3z'u'^2=0.$$

Para los valores infinitamente pequeños de z', los tres valores de u' son infinitamente pequeños y sus valores aproximados son

$$u'=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,z'^{\frac{1}{3}},$$

que se permutan circularmente, cuando la variable gira alrededor del punto $z'=0$. Así, sobre la esfera, el punto O′ es un nuevo punto crítico. El lazo que parte del origen O y envuelve al punto O′, une las tres raices u_0, u_1 y u_2.

Para ver en qué orden se efectúa la permutación, consideremos el circuito que en el plano corresponde al lazo (O′), y supongamos que el radio del circuito tenga un argumento comprendido entre π y 2π. El circuito, descrito en sentido positivo, puede sustituirse por la serie de los dos lazos (*a*) y (*b*). Si se parte del punto O con el valor inicial u_0, cambiando u_0 en u_1 el lazo (*a*), y siendo neutro el lazo (*b*) con respecto á esta raíz, se vuelve á O con la raíz u_1.

Describiendo la circunferencia, por segunda vez, como el lazo (*a*) cambia u_1 en u_0, y enseguida el lazo (*b′*) u_0 en u_2, se vuelve á O con la raiz u_2.

Describiendo el circuito por tercera vez, se vuelve al valor inicial.

Tenemos pues los tres lazos binarios $(O')_0^1$, $(O')_1^2$, $(O')_2^0$, descritos en el sentido del movimiento positivo.

Se podría formar un sistema de lazos fundamentales con los dos lazos $(O')_0^1$ y $(O')_1^2$ ó con los dos lazos $(a)_0^1$ y $(O')_1^2$.

Ejemplo 2.º Sea la ecuación

$$u^3 - 3u^2 + z^6 = 0.$$

Para $z = 0$ se tiene la raíz simple $u = 3$ y dos raíces nulas. Si se hace $u = vz^3$, la ecuación propuesta se reduce á

$$3v^2 - 1 - v^2 z^3 = 0;$$

para $z = 0$ admite las raíces simples $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{-1}{\sqrt{3}}$. Los valores de u que tienden hacia cero con z son regulares en el dominio del origen, y los primeros términos de su desarrollo son

$$u_1 = \frac{z^3}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots, \quad u_2 = -\frac{z^3}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots$$

Representemos por u_0 la raíz que se reduce á 3 cuando $z=0$. Para cada uno de los seis valores de z dados por la ecuación $z^6 = 4$, se tiene una raíz simple $u = -1$ y una raíz doble

$u = 2$; y las dos raíces que tienden hacia 2, se permutan alrededor del punto crítico. A partir de cada uno de los puntos de ramificación, tracemos la sección indefinida según la prolongación del radio que une este punto con el origen. Las tres raíces se hacen funciones uniformes en toda la extensión del plano.

Para estudiar las raíces, cuando se atraviesan las secciones, basta construir la curva que representa el conjunto de las solusoluciones reales de la ecuación

$$u^3 - 3u^2 + t^2 = 0;$$

se ve enseguida que cuando t crece desde 0 hasta 2 por valores reales, los tres valores de u van respectivamente de los valores iniciales de u_0, u_1, u_2 á los valores finales 2, 2, — 1; luego, cuando z describe una de las líneas Oa_1, Oa_3, Oa_5, las tres raíces u_0, u_1, u_2 tienden hacia los valores 2, 2, — 1. Por consiguiente, cuando se atraviesa una sección de índice impar, se va de la raiz u_0 á la raíz u_1, de u_1 á u_0, y u_2 no cambia.

Igualmente, cuando z describe uno de los radios Oa_2, Oa_4, Oa_6, t va de 0 á 2 por valores reales, y las raíces u_0, u_1, u_2 tienden respectivamente hacia 2, — 1, 2, de modo que, atravesando una sección de índice par, se pasa de u_0 á u_2, de u_2 á u_0; pero no cambia u_1. Los lazos (a_2), (a_4), (a_6) unen pues las raices u_0 y u_2, siendo neutros para la raíz u_1; mientras que los lazos (a_1), (a_3), (a_5) unen u_0 y u_1, y son neutros para la raiz u_2. Si se describe una circunferencia con el origen como centro, que contenga los seis puntos de ramificación, este camino equivale á seis lazos, y cada raíz vuelve á su valor inicial. El método general, en efecto, demuestra que el punto en el infinito es neutro para cada una de las raíces.

Ejemplo 3.° Sea la ecuación

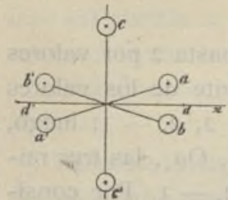
$$u^3 + 3z^2u^2 - (z^2 - 1)^2 - 4z^6 = 0.$$

La derivada del primer miembro con relación á u es $3u(u + 2z^2)$, y se anula para $u = -2z^2$ y $u = 0$. La primera solución da $(z^2 - 1)^2 = 0$; pero los puntos d y d' que corresponden á $z = \pm 1$ son neutros; porque las raíces permanecen monótropas alrededor de cada uno de ellos.

Para $u = 0$, se tiene $(z^2 - 1)^2 + 4z^6 = 0$; por consiguiente

$$z = \pm i, \qquad z = \pm \frac{\sqrt{7} \pm i}{4};$$

resultando seis puntos críticos alrededor de cada uno de los cuales se permutan las raíces; c y c' están situados en el eje de las y; los otros cuatro a, a', b, b' son simétricos, dos á dos, con relación al origen, y se hallan en los vértices de un rectángulo.



Para $z = 0$, la ecuación propuesta se reduce á $u^3 - 1 = 0$, y admite las tres raíces $u_0 = 1$, $u_1 = j$, $u_2 = j^2$, expresando j una de las raíces imaginarias de $j^2 - 1 = 0$. La ecuación tiene una raíz real u_0 en la recta finita cc' y dos imaginarias conjugadas u_1 y u_2. Estas son las que se hacen iguales en c y c', permutándose alrededor de estos dos puntos. Así, cada uno de los lazos (c) y (c') une las dos raíces u_1 y u_2. Observaremos además que, si en el lazo (a) se tiene $z = x + yi$, se tendrá $z = x - yi$ en el lazo (b), y por consiguiente, los tres valores de u sobre (b) son respectivamente conjugados con los que se obtienen sobre el lazo (a), concluyéndose que cada uno de ellos une la raíz u_0 con una de las raíces u_1 y u_2. Si el lazo (a) une u_0 y u_1, el lazo (b) unirá u_0 y u_2. Se formará un sistema de lazos fundamentales tomando, sea $(a)_0^1$ y $(b)_1^2$, sea $(a)_0^1$ y $(c)_1^2$, sea $(b)_0^2$ y $(c)_1^2$.

El punto O′, en la esfera, es polo para cada una de las raíces.

LIBRO QUINTO

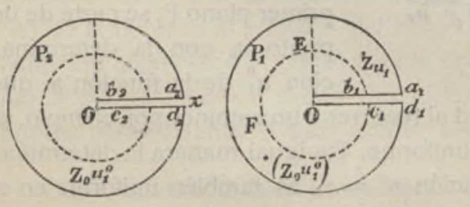
ANALYSIS SITUS

CAPÍTULO I

Superficie de Riemann

§ 1.° Definición de la superficie de Riemann

103. Definición. 1.° *Superficie de dos hojas.* Supongamos la función algebráica $u^2 = z$ de dos determinaciones u_1 y u_2. Podemos reducir esta función á una función uniforme, haciendo que en vez de moverse z en un plano simple se mueva en una superficie de dos hojas superpuestas cuyo conjunto se llama una *superficie de Riemann* de dos hojas. Para construirla, consideremos dos planos P_1 y P_2 limitados cada uno por una circunferencia de radio R, hagamos en cada uno á lo largo del radio una sección $a_1 b_1 O c_1 d_1$, $a_2 b_2 O c_2 d_2$. Coloquemos la hoja P_1 sobre la P_2 y unamos por un plano los dos bordes $a_1 b_1$ y $c_2 d_2$ y por otro los bordes $a_2 b_2$ y $d_1 c_1$ que se cortan en una línea doble $O_1 L_1$.



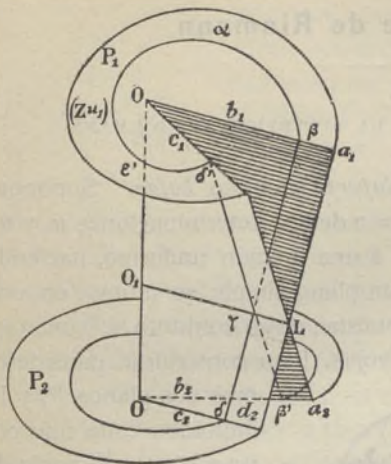
En esta figura se puede pasar de un punto (z, u_1) de la hoja superior al punto correspondiente (su proyección ortogonal sobre el segundo plano) (z, u_2) (*), siguiendo el camino continuo

(*) Se llama *punto analítico* (z, u) el conjunto de un valor de z y de un valor de u que verifican la relación $F(z, u) = 0$.

(z, u_1) $(\alpha\beta\gamma\delta)$ (z, u_2) que da una vuelta al eje OO_1O, é inversamente, se puede subir desde el punto (z, u_2) hasta el (z, u_1) por el camino (z, u_2) $(\alpha'\beta\gamma'\delta'\varepsilon')$ (zu_1), de manera que el camino total que hace volver del punto (z, u_1) al mismo, es

$$(z, u_1)\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon(z, u_2)\alpha'\beta'\gamma\delta'\varepsilon'(z, u_1)$$

La continuidad de u queda establecida por el hecho de que el valor de u_1 según el orden Ob_1a_1 en P_1, es igual al valor de u_2 en el borde opuesto Oc_2d_2 de P_2, bordes que se suponen reunidos, lo mismo que los Oc_1d_1 y Ob_2a_2 que constituyen en camino cerrado.



Que la función u vuelve al punto de partida con el mismo valor con que partió, después de haber recorrido la superficie de Riemann de dos hojas así formada, se puede ver observando que: Si en el primer plano P_1 se parte de un punto z_0 con la determinación u_1^0 de la función u, que variando con continuidad al recorrer z un camino, por ejemplo, el b_1EFc_1, es una función uniforme. De igual manera la determinación u_2 dada por la ecuación $u^2 = z$, es también uniforme en el plano P_2, en virtud de que los dos bordes de la sección hecha impiden que la variable describa una circunferencia completa alrededor del punto O. Pero los valores de la determinación u_1 en los puntos b_1 y c_1 son iguales y de signo contrario. En efecto, llamando $u_1(b_1)$ y $u_1(c_1)$ á los valores de u_1 en los puntos b_1 y c_1; si partimos de b_1 con la determinación $u_1(b_1)$, y la variable z da una vuelta completa hasta volver á b_1, el valor de la función habrá cambiado de signo, y será $-u_1(b_1)$; pero á consecuencia de existir el borde, el punto z se ha detenido en c_1. El valor $u_1(c_1)$

difiere infinitamente poco del que adquiriría la función completando la vuelta en b_1; luego

$$u_1(c_1) = -u_1(b_1).$$

De igual manera, en el plano P_2 se tendrá

$$u_2(c_2) = -u_2(b_2).$$

Si ahora suponemos que en cada punto del plano P_1 y del P_2 se inscriben el valor de la determinación de u_1 y de u_2 respectivamente; y suponemos superpuestos estos planos ó mejor colocados paralelamente, de modo que el uno sea la proyección ortogonal del otro, los valores de u_1 y u_2 correspondientes al mismo valor de z serán iguales y de signo contrario, así

$$u_1(c_1) = -u_2(c_2) = u_2(b_2)$$
$$u_1(b_1) = -u_2(b_2) = u_2(c_2).$$

Podremos pues en la representación que hemos hecho de la superficie de Riemann, establecer la continuidad de la función pasando del punto β del borde superior de la derecha al punto δ del borde inferior de la izquierda y del punto β' del borde inferior de la derecha al punto δ' del borde superior de la izquierda, habiendo atravesado el punto γ de la línea O_1L que se llama *línea de paso* ó de *cruce*, punto que debe considerarse como dos puntos pertenecientes á cada una de las hojas.

Consideremos la función $u = (z - c)^{\frac{1}{n}}$ de n determinaciones. El punto c en el que la función u adquiere n determinaciones se llama *punto de ramificación*.

Tomemos dicho punto de ramificación como el pie del eje vertical de un elicoide alabeado, cuya generatriz es el radio vector del punto z y cuya directriz es una hélice de paso infinitamente pequeño. Los puntos z de igual módulo, cuyos argumentos difieran en un múltiplo de 2π, se proyectarán en una misma vertical, y corresponderán á valores iguales de la cantidad compleja $z = x + iy$.

La función $u = (z - c)^{\frac{1}{n}}$ adquiere todos los valores de que es capaz, cuando se hace variar á z en la extensión de n hojas sucesivas del helicoide, reproduciéndose la misma serie de valores en cada conjunto de n hojas. Se puede pues reducir el helicoide á n hojas sucesivas, cortándolo, á partir del eje, por dos secciones, la una en la primera hoja, la otra en la n^{sima} y tales, que las dos tengan por proyección común sobre el plano horizontal una línea cualquiera trazada por el punto c.

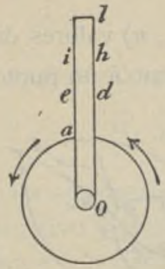
Para conservar la continuidad de la variación de c, procederemos análogamente á como procedimos cuando sólo se trataba de una superficie de dos hojas, solo que en vez de los dos planos, podemos imaginar una serie de tubos de comunicación infinitamente delgados y próximos que unan, dos á dos, los puntos de las secciones S_1 y S_n situados sobre la misma vertical, que atravesando las hojas intermedias no establezcan con ellas comunicación alguna, como si fuesen hilos conductores aislados que transmitieran la electricidad á través de un medio, sin poderse distribuir en este medio. La variable, después de haber llegado á un punto de S_n por la superficie, continuará su marcha según uno de los tubos para cerrar el circuito.

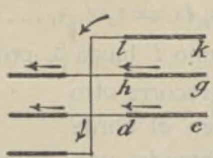
Si se supone el paso de la hélice infinitamente pequeño, la superficie se reducirá á un *plano múltiple*, compuesto de n hojas superpuestas que se comunican entre sí por el único punto c y de la que la n^{sima} y la primera se reunen á través de las demás según la línea de paso, de modo que la primera hoja forma la prolongación de la n^{sima}.

Una curva que contiene el punto c en su interior, no puede ser cerrada sino después de haber recorrido las n hojas del helicoide.

Supongamos que se haya practicado en todas las hojas intermedias un corte, cuyos bordes se comuniquen análogamente como se ha hecho en el caso de dos hojas.

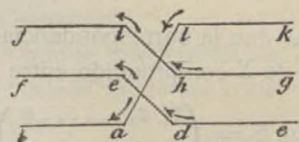
Un punto que parte de a en la sección S_1, y caminando hacia la izquierda según ab, llega, después de haber girado alrededor del eje á la parte *cd* en que la primera hoja se termina en el corte y pasa el puente *de* (hilo de comunicación) que le conduce





á la segunda hoja. Recorriendo *efgh*, vuelve al corte, que atraviesa por el puente *hi*, para pasar á la tercera hoja *ijkl*. Después de llegar á la tercera hoja en *l*, desciende por el puente vertical á la primera hoja.

En vez de dejar los diversos puentes *de*, *hi* horizontales, podemos aplanar cada hoja, sin cambiar la sección inicial, de manera que todas las hojas se conviertan en planos paralelos; entonces los puentes resultarán inclinados, y el corte de la sección tendrá el aspecto de la figura representada abajo. De esta manera se llega al *plano múltiple* ó *superficie de Riemann*. La continuidad entre las diversas hojas de este plano se establece por la línea de paso, que en la figura pone en comunicación la 1.ª hoja con la 2.ª, la 2.ª con la 3.ª y la 3.ª con la 1.ª

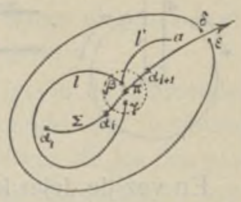


Análogas representaciones se hacen en el caso de existir más de un punto de ramificación.

La superficie de Riemann reduce al estudio de una función multiforme al de una función uniforme. A cada punto z de esta superficie se halla asociado un *solo valor* u de la función, que es el valor correspondiente á la hoja en que se encuentra el punto considerado.

Supongamos que la función algebráica s de z se halle definida por la ecuación irreducible $F\binom{n\,m}{s\,z} = 0$; y sea Σ la línea que une los puntos de ramificación, que no se corta á sí misma, y se prolonga hasta el infinito, ó la *línea de parada (ligne d' arrêt* según Cauchy), cuyos dos bordes distinguimos mediante los signos $+$ y $-$; de manera que toda raíz de $F = 0$ es de una sola determinación en el plano z, modificado por Σ. A cada punto $z = a$ corresponde un solo valor s_χ.

Si con cada uno de los s_χ ($\varkappa = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$) valores de la función, se recorre un camino l' hasta β, próximo á un punto singular, y á continuación se recorre otro camino l hasta el punto γ en el borde opuesto y próximo á ε, se obtendrá una permutación $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots\ldots s_{i_n}$ del valor original $s_\chi(\varepsilon)$. Si representamos por $\overset{-}{s}_\chi$ el valor de s_χ en β y por $\overset{+}{s}_\chi$ el valor final de s_χ, obtenido por variación continua desde β hasta γ, tendremos en general $\overset{+}{s}_\chi = \overset{-}{s}_{\chi_i}$, de manera que á lo largo de Σ, cada



valor de una raíz $\overset{-}{s}_\chi$ está coordinado con otro valor $\overset{+}{s}_\chi$. Las ecuaciones

$$\overset{+}{s}_1 = \overset{-}{s}_{i_1}, \quad \overset{+}{s}_1 = \overset{-}{s}_{i_2}, \ldots\ldots, \quad \overset{+}{s}_n = \overset{-}{s}_{i_n}$$

que dan la correspondencia de las raíces á lo largo del segmento Σ_i de Σ comprendido entre a_i y a_{i+1}, se define por la sustitución $S_i = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots\ldots & n \\ i_1, & i_2, & & i_n \end{pmatrix}$, que expresa la transformación de las raíces $s_1, s_2, \ldots\ldots$ en $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots\ldots$

Expresando por $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots\ldots$, las divisiones hechas en Σ y por $S_1, S_2, \ldots\ldots$ las sustituciones correspondientes, $S_i\, S_{i-1}^{-1}$ expresa la sustitución S'_i obtenida cuando la variable z gira en sentido positivo alrededor del punto de ramificación α_i. Para cada una de las n raíces $s_1, \ldots\ldots, s_n$ se introduce un plano, á saber P_1 para s_1, P_2 para $s_2, \ldots\ldots$, P_n para s_n, para formar el plano de n hojas, como ya se ha explicado. Si la correspondencia ó coordinación de las raíces se halla expresada por la sustitución

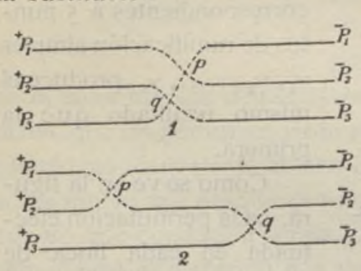
$$S_i = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots\ldots, & n \\ i_1, & i_2, & \ldots\ldots, & i_n \end{pmatrix};$$

y expresando por

$$\overset{-}{P}_1, \overset{-}{P}_2, \ldots\ldots, \overset{-}{P}_n \qquad \overset{+}{P}_1, \overset{+}{P}_2, \ldots\ldots, \overset{+}{P}_n$$

los n segmentos de Σ correspondientes respectivamente al borde negativo y positivo, podremos presentar algunos ejemplos que den á conocer la disposición de la superficie de Riemann en diversos casos.

Supongamos que la coordinación de las raíces esté dada por la sustitución



$$S_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots & n \\ 3 & 3 & 1 & 4 & \ldots\ldots & n \end{pmatrix}.$$

Se hallan ligados $\overset{+}{P}_1$ á $\overset{-}{P}_2$, $\overset{+}{P}_2$ á $\overset{-}{P}_3$, $\overset{+}{P}_3$ á $\overset{-}{P}_1$, como expresa la figura, que representa una sección normal á la superficie de Riemann.

La posición de los puntos p y q en que se encuentran las líneas de paso ó puentes *(Brücken)*, se puede modificar como se ve en la segunda disposición de la figura.

En vez de la línea Σ, podemos considerar un sistema de lazos que, partiendo del punto origen z_0, llega á la proximidad de cada punto de ramificación para volver á z_0, después de haber girado alrededor de cada uno; y

$$\overset{-}{l}_1 \overset{+}{l}_1 \overset{-}{l}_2 \overset{+}{l}_2 \ldots\ldots \overset{-}{l}_v \overset{+}{l}_v$$

representa la coordinación de las raices hallándose, en general, l_i caracterizada por la sustitución $S'_i = S_i S_{i-1}^{-1}$, de modo que $S'_1 S'_2 \ldots\ldots S'_v = 1$.

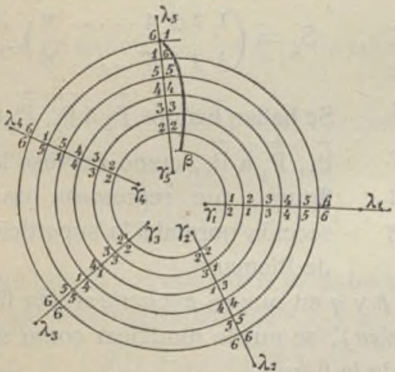
Se puede establecer fácilmente que: *Todo punto de ramificación de orden* μ *es equivalente á* $\mu - 1$ *puntos de ramificación simples*, es decir, que si

$$S'_i = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \ldots\ldots n \\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 7 \ldots\ldots n \end{pmatrix}$$

es la sustitución correspondiente á la sección l_i de la superficie de Riemann, las sustituciones

$$S''_1 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots\ldots n \\ 2\ 1\ 3 \ldots\ldots n \end{pmatrix},$$

$$S''_2 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \ldots\ldots n \\ 3\ 2\ 1\ 4 \ldots\ldots n \end{pmatrix}, \ldots\ldots \quad S''_5 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \ldots\ldots n \\ 6\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 7 \ldots\ldots n \end{pmatrix}$$



correspondientes á 5 puntos de ramificación simples $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_5$, produce el mismo resultado que la primera.

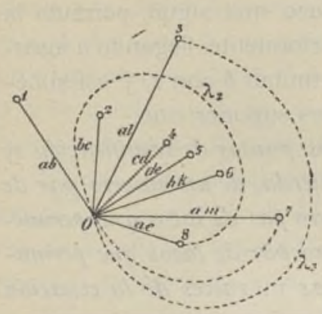
Como se ve en la figura, cada permutación efectuada en cada línea de paso, correspondiente á cada punto, hace pasar á z de una hoja á la inmediata hasta llegar á la posición primitiva β, después de haber recorrido las 6 hojas.

§ 2.º REDUCCIÓN Á LA FORMA NORMAL

104. FORMA NORMAL. Cuando la superficie de Riemann tiene tan solo puntos simples de ramificación, puede reducirse á una forma más sencilla que se llama *forma normal,* según estableció Herr Lüroth en el tomo IV de *Mathematische Annalen.*

Para mayor sencillez, cada lazo se representa en la figura por las raíces que permuta, por ejemplo (a, b).

Vamos á sustituir el lazo 8, que suponemos es el primero que conduce al origen O con el valor de la raíz a, por otro lazo λ_2 que, partiendo de O se halle situado entre 1 y 2, y que corte á los lazos que permutan la raíz a.



El nuevo lazo λ_2 equivale á un camino formado primero por los lazos 2, 4, 5 y 6 sucesivamente recorridos, que conducen á O con la raíz a, si se ha partido con este valor, y seguido del camino formado por los lazos 8, 6, 5, 4 y 2, que conduce á O con la raíz b.

Análogamente, podremos hacer pasar á los lazos 3 y 7 que permutan a, colocándolos detrás del lazo 8, según indican las líneas de trazos, que no permutan ya la raíz a, pues el nuevo lazo 7, por ejemplo, es equivalente al lazo ae seguido de los lazos am y ae, en los que $m \neq e$ porque si fuese $m = e$, el lazo 8 no sería el primero que conduce á la raíz a. El nuevo lazo 7 es pues equivalente al lazo ae recorrido dos veces es decir, que no permuta la raíz a con ninguna otra raíz.

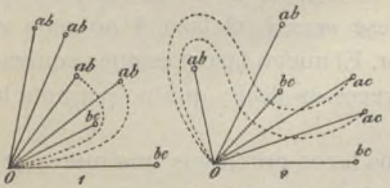
Hemos sustituído pues, á los lazos primitivos una nueva serie de lazos tales, que los *dos* primeros λ_1 y λ_2 permutan a con b, sin cambiar los demás, excepto algunos que se han sustituído por otros lazos que no permutan la raíz a.

Repitiendo la operación, pero comenzando por el segundo lazo de la nueva serie, obtendremos una nueva serie tal, que los tres primeros lazos permuten las raíces a y b, mientras que los demás no permuten la raíz a. Procediendo así llegaremos á obtener una serie de lazos tal, que *todos los lazos que permutan* a *con* b *se hallarán en primer lugar, no permutando ninguno de los que siguen, la raíz* a; pero el número de lazos obtenidos, que permutan a y b, es necesariamente *par*, pues de lo contrario un contorno trazado desde O, con el valor inicial a, no podría conducir la raíz a otra vez al origen, después de haber envuelto á todos los puntos de ramificación; porque, fuera de los lazos que permutan a y b, no hay ningún otro lazo que permute a con otra raíz.

Consideremos agrupados en un ángulo todos los lazos obtenidos; y supongamos que el primer lazo que sigue, permuta la raíz b con la c; operaremos como anteriormente, llegando á agrupar de igual manera los lazos que permutan b con c, y así sucesivamente. Por consiguiente, podremos suponer que:

Los lazos que unen O *á todos los puntos de ramificación se componen, partiendo de derecha á izquierda, de un número par de lazos que permutan* a *y* b, *de un número par de lazos que permutan* b *con* c, *etc., y en fin, de un número par de lazos que permutan* k *y* l, *siendo* a, b, ..., k, l *las* m *raíces de la ecuación* f(u, z) = o, *cuando* z *está en* O.

Podemos ahora definir la superficie de Riemann correspondiente á la función algebráica que consideraremos.



Supongamos que sean en número de 6 los lazos A, $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_6$ que permutan las raíces a y b. Unámoslos por $a_1 a_2$, $a_3 a_4$, $a_5 a_6$, de modo que las áreas $Oa_1 a_2$, $Oa_3 a_4$, $Oa_5 a_6$ no contengan en su interior ningún punto crítico.

Si se supone que la variable z no atraviesa las líneas precedentes, la raíz u de la ecuación $f(u, z) = o$, teniendo en O el valor a, será una función de z *de un solo valor* en cualquier punto del plano; pues todo camino que no envuelve á ninguna de las líneas trazadas, conduce en O al mismo valor, puesto que sólo los lazos A permutan a; y cualquier camino que rodea á $a_1 a_2$, por ejemplo, equivaldría á los lazos a_1 y a_2 sucesivamente recorridos, y conducirá también al valor a.

Consideraremos pues, un primer plano en el que están trazadas las secciones $a_1 a_2$, $a_3 a_4$, $a_5 a_6$ que llamaremos secciones A; y en dicho *plano a* la función u que adquiere en O el valor a, sólo tiene un valor cuando la variable z no pasa por ninguna de las secciones.

Análogamente consideraremos un plano b, correspondiente á las secciones B, donde se tracen las mismas secciones que en el plano a y además las secciones B correspondientes á los extremos de los lazos b que permutan b y c. La función u sólo tendrá un valor en este plano, si la variable no atraviesa las secciones A y B; continuando así obtendremos la superficie de Riemann correspondiente á la ecuación algebráica $f(u, z) = 0$.

Vamos ahora á transformar esta superficie de modo que sólo exista una línea de paso A, una línea de paso B, y así sucesivamente, existiendo tan solo entre la penúltima y la última cierto número de líneas de paso, generalmente superior á *uno*.

Sean seis lazos de los cuales los cuatro primeros permutan a y b y los dos últimos b y c. La figura 1 indica con las líneas de puntos, que los dos últimos lazos que permutan a y b han pasado al cuarto y quinto lugar, como indica la figura 2. Y si en ésta, como se halla indicado por las líneas de puntos, llevamos los lazos ac al primero y segundo lugar, permutando las raíces b y c.

Procediendo de igual manera podremos ordenar definitivamente los lazos, en grupos de modo tal: que *á excepción del último, los lazos de cada grupo permuten dos raíces, sin que dos grupos permuten las mismas dos raíces, y que cada raíz pertenezca á una permutación de dos grupos.*

Tendremos pues que en la superficie de Riemann construída como se ha indicado, la primera hoja estará unida á la segunda por *una sola* línea de paso, y lo mismo sucederá para la segunda y tercera, etc. Las dos últimas tendrán entre si cierto número de líneas de paso. Esta idea de unir cada dos hojas por una sola línea de paso, se debe á Clebsch. (Mathem. Annal. t. VI.)

Ejemplo 1.º de una superficie de Riemann. Sea la relación $u^m = z$.

A cada valor de z corresponden m valores de u, que se permutan circularmente, cuando la variable gira alrededor del origen. Sea

$$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$u_1 = \rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\theta}{m} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{m}\right),$$

$$u_2 = \rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2\pi}{m}\right), \ldots\ldots$$

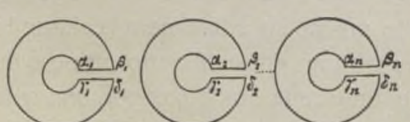
$$u^m = \rho^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{\theta + 2(m-1)\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2(m-1)\pi}{m}\right].$$

Tomemos m hojas planas limitadas por una circunferencia cuyo centro sea O y el radio R infinitamente grande; y tracemos en cada una de estas hojas una cortadura según el eje real. Si á un punto z de la hoja P_k se hace corresponder el valor

$$u_k = \rho^{\frac{1}{m}}\left\{\cos\left[\frac{\theta + 2(k-1)\pi}{m}\right] + i \operatorname{sen}\left[\frac{\theta + 2(k-1)\pi}{m}\right]\right\},$$

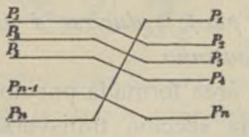
se tendrá sobre estas m hojas la representación completa de todos los valores de u y de z que satisfacen á la relación dada $u^m = z$. Coloquemos estas m hojas, las unas sobre las otras, de modo que sus índices se sucedan en su orden natural, hallándose la hoja P_1 la más alta, después unamos el borde $\gamma_1\delta_1$ de P_1 al borde $\alpha_2\beta_2$ de P_2, el borde $\gamma_2\delta_2$ de P_2 al borde $\alpha_3\beta_3$ de P_3, ... el borde $\gamma_m\delta_m$ de P_m al $\alpha_1\beta_1$ de P_1 por pequeñas bandas de superficie, y se tendrá una superficie de m hojas.

Conviene representar á la superficie por su proyección sobre un plano con la línea de paso 0 ——————— $+\infty$.



Ejemplo 2.º Sea la ecuación $u^3 - 3u^2 + 2z = 0$, que admite los dos puntos críticos $z = \pm 1$. Consideremos tres hojas en las que trazamos dos secciones que parten de los puntos $+1$ y -1. Llamemos u_0, u_1, u_2 á los tres valores de u que se reducen res-

pectivamente á o, $+\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ para $z=0$; y en cada punto de la hoja P_i señalemos el valor correspondiente de u_i. Para formar la superficie de Riemann, supondremos las tres hojas, nos referimos á este problema (pág. 271).



Cuando se atraviesa la sección L, u_0 se cambia en u_1, y u_1 en u_0, pero u_2 no cambia. Uniremos pues $\alpha_0\beta_0$ y $\gamma_1\delta_1$, $\alpha_1\beta_1$ y $\gamma_0\delta_0$, $\alpha_2\beta_2$ y $\gamma_2\delta_2$. De igual manera se unirán, á lo largo de la segunda sección ó cortadura $\lambda_0\mu_0$ y $\nu_2\rho_2$, $\lambda_2\mu_2$ $\nu_0\rho_0$, $\lambda_1\mu_1$ y $\nu_1\rho_1$. La figura representa la proyección de una curva cerrada situada en la superficie.

§ 3.º PRINCIPIOS RELATIVOS AL ORDEN DE CONEXIÓN

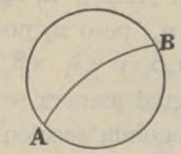
105. ORDEN DE CONEXIÓN DE LAS SUPERFICIES. Un área es *conexa (Zusammenhängend)*, cuando se puede pasar de un punto cualquiera del área á otro punto según un camino continuo, sin encontrar el contorno del área, es decir, que un área es conexa, cuando forma un *continuo* tal, que se puede pasar de uno cualquiera de sus puntos á otro también cualquiera, porque se puede pasar de un lazo á otro, ascendiendo ó descendiendo en el encadenamiento que forman sus hojas sucesivas.

La superficie de Riemann es una superficie conexa, para la cual, á cada punto corresponde un sólo punto de la curva algebráica expresada por la ecuación $f(x, y) = 0$.

Si el área es una superficie cerrada, como la de una esfera ó un toro, supondremos siempre que en un punto de la misma, elegido arbitrariamente, se ha hecho una abertura infinitamente pequeña, cuyo borde se considerará como un contorno que limita el área.

Una superficie simplemente conexa se divide en dos distintas que no tendrán ya ninguna adherencia, por una sección hecha desde un punto de su contorno á otro punto del mismo, la cual se llama *sección transversa. (Querschnitt).*

Esto se aplica á la esfera, considerada como un casquete con una base infinitamente pequeña, formada por la abertura que se considera hecha en ella, según se ha indicado. Los dos bordes de la sección se unen al contorno.

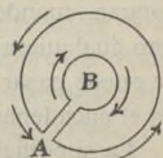


Toda línea cerrada trazada en una superficie simplemente conexa, puede reducirse á un punto, por deformación continua.

Si consideramos una área formada por dos contornos separados, una sección transversa hecha desde un punto de un contorno á un punto del otro, reducirá al área á ser simplemente conexa. Tendremos una superficie doblemente conexa.

Una sección transversa puede tener una de sus extremidades, ó las dos, en secciones transversas efectuadas anteriormente, y aún podemos considerar una sección como avanzando en cierta dirección, según la cual el contorno del área se prolonga sucesivamente á los dos lados, para venir á terminar en un punto de su propio recorrido, que ya es un punto del nuevo contorno.

Se dice que una sección es *reentrante*, cuando, partiendo de un punto interior del área vuelve al mismo, sin haber tocado ni atravesado el contorno del área.



Si los contornos de una superficie son tres, podrá reducirse á ser simplemente conexa, mediante dos secciones transversas; y será una superficie *triplemente conexa*.

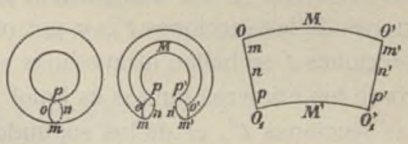
Una área plana con n contornos, ó en cuyo interior existen $n - 1$ agujeros, que no forman parte del área, se puede cambiar, mediante $n - 1$ secciones transversas. Se dirá en este caso que es *n-uplemente conexa*.

Una parte de superficie que puede cambiarse por deformación contínua en un área plana de n contornos, se dirá *n-uplemente conexa*. Así una zona esférica con dos bases y la superficie conexa de un tronco de cono con superficies doblemente conexas.

Un cilindro ramificado (que tiene la figura de un pantalón), es una superficie triplemente conexa.

Pero existen superficies que no pueden transformarse en una área plana por simple deformación continua, por ejemplo la superficie de un anillo ó toro *en un sistema dado de superficies, un conjunto cualquiera de secciones transversas, que divide al mismo en segmentos desprendidos de los cuales cada uno es simplemente conexo, la diferencia entre el número de estas secciones y el número de los segmentos desprendidos del sistema es constante, cualquiera que sea el conjunto de secciones hechas.*

Para demostrar este teorema, consideremos un sistema S compuesto de un número cualquiera de porciones de superficies distribuídas de una manera cualquiera en el espacio, cuyas configuraciones son arbitrarías; y supongamos que este sistema se halle cortado por un conjunto t' de n' secciones transversas, transformándose en otro sistema S′ compuesto de ν' porciones de superficie.



Supongamos además que se halle cortado el mismo sistema S por otro conjunto t'' de n'' secciones transversas, transformándose ahora en un tercer sistema S″ compuesto de ν'' porciones de superficie; y consideremos que cada una de estas porciones de superficie que forman los sistemas S′ y S″ sean simplemente conexas.

Esto sentado, supongamos que se introduzcan *simultáneamente* los dos sistemas de secciones transversas t' y t''. Estos dos sistemas se cruzarán en puntos que supondremos, por sencillez, que no coinciden con ninguna de las terminaciones de las secciones de uno ú otro sistema t' y t''; lo que se puede conseguir siempre aprovechando la arbitrariedad, según la que podemos alterar las extremidades de las secciones ó los puntos de intersección. De esta manera todo punto de encuentro dividirá cada sección que pase por él en dos segmentos. Sea k el número de puntos de intersección.

Supongamos ahora que, después de haber trazado las secciones t' y transformado S en S', se trace una de las secciones t''. Esta no será una sección transversa para el sistema S', mientras no toque ni atraviese ninguna de las secciones t' ya existentes; de otro modo representaría un conjunto de *varias* secciones transversas.

Veamos cuántas son las secciones transversas T'' que se introducen en el sistema S', después de haberse trazado todas las secciones t''.

Desde luego vemos que la totalidad de las terminaciones de las secciones T'' se compondrá, por una parte, de las terminaciones de las secciones t'', y por otra, de los puntos en que las secciones t' se hallan atravesadas por las secciones t''. El número de los primeros puntos es igual al doble $2n''$ del número de las secciones t'', el de los segundos es igual á $2k$; porque cada punto de intersección representa dos terminaciones de las secciones T''. Luego el número total de las terminaciones de T'' será $2n'' + 2k$, y por consiguiente, el número de las secciones T'' será $n'' + k$.

Si se hubiera comenzado, al contrario, por transformar S en S'' mediante secciones t'', y se hubieran trazado enseguida las secciones t', se vería que el número de las secciones transversas se habría aumentado en $n' + k$.

Sea ahora N el número de las porciones de superficie, separadas entre sí, en las que se descompone S, después de haberse trazado simultáneamente los dos sistemas de secciones transversas t' y t''. Este número N puede considerarse evidentemente como el número de segmentos en los que se cambia S' por la introducción de las secciones T''.

Ahora bien, S' se compone por hipótesis, de ν' segmentos, de los cuales cada uno es *simplemente conexo*. Luego al aumentar cada sección en una unidad el número de los segmentos, las $n'' + k$ secciones darán el número

$$N = \nu' + n'' + h.$$

Se verá de igual manera, partiendo del sistema S″, que este número puede expresarse por

$$N = \nu'' + n' + k.$$

Igualando las dos expresiones de N, resulta

$$n' - \nu' = n'' - \nu''.$$

TEOREMA.—*El orden de un sistema de superficies disminuye en una unidad cada vez que se traza una sección transversa, y disminuye en* n *unidades, si se trazan* n *secciones transversas*, pues si consideramos un área simplemente conexa, y se traza una sección transversa, dividirá al área en dos segmentos separados, obteniéndose que

$$n' - \nu' = 1 - 2 = -1.$$

Este número aumentado en 2 da el orden 1 de conexión del área.

Podemos pues tomar como definición del *orden de conexión* de un sistema al valor constante, para este sistema, de la expresión

$$N = n' - \nu' + 2.$$

El tipo de las superficies cerradas simplemente conexas es la esfera; después de la esfera la más sencilla es el toro, que es triplemente conexa; pero no existe ninguna superficie cerrada doblemente conexa, y en general: *El orden de conexión de una superficie cerrada es un número impar.*

Sea $N = 2p + 1$ el orden de conexión de una superficie cerrada. El número entero p se llama *género* de la superficie. La esfera es de género cero, el toro de género uno. El tipo de las superficies cerradas de género p es la esfera con p agujeros, ó el sistema de p anillos soldados entre sí formando una cadena sin cerrar. La superficie de Riemann de dos hojas y $2p+2$ puntos de ramificación es del género p.

Sea, finalmente, n el número de las secciones $t_1, t_1, \ldots\ldots t_n$ necesarias para transformar el sistema S en un sistema de ν segmentos simplemente conexos. Sea S_1 el sistema que se obtendría trazando solamente la primera t_1 de dichas secciones. S_1 se habrá transformado en ν segmentos simplemente conexos por medio de $n-1$ secciones $t_2, \ldots\ldots, t_n$. Los órdenes de estos dos sistemas serán pues por la definición anterior

$$\sigma = n - \nu + 2, \quad \sigma_1 = (n-1) - \nu + 2 = \sigma - 1$$

Así, el orden de conexión de un área está dado por el número de las secciones transversas que es preciso hacer para dividir el área en dos partes separadas (*).

Consideremos ahora una sección reentrante r, y sea S′ el sistema en el cual cambia esta sección al sistema S.

Desde un punto cualquiera de esta sección r tracemos una sección transversa cualquiera t al contorno del área. El orden σ' del sistema S′ se hallará disminuído en una unidad. Pero puede considerarse que el conjunto de las secciones r y t forme una sola sección transversa; y por consiguiente el conjunto $r+t$ disminuye en una unidad el orden del sistema S; luego los dos sistemas S y S′ son de igual orden.

Sea n el número de las secciones transversas necesarias para transformar el sistema S, que suponemos reducido á un área única, simplemente conexa. Se hará entonces $\nu = 1$, y resultará

$$\sigma = n - 1 + 2 = n + 1;$$

luego: *El orden de conexión de la superficie* S, *disminuído en una unidad, indica el número de secciones transversas que deben efectuarse en dicha superficie, para transformarla en un área simplemente conexa.*

Así, el orden de conexión solo depende de la configuración

(*) Hoüel. *Théorie élémentaire des quantités complexes*, p.ˢ 252-54.

de la superficie y de ningún modo de cómo se han trazado las secciones transversas.

§ 4.° Número de los contornos de una superficie cuyo orden de conexión se da. Determinación del orden de conexión de una esfera múltiple

106. Sea S un sistema de superficies ó una superficie única cualquiera. Si se traza una sección transversa, puede ocurrir uno de estos tres casos.

1.° La sección va de una parte del contorno á otra parte aislada de la primera. Entonces, como los dos bordes de la sección se cuentan cada uno como una porción del contorno, los dos puntos aislados primitivamente se hallan reunidos en un solo contorno; luego, en este caso, la sección transversa *disminuye en una unidad* el número de contornos distintos.

2.° La sección va de un punto de uno de los contornos á otro punto del mismo contorno. Entonces desprende una parte del área rodeada de una curva cerrada. En este caso el número de los contornos *aumenta en una unidad.*

3.° La sección transversa que parte de un punto de uno de los contornos, termina en un punto de su propio trayecto. Se la puede considerar como compuesta de una sección reentrante que aumenta en dos unidades el número de los contornos y de una sección transversa que une uno de estos contornos al contorno primitivo, y que disminuye en una unidad el número de los contornos; luego, el número de los contornos *ha aumentado en una unidad;* luego *el número de los contornos de un sistema de superficies ó de una superficie aumenta ó disminuye en una unidad por una sección transversa.*

Si pues $\mathfrak{A}$ es una área dada cuyo orden de conexión es σ, podremos reducirla á otra área $\mathfrak{A}'$ mediante $\sigma - 1$ secciones transversas. El área $\mathfrak{A}'$ no tiene más que un sólo contorno.

Sea $\varkappa$ el número primitivo de los contornos de $\mathfrak{A}$. Cada sección transversa aumenta en $\varepsilon = \pm 1$ el número de los contornos; y si expresamos por $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \sigma - 1$ números iguales á la unidad positiva ó negativa, tendremos para el número de los contornos de $\mathfrak{A}'$.

$$\varkappa + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{\sigma-1} = 1$$

Si pues s expresa el número de las secciones transversas correspondientes á $\varepsilon = +1$, y por consecuencia $\sigma - 1 - s$ el número de las correspondientes á $\varepsilon = -1$, resultará

$$\varkappa + s - (\sigma - 1 - s) = 1, \quad \text{ó} \quad \varkappa = \sigma - 2s;$$

y pudiendo variar s desde 0 hasta $\sigma - 1$, se podrán tomar los valores

$$\sigma, \sigma - 2, \ldots\ldots, 2 - \sigma,$$

excluyéndose los valores negativos; luego el número $\varkappa$ de los contornos es igual al orden de conexión del área ó inferior á σ en un número ***par***. Si pues un área tiene $\varkappa$ contornos, su orden de conexión será $\varkappa$, $\varkappa + 2$, $\varkappa + 4, \ldots\ldots$

Observación 1.ª Para aplicar esta regla á las superficies cerradas, se debe practicar ante todo una abertura infinitamente pequeña; en este caso tendrán un solo contorno; luego el número de conexión de una superficie cerrada es uno de los números 1, 3, 5, ... y por consiguiente es simplemente conexa, pues de lo contrario para reducirla á un área simplemente conexa, sería preciso efectuar secciones transversas en número par.

107. Esfera múltiple. Sean Σ una esfera múltiple, formada por N hojas, ρ el número de sus puntos de ramificación y $n_1, n_2, \ldots\ldots n_\rho$ los números respectivos de las hojas que reunen estos ρ puntos, ó sus órdenes respectivos de multiplicidad. Vamos á determinar el orden de conexión de la superficie.

Observaremos desde luego, según se ha visto, que al practicarse un número cualquiera de secciones transversas en una superficie, puede ésta someterse á una deformación continua, sin alterar en nada ni los enlaces, ni el número de secciones, ni el de contornos, ni el de conexiones. El resultado sería el mismo que si se hubiese efectuado la deformación antes de efectuar las secciones transversas. Podemos pues suponer que se ha deformado, si es necesario, la esfera de N hojas, de manera que no quede un punto de ramificación sobre otro.

Cortemos ahora la esfera por dos secciones que penetran á través de todas las hojas, desprendiendo dos casquetes A y B que no contengan ningún punto de ramificación, que se hallarán todos en la zona media C; y cortemos ésta mediante ρ secciones á través también de todas las hojas, en ρ segmentos, de los que cada uno contiene uno de los ρ puntos de ramificación.

Los dos casquetes formarán cada uno, N porciones separadas, es decir, en total 2N. Una porción de zona que contiene un punto de ramificación que reune n hojas, se compondrá de $N - n + 1$ partes separadas, á saber: la que contiene el punto de ramificación, formada por n hojas, más las otras $N - n$, formadas cada una por una sola hoja; luego el número de partes separadas, que constituirán el sistema, después de introducirse las secciones, será

$$2N + (N - n_1 + 1) + (N - n_2 + 1) + \ldots\ldots (N - n_\rho + 1)$$
$$= (\rho + 2)N - (n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_\rho) + \rho.$$

Veamos ahora cuántas secciones transversas y reentrantes forman las $\rho + 2$ secciones.

Las secciones reentrantes no alteran, según se ha visto, el orden de conexión de la superficie; de manera que sólo debemos tener en cuenta las $N\rho + 1$ secciones transversas; y como sabemos que si un sistema se descompone, por τ secciones transversas, en ν segmentos separados simplemente conexos, se halla expresado el orden de conexión del sistema por $\tau - \nu + 2$, el orden de conexión de la esfera múltiple estará expresado por

$$N\rho + 1 - (\rho + 2)N + (n_1 + n_2 + \ldots\ldots n_\rho) - \rho + 2$$
$$= 3 - 2N - \rho + \Sigma n,$$

de donde $\quad \Sigma n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_\rho .$

Luego la esfera se cambia en un área simplemente conexa mediante $2 + \Sigma n - 2N - \rho$ secciones transversas.

Ejemplo 1.º En la esfera correspondiente á la función

$$\sqrt{(z-a)\,(z-b)},$$

se tiene $N = 2$, $\rho = 2$; y por reunir cada uno de los puntos *a* y *b* las dos hojas, $\Sigma n = 2 + 2 = 4$; luego el orden de conexión es

$$\sigma = 3 + 4 - 2\,.\,2 - 2 = 1.$$

Esta esfera es pues *simplemente conexa.*

2.º Sea la esfera correspondiente á la función

$$\sqrt{(z-a)\,(z-b)\,(z-c)\,(z-d)}\,.$$

Se tiene $N = 2$, $\rho = 4$, $n_1 = n_2 = \ldots\ldots = 2$;

luego $\quad \sigma = 3 + (2 + 2 + 2 + 2) - 2\,.\,2 - 4 = 3,$

es pues *triplemente conexa.*

§ 3.º Reducción á una superficie simplemente conexa

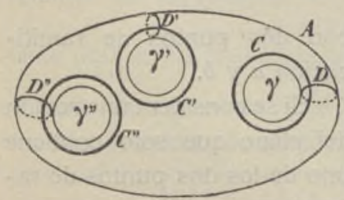
En la teoría de las conexiones tiene, como se ve, gran importancia el procedimiento de la deformación, en el sentido de la geometría de situación ó *analysis situs;* de manera que la deformación continua permite pasar de una superficie á otra, estableciendo una correspondencia bien determinada entre los puntos de las dos superficies.

Así, una modificación que no afecta al carácter de la superficie de Riemann, consiste en efectuar con relación á un punto arbitrario del espacio, una transformación por radios vectores recíprocos del plano en que se consideran las m hojas. En vez de m hojas planas, tendremos m hojas esféricas superpuestas, ligadas sucesivamente cada dos por una línea de cruce, exceptuando las últimas, que se hallan ligadas entre sí por $p+1$ líneas de esta clase.

La superficie de una esfera puede considerarse como compuesta de dos lados, interior ó exterior, pasándose del uno al otro, cuando se encuentra la línea de cruce, que puede imaginarse como una sección hecha en la superficie.

Se puede agrandar el *agujero* hecho en la superficie por la sección hasta considerarlo como una curva cerrada, una circunferencia, por ejemplo, y la superficie se compondrá entonces de los lados interno y externo de un casquete esférico. Este doble casquete puede deformarse en dicho plano que se considerará como formado por dos caras, verificándose el tránsito de la una á la otra por el perímetro del contorno. Se podría pasar del doble casquete á la esfera, reduciendo de una manera continua la cara interna del casquete á la zona que falta en la esfera.

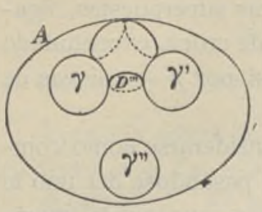
Podemos tomar como esquema de la superficie de Riemann un disco plano con dos lados y p agujeros. Llamaremos *circuito* toda curva cerrada trazada sobre la superficie. Hay que distinguir especialmente los circuítos que giran alrededor de un agujero y los que pasan á través del mismo.



Sea el disco A de tres agujeros γ, γ', γ'' (*). Un circuito alrededor de γ será una línea cerrada C que rodea una vez el agujero γ. Este circuito C, señalado con trazo continuo, puede considerarse situado en el lado superior del disco. Un circuíto á

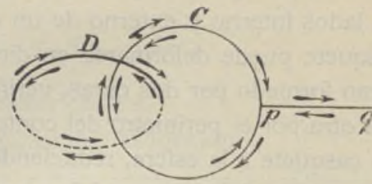
(*) *Picard*. Traité d' Analyse, t. II, pág. 377.

través del agujero γ será un circuito tal como D, que corta una vez á A y γ, cerrándose al lado interior del disco por la línea de trazos. Podremos hacer la misma operación en los otros agujeros γ' y γ'', y tendremos seis circuitos que se llaman *fundamentales;* porque cualquier otro circuito, trazado sobre la superficie, puede reducirse por una deformación continua á coincidir con un camino formado por uno ó varios de estos circuitos y por arcos recorridos dos veces en sentidos opuestos.



Estas consideraciones conducen al resultado de reducir un contorno cualquiera á otro simplemente conexo.

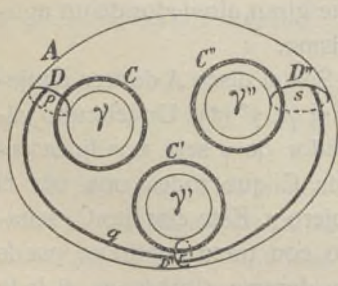
Sean las dos curvas C y D. Si se hace un corte según cada una de estas líneas, se podrá considerar cada una de ellas como compuesta de dos bordes; y el conjunto de las dos líneas dobles C y D formará una curva única, que se puede recorrer de una manera continua, sin franquear la sección. Se designa con el nombre de *retrosección (rückerschnitt)* al contorno único, formado con los bordes de las dos secciones.



Ejemplo 1.º Sea la función

$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

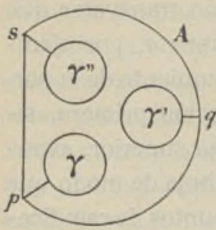
con dos puntos de ramificación a y b.



Si se considera una región del plano que solo contiene uno de los dos puntos de ramificación, el a por ejemplo, tendremos

$$u = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ip}{2}} \sqrt{re^{ip} + a - b} \quad \text{escribiendo} \quad z - a = re^{ip}.$$

Si hacemos describir al punto z alrededor del punto a un contorno que deja al exterior al punto b, el factor radical tiene dos determinaciones de signo contrario, que sólo pueden confundirse anulándose; porque sólo así se puede pasar de la una á la otra por variación continua. Pero este factor no se anula en el interior del contorno descrito; luego conserva en toda la extensión limitada de un contorno su determinación inicial, y vuelve á tomar el mismo valor, cuando z vuelve á la misma posición $x + iy$. El factor $r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ip}{2}}$, al contrario, toma un valor opuesto



$$r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ip}{2} + \pi i} = r^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{ip}{2}},$$

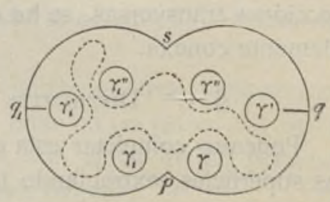
cuando z da una vuelta alrededor de a; luego u pasa de una de sus determinaciones á la otra, cuando z da una vuelta alrededor de a.

El mismo razonamiento se hará respecto á b. En fin, w adquirirá su determinación inicial, cuando z describa un contorno que contenga en su interior á los dos puntos a y b. Hagamos

$z - a = re^{ip}$, $\quad z - b = r' e^{ip}$

tendremos que

$$u = (rr')^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{p+p'}{2}}.$$

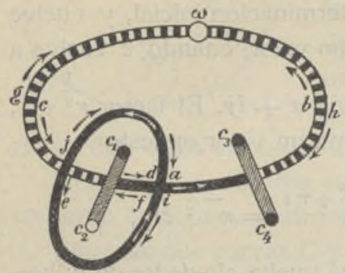


Pero si z da una vuelta alrededor de los puntos a y b, cada uno de los argumentos p y p' variará en 2π; luego $\frac{p+p'}{2}$ variará también en 2π, y w adquirirá su valor primitivo.

Sea la esfera correspondiente á la función

$$\sqrt{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)(z - c_4)}.$$

Tiene 2 hojas y dos líneas de parada $c_1 c_2$, $c_3 c_4$. Efectuemos en la hoja inferior, por ejemplo, una abertura ω; y desde los bordes de ésta hagamos partir una sección transversa que encuentra á las dos líneas de paso, cuya porción, indicada con trazos llenos se halla en la parte superior, mientras que la otra, indicada con trazos de puntos, se halla en la inferior, de manera que ninguna de las hojas queda dividida.



Para establecer la comunicación entre los dos bordes, tracemos una sección transversa que parta de un punto a, por ejemplo, del borde izquierdo de la porción de la sección primera, situada en la hoja superior, avanzando en esta hoja de modo que rodee los dos puntos de ramificación c_1 y c_2, volviendo al punto i situado frente al a en el otro borde de la sección a_ω. Los bordes de estas dos secciones formarán ahora un contorno continuo *abcdefghija* que, recorriendo en el sentido indicado por las letras, rodea completamente al área total de las dos hojas de la esfera, dejando á esta área á la izquierda; luego con auxilio de las dos secciones transversas, se ha cambiado la esfera en un área simplemente conexa.

§ 5.° Diferentes órdenes de conexiones

Podemos completar esta exposición relativa á la conexión de las superficies, extractando la síntesis hecha por el Sr. E. Pascal (*), hecha según los trabajos de Neumann, Betti, Dyck, etc.

Definiciones. Una superficie es *abierta* ó *cerrada*. Es *abierta* cuando tiene bordes, es decir, líneas en cuyos puntos termina, y *cerrada* en el caso contrario.

Un área infinitesimal alrededor de un punto de una superficie puede considerarse por sus dos lados ó caras opuestas que corresponden á las direcciones de la normal á la superficie en dicho punto, y con relación á éste, todo punto puede conside-

(*) *Repertorio de Matematiche superiori. (II Geometria)* rarse como doble, según que se la suponga como perteneciente á la una ó á la otra dirección. Diremos en este caso, que los dos puntos en los cuales un mismo punto se considera desdoblado, *son conjugados* respectivamente.

Una superficie es *bilátera* cuando, á partir de un punto de misma y siguiendo caminos continuos en ella, sin atravesar los bordes ó contornos, no se puede unir nunca al conjugado del punto de partida.—*Ejemplos:* La esfera, una porción de plano.

Consideremos ahora una superficie analítica en el espacio de tres dimensiones. Sea un rectángulo ABCD, el que después de haber unido AB con CD, se hace girar AB alrededor del punto medio común, hasta que D coincida con A y B con C. Tendremos una superficie limitada por un contorno ó frontera, que se superpone á sí misma y que constituye una *variedad doble,* según la denominación del Sr. Picard, ó una variedad analítica ó de una cara, según el Sr. Poincaré, es además *abierta*, *de un sólo borde.*

Se puede formar también una superficie *unilátera*, *cerrada*, del siguiente modo. (Möbius).
Si A, B, C, D, E son cinco puntos, cuatro de los cuales no se hallan en plano, los cinco triángulos ABC, BCD, CDE, DEA, EAB constituyen una *superficie unilátera*, *abierta*, cuyo contorno es el pentágono ACEBD.

Pero si se toma un punto P que junto con tres cualesquiera de los cinco puntos dados, no se halle en un plano, los otros cinco PAC, PCE, PEB, PBD y PDA son caras de un poliedro que constituye una *superficie unilátera cerrada.*

También, si imaginamos una *esfera* con dos *agujeros*, y desde el uno hacemos partir un tubo exteriormente, haciéndolo después entrar en la esfera, formando un lazo y terminando en el otro agujero, pero encontrando á la esfera en el interior, tendremos una superficie *cerrada unilátera.* (Dyck. Math. An. XXXII).

108. Cortes en las superficies. Un corte *(sección)* puede ser *abierto* ó *cerrado.* Los cortes abiertos cuyos extremos sean dos puntos del mismo borde, son de *primera especie,* y aquéllos en los que son puntos de borde distinto, son de *segunda especie.*

Un corte cerrado ó abierto de primera ó segunda especie no puede dividir una superficie en más de dos partes.

Si una superficie es bilátera, un *corte abierto* de primera especie *aumenta* en 1 el número de los bordes; si una superficie es unilátera, un corte análogo *no cambia* el número de contornos *ó lo aumenta* en 1.

Un corte de 1.ª especie, será de 1.ª ó 2.ª *clase*, según que *aumente ó no*, en la superficie unilátera el número de bordes.

El corte de 1.ª *especie* y de 2.ª *clase* no divide nunca una superficie unilátera. Un corte de 2.ª especie *disminuye* en 1 el número de sus bordes, y no puede nunca dividirla.

Un corte efectuado á lo largo de una línea abierta, cuyos extremos se hallan, el uno en un punto de un borde y el otro en el interior de la superficie, no aumenta el número de los bordes ni divide la superficie.

Si una superficie es *bilátera*, un corte cerrado *aumenta* en 2 el número de los bordes; y si es *unilátera*, un corte cerrado aumenta en 2 ó en 1 el número de los bordes. Diremos que el *corte cerrado* en una superficie *unilátera* es de 1.ª ó 2.ª clase, según que se verifica lo uno ó lo otro.

Un corte cerrado de 2.ª *clase* no divide nunca una superficie unilátera.

Una superficie *simplemente conexa* es siempre *bilátera*.

Se pueden siempre efectuar en una superficie *bilátera* cortes cerrados ó abiertos de *primera ó de segunda especie*, que la reduzcan á una superficie *simplemente conexa*.

Con cortes *abiertos* de 1.ª *especie* y de 2.ª *clase* ó *cerrados de 2.ª clase*, puede siempre reducirse á *bilátera* una superficie *unilátera*.

Consideremos una superficie dividida en un número finito α de partes, cada una simplemente conexa; y supongamos que para conseguir esto, hemos efectuado: cierto número de cortes cerrados y cortes abiertos, de los cuales un solo extremo pertenezca á un borde, y después τ_1 cortes abiertos de 1.ª especie, τ_2 cortes abiertos de 2.ª, τ_3 cortes abiertos interiores á la superficie, siendo también interiores sus extremos, se tendrá que:

El número $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \alpha$ *es constante de cualquier modo que se efectúen los cortes*, según se ha visto ya (pág. 290).

Este número aumentado en 2, suele llamarse el *número fundamental* de la superficie.

Si en vez de una superficie se tiene un grupo de s de las mismas, se podrá enunciar el siguiente teorema:

El número fundamental K *del grupo, se expresa mediante los números fundamentales* K_i *de cada una de las superficies, por la fórmula*

$$K = \sum_{i=1}^{s} K_i - 2s + 2.$$

Para terminar este resumen que hace el Sr. Pascal acerca de la conexión de las superficies, indicando que se entiende por *género* de una superficie el *máximo* número de cortes cerrados ó abiertos de 1.ª especie que pueden ejecutarse en ella sin dividirla, citaremos las siguientes proposiciones:

Si p *es el género de una superficie bilátera, abierta ó cerrada, el número fundamental* K, *se halla dado por*

$$K = 2p + \omega,$$

siendo $\omega \geqq 0$ el número de bordes.

Género de una superficie unilátera es el número representado por la suma del número de cortes cerrados de 2.ª clase ó abiertos de 1.ª especie y de 2.ª clase, que se necesitan para reducirla á bilátera y de doble género que el de esta superficie.

Si π *es el género de la superficie unilátera abierta ó cerrada, con* $\omega \geqq 0$ *bordes y* K *es el número fundamental, se tiene*

$$K = \pi + \omega.$$

Se llama *orden de conexión* ó *conexión* de una superficie cualquiera, el número $K + 2$ *si es cerrada, ó el* K *si es abierta.*

Un agujero aumenta en 1 *la conexión de una superficie abierta y disminuye en* 1 *la conexión de una superficie cerrada, aumentando siempre en* 1 *el número fundamental* (*).

(*) *Repertorio di Matem. sup. II Geometría.*

CAPÍTULO II

Variedades ó espacios

§ 1.º ALGUNAS DEFINICIONES RELATIVAS AL HIPERESPACIO

109. La Geometría ó su lenguaje facilita la exposición de ciertas teorías puramente algebráicas; pero no pudiendo extenderse las consideraciones geométricas á más de tres variables, se ha creado una geometría ficticia, llamada *teoría del hiperespacio* ó *geometría* de *n dimensiones*.

Un conjunto de n variables $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ constituye un punto. En la geometría de n dimensiones, una ecuación representa una *superficie* ó una variedad de $n - 1$ dimensiones, una ecuación de primer grado representa un *plano*, la ecuación

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots\ldots + (x_n - a_n)^2 = R^2$$

representa una *hiperesfera* de centro $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ y de radio R.

La distancia de dos puntos $(x_1, x_2, \ldots\ldots)$ y $(x'_1, x'_2, \ldots\ldots)$ se expresa por

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots\ldots}$$

La recta que une dichos dos puntos se representa por las ecuaciones

$$\frac{X_1 - x_1}{x_1 - x'_1} = \frac{X_2 - x_2}{x_2 - x'_2} = \ldots\ldots = \frac{R}{r},$$

expresando R la distancia de los puntos $(X_1, X_2, \ldots\ldots)$ y $(x_1, x_2, \ldots\ldots)$ y r la de los puntos $(x_1, x_2, \ldots\ldots)$ y $(x'_1, x'_2, \ldots\ldots)$

«La Geometría de n dimensiones, dice M. Poincaré, tiene un objeto real. Los seres del hiperespacio son susceptibles de definiciones precisas, como los del espacio ordinario; y si no nos los podemos representar, podemos concebirlos y estudiarlos. La analogía del nuevo lenguaje geométrico con el de la Geometría ordinaria, puede crear asociaciones de ideas fecundas y sugerir generalizaciones útiles».

Las figuras suplen la debilidad de nuestro espiritu, llamando á nuestros sentidos en su auxilio.»

«El empleo de las figuras tiene ante todo por objeto permitirnos conocer ciertas relaciones entre los objetos de nuestros estudios, y estas relaciones son aquéllas de las que se ocupa la rama de la Geometría llamada *Analysis Situs*, que describe la situación relativa de los puntos, de las líneas y de las superficies, sin considerar en absoluto su magnitud.» (*).

§ 2.° VARIEDADES

110. DEFINICIÓN. Sean n variables $x_1, x_2 \ldots, x_n$ que podemos considerar como las coordenadas de un punto en el espacio de n dimensiones, que consideraremos como reales.

Un sistema cualquiera de n variables se llama *un punto*.

Sea el sistema de p igualdades y de q desigualdades

$$\left.\begin{array}{ll} F_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 & \varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) > 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 & \varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) > 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ F_p(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 & \varphi_q(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) > 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

(*) El creador de esta teoría fué Riemann, que ya la dió á conocer con el nombre de *Analysis Situs*, en *Fragment aus der Analysis Situs*, y especialmente en sus aplicaciones á las funciones abelianas. La teoría de su célebre superficie es un capítulo del *Analysis Situs;* pero el origen de este concepto se halla en su célebre memoria *Ueber die Hypotesen, welche der Geometrie zu grunde liegen*, ó sea la teoría del *hiperespacio*.

Posteriormente Betti publicó una memoria fundamental en el t. IV de *Annali di Matematica* que el Sr. Poincaré ha completado en el *Journal de l' Ecole Polytechnique* y en *Rendiconti del Circolo matematico de Palermo*. Á estas investigaciones podemos agregar las hechas por el Sr. Picard en su *Théorie des fonctions algébriques*.

Supongamos que las funciones F y φ son uniformes y continuas con derivadas continuas, y que los determinantes formados, tomando p columnas cualesquiera del siguiente cuadro

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{dF_1}{dx_1}, & \dfrac{dF_1}{dx_2}, & \ldots\ldots, & \dfrac{dF_1}{dx_n} \\ \dfrac{dF_2}{dx_1}, & \dfrac{dF_2}{dx_2}, & \ldots\ldots, & \dfrac{dF_2}{dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{dF_p}{dx_1}, & \dfrac{dF_p}{dx_2}, & \ldots\ldots & \dfrac{dF_p}{dx_n} \end{array}\right\},$$

no sean nulos á la vez. El conjunto de los puntos que satisfacen á las condiciones (1) forma una *variedad de* n — p *dimensiones*. Si en particular $p = 0$, de modo que solo haya desigualdades, resultará una porción del espacio de n dimensiones, que se llama *dominio*.

Si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n)$ son dos puntos que satisfacen á las condiciones (1), y se puede hacer variar á $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ de una manera continua desde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ hasta $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n$, sin que las relaciones (1) cesen de quedar satisfechas, se dirá en este caso, que la variedad definida por las condiciones (1) es continua.

Las variedades discontinuas se pueden descomponer en un número finito ó infinito de variedades continuas. Así, la variedad

$$x_2^2 + x_1^4 - 4x_1^2 + 1 = 0,$$

que es una curva de 4.º grado, puede descomponerse en las dos:

$$x_2^2 + x_1^4 - 4x_1^2 + 1 = 0, \quad x_1 > 0,$$
$$x_2^2 + x_1^4 - 4x_1^2 + 1 = 0, \quad x_1 < 0.$$

Se dirá que una variedad es *finita*, si todos sus puntos satisfacen á la condición

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 < K^2$$

siendo K una constante dada. Consideremos ahora el sistema de relaciones

$$\left.\begin{array}{ll} F_\alpha = 0, & (\alpha = 1, 2, \ldots\ldots, p), \\ \varphi_\beta = 0, & \\ \varphi_\gamma > 0 & \left(\gamma \gtrless \beta\right) \end{array}\right\} \quad (2)$$

que se compone de $p + 1$ igualdades y de $q - 1$ desigualdades.

Puede suceder, ó que no exista ningún punto que satisfaga á dichas condiciones, ó que existan, en cuyo caso formarán una variedad continua ó no, que tenga, por lo menos, $n - p$ dimensiones.

Se llama *frontera completa* de la variedad definida por las condiciones (1), al conjunto de puntos que satisfacen á uno de los q sistemas de relaciones

$$\left.\begin{array}{llll} F_\alpha = 0, & \varphi_1 = 0, & \varphi_\gamma > 0, & \left(\gamma \gtrless 1\right), \\ F_\alpha = 0, & \varphi_2 = 0, & \varphi_\gamma > 0, & \left(\gamma \gtrless 2\right), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_\alpha = 0, & \varphi_q = 0, & \varphi_\gamma > 0, & \left(\gamma \gtrless q\right) \end{array}\right\} \quad (3)$$

Una frontera de una variedad, multiplicidad ó espacio S_{n-p} es una variedad de orden $n - p - 1$ que impide la continuación de S_{n-p}.

Una frontera está formada por el conjunto de los puntos correspondientes á una de las desigualdades relativas á los parámetros, cuando se ha transformado en igualdad. Siendo, por ejemplo, para cierta representación paramétrica

$$P(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_{n-p}) > 0$$

una desigualdad á que deben satisfacer los parámetros u, la relación

$$P(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_{n-p}) = 0$$

definirá una parte de la frontera, en el dominio correspondiente. La función, es susceptible de anularse cambiando de signo.

En el caso de no existir ninguna variedad de $n - p - 1$ dimensiones que satisfagan á uno de los q sistemas (3), se dice que la variedad definida por las condiciones (1) es *ilimitada*. En el caso contrario es limitada.

Se dice que una variedad es *cerrada* cuando es á la vez finita continua é ilimitada. Una variedad que *no tiene frontera* es *cerrada*.

Para abreviar el lenguaje, se llaman *superficies* á las variedades de $n - 1$ dimensiones excepto para $u - z$ y *curvas* á las de una (*).

111. Homeomorfismo. El Sr. Poincaré considera el sistema de funciones

$$x'_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots n) \tag{4}$$

que en cierto dominio son uniformes finitas y continuas, sin anularse su determinante funcional, y las ecuaciones que resultan de resolver las ecuaciones (4) con relación á $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$x_k = \varphi'_k(x'_1, x'_2, \ldots\ldots, x'_n), \qquad (k = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

satisfaciendo las funciones φ'_k á las mismas condiciones que las φ_i, y define el *Analysis situs* como la ciencia cuyo objeto es el estudio del grupo que forma el conjunto de las sustituciones que cambian $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ en $x'_1, x'_2, \ldots\ldots, x'_n$, según dichas condiciones, y de otros grupos análogos.

Una sustitución del grupo considerado transforma una variedad de m dimensiones en otra de m dimensiones, siendo la variedad transformada continua, ó finita ó limitada cuando lo sea la que se da; y para definir la propiedad de homeomorfismo, el Sr. Poincaré considera dos variedades V y V′ de igual número de dimensiones definidas respectivamente por las condiciones

$$\left.\begin{array}{ll} F_\alpha = 0 & (\alpha = 1, 2, \ldots\ldots, p), \\ \varphi_\beta > 0 & (\beta = 1, 2, \ldots\ldots, q), \end{array}\right\} \tag{5}$$

(*) H. Poincaré. *Analysis situs.* (Journ. d. l' Ecole Politech. II serie, 1.er Cahier).

y $$\left.\begin{array}{ll} F'_\alpha = 0 & (\alpha = 1, 2, \ldots\ldots, p), \\ \varphi'_\beta > 0 & (\beta = 1, 2, \ldots\ldots, q), \end{array}\right\} \qquad (5 \text{ bis.})$$

suponiendo que se puede hacer corresponder á un punto $x_1, x_2, \ldots$ x_n de la variedad V, un punto $x'_1, x'_2, \ldots\ldots, x'_n$ de la variedad V′, de modo que se tenga

$$x'_k = \psi_k(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots\ldots, n). \qquad (6)$$

Esto sentado, si tenemos el dominio D definido por las desigualdades

$$F_\alpha > -\varepsilon, \quad F_\alpha < \varepsilon, \quad \varphi_\beta > 0,$$

la variedad V se halla por completo contenida en el dominio D, suponiéndose que *en el dominio* D las funciones φ_k son finitas, continuas y uniformes, sin ser en ningún caso nulo su determinante funcional.

Si ahora resolvemos las ecuaciones (6), hallaremos

$$x_k = \psi'_k(x'_1, x'_2, \ldots\ldots, x'_n) \quad (k = 1, 2, \ldots\ldots, n). \qquad (7)$$

Consideremos enseguida el dominio D′ definido por las desigualdades

$$F'_\alpha > -\varepsilon, \quad F'_\alpha < \varepsilon, \quad \varphi'_\beta > 0,$$

en el qne las funciones ψ'_k son también finitas, continuas y uniformes, con derivadas continuas, no siendo nulo su determinante funcional. Entonces á todo punto de V corresponde uno y sólo un punto de V′ é inversamente. A toda variedad de W contenida en V corresponderá una variedad W′ de igual número de dimensiones, contenida en V′. Si W es continua, finita ó ilimitada, también lo será W′ é inversamente.

Cuando todas estas condiciones se verifican, se dice que las dos variedades son equivalentes, y se llaman *homeomorfas*, es decir, de igual forma.

§ 3.º Nueva definición de las variedades

112. Continuación analítica. Sean las n ecuaciones

$$x_1 = \theta_1(y_1, \ldots\ldots, y_m), \quad x_2 = \theta_2(y_1, \ldots\ldots, y_m), \ldots\ldots,$$
$$x_n = \theta_n(y_1, \ldots\ldots, y_m), \qquad (8)$$

que pueden representar una variedad de m dimensiones, si las y se consideran como independientes.

También se tendrá una variedad de m dimensiones, si se adjuntan á las ecuaciones (8) cierto número de desigualdades de de la forma

$$\psi(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m) > 0,$$

que limitan el campo de variación de las y.

Supongamos que las funciones θ son finitas y continuas; pero sin restringir la generalidad, puede suponerse que las funciones sean analíticas; pues si las funciones θ son finitas y continuas, se podrán obtener funciones analíticas θ' que difieran de las θ en tan poco como queramos.

Supondremos además que no se anulan simultáneamente los determinantes funcionales de m de las funciones θ con relación á las y.

Se obtendrá una variedad que no difiera de la primera sustituyendo las y en las ecuaciones (8) por m funciones analíticas cualesquiera de m variables $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_m$.

El alcance de esta definición se extiende por el procedimiento de la continuación analítica.

Consideremos dos variedades V y V′ definidas por ecuaciones análogas á las (8) y sean respectivamente para V y V′ las ecuaciones

$$x_i = \theta_i(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m), \quad x_i = \theta'_i(y'_1, y'_2, \ldots\ldots, y'_m).$$

Puede suceder que dichas dos variedades tengan una parte común V″ también de m dimensiones, es decir que todos los puntos de V″ pertenezcan simultáneamente á V y á V′. Entonces las y, en el interior de V″, serán funciones analíticas de V y de V′ é inversamente: y se dirá que las dos variedades V y V′ son *la continuación analítica*, la una de la otra.

Podremos de esta manera formar una cadena continua de variedades

$$V_1, V_2, \ldots\ldots, V_n$$

tales, que cada una sea la continuación analítica de la anterior, existiendo entre dos variedades consecutivas una parte común, á la que llama el Sr. Poincaré una *cadena continua.*

Puede suceder que la cadena sea cerrada, es decir, que V_n no difiera de V_1.

Se puede tener también una red de variedades, ó un conjunto de éstas tal, que cada una sea la continuación de otras varias, pudiéndose pasar de una cualquiera de entre ellas á otra también cualquiera por continuación analítica, lo que se llama *una red continua*.

Expuestas estas definiciones, bastará añadir que el Sr. Poincaré demuestra la mayor extensión de esta definición respecto á la primera, de manera que toda variedad que satisface á la primera definición, satisface á la segunda, sin verificarse la recíproca. Nos bastará resumir su razonamiento, diciendo que parte de n ecuaciones de la forma $y_k = F_k(x_1, \ldots\ldots, x_n)$; y por ser las F funciones holomorfas de las x, cuyo determinante funcional no se anula, se pueden resolver respecto á las x, resultando $x_i = \theta_i(y_1 \ldots\ldots, y_n)$.

Considerando una variedad V que satisface á las condiciones (1) de la primera definición y las $n-p$ funciones $F_{p+1}, F_{p+2}, \ldots$, F_n holomorfas respecto á las x. Las somete á la condición de que si $x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots, x_n^0$ es un punto cualquiera M_0 de la variedad V, el determinante funcional de las n funciones F no se anula para $x_i = x_i^0$, lo que es posible, y que $F_{p+1}, \ldots\ldots, F_n$

se anulen en dicho punto. Entonces se puede resolver las ecuaciones $y_k = F_k$ con relación á las x, que se expresarán por series ordenadas según las potencias de las y; y con las ecuaciones $x_i = \theta_i$ y las desigualdades $\lambda_k(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) > 0$, que son las condiciones por satisfacer, para que las series sean convergentes; haciendo enseguida $y_1 = y_2 = \ldots\ldots y_p = 0$, las p primeras ecuaciones propuestas no difieren de las p ecuaciones (1), y las funciones θ_i sólo dependen de $n - y = m$ variables, y son de la forma (8). Entonces el conjunto de las relaciones

$$x_i = \theta_i, \quad \varphi_\beta > 0, \quad \lambda_k(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) > 0$$

representará una variedad v, que quedará definida de la segunda manera, y que no difiriendo de

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0, \quad \lambda_k > 0,$$

formará parte de V. El punto M_0, que es un punto cualquiera de V, forma parte de v; y se podrá construir alrededor de un punto cualquiera de V una variedad análoga á v.

113. Variedades opuestas. Definida una variedad V de la primera manera; si dos de las ecuaciones que la definen se permutan, se dirá que el sistema de relaciones no representa ya dicha variedad, sino una *variedad opuesta* á V. Y si la variedad se halla definida de la segunda manera; sustituyendo las y por m funciones analíticas de las m nuevas variables $z_1, z_2, \ldots\ldots z_m$ tales, que se tenga

$$x_i = \theta'_i(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_m);$$

estas ecuaciones representarán todavía V ó la variedad opuesta; y supuesto que el determinante funcional Δ de las y respecto á las z no se anula, este conservará el mismo signo; y se convendrá en decir que si Δ es positivo ó negativo, las nuevas ecuaciones representarán la variedad V ó la opuesta.

§ 4.° Variedades uniláteras y biláteras

Para definir de una manera general una variedad unilátera, consideremos, siguiendo la exposición del Sr. Picard, en su *Traité d' Analyse*, en la proximidad de un punto A, que suponemos no se halle en una frontera, una representación paramétrica. Podremos deducir de esta representación, entre las coordenadas $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ de un punto cualquiera suficiente próximo de A, m relaciones de la forma

$$F_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0, \ldots\ldots,$$
$$F_m(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0,$$

siendo las F holomorfas alrededor de las coordenadas $x_1^0, \ldots\ldots x_n^0$ de A. Consideremos además $n - m - 1$ formas cuadráticas homogéneas en $x_1 - x_1^0, \ldots\ldots, x_n - x_n^0$, definidas y linealmente independientes; las supondremos positivas, designándolas por

$$\lambda_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n), \ldots\ldots, \quad \lambda_{n-m-1}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n).$$

Esto sentado, adjuntemos las $n - m - 1$ ecuaciones

$$\lambda_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n - m - 1),$$

en las que ε_i son cantidades muy pequeñas. Tendremos $n - 1$ ecuaciones que definen una curva cerrada C muy pequeña alrededor del punto A, situada en el espacio S_{n-m}, en la cual debe señalarse cierto sentido con una flecha.

Supongamos ahora que A se mueve en S_{n-m}. Por medio de prolongaciones paramétricas sucesivas y de las ecuaciones auxiliares $\lambda_i = \varepsilon_1$, en las cuales se sustituyen cada vez $x_1^0, \ldots,$ x_n^0 por las coordenadas actuales de A. Podemos considerar que el punto A, durante su movimiento, arrastre con él la curva cerrada C, que se deforma al mismo tiempo, para la cual la dirección de la flecha está señalada sin ambigüedad desde el origen.

En el caso de que vuelva A á su punto de partida, después de haber seguido en S_{m-n}, un camino cerrado cualquiera, sin atravesar ninguna frontera, colocándose la curva C en su posición inicial, de manera que *coincidan los dos sentidos* de la flecha, la variedad será *simple*, no recubriéndose. En otro caso, si para ciertos caminos cerrados, descritos por A, se obtiene á la llegada sentido opuesto de la flecha, la variedad es *doble*.

Podríamos también considerar en el espacio E_n una semirecta que pase por A, siendo A_1, A_2, ... , A_n los parámetros, de modo que sus ecuaciones sean

$$\frac{x_1 - x_1^0}{A_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{A_2} = \ldots\ldots = \frac{x_n - x_n^0}{A_n}$$

y con la condición además, de ser

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots\ldots + A_n dx_n = 0.$$

Podremos definir la normal á la variedad S_{n-1}, y considerar en ésta dos semi-direcciones. Entonces el espacio S_{n-1} será simple si, partiendo de una semi-normal determinada, se vuelve siempre al mismo tiempo con la misma dirección normal, y será doble en el caso contrario.

§ 5. Diferentes órdenes de conexión de los espacios de n dimensiones

Definiciones. Ya hemos visto que si z_1, z_2, ... , z_n son n variables que pueden tomar todos los valores reales desde $-\infty$ hasta $+\infty$, el campo n veces infinito de los sistemas de valores de estas variables se llama *espacio de* n *dimensiones*.

Un sistema de p ecuaciones entre las z determina un espacio de $n-p$ dimensiones *contenido* en el espacio E_n.

Se dice que un espacio E_{n-p} contenido en E_n es *linealmente conexo* ó que tiene la conexión de 1.ª *especie*, cuando dos de sus puntos pueden siempre unirse con una línea totalmente contenida en el mismo, es decir, cuando se puede transportar con continuidad un punto al otro, permaneciendo siempre en E_{n-p}.

Si $F(z_1, \ldots\ldots, z_n) = 0$ es una relación entre las z, siendo F continua y de un sólo valor para todos los sistemas de valores reales de las z, el espacio E_{n-1} representado por $F = 0$, separará en general el espacio E_n en dos regiones, para una de las que $F > 0$ y para otra $F < 0$. Si dichas dos regiones son linealmente conexas, se dirá que el espacio E_{n-1} es cerrado.

Se dirá que un espacio E_{n-p} tiene la *conexión superficial* ó de 2.ª *especie*, si cualquier línea cerrada contenida en el mismo puede siempre deformarse continuamente hasta coincidir con otra análoga, permaneciendo siempre en E_{n-p}. Diremos que E_{n-p} tiene la conexión de *especie* r^{sima}, si todo espacio cerrado de $r - 1$ dimensiones en él contenido, puede continuamente deformarse en otro análogo, sin cesar de pertenecer en todos los estados de su deformación, á E_{n-p}.

Teorema. *Si un espacio* E_{n-p} *no tiene la conexión de* r^{sima} *especie, se podrán designar en el mismo espacios cerrados de* $r - 1$ *dimensiones tales, que dos de ellos no sean deformables con continuidad el uno en el otro, ni cada uno reducirse á un punto, pero que otro espacio cerrado sea siempre deformable en uno de ellos ó en un punto. El número* m_r *de dichos espacios es constante. El número* $m_r + 1$ *se llama orden de conexión de* r^{sima} especie.

Para un espacio que tiene la conexión de r^{sima} especie, el número correspondiente m_r es cero, el orden de la conexión r^{sima} es 1.

El orden de la conexión lineal es 1 y el de la conexión superficial 2, en la porción del plano comprendida entre dos círculos interior el uno al otro.

Entre dos esferas, el orden de la conexión lineal es 1, el de la conexión superficial 1 y el de la espacial 2.

El espacio comprendido en un anillo ó toro, tiene la conexión lineal simple (de 1.er orden), la superficial doble (de 2.º orden), la espacial simple.

El espacio comprendido entre dos anillos, uno interior al otro, tiene la conexión lineal simple, la superficial doble y la espacial doble (*).

Los órdenes de conexión de un espacio ó variedad con relación á los espacios ó variedades de

$$1.\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ m-1$$

dimensiones se llaman *números de Betti*.

Los números de Betti para la región comprendida entre dos esferas son $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, para el interior de un toro, $P_1 = 2$, $P_2 = 2$, y para la región comprendida entre dos toros $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ (**).

Supongamos que en el espacio ó variedad E_n se puedan obtener $p_n - 1$ variedades cerradas de orden m,

$$V_1,\ V_2,\ \ldots\ldots,\ V_{p_m} - 1$$

que tengan las siguientes propiedades: Tomadas separadamente no forman frontera y, por una deformación continua no pueden reducirse una á otra; además, por k_1 variedades próximas á V_2, por k_2 variedades próximas á V_2, ... por $k_{p_m} - 1$ variedades próximas á $V_{p_m} - 1$ no se puede hacer pasar una variedad S_{m+1} completamente contenida en E_n, de la cual $k_1 + k_2 + \ldots + k_{p_m} - 1$ formen una *frontera completa*, cualesquiera que sean los números k_1, k_2, ... (las variedades son de igual sentido).

Esto sentado, diremos que el orden de conexión de E_n con relación á las variedades de m dimensiones contenidas en esta variedad es p_m, si, habiéndose obtenido las $p_m - 1$ variedades precedentes, cuyo conjunto no forma una frontera completa en el sentido general según el que se ha definido, se puede siempre, adjuntándola una variedad cerrada $p_m^{\text{ésima}}$ de orden m, á saber V, contenida en E_m, determinar los enteros k de manera que el conjunto formado por esta variedad sola y por k_1 variedades próximas á V_1, por k_2 variedades próximas á V_2, ..., por $k_{p_m} - 1$ variedades próximas á $V_{p_m} - 1$, forme una frontera completa.

(*) Poincaré *Analysis situs*, pág. 21. (**) *G. Loria*. Repert. d. Mat. II p. 794.

Esta definición se halla justificada por el siguiente lema: Si en una variedad E_n un sistema A, juntamente con otro sistema C, formados los dos de variedades cerradas de m dimensiones, forma una frontera completa; y si otro sistema B de variedades cerradas de m dimensiones forma con C una frontera completa, se puede afirmar que el conjunto de las variedades no comunes con A y B forma una frontera completa en E_n, es decir, que existe una variedad de orden $m+1$ contenida en E_n sobre la cual este conjunto forma frontera completa.

Sean, en efecto, S_{m+1} y S'_{m+1} dos variedades de $m+1$ dimensiones contenidas en E_n y en las cuales A y C por una parte, B y C por otra, formen respectivamente frontera. Unamos un punto de S_{m+1} á un punto de S'_{m+1} por una línea continua, y consideremos una variedad de orden $m+1$ suficientemente pequeña, moviéndose á lo largo de esta línea. Esta variedad engendrará otra de orden $m+1$, que reunirá, de una manera continua, las dos variedades S_{m+1} y S'_{m+1}, formando una sola S''_{m+1} en la que A y C por una parte, B y C por otra, formarán frontera. Toda curva cerrada perteneciente á S''_{m+1} cortará al conjunto de las variedades no comunes á A y B en un número par de puntos.

Demostrado este lema, el Sr. Picard demuestra que: Si V_1, V_2, ... V_{p_m} expresan p_m variedades cerradas, en una variedad E_n, cuyo orden de conexión con relación á las variedades de m dimensiones en p_m, se podrán obtener p_m números enteros k_1, k_2, ... k_{p_m} tales, que el conjunto formado por las variedades k_1V_1, k_2V_2, ... $k_{p_m}V_{p_m}$ forme frontera completa. (*).

§ 6.° Representaciones de las variedades

114. Representación geométrica. Consideremos en el espacio ordinario cierto número de poliedros

$$P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n.$$

(*) *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes*, p. 30-31.

Podemos suponer que existe en un espacio de cuatro dimensiones cierto número de variedades de tres dimensiones

$$Q_1, Q_2, \ldots\ldots, Q_n$$

respectivamente homeomorfas con $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$.

Sean C_1 una cara del poliedro P_1 y Φ_1 el conjunto de puntos de la frontera de Q_1 correspondientes á los diversos puntos de C_1, y análogamente C_2 una cara de P_2, Φ_2 la *imagen* de esta cara en la frontera de Q_2. Puede suceder que Φ_1 coincida con Φ_2. En este caso, las dos variedades Q_1 y Q_2 son contiguas, y se pasa del interior de la una al interior de la otra, atravesando Φ_1. En este caso diremos que C_1 y C_2 son *conjugadas*.

Podrá suceder que C_1 y C_2 pertenezcan á un *mismo* poliedro P_1. Entonces la variedad de dos dimensiones Φ_1, que no difiere de la variedad de dos dimensiones Φ_2, separará entre sí dos partes de la variedad Q_1.

Por ejemplo, si consideramos un rectángulo ABCD y un toro, en el que hacemos dos cortes, á saber: una circunferencia meridiana y un paralelo, cuyo punto de intersección es H, la superficie del toro entonces será homeoforma con el rectángulo. Los dos bordes del corte formado por el meridiano, corresponderán á los dos lados AB y CD del rectángulo, y los bordes formados por el paralelo corresponderán á los lados AD y BC. El rectángulo corresponde al poliedro P_1, el toro seccionado á la variedad Q_1, los lados AB y CD á las caras C_1 y C_2, los cortes de la sección meridiana á las variedades Φ_1 y Φ_2, que coinciden.

Supongamos ahora que entre las caras de n poliedros P_i existan algunas que sean conjugadas dos á dos y que otras queden libres.

Sea la variedad total V formada por el conjunto de las variedades Q_i. Como varias de éstas son contiguas, podrá hacerse que la variedad V sea continua, lo que suponemos. Si entre las caras P_i no hay ninguna *libre*, la variedad V será cerrada. En el caso contrario, los puntos correspondientes á las caras que permanezcan libres formarán la frontera completa de V.

Se ve que el conocimiento de los poliedros P_i y del modo de conjugación de sus caras dan, en el espacio ordinario, una imagen de la variedad V.

A dos caras conjugadas corresponde, por definición, una misma variedad de dos dimensiones interior á V. Puede hacerse que á varias aristas de un poliedro P corresponda una línea interior á V, ó que á varios vértices de estos poliedros corresponda un mismo punto en el interior de V. Diremos entonces que estas aristas ó estos vértices pertenecen á un mismo ciclo.

Veamos cómo se forman estos ciclos.

Sea A_1 una arista C'_1 una de las dos caras que pasan por A'_1, C_2 la conjugada de C'_1. A_2 la arista de C_2 que corresponde á A_1; C'_2 otra cara que pasa por A_2; C_3 la conjugada de C'_2, A_3 la arista correspondiente á la arista A_2, etc. Se terminará cuando se llegue á una cara libre ó se haya vuelto á la arista A_1. Las aristas A_1, A_2, A_3, ... forman un ciclo.

Sea con respecto á los vértices S_1 un vértice, C'_1 una de las caras que pasan por él, C_2 la conjugada de C'_1; S_2 el vértice correspondiente á S_1; C'_2 una de las caras que pasan por S_2, ... S_1, S_2, S_3, ... pertenecen á un ciclo. (*Analysis Situs*, páginas (47 y 48).

Ejemplo. Consideremos el cubo ABCD'A'B'C'D' en el que existe el siguiente modo de conjugación

$$ABCD \equiv B'D'C'A', \quad ABB'A \equiv DD'C'C, \quad ACC'A' \equiv DD'B'B.$$

Se obtiene: 1.º cuatro ciclos de aristas

$$AB \equiv B'D' \equiv C'C, \qquad AA' \equiv C'D' \equiv DB,$$

$$AC \equiv DD' = B'A', \qquad CD \equiv BB' \equiv A'C,$$

2.º, dos ciclos de vértices

$$A \equiv B' \equiv C' \equiv D, \qquad B \equiv D' \equiv A' \equiv C.$$

Representación por un grupo discontinuo. Sean $(x, y, z,)$

un punto del espacio ordinario y una serie de sustituciones que cambian respectivamente x, y, z en

$$\begin{array}{lll}\varphi_1(x, y, z), & \psi_1(x, y, z), & \chi_1(x, y, z),\\ \varphi_2(x, y, z), & \psi_2(x, y, z), & \chi_2(x, y, z),\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_n(x, y, z), & \psi_n(x, y, z), & \chi_n(x, y, z).\end{array}$$

Supongamos que el conjunto de estas sustituciones forme un grupo discontinuo. El espacio se dividirá en una infinidad de dominios D_0, D_1, D_2, ... ; de manera que á cada dominio D_i corresponda una sustitución del grupo S_i que cambie D_0 en D_i.

Consideremos una superficie Σ que forme una parte de la frontera de D_0, separando este dominio del D_i. La sustitución S_i^{-1} inversa de S_i cambia D_i en D_0; y como los puntos de Σ pertenecen á la frontera de D_i, la transformada de la superficie Σ será otra parte de la frontera de D_0. La frontera de D_0 se halla dividida en porciones de superficie conjugadas dos á dos, de manera que cada una será la transformada de su conjugada por una sustitución del grupo.

El dominio D_0, con su frontera dividida así, será homeomorfa á un poliedro cuyas caras serán conjugadas dos á dos; y se podrá entonces hacer corresponder á este poliedro, y por consiguiente, al dominio D_0, una variedad cerrada de tres dimensiones situada en el espacio de cuatro dimensiones, que se obtendrá transportando D_0 al espacio de cuatro dimensiones, y deformando después este dominio, hasta que se puedan hacer *ajustarse* la una con la otra las porciones conjugadas de la frontera.

Ejemplo. Sea el grupo formado por las tres sustituciones

$$\left.\begin{array}{l}(x, y, z;\ x+1, y, z), \quad (x, y, z;\ x, y+1, z),\\ (x, y, z;\ \alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y, z+1),\end{array}\right\} \quad (1)$$

siendo α, β, γ, δ enteros tales, que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Este grupo $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ es discontinuo. Para demostrarlo, basta ver cómo se hallan distribuídos en el espacio los transformados de un mismo punto

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Desde luego, todos los transformados de este punto, se hallarán comprendidos en la fórmula

$$x = a + k, \quad y = b + k_1, \quad z = c, \tag{2}$$

por una combinación cualquiera de las dos primeras sustituciones, expresando k y k_1 dos enteros; y es fácil ver que estas dos sustituciones son permutables.

Transformemos el conjunto de los puntos (2) por la tercera sustitución. Tendremos (3)

$$x = \alpha(a + k) + \beta(b + k_1), \ \ y = \gamma(a + k + \delta(b + k_1), \ \ c = z + 1.$$

Hagamos para abreviar,

$$\alpha a + \beta b = a_1, \qquad \gamma a + \delta b = b_1;$$

de manera que el punto (a_1, b_1) sea el transformado del (a, b) por la sustitución

$$(x, y; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) \equiv s.$$

Podemos sustituir las ecuaciones (3) por las siguientes:

$$x = a + k', \quad y = b_1 + k'_1, \quad z = c + 1, \tag{4}$$

siendo k' y k'_1 dos nuevos enteros. Aplicando á estos puntos las dos primeras sustituciones, se obtienen nuevamente los mismos puntos.

Apliquémosles la tercera sustitución. Sea

$$a_2 = \alpha a_1 + \beta b_1, \qquad b_2 = \gamma a_1 + \delta b_1,$$

de manera que el punto (a_2, b_2) sea el transformado por s del (a_1, b_1). Entonces los transformados de los puntos (4) por la tercera sustitución se hallarán comprendidos en la fórmula

$$x = a_2 + k'', \quad y = b_2 + k''_1, \quad z = c + 2,$$

siendo k'' y k''_1 dos enteros.

En general, supongamos que los transformados sucesivos del punto (a, b) por la sustitución s sean (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... (a_n, b_n), y de igual manera que los transformados por la sustitución inversa sean (a_{-1}, b_{-1}), (a_{-2}, b_{-2}), ... Entonces todos los transformados del punto (a, b, c) por las sustituciones del grupo (1) estarán dados por la fórmula

$$x = a_n + k, \quad y = b_n + k_1, \quad z = c + n,$$

siendo n, k y k_1 números enteros arbitrarios; y se ve que el grupo derivado de las dos primeras sustituciones es permutable á la tercera.

El dominio fundamental D_0 es un cubo cuyo lado es 1 y limitado por los seis planos $x; y; z = 0; 1$.

El caso más sencillo es aquél en el cual $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$, porque entonces las tres sustituciones se reducen á

$$(x, y, z; x + 1, y, z; x, y + 1, z; x, y, z + 1).$$

Cada una de ellas cambia una de las caras del cubo en la opuesta. Pero la manera de subdividirse la superficie del cubo D_0 en regiones conjugadas, no es tan sencilla. Sea por ejemplo,

$$\alpha = \beta = \delta = 1, \qquad \gamma = 0.$$

Cada una de las caras paralelas al eje de las z será todavía conjugada con la cara opuesta; pero para las caras $z = 0$, $z = 1$ perpendiculares al eje de las z, habrá más complicación.

Supongamos que los puntos A, B, C, D y A′, B′, C′, D′ tengan las coordenadas

A	0	0	0	A′	0	0	1
B	0	1	0	B′	0	1	1
C	1	0	0	C′	1	0	1
D	1	1	0	D′	1	1	1

Cada una de las caras ABCD, A′B′C′D deberá dividirse en dos triángulos, á saber: ABC y BCD por una parte, A′D′C′ y

A'B'D' por otra, hallándose expresada la ley de conjugación de las caras por las relaciones

$$ACC'A' \equiv BDD'A', \qquad CDD'C' \equiv ABB'A',$$
$$ABC \equiv A'D'C', \qquad BCD \equiv B'A'D'.$$

Más generalmente, las caras paralelas al eje de las z permanecerán conjugadas dos á dos; pero las caras perpendiculares al mismo deberán quedar descompuestas en polígonos más pequeños, tanto más numerosos cuanto más grandes sean los números α, β, γ, δ, y que serán conjugadas dos á dos, según una ley más ó menos complicada.

Estas consideraciones conducen inmediatamente al concepto del grupo g formado por *el conjunto de todas las sustituciones que se efectúan en las funciones* $F_1, F_2, \ldots\ldots F_\lambda$ *de las coordenadas* $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ *de un punto* M *de una variedad* V *definida por las relaciones* $f_\alpha = 0$, $\varphi_\beta > 0$, *cuando el punto* M *describe todos los contornos cerrados que pueden trazarse en una variedad* V, *partiendo del punto inicial* M_0. De este grupo se pasaría á la consideración del grupo isomorfo holoédrico, con el anterior, que se llama *fundamental*, y á cada una de cuyas sustituciones principales $S_1, S_2, \ldots\ldots$ corresponde un *contorno cerrado fundamental* $C_1, C_2, \ldots\ldots$, lo que conduce á los grupos fuschianos y á otras numerosas aplicaciones que no son objeto del presente tratado general, y que se hallan desarrolladas en la obra citada del Sr. Poincaré, en particular, y, en general, en los tratados de las funciones que en la actualidad se publican.

FIN DEL TOMO SEGUNDO

ADICIONES

Al § 1.° del cap. I, libro 2.° I. Un método empleado para obtener la suma de una serie consiste en la diferenciación ó integración.

Ejemplo 1.° *Sumar la serie*

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\ldots$$

Solución. Si representamos por $f(x)$ la suma que se busca, tendremos

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^{n-1} + \ldots\ldots$$

ó $f'(x) = \frac{1}{1-x}$; luego $f(x) = -\log(1-x)$.

Ejemplo 2.° *Sumar la serie*

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots + nx^{n-1} + \ldots\ldots$$

Solución. Esta ecuación da

$$\int f(x)dx = x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$$

$$+ x^n + \ldots\ldots + C = \frac{1}{1-x} + C.$$

Derivando los dos miembros, se tiene $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; luego

$$\frac{1}{(1-x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots + nx^{n-1} + \ldots\ldots$$

Ejemplo 3.° *Sumar la serie*

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{15}}{15} + \ldots\ldots$$

Solución. Procediendo como el problema 1.°, se tiene

$$f(x) = \int \frac{x^2}{1 - x^4}\, dx.$$

Además

$$\frac{x^2}{1 - x^4} = \frac{1}{4(1 - x)} + \frac{1}{4(1 + x)} + \frac{1}{2(1 + x^2)},$$

luego

$$f(x) = -\frac{1}{4} \log (1 - x) + \frac{1}{4} \log (1 + x) + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x.$$

ó $$f(x) = \frac{1}{4} \log \frac{1 + x}{1 - x} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x.$$

II. Otro método consiste en *obtener una ecuación diferencial que se sepa integrar.*

Ejemplo 1.° Sumar la serie

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \ldots\ldots$$

Solución. Se tiene

$$y' = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots\ldots \quad \text{ó} \quad y' = y, \quad \frac{y'}{y} = 1.$$

Esta ecuación da $\log y = x + l\mathrm{C}$ ó $y = \mathrm{C}e^x$.

La función y debe reducirse á 1 cuando $x = 0$; luego $y = e^x$.

Ejemplo 2.°. *Sumar*

$$y = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} x^4 + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} x^6 + \ldots\ldots \qquad (1)$$

Solución. Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{1 \cdot 3}{2} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4} x^5 + \ldots\ldots$$

$$\int \frac{1}{x} dy = x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^7 + \ldots\ldots$$

Y en virtud de (1) será $\int \frac{1}{x} dy = x + xy.$

Diferenciando, tendremos $\frac{1}{x} dy = (1 + y) dx + x dy.$

Y de $$\frac{dy}{1+y} = \frac{xdx}{1-x^2}$$

resulta $$\log (1 + y) = -\frac{1}{2} \log (1 - x^2).$$

Por último: $y = -1 + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Ejemplo 3.º Sumar las series

$$y = z \cos \varphi + \frac{1}{2} x^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{3} x^3 \cos 3\varphi + \ldots\ldots$$

$$z = x \operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} 2\varphi + \frac{1}{3} x^3 \operatorname{sen} 3\varphi + \ldots\ldots$$

Solución. Según la fórmula de Moivre, se tiene

$$y + zi = xe^{\varphi i} + \frac{1}{2} x^2 e^{2\varphi i} + \frac{1}{3} x^2 e^{3\varphi i} + \ldots\ldots;$$

derivando con relación á x, resulta:

$$y' + z' i = e^{\varphi i} + xe^{2\varphi i} + x^2 e^{3\varphi i} + \ldots\ldots = \frac{e^{\varphi i}}{1 - xe^{\varphi i}};$$

luego $\quad y + zi = -\log[1 - x(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)]$

$$e^{-y}(\cos z - i\,\mathrm{sen}\,z) = 1 - x(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$

Esta ecuación se divide en dos

$$e^{-y}\cos z = 1 - x\cos\varphi, \qquad e^{-y}\,\mathrm{sen}\,z = x\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

de donde

$$\mathrm{tg}\,z = \frac{x\,\mathrm{sen}\,\varphi}{1 - x\cos\varphi}, \quad e^{-2y} = 1 - 2x\cos\varphi + x^2;$$

$$z = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\,\mathrm{sen}\,\varphi}{1 - x\cos\varphi}, \quad y = -\frac{1}{2}\log(1 - 2x\cos\varphi + x^2).$$

Ejemplo 4.º Sumar las series

$$y_1 = \cos\varphi + x\cos 2\varphi + \ldots.., \qquad z_1 = \mathrm{sen}\,\varphi + x\,\mathrm{sen}\,2\varphi + \ldots..$$

Si se comparan con las del problema anterior, se tiene $y_1 = y'$, $z_1 = z'$ y, en virtud de las últimas fórmulas

$$y_1 = \frac{\cos\varphi - x}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}, \quad z_1 = \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}.$$

III. Un método muy fecundo para obtener la suma de una serie es el empleo de las integrales definidas. Sea

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.. + u_n + \ldots..$$

una serie convergente cuya suma se trata de obtener.

Si el término general u_n puede descomponerse en dos factores v_n, w_n de los que el uno es igual á una integral definida conocida, de modo que

$$w_n = \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx,$$

se tendrá

$$s = \int_\alpha^\beta dx[u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + \ldots.. + u_n f_n(x) + \ldots..].$$

Si pues, se puede valuar

$$\varphi(x) = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + \ldots\ldots + u_n f_n(x) + \ldots\ldots,$$

se tendrá:
$$s = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx.$$

Ejemplo 1.º Determinar

$$s = \cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\cos n\varphi + \ldots\ldots$$

Solución. Por ser

$$\int e^{-nx}\, dx = -\frac{1}{n} e^{-nx} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{n} = \int_0^\infty e^{-nx}\, dx$$

resulta

$$s = \int_0^\infty e^{-x} dx [\cos\varphi + e^{-x}\cos 2\varphi + e^{-2x}\cos 3\varphi + \ldots\ldots].$$

Pero la suma de la serie, entre paréntesis, es (II *prob. 4.º)*

$$\frac{\cos\varphi - e^{-x}}{1 - 2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x}};$$

luego
$$s = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\cos\varphi - e^{-2x}}{1 - 2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x}}\, dx.$$

La integral indefinida es

$$+\frac{1}{2}\log(1 - 2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x});$$

luego:

$$s = \frac{1}{2}\log(2 - 2\cos\varphi) \quad \text{ó} \quad s = -\log\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\varphi\right).$$

Adición al capítulo II, libro 2.º Aunque en el tomo IV se tratará más extensamente de la continuidad y discontinuidad de las funciones, así como de alguno de sus caracteres principales, conviene enunciar aquí unos preliminares á la par que complemento de lo expuesto en este tomo.

Hasta la epoca de Lagrange, para los grandes geómetras, una función arbitraria era siempre la función arbitraria susceptible de representarse por un trazo continuo. Pero Dirichlet halló fortuitamente la función

$$\chi(x) = \lim_{m=\infty} \left[\lim_{h=\infty} (\cos m!\, \pi x)^{2n} \right]$$

cuyos puntos son todos puntos de discontinuidad, puesto que es nula para x irracional é igual á 1 para x racional; y Fourier afirmó, el primero, que una función puede representarse entre 0 y 2π por un desarrollo en serie trigonómetrica.

Dirichlet completó la obra de Fourier estableciendo para la convergencia de las series de Fourier sus célebres *condiciones*, á saber:

1.° *La función por desarrollar es finita y uniforme.*

2.° *No tiene un número infinito de discontinuidades; y en los puntos de discontinuidad converge hacia la media de los dos valores límites de la función tomados á uno y otro lado de este punto.*

3.° *No tiene un número infinito de máximos ni de mínimos.*

Riemann demostró con un ejemplo cómo el empleo de las series permite construir funciones cuyos puntos de discontinuidad formen un conjunto por todo denso.

Sea (x) la diferencia entre x y el número entero más próximo. Si x es igual á un entero más $\frac{1}{2}$, se hace $(x) = 0$. La función así definida se llama *exceso de x;* es una función que admite un desarrollo de Fourier, según las líneas trigonométricas de los múltiplos de $2\pi x$, que es siempre convergente. Consideremos la función, como lo hace Riemann,

$$f(x) = \frac{(x)}{1^2} + \frac{(2x)}{2^2} + \frac{(3x)}{3^3} + \ldots\ldots = \sum_{1,\infty} \frac{(nx)}{nn}.$$

Se ve que si x no es de la forma $\frac{2p+1}{2n}$ (siendo n y $2p+1$ primos entre sí) que $f(x)$ es continua. Al contrario, si x es de la forma indicada, cuando x tiende, creciendo hacia $\frac{2p+1}{2n}$, $f(x)$ tiende hacia un límite $f\left(\frac{2p+1}{2n}-0\right)$, que es

$$f\left(\frac{2p+1}{2n}-0\right)=f\left(\frac{2p+1}{2n}\right)-\frac{\pi^2}{16n^2};$$

cuando x tiende hacia $\frac{2p+1}{2n}$ decreciendo, $f(x)$ tiende hacia

$$f\left(\frac{2p+1}{2n}+0\right)=f\left(\frac{2p+1}{2n}\right)-\frac{\pi^2}{16n^2}.$$

En todo intervalo $f(x)$ tiene puntos de discontinuidad.

A estas consideraciones podemos añadir que Hankel en su memoria ya citada (pág. 15-19) mediante el método, llamado *principio de la condensación de las singularidades*, dió medios de construir, conociendo funciones f_n que presentan cierta singularidad en puntos aislados A_n una función que presente esta singularidad en todo intervalo.

Distingue en su memoria: I. las funciones continuas con un número finito de oscilaciones, á las que pertenecen todas las algebráicas y la mayor parte de las funciones analíticas, con excepción de algún punto crítico, como por ejemplo $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ que á excepción del punto $x = 0$, tiene una derivada finita y determinada.

Así siendo $\varphi(y) = y^{\frac{2}{3}}$, el desarrollo correspondiente

$$f(x) = \Sigma \frac{(\text{sen } nx\pi)^{\frac{2}{3}}}{n^s}$$

no tiene derivada finita, pues

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}=Q+\frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\mu^{s-\frac{2}{3}}}\Sigma\frac{1}{r^{s-\frac{2}{3}}}$$

siendo $Q=\lim\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$, crece siempre al disminuir ε.

La función $f(x)=\int_a^x\frac{dy}{1+e^{\frac{1}{y}}}$ conduce á

$$\lim\frac{f(\varepsilon-f(0)}{\varepsilon}=\begin{cases}0\\1\end{cases},$$

según que la variable se aproxima á cero por la derecha ó por la izquierda. La función bajo el signo $\int$ es finita para todos los valores reales de y, excepto para $y=0$, en cuyo punto es indeterminada.

Respecto á las funciones discontinuas: Una función discontinua en $x=a$, tiene en este punto saltos mayores que una cantidad finita σ. Distingue la *discontinuidad puntual* de la *diseontinuidad lineal.* En el primer caso, las funciones tienen intervalos finitos en que son continuas y en el segundo son discontinuas en infinitos puntos de un segmento finito.

Las dos clases de funciones son: *Las funciones punteadas discontinuas* y *las funciones lineales discontinuas.*

Sea $\varphi(y)$ una funcion continua desde $y=-1$ hasta $y=+1$ exceptuado el punto $y=0$, en el que toma el valor límite $+1$ ó -1, según que se aproxima á dicho punto por la derecha ó la izquierda.

La serie correspondiente

$$f(x)=\Sigma\frac{\varphi(\text{sen } nx\pi)}{n^s}$$

es continua para todos los valores irracionales de x, teniendo en estos puntos una derivada, y es discontinua en los puntos racionales.

Un ejemplo clásico de función discontinua es el siguiente:

$$\log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \ldots\ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \ldots\ldots \qquad (1)$$

con las condiciones $|z| \leqq 1$, $z \neq -z$. Bajo estas condiciones el primer miembro nos ofrece la representación del logaritmo que, partiendo del valor 0, para $z = 0$, varía de una manera continua en el interior del círculo de convergencia y aún en la circunferencia, evitando el punto $z = -1$.

Hagamos $z = e^{ix}$, suponiendo x real y comprendido entre $-\pi$ y $+\pi$ (con exclusión de estos valores). Se puede escribir

$$z = \cos x + i \operatorname{sen} x; \quad \text{luego} \quad z^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx.$$

El punto que corresponde á z, toma todas las posiciones posibles en el círculo de convergencia, excepto la posición $z = -1$; y se tiene

$$\log(1+z) = \Sigma(-1)^{n+1}\frac{\cos nx + i \operatorname{sen} nx}{n}.$$

Además, se puede escribir

$$1 + z = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right);$$

y puesto que x se halla comprendida entre $-\pi$ y $+\pi$, $\cos\frac{x}{2}$ es positivo; luego las diferentes determinaciones de $\log(1+z)$ se hallan comprendidas en la fórmula

$$\log(1+z) = \log \text{ real de } \left(2\cos\frac{x}{2}\right) + i\left(\frac{x}{2} + 2k\pi\right),$$

siendo k entero.

Esto sentado, si igualamos los coeficientes de i en los dos miembros de la ecuación (1), tendremos en la hipótesis, $-\pi < x < \pi$:

$$(2) \qquad \frac{x}{2} + 2k\pi = \frac{\text{sen}\, x}{1} - \frac{\text{sen}\, 2x}{2} + \ldots\ldots \qquad (-\pi < x < \pi)$$

Todos los términos del segundo miembro de esta serie admiten el periodo 2π, pudiéndose considerar la serie como conocida para los valores de x comprendidos en los intervalos

$$\pi < x < 3\pi, \quad 3\pi < x < 5\pi, \ldots\ldots \quad \text{y} \quad -\pi > x > -3\pi, \ldots\ldots$$

Los términos de la serie son todos nulos para los valores de x iguales á $\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots\ldots -\pi, -3\pi, -5\pi, \ldots\ldots$ Se ve así que la serie $\Sigma(-1)^{n+1}\dfrac{\text{sen}\, nx}{n}$ es convergente, cualquiera que sea x, pero representa una función discontinua.

P. du Bois Reymond, cuya teoría de las pantaquias es análoga á la de los conjuntos de Cantor, en su obra *Théorie générale des Fonctions*, introduce la denominación de *ortoidía*, para expresar la diferenciabilidad de las funciones, distinguiendo los valores de éstos como directos é indirectos: Así $f(x)$ será simplemente el valor de la función que la fórmula hace corresponder á x. Pero á estos hay que agregar otros que deben considerarse como valores, no solamente porque las aplicaciones conducen á ellos, sino porque se les juzga como tales desde un punto de vista abstracto, y aparecen cuando se forma el valor directo de $f(x)$ para un punto $x_1 \gtrless x$; y enseguida se intercala una serie de valores $x_2, x_3, \ldots\ldots$ entre x_1 y x que se aproximan indefinidamente á x, buscándose á continuación el límite de la serie $f(x_1), f(x_2), \ldots$, y llegándose de un modo indirecto á valores de $f(x)$ que pueden diferir de los que se obtienen directamente, por lo que se les llama valores *indirectos* de función.

Una función racional y entera de x, no tiene valores distintos de los directos. No sucede lo mismo á las funciones sen x, e^x y otras análogas.

Sean las funciones anortoides: 1.ª $f(x) = 3x$ para los valores $x = 0,3$; $0,33$, $0,333$; etc. y $f(x) = 0$ para $x = \frac{1}{3}$.

2.ª $f(x)$, que toma para $x = \frac{z}{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots\ldots p_n^{r_n}}$ los valores $\frac{1}{p_1 \ldots\ldots p_n}$ y $f(x) = 0$ para los demás valores de x.

3.ª $f(x)$ que toma para $x = \frac{z}{p_1^{r_1} \ldots\ldots p_n^{r_n}}$ los valores $\frac{z}{p_1^{r_1} \ldots\ldots p_n^{r_n}}$ y $f(x) = 0$ para los demás valores de x.

Y sean las funciones ortoides

$$f(x) = \frac{1}{x},\ \operatorname{sen}\frac{1}{x},\ x \operatorname{sen}\frac{1}{x},\ \frac{1}{e^x},\ \frac{e^{1:x} - 1}{e^{1:x} + 1},$$

$$f(x) = \lim_{h=\infty} \frac{1 + hx}{1 + hx^2},\qquad f(x) = \operatorname{arc\,tg} hx.$$

La primera función tiene el valor directo cero para $x = \frac{1}{3}$; pero el límite de $f(0,3)$, $f(0,33)$, ... es 1, designándose un valor de función indirecta correspondiente á x por

$$\lim_{\varepsilon=0} f(x + \varepsilon).$$

En la 2.ª y 3.ª funciones anortoides y en todas las ortoides citadas, se presentan valores indirectos distintos de los directos, así como en la función anortoide

$f(x) = 1$, para todos los valores racionales de x.

$f(x) = 0$, para todos las valores irracionales de x.

En ésta á todo valor de x corresponden á la vez valores indirectos de 0 ó de 1.

Para la función 2.ª los valores indirectos son cero ó $\frac{1}{p_1 \ldots\ldots p_n}$, según que z es racional ó irracional.

En la función $f(x) = 1$, $f(x) = 0$ últimamente citada, el salto es 1, en la función 2.ª el salto es $\frac{1}{2}$.

Nota al § 4.º, cap. II, libro 2.º Un ejemplo muy importante de una función que no tiene derivada para infinitos puntos de un segmento finito es el propuesto por Hankel, y que se ha citado.

Sea $\varphi(y)$ una función que, para los valores de y comprendidos entre -1 y $+1$ (excepto para $y = 0$) es finita y continua, siempre inferior á un número A, y para $y = 0$ es cero. Haciendo

$$y = \text{sen}\,(xn\pi) \qquad (n = \textit{entero})$$

para todos los valores de x de forma racional $\frac{m}{n}$ $(m = \textit{entero})$ la y (y por consiguiente la φ) es cero, y para todas las x de otra forma la y tiene un valor distinto de cero comprendido entre -1 y $+1$.

Formemos la serie

$$f(x) = \Sigma \frac{\varphi\,(\text{sen}\; n\pi x)}{ns} \qquad (s > 1)$$

que es uniformemente convergente, por ser sus términos menores que los de $A\Sigma \frac{1}{n^s}$, que es convergente.

La función $f(x)$ es continua de x en todos los puntos x, excepto en los que corresponden á $y = 0$, en los cuales la φ no se ha supuesto continua, es decir, en los puntos de la forma $\frac{m}{n}$. Si admitimos que $\pi(y)$ es continua también en $y = 0$, entonces $f(x)$ es continua en todos los puntos x.

El número n en la expresión de $f(x)$ no es un número fijo, sino que depende del lugar del término que se considera, por lo que serán discontinuos algunos términos de la serie que se considera, en los puntos $\frac{m}{n}$, á saber, el n^{simo}, el $2n^{\text{simo}}$, etc., y por consiguiente la serie será discontinua. La serie será pues *discontinua en todos los puntos racionales* si se supone que $\varphi(y)$ es discontinua en $y = 0$, y será continua en todos los puntos, si $\varphi(y)$ es continua en $y = 0$.

Consideremos el valor de la serie para el valor x racional de la forma $\frac{\nu}{\mu}$. Todos los términos en cuyo índice es n múltiplo de μ son cero, por hipótesis, por lo que podemos suprimirlos y escribir

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{(\mu)} \frac{\varphi\left[\operatorname{sen}\left(n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)\right]}{n^s},$$

donde se expresa con $\Sigma_{(\mu)}$ la suma extendida á todos los valores de n, excepto para los múltiplos de μ. Dando un incremento h, tendremos

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} + h\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{(\mu)} \frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu} + h\right)\pi\right]}{n^s} + \frac{1}{\mu^s}\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi[\pm \operatorname{sen}(n\mu h\pi)]}{n^s},$$

donde debe considerarse el signo $+$, cuando $n\nu$ es par y el signo $-$, cuando $n\nu$ es impar. La relación incremental será pues,

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu} + h\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{h}$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_{(\mu)} \left\{\frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu} + h\right)\pi\right] - \varphi\left[\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right]}{hn^s}\right\} + \frac{1}{\mu^s}\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi[(-1)^{n\nu} \operatorname{sen}(n\mu h\pi)]}{hn^s},$$

mientras que en un punto x irracional, la expresión de la relación incremental es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_1^\infty \frac{\varphi[\operatorname{sen} n(x+h)\pi]-\varphi[\operatorname{sen} nx\pi]}{hn^s}.$$

Pero la existencia de la derivada de $f(x)$ en todos los puntos racionales x depende de la hipótesis hecha sobre la existencia de la derivada de $\varphi(y)$ en el punto $y=0$.

Si suponemos que la función $\varphi(y)$ tiene derivada finita para todas las y comprendidas entre -1 y $+1$, y también para $y=0$, entonces podremos formar la serie de las derivadas de los términos de la serie dada, y hallamos

$$\pi\sum_1^\infty \frac{\varphi'[\operatorname{sen} nx\pi]}{n^{s-1}}\cos nx\pi.$$

Para $s>2$, los términos de ésta son menores que los de la serie convergente $\pi A'\sum_1^\infty \frac{1}{n^{s-1}}$, en la que A' es el valor máximo que puede tener $\varphi'(y)$; y la serie de las derivadas, para $s>2$ es una serie uniformemente convergente, y, por las hipótesis hechas, representa la derivada de $f(x)$, siendo una función que admite derivada finita y determinada en todos sus puntos.

Pero si suponemos que $\varphi(y)$, *siendo siempre continua y admitiendo derivada para todos sus puntos, no admite derivada en* $y=0$, *oscilando en dicho punto la relación incremental de* $\varphi(y)$ *entre límites finitos, entonces podemos hacer ver que la* $f(x)$, *siendo siempre continua, como ya sabemos, no tiene derivada determinada en ningún punto racional, teniéndola en los puntos irracionales.*

En efecto, consideremos un punto x irracional y la serie de las relaciones incrementales

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi[\operatorname{sen} n(x+h)\pi]-\varphi[\operatorname{sen} nx\pi]}{hn^s},$$

que podemos escribir así:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\pi}{n^{s-1}} \frac{\varphi[\operatorname{sen} n(x+h)\pi] - \varphi[\operatorname{sen} nx\pi]}{\operatorname{sen} n(x+h) - \operatorname{sen} nx\pi}$$

$$\times \cos n\left(x+\frac{h}{2}\right)\pi \frac{\operatorname{sen} n\frac{h}{2}\pi}{n\frac{h}{2}\pi}.$$

Pero según la hipótesis hecha sobre la existencia de la derivada finita y determinada para $\varphi(y)$, en el caso de ser y distinta de cero, la cantidad

$$\frac{\varphi(y+k) - \varphi(y)}{k}$$

(que es igual al primer factor de cada término de la suma superior), teniendo por límite una cantidad finita para y distinta de cero, y oscilando entre límites finitos para $y = 0$, se conservará en un entorno conveniente del punto y (es decir para k menor que cierta cantidad determinada) menor que una cantidad A′; por lo que podemos decir que todos los términos de la última serie son menores, en valor absoluto, que los de la serie

$$\pi\, A' \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}},$$

qne es convergente para $s > 2$. La primera serie es pues uniformemente convergente en un contorno del punto x; y esto basta para concluir que el límite de dicha serie para $h = 0$, es igual á la serie de los límites; por lo que, para un valor irracional de x la serie dada tiene derivada finita y determinada.

Por el contrario, para un punto x racional, de la forma $\frac{\nu}{\mu}$, la relación incremental tiene la otra forma arriba escrita. Dicha expresión consta de dos partes: La primera es una Σ_{μ}, extendida desde $n = 1$ hasta $n = \infty$, debiéndose entender que se hallan suprimidos todos los términos correspondientes á los índices n múltiplos de μ, y la segunda parte es

$$\frac{1}{\mu^s}\sum_1^\infty \frac{\varphi[(-1)^{n\nu}\operatorname{sen}(n\mu h\pi)]}{h\, n^s}.$$

La primera parte puede considerarse como la relación incremental de la función

$$\psi(x) = \sum_{1(\mu)}^{\infty} \frac{\varphi[\operatorname{sen} nx\pi]}{n^s}$$

para $x = \frac{\nu}{\mu}$. Pero todos los términos de esta suma tienen derivada finita y determinada, porque, debiéndose excluir entre los valores de n los que son múltiplos de μ, el valor del argumento de φ será cero para algún valor de n. Sobre esta función puede repetirse exactamente el razonamiento hecho acerca del límite de la relación incremental de $f(x)$ para un valor irracional de x, y se deducirá que $\psi(x)$ tiene derivada determinada y finita. S pues nos ocupamos solo de la segunda parte de la relación incremental de $f(x)$, los términos de la serie pueden escribirse

$$\frac{1}{\mu^s}\left\{\frac{(-1)^{n\nu}\mu\pi}{n^{s-1}}\,\frac{\varphi[(-1)^{n\nu}\operatorname{sen} n\mu h\pi]}{(-1)^{n\nu}\operatorname{sen} n\mu h\pi}\,\frac{\operatorname{sen} n\mu h\pi}{n\mu h\pi}\right\}.$$

El primero de estos términos, es decir, el que corresponde á $n = 1$, es:

$$\frac{1}{\mu^s}\left\{(-1)^\nu\mu\pi\,\frac{\varphi[(-1)^\nu\operatorname{sen}\mu h\pi}{[(-1)^\nu\operatorname{sen}\mu h\pi}\,\frac{\operatorname{sen}\mu h\pi}{\mu h\pi}\right\},$$

siendo la cantidad entre paréntesis independiente de s.

Supuesto que no existe la derivada de $\varphi(y)$ en el punto cero, pero que la relación incremental $\frac{\varphi(y)}{y}$ pueda oscilar entre dos límites *finitos*, esto es, que se conserve menor que una cantidad

A en valor absoluto, se verificará pues, que uno cualquiera de los términos indicados será siempre menor en valor absoluto que $\frac{\pi A}{\mu^{s-1}} \frac{1}{n^{s-1}}$; de manera que la suma de todos los términos desde el 2.° en adelante, es decir, que comienza en $n = 2$, es menor que

$$\frac{A\pi}{\mu^{s-1}} \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}},$$

que por ser $s < 2$, es una serie convergente.

Podemos pues decir que la segunda parte de la expresión de la relación incremental de $f(x)$ es igual á

$$\frac{\pi}{\mu^{s-1}} \left\{ (-1)^{\nu} \frac{\varphi(y)}{y} \frac{\operatorname{sen} \mu h\pi}{\mu h\pi} + \varepsilon A \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} \right\},$$

haciendo $y = (-1)^{\nu} \operatorname{sen} \mu h\pi$, y siendo ε una cantidad comprendida entre -1 y $+1$. Pero $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}}$ disminuye indefinidamente al crecer s, y se puede hacer tan pequeña como se quiera, mientras que al disminuir h, la cantidad $\frac{\operatorname{sen} \mu h\pi}{\mu h\pi}$ se puede hacer diferente de 1 en tan poco como se quiera.

Se ve pues que podrá elegirse siempre s de manera que el primer término del paréntesis predomine sobre el segundo, es decir, que el signo de todo el paréntesis sea el del primer término, y que el valor de todo el paréntesis difiera en poco del valor del primer término. Y puesto que dicho primer término no tiende á ningún límite, lo mismo sucederá á toda la expresión. Luego en los puntos x racionales, la $f(x)$ no tiene derivada.

Para construir pues una función f(x) *sin derivada, basta construir una función* φ(y) *continua y finita en el intervalo* (-1, $+1$), *cero en el punto* y $= 0$, *con una derivada finita en dicho intervalo, excepto en el punto* y $= 0$, *en el cual oscila la relación incremental entre límites finitos.*

Un ejemplo de tal función es $\varphi(y) = y \operatorname{sen} \frac{1}{y}$, á la que se asigna el valor cero para $y = 0$. Se tiene entonces una función siempre finita y continua que admite derivada en todos los puntos, excepto en $y = 0$.

El valor incremental

$$\frac{h \operatorname{sen} \frac{1}{h}}{h} = \operatorname{sen} \frac{1}{h}$$

oscila entre -1 y $+1$, suponiendo $\varphi(0) = 0$.

Lo mismo se dirá de $\varphi(y) = y \operatorname{sen} [\log y^2]$.

Otros ejemplos de funciones continuas sin derivadas pueden verse en las obras citadas de los Sres. Darboux, Dini y Pascal.

Adición al número 75. Problema. *Hallar la derivada* n^{sima} de $y = e^{-x^2}$.

Tenemos $y = e^{-x^2}$ (1), $\quad \frac{dy}{dx} = -2xe^{-x^2}$, $\qquad$ (2)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}, \ldots\ldots,$$

lo que conduce á hacer

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{-x^2} P_n, \tag{3}$$

siendo $\quad P_n = (-2x)^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} + \ldots\ldots \qquad$ (4)

Para determinar $a_2, a_4, \ldots\ldots$, dividiremos (2) por (1), y tendremos

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0. \tag{5}$$

Diferenciando n veces, y aplicando la fórmula de Leibnitz, resultará

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + 2x\frac{d^n y}{dx^n} + 2n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0.$$

Sustituyamos en esta expresión las derivadas de orden $n+1$, n, $n-1$ respectivamente por $e^{-x^2}.P_{n+1}$, $e^{-x^2}P_n$, $e^{-x^2}P_{n-1}$, y suprimiendo el factor común, será

$$P_{n+1} + 2xP_n + 2nP_{n-1} = 0. \tag{6}$$

Diferenciemos la ecuación (3), y tendremos

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = e^{-x^2}\left(\frac{dP_n}{dx} - 2xP_n\right).$$

Sustituyendo en esta ecuación la derivada de orden $n+1$ por $e^{-x^2}P_{n+1}$, obtendremos

$$\frac{dP_n}{dx} = P_{n+1} + 2xP_n,$$

que, en virtud de (6), se reduce á

$$\frac{dP_n}{dx} = -2nP_{n-1}, \tag{7}$$

y por diferenciación se tendrá

$$\frac{d^2P_n}{dx^2} = -2n\frac{dP_{n-1}}{dx}.$$

Pero si se sustituye n por $n-1$ en (7), resulta

$$\frac{dP_{n-1}}{dx} = -2(n-1)P_{n-2};$$

y de estas dos fórmulas se deduce

$$\frac{d^2P_n}{dx^2} = 4n(n-1)P_{n-2}. \tag{8}$$

Sustituyendo en (6) n por $n - 1$, resulta

$$\mathrm{P}_n + 2x\mathrm{P}_{n-1} + 2(n-1)\mathrm{P}_{n-2} = 0. \tag{9}$$

Eliminando P_{n-1} y P_{n-2} entre (7), (8) y (9), será

$$\frac{d^2\mathrm{P}_n}{dx^2} - 2x\frac{d\mathrm{P}_n}{dx} + 2n\mathrm{P}_n = 0. \tag{10}$$

Si sustituimos en esta ecuación P_n por su expresión (4), igualando á cero los coeficientes de las diversas potencias de x, resultarán ecuaciones por las que se determinarán los coeficientes $a_2, a_4, \ldots\ldots$ Así el coeficiente de x^{n-2p-2} es igual á

$$(n-2p)(n-2p-1)a_{2p} + 4(p+1)a_{2p+2}.$$

Se tiene pues

$$a_{2p+2} = -\frac{(n-2p)(n-2p-1)}{4(p+1)}a_{2p}.$$

Haciendo sucesivamente $p = 0, 1, 2, \ldots\ldots$, tendremos

$$a_2 = -\frac{n(n-1)}{1}\frac{a_0}{2^2},\quad a_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}\frac{a_0}{2^4}, \ldots$$

La expresión de la derivada n^{sima} es pues,

$$\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = (-1)^n e^{-x^2}\Big[(2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}(2x)^{n-4} - \ldots\ldots\Big].$$

Adición al número 71. Análogamente podremos obtener la derivada de orden n de $y = \text{arc sen}\, x$. Hagamos

$$(1) \qquad y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y será} \quad \frac{d^{n+1}\,\text{arc sen}\,x}{dx^{n+1}} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Tendremos sucesivamente

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}$$

. . . .

lo que conduce á escribir

$$(3) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{P_n}{(1-x)^{n+\frac{1}{2}}},$$

siendo P_n un polinomio de grado n, par ó impar, al mismo tiempo que n, en el que el coeficiente de x^n es $1, 2, 3 \ldots\ldots n$. Así, este coeficiente es $6 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3$ en $\frac{d^3y}{dx^3}$, $24 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$ en $\frac{d^4y}{dx^4}$; y se demuestra fácilmente que si se hace igual á $n!$ en $\frac{d^n y}{dx^4}$, se obtendrá $(n+1)!$ en la derivada siguiente.

Para determinar los demás coeficientes de P_n, vamos á obtener una ecuación lineal de la que P_n es una solución. De las ecuaciones (1) y (2) obtendremos

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Diferenciemos n veces con auxilio de la fórmula de Leibnitz, y será

$$(1-x^2)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - 2nx\frac{d^n y}{dx^n} - n(n-1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

$$- x\frac{d^n y}{dx^n} - n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0.$$

Reduciendo y sustituyendo las derivadas por sus valores sacados de la ecuación (3), en la que se sustituye n por $n+1$, será

$$P_{n+1} - (2n+1)xP_n - n^2(1-x^2)P_{n-1} = 0. \qquad (4)$$

Diferenciando la ecuación (3) y sustituyendo

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \quad \text{por} \quad \frac{P_{n+1}}{(1-x^2)^{n+\frac{3}{2}}}, \text{ tendremos}$$

$$\frac{P_{n+1} - (2n+1)xP_n}{1-x^2} = \frac{dP_n}{dx},$$

ó, teniendo presente la ecuación (4),

$$(5) \qquad \frac{dP_n}{dx} = n^2 P_{n-1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2P_n}{dx^2} = n^2 \frac{dP_{n-1}}{dx}.$$

Pero la ecuación (5) se transforma en

$$\frac{dP_{n-1}}{dx} = (n-1)^2 P_{n-2};$$

luego

$$\frac{d^2P}{dx^2} = n^2(n-1)^2 P_{n-2} \qquad (6)$$

Eliminemos P_{n-1} y P_{n-2} entre (4), (5) y (6), y tendremos

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2} + (2n-1)x\frac{dP_n}{dx} - n^2P_n = 0. \qquad (7)$$

Para determinar los coeficientes de P_n por medio de esta ecuación, hagamos

$$P_n = A_0x^n + A_1x^{n-2} + A_2x^{x-4} + \ldots\ldots$$

Sustituyamos esta expresión en la ecuación (7), y resultará

$$-2^2A_1 + n(n-1)A_0 = 0, \quad -4^2A_2 + (n-2)(n-3)A_1 = 0, \ldots$$

y será
$$A_1 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{2} A_0,$$

$$A_2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A_0,$$

. . . .

Y sustituyendo por A_0 su valor, será

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} \frac{d^{n+1} \operatorname{arc\,sen} x}{dx^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \left[x^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{2} x^{n-2} \right.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^{n-4}$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^{n-6} + \ldots \right]$$

Si en
$$\frac{d^n \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{dx^n} = \frac{P_n}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

cambiamos x en $x\sqrt{-1}$, tendremos

$$\frac{d^n \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{dx^n} = \frac{Q_n}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}};$$

y la expresión de Q_n será

$$(-1)^n \frac{Q_n}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n} = x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{2} x^{n-2}.$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^{n-4} - \ldots\ldots$$

Ejemplo 4.° *Hallar la expresión* $U_n = d^n \dfrac{x^n (1-x)^n}{dx^u}$.

Haremos $u=(1-x)^n$, $v=x^n$, y empleando la fórmula de Leibnitz, será

$$U_n = n!\left[(1-x)^n - \left(\frac{n}{1}\right)^2 x(1-x)^{n-1} + \ldots\ldots\right].$$

También podemos obtener por la fórmula del binomio

$$x^n(1-x)^n = (-1)^n\left[x^{2n} - \frac{n}{1}x^{2n-1} + \ldots\ldots\right]$$

$$U_n = (-1)^n\Big[2n(2n-1)\ldots(n+1)x^n$$

$$-\frac{n}{1}(2n-1)\ldots nx^{n-1} + \ldots\Big].$$

Comparando las dos expresiones de U_n, se tiene

$$1.2.3\ldots n(-1)^n\left\{1+\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2+\ldots\right\}$$

$$= (-1)^n 2n(2n-1)\ldots(n+1)$$

y $$1+\left(\frac{n}{1}\right)^2+\ldots+1 = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n},$$

que es la expresión de la suma de los cuadrados de los coeficientes del binomio.

Ejemplo.—5.° Sea $u = mx$ é $y = \text{sen } x$. Se tiene

$$\text{sen } mx = u = \text{sen }(m \text{ arc sen } y);$$

luego $$\frac{du}{dy} = \frac{m\cos(m \text{ arc sen } y)}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{du}{dy} = m\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad \left(\frac{du}{dy}\right)^2(1-y^2) = m^2(1-u^2);$$

diferenciando, tenemos que

$$2\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dy^2}(1-y^2)-2\left(\frac{du}{dy}\right)^2 y=-2m^2u\frac{du}{dy},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}(1-y^2)-y\frac{du}{dy}+m^2u=0$$

Aplicando la fórmula de Leibnitz,

$$u^{n+2}(1-y^2)-2nu^{n+1}y-n(n-1)u^n$$

$$-u^{n+1}y-nu^n+m^2u^n=0;$$

para $y=0$, se tiene

$$u^{n+2}-n(n-1)u^n-nu^n+m^2u^n=0,\ u^{n+2}=u^n(n^2-m^2).$$

Llamando u_0 y u'_0 á los valores de sen mx y de su derivada relativa á sen x, suponiendo sen $x=0$, resulta

$$u''=-u_0m^2 \qquad u''''=u_0m^2(m^2-2^2),\ \ldots..,$$

$$u'=-u'_0(m^2-1^2),\quad u'''''=u'_0(m^2-1^2)(m^2-3^2),\ \ldots..,$$

Si se *expresan* por α y α' respectivamente el menor arco positivo ó negativo cuyo seno es sen x, y el menor arco cuyo coseno es sen x, tendremos

$$\cos m\alpha=1-\frac{m^2}{1.2}\operatorname{sen}^2x+\frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\operatorname{sen}^4x+\ldots..$$

$$\operatorname{sen} m\alpha=m\left[\operatorname{sen}x-\frac{m^2-1^2}{1.2.3}\operatorname{sen}^3x+\ldots..\right]$$

$$\cos m\alpha'=1-\frac{m^2}{1.2}\cos^2x+\frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\cos^4x-\ldots..$$

$$\operatorname{sen} m\alpha'=m\left[\cos x-\frac{m^2-1}{1.2.3}\cos^3x\ \ldots..\right]$$

ÍNDICE DEL TOMO SEGUNDO

LIBRO PRIMERO

INTRODUCCIÓN Á LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES

LIBRO SEGUNDO

FUNCIONES DE VARIABLES REALES

LIBRO TERCERO

ERRATAS DEL TOMO PRIMERO

Pág. 4, línea 31, en vez de mp léase m_p.

» 18, » 23, » » » AC » AC de orden.

» 40, » 20, » » » se » dicha relación se.

» 54, » 4, » » » f » F; línea 20, en vez de n léase m.

» 55, » 9, » » » este » el.

» 55, » 10, » » » consiguiente, léase «otra parte».

» 55 línea 28, en vez de , »).

» 61 » 14, » » » x » x_1.

» 62 » 7, » » » $(x_2)^2$ » $(x_3)^2$.

» 67 » 4, añádase h; línea 6, añádase $- f(x, y + k)$.

» 70 » 11, en vez de f'_x léase $\frac{d}{dx}$.

» 81 » 2, » » » $\frac{1}{2}$ » $\frac{3}{2}$; l. 8, en vez de $\frac{2}{3}$ léase $\frac{3}{2}$.

» 82 » 1, 2 y 3, léase: *Hallándose las variables* x *é* y *ligadas por una ecuación, se*

» 84, línea 16, en vez de ∂z léase ∂x.

» 84, » 11, » » » dy^2 léase $d^2 y$.

» 89, » 4 y 11, en vez de dy^2, léase $d^2 x$, $d^2 y$.

» 94, línea 13, » » » b, léase c; l. 14, las, léase las que.

» 97, » 11, » » » (3) léase (1).

» 114, » 5, póngase 2.°; línea 15, en vez de ax léase a^x.

» 139, » 10, en vez de $\frac{x}{1}$ léase $\frac{x^2}{2}$.

» 153, » 9 y 10, en vez de sen z^2, léase (sen $z)^2$.

» 162, » 13, » » » $c'x^\gamma$ léase $C'x^{\gamma'}$.

» 163, » 15, » » » x_2, x_4 » x^2, x^4.

» 166, » 2, » » » A^n » A_n.

» 167, » 13, » » » 2^2 » z^2.

» 172, » 10, » » » $T^n +$ » $T^n -$.

» 176, » 5, » » » sen θ » sen θ).

» 179, » última » » » $e^{- \quad u}$ » e^{-t-u}.

» 192, línea 5, » » » $\frac{d\Psi' Fz}{dz}$ » $\frac{d\Psi' Fz}{dz} x$.

» 192, » 13, » » » $x\Phi n$ léase $x\Phi' u$.

Pág. 193, línea 6, en vez de como se demostrará, *l.* «como se ha demostrado»; l. 14, en vez de $\frac{\partial^n V}{\partial z^n}$ léase $= \frac{\partial^n V}{\partial z^n}$.

» 194, línea 15, en vez de $\frac{x^2}{z}$ léase $\frac{x^2}{2}$.

» 195, » 19, » » » fz » $f(x)$.

» 195, El *ejemplo* 4.º ha de ir á la pág. 199.

» 196, línea 18, » » » $f'z$ » $f(z)$; 19 en vez de $y'z_y$ léase yz'_y.

» 197, » 13, » » » Afx, y, $A = f(x)y$.

» 197, » 20, » » » A′ léase A^3:

» 199, » 5, en vez de Px^2 léase fx^2.

» 200, » última, en vez de a, x, léase x, a.

» 201, » 12, » » » $x^2 -- x$ léase $x^2 - 1$.

» 202, » penúltima, en vez de $x(x)$ léase $\varphi(x)$.

» 204, » antepenúltima, en vez de A^{n-1} léase A_{n-1}.

» 211, » 5, en vez de u^n léase u_n.

» 213, » última, en vez de P^n léase P_n.

» 216, » 12, » » » sen x léase m sen x.

» 227, » 12, » » » $x''(x)$ » $\varphi''(x)$.

» 229, » 4, Añádase: Forma $\frac{\infty}{\infty}$; línea 17 en vez de f, φ; l. 18, en vez «del, del segundo factor del

» 231, » 9, en vez de «invirtiendo» «haciendo pasar y al denominador».

» 250, » 17, » » » $\frac{dz}{dz}$ léase $\frac{dz}{dx}$.

» 260, » 3, 4 y 5, en vez de lo escrito póngase: $\frac{1}{u}$ sen AHL $= \frac{1}{v}$ sen DHB, que determina el índice $\frac{u}{v}$ de refracción.

» 269, » 20 y 21, en los segundos miembros en vez de a, α.

ERRATAS DEL TOMO SEGUNDO

Pág. 5, línea 28, en vez de «pues» léase «Además».

» 35, » 15, » » » y_n » y_2.

» 36, » 2, » » » $(fx_n - 1)$ léase $f(x_n - 1)$.

» 36, » 20, » » » y_3 léase y_2; l. 30, en vez de α, s.

» 37, » 13, » » » las, léase á las; l. 18, $f(x)$, léase de $f(x)$;

» 37, » 21, $f(x)$, léase $f(X)$; l. 23, X, léase $f(X)$.

Pág. 39 cámbiese F por G y G por F en la figura.
» 41, línea 5, en vez de (1) léase (2).
» 41 línea 7, en vez de x, léase de x; l. 20, serie, léase suma S_N.
» 42, línea 12, » » » convergente, lèase uniformemente convergente.
» 42, » 18, » » » «menor», léase «menor que».
» 43, » 11, » » » x, léase ε.
» 45, » 4, » » » dada, léase tan pequeña como se quiera, y por consiguiente $\lesssim 1$.
» 45, línea 26, en vez de $f(x)$ léase $f(x')$ y vice-versa.
» 46, » 19, » » » *serie* » serie de las derivadas.
» 46, » 21, » » » u_1, u_2, léase u'_1, u'_2.
» 47, » 16, » » » *de* » *de los términos de.*
» 48, » 4, » » » *serie* » *serie entera;* l. 13, estos, léase aquellos; l. 18, x_n, x^n; l. 23, léase: 2.º
» 49, línea 4, en vez de ε léase Σ; l. 13, $\varepsilon(_1$ léase $(\varepsilon_1$; l. 22, ξ léase ε.
» 50, » 6, » » » «misma serie S» léase «suma S de la serie».
» 50, » antepenúltima, x_n léase x^n.
» 51, » 20, X_n léase X^n; l. 25, (3) léase (7).
» 53, » 2, «función» léase «serie».
» 56, » 8, (fx) léase «$f(x)$».
» 58, » última, R léase R'.
» 64, » 6, «$r_m\ \rho_n$» léase «$r^m\ \rho^n$».
» 69, » 15, «mismo» » «intervalo de convergencia».
» 70, » 6, Q_1 léase «de Q_1».
» 71, » 5, bc' » ba'.
» 73, » 10, x é y léase y, x.
» 74, » 10, a » x.
» 75, » 5, X^n » X_n.
» 76, » 16, X » x; y léase y; última 153 léase 473.
» 79, » 6, punto, » punto a.
» 81, » 1, por » para.
» 81, » 12, «de los» léase «puntos tales»; l. 27, y se, léase y.
» 84, » 25, «que una» léase «una»; 26, se, léase «que se».
» 85, » 11, «el» léase «en»; «de» léase «que»; 22, «que» léase «que para todos los valores de x mayores que m».
» 90, » 1, $x = a$ léase $x = 0$.
» 99, » 12, $a - x_{n-1}$ léase $b - x_{n-1}$.
» 100, » 8, δ_1 léase δ_1^1.

Pág. 101, línea penúltima, y léase y_1; l. última x_ν léase y_ν.
» 102, » 9, $<$ léase $<($; l. 25, μ léase μ'.
» 108, » última «con» lease «con $D^n_{\varphi\psi}$,».
» 109, » 9, $D^{(r)}_\varphi$ léase $D^{(r)}_\psi$.
» 110, » 11, $R_n x)$ léase $R_n(x)$.
» 111, » 2, $h - \infty$ $h = \infty$.
» 112, » 11, x^{m+1} » x_{m+1}; l. 12, a^n léase a^m.
» 112, » 21, $+$ léase $-$ 22, $\cos^{m+n}$, léase $\cos a^{m+n}$.
» 113, línea 14 y 15, $\cos^{m+n}$ léase $\cos a^{m+n}$.
» 115, » última, dx léase $\varphi(x)dx$.
» 120, » 2, $a\,\varepsilon'$ léase $a - \varepsilon'$; l. 19, $A^{(m)}$, léase $A^{(m)}$ —.
» 122, » 20, » ε léase ε'.
» 131, » antepenúltima, añádase «monógena».
» 133, » 5, d_1 léase q_1.
» 142, » 4, «exterior» léase «interior».
» 143, » 1, á ρ^{n-m} añádase $e^{(n-m)i\theta}$.
» 143, » 1, en vez de e^{n-m} léase ρ^{n-m}.
» 147, » 8, » » » La, léase «Si la
» 175, » 1, penúltima, en vez de $x = \xi$ léase $x - \xi$.
» 176, » 1 y 2, en vez de $x = x_0$, $x = x_1$, léase $x - x_0$, $x - x_1$.
» 199, » 6, » » » $x - x_0$ léase $x = x_0$.
» 199, » 14, en vez de $-$ léase $=$; l. 6, añádase «Podemos deducir la fórmula de Taylor».
» 199, » 19, en vez de $f(x)$ léase $f^n(x)$; (1) léase (1').
» 202, » 6, » » » β léase γ.
» 203, » 13, » » » 2 » 12.
» 204, » 7, » » » — » $=$; 20, suprímase «dos».
» 207, » 7, » » » zz_0Z léase z_0zZ; 27, (fx) léase $f(z)$.
» 208, » 12, » » » y léase y.
» 217, » 7, » » » c léase e; l. 8, e léase c.
» 217, » 17, añádase «la ecuación ec. (2).
» 221, en la figura léase C, D en vez de A, B.
» 222, línea 11, en vez de $|z$ léase $z|$; l. 22, en vez de z léase Z.
» 223, » 22, ρ, léase ρ descrita desde t como centro.
» 242, » 1, ep léase e^p; |16, en vez de «centro» léase «interior».
» 247, » antepenúltima, y léase yz'.
» 248, » 25, en vez de z léase z'.
» 249, » 3, » » » n léase u.
» 249, » 11, z léase Zy; Z^{n-1} léase Z_{n-1}.
» 250, » 4, » » » n léase u.