ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR EL

DR. RICARDO BALTZER

PROFESOR EN LA UNIVERSIDAD DE GIESSEN,
MIEMBRO EN EJERCICIO DE LA SOCIEDAD DE BUENAS LETRAS DE LEIPZIG

PARTE PRIMERA

ARITMÉTICA VULGAR

Edicion segunda, aumentada con la aprobacion del autor,

POR

EULOGIO JIMENEZ

MADRID
IMPRENTA DE SEGUNDO MARTINEZ
1, TRAVESÍA DE SAN MATEO, 1

1882

ZER - ARITMÉTICA VULGAR

ARITMÉTICA VULGAR

ELEMENTOS
DE
MATEMÁTICAS

POR EL

Dr. RICARDO BALTZER

PROFESOR EN LA UNIVERSIDAD DE GIESSEN,
MIEMBRO EN EJERCICIO DE LA SOCIEDAD DE BUENAS LETRAS DE LEIPZIG

PARTE PRIMERA

ARITMÉTICA VULGAR

Edicion segunda, aumentada con la aprobacion del autor,

POR

EULOGIO JIMENEZ

MADRID
IMPRENTA DE SEGUNDO MARTINEZ
1, TRAVESÍA DE SAN MATEO, 1

1882

PRÓLOGO DE LA PRIMERA EDICION.

En este país en que se ha escrito de todo, y de todo brillantemente, ménos de ciencias matemáticas; en esta nuestra buena España en que, si hubiéramos de juzgar por los resultados, diríamos que al genio nacional le son repulsivas las lucubraciones del cálculo; en esta tierra, en fin, de los heróicos guerreros, de los profundos teólogos, de los sublimes pintores, de los inmortales poetas, de los más osados navegantes del mundo; aquí donde tanta vida y tanta inteligencia se ha derrochado, si se nos permite esta palabra, es la verdad, por triste que la verdad sea, que no hemos tenido tiempo, gusto ó tal vez ocasion, para crear grandes geómetras desde los árabes acá, y que aún hoy mismo vamos marchando como de mala gana, y á remolque del mundo civilizado, por el difícil pero glorioso camino de las ciencias exactas.

Y dicho ésto en tésis general, dicho queda si he de tener por meritorio todo cuanto en altas regiones, ó en regiones más modestas y prácticas, tienda á la propaganda de las Matemáticas, y si ha de parecerme recomendable el trabajo que los señores Merelo y Jimenez se han tomado, al verter á nuestro idioma la obra del distinguido analista Baltzer;

en el primer volúmen de cuya obra han querido, por deferencia que agradezco, que conste mi nombre, como el de uno de los mayores aficionados de estos reinos á las cosas y sublimidades de la Matemática, segun ahora va siendo moda decir.

Acepto gustoso este puesto de honor; pues él me proporciona ocasion para declarar que el presente libro, á pesar de la modestia de su porte y de las materias elementales de que trata, es libro de verdadero mérito y de indiscutible utilidad, que puede prestar, á no dudarlo, grandes servicios en la enseñanza.

Comprende las primeras nociones de la Aritmética, á saber: el cálculo de los números enteros en su primer libro; el de los quebrados en el segundo; y el de los decimales en el tercero y último; y sin remontarse á grandes demostraciones, ni perder su carácter práctico, todo lo demuestra el autor por manera natural y sencilla, sin esfuerzo, sin empeño y como de paso: más que demostraciones, parecen observaciones hechas sin propósito de demostrar; y, sin embargo, cada teorema queda demostrado con indiscutible rigor. Y no ésto solo, sino que el autor ha sabido utilizar todos los detalles y ejemplos, ya para algun fin ulterior y científico, ya para mostrar al alumno, bajo forma de problema aritmético, alguno de la vida real, ya para ejercitar su inteligencia y su discurso. De este modo la Aritmética de Baltzer es una gimnasia del espíritu, útil y provechosa al mismo tiempo.

Creo, por tanto, que si el autor escribió un buen libro, los traductores han prestado un verdadero servicio á la buena y concienzuda propaganda de las ciencias matemáticas en nuestro país, al permitir á la juventud, por las facilidades con que brinda este primer escalon, la subida á mayores alturas. Ojalá crea el público como yo, y recompense el celo y la inteligente laboriosidad de mis buenos amigos.

José Echegaray.

Madrid 16 de Mayo de 1879.

PRÓLOGO DEL AUTOR.

Esta *Parte primera* de los *Elementos* es un breve Compendio de Cálculo numérico, llamado *Aritmética vulgar*, que sirva de preparacion al estudio de la *Aritmética universal*. Comprendida en él, ventajosamente para los estudiantes, se halla la *Regla de tres*, cuyo fundamento, segun hoy se piensa, no es ya la doctrina de las proporciones, sino más bien el cálculo de unidades y de pluralidades. En la exposicion de la Teoría de los quebrados, comunes y decimales, hemos introducido tambien algunas modificaciones con ánimo de aclarar y facilitar su enseñanza. El Capítulo acerca de las aproximaciones de los datos numéricos y de los resultados de los cálculos con los mismos efectuados, constituye un Complemento de que no puede prescindirse en un libro de este género. Los ejemplos, con sus minuciosas resoluciones, escogidos y destinados á servir de verdaderos paradigmas; y, por otra parte, las *pruebas* que figuran al lado de los ejemplos, nos dispensan de acumular problemas que serían innecesarios ó supérfluos.

INTRODUCCION.

1. Si, al contemplar y comparar entre sí varias entidades, no descubrimos en alguna ó algunas de ellas, aparte de su respectiva situacion, caractéres ó propiedades diferentes de los que tienen las otras, decimos que todas son *idénticas* ó que son un *mismo* sér ó una misma cosa. Y dirémos que son *distintas* las unas de las otras, cuando aquéllas presenten caractéres de que éstas carezcan.

2. Pero entidades distintas pueden, sin embargo, tener alguno ó algunos caractéres comunes. Con respecto á estos caractéres comunes se llamarán *homogéneas;* y tomando en cuenta sus caractéres, no comunes, *heterogéneas.* Una bola de madera y otra de plomo, por ejemplo, son homogéneas por su figura y heterogéneas por sus sustancias.

3. Solamente cosas ó entidades homogéneas pueden reunirse para formar un conjunto, como engendrado por la repeticion de cualquiera de ellas, la cual representa entónces la *unidad* generatriz. Y cualquiera entidad sola, limitada, puede, á la inversa, tambien considerarse mentalmente descompuesta en partes homogéneas. En el uno y el otro caso, el conjunto *(todo)* de las entidades homogéneas *(partes)* se determina por un *número;* y así determinado es una *cantidad* ó un *quantum.* El número, pues, contesta á la siguiente pregunta: *¿cuántas veces* se repite

ó se une consigo misma una entidad para formar un conjunto ó un todo? Si la contestacion se limita puramente á decir *tantas veces*, el número se denomina *abstracto;* pero, si al *tantas veces* se agrega la entidad ó cosa repetida, el número se llamará *concreto*.

De las minuciosas explicaciones anteriores se colige que la *cantidad*, como dicen los filósofos, es la propiedad, inherente á los séres limitados ó finitos, y susceptibles, por lo tanto, de forma, de ser cada uno un todo, descomponible en partes; y que en ella se presentan dos caractéres esenciales, inseparables: el *abstracto*, dicho tambien *numérico* y *discreto;* y el *concreto*, llamado correlativamente *extensivo* y *contínuo*. En el alternativo predominio de estos dos caractéres, hasta identificarse, estriba la division natural de la *Matemática* ó *Ciencia de la cantidad* (1.)

La cual, segun ésto, comprenderá tres partes principales: una en que se estudie la cantidad bajo el predominio de su carácter abstracto ó numérico; otra, en que se la estudie bajo el predominio de su carácter concreto ó extensivo; y la tercera, en fin, cuyo objeto sea la cantidad en su lleno y total concepto, abstracto-concreto, sin que ninguno de estos caractéres predomine sobre el otro. Valiéndonos de una denominacion comun para todas las partes de la Matemática, pudiéramos llamar la primera *Análisis numérica*, la segunda *Análisis geométrica*, y la tercera *Análisis infinitesimal*, ó sencillamente: *Aritmética*, *Geometría* y *Cálculo*.

4. Fórmanse los números naturalmente, ó en série na-

---

(1) El empeño de aislarlos completamente ha contribuido, segun ilustres analistas contemporáneos, al oscurecimiento de los principios fundamentales, claros y sencillos, de esta Ciencia, apartándola de su natural orígen para revestirla de conceptos sútiles y de formulismos relumbrantes y perturbadores.

tural, por la singular repeticion de la unidad; y así se van *contando* ó expresando sucesivamente con las palabras adoptadas en nuestra lengua para ello, y que se refieren al *sistema decimal*. La unidad sola se dice *una;* contando una y una resultan *dos;* contando con dos una, resultan *tres;* y contando así siempre una con el total ó cuento formado últimamente, se obtienen los cuentos de *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve* y *diez* unidades que constituyen una DECENA.

Desde diez en adelante contamos, agregando á esta palabra sucesivamente las de los cuentos ántes nombrados; y diciendo, por consecuencia: diez y una *(once)*, diez y dos *(doce)*, diez y tres *(trece)*, diez y cuatro *(catorce)*, diez y cinco *(quince)*, *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho*, *diez y nueve*, y diez y diez, ó *veinte*, que componen *dos decenas*. Desde veinte en adelante contamos *veintiuna, veintidos*,... hasta veinte y diez qne hacen *treinta* ó *tres* decenas. Y lo mismo de *treinta* á *cuarenta* ó cuatro decenas; de cuarenta á *cincuenta* ó cinco decenas; de cincuenta á *sesenta* ó seis decenas; de sesenta á *setenta* ó siete decenas; de setenta á *ochenta* ú ocho decenas; de ochenta á *noventa* ó nueve decenas; y de noventa á *noventa y diez*, ó CIENTO, que comprende *cien* unidades, ó una CENTENA.

Desde ciento contamos agregando á esta palabra sucesivamente las de los cuentos de unidades y decenas, ántes nombrados, diciendo: *ciento una*, *ciento dos*,... *ciento diez*, *ciento once*,... *ciento veinte*, *ciento veintiuna*,... *ciento treinta*,... *ciento noventa y nueve*, hasta *ciento noventa y diez* ó *doscientas*, ó sean *dos centenas*. Y lo mismo contamos desde doscientas á *trescientas*, *cuatrocientas*, *quinientas*, *seiscientas*, *setecientas*, *ochocientas*, *novecientas*, hasta *novecientas noventa y diez*, ó MIL, que contiene *diez centenas* ó un MILLAR.

Desde *mil* en adelante contamos, agregando á esta palabra ordenadamente los nombres de los cuentos de unidades, decenas y centenas, anteriormente expresados, hasta llegar á *mil novecientos noventa y diez*, ó sean *dos mil*. Y lo mismo de dos mil á *tres mil*, *cuatro mil*... hasta DIEZ MIL, ó sea una DECENA DE MILLARES. Por decenas de millar contamos luégo hasta la CENTENA DE MILLAR, ó CIEN MIL; y por centenas de millar, por último, hasta llegar á *mil millares* ó un MILLON.

Resulta de lo dicho que *diez unidades* constituyen una nueva unidad, la *decena*, que es del órden primero respecto de aquéllas, llamadas *simples* (sin grado); que *diez decenas* componen, á su vez, otra nueva unidad, la *centena*, de segundo órden respecto de la primitiva ó simple; que *diez centenas* forman asimismo otra nueva unidad, la de *millar*, del tercer órden; y, en general, que diez unidades de un órden cualquiera constituyen una unidad del órden superior, inmediato, y viceversa. Colígese tambien de las explicaciones anteriores, que unidad, decena y centena, unidad, decena y centena de millar, componen respectivamente las *dos secciones* del *grupo de las unidades simples*. Pasado este grupo, el *primero* que se cuenta es el de los *millones;* el *segundo*, el de los millones de millones ó *billones* (1); el *tercero,* el de los millones de billones ó *trillones;* el cuarto, el de los millones de trillones ó *cuatrillones*, etc.: cada uno de ellos, por supuesto, con las mismas dos secciones que el de las unidades simples. Y, finalmente, que un conjunto de unidades, ó un número cualquiera, se expresará por las palabras correspondientes á sus diversas unidades constituyentes, omitiendo las que se refieran á las de los órdenes que falten, como es natural. Así: un número, constituido por *cuatro millares*, *seis*

---

(1) Bueno es advertir que en la práctica llaman los franceses *billion* á su *milliard* que es el cuento de mil millones.

decenas y *tres unidades*, se leerá diciendo: *cuatro mil sesenta y tres*.

Este procedimiento sistemático de expresar los números, segun la ley de su formacion ó generacion sobre el número *diez*, se *llama sistema de numeracion decimal*, *verbal*; y el número *diez*, por razones ahora muy fáciles de comprender, *base* de aquel sistema.

5. Sentado ya que cada unidad de un órden vale *diez* del órden inferior inmediato, para escribir los números en el sistema admitido serán necesarias *nueve* cifras, distintas, que representen los números ó cuentos *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho* y *nueve*, á saber:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Estas cifras, solas como están, representan unidades simples y se suelen llamar *números dígitos*. Para graduarlas, ó hacerlas representar unidades de órdenes superiores, se escribe á su derecha la nueva cifra 0, que se denomina *cero*, y no tiene por sí valor ninguno: por lo cual llevan aquellas otras cifras el calificativo de *significativas*. El número de ceros colocados á la derecha de cualquiera de estas cifras señala su grado ú órden; y dicho está con ésto que los órdenes de las unidades van creciendo de derecha á izquierda, siendo el lugar desde el cual se cuentan aquellos órdenes, el de las unidades simples, el último de la derecha (1).

Las unidades de los diferentes órdenes expresados, de consiguiente, se escribirán de este modo:

---

(1) Más adelante verémos que á la derecha de este lugar se colocan siguiendo la misma graduacion, las unidades de los órdenes inferiores (subórdenes, subgrados), llamadas *décimas, centésimas, milésimas*, etc.

1	unidad simple (sin grado).	
10	decena	
100	centena	
1 000	unidad	de millar.
10 000	decena	
100 000	centena	
1 000 000	unidad	de millon.
10 000 000	decena	
100 000 000	centena	
1 000 000 000	unidad	de millar de millon.
10 000 000 000	decena	
100 000 000 000	centena	

. . . .

Estas unidades pueden juntarse ó colocarse inmediatamente unas al lado de las otras formando una sola línea, en la cual, aunque los ceros no estén explícitos, ocuparán aquéllas los lugares que por sus grados les corresponden *delante* de la cifra inicial que representa las unidades simples: la cifra de las decenas el 1.º, la de las centenas el 2.º, la de los millares el 3.º, etc. El cero ocupará el lugar de las cifras representativas de los órdenes que falten.

Con arreglo á estos principios, el número *cuatrocientos cinco mil veinticuatro*, que contiene 4 centenas y 5 unidades de millar, 2 decenas y 4 unidades, se escribirá como sigue:

405 024

En todo número, escrito de este modo, tiene cada cifra dos valores: el *absoluto* que expresa sencillamente un conjunto de unidades; y el *relativo* que, por el lugar que ocupa la cifra, señala el órden ó grado de la misma. En el número escrito arriba, el valor absoluto de la cifra 5 es *cinco*, y el relativo *cinco millares* ó *cinco mil*.

Este procedimiento sistemático de escribir los números se denomina *sistema de numeracion decimal, escrita.*

6. La lectura de un número, cualquiera, escritas sus cifras con la separacion correspondiente á las secciones de sus respectivos órdenes, que ya explicamos, no presenta dificultad ninguna. El número

57 423 296

se leerá: cincuenta y siete millones, cuatrocientos veintitres mil, doscientos noventa y seis (*).

7. La numeracion de las *unidades monetarias*, y de las de *pesas y medidas*, no era sistemática como lo es ahora despues de adoptado el *sistema métrico* en todas las naciones civilizadas. Sabemos que ántes, en Castilla, *una* onza de oro tenía *diez y seis duros;* un duro, *cinco pesetas;* una peseta, *cuatro reales;* y un real, *treinta y cuatro maravedises*. Y que *un quintal* pesaba *cuatro arrobas;* una arroba, *veinticinco libras;* una libra, *diez y seis onzas;* y una onza, *diez y seis adarmes*. Etc , etc. Casi nunca una unidad superior, dentro de una clase ó género de medidas, contenía á su inferior inmediata el mismo número de veces que ésta á su inferior, y así sucesivamente. Claro es que, conocida la graduacion ó el órden de estas unidades de medidas, un número compuesto de las mismas no se diferencia esencialmente de un número decimal; pero su numeracion verbal y escrita, no puede ser tan sencilla como la del último. Pudiéramos, pues, prescindir hoy de aquellos sistemas, si así pueden llamarse, de numeracion monetaria y métrica; mas, por ser los primeros con que se familiarizan todavía los niños en España, como sucede tambien con los análogos en otros países, no nos hemos decidido á suprimirlos.

(*) Siempre deben escribirse los números separando sus secciones con un espacio, y no con puntos ni comas que tienen otra significacion.

LIBRO PRIMERO.

CÁLCULO CON LOS NÚMEROS ENTEROS.

El número en su concepto abstracto es un conjunto de unidades y se llama *entero*.

Operacion es un procedimiento al cual se someten unos números para formar otros. Cuando se opera con *números* se opera siempre en realidad con *números enteros*.

1.—Adicion y Sustraccion.

1. *Sumar* con un número otro número es contar con el primero las unidades del segundo. La suma de los números 7 y 5 se indica de este modo: $7+5=12$; y se lée: 7 *más* 5 *igual* á 12. El número 12 se llama la *suma* de los números 7 y 5 que llevan el nombre de *términos (partes, miembros)* de la suma, ó de *sumandos*.

La suma $7+5$ se denomina *suma indicada*. Segun los principios establecidos (*Int.* 4), el número 4 724 puede expresarse como una suma indicada de sus unidades constituyentes, de este modo:

$$4000+700+20+4.$$

El órden de los términos es indiferente. Así, lo mismo es $7+5$ que $5+7$; $9+4+6$ que $4+6+9$. La suma permanece la misma, aunque varíe el órden de sus términos ó exactamente las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc.; y comenzar á sumar por las unidades del grado inferior, para agregar, sin turbar el órden de la operacion, á las unidades de los grados superiores, las que vayan resultando de las sumas de las de los inferiores, homogéneas con aquéllas.

En la suma de muchos términos debe guiarse el movimiento del ojo con la pluma, y expresar solamente las sumas que vayan resultando, en cadenciosa sucesion. Así, al sumar las unidades, en el ejemplo siguiente, no diremos $6+7=13$, $13+3=16$, $16+8=24$, $24+4=28$, sino desde luego: 6, 13, 16, 24, 28: al paso que recorremos con la vista y la pluma la columna. Las 2 decenas, que resultan de la suma de las unidades, son el primer término de la suma siguiente; y, para mayor seguridad, deben colocarse encima de la columna de las decenas, etc.

Para ejercitarse, súmense los términos uno á uno; luégo por grupos; y de la suma sustráiganse, á su vez, uno á uno, sucesivamente, todos los sumandos.

	2 3 3 2 2		76 856		749 574		1 445 088
	76 856	+	9 237	+	76 856	—	76 856
+	9 237		86 093	+	9 237		1 368 232
+	568 683	+	568 683		835 667	—	9 237
+	40 738		654 776		568 683		1 358 995
+	749 574	+	40 738	+	40 738	—	568 683
	1 445 088		695 514		609 421		790 312
		+	749 574	+	835 667	—	40 738
			1 445 088		1 445 088		749 574
						—	749 574
							0

Se cometen ménos equivocaciones en los cálculos, acostumbrándose á no pronunciar, aunque sea bajito, los números que se llevan en el pensamiento.

Al efectuar en el ejemplo precedente la primera sustracion, debemos notar que la cifra 8, de las centenas del sustraendo, es mayor que la cifra 0, de las centenas del minuendo, á la cual hemos agregado 1 unidad de millar que son 10 centenas, tomada de la cifra 5 que expresa las unidades de millar y ha quedado, por tal motivo, reducida á 4. La cifra 6, de las unidades de millar del sustraendo, tampoco puede sustraerse de aquella cifra 4, á la cual hemos agregado asimismo 1 decena de millar que vale 10 millares, para que de los 14 millares así resultantes puedan sustraerse los 6. La cifra 4 de las decenas de millar del minuendo, quedó reducida á 3; y mayor que ella es tambien su homogénea 7 del sustraendo: lo cual exige repetir lo hecho ántes.

Para la diferencia, igual es quitar las unidades expresadas ántes á las cifras del minuendo que añadirlas á las correspondientes cifras del sustraendo. En el ejemplo citado dirémos, por consecuencia: de 8 á 10 van 2; de 6 á 14 van 8, y de 7 á 13 van 6; ó de este modo: de 8 á 10 van 2; y llevo 1 y 6 son 7, á 15 van 8; y llevo 1 y 7 son 8, á 14 van 6; y llevo 1, á 4 van 3.

En las cuentas de cabeza, conviene comenzar por las cifras del órden más elevado. Por ejemplo: para sumar 37 con 24 se suma primero 37 con las 2 decenas del otro sumando; y despues, con la suma así resultante, las 4 unidades; y lo mismo se procede para restar.

$$37+24=57+4=61; \quad 74-38=44-8=36.$$

En vez de sumar 96 se pueden sumar 100, y despues restar 4 de la suma; en lugar de sustraer 95 se sustraen 100, y se añaden 5 á la diferencia; etc.

Se facilita tambien la suma disponiendo los sumandos en el órden conveniente. Así, para hallar la suma de los 100 primeros números de la serie natural

$$1, 2, 3, 4\ldots\ldots 97, 98, 99, 100$$

conviene efectuarla por parejas de este modo : el primero con el último ($1+100=101$) ; el segundo con el penúltimo ($2+99=101$) ; el tercero con el antepenúltimo ($3+98=101$), etc. Y así se obtienen 50 sumandos, iguales todos á 101.

6. Cuando en un cálculo ó cuenta están mezcladas las dos operaciones de sumar y restar, conviene emplear el *Complemento aritmético* (*) para evitar equivocaciones. *Complemento aritmético* de un número es la diferencia entre este número y una unidad de órden superior á la del órden máximo que el mismo contiene. El complemento aritmético de 1 532 será $10\,000-1\,532=8\,468$; y para hallarlo *se restan de 9 todas las cifras del número dado, excepto la última significativa á su derecha, que se resta de* 10. La aplicacion, de uso frecuente en las Ciencias, puede entenderse con el siguiente ejemplo :

$$\begin{array}{r} 3\,795 = 3\,795 \\ 10\,000 - 1\,532 = 8\,468\,* \\ 10\,000 - 2\,019 = 7\,981\,* \\ +\,8\,759 = 8\,759 \\ 10\,000 - 5\,104 = 4\,896\,* \\ \hline 3)\,3\,899 \end{array}$$

En vez de los sustraendos $-1\,532$, $-2\,019$ y $-5\,104$ hemos escrito sus complementos (á 10 000), convirtiendo así, por de pronto, en una suma las dos operaciones ; y de la suma obtenida de este modo, 33 899, hemos suprimido las 3 decenas de millar que suman los tres minuendos de los sustraendos expresados.

7. Por último, siempre que figuren como términos de

(*) Usado por GUNTER hácia 1614.

una suma ó una diferencia, sumas ó diferencias indicadas, ó ambas cosas, deberán éstas incluirse en paréntesis. Que la diferencia 20 — 8 debe sustraerse de 31 se expresará así:

$$31 - (20 - 8)$$

CUESTIONARIO.

¿Qué es *sumar* un número con otro número? ¿Cómo se llaman los números que se suman? ¿Cómo se llama el resultado de esta operacion? ¿Cuál es el signo de la suma? ¿Qué es *suma indicada?* ¿Por qué el órden de los sumandos es indiferente para la suma?

¿Qué es *sustraer* de un número otro número? ¿Qué es disminuir un número en otro? ¿Qué son *minuendo, sustraendo,* y *resto* ó *diferencia?* ¿Cuál es el *signo* de la sustraccion? ¿Qué es *diferencia indicada?* ¿Por qué el sustraendo puede ser tambien diferencia entre el minuendo y el resto?

¿Qué alteraciones sufrirá la suma cuando alguno ó algunos de sus sumandos aumenten ó disminuyan en cierto número de unidades? ¿En qué caso la suma no sufrirá alteracion alguna, áun cuando la sufran sus términos?

¿Qué alteraciones sufrirá la diferencia, cuando, sin variar el sustraendo, crezca ó mengüe el minuendo en cierto número de unidades? ¿Qué alteraciones sufrirá la diferencia, cuando, sin variar el minuendo, el sustraendo aumente ó disminuya en cierto número de unidades? ¿Qué alteraciones sufrirá la diferencia, cuando minuendo y sustraendo aumenten ó disminuyan, ó el uno aumente y el otro disminuya, en cierto número de unidades? ¿Cuándo permanecerá invariable la diferencia, á pesar del simultáneo aumento, ó disminucion, de minuendo y sustraendo? ¿Cuándo será la diferencia nula?

¿Cómo se suma un número con una suma, y una diferencia; y cómo se suma una suma, y una diferencia, con un número? ¿De cuántos modos puede ésto hacerse? — ¿Cómo se sustrae un número de una suma, y de una diferencia; y cómo se sustrae una suma, y una diferencia, de un número? ¿De cuántos modos puede ésto efectuarse? ¿Qué es *complemento aritmético* y qué ventajas ofrece en los cálculos?—¿Cómo se suma una suma, ó una diferencia, con otra suma y otra diferencia? ¿Cómo se sustrae una suma, ó una diferencia, de otra suma y otra diferencia?—¿De cuántos modos pueden estas operaciones realizarse?—¿Qué uso é importancia tiene el paréntesis en todas ellas?

2.—Multiplicacion.

8. *Multiplicar* un número por otro es sumar tantos términos, iguales al primero, como unidades tenga el segundo. La suma $7+7+7$ se expresa por 7.3 ó por 7×3, y se lee: 7 *multiplicado por* 3, ó bien 7 *veces* 3, y propiamente 3 *veces* 7. El número 21 se llama el *producto* de los números 7 y 3; de los cuales el primero es el *multiplicando;* y el segundo, el *multiplicador.*

El producto 7×3, ó 7.3, se denomina *producto indicado.* Un número de unidades de un órden cualquiera puede expresarse como un producto indicado. Por ejemplo:

$$3=1.3;\quad 70=10.7;\quad 800=100.8$$

Ahora se vé, recordando lo dicho en la Numeracion (*Int.* 5), que ascender en un grado á un número, ó ponerle un 0 á su derecha, es multiplicarle por 10, etc.

Como por agregacion sucesiva de la unidad formamos los números de la série natural (*Int.* 4), así por agregacion sucesiva de un mismo número formamos los productos de este número por los de la série natural, ó sean, sus *múltiplos sucesivos.* Un número cualquiera representa ahora el papel de la unidad.

9. Multiplicando y multiplicador pueden cambiarse sin que se altere su producto, y por ésto se llaman indistintamente *factores* del mismo.

En efecto :

$$
\begin{aligned}
7.3 = 1+1+1+1+1+1+1 &= 3.7\\
+1+1+1+1+1+1+1&\\
+1+1+1+1+1+1+1&
\end{aligned}
$$

Pues las 3 filas con 7 unidades cada una, miradas de arriba á abajó hacen 7 columnas con 3 unidades cada una. Escribiendo, en lugar de 1, otro número cualquiera, el 6, por ejemplo, hallamos que $6 \times 7 \times 3 = 6 \times 3 \times 7$; porque entónces cada fila contiene el 6 tomado 7 veces por sumando; y cada columna, el mismo 6 tomado 3 veces por sumando. Y repitiendo este procedimiento, fácil es evidenciar que un producto no varía, aunque varíe el órden de sus factores. Multiplicar un número por 3, y luego por 4, es lo mismo que multiplicarle primero por 4 y despues por 3; y en el uno y el otro caso se le multiplica por $3.\,4 = 12$. El número que se multiplica puede ser un producto, tal como $5.\,4.\,7$; y entónces la multiplicacion por 3 y 4 se indica así:

$$((5.\,4.\,7)\,3)\,4$$

Siempre que un factor esté incluido en un paréntesis no se escribe signo de multiplicar entre él y el otro factor: lo es por sí ya el paréntesis.

10. El multiplicador sólo puede ser número abstracto; porque expresa *cuántos* son los términos iguales cuya suma es el producto. Por ejemplo :

$$7 \text{ duros} \times 5 = 7 \times 5, \text{ ó sean } 35 \text{ duros}.$$

El producto es homogéneo con el multiplicando.

Entre los múltiplos sucesivos de un número se halla el producto de este número por otro cualquiera; mas la serie en la cual se hallaría, en general, semejante producto, sería muy larga. Segun la definicion (8), para hallar el producto de un número por otro habrá que multiplicar todo el multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador, y sumar despues estos *productos parciales.* Lo cual se logra fácilmente sabiendo multiplicar entre sí dos cifras de órdenes cualesquiera, como $700 = 100.7$ y $40 = 10.4$, cuyo producto indicado es (9)

$$100.7 \times 10.4 = 7.4 \times 100.10$$

Mas este producto consta de dos productos parciales: uno, 100.10, cuyo valor conocemos ya *(Int.* 4 y 8); y el otro 7.4, cuyo valor se halla (8) sumando el 7 *cuatro* veces. Luego conviene saber hacer estas sumas abreviadamente, y para aprenderlo sirve la siguiente tabla *(Pitagórica.)*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

11. Observaciones prácticas. Sabido ésto, para multiplicar dos números de várias cifras, se comienza la opera-

cion por la última cifra del multiplicador, ó mejor (*) por la de órden más elevado, ó sea la primera, despues de haberla fijado bien en la memoria.

jemplo:

```
     7536 × 26847          7536 × 26847
    ------------          ------------
        52752             15072     =7536×20000
       30144               45216    =7536× 6000
      60288                 60288   =7536×  800
     45216                   30144  =7536×   40
    15072                     52752=7536×     7
    ---------             ---------
    202318992             202318992
```

Así se hallan: 6×7 unidades, 3×7 decenas, 5×7 centenas, 7×7 millares, etc.; ó bien, 6×2 decenas de millar; 3×2 centenas de millar; 5×2 millones; etc., cuidando de no hacer trasposiciones mentales.

Hemos omitido los ceros de la derecha de los productos parciales que expresan decenas, centenas, millares, etc.; porque no son aquéllos necesarios, colocando estos productos en columna, segun la ley de la homogeneidad (3).

Como ejercicio puede verificarse la prueba siguiente, cambiando los factores:

```
     26847 × 7536
    ------------
    187929
     134235
       80541
       161082
    ---------
    202318992
```

El producto de un número de 5 cifras por otro de 4, tiene 5+4 ó sean 9, ú 8 cifras; porque el producto 10 000 por 1 000, de los números más pequeños de 5 y 4 cifras, es

---

(*) Para ejecutar las abreviaciones explicadas en el Capítulo 18.

10 000 000 que tiene 8 cifras; y el producto $99\,999 \times 9\,999$, de los mayores números de 5 y 4 cifras, es menor que el producto $100\,000 \times 10\,000 = 1\,000\,000\,000$, de los números más pequeños de 6 y 5 cifras, que tiene 10 cifras. Y lo mismo puede demostrarse con otros dos números cualesquiera, para deducir, en conclusion, que el producto tiene tantas cifras como tienen los dos factores, ó una ménos.

Para hallar el producto de tres factores se pueden multiplicar, como ejercicio, el primero por el segundo, y el producto por el tercero; luégo el primero por el tercero, y el producto por el segundo; y últimamente, el segundo por el tercero y el producto por el primero. En los tres casos debe resultar el mismo producto.

En vez de multiplicar la suma ó la diferencia de dos números por otro número, se puede multiplicar cada uno de sus términos por dicho número, y luégo sumar ó restar los productos; etc.

En las cuentas de cabeza se comienza la multiplicacion por las cifras más elevadas del multiplicando. Por ejemplo: $365 \times 7 = 2100 + 420 + 35$.

Aplicando el principio (9) se simplifica el procedimiento para hallar el producto,

$$5 \times 25 \times 125 \times 2 \times 4 \times 8 = 5 \times 2 \times 25 \times 4 \times 125 \times 8 = 10 \times 100 \times 1000,$$

ordenando sus factores convenientemente. Y lo mismo se hace en casos semejantes.

En vez de multiplicar por 42, se multiplica primeramente por 7, y el producto así obtenido por 6. En vez de multiplicar por 36, es mejor multiplicar por 6 y luégo por 6 otra vez.

Tambien se abrevia la multiplicacion en casos como los siguientes:

48×17= 50× 17 ó sea 850—2×17=816
48× 5= 24× 10=240
48×25= 12×100=1200
48×15= 240× 3=720
48×75=1200× 3=3600

Para multiplicar por 99, 499, 998, etc., es mejor multiplicar por 100—1, 500—1, 1 000—2, etc. Antiguamente, para multiplicar un número por 9, se sustraía dicho número de él mismo con un 0 á su derecha. *(Regula pigri.)*

Por ejemplo:

486×9	1 087×99
4 860	108 700
—486	—1 087
4 374	107 613

CUESTIONARIO.

¿Qué es *multiplicar* un número por otro? ¿Qué número se llama *multiplicando*, cuál *multiplicador*, y cuál *producto?* ¿Cuál es el *signo* de la multiplicacion? ¿Qué es *producto indicado?* ¿Por qué se llaman *factores* el multiplicando y el multiplicador?

¿Cómo se multiplica una suma por un número entero, y un número por una suma? ¿Cómo se multiplica una diferencia por un número entero, y un número por una diferencia? ¿Cómo se suman, ó se sustraen unos de otros, productos con iguales multiplicadores, ó iguales multiplicandos? ¿Cómo se separa un *factor comun?* ¿Cómo se multiplican una suma ó una diferencia, por otra suma y otra diferencia? ¿Cómo se multiplica un producto por un número entero, y un número por un producto? ¿Cómo se multiplica un producto por otro producto? ¿En qué casos se suprime el signo de la multiplicacion?

¿Qué alteraciones sufrirá el producto cuando uno de sus factores aumente ó disminuya en una unidad ó en cierto número de unidades? ¿Cuándo será cero el producto?

3.—Division.

12. *Dividir* un número por otro es hallar el número que, multiplicado por el segundo, dé un producto igual al primero. La division se indica: 35 : 7, y se lée 35 *dividido por* 7, ó 7 *en* 35. Está 7 en 35 contenido 5 veces; porque 5×7 ó $7\times5=35$. El número 5 se llama *cociente* de los números 35 y 7; de los cuales aquél es el *dividendo*, y éste, el *divisor*. El cociente, por lo tanto, es el número que, multiplicado por el divisor, dá como producto el dividendo. Esto es:

$$\textit{Cociente}\times\textit{Divisor}=\textit{Dividendo}.$$

El cociente 35 : 7, ó tambien 7 | 35, se llama *cociente indicado*.

13. Si el divisor es *abstracto*, el cociente representa la *parte alícuota* del dividendo, que denomina el divisor (*mitad*, *tercera*, *cuarta*, etc., etc.)

Si el divisor es homogéneo con el dividendo, el cociente representa la *razon* del dividendo al divisor, y expresa *cuántas veces* está contenido el divisor en el dividendo, ó cuántas veces es el dividendo tan grande como el divisor ó qué *cuántuplo* de éste. Este concepto de *razon* exige que sus términos (dividendo y divisor) se refieran á unidades idénticas.

$35 : 7=5$ significa que 5 es la 7.ª parte de 35; ó que 7 se halla contenido 5 veces en 35; ó que 35 es 5 veces tan grande como 7.

35 duros : 7 duros = 5 expresa que la razon de 35 duros á 7 duros es 5; ó que 7 duros se hallan contenidos 5

veces en 35 duros; ó que 35 duros valen 5 veces tanto como 7 duros, ó son el *quíntuplo* de 7 duros.

La razon de 36 duros á 9 duros, de 36 libras á 9 libras, de 36 piés á 9 piés, etc., es la misma que la de 36 á 9, esto es: 4. Pues, siendo $9\times 4=36$, resulta que 9 duros$\times 4=36$ duros; 9 libras $\times 4=36$ libras; 9 piés $\times 4=36$ piés, etc.

14. Dados un dividendo y un divisor, ó aquél es uno de los múltiplos sucesivos de éste (8), ó se halla necesaria y evidentemente comprendido entre dos consecutivos. En el primer caso, la division se realiza por enteros; y en el segundo, no se realiza y queda un *resto*, ó diferencia entre el dividendo y el múltiplo inferior del divisor. El cociente entónces se hallará comprendido entre los dos números naturales, consecutivos, que señalan el órden de los múltiplos sucesivos del divisor, entre los cuales se halla comprendido el dividendo, y sólo podrá ser completamente expresado con el auxilio de una nueva unidad, subordinada á la primitiva y parte de ésta, ó sea, por una *fraccion*.

Así:

$56:7=8$; porque $56=7\times 8$ es un múltiplo (óctuplo) de 7.

$91:7=13$; porque $91=7\times 13$.

Pero $23:7$ es mayor que 3 y menor que 4; porque $7\times 3=21$, y $7\times 4=28$. El concepto de la operacion exige que la diferencia 2, entre 23 y 21, que es un *resto*, sea tambien dividida por 7. Para ésto dividimos la unidad por el divisor dado, obteniendo así otra unidad subalterna, y decimos que $1:7$ es la 7.ª parte de 1. Esta *sétima parte* de la unidad se escribe con los dos números 1 y 7, separados por una raya, de este modo: $\frac{1}{7}$; y se denomina tambien *un sétimo*. Mas $2:7$ que es la 7.ª parte de 2, y, por consecuencia, 2 veces tan grande como la 7.ª parte de 1, se expresará por $\frac{2}{7}$ (2 sétimos). Luégo $23:7=3\frac{2}{7}$: lo cual significa que la 7.ª parte de 23 es $3\frac{2}{7}$, ó que la razon de 23 á 7 es $3\frac{2}{7}$.

Las locuciones artificiales, 23 es $3\frac{2}{7}$ veces (tres dos sétimos veces) tan grande como 7; 7 está en 23 contenido $3\frac{2}{7}$ veces; 23 es el $3\frac{2}{7}$ *plo* (tres dos sétimos-*plo)* de 7; 7 es la $3\frac{2}{7}$ *ava* (tres dos sétimos-*ava)* parte de 23, se emplean en los cálculos ventajosamente.

Los nuevos números $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}$... se llaman *quebrados*, porque se parte ó quiebra la unidad primitiva para formarlos. El número sobre la raya toma el nombre de *numerador (cuenta* las partes de la unidad); y el de debajo se llama *denominador (denomina* aquellas partes). Con esta notacion de los quebrados se expresa convenientemente algunas veces la division de un número por otro, como por ejemplo, 5 317 : 683, con el quebrado $\frac{5317}{683}$; y entónces las dos expresiones se consideran ó estiman con idéntica significacion ó sentido.

Siendo la unidad arbitraria, y divisible, por lo tanto, en cualquier número de partes iguales ó unidades subalternas, la division será siempre *exacta*, expresándose por completo el cociente sin el auxilio ó con el auxilio de los quebrados.

15. Mas cuando el quebrado que acompaña al entero del cociente es muy pequeño, ó expresa un contrasentido por referirse á una unidad que no puede quebrarse ó partirse, á un *indivíduo* (un hombre v. gr.), se sustituye por 1 ó por 0, segun que su numerador exceda, ó no exceda, de la mitad de su denominador; ó, en otras palabras: segun que semejante quebrado, valga ó no valga, más de $\frac{1}{2}$. Así, 39:11 es más aproximadamente 4 que 3; porque 39 está más próximo á 44 que á 33, siendo 6, resto de la division de 39:11, mayor que la mitad del divisor 11. Por el contrario, 43:8 es más aproximadamente 5 que 6. Como se vé, en estos casos el cociente es *aproximado* ó *inexacto* y la division se dice *inexacta*. Este cociente aproximado puede serlo por exceso ó por defecto.

Ejemplo de cociente aproximado es el *promedio* ó *medio aritmético* de varios números ó valores dados que no difieren mucho los unos de los otros. La suma de estos valores dividida por el número de sumandos dá por cociente el *medio aritmético* de los mismos, que se dá sin quebrado.

Ejemplo. Se trata de hallar el promedio de los cuatro valores:

$$\begin{array}{r} 4\,726 \\ 4\,754 \\ 4\,698 \\ 4\,719 \\ \hline 18\,897 : 4 \\ \hline 4\,724 \end{array}$$

El cociente entero, aproximado por defecto 4 724, es el promedio ó medio aritmético de los valores dados.

Dividiendo las alturas barométricas, ó las temperaturas observadas en un dia, por el número de observaciones hechas, se obtienen como cocientes la altura barométrica, ó la temperatura, medias, diurnas. Por el mismo procedimiento se halla el número medio de alumnos por año que asisten á las clases de una escuela durante un quinquenio, decenio, etc.; el número medio de defunciones ó nacimientos por dia, mes y año, en una localidad; y, por último, el precio medio de la unidad (arroba, libra, onza, fanega, etc.) de varias sustancias, ó de una misma sustancia de diferentes clases, cuando es posible su mezcla. Este precio medio, ó precio de la mezcla, se halla dividiendo la suma de los valores de todas las diversas sustancias mezcladas por el número total de sus unidades (arrobas, libras, fanegas, cuartillas, etc.); y el procedimiento para encontrarlo lleva el nombre de *Regla de aligacion directa*, ó *Regla medial*.

16. Observaciones prácticas. La Tabla pitagórica

contiene los múltiplos sucesivos de las cifras significativas que llamamos números dígitos (*Int.* 5) y son sus argumentos, ó los factores de aquellos productos. Y, como las cifras de todo cociente se hallan una á una, claro es que dicha Tabla es un poderoso auxiliar tambien en este caso.

La aplicacion de los principios expuestos anteriormente se patentiza en el ejemplo que sigue:

$$\begin{array}{l} 253\ 827 : 385 = 659\frac{112}{385} \\ \underline{231\ 0} \\ 22\ 82 \\ \underline{19\ 25} \\ 3\ 577 \\ \underline{3\ 465} \\ 112 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{659\frac{112}{385} \cdot 385} \\ 197\ 7 \\ 52\ 72 \\ 3\ 295 \\ \underline{112} \\ 253\ 827 \end{array}$$

La primera (más elevada) cifra del cociente se obtendrá tomando de las cifras más elevadas del dividendo cuantas sean menester para que formen un número igual al divisor, ó mayor que éste, considerado, por de pronto, como de igual órden que la última de las cifras tomadas del dividendo. En este ejemplo, pues, tomamos del dividendo sus 2538 centenas y razonamos de este modo: el divisor 385 se halla contenido en 2538 centenas tantas veces próximamente como 3 centenas en 25 centenas; y más aproximadamente todavía, como 4 centenas en 25 centenas (porque el divisor 385 está más próximo á 400 que á 300). La Tabla pitagórica enseña que, en el primer caso, 3 centenas están contenidas 8 veces en 25 centenas; pero, multiplicando esta cifra 8 por el divisor, su producto por las decenas de éste que son 8, nos dá 6 centenas que con las 24 resultantes del producto de las 3 centenas del divisor por aquella cifra 8, suman 30 y en el dividendo hay 25 solamente; de lo cual deducimos que la cifra 8 del cociente es mayor que la verdadera. Y procediendo así, evidente es que no hallaremos para el cociente cifra menor que la verdadera; porque en las centenas del dividendo, no sólo están las centenas resultantes del producto de las centenas del divisor por la cifra buscada del cociente, sino tambien, como hemos indicado ántes, las centenas que provienen del producto de las decenas del divisor por aquella cifra y las que puede contener el resto si lo hubiere. En el segundo caso, hallamos que 4 centenas están contenidas 6 veces en 25 centenas; y multiplicando el divisor por la cifra 6, vemos que el producto resultante, 2310 centenas, es menor que el dividendo parcial tomado primeramente, 2538. Debe advertirse, que al proceder de este modo, ó sea aumentando algo el divisor, tambien debemos aumentar un poco la cifra que resulte para el cociente; como en el curso de esta misma division veremos.

Continuándola, escribimos el producto 2310 centenas debajo del dividendo, y le sustraemos de éste; y á la derecha de las 228 centenas del resto colocamos las 2 decenas del dividendo: con lo cual será el segundo dividendo parcial, 2282 decenas. El divisor 385 se halla contenido en 2282 decenas tantas veces próximamente como 22 decenas en 4 decenas, ó sean 5 veces. Multiplico el divisor por esta cifra 5, y el producto 1925 decenas, menor que el dividendo, lo sustraigo de éste; y á la derecha del resto, 357 decenas, escribo la cifra 7 de las unidades del dividendo dado, y formo así el tercero y último dividendo parcial, 3577 unidades. El divisor 385 está contenido en 3577 unidades tantas veces próximamente como 4 unidades en 35 unidades; y aquí aumento la cifra del cociente hasta 9, segun ya dijimos, por más que 9 multiplicado por 4 sean 36 y no 35. Y, en efecto, multiplicando aquella cifra 9 por el divisor, el producto resultante, 3465, es menor que el dividendo, del cual lo sustraigo y hallo, por último, el resto 112. Este resto, como la operacion exige, lo divido tambien por el divisor, y lo escribo así indicado, en forma de quebrado, á la derecha del cociente entero para completarlo.

Las cifras del cociente, considerado el divisor como abstracto, son homogéneas con los dividendos parciales, ó del mismo órden que estos dividendos, respectivamente.

Como ejercicio, y para *prueba* de que está bien hecha la division, debe multiplicarse el divisor por el cociente para ver si obtenemos de producto el dividendo. Y al efectuar esta prueba hay que notar que la 385ª parte de 112, tomada como sumando 385 veces, ó multiplicada por 385, dá el entero 112.

Si el divisor termina en ceros puede prescindirse de ellos y de otras tantas cifras del dividendo, durante el cálculo. Por ejemplo:

$$327\,456 : 6400 = 3274{,}56 : 64{,}00 = 51\frac{1056}{6400}$$

$$\begin{array}{r} 320 \\ \hline 74 \\ 64 \\ \hline 10 \end{array}$$

Pues $327400 : 6400 = 3274 : 64$, en virtud de que 64 centenas se hallan contenidas en 3274 centenas tantas veces como 64 en 3274.

Para dividir por 15 se divide por 3 la 5.ª parte del dividendo. Así, la 5.ª parte de 90 es 18 que, dividido por 3, dá $6 =$ cociente de 90 por 15. Para dividir un número por 25 se divide el cuádruplo de aquel número por 100. Así:

$$875 : 25 = \frac{875 \times 4}{100} = 35.$$

Pero, si el divisor no es descomponible en factores, no puede procederse en la division como en la multiplicacion.

Así, por ejemplo, podemos multiplicar por $6 \times 7 + 1$ en lugar de multiplicar por 43; mas no podremos dividir por $6 \times 7 + 1$ en lugar de dividir por 43: y esto se demuestra por la ley de la division escrita al principio: ley que relaciona el dividendo con el divisor y el cociente.

Para dividir por 4, se mira entre cuáles de los números 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280... se halla comprendido el dividendo; etc.

CUESTIONARIO.

¿Qué es dividir un número por otro? ¿Qué número se llama *dividendo*, cuál *divisor*, y cuál *cociente?* ¿Cuál es el signo de la division? ¿Qué es *cociente indicado?* ¿Cuál es la ley de la division? ¿Cuándo el cociente es *parte alícuota* y cuándo *razon?* ¿Qué es *resto* de una division? ¿Qué es *fraccion ó quebrado?* ¿Qué es *cociente aproximado?* ¿Cuándo es forzoso este cociente? ¿Qué es altura barométrica, ó temperatura *media diurna?* ¿Qué es *regla de aligacion directa?* Otros ejemplos de medios aritméticos de uso frecuente.

¿Cómo se divide una suma, y una diferencia, de varios múltiplos de un número, por este número? ¿Cómo se aplica esta ley á la de la division con resto? ¿Cómo se divide un producto de varios factores por ún número, y un número por un producto de varios factores? ¿En qué casos permanecerá invariable un producto? ¿Qué alteraciones sufrirá el cociente sin quebrado, cuando el dividendo, ó el divisor, se multiplique por un número, ó se divida por un factor suyo? ¿Qué alteraciones sufrirá el cociente sin quebrado, cuando dividendo y divisor se multipliquen por un mismo número, ó se dividan por un mismo divisor suyo? ¿Qué alteraciones sufrirá el cociente con quebrado en los mismos casos?

4.—Cálculo con los números concretos.

17. Para evitar quebrados se han dividido las diferentes unidades de medidas en partes que generalmente lle—

van nombres particulares. Las unidades mayores sirven así para simplificar la expresion de un número crecido de unidades subalternas, pequeñas.

Sistema antiguo de Castilla.

UNIDADES MONETARIAS.

La unidad monetaria, al adoptar el sistema métrico, era el *real*, equivalente á 34 maravedises, y despues á 10 décimas, ó 100 céntimos.

MONEDAS DE ORO.

Onza de oro..............	=	320	reales.
Media onza..............	=	160	»
Centen.................	=	100	»
Ochentin...............	=	80	»
Escudo de oro............	=	40	»
Escudito...............	=	20	»
Escudito viejo...........	=	21	1/4

DE PLATA.

Peso fuerte ó duro........	=	20	reales.
Medio duro..............	=	10	»
Peseta..................	=	4	»
Media peseta............	=	2	»
Real....................	=	34	maravedises
Peseta columnaria.........	=	5	reales.
Media peseta, id..........	=	2	1/2
Real columnario..........	=	1	1/4

DE COBRE.

Dos cuartos..............	=	8	maravedises.
Cuarto.................	=	4	»
Ochavo.................	=	2	»
Medio real..............	=	5	décimas
Cuartillo...............	=	25	céntimos.
Doble décima............	=	20	»
Décima.................	=	10	»
Media décima............	=	5	»

Las monedas *imaginarias*, así llamadas porque no hay moneda efectiva que las represente, eran el *doblon*, de 60 reales; el *peso*, de 15 reales; y el *ducado*, de 11 reales.

UNIDADES DE CUENTOS.

Gruesa (12) *docenas* (12) piezas (cosas, objetos, etc.)

Sesentena (4) *quincenas* (15) cosas (generalmente *dias* de trabajo).

Bala (10) *resmas* (20) *manos* (5) *cuadernillos* (5) *pliegos.*

UNIDADES DE TIEMPO.

Dia (24^h) *horas* (60^m) *minutos* (60^s) *segundos. Siglo* = 100 años. *Lustro* = 5 años. El año se considera de 12 *meses*, de 30 dias cada uno, para los negocios comerciales ordinarios.

UNIDADES ANGULARES.

Circunferencia (2) ángulos *llanos* (2) *rectos* (90°) *grados* ($60'$) *minutos* ($60''$) *segundos.*

UNIDADES DE LONGITUD Ó LINEALES.

El patron era la *vara* de Búrgos.

Vara (3) *piés* (12) *pulgadas* (12) *líneas* (12) *puntos.*

La *legua* tiene $6666\frac{2}{3}$ varas = 20000 piés. El *estadal* tiene 4 varas = 12 piés. La legua *marina* (3) *millas* (10) *cables* (111) *brazas* (6) piés. *Codo* = 2 piés y 9 líneas.

UNIDADES DE SUPERFICIE Ó CUADRADAS.

Las unidades cuadradas, en general, son cuadrados cuyos lados son respectivamente las unidades de longitud. Así, una *vara cuadrada* es un cuadrado □ cuyo lado es 1 vara; y, como la vara tiene 3 piés de largo, 1 vara cuadrada tendrá $3 \times 3 = 9$ piés cuadrados. El *estadal cuadrado* tendrá, por lo tanto, 16 varas cuadradas = 144 piés cuadrados.

La *fanega* tiene 576 estadales cuadrados; y la *aranzada* 400 estadales cuadrados.

UNIDADES DE VOLÚMEN Ó CÚBICAS.

Las unidades cúbicas son generalmente cubos cuyos lados son las unidades de longitud. Así: 1 *vara cúbica* es un cubo cuyo lado ó arista tiene 1 vara; y, como la vara tiene 3 piés, 1 vara cúbica tendrá $3\times3\times3=27$ piés cúbicos.

Para los áridos el patron era la *media fanega* de Ávila, equivalente á 2220 pulgadas cúbicas.

Cahíz (12) fanegas (12) *celemines* (4) *cuartillos*.

Para los líquidos, excepto el aceite que va al peso (cuarteron $=$ *panilla*), el patron de las medidas era la *cántara* de Toledo, equivalente á 1289 $\frac{6}{10}$ pulgadas cúbicas.

Sus múltiplos y divisores: *moyo* (16) cántaras (8) *azumbres* (4) *cuartillos* (4) *copas*.

UNIDADES DE PESO.

El patron era el *marco* de Castilla, equivalente al peso de $18\frac{42}{100}$ pulgadas cúbicas de agua pura.

Tonelada (20) *quintales* (4) *arrobas* (25) *libras* (16) *onzas* (16) *adarmes* (3) *tomines* (12) *granos*.

Libra medicinal (12) onzas (8) *dracmas* (3) *escrúpulos* (24) granos.

Marco (8) onzas (8) *ochavas* (6) tomines (3) *quilates* (4) granos.

18. Un precio, expresado en duros, pesetas y reales; una distancia, expresada en piés, pulgadas y líneas; un peso, expresado en arrobas, libras y onzas, etc., representan *números complejos*. Es decir que un número complejo es un número concreto, expresado en unidades de diversos órdenes. *Incomplejo* es el número concreto de una sola especie ú órden de unidades.

Dado un número complejo, pueden *resolverse*, por multiplicacion, sus unidades superiores en las inferiores; y las inferiores, por division, *reducirse* á las superiores. Así, las onzas de oro se resolverán en duros, multiplicándolas por 16 : de modo que 25 onzas de oro valen tanto como $25 \times 16 = 400$ duros. Y las pesetas se reducirán á duros, dividiéndolas por 5; los reales se reducirán á pesetas dividiéndolos por 4 : de modo que 32 pesetas valen tanto como $32 : 5 = 6\frac{2}{5}$ duros $= 6$ duros y 2 pesetas. 342 reales valen tanto como $342 : 4 = 85\frac{1}{2}$ pesetas $= 85$ pesetas y 2 reales.

Ejemplo (Schema).

54 onzas, 12 duros, 4 pesetas.

864
12
876 duros.
4380
4
4384 pesetas.

4384 pesetas : 5 = 876 duros : 16 = 54 onzas.
38 — 76
34 — 12 duros
4 pesetas.

Sabiendo *resolver* un número complejo, la razon de dos números de esta clase se halla fácilmente. La razon de 24 *arrobas* y 15 *libras* á 4 *arrobas* y 23 *libras* se hallará resolviendo en libras sus dos términos, dados, que son entónces 615 libras y 123 libras respectivamente; y la razon buscada, por consecuencia, 615 libras : 123 libras. Ahora bien, 123 libras se hallan 5 veces contenidas en 615 libras; y resulta, por fin, que la razon buscada es 5; es decir : que 4 *arrobas* y 23 *libras* se hallan contenidas 5 *veces* en 24 *arrobas* y 15 *libras*. Este problema se conoce generalmente por *division de concretos homogéneos*. Sirva para su mayor esclarecimiento este otro ejemplo : el sonido recorre en 1 segundo 408 varas; ¿cuántos segundos empleará en recorrer 1 legua? Tantos segundos como unidades tenga la razon de 1 legua ($6666\frac{2}{3}$ varas) á 408 varas.

19. Los números complejos se calculan de la misma manera que los de varias cifras (que constan de unidades, decenas, centenas, etc.)

En la adicion, la sustraccion y la multiplicacion de los números complejos, se comienza la operacion por las unidades inferiores; en la division, por las superiores. Pueden tambien *resolverse* desde luego los números dados en sus unidades inferiores, y *reducirse* despues los resultados.

EJEMPLOS:

Adicion.

3	3	
34 onzas	14 duros	18 rs.
+ 20	10	14
+ 31	11	13
+ 52	15	17
140 onzas	53	62
	5 duros	2 rs.

Sustraccion.

140 onzas	5 duros	2 rs.
— 34	14	18 (*)
105	6	4
— 20	10	14
84	11	10
— 31	11	13
52	15	17

Multiplicacion.

(3 arrobas	18 libras	14 onzas) × 15
11	13	210
45	90	208 = 13 libras.
	18	
56 arrobas		2 onzas
	283	
	8 libras	

Se multiplican primeramente 14 onzas por 15, y del producto 210 quito 208 onzas que tienen 13 libras, y quedan 2 onzas que coloco debajo de la raya, y las 13 libras debajo de las libras, para sumarlas luego con el producto

(*) En vez de sustraer 18 rs. de 1 duro y 2 rs., ó de 22 rs., pueden sustraerse 18 rs. de 20 rs. y agregar luego 2 á la diferencia (2).

de 18 libras por 15. De este producto y de las 13 libras consabidas resultan 283 libras, ó bien 11 arrobas = 275 libras, y 8 libras. Dejo las 8 libras en el sitio de las libras y las 11 arrobas las coloco debajo de las 3 arrobas, para sumarlas con el producto de 3 arrobas por 15, esto es, con 45 arrobas.

Para efectuar la operacion del otro modo que indicamos ántes, resolveremos el multiplicando segun á continuacion se expresa:

```
 3 arrobas 18 libras 14 onzas
 ____
   75
   18
 ____
   93
  558
   14
 ____
 1502 onzas × 15
 ____
 1502
  7510
 _____
 22530 onzas : 16 = 1408 libras : 25 = 56 arrobas.
   65                158
   130                 8 libras.
     2 onzas
```

Para que más claro vea el lector cómo se aplican rigurosamente los principios (8) de la multiplicacion á las cuestiones prácticas que por aquella operacion se resuelven, enunciamos los siguientes ejemplos:

a) El sonido recorre en 1 segundo 408 varas; ¿cuántas recorrerá en 20 segundos? El producto, homogéneo con el multiplicando, será 408 varas × 20; siendo el multiplicador (abstracto) la razon de 20^s á 1^s, ó sea 20.

b) En 20 dias hacen un muro 5 albañiles; ¿en cuántos dias le hará 1 albañil? El producto, *valor de la unidad* en este caso, será 20 dias × 5; siendo 5 el multiplicador abstracto, ó razon de 5 albañiles á 1 albañil.

c) Y lo mismo sucede en este otro problema: Con cierta cantidad de víveres se mantienen 5 hombres 2 meses; ¿para cuántos dias tendrá 1 hombre? El producto, homogéneo con el multiplicando, exige que se resuelva éste en dias; y, hecho así, aquél será 60 dias $\times$ 5 $=$ 300 dias.

Division.

28 varas	2 piés	$2\frac{94}{96}$ pulgadas $=$ cociente.
(2759 varas	2 piés	10 pulgadas) : 96
192	213	276
839	215	286
768	192	192
71 varas	23 piés	94 pulgadas.

Hallo primeramente 2759 varas : 96 $=$ 28 varas. El resto 71 varas lo resuelvo en piés, multiplicándolo por 3, y el producto 213 lo coloco debajo de los 2 piés del dividendo; sumo los dos números de piés, y la suma 215 la divido por 96, y hallo de cociente 2 piés. El resto $=$ 23 piés lo resuelvo en pulgadas, multiplicándolo por 12, y el producto 276 lo coloco debajo de las 10 pulgadas del dividendo; sumo los dos números de pulgadas, y divido la suma 286 por 96, hallando al fin, para cociente, $2\frac{94}{96}$ pulgadas.

Efectuemos ahora la misma operacion, resolviendo el complejo dividendo.

2759 varas 2 piés 10 pulgadas
8277
2
8279 piés
16558
10
99358 pulgs : 96 $=$ 1034 pulgs : 12 $=$ 86 piés : 3 $=$ 28 vs.
335   74   26
478   2 pulgadas   2 piés
$\frac{94}{96}$ pulgadas

Por vía de ejercicio puede verificarse la prueba, multiplicando el cociente por el divisor, como sigue:

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{(28 \text{ varas} \quad 2 \text{ piés} \quad 2\tfrac{94}{96} \text{ pulgadas}) \times 96} \\
\hline
\quad 71 & 23 & 94 \\
\quad 168 & 192 & 192 \\
252 & \overline{} & \overline{} \\
\overline{} & 215 & 286 \\
2759 \text{ varas} & 213 & 276 \\
 & 2 \text{ piés} & 10 \text{ pulgadas}
\end{array}$$

El quebrado $\frac{94}{96}$ de pulgada, multiplicado por 96, dá 94 pulgadas, debajo de las cuales coloco el producto 2 pulgadas $\times$ 96 $=$ 192 pulgadas. El cociente 286 pulgadas : 12 $=$ 23 piés, lo coloco debajo de los 2 piés, y con él sumo el producto 2 piés $\times$ 96 $=$ 192 piés; etc.

En este ejemplo el divisor es abstracto, y el cociente, por lo tanto, parte alícuota del dividendo. En el ejemplo resuelto ántes es el cociente (razon) abstracto, y homogéneos dividendo y divisor. Para fijar bien las ideas acerca de esta operacion, ponemos los ejemplos que siguen:

a) La luz recorre en 8^m y 18^s la distancia del Sol á la Tierra, que comprende 23 300 rádios terrestres ecuatoriales, por término medio. ¿Cuántos rádios recorrerá en 1^s? El cociente, homogéneo con el dividendo (radios), será la parte alícuota del mismo, determinada por el número abstracto, ó razon de 8^m 18^s á 1^s, ó sea de 498^s á 1^s, esto es: 498. El cociente, pues, será la 498^a parte de 23 300.

b) Una bala de cañon sale del arma con una velocidad de 680 varas por segundo; y una piedra, arrojada con la mano, con una velocidad de 24 varas solamente. ¿Cuántas veces tanto (cuánto es mayor, ó cuántas veces es mayor, se dice vulgarmente) es la una velocidad como la otra? La razon de 680 varas á 24 varas es el cociente.

c) Lo mismo sucede en este otro problema. En un reloj hay dos ruedas engranadas, con 54 dientes una y con 6 la otra. ¿Cuántas vueltas dará la rueda pequeña miéntras dá una la grande? ¿Cuánto más rápidamente, suele decirse, gira la una que la otra?

d) Un trabajador hace una obra en 20 dias; ¿en cuántas horas harán la misma obra 10 trabajadores? El cociente, *valor de varias unidades* en este caso, debe ser parte alícuota del dividendo que se convertirá en horas para hacerle homogéneo con aquél. Hecho así, el cociente será la 10ª parte de 480 horas, ó 48 horas.

En los problemas enunciados debe tenerse muy en cuenta que el valor de la *unidad* figura *expresamente*, ya como resultado ó ya como dato.

Para resolver *(valuar)* el quebrado $\frac{5}{7}$ de peseta, se calcula la 7ª parte de 5 pesetas, ó sea de 20 reales, y se encuentran $2\frac{6}{7}$ reales.

Del mismo modo, para resolver $\frac{6}{7}$ de real, se calcula la 7ª parte de 6 reales, ó bien de 204 maravedises, y se encuentran $29\frac{1}{7}$ maravedises. Por lo cual valen $\frac{5}{7}$ de peseta 2 reales y $29\frac{1}{7}$ maravedises.

20. En los cálculos más sencillos acerca del tiempo, ó bien se busca el tiempo comprendido entre dos fechas ó términos, ó bien uno de estos términos ó fechas, dado el otro y el tiempo comprendido entre ambos.

a) ¿Cuánto tiempo media desde el 29 de Octubre de 1818 hasta el 17 de Marzo de 1832?—Desde el 29 de Octubre de 1818 hasta el año siguiente 1819, van $3 + 30 + 31 = 64$ dias; desde el año 1819 hasta 1832 hay 13 años, y 76 dias más hasta el 17 de Marzo ó el 16 inclusive. Luego el tiempo que se busca comprende 13 años y 140 dias.

¿Cuánto tiempo media desde el 12 de Mayo de 1815 hasta el 7 de Setiembre de 1837? Desde el 12 de Mayo (este dia inclusive) hasta el 7 de Setiembre de 1815 hay 118 dias; y hasta el mismo dia 7 de Setiembre de 1837 hay 22 años más.

b) Despues del 21 de Junio de 1820, hasta que sucedió un acontecimiento, pasaron ó trascurrieron 13 años y 216 dias; ¿cuál es la fecha del acontecimiento? 194 dias despues del 21 de Junio es el 1.º de Enero de 1821; los 22 dias restantes (de los 216), y los 13 años más, dan la fecha de 23 de Enero de 1834.

c) 56 años y 86 dias ántes del 7 de Marzo de 1844 se verificó un hecho; ¿cuál es su fecha? 67 dias ántes del 7 de Marzo de 1844 es el último dia de Diciembre de 1843; 19 dias y 56 años ántes, era el 12 de Diciembre de 1787.

Estos problemas se resuelven con ménos exactitud y en la práctica se hace así algunas veces, cuando se toma el año de 12 meses á 30 dias cabales cada mes.

CUESTIONARIO.

¿Qué son medidas? ¿Por qué se han dividido las diferentes unidades de medidas en unidades subalternas? ¿Cuáles eran las unidades monetarias de Castilla ántes de establecerse el sistema métrico decimal? ¿Cuáles las de longitud, superficie, volúmen y peso? Las unidades angulares y de tiempo, ¿subsistirán sin variacion, aún despues de establecido el sistema métrico decimal?

¿Qué son números complejos é incomplejos? ¿Cómo se resuelven y se reducen? ¿Cómo se halla la razon de dos números complejos? ¿Hay diferencia esencial entre estos números y los decimales, llamados abstractos, en cuanto á sus operaciones?

¿Cómo se suman y se restan los números complejos?

¿Cómo se multiplican, en el caso de que sea entero el multiplicador? ¿Tiene sentido la multiplicacion de un número concreto por otro, tal como 5 duros × 2 duros? ¿Cuál es el verdadero concepto de las áreas y los volúmenes que son productos de factores, al parecer, todos concretos? ¿Puede un producto expresar el valor de varias unidades y el de una?

¿Cómo se divide un número complejo por un entero abstracto, y dos complejos homogéneos el uno por el otro? ¿Puede un cociente expresar el valor de una unidad y el de varias? ¿Cuándo deben hacerse homogéneos el dividendo y el cociente? ¿Cuándo el dividendo y el divisor?

5.—Proporcionalidad de las cantidades. (*).

21. Una cantidad se dice *dependiente* de otra, cuando una variacion de esta última lleva consigo una variacion en la primera. Así, por ejemplo, la longitud de una barra de metal es dependiente de la temperatura; porque una variacion en la temperatura produce un alargamiento ó un acortamiento en la barra. El precio de una mercancía depende de su cantidad, de su bondad, de su rareza, del pedido (demanda), etc.

22. Una cantidad se dice *proporcional* á otra, cuando su dependencia es tal que, haciéndose la segunda varias veces tan grande ó tan pequeña como ántes era, la primera se hace tambien las mismas veces tan grande ó tan pequeña.

El precio de una mercancía es, en muchos casos, proporcional á su peso.

5 libras suelen costar 5 veces tanto como 1 libra.

1 libra suele costar la 7.ª parte de lo que cuestan 7 libras.

Excepciones de esta regla son las piedras preciosas, los cristales, las maderas útiles, y otras materias semejantes.

El trabajo es proporcional á la fuerza.

8 trabajadores hacen 8 veces tanto como 1 trabajador.

1 trabajador ú obrero hace la 4.ª parte de lo que hacen 4 obreros.

(*) Véase el *Álgebra*, Cap. I.

El rédito es proporcional al capital.

19 pesetas producen 19 veces tanto rédito como 1 peseta.

1 peseta de capital produce la 100.ª parte del interés que producen 100 pesetas.

23. Una cantidad se dice *inversamente* (indirectamente) *proporcional* á otra, cuando, si la segunda se hace varias veces tan grande como era, la primera, por el contrario, se hace las mismas veces tan pequeña. Esto es : si la segunda se hace doble, triple, cuádruple... *n*-ple, la primera se hace la mitad, la tercera parte, la cuarta... la *n*.ª parte.

Para un trabajo dado, es el tiempo inversamente proporcional á la fuerza.

4 operarios gastan la 4.ª parte del tiempo que gasta 1 operario.

1 operario emplea 5 veces tanto tiempo como 5 operarios.

Dada la superficie ó el área de un rectángulo, su ancho (latitud) es inversamente proporcional á su largo (longitud.)

Para 60 piés de longitud, su anchura deberá ser la 60.ª parte de lo que fuera para 1 pié de longitud.

Para 1 pié de longitud es necesaria una anchura 50 veces tan grande como la correspondiente á 50 piés de longitud.

Con cantidad fija de provisiones se mantienen:

9 hombres, la 9.ª parte del tiempo que 1 hombre ;

1 hombre, 7 veces tanto como 7 hombres.

Por el mismo precio se trasportan :

3 quintales á la 3.ª parte de distancia que 1 quintal.

1 quintal, 5 veces tan léjos como 5 quintales.

Una cuerda extendida (guitarra), ó el aire en una flauta de órgano (tubo sonoro), en el mismo tiempo, si tiene 3 piés de longitud, verifica la 3.ª parte de las oscilaciones que verificaría con 1 pié de largo; y con 1 pié de largo, 2 veces tantas como con 2 piés de largo.

24. Una cantidad se dice *proporcional al cuadrado ó al cubo* de otra cantidad, cuando, si la última se hace 2, 3, 4,.. veces tan grande como era, la primera se hace 2. 2, 3. 3, 4. 4,..., ó 2. 2. 2, 3. 3. 3, 4. 4. 4,... veces tan grande como era.

Una cantidad se dice *inversamente proporcional al cuadrado* de otra cantidad, cuando, si la segunda se hace 2, 3, 4,... veces tan grande como era, la primera queda reducida á la 2. 2.ª, 3. 3.ª, 4. 4.ª,... parte de lo que era.

El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso, esto es: un diamante vale, si pesa 3 quilates, 3. 3 veces tanto como vale de 1 quilate. Y, si pesa 1 quilate, vale la 2. 2.ª parte de lo que vale pesando 2.

El camino que un cuerpo recorre cayendo libremente, es proporcional al cuadrado del tiempo que tarda el cuerpo en caer. En 4 segundos desciende 16 veces tanto como en 1 segundo; y en 1 segundo, la 9.ª parte que en 3 segundos.

La superficie del cuadrado es proporcional al cuadrado de su lado; y la de un círculo y la de una esfera son proporcionales al cuadrado de sus radios respectivos.

El volúmen del cubo es proporcional al cubo de la arista; y el volúmen de una esfera, proporcional al cubo de su radio. El cubo que tiene 3 piés de arista es 27 veces tan grande como el que tenga 1 pié; y el que tenga la arista de 1 pié ocupa la 64.ª parte del espacio que el cubo que tenga la arista de 4 piés.

La iluminacion de una superficie pequeña es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que media entre la superficie iluminada y el foco de luz, ó cuerpo luminoso, esto es: á 4 piés de la luz, es la 4. 4.ª parte de lo que es á 1 pié de la luz ; y á 1 pié de la luz, 9 veces tan grande como á 3 piés.

El peso de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la Tierra. La longitud del péndulo es inversamente proporcional al cuadrado del número de oscilaciones que verifica el mismo péndulo en un tiempo dado.

CUESTIONARIO.

¿Cuándo se dice que una cantidad es dependiente de otra? ¿Cuándo se dice que dos cantidades son (directamente) *proporcionales?* Ejemplos de cantidades proporcionales.

¿Cuándo se dice de una cantidad que es *inversamente proporcional* á otra? Ejemplos de cantidades inversamente proporcionales.

¿Cuándo es una cantidad *proporcional al cuadrado ó al cubo* de otra? ¿Cuándo es una cantidad *inversamente proporcional al cuadrado* de otra? Ejemplos de cantidades directamente proporcionales al cuadrado y al cubo de otras; y de cantidades inversamente proporcionales al cuadrado de otras.

6.—Regla de tres.

Cuando una cantidad (A) es proporcional á otra (B), y se dan un par de valores correspondientes de las mismas, puede calcularse para otro valor cualquiera de una de ellas (A), el correspondiente de la otra (B). El procedimiento para este cálculo se llama *Regla de tres.*

25. *Problema.*—Si por 9 pesetas compro 7 libras de una mercancía, ¿cuánto me costarán 13 libras?

De la misma cuestion se desprende la *contestacion preliminar* que nos conduce á la *conclusion* que buscamos, á saber :

13 libras cuestan *tantas* pesetas.

El problema dado, en efecto, encierra la *premisa* ó *hipótesis :*

7 libras cuestan 9 pesetas.

De aquí se deduce lo que vale la *unidad*, considerando que 1 libra vale la 7.ª parte que 7 libras ; y esta deduccion constituye la *proposicion media:*

$$1 \text{ libra cuesta } 9 \text{ pesetas} : 7 = \frac{9 \text{ pesetas}}{7}$$

La cual, en términos vulgares, expresa que 1 libra costará 9 pesetas divididas por 7, ó $\frac{9}{7}$ de peseta.

La deduccion de la *pluralidad*, para la cual sólo es preciso recordar (22) que 13 libras cuestan 13 veces tanto como 1 libra, exige tomar 13 veces la 7.ª parte de 9 pesetas, ó sea, la 7.ª parte de 13×9 pesetas. Y efectuándolo así, llegamos á la *conclusion* ó proposicion final :

13 libras cuestan $\frac{9 \text{ pesetas} \times 13}{7}$ (13 veces 9 pesetas, divididas por 7).

Mediante el cálculo consiguiente,

$$9 \times 13 = 117 \text{ y } 117 : 7 = 16\tfrac{5}{7},$$

se obtiene el resultado ó *respuesta* que buscamos :

13 libras cuestan $16\frac{5}{7}$ pesetas.

26. Si la cantidad dada, ó cuyo valor está dado en la respuesta anterior, fuera un número complejo con las mismas especies de unidades que su homogénea, conocida en el problema, ó fuera una cantidad con unidades diferentes de las contenidas en su cantidad homogénea, ántes de proceder á las deducciones enumeradas en la cuestion precedente, deben expresarse ambas cantidades en unidades idénticas. Del uno y del otro caso ofrecen clara idea los dos siguientes ejemplos:

1.° Si por 9 reales 17 maravedises se compran 7 libras 12 onzas, ¿cuánto costarán 13 libras 4 onzas? En lugar de las 13 libras 4 onzas, tomo 212 onzas; y por las 7 libras 12 onzas, 124 onzas. Hecha esta resolucion, se procede como ántes. Tambien pudieran los 9 reales 17 maravedises convertirse en maravedises; pero esto no es necesario (4).

2.° Si por 9 reales 17 maravedises tomo 7 libras de un género, ¿cuánto costarán 24 onzas? En lugar de 7 libras tomo 112 onzas ; y se procede luégo como sabemos.

27. *Problema.*—¿Cuánto tardarán 28 operarios en hacer una obra que ejecutan 16 operarios en 15 semanas?

Resolucion.—16 operarios tardan 15 semanas.

1 operario tardaría 15 semanas × 16 (16 veces tanto).

28 operarios tardarán $\frac{15 \text{ semanas} \times 16}{28}$ (la 28.ª parte que 1).

Cálculo. —
$$\begin{array}{l} 15\times16 \\ \hline 240 : 28 = 8 \text{ semanas y } 3\tfrac{12}{28} \text{ dias; contando} \\ \underline{224} \qquad\quad \text{por 6 dias la semana de trabajo.} \\ 16\times\ 6 \\ \hline 96 \\ \underline{84} \\ 12 \end{array}$$

Respuesta. 28 operarios tardarán 8 semanas y $3\frac{12}{28}$ dias.

28. En muchos casos se estiman cuántas unidades de una cantidad corresponden á 100 unidades de otra ; y aquel número de unidades lleva el nombre de *tanto por ciento* (y se marca con el signo $^0/_0$). Cuando se dice de un capital que produce el 4 por 100 se expresa en realidad que 100 unidades (100 pesetas) en 1 año (12 meses ó 360 dias) dan 4 pesetas de rédito ó interés; y, por lo tanto, que en un mes dan $\frac{4}{12}$, y en un dia, $\frac{4}{360}$ de peseta.

Si los intereses no se separan, pero no producen, sin embargo, intereses, el capital aumentará de este modo:

100 pesetas, despues de 1 año, serán 104 pesetas.

» » 2 » 108 »

....

Y, por consecuencia:

1 peseta valdrá despues de 1 año $\frac{104}{100}$ de peseta

$\frac{100}{104}$ de peseta » » » 1 peseta

....

Aumentar un terreno anualmente en 1 % significa que 100 fanegas, despues de 1 año, serán 101; despues de 2 años, 102, etc.

Pagar una cuenta con 4 % de rebaja es pagar cada 100 pesetas de la cuenta con 96 pesetas al contado.

Pagar una suma de dinero al 5 *por*, ó *en* 100, anual de descuento, quiere decir que en 1 año 100 pesetas son pagadas con 95 pesetas. Pero, con rebaja ó descuento de 4 *sobre* 100, se pagan 104 pesetas con 100 pesetas.

Cuando se dice que los centenes tienen 11 % de premio (agio) se quiere expresar que 100 pesetas en doblones de oro, representan ó valen 111 pesetas en moneda corriente.

Cuando se dice que una clase de papel-moneda está al 87 %, se expresa que 100 pesetas en tal papel valen 87 pesetas en moneda corriente.

Un comerciante vende una mercancía con ganancia de 7 %, cuando por cada 100 pesetas que le costó recibe 107. Perdería, por el contrario, el 3 %, si por cada 100 pesetas de las que dió al tomarla, sólo recibiera 97.

Decir que en un peso hay el 3 % de *tara* significa que en 100 libras (arrobas, etc.) de peso en bruto (con pellejos, banastas, etc.) hay 97 libras de género neto.

El aire atmosférico contiene (en volúmen) el 21 % de oxígeno y el 79 % de nitrógeno, esto es: en 100 unidades de volúmen (litros, por ejemplo) de aire, existen 21 de oxígeno y 79 de nitrógeno.

Alcohol al 80 % es una mezcla, de la cual 100 capacidades (litros, centílitros, etc.) contienen 80 de alcohol neto.

Para estimar la razon de dos cantidades se suele decir, por ejemplo, que una de ellas supera á la otra, ó es superada por la otra, en el 36 %; y ésto significa que, por cada 100 unidades que contenga la segunda, la primera contiene 136 unidades, ó 64 unidades nada más.

Estas definiciones son la base de las hipótesis (premisas) de interesantes problemas cuya resolucion, despues de lo dicho, no ofrece dificultad apreciable.

CUESTIONARIO.

¿Á qué cálculo ó cuenta se dá el nombre de *Regla de tres (áurea)*? ¿Qué son *premisa, proposicion media* y *conclusion?* ¿Qué diferencia hay entre la regla de tres y la multiplicacion y division de complejos? Ejemplos de regla de tres.

¿Qué cuentas llevan el nombre de *percentajes?* ¿Qué es *tanto por ciento?* ¿Qué significa el *descuento* de un capital á un tanto *en* ciento, ó á un tanto *sobre* ciento? ¿Qué significa que tal ó cual papel del Estado está á cierto tanto por ciento? ¿Qué es *tara?* Otros ejemplos de percentajes.

7. — Divisibilidad de los números (*).

29. De los números naturales, unos son simples *(primos);* y otros, múltiplos de números menores *(compuestos)*. Un número es *divisible* (sin quebrado) por otro, cuando está compuesto ó es un múltiplo de este otro. Los múl-

(*) Véase sobre este asunto la *Aritmética universal*, Cap. 13.

tiplos del número 2 se llaman *pares;* los restantes, *impares*.

Admitiendo, para generalizar la idea, que todo número es divisible por sí mismo y por la unidad, los números *primos absolutos* serán aquellos números que contengan los dos divisores expresados, pero ninguno más; y entónces la unidad no puede contarse entre los números primos absolutos.

Los números primos, con excepcion del 2, son todos impares.

Para formar una tabla de números primos (*), se escriben los números impares 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21,..; se tacha el número $3\times3=9$ y los sucesivos que ocupen el tercer lugar, contando siempre desde los tachados exclusive, y con esto habremos tachado los múltiplos de 3; se tacha despues el número $5\times5=25$ y los sucesivos que ocupen los quintos lugares, contando desde los que siguen á los que vayamos tachando; luego el $7\times7=49$, y los sucesivos que ocupen los sétimos lugares, etc.; (contando siempre, por supuesto, los números ya cruzados). Los números que, procediendo como se ha dicho, queden sin tachar, serán números primos. Así:

	3	5	7	(9)	11	13	(15)	17	19
(21)	23	(25)	(27)	29	31	(33)	(35)	37	(39)
41	43	(45)	47	(49)	(51)	53	(55)	(57)	59
61	(63)	(65)	67	(69)	71	73	(75)	(77)	79
(81)	83	(85)	(87)	(89)	(91)	(93)	(95)	97	(99)
101	103	(105)	107	109	(111)	113	(115)	(117)	(119)
(121)	(123)	(125)	127	(129)	131	(133)	(135)	137	139
(141)	(143)	(145)	(147)	149, etc.					

Para verificar los cálculos con mayor facilidad deben

(*) Criba de ERATOSTENES (κοσκίνον, Cribrum) 240 ántes de J. C.) *Nicomaco*, Arithm. I, 17.

grabarse en la memoria los números más pequeños, hasta el 150, por ejemplo, por clases. Entre los números *primos*, además del 2, 3, 5, 7, conviene recordar los siguientes :

11	13	17	19	»	83	»	89
»	23	»	29	»	»	97	»
31	»	37	»	101	103	107	109
41	43	47	»	»	113	»	»
»	53	»	59	»	»	127	»
61	»	67	»	131	»	137	139
71	73	»	79	»	»	»	149

Entre los *compuestos* deben considerarse :

$51 = 3 \times 17$	$98 = 2 \times 49$	$121 = 11 \times 11$
$52 = 4 \times 13$	$102 = 6 \times 17$	$123 = 3 \times 41$
$57 = 3 \times 19$	$104 = 8 \times 13$	$129 = 3 \times 43$
$68 = 4 \times 17$	$111 = 3 \times 37$	$133 = 7 \times 19$
$76 = 4 \times 19$	$112 = 7 \times 16$	$136 = 8 \times 17$
$78 = 6 \times 13$	$114 = 6 \times 19$	$138 = 6 \times 23$
$87 = 3 \times 29$	$116 = 4 \times 29$	$141 = 3 \times 47$
$91 = 7 \times 13$	$117 = 9 \times 13$	$143 = 11 \times 13$
$92 = 4 \times 23$	$119 = 7 \times 17$	$147 = 3 \times 49$

30. Todo número compuesto puede representarse como producto de números primos exclusivamente; y de esta composicion ó construccion del número compuesto deducimos sus *divisores* (en su propio sentido), esto es: los números por los cuales es divisible, ó que se hallan en él contenidos. (*) Así deducimos

$$105 = 21 \times 5 = 3 \times 5 \times 7$$
$$72 = 8 \times 9 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

Por consecuencia : 105 es divisible por los números

(*) Dentro de la *Aritmética vulgar* no cabe la forma general de un número, representado por sus divisores; ni la de estos mismos divisores; ni la de los múltiplos de dos ó más números, etc., etc.

todos primos 3, 5, 7; y por los compuestos $3\times5=15$, $3\times7=21$, $5\times7=35$. El número 72 tiene los divisores 2, $2\times2=4$, $2\times2\times2=8$; 3, $3\times3=9$; $2\times3=6$, $2\times9=18$, $4\times3=12$, $4\times9=36$, $8\times3=24$.

De la misma composicion se deriva tambien que:

3	se halla en 105 contenido	$5\times7=35$	veces.
5	»	$3\times7=21$	»
7	»	$3\times5=15$	»
$15=3\times5$	»	7	»
$21=3\times7$	»	5	»
$35=5\times7$	»	3	»

Si un número es divisible separadamente por 2 y por 3, lo será tambien por $2\times3=6$. Si es divisible por 6 y por 7, lo será por $6\times7=42$.

Por el contrario, si un número es divisible por 4 y por 6, que tienen á su vez el divisor comun 2, no podrá afirmarse que tambien será divisible por $4\times6=24$. Así, por ejemplo, 84 es divisible por 4 y por 6; pero no por $4\times6=24$, sino solamente por $4\times3=12$. Se comprende, por otra parte, que, si los divisores de un número cualquiera tienen á su vez un divisor comun, este divisor comun podrá repetirse ó entrar más veces en el producto de aquellos divisores que en el número dado, divisible por los mismos; y entónces no será divisible este número por el producto expresado.

Para investigar si un número dado es, ó no, primo, se divide por 2, 3, 5, 7... y los siguientes números primos, hasta llegar á uno que, multiplicado por sí mismo, dé un producto mayor que el número dado. El número 193 no es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17; pero $17\times17=289$ es ya mayor que 193: lo cual prueba que este número no puede tener divisores que sean ambos mayores que 17; y como menores hemos visto que no los tiene, resulta que es primo.

Dividiendo, por el contrario, el número 4 680 por los números primos tambien 2, 3, 5..., las veces que se pueda, hallamos la descomposicion siguiente :

$$\begin{array}{rl} & 4\,680 = 2 \times 2\,340 \\ 4\,680 : 2 = 2\,340 & 2\,340 = 2 \times 1\,170 \\ 2\,340 : 2 = 1\,170 & 1\,170 = 2 \times 585 \\ 1\,170 : 2 = 585 & 585 = 3 \times 195 \\ 585 : 3 = 195 & 195 = 3 \times 65 \\ 195 : 3 = 65 & 65 = 5 \times 13 \\ \hline & 4\,680 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 13 \end{array}$$

Dividir 4 680 por el número 2, las veces que se pueda, significa dividirle por 2 desde luego; el cociente resultante por 2 tambien, etc. Y lo mismo por 3.

31. Ya sabemos (1) que todo número que no sea dígito puede representarse como suma de las cifras de diversos órdenes que le constituyen; y que la forma de cada uno de tales sumandos es el producto de una cifra significativa por la unidad seguida de ceros, á saber : 10, 100, 1 000, etc. Luego, conociendo los restos de las divisiones por 2, 3, 5,... de 10, 100, 1 000, etc., sabremos si un número es divisible por aquellos divisores, sin necesidad, como hasta ahora hemos hecho, de efectuar la division por ellos.

a) Un número, dividido por 2 ó por 5, deja el mismo resto que su última cifra. En efecto, $387 = 380 + 7$; pero 10 es divisible por 2 y por 5 : luego 380 lo será tambien, y el resto dependerá exclusivamente de la última cifra 7.

b) Un número, dividido por 4 ó por 25, deja el mismo resto que el número constituido por sus dos últimas cifras. En efecto, $1\,852 = 1\,800 + 52$; pero 100 es divisible por 4 y por 25, y tambien lo será, por consecuencia, 1 800: luego el resto depende exclusivamente del número 52, formado por las dos cifras en que termina el propuesto.

c) Un número, dividido por 3 ó por 9, deja el mismo resto que su suma trasversal, ó suma de los valores absolutos de sus cifras. En efecto: $2837 = 2\,000 + 800 + 30 + 7$; pero 10, 100, 1 000... dividos por 3, y por 9, dejan el resto 1; y, por lo tanto, 20, 200, 2 000... dejarán el resto 2; y 30, 300, 3 000,... el resto 3; etc. Luego el número propuesto deja el mismo resto que la suma $7+3+8+2=20$, de sus cifras.

d) Un número, dividido por 11, deja el mismo resto que la suma de sus 1.ª, 3.ª, 5.ª... cifras, ménos la suma de sus 2.ª, 4.ª, 6.ª... cifras, contando de derecha á izquierda. Por ejemplo:

$$\begin{array}{llllll} 79\,345 = 70\,000 & & +300 & & +5 \\ & +9\,000 & & +40 & \end{array}$$

Ahora bien: 100, 10 000, 1 000 000... divididos por 11, dejan el resto 1; al paso que á los números 10, 1 000, 100 000... les falta 1 para contener enteramente al mismo divisor. De donde se deduce que los números 200, 20 000, 2 000 000... al ser dividido por 11, dejarán el resto 2; y á los números 20, 2 000, 200 000 les faltarán 2 para ser múltiplos de 11; etc. Luego el número propuesto dejará el mismo resto que la diferencia entre la suma $5+3+7$ y la suma $4+9$, esto es: el mismo resto que el número $15-13=2$.

849 023 deja, al ser dividido por 11, el mismo resto que $3+0+4-2-9-8$, ó bien (añadiendo 2×11 al minuendo) que $29-19=10$. Un número será divisible por 11, cuando la diferencia entre la suma de sus cifras de lugar impar y la suma de sus cifras de lugar par sea 0, 11, 22... (múltiplo de 11).

La investigacion de los restos de la division por otros números ó divisores, tales como 7, 13, 17, etc., es ménos sencilla; y, por consecuencia, ménos importante en la práctica. Para conocer si un número es primo no existe ningun criterio sencillo.

32. Para averiguar si dos números, cuya composicion nos es desconocida, contienen un *divisor comun*, se divide el mayor de ellos por el menor ; este último por el resto de la division primera; este resto de la division primera por el resto de la segunda ; y así sucesivamente hasta llegar al resto 0. Si el resto anterior al 0 es 1, los números dados no tienen ningun divisor comun, diferente de 1, y se dicen *primos entre sí (primos relativos)*; mas, si el penúltimo resto es diferente de 1, ese resto será el *máximo comun divisor* de los dos números dados. La demostracion de esta regla se expone en el ejemplo siguiente. Sean 2 812 y 1 292 los números cuyo máximo divisor comun buscamos. Las operaciones explicadas para hallarle son éstas :

2 812	dividido	por	1 292	da el resto	228
1 292	»	»	228	»	152
228	»	»	152	»	76
152	»	»	76	»	0

Disposicion del cálculo.

2)	2 812	1 292	(5
	2 584	1 140	
1)	228	152	(2
	152	152	
	76	0	

Del cálculo se deduce que 2 812 y 1 292 son divisibles por 76; pues 76, por estar contenido en 152, lo estará en 152 $+ 76 = 228$, y tambien en $228 \times 5 = 1\,140$, y en $1\,140 + 152 = 1\,292$; y, por lo tanto, en $1\,292 \times 2 = 2\,584$; y, al fin, en $2\,584 + 228 = 2\,812$.

Dividiendo por 76 los números dados hallamos, en efecto:

$$\begin{array}{r} 2\,812 : 76 = 37 \\ \underline{228} \\ 532 \\ \underline{532} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1\,292 : 76 = 17 \\ \underline{76} \\ 532 \\ \underline{532} \\ 0 \end{array}$$

Pero todo número, contenido en 2 812 y 1 292, lo está tambien en $1\,292 \times 2 = 2\,584$; y, por consecuencia, en $2\,812 - 2\,584 = 228$; y asimismo en $228 \times 5 = 1\,140$; y, por lo tanto, en $1\,292 - 1\,140 = 152$; y, al fin, en $228 - 152 = 76$.

Resulta, por una parte, que el resto 76, hallado como dice la regla, divide necesariamente á los números dados 2 812 y 1 292; y, por otra, que cualquier divisor de estos números lo es tambien del 76. Luego 76 es el *máximo divisor comun* de aquellos números.

El máximo comun divisor se expresa abreviadamente por las tres iniciales *m. c. d.*

Otro ejemplo.

2)	389	143	(1
	286	103	
2)	103	40	(1
	80	23	
1)	23	17	(1
	17	12	
1)	6	5	(5
	5	5	
	1	0	

Para los números 389 y 143 se halla 1 como penúltimo resto. Estos números, de consiguiente, no tienen ningun divisor comun, mayor que 1, y son primos entre sí.

Que por el procedimiento explicado se llega al resto 0, es cosa clara, teniendo en cuenta que los restos sucesivos van disminuyendo.

De lo dicho se desprende que el *m. c. d.* de dos números es divisible por todo factor comun de estos números; y que dos números cualesquiera son divisibles por todo divisor de su *m. c. d.* Lo cual significa que el *m. c. d.* de dos números contiene todos los divisores comunes de estos números; y, por lo tanto, dividiéndolos por su *m. c. d.*, ó despojándolos de todos sus divisores comunes, los cocientes resultantes no tendrán ningun divisor comun y serán *primos entre sí*.

Por esto mismo, el mayor número, simultáneamente contenido en otros tres números cualesquiera, lo está tambien en el máximo comun divisor de dos de ellos. Calculando, pues, el máximo comun divisor de dos de los números dados, y después el máximo comun divisor del hallado ántes y del tercer número, el últimamente encontrado será el máximo comun divisor de los tres números propuestos. Y así se procede cuando son más de tres.

Varios números, cuyo *m. c. d.* es la unidad, son *primos entre sí*. Y tambien *primos entre sí*, pero de *dos en dos*, y no sólo en el conjunto, son aquellos varios números, cada uno de los cuales es primo con cualquiera otro de los que en este concepto se comparan ó consideran.

33. Un número que es múltiplo de otro, esto es, un número en el cual se halla otro contenido, se llama *dividendo* de este último. El *mínimo comun dividendo* ó *mínimo comun múltiplo* de dos números primos, relativos, es el producto de estos números. Así, el mínimo número, en el cual se hallan contenidos como factores 12 y 35, es el producto 12×35. Porque tales números no contienen divisor comun alguno; y en su producto, por consecuencia, no hay factor repetido, ó excedente, que pudiera suprimirse sin que por eso dejase aquel producto de ser divisible por

los números propuestos. El mínimo comun dividendo de los números 12 y 27, cuyo máximo comun divisor es 3, se hallará multiplicando 12 por la 3.ª parte de 27; pues $4\times3=12$ y $9\times3=27$ se hallan contenidos en 12×9. Por otra parte, dividiendo uno de los dos números por el *m. c. d.* de ambos, el cociente resultante y el otro número son primos entre sí; el producto de este número y aquel cociente es su mínimo comun dividendo; y este producto es divisible por los números dados.

Pero, si es cierto que el *m. c. m.* (mínimo comun múltiplo) de dos números es el producto de ambos, dividido por su *m. c. d.*, esta ley falla cuando los números, cuyo *m. c. m.* se busca, son más de dos. Aplicando, en efecto, la ley expresada á los tres números 42, 56 y 63, cuyo *m. c. d.* es 7, hallaríamos que su *m. c. m.* era $6\times56\times63$; y no lo es, sin embargo; sino 8×63 solamente.

De la definicion anterior se colige que todo múltiplo comun de dos números es múltiplo del *m. c. m.* de estos números. Por lo cual: el menor número, divisible por tres números dados, lo es tambien por el mínimo comun dividendo de dos de ellos. Calculando, pues, el mínimo comun dividendo de dos de los números dados, y despues el mínimo comun dividendo del hallado ántes y del tercer número, el últimamente encontrado será el mínimo comun dividendo de los tres números propuestos. Y así se procede cuando son más de tres.

CUESTIONARIO.

¿Qué números se llaman *simples ó primos absolutos* y cuáles *compuestos?* ¿Cuándo se dice que un número es *divisible* por otro ó *múltiplo* de otro? ¿Á qué especie de cálculo se le dá el nombre de *Criba de Eratóstenes?* ¿Cuál es el procedimiento para averiguar si un número es primo? ¿Hay algun criterio sencillo para conocer si un número es primo? ¿Le hay para conocer los divisores de un número compuesto? ¿Cuál es la regla general de divisibilidad en el sistema decimal? ¿Cuándo será un número divisible por 2 y 5, 4 y 25, 8 y 125....; 3 y 9, y 11?

¿Cómo se averigua si dos números tienen un divisor comun? ¿Qué es *máximo comun divisor* de dos números, y cómo se halla? ¿Cómo se halla el de tres ó más números? ¿Qué son números *primos entre sí,* y *primos entre sí de dos en dos?*

¿Qué es *mínimo comun dividendo* ó *mínimo comun múltiplo* de dos ó más números? ¿Cómo se halla?

LIBRO II.

CÁLCULO CON LOS QUEBRADOS COMUNES.

8.—De los quebrados.

34. Un quebrado es el cociente del numerador por el denominador. Dividida la unidad en tantas partes iguales como expresa el denominador, el quebrado contiene tantas de estas partes como indica su numerador. Así, $\frac{5}{7}=5:7$, contiene 5 partes de las 7 en que la unidad fué dividida. Una de estas partes se llama *unidad fraccionaria.*

El *cociente* 3 : 8 expresa la 8.ª parte de 3; pero, si la unidad se divide en 8 partes iguales y se toman 3 de estas partes, el cociente anterior ya expresa el 3-*plo* de la unidad fraccionaria ú 8.ª parte de la unidad entera; y en este concepto se llama *quebrado.* En uno y otro caso el *cociente* y el *quebrado* tienen igual significacion; y por ésto los quebrados están sometidos á las mismas leyes que los cocientes.

35. Un quebrado se llama *propio* cuando su numerador no es igual á su denominador ni múltiplo de éste; é *impropio,* cuando se verifica lo contrario. Son, pues, quebrados impropios $\frac{7}{7}$, $\frac{14}{7}$, $\frac{21}{7}$, etc. El quebrado propio se denomina

puro, siempre que su numerador sea menor que su denominador; y *espurio*, cuando su numerador sea mayor que su denominador. El quebrado puro es menor que 1; el espurio mayor que 1; el impropio es igual á un número entero.

Un quebrado espurio puede ser descompuesto en un número entero y un quebrado puro: entero y quebrado puro que constituyen el conjunto vulgarmente conocido por el nombre de *número mixto*. Un número mixto puede, á su vez, trasformarse en un quebrado espurio.

Ejemplos:

$$\frac{347}{36} = 347 : 36 = 9\frac{23}{36}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28\,\frac{19}{36} \\ \hline 84 \\ 168 \\ 19 \\ \hline 1\,027 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$= \frac{1\,027}{36}$$

Puesto que $1 = \frac{36}{36}$; y, de consiguiente, $28 = \frac{28 \times 36}{36}$; de donde resulta, por último: $28\frac{19}{36} = \frac{28 \times 36 + 19}{36}$

Un número mixto puede considerarse como un número complejo; y entónces *trasformarle* en quebrado es *resolverle* en las unidades subalternas que denomina el denominador del quebrado que le acompañe; así como *descomponer* un quebrado espurio en un número mixto es *reducirle* á unidades superiores (18). Ya en el ejemplo anterior hemos *resuelto* la unidad en 36.as partes; y hemos *reducido* las 36.as partes á unidades primitivas enteras.

36. Un quebrado puede expresarse de varios modos, sin que su valor se altere, cuando las partes de la unidad, que dicho quebrado contiene, se dividen de nuevo y

se toman al mismo tiempo tantas cuantas sean las partes en que cada una de aquéllas haya sido dividida.

Así :

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}\cdots$$
$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}\cdots$$
$$\frac{5}{7}=\frac{10}{14}=\frac{15}{21}=\frac{20}{28}=\frac{25}{35}\cdots$$

En el primer quebrado, la unidad primitiva (entera) se halla dividida en 2 partes, y aquel quebrado contiene 1. Claro es que si cada una de aquellas 2 partes las divido en 2, resultará la unidad primitiva dividida en 4 partes; y ahora la mitad de ella serán 2 de estas 4 partes, que valen tanto como una de las 2 en que se dividió primeramente. En el quebrado de la segunda línea está la unidad dividida en 3 partes y el quebrado vale 2 de ellas; pero, si cada una la dividimos en 2, la unidad primitiva resultará dividida en 6, y las 2 de ántes valdrán 4 de las nuevas. Es decir que, en ambos casos, numerador y denominador se hacen 2 veces tan grandes como eran. Y evidentemente sucede así en los demás casos. Luego se puede multiplicar el numerador y el denominador de un quebrado por un mismo número cualquiera, sin que el valor del quebrado se altere. Así :

$$\frac{5}{8}=\frac{5\times 7}{8\times 7}=\frac{35}{56}$$

Los 8os pueden convertirse en 144os, porque 144 es divisible por 8, multiplicando numerador y denominador por 144 : 8 = 18. Pero los 8os no podrán convertirse exactamente en 108os; porque 8 no está contenido un número entero de veces en 108.

La expresion de un quebrado se simplifica dividiendo sus dos términos por un divisor comun de los mismos. Si numerador y denominador son primos entre sí (32), el quebrado tiene su expresion más simple y clara, y se llama *irreducible*. Siendo 1 pié $= 12$ pulgadas $= 12 \times 12 = 144$ líneas, serán :

$$1 \text{ pulgada} = \frac{1}{12} \text{ de pié; } 1 \text{ línea} = \frac{1}{12} \text{ de pulgada} = \frac{1}{144} \text{ de pié;}$$

$$3 \text{ pulgadas} = \frac{3}{12} \text{ de pié} = \frac{1}{4} \text{ de pié; y } 8 \text{ líneas} = \frac{8}{12}$$

$$= \frac{2}{3} \text{ de pulgada.}$$

$$7 \text{ pulgadas y } 6 \text{ líneas} = 90 \text{ líneas} = \frac{90}{144} \text{ de pié} = \frac{5}{8} \text{ de pié.}$$

El quebrado $\frac{4}{7}$ puede aproximadamente convertirse en 12os, multiplicando sus dos términos por 12, y dividiendo luego (aproximadamente) por 7. Así :

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 12}{7 \times 12} = \frac{48 : 7}{12} = \frac{7}{12}, \text{ más exactamente que } \frac{6}{12} \text{ (15).}$$

La trasformacion explicada de los quebrados puede tambien evidenciarse diciendo: 7×9 se halla contenido en 5×9 tantas veces como 7 *pesetas* en 5 *pesetas*, ó como 7 en 5; y, por lo tanto :

$$\frac{5 \times 9}{7 \times 9} = \frac{45}{63} = \frac{5}{7}.$$

Estas trasformaciones por division se aplican particularmente en las operaciones de multiplicar y dividir los quebrados. Multiplicando su numerador y su denominador se reducen los quebrados al mismo denominador; y en esta forma, ya se comparan, se suman y se restan.

9.—Adicion y Sustraccion de quebrados.

37. Para sumar ó restar quebrados, con el *mismo* denominador, se suman ó se restan sus numeradores. Así: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$; porque 2 partes + 3 partes, de las 7 que la unidad contiene, son 5 partes de estas mismas 7.

$$2\frac{3}{5}+3\frac{2}{5}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+2+3=6$$

$$\frac{9}{11}-\frac{4}{11}=\frac{9-4}{11}=\frac{5}{11}$$

$$1-\frac{3}{8}=\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

$$6\frac{2}{7}-4\frac{4}{7}=1\frac{5}{7}$$

Para efectuar la sustracion $6\frac{2}{7}-4\frac{4}{7}$, se restan $4\frac{4}{7}$ de 5 que vale $4\frac{7}{7}$, y al resto ó diferencia $\frac{3}{7}$ se añaden $1\frac{2}{7}$ que quedan en el minuendo, despues de quitarle 5; y se obtiene la diferencia $1\frac{5}{7}$, que buscamos.

38. Los quebrados con *diferentes* denominadores se sumarán y restarán, despues de haber sido convertidos en quebrados con denominador comun (36) ú homogéneos.

Los quebrados $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$ se reducirán al comun denominador $5\times7=35$, multiplicando los dos términos del primero por 7, y los del segundo por 5. Los nuevos quebrados $\frac{21}{35}$ y $\frac{20}{35}$, que sustituyen á los anteriores $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$, pueden ya ser sumados y restados.

Los quebrados $\frac{7}{12}$ y $\frac{3}{4}$, al ser reducidos á comun denominador, no darán lugar á un denominador mayor que 12; porque el denominador 4, del segundo, está contenido en 12, denominador del primero. Y, en efecto:

$$\frac{3}{4}=\frac{3\,.\,3}{3\,.\,4}=\frac{9}{12}$$

Los quebrados $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{9}$, cuyos denominadores tienen el divisor comun 3, no darán lugar al denominador comun 12×9, sino al $12\times3=36$; por lo cual se multiplican los dos términos del primer quebrado por $36:12=3$, y los del segundo por $36:9=4$: y de este modo se obtienen los quebrados $\frac{21}{36}$ y $\frac{20}{36}$, homogéneos, en sustitucion de los dados, $\frac{7}{12}$ y $\frac{5}{9}$, que son hetereogéneos.

39. El mínimo denominador comun, á que deben reducirse los quebrados, es el *mínimo comun dividendo* de sus denominadores (33).

Para calcularlo inmediatamente, se prescinde desde luégo de los denominadores contenidos en otros; y se multiplican los divisores comunes de los restantes por los divisores particulares de los mismos. Sean, por ejemplo,

18, 12, 15, 6, 24, 35, 10, 4, 21, 105, 56

los denominadores de los quebrados que vamos á reducir al mínimo denominador comun. Prescindo desde luégo de los 6, 4 y 12, contenidos en 24; y de los 15, 21 y 35, contenidos en 105. (Una omision en esta operacion prévia no ocasiona error ninguno). De los cinco denominadores restantes,

18, 24, 10, 105 y 56,

tienen el divisor 2 los cuatro, 18, 24, 10 y 56; y su denominador comun, por lo tanto, será 2 veces tan grande como el de los denominadores

9, 12, 5, 105 y 28

Prescindo aquí del 5 contenido en 105. De los restantes

9, 12, 105 y 28,

12 y 28 tienen el divisor 2, y su denominador comun será 2 veces tan grande como el de los denominadores

9, 6, 105 y 14

que es, á su vez, 2 veces tan grande como el de los

9, 3, 105 y 7

Prescindo aquí de 3 y 7, contenidos en 105. Los restantes 9 y 105 tienen el divisor comun 3, y requieren un denominador comun, expresado por el producto $3\times3\times35$. De donde, al fin, se desprende que el mínimo denominador comun que se busca es

$$2\times2\times2\times3\times3\times5\times7=2520.$$

Schema:

18	(12)	(15)	(6)	24	(35)	10	(4)	(21)	105	56	(2
9				12		(5)			105	28	(2
9				6					105	14	(2
9				(3)					105	(7)	(3
3									35		

$$2\times2\times2\times3\times3\times5\times7=2520.$$

Se separan solamente divisores simples comunes (2, 3, 5, 7...) en órden ascendente, para evitar, en cuanto sea posible, que el denominador comun se aumente con factores innecesarios.

Para hallar ahora los números, por que deben multiplicarse los numeradores y denominadores de los quebrados propuestos, aplicarémos las consideraciones hechas anteriormente (38). Así:

$18=2\times3\times3$	en 2520	está contenido	$2\times2\times5\times7=140$	veces.
$12=2\times2\times3$	»	»	$2\times3\times5\times7=210$	»
$15=3\times5$	»	»	$2\times2\times2\times3\times7=168$	»
$6=2\times3$	»	»	$2\times2\times3\times5\times7=420$	»
$24=2\times2\times2\times3$	»	»	$3\times5\times7=105$	»
$35=5\times7$	»	»	$2\times2\times2\times3\times3=72$	»
$10=2\times5$	»	»	$2\times2\times3\times3\times7=252$	»
$4=2\times2$	»	»	$2\times3\times3\times5\times7=630$	»
$21=3\times7$	»	»	$2\times2\times2\times3\times5=120$	»
$105=3\times5\times7$	»	»	$2\times2\times2\times3=24$	»
$56=2\times2\times2\times7$	»	»	$3\times3\times5=45$	»

Ejemplo.

$15\frac{13}{21}$	52	676
$+13\frac{37}{39}$	28	1036
$+28\frac{19}{52}$	21	399
$+35\frac{7}{12}$	91	637
22		2748 : 1092
		2184
93.		$\frac{564}{1092}=\frac{47}{91}$

21	39	52	12	(2
21	39	26	6	(2
21	39	(13)	(3)	(3
7	13			

$2\times2\times3\times7\times13=1092$

$1092:21=52$	$13\times52=676$
$39=28$	$37\times28=1036$
$52=21$	$19\times21=399$
$12=91$	$7\times91=637$

$$\frac{13}{21}=\frac{13 \,.\, 52}{21 \,.\, 52}=\frac{676}{1092};\ \text{etc.},$$

$\frac{2748}{1092}=2\frac{564}{1092}$. Este quebrado puede simplificarse dividiendo sus dos términos por 4 y por 3, esto es, por 12; y resulta entónces el ya escrito arriba $\frac{47}{91}$.

El ejemplo anterior puede tambien resolverse como sigue:

$$\begin{array}{r|r|l} 15\frac{13}{21} & 4 & 52:84 \\ +35\frac{7}{12} & 7 & 49 \\ \hline {}^{1} & & 101 \\ & & 84 \\ \hline 51 \ldots\ldots & & \frac{17}{84} \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|l} 13\frac{37}{39} & 4 & 148:156 \\ +28\frac{19}{52} & 3 & 57 \\ \hline {}^{1} & & 205 \\ & & 156 \\ \hline 42 \ldots\ldots & & \frac{49}{156} \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|l} 51\frac{17}{84} & 13 & \\ +42\frac{49}{156} & 7 & 221:1092 \\ & & 343 \\ \hline 93 \ldots\ldots & & \frac{564}{1092} = \frac{47}{91} \end{array}$$

Restemos ahora:

$$\begin{array}{r|r|l} 93\frac{47}{91} & 3 & 141:273 \\ -15\frac{13}{21} & 13 & 169 \\ \hline 77 \ldots\ldots & & \frac{245}{273} \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|l} 77\frac{245}{273} & & 245:273 \\ -13\frac{37}{39} & 7 & 259 \\ \hline 63 \ldots\ldots & & \frac{259}{273} = \frac{37}{39} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} 63\frac{37}{39} & 4 & 148:156 \\ -28\frac{19}{52} & 3 & 57 \\ \hline 35 \ldots\ldots & & \frac{91}{156} = \frac{7}{12} \end{array}$$

Al efectuar la sustraccion primera de los numeradores de los quebrados ya reducidos al denominador comun 273, se resta el quebrado sustraendo $\frac{169}{273}$, de 1, esto es, de $\frac{273}{273}$, y el resto $\frac{104}{273}$ se agrega al quebrado minuendo $\frac{141}{273}$, resultando el escrito en el ejemplo, $\frac{245}{273}$. Claro es que la unidad que hemos quitado del entero 93, del minuendo, para sustraer de ella el quebrado del sustraendo, hay que tenerla en cuenta al sustraer los enteros del sustraendo de los del minuendo (5).

CUESTIONARIO.

¿Qué es un quebrado? ¿Puede considerarse como cociente? ¿Qué es quebrado *propio* y quebrado *impropio*? ¿Qué es quebrado *puro* y *espurio?* ¿Qué es número mixto? ¿Puede considerarse un número mixto como número complejo? ¿Puede afectar varias expresiones un mismo quebrado? - ¿Qué es quebrado *irreducible?* ¿Qué constituye la homogeneidad en los quebrados?

¿Cómo se suman los quebrados homogéneos? ¿Cómo se reducen los quebrados á su mínimo denominador comun? ¿Cómo se sustrae, en general, un quebrado de otro quebrado?

¿Qué alteraciones sufre un quebrado puro, ó espurio, cuando á su numerador, ó su denominador, ó á los dos, se les agrega un número entero, ó se les sustrae un número entero?

¿Cómo deben ser los quebrados para compararlos sencillamente? ¿Cómo veremos si crecen ó menguan, al crecer ó menguar sus términos?

10. — Multiplicacion y division de un quebrado por números enteros.

40. Para *multiplicar* un quebrado por un número entero se multiplica su numerador. Así $\frac{3}{4}\times 5=\frac{3\times 5}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$. Porque 3 partes, de las 4 que contiene la unidad, tomadas 5 veces, hacen $3\times 5=15$ de tales partes. Ó bien: se obtiene 5 veces la 4.ª parte de 3 tomando la 4.ª parte de $3\times 5=15$.

El quebrado, objeto de la operacion, debe simplificarse, ántes de efectuarla, todo lo posible (36). Por ejemplo:

$$\frac{3}{8}\times 12=\frac{3\times 12}{8}=\frac{3\times 3}{2}=4\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}\times 8=\frac{3\times 8}{4}=3\times 2=6$$

$\frac{3}{8}\times 8=3$, esto es: *quebrado* $\times$ *denominador* $=$ *numerador*.

Pues el quebrado es el cociente del numerador por el denominador, y cociente $\times$ divisor $=$ dividendo (12).

Para multiplicar un *número mixto*, ó se multiplican su quebrado y su entero separadamente, y se suman los productos; ó se resuelve el mixto en quebrado, y se procede como hemos dicho ántes.

Ejemplo.

$$\begin{array}{lll} 86\frac{9}{26}\times 48 & & \\ \hline 16 & 216 : 13 & \\ 688 & 86 & \\ 344 & \frac{8}{13} & \\ \hline 4144 & & \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{l} 86\frac{9}{26}\times 48 \\ \hline 172 \\ 516 \\ 9 \\ \hline \dfrac{2245\times 48}{26} = \dfrac{2245\times 24}{13} \\ \qquad 4490 \\ \qquad 8980 \\ \hline \qquad 53880 : 13 = 4144\frac{8}{13} \\ \qquad 18 \\ \qquad 58 \\ \qquad 60 \\ \qquad 8 \end{array}$$

Lo mismo se procede con los números complejos (19).

41. Para *dividir* un quebrado por un número entero se multiplica su denominador. Así :

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4\times 5} = \frac{3}{20} \quad \text{(se lée : 3 por 4 veces 5).}$$

Si la unidad se hace primero 4 partes, y cada una de éstas se divide luégo en 5 iguales, la unidad quedará dividida en $4\times 5 = 20$ partes. Así se obtiene $\frac{1}{20}$ como la 5.ª parte de $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{20}$ como la 5.ª parte de $\frac{3}{4}$.

Y en comprobacion de lo dicho : el cociente $\frac{3}{20}$ multiplicado por el divisor 5, dá el dividendo $\frac{3}{4}$ (12).

El quebrado, objeto de la operacion, debe simplificarse, ántes de ejecutarla, cuanto sea posible. Por ejemplo:

$$\frac{25}{28} : 15 = \frac{25}{28\times 15} = \frac{5}{28\times 3} = \frac{5}{84}$$

$$\frac{25}{28} : 25 = \frac{1}{28} \qquad\qquad \frac{25}{28} : 5 = \frac{5}{28}$$

Puede tambien dividirse el numerador siempre que no quede resto.

Para dividir un *número mixto*, se divide su entero cuando sea mayor que el divisor; se resuelve el número mixto que quede como resto de la division, y se procede como ántes. Tambien puede desde luego resolverse el mixto en quebrado.

$$\begin{array}{l} 826\frac{5}{8} : 17 = 48\frac{5}{8} \\ \underline{68} \\ \ \ 146 \\ \ \ \underline{136} \\ \ \ \ 10\frac{5}{8} : 17 = \frac{85}{8\times 17} = \frac{5}{8} \end{array}$$

Ó bien: $\dfrac{826\frac{5}{8} : 17}{\dfrac{6613}{8\times 17}} = \dfrac{389}{8} = 48\dfrac{5}{8}$

$52\frac{26}{43} : 39 = 4\frac{2}{43} : 3$; dividiendo las dos partes del número mixto (dividendo), y el divisor, por 13.

Para reducir 18 arrobas $7\frac{1}{5}$ libras á quintales y fraccion de quintal, se hace así:

Desde luégo $7\frac{1}{5}$ libras $= 7\frac{1}{5} : 25$ arrobas $= \frac{36}{125}$ arrobas; despues, $18\frac{36}{125}$ arrobas $= 18\frac{36}{125} : 4$ quintales $= 4\frac{143}{250}$ quintales.

Para resolver ahora en maravedises $\frac{5}{7}$ de peseta, con más brevedad que dijimos (19), se discurre así:

$\frac{5}{7}$ peseta $= \frac{5}{7} \times 4$ reales $= \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$ reales. Y $\frac{6}{7}$ reales $= \frac{6}{7} \times 34$ maravedises $= \frac{204}{7} = 29\frac{1}{7}$ maravedises. Luégo $\frac{5}{7}$ peseta $= 2$ reales y $29\frac{1}{7}$ maravedises.

CUESTIONARIO.

¿Cómo se multiplica un quebrado por un entero? ¿Está completamente de acuerdo esta operacion con la multiplicacion de enteros? ¿De cuántos modos puede multiplicarse un número mixto por un entero?

¿Cómo se divide un quebrado por un entero? ¿De cuántos modos puede hacerse, y cuándo? ¿Cómo se divide un número mixto por un entero? ¿Cómo se *reduce* un número complejo con quebrado? ¿Cómo se *resuelve* sencillamente un quebrado (de unidad concreta)?

11.—Multiplicacion y division por un quebrado.

42. En lugar de la frase práctica, *tomar* 3 *veces la* 4.ª *parte de una cantidad*, se usa esta otra, más breve: *tomar los* $\frac{3}{4}$ *de una cantidad*, y tambien la de *tomar la cantidad* $\frac{3}{4}$ *veces*; si bien esta última no se compadece con el carácter abstracto, de número entero, que atribuimos al multiplicador (10).

Así, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ de 5 quintales son $\frac{3 \times 5}{4}$ ó $3\frac{3}{4}$ quintales. La expresion $\frac{3}{4}$ de 5 quintales no significa sustraccion de un minuendo como á primera vista parece. Por eso con más precision se dice $\frac{3}{4}$ *veces* 5 quintales.

Para *multiplicar por un quebrado*, de consiguiente, se divide por su denominador, y el cociente se multiplica por su numerador; ó bien, se multiplica por su numerador, y el producto se divide por su denominador. Así, para multiplicar una cantidad por $\frac{3}{4}$, v. g., se puede dicha cantidad dividir por 4, y multiplicar por 3 el cociente; ó bien, multiplicarla por 3, y dividir el producto por 4. Porque la 4.ª parte de una cantidad, tomada 3 veces, ó triplicada, es 3 veces tan grande como la 4.ª parte de la cantidad simple.

La frase, *multiplicar por un quebrado*, en contradiccion aparente con el concepto de abstracto y entero, atribuido á todo multiplicador, significa, en resumidas cuentas, multiplicar por un entero y dividir por otro; ó es un modo abreviado, en práctica constante y áun conveniente, de indicar las dos operaciones mencionadas.

Para calcular el rédito de un capital al 4 %, como 100 unidades (pesetas, etc.) de capital producen 4 al año, y 1 produce $\frac{4}{100}$ (28), multiplicaremos por este quebrado aquel capital; y, si fuese al 5 %, por $\frac{5}{100}$; si al 7 %, por $\frac{7}{100}$, etc. El producto será, en cada caso, el interés ó rédito pedido. Para hallar lo que vale el 5 sobre ciento de un capital se multiplica éste por $\frac{5}{105}$.

Para hallar lo que importa un capital al 5 % de descuento se multiplica por $\frac{95}{100}$; para hallar lo que importa un capital al descuento de 4 *sobre ciento*, se multiplicará por $\frac{100}{104}$, etc.

La frase *tanto por ciento* implica el denominador ó divisor 100. La frase *tanto sobre ciento* supone el denominador 100 + *tanto*.

43. Para *multiplicar un quebrado por otro quebrado*, se multiplican entre sí los numeradores y los denominadores. Así:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$$

Porque $\frac{3}{4}$: 7 ó $\frac{3}{4 \times 7}$, multiplicado por 5, da $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$ esto es: 3 veces 5 por 4 veces 7. Y $\frac{3}{4} \times 5$ ó $\frac{3 \times 5}{4}$, dividido por 7, es tambien, como ántes, $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$.

Tambien en este caso, como en el anterior, se dice $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$; por manera que *un quebrado de quebrado* es el producto de los dos quebrados. *Un medio* de *un tercio* es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; *un medio* de *un décimo* es $\frac{1}{20}$; etc.

$$\frac{12}{25} \times \frac{15}{16} = \frac{12 \times 15}{25 \times 16} = \frac{3 \times 3}{5 \times 4} = \frac{9}{20}$$

$$\frac{7}{12} \times \frac{4}{21} = \frac{7 \times 4}{12 \times 21} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{7}{90} \times \frac{8}{21} \times \frac{3}{8} \times 20 = \frac{7 \times 8 \times 3 \times 20}{90 \times 21 \times 8} = \frac{2}{9}$$

Para *multiplicar por un número mixto*, ó se multiplica por su quebrado y por su entero, y se suman los dos productos; ó se resuelve el mixto en quebrado, y se multiplica por este quebrado.

Ejemplos:

$$
45\frac{3}{4}\times 17\frac{2}{3} = \begin{array}{r|l}
\frac{3}{4}\times\frac{2}{3} & \quad\frac{1}{2} \\
45\times\frac{2}{3} & 30 \\
\frac{3}{4}\times 17 & 12\frac{3}{4} \\
45\times 17 & 315 \\
 & 45 \\
\hline
 & =808\frac{1}{4}
\end{array}
$$

Ó bien:

$$
45\frac{3}{4}\times 17\frac{2}{3} = \frac{183\times 53}{4\times 3} = \begin{array}{r}
61\times 53:4 \\
\hline
53 \\
318 \\
\hline
3233:4 = 808\frac{1}{4}
\end{array}
$$

$$
2\frac{11}{12}\times 3\frac{2}{5}\times 2\frac{1}{4}\times 3\frac{1}{17} = \frac{35\times 17\times 9\times 52}{12\times\ 5\times 4\times 17} = \frac{7\times 3\times 13}{4} = 68\frac{1}{4}
$$

No existiendo diferencia esencial, como ya en varias ocasiones indicamos, entre un número mixto y un número complejo; debiendo ser, por otra parte, el multiplicador un número abstracto, una razon de dos números concretos; y afectando esta razon, en el caso más general, la forma de un número mixto; el ejemplo que á continuacion se explica, aunque de carácter particular, es el tipo general de la multiplicacion de un número complejo por otro número complejo.

Segun lo demostrado ántes, para multiplicar un *número complejo* que contenga un quebrado, por el número mixto $27\frac{2}{5}$, se calcula la 5.ª parte del mismo y se multiplica por 2; se multiplica luégo el número dado por 27, y se suman los dos productos; ó se multiplica desde luego la 5.ª parte del número dado por 137. Tambien puede resolverse el *número complejo* dado, multiplicarlo despues por $\frac{137}{5}$, y reducir el producto.

Ejemplo.

$\left(18 \text{ arrobas } 24 \text{ libras } 14\frac{5}{7} \text{ onzas}\right) \times 27\frac{2}{5}$

3 » 19 » $15\frac{26}{35}$ = 5.ª parte del multiplicando.

$(18$ » 24 » $14\frac{5}{7}) : 5$

3	75	64	
	99	78	
	49	28	
	4	$3\frac{5}{7} = \frac{26}{7}$	

$(3$ » 19 » $15\ \frac{26}{35}) \times 2$

1	1	1	52
6	38	30	35
7 »	39	31	
	14 »	15	$\frac{17}{35}$

$(18$ » 24 $14\ \frac{5}{7}) \times 27$

26	24	19	135 : 7
216	168	108	65
27	48	27	$\frac{2}{7}$
512 »	672	397	
	650	320	
	22 »	77	
		64	
		13	

7 » 14 » $15\frac{17}{35}$ = prod. por $\frac{2}{5}$

512 » 22 » $13\frac{2}{7}$ = prod. por 27

Prod. total = 520 arrobas 37 28

12 libras $12\frac{27}{35}$ onzas

Resolviendo el número mixto $27\frac{2}{5}$ en el quebrado $\frac{137}{5}$, la operacion se efectúa de este modo:

$$\left(3 \quad » \quad 19 \quad » \quad 15 \quad \frac{26}{35}\right) \times 137$$

100 125 101 822
9 9 685 274
411 1233 137 3562 : 35
520 » 137 2156 62
2737 2000 35
2500 156 $\frac{27}{35}$
237 144
225 12
12

Resolviendo en onzas el multiplicando, la operacion se hace, por último, como sigue:

18 arrobas 24 libras $14\frac{5}{7}$ onzas
36
90
24
474 libras
2844
$14\frac{5}{7}$
$7598\frac{5}{7}$ onzas

$$\frac{53191}{7} \times \frac{137}{5}$$

53191
159573
372337

7287167 : 35 = 208204 : 16 = 13012 : 25 = 520 arrobas.
287 48 51
71 20 12 libras
167 44
$\frac{27}{35}$ onzas 12 onzas

Se multiplican las arrobas por 25; las libras por 16; y se resuelve en quebrado el número mixto de onzas para multiplicarlo por el otro quebrado (multiplicador).

Otro ejemplo.

La Tierra dá una vuelta, girando alrededor de su eje polar, en 24 horas exactas de tiempo sidereo; y cada uno de sus puntos, por consecuencia, describe en aquel movimiento una circunferencia de círculo. Dividida la circunferencia en 360°, un punto cualquiera de la tierra describirá en una hora un arco de 15° de amplitud; pero la longitud del arco será diferente para puntos que no disten igualmente del ecuador. Un punto que dista del ecuador 40°, ó cuya latitud geográfica sea 40°, describirá ó andará en 1 *hora* un arco de unas 230 *leguas* de largo. ¿Cuántas *leguas* recorrerá el mismo punto en cinco *horas* 42 *minutos* y 36 *segundos*.

El multiplicando, homógeneo con el producto, es 230 leguas; el multiplicador será el número de veces que 1^h esté contenida en $5^h\,42^m$ y 36^s ó sea la razon de 2055 6, segundos á 1 h ó 3 600 segundos, esto es, el número abstracto $20\,556 : 3\,600 = 5\frac{71}{100}$ (despues de simplificado el quebrado.) El producto buscado será, por último, 230 leguas$\times 5\frac{71}{100}$ $= 1313\frac{3}{10}$ leguas.

Este mismo problema puede resolverse por el método llamado de las *partes alícuotas* que se reduce, en general, á descomponer las unidades subalternas del multiplicador en *partes alícuotas* de unidades de órdenes superiores. Así, en el ejemplo dado, descompondremos los 42 minutos en 30 minutos ó $\frac{1}{2}$ hora, y 12 minutos ó $\frac{1}{5}$ de hora; y los 36 segundos que componen la *centésima* parte de 1 hora los dejamos como están; pero los hubiéramos descompuesto en 30 y 6, si conociéramos el valor de 1 minuto.

El cálculo se dispone como sigue :

1 hora	230 leguas
5 horas	1150 leguas
30 minutos ($\frac{1}{2}$ de hora)	115 »
12 minutos ($\frac{1}{5}$ de hora)	46 »
36 segundos ($\frac{1}{100}$ de hora)	$2\frac{3}{10}$ »
5h 42m y 36s	$1313\frac{1}{30}$ leguas

Las 230 leguas son recorridas por un punto de la Tierra, no en 1 hora cabal, sino más aproxidamente en 1 hora y 6^{m} En este caso (en que no figura una unidad como dato ni como resultado) nos valdríamos del procedimiento conocido por *Regla de tres*, resolviendo en segundos los complejos de tiempo y hallando luégo la proposicion media ó valor de la unidad, como sabemos (**6**)

44. Para *dividir por un quebrado* se multiplica por el quebrado inverso (recíproco). Así:

$$3 : \frac{4}{5} = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{3 \times 5}{4} = 3\frac{3}{4}$$

El problema, *dividir* 3 *por* $\frac{4}{5}$, corresponde desde luego al de hallar la razon de 3 á $\frac{4}{5}$, ó se propone hallar cuántas veces $\frac{4}{5}$ se halla contenido en 3. Pero $3 = \frac{3 \times 5}{5}$; y $\frac{4}{5}$ en $\frac{3 \times 5}{5}$ está contenido tantas veces como 4 en 3×5, es decir: $\frac{3 \times 5}{4}$ veces. Este número de veces, $\frac{3 \times 5}{4}$, se deriva de 3 multiplicándole por el quebrado $\frac{5}{4}$ que es el inverso ó recíproco del quebrado $\frac{4}{5}$.

Al mismo resultado conduce el raciocinio siguiente: $\frac{1}{5}$ se halla contenido 5 veces en 1: luégo $\frac{4}{5}$ estará contenido en 1 la 4.ª parte de veces que $\frac{1}{5}$, ó sea, $\frac{5}{4}$ veces; y, por consecuencia, $\frac{4}{5}$ se hallará en 3 contenido 3 veces tanto, ó sean, $\frac{5 \times 3}{4}$ veces.

La exactitud del cociente $3\times\frac{5}{4}$ se patentiza multiplicándolo por el divisor $\frac{5}{4}$, y viendo que resulta el dividendo (12).

Del mismo modo:

$$3\frac{2}{7}:\frac{4}{5}=3\frac{2}{7}\times\frac{5}{4}=\frac{23\times5}{7\times4}=\frac{115}{28}=4\frac{3}{28}$$

$$\text{Porque } 3\frac{2}{7}\times\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}=3\frac{2}{7}$$

Para obtener el cociente por otro camino, se reducen los quebrados á comun denominador. Por ejemplo: $\frac{2}{3}:\frac{3}{5}=\frac{10}{15}:\frac{9}{15}=\frac{10}{9}$. Como si dijeramos 10 pesetas : 9 pesetas.

Merecen notarse los ejemplos siguientes:

$$3\frac{2}{7}:\frac{1}{5}=3\frac{2}{7}\times5;\quad 1:\frac{1}{5}=5;\quad 1:\frac{3}{5}=\frac{5}{3}\text{ etc.}$$

45. Para *dividir por un número mixto*, se resuelve en quebrado, y se multiplica por este quebrado, invertido. Por ejemplo:

$$3:5\frac{7}{8}=3:\frac{47}{8}=3\times\frac{8}{47}=\frac{24}{47}$$

$$3\frac{5}{7}:5\frac{7}{8}=\frac{26\times8}{7\times47}=\frac{208}{329}$$

El cociente $3:5\frac{7}{8}$ es menor que $3:5$; porque el divisor $5\frac{7}{8}$ es mayor que 5. No puede dividirse separadamente por las partes que componen el divisor mixto (16)

Observacion. Admitidos los quebrados, todos los números son *múltiplos* y *divisores* de cualquiera otro. En ciertos casos, sin embargo, pueden tener cierto sentido el *m. c. d.* y el *m. c. m.* de los quebrados. Así, no sería irracional decir, por ejemplo, que los quebrados $\frac{2}{15}$ y $\frac{8}{35}$ tienen el *m. c. d.* $\frac{2}{5}$; y que el *m. c. m.* de los mismos es $\frac{8}{105}$. Pero todas estas frases son artificiales, cuestiones de nombre puramente, en las que no puede fundarse regla sustancial fija ninguna.

Los principios demostrados en este capítulo y el precedente tienen su aplicacion en el siguiente

Problema. Dividir 7 libras 13 onzas por $2\frac{5}{6}$; multiplicar el cociente por $5\frac{1}{3}$; dividir el producto por $5\frac{2}{5}$; multiplicar el cociente por $1\frac{4}{5}$.

$$\frac{(7 \text{ libras } 13 \text{ onzas}) \times 5\frac{1}{3} \times 1\frac{4}{5}}{2\frac{5}{6} \times 5\frac{2}{5}}$$

Y, aplicando las reglas conocidas, resultará:

$$\frac{(7 \text{ libras } 13 \text{ onzas}) \times 6 \times 16 \times 5 \times 9}{17 \times 3 \times 27 \times 5} =$$

$$= \frac{(7 \text{ libras } 13 \text{ onzas}) \times 2 \times 16}{17 \times 3}$$

$$= (7 \text{ libras } 13 \text{ onzas}) \times \frac{32}{51}.$$

La expresion, *dividir por un quebrado*, no es ménos artificial que la de *multiplicar por un quebrado*, siempre que el cociente deba significar una parte alícuota del dividendo, y ser, por lo tanto, el divisor abstracto (entero). La expresion, *dividir por* $\frac{4}{5}$, *ó tomar la* $\frac{4}{5}$ *parte de una cantidad,* significa lo mismo que *tomar dicha cantidad* $\frac{5}{4}$ *veces:* ambas están igualmente justificadas. Tan poco extraño parecerá ahora que un número *dividido* por un quebrado puro *crezca* ó aumente, como que *multiplicado* por el mismo quebrado *mengüe* ó disminuya.

CUESTIONARIO.

¿Por qué el epígrafe de este capítulo no dice más que *multiplicacion* y *division por un quebrado?* ¿Qué es en realidad multiplicar por un quebrado? ¿Cómo se multiplica un quebrado por otro quebrado? ¿Qué es un quebrado de quebrado? ¿Cuál es el caso general de multiplicacion de números complejos? ¿Tiene algo de particular el *método de las partes alícuotas?*

¿Qué significa dividir por un quebrado? ¿Cómo se divide por un número mixto?

¿Hay diferencia esencial entre las frases artificiales, *dividir por un quebrado* y *multiplicar por un quebrado?* ¿Qué significan en realidad? ¿Por qué aumenta ó crece un entero cuando se divide por un quebrado puro y disminuye cuando se multiplica por el mismo quebrado? ¿Qué alteraciones sufre un quebrado cuando su numerador, ó su denominador, ó ambos, se multiplican por un entero, ó se dividen por un propio divisor suyo?

12.—Regla de tres con quebrados, simple y compuesta.

46. Las leyes establecidas en el Capítulo **5** conservan su valor y eficacia, áun cuando, en vez de los números enteros á que allí las aplicamos, pongamos quebrados y números mixtos.

Ejemplo: $\frac{1}{7}$ de libra costará la 7.ª parte de lo que cuesta 1 libra; y $\frac{4}{7}$ de libra costarán 4 veces lo que la 7.ª parte de 1 libra; de modo que, segun (22), podremos decir tambien ahora:

$\frac{4}{7}$ libras cuestan $\frac{4}{7}$ veces tanto como 1 libra;

Como dijimos (22)

5 libras cuestan 5 veces tanto como 1 libra.

Por otra parte, 1 libra cuesta 9 veces lo que $\frac{1}{9}$ libra; y 5 libras, 9 veces tanto como $\frac{5}{9}$ libra. Luégo 1 libra costará la 5.ª parte de estas 9 veces $\frac{5}{9}$, ó sean $\frac{9}{5}$ veces $\frac{5}{9}$ de libra. Pero *multiplicar* por $\frac{9}{5}$ es lo mismo (44) que *dividir* por $\frac{5}{9}$ ó *tomar la* $\frac{5}{9}$*ª parte*. La proposicion

1 libra cuesta $\frac{9}{5}$ veces tanto como $\frac{5}{9}$ libra puede, en suma, expresarse como sigue:

1 libra cuesta la $\frac{5}{9}$ª parte que $\frac{5}{9}$ libra.

Lo mismo que dijimos:

1 libra cuesta la 6.ª parte que 6 libras.

Todas las leyes de la *Regla de tres*, por consecuencia, pueden aplicarse á los quebrados exactamente como á los enteros.

PROBLEMA 1.º

$9\frac{3}{5}$ quintales de un género cuestan 472 reales 20 maravedises; ¿cuánto costarán $34\frac{2}{7}$ quintales?

Resolucion.

$9\frac{3}{5}$ quintales cuestan 472 reales 20 maravedises.

1 quintal cuesta la $9\frac{3}{5}{}^{a}$ parte, esto es:

$$\frac{472 \text{ reales } 20 \text{ maravedises}}{9\frac{3}{5}}$$

$34\frac{2}{7}$ quintales costarán $34\frac{2}{7}$ tanto como 1, á saber:

$$\frac{(472 \text{ reales } 20 \text{ maravedises}) \times 34\frac{2}{7}}{9\frac{3}{5}}$$

Cálculo.

$$\frac{(472 \text{ rs. } 20 \text{ mrs.}) \times 240 \times 5}{7 \times 48} = \frac{(118 \text{ rs. } 5 \text{ mrs.}) \times 100}{7}$$

$$= (11814 \text{ rs. } 24 \text{ mrs.}) : 7 = 1687 \text{ rs. } 23\tfrac{3}{7} \text{ mrs.}$$

Respuesta ó solucion.

$34\frac{2}{7}$ quintales cuestan 1687 rs. $23\frac{3}{7}$ mrs.

PROBLEMA 2.º

Un terreno, despues de 17 años, aumentando el $1\frac{3}{4}$ por ciento de su extension primitiva, tiene 16 608 fanegas; ¿cuál era su cabida primitiva?

Resolucion.

100 fs., despues de 1 año, se convirtieron en $100 + 1\frac{3}{4}$
» 2 » $100 + 1\frac{3}{4} \times 2$
» 17 » $100 + 1\frac{3}{4} \times 17$
$= 129\frac{3}{4}$ fanegas. Para hallar ahora la primitiva cabida del terreno se discurre así:

$129\frac{3}{4}$ fanegas resultan de 100 fanegas;

1 » de $\frac{100}{129\frac{3}{4}}$

16608 » de $\frac{100 \text{ fanegas} \times 16608}{129\frac{3}{4}}$

Cálculo.

$$\frac{100 \times 16608 \times 4}{519} = 100 \text{ fs.} \times 32 \times 4 = 12\,800 \text{ fanegas.}$$

Respuesta.

La primitiva extension era de 12800 fanegas.

PROBLEMA 3.°

Costando la fanega de trigo $4\frac{3}{4}$ duros, se venden á cierto precio $7\frac{1}{2}$ libras de pan; ¿cuántas libras podrían darse, al mismo precio, si el trigo costase á $3\frac{1}{3}$ duros?

Resolucion.

Si el trigo está á $4\frac{3}{4}$ duros, pueden darse á cierto precio, $7\frac{1}{2}$ libras de pan.

Si estuviese á 1 duro, podrían darse $7\frac{1}{2}$ libras $\times 4\frac{3}{4}$

Y á $3\frac{1}{3}$ duros podrán darse $\frac{7\frac{1}{2} \text{ libras} \times 4\frac{3}{4}}{3\frac{1}{3}}$

Cálculo.

$$\frac{15 \text{ libras} \times 19 \times 3}{2 \times 4 \times 10} = 10 \text{ libras y } 11 \text{ onzas.}$$

Respuesta.

Cuando el trigo esté á $3\frac{1}{3}$ duros, se podrán dar 10 libras y 11 onzas de pan.

PROBLEMA 4.°

Una vaca, atada con una cuerda de $7\frac{1}{2}$ piés de larga, se come en 2 dias el pasto que alcanza. Si la cuerda fuese de $13\frac{3}{4}$ piés de larga, ¿cuántos dias podria pastar?

Resolucion.

Si la cuerda tiene $7\frac{1}{2}$ piés, come 2 dias;

$$\text{»} \quad 1 \quad \text{»} \quad \frac{2 \text{ »}}{7\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}}$$

$$\text{»} \quad 13\frac{3}{4} \quad \text{»} \quad \frac{2 \text{ dias} \times 13\frac{3}{4} \times 13\frac{3}{4}}{7\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}}$$

Porque un círculo de 2 piés de radio es 2×2 veces tan grande en superficie como un círculo de 1 pié de radio (24).

Cálculo.

$$\frac{2 \text{ d.} \times 55 \times 55 \times 2 \times 2}{4 \times 4 \times 15 \times 15} = \frac{11 \times 11}{2 \times 3 \times 3} = 6\,\frac{13}{18} \text{ dias.}$$

Respuesta.

Si la cuerda fuese de $13\frac{3}{4}$ piés de larga, la vaca podría pastar $6\frac{13}{18}$ dias, ó 7 dias casi.

PROBLEMA 5.°

$3\frac{3}{8}$ cuartillos llenan un cubo de 6 pulgadas de arista;

¿cuántos cuartillos de la misma sustancia cogerá un cubo de 4 piés y 4 pulgadas de lado?

Resolucion.

El cubo de 6 pulgadas coge $3\frac{3}{8}$ cuartillos

1 » $\dfrac{3\frac{3}{8}\text{ cuartillos}}{6\times6\times6}$

52 » $\dfrac{3\frac{3}{8}\text{ cuartillos}\times52\times52\times52}{6\times6\times6}$

Cálculo.

$$\frac{27\times52\times52\times52}{8\times6\times6\times6}=13\times13\times13=2\,197$$

Respuesta.

Un cubo de 4 piés y 4 pulgadas cogerá 2 197 cuartillos.

47. Los problemas que exigen la repetida aplicacion de la regla de tres se llaman de *Regla de tres compuesta (Regula quinque, septem*, etc., regla contínua.)

PROBLEMA 1.º

Por $2\frac{1}{2}$ duros se trasportan 5 quintales á 14 leguas de distancia; ¿por cuánto se trasportarán 21 quintales á 25 leguas?

Resolucion.

Cuestan 5 quintales $2\frac{1}{2}$ duros; 1 quintal, á igual distancia, costará la 5.ª parte de $2\frac{1}{2}$ duros; y, por lo tanto, 21 quintales costarán 21 veces tanto como 1, esto es:

$$\frac{2\frac{1}{2}\text{ duros}\times21}{5}$$

Si esto cuesta el trasporte de 21 quintales á 14 leguas, el trasportarlos á 1 legua costará la 14.ª parte; y 25 veces tanto el trasportarlos á 25 leguas, esto es:

$$\frac{2\frac{1}{2}\text{ duros}\times 21\times 25}{5\times 14}$$

Cálculo.

$$\frac{5\times 21\times 25}{2\times 5\times 14}=\frac{75}{4}=18\tfrac{3}{4}$$

Respuesta.

El trasporte de 21 quintales á 25 leguas costará $18\frac{3}{4}$ duros.

PROBLEMA 2.º

¿A qué tanto por 100 habrá que prestar un capital de 6 300 pesetas, para que en 20 años produzca un interés de 5 670 pesetas?

Resolucion.

6 300 pesetas producen en 20 años 5 670 pesetas, y en 1 año producirán la 20.ª parte; de donde se deduce que 1 peseta producirá la 6 300ª parte (en 1 año se entiende); y 100 pesetas, 100 veces tanto como 1, esto es:

$$\frac{5\,670\text{ pesetas}\times 100}{20\times 6\,300}$$

Cálculo.

$$\frac{567}{2\times 63}=\frac{9}{2}=4\tfrac{1}{2}$$

Respuesta.

El capital de 6 300 pesetas habrá que prestarle al $4\frac{1}{2}$ por ciento.

PROBLEMA 3.°

Para abrir un canal de 735 varas de largo, 10 de hondo y 21 de ancho, se necesitan 140 peones, trabajando 546 dias, á $7\frac{1}{2}$ horas diarias; ¿cuál será el largo de un canal de 15 varas de hondo y 25 de ancho, ejecutado por 182 peones, en 324 dias, trabajando $8\frac{1}{3}$ horas diarias?

Resolucion.

Los datos del problema se disponen así:

735 *l.*	10 *h.*	21 *a.*	140 *p.*	546 *d.*	$7\frac{1}{2}$ *h.*
»	15	25	182	324	$8\frac{1}{3}$

Y de este modo se facilita la comparacion con las dos cantidades homogéneas (una de las cuales es la incógnita ó el *largo* del canal), de cada dos homogéneas restantes.

La pareja primera que debemos comparar la constituyen 10 y 15 (varas de *hondo)*; y para hacerlo aplicamos los principios de la *Regla de tres simple*, como en todas las comparaciones siguientes.

Efectuándolo así diremos:

Si el canal, iguales todas las demás circunstancias, tuviese 1 vara de hondo en lugar de 10, sería 10 veces tan largo; pero como ha de tener 15 varas en vez de 1, será la 15.ª parte de largo.

Si el canal tuviese 1 vara de ancho en lugar de 21, sería 21 veces tan largo; pero como debe tener 25 varas de ancho en vez de 1, será la 25.ª parte de largo.

Si 140 peones hacen 735 varas de largo, 1 solo hará la 140.ª parte del mismo largo; y 182 peones, 182 veces dicha 140.ª parte.

Si los operarios trabajan 546 dias para hacer el largo expresado, en 1 dia harán la 546.ª parte del mismo largo; y en 324 dias harán 324 veces dicha 546.ª parte.

Por último, si trabajan $8\frac{1}{3}$ horas diarias, en vez de trabajar $7\frac{1}{2}$, harán $8\frac{1}{3}$ veces la $7\frac{1}{2}^{a}$ parte (siempre refiriéndose al largo). Luego el canal tendrá de largo:

$$\frac{735 \text{ varas} \times 10 \times 21 \times 182 \times 324 \times 8\frac{1}{3}}{15 \times 25 \times 140 \times 546 \times 7\frac{1}{2}}$$

Cálculo:

$$\frac{735 \times 10 \times 21 \times 182 \times 324 \times 25 \times 2}{15 \times 25 \times 140 \times 546 \times 3 \times 15} = 352\tfrac{4}{5}$$

Respuesta:

El canal tendrá $352\frac{4}{5}$ varas de largo.

PROBLEMA 4.º

¿Á cuántas *varas* equivalen 100 *anas* de Hamburgo, sabiendo que 7 anas de Hamburgo equivalen á 6 de Prusia; 100 de Prusia á 67 metros franceses; y 5 metros á 6 varas de Búrgos?

El procedimiento para resolver este problema lleva el nombre de *Regla Conjunta*, por la concatenacion de sus datos, y suele disponerse como sigue:

» *varas*	=	100 anas de Hamb.
7 anas de Hamb.	=	6 anas de Prusia.
100 anas de Prusia	=	67 metros.
5 metros	=	6 *varas*.

De la primera equivalencia dada, 7 anas de Hamburgo = 6 de Prusia, se deduce que 1 ana de Hamburgo $=\frac{6}{7}$ anas de Prusia; y, por consecuencia, que para convertir anas de Hamburgo en anas de Prusia habrá que multiplicar aquéllas por $\frac{6}{7}$. Y cosa análoga se desprende de las demás equivalencias. Luego:

$$100 \text{ anas de Hamburgo} = \frac{100 \times 6}{7} \text{ de Prusia.} =$$

$$\frac{100 \times 6 \times 67}{7 \times 100} \text{ metros} = \frac{100 \times 6 \times 67 \times 6}{7 \times 100 \times 5} \text{ varas.}$$ Hecho el cálculo resulta:

$$100 \text{ anas de Hamburgo} = 68\tfrac{32}{35} \text{ varas.}$$

Debe notarse que la incógnita que buscamos se encuentra dividiendo el producto de los segundos miembros de todas las equivalencias escritas, por el de los primeros miembros conocidos.

PROBLEMA 5.º

¿Á cómo deberá venderse en Madrid la *vara* de una tela que cuesta en Hamburgo á $6\frac{1}{4}$ marcos *ana*, habiendo pagado de porte el 5 %, para ganar el 8 %? – Para resolver este problema es necesario saber que 100 anas $= 68\frac{32}{35}$ varas; y que 1 marco $= 5\frac{7}{8}$ reales.

Resolucion:

El ana cuesta en Hamburgo $6\frac{1}{4} \times 5\frac{7}{8}$ reales $= 36\frac{23}{32}$ reales; en Madrid, con el 5 % de coste, valdrá $\frac{105}{100}$ veces tanto, ó sean $\frac{36\frac{23}{32} \times 105}{100}$ reales; y la vara en Madrid subirá á $\frac{36\frac{23}{32} \times 105 \times 100}{100 \times 68\frac{32}{35}}$; pues una vara $= \frac{100}{68\frac{32}{35}}$ anas.

Como, ademas, se trata de ganar el 8 %, habrá que vender la vara á $\frac{108}{100}$ veces tanto como era su anterior coste, ó sea á

$$\frac{36\frac{23}{32} \times 105 \times 100 \times 108}{100 \times 68\frac{32}{35} \times 100} \text{ reales.}$$

Cálculo:

$$\frac{1175 \times 105 \times 100 \times 108 \times 35}{32 \times 100 \times 2412 \times 100} = \frac{47 \times 105 \times 3 \times 35}{32 \times 67 \times 4} = 60\ \frac{3615}{9576}$$

Respuesta:

La vara deberá venderse en Madrid á $60\frac{3615}{8576}$ reales: ó, en números comprensibles, á poco ménos de $60\frac{1}{2}$ reales; porque 3615 es menor que la mitad del denominador 8576.

PROBLEMA 6.º

Se trata de tomar en Madrid una letra de 400 libras esterlinas sobre Lóndres, recibiendo el cambiante $\frac{1}{3}$ por 100 de ágio, y 1 por 1000 ($\frac{1}{1000}$) de corretaje.

Resolucion:

Lo primero que se necesita conocer es el cambio entre Madrid y Lóndres, esto es: cuánto vale en moneda inglesa un duro, por ejemplo, de España. Dadas las condiciones de las monedas en ambos países, un duro vale exactamente 50 peniques y 45 céntimos de penique. Si por el duro dan más en Lóndres, tenemos utilidad en el cambio; y si dan ménos, tenemos quebranto: porque 1 duro = 50 peniques y 45 céntimos de penique es el cambio llamado *á la par*. Supongamos, para resolver nuestro problema, que sea este el cambio, en atencion á que ya cobra aparte el cambiante su trabajo. Comenzarémos por resolver las libras esterlinas en chelines, multiplicándolas por 20, y encontraremos 8 000 chelines : los cuales, multiplicados por 12, dan 96 000 peniques. Ahora bien, al cambio de 50 $\frac{45}{100}$, esta cantidad de peniques vale $\frac{96000}{50\frac{45}{100}}$ duros; y, como la ganancia del cambiante es $\frac{1}{300}+\frac{1}{1000}$, ó bien un $\frac{13}{30}$ por ciento, lo que tendremos que dar, en suma, por la letra en Madrid, serán :

$$\frac{96000 \times 100\frac{13}{30}}{50\frac{45}{100} \times 100} \text{ duros.}$$

Cálculo:

$$\frac{96000 \times 3013 \times 100}{5045 \times 100 \times 30} = 1911 \frac{121}{1009} \text{ duros.}$$

48. Los problemas anteriores son los más complicados y difíciles que se ofrecen en la práctica, dentro de la *Aritmética vulgar*. No estará de más, sin embargo, que apliquemos aún los principios ya demostrados á otros problemas más sencillos, pero que ocurren frecuentemente.

Supongamos que el tenedor de una *letra*, un *pagaré*, ú otro papel de crédito, de 12800 pesetas, que no vence hasta despues de cierto tiempo, tiene precision de venderlo ántes de su vencimiento y halla banquero que se lo tome con $4\frac{3}{4}$ por ciento de *descuento* al año. El *valor nominal* del pagaré, ó lo que sea, tendrá actualmente el *valor efectivo* (28).

$$\frac{12800 \times 95\frac{1}{4}}{100} = 12192 \text{ pesetas.}$$

Y la *rebaja*, ó el *descuento*, importará, por consecuencia (42):

$$12800 - 12192 = 608 = \frac{12800 \times 4\frac{3}{4}}{100}$$

Pero, si el descuento ó la rebaja fuese de $4\frac{3}{4}$ *sobre* ciento, el valor actual del documento vendido sería:

$$\frac{12800 \times 100}{104\frac{3}{4}} = 12219\frac{239}{419}$$

Y la rebaja ó descuento consiguiente:

$$12800 - 12219\frac{239}{419} = 580\frac{180}{419} = \frac{12800 \times 4\frac{3}{4}}{104\frac{3}{4}}.$$

En el descuento así verificado en ambos casos se calcula el tanto por ciento al año de una cantidad nominal, que no es la efectiva que recibe del banquero el dueño de la letra ó pagaré descontados.

Así se hace generalmente; pero no es justo que el tomador del documento de crédito descuente el interés de un capital que no entrega al tenedor de aquél. Lo justo sería calcular la cantidad desembolsada en el acto, que al tanto por ciento convenido llegase despues de un año á igualarse con la nominal. Siendo ésta, por ejemplo, de 300 duros, y 5 el tanto por ciento, se trata de calcular la cantidad que al 5 % llegue á 300 duros despues de un año. Pero ya sabemos (28) que el valor actual que buscamos es

$$\frac{300 \text{ duros} \times 100}{105} = \frac{30000 \text{ duros}}{105} = 285\tfrac{5}{7} \text{ duros}.$$

De lo cual se colige que se descuenta comercialmente al tanto *en* ciento; y se descuenta racional ó justamente al tanto *sobre* ciento.

Conocido, como siempre lo es, el *tanto por ciento* al año, fácil es calcular el que corresponde á un mes y á un dia; y, por lo tanto, á cualquier número de meses ó dias, que no llegue á un año. Y no hay más que sustituir el *tanto por ciento* al año, que figura en los anteriores problemas, por el tanto por ciento correspondiente al número de meses ó de dias que se den en el problema.

Las cuestiones sobre *papel del Estado*, *seguros*, *cambios*, *comisiones*, *corretajes*, etc., no presentan dificultad ninguna. Por ejemplo: Con 5000 pesetas, ¿cuántas pesetas en *cuatros* podré tomar al 75 % que está aquel papel en Bolsa? Pues $\frac{5000 \times 100}{75} = 6666\frac{2}{3}$ pesetas en papel. Las cuales producen al 4 % una renta de $6666\frac{2}{3} \times \frac{4}{100} = \frac{20000 \times 4}{300}$ $= 266\frac{2}{3}$ pesetas anuales.

CUESTIONARIO.

Los principios fundamentales de la Regla de tres *simple* con enteros, ¿sufren modificacion esencial cuando se aplican á quebrados?

¿Qué es Regla de tres *compuesta?* ¿Cómo se descompone un problema de esta clase en problemas sencillos que se resuelven por la Regla de tres simple?

Examínense uno por uno los problemas resueltos; y explíquense los principios en que se funda su resolucion.

13.—Repartimientos proporcionales (Prorateos).

49. Cuando varias cantidades homogéneas, A, B, C... contienen á una misma cantidad (unidad) 2, 3, 5... veces respectivamente, se dice que *son ó están entre sí* subordinadas, como los números 2, 3, 5... Esta subordinacion se expresa, en particular, diciendo que la razon A : B es igual

á la numérica 2 : 3 ; la A : C á la 2 : 5; la C : B á la 5 : 3, etcétera. Y de un modo general, por la *proporcion*

$$A : B : C = 2 : 3 : 5 \text{ (*)}.$$

De la proporcion establecida se deduce, por una parte:

$$A = \frac{2}{3} B, \qquad A = \frac{2}{5} C.$$

$$B = \frac{3}{2} A, \qquad B = \frac{3}{5} C \text{ etc.},$$

Y, por otra

$$\frac{1}{2} A = \frac{1}{3} B = \frac{1}{5} C$$

Y multiplicando por 2 . 3 . 5, que

$$15\,A = 10\,B = 6\,C$$

Porque, segun la hipótesis, $\frac{1}{2}$ A, $\frac{1}{3}$B y $\frac{1}{5}$C representan ó valen cada una la unidad.

50. Los números de una proporcion pueden ser todos multiplicados por un mismo número, ó divididos por un mismo divisor; porque por esto no cambian sus mútuas razones (36).

Por ejemplo, dada la proporcion

$$A : B : C = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{5}{9}$$

se obtiene la siguiente:

$$A : B : C = 24 : 27 : 20,$$

multiplicando los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{9}$ por su denominador comun 36.

(*) Véase *Algebra*, Cap. I.

Si tenemos la proporcion

$$D : E : F = 21 : 28 : 35,$$

se hallará tambien esta otra

$$D : E : F = 3 : 4 : 5,$$

dividiendo 21, 28 y 35 por su comun divisor 7.

51. Cuando A y B son partes de un todo y se hallan, ó se relacionan entre sí como 2 y 3, el todo contendrá $2+3=5$ unidades, de las cuales pertenecen 2 á la cantidad A, y 3 á la cantidad B.

De la proporcion de estas partes,

$$A : B = 2 : 3$$

se deduce, por lo tanto, que $A = \frac{2}{5}$ del todo, y $B = \frac{3}{5}$ del todo.

Cuando A, B y C son partes de un todo, y se relacionan entre sí como los números 2, 3 y 5, el todo contendrá $2+3+5=10$ unidades, de las cuales corresponderán: 2 á la parte A, 3 á la B y 5 á la C. De la proporcion de estas partes,

$$A : B : C = 2 : 3 : 5,$$

se deduce tambien que $A = \frac{2}{10}$, $B = \frac{3}{10}$ y $C = \frac{5}{10}$ del todo.

52. Se llama *Regla de Compañía* la que enseña á repartir una cantidad segun razones dadas, ó en partes desiguales, cuyas razones mútuas sean dadas. Se trata de repartir la cantidad M, segun las razones $3 : 4 : 5$, entre las partes A, B y C. De la proporcion de estas partes,

$$A : B : C = 3 : 4 : 5,$$

se desprende que A contiene á cierta cantidad (unidad) 3 veces; que B la contiene 4; y C la contiene 5; y, por consecuencia, que *M* la contiene $3+4+5=12$ veces. Dividiremos, pues, *M* en 12 partes iguales, y tomaremos 3 para *A*, 4 para *B* y 5 para *C*.

En los problemas de la *Regla de Compañia* debemos determinar: 1.° la cantidad repartible; 2.° la proporcion de las partes; 3.° la suma de los términos de la proporcion; 4.° la division de la cantidad repartible por esta suma; y 5.° la multiplicacion del cociente por cada uno de los números de la proporcion.

PROBLEMA 1.°.

Se trata de repartir 9 728 pesetas entre tres hermanos, proporcionalmente á sus edades de 36, 24 y 16 años. ¿Cuánto corresponderá á cada uno?

Resolucion.

Las partes son entre sí como los números 36 : 24 : 16, ó lo que es igual, como los números 9 : 6 : 4; y, por consecuencia, importan respectivamente:

$9\,728 \times \frac{9}{19}$ pesetas; $9728 \times \frac{6}{19}$ pesetas; y $9728\ \frac{4}{19}$ pesetas.

Cálculo:

$$\begin{array}{ll} 9\,728 : 19 = 512; & 512 \times 9 = 4\,608 \\ \quad 22 & 512 \times 6 = 3\,072 \\ \quad\ 38 & 512 \times 4 = 2\,048 \\ & \overline{\qquad\quad 9\,728} \end{array}$$

Respuesta:

Corresponderán respectivamente á los tres hermanos:

4 608, 3 072 y 2 048 pesetas.

PROBLEMA 2.°.

Cuatro personas toman un billete de la lotería, poniendo *A*, 7 reales 12 maravedises; *B*, 11 reales 11 maravedises; *C*, 5 reales 30 maravedises; *D*, 11 reales 16 maravedises. Les tocan 10 000 reales, de los cuales hay que rebajar el $12\frac{1}{2}$ por ciento para la Administracion, y el $3\frac{1}{3}$ por ciento para el cobrador. ¿Cuánto les corresponderá á cada uno?

Resolucion:

La Administracion da $\dfrac{10\,000 \text{ reales} \times 87\frac{1}{2}}{100}$, y el cobrador entrega por esta cantidad la siguiente:

$$\frac{10\,000 \times 87\frac{1}{2} \times 96\frac{2}{3}}{100 \times 100}$$

que es la repartible.

Resolviendo en maravedises los reales y maravedises que figuran en el problema, hallamos que *A* puso 250 maravedises; *B*, 385; *C*, 200; y *D*, 390. Y, por consecuencia, que la suma repartible entre las cuatro personas habrá que dividirla, segun la proporcion:

$$250 : 385 : 200 : 390 = 50 : 77 : 40 : 78.$$

Es decir, que las cuatro personas obtienen respectivamente:

$$\frac{50}{245}, \ \frac{77}{245}, \ \frac{40}{245} \text{ y } \frac{78}{245} \text{ de la suma líquida.}$$

Cálculo:

$$87\frac{1}{2} \times 96\frac{2}{3} = 8458\frac{1}{3};\ 8458\frac{1}{3} : 245 = 34\frac{11}{21}$$

$$\text{A obtiene } 34\frac{11}{21} \times 50 = 1726\frac{4}{21} \text{ reales.}$$

$$\text{B} \quad » \quad 34\frac{11}{21} \times 77 = 2658\frac{1}{3} \quad »$$

$$\text{C} \quad » \quad 34\frac{11}{21} \times 40 = 1380\frac{20}{21} \quad »$$

$$\text{D} \quad » \quad 34\frac{11}{21} \times 78 = 2692\frac{6}{7} \quad »$$

PROBLEMA 3.°

En la pólvora de fusil, las cantidades de salitre y de carbon entran en la razon de 16 á 5; y las de salitre y azufre en la de 10 á 3. ¿Cuántas libras de estas materias son precisas para fabricar 5934 libras de pólvora?

Resolucion:

Con 1 libra de salitre entran $\frac{5}{16}$ libras de carbon y $\frac{3}{10}$ libras de azufre: luego habrá que repartir las 5934 libras de pólvora, segun las razones $1 : \frac{5}{16} : \frac{3}{10} = 80 : 25 : 24$. La pólvora, pues, contendrá:

$5934 \times \frac{80}{129}$ libras de salitre.

$5934 \times \frac{25}{129}$ » de carbon.

$5934 \times \frac{24}{129}$ » de azufre.

Cálculo:

$5934 : 129 = 46$; $46 \times 80 = 3680$ libras de salitre.
$46 \times 25 = 1150$ » de carbon.
$56 \times 25 = 1104$ » de azufre.
5934 libras de pólvora.

PROBLEMA 4.°

Para un negocio, A dá 200 pesos por 4 meses; B, 160 por 6 meses; C, 120 por 8 meses. Ganaron 136 pesos: ¿cuánto corresponde á cada uno?

Resolucion:

Si lo que corresponde á uno que pusiera 1 peso por 1 mes lo tomamos como unidad, la ganancia de A será 200 $\times 4$; la de B, 160×6; la de C, 120×8 unidades. Lo cual quiere decir que sus ganancias se relacionarán, segun la proporcion:

$$200 \times 4 : 160 \times 6 : 120 \times 8 = 5 : 6 : 6.$$

Por consecuencia: A deberá tomar $136 \times \frac{5}{17}$ pesos; B, $136 \times \frac{6}{17}$; y C lo mismo que B. Ahora bien:

136 : 17 = 8. Luego A toma $8 \times 5 = 40$ pesos.
B » $8 \times 6 = 48$ »
C » $8 \times 6 = 48$ »

136 pesos.

PROBLEMA 5.°

Segun la *Ley falcidia*, cuando los legados de un testador excedían de las *tres cuartas partes* de la herencia disponible, el heredero principal (el declarado heredero en el testamento) tomaba ante todo la *cuarta parte (quartam falcidiam)* de aquella herencia; y el resto se repartia proporcionalmente entre los legatarios, segun las cantidades de sus legados.

Ejemplo. — Declarado *A* heredero en un testamento, en que se dejan como legados 800 pesos á *B*, 1000 pesos á *C*, y 600 á *D*; y subiendo la herencia repartible á 2600 pesos; ¿cuánto le corresponderia á cada legatario?

Como los legados suman más de los $\frac{3}{4}$ de 2600, que son 1950, el heredero *A* comienza por coger su *cuarta* de la herencia, que importa 650 pesos; y el resto $2600 - 650 = 1950 = \frac{3}{4}\, 2600$, se distribuye entre los legatarios *B*, *C* y *D*, segun la proporcion,

$$B : C : D = 800 : 1000 : 600 = 4 : 5 : 3$$

Por consecuencia recibirán :

$$\text{B} \ldots \frac{1950}{12} \times 4 = 650$$

$$\text{C} \ldots \frac{1950}{12} \times 5 = 812\ \frac{1}{2}$$

$$\text{D} \ldots \frac{1950}{12} \times 3 = 487\ \frac{1}{2}$$

Los tres. 1950

Observacion. A los repartimientos proporcionales corresponden los de las *contribuciones*, segun la riqueza imponible de las provincias; el de los *quintos*, segun el número de mozos sorteables; el de los *dividendos* en las sociedades de *seguros mútuos*, etc. Acerca de estas cuestiones sólo debemos advertir que en los cupos de quintos no es permitido el cociente con quebrado (15); y que por eso se sortea un quinto entre los pueblos cuyos cupos hayan sido cocientes con quebrados (décimas) que compongan la unidad.

53. La *Regla de aligacion* tiene por objeto inquirir la *razon*, segun la cual deberán mezclarse dos sustancias de precios conocidos, para que la mezcla adquiera *justamente* el precio fijado (*). Por ejemplo, de dos clases de vino, A y B, á los precios respectivamente de 36 y 20 reales arroba, vamos á hacer una clase intermedia, M, de la cual pueda venderse *justamente* la arroba á 30 reales. En la mezcla, por

1 arroba de A, hay 36 — 30 = 6 reales de pérdida.
1 » de B, » 30 — 20 = 10 » de ganancia.

Y, de consiguiente, por

10 arrobas de A, habrá 6 × 10 reales de pérdida.
6 » de B, » 10 × 6 » de ganancia.

(*) Esta Regla de aligacion se llama *inversa* por los autores aquí conocidos. De la *directa* hablamos (15).

La pérdida ocasionada por mezclar el vino A debe ser compensada por la ganancia de mezclar el vino B; y esto se consigue mezclando 10 arrobas (unidades) de A, y 6 de B. Luego

$$A : B = 10 : 6 = 5 : 3$$

De donde: $A = \frac{5}{3} B = \frac{5}{8}$ de la mezcla; y $B = \frac{3}{5} A = \frac{3}{8}$ de la mezcla.

La Regla de aligacion, en consecuencia, se practica como sigue: se hallan las diferencias entre el precio más alto y el precio de la mezcla, y entre el precio de la mezcla y el más bajo; y se mezclan las materias, segun la razon de la segunda diferencia á la primera.

De una clase (A) de vino á 36 reales, y de agua (B), se trata de hacer una mezcla que salga á 30 reales su unidad (arroba, cuartillo, etc.) La primera diferencia será 36—30; la segunda será 30 — 0 (suponiendo que el agua no cuesta nada). Luego la proporcion de las partes, será

$$A : B = 30 : 6 = 5 : 1$$

De donde se desprende que $B = \frac{1}{5} A = \frac{1}{6}$ de la mezcla.

PROBLEMA.

Con plata (A) que tiene de ley 14, se trata de mezclar plata (B) de ley 8, para obtener plata cuya ley sea 12. ¿Cuál será la razon de las cantidades que habrán de mezclarse? (Se dice plata de *ley* 14, cuando en una onza de aleacion hay 14 adarmes de plata pura y 2 de cobre).

Resolucion.

La primera diferencia es $14 - 12 = 2$; y la segunda $12 - 8 = 4$. Luego

$$A : B = 4 : 2 = 2 : 1$$

De donde:

$$A = 2B = \frac{2}{3} \text{ de la mezcla.}$$

$$B = \tfrac{1}{2} A = \frac{1}{3} \text{ de la mezcla.}$$

Si se mezcla plata de 14, con cobre, para obtener aleacion de ley 12, la primera diferencia será $14 - 12 = 2$, y la segunda $12 - 0$ (la ley del cobre es 0); y, por consecuencia:

$$A : B = 12 : 2 = 6 : 1$$

De donde:

$$B = \tfrac{1}{6} A = \frac{1}{7} \text{ de la mezcla.}$$

54. Si en lugar de *dos* sustantias fuesen más las mezcladas, la Regla de aligacion, *compuesta* entónces, se resolvería, como la de tres, en reglas de aligacion *simples*. Este procedimiento exige tomar cada vez dos sustancias, cuyos precios comprendan al precio medio de la mezcla ó aleacion; y operar con un mismo precio dos ó más veces, cuando los precios de aquéllas no pudiesen enteramente aparearse incluyendo al precio medio, como se ha dicho.

Ejemplo.— Se desea mezclar cinco clases de vino, cuyos precios respectivos son 15, 20, 26, 32 y 40 reales arroba, con ánimo de vender la arroba de la mezcla á 28 reales. En este ejemplo hay tres precios inferiores al medio, y dos superiores; y por necesidad tenemos que aparear dos veces uno de estos con cada uno de los otros. Las reglas de aligacion simples, siendo 28 el precio medio, se referirán, por lo tanto, á los precios 40 y 15; á los precios 32 y 20; y al mismo precio 32 y 26. Y claro es que la cantidad correspondiente al repetido precio 32 será la suma de las parciales obtenidas con él.

El cálculo, para mayor claridad, se dispone así:

$$\begin{array}{lll} A\ldots & 40\ldots & 28-15=13 \\ B\ldots & 32\ldots & \begin{cases} 28-20=8 \\ 28-26=2 \end{cases} \\ C\ldots & 26\ldots & 32-28=4 \\ D\ldots & 20\ldots & 32-28=4 \\ E\ldots & 15\ldots & 40-28=12 \end{array}$$

Luego las reglas simples son éstas:

$$\begin{array}{l} A:E=13:12 \\ B:D=8:4 \\ B:C=2:4 \end{array}$$

Todas estas cuestiones permanecen en la *Aritmética* desde los tiempos en que el *Álgebra* puede decirse que no existia todavía; pero ya se tratan en esta parte de las Matemáticas.

CUESTIONARIO.

¿Cuándo se dice que varias cantidades *son entre sí*, como ciertos números dados? ¿Qué es *proporcion*? ¿En qué casos no se altera una proporcion?

¿Qué es *Regla de Compañía?* Explíquense los problemas correspondientes uno por uno.

¿Qué es *Regla de aligacion?* ¿Por qué la llaman inversa los autores aquí conocidos? ¿De cuántas especies es? Explíquese cada una de ellas.

LIBRO TERCERO.

CÁLCULO CON LOS QUEBRADOS DECIMALES.

14.—Nociones fundamentales.

55 Las mismas cifras (*) que, por su colocacion *delante* (á la izquierda) de la que expresa unidades simples, representan las unidades superiores á esta unidad simple, sirven tambien, colocándolas *despues* (á la derecha) de aquélla, para representar sus unidades subalternas ó inferiores (fraccionarias). Y como, tanto los *grados* (de las unidades superiores á la simple) como los *subgrados* (de las inferiores), están sometidos á la misma ley de formacion, podemos afirmar para los unos y los otros que las unidades de un lugar cualquiera, en el sistema decimal,

(*) El cálculo con las cifras índicas (arábigas) *(Algorithmus)* fué conocido en Oriente en el siglo IX (Mohammed-ben-Musa-Alcharezmi) y llegó á serlo en Europa en el siglo XIII. La palabra *Algoritmo* se empleó despues para expresar todas las operaciones de cálculo. *Regiomontano*, hácia 1464, sustituyó los quebrados sexagesimales, usados por los griegos y sus sucesores, por los decimales, más convenientes; pero no se generalizaron éstos hasta la segunda mitad del siglo XVI *(Récorde* 1557, *Stevin* 1585). En 1623 aprendió *Kepler* de *Pretorio* (de Altdorf) la abreviacion de los cálculos con decimales. *Grunert*, Archiv. der Math., 24, p. 196.

son 10 veces tan grandes como las unidades inmediatas de la derecha: de modo que á los millares siguen las centenas, á las centenas las decenas, á las decenas las unidades. A las unidades siguen, por consecuencia, las *décimas* en el primer lugar; en el 2.º las *centésimas;* en el 3.º las *milésimas*... en el 6.º las *millonésimas*... en el 12.º las *billonésimas;* etc., etc. Para distinguir la unidad, como tal unidad, se escribe despues de ella una coma, ó un punto, llamado decimal, algo elevado. Así, el número mixto 426,357... expresa 4 centenas + 2 decenas + 6 unidades + 3 décimas + 5 centésimas + 7 milésimas...

Y de la misma manera que, por valer 4 centenas 40 decenas ó 400 unidades, y 2 decenas 20 unidades, el número entero 4 centenas y 2 decenas y 6 unidades, vale, en suma, 426 unidades; así tambien, por valer 3 décimas 30 centésimas ó 300 milésimas, y 5 centésimas 50 milésimas, el quebrado 3 décimas y 5 centésimas y 7 milésimas comprenderá, en junto, 357 milésimas. Mas, por la misma regla ó ley, las 426 unidades se resuelven en 426000 milésimas. Luego el número mixto propuesto se resolverá en 426357 milésimas: ó, en conclusion:

$$426,357 = 426 \frac{357}{1000} = \frac{426357}{1000}$$

56. Se llaman *decimales* los quebrados cuyos denominadores son unidades del sistema decimal, como 10, 100, 1000 (potencias de 10). Estos quebrados se escriben sin denominador, separando por una coma las décimas de las unidades. Los quebrados con otros denominadores se llaman *comunes*.

57. Para *leer* un número decimal mixto, ó se lée primero la parte entera, y á continuacion el quebrado cuyo numerador es el número que está despues de la coma y cuyo denominador es el denominador de la última cifra

(del último lugar); ó se lée, resuelto el mixto en quebrado, este quebrado, cuyo numerador es todo el número decimal dado, prescindiendo de la coma, y cuyo denominador es el denominador de la última cifra ó del último lugar.

Las operaciones de *reducir* y *resolver* se efectúan con los decimales sin el cálculo que era necesario en los quebrados comunes. Así, por ejemplo, para reducir á mixto el quebrado $\frac{426357}{1000}$ basta separar con la coma tres cifras de su numerador; y para resolver el mixto 426,357 en milésimas basta quitarle la coma.

58. Como los lugares decimales se cuentan despues de la coma, no es posible que falte esta última. Si el quebrado decimal es propio, debe comenzar por 0 unidades. Por ejemplo 7 décimas = 0,7 que tambien se escribe ·7.

28 centésimas = 2 décimas + 8 centésimas = 0, 28 = ·28
9 » = 0 » + 9 » = 0, 09 = ·09
307 milésimas = 3 décs. + 0 cents. + 7 mils. = 0, 307 = ·307
1 milésima = 0, 001 = ·001
1 millonésima = 0,000 001 = ·000 001
1847 cienmilésimas = 0,018 47 = ·018 47.

Para *escribir* un quebrado decimal se escribe su numerador (y á la izquierda ó delante del mismo, cuando sea necesario, los ceros suficientes para que reuna tantas cifras como el denominador) y se coloca en él la coma de modo que su última cifra quede en el lugar que corresponde al subórden expresado por su denominador. Así:

$$\frac{1835}{10} = 183{,}5; \quad \frac{1835}{100} = 18{,}35; \quad \frac{1835}{10000} = 0{,}1835\text{ ; etc.}$$

59. Como 7 décimas = 70 centesimas = 700 milésimas, etc.; y 3 unidades = 30 décimas = 300 centésimas; es evidente que en un quebrado decimal ó en un entero, colocada la coma despues de la cifra de las unidades, como

sabemos, pueden escribirse ceros despues de su última cifra, ó suprimirlos si los hubiere. Por ejemplo:

$$0{,}7 = 0{,}70 = 0{,}700\ldots$$
$$3 = 3{,}0 = 3{,}00\ldots$$
$$1800 : 100 = 18{,}00 = 18$$
$$1800 : 1000 = 1{,}800 = 1{,}8$$
$$1800 : 1000000 = 0{,}\ 001\ 800 = 0{,}0018.$$

Esta trasformacion de los decimales, de modo que no se altere su valor, no exige cálculo mientras no se los quiera convertir en quebrados comunes (36).

Nota. Tomando por modelo el sistema decimal, de base 10, se pueden formar otros sistemas con otras bases: por ejemplo, el sistema duodecimal, de base 12. Este sistema necesita dos cifras más para representar el *diez* y el *once;* y en él se formará de 12 unidades 1 *docena* (correspondiente á la decena); de 12 docenas una 144.ª (correspondiente á la centena), etc. A la cifra de las unidades seguirán por la derecha los quebrados duodecimales, ocupando el primer lugar las *duodécimas*, el segundo las *ciento cuarenta y cuatro-ésimas* etc. Por lo tanto, designando por *d* y *o*, iniciales de *diez* y *once*, las cifras 10 y 11, el número duodecimal $7d08{,}5o4$ significa ó representa el decimal siguiente:

$$\begin{array}{r|r}
7 \times 1728 & 12096 \\
+10 \times 144 & 1440 \\
+\ 0 \times 12 & 0 \\
+\ 8 \times 1 & 8 \\
+\ 5 \times \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\
+11 \times \frac{1}{144} & \frac{11}{144} \\
+\ 4 \times \frac{1}{1728} & \frac{1}{432} \\
\hline
 & 13544\,\frac{157}{216}
\end{array}$$

importancia práctica no puede alcanzar ningun sistema, diferente del decimal; porque las voces de la numeracion, (numeracion verbal) en las lenguas cultas tienen por fundamento el sistema decimal; y no es fácil arbitrariamente introducir en un idioma dado nuevas palabras.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL.

60. Este sistema de pesas y medidas, cuya unidad *fundamental* es el *metro*, que le dá nombre y sirve para formar todas las demás, no difiere del sistema decimal numérico en el modo de expresar un conjunto de unidades de la misma especie.

Dadas las unidades *principales* de cada especie, las unidades superiores (múltiplos), y las subalternas (divisores) se expresan anteponiendo al nombre de la unidad *principal* las palabras griegas *Miria* (10000), *Kilo* (1000), *Hecto* (100), *Deca* (10); y las latinas *Deci* (0,1), *Centi* (0,01), *Mili* (0,001), respectivamente.

Las palabras *Miria*, *Kilo*, *Hecto* y *Deca* se designan abreviadamente por sus iniciales, mayúsculas, *M*, *K*, *H* y *D*; y las palabras *Deci*, *Centi* y *Mili* por sus iniciales, minúsculas, *d*, *c* y *m*. Las letras tambien minúsculas, *m*, *a*, *l* y *g* significan *metro*, *área*, *litro* y *gramo*, respectivamente. Por manera que *Dm*, representará Decámetros, *Kg*, Kilógramos; *Hl*, Hectólitros; m^2, metros cuadrados; m^3, metros cúbicos; *dm*, decímetros; *mm*, milímetros; *cl*, centílitros, etc.

Unidades lineales.—La *principal*, el *Metro*, es la *diezmillonésima* parte de la distancia entre el polo y el ecuador terrestre: la cual, sin embargo, por la irregularidad de la figura de nuestro globo, principalmente, no puede considerarse como medida *natural* exacta.

Por lo que ántes dijimos, el *Miria*-metro valdrá 10000 metros ; el *Kiló*-metro, 1000 ; el *Deci*-metro, 0,1 de metro; el *Centi*-metro, 0,01 ; etc., etc.

Unidades superficiales ó cuadradas.—Cuadrados cuyos lados son respectivamente las unidades lineales. Así: el *kilómetro cuadrado* es un cuadrado que tiene 1 kilómetro de lado; y, por consecuencia, comprende $1\,000^2 = 100\,0000$ metros cuadrados

La unidad *principal* para la Agrimensura es el *Area* ó *Decámetro cuadrado* $= 10^2 = 100$ metros cuadrados; y de ella se derivan la *Hectárea* $= 100$ áreas, ó Hectómetro cuadrado $= 100^2 = 10\,000$ metros cuadrados; y la *Centi*-área, centésima parte del área, ó metro cuadrado.

Unidades de volúmen ó cúbicas.—Cubos cuyos lados son las unidades lineales respectivas. Así, un *Decámetro cúbico* es un cubo que tiene un *Decámetro* de lado; y comprende, por consecuencia, $10^3 = 1\,000$ metros cúbicos. El metro cúbico, llamado *Tonelada de arquéo*, es la unidad que se usa para medir grandes capacidades.

Para los *líquidos*, la unidad *principal* es el *Litro*.= decímetro cúbico; cuyos múltiplos y divisores ya sabemos cómo se expresan.

Para los *áridos* se emplean las mismas medidas que para los líquidos.

Unidades de peso.—Su unidad *principal*, el *Gramo*, es el peso que tiene un centímetro cúbico, ó sea un mililitro, de agua pura, en el vacío y á la temperatura de 4° centígrados. El *Kilogramo* $= 1\,000$ gramos, es la unidad más usada, y se llama por ésto, *Kilo* solamente.

Sobre el *Miriagramo* $= 10\,000$ gramos, están el *Quintal métrico* que tiene 100 000 gramos, y la *Tonelada de peso* que tiene 10 quintales métricos, ó sean 1 000 000 gramos.

61. Como ya en un principio indicamos, los complejos, referidos á las diferentes unidades de cada especie del sistema métrico, pueden ser expresados fácilmente se-

gun las mismas reglas de la numeracion decimal. Así:

4 decámetros, 2 *metros*, 4 decímetros, 3 centímetros, se expresará por el número 42,43 metros (considerando la cifra de los metros como la de las unidades).—5 hectolitros, 6 decalitros, 4 *litros* y 2 centilitros, por el número 564,02 litros.—7 kilogramos, 6 decagramos, 5 *gramos* y 6 centigramos, por el número 7065,06 gramos.—6 hectáreas, 4 *áreas* y 27 centiáreas, por el número 604,27 áreas.

Como el decámetro cuadrado tiene 100 metros cuadrados, 24 decámetros cuadrados serán 24 centenas de metros cuadrados: del mismo modo que 40 centímetros cuadrados son 40 diezmilésimas de un metro cuadrado que tiene 10 000 centímetros cuadrados. Por lo cual, el complejo 24 decámetros cuadrados, 7 *metros cuadrados*, 6 decímetros cuadrados, 40 centímetros cuadrados, se expresará por el número 2407,0640 metros cuadrados.

Á reglas semejantes obedecen los complejos de volúmen. Basta tener presente, para escribirlos, que los decámetros cúbicos son millares; los decímetros cúbicos, milésimas; y los centímetros cúbicos, millonésimas, del metro cúbico.

Relaciones aproximadas entre las antiguas medidas y las métricas.

1 legua............	=	5,57272 kilómetros.
1 estadal...........	=	0,33436 decámetros.
1 vara..............	=	0,83591 metros.
1 pié...............	=	2,78636 decímetros.
1 estadal cuadrado...	=	0,11180 áreas.
1 fanega de tierra....	=	0,64396 hectáreas.
1 aranzada..........	=	0,44719 hectáreas.
1 vara cuadrada.....	=	0,69874 metros cuadrados.
1 vara cúbica	=	0,58408 metros cúbicos.
1 cuartillo	=	0,50416 litros.
1 cántara..........	=	1,61330 decalitros.

1 libra de aceite.....	=	0,50252 litros.
1 celemin...........	=	4,62508 litros.
1 fanega...........	=	0,55501 hectolitros.
1 onza.............	=	28,75582 gramos.
1 libra.............	=	0,46009 kilogramos.
1 arroba...........	=	11,50232 kilogramos.
1 kilómetro.........	=	0,17945 leguas.
1 decametro........	=	0,29908 estadales.
1 metro............	=	1,19631 varas.
1 decimetro.........	=	0,35889 piés.
1 área.............	=	8,94454 estadales cuadrados.
1 hectárea..........	=	1,55289 fanegas de tierra.
1 hectárea..........	=	2,23618 aranzadas.
1 metro cuadrado...	=	1,43115 varas cuadradas.
1 metro cúbico......	=	1,71209 varas cúbicas.
1 litro..............	=	1,98350 cuartillos.
1 decalitro..........	=	0,61985 cántaras.
1 litro..............	=	1,98997 libras de aceite.
1 litro..............	=	0,21621 celemines.
1 hectolitro.........	=	1,80177 fanegas.
1 gramo...........	=	0,03477 onzas.
1 kilogramo.........	=	2,17349 libras.
1 kilogramo.........	=	0,08694 arrobas.

La unidad monetaria es hoy en España la *peseta*, dividida en 100 céntimos; en monedas de plata de 50 y 25 céntimos; y de bronce de 10, 5, 2 y 1 céntimo.

CUESTIONARIO.

¿Cómo se representan por las mismas cifras las unidades inferiores ó subordinadas á la unidad simple? ¿Cuál es el cuadro *(schema)* completo de la numeracion decimal en sus órdenes y subórdenes? ¿Qué significa la coma ó el punto decimal?

¿Qué son quebrados decimales? ¿Cómo se leen? ¿Cómo se escriben? ¿Qué cálculos exige la trasformacion de los quebrados decimales en otros de igual valor? ¿O cómo puede expresarse de múltiples maneras un quebrado decimal? ¿Puede haber otros sistemas de numeracion, diferentes del decimal? ¿Tendrán importancia en la práctica?

¿Qué es *sistema métrico decimal*? ¿Cuál es su unidad *fundamental* y porqué se llama así? ¿Cuáles son sus unidades *principales*? ¿Cómo se expresan los múltiplos y divisores de estas unidades? ¿Cómo se escriben unas y otros? Equivalencia del metro, el litro, el kilo y la hectárea con nuestras antiguas medidas y pesas.

15.—Adicion y sustraccion de decimales.

62. Como, tratándose de enteros, se suman unidades con unidades, decenas con decenas, etc., así tratándose de decimales, se suman décimas con décimas, centésimas con centésimas, etc., comenzando por el lugar ínfimo. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 27{,}568 \\ +\ 5{,}874 \\ \hline 33{,}442 \end{array}$$

8+4 milésimas.	=12 milésimas.	=1 centésima	+2 mil.
1+6+7 centésimas	= 14 centésimas	=1 décima	+4 cént.
1+4+8 décimas	=14 décimas	=1 unidad	+4 décs.
1+7+5 unidades	=13 unidades	=1 decena	+3 unid.
1+2 decenas	= 3 decenas.		

$$\begin{array}{r} 35{,}894 \\ +\ 0{,}1307 \\ \hline 36{.}0247 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 27{,}568 \\ +\ 1{,}232 \\ \hline 28{,}8 \end{array}$$

Las diezmilésimas, en el primero de estos dos últimos ejemplos, permanecen invariables; los ceros, en el segundo, pueden suprimirse ó despreciarse.

63. Asimismo se sustraen décimas de décimas, centésimas de centésimas, etc. Para lo cual, cuando sea necesario, se toma 1 unidad = 10 décimas = 100 centésimas; ó 1 décima = 10 centésimas, etc., como se hizo en la sustraccion de enteros (5)

Ejemplos.

$$\begin{array}{r} 35{,}0305 \\ -\ 6{,}8941 \\ \hline 28{,}1364 \end{array}$$

5 — 1 diezmilésimas = 4 diezmilésimas.
10 — 4 milésimas.... = 6 milésimas.
12 — 9 centésimas... = 3 centésimas.
9 — 8 décimas...... = 1 décima.
14 — 6 unidades..... = 8 unidades.
2 decenas.

$$\begin{array}{r} 1{,}534 \\ -0{,}734 \\ \hline 0.8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ -0{,}794 \\ \hline 0{,}206 \end{array}$$

Los ceros al final pueden suprimirse. Y, para facilitar la sustraccion en el último ejemplo, al minuendo 1, puede mentalmente sustituirse este otro número : 1,000.

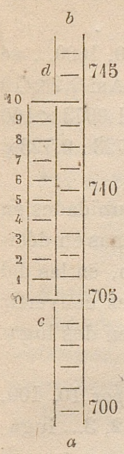
En estos cálculos llevan ventaja los quebrados decimales á los comunes.

CUESTIONARIO.

¿Cómo se suman los decimales? ¿Cómo se sustrae un decimal de otro? ¿Qué se hace cuando una cifra del sustraendo es mayor que su correspondiente del minuendo?

¿Qué diferencia existe, por ejemplo, entre 1 milímetro y la 10ª parte de 9 milímetros? Explíquese el *Nonius*.

Este nombre lleva una pieza que corre á lo largo de una escala recta, ó de un arco graduado (limbo), y sirve para leer en ella divisiones menores que las grabadas en la escala ó el limbo.



La escala del Barómetro, por ejemplo, está dividida en milímetros, como suponemos que muestra la adjunta figura. Tomando de la escala *ab* 9 milímetros, dividiendo su longitud en 10 partes iguales, y grabándolas en una piezecita como la *cd*, tenemos el *Nonius*. Entre cada division de la escala (1 milímetro) y cada division del Nonius (la 10ª parte de 9 milímetros), hay la misma diferencia, 1 décima de milímetro, que es la fraccion apreciada en el Nonius. Los trazos 0 y 10 del Nonius coinciden (en la figura, como es consiguiente), con los 705 y 714 de la escala; pero los trazos ó rayas 1, 2... 9 del Nonius, se van quedando 1, 2... 9 décimas de milímetro por debajo de los trazos 706, 707... 713 de la escala. Luego, corriendo el Nonius y subiendo su trazo ó raya 0 *una* décima de milímetro, su trazo 1 coincidirá con el 706 de la escala; subiendo *dos* décimas de milímetro el 0 del Nonius, su trazo 2 se pondrá en coincidencia con el 707 de la escala; subiéndole *cinco* décimas de milímetro su trazo 5 llegará á enfrentar con el 710, etc. Y siempre el número de la raya del Nonius que enfrente con una raya de la escala, expresará las décimas de milímetro sobre los milímetros enteros que en la escala se léen directamente hasta la division en que caiga el 0 de aquél.

El Nonius aprecia unidades fraccionarias de la division de la escala, ó del limbo, cuyo denominador es el número total de sus divisiones. Si un arco está dividido de 10′ en 10′, y el Nonius en 60 partes, éste apreciará 60 *avos* de 10′ ó sean 10″. Igual resultado se obtendria dividiendo en 10 partes iguales la longitud, no ya de 9, sino de 11 divisiones de la escala principal.

16.— Multiplicacion de quebrados decimales.

64. *Para multiplicar un decimal* por 10, 100, 1000... se corre la coma á su derecha 1, 2, 3... lugares. Así $7{,}23\times10 = 72{,}3$; $11{,}5\times10 = 115$; $0{,}007\times10 = 0{,}07$; $1{,}0073\times100 = 100{,}73$; $0{,}0067\times100 = 0{,}67$; $0{,}723\times1000 = 723$; $0{,}723\times 10000 = 7230$.

Porque multiplicar por 10 es convertir las unidades en decenas, las décimas en unidades, las centésimas en décimas, etc : esto es, las unidades de cada órden, en las del próximo, más elevado; multiplicar por 100 es convertir las unidades de cada grado en las superiores en dos lugares, etc.

Y á la inversa : *para dividir un decimal por* 10, 100, 1000... se corre la coma hácia su izquierda 1, 2, 3... lugares. Así :

$$17{,}23 : 10 = 1{,}723 \qquad 7{,}23 : 10 = 0{,}723$$
$$17{,}23 : 100 = 0{,}1723 \qquad 17{,}23 : 1000 = 0{,}01723$$
$$0{,}03 : 10000 = 0{,}000\,003$$

Estas reglas se derivan de las generales, expuestas en el capítulo 10.

65. *Para multiplicar un decimal por otro decimal* se multiplica el multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador, desde la más elevada hasta la ínfima; se coloca la coma en la primera fila (producto parcial) del producto, y se van corriendo sucesivamente un lugar á la derecha las otras filas; sumándose, por último, todos los productos parciales.

Si se multiplica primeramente por *unidades*, la coma conserva en el producto el mismo lugar que tuviera en el multiplicando.

Por ejemplo:

$$\frac{7{,}543 \;.\; 6}{45{,}258}; \text{ porque } 7{,}543 \;.\; 6 = \frac{7543 \;.\; 6}{1000}$$

Si se multiplica primeramente por *decenas, centenas,* etcætera, se correrá la coma en el producto 1, 2... etc., lugares á la derecha.

Por ejemplo:

$$\frac{7{,}543 \;.\; 40}{301{,}72}; \quad \frac{7{,}543 \;.\; 800}{6034{,}4}; \quad \frac{0{,}5763 \;.\; 2000}{1152{,}6}$$

Porque 7,543 . 40 = 75,43 . 4; etc.

Cuando se multiplique primeramente por *décimas, centésimas,* etc., deberá correrse la coma en los productos respectivos, 1, 2..., etc., lugares hácia la izquierda.

Por ejemplo:

$$\frac{7{,}543 \;.\; 0{,}2}{1{,}5086}; \quad \frac{7{,}543 \;.\; 0{,}05}{0{,}37715}; \quad \frac{7{,}543 \;.\; 0{,}007}{0{,}052801}$$

Porque $7{,}543 \;.\; 0{,}2 = 7{,}543 \times \frac{2}{10} = 0{,}7543 \;.\; 2$; etc.

Al multiplicar, después, por las cifras del multiplicador, que siguen á la más elevada, debemos poner cuidado en correr cada nueva fila, ó producto parcial, un lugar hácia la derecha.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 7{,}543 \;.\; 46{,}25 \\ \hline 301{,}72 \\ 45\,258 \\ 1\,5086 \\ 57715 \\ \hline 348{,}86375 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 46{,}25 \;.\; 7{,}543 \\ \hline 323{,}75 \\ 23\,125 \\ 1\,8500 \\ 13875 \\ \hline 348{,}86375 \end{array}$$

$$62\,500 \;.\; 0{,}001\,28 = \begin{array}{l} 625 \;.\; 0{,}128 \\ \hline 62{,}5 \\ 12\,50 \\ 5\,000 \\ \hline 80 \end{array}$$

En este ejemplo hemos tomado 625 . 100 por su igual 62500, y multiplicado el decimal por 100. Los ceros despues de la coma no figuran.

$$15,743 \,.\, 322,69 = 1574,3 \,.\, 3,2269$$

Puede un factor dividirse por 100 y multiplicarse por 100 el otro (12).

Segun la regla general ordinaria se multiplican los numeradores (números enteros) y se divide su producto por el de los denominadores, separando del primer producto, con la coma hácia la derecha, tantas cifras como decimales contengan los dos factores juntos. Así, por ejemplo, si un factor tuviese 3 y el otro 4 cifras decimales, el producto contendria $3 + 4 = 7$ decimales; porque el denominador 1000 multiplicado por el denominador 10000 produce el denominador 10000000 que supone 7 decimales. Este procedimiento, sin embargo, no debe recomendarse en la práctica; porque en la multiplicacion abreviada (**18**) no es, sin modificacion, aplicable.

CUESTIONARIO.

¿Cómo se multiplica y se divide un decimal por 10, 100... (la unidad seguida de ceros)? ¿Cómo se *resuelven* y se *reducen* los números complejos decimales (del sistema métrico)? ¿Cómo se multiplica un decimal por otro? ¿Dónde y cómo debe colocarse la coma ó el punto decimal? Razon de comenzar la multiplicacion por la cifra más elevada del multiplicador.— ¿Hay ventajas en este procedimiento de multiplicar decimales sobre el conocido general, de multiplicar quebrados cualesquiera?

17.—Division de decimales.

66. Si el divisor es entero se hallan:

los enteros del cociente, por la division de los enteros del dividendo;

las décimas del cociente, por la division de las décimas del dividendo, incluyendo en ellas el resto de las unidades;

las centésimas del cociente, por la division de las centésimas del dividendo incluyendo en ellas el resto de las décimas; etc. Si faltaren en el dividendo lugares decimales para continuar la division, se le agregan á su derecha los ceros necesarios: artificio lícito, y conveniente muchas veces.

Ejemplos.

```
326,74 : 28 = 11,6692
 28
 ──
  46
  28
  ──
  187          11,6692 × 28
  168          ────────────
  ───          233,384
   194          93 3536
   168               24
   ───         ────────
    260        326,74
    252
    ───
     80
     56
     ──
     24...
```

```
0,053 : 9 = 0,005 88
  0
   5
   53
    80
     80
      8...
```

```
5 : 7 = 0,714 2857
50
 10
  30
   20
    60
     40
      50
       1...
```

Cuando la unidad primitiva (entera) se somete particularmente á la division decimal, y no puede, por lo tanto, considerarse dividida en tantas partes como indique el divisor, sea el que quiera, el cociente expresado en fraccion decimal será en muchos casos *inexacto;* y entónces la naturaleza del problema nos dirá hasta qué cifra hemos de prolongarlo. Se dispone, como sabemos, del resto, para hacer tan aproximado á la verdad, como sea factible, el cociente calculado, disminuyendo su error cuanto se pueda (15).

¿Basta, por ejemplo, obtener el cociente 326,74 : 28 hasta la diezmilésima y no tener en cuenta ya las cienmilésimas del mismo, considerándolas como despreciables? Pues tomaremos como cociente el número 11,6693 y no el 11,6692; porque en la última division 80 : 28, el cociente está más cerca de 3 que de 2. El error del cociente 11,6693 no llega á $\frac{1}{2}$ diezmilésima y es tan pequeño como puede serlo, cuando se renuncia á fracciones de órdenes inferiores. Puesto que al tomar el cociente 80 : 28 = 3, se desprecia la fraccion $\frac{4}{28}$ (menor que $\frac{1}{2}$) de diezmilésima; miéntras que, si se tomara 80 : 28 = 2, se despreciaria la fraccion $\frac{24}{28}$ (mayor que $\frac{1}{2}$) de diezmilésima.

Asimismo es 0,053 : 9 más aproximadamente igual á 0,00589 que á 0,00588; y, por el contrario, 5 : 7 es más aproximadamente 0,7142857 que 0,7142858. *La última cifra del cociente se aumenta en* 1 *cuando el resto sea mayor que la mitad del divisor*. El error del cociente será entónces menor que $\frac{1}{2}$ unidad de su último órden.

67. Para *dividir por un decimal*, se multiplica por su denominador, y el producto se divide por su numerador como se hace con los quebrados ordinarios.

Ejemplos.

$$\begin{array}{rl} 17,4832 : 3,125 = & 17,4832 \,.\, 1000 : 3125 \\ = & 17483,2 : 3125 = 5.59\ldots \\ & \underline{15625} \\ & \;\;18582 \\ & \;\;\underline{15625} \\ & \;\;\;29570 \\ & \;\;\;\underline{28125} \\ & \;\;\;\;1445\ldots \end{array}$$

$0{,}043\,81 : 0{,}35 = 4{,}381 : 35;\quad 0{,}09 : 0{,}3845 = 900 : 3845$

En lugar de 0,09 podemos escribir 0,0900; y así decir que 3845 diezmilésimas se hallan contenidas en 900 diezmilésimas tantas veces como 3845 en 900. La coma puede suprimirse en el momento que dividendo y divisor se hagan homogéneos ó del mismo denominador (44).

68. El recíproco de un número es el cociente de la unidad por dicho número. El recíproco de 13 es $1 : 13 = 0{,}076923$; el de 0,5 es 2; el de 0,0125 es 80, etc.

En los cálculos en que están mezcladas las operaciones de multiplicar y dividir desempeñan los números recíprocos una funcion semejante á la de los complementos aritméticos en los cálculos comprensivos de adiciones y sustracciones (6). Porque, evidentemente, la multiplicacion por el recíproco de un número es la division por este número, y viceversa. Para facilitar los cálculos se han publicado tablas de números recíprocos, mereciendo entre ellas mencion especial las de Barlow (*). Calcular, por ejemplo, en decimales, la suma

$$\frac{365}{7988} + \frac{273}{5079}$$

Para efectuarlo, se multiplica 365 por el recíproco de 7988, que es 0,0001251878; el otro numerador 273, por el recíproco de su denominador 5079, que es 0,0001968892; y se suman luego los dos productos. La suma propuesta es finalmente: 0,0994443.

69. Si dividendo y divisor (prescindiendo de la coma) son números primos entre sí (32); y el divisor 2, 4, 8, 16, 32, 64,... (una potencia de 2); ó 5, 25, 125, 625, 3125... (una

(*) Aunque no precisamente de este género, tenemos en España las que con el nombre de *El Pitágoras* publicó con esmero desusado don Juan José Conde, en sustitucion ventajosísima de todos los *Libros de cuentas ajustadas*.

potencia de 5); ó un número compuesto exclusivamente de los anteriores, tal como 20, 40, 80, 160... 50, 200, 400, 800... 250, 500, 2000... 1250, 2500, 5000 20000... etc.; la division será exacta, y el cociente, por consecuencia, será un decimal completo (finito). Así, por ejemplo, la division será exacta : para el

divisor 20 y el resto 13; porque $\frac{13}{20} = \frac{13 \,.\, 5}{20 \,.\, 5} = 0{,}65$

» 125 » 72 » $\frac{72}{125} = \frac{72 \,.\, 8}{125 \,.\, 8} = 0{,}576$

» 36 » 27 » $\frac{27}{36} = \frac{3 \,.\, 25}{4 \,.\, 25} = 0{,}75$

» 56 » 35 » $\frac{35}{56} = \frac{5 \,.\, 125}{8 \,.\, 125} = 0{,}625$

Y si efectuamos las divisiones siguientes con los divisores dados 20, 125, 36 y 56, y los restos correspondientes 13, 72, 27 y 35, hallamos :

```
27,53 : 20 = 1,3765
 7 5
 1 53
   130
    100
      0
```

```
607,2 : 125 = 4,8576
107 2
   7 20
     950
      750
      750
      ---
     0
```

```
18387 : 36 = 510,75
180
----
 38
 36
 ----
  270
  252
  ----
   180
   180
   ----
     0
```

```
35 : 56 = 0,625
350
336
----
 140
 112
 ----
  280
  280
  ----
    0
```

70. Cuando el divisor, primo con el dividendo (y el resto), sea divisible por un número primo, diferente de 2

y 5, la division no terminará; y el cociente será una fraccion decimal, *infinita periódica*, que cortarémos de modo que su error tenga la pequeñez precisa.

Así, por ejemplo, si el divisor fuese 7 y el resto 3, el quebrado $\frac{3}{7}$, correspondiente al último lugar del cociente, no es convertible exactamente en decimal; porque 7 no está contenido en 10, 100, 1000... (36). Si el divisor fuese 12 y el resto 5, el quebrado $\frac{5}{12}$ podría trasformarse en este otro $\frac{125}{300}$ que tampoco es convertible en decimal; porque 300 no está contenido en 1000, 10000, etc., como no lo está 3 en 10. Luego las divisiones 3,00... : 7 y 5,00... : 12 no se acaban, no son exactas.

Ahora bien, cuando el divisor es 7, sólo pueden aparecer como restos en la division los números inferiores á 7, esto es: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Por consecuencia, si llegamos hasta la 6.ª division, obteniendo restos diferentes, en la 6.ª division quedará un resto que ya anteriormente habrá salido, y desde el cual obtendremos, por su órden, los mismos cocientes y restos que ántes, repitiéndose sin fin. La série de cocientes, cuyo número es menor que el divisor, que se repite indefinidamente, se llama *período* de la fraccion decimal infinita.

Ejemplos.

3 : 7 = 0,428 571 428 571 428... se designa por 0, [428 571]
30
20
60
40
50
10
3...

31 : 33 = 0,[93]
310
297
130
99
31...

19 : 111 = 0,[171]
190
111
790
777
130
111
19...

7 : 9 = 0,[7]
70
7...

1 : 15 = 0,0[6]
10
100
10...

1 : 369 = 0,[00271]
10
100
1000
2620
370
369
1...

119 : 220 = 0,54[09]
1190
900
2000
1980
20...

El período comienza por la cifra del cociente que se obtiene cuando se agrega el primer cero al resto, excepto en los casos en que el divisor sea divisible por 2 ó por 5.

Para poner en claro esta afirmacion con ejemplos, supongamos que el dividendo es 13 y el divisor 44, que es el producto 4 . 11. Efectuando la division sucesivamente por los dos factores de 44, hallamos :

4) 13
11) 3,25
0,29 [54]...

Si el dividendo es 3 y el divisor 14 = 2 . 7, tendremos:

2) 3
7) 1,5
0,2[142857]

Estos ejemplos muestran que, descomponiendo el divisor en dos factores, uno que sea 2 ó una potencia de 2 y el otro primo con 2, y efectuando la division sucesivamente por estos factores, el período comienza por la cifra del segundo cociente que se obtiene cuando se agrega tambien el primer cero al resto. Y si, en vez de 2, fuese uno de los dichos factores 5 ó potencia de 5, sucedería lo mismo. Períodos, como el 428 571, cuyas tres cifras 4, 2 y

8 son respectivamente complementarias con 9, de las otras tres 5, 7 y 1, se llaman *dualísticos*.

No podemos penetrar más en este asunto dentro de los límites de la *Aritmética vulgar*.

71. Todo quebrado ordinario puede trasformarse: ó en una fraccion decimal finita, ó en una decimal periódica, infinita. Puesto que un quebrado es el cociente de su numerador por su denominador, esto es: $\frac{7}{12} = 7 : 12$.

Y á la inversa: toda fraccion decimal infinita, *periódica*, es igual á un quebrado ordinario que puede siempre determinarse. En efecto:

$$\frac{1}{9} = 0,[1], \quad \frac{1}{99} = 0,[01], \quad \frac{1}{999} = 0,[001],$$

$$\frac{1}{9999} = 0,[0001], \quad \frac{1}{99999} = 0,[000\ 01] \text{ etc.}$$

Ahora bien, la fraccion 0,6666... = 0,[6] es el producto por 6 de la fraccion 0,1111.. = 0,[1]; la fraccion 0,3636... = 0,[36] es el producto de 0,0101... = 0,[01] por 36; etc. Luego:

$$0,[6] = 0,[1] \,.\, 6 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$0,[36] = 0,[01] \,.\, 36 = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

$$0,[270] = 0,[001] \,.\, 270 = \frac{270}{999} = \frac{10}{37}$$

$$0,0[4] = 0,[4] : 10 = \frac{4}{9} : 10 = \frac{2}{45}$$

$$0,8[3] = 8,[3] : 10 = 8\,\frac{1}{3} : 10 = \frac{5}{6}$$

$$0,29[74] = 29,[74] : 100 = 29\,\frac{74}{99} : 100 = \frac{589}{1980}$$

La fraccion 0,[9] puede considerarse como expresion de la unidad; puesto que difiere de ella tan poco como queramos. Sólo en el supuesto de que fuesen *nueves* todas las cifras siguientes á una cualquiera, valdría la suma de aquellas cifras una unidad del órden de ésta; pero en todos los demás casos valdría ménos.

Una fraccion decimal inexacta (infinita), *no periódica*, no será tampoco expresion cabal de una fraccion ordinaria; sino siempre un valor aproximado, que cortarémos en el lugar que nos convenga.

Estas fracciones decimales, infinitas y no periódicas, podemos asegurar que no resultan de ninguna de las operaciones de cálculo que estudiamos en la *Aritmética vulgar*.

CUESTIONARIO.

¿Cómo se divide un decimal por un entero? ¿Cómo se divide por un decimal? ¿Por qué puede ser el cociente inexacto? ¿Qué son números recíprocos?

¿Cuándo será el cociente una decimal exacta (finita)? ¿Cuándo será una decimal inexacta (infinita)? ¿Será periódica forzòsamente una decimal infinita? ¿Cuántas clases hay de fracciones periódicas? ¿En qué cifra comienza el período?

¿Cómo se trasforma en fraccion ordinaria una decimal periódica? ¿Qué representacion tiene una decimal infinita, no periódica?

18. — Cálculo con decimales aproximados.

72. Ninguna medida se toma exacta, sino con cierta aproximacion á la verdad, que depende de las condiciones de los instrumentos métricos y de la perspicacia de nuestros sentidos. Los números hallados por la medicion, en consecuencia, solamente ofrecen garantía bajo de cierto límite determinado, y deben considerarse como incompletos ó afectados de algun error. Tambien hay otra clase numerosa de valores determinados por el cálculo, tales como las raízes, los logaritmos, los senos, el número de Ludolf, la base de los logaritmos naturales, etc., que son, segun su naturaleza, sumas de infinitos términos, y sólo pueden darse, por lo tanto, como aproximados ó incompletos, por más que su error en cada caso sea despreciable. Es preciso, pues, saber qué garantía de exactitud ofrecen los resultados de los cálculos con números aproximados ó incompletos.

Supondremos que el error de todo número incompleto es menor que ½ unidad de su último órden dado. En tal supuesto, significarán:

35	un número comprendido	entre	34,5	y	35,5
1,427	»	»	1,4265	»	1,4275
0,4700	»	»	0,46995	»	0,47005
20734 millares	»	»	20733500	»	20734500
$329\frac{2}{7}$	»	»	$329\frac{3}{14}$	»	$329\frac{5}{14}$

Segun el mismo supuesto, cuando se acorte un decimal, despreciando las cifras siguientes á la que nos convenga, *se agrega* 1 *á esta cifra, siempre que las cifras suprimidas valgan más de* 5 *unidades del órden de la primera de ellas* (que es la siguiente á la última conservada.)

Procediendo así, claro es que los decimales *abreviados* serán unas veces mayores y otras menores que los dados, ó, lo que es igual, los errores en unos serán por exceso y en otros por defecto. Por ejemplo: 38,5764 está más próximo de 38,5760 que de 38,5770; y, por consiguiente, puede tomarse 38,576 como abreviado (por defecto.) El mismo número se acerca más á 38,60 que á 38,50: luego puede tomarse 38,6 como más abreviado todavía (por exceso).

Por 27 538 936 puede escribirse ó tomarse 27,539 millones, si solamente se tienen en cuenta los millares; por 0,46996 puede tomarse abreviadamente 0,4700 cuando sólo tomemos en cuenta las diezmilésimas. Y nótese que los ceros al fin, en este caso, no carecen de significacion.

Por *aproximacion de un dato numérico* se comprende la razon del número á su error; y, por lo tanto, á una unidad de su último órden cuya cifra no es enteramente exacta. Así el dato 86,43 tiene la aproximacion 86,43 : 0,01 = 8643 : lo cual significa que de 8643 unidades sólo hay una que no ofrezca plena garantía.

Los datos 86,43 y 0,008643 tienen igual aproximacion; puesto que

$$86{,}43 : 0{,}01 = 0{,}008643 : 0{,}000\,001 = 8643$$

La longitud (calle, camino, cuerda, etc.) de la que se sabe tiene 8192 piés, por ejemplo, es más aproximadamente conocida que otra de la que supiéramos tenía 0,3024 pulgadas; porque

$$8192 : 1 = 8192 \quad \text{y} \quad 0{,}3024 : 0{,}0001 = 3024$$

Los que encierran mayor aproximacion son los datos astronómicos; y sólo en raras ocasiones la tienen igual los números que se derivan de los experimentos y ensayos físicos y químicos.

73.—ADICION Y SUSTRACCION.

De lo dicho ántes se colige que unos sumandos pudieran ser aproximados por defecto y otros por exceso, y sus errores compensarse, por lo tanto, en la suma. Y lo mismo podría suceder en la diferencia de dos decimales aproximodos. Pero nosotros, que deseamos en todo caso patentizar la máxima aproximacion de los resultados, suponemos que los sumandos están todos afectados de error en el mismo sentido, y que el error del minuendo es de sentido opuesto al del sustraendo; porque de este modo se acumulan los errores, resultando el mayor posible para la suma y para la diferencia. En esta hipótesis, el error (por exceso ó por defecto) de la suma, será siempre menor que

$\frac{1}{2}$ unidad del último órden dado en todos los sumandos, multiplicada por el número de éstos.

Así, por ejemplo, si los sumandos son 5, y su última cifra, del órden de las *diezmilésimas,* el error de cada sumando será menor que 0,00005 y el error de la suma será menor que $5 \times 0{,}00005 = 0{,}00025$. Y el error de la diferencia, con datos igualmente aproximados, sería, en el supuesto establecido, menor que

$$0{,}00005 + 0{,}00005 = 00010$$

En los dos ejemplos siguientes,

$$\begin{array}{r} 7{,}329 \\ +\,3{,}487 \\ \hline 10{,}816 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 7{,}329 \\ -\,3{,}842 \\ \hline 3{,}487 \end{array}$$

el error de la suma y el de la diferencia pueden exceder de media milésima. Cuando hay varios términos (sumandos) siempre será incierta la última cifra. Respecto de los ejemplos

$$\begin{array}{r} 0{,}01374 \\ +\,9{,}256 \\ \hline 9{,}270 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 9{,}243 \\ -\,0{,}0148 \\ \hline 9{,}228 \end{array}$$

debemos advertir que términos sumados ó restados deben cortarse en el mismo órden. Las diezmilésimas de la suma no son ya determinables, porque uno de los sumandos no llega á ellas; y por ésto se toma 0,014 en vez de 0,01374.

El conocimiento de la máxima aproximacion de la suma y la resta, dada la de sus términos, nos permite tomar éstos, á su vez, con la aproximacion conveniente, determinada de antemano la que deba tener su suma y su diferencia.

74.—MULTIPLICACION.

La aproximacion de un producto no puede ser mayor que la del producto del factor ménos aproximado por la cifra más elevada del factor más aproximado; porque en el producto parcial, obtenido así, queda la cifra errónea del factor ménos aproximado en el órden ó lugar más elevado á que puede ascender en la operacion dada; y, por consecuencia, en este mismo órden deberán terminar los otros productos parciales. Segun esto, *se elige para multiplicando el factor ménos aproximado*, el más aproximado para multiplicador, y se calcula el primer producto parcial como de ordinario (65). Los siguientes productos parciales se calcularán no tomando en cuenta las cifras del multiplicando que den productos de órdenes inferiores al del primero hallado.

Se facilita la operacion escribiendo debajo del multiplicando el multiplicador en órden inverso de modo que los productos de cada dos cifras, una debajo de la otra, en los dos factores, sean del mismo órden. En el siguiente ejemplo se obtiene el producto segun el método ordinario (65) y el que acabamos de indicar.

$$\begin{array}{rl} 5{,}392 & .\ 7{,}386 \\ \hline 37{,}744 & \\ 1\,618 & \\ 431 & \\ 32 & \\ \hline 39{,}825 & \end{array} \qquad ó \qquad \begin{array}{r} 5{,}392 \\ 6\,837 \\ \hline 37{,}744 \\ 1\,618 \\ 431 \\ 32 \\ \hline 39{,}825 \end{array}$$

El órden del primer producto parcial es el de las milésimas; porque *milésimas* $\times$ *unidades* $=$ *milésimas*.

Al calcular el segundo producto parcial observo que el producto de las 2 milésimas del multiplicando por las 3 décimas del multiplicador es 6 diezmilésimas, que sólo tomo en cuenta para cargar 1 milésima al producto, 27 milésimas, de la cifra 9, de las centésimas del multiplicando, por la consabida cifra del multiplicador. En el tercer producto parcial agrego 7 milésimas al producto 53 . 8

milésimas, resultantes de las 72 diezmilésimas que contiene el producto por las 8 centésimas del multiplicador de las 9 centésimas del multiplicando; puesto que 72 está más cerca de 70 que de 80. Y lo mismo se procede con el cuarto producto parcial.

El error de cada uno de los 4 productos parciales es menor que $\frac{1}{2}$ milésima, ó sean 0,0005; y el del producto total, en el caso del mayor error posible, será, por lo tanto, $4 \times 0{,}0005$, como ya dijimos (73).

Si el número de productos parciales fuere suficientemente grande, los errores de las últimas cifras de éstos podrían afectar, no sólo á la última, sino á las de órdenes más elevados, del producto total; pero rara vez se presenta en la práctica semejante caso.

Fijada de antemano la máxima aproximacion de un producto, no es difícil escribir los factores uno debajo del otro, como ántes manifestamos, del modo conveniente para obtener el producto pedido, y áun acortar ó abreviar los factores para no entorpecer el cálculo con operaciones inútiles.

Ejemplos.

0,0267 . 76,384	357 600 . 18470
	=1,847 . 3,576 millares de millon.
1,869	5,541
160	924
8	129
2	11
2,039	6,605 millares de millon.

75.—DIVISION.

El procedimiento para abreviar la division se funda en el explicado para la multiplicacion. Como regla general se establece que la cifra más elevada del cociente se calcule por el método ordinario (67) que exige que el divisor se haga entero; y, como el dividendo es el producto del divisor por el cociente, fácil es conocer las cifras decimales que debe tener éste, y calcularlas abreviadamente en los dos casos que pueden presentarse, á saber:

1.° Si el divisor es más aproximado que el dividendo, se abrevia el divisor cuanto sea necesario para que su producto por la cifra hallada del cociente pueda restarse del dividendo dado. Para continuar la operacion no se prolonga el resto (bajando las cifras, como se dice, del dividendo) sino que se acorta el divisor.

En cada multiplicacion se lleva en cuenta la cifra últimamente tachada del divisor por lo que influye su producto sobre el de las otras.

Ejemplo.

$$
\begin{array}{rl}
 & 0{,}01034 : 94{,}65 \\
= & 1{,}034 : 9465 = 0{,}000\ 109_2 \\
 & 1\ 0 \\
 & 1\ 03 \\
 & 1\ 034 \\
 & 947 \\
\hline
 & 87 \\
 & 85 \\
\hline
 & 2 \\
 & 2.
\end{array}
$$

En este ejemplo llega el dividendo hasta las milésimas y la cifra más elevada del divisor es 9 millares; por lo cual debe tener el cociente siete cifras decimales, la última de las cuales será incierta. Su explicacion es como sigue:

A 1034 no debe añadirse un 0, sino que se tacha el 5 en el divisor y se resta $1 + 946 . 1 = 947$ del dividendo; porque 5 está más proximo á 10 que á 0. Al resto 87 no se añade tampoco un 0, sino que se tacha el 6 en el divisor y se resta 0. Se tacha luego el 4, y resto del dividendo $4 + 9 . 9 = 85$; porque $4 . 9 = 36$ está más próximo de 40 que de 30. La última cifra 2, del cociente (20 : 9) es incierta por el error posible en la última cifra del resto.

2.º Si el divisor es ménos aproximado que el dividendo, se abrevia el dividendo cuanto sea necesario para la sustraccion del producto del divisor por la cifra hallada del cociente. Hecho esto, la operacion se continúa como en el caso anterior.

Ejemplo.

$$
\begin{array}{r l}
658{,}37 & : 4{,}281 \\
= 658370 & : 4281 = 153{,}8 \\
4281 & \\
\hline
2303 & \\
2141 & \\
\hline
162 & \\
128 & \\
\hline
34 & \\
34 &
\end{array}
$$

La cifra más elevada del cociente es 1 centena; el producto del divisor por esta cifra es del órden de las centenas; y la máxima aproximacion del dividendo, por lo tanto, llegará hasta este órden de centenas, pudiendo acortarse (74) en el mismo. La explicacion del ejemplo propuesto es como sigue:

El dividendo está más próximo á 658 400 que á 658 300, y por eso el primer resto es 2303. Para la segunda division hemos suprimido en el divisor el 1, y en el resto el 7; para la tercera, en el divisor el 8 y en el resto el cero; poniendo la coma en el cociente despues de haber dividido las unidades del dividendo. Para la division siguiente hemos suprimido el 2 en el divisor.

Otros ejemplos.

```
 1 : 45,78
=100 : 4578 = 0,02184
 1000
 10000
  9156
  ----
   844
   458
   ---
   386
   366
   ---
    20
    18
```

```
 4865 : 0,273
=4865000 : 273 = 17900 = 17,9 millares
 273
 ---
 214
 191
 ---
  23
  24
```

En el segundo de estos ejemplos, la cifra más elevada del cociente es 1 decena de millar; y en este órden de las decenas de millar debe cortarse el dividendo, como ya sabemos.

76.—APLICACIONES.

1.ª Expresar el complejo 6 piés 6 pulgadas y $9\frac{4}{7}$ líneas en fraccion decimal de pié, de modo que la fraccion de pié llegue hasta 0,01 cierta en fraccion de línea.

$$\frac{4}{7} \text{ líneas} = 0{,}57 \text{ líneas}$$

$$6 \text{ pulgadas } 9\frac{4}{7} \text{ líneas} = 81{,}57 : 144 \text{ piés.}$$

```
81,57 : 144 = 0,5665
720
---
 957
 864
 ---
  93
  86
  --
   7
   7
```

6 piés 6 pulgs. $9\frac{4}{7}$ líneas $= 6{,}5665$ piés.

Recíprocamente: 0,5665 piés $= 0{,}5665.12$

```
   5,665
   1,133
   -----
   6,798 pulgadas.
```

0,798 pulgadas $= 0{,}798.12$

```
   9,576 líneas.
```

Luego 0,5665 piés $=$ 6 pulgadas $9{,}57_6$ líneas.

2.ª El año (trópico medio) tiene 365,24222 dias solares medios; se piden las horas, minutos y segundos que tendrá.

$$0{,}24222 \text{ dias} = \frac{0{,}24222 \,.\, 24}{5{,}8133 \text{ horas}}$$

$$0{,}8133 \text{ horas} = \frac{0{,}8133 \,.\, 60}{48{,}798 \text{ minutos}}$$

$$0{,}798 \text{ minutos} = \frac{0{,}798 \,.\, 60}{47{,}88 \text{ segundos}}$$

1 año = 365 dias 5 horas 48 minutos y 47,9 segundos.

3.ª Para multiplicar 7,643 por $\frac{5}{12}$, ó se multiplica por 5 y se divide el producto por 12 (42); ó se multiplica por la decimal equivalente al quebrado $\frac{5}{12}$ con tanta aproxima- por lo ménos como 7,743.

$$\begin{array}{l} \underline{7{,}643 \,.\, 5} \\ 38{,}215 : 12 = 3{,}1846 \\ \;\;22 \\ \;\;101 \\ \;\;\;\;55 \\ \;\;\;\;\;\;7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7{,}643 \,.\, 0{,}41667 \\ \hline 3{,}0572 \\ 764 \\ 458 \\ 46 \\ 5 \\ \hline 3{,}1845 \end{array}$$

Para dividir 7,643 por $\frac{5}{12}$, ó se multiplica por 12 y el producto se divide por 5; ó se divide por la fraccion decimal equivalente.

$$\begin{array}{l} \underline{7{,}643 \,.\, 12} \\ 91{,}726 : 5 = 18{,}345 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 7{,}643 : 0{,}41667 \\ = 764300 : 41667 : 18{,}344 \\ \;\;\underline{4167} \\ \;\;3476 \\ \;\;\underline{3333} \\ \;\;\;\;143 \\ \;\;\;\;\underline{125} \\ \;\;\;\;\;\;18 \\ \;\;\;\;\;\;16 \end{array}$$

4.ª $7{,}8649 + 9\frac{27}{38}$. El desarrollo en decimal del quebrado $\frac{27}{38}$ continuará sólo por bajo de las milésimas cuando el número mixto $9\frac{27}{38}$ tenga aproximacion suficiente.

$$
\begin{array}{lr}
 & 9 \\
27 : 38 = & 0{,}7105 \\
270 & +7{,}8649 \\
266 & \overline{17{,}5754} \\
\hline
\;40 & \\
\;38 & \\
\hline
\;\;200 & \\
\;\;190 & \\
\hline
\;\;\;10. &
\end{array}
$$

Para sumar la série de quebrados,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}$$

hasta 0,000 001 exacta, tendremos en cuenta que $\frac{1}{2\,.\,3} = \frac{1}{2} : 3$; que $\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} = \frac{1}{2\,.\,3} : 4$, etc. (41). Cada uno de los quebrados debe calcularse ó desarrollarse en decimal hasta la cifra siguiente á la que representa la aproximacion dada; porque la última cifra de la suma es incierta por la adicion de las de los sumandos

$$
\begin{array}{ll}
0{,}5 & :3 \\
0{,}166\,666\,7 & :4 \\
0{,}041\,666\,7 & .\,5 \\
0{,}008\,333\,3 & :6 \\
0{,}001\,388\,9 & :7 \\
0{,}000\,198\,4 & :8 \\
0{,}000\,024\,8 & :9 \\
0{,}000\,002\,8 & :10 \\
0{,}000\,000\,3 & \\
\hline
0{,}718\,282 &
\end{array}
$$

5.ª Un sujeto tiene que entregar, en los plazos de 3, 5 y 7 años, la misma cantidad de 560 pesetas, á condicion de rebajar de su deuda el $5\frac{1}{2}$ por ciento anual; ¿con cuánto pagará su deuda?

Siendo el $5\frac{1}{2}$ por ciento anual, en 3 años 100 pesetas subirán á $100 + 3 \cdot 5\frac{1}{2} = 116\frac{1}{2}$. Lo cual quiere decir, dentro de las condiciones del problema, que el acreedor, por cada $116\frac{1}{2}$ pesetas de la deuda recibirá solamente, en el primer plazo, 100 pesetas efectivas; quedando por consecuencia, las 560 pesetas reducidas á $\frac{100}{116\frac{1}{2}} \cdot 560$. Haciendo iguales consideraciones respecto de los otros dos plazos, resulta que en el

1.º	por cada	$100 + 3 \cdot 5\frac{1}{2} = 116\frac{1}{2}$	pesetas paga	100
2.º	»	$100 + 5 \cdot 5\frac{1}{2} = 127\frac{1}{2}$	» »	100
3.º	»	$100 + 7 \cdot 5\frac{1}{2} = 138\frac{1}{2}$	» »	100

O bien, más especificado: en el primer plazo (á los 3 años) tiene que dar $\frac{100}{116\frac{1}{2}} \cdot 560$ pesetas; en el segundo (á los 5 años), $\frac{100}{127\frac{1}{2}} \cdot 560$ pesetas; y en el tercero (á los 7 años), $\frac{100}{138\frac{1}{2}} \cdot 560$ pesetas. En suma:

$$\frac{100}{116\frac{1}{2}} + \frac{100}{127\frac{1}{2}} + \frac{100}{138\frac{1}{2}} \text{ del capital (560 pesetas).}$$

Cálculo.

$$
\begin{array}{rr}
100 : 116\tfrac{1}{2} = 1000 : 1165 & = 0{,}85837 \\
10000 \quad & 100 : 127\tfrac{1}{2} = 0{,}78432 \\
9320 \quad & 100 : 138\tfrac{1}{2} = 0{,}72202 \\
\hline
6800 \quad & 2{,}36471 \cdot 560 \\
5825 \quad & \\
\hline
975 \quad & 1182{,}355 \\
932 \quad & 141\ 883 \\
\hline
43 \quad & 1324{,}238 \\
35 \quad & \\
\hline
8 \quad &
\end{array}
$$

La deuda se pagará, en conclusion, con 1324 pesetas 24 céntimos.

6.ª Siendo 61 varas = 51 metros, 1 vara valdrá $\frac{51}{61}$ metros, y 1 metro $\frac{61}{51}$ varas.

```
51 : 61 = 0,84          61 : 51 = 1,2
510                     51
488                     ——
———                     10
 22                     10
 34
```

Sin mayor aproximacion en los datos no pueden obtenerse más cifras decimales, seguras.

Si 3,589 piés hacen 1 metro, será 1 pié = 1 : 3,589 = 0,2787 metros.

```
1 : 3,589 =  1000 : 3589 = 0,2787
            10000
             7178
            —————
             2822
             2512
            —————
              310
              286
             ————
               24
               24
```

7.ª Sabiendo que 1 pulgada cúbica de agua pesa $\frac{10}{23}$ onzas, y que 1 centímetro cúbico de agua pesa 1 gramo, puede hallarse la relacion entre la onza y el gramo. En efecto:

1 pié = 27,86 centímetros; y, por lo tanto, 1 pulgada $= \frac{27,86}{12}$ centímetros. De aquí se deduce que

$$1 \text{ pulgada cúbica} = \frac{27,86 \times 27,86 \times 27,86}{12 \times 12 \times 12} \text{ cents. cúbs.};$$

$$\frac{10}{23} \text{ onzas} = \frac{27,86 \times 27,86 \times 27,86}{12 \times 12 \times 12} \text{ gramos.}$$

Y, por fin:

$$1 \text{ onza} = \frac{27{,}86 \times 27{,}86 \times 27{,}86 \times 23}{12 \times 12 \times 12 \times 10} \text{ gramos.}$$

Cálculo.

$$\begin{array}{lll}
27{,}86 : 12 = 2{,}322 \times 2{,}322 & & 5{,}392 \times 2{,}322 \\
\;\;\;38 & \;\;\;4{,}644 & 10{,}764 \\
\;\;\;\;26 & \;\;\;\;\;697 & \;1\,618 \\
\;\;\;\;\;\;2 & \;\;\;\;\;\;\;46 & \;\;\;108 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;5 & \;\;\;\;\;11 \\
 & \overline{\;5{,}392\;} & \overline{12{,}521}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
12{,}521 \times 23 \\
\hline
250{,}42 \\
\;\;37\,56 \\
\hline
287{,}98 : 10 = 28{,}798
\end{array}$$

Una onza pesaría 28,80 gramos, en el supuesto de que fuera exacto el quebrado $\frac{10}{23}$. Segun las equivalencias más seguras entre las medidas antiguas y las métricas, pesa 1 onza 28,76 gramos solamente; pero tal diferencia, aparte del motivo indicado, puede provenir tambien de que en el sistema métrico se supone el agua á la temperatura de 4° centígrados, á la cual es el agua más espesa ó densa que á ninguna otra temperatura; y en el sistema de Castilla se toma el agua ménos densa.

8.ª En el metal blanco *(packfong)* entran 53,4 por 100 de cobre; 29,1 de zinc y 17,5 de nikel. ¿Cuáles son las cantidades de estos metales que debemos mezclar para componer 1200 libras de aleacion *(plata nueva)*, teniendo en cuenta que la mezcla sufre una merma de 1 ½ por ciento?

Esta merma significa que 100 libras de metal se reducen, despues de mezclarse, á 98,5; ó bien, que para obtener 98,5 libras de metal mezclado hay que poner 100 libras del mismo.

Si de cobre entra el 53,4 por ciento, en 12 cientos ó 1200 libras entrarán (sin tener en cuenta la merma) $53,4 \times 12$; y teniendo en cuenta la merma deberán entrar:

$$53,4 \times 12 \times \frac{100}{98,5} = 650,3$$

De zinc y de nikel deberán ponerse respectivamente en la mezcla las cantidades siguientes:

$$29,1 \times 12 \times \frac{100}{98,5} = 354,4$$

$$17,5 \times 12 \times \frac{100}{98,5} = \frac{213,2}{1218}$$

Se calcula el cociente $12000 : 985 = 12,18$, y se multiplica este número por 53,4, 29,1 y 17,5 respectivamente. 18 es el $1\frac{1}{2}$ por 100 de 1200.

CUESTIONARIO.

¿Qué son decimales aproximados? ¿Cómo se abrevia un decimal? ¿Qué se entiende por *aproximacion* de un dato numérico?

¿Cómo se suman y se restan números aproximados? ¿Cuál es el máximo error de la suma y la diferencia?

¿Cuál es la máxima aproximacion de un producto? ¿Cómo se multiplican números aproximados? ¿Cuál es límite máximo del error de un producto?

¿Cómo se dividen números aproximados en los dos casos que pueden ocurrir? ¿En qué se funda la regla para dividir números aproximados? Aplicaciones.

ÍNDICE.

LIBRO PRIMERO.

Del Cálculo con los números enteros.

LIBRO SEGUNDO.

Del Cálculo con los quebrados comunes.

LIBRO TERCERO.

Del Cálculo con los quebrados decimales.