PARTE SEGUNDA.

ESTEREOMETRÍA.

(Traduccion de la 5.ª edicion alemana, 1878.)

BALTZ.L Geometria II

ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS

POR EL

Dr. RICARDO BALTZER,

PROFESOR EN LA UNIVERSIDAD DE GIESSEN, MIEMBRO EN EJERCICIO DE LA SOCIEDAD DE BUENAS LETRAS DE LEIPZIG.

TRADUCIDOS DIRECTAMENTE DEL ALEMAN, CON AUTORIZACION DEL AUTOR,

POR

E. JIMENEZ y M. MERELO.

DOCTORES EN CIENCIAS.

GEOMETRÍA.

MADRID:
IMPRENTA DE SEGUNDO MARTINEZ
Travesía de San Mateo, 12.

1880.

PARTE SEGUNDA.

ESTEREOMETRÍA.

(Traduccion de la 5.ª edicion alemana, 1878.)

ÍNDICE.

Capítulos.

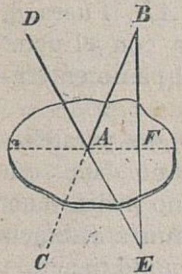
Capítulos.

ESTEREOMETRÍA.

I. — Interseccion de planos y rectas.

1. Si dos planos tienen un punto comun, tienen tambien una recta comun que pasa por dicho punto (*).

DEMOSTRACION. Las rectas BC y DE, trazadas en uno de los dos planos por su punto comun A, cortarán al otro plano por encontrar á las rectas de éste que pasan por A (*Planimetría*, 3). Los puntos B y E, que se hallan á diferentes lados del segundo plano, determinan una recta que corta en F á este mismo plano; pero la recta BE que tiene con el primer plano dos puntos comunes, está toda entera en dicho plano; luego F es otro punto comun; y la recta AF, por consecuencia, una recta comun á los dos planos que en ella se cortan. Fuera de su recta-interseccion no tienen los dos planos

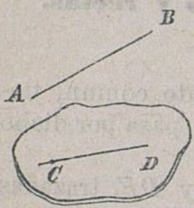


(*) EUCL. XI, 3, y otros, sólo establecen que es recta la línea que tienen comun dos planos.

ningun punto comun; pues, si lo tuvieran, coincidirían.

2. Una recta y un plano tienen un punto comun, en el cual se cortan. Si la recta es paralela á otra recta, situada en el plano, es tambien paralela al plano; es decir, no corta al plano, ó tiene con él un punto comun, infinitamente distante; hallándose su direccion contenida en el plano.

Demostracion. Por la recta AB y un punto cualquiera, C, del plano dado, está determinado otro plano (*Planimetría*, 4), que corta al dado en la recta CD (1). Las rectas AB y CD del plano ABC tienen, en general, un punto comun en el que se cortan; y en el cual, por lo tanto, corta al plano dado la recta dada AB. Fuera de este punto no puede tener la recta con el plano ningun otro comun, sin yacer en el plano enteramente ó confundirse con él.

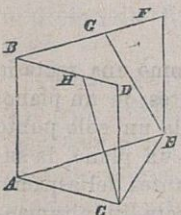


Cuando la recta AB no corte, ó sea paralela á otra recta, cualquiera, CD del plano dado, que pertenece además al plano ABC, no podrá tener con aquel plano ningun punto comun á distancia finita; porque las rectas AB y CD no lo tienen, y el plano ABC no tiene tampoco ningun punto comun con el plano dado, fuera de CD. El punto comun, infinitamente distante, de AB y CD (su direccion, *Planim.*, 2), es entónces lo comun á la recta y al plano dado.

3. Tres rectas, a, b y c, cada dos de las cuales caigan sobre un plano, tienen un punto comun (finita ó infinitamente distante) que es el comun á

los tres planos, y forman un *haz de rectas (Planimetría*, 118). Pues todo punto comun á las rectas a y b cae tanto sobre el plano ac como sobre el bc; y, por consecuencia, sobre la recta c que es comun á los dos. Y, si dos de las tres rectas no se cortan, tampoco podrán ser cortadas por la tercera recta.

Cuando las rectas AB y CD son paralelas, y los planos ABE y CDE se cortan en la recta EF, esta interseccion EF es tambien paralela con AB y CD; y toda recta EG dentro del ángulo FEA corta á la AB. Pues el plano GEC corta al DCA en una recta CH del ángulo DCA, por la cual es cortada AB (*Planimetría*, 14); y, por lo tanto, AB será tambien cortada por EG.



Si cada una de las rectas CD y EF es paralela con AB, las rectas CD y EF son paralelas entre sí (*). Pues, suponiendo que los planos ABC y CDF se cortasen en la recta CD', esta recta CD' sería paralela con AB, y no lo sería CD: contra la hipótesis.

4. Si dos planos α y β son paralelos á una recta c, la recta $\alpha\beta$, comun á los dos planos, es tambien paralela con c. Pues, segun la hipótesis, existe sobre el plano α una recta a, y otra b sobre el plano β, que son paralelas con la c (2). Luego (3) las rectas a y b son paralelas; y cada dos de las tres rectas a, b y $\alpha\beta$ caen sobre un plano: siendo, por lo tanto, $\alpha\beta$ paralela con las a, b, y c.

(*) Eucl. XI, 9, lo demostró valiéndose de un plano normal. Bolyai y Lobatschewsky hicieron ver que esta ley es independiente de la suma de los ángulos de un triángulo rectilíneo.

Del axioma sobre las paralelas, que sirve de fundamento á la *Geometria vulgar* (*Planim.*, 15), se desprende que, si cada uno de los dos planos α y β es paralelo á dos rectas, c y d, que no son paralelas (lo cual vale tanto como decir que tienen comunes dos direcciones diferentes), dichos planos son paralelos, esto es: no se cortan, ó tienen comun una *recta infinitamente distante*, ó tienen idéntica *postura* (*). Si los planos tuviesen una recta comun á distancia finita, esta recta deberia ser paralela con c y con d; y las rectas c y d, por lo tanto, serían paralelas: contra la hipótesis.

En la *Geometría vulgar* se considera como una recta la línea de los puntos infinitamente distantes de un plano; porque toda recta del plano tiene con ella un solo punto (infinitamente distante) comun; y como un plano, la superficie de los puntos infinitamente distantes del espacio; porque con él tiene todo plano una sola recta (infinitamente distante) comun.

Como por un punto infinitamente distante de una recta no se da la distancia, sino exclusivamente la direccion en que está la recta; así por una recta infinitamente distante de un plano no se da la direccion, sino la postura en que está colocado el plano solamente. Planos paralelos tienen idéntica postura; así como rectas paralelas tienen idéntica direccion. El plano infinitamente distante del espacio tiene postura indeterminada.

En la hipótesis de que una recta posea dos puntos in-

(*) Eucl., XI, 15. La recta infinitamente distante fué dada por Desargues con el haz de planos (*Planim.*, 118); y más recientemente por Poncelet (*Propr. proj.*, 107, 580), con el plano infinitamente distante del espacio. La expresion, *postura* (*stellung*) de un plano, es de Staudt (*Géom. de Lage*, 40).

finitamente distantes, separados, admitida en la *Geometría absoluta* ó *abstracta* (14), la recta comun á los planos que contienen un punto infinitamente distante de la recta c, y otro punto infinitamente distante de la recta d, se halla á distancia finita; y es, por una parte, paralela á c, y, por otra, paralela á d.

5. Dos planos paralelos, α y β, cada uno de los cuales tiene un punto comun con un tercer plano γ, son cortados por este tercer plano segun líneas paralelas. Puesto que (1) las intersecciones $\alpha\gamma$ y $\beta\gamma$ caen sobre el plano γ, y no tienen ningun punto comun á distancia finita, como no lo tienen los planos α y β.

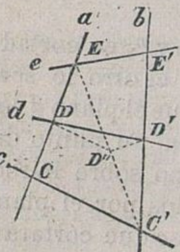
Si uno de dos planos paralelos, α y β, es cortado por una recta c, ó por un plano γ, el otro lo será tambien. Supongamos, en efecto, que el plano β sea cortado por la recta c, y que D sea un punto del plano α, no situado al mismo tiempo sobre la recta c. Los planos α y β serán cortados por el plano Dc segun rectas paralelas; la recta c que cortará á una de estas paralelas, la situada sobre el plano β, cortará tambien á la situada sobre el plano α; y, por lo tanto (*Planim.*, 15), á este mismo plano α. Si β es cortado por el plano γ, y c una recta de este plano γ, que corta al plano β, tambien será α, y, por consecuencia, γ, cortado por c.

Si uno de los planos paralelos, α y β, es paralelo á una recta c, ó á un plano γ, el otro lo será tambien. Pues, suponiendo que α no sea cortado por c, tampoco lo será β; etc.

Tres rectas a, b y c, que tienen un punto comun y son paralelelas á un plano δ, caen sobre un plano paralelo al dado. Pues el plano de las rectas a y b es paralelo (4) con δ; y, si dicho plano *ab* fuese cortado por la recta *c*, tambien lo seria δ: contra la hipótesis.

Dos rectas *a* y *b* son cortadas por tres planos paralelos γ, δ, ε, ó por tres rectas *c*, *d* y *e*, paralelas á un plano, en los puntos *C*, *D*, *E* la una, y en los puntos *C'*, *D'*, *E'* la otra, segun la misma razon, ó son divididas en partes proporcionales (Eucl. XI, 16 y 17) á saber:

$$CD : DE : CE = C'D' : D'E' : C'E'$$



Pues, trazando la recta *C'E* que corta en *D''* al plano δ, las rectas *CC'* y *DD''*, como las *D''D'* y *EE'* serán paralelas entre sí; y de esto se deduce (*Planim.*, 62), la conclusion enunciada.

6. Tres planos α, β y γ, tienen, por lo general, un punto comun, en el cual se cortan las rectas comunes á cada par de ellos. Pues cada recta comun á dos planos tiene con el tercer plano un punto comun que pertenece á los tres planos.

Si tres planos son paralelos á una recta (ó tienen con la recta un punto comun infinitamente distante, ó una direccion comun), las rectas comunes á cada par de ellos son paralelas (4).

Si de tres planos son dos paralelos, una de las rectas en que cada dos planos se cortan se halla infinitamente distante (4 y 5).

Tres planos, que tienen dos puntos comunes, tienen comun una recta, en la que se cortan los tres, y forman un *haz de planos* (*Planim.*, 118).

Esta recta comun se hallará infinitamente distante cuando los tres planos sean paralelos.

7. Dos rectas a y b, que no se hallan sobre el mismo plano, no tienen ningun punto comun; siendo tambien diferentes entre sí sus puntos infinitamente distantes. Por cada punto C del espacio pasa un plano paralelo á las dos rectas a y b: el cual se determina, ó se construye, trazando por dicho punto C dos rectas paralelas, una á la recta a y la otra á la recta b.

Por un punto cualquiera C del espacio pasa tambien una recta que tiene un punto comun con cada una de las dos dadas, a y b. Puesto que los planos Ca y Cb se cortan (1) en una recta CD que cae en el mismo plano con a y con b; y, por lo tanto, ó corta á estas dos, ó corta á una de ellas y es paralela á la otra. Si C se halla infinitamente distante, los planos Ca y Cb tendrán posturas determinadas; y su interseccion será la recta de direccion determinada, que tendrá con cada una de las a y b un punto comun.

Si cada una de las rectas a y b tiene un punto comun con cada una de las rectas k y l, estas dos rectas no pueden caer sobre un plano; porque, en otro caso, a y b deberían caer tambien sobre un plano (*).

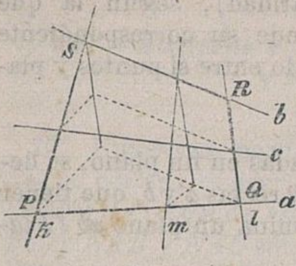
8. Tres rectas a, b y c, situadas en diferentes planos (cada dos cualesquiera de las cuales no estén sobre un mismo plano), pueden ser cortadas cada una en un punto por infinitas rectas k, l, m...

(*) Steiner (*J. de Crelle*, 2, p. 268).

Puesto que por cada punto de a pasa una recta que tiene un punto comun con cada una de las rectas a, b y c (7). Cada dos cualesquiera de las rectas k, l, m... no pueden caer sobre un mismo plano; pero cada tres de las mismas no sólo tienen un punto comun con cada una de las a, b y c, sino con otras infinitas rectas. Ambas séries de rectas a, b, c... y k, l, m... se hallan situadas sobre una superficie reglada (*Planim.*, 4) (*), determinada por tres rectas cualesquiera de la una ó de la otra série, que lleva el nombre de *hiperboloide reglado (hiperbólico, de una falda ú hoja)*.

Si una recta de la série a, b, c... estuviera en el infinito, cada una de las rectas k, l, m... tendria un punto comun infinitamente distante con un plano η, en el cual se hallase dicha recta infinitamente distante, y serían todas ellas paralelas á este plano. Sobre cada plano, pues, paralelo al η, cae una recta de la série k, l, m...; y lo mismo sucederá, por lo tanto, con el plano infinitamente distante: por donde se colige que una de las rectas k, l, m... está en el infinito, y que las rectas de la serie a, b, c... son paralelas tambien á un plano θ. La superficie, que contiene las dos séries de rectas, lleva el nombre de *paraboloide reglado (hiperbólico)*; y está determinada por tres rectas, de las cuales dos cualesquiera no estén sobre un plano, pero que sean las tres paralelas á un mismo plano. Esta superficie se construye muy sencillamente valiéndose de

(*) La demostracion de esta propiedad se funda en relaciones métricas (*Trigon.*, VII).



un cuadrángulo alabeado (no plano) $PQRS$. Todo plano, en efecto, paralelo á PQ y RS, corta á QR y SP en puntos por los que pasa una recta de la série $PQ, RS,\ldots$; y todo plano, paralelo con QR y SP, corta á PQ y RS en puntos por donde pasa una recta de la série $QR, SP,\ldots$

9. En la *Geometría moderna* se distinguen más y más los teoremas referentes á la *posicion* ó *situacion* relativa de las figuras y sus elementos, de los que atañen á la *magnitud* de las mismas y expresan relaciones cuantitativas de las formas extensas. Las leyes científicas de la primera especie tratan de propiedades *gráficas* (descriptivas); las de la segunda, de relaciones *métricas* de los objetos extensivos. Y por ésto la Geometría entera puede dividirse en dos partes: en *Geometría de posicion (situs, situation)* y en *Geometría de medida* (*).

Ya en las primeras leyes gráficas, que á la situacion de puntos, rectas y planos se refieren, se nota cierta correspondencia bilateral, cierta ley de *dua-*

(*) LEIBNIZ (*carta á Hüygens* de 8 de Set. de 1679); y varios escritos de EULER, BARDERMONDE y otros (REUSS, *Repert. Comm.*, p. 33). Las expresiones, *gráfico* y *métrico*, fueron contrapuestas por PONCELET (*Propr. proj.* 5 y sig.). La *Geometría de posicion* de CARNOT sólo considera relaciones métricas. El desenvolvimiento de las propiedades gráficas del espacio sin el auxilio de relaciones métricas fué emprendido por STAUDT (*Géom. der Lage*, 1847).

lidad (reciprocidad, polaridad), segun la que de un teorema se desprende su correspondiente (recíproco, polar) cambiando entre sí puntos y planos (*).

Así:

Por 2 rectas a y b, situadas en un plano, se determina un punto ab. Por 2 rectas a y b, que tienen un punto comun, se determina un plano ab (*Planimetría*, 1 y 2).

Por 2 puntos A y B se determina una recta AB. Por 2 planos α y β se determina una recta $\alpha\beta$.

Por 2 direcciones se determina una postura; por 2 posturas se determina una direccion (4).

Por una recta a y un punto B, que no cae sobre ella, se determina un plano aB. Por una recta a y un plano β, que no contiene á la recta, se determina un punto $a\beta$ (2).

Por 3 puntos A, B y C, que no están en línea recta, se determina un plano ABC. Por 3 planos α, β y γ, que no pasen por una misma recta, se determina un punto $\alpha\beta\gamma$ (6).

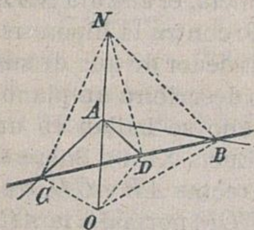
En estas leyes es indiferente que puntos, rectas y planos se hallen á distancia finita, ó á distancia infinita.

(*) La ley de dualidad fué primeramente observada bajo su relacion métrica en el triángulo esférico y su triángulo polar (IV), por VIETA, LANSBERG y SNELLIUS (CHASLES, *Ap. hist.*), KLÜGEL *Math. W.* 4, p. 850). A principios de este siglo se conoció ya bajo su aspecto gráfico en las figuras planas y del espacio. Entónces se introdujeron las denominaciones: *polo de una recta*, por SERVOIS 1811; *polar de un punto* y *dualidad*, por GERGONNE 1813; *reciprocidad*, por MONGE, PONCELET y PLÜCKER (CHASLES, *l. c.*). Los ejemplos de dualidad transcritos en el texto son de GERGONNE. (*Ann.* 16, p. 209) y de STAUDT (*Géom. der Lage*, 66).

II. — Ángulos y distancias de planos y rectas.

10. Una recta, normal á dos rectas de un plano que se cortan, es *normal* á este plano, ó normal á todas las rectas de este plano. Si, pues, los ángulos NAB y NAC son rectos, y la recta AD cae sobre el plano ABC, tambien será recto el ángulo NAD, y AN normal al plano ABC (*).

DEMOSTRACION. Sobre el plano ABC, y un punto de cada uno de los brazos AB y AC del ángulo en que se halla AD, trácese la recta BC que cortará en D á la AD; y sobre la normal á las rectas AB y AC tómense dos segmentos igualmente opuestos, AN y AO, contando desde A. Entónces (*Planim.* V) los triángulos:



$NAB \cong OAB$	ó sea:	$NB =$		OB
$NAC \cong OAC$	»	$NC =$		OC
$NBC \cong OBC$	»	áng. $NBC =$	ang.	OBC
$NBD \cong OBD$	»	$ND =$		OD
$NAD \cong OAD$	»	áng. $NAD =$	ang.	DAO

Y, por consecuencia, el ángulo NAD recto.

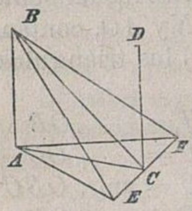
(*) EUCL., XI, 4. La demostracion de Euclides es más prolija que la del texto que se halla en un artículo de CRELLE (J. 45, pág. 35). Otra demostracion dió LEGENDRE (*Géom.*, V, 4), fundada en consideraciones muy distantes de este género de ideas.

Observacion. Los planos β y γ, cuando sean normales á una recta a, no podrán cortarse (Euclides, XI, 14). En atencion á que otro plano cualquiera δ, que contenga á la recta a, corta á los planos dados β y γ, segun rectas que son normales á la recta a y no se cortan.

11. Tres rectas, AB, AC y AD, que corten normalmente en un mismo punto á otra recta AN, se hallan en un mismo plano (Eucl. XI, 5). Pues, si admitiéramos que AD no estuviese en el plano BAC, los planos NAD y BAC se cortarian en otra recta AE; siendo, por consecuencia, el ángulo NAE recto (1), y no siéndolo el NAD: contra la hipótesis.

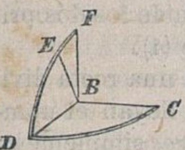
Si un ángulo recto gira al rededor de uno de sus brazos como eje, su otro brazo describirá un plano.

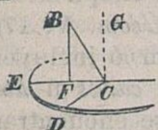
12. Dos normales á un plano se hallan en un mismo plano y no se cortan (Eucl. XI, 6). Sobre el plano á que son normales las rectas AB y CD, trácese la recta ECF, normal á la AC, y en ella tómese $EC = CF$. Es claro entónces que $ECA \cong FCA$ y $EA = FA$; y, por consecuencia, $BAE \cong BAF$ y $EB = FB$; y, de resultas, $ECB \cong FCB$, y el ángulo BCE recto. Mas los ángulos DCE y ACE son tambien rectos; luego CB, CD y CA caen sobre un plano (11), en el cual los ángulos DCA y CAB son rectos.



Si CD es normal al plano ACE, y en el plano DCA se traza la AB, normal á la recta CA, la AB es normal tambien al plano ACE (Eucl. XI, 8). Pues, si fuese otra recta, AB', normal al plano ACE, dicha recta AB' estaría sobre el plano DCA; el plano $B'AB$ sería normal á la recta CA; y, por lo tanto, la recta AB no podría estar, contra la hipótesis, sobre el plano DCA.

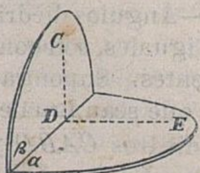
OBSERVACION. Para trazar la normal al plano α, por un punto dado B, es preciso construir tres ángulos rectos. Si el punto B, en efecto, se halla sobre el plano α, y se construye el ángulo recto CBD sobre el mismo plano, el ángulo recto CBE fuera de α, y el DBF sobre el plano DBE, será BF la normal pedida. Puesto que esta recta BF cae sobre el plano DBE que es normal á la recta BC del plano α (10).





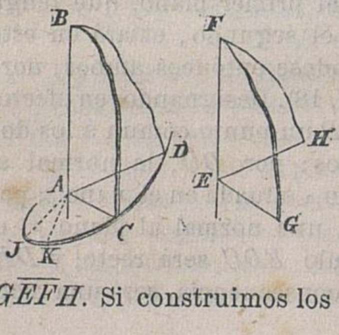
Si el punto B está fuera de α y se construye el ángulo recto BCD, cuyo lado CD está sobre α; sobre este plano α, el ángulo recto DCE; y sobre el plano BCE, el ángulo recto BFC; será BF la normal buscada. Pues, construyendo en el plano BCE el ángulo recto GCE, será CG normal al plano α; y, por consecuencia, lo será tambien BF.

13. Si un plano β contiene una normal á otro plano α, toda normal al primer plano, que tenga un punto comun con el segundo, estará en este segundo plano; llamándose entónces ambos, normales entre sí (EUCL. XI, 18). Designando, en efecto, por D un punto comun á los dos planos; por DC, la normal al plano α situada en el plano β; por DE, una normal al plano β; el ángulo EDC será recto; y DE, por consecuencia, será una recta



del plano α (11). Si F representa un punto cualquiera de α y FG una normal al plano β, las rectas FG y DE caerán sobre un plano (12): lo cual quiere decir que FG caerá sobre α. Si dos planos son normales á otro plano, la interseccion de los dos primeros es tambien normal al tercero (4).

14. Dos planos que se cortan en una recta dividen el espacio en 4 regiones que llevan el nombre de *ángulos diédricos*, ó de *diedros* simplemente (*angle dièdre*, *coin* en Legendre, *Géom.* V, 17). Las porciones de plano que forman ó incluyen un ángulo diédrico se llaman sus *caras* ú *hojas* (ἕδρα, *face*); la recta en que se encuentran las caras se denomina *arista* ó *canto* del diedro (πλευρά, *latus*, *coté*, *arête* en Legendre, y mejor *acies* en Euler). El ángulo diédrico cuya arista es AB, y cuyas caras son ABC y ABD, se expresa sin ambigüedad por $\overline{CABD}$; siempre que sea dado el sentido de la rotacion mediante la cual se describe dicho ángulo. Así sucede, cuando se determine, por ejemplo, que, para un observador, puesto derecho sobre la direccion AB, ó con los piés en A y la cabeza en B, el movimiento ó giro desde C hácia D se efectúe hácia la izquierda, ó hácia la derecha (*Planim.* 5).



I.—Ángulos diédricos, iguales, son congruentes. Supongamos que sean iguales los diedros $\overline{CABD}$ y $\overline{GEFH}$. Si construimos los ángulos $CAB = GEF$

y $DAB = HEF$, y hacemos coincidir el ángulo CAB con su igual GEF, el plano DAB se confundirá con el HEF; pues, si así no fuese, serían desiguales los diedros propuestos. Luego el lado AD caerá tambien sobre el EH, y los ángulos CAD y GEH serán iguales entre sí. Por la misma razon, si construimos sobre las caras del primer diedro los ángulos $C'A'B = CAB$ y $D'A'B = DAB$, será $C'A'D' = GEH$; y por lo tanto, $C'A'D' = CAD$; et cætera.

II.—Un diedro tiene un ángulo comun con un plano que corte su arista y es dividido en ángulos iguales por planos paralelos (I). Si los lados de un ángulo son respectivamente paralelos á los lados de otro ángulo y de la misma direccion, los dos ángulos son iguales. Por *ángulo de dos rectas que no están en un mismo plano*, se entiende el ángulo cuyos lados son respectivamente paralelos á las dos rectas y de la misma direccion.

III.—Llámase *seccion normal* (*recta*) de un ángulo diédrico el ángulo en que es cortado este diedro por un plano, normal á su arista, y, por lo tanto, á sus caras (13). Todas las secciones normales (rectas) de un ángulo diédrico son iguales entre sí. Diedros iguales tienen iguales secciones normales; y, recíprocamente, dos diedros son iguales cuando tienen secciones normales iguales (Eucl. XI, *def.* 6).

Conforme sean sus secciones normales, así se llamarán los ángulos diédricos, agudos, rectos, obtusos, suplementarios, complementarios, adyacentes ú opuestos por la arista. Si las caras de un diedro son normales entre sí (13) el diedro es recto.

IV.—El ángulo, formado por las normales respectivas á dos planos, puede emplearse tambien para determinar el diedro formado por los dos planos. Pues, si CAD es una seccion normal del diedro $CABD$, y los ángulos rectos JAC y KAD caen sobre el plano CAD, las rectas AJ y AK serán normales (10) á los planos CAB y DAB respectivamente; y los ángulos CAD y JAK iguales entre sí.

15. Si desde los puntos en el espacio, A, B, C..., se trazan, con sujecion á una ley establecida, líneas de naturaleza determinada que corten á una superficie dada en los puntos A_1, B_1, C_1..., estos puntos de la superficie, A_1, B_1, C_1..., se llaman *proyecciones* sobre la misma (*projectio*, dibujo, cróquis) de los puntos del espacio A, B, C... La superficie dada toma el nombre de *superficie de proyeccion* (de la imágen, del dibujo); y las líneas trazadas por los puntos del espacio se denominan *proyectantes* (*projectantes*). La figura, cuyos puntos son las proyecciones de una figura dada, se llama proyeccion de esta figura dada (*).

En los casos más sencillos se toma para superficie de proyeccion el *plano;* y para líneas proyectantes, *rectas* que cortan *normalmente* al mismo.

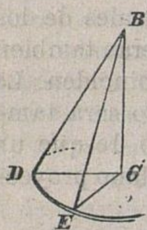
(*) Las proyecciones fueron empleadas por los astrónomos griegos (Hiparco, Ptolomeo y otros) para la representacion de la esfera aparente de los cielos. (Klügel, *Math.* W., IV, p. 492.) La *Perspectiva*, conocida por los antiguos, se desarrolla en el siglo XVI, reformándose á fines del XVIII con la *Geometría descriptiva (Doctrina de las proyecciones)* de Monge. Desargues fué el primero que aplicó las proyecciones en 1640 á las investigaciones geométricas; mas la gran importancia de esta aplicacion fué patentizada por la escuela de Monge, y especialmente por los trabajos de Poncelet *(Propr. proj.)*.

Las proyecciones obtenidas en tales condiciones reciben el nombre de *proyecciones normales (ortogonales, ortográficas)*, ó simplemente el de *proyecciones*. Las rectas proyectantes de los puntos de una recta se hallan sobre un plano que proyecta la recta y es normal al plano de proyeccion (13). La recta, en la cual es cortado el plano de proyeccion por el plano proyectante de una recta dada, contiene las proyecciones de todos los puntos de esta recta dada y es la proyeccion de la misma. Solamente en el caso que la recta dada sea normal al plano de proyeccion, será un punto la proyeccion de dicha recta.

Las proyecciones normales de dos rectas que se cortan, serán tambien dos rectas que se cortan, ó que coinciden; las proyecciones normales de dos rectas de un plano que no se cortan, serán tambien dos rectas que no se cortan, ó que coinciden. La proyeccion normal de un ángulo recto será tambien un ángulo recto, en el solo caso de que un brazo del ángulo dado sea normal al plano proyectante del otro brazo.

Entre las representaciones ó imágenes de un objeto espacioso, de bulto, merecen particular consideracion, por sus aplicaciones, su proyeccion horizontal (*plano, icnografía*) y su proyeccion vertical (*elevacion, ortografía*). En aquélla, son verticales las rectas proyectantes, y horizontal el plano de proyeccion ó del dibujo; en ésta, son horizontales las rectas proyectantes, y normales, por lo tanto, al plano vertical de proyeccion. Las imágenes ó figuras que se dibujan en la Estereometría, para coadyuvar á la representacion mental de los objetos de bulto, son proyecciones de estos objetos, obtenidas mediante rectas proyectantes que tambien pueden ser normales á otro plano, diferente del de proyeccion.

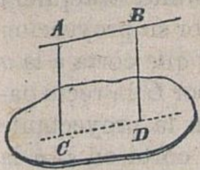
16. Entre las distancias de un punto dado B á los puntos de un plano α, la mínima es la distancia del punto á su proyeccion normal sobre el plano, que determina ó representa la *distancia* entre el uno y el otro, el punto y el plano (15). Los puntos del plano, cuyas distancias á un punto dado fuera del mismo sean iguales, caen sobre un círculo que tiene por centro la proyeccion normal del punto dado sobre el plano.



Demostracion. Sea B el punto dado fuera del plano α; C su proyeccion normal sobre este plano; y D, un punto cualquiera del mismo. Es evidente que el ángulo BCD es recto (10); y, por consecuencia, $CB < DB$. Si E representa otro punto, cualquiera, del plano α, y $DB = EB$, los triángulos BCD y BCE serán iguales y semejantes; y, de resultas, $DC = EC$.

17. Por distancia de una recta á un plano, al cual es paralela, se comprende la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano; porque todos los puntos de la recta equidistan del plano. Por distancia entre dos planos paralelos se comprende la distancia de un punto cualquiera de uno de los planos al otro plano; porque todos los puntos de un plano equidistan del otro plano.

Demostracion. Si A y B son puntos de la recta,



y C y D sus proyecciones normales, las rectas proyectantes AC y BD serán paralelas (12). Por otra parte, es la recta AB paralela con su proyeccion CD, por ser aquélla paralela al plano de proyeccion. Luego el cuadrángulo $ACDB$ es un paralelógramo; y, por lo tanto, $CA = DB$.

Por las mismas consideraciones se demuestra que $CA = DB$, cuando A y B son puntos de un plano, C y D sus proyecciones normales sobre el otro plano, y los dos planos son paralelos.

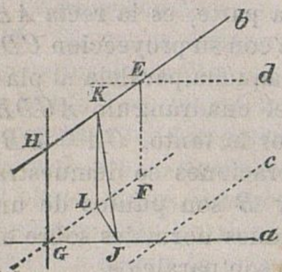
Dos planos paralelos dividen el espacio en 3 regiones, de las cuales se llama *capa (estrato, couche)* la del medio. La magnitud de una capa se conoce por la distancia entre sus dos planos paralelos. Una capa puede considerarse como un ángulo diédrico que tiene su arista ó canto infinitamente distante (4).

18. Por distancia entre dos rectas que no están sobre el mismo plano, se comprende la distancia entre los planos paralelos que las contienen; ó la distancia de una de ellas al plano paralelo en que está la otra; ó la distancia entre los puntos en que las dos son cortadas normalmente por otra recta determinada (*).

Si las rectas a y b no están en un mismo plano, se traza por un punto de la a la recta c paralela con b; y por un punto de la b la recta d paralela con a; el plano ac no sólo es paralelo á la recta b sino tambien al plano bd (I).

(*) Legendre *(Géom., note* 6).

Proyectemos normalmente un punto cualquiera E de la recta b sobre el plano ac; por su proyeccion F trácese la recta paralela con b y que corta á la a



en G; y por G la recta paralela con la proyectante EF, que corta en H á la b. La recta GH, como la EF, es normal al plano ac (12); y, por consecuencia, normal al plano bd paralelo al ac. Luego corta normalmente á las rectas a y b, y es la interseccion de los planos que pasan por a y b, y son normales á los planos paralelos ac y bd (13).

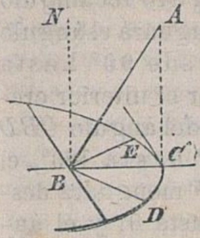
La distancia entre los puntos G y H, de las rectas a y b, es menor que la existente entre dos puntos cualesquiera, J y K, de las mismas rectas. Pues, trazando KL paralelamente á GH, el ángulo KLJ es recto; y, de resultas, $JK > LK$; y como $LK = GH$, será $JK > GH$.

19. Una recta, que no es normal á un plano, forma con las rectas de este plano diferentes ángulos; siendo mínimo ó máximo, respectivamente, el agudo ú obtuso que forma con su proyeccion normal. Y por esto se comprende por ángulo de una recta con un plano, el ángulo que la recta forma con su proyeccion normal sobre el plano (*).

Sea C la proyeccion normal del punto A; BC, la proyeccion normal de la recta BA sobre el plano; el ángulo ABC, agudo; y BD, un segmento rectilí-

(*) Eucl. XI, *def.* 5; y *Óptica*, 37 y sig. Pappus, VI, 44.

neo, sobre el plano, de la misma longitud que BC.



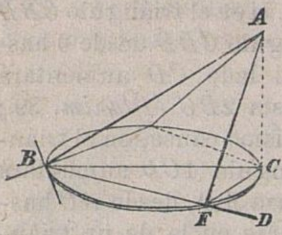
Ahora bien, si en el triángulo CBD crece el ángulo CBD desde 0 hasta 180°, el lado CD aumentará desde 0 hasta $2BC$ (*Planim.* 39); y, por la misma causa, en el triángulo rectángulo ACD aumentará la hipotenusa AD, desde AC hasta convertirse en la de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean $2BC$ y CA. Luego en el triángulo ABD tambien crece el ángulo ABD desde ABC hasta $180° - ABC$.

Si el ángulo $CBD = 90°$, la recta BD es normal al plano ABC; porque los planos ABC y DBC son normales entre sí, y, por lo tanto, es recto el ángulo ABD. Cuando los ángulos CBD y CBE son iguales y de opuestos sentidos, los ángulos ABD y ABE serán iguales.

El ángulo agudo, formado por la recta AB con el plano BCD, es el complemento del ángulo NBA que forma la normal BN al mismo plano con dicha recta BA. Este último ángulo lleva en Óptica el nombre de *ángulo de incidencia* del rayo AB respecto del plano BCD.

Mientras el ángulo CBD crece primeramente desde 0 hasta 90°, y luego continúa creciendo desde 90° hasta 180°, mengua el diedro $A\overline{BD}C$ desde 90° hasta ABC, y crece nuevamente hasta 90°. En efecto, trazando CF normal á BD, será esta recta BD normal al plano AFC; y el ángulo AFC, por consecuencia, una seccion normal del diedro $A\overline{BD}C$. Ahora bien, si el ángulo CBD crece desde 0 hasta 90°, en el triángulo rectángulo

CBF crecerá el cateto CF desde 0 hasta CB; y en el triángulo rectángulo ACF menguará el ángulo AFC desde 90° hasta ABC. Por el ulterior crecimiento del ángulo CBD desde 90° hasta 180°, el cateto CF menguará desde CB hasta 0, y el ángulo AFC crecerá desde ABC hasta 90°.



III. — Cono, cilindro y esfera.

20. Una superficie reglada (*Planim.* 4) cuyas rectas tengan todas un punto comun, se denomina *cono* (κωνος, *conus*); las rectas que están en ella se llaman sus *aristas* ó sus *lados* (51); y el punto comun, su *centro* ó *cúspide*. El cono completo es dividido por su vértice en dos partes ó faldas: cono y cono opuesto, ó anticono. Si las rectas de una superficie reglada son todas paralelas, la superficie reglada toma el nombre de *cilindro* (κυλινδρος). El cilindro puede mirarse como un cono cuyo centro está infinitamente distante. El plano puede considerarse lo mismo como un cono que como un cilindro.

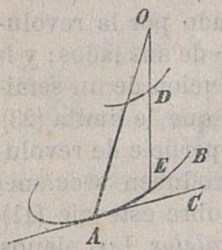
Si una línea cualquiera, unida invariablemente á una recta, da la vuelta al rededor de esta recta fija, como eje, en su movimiento engendrará una *superficie de revolucion* (*surface de rotation*, *revolution*). A las superficies de revolucion pertenecen: el *cono* *de revolucion* (*), engendrado por la revolucion de un ángulo agudo al rededor de uno de sus lados; el *plano*, engendrado por la revolucion de un ángulo recto al rededor de uno de sus lados (11); el *cilindro de revolucion*, engendrado por la revolucion de una faja en torno de uno de sus lados; y la *esfera*, engendrada por la revolucion de un semicírculo al rededor del diámetro que le limita (23). Los planos, que cortan á una superficie de revolucion normalmente á su eje, producen secciones circulares, cuyos centros caen sobre este eje (11), y que toman el nombre de *paralelos*. Los planos, que pasan por el eje de una superficie de revolucion, cortan á esta superficie en líneas congruentes, que en el lenguaje geográfico llevan el nombre de *meridianos*.

21. Un plano que pasa por el centro de un cono, ó contiene dos lados del mismo, ó un solo lado, ó ninguno. En el primer caso, el plano corta al cono á los dos lados de su centro, y la seccion es un ángulo y su opuesto por el vértice; en el segundo, el plano es tangente al cono á lo largo de un lado, y la seccion es una recta; en el tercero, el plano corta á todas las aristas del cono en su centro, y la seccion es un punto.

El segundo caso se realiza cuando el plano pasa

(*) Eucl., XI, *def.* 14 y sig. Distínguese el cono en *acutángulo*, *rectángulo* ú *obtusángulo*, de acuerdo con la magnitud del ángulo, cuya mitad, por su revolucion, engendra el cono. Á las superficies de revolucion pertenecen el *conoide* y el *esferoide*, estudiados por Arquimedes. El concepto más general del cono tiene por base las consideraciones de Apollonio (*Conica*, I, *def.* 1).

por el centro del cono, O, y contiene una tangente AC á una curva AB, situada en la superficie del mismo. El plano OAC entónces es tangente al cono á lo largo de la arista OA, y no tiene con éste ningun punto comun fuera de dicha arista. Porque un plano que contuviese la arista OA y otro punto próximo, pero fuera de ella, D, de la superficie cónica, tendría comun con ésta la arista OD, y comun con la curva AB el punto E, en el cual es cortada dicha curva por el lado OD. Y, por consecuencia, el plano OAD contendria una cuerda AE de la curva AB, pero no su tangente AC.



Si el cono, y su plano tangente OAC, son cortados por un plano segun la curva AF y la recta AG, esta recta AG será tangente á la curva AF en el punto comun A; puesto que, fuera de este punto A, ninguno tiene dicha recta comun con el cono, ni con la curva consiguientemente. Y á la inversa: las rectas, tangentes en los puntos de interseccion á las curvas sobre un cono que cortan á una arista del mismo, están contenidas en un plano tangente que tiene comun con el cono la arista cortada por las referidas curvas.

22. Un plano que no pasa por el centro de un cono, ó es paralelo á dos aristas del cono, ó á una sola arista (al plano tangente al cono que contiene esta arista), ó á ninguna (*).

(*) Poncelet (*Prop. proj.*, 4), y Steiner (*Syst. entw.*, 36). Las

En el primer caso, hay dos aristas del cono que no son cortadas por el plano, siéndolo las restantes ya en una falda, ya en la otra; y la seccion *cónica* consta de dos ramas que se extienden hasta el infinito en dos direcciones y se llama *hipérbola* (ὑπερβολη, *excesus*).

En el segundo, son cortadas todas las aristas del cono ménos una, y la seccion resulta abierta en una direccion y se llama *parábola* (παραβολή, *æqualitas)*.

En el tercero, son cortadas todas las aristas del cono, y la seccion es cerrada y se llama *elipse* (ἔλλειψις, *defectus)*.

Observacion. Las secciones planas de un cilindro, sobre el cual puede estar un círculo, son en general elípticas. En el caso particular en que el plano secante sea paralelo á las aristas del cilindro, la seccion será una faja cuyos lados, ó estarán separados, reales ó imaginarios (no construibles), ó confundidos, en coincidencia.

23. Los puntos del espacio, equidistantes de un punto dado, están sobre una superficie cerrada que se llama *esfera* (σφαιρα, *globus)*. El punto dado se llama *centro;* el segmento rectilíneo entre el

---

secciones de los diferentes conos de revolucion por un plano normal á uno de sus lados, fueron distinguidas y expresadas mediante ecuaciones por Menechmo *(Escuela platoniana*, 370 a. de J. C. Reimer, *hist. dupl. cubi*, p. 58). Los escritos de Aristeo y Euclides sobre las secciones cónicas se perdieron. Arquímedes consideró estas curvas como secciones de todo cono de revolucion *(Con.* y *Sph.*, 8 y sig.). Apollonio demostró que eran secciones de un cono cualquiera sobre el cual caiga un círculo, y les dió el nombre que hoy tienen *(Conica*, I.).

centro y un punto cualquiera de la esfera, *rádio*. Toda recta que pasa por el centro de la esfera, la corta en dos puntos que se denominan *opuestos (antípodas)* y limitan un diámetro. Todo plano que pasa por el centro corta á la esfera en un círculo, cuyo centro y cuyo rádio no son distintos de los de la esfera, que toma el nombre de *principal* ó *máximo* (normal). Un círculo máximo divide á la esfera en dos partes congruentes, llamadas *hemisferios* (*).

24. Todo plano, cuya distancia al centro de la esfera sea menor que el rádio, corta á la misma en un círculo cuyo centro es la proyeccion normal del centro de la esfera sobre el plano. Los rádios de la esfera, que se dirigen á los puntos de este círculo, se hallan sobre un cono de revolucion; y sus proyecciones normales sobre el plano secante (el del círculo) son rádios del mismo círculo.

Todo plano, cuya distancia al centro de la esfera es igual al rádio, es tangente ó toca á la esfera: es decir, la proyeccion normal del centro de la esfera sobre el plano, cae entónces sobre la esfera; y las rectas que tocan en este punto á los círculos máximos que pasan por el mismo, caen sobre el plano mencionado. La esfera es cortada normalmente por sus rádios. Todo plano, cuya distancia al centro de la esfera sea mayor que el rádio, está fuera ó excluido de la esfera (**).

DEMOSTRACION. Sea B el centro de la esfera, C su proyeccion normal sobre el plano α, D un punto

(*) Las expresiones *círculo principal* y *puntos opuestos*, son de STEINER *(J. de Crelle*, p. 45).

(**) THEODOSIO *(Sphœrica*, I.).

cualquiera de este plano: claro es que $BD > BC$. Ahora bien, si BC es menor que el rádio, C se hallará dentro de la esfera, y el plano tendrá con ella un círculo comun (16). Si BC es igual al rádio, C cae sobre la esfera, y la recta CD es tangente al círculo máximo de la misma, situado en el plano BCD. Si BC es mayor que el rádio, todos los puntos del plano están fuera ó excluidos de la esfera.

Observacion. En general, cuatro puntos cualesquiera de la esfera no se hallan sobre un plano; y por ésto la esfera es una superficie curva (*Planimetria* 4). El plano, determinado por 3 puntos de la esfera, la corta en un círculo cuyo centro es la proyeccion normal del centro de la esfera sobre el mismo plano. Y sobre aquel círculo deberá estar precisamente cualquiera otro punto de la esfera para caer sobre dicho plano.

25. Las rectas, que tienen un punto comun A y son tangentes á una esfera dada (B), caen sobre un cono de revolucion cuyo eje pasa por el punto comun y el centro de la esfera. Los puntos de contacto C, C',... caen sobre un círculo cuyo centro está en dicho eje y cuyo plano es normal al mismo eje (*). Puesto que los triángulos ABC, ABC'... son rectángulos y congruentes; etc.

Si el punto A está dentro de la esfera (B), el círculo, cuyo centro coincide con A, es el mínimo entre todos los de la esfera que pasan por ese punto (*Planim.* 51).

Designando por r el rádio de la esfera, para toda

(*) Euclides (*Opt.* 23).

recta que pase por el punto A y corte á la esfera en los puntos P y P_1, tendremos (*Planim.* 113):

$$AP.AP_1 = AB^2 - r^2$$

Este producto, constante para el punto dado y la esfera dada, se llama *potencia del punto respecto de la esfera*; y su valor es el cuadrado de una tangente á la esfera trazada por A, ó es cero, ó es el cuadrado negativo de la semicuerda (mínima) cuyo punto medio es A: segun que dicho punto A esté fuera de la esfera, sobre la esfera, ó dentro de la misma.

26. Dos esferas (A) y (B) tienen un círculo comun, cuyo centro está sobre la recta AB, y cuyo plano es normal á esta recta: como se desprende de la consideracion de sus círculos máximos situados en un mismo plano (*Planim.* 21). El ángulo diédrico, formado por las esferas en un punto comun, está determinado por el ángulo de sus rádios que se dirigen al mismo punto (14-*Obs.*); y por esto las esferas se cortan á lo largo del círculo comun bajo un mismo ángulo.

El círculo comun á las esferas será real, en tanto que los rádios y la línea de los centros sean lados de un triángulo; reduciéndose á su centro, y entónces las esferas serán tangentes, cuando la distancia de los centros llegue á ser igual á la suma ó á la diferencia de los rádios. Pero será imaginario, y entónces una de las esferas estará enteramente incluida en la otra, ó excluida de ella, cuando la distancia de los centros sea menor que la diferencia ó mayor que la suma de los rádios.

En todo caso, pues, el plano del círculo comun á dos esferas es real, y puede ser construido mediante la propiedad de que todos sus puntos tienen iguales potencias respecto de las dos esferas (*Planim.* 116 *y sig.*). Los puntos de este plano, excluidos de las esferas, son centros de determinadas *esferas ortogonales* de las (A) y (B); y se dicen esferas ortogonales de las (A) y (B), porque cortan á cada una de éstas rectangularmente á lo largo de un círculo.

27. Tres esferas (A), (B) y (C) tienen, en general, dos puntos comunes P y Q, colocados simétricamente respecto del plano de los centros ABC; y de modo, por lo tanto, que el segmento PQ es bisecado normalmente por dicho plano. Pues los triángulos PQA, PQB y PQC son isósceles, y el punto medio de su base comun cae sobre el plano ABC (11).

Los expresados puntos comunes P y Q pueden reducirse á su punto medio, ó ser imaginarios; pero en todo caso, la recta, en que los puntos comunes están, separados ó juntos, ó imaginarios, es real y determinada por la propiedad de que todos sus puntos tienen iguales potencias respecto de las tres esferas; puesto que dicha recta se halla sobre los planos cuyos puntos tienen iguales potencias respecto á cada par de las mismas.

Para 4 esferas (A), (B), (C) y (D) existe, en general, un punto que tiene iguales potencias respecto de las mismas; porque la recta, cuyos puntos tienen iguales potencias respecto de las esferas (A), (B) y (C), tiene un punto comun con el plano, cuyos puntos tienen iguales potencias respecto de las esferas (A) y (D).

Si, en particular, 3 esferas son de tal magnitud y se hallan en tal posicion que sus círculos máximos, situados en un plano, forman un haz (*Planim.* 118), las esferas formarán tambien un *haz:* lo cual significa que existe entónces un plano cuyos puntos tienen iguales potencias respecto de las tres esferas. Sobre este plano cae el círculo, real ó imaginario, que es comun á las esferas del haz; y todo otro plano corta al haz de esferas segun un haz de círculos.

28. Todo punto, equidistante de 2 puntos dados A y B, cae sobre el plano que biseca normalmente el segmento AB, y respecto del cual son A y B simétricos (11). Todos los puntos, cuyas distancias á los A y B tengan una razon dada, caen sobre una esfera que corta normalmente al segmento AB, interior y exteriormente, segun la razon dada (*Planim.* 66).

Todo punto, equidistante de 3 puntos dados A, B y C, cae sobre la recta que corta normalmente al plano ABC en el centro del círculo ABC (16).

Para 4 puntos A, B, C y D existe, en general, un punto equidistante de ellos, que es el centro de la esfera que pasa por los mismos (*). Puesto que la recta, cuyos puntos equidistan de los A, B y C, tiene con el plano que biseca normalmente el segmento AD un punto comun que equidista de los A, B, C y D. El mismo punto comun tienen los planos que bisecan normalmente los 6 segmentos limitados por los 4 puntos dados. Cuando los puntos A, B, C y D caigan sobre un plano, el centro de la es-

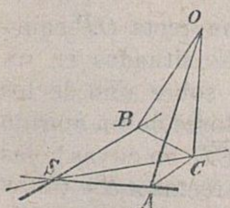
(*) Fermat (*De contact. sph. Opp.*, p. 74).

fera $ABCD$ se hallará sobre una normal al plano ABC, á distancia infinita; no diferenciándose entónces la esfera de este plano. Cuando, en particular, los cuatro puntos A, B, C y D caigan sobre un círculo, equidistarán de ellos todos los puntos de la recta normal al plano del círculo en su centro.

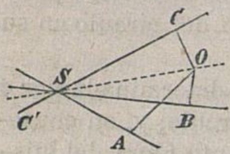
Segun esto, una esfera será determinada por 4 puntos que no estén sobre un círculo; y, en consecuencia, por un círculo y un punto fuera del mismo; ó por 2 círculos que tengan 2 puntos comunes, tales como ABC y ABD. Dos círculos que tengan un sólo punto comun no pueden caer sobre una esfera; ni tampoco podrán, en general, caer sobre una esfera dos círculos que no se corten. (Véase adelante el *Capitulo V.*).

29. Los puntos equidistantes de una recta dada caen sobre un cilindro de revolucion cuyo eje es dicha recta. Las rectas (ó planos) equidistantes de una recta dada, son tangentes á un cilindro de revolucion cuyo eje es dicha recta.

Todo punto, equidistante de 2 rectas dadas de un plano, está sobre un plano que biseca normalmente el ángulo (ó faja) de dichas rectas. Si los ángulos OAS y OBS son rectos, iguales los segmentos OA y OB, y C la proyeccion normal del punto O sobre el plano del ángulo ASB, los segmentos CA y CB serán tambien iguales; etc.



Todo punto, equidistante de 3 rectas que están dos á dos en un plano (3), está sobre una de 4 rectas determinadas que son los ejes de los conos de revolucion, sobre los cuales están las rectas dadas. En efecto, siendo rectos los ángulos OAS, OBS y OCS,

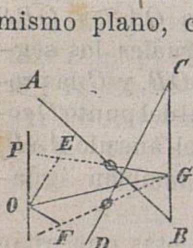


é iguales los segmentos OA, OB y OC, la recta OS lo mismo cae sobre los planos que bisecan normalmente los ángulos ASB y BSC, que sobre el plano que biseca normalmente el ángulo CSA, y es el eje de un cono de revolucion cuyas aristas son SA, SB y SC. Igualmente SA, SB y SC' están sobre un cono de revolucion; etc.

Cuando las rectas dadas son paralelas, se halla un cilindro de revolucion en lugar del cono.

30. Todo punto, equidistante de 2 planos dados, está sobre el plano bisector del ángulo diédrico que forman dichos planos. Pues, si las normales OE y OF desde el punto O á los planos ABC y BCD son iguales, la arista BC será cortada normalmente en G por el plano OEF (13), y OG será la bisectriz del ángulo EGF.

De lo cual se deduce que una recta OP equidista de dos rectas AB y CD, no situadas en un mismo plano, cuando se halla sobre uno de los



planos bisectores de un ángulo diédrico $A\overline{BC}D$, en cuyas hojas están dichas rectas AB y CD, y es al mismo tiempo paralela á la arista BC de este diedro.

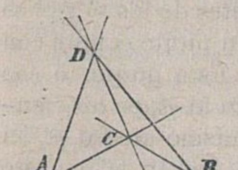
En efecto, las distancias de la recta OP á las rectas AB y

CD son iguales á las distancias del punto *O* á los planos *ABC* y *BCD* (18). En particular, todas las rectas, situadas en el plano que biseca el estrato ó capa determinada por las rectas *AB* y *CD*, equidistan de estas rectas.

Todo punto, equidistante de 3 planos, está sobre una de 4 rectas determinadas que son los ejes de los conos de revolucion tangentes á los 3 planos. En efecto, el punto *O*, si equidista de los planos *ASB* y *BSC*, está sobre uno de los planos bisectores del diedro $A\overline{SB}C$; y, si la recta *SO* se halla sobre dos planos bisectores de los diedros $A\overline{SB}C$ y $B\overline{SC}A$, se hallará tambien sobre un plano bisector del diedro $C\overline{SA}B$; porque el punto *O* equidista de los 3 planos. Mas la recta *SO* forma con los 3 planos ángulos iguales; etc.

31. Para 4 planos α, β, γ, δ existen, en general, 8 puntos equidistantes que son los centros de las esferas tangentes á dichos 4 planos.

Ante todo precisa distinguir los espacios por cada uno de estos planos separados. Del punto *A*, comun á los tres planos β, γ, δ, se dirá que se encuentra en el lado ó frente positivo del plano α; y de otro punto, que esté situado en la parte opuesta, se dirá que lo está en la parte ó frente negativo del mismo plano α. Análogamente establecemos que se hallan en los frentes positivos de los planos β, γ, δ los puntos *B*, *C* y *D* que son comunes respectivamente á las otras ternas de planos. Por $\alpha\delta$ designamos el diedro situado en los frentes positivos de α y δ, que



tiene por arista BC; etc. El punto comun de los planos bisectores de los diedros $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ equidista de los planos α, β, γ, δ; y, por lo tanto, cae sobre los planos bisectores de los diedros restantes $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, y es el centro de la esfera que toca á dichos planos por sus caras ó frentes positivos.

El punto comun á los planos bisectores de los diedros adyacentes con los $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ es, á su vez, el centro de la esfera que toca á los cuatro planos, y se encuentra en el frente negativo del plano δ. Los puntos comunes á los planos que bisecan dos de los diedros $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$, y el diedro adyacente del tercero, son los centros de las esferas tangentes á los cuatro planos, situados en los frentes negativos de γ, α, β, respectivamente.

Las 3 esferas restantes de todas las tangentes á los 4 planos, están situadas respectivamente en los frentes negativos de dos de los planos α, β, γ, δ; y sus centros son los puntos comunes á los planos que bisecan uno de los diedros $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ y los diedros adyacentes de los otros dos. Así, por ejemplo, los planos que bisecan los diedros adyacentes de los $\alpha\delta$ y $\beta\delta$ se cortan en una recta que tiene un punto comun con el plano bisector del diedro $\gamma\delta$. Este punto, ó cae en el diedro opuesto por la arista al $\gamma\delta$, en los frentes negativos de γ y δ; ó en el mismo diedro $\gamma\delta$, en los frentes negativos de α y β, ó sea en el opuesto por la arista al $\alpha\beta$; ó se halla infinitamente distante, en la direccion de aquella recta, cuando ésta es paralela al plano bisector del diedro $\gamma\delta$. Iguales consideraciones pueden hacerse sobre cada uno de los otros dos centros. Y, por consecuencia, una, dos ó las tres últimas esferas, pueden ser infinitamente grandes y tocar á distancia infinita á los 4 planos dados (*).

IV.—Esférica (**).

32. Por dos puntos de la esfera, A y B (y sus puntos opuestos A_1 y B_1), está determinado un círculo máximo AB; y por dos círculos máximos, a y b, está determinado un punto ab (y su punto opuesto). Puesto que los puntos A y B, y el centro de la esfera, determinan un plano, sobre el cual se hallan los puntos opuestos A_1 y B_1, que corta á la esfera en un círculo máximo (23); y los planos de los círculos máximos a y b tienen comun el centro de la esfera; y se cortan, por lo tanto, en un diámetro de la misma (1).

De lo dicho se colige que entre las líneas esfé–

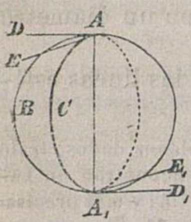
(*) De la primera esfera, tangente á 4 planos dados, trató Fermat *(Opp.* p. 77); las otras esferas se encuentran en Lagrange *(Sur les pyram., 24. Mém. de Berlin,* 1773), y más precisamente en Feuerbach *(Die dreieckige Pyramide,* 36). El problema, construir una esfera tangente á 4 planos dados, está subordinado al más general de construir una esfera que forme ángulos dados con 4 esferas dadas. Estas esferas dadas pueden ser puntos, ó planos; y nulos, los ángulos dados. Pascal *(Œuvres, édition Lahure, II, p.* 396). Miquel *(J. de Liouv. Año* 11, *p.* 75).

(**) Desde los primitivos tiempos fué estudiada la esfera y considerada como campo de construccion para las necesidades de la Astronomía. Minuciosos trabajos de Geometría esférica nos dejaron Theodosio *(siglo* I. *a. J. C.)* y Menelao *(principios del siglo* II, *d. de J. C.)*. Considerable aumento recibió despues la Esférica de Vieta, Snellio, Girard, y particularmente de Euler y Lexell; y en los tiempos modernos han visto la luz tratados especiales acerca de la misma, debidos, ántes que á otros, á C. F. Schulz (1833) y á Gudermann (1835).

ricas posee el círculo máximo propiedades fundamentales, idénticas á las de la recta entre las líneas planas.

33. Dos puntos A y B, y sus puntos opuestos A_1 y B_1, dividen el círculo máximo que pasa por ellos en 4 arcos AB, BA_1, A_1B_1 y B_1A: de los cuales son suplementarios dos contiguos (completan un semicírculo); é iguales dos separados, tales como AB y A_1B_1.

Dos círculos máximos dividen la esfera en 4 regiones, denominadas *ángulos esféricos* (*). El ángulo, que forman en A y A_1 los círculos máximos AB y AC, es el mismo que forman las rectas AD y AE, A_1D_1 y A_1E_1, tangentes en A y A_1 á dichos círculos máximos, y situadas en los planos ADE y $A_1D_1E_1$ (*Planim.* 24). Pero las tangentes AD y AE, A_1D_1 y A_1E_1 son normales al diámetro AA_1; y, por consecuencia (11), los planos ADE y $A_1D_1E_1$ son normales tambien al diámetro AA_1; y los ángulos DAE y $D_1A_1E_1$, secciones normales (14) del diedro BAA_1C, en el cual está comprendido el esférico ABA_1C. Si los ángulos, formados por los círculos máximos a y b, y por los círculos máximos c y d, en sus puntos de interseccion, son iguales, los ángulos diédricos, definidos por los planos a y b, serán iguales (14) á los ángulos diédricos, compren-



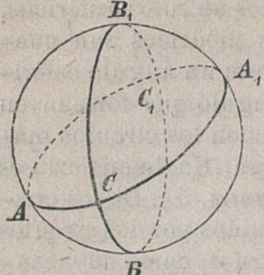
(*) Se dice impropiamente *diedro esférico;* porque al hablar de *dos* puntos de la esfera, por lo regular no nos referimos á dos puntos que sean el uno opuesto del otro. Legendre (*Géom.* VII, *déf.* 9), llama *huso (fuseau)* al ángulo esférico.

didos entre los planos *c* y *d;* los ángulos esféricos, contenidos en estos ángulos diédricos son congruentes. De lo cual resulta que un ángulo esférico está determinado por el ángulo que forman en uno de sus puntos de interseccion los círculos máximos que le incluyen ó cierran. Un hemisferio es un ángulo esférico llano (*Planim.* 5.). De los cuatro ángulos esféricos, constituidos por dos círculos máximos, se miran dos contiguos, como adyacentes; y dos separados, como opuestos por el vértice.

34. Tres puntos de la esfera, A, B y C (y sus opuestos A_1, B_1 y C_1) que no están sobre un mismo círculo máximo, determinan tres círculos máximos que dividen la esfera en 8 regiones, denominadas *triángulos esféricos*. Los arcos (*) AB, BC y CA que unen sucesivamente los puntos A, B y C, se llaman *lados;* y los ángulos ACB, CBA y BAC, formados por estos lados en sus puntos comunes, se llaman *ángulos* del triángulo esférico. Este triángulo se denomina *isósceles,* cuando tiene dos lados iguales entre sí; *equilátero,* si tiene sus tres lados iguales; *rectilátero,* cuando uno de sus lados es un cuadrante; *rectángulo,* si uno de sus ángulos es recto.

Al triángulo esférico ABC corresponden: 1) el *triángulo opuesto*, $A_1 B_1 C_1$, que tiene sus ángulos y sus lados respectivamente iguales á los del primero; 2) los 3 *triángulos adyacentes*, ABC_1, BCA_1, y CAB_1, que tienen iguales con el dado, un lado y

(*) Arco, simplemente significa arco de círculo máximo. La denominacion de *triángulo esférico* no aparece en Thedosio, pero sí en Menelao.



los ángulos respectivamente opuestos, siendo suplementarios los otros lados y los otros ángulos; 3) los 3 triángulos respectivamente *opuestos por el vértice*, A_1B_1C, B_1C_1A y C_1A_1B, que son los opuestos de los adyacentes.

Por *polígono esférico* se comprende la figura definida ó cerrada por arcos de círculo máximo que unen varios puntos dados de la esfera, sucesivamente: el primero con el segundo, ... el último con el primero. Las denominaciones, *lados*, *ángulos*, *superficie* y *área, diagonales*, conservan en la Esférica el mismo sentido y significacion que en la Planimetría; con la diferencia de que ahora sustituyen el círculo máximo y la esfera á la recta y al plano de ántes. Á toda figura esférica corresponde su opuesta, ó sea la figura constituida por los puntos opuestos de la dada. Existen figuras esféricas que coinciden con sus opuestas: un círculo máximo, por ejemplo, es su propia figura opuesta.

35. Un triángulo esférico y su opuesto, no son, en general, congruentes ó superponibles; pero lo serán cuando el triángulo sea isósceles. Una figura esférica es igual y semejante á su opuesta, y de opuesto sentido *(Planim.* 54): una y otra tienen respectivamente sus lados y sus ángulos iguales, y tambien sus áreas (*).

(*) No se escapó á los antiguos que á la igualdad y á la semejanza de las figuras en el espacio no iba necesariamente unida su congruencia (EUCL. XI, 26. ARQUIM. *Conoid. et Sph.*, 20). La in-

DEMOSTRACION. Si colocamos el ángulo C del triángulo ABC sobre el ángulo C_1 de su opuesto $A_1B_1C_1$, los arcos CA y CB caerán á lo largo de los arcos C_1B_1 y C_1A_1; pero el vértice A no caerá sobre B_1, ni el B sobre A_1, á no ser que sea $CA = C_1B_1 = CB$. Para un observador, que por fuera de la esfera recorriese los lados correspondientes AB y A_1B_1 de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$, caería el vértice C á la izquierda y el C_1 á la derecha.

Designando por O el centro de la esfera, por P su proyeccion normal sobre el plano ABC, y por D y D_1 los puntos en que corta á la esfera la recta OP, los triángulos planos OPA, OPB y OPC serán iguales y semejantes; y, en consecuencia, serán iguales, tanto los ángulos POA, POB y POC, como los arcos DA, DB y DC. Mas los triángulos esféricos isósceles DAB, DBC y DCA tienen iguales áreas que sus opuestos $D_1A_1B_1$, $D_1B_1C_1$ y $D_1C_1A_1$ respectivamente; y, por lo tanto, ABC y $A_1B_1C_1$ tambien tienen áreas iguales (*Planim.* 76).

36. En un triángulo esférico, cuyos lados y cuyos ángulos sean todos menores que 180°, la suma de los ángulos es mayor que 180°; y la diferencia entre aquella suma y 180° toma el nombre de *exceso*

---

congruencia de un triángulo esférico y su opuesto, algun tiempo despues comprendida del todo, fué determinada explícitamente entre los modernos por SEGNER, 1741. (KLÜGEL, *Math. W.* 4, p. 859). LEGENDRE recibió de un matemático extranjero, anónimo, la adjunta demostracion de la igualdad (equivalencia) de aquellas superficies incongruentes, y la insertó en sus *Élem. de Géom.* VII, 21 (2.ª *Ed.* 1800). Las figuras espaciosas, iguales y semejantes, pero incongruentes, son llamadas frecuentemente por LEGENDRE (*Géom.* VI, *déf.* 16) figuras *simétricas*.

del triángulo esférico. El área del dicho triángulo esférico es igual á la de otro triángulo esférico, birectángulo, cuyo tercer ángulo es el exceso del primero (*).

Demostracion. La suma de los ángulos esféricos (33) ABA_1C, BCB_1A y $CA_1C_1B_1$ sobrepuja al hemisferio cortado por el círculo máximo ABA_1B_1, donde se halla el punto C, en los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$; y, por consecuencia, la suma de los ángulos $BAC + CBA + ACB$ excede de 180°. Pero los dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ tienen la misma área (35); y, de consiguiente, el duplo de esta área será la diferencia entre la suma expresada de los ángulos esféricos, y un hemisferio: diferencia que es un ángulo esférico cuyos lados se desvian el uno del otro en el vértice tanto cuanto vale el exceso $BAC + CBA + ACB - 180°$.

El círculo máximo, que divide por mitad los lados ó brazos de un ángulo esférico, parte este ángulo esférico en dos triángulos esféricos, isósceles, con una base comun sobre la cual yacen ángulos rectos (10 y 13); pero dichos triángulos isósceles son congruentes, y por esto cada uno de ellos es mitad del ángulo esférico. Luego el área de un

(*) Este teorema era conocido por Girard (*Invention nouvelle en algèbre*, 1629), que lo demostró incompletamente. El mismo teorema, con la sencilla demostracion del texto, fué publicado por Cavalieri, 1632 (*Directorium generale uranometricum*, c. 8, pág. 315). La regla para el cálculo del área de un polígono esférico fué dada por Broscio (*Apología Arist. et Eucl.* 1690, *p.* 78, *ex antiquis in Vitellonem notis*); si bien esta cita así como la noticia del mismo autor, p. 79: *demonstratio amplitudinis anguli solidi refertur ab H. Briggio ad Th. Harriotum*, carecen hasta hoy de confirmacion más amplia.

triángulo esférico es igual á la de otro triángulo esférico, birectángulo, cuyo tercer ángulo es el exceso del primero.

Observacion. Cuando triángulos esféricos de esferas diferentes comprendan la misma área, el triángulo de la esfera mayor tendrá el exceso menor. Sobre una esfera infinitamente grande no puede un triángulo esférico tener exceso finito; desapareciendo ó anulándose, en tal caso, los excesos de todos los triángulos esféricos. Mas, segun la hipótesis fundamental de la Geometría euclideana solamente (*Planim.* 15), se considera un círculo máximo, infinitamente grande, como una recta; y una esfera, infinitamente grande, como un plano.

Como unidad de las superficies esféricas se toma el triángulo esférico, birectángulo, cuyo tercer ángulo es la unidad angular que tiene por arco 1. Luego si, como de ordinario, entendemos por área de una superficie su razon con la unidad esférica, y tomamos por el ángulo su arco, el área de un triángulo esférico será igual á su exceso.

De lo cual se desprende que un ángulo esférico es doble del ángulo bajo el cual se cortan los círculos máximos que lo forman. Y el área de un polígono esférico de n lados (*Planim.* 77), será igual á la suma de sus ángulos, disminuida en $(n-2)180^\circ$.

Dos triángulos esféricos, cuyos ángulos dan iguales sumas, tienen áreas iguales. Dos polígonos esféricos, cuyos ángulos den sumas iguales, tendrán áreas iguales, ó diferentes la una de la otra en un número entero de cuadrantes esféricos.

37. Los círculos máximos, que cortan normalmente á un círculo máximo dado, pasan por un

d

punto (y su opuesto) que se llama *polo* (*y antipolo*) *del círculo máximo dado*. Los arcos que unen los puntos del círculo máximo con su polo son cuadrantes.

Los cuadrantes que comienzan en un mismo punto de la esfera terminan en un círculo máximo que toma el nombre de *círculo polar del punto* (y de su punto opuesto). Los círculos máximos que pasan por el punto dado cortan normalmente al círculo polar de dicho punto (*).

Demostracion. Los planos, normales al plano del círculo máximo dado, y que pasan por el centro de la esfera, se cortan en una recta, normal al plano del círculo máximo (12).

Las rectas, normales á un rádio de la esfera y que pasan por el centro de ésta, caen sobre un plano (11), normal á dicho rádio y á los planos que lo contengan ó pasen por el mismo.

Para hallar el polo de un círculo máximo se traza en un punto cualquiera de éste un círculo máximo normal, y en este círculo normal se cuenta desde el punto elegido un cuadrante. Para hallar el círculo polar de un punto, se traza desde este punto un cuadrante cualquiera, y por el remate de este cuadrante un círculo máximo, normal al mismo cuadrante. Cuando un punto es el polo de un círculo máximo, es el círculo máximo el polar del punto. Cuando los círculos máximos pasan por un punto, sus polos correspondientes caen sobre un

---

(*) Theodosio (*Sph.* I.) (Véase la Obs. al núm. 9.) La expresion *polo de un círculo* es más antigua; y se halla, por ejemplo, en Arquímedes (*Esph. et Cyl.* II), significando el centro esférico del círculo (43). El círculo máximo, polar de un punto, se llama tambien *línea polar* ó sencillamente *polar* del punto.

circulo máximo, que es el polar de dicho punto; y si los puntos están sobre un círculo máximo, sus círculos polares correspondientes pasan por un punto que es el polo de aquel círculo máximo.

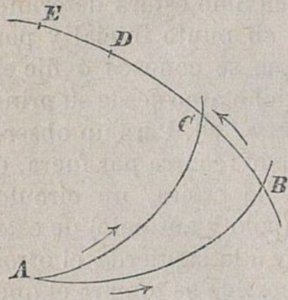
38. Un arco de círculo máximo estará determinado sin ambigüedad por su punto inicial y por su punto final, siempre que se conozca ó fije el sentido en que se recorra dicho arco desde su principio hasta su remate *(Planim.* 30). Para un observador, que en el sentido fijado recorra por fuera, ó sobre la parte convexa de la esfera, un círculo máximo, uno de los polos (polo y antipolo) de este círculo caerá á la derecha, y á la izquierda el otro; y por polo del círculo recorrido se tomará el que caiga á su izquierda, siempre que por giros en este mismo sentido, de derecha á izquierda, se consideren descritos los ángulos sobre la esfera. Segun esto, el círculo polar de un punto se recorrerá de modo que este punto sea el polo situado á la izquierda de su círculo polar (*). Con estas premisas ya podemos enunciar y demostrar el teorema siguiente:

El ángulo comprendido entre dos círculos máximos es igual al arco comprendido entre los polos de estos círculos, siendo el vértice del ángulo el polo del círculo á que corresponde el arco. El arco comprendido entre dos puntos es igual al ángulo formado por los círculos polares de estos puntos, cuyo vértice es el polo de aquel arco. (Advirtiendo

(*) Gauss, 1827, hizo notar esta distincion importante *(Disquis. generales circa superficies curvas* 2, VI). Véase Schulz *(Sphärik* I, 12), y Möbius *(Anal. Sphärik,* 16 y 18).

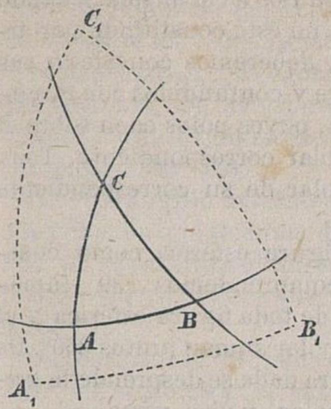
que por brevedad hemos dicho arco en vez de su ángulo céntrico correspondiente).

DEMOSTRACION. Si los círculos máximos que pasan por el punto A son cortados en B y C por el círculo polar de dicho punto A, en cuyo caso los lados AB y AC del ángulo que consideramos son cuadrantes, el arco BC quedará sin ambigüedad determinado; y su ángulo central, correspondiente, será una seccion normal (14) del diedro formado por los planos de los círculos máximos AB y AC, é igual (33) al ángulo de estos círculos. Si ahora cortamos en el sentido fijado, y sobre el círculo polar del punto A, los cuadrantes BD y CE, los puntos D y E serán polos de los círculos AB y AC, y tendremos: $BE - BD = BE - CE$ ó $DE = BC$.



39. A un triángulo esférico ABC corresponde un *triángulo polar* (suplementario) $A'B'C'$: de tal modo que no solamente los puntos A', B' y C' son los polos de los lados BC, CA y AB, sino que tambien los lados $B'C'$, $C'A'$ y $A'B'$, son los polares de los puntos A, B y C; siendo á su vez el triángulo ABC el polar correspondiente al $A'B'C'$ (*). En efecto, si es A' el polo de BC y B' el polo de CA, cada uno de los arcos CA' y CB'

(*) Véase la (*Obs.* 9). Por esto los triángulos polares se llaman tambien triángulos *recíprocos*. GUDERMANN (*Nied. Sphärik*, 20).



comprenderá uno ó tres cuadrantes; y el arco $A'B'$ puede describirse en el sentido de que sea C su polo; etc.

Los ángulos de un triángulo son respectivamente los suplementos de los lados de su triángulo polar. Sabemos (38), en efecto, que el ángulo incluido por CA y CB es igual al arco comprendido entre sus polos B' y A''; pero A'' es el punto opuesto de A', y por lo tanto: $A'B' + B'A'' = 180°$. Luego, etc.

El área de un triángulo y el perímetro de su triángulo polar correspondiente, componen la suma de 360°. Supongamos, en efecto, que los ángulos del triángulo dado tengan respectivamente α, β y γ grados, y que los lados del triángulo polar tengan a', b' y c' grados. Segun esto

$$\alpha + a' = 180°, \quad \beta + b' = 180°, \quad \gamma + c' = 180°$$

$$(\alpha + \beta + \gamma - 180°) + (a' + b' + c') = 360°$$

Y el primer sumando de esta última suma es el área del triángulo; y el segundo, el perímetro de su triángulo polar (36).

40. A toda figura esférica corresponde una *figura polar*, cuyos puntos son respectivamente polos de los lados de aquélla, y cuyos lados son respecti-

vamente polares de los puntos de la misma. Cuando el contorno de la figura no esté constituido por arcos de círculo máximo, deberemos considerar sus lados como evanescentes y confundidos con círculos máximos, tangentes, cuyos polos caen sobre el contorno de la figura polar correspondiente. Toda figura esférica es la polar de su correspondiente figura polar.

Considerando una figura esférica como compuesta de triángulos, comprendemos (39) inmediatamente que el área de toda figura esférica y el perímetro de su figura polar suman juntos 360°. De la *cuadratura* de la figura dada se desprende la *rectificacion* de su figura polar, y vice versa.

Toda propiedad de una figura esférica puede mirarse como propiedad tambien de su figura polar; mediante la cual, por la conexion entre ambas figuras, llegamos á conocer una propiedad correlativa de la primitiva.

En el enunciado de la propiedad correlativa figuran círculos máximos en lugar de puntos, lados por ángulos, perímetros por áreas; y recíprocamente. Las propiedades de las figuras esféricas, por lo tanto, se corresponden dos á dos (*).

41. Entre las propiedades del triángulo esférico, cuyos lados y cuyos ángulos sean todos menores que 180°, deben recordarse las siguientes (Menelao, *Sph.* I):

(*) La figura polar y la relacion de su perímetro con el área de la figura primitiva, se halla mencionada por Schulz *(Sphärik I, p. 21 y II, p. 241)*. Acerca de la *dualidad* (9) véase el t. 15 de los *Ann. de Gergonne*, p. 302.

I.—La suma de los ángulos es mayor que 180°. La suma de los lados es menor que 360°.

Demostracion. El exceso del triángulo esférico ya fué ántes (36) determinado. Y el perímetro del triángulo junto con el exceso de su triángulo polar completan 360° (39).

II.—Un ángulo externo es mayor que la diferencia y menor que la suma de los dos ángulos internos, no adyacentes al mismo. Un lado es mayor que la diferencia y menor que la suma de los otros dos lados (*).

Demostracion. Supongamos que en el triángulo ABC los ángulos y los lados opuestos tienen, respectivamente α, β, γ y a, b, c grados; en el triángulo adyacente A_1BC se verificará (I):

$$\alpha + 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma > 180^\circ$$

$$a + 180^\circ - b + 180^\circ - c < 360^\circ$$

Y, por consecuencia: $180^\circ - \gamma > \beta - \alpha$, $a - b < c$, etc. Luego en el triángulo ABC será $\alpha + \beta > 180^\circ - \gamma$.

Observacion. El arco menor de un círculo máximo es la más corta de cuantas líneas pueden trazarse sobre la esfera, entre los mismos puntos extremos comprendidas, y da la *distancia esférica* de estos dos puntos. Puesto que AB es más corta que las líneas $BC + CA$, $BC + CD + DA$,..., compuestas de arcos de círculos máximos; y, por lo tanto,

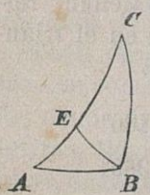
---

(*) Ordinariamente se antepone este teorema y se demuestra, siguiendo á Euclides (XI, 20), por consideraciones extrañas á la Esférica ó Geometría de la esfera.

más corta que una línea, constituida por arcos infinitamente pequeños de círculos máximos en número infinito, que coincidiese con una curva esférica cualquiera, limitada por los puntos A y B. La línea *más corta* (mínima) que une dos puntos sobre una superficie se llama desde principios del siglo XIX *línea geodésica*.

III.—Á ángulos iguales se oponen lados iguales; al mayor ángulo se opone mayor lado. A lados iguales se oponen ángulos iguales; al lado mayor se opone mayor ángulo.

Demostracion. Si en el triángulo ABC son iguales entre sí los ángulos A y B, dicho triángulo ABC coincidirá con su triángulo opuesto $A_1B_1C_1$ ajustando A con B_1 y B con A_1. Luego el lado $BC = A_1C_1 = AC$.



Pero si el ángulo $CBA > BAC$, haremos el ángulo $EBA = BAC$ y obtendremos $EB = EA$; y, como $CE + EB > BC$ (II), resulta $CA > BC$.

Si el triángulo dado tiene dos ángulos iguales entre sí, su triángulo polar tendrá dos lados iguales entre sí; etc.

Observacion. La suma de dos ángulos, y la suma de los lados opuestos, son á la vez menores, iguales ó mayores que 180°. Pues si, por ejemplo, la suma de los ángulos $ACB + BAC < 180°$, en el triángulo adyacente CBA_1 será el ángulo $CA_1B < BCA_1$; y, en consecuencia, el lado $BC < BA_1$, ó sea, $AB + BC < 180°$.

42. I.—Dos triángulos esféricos, que tengan dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo

comprendido, serán iguales y semejantes. Dos triángulos esféricos, que tienen dos ángulos y el lado contiguo á ellos, respectivamente iguales, son iguales y semejantes.

II.—Dos triángulos esféricos, que tienen sus tres lados, respectivamente iguales, son iguales y semejantes. Dos triángulos esféricos, con sus tres ángulos respectivamente iguales, son iguales y semejantes.

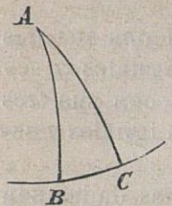
Demostracion. Con las condiciones dadas son congruentes los triángulos, si son del mismo sentido; y, si fuesen de sentidos opuestos, uno de ellos coincidiría con el triángulo opuesto al otro. El segundo teorema se refiere al primero *(Planim.* 36). Y las adiciones, ó segundas partes de los dos teoremas, se demuestran aplicando estos al triángulo polar, correspondiente al dado.

III.—Cuando en un triángulo esférico permanecen dos lados invariables y el ángulo comprendido por ellos aumenta, aumentará tambien el lado opuesto á este ángulo. Si en un triángulo esférico permanecen dos ángulos invariables, y aumenta el lado contiguo á ambos, aumentará tambien el ángulo opuesto á este lado.

Demostracion. Como la de la *(Planim.* 39); y la segunda parte se desprende de la consideracion del triángulo polar.

IV.—Si en el triángulo esférico ABC es recto el ángulo B, y el cateto AB es agudo é invariable, mientras el otro cateto BC aumenta primeramente desde 0 hasta 90°, y despues desde 90° hasta 180°, la hipotenusa AC aumentará primeramente desde AB hasta 90° y despues desde 90° hasta $180° - AB$;

y el ángulo C, opuesto al cateto invariable, menguará primero desde 90° hasta AB y subirá despues hasta 90°. Si en el triángulo esférico ABC es recto



el lado AC, y su ángulo contiguo C es agudo é invariable, mientras su otro ángulo contiguo A crece desde 0 hasta 90° primeramente, y despues desde 90° hasta 180°, el ángulo B, opuesto al lado recto, menguará primero desde $180° - C$ hasta 90°, y despues desde 90° hasta C; y el lado AB, opuesto al ángulo invariable, bajará primeramente desde 90° hasta C; y subirá después desde C hasta 90°.

Demostracion. Para el primer teorema basta considerar los ángulos centrales correspondientes á los arcos (19); y el segundo se deduce del triángulo polar correspondiente al $A_1B_1C_1$.

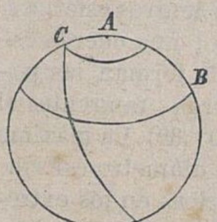
Observacion. Dos triángulos esféricos que tengan un ángulo recto y la hipotenusa y un cateto iguales, ó un lado recto y el ángulo opuesto y uno de los adyacentes respectivamente iguales, serán iguales y semejantes.

Entre los arcos que, procedentes de un mismo punto, llegan á un círculo máximo, es el más corto el agudo y normal que determina la *distancia esférica del punto al círculo*. La distancia esférica de un punto á un círculo, es el complemento de su distancia esférica al polo del mismo círculo.

43. El polo del círculo máximo, cuyo plano sea paralelo á un círculo dado de la esfera, equidista esféricamente de todos los puntos de este círculo dado (16) y se llama *centro esférico* del mismo. Los arcos iguales que unen el centro esférico del círculo

con los diferentes puntos de éste, se llaman *rádios esféricos* del mismo. Un círculo máximo que pase por un punto del círculo dado y sea normal al rádio esférico de este punto, y cuya distancia al centro esférico de dicho círculo sea, por lo tanto, un rádio esférico, toma el nombre de *tangente esférica* del mismo círculo *(Planim.* 23).

La distancia esférica del polo de una tangente esférica del círculo dado al centro esférico del mismo círculo es complementaria con el rádio esférico. Pues, si B es el polo del círculo máximo, tangente en C al círculo descrito alrededor de A, es $CA + AB = CB = 90°$.



Los puntos equidistantes de un punto dado de la esfera, y equidistantes tambien, por consecuencia, del círculo polar de este punto, caen sobre un círculo cuyo centro esférico es el punto dado. Las líneas polares de los puntos de este círculo equidistan de su centro esférico y forman ángulos iguales con la polar de este centro (38); y por lo tanto, son tangentes á un círculo concéntrico (paralelo) que es la figura polar del círculo dado. Los rádios esféricos de estos dos círculos son complementarios ó componen 90° (*).

En particular, el círculo circunscrito á un triángulo esférico tiene por figura polar correspondien-

(*) Schulz (*Sphärik I*, 44). El llamado *círculo polar* en Geografía es la figura polar del trópico situado en el mismo hemisferio. El paralelo cuya latitud es 45°, coincide con su círculo polar.

te el círculo inscrito en el triángulo polar del primero. Uno y otro círculo son concéntricos (paralelos), y sus rádios esféricos suman 90°. Los círculos polares de los centros esféricos de los dos círculos, circunscrito el uno é inscrito el otro en un triángulo esférico, son respectivamente paralelos á estos círculos; y los planos de estos mismos, por consecuencia, forman un ángulo diédrico que tiene por medida la distancia esférica de sus centros esféricos.

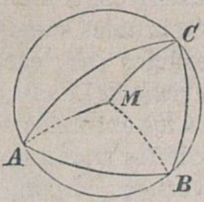
Observacion. Dado un círculo, una cuerda esférica del mismo y el ángulo que forman las polares de los extremos de esta cuerda, tangentes al círculo polar del dado, suman 180° (39). La máxima cuerda esférica del círculo es un diámetro esférico del mismo; y las tangentes esféricas en los extremos del diámetro esférico incluyen el ángulo mínimo. En el triángulo esférico, constituido por una cuerda esférica y las tangentes esféricas en los extremos de esta cuerda, la suma de estas dos tangentes valdrá 180°, ó más, ó ménos, segun que el arco circular, comprendido entre ellas, sea un semicírculo, ó mayor, ó menor que un semicírculo (41-III, *Obs.*).

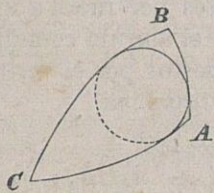
44. Si el vértice C del triángulo esférico ABC se mueve sobre el círculo circunscrito $|ABC$, la diferencia angular $BAC + CBA - ACB$ permanecerá constante. Designando, en efecto, por M el centro esférico de este círculo, dicha diferencia angular será

$$= CBM + MBA + BAM + MAC - ACM - MCB$$
$$= 2BAM.$$

Este valor depende solamente de la posicion del centro esférico respecto de la base AB, y desaparecerá cuando AB sea un diámetro esférico del círculo ABC (*Planim.* 27).

Si la base AB del triángulo esférico ABC se mueve de modo que no deje de ser tangente al círculo inscrito en el mismo, la diferencia entre los lados $BC + CA - AB$ permanecerá constante. Demuéstrase esta proposicion: ó considerando el triángulo polar; ó directamente, por el mismo procedimiento que su correspondiente de la (*Planim.* 33). Esta diferencia, invariable, es igual al duplo de la tangente esférica al expresado círculo desde el vértice C; y llegará á valer 180°, cuando sea ûn semicírculo el arco circular, tocado por AB y comprendido entre BC y CA (43 *Obs.*).





Recíprocamente: los vértices de los triángulos esféricos con una base comun, en los que sea constante la diferencia entre la suma de los ángulos en la base y el ángulo en el vértice, caen sobre un círculo determinado, circunscrito á dicha base comun. Las bases de los triángulos esféricos con un ángulo comun en el vértice, en los que sea constante la diferencia entre la suma de los lados que concurren en el vértice comun y la base, son tangentes por fuera á un círculo determinado, inscrito en el ángulo de dicho vértice comun. La diferencia angular, de que ántes hablamos, tiene por expresion:

$$BAC + CBA - ACB = BAD + DBA - ADB.$$

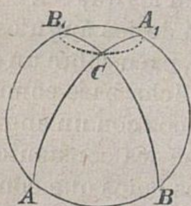
Si, pues, designamos por M y N los centros esféricos de los círculos ABC y ABD, será $2BAM = 2BAN$; y, por consecuencia; etc. (41–II).

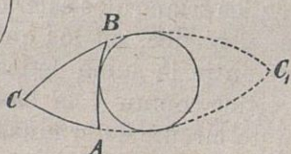
Los vértices de los triángulos esféricos, con una base comun y con ángulos que dén iguales sumas, y, por lo tanto, con iguales superficies (36), caen sobre un círculo determinado (el *círculo de* LEXELL), que pasa por los puntos opuestos á los extremos de dicha base comun (*). Las bases de los triángulos esféricos, con el ángulo en el vértice, comun, é iguales perímetros, son tangentes por fuera á un círculo determinado, inscrito en el ángulo comun. En efecto, en los triángulos opuestos por el vértice, ABC y A_1B_1C, se verifica la igualdad

$$CBA + BAC + ACB - 180^\circ =$$
$$180^\circ - (CB_1A_1 + B_1A_1C - A_1CB_1);$$

y en los triángulos adyacentes, ABC y ABC_1, esta otra:

$$BC + CA + AB = 360^\circ - (AC_1 + C_1B - AB)$$





Pero de las hipótesis establecidas se colige que,

(*) Este teorema fué descubierto por LEXELL y demostrado analítica y geométricamente (*Acta Petrop.*, 1781, I, p. 112; y no en un caso, $B_1A_1C + CB_1A_1 - A_1CB_1$, y en el otro, $AC_1 + C_1B - AB$, son de valor constante. Luego, et cætera.

Si el vértice C se confunde, sobre el círculo de LEXELL CA_1B_1, con el punto A_1, el arco AC se convertirá en la tangente esférica á este círculo en dicho punto A_1 (*Planim.* 23); y, por consecuencia, la superficie del triángulo esférico ABC, es igual al duplo del ángulo (36–*Obs.*) que forma en A_1 el círculo de LEXELL CA_1B_1, con la base AB. Cuando esta base AB, que toca exteriormente á un círculo, inscrito en el ángulo C, coincide con la tangente esférica CB á este círculo, es B un punto del mismo; y, por consecuencia, el perímetro del triángulo esférico ABC es igual al duplo de la tangente esférica trazada por C al expresado círculo.

Con auxilio del círculo de LEXELL pueden construirse triángulos esféricos con áreas ó perímetros dados; reducir un polígono esférico de n lados á otro polígono esférico de $n-1$ lados, con igual área, ó igual perímetro; etc. (*).

45. En un cuadrángulo esférico, inscrito en un círculo, la suma de dos ángulos opuestos es igual á la suma de los otros dos ángulos. En un cuadrángulo esférico, circunscrito á un círculo, la suma de dos lados opuestos es igual á la suma de los otros

---

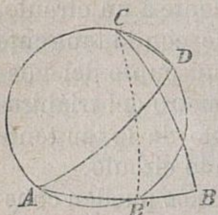
la *Nova acta* que citan todos siguiendo á LEGENDRE, *Géom., note* X). Á EULER se debe una demostracion directa del mismo teorema (47). El teorema correlativo es de SORLIN (*Ann. de Gerg.*, 15, p. 302).

(*) STEINER (*Transformacion y division de figuras esféricas por construcciones. J. de Crelle*, 2, p. 45). GUDERMANN (*Nied. Sphärik*, 97 y sig.).

dos lados. Entendiéndose que estos lados llevarán signos opuestos, si ocupan, respecto del círculo, opuestas situaciones (*Planim.* 28 y 34) (*).

Y recíprocamente: un cuadrángulo esférico, en el que la suma de dos ángulos opuestos sea igual á la suma de los otros dos ángulos, está inscrito en un círculo. Un cuadrángulo esférico, en el que la suma de dos lados sea igual á la suma de los otros dos lados, está circunscrito á un círculo.

En efecto, si B, por ejemplo, cae fuera del círculo ACD, y AB es cortada en B' por aquel círculo, la suma de los ángulos $CB'A + ADC = DCB' + B'AD$ y la diferencia $CBA - B'CB < CB'A$ (41, II); y, por consecuencia, $CBA + ADC < CB'A + ADC + B'CB$ ó que $DCB + BAD$. Para lo demás subsisten los razonamientos empleados en la *Planimetría* (l. c.).



46. Los círculos máximos, que bisecan normalmente los lados de un triángulo esférico, pasan por un punto, que es el centro esférico del círculo circunscrito al triángulo. Los círculos máximos, que bisecan los ángulos de un triángulo esférico, pasan por un punto, que es el centro esférico del círculo inscrito en el triángulo (*Planim.* 47 y 48).

Los círculos máximos, que pasan por los vértices de un triángulo esférico y son normales á los

(*) Lexell (*Acta Petrop.*, 1872, I, p. 90 y 100). *Ann. de Gerg.*, 12, p. 279 y 6 p. 49. Schulz (*Sphärik*, I, 75 *y sig.*).

lados opuestos, pasan por un punto (*Planimetria* 49) (*).

Ó bien: los arcos, que unen los vértices de un triángulo esférico con los polos de los lados opuestos, pasan por un punto. Los puntos en que cortan á los lados de un triángulo esférico las polares de los vértices opuestos, caen sobre un círculo máximo que es el polar del referido punto (**).

Ó finalmente: si en un cuadrángulo esférico los lados opuestos son normales entre sí, las diagonales lo son tambien. Si en un cuadrángulo esférico cada una de las diagonales vale 90°, la distancia esférica de los puntos en que se cortan los lados opuestos vale tambien 90° (***).

47. Todo cuadrángulo esférico, $ABCD$, que sea dividido por una diagonal AC en dos triángulos esféricos, no sólo iguales y semejantes sino tambien congruentes, es un *paralelógramo esférico* (****). Las diagonales se bisecan mútuamente en el centro esférico, S, del mismo.

La figura polar de un paralelógramo esférico es un paralelógramo esférico concéntrico con el primero. Puesto que el círculo máximo que pasa por

---

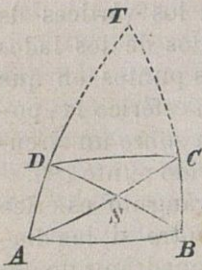
(*) Este teorema fué demostrado analíticamente por QUERRET (*Ann. de Gerg.*, 15, p. 87) y SCHULZ (*Sphärik*, II, 47). La demostracion geométrica es de GUDERMANN (*Nied. Sphärik*, 68). Véase adelante (53).

(**) BOBILLIER (*Ann. de Gerg.*, 18, p. 195). GUDERMANN (*Nied. Sphärik*, 69).

(***) JOACHIMSTHAL, segun comunicacion de LIERSEMANN en los *Arch. de Grunnert*, 32, p. 108.

(****) EULER (*Nov. Act. Petrop.*, X. p. 57). SCHULZ (*Sphärik*, I, 94 *y sig.*). GUDERMANN (*Nied. Sphärik*, 78 *y sig.*).

el centro esférico S y corta normalmente á AB, es normal tambien á CD; y el punto S equidista

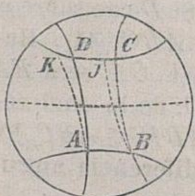


de AB y CD. Estas distancias esféricas del punto S á los lados AB y CD son complementarias con las distancias esféricas del punto S á los polos, E y G, de los expresados lados; y, por lo tanto, E y G caen sobre un círculo máximo que pasa por S, en el cual es $ES = SG$. Asimismo los polos F y H de los lados BC y DA caen sobre un círculo máximo que pasa por S, en el cual es $FS = SH$. Luego $EFGH$ es un paralelógramo esférico, concéntrico con el $ABCD$.

Si dos ángulos contiguos de un paralelógramo esférico son iguales, este paralelógramo está inscrito en un círculo; y, si el paralelógramo esférico tiene dos lados contiguos iguales, estará circunscrito á un círculo (45).

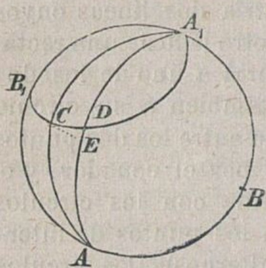
Los lados opuestos, BC y DA, AB y CD, se cortan sobre el círculo polar del centro esférico S. Designando por T la interseccion de BC y DA, y por T_1 su punto opuesto, de la congruencia de los triángulos esféricos SCT y SAT_1 se deduce que $ST = T_1S = 90°$.

Dos vértices contiguos de un paralelógramo y los puntos opuestos de los otros dos vértices, se hallan sobre un círculo. Porque los puntos A y B, por una parte, y los C y D, por otra, equidistan esféricamente del círculo máximo que pasa por S y biseca los lados BC y DA; y, de consiguiente, tambien equidistan de tal círculo máximo los puntos opuestos A_1 y B_1, por una parte, y los puntos opuestos C_1 y D_1, por otra. Luego los cuatro puntos C, D, A_1 y B_1 caen sobre un círculo, y sobre otro los puntos A, B, C_1 y D_1; y estos dos círculos son figuras opuestas. Y del mismo modo los puntos B, C, D_1, A_1, y los D, A, B_1, C_1, caen sobre círculos opuestos. En general, dos círculos opuestos, cuyos puntos equidistan por uno y otro lado de un círculo máximo *(ecuador)*, tienen las mismas propiedades que en la Planimetría dos líneas cuyos puntos equidistan por uno y otro lado de una recta. Todo círculo máximo, que corta á uno de los dos círculos expresados, corta tambien á su círculo opuesto; el arco comprendido entre los dos puntos de interseccion es bisecado por el ecuador, y el círculo máximo secante forma con los círculos opuestos ángulos iguales en los puntos de interseccion (correspondientes, alternos). Dos círculos máximos, que pasen por un mismo punto del ecuador, cortarán á los círculos opuestos en los vértices de un paralelógramo esférico. Si A es un punto de un círculo y DK un arco del círculo opuesto, en el triángulo formado por DK con los arcos de círculos máximos, KA y AD, la suma de los ángulos vale lo mismo que la suma de los ángulos formados en el punto A, á saber: 180°. Si AB y CD son arcos iguales de los círculos opuestos, y BC y DA círculos máximos, los puntos A, B, C y D serán vértices de un paralelógramo esférico; y la suma de los ángulos del cuadrángulo así formado, por los arcos de los círculos opuestos y los dos ar-



cos de círculos máximos, valdrá 360°. Si CD y JK son arcos iguales del mismo círculo, los cuadrángulos $ABCD$ y $ABJK$ tienen iguales áreas (*Planimetría* 69); y, por consecuencia, los triángulos esféricos ABC y ABJ tendrán tambien iguales áreas y el mismo exceso que es el duplo del ángulo formado por el arco AB con su cuerda esférica (44).

48. De los triángulos esféricos, con dos lados dados, CA y AB, cuya suma no llegue á 180°, tendrá el área máxima aquél en que el lado no dado, BC, sea diámetro del círculo circunscrito (*). De los triángulos esféricos, con dos ángulos dados cuya suma exceda de 180°, tendrá el perímetro mínimo aquél en que el ángulo no dado sea igual al diámetro del círculo inscrito.

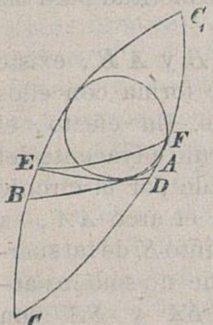


Demostracion. Por los puntos A_1 y B_1, opuestos de los A y B, tracemos el círculo cuyo diámetro esférico A_1C sea suplementario con el lado CA; para lo cual es necesario que $AB < 180° - CA$, ó que $CA + AB < 180°$ (43-*Obs.*). Si D cae sobre el círculo B_1CA_1, el área $ABD = ABC$ (44). Haciendo ahora EA, sobre DA, igual á CA, será $EA < DA$; porque $A_1E = A_1C < A_1D$: de lo cual resulta que el área $ABE < ABD$ y $ABE < ABC$. En este triángulo esférico ABC es la diferencia angu-

(*) Legendre (*Géom.* VII, 26). Steiner (*J. de Crelle*, 2, p. 63 y 24, p. 102). La adicion quedaba por considerar todavía.

lar $B + C - A = - B_1 + C + A_1$; pero A_1C es un diámetro esférico; y, de consiguiente (44), desaparece $- B_1 + C + A_1$: luego tambien se anula $B + C - A$; y, por lo tanto, BC es un diámetro esférico del círculo ABC.

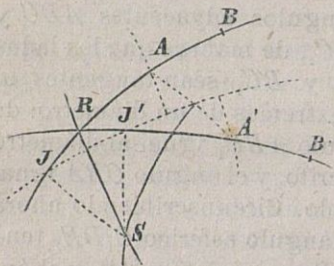
Para demostrar directamente la segunda parte del teorema, que se desprende de la figura polar, inscríbase en el ángulo dado, ACB, el círculo cuyo diámetro esférico sea suplementario con el otro ángulo dado; para lo cual es preciso que ACB sea mayor que el ángulo adyacente del otro ángulo dado (43-*Obs.)*, y que la suma de los dos ángulos dados, por lo tanto, exceda de 180°. Hecho ésto, divídase el ángulo esférico $ACBC_1$ en los triángulos adyacentes ABC y ABC_1, de manera que los lados AB y BC_1 sean tangentes al círculo inscrito en los extremos de un diámetro: de lo cual resultará el ángulo ABC_1 igual al diámetro esférico del círculo inscrito, y el ángulo CBA igual al segundo ángulo dado. Circunscribiendo ahora al mismo círculo el triángulo esférico C_1DE, tendrán ABC y DEC iguales perímetros (44), y el ángulo DEC_1 superará al ángulo ABC_1 (43-*Obs.)*. Y, si hacemos el ángulo $FEC_1 = ABC_1$, el perímetro del triángulo esférico CFE sobrepujará al de CDE, y tambien, por lo tanto, al de ABC.



En este triángulo ABC es $CA + AB - BC = - AC_1 + AB + C_1B$; pero el ángulo ABC_1 es igual á un diámetro esférico del círculo inscrito en el triángulo esférico ABC_1; y por esto la diferencia entre lados, $-AC_1 + AB + C_1B_1$, toma (44) el valor de 180°; el mismo que toma, en consecuencia, la diferencia $CA + AB - BC$. Del cual se desprende que el ángulo BAC es igual al diámetro esférico del círculo inscrito en el triángulo esférico ABC.

OBSERVACION. Y esto prueba que los teoremas demostrados para las figuras planas isoperimétricas (*Planim.* XV) conservan su exactitud para las figuras esféricas.

49. Para dos arcos iguales, AB y $A'B'$, existe sobre la esfera un punto S que forma con ellos triángulos esféricos congruentes. En efecto, el círculo máximo, que biseca el ángulo adyacente del formado por AB y $A'B'$, es cortado por el círculo máximo que biseca normalmente el arco AA', en el punto S: de tal suerte que no sólo los arcos SA y SA' son iguales, sino que lo son tambien las distancias esféricas, SJ y SJ', del punto S á los arcos AB y $A'B'$. Y, por lo tanto, son congruentes los triángulos esféricos SJA y $S'J'A'$, SJB y $SJ'B'$, y tambien SAB y $SA'B'$. Tambien es el ángulo $ASA' = ASB + BSB' + B'SA' = BSB'$.



Infiérese de esto que para dos figuras esféricas, congruentes, ABC... y $A'B'C'$... existe un punto S que se corresponde á sí mismo, de modo que las figuras $SABC...$ y $SA'B'C'...$ son congruentes, é iguales los ángulos ASA', BSB', CSC',... Si la primera figura gira al rededor de S, hasta que SA recorra el ángulo ASA', ó el ángulo $ASA' + 180°$, la figura $ABC...$ llegará á cubrir á la $A'B'C'...$; ó á colocarse en situacion tal que $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$,... sean paralelógramos esféricos, concéntricos (*).

50. Para dos arcos iguales, AB y $A'B'$, existe sobre la esfera un círculo máximo S, que forma ángulos iguales y opuestos con ellos; del cual los puntos A y A', B y B' tienen distancias esféricas iguales y opuestas; y cuyo polo N y su antipolo N_1 se corresponden de modo que los triángulos esféricos NAB y $N_1A'B'$ son iguales y semejantes, y de opuestos sentidos. En efecto, conservando S, J y J' su anterior significacion, y marcando por R el punto de interseccion de los arcos AB y $A'B'$, los triángulos esféricos SRJ y SRJ' son igualmente opuestos y semejantes. Por lo cual es $RJ = RJ'$, y JJ' forma con AB y con $A'B'$ ángulos iguales y opuestos. Si, pues, N y N_1 son los polos de JJ', los triángulos esféricos NJA y $N_1J'A'$, NJB y $N_1J'B'$, NAB y $N_1A'B'$ son igualmente opuestos y semejantes. Y, por consecuencia, las distancias esféricas á JJ' de los puntos A y A', B y B' son iguales y opuestas, y los ángulos ANA', BNB' y JNJ' iguales.

(*) La parte principal de este teorema es de Euler *(Theoria motus corp. solid.*, 978 y sig.). El resto se encuentra en la *Memoria* del autor *sobre la igualdad y la semejanza*, 30 y sig. *(Planimetría*, 55 y sig.).

Segun esto, para dos figuras esféricas $ABC\ldots$ y $A'B'C'\ldots$ iguales y opuestas, y semejantes, existe un punto N que corresponde á su opuesto N_1, de tal suerte, que las figuras $NABC\ldots$ y $N_1A'B'C'\ldots$ son tambien iguales y opuestas, y semejantes; y los ángulos ANA', BNB', CNC',... iguales.

Si la primera figura gira en torno de N hasta que NA recorra el ángulo $ANA' + 180^\circ$, ó el ANA', dicha figura llegará á coincidir con la opuesta de la otra figura, ó á colocarse con ésta *simétricamente* respecto del círculo polar del punto N: en cuyo caso, los arcos AA', BB'... serán bisecados normalmente por este círculo máximo.

V. — Ángulo sólido, prisma y figuras en perspectiva.

51. Una série de ángulos con el vértice comun, cada uno de los cuales con el siguiente, y el último con el primero, tiene un lado comun, separa una porcion del espacio en derredor del vértice comun, que se llama *ángulo sólido* (γωνια στερεα, EUCL. XI, *def.* 11, *angulus solidus*, *ángulo espacioso*). El vértice comun lleva el nombre de *vértice del ángulo sólido (sommet, cúspide, centro);* los lados comunes de los ángulos sucesivos se denominan *aristas* ó *cantos;* los ángulos planos, contenidos entre las aristas sucesivas, *caras* ó *lados;* y los ángulos diédricos, formados por las caras sucesivas, *ángulos* (14). Segun el número de sus aristas (ó de sus caras) toma el ángulo sólido los nombres de *trilátero* (*triédrico*), *cuadrilátero* (*tetraédrico*), ... *multi-*

látero (*poliédrico*), que se refieren al de 3, 4,... ó varias caras. Un cono puede considerarse como un ángulo sólido infinitilátero, ó de infinitas caras (20).

Las secciones paralelas (por planos paralelos) del ángulo sólido, ó del cono (con excepcion de las que pasan por el centro) son figuras semejantes. Pues, suponiendo que dos planos paralelos corten á las aristas respectivamente en A y A', B y B', C y C',..., las rectas AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, CA y $C'A'$,... serán paralelas; y semejantes, los triángulos ABC y $A'B'C'$, ABD y $A'B'D'$... por tener sus ángulos iguales (14); de lo cual resulta (*Planim.* XII) que serán tambien semejantes las figuras $ABCD$... y $A'B'C'D'$... Las áreas de las secciones paralelas son entre sí como los cuadrados de sus distancias al centro S; puesto que

$$AB : A'B' = SA : SA'; \text{ etc.}$$

52. Bajo el nombre de *seccion esférica* de un ángulo poliédrico (ó de un cono) se comprende la figura esférica que el ángulo sólido (ó el cono) tiene comun con una esfera concéntrica, cuyo rádio es la unidad de longitud. Las caras del ángulo sólido son iguales á los lados de esta figura esférica, cuando los arcos de círculo máximo son sustituidos por sus ángulos centrales correspondientes (38) y (*Planim.* 108). Los ángulos del ángulo sólido son iguales á los de la figura esférica expresada. Y de estas relaciones se colige que las propiedades de las caras y de los ángulos de un ángulo sólido se deducirán de las pertenecientes á los lados y á los ángulos de su seccion esférica. Si las sec-

ciones esféricas de dos ángulos sólidos son congruentes, lo serán tambien estos dos ángulos; y, por consecuencia, un ángulo sólido queda determinado por su seccion esférica.

Dos ángulos sólidos son de igual magnitud (*amplitudo*, *apertura*, *capacitas*), cuando sus secciones esféricas tienen áreas iguales. La razon de un ángulo poliédrico con el espacio entero, es igual á la razon de la superficie de su seccion esférica con la esfera entera. En suma: la magnitud de un ángulo poliédrico es el área de su seccion esférica (*).

Las rectas, que van desde los puntos del contorno de una figura superficial al ojo del observador que la mira, caen sobre las caras de un ángulo sólido (ó de un cono) cuya magnitud (el área de su seccion esférica) expresa la *magnitud aparente* de aquella figura superficial para el lugar ó sitio dado del ojo de quien la mira.

Dos ángulos sólidos se dicen *isoperimétricos*, cuando sus secciones esféricas tienen perímetros iguales. Entre todos los ángulos sólidos, isoperimétricos, tiene el cono de rotacion la mayor amplitud; y entre los ángulos sólidos con igual amplitud, corresponde al cono de rotacion el perímetro mínimo de la seccion esférica (**).

A cada ángulo poliédrico corresponden su *ángulo poliédrico opuesto* y su *ángulo polar*, determinados por la figura opuesta y la figura polar de su seccion esférica (34 y 40).

(*) Segun Cabasilas (*Comm. al Almag.*, 1350), comunicado por Vitello (Opt., I, 871).

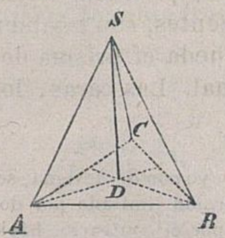
(**) Descartes (*Œuvres inéd.* II, p. 218). Véase (48 *obs.*).

53. Tres planos que tienen un punto comun, á distancia finita, distribuyen el espacio en 8 ángulos triédricos. A cada uno de estos ángulos corresponden, además de su opuesto, 3 adyacentes y los opuestos respectivos (34) á estos adyacentes.

Los planos, que bisecan normalmente las caras de un ángulo triédrico, se cortan en una recta que es el eje del cono de revolucion circunscrito á dicho ángulo. Los planos, que bisecan los ángulos de un triedro, se cortan en una recta que es el eje del cono de revolucion inscrito en el triedro. Puesto que el triángulo esférico, que es la seccion esférica del triedro, admite un círculo inscrito y un círculo circunscrito (46). Igualmente, para cada triedro adyacente existen un cono de revolucion circunscrito y un cono de revolucion inscrito (29 y 30).

Los planos, que proyectan las aristas de un triedro normalmente sobre las caras respectivamente opuestas (15), se cortan en una recta. Porque en el triángulo esférico, que es la seccion esférica del triedro, los arcos que pasan por los vértices y cortan normalmente á los lados opuestos pasan por un punto (46).

Observacion. Para demostrar directamente que el plano CSD es normal al plano ASB, cuando ASD es normal á BSC, y BSD normal á CSA, se cortan las aristas del triedro por un plano normal á la SD. Entónces ASD es normal á BC, por ser dicho plano, ASD, normal al BSC y al ABC (13); y el plano BSD normal á CA. Luego la recta



AD, del plano ASD, es normal á BC (10), y la recta BD normal á CA; y, en consecuencia (*Planim.* 49), CD normal á AB. Y como tambien es SD normal á AB, resulta el plano CSD normal á AB y al plano ASB.

54. Una série de fajas ó bandas, cada una de las cuales con la siguiente, y la última con la primera, tiene un canto comun, separa del espacio un *prisma* (*). Los cantos comunes de cada dos fajas sucesivas se denominan *aristas* ó *cantos* del prisma; las fajas mismas, comprendidas entre dos aristas sucesivas, *caras;* y los ángulos diédricos, contenidos en cada dos caras contiguas, *ángulos*. Segun el número, 3, 4,... de sus caras (ó aristas), el prisma toma los nombres de *trilátero* (ó *triédrico*), *cuadrilátero* (ó *tetraédrico*),... *multilátero* (ó *poliédrico*). El cilindro puede considerarse como un prisma infinitilátero, ó con número infinito de caras.

Planos paralelos, que no lo sean á las aristas del prisma, cortan á éste en figuras congruentes (51). Por seccion de un prisma se entiende principalmente su *seccion normal* (ó recta), que es la seccion producida en el mismo por un plano normal á una de sus aristas. Dos prismas, cuyas secciones normales sean congruentes, son tambien congruentes (14); por lo cual queda el prisma determinado por su seccion normal. Las caras, los

---

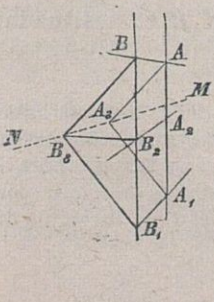
(*) La voz πρίσμα, derivada de πριω (yo corto), designa, segun acepcion antigua, una capa ó porcion limitada por dos planos paralelos del prisma, abierto, por el contrario, hácia dos direcciones opuestas (73). En *Óptica* se entiende por prisma, generalmente, un diedro (macizo).

ángulos y la magnitud ó capacidad del prisma son determinados por los lados, los ángulos y el área de su seccion normal. La razon del prisma con el espacio indefinido difiere de cero tan poco como la razon del área de su seccion normal con el plano indefinido.

Un prisma (ó un cilindro) puede considerarse como un ángulo sólido (ó un cono) cuyo vértice (ó centro) esté á distancia infinita. La seccion normal del prisma se ofrece así como seccion del mismo por una esfera concéntrica (52), cuyo centro se halla tambien á distancia infinita, la cual no se diferencia entónces del plano que corta normalmente á las aristas (rádios ahora).

Tres planos, con un punto comun en el infinito (paralelos á una recta, dirigida á este punto infinitamente distante), distribuyen el espacio en 7 regiones (9 y *Planim.* 74). Una de ellas es un prisma trilátero; y tres de las otras pueden considerarse como prismas adyacentes de aquélla.

55. Un cilindro (prisma) es cortado en figuras iguales y semejantes por las caras de un ángulo diédrico, cuyo plano bisector sea normal á las aristas del cilindro. Supongamos, en efecto, que las aristas del cilindro sean cortadas por las caras del



diedro en los puntos A, B, C... y A_1, B_1, C_1..., y por el plano bisector del diedro en los puntos A_2, B_2, C_2...; y que ademas sean AA_3A_1, BB_3B_1,... secciones normales del diedro $AMNA_1$. Entónces, los triángulos A_3A_2A y $A_3A_2A_1$, B_3B_2B y $B_3B_2B_1$,...

serán iguales y semejantes; y, por lo tanto, A y A_1, B y B_1,... estarán situados simétricamente respecto del plano bisector A_2MNB_2; de suerte que $AB = A_1B_1$,... y, en conclusion, las figuras ABC... y $A_1B_1C_1$... serán iguales y semejantes.

Si, particularmente, sobre un cilindro se halla un círculo, existirá sobre el mismo cilindro otro círculo igual, situado simétricamente con el primero respecto de una seccion normal del cilindro expresado (*).

En general, si las figuras cilíndricas ABC... y $A_1B_1C_1$... son iguales y semejantes, y los segmentos de aristas, AA_1, BB_1, CC_1,... no son todos iguales entre sí, dichas figuras se hallarán situadas simétricamente respecto de una seccion normal del cilindro. Si AA_1, BB_1, CC_1... son desiguales, y A_2, B_2, C_2... sus puntos medios, los cuadrángulos AA_1B_1B, BB_1C_1C,... tendrán dos lados paralelos y dos lados iguales; y, en consecuencia, las rectas A_2B_2, B_2C_2,... serán normales á las aristas del cilindro, y la figura $A_2B_2C_2$... una seccion normal del mismo. Cuando, en particular, sea $CC_1 = BB_1$, serán BC, B_1C_1 y B_2C_2 paralelas, y el cuadrángulo BB_1C_1C un rectángulo.

Un cilindro es cortado por una esfera en figuras iguales y semejantes, ABC... y $A_1B_1C_1$..., situadas

---

(*) Una de estas secciones circulares del cilíndro se llama con relacion á la otra, *alterna*, *antiparalela; sectio subcontraria*, τομὴ ὑπεναντία, segun Apollonio *(Con. I*, 5), y Serenus *(sobre el cilindro, I*, 6), en la edicion de la *Cónica* de Apollonio por Halley. Véase la Memoria del autor en el *J. de Borchardt*, 54 *p.* 162.

simétricamente respecto de la seccion normal del cilindro que pasa por el centro de la esfera secante. Puesto que las cuerdas paralelas AA_1, BB_1 ..., son bisecadas por el plano central que es normal á las mismas.

Si una de las secciones de un cilindro por una esfera es un círculo, la otra seccion es un círculo igual.

Un haz de esferas que tienen un círculo comun es cortado por un cilindro, sobre el cual está aquel círculo, en círculos paralelos é iguales al círculo mismo. Puesto que cada uno de estos círculos se halla situado simétricamente con el círculo comun, respecto de una seccion normal del cilindro.

Dos círculos iguales y no paralelos, k y k_1, de un cilindro, se hallan sobre una esfera. La esfera, en efecto, que contiene el círculo k y cuyo centro cae sobre el plano, respecto del cual son simétricos k y k_1, corta al cilindro en el círculo k_2, con el que k_1 coincide necesáriamente; por estar ambos, k_1 y k_2, situados simétricamente con k, respecto del mismo plano.

Dos círculos iguales de una esfera se hallan sobre un cilindro. Puesto que se hallan simétricamente colocados respecto del círculo máximo de la esfera, con relacion al cual son tambien simétricos los centros esféricos de dichos círculos.

56. Si los puntos de una figura dada se proyectan (15) sobre una superficie dada por rectas que pasen por un punto dado (que forman un haz), se obtiene la *proyeccion central* (en *perspectiva*) de dicha figura. Con semejante modo de proyeccion, un segmento se proyecta mediante un ángulo, y una

línea mediante un cono (ó un plano). El punto comun de las rectas y superficies proyectantes, desde el cual es proyectada la figura dada, se denomina *centro de proyeccion*.

Cuando las rectas proyectantes sean paralelas, se obtendrá la *proyeccion paralela* de la figura dada. La cual puede considerarse como proyeccion central desde un centro de proyeccion infinitamente distante. Las proyecciones normales pertenecen á las proyecciones paralelas; y tambien, por consecuencia, á las proyecciones centrales.

Entre las proyecciones centrales de figuras esféricas, se distinguen principalmente las *estereográficas* (*): cuyo centro de proyeccion está sobre la esfera, y cuya superficie de proyeccion es plana y paralela al plano tangente á la esfera en el centro de proyeccion.

Observacion. Entre las representaciones planas de la superficie terrestre, se distingue principalmente la de Mercator (**). En ella los meridianos

(*) Descubierta por Hiparco (160 *a. de J. C.*), segun tradicion de Sinesio, y denominada por Aguillon (*Óptica, p.* 498). Klügel (*math. W.* IV, *p.* 492). En los escritos de *Ptolomeo*, impresos hasta hoy en latin solamente, *Planisphærium* y *De analemmate*, se manejan las proyecciones: en el primero, la estereográfica; y, en el segundo, la ortográfica.

(**) Gerardo Mercator (Kremer) publicó esta representacion (*Carta marina, correccion de las cartas planas usadas*), en Duisburg, en 1569. El principio en que se funda (á cuya representacion consiguiente dió Gauss el nombre de *conforme* en sus *Untersuchungen über Gedäsie*, 1844, *Gött. Abh. II*), está anotado sobre la carta, y lo hizo conocer más generalmente *Wrighten the correction of certain errors in navigation, London*, 1599. (Véase: Breusing *sobre* Gerardo Kremer (a) Mercator, *Duisburg*, 1869).

están representados por rectas paralelas cuyas distancias son entre sí como los ángulos de dichos meridianos. Un triángulo de la representacion es tanto más semejante al esférico que representa cuanto menores son los lados de éste. En consecuencia, las imágenes del ecuador y de los círculos paralelos son rectas paralelas que cortan normalmente á las que representan los meridianos; pero la distancia entre las imágenes de un paralelo y del ecuador no es proporcional á la distancia entre el paralelo y el ecuador representados. En suma: con la proyeccion de Mercator se consigue que las imágenes de las *loxodromias* (curvas que forman ángulos iguales con todos los meridianos que cortan) sean rectas. Un barco, cuyo camino sobre el mar forme un ángulo invariable con la direccion tambien invariable de la aguja de declinacion, describe una loxodromia; y el ángulo que debe formar con los meridianos la direccion del barco para que

---

Lambert desarrolló más el principio *(Beiträge, 3, p. 115 y sig.)*; y lo mismo hicieron Lagrange *(Mem. de Berlin.* 1779); Gauss, 1822; *(Astronom. de* Schumacher, *Abh.* 3) y Jacobi *(Dynamik, p.* 215). El derrotero de los barcos dirigidos segun el *Compás* fué determinado geométricamente por Nonius (Nuñez) *(De arte atque ratione navigandi*, 1546), y conocido con los nombres de *rhumb-line* ó *línea rómbica.* Llámanse *rombos* direcciones horizontales, puntos del horizonte; porque las hojas de la rosa de los vientos son rombos congruentes cuyos ángulos agudos comprenden 45°. Los vértices de unos ángulos agudos se reunen en el centro, y los de los otros se reparten sobre un círculo y se designan con los nombres de las regiones del cielo (Breusing *Zeitschr. d. Ges. für Erdkunde, IV)*. La expresion rombo ó línea rómbica fué reemplazada por Snellio, 1624, *(Tipys. Batavus s. Histiodromice I*, 4) con la palabra *loxodromia.*

éste vaya desde un lugar dado á otro tambien dado, puede ser medido en la representacion de la superficie terrestre (carta marina) segun Mercator.

57. Si los puntos A, B, C,... de una figura se corresponden, bajo cualquier ley, con los puntos A', B', C',... de otra, y ambas figuras están situadas de modo que las rectas AA', BB', CC',... que unen los puntos correspondientes, formen un haz, ó pasen por un punto, finita ó infinitamente distante, y caigan, por lo tanto, sobre un cono ó sobre un cilindro, se dice que las dos figuras expresadas están en *perspectiva* (*).

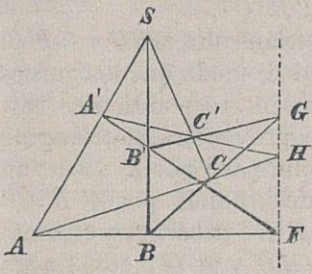
Una figura esférica y su figura opuesta se hallan en perspectiva; porque las rectas que unen los puntos opuestos pasan por el centro de la esfera. En las investigaciones sobre las figuras esféricas se dice tambien que dos de éstas se hallan situadas en perspectiva, cuando los círculos máximos que unen sus puntos correspondientes pasan por un mismo punto.

Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ están situados en perspectiva, los puntos de interseccion de sus lados correspondientes, AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, CA y $C'A'$, caen sobre una recta; y recíprocamente (**).

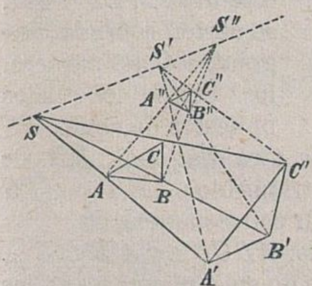
(*) Segun Steiner (*Syst. Entw.*, *p.* 4 *y* 29) y Staudt (*Géom. d. Lage*, 89.) En ciertos casos particulares las figuras en perspectiva fueron llamadas por Eucl. (VI, 18, XI, 27) *semejantemente puestas;* por Chasles (*Ann. de Gerg.*, 18, *p.* 280), *hometéticas;* y *situadas colinealmente*, por Magnus (*Aufg. d. anal. Géom.* I, *p.* 44).

(**) Este teorema, fundamental en la *Geometría de posicion* (9), proviene de Desargues (*Œuvres ed. Poudra I*, *p.* 413). Véase: Poncelet (*Prop. proj.*, 168), y Möbius (*baryc. Calcul.*, *p.* 284 *y* 346). La exactitud del teorema para dos triángulos esféricos de una misma esfera se patentiza por relaciones métricas (Gudermann, *nied. Sph.*, 211.)

Demostracion. Si los triángulos en perspectiva, ABC y $A'B'C'$, no están sobre un mismo plano, los puntos F, G y H, en que se cortan sus lados correspondientes, son puntos comunes á los dos planos ABC y $A'B'C'$; y se hallan, por lo tanto, sobre la recta comun á dichos planos. Recíprocamente: si los triángulos ABC y $A'B'C'$ no están sobre un mismo plano, y cada dos lados correspondientes tienen un punto comun, las rectas AA', BB' y CC' caerán de dos en dos sobre un plano y tendrán un punto comun (3).



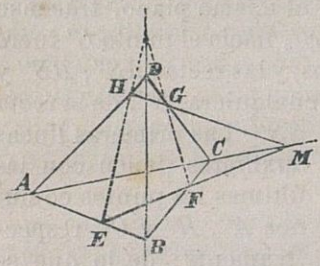
Si los triángulos ABC y $A'B'C'$, situados en perspectiva, están sobre el mismo plano, trácense las rectas $A'S'$, $B'S'$, $C'S'$, hácia el punto S' fuera del plano de los triángulos; y las rectas AS'', BS'' y y CS'', hácia otro punto cualquiera, S'', de la recta SS''. Las primeras líneas auxiliares tienen con las últimas los puntos comunes A'', B'' y C'' respectivamente; de lo que se infiere que el triángulo $A''B''C''$ está situado en perspectiva, tanto respecto del triángulo $A'B'C'$, como del ABC. Ahora bien: las rectas AB, $A'B'$ y $A''B''$ pasan por un punto F, por estar cada dos en un plano; y, por



igual razon, pasan las BC, $B'C'$ y $B''C''$ por un punto G; y las CC, $C'C'$ y $C''C''$, por H. Luego los puntos F, G y H caen sobre la recta que tienen comun los planos ABC y $A''B''C''$.

Si, por el contrario, los triángulos ABC y $A'B'C'$ están situados en un plano de modo que los puntos de interseccion de sus lados correspondientes caigan sobre una recta g, se proyectará el triángulo $A'B'C'$ sobre un plano que pase por g desde un punto cualquiera S'. Y designando por $A''B''C''$ esta proyeccion, la recta $A''B''$ pasará por el punto comun de las dos rectas AB y $A'B'$; etc. Luego AA'', BB'' y CC'' se hallarán de dos en dos sobre un plano y tendrán comun el punto S''. Las rectas AA', BB' y CC' tienen comun el punto S, comun tambien de la recta $S'S''$ con el plano ABC.

OBSERVACION. Si en un cuadrángulo, plano ó alabeado, $ABCD$, se inscribe el cuadrángulo $EFGH$, de modo que dos lados opuestos de este último, EF y GH, se corten sobre la diagonal AC del primero, los otros dos lados opuestos de aquél, FG y HE, se cortarán sobre la otra diagonal, BD, de éste (*). Puesto que los triángulos AEH y CFG están en perspectiva; y, en consecuencia, etc.



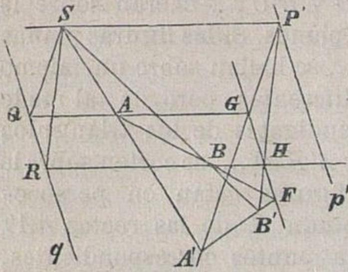
58. Si las figuras planas, $ABCD$... y $A'B'C'D'$... están en perspectiva, pero no en el mismo plano, las

(*) PONCELET (*Prop. proj.*, 166).

intersecciones de sus rectas correspondientes AB y $A'B'$, AC y $A'C'$, BC y $B'C'$,... caerán sobre la recta comun á sus dos planos. Si las figuras planas $ABCD$ ... y $A'B'C'D'$... se hallan sobre un mismo plano, ó sobre planos diferentes, pero de tal modo que los lados correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$, ABD y $A'B'D'$,... se corten sobre la misma recta, dichas figuras están en perspectiva (57). El punto comun S, de las rectas AA', BB', CC',... que unen puntos correspondientes, toma el nombre de *centro de colineacion* de las figuras en perspectiva. Todas las rectas componentes de una de las figuras cortan á sus correspondientes de la otra sobre la misma recta que se llama *eje de colineacion* de las figuras planas en perspectiva (*). A los puntos qué una de las figuras tiene comunes con el eje de colineacion corresponden en la otra los mismos puntos; á una recta de una de las figuras, que sea paralela al eje de colineacion, corresponde en la otra figura una recta paralela; y al punto infinitamente distante de otra recta de la primera figura, corresponde en la segunda un punto á distancia finita. Los puntos de la figura ABC... que corresponden á los puntos infinitamente distantes de la figura $A'B'C'$... caen sobre una recta

(*) Las figuras planas que tienen un eje de colineacion no se diferencian de las figuras *homológicas* de Poncelet *(Prop. proj.*, 297) y pertenecen á la clase de las consideradas primeramente por Möbius *(baryc. calcul.*, *p.* 301) en toda su generalidad, y por éste llamadas *colineales*. La expresion, *homográficas*, de Chasles, es traduccion de *colineales*. Los nombres de *centro* y *eje de colineacion* proceden de Magnus *(anal. géom. Aufg. I. p.* 43 *y sig.)*, que tambien llamó á las rectas p' y q *ejes opuestos*.

q; los puntos de la $A'B'C'$... que corresponden á los infinitamente distantes de la figura ABC..., caen sobre una recta p'. Y estas rectas q y p' son paralelas al eje de colineacion, distando una de ellas de este eje lo mismo que el centro de colineacion diste de la otra.



Demostracion. Las rectas correspondientes AB y $A'B'$ se cortan en un punto F del eje de colineacion; y, si G y H son otros puntos cualesquiera de este eje, al punto comun, P, de las rectas AG y BH corresponderá el punto comun, P', de las rectas correspondientes $A'G$ y $B'H$: en tal posicion que la recta PP' pasa por el centro de colineacion S. En efecto, los triángulos $AA'G$ y $BB'H$ están en perspectiva (57); y, de consiguiente, los puntos comunes de sus lados correspondientes caen sobre una recta. Si, pues, AG y BH son paralelas, con ellas lo será tambien SP'; y á su punto comun, infinitamente distante, corresponderá el punto P' sobre la recta $A'G$, á distancia finita. Así tambien se demuestra que cuando P' cae sobre $A'G$ de modo que SP' y AG sean paralelas, á las rectas $A'G$ y $B'H$ que pasan por P' corresponden las rectas paralelas entre sí, BG y BH. Completando los paralelógramos $GP'SQ$, $HP'SR$, ... se ve sin dificultad que, por las mismas razones expuestas, á los hazes de rectas de la figura ABC ... que pasen por Q, R, ..., corresponderán hazes de rectas de la figura

$A'B'C'$... que sean paralelas con $A'G$, $B'H$.... Los segmentos GQ y HR son paralelos é iguales; y, por lo tanto, son QR y GH paralelos; etc.

Si los planos de las figuras en perspectiva, ABC ... y $A'B'C'$, ... sólo tienen comun el eje de colineacion FG ..., las rectas trazadas desde el punto S á los puntos infinitamente distantes de $A'B'C'$ ... caerán sobre un plano, paralelo al de esta figura $A'B'C'$ ... Y este plano tendrá comun con el ABC la recta q, cuyos puntos corresponden á los infinitamente distantes de $A'B'C'$ ..., y es paralela (5) al eje de colineacion. Igualmente se encuentra sobre el plano $A'B'C'$ una recta p', correspondiente á los puntos infinitamente distantes del plano ABC, y paralela al eje de colineacion.

OBSERVACION. Cuando las figuras planas, ABC... y $A'B'C'$ ... tienen un eje de colineacion, y dos de las rectas de union, AA', BB' ,... son paralelas, todas estas rectas lo son; el centro de colineacion está en el infinito, y se dice entónces que las figuras planas son *perspectivo-afines* (*). A puntos infinitamente distantes de una figura corresponden sólo puntos infinitamente distantes de la otra (los triángulos $AA'G$ y $BB'H$ no sólo están en perspectiva sino que son tambien semejantes, y por esto $A'G$ y $B'H$ paralelas).

Cuando las rectas correspondientes AB y $A'B'$,... de las figuras planas ABC ... y $A'B'C'$ ... son pa-

(*) Las figuras perspectivo-afines fueron consideradas por CLAIRAULT 1731, EULER (*Introd.* II, *cap.* 18), y PONCELET (*Prop. proj.*, 326). El nombre de *afinidad* viene de EULER. Investigaciones generales sobre las figuras afines se deben en primer término á MÖBIUS (*baryc. Calcul.*, 144-230).

ralelas, dícese que estas figuras son *perspectivo-semejantes*. El eje de colineacion entónces está en el infinito; y el centro de colineacion toma el nombre de centro de semejanza *(Planim.* XII).

59. Si una de dos figuras planas, con un eje de colineacion, gira alrededor de este eje, mientras la otra permanece quieta, las figuras no dejan de estar en perspectiva (58); y el centro de colineacion describe un círculo cuyo plano es normal al eje de colineacion y cuyo centro cae sobre la recta que en la figura quieta corresponde á la infinitamente distante de la figura movida (*).

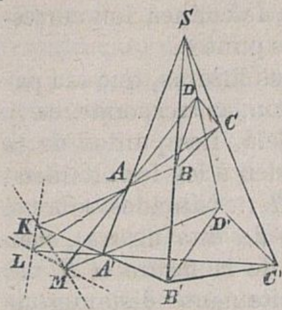
Demostracion. Aun cuando gire la figura ABC ... alrededor del eje de colineacion FG, permanecen paralelas $P'S$ y QS á las AG y $A'G$, conservando tambien $P'S$ su longitud. Y, como el ángulo de AG con el eje de colineacion no varía, tampoco varía el que forma $P'S$ con la recta p'; y, por consecuencia, $P'S$ describe en su vuelta un cono de revolucion al rededor del eje p', y el punto S describe un círculo paralelo del mismo.

60. Si los cuadrángulos alabeados (no planos) $ABCD$ y $A'B'C'D'$ están en perspectiva, las intersecciones de los planos correspondientes, ABC y $A'B'C'$, ABD y $A'B'D'$,... caen sobre un plano; y recíprocamente (**).

(*) Möbius *(baryc. Calcul., p.* 326), y Bobillier *(Ann. de Gerg.* 17, *p.* 335). Steiner *(System. entw., p.* 53). Magnus *(anal. géom. Aufg.* II, § 16).

(**) Poncelet *(Propr. proj.,* 582). Otro teorema más general acerca de los cuadrángulos no planos, se halla en Chasles *Ap. hist.)* y dice así: «Si las rectas AA', ... caen sobre un hi-

DEMOSTRACION. Designemos por K, L y M los puntos comunes de AB y $A'B'$, AC y $A'C'$, AD y $A'D'$. Entónces será KL el eje de colineacion de los triángulos en perspectiva ABC y $A'B'C'$; LM, el de los triángulos en perspectiva ACD y $A'C'D'$; y MK, el de los triángulos en perspectiva ADB y $A'D'B'$. Pero las rectas BC y $B'C'$ se cortan (57) sobre el eje KL; las CD y $C'D'$, sobre LM; y las rectas DB y $D'B'$, sobre KM. Luego KLM es el plano de colineacion de los cuadrángulos $ABCD$ y $A'B'C'D'$.



Recíprocamente: si los planos ABC y $A'B'C'$ tienen comun la recta f; los planos ABD y $A'B'D'$ la recta g; y estas rectas f y g caen sobre un plano; tanto las rectas f, g y AB, como las f, g y $A'B'$ tendrán un punto comun (3); y, por consecuencia, AA' y BB' tendrán un punto comun. Del mismo modo se demuestra que cada dos de las rectas AA', BB', CC' y DD' tienen un punto comun: de lo cual se concluye que lo tienen todas.

61. Si las figuras espaciosas (sólidas) $ABCD$ y $A'B'C'D'$, $ABCE$ y $A'B'C'E'$,..., tienen un plano de colineacion comun, sobre el cual se cortan (60) los planos correspondientes ABC y $A'B'C'$,... las

perboloide, las intersecciones de los planos ABC y $A'B'C'$, ... tambien caen sobre un hiperboloide.» HERMENS. (*J. de Borchardt* 56, *p.* 218).

figuras espaciosas $ABCDE$... y $A'B'C'D'E'$... están en perspectiva. A los puntos que una de ellas tenga comunes con el plano de colineacion corresponden en la otra los mismos puntos.

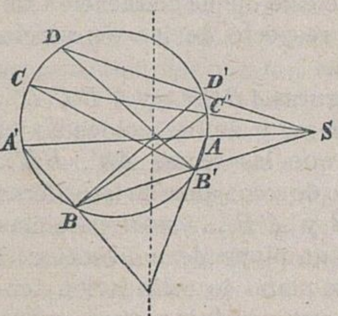
A una recta, en una de las figuras, que sea paralela al plano de colineacion, corresponde, en la otra figura, una recta paralela. Los puntos de la figura AB..., que corresponden á los infinitamente distantes de la figura $A'B'$ ... (situados sobre el plano infinitamente distante de esta figura), caen sobre un plano θ; los puntos de la figura $A'B'$ ..., que corresponden á los infinitamente distantes de la figura AB ..., caen sobre un plano η'; y los planos θ y η' son paralelos al plano de colineacion, siendo la distancia de uno de ellos á este plano de colineacion igual á la distancia del centro de colineacion al otro (*).

Demostracion. Cada dos figuras planas, correspondientes, de las que componen las figuras espaciosas, consideradas, tienen un eje de colineacion sobre el plano de colineacion (58). Si á los puntos infinitamente distantes de las rectas $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$ y $A'E'$ corresponden los puntos Q, Q_1, Q_2 y Q_3, las rectas QQ_1, QQ_2 y QQ_3 serán paralelas al plano de colineacion; y, en consecuencia, los puntos Q, Q_1, Q_2 y Q_3 caerán sobre un plano θ que es

(*) Una de estas figuras es un *relieve* de la otra. Poncelet *(Prop. proj.*, 576). Breysig habia enseñado á construir relieves segun el mismo método en su *Versuch ciner Erläuterung der Reliefs-perspective*, Magdeburg. 1798. Véase Anger *(Arch. de Grunert* 4 *p.* 285). La colinealidad de las figuras espaciosas fué tratada analíticamente, poco despues de Möbius, por Magnus, de un modo especial *(Analyt. géom. Aufg. II, p.* 72 *y sig.)*.

paralelo al de colineacion. Si al punto infinitamente distante de la recta AB corresponde el punto P', siendo S el punto de colineacion y K el punto de interseccion de AB con el plano de colineacion, el cuadrángulo $QSP'K$ será un paralelógramo; y, por consiguiente, el plano θ, que contiene los puntos Q, dista del plano de colineacion lo mismo que el centro de colineacion del plano de los puntos P', que designamos por η'.

62. Las figuras $ABCD$... y $A'B'C'D'$..., cuando están inscritas en un círculo y en perspectiva, tienen un eje de colineacion, sobre el cual no sólo se cortan los segmentos correspondientes AB y $A'B'$, AC y $A'C'$,... BC y $B'C'$,... sino tambien las rectas AB' y $A'B$,... y las tangentes al círculo en A y A', ... Al punto B', considerado como un punto de la primera figura, corresponde el punto B en la otra. El eje de colineacion es la polar del centro de colineacion respecto del círculo dado (*Planim.* 115).



Las figuras $ABCD$... y $A'B'C'D'$..., cuando están inscritas en una esfera y en perspectiva, tienen un plano de colineacion que es el polar del centro S de colineacion respecto á la esfera. Puesto que las figuras planas, contenidas en las figuras sólidas dadas, se hallan inscritas en círculos, y sus ejes de colineacion son normales al rádio de la esfera dirigido al punto S. Designando por M el centro de la esfera, por N el centro de un círculo en cuyo plano esté el punto S, y por p el eje de colineacion perteneciente á este plano, será p normal á NS y á NM; y, por lo tanto, normal á MS.

Si cada una de las figuras $ABCD$... y $A'B'C'D'$... está inscrita en un círculo, y ambas colocadas en perspectiva de manera que las rectas AA', BB',... concurran en un punto de semejanza de los círculos, sin que las rectas AB y $A'B'$,... sean paralelas, dichas figuras tendrán un eje de colineacion sobre el cual se cortarán las rectas AB y $A'B'$, AB' y $A'B$, ... Y los puntos de este eje de colineacion tienen iguales potencias respecto de los expresados círculos (*Planim.* 116).

Si cada una de las figuras $ABCD$... y $A'B'C'D'$... está inscrita en una esfera, y ambas colocadas en perspectiva de modo que las rectas AA', BB'... concurran en un centro de semejanza de las esferas, sin que las rectas AB y $A'B'$,... sean paralelas, dichas figuras tendrán un plano de colineacion. Y todos los puntos de este plano de colineacion tendrán iguales potencias respecto de las esferas expresadas.

63. Supongamos que cada dos de las tres figuras planas f, f' y f'' tengan un eje de colineacion y estén en perspectiva (58). Si los tres ejes de colineacion tienen un punto comun, los tres centros de colineacion caerán en una línea recta; y recíprocamente (*).

(*) Magnus (*Analyt. geom. Aufg.* I, *p.* 51), Steiner (*J. de Crelle* I, *p.* 41).

Demostracion. Por el punto O, comun á los ejes de colineacion, trázese la recta AB de la figura f, y las rectas correspondientes, $A'B'$ y $A''B''$, de las figuras f' y f''. Entónces los triángulos $AA'A''$ y $BB'B''$ estarán en perspectiva (57); y, por consecuencia, las rectas AA' y BB' (en S), $A'A''$ y $B'B''$ (en S'), $A''A$ y $B''B$ (en S'') se cortan sobre una recta.

Observacion. Si cada dos de tres figuras de bulto ó espaciosas tienen un plano de colineacion, los centros de colineacion caerán sobre una recta. Porque los planos de colineacion tienen un punto comun.

64. Dos figuras, que son semejantes á una tercera figura y están en perspectiva con ella, son semejantes tambien y están en perspectiva, cayendo sobre una recta sus puntos de semejanza (*). Puesto que las rectas correspondientes, tales como AB, $A'B'$, $A''B''$, son paralelas y tienen comun un punto infinitamente distante; y, por lo tanto (63); etc.

En particular, dos círculos sobre un plano ó sobre planos paralelos, lo mismo que dos esferas, pueden considerarse como semejantes y en perspectiva de dos modos (*Planim.* 99). Y, por consecuencia, tres círculos sobre un plano ó sobre planos paralelos, lo mismo que tres esferas, constituyen de 4 modos 3 pares de figuras semejantes y en perspectiva; y de los puntos de semejanza S_{12}, S_{13}, S_{23}, T_{12}, T_{13}, T_{23}, caen 4 veces 3 sobre una recta (**).

(*) Magnus (I, *p.* 57, II, *p.* 97).

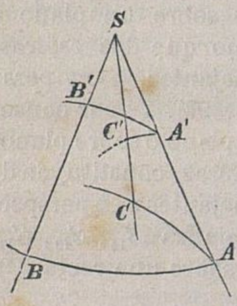
(**) Monge, segun afirmacion de Poncelet (*Prop. proj.* 269). Y D'Alembert, segun comunicacion de Fuss (*Nov. Act. Petrop.* XIV, *p.* 139). Las anteriores relaciones fueron consideradas en general por Fuss (*l. c.*).

Cuatro esferas constituyen de 8 modos 6 pares de figuras semejantes y en perspectiva; y de los puntos de semejanza $S_{12}, \dots S_{34}, T_{12}, \dots T_{34}$, caen 8 veces 6 sobre una recta.

Tres círculos de un plano pueden tambien formar tres pares de figuras en perspectiva, pero no semejantes, cuyos centros de colineacion se confunden con los de semejanza (62). Y, como los centros de colineacion caen sobre una recta, los ejes de colineacion pasan por un punto que tiene iguales potencias respecto de los tres círculos dados (*Planimetría* 117).

65. Dos figuras esféricas de la misma esfera, que están en perspectiva, son *isogonales:* lo cual quiere decir que son iguales sus ángulos correspondientes (*).

Demostracion. Sean AB y AC curvas de una esfera, y $A'B'$ y $A'C'$ sus proyecciones centrales desde S sobre la misma esfera. Los planos, que tienen comun la recta SA y son tangentes á las curvas AB y AC, cortan á la esfera en los círculos $DAA'D'$ y $EAA'E'$. Y estos círculos $DAA'D'$ y $EAA'E'$ son tangentes en A á las curvas AB y AC, y en A' á las curvas $A'B'$ y $A'C'$; en atencion á que los planos SAD y SAE,



(*) Véase la *Planim.* 123 *y sig.* Miquel (*J. de Liow.* XI, *p.* 72). El principio sencillo de la demostracion fué primeramente empleado por Dandelin en la Teoría de la proyeccion estereográfica. (*Ann. de Gerg.* 16, *p.* 322).

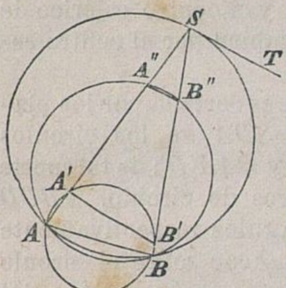
en que están dichos círculos, son tangentes á los conos proyectantes sobre los cuales se hallan las curvas AB y $A'B'$, AC y $A'C'$ (21). Luego los ángulos formados por las curvas AB y AC, y por las curvas $A'B'$ y $A'C'$, son iguales respectivamente á los ángulos comprendidos entre los arcos circulares AD y AE, $A'D'$ y $A'E'$. Y, como estos últimos ángulos son iguales entre sí, por ser iguales y semejantes los triángulos esféricos que forman A y A' con los centros esféricos de los círculos, los primeros serán tambien iguales entre sí.

66. Dos figuras esféricas de la misma esfera, que están en perspectiva, son *homocíclicas;* y esto quiere decir que á cuatro puntos de una de las figuras, situados sobre un círculo, corresponden cuatro puntos de la otra, situados tambien sobre un círculo. El círculo máximo, cuyo plano contiene el centro de colineacion, y el centro esférico de uno de los círculos, pasa tambien por el centro esférico del otro círculo.

Demostracion. La esfera es cortada por los planos SAB, SBC, SCD y SDA en los círculos $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ y $DAA'D'$: de tal suerte que los cuadrángulos de arcos de círculo, $ABCD$ y $A'B'C'D'$, tienen sus ángulos respectivamente iguales (65). Ahora bien, si D cae sobre el círculo ABC, la suma de dos ángulos, no consecutivos, del cuadrángulo $ABCD$, será igual á la suma de los otros dos (45 y *Planim.* 28). La misma igualdad se encuentra entre los ángulos del cuadrángulo $A'B'C'D'$: lo cual prueba que D' cae sobre el círculo $A'B'C'$. Siendo AD el diámetro esférico del círculo ABC, en cuyo plano está S, será $A'B'$ un diámetro esférico del círculo $A'B'C'$; puesto que el ángulo formado por $A'B'$ con el círculo $A'B'C'$ es igual al ángulo formado por AB con el círculo ABC; y como éste es recto, aquel lo será tambien.

67. Un haz de esferas que tienen un círculo comun, es cortado por un cono, sobre el cual está dicho círculo comun, en círculos paralelos que son tambien proyecciones estereográficas del expresado círculo comun desde el centro del cono (*).

Demostracion. Las esferas del haz tienen comun con el cono, cuyo centro es S, el círculo ABC; y son cortadas por aquel cono en las figuras esféricas $A'B'C'$, $A''B''C''$, ... que son isogonales y homocíclicas con ABC; y, por lo tanto, círculos. Por otra parte, sobre el plano ABS caen los círculos $ABB'A'$, $ABB''A''$, ... ABS, y la tangente al último ST; los ángulos $2AA'B'$, $2AA''B''$ ... $2AST$ son iguales (*Planim.* 27); y, por lo tanto, las rectas $A'B'$, $A''B''$, ... ST, paralelas, etc. Luego los planos $A'B'C'$, $A''B''C''$,... son paralelos al plano tangente en S á la esfera $ABCS$; y, de consiguiente, los círculos $A'B'C'$,



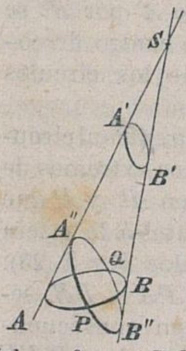
(*) Véase la nota del autor en el *J. de Borchardt*, *A*. 54, *p*. 165. En general, dos superficies de segundo órden tienen comun una línea no plana de cuarto órden, que, en casos particulares, se reduce á dos líneas (planas) de segundo órden; y en el caso presente, á dos círculos. Chasles 1815 (*Corresp. sur l'Éc. polyt.* 3, *p.* 13), y Poncelet (*Prop. proj.*, 600.)

$A''B''C''\ldots$, son proyecciones estereográficas del círculo ABC desde el centro S (56).

Dos círculos, como ABC y $A'B'C'$, se llaman *secciones alternas* del cono (55). En el cono de revolucion estas secciones son paralelas.

68. Dos círculos, no paralelos, situados sobre un cono (y esto quiere decir que están en perspectiva), lo están tambien sobre una esfera.

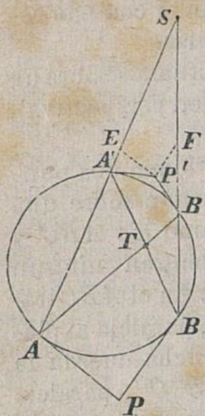
Demostracion. Si los círculos tienen dos puntos comunes, sabemos ya (28) que están sobre una esfera. Sean, pues, dos círculos, como los ABC y



$A'B'C'$, que no tengan ningun punto real, comun. En el ABC trácese la cuerda PQ, paralela al plano $A'B'C'$; y por dicha cuerda la seccion cónica $A''B''C''$, paralela con $A'B'C'$, que será como ésta un círculo. Los círculos ABC y $A''B''C''$, que tienen los puntos comunes, P y Q, caen sobre una esfera. El cono dado contiene el círculo ABC, y corta por segunda vez á la esfera $ABCA''$ en el círculo $A''B''C''$, y á la esfera $ABCA'$, en un círculo, paralelo al $A''B''C''$ (67), que, por lo tanto, coincide con el $A'B'C'$.

69. Dos círculos sobre una esfera están en perspectiva de dos modos. Sus centros de colineacion, tanto caen sobre el plano del círculo máximo que pasa por los centros esféricos de los dos círculos, como sobre la recta que une los vértices de los conos tangentes á la esfera en las circunferencias de los círculos dados.

Demostracion. Supongamos que el círculo máximo que pasa por los centros esféricos de los círculos k y k', corte al primero en los puntos A y B, y al segundo en los puntos A' y B'; y que las rectas AA' y BB' se corten en el punto S. El cono, que desde S proyecta el círculo k sobre la esfera, corta á esta misma en un círculo, del cual es un diámetro esférico el arco de círculo máximo $A'B'$ (66), y que coincide, por lo tanto, con el círculo k'. Cambiando A' por B' se halla el segundo centro de colineacion, T, de los círculos dados.



Las rectas, tangentes al círculo máximo en los extremos de las cuerdas $A'B'$ y AB, se cortan en P' y P que son los centros de los conos tangentes á la esfera en las circunferencias de los círculos k' y k (25). Trazando $P'E$ y $P'F$ paralelas con PA y PB, serán $P'E = P'A'$, $P'F = P'B'$; y, en consecuencia, $P'E = P'F$. Luego los triángulos $P'EF$ y PAB son semejantes y en perspectiva; y ésto prueba que la recta PP' pasa por S.

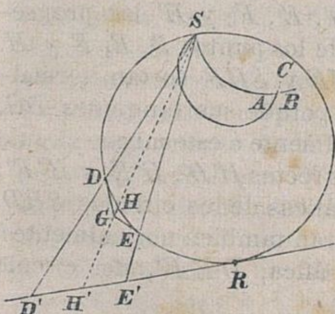
La recta ST es la polar del punto comun de las rectas $A'B'$ y AB, respecto del círculo $ABB'A'$ (62).

Observacion. Tres círculos sobre una esfera pueden considerarse de 4 modos como 3 pares de figuras en perspectiva. Sus centros de colineacion S_{12}, S_{13}, S_{23}, T_{12}, T_{13}, T_{23}, caen sobre un plano, y cada 3 sobre una recta 4 veces; porque los ejes de colineacion tienen un punto comun que es tambien el punto comun de los tres planos de los círculos (63 y 64).

Los círculos sobre una esfera, cuyos planos tengan una recta comun, constituyen un haz esférico. Los centros esféricos de sus círculos ortogonales caen sobre el círculo principal del haz (*). Desde un punto P de la recta comun g, situado fuera de la esfera, pueden trazarse tangentes iguales á los círculos del haz; puesto que estos círculos están sobre una esfera. Y la proyeccion del punto P sobre la esfera, desde el centro de esta misma, es el centro esférico de un círculo determinado que corta normalmente á los círculos que forman el haz.

70. Una figura esférica y una proyeccion estereográfica de la misma, son isogonales y homocíclicas. La recta proyectante del centro del cono tangente á la esfera en la periferia de un círculo pasa por el centro de la proyeccion estereográfica de este círculo (**).

Demostracion. Dos curvas esféricas, Au y Av, con un punto comun A, son proyectadas desde el punto S de la esfera, mediante conos, sobre un plano, paralelo al plano tangente á la esfera en S: sobre el plano, por ejemplo, tangente á la esfera en R que es el



(*) Steiner (*J. de Crelle* 1, *p.* 182). Miquel (*l. c.*, *p.* 73).

(**) *Planimetría* (124). El centro de la proyeccion estereográpunto opuesto de S. Los planos tangentes á los conos proyectantes en su arista comun, SA, contienen rectas tangentes, tanto á las curvas esféricas proyectadas Au y Av, como á sus proyecciones $A'u'$ y $A'v'$; cortan á la esfera en los círculos SAB y SAC, situados en los planos tangentes á los conos proyectantes, y que por lo mismo tocan en A á las curvas esféricas; y cortan al plano tangente á la esfera en S, paralelo al de proyeccion, en las rectas Su'' y Sv'' que son tangentes á los círculos SAB y SAC, y paralelas á las rectas $A'u'$ y $A'v'$. El ángulo de las curvas esféricas dadas, ó el de los círculos que las tocan, es igual (65) al formado en S por estos mismos círculos; é igual, por consecuencia, al formado por las tangentes Su'' y Sv'', ó por las tangentes $A'u'$ y $A'v'$: siendo este último ángulo la proyeccion estereográfica del primero.

Designemos ahora por G el centro ó vértice del cono que toca á la esfera en el círculo DEF; por H la proyeccion sobre la esfera de aquel vértice G desde el punto S; por D', E', F' y H' las proyecciones estereográficas de los puntos D, E, F y H. Los círculos SHD, SHE y SHF cortan normalmente al círculo DEF; porque sus tangentes DG, EG y FG cortan normalmente á este mismo círculo DEF. Y de resultas, las rectas $H'D'$, $H'E'$ y $H'F'$, proyecciones estereográficas de los círculos SHD, SHE y SHF, encontrarán tambien normalmente á la proyeccion estereográfica, $D'E'F'$, del círculo

---

fica de un círculo fué determinado por Chasles del modo expresado. (1817 *Ap. hist.*). El fundamento sencillo de esta teoría ya dijimos (65) que pertenece á Dandelin.

DEF. De donde se colige que la curva $D'E'F'$ es un círculo cuyo centro es H'. Tambien puede demostrarse, como ántes (69), que $H'D' : H'E' = GD : GE$, etc.

Observacion. La proyeccion estereográfica de un haz esférico de círculos (69–*Obs.*) es un haz plano de círculos.

71. Una figura esférica, y su proyeccion, no semejante, sobre otra esfera, desde un punto de semejanza de las dos esferas, son isogonales y homocíclicas. Los centros de los conos que tocan á las esferas en círculos correspondientes caen juntamente con el centro de proyeccion sobre una recta (*).

Demostracion. Sea f una figura de la primera esfera; f' su proyeccion no semejante; y f'' su proyeccion semejante sobre la segunda esfera, desde un punto de semejanza de las dos esferas. Entónces, las figuras f' y f'' son isogonales y homocíclicas (65 y 66); las figuras f'' y f lo son tambien, por ser semejantes; luego f' y f son isogonales y homocíclicas. Designemos por P, P' y P'' los vértices de los conos tangentes á las esferas en un círculo de f y en los círculos correspondientes de f' y f''; la recta proyectante de P'' pasará por P' (69), y la proyectante de P por P'', á causa de la semejanza de f'' y f; y, por lo tanto, P' estará sobre la recta proyectante de P.

Representando por M y M' los centros de las dos esferas; por r y r', sus rádios; y por S, su punto de semejanza externo; se verificará la proporcion

(*) Miquel (*l. c.*, *p.* 72).

$SM : r = SM' : r'$; pero, si el centro M' de la segunda esfera se aleja hasta el infinito, será $SM : r = 1$; convirtiéndose la esfera en un plano que corta normalmente á SM; y la proyeccion, en estereográfica.

VI.—Tetraedro y paralelepípedo.

72. Una superficie, cerrada por polígonos planos, se llama *poliedro;* y el espacio incluido en ella, *cuerpo* (geométrico). Los polígonos circundantes se llaman *caras* (εδρας, *faces)* del poliedro; y cada lado de un polígono, que es tambien lado de otro polígono contiguo, *arista* ó *canto* (14). Toda arista del poliedro es arista tambien de un *ángulo diédrico* del mismo. Todo ángulo de un polígono lateral tiene el vértice comun con un ángulo de otros dos ó más polígonos; y estos ángulos, con el vértice comun, forman un *ángulo sólido* (triédrico, tetraédrico... poliédrico) del poliedro (51). Admítese generalmente que cada dos vértices del poliedro, que no sean extremos de una arista, están unidos por una línea compuesta de aristas; y que, saltando por cima de la arista comun para pasar de una cara á otra contigua, podremos llegar sucesivamente á todas ellas (89). En la determinacion de un poliedro se toman en cuenta el número y la especie, tanto de sus caras, como de sus ángulos poliédricos.

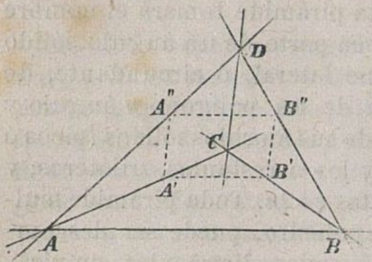
Los planos trazados por el centro de una esfera, cuyo rádio es la unidad de longitud, paralelamente á las caras de un poliedro, cortan á la esfera en un sistema de círculos máximos, en el cual están representados: los ángulos de las aristas, por las distancias esféricas entre los puntos de interseccion de los círculos máximos; los ángulos diédricos del poliedro, por los ángulos de los círculos máximos; los ángulos poliédricos, por sus secciones esféricas (52).

73. El cuerpo que resulta cortado por un plano de un ángulo sólido, poliédrico ó multilátero se llama *pirámide;* y esta pirámide tomará el nombre de *n-látera*, cuando sea parte de un ángulo sólido *n-látero*. La superficie lateral, ó circundante, de esta pirámide, consta de un polígono n ángulo y de n triángulos; uno de sus ángulos sólidos (picos ó vértices) es n látero; y los n restantes, triláteros; y el número de sus aristas es $2n$. Toda pirámide multilátera, como todo poliedro, puede ser descompuesta, mediante triángulos diagonales, en pirámides triláteras. Un cono (limitado ó cerrado por un plano) puede considerarse como una pirámide de un número infinito de caras.

La capa ó trozo de un prisma (en sentido lato) comprendido entre dos planos paralelos, se denomina *prisma* (en sentido restringido); y este prisma, *n-látero*, cuando sea parte de un prisma *n-látero* (54). La superficie lateral ó circundante del prisma *n-látero* se compone de dos n-gonos congruentes y n paralelógramos; cada dos de sus $2n$ ángulos sólidos completan un diedro; y de sus $3n$ aristas son $2n$, por pares, iguales y paralelas; y las n restantes, todas iguales y paralelas. Todo prisma multilátero puede ser descompuesto, mediante paralelógramos diagonales, en prismas triláteros. Prisma y cilindro toman el nombre de *rectos* cuando son limitados por secciones normales.

74. Cuatro planos, que no tienen un punto co-

mun, distribuyen el espacio en 15 espacios ó regiones; en virtud de que de los 8 ángulos sólidos, formados por 3 de los planos dados (53), uno solo no es dividido por el cuarto plano, siéndolo los 7 restantes. Uno de estos 15 espacios, $ABCD$, está completamente cerrado y se llama *tetraedro:* el cual puede considerarse de cuatro modos como una pirámide trilátera. Entre las aristas del tetraedro pueden elegirse 2 por 3 veces, ó tres pares de ellas, que no están en el mismo plano: tales como AB y CD, BC y AD, CA y BD; y las aristas que constituyen cada uno de estos pares se llaman *opuestas* (*). Cuatro de los otros espacios (A), (B), (C) y (D) son triedros, ó ángulos triédricos, opuestos por el vértice á los del tetraedro. Otros cuatro espacios (ABC), (BCD), (CAD) y (ABD) se apoyan por fuera sobre las caras del tetraedro y unidos á éste completan los ángulos sólidos ó triedros del mismo. Los seis espacios restantes, (AB) y (CD), (BC) y AD), (CA) y (BD), se apoyan exteriormente sobre las aristas del tetraedro y son opuestos á los diedros de éste.



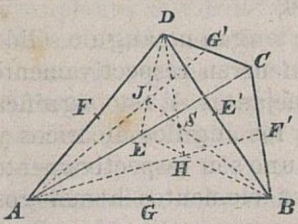
Un plano, paralelo á dos aristas opuestas, AB y CD, del tetraedro, corta á éste en un paralelógramo $A'B'B''A''$; puesto que $A'B'$ y $A''B''$ son para-

(*) Monge (*Corresp. sur l'Éc. polyt.* I, p. 440).

lelas á la arista AB, y $A'A''$ y $B'B''$ son paralelas á la arista CD (57–*Obs.*).

Entre los ángulos de las aristas, los diedros y los triedros de un tetraedro, existe la misma dependencia (72) que entre los lados, los ángulos y las áreas de una figura esférica formada por cuatro círculos máximos *(cuadrilátero esférico completo)*.

75. Los planos que pasan por cada una de las aristas del tetraedro y los puntos medios de las aristas opuestas respectivamente; las rectas que unen los puntos medios de las aristas opuestas; y las rectas *(medianas)* que unen cada uno de los vértices del tetraedro con los centros de gravedad de las caras respectivamente opuestas; pasan por un mismo punto, que es el *punto ó centro de gravedad* del tetraedro (*). En efecto, sean E y E' los puntos medios de las aristas opuestas AC y BD; F y F', los puntos medios de BC y AD; G y G', los puntos medios de AB y CD. Entónces los cuadrángulos $EFE'F'$, $FGF'G'$ y $GEG'E'$ son paralelógramos concéntricos, que toman el nombre de *secciones medias* del tetraedro *(Planim.* 63). Ahora bien, los planos ACE' y BDE se cortan en la recta EE', etc.



(*) Commandino *(De centro gravitatis* 1565, *Prop.* 17, 22). De los libros de Arquímedes sobre los Cuerpos flotantes se colige, como el mismo Commandino observa, que Arquímedes determinó tambien los centros de gravedad de los cuerpos ménos simples.

El punto comun S de los segmentos EE', FF' y GG' cae sobre cada uno de los planos ABG', CDG,... Las rectas DS y BS pasan por los puntos de gravedad, H y J, de los triángulos ABC y ACD; por ser AF' y BE' medianas del triángulo ABC, etc. (*Planim.* 64).

Además es HJ paralela á BD, y $HJ : BD = 1 : 3$; porque $EH : EB = EJ : ED = 1 : 3$; y, de consiguiente, $HS : SD = 1 : 3$. De esta última proporcion se deduce que el centro de gravedad del tetraedro divide á las rectas que unen los vértices del tetraedro con los centros de gravedad de las caras respectivamente opuestas en segmentos cuya razon es 3. Los centros de gravedad (baricentros) de las caras de un tetraedro son los vértices de un tetraedro semejante que está en perspectiva con el primero (88, y *Planim.* 100).

76. Dos tetraedros, que tengan un ángulo sólido y las aristas que en él concurren respectivamente iguales, son iguales y semejantes. Y esto significa que las caras, las aristas, los ángulos diédricos y los ángulos triédricos del uno son respectivamente iguales y semejantes á los elementos homólogos del otro; y que sus volúmenes son iguales. Pero sólo serán congruentes los tetraedros, cuando dos de sus ángulos sólidos, iguales y semejantes, lo sean; de suerte que, en el caso contrario, la igualdad de los volúmenes de los tetraedros, entónces incongruentes, se demostrará descomponiéndolos en tetraedros congruentes (*). Si M y M' represen-

(*) LEGENDRE (*Géom. Note* 7, 2.ª *ed.*) dedujo esta demostracion de la misma fuente que la relativa á la equivalencia de los triángulos esféricos opuestos (35).

tan los centros de las esferas $ABCD$ y $A'B'C'D'$ (28), y N y N' los centros de los círculos ABC y $A'B'C'$, los tetraedros iguales y semejantes, $ABCD$ y $A'B'C'D'$, pueden ser descompuestos cada uno de cuatro modos en tres tetraedros, $ABNM$, $BCNM$, $CANM$... y $A'B'N'M'$,... que son congruentes; porque los ángulos sólidos N y N',... son congruentes.

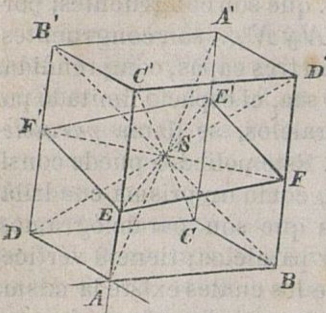
77. El espacio comun á tres capas, comprendidas entre planos paralelos, ó sea, el espacio limitado por tres pares de planos paralelos, se llama *paralelepípedo* (παραλληλ-επὶπεδον). Este poliedro puede considerarse de tres maneras, como un prisma cuadrilátero; consta de 6 caras que son paralelógramos, dos á dos congruentes y paralelos; tiene 8 vértices triláteros (triedros) entre los cuales existe la misma dependencia que entre los triedros formados por tres planos al rededor de un punto (53); y comprende 12 aristas, cuatro á cuatro iguales y paralelas.

Si un vértice (triedro) del paralelepípedo está formado por tres ángulos rectos, todos los ángulos sólidos (vértices) del paralelepípedo serán congruentes, y el paralelepípedo *rectangular*. Si un ángulo sólido del paralelepípedo tiene sus tres aristas iguales, todas las aristas del paralelepípedo serán iguales, y el paralelepípedo, *rómbico* (*); y, si ambas condiciones se realizan, el paralelepípedo tomará el nombre de *cubo* (κύβος, *cubus*); que, por ser congruentes sus ángulos sólidos y sus caras *(cuadrados)*, será un *exaedro regular*.

En el paralelepípedo existen tres pares de para-

(*) Un paralelepípedo se llama *romboedro* cuando sus caras son rombos congruentes (93).

lelógramos diagonales, $ABA'B'$ y $CDC'D'$, ...; y cuatro rectas diagonales, AA', BB', CC', y DD', que se cortan en el *centro del paralelepípedo;* porque AA' es bisecada por BB' en el paralelógramo $ABA'B'$. Todo plano, como el $EFE'F'$, que pasa por el centro S del paralelepído, divide á éste en dos poliedros iguales y semejantes, pero incongruentes. Puesto que los tetraedros $SEFA$ y $SE'F'A'$ son iguales y semejantes, pero incongruentes como los ángulos sólidos en el centro (76); etc.

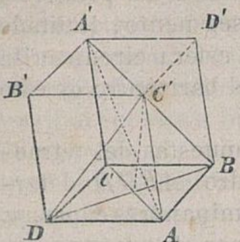


78. En el paralelepípedo existen cuatro pares de triángulos diagonales, paralelos y congruentes, que cortan de los ángulos sólidos (triedros) opuestos tetraedros iguales y semejantes, pero incongruentes. Dos triángulos diagonales, paralelos y congruentes, son cortados por una diagonal en sus centros de gravedad, y dividen á esta diagonal en tres partes iguales. Así, por ejemplo, la diagonal AA' y una mediana del triángulo $BC'D$ se cortan segun la razon 1: 2 *(Planim.* 62).

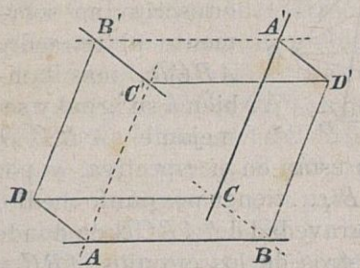
Los triángulos diagonales, no paralelos, limitan dos tetraedros, $BDA'C'$ y $B'D'AC$, inscritos en el paralelepípedo, de tal modo que cada dos de sus aristas opuestas caen sobre las caras paralelas del mismo (*). Aquellos tetraedros se hallan en pers-

(*) Monge *(Corresp. sur l'Éc. poliyt. II, p.* 266).

pectiva y son iguales y semejantes (no congruentes); porque los segmentos BB', DD', $A'A$ y $C'C$ tienen por punto medio comun el centro del paralelepípedo (76). Y sus centros de gravedad coinciden en el centro del paralelepípedo; porque la diagonal AA' pasa por el centro de gravedad de la cara BDC'; et cætera (75).



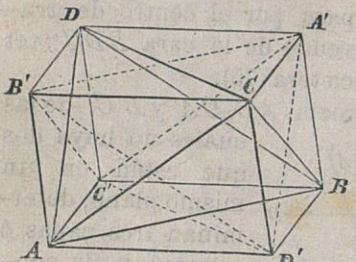
OBSERVACION. Tres rectas AB, CA' y $B'C'$, de las cuales no haya dos que estén en un mismo plano, determinan tres capas ó estratos, y, de consiguiente, un paralelepípedo que tiene por aristas no contiguas las rectas dadas. Cada una de las aristas $A'B'$, $C'A$ y BC, respectivamente paralelas á aquellas rectas, tienen un punto comun con cada una de las mismas, á saber: $A'B'$, por ejemplo, tiene comun con AB el punto infinitamente distante; con CA', el punto A'; y con $B'C'$ el punto B', etc. De lo cual se desprende que las rectas $A'B'$, $C'A$ y BC se hallan sobre el hiperboloide reglado (8), determinado por las rectas dadas AB, CA' y $B'C'$, que es concéntrico con el paralelepípedo (*).



(*) HACHETE (J. de Crelle 1, p. 345).

79. Los planos, que pasan por los puntos medios de las aristas de un tetraedro y son normales á las aristas respectivamente opuestas á las primeras, tienen un punto comun. El segmento, limitado por este punto y el centro de la esfera circunscrita al tetraedro, es bisecado por el baricentro de este mismo tetraedro (*).

DEMOSTRACION. Las aristas opuestas del tetraedro $ABCD$ determinan tres capas, y, por lo tanto, un paralelepípedo, circunscrito no solamente al tetraedro $ABCD$, mas tambien á su igual y semejante $A'B'C'D'$



(78). Estos tetraedros están en perspectiva, y por ésto las rectas AA', BB', ... tienen por punto medio, comun, el centro de gravedad del $ABCD$: de donde se deduce que los centros de los círculos ABC y $A'B'C'$ particularmente, y los de las esferas $ABCD$ y $A'B'C'D'$, se hallan en tal situacion que los segmentos entre ellos comprendidos son divididos por mitad por el baricentro del tetraedro expresado. El plano, que biseca la arista AB y es normal á su opuesta CD, biseca normalmente la arista $C'D'$, etc. Los planos, que bisecan normalmente las aristas del tetraedro $A'B'C'D'$, pasan por el centro de la esfera $A'B'C'D'$ (28); y, de consiguiente, cada plano, que biseque una arista del tetraedro $ABCD$,

(*) MONGE (*Corresp. sur l'Éc. polyt. II*, p. 266).

la AB, por ejemplo, y sea normal á su opuesta CD pasará por el centro de la esfera $A'B'C'D'$.

80. Las *alturas* de un tetraedro $ABCD$, ó sean las normales desde sus vértices A, B, ... á sus caras respectivamente opuestas CBD, ACD, ..., no pasan generalmente por un mismo punto; sino que se hallan sobre un hiperboloide reglado, determinado por tres de las mismas (8). Sobre el mismo hiperboloide caen las normales á las caras del tetraedro trazadas por sus puntos de alturas respectivos; y el centro de este hiperboloide es el punto comun de los planos (79) que pasan por los puntos medios de las aristas del tetraedro y son normales á las aristas respectivamente opuestas (*).

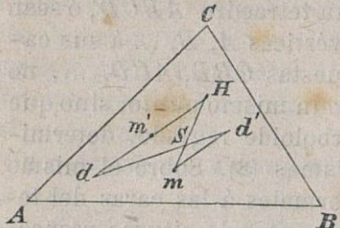
Si H es el punto de alturas del triángulo ABC, las rectas AH, BH y CH son las proyecciones normales sobre el plano ABC de las alturas del tetraedro que pasan por A, B y C; porque el plano proyectante de la altura que pasa por A es normal á los planos BCD y ABC, y, de consiguiente, á la recta BC, etc. La normal en H al plano ABC corta tambien á las alturas del tetraedro que pasan por A, B y C, y tiene comun con la altura que pasa por D el punto infinitamente distante. Etc.

El centro del hiperboloide cae sobre la bisectriz de la faja cuyos lados pertenecen á las rectas del hiperboloide (78-*Obs.*). Ahora bien, si d representa

---

(*) Steiner (*J. de Crelle* 2, *p.* 27 *y Sist. Entw. p.* 316). Hermes (*J. de Borchardt* 56, *p.* 241). La propiedad de las normales á las caras por sus puntos de alturas y la posicion del centro del hiperboloide fueron consideradas por Joachimsthal (*Arch. de Grunert* 32, *p.* 109).

la proyeccion normal de D sobre el plano ABC, y m' el punto medio de dH, será m' la proyeccion normal del centro del hiperboloide; y, si además S representa el punto de gravedad del triángulo ABC, y m el centro del círculo ABC y la proyeccion normal sobre el plano ABC del centro de la esfera $ABCD$, el punto S dividirá la recta Hm segun la razon 2 (*Planim.* 100).

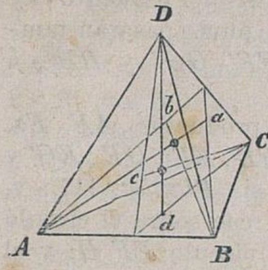


Tomando en cuenta el tetraedro $A'B'C'D'$, que está inscrito con el $ABCD$ en el mismo paralelepípedo (78), S dividide al segmento DD' segun la razon 2; y, en el supuesto de que represente d' la proyeccion normal de D' sobre el plano ABC, tambien $dS : Sd' = 2$. Luego md' y dm' son paralelas é iguales; mm' es bisecada por dd'; y, por consecuencia, m' es la proyeccion normal del centro de la esfera $A'B'C'D'$ (79). Las mismas consideraciones pueden hacerse respecto de todas las caras del tetraedro $ABCD$; de lo cual se desprende que el hiperboloide es concéntrico con la esfera $A'B'C'D'$.

81. Si una arista de un tetraedro forma ángulo recto con la opuesta, las alturas del mismo que pasan por los extremos de aquella arista caen sobre un plano; y recíprocamente. Si dos aristas contiguas de un tetraedro forman ángulos rectos con sus respectivamente opuestas, las alturas del mismo tendrán un punto comun; y recíprocamente (*).

(*) Este tetraedro se halla en L' Huilier (*De relatione mutua*

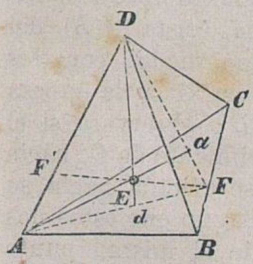
DEMOSTRACION. Sean *Aa*, *Bb*, *Cc* y *Dd* las alturas del tetraedro *ABCD;* si es la arista *CD* normal á la *AB*, el plano *CDd* será normal tambien á la arista *AB*, y, por lo tanto, al plano *ABD*, y contendrá la altura *Cc*. Lo mismo se prueba que el plano *ABb* contiene la altura *Aa*. El plano de las alturas *Aa* y *Bb* es normal á *CD;* el de las alturas *Cc* y *Dd* es normal á *Ab;* y, por consecuencia, estos planos son normales entre sí.



Si las alturas *Cc* y *Dd* caen sobre un plano, este plano será normal á los planos *ABD* y *ABC*, y á su interseccion *AB;* y tambien, por lo tanto, será *CD* normal á *AB*.

Si *AB* es normal á *CD*, y *BC* normal á *AD*, cada dos alturas caen sobre un plano, teniendo entónces todas un punto comun *E* (3): luego la arista *CA* será normal á la *BD* (46 y 53).

OBSERVACION. Los planos *ADE*, *BDE* y *CDE* cortan á las rectas *BC*, *CA* y *AB* en los puntos *F*, *G* y *H* respectivamente; de modo que *E* es el punto de alturas comun de los triángulos *ADF*, *BDG* y *CDH*. Las rectas *FE*, *GE* y *HE* cortan nor-



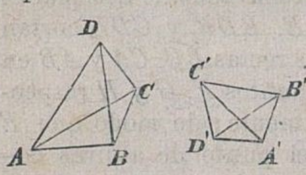
---

página 151). Véanse: FERRIOT *(Ann. de Gerg.* 2, *p.* 133); FEUERBACH *(die dreieckige Pyramide,* 40 *y sig.)*; y C. F. A. JACOBI *(van Swinden p.* 453 *y sig.)*.

malmente á las rectas AD, BD y CD en los puntos F', G' y H'. Luego, si las alturas del tetraedro tienen un punto comun, por este punto pasarán tambien las normales comunes, FF', GG' y HH', á las aristas opuestas.

Al mismo tiempo los productos $AE \, . \, Ea$, $BE \, . \, Eb$, $CE \, . \, Ec$, $DE \, . \, Ed$, $FE \, . \, EF'$, $GE \, . \, EG'$ y $HE \, . \, EH'$ son iguales entre sí (*Planim.* 117); y, por consecuencia, el punto G' cae sobre el círculo $FF'G$; el punto H' sobre el círculo $FF'H$; y el uno y el otro, G' y H', sobre la esfera $FF'GH$. Tambien b y c caen sobre la esfera $ABCa$; etc. El punto E tiene iguales potencias respecto de las cinco esferas $ABCa$, $BCDb$, $CADc$, $ABDa$ y $FGHF'$.

82. Para cotejar respecto de su *sentido*, dos tetraedros, $ABCD$ y $A'B'C'D'$, dados por sus vértices en un órden determinado, se imagina el lector colocado primeramente en la arista AB, con los piés en A y la cabeza en B, y observa entónces si el moviento de C hácia D se verifica hácia su izquierda ó hácia su derecha. Colocándose despues



en la arista $A'B'$ del mismo modo, con los piés en A' y la cabeza en B', observará si el movimiento de C' hácia D' se efectúa hácia su izquierda ó hácia su derecha. Segun que estos dos movimientos, observados desde el mismo punto de vista, coincidan, ó no, respecto de su sentido, así los tetraedros serán del mismo sentido, ó de sentidos opuestos. En el primer caso, el movimiento efectuado desde B por C hasta D en el contorno BCD aparece del mismo sentido que el efectuado sobre el contorno $B'C'D'$, desde B' por C' hasta D'; en el segundo, estos movimientos para los mismos puntos de vista se muestran con sentidos opuestos.

Colígese de lo dicho que los tetraedros $ABCD$ y $ABCE$ serán del mismo, ó de opuestos sentidos, segun que los vértices D y E caigan, ó no, al mismo lado del plano ABC. En el primer caso, será dividido ó cortado el segmento DE exteriormente por el plano ABC; y en el segundo, interiormente.

Si las notaciones $ABCD$ y $A'B'C'D'$ designan tetraedros del mismo sentido, por el modo de comparacion ántes explicado reconoceremos que los representados por las notaciones $ABDC$ y $A'B'C'D'$, $ACBD$ y $A'B'C'D'$, $BACD$ y $A'B'C'D'$ son tetraedros de sentidos opuestos. Y esto enseña que por el cambio mútuo de dos vértices en la expresion ó notacion del tetraedro siempre varía el sentido del mismo (*).

83. Cuando á cada punto de una figura de bulto (sólida) corresponde un punto de otra figura del mismo género, de tal modo que los tetraedros $ABCD$, $ABCE$, ..., constituidos por tres puntos de la primera figura con cada uno de los restantes, sean iguales y semejantes respectivamente á los tetraedros correspondientes $A'B'C'D'$, $A'B'C'E'$, ... de la segunda figura; y que los tetraedros siguientes $ABCE$, ... sean del mismo sentido, ó de sentido opuesto al del primero $ABCD$, conforme los te-

(*) Möbius *(baryc. Calcul.* 19 y *Statik* 63).

traedros $A'B'C'E'$, ... sean del mismo sentido, ó de sentido opuesto al del $A'B'C'D'$, se dice que las figuras expresadas $ABCDE$ ... y $A'B'C'D'E'$ ... son *iguales y semejantes*. Y esta denominacion significa que todos los demas tetraedros de la una son iguales y semejantes á los correspondientes de la otra. Las figuras sólidas tendrán el mismo sentido, ó sentido opuesto, siempre que un par de sus tetraedros correspondientes tengan el mismo sentido, ó sentidos opuestos (*).

DEMOSTRACION. De la igualdad y semejanza de los tetraedros $ABCD$, $ABCE$, ... con sus correspondientes, se concluye que los tetraedros $ABDE$, $ACDE$, ... son tambien iguales y semejantes á sus correspondientes. De la igualdad y semejanza de los tetraedros $BACD$, $BACE$, ... se deduce asimismo que los tetraedros $BADE$, $BCDE$, ... son iguales y semejantes á sus correspondientes, etc.

84. Para dos triángulos, iguales y semejantes, ABC y $A'B'C'$ situados en planos diferentes, no paralelos, ó de distinta postura, existe un eje s, con la propiedad de que los diedros AsA', BsB' y CsC', y las proyecciones normales sobre él de los segmentos AA', BB' y CC' son iguales entre sí (**).

DEMOSTRACION. Desde el centro O de una esfera cualquiera trácense los rádios $O\beta$, $O\gamma$, $O\beta'$ y $O\gamma'$ en las direcciones AB, AC, $A'B'$ y $A'C'$; y constrúyase sobre la esfera el punto σ de modo que los triángulos esféricos $\sigma\beta\gamma$ y $\sigma\beta'\gamma'$ sean congruentes (49). Trazando ahora las rectas AD y $A'D'$ en

(*) Véase la *Planimetría* (54); y la *Memoria* allí citada (34).

(**) Véase el párrafo 35 de la citada *Memoria* del autor.

la direccion del rádio $O\sigma$, los ángulos sólidos $\overline{A}BCD$ y $\overline{A'}B'C'D'$, formados en los vértices, A y A', serán congruentes.

Además trácense por A y A' los planos normales á AD y $A'D'$; sobre ellos, las proyecciones normales, EF y $E'F'$, de BC y $B'C'$; y sobre el plano AEF, la proyeccion normal, $A''E''F''$, de $A'E'F'$. Entónces los triángulos AEF, $A'E'F'$ y $A''E''F''$ serán iguales y semejantes, y del mismo sentido; por ser los triángulos AEB y $A'E'B'$, AFC y $A'F'C'$, $A'E'F'$ y $A''E''F''$, iguales y semejantes; y los ángulos EAF y $E'A'F'$, secciones normales de los diedros iguales $B\overline{AD}C$ y $B'\overline{A'D'}C'$.

Construyendo, finalmente, el punto S en el plano AEF en tal situacion que las figuras $SAEF$ y $SA''E''F''$ sean congruentes *(Planim.* 55); y sobre el plano $A'E'F'$ la proyeccion normal, S', del punto S, será SS' el eje buscado s. En efecto, los ángulos sólidos, correspondientes, con los vértices A y A', son congruentes; las aristas correspondientes de los mismos son iguales; y, por lo tanto, las figuras sólidas $AEFBC$ y $A'E'F'B'C'$ congruentes. Pero tambien lo son las figuras $AEFS$ y $A'E'F'S'$, y consiguientemente las figuras sólidas $AEFBCS$ y $A'E'F'B'C'S'$; por lo cual, los ángulos ASE y $A'S'E'$, ASF y $A'S'F'$, ESF y $E'S'F'$ serán iguales. Luego los ángulos diédricos $A\overline{SS'}A'$, $B\overline{SS'}B'$ y $C\overline{SS'}C'$ son iguales. Y, si designamos por T y T' los puntos de interseccion con la recta SS' de las normales á la misma desde B y B', será $ST = S'T'$; y, por lo tanto, $TT' = SS'$, etc.

85. Para dos figuras sólidas, iguales y semejan-

tes y del mismo sentido, $ABCD$... y $A'B'C'D'$... existe un eje s, con la propiedad (*) de que, tanto los diedros AsA', BsB', ... como las proyecciones normales sobre el mismo eje de los segmentos AA', BB', ..., son iguales entre sí (84).

Cuando la primera figura, volteando alrededor del eje s, recorra el ángulo AsA' y llegue así á colocarse en perspectiva con la otra figura, las rectas AA', BB', ... coincidirán en direccion y longitud; por coincidir tambien las proyecciones normales de ambas figuras sobre un plano normal al eje s. Mas, si la primera figura, marchando en la direccion del eje s, recorre el segmento AA', llegará á confundirse con la otra.

Cuando la primera figura marche en la direccion del eje s hasta que las proyecciones normales de AA', BB', ... sobre el mismo eje se anulen; y, volteando despues en torno de s, recorra el ángulo $AsA' + 180°$, llegará á colocarse respecto de la segunda figura en tal situacion, que todo plano que pase por el eje contendrá figuras planas iguales y semejantes, correspondientes á las dos figuras sólidas, y situadas simétricamente respecto del eje expresado.

86. Para dos triángulos iguales y semejantes, ABC y $A'B'C'$, de posturas diferentes, ó situados en planos no paralelos, existe un diámetro n, con la

---

(*) El eje s fué descubierto por Euler en su estudio del movimiento de un cuerpo rígido. (*Theoria motus corp. solid.* 978–(1765) y *Nov. Comm. Petrop* 20, *p.* 199–(1776). El *eje instantáneo de rotacion* (*axe instantane*) de un cuerpo en movimiento fué considerado por D' Alembert (*Précession des équinoxes* 1749, *página* 83). Véase Euler (*Mém. de Berlin* 1750, *p.* 185).

propiedad de que los diedros AnA', BnB' y CnC' son iguales entre sí, y las proyecciones normales sobre el mismo diámetro n de los segmentos AA', BB' y CC' tienen un punto medio comun S (*).

Demostracion. Desde el centro O de una esfera arbitraria trácense los rádios $O\beta$, $O\gamma$, $O\beta'$, $O\gamma'$ en las direcciones AB, AC, $A'B'$ y $A'C'$ respectivamente; y los puntos opuestos, ν y ν', sobre la esfera, de modo que los triángulos esféricos $\nu\beta\gamma$ y $\nu'\beta'\gamma'$ sean igualmente opuestos y semejantes (50). Trazando las rectas AH y $A'H'$ en las direcciones de los rádios $O\nu$ y $O\nu'$, los ángulos sólidos $ABCH$ y $A'B'C'H'$, formados en los vértices A y A', serán igualmente opuestos y semejantes. Y, si la recta $A'H''$ tiene la direccion de $O\nu$, los diedros $BAHC$ y $B'A'H''C'$ serán iguales entre sí.

Por el medio de AA' trácese el plano normal á la recta AH, y en él las proyecciones normales JKL y $J'K'L'$, de los triángulos ABC y $A'B'C'$. Los triángulos JKL y $J'K'L'$, que están en los diedros iguales $BAHC$ y $B'A'H''C'$, son iguales y semejantes y del mismo sentido. Construyendo, por último, sobre el plano JKL el punto S, de modo que las figuras $SJKL$ y $SJ'K'L'$ sean congruentes (*Planim.* 56), la recta trazada por dicho punto S, en la direccion AH, será el diámetro buscado n. En efecto, las figuras sólidas $SJKLABC$ y $SJ'K'L'A'B'C'$ son iguales y semejantes y de sentidos opuestos; etc.

87. Para dos figuras sólidas, iguales y semejantes y de sentidos opuestos, $ABCD\ldots$ y $A'B'C'D'\ldots$,

---

(*) Véase el párrafo 37 de la *Memoria* del autor ya citada.

existe un diámetro n, con la propiedad de que los diedros AnA', BnB', ... son iguales entre sí; y un centro S (*), que se corresponde á sí mismo y es el punto medio comun de las proyecciones normales sobre el mismo diámetro n de los segmentos AA', BB', ... (86).

La primera figura, volteando alrededor del diámetro n, llegará á colocarse, cuando haya recorrido el ángulo AnA', simétricamente con la otra figura, respecto del plano central cuya normal es aquel diámetro n.

Pero la primera figura llegará á colocarse en perspectiva con la otra, y los puntos medios de los segmentos AA', BB', ... á confundirse en el centro S, cuando, volteando en torno del diámetro n, haya recorrido el ángulo $AnA' + 180°$.

88. Dos tetraedros $ABCD$ y $A'B'C'D'$, con dos triedros A y A' iguales y semejantes, y las aristas de estos triedros proporcionales, esto es: $AB : AC : AD = A'B' : A'C' : A'D'$, son *semejantes*. Y esta denominacion significa que las caras del uno son semejantes á las caras correspondientes del otro; y que los restantes triedros del uno son iguales y semejantes á los triedros correspondientes del otro. En efecto, segun la hipótesis son semejantes los triángulos BAC y $B'A'C'$, CAD y $C'A'D'$, DAB y $D'A'B'$, DCB y $D'C'B'$; y la igualdad y semejanza de los triedros restantes se deduce de la igualdad de sus lados (ángulos planos).

La semejanza de dos figuras sólidas $ABCDE$...

(*) Magnus (*Géom. anal. Aufg. II*, p. 109) y *Memoria* citada.

y $A'B'C'D'E'$..., se determina de un modo análogo al empleado para determinar su igualdad y semejanza (83): mediante la semejanza de los tetraedros correspondientes $ABCD$ y $A'B'C'D'$, $ABCE$ y $A'B'C'E'$, etc.

Para dos figuras sólidas, semejantes y del mismo sentido, $ABCD$... y $A'B'C'D'$..., existe un eje s, y un punto correspondiente á sí mismo S, con la propiedad de que los diedros AsA' BsB',... son iguales, y las figuras sólidas, $SABCD$... y $SA'B'C'D'$..., semejantes y del mismo sentido. La primera figura, cuando, volteando alrededor del eje s, haya recorrido el ángulo AsA', se habrá colocado en perspectiva con la otra; y el punto S será entónces el centro de semejanza externo de ambas figuras.

Para dos figuras sólidas, semejantes y de opuestos sentidos, $ABCD$... y $A'B'C'D'$..., existen un diámetro n y un punto S que se corresponde á sí mismo, con la propiedad de que los diedros AnA, BnB', ... son iguales, y las figuras sólidas $SABCD$... y $SA'B'C'D'$... semejantes y de opuestos sentidos. La primera figura, volteando alrededor del diámetro n, cuando haya recorrido el ángulo $AnA' + 180°$ se habrá colocado en perspectiva con la otra, y el punto S será entónces el centro de semejanza interno de ambas (*).

(*) EULER *(de centro similitudinis*, 1777. *Nov. Acta. Petrop.* 9, *página* 154). MAGNUS, *(Anal. géom. Aufg. II, p.* 89 *y sig.)*; y párrafo 50 de la *Memoria* citada.

VII. — El poliedro.

89. Una superficie finita que constituya una sola pieza (plana, poliédrica ó curva) tiene una ó varias orillas (contornos); pues, áun cuando la superficie se doble y pliegue para formar una pieza enteramente cerrada, siempre puede considerarse con una orilla, infinitamente pequeña, en cualquiera de sus puntos. En toda superficie pueden imaginarse cortes rodeando, que se encuentren á su vez ó vuelvan sobre sí mismos, y la dividan en piezas ó trozos separados, uno de los cuales sea totalmente limitado por el corte ó seccion dada.

Cuando la superficie sea de tal naturaleza que toda seccion cerrada separe ó aisle una porcion de la misma, entera y exclusivamente limitada por aquella seccion, se dice superficie de *conexion simple (connexio)*. Tales son, por ejemplo, una superficie poligonal plana cuyo perímetro no se pliegue ó corte; una superficie circular; un tetraedro; una superficie esférica, y una zona esférica con una orilla ó base. Pero cuando en la superficie existan secciones cerradas, de tal modo que por una de ellas no pueda aislarse entera y exclusivamente un trozo de la misma, la superficie toma el nombre de superficie de *conexion múltiple*. Tales son, por ejemplo, una faja plana, definida por dos líneas cerradas; una zona con dos orillas ó bases, y una superficie anular. Una zona esférica, en efecto, puede ser partida mediante una seccion cerrada que se extienda por entre sus dos bases ú orillas; pero ninguna de las partes en que la zona queda así dividida está limitada ó definida entera y exclusivamente por tal seccion intermedia. Por el contrario, la zona, mediante una seccion trasversal, que vaya de una orilla á la otra, queda convertida ó resuelta en una superficie de conexion simple: por lo cual se dice que la zona es de conexion doble. Una superficie anular, redonda, puede resolverse en una superficie de conexion doble, mediante una seccion cerrada; y por ésto se llama de conexion triple. En general, una superficie será de conexion n–ple, cuando despues $n-1$ cortes ó secciones sucesivas se hace de conexion simple, permaneciendo indivisa. Una superficie con r orillas es de conexion $(r+2k)$–ple, pudiendo k tomar los valores 0, 1, 2 ... (*). En lo sucesivo entenderemos por poliedro el *poliedro comun* (72) (el de una sola celda ó cavidad, cuya superficie es de conexion simple) llamado por HESSEL *euleriano*.

90. Todo poliedro con c caras y v vértices tiene $c+v-2$ aristas (**).

(*) Esta distincion importante se debe á RIEMANN *(Grundlagen*, etc., 1851. *Lehrsätze der analysis situs*, 1857. *J. de Borchardt A.* 54, *p.* 105). Véase: NEUMANN *(Abelsche Integrale* 1865, *p.* 291); LISTING. *(Census räumlicher complexe* 1861, en las *Gölt. Abh. tomo* I, y *Gött. Nachr.* 1867 *Nov.* 13); JORDAN *(J. de Borchardt A.* 66, *p.* 22 y 68, *p.* 297). La misma distincion hizo MÖBIUS en su *Théorie der Elementar-Verwandtschaft (Leipzig. Berichte* 1863, página. 18).

(**) Esta ley fundamental de la Poliedrometría fué descubierta y dada á conocer por EULER, 1752. *(Nov. Comm. Petrop.* 4, *página* 109, y demostrada en la *p.* 156). Tal vez era conocida en lo antiguo, puesto que ARQUÍMEDES dió ya la série completa de poliedros semiregulares; y se halla contenida en un fragmento de las obras inéditas de DESCARTES publicadas en 1860, por M. FOUCHER DE CAREIL *II*, *p.* 214. Véase el escrito del autor en

DEMOSTRACION 1.ª Por la supresion de uno de los polígonos de que consta el poliedro queda un poliedro abierto con $c-1$ caras, v vértices ó picos, y a aristas; pues la cara suprimida tiene todas sus aristas y vértices comunes con las aristas ó vértices de otras caras. Quitando del borde de este poliedro abierto un polígono, queda un nuevo poliedro abierto con $c_1 = c - 2$ caras, $v_1 = v$ vértices, y $a_1 = a - 1$ aristas. Suprimiendo del borde de este último poliedro un polígono, queda un nuevo poliedro abierto con $c_2 = c_1 - 1$ caras, $v_2 = v_1 - m$ vértices y $a_2 = a_1 - m - 1$ aristas, etc., suponiendo que m sea el número de los vértices no comunes. Tenemos, pues, la ley:

$$c - 1 + v - a = c_1 + v_1 - a_1 = c_2 + v_2 - a_2 = \ldots$$

independiente del número de caras. Pero, continuando la supresion indicada, queda últimamente un polígono con tantos vértices como aristas. Luego

$$c - 1 + v - a = 1 \text{ ó } c + v - a = 2.$$

DEMOSTRACION 2.ª Para pasar de un vértice á todos los demás vértices, siguiendo una línea compuesta de aristas, son necesarias y suficientes

---

el MONATSBERICHT *der Berl. Acad.* 1861, *p.* 1043). Otras demostraciones de este teorema han sido publicadas por CAUCHY 1813 *(J. de l'Éc. polyt. Cah.* 16, *p.* 77), GRUNERT *(J. de Crelle A.* 2, *página* 367 *Dem.* 1), STAUDT 1847. *(Géom. der Lage* 49), THIEME *(briefl. Mitheilung, Petersburgo* 1867. *Nov.* 10, *Dem.* 2), AUGUST *(Progr. d. Köln. Realgymn. Berlin* 1854, *p.* 4); y por LEGENDRE *(Géom. VII*, 25), L'HUILIER 1812 *(Ann. de Gerg.* 3, *p.* 178) y STEINER *(J. de Crelle A.*, 1, *p.* 364), considerando sumas de ángulos de polígonos esféricos ó planos.

$v - 1$ aristas. Cortado el poliedro á lo largo de estas aristas, para dividirlo en sus c caras es preciso aún cortarlo á lo largo de las aristas restantes. Mas para la division ó particion en c partes son necesarios $c - 1$ cortes á lo largo de otras tantas aristas. Luego el poliedro contiene $v - 1 + c - 1 = c + v - 2$ aristas.

Observacion. Cuando se juntan poliedros de modo que una cara de uno de ellos, ó un vértice sea cubierto sólo en parte por una cara, ó un vértice, de otro, se obtiene un poliedro extraordinario, en el que las caras, los vértices y las aristas no están sometidos á la ley numérica ántes expresada (*).

Cuando por la adicion de ángulos sólidos y caras se descompone un poliedro en una suma de n poliedros que contengan en totalidad c caras, v vértices y a aristas, distintos, será $c + v - a = 1 + n$. Supongamos, en efecto, que el primero de los poliedros reunidos tenga c_1 caras, v_1 vértices y a_1 aristas; que el siguiente tenga c_2 caras, v_2 vértices y a_2 aristas, no comunes con el primero; que el tercero tenga c_3 caras, v_3 vértices y a_3 aristas no comunes con los precedentes, etc. Cada poliedro tiene con el siguiente un polígono comun, plano ó no plano. Luego, segun lo dicho ántes:

$$c_1 + v_1 - a_1 = 2, c_2 + v_2 - a_2 = 1, c_3 + v_3 - a_3 = 1, \text{etc.}$$

Y sumando se halla $c + v - a = 1 + n$. Cauchy *(l. c.)*.

(*) Poinsot 1801 *(J. de l'Éc. polyt. Cah. 10, p. 46)*. L'Huilier *(l. c.)*, clasificó los casos en que no se verifica la ley de Euler. Véase: Hessel *(J. de Crelle, A. 8, p. 13)*; y Jacobi. *(Géom. de* Van Swinden, *p. 436)*.

91. El número de los ágalthough poligonales (ángulos planos de los polígonos) de un poliedro es el duplo del número de sus aristas. En efecto, en cada polígono hay tantos ángulos como lados; y cada arista del poliedro es lado de dos polígonos. El número, pues, de los ángulos poligonales, es par: y, por consecuencia, sólo en número par podrán existir en un poliedro polígonos con un número impar de vértices, y ángulos sólidos con un número impar de caras ó lados.

En un poliedro con c caras, v vértices y a aristas, se verifican las relaciones:

$$6+a \leqq 3c \leqq 2a, \qquad 6+a \leqq 3v \leqq 2a$$
$$4+v \leqq 2c \leqq 4v-8, \qquad 4+c \leqq 2v \leqq 4c-8.$$

Segun acabamos de demostrar, en efecto, el número de los ángulos planos ó poligonales es $2a$; cada cara tiene por lo ménos tres vértices y cada ángulo sólido tiene por lo ménos tres caras. Ahora bien, ya dijimos (90) que $c = 2 + a - v$ ó $v = 2 + a - c$: luego $6 + 3a - 3v \leqq 2a$; etc. De las dos primeras relaciones ó limitaciones se deducen las otras dos, reemplazando a por $c + v - 2$. (Descartes y Euler en los lugares citados ántes).

Si todas las caras del poliedro son m-gonos, resulta:

$$mc = 2a, \quad v-2 = a-c = \tfrac{1}{2}c(m-2)$$

Y si todos los ángulos sólidos son n-láteros:

$$nv = 2a, \quad c-2 = a-v = \tfrac{1}{2}v(n-2).$$

De las dos condiciones se desprende esta otra:

$$(m-2)(n-2) : 4 = (v-2)(c-2) : vc < 1.$$

Y, por consecuencia:

$$m = 3,\ n = 3,\ 4,\ 5\ ;\ \text{y}\ n = 3,\ m = 4,\ 5.$$

Ni todas las caras de un poliedro pueden tener más de 5 vértices, ni todos los ángulos sólidos ó picos más de 5 caras; porque, en caso contrario, el número de los ángulos poligonales seria, por lo ménos, $6c$ ó $6v$; y a, por lo ménos, $3c$ ó $3v$; cuando ya sabemos que $6 + a$ no puede subrepujar á $3c$ ni á $3v$.

No puede existir ningun poliedro con 7 aristas; porque entónces el triple número de sus caras ($3c$) ó de sus vértices ($3v$) deberia estar comprendido entre 13 y 14: lo cual es absurdo.

Una clasificacion de los poliedros posibles con a aristas (con c caras y v vértices) no se ha llevado á cabo todavía (*).

92. Supongamos que entre las c caras de un poliedro hay c_3 triangulares, c_4 cuadrangulares, ...; entre sus v ángulos poliédricos, v_3 triédricos, v_4 tetraédricos ...; y que el número de sus aristas sea a. Entónces se verificarán las relaciones siguientes (**):

$$\begin{aligned} c &= c_3 + c_4 + c_5 + \dots \\ v &= v_3 + v_4 + v_5 + \dots \\ 2a &= 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + \dots \\ &= 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \dots \end{aligned}$$

(*) Principios de ella se encuentran en Euler *(l. c.)*, Steiner 1828 *(Ann. de Gerg.* 19, *p.* 36). Poinsot, *(Comp. rend.* 1858ª, *p.* 65) y Jordan *(J. de Borchardt A.* 66, *p.* 22 y *A.* 68, *p.* 297*)*.

(**) Estas consideraciones fueron iniciadas por Legendre *(Géom. Note* 8) y concluidas por Gergonne *(Ann. de Math.* 15, *página* 157) mediante la ley de la dualidad.

Ahora bien, segun (90) es $2c + 2v = 4 + 2a$. Luego:

$$\text{I.} \quad 2(c_3 + c_4 + \ldots) = 4 + v_3 + 2v_4 + 3v_5 + \ldots$$

$$2(v_3 + v_4 + \ldots) = 4 + c_3 + 2c_4 + 3c_5 + \ldots$$

Y por adicion se halla:

$$\text{II.} \quad c_3 + v_3 = 8 + (c_5 + v_5) + 2(c_6 + v_6) + \ldots$$

Sumando las ecuaciones (I), despues de multiplicar por 2 una de ellas, se obtiene:

$$\text{III.} \quad 3c_3 + 2c_4 + c_5 = 12 + 2v_4 + 4v_5 + \ldots + c_7 + 2c_8 + \ldots$$

$$3v_3 + 2v_4 + v_5 = 12 + 2c_4 + 4c_5 + \ldots + v_7 + 2v_8 + \ldots$$

Sumando las mismas ecuaciones (I), despues de multiplicar una de ellas por 3 y la otra por 2, se obtiene:

$$\text{IV.} \quad 4c_3 + 2c_4 + v_3 = 20 + 2v_4 + 5v_5 + 8v_6 + \ldots + 2c_6 + 4c_7 + \ldots$$

$$4v_3 + 2v_4 + c_3 = 20 + 2c_4 + 5c_5 + 8c_6 + \ldots + 2v_6 + 4v_7 + \ldots$$

De las ecuaciones (II) se concluye que de ningun poliedro pueden faltar juntamente caras triángulares y ángulos sólidos triláteros; y que el número de las unas y los otros, cuando existen, es por lo ménos 8.

Las ecuaciones (III) enseñan que:

Un poliedro, sin caras triangulares ni cuadrangulares, tiene por lo ménos 12 caras pentagonales; y un poliedro, sin ángulos sólidos triláteros ni cuadriláteros, tiene, al ménos, 12 ángulos sólidos quinqueláteros.

Un poliedro, sin caras triangulares ni pentagonales, tiene al ménos 6 caras cuadrangulares; y un poliedro, sin ángulos sólidos triláteros ni quinqueláteros, tiene por lo ménos 6 ángulos sólidos cuadriláteros.

Un poliedro, sin caras cuadrangulares ni pentagonales, tiene por lo ménos 4 caras triangulares; y un poliedro, sin picos cuadriláteros ni quinqueláteros, tiene por lo ménos 4 picos triláteros.

Un poliedro, cuyos picos sean todos triláteros, y entre cuyas caras, además de un número cualquiera de exágonos, haya solamente triángulos, ó cuadrángulos, ó quinquángulos, no puede tener más ni ménos de 4 triangulares, ó 6 cuadrangulares, ó 12 quinquangulares.

Un poliedro, cuyas caras sean todas triangulares, y entre cuyos vértices, además de un número cualquiera de exaédricos, haya solamente vértices triédricos, ó tetraédricos, ó pentaédricos, tiene 4 vértices triláteros, ó 6 cuadriláteros, ó 12 quinqueláteros.

Las ecuaciones (IV) enseñan que:

Un poliedro, sin caras triangulares ni cuadrangulares, tiene por lo ménos 20 ángulos sólidos triláteros; y un poliedro, sin picos triláteros ni cuadriláteros, tiene por lo ménos 20 caras triangulares.

Un poliedro, cuyas caras son pentagonales y cuyos picos son triláteros, tiene 20 picos; y un poliedro, cuyos picos son quinqueláteros y cuyas caras son triángulares, tiene 20 caras.

OBSERVACION. La ley de dualidad, observada (*) ya en los tiempos pasados respecto de poliedros particulares, existe generalmente: cada poliedro dado tiene por correlativo un poliedro polar, de tal suerte que á cada vértice m-látero del uno corresponde una cara m-gonal del otro; á cada cara n-gonal del primero, un vértice n-látero del segundo; y ambos á dos tienen el mismo número de aristas. Para obtener el poliedro coordenado ó correlativo con el dado, basta encontrar, respecto de una esfera arbitrariamente elegida, los planos α, β, γ, ... cuyos polos respectivos sean los vértices A, B, C, ... del poliedro dado (62).

93. Entre los poliedros merecen consideracion especial los *regulares (platónicos)* que tienen sus caras regulares, y sus ángulos sólidos regulares y de una sola especie para cada uno de ellos (**).

Un poliedro regular, cuyas caras sean triángulos, debe tener sus vértices: ó triláteros, ó cuadriláteros, ó quinqueláteros. En el primer caso (92, III y II), consta de 4 triángulos y 4 vértices triláteros, y se llama *tetraedro;* en el segundo, consta de 8 triángulos y de 6 vértices cuadriláteros, y toma el nombre de *octaedro;* y en el tercero,

---

(*) MAUROLYCUS 1532 *(Véase J. H. T. Müller en los Arch. de Grunnert 34, p. 1)*. KEPLER *(Harm. mundi V, 1)*. MEISTER 1785. *(Comm. Gotting. VII, p. 39)*. La ley general recibió de GERGONNE *(l. c.)* su expresion más exacta.

(**) El descubrimiento de los poliedros platónicos *(Plato Tim., p. 55 y de anima mundi 98)* se atribuye á la escuela pitagórica. De los mismos habla EUCLIDES en sus *Élem. XIII* y siguientes.

consta de 20 triángulos y 12 vértices quinqueláteros (92, IV y III), y se denomina *icosaedro*. Ya sabemos (91) que no pueden ser todos los vértices, ó ángulos sólidos, de seis caras.

Un poliedro regular, cuyas caras sean cuadrángulos, sólo puede tener vértices triláteros; y de estos vértices sólo 8 (92, II), con 6 caras (92, III). Este poliedro se llama *exaedro*.

Un poliedro regular, cuyas caras sean pentágonos, sólo puede tener vértices triláteros; y de éstos sólo 20 (92, IV), con 12 caras (92, III). Este poliedro lleva el nombre de *dodecaedro*. Todas las caras no pueden tener seis vértices (91) ó ser exagonales.

Entre los poliedros expresados forman un par ó son correlativos: el *tetraedro* consigo mismo; el *octaedro* con el *exaedro;* y el *icosaedro* con el *dodecaedro;* de tal modo que á cada cara m–gonal de uno corresponde un vértice m–látero de su compañero.

94. Por poliedros *semiregulares (de Arquimedes)* (*) se comprenden los poliedros cuyos vértices son iguales y semejantes, pero formados por caras regulares de diferentes especies. A estos poliedros corresponden otros que tienen caras iguales y semejantes, y en cada cara vértices regulares de diferentes especies.

(*) Los poliedros semiregulares, descubiertos por Arquímedes, fueron descritos por Pappus *(Descr. V., Introd. á la prop. 18)*. La red de sus caras se halla en Dürer *(Unterweisung*, etc. 1538). Véase Keppler *(Harmonices mundi II*, 28) y Meier Hirsch *(Géom. Aufg. II, p. 127 y sig.)*. Los poliedros semiregulares, correlativos á los de Arquímedes, son recordados por J. H. T. Müller en su Trigonometría 1852, *p*. 345.

I. Si el poliedro tiene solamente vértices *m*-láteros será (91):

$$2a = mv = 2v + 2c - 4$$

$$v = 2\,\frac{c-2}{m-2}.$$

Los casos posibles son (91):

$$m = 3, \quad 2a = 3v = 6\,(c-2)$$
$$m = 4, \quad a = 2v = 2\,(c-2)$$
$$m = 5, \quad 2a = 5v = \tfrac{10}{3}\,(c-2)$$

II. Si cada vértice ó pico del poliedro está formado por α caras *a*-gonales, β caras *b*-gonales, γ caras *c*-gonales, ... será

$$2a = (\alpha + \beta + \ldots)v.$$

Sobre el poliedro existen αv ángulos planos, pertenecientes á las caras *a*-gonales; y el número de estas caras, por consecuencia, será la *a*va parte de αv, ó sea, $\alpha v : a$, etc. Luego

$$c = \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \ldots\right)v.$$

Y, teniendo en cuenta la igualdad $2c + 2v - 2a = 4$, resulta:

$$\left(\frac{2\alpha}{a} + \frac{2\beta}{b} + \ldots + 2 - \alpha - \beta - \ldots\right)v = 4$$

ó bien:

$$\left(2 - \alpha\frac{a-2}{a} - \beta\frac{b-2}{b} - \dots\right) v = 4 \ (^*).$$

El sustraendo que figura dentro del paréntesis adquiere su valor mínimo cuando $\alpha = \beta = \dots = 1$, y $a = 3$, $b = 4$, ... Pero $2 < \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6}$; y esto prueba que no existe ningun poliedro cuyos ángulos sólidos estén todos formados del mismo modo por polígonos con más de tres números diferentes de lados.

III. Si todos los ángulos sólidos del poliedro están formados de igual manera por α caras a-gonales, β caras b–gonales, y γ caras c–gonales; y uno de los números a, b, c, el a, por ejemplo, es impar, uno de los números $\alpha - 1$, β ó γ debe valer 2 por lo ménos (**). En efecto, juntando con el primero, tercero, quinto ... lado de un polígono con a vértices, ó a-gonal, cada vez un lado de un polígono, del mismo número de vértices, lograremos al fin juntar en un pico ó ángulo sólido tres polígonos a–gonales. Y asimismo, adaptando al primero, tercero, quinto... lado del primer polígono, a-gonal, cada vez un lado de un b–gono, reuniremos, por último, en un ángulo sólido dos polígonos con b lados. Por lo cual, los números $\alpha - 1$, β y γ no pueden ser todos menores que 2.

IV. Por consecuencia, los casos posibles son:

Poliedros de Arquimedes con vértices triláteros.

(*) Meier Hirsch. *(lugar citado, p. 171).*

(**) Keppler *(l. c. II, p. 17)* y Meier Hirsch *(l. c., p. 142).*

Cada ángulo sólido, formado por un polígono a-gonal y dos b-gonales. El número b debe ser par (III). Y como (II)

$$\left(\frac{2}{a}+\frac{4}{b}-1\right)v=4,$$

se obtienen las soluciones siguientes:

a	n,	3,	3,	3,	4,	5
b	4,	6,	8,	10,	6,	6
v	$2n$,	12,	24,	60,	24,	60

Un poliedro de esta especie tiene $v:a$ caras con a lados, y $2v:b$ caras con b lados.

Si cada ángulo sólido está formado por un polígono a-gonal, uno b-gonal y uno c-gonal, los números a, b y c deben ser pares; y la ecuacion

$$\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-1\right)v=4$$

sólo admite dos soluciones:

a	b	c	v
4	6	8	48
4	6	10	120

Semejante poliedro tiene $v:a$ caras a-gonales, $v:b$ caras b-gonales y $v:c$ caras c-gonales.

Poliedros de Arquímedes con vértices cuadriláteros.

Si cada ángulo sólido está formado por tres polígonos con a lados, y uno con b lados, la ecuacion

$$\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}-1\right)v=2$$

comprende las soluciones:

a	b	v
3	n	$2n$
4	3	24

Estos poliedros tienen $3v : a$ caras con a lados, y $v : b$ caras con b lados.

Si cada ángulo sólido está formado por dos caras a–gonales y dos b–gonales, la ecuacion correspondiente

$$\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}-1\right)v=2$$

tiene las soluciones

a	b	v
3	4	12
3	5	30

Y estos poliedros comprenden $2v : a$ caras a-gonales, y $2v : b$ caras b–gonales.

Pero, si cada ángulo sólido está constituido por una cara a-gonal, dos caras b-gonales y una c-gonal, el número b debe ser par; y la ecuacion entónces resultante

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}-1\right)v=2$$

contiene la solucion única

a	b	c	v
3	4	5	60

Este poliedro consta de 20 triángulos, 30 cuadrángulos y 12 pentágonos.

Poliedros de Arquimedes con vértices quinquelàteros.

Cada ángulo sólido está formado por cuatro polígonos con a lados y uno con b lados. La ecuacion correspondiente

$$\left(\frac{8}{a}+\frac{2}{b}-3\right)v=4$$

tiene las soluciones

a	b	v
3	4	24
3	5	60

Un poliedro de esta especie se compone de $4\,v:a$ polígonos con a lados, y $v:b$ polígonos de b lados.

OBSERVACION. PAPPUS y KEPPLER cuentan solamente 13 poliedros arquimédicos; porque omiten, á causa de su indeterminacion, los poliedros con $2n$ vértices ó picos, en los cuales cada ángulo sólido está constituido, ó por dos cuadrángulos y un n-ángulo, ó por tres triángulos y un n-ángulo.

V. Por el cambio mútuo de v y c, de las caras a-gonales y los ángulos sólidos a-láteros, se obtienen los resultados correspondientes para poliedros que tienen sólo caras m-gonales; y se encuentran tambien los poliedros polares, correlativos con los de Arquímedes, con caras trigonales, tetragonales y pentagonales. Entre estos poliedros merecen especial mencion los *romboedros* (77) con ángulos sólidos de diferentes especies (*): uno, con 12 rombos, tiene en cada cara dos ángulos sólidos triláteros y dos cuadriláteros; el otro, con 30 rombos, tiene en cada cara dos ángulos sólidos triláteros y dos quinqueláteros.

95. No son posibles poliedros platónicos ni arquimédicos mediante determinaciones diferentes de las explicadas ántes. La realidad de un poliedro, total ó parcialmente regular, cuyas determinaciones no estén en contradiccion con su naturaleza, podrá reconocerse dividiendo una superficie esférica por círculos máximos en un poliedro esférico cuyas caras sean polígonos esféricos de la misma especie, en el mismo número y con el mismo órden de sucesion, que los polígonos planos del poliedro que se trata de construir.

Para efectuarlo, es necesario trazar desde un punto O, arbitrariamente elegido sobre la esfera, los arcos OA_1, OA_2... de igual longitud, y de manera que los ángulos rectilíneos de sus cuerdas, A_1OA_2, A_2OA_3, ... sean iguales á los ángulos de los polígonos regulares planos que forman un ángulo sólido del poliedro (**). Entónces en los planos A_1OA_2,

---

(*) Keppler (*l. c. II, p.* 27) y Meier Hirsch (*l. c., p.* 186).

(**) Designando por η el ángulo central buscado, corespondiente á los arcos iguales OA_1, OA_2...; por θ_1, θ_2, ... los ángulos incógnitos tambien de los arcos A^1OA^2, A_2OA_3 ...; y por λ_1, λ_2 ... los ángulos dados de las cuerdas, A_1OA_2, A_2OA_3, ... Estas cuerdas forman con el rádio de la esfera que sale por O el ángulo $90^\circ - \frac{1}{2}\eta$; y, segun una fórmula de *Trigonometría* se tiene:

$$\cos \tfrac{1}{2}\eta = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta_1 : \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\lambda_1 = \ldots$$

y de consiguiente:

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta : \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta_2 : \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta_3 = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\lambda_1 : \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\lambda_2 : \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\lambda_3$$

A_2OA_3, ... se hallan polígonos regulares planos, inscritos en la esfera, y cuyos lados son de igual longitud que las cuerdas iguales OA_1, OA_2, ... Los vértices de estos polígonos, á su vez, determinan polígonos esféricos regulares, á saber: α polígonos de a vértices, β con b vértices, γ con c vértices, que están situados alrededor del punto O en el órden pedido. Entre todos estos polígonos regulares esféricos, $\alpha v : a$ de a vértices, $\beta v : b$ de b vértices, $\gamma v : c$ de c vértices, componen, en efecto, la superficie esférica. Siendo, pues, θ_1, θ_2 y θ_3 los ángulos de los polígonos regulares esféricos con a, b y c vértices respectivamente, el área del polígono a-látero (36), tendrá el valor $a\theta_1 - (a - 2)\, 180°$; etc. Pero (94, II).

$$\frac{\alpha v}{a}[a\theta_1 - (a-2)\,180°] + \frac{\beta v}{b}[b\theta_2 - (b-2)\,180°]$$

$$+ \frac{\gamma v}{c}[c\theta_3 - (c-2)\,180°] =$$

$$\left[\alpha\theta_1 + \beta\theta_2 + \gamma\theta_3 - \left(\alpha + \beta + \gamma - \frac{2\alpha}{a} - \frac{2\beta}{b} - \right)\frac{2\gamma}{c}\,180°\right] v$$

$$= 4\,.\,180°;\ \text{porque}\ \alpha\theta_1 + \beta\theta_2 + \gamma\theta_3 = 2.\,180°.$$

De aquí se infiere que todos los vértices de un poliedro arquimédico están sobre una esfera; y sobre un plano, los vértices que están unidos por aristas á un mismo vértice.

Para hallar el poliedro polar de un poliedro arquimédico, se trazan por los vértices de éste los

---

y además: $\alpha\theta_1 + \beta\theta_2 + \gamma\theta_3 = 360°$. Meier Hirsch (*l. c.*, *p.* 151 y 176).

planos tangentes á su esfera circunscrita. Si varios vértices caen sobre un plano, los planos tangentes, correspondientes, pasarán por un punto (25). Á un polígono regular, a-gonal, por consecuencia, corresponderá un ángulo sólido regular, a-látero; y, en lugar de los ángulos sólidos m-láteros, se obtienen determinadas caras m-gonales. Todas las caras del poliedro polar son tangentes á una esfera; y las que están unidas por aristas á una misma cara pasan (prolongadas) por un mismo punto.

Los vértices de un poliedro platónico caen sobre una esfera, cuyo centro equidista de las caras, y tambien de las aristas del poliedro; y, de consiguiente, las caras en sus centros (los vértices de un poliedro polar) por su parte, y las aristas en sus puntos medios, por la suya, son tangentes á dos esferas, concéntricas con la arriba expresada. El plano central que contiene una arista $2a$ del poliedro, corta á las esferas segun círculos máximos, cuyos rádios son r, r' y r''; y al poliedro, en un polígono simétrico, á saber: al tetraedro en un triángulo; al octaedro y al exaedro, en un cuadrángulo; y al icosaedro y al dodecaedro, en un exágono. Expresando mediante a el rádio r'' y el rádio ρ del círculo circunscrito á una cara del poliedro, se halla (*)

$$r^2 = r''^2 - a^2 \quad \text{y} \quad r'^2 = r^2 - \rho^2$$

Observacion. Además del icosaedro y el dodecaedro de Platon, existen un *icosaedro estrellado* y un *dodecaedro estrellado:* aquél, con 12 vértices de

(*) Amthor (*Carta en Dresde* 1871).

cinco lados, cuyas secciones esféricas son pentágonos esféricos regulares estrellados, que están formados por triángulos regulares; éste, con 20 ángulos sólidos triláteros, formados por pentágonos regulares estrellados. Conócense tambien dos *poliedros regulares extraordinarios* (90-*Obs.*), ambos con 12 vértices de cinco lados, que coinciden con los vértices de un icosaedro platoniano, y cuyas secciones esféricas son pentágonos esféricos regulares, estrellados para el uno, y ordinarios para el otro; y ambos con 12 caras que son pentágonos regulares, ordinarios en el uno y estrellados en el otro; y 30 aristas. (*)

96. En un poliedro con v vértices, cuyas caras sean polígonos de contornos no plegados, la suma de los ángulos de estos polígonos vale $(2v-4)\,180^\circ$, ó sea, el duplo de la suma de los ángulos de un polígono con v vértices. (**)

DEMOSTRACION. 1.ª Supongamos que el poliedro tenga a aristas, y c caras: entre las cuales haya una con v' vértices, una con v'' vértices... La suma de los ángulos del polígono plano con v' vértices, cuyo

---

(*) El dodecaedro estrellado y el poliedro extraordinario con pentágonos estrellados fueron descritos y denominados por KEPPLER 1619 (*Harm. mundi II*, 26); y los otros dos poliedros regulares, por POINSOT 1801 (*J. de l'Éc. polyt. Cah.* 10, *p.* 39). De las variedades posibles de poliedros platonianos, además de POINSOT, han tratado CAUCHY (*J. de l'Éc, polyt. Cah.* 16, *p.* 68) y BERTRAND (*Compt. rend.* 1858, *p.* 79). Véanse: CAYLEY (*Philos. Mag.* 1859, *p.* 123). WIENER (*Vielecke und Vielflache, Leipzig* 1864); HEIS und ESCHWEILER (*Trigon.* 1867, *p.* 294). HESSEL (*Gleicheckige Polyeder, Marburg.* 1871); y HETZ (*Varietäten der Archimedeischen Körper, Marburger Berichte*, 1872).

(**) DESCARTES y EULER (*l. c.*).

contorno no sea plegado, vale $(v' - 2)\,180^\circ$; y, por consecuencia, la suma de los ángulos sobre el poliedro vale $(v' + v'' + \ldots - 2c)180^\circ$. Mas la suma $v' + v'' + \ldots$ expresa el número de todos estos ángulos, que es $2a$; luego (90)

$$v' + v'' + \ldots - 2c = 2a - 2c = 2v - 4$$

Demostracion 2.ª Un ángulo sólido con c' caras, del poliedro, está cercado por c' triángulos que tienen un vértice comun y cuyas bases forman un polígono. Separando estos triángulos del poliedro se produce en él una abertura que puede taparse con $c' - 2$ triángulos. Del poliedro con v vértices, cuyas caras están constituidas por d triángulos, se obtiene así otro poliedro con $v - a$ vértices, cuyas caras están constituidas por $d - 2a$ triángulos. Mas con 4 vértices se tienen 4 triángulos: luego

$$d - 2(v - 4) = 4 \quad \text{y} \quad d = 2v - 4.$$

97. En un poliedro con c caras, cuyos ángulos sólidos tengan secciones esféricas de contornos no plegados, el exceso del duplo de la suma de sus ángulos diédricos sobre la suma de sus ángulos poliédricos ó sólidos vale $(2c - 4)180^\circ$, ó sea, el duplo de la suma de los ángulos de un polígono plano con c vértices (*).

(*) Français *(Ann de Gérg. 3 p, 189)*; Grunert *(J. de Crelle 5, página 41)*; Brianchon *(J. de l'Éc. polyt. Cah. 25, p. 317)*. El teorema correspondiente para el tetraedro fué considerado por De Gua *(Mém. de Paris 1783, p. 369)*.

DEMOSTRACION. Admitamos que el poliedro tenga a aristas y v vértices entre los cuales uno tenga c' caras, otro c'' caras, ... Si la suma de los ángulos planos del vértice con c' caras es γ', etc.; este vértice ó ángulo sólido valdrá $\gamma'-(c'-2)180^\circ$ (36 y 52). Luego la suma s de los v ángulos sólidos del poliedro valdrá

$$\gamma' + \gamma'' + \ldots - (c' + c'' + \ldots - 2v)180^\circ.$$

Y, como $\gamma' + \gamma'' + \ldots$ es la doble suma, $2u$, de los ángulos diédricos del poliedro, y $c' + c'' + \ldots$ el número duple, $2a$, de sus ángulos poligonales, resulta:

$$s = 2u - (2a - 2v)180^\circ = 2u - (2c - 4)180^\circ.$$

OBSERVACION. Designando por t la suma de los ángulos poligonales del poliedro, tenemos

$$t = (2v - 4)180^\circ$$

$$2u - s = (2c - 4)180^\circ$$

y, por lo tanto:

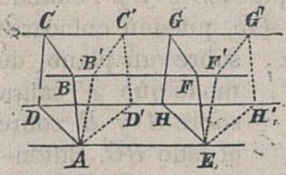
$$t + 2u - s = (2a - 4)180^\circ$$

que es el duplo de la suma de los ángulos de un polígono plano con a vértices.

VIII. — Cubatura de los prismas y de las pirámides.

98. Dos prismas (ó cilindros), cuyas secciones normales sean congruentes y cuyas aristas laterales sean de igual longitud, tienen volúmenes iguales (*).

Demostracion. Los prismas indefinidos, cuyos segmentos consideramos ahora, por efecto de la congruencia de sus secciones normales (54) pueden sobreponerse de modo que coincidan en AE, por ejemplo, un par de sus aristas de igual longitud.



Así, la comparacion de los volúmenes $ABCDEFGH$ y $AB'C'D'EF'G'H'$ se refiere á la de los poliedros $ABCDB'C'D'$ y $EFGHF'G'H'$. Ahora bien, las superficies ó caras $ABCD$ y $EFGH$ son congruentes, como tambien los ángulos sólidos A y E, B y F, C y G, D y H; y además son iguales las aristas BB' y FF', CC' y GG', DD' y HH': por lo cual son congruentes los expresados poliedros, $ABCDB'C'D'$ y $EFGHF'G'H'$. Y, restando estos poliedros del poliedro $ABCDEF'G'H'$, se hallan los prismas

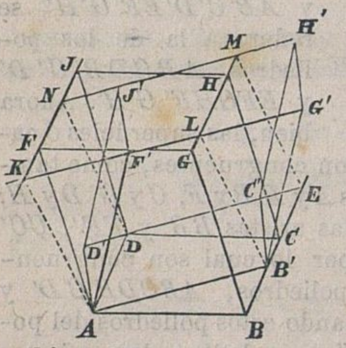
(*) Este teorema se halla en Eucl. *XI*, 28; pero en la demostracion. Modernamente ha subido al rango merecido. Véanse: Bretschneider, *Géom.*, §. 466) y J. H. T. Müller (*Stereom.*, *página* 93), etc.

ABCDEFGH y *AB'C'D'E'F'G'H'* que tienen, por lo tanto, volúmenes iguales.

Observacion. Un prisma trilátero es, en cuanto á su volúmen, la mitad de un paralelepípedo que tiene comunes con él un ángulo sólido y las aristas que lo forman. En efecto, el paralelepípedo, mediante un paralelógramo diagonal, queda dividido en dos prismas triláteros, cuyas secciones normales son congruentes y cuyas aristas tienen igual longitud, que son, por consecuencia, iguales en volúmen (77).

99. Dos paralelepípedos, con bases iguales é iguales alturas, son iguales en volúmen (*).

Demostracion. Las bases iguales, *ABCD* y *A'B'C'D'*, de los paralelepípedos p y p', cuando sea por ejemplo, $A'B' > AB$, pueden colocarse sobre un plano, de modo que A' caiga sobre A y B' sobre el lado BC. Entónces el lado $C'D'$ pasará por el punto D; por ser el triángulo $AB'D$ la mitad del paralelógramo *ABCD*, y, de consiguiente, la mitad



tambien del paralelógramo *A'B'C'D'*. Las caras opuestas á las bases, *FGHJ* y *F'G'H'J'*,

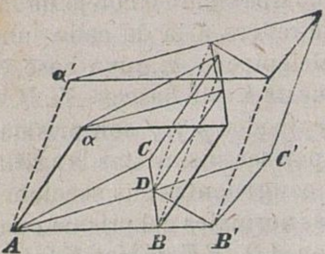
(*) Eucl., *XI*, 31. La disposicion de las bases para simplificar esencialmente la demostracion es de J. H. T Müller (*Stereom.*, *página* 96).

caerán asimismo sobre un plano, por tener los paralelepípedos alturas iguales; cortándose en K las aristas FJ y $F'G'$. Así, la comparacion ó cotejo de los paralelepípedos p y p' se refiere á la de cada uno de ellos con otro paralelepípedo q, cuya base es $AB'ED$ y cuya cara opuesta á esta base es $KLMN$. Ahora bien, los paralelepípedos p y q son prismas de igual volúmen (98); por ser sus aristas longitudinales iguales á AD, y congruentes sus secciones normales: como secciones normales del prisma cuadrilátero cuyas aristas son AD, BE, GM y KJ. Los paralelepípedos p' y q son prismas de igual volúmen tambien; porque sus aristas longitudinales son iguales á AB', y sus secciones normales, que son secciones normales del prisma cuadrilátero cuyas aristas son AB', $D'E$, NH' y KG', congruentes. De las igualdades $p = q$ y $p' = q$, se deduce $p = p'$.

Observacion. Dos prismas triláteros, con bases iguales é iguales alturas, son iguales en volúmen. Pues los prismas triláteros, con iguales alturas, cuyas bases sean, por ejemplo, ABC y $AB'C'$, tienen volúmenes iguales por ser mitades de los paralelepípedos iguales p y p' (98 Observacion).

100. La razon de los volúmenes de dos prismas (ó cilindros), con iguales alturas, es igual á la razon de sus bases (Eucl. XI, 32).

Demostracion. Los prismas de que se trata, p y q, pueden ser descompuestos, mediante paralelógramos diagonales, en prismas triláteros con iguales alturas, y entre cuyas bases figuren, por ejemplo, los triángulos ABC y $AB'C'$. Sea D el punto de interseccion con BC de la recta AC'. Sobre la base ABD constrúyanse dos prismas: uno, cuyas aristas coincidan en direccion y longitud, $A\alpha$, con las del prisma de base ABC; y otro, cuyas aristas coincidan en direccion y longitud, $A\alpha'$, con las del prisma de base $AB'C'$. Estos prismas así construidos, que designaremos por $ABD\alpha$ y $ABD\alpha'$, son iguales en volúmen (99 Obs.).



Para hallar primeramente la razon de los volúmenes de los prismas $ABC\alpha$ y $ABD\alpha$, trácense por la arista $A\alpha$ paralelógramos diagonales, en número arbitrario, pero de modo que cada dos consecutivos intercepten sobre la recta BC partes iguales; y, en consecuencia, triángulos iguales sobre la base ABC, é iguales prismas en el prisma $ABC\alpha$ (99 Obs.). Las razones $BC : BD$, $ABC : ABD$ y $ABC\alpha : ABD\alpha$, por lo tanto, serán iguales; pues todas ellas tendrán el mismo valor racional, ó estarán comprendidas entre los mismos límites tan próximos como queramos (*Álgebra*-2). De la proporcion $ABC\alpha : ABD\alpha = ABC : ABD$; y de las deducidas del mismo modo, $ABD\alpha' : AB'D\alpha' = ABD : AB'D$ y $AB'D\alpha' : AB'C'\alpha' = AB'D : AB'C'$, en las cuales son iguales $ABD\alpha'$ y $ABD\alpha$, se concluye por multiplicacion esta otra: $ABC\alpha : AB'C'\alpha' = ABC : AB'C'$.

Constituidos, pues, los prismas p y q por los prismas triláteros p_1, $p_2 \ldots$ y q_1, $q_2 \ldots$, y sus bases a

y b, por los triángulos a_1, a_2... y b_1, b_2, ... respectivamente, tendremos:

$$p_1 : q_1 = a_1 : b_1$$
$$p_2 : q_1 = a_2 : b_1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Y sumando: $p : q_1 = a : b_1$. Luego, por último:

$$q_1 : p = b_1 : a$$
$$q_2 : p = b_2 : a$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Y sumando resulta: $q : p = b : a$, segun queríamos demostrar.

Observacion. La suma ó la diferencia de dos prismas, con iguales alturas, es igual á un prisma, con la misma altura, cuya base es la suma ó la diferencia de las bases de los prismas dados.

101. La razon de los volúmenes de dos prismas (ó cilindros) con iguales bases es igual á la razon de sus alturas (Eucl. XI, 25).

Demostracion. Colocadas las bases de los prismas sobre un mismo plano, trácense planos paralelos al plano de la base, en número arbitrario; pero de modo que cada dos consecutivos intercepten partes iguales de las alturas de los prismas; y, de consiguiente, prismas parciales iguales en aquellos prismas (100). Así se consigue que la razon de las alturas y la razon de los volúmenes de los prismas dados tengan el mismo valor racional, ó resulten ambas comprendidas entre los mismos límites, tan próximo como queramos: por lo cual, tales razones serán iguales.

102. La razon de los volúmenes de dos prismas (ó cilindros) es el producto de las razones de sus bases y de sus alturas.

Demostracion. Sean los prismas p y p', con las bases b y b', y las alturas h y h', respectivamente. Construyendo otro prisma q, con la base b' y la altura h, tendremos:

$$p : q = b : b' \text{ (100)} \quad \text{y} \quad q : p' = h : h' \text{ (101)}.$$

De las cuales por multiplicacion se deduce (*Álgebra*–3).

$$p : p' = (b : b')\,(h : h').$$

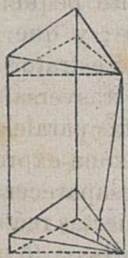
Observacion. Si la razon de las bases y la razon de las alturas son recíprocas, los prismas tendrán volúmenes iguales (Eucl. XI, 34).

103. El volúmen de un cuerpo se determina por su razon con la *unidad de volúmen*. Como unidad de volúmen se toma ordinariamente el *cubo*, cuyas aristas son iguales á la unidad de longitud, y cuyas caras son iguales á la unidad cuadrada ó de superficie. Y esto se hace, porque el cubo está determinado por una arista y pertenece á los prismas de cuyos volúmenes hemos encontrado las razones (102). La investigacion del volúmen de un cuerpo se llama, por lo dicho, la *cubatura* del mismo.

Diciendo por abreviar: *magnitud*, por su razon con la unidad (*Planim.* 82); *altura*, por su razon con la unidad de longitud; *base*, por su razon con la unidad cuadrada; y *cuerpo*, por su razon con la unidad cúbica, tendremos (102):

$$\textit{Prisma} = \textit{Base} \times \textit{Altura}$$
$$\textit{Paralelepipedo} = \textit{Longitud} \times \textit{Latitud} \times \textit{Altura}$$
$$\textit{Cubo} = (\textit{Arista})^3$$

Si por los extremos de una arista longitudinal de un prisma construimos secciones normales, entre estas secciones resultará comprendido un prisma con volúmen igual al del prisma dado (98). Luego tambien:



$$\textit{Prisma} = \textit{Seccion normal} \times \textit{Arista longitudinal}.$$

Y, comparando esta cubatura con la anterior, resulta la siguiente proporcion:

$$\textit{Seccion normal} : \textit{Base} = \textit{Altura} : \textit{Arista longitudinal} \ (*)$$

104. Un cuerpo, con superficie arbitraria, puede ser dividido por planos paralelos, de cualquiera postura y en número arbitrario, en capas ó estratos de igual altura. Si en cada una de estas capas se construyen prismas, proyectando por rectas paralelas cada seccion trasversal del cuerpo sobre el plano de la seccion siguiente; mediante la disminucion suficiente de la altura de cada estrato, se lo-

(*) Véase la *Trigonometría* (VI).

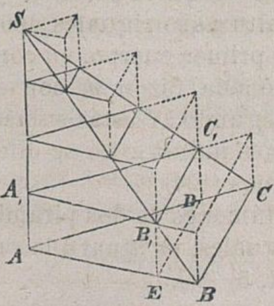
grará que la diferencia entre el cuerpo dado y la suma de todos los prismas así construidos llegue á ser arbitrariamente pequeña; y entónces el cuerpo no se diferenciará de la suma de dichos prismas cuya altura comun es infinitamente pequeña. (*)

Demostracion. Supongamos que la distancia entre los dos planos de los extremos, el primero y el último, quede dividida en n partes iguales, cada una con la longitud δ, arbitrariamente pequeña cuando sea n suficientemente grande; y que la zona (porcion de superficie) de la capa ó estrato sólido comprendido entre dos secciones trasversales sucesivas u y u', se proyecte por rectas paralelas sobre el plano u'. La proyeccion de la zona expresada será un anillo cuya anchura desaparecerá, siempre que desaparezca ó se anule δ; ciertas rectas proyectantes de la zona formarán un prisma (ó un cilindro) incluido enteramente en el estrato considerado; y otras constituirán un prisma dentro del cual se hallará enteramente el estrato mismo; pero la base u del mencionado segmento sólido, ni será

(*) Despues de haber obtenido la *Escuela platoniana* la cuadratura del círculo y la cubatura de la pirámide, limitó Arquímedes superficies y cuerpos, en general, entre sumas de paralelógramos y de prismas, considerando así sus volúmenes como *integrales definidas* (106) que logró calcular en muchos casos. La facultad, que de lo dicho proviene, para considerar una superficie ó un cuerpo, como una suma de paralelógramos ó de prismas, infinitamente delgados y en número infinito, fué aún más estimada en el siglo xvii por Keppler (*Stereometría doliorum* 1615), Cavalieri (*Geometría indivisibilibus continuorum promota* 1635), Fermat y otros; encontrando su expresion adecuada en el descubrimiento del Análisis infinitesimal. Véase Klügel (*Math. W.* I, *p.* 416).

menor que la base del prisma interno, ni mayor que la del externo. Ahora bien, la diferencia entre la capa sólida y el prisma que proyecta en la misma la base u es menor que la diferencia entre los dos prismas, el interno y el externo, es decir: menor que un prisma cuya base sea la proyeccion de la zona. Luego la suma de las diferencias entre cada una de las capas y los prismas construidos dentro de las mismas es menor que un prisma de altura δ, cuya base está constituida por las proyecciones de las zonas de todas aquellas capas, y tiene un valor finito. El volúmen de este prisma desaparece cuando desaparece ó se anula la altura δ; y, por consecuencia, la diferencia entre la suma de los prismas construidos en cada una de las capas ó estratos del cuerpo y este cuerpo mismo se desvanecerá, en el momento que el número de las secciones trasversales llegue á ser infinito.

Sirva de ejemplo la pirámide trilátera, $ABCS$. Sus secciones trasversales son paralelas á la base ABC; y estas secciones son proyectadas sobre los planos siguientes, mediante paralelas á la arista As. La diferencia entre el primer segmento de la pirámide y el prisma en él construido, es menor que el prisma cuya altura es δ y cuya base es la proyeccion $BCDE$ de la zona BCC_1B_1 sobre el plano de una seccion, etc. Luego la suma de las diferencias entre cada uno de



los segmentos ó trozos de la pirámide y los prismas en ellos construidos es menor que un prisma de altura δ, y cuya base es la proyeccion de la superficie BCS sobre el plano de una seccion. Y este prisma no se diferencia del construido sobre la base ABC, y se anula juntamente con su altura δ.

105. Supongamos dos cuerpos, colocados sobre un plano, y que ambos toquen en otro plano, paralelo al primero. Si las secciones de los dos cuerpos, tanto en estos planos como en planos paralelos intermediarios, tienen la misma razon m, los volúmenes de los dos cuerpos tendrán tambien la razon m (*).

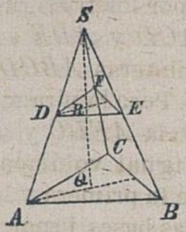
Demostracion. Divídase la capa comprendida entre el primero y el último plano en otras de igual altura, y en todas estas capas intermediarias, y sobre las secciones de los cuerpos dados, constrúyanse prismas del modo que ántes (104) dijimos. Los prismas pertenecientes al primer cuerpo tienen con los del segundo respectivamente la razon m; porque, segun la hipótesis, sus bases tienen la razon m, y, segun su construccion, sus alturas son iguales (100). La suma de los prismas del primer cuerpo, en consecuencia, tiene la mencionada razon m con la suma de los prismas del segundo. Y estas sumas, cuando el número de capas es infinito, no se diferencian de los cuerpos mismos (104).

106. La razon de los volúmenes de dos pirámides (ó conos), con alturas iguales, es igual á la razon de sus bases (Eucl. XII, 5) (**).

(*) Cavalieri (*Geometria indivisibilibus continuorum promota*, II, 4).

(**) No se ha logrado todavía por ningun medio descompo-

DEMOSTRACION. Supongamos que la pirámide $ABCS$, cuya altura es QS, sea cortada por un plano, paralelo á su base, á la distancia RS de su cúspide. La seccion trasversal DEF es semejante á la base ABC de la pirámide (51); y, por consecuencia:



$$DEF : ABC = (DE : AB)^2 = (DS : AS)^2 = (RS : QS)^2$$

En otra pirámide, cuyos elementos correspondientes se designen por las mismas letras, acentuadas, que hemos designado los de la primera, tendremos por la misma razon:

$$D'E'F' : A'B'C' = (R'S' : Q'S')^2$$

Mas, segun la hipótesis: $QS = Q'S'$, $RS = R'S'$. Luego

$$DEF : ABC = D'E'F' : A'B'C'$$
$$\text{ó } DEF : D'E'F' = ABC : A'B'C'$$

Resultando, por último, que la razon de los volúmenes de las dos pirámides es (105) $= ABC : A'B'C'$.

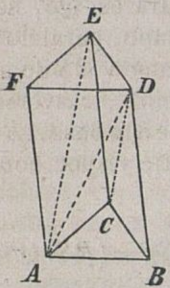
107. Una pirámide (ó un cono) es la tercera parte de un prisma (ó un cilindro) que tiene con ella igual base é igual altura (*). Esto es (103):

$$Pirámide = \frac{1}{3} \; Base \times Altura$$

---

ner dos pirámides, con iguales bases é iguales alturas, de manera que la igualdad de sus volúmenes resultase de la congruencia de sus partes.

(*) La cubatura de la pirámide fué hallada por EUDOXO,



DEMOSTRACION. El prisma trilátero $ABCDEF$ queda dividido por los triángulos diagonales ACD y ADE en las pirámides triláteras $ABCD$, $DAEC$ y $ADEF$. Pero la pirámide $ABCD$, como la $AEDC$ y la $ADEF$, son de igual volúmen; en atencion á que la primera y la segunda tienen las bases iguales BCD y EDC, é iguales alturas; y la primera y la tercera tienen las bases iguales ABC y DEF, é iguales alturas (106). Luego la pirámide $ABCD$ es el tercio del prisma $ABCDEF$.

Que una pirámide multilátera es tambien el tercio de un prisma que con ella tiene igual base é igual altura, se demuestra sencillamente, descomponiendo la pirámide dada en pirámides triláteras.

108. La razon de dos pirámides se calcula del mismo modo que la razon de los prismas triples, que tienen con ellas alturas y bases respectivamente iguales, á saber: multiplicando la razon de sus bases por la razon de sus alturas (102).

Si las pirámides son semejantes (88), sus bases son figuras planas, semejantes, y sus alturas, segmentos correspondientes. La razon de las bases será el cuadrado de la razon de dos segmentos correspondientes; y la razon de los volúmenes de las pirámides semejantes, por consecuencia, sera el cubo

---

contemporáneo de PLATON, segun refiere ARQUÍMEDES en la introduccion á su primer libro sobre la Esfera y el cilindro.

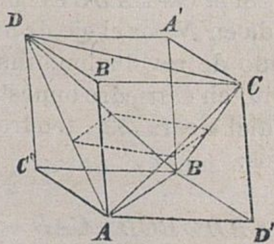
de la razon de segmentos correspondientes (EUCLIDES XII, 8).

En general, la razon de los volúmenes de cuerpos semejantes es el cubo de la razon de sus segmentos correspondientes; porque cuerpos semejantes están compuestos de tetraedros respectivamente semejantes dos á dos, ó cada dos correspondientes.

109. Un tetraedro es el tercio de un paralelepípedo, circunscrito al mismo (78) de modo que las aristas opuestas del tetraedro caigan sobre las caras opuestas del paralelepípedo (*). En efecto, cada cara del tetraedro corta del paralelepípedo una pirámide que vale el tercio de la mitad del paralelepípedo. Por ejemplo, $ABCD' = \frac{1}{3} ABD'B'CA'$ $= \frac{1}{6} AD'BC'B'CA'D$.

El volúmen de un tetraedro permanece invariable mientras las longitudes, las direcciones y la distancia de dos de sus aristas opuestas permanezcan invariables.

La distancia de las aristas opuestas, AB y CD, del tetraedro dado es la altura del paralelepípedo tomando para su base $AD'BC'$. Pero la seccion media del tetraedro, cuyo plano es paralelo á las aristas AB y CD, y divide por mitad la capa contenida entre éstas, es la mitad del paralelógramo $AD'BC'$; porque la mitad de aquella secci on y la cuarta parte de este para-



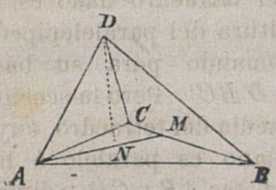
(*) MONGE (*Corresp. sur l'Éc. polyt. I, p. 441*).

lelógramo son congruentes. Luego el volúmen del tetraedro es $\frac{2}{3}$ del producto de la distancia entre dos de sus aristas opuestas por su seccion media, paralela á estas mismas (*).

110. Si dos tetraedros, $ABCP$ y $ABCQ$, tienen la base comun, el segmento PQ será dividido en R por el plano ABC segun la razon de los dos tetraedros. Puesto que $PR : QR$ es igual á la razon de las alturas de los dos tetraedros; y la razon de sus alturas es igual á la de sus volúmenes.

Una arista de un tetraedro es dividida por el plano que biseca el ángulo diédrico opuesto, segun la razon de las caras ú hojas que incluyen el diedro (**). En efecto, si el plano bisector del diedro $B\overline{AD}C$ corta en M á la arista BC, el punto M estará equidistante de los planos BAD y DAC; miéntras que BM y CM son entre sí como las distancias de los puntos B y C al plano DAM. Luego

$$BM : MC = DABM : DAMC = BAD : DAC.$$



Si la cara ABC es cortada en N por el eje de un cono de revolucion, inscrito en el triedro opuesto á dicha cara (53), tendremos:

$$ABN : BCN : CAN = ABD : BCD : CAD$$

Porque los triángulos ABN, ..., son entre sí

(*) *Trigonometría* (VI).
(**) *Ann. de Gergonne* 3, p., 317.

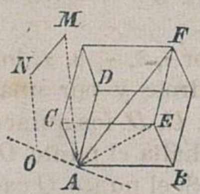
como los tetraedros de igual altura $ABND$, ...; y además N equidista de las caras ABD, BCD y CAD.

111. Si AB, AC y AD son las aristas que salen de un vértice de un paralelepípedo, AF la diagonal que sale del mismo vértice, y MN representa un segmento arbitrario, se verificará, en general, la relacion ó ecuacion siguiente entre tetraedros:

$$MNAF = MNAB + MNAC + MNAD$$

siempre que los tetraedros del mismo sentido (82) tengan signos iguales, y signos opuestos los tetraedros de sentidos contrarios (*).

Demostracion. Trácese por el extremo N la paralela con MA, que corte en O al plano ABC; y la diagonal AE del paralelógramo $CABE$. Segun el teorema de Varignon (*Planim.* 75) es



$$OAB + OAC = OAE$$

y para las pirámides con estas bases y con igual altura:

$$MOAB + MOAC = MOAE$$

en la inteligencia de que los signos respectivos de estas pirámides son determinados por los de los triángulos OAB, OAC y OAE. Pero $MOA = MNA$, etc.: luego tambien

$$MNAB + MNAC = MNAE$$

(*) Möbius (*Statik* §. 63).

Y respecto del paralelógramo $DAEF$ se verifica tambien la ecuacion

$$MNAE + MNAD = MNAF$$

Y sumando las dos últimas resulta, finalmente, la que buscamos:

$$MNAB + MNAC + MNAD = MNAF.$$

112. Para los tetraedros determinados por cinco puntos, que segun su sentido serán positivos ó negativos, se verifica la ecuacion (*).

$$ABCD = ABCO + BADO + ACDO + CBDO.$$

Demostracion. Designemos por τ, δ, γ, β, α, los valores absolutos de estos tetraedros; y por una, dos, tres, ó las cuatro letras A, B, C, D, los quince espacios, en uno de los cuales se halla el punto O, como hicimos en otro lugar (74). Si el punto O cae en el espacio $(ABCD)$, todos los tetraedros son del mismo sentido, y evidentemente será $\tau = \delta + \gamma + \beta + \alpha$. Si O se traslada al espacio (ABC), el tetraedro $ABCO$ cambiará de signo, y entónces, conforme manifiesta la representacion misma, será $\tau = -\delta + \gamma + \beta + \alpha$. Con la misma evidencia se percibe que, si O salta del espacio (ABC) al (AB), cambia de signo $BADO$ y resulta $\tau = -\delta - \gamma + \beta + \alpha$; y, por último, que si O se traslada del espacio

(*) Möbius (*baryc. Calcul.* 20). Monge (*J. de l'Éc. polyt. Cah.* 15, *p.* 68).

(AB) al espacio *(A)*, cambia de signo *ACDO* y es $\tau = -\delta - \gamma - \beta + \alpha$. Y esto prueba que, en todos los casos, la ecuacion establecida al principio concuerda con la representacion, ó es visiblemente cierta.

Observacion. Si, en particular, el punto O es el centro de la esfera inscrita en el tetraedro $ABCD$ (31); y designamos por r la longitud del rádio de esta esfera, y por a, b, c, d, las áreas de las caras del tetraedro, opuestas á los vértices A, B, C, D respectivamente, será (*)

$$\tau = \frac{1}{3}(a + b + c + d)r.$$

Llamando r_1, r_2, r_3, r_4 los radios de las esferas inscritas en los espacios *(CBD)*, *(ACD)*, *(BAD)*, *(ABC)*, se obtiene del mismo modo:

$$\tau = \frac{1}{8}(-a + b + c + d)r.$$

y así para los demás espacios.

Y, si en el espacio *(AB)* puede incribirse una esfera, cuyo radio sea r_5, tendremos:

$$\tau = \frac{1}{3}(a + b - c - d)r_5.$$

Y así para los demás espacios análogos.

De estas mismas fórmulas se deduce esta otra:

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}$$

y las demás análogas (**).

(*) Lagrange (*Sur le pyr.* 24. *Mém.* de Berlin, 1773).

(**) Steiner (*Ann. de Gerg.* 19. *p.* 93, y *J. de Crelle, A.* 2, *p.* 97).

113. Como en el contorno de un polígono plano se distinguió *(Planim.* 77) la orilla derecha de la izquierda (la clara de la sombreada), así en un poliedro se distinguirá el frente externo del frente interno de su superficie. Para que se comprenda bien ésto, se pinta enteramente el frente exterior de color claro, pasando de una cara del poliedro á otra contigua por encima de la arista comun, y se deja el frente interior de color oscuro; mas, si una cara del poliedro se compone de celdas de diferentes signos, al pasar de una celda pintada á otra con designacion opuesta, se pasa al mismo tiempo al otro frente de la superficie y por este mismo frente se seguirá pintando. Entre los poliedros entrecortados existen todavía algunos extraordinarios (descubiertos por Möbius), en los que no se distinguen los frentes, interno y externo, de sus superficies: de tal modo que, pintando sus frentes como ántes dijimos, resultan los poliedros pintados enteramente, por dentro y por fuera, con el mismo color (*).

En todo poliedro, que no pertenezca á los recordados de Möbius, pueden expresarse las caras por sus contornos respectivos, de manera que cada arista, como lado comun de dos caras contiguas, reciba expresiones opuestas *(ley de las aristas)*. Para esto es necesario y suficiente que en todas las caras resulten de igual sentido los giros que se indican al expresar sus contornos, para un observador situado en el mismo frente de las mismas.

(*) Möbius publicó este descubrimiento y las demostraciones de los siguientes teoremas, en 1865 *(Berichten der Sächs. Ges. d. W, p. 31)*.

Así, por ejemplo, en un tetraedro con los vértices A, B, C y D, si una cara se expresa por ABC, la cara determinada por los puntos A, B y D recibirá la expresion BAD (y no la ABD); pues así los giros ABC y BAD resultan del mismo sentido para un observador, colocado por fuera y de pié sobre aquellas caras.

Las expresiones de las otras caras serán ACD y CBD. Y procediendo de este modo, en efecto, si por AB designamos la arista limitada por los puntos A y B, como lado de la cara ABC, deberemos designarla por la expresion opuesta BA, como lado de la cara BAD, etc.; con lo cual la ley de las aristas se cumple. Las caras de un prisma, determinado por las aristas iguales y paralelas AA', BB' y CC', tendrán, segun la ley de las aristas, las expresiones ABC, $ACC'A'$, $CBB'C'$, $BAA'B'$, $C'B'A'$. Etc.

La pirámide, cuya base sea una cara del poliedro dado y cuyo vértice sea un punto cualquiera del espacio, tendrá valor positivo, ó negativo, segun que su vértice caiga del lado interno (oscuro), ó del lado externo (claro, pintado) de la expresada cara. En tal supuesto, la suma de las pirámides que tengan un vértice comun, y cuyas bases sean las caras de un poliedro, es independiente de la situacion de dicho vértice.

Demostracion. Designemos por Oa, Ob, ... Pa, Pb, ... las pirámides, cuyas bases sean las caras a, b, ... del poliedro y cuyos vértices sean los puntos arbitrariamente situados O y P; y por sus contornos, las caras, á saber: a por ABC, ..., etc., segun la ley de las aristas. Si la diferencia $Oa - Pa$

no se anula, y el plano de la cara a, por consecuencia, corta en Q á la recta OP, tendremos (*Planimetria* 77): $a = QAB + QBC + ...$; y multiplicando esta igualdad por la tercera parte de la altura de la pirámide:

$$Oa = OQAB + OQBC + ...$$
$$Pa = PQAB + PQBC + ...$$

Mas $OQ - PQ = OP$, $OQA - PQA = OPA$, $OQAB - PQAB = OPAB$. Luego

$$Oa - Pa = OPAB + OPBC + ...$$

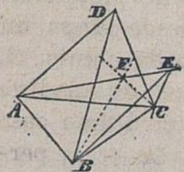
Esto prueba que la suma de todas las diferencias, $Oa - Pa + Ob - Pb + ...$, es igual á la suma de los tetraedros que tienen por aristas opuestas, la arista comun OP y un lado de los polígonos que son caras del poliedro. En esta suma de tetraedros, segun la ley de las aristas, figura al lado de cada tetraedro, como $OPAB$, su opuesto $OPBA$: de lo cual resulta que la suma de las diferencias desaparece, y la suma de las pirámides, $Pa + Pb + ...$, es igual á la de las pirámides, $Oa + Ob + ...$

Observacion. Si el poliedro pertenece á los extraordinarios (de Möbius), en la suma $Oa + Ob + ...$ figurará cada pirámide dos veces, una positiva y otra negativamente; y dicha suma, por lo tanto, será idénticamente nula.

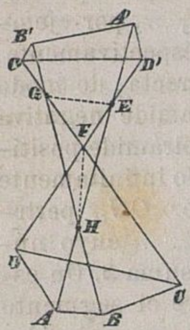
114. La suma, Σ, de pirámides, $Oa + Ob + ...$, independiente de la situacion del vértice O, en un poliedro cuya superficie no se pliegue ó corte, es igual al volúmen de este poliedro.

DEMOSTRACION. Una recta corta, en general, un número par de caras de un poliedro cuya superficie no se pliegue: á las caras f_1, f_2, f_3 ..., por ejemplo, en los puntos G_1, G_2, G_3 ..., respectivamente. Elíjase el punto O sobre la misma recta, de modo que la pirámide Of_1 sea una pirámide negativa de la suma Σ; que Of_2 sea una pirámide positiva; Of_3, otra negativa, etc. Un espacio infinitamente pequeño, sobre el segmento exterior OG_1, pertenece á todas las pirámides Of_1, Of_2, ... cuyo número es par; pero no figura en la suma Σ. Un espacio, infinitamente pequeño, sobre el segmento interior G_1G_2, pertenece á todas las pirámides Of_2, Of_3, ... cuyo número es impar, y figura, por lo tanto, como parte positiva, integrante de la suma Σ; etc. Luego esta suma Σ contiene todas las partes del espacio interior (y sólo éstas) una sola vez y positivamente.

El volúmen de un poliedro multicelular, cuya superficie se pliegue, es definido por la suma antedicha de pirámides. Así, por ejemplo, para volúmen del exaedro con cinco vértices, formado por los triángulos ABD, BCD, CAD, CBE, BAE y ACE, se halla la expresion $ABCD + ACBE = ABCD - ABCE$, suponiendo en A los vértices de las pirámides; ó la expresion $FABD + FCAD + FCBE = AFDB + ADFC - FBCE$, trasladando el vértice de las pirámides al punto F de interseccion de la arista AE con la cara BCD.



Para el exaedro con ocho vértices, constituido por los cuadrángulos convexos $ABCD$ y $D'C'B'A'$, y los cuadrángulos $ADD'A'$, $DCC'D'$, $CBB'C'$ y $BAA'B'$, cuyos contornos se cortan en E, F, G y H respectivamente, se encuentra el volúmen siguiente:



$$\begin{array}{l} OABCD \qquad\qquad +OD'C'B'A' \\ +OADFH+OHFE+OED'A' \\ +ODCF \;\; +OFGE+OEGC'D' \\ +OCBHF+OFHG+OGB'C' \\ +OBAH \;\; +OHEG+OGEA'B' \end{array}$$

Esto es: la suma de las dos celdas exteriores disminuida en la celda intermedia.

Observacion. Dados los polígonos planos, a, b, c, ... (separados ó reunidos) y pintados todos ellos por una de sus caras, para así calificar de positivo, ó negativo, el valor de una pirámide cuya base sea uno de dichos polígonos, segun que el vértice de la misma mire hácia la cara no pintada, ó á la pintada, del plano de su base; la suma de pirámides, $Oa + Ob + Oc + ...$, ó tendrá desde luego un valor, independiente de la situacion del punto O, ó adquirirá ese mismo valor despues de añadirle otra pirámide determinada Op. En el último caso la suma considerada, $Oa + Ob + Oc + ...$, permanece invariable cuando el vértice O se mueve sobre un plano de postura determinada (paralelo al plano de p) (*).

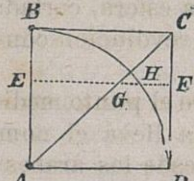
(*) Möbius (*Statik* 56). Véase la *Planimetría* (78) y (86).

IX. — Cubatura de la esfera y de otros cuerpos.

115. El volúmen de una esfera vale dos tercios del cilindro circunscrito cuya base es un círculo máximo y cuya altura es un diámetro de la misma esfera (*), á saber:

$$\text{\textit{Volúmen de la esfera}} = \frac{2}{3}\ \text{\textit{Área del círculo máximo}}$$
$$\times\ \text{\textit{Diámetro}} = \frac{4}{3}\pi\ \text{\textit{rádios cúbicos.}}$$

DEMOSTRACION. El cuadrado $ABCD$, volteando alrededor del eje AB, describe con su otro lado CD un cilindro de revolucion; con su diagonal AC, un cono de revolucion; y con el cuadrante circular inscrito, BD, un hemisferio. Cualquier plano, normal al eje en E, corta á las tres superficies engendradas, en círculos concéntricos cuyos rádios respectivos son EF, EG y EH. Ahora bien, los ángulos CAB, BCA y EGA son iguales; y por



(*) La medida del volúmen de la esfera, y la de su superficie (expresadas por el área de un círculo máximo), es uno de los brillantes trabajos de ARQUÍMEDES, contenido en su escrito sobre la Esfera y el cilindro I, 37. Por esto la esfera y el cilindro fueron grabados sobre su tumba en Siracusa; y por estos signos la reconoció CICERON *(Tusc. Qu. V.* 23). La nueva fórmula de la demostracion aparece en SEGNER *(Anfansgr. d. Math.*, §. 581 de la 2.ª ed., 1773).

lo tanto, $EG = AE$; y segun el teorema de Pitágoras: $EG^2 + EH^2 = AE^2 + EH^2 = AH^2 = AD^2 = EF^2$. Luego la suma de la seccion cónica ($\pi.EG^2$) y de la seccion esférica ($\pi.EH^2$) es igual á la seccion cilíndrica ($\pi.EF^2$) *(Planim.* XIII). De esta ecuacion, que subsiste para todas las secciones transversales de los tres cuerpos, cono, hemisferio y cilindro, se concluye (105) que la suma del cono y el hemisferio, es igual al cilindro. Y, como el cono es $\frac{1}{3}$ del cilindro (107), será el hemisferio $\frac{2}{3}$ del mismo, etc.

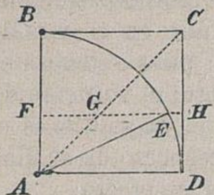
116. La porcion de superficie, limitada por un plano, se llama *zona* (ζωνη, *calotte)*; y el espacio cerrado por la zona y el plano que la limita se denomina *segmento sólido*. Por *sector esférico* se comprende una parte del volúmen de la esfera, cortada ó separada de ésta por un cono de revolucion concéntrico.

El segmento comprendido entre el punto medio de un arco circular y su cuerda lleva el nombre de *sagita del arco circular* (desde los árabes). Y asimismo toma el nombre de sagita de una zona esférica, ó de un segmento esférico, ó de un sector esférico, el segmento comprendido entre el centro esférico y el centro plano del círculo que tiene comun la esfera, ó con el plano que limita la zona y el segmento, ó con el cono de revolucion que limita el sector.

Tambien se llaman zonas y segmentos, porciones de superficies y de sólidos, encerradas entre dos superficies, particularmente entre dos planos paralelos.

Un sector esférico vale *dos tercios* de un cilindro cuya base es un círculo máximo de la esfera y cuya altura es la sagita del sector (*).

DEMOSTRACION. Complétese el cuadrante ABD, del cual es parte el sector circular ABE; constrúyase el cuadrado circunscrito $ABCD$ con su diagonal AC; y trácese la normal EF al lado AB, que cortará en G á la diagonal AC y en H al lado CD. El sector esférico, engendrado por la revolucion del sector circular ABE alrededor del eje AB, y cuya sagita es BF, le designaremos por (ABE); el segmento esférico, engendrado por la revolucion del segmento circular FBE alrededor de FB, por (FBE), etc. De la ecuacion (115) entre las secciones transversales de los tres cuerpos (ABD), (ABC) y $(ABCD)$ se deduce (105) la referente á los volúmenes, $(FBE)+(FBCG)=(FBCH)$; y, en consecuencia:



$$(FBE)=(FBCH)-(ABC)+(AFG)$$

Además, por la relacion entre sus bases, tenemos la ecuacion de los conos

$$(AFE)=(AFH)-(AFG)$$

Y sumando aquélla y ésta resulta:

$$\begin{aligned}(ABE) &= (FBCH)-(ABC)+(AFH)\\ &= (FBCH)-(FBC)=\tfrac{2}{3}(FBCH)\end{aligned}$$

Puesto que los conos (ABC) y (AFH) tienen

(*) ARQUÍMEDES (*Sph. et. cyl. I*, 50).

bases iguales; y el cono *(FBC)* tiene comunes con el cilindro *(FBCH)* la base y la altura.

Observacion. Representado por r el rádio, y la longitud de la sagita por s, el sector esférico contendrá $\frac{2}{3}\pi r^2 s$ unidades cúbicas, áun en el caso de que la sagita sobrepuje al rádio; pues entónces el sector esférico es la diferencia entre el volúmen de la esfera y el del sector esférico cuya sagita es el complemento de la sagita dada respecto de su diámetro. Expresándolo así tenemos, en efecto:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^2(2r - s) = \frac{2}{3}\pi r^2 s.$$

Si la sagita es un diámetro, el sector esférico se convierte en hemisferio, y $\frac{2}{3}\pi r^2 s$ en $\frac{4}{3}\pi r^3$.

117. Si el rádio de la esfera es r, y la longitud de la sagita s, el *volúmen del segmento esférico* comprenderá $\pi r s^2 - \frac{1}{3}\pi s^3$ unidades cúbicas (*).

Demostracion. La ecuacion (116) ántes establecida,

$$(FBE) = (FBCH) - (ABC) + (AFG)$$

da inmediatamente el volúmen que se busca, á saber:

$$\pi r^2 s - \frac{1}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi\,(r - s)^3 = \pi r s^2 - \frac{1}{3}\pi s^3 \text{ unid. cúbicas.}$$

Si la sagita es mayor que el rádio, el segmento será la diferencia entre el volúmen de la esfera y el del segmento cuya sagita es $2r - s$ á saber:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - \pi r(2r - s)^2 + \frac{1}{3}\pi(2r - s)^3 = \pi r s^2 - \frac{1}{3}\pi s^3.$$

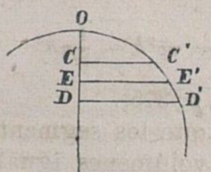
(*) Arquímedes *(l. c. II, 3)*.

Observacion. Por el mismo procedimiento se obtiene la ecuacion $(AFED) = (AFHD) - (AFG)$ de la cual inmediatamente se deduce el volúmen de un segmento, comprendido entre un círculo máximo y un paralelo. Dicho volúmen, en efecto, designando por h la longitud de la distancia entre los centros de los dos círculos, comprende $\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3$ unidades cúbicas.

El círculo comun á la esfera y al plano tiene el área $\pi\,[r^2 - (r-s)^2] = \pi s(2r - s)$. El cono, cuya base es este círculo y cuya altura es la sagita, tiene el volúmen $\frac{1}{3}\pi s^2(2r - s)$. Y la razon del segmento anterior con este cono es

$$\frac{\frac{1}{3}\pi s^2\,(3r - s)}{\frac{1}{3}\pi s^2\,(2r - s)} = \frac{3r - s}{2r - s} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}s}{2r - s}.$$

118. El segmento esférico, comprendido entre dos círculos cualesquiera, es la diferencia de dos segmentos esféricos de los ya calculados (117). Representando, pues, por s y t las longitudes de las sagitas de estos últimos segmentos, el volúmen del que buscamos tendrá $\pi r(t^2 - s^2) - \frac{1}{3}\pi\,(t^3 - s^3)$ unidades cúbicas.



Si en lugar de las sagitas OC y OD conocemos su diferencia $t - s = h$, y los rádios $CC' = a$ y $DD' = b$ de los círculos que limitan el segmento, será

$$t^2 - s^2 = (t + s)\,h$$
$$t^3 - s^3 = h^3 + 3tsh$$
$$r(t^2 - s^2) - \frac{1}{3}(t^3 - s^3) = r(t + s)h - tsh - \frac{1}{3}h^3.$$

Mas, segun el teorema de Pitágoras:

$$2rs = OC'^2 = a^2 + s^2, \quad 2rt = OD'^2 = b^2 + t^2$$

y, por consecuencia:

$$2r(t+s) - 2ts = a^2 + b^2 + h^2$$

Luego el volúmen del segmento esférico es

$$\pi r(t^2 - s^2) - \frac{1}{3}\pi(t^3 - s^3) = \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2)h + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

Si OE es el medio aritmético de las sagitas OC y OD, y se traza EE' normal á OE hasta la superficie de la esfera E', el círculo de ésta, cuyo centro es E y cuyo rádio es $EE' = \rho$, por su situacion toma el nombre de *círculo medio del segmento esférico*.

Ahora bien, $OE.2r = OE'^2 = OE^2 + EE'^2$; y, por lo tanto:

$$r(t+s) = \rho^2 + \frac{1}{4}(t+s)^2$$

$$r(t+s) - ts = \rho^2 + \frac{1}{4}h^2$$

Y el segmento esférico entónces:

$$\pi r(t^2 - s^2) - \frac{1}{3}\pi(t^3 - s^3) = \pi\rho^2 h - \frac{1}{12}\pi h^3$$

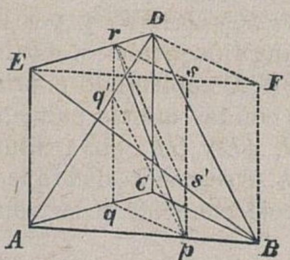
(Winkhaus. *J. de Crelle A.* 44, *p.* 375).

Esta última fórmula enseña que los segmentos de diferentes esferas tendrán volúmenes iguales cuando sus círculos medios y las diferencias entre sus sagitas sean iguales.

119. El segmento, comprendido entre planos paralelos, de una *superficie reglada* cualquiera,

puede expresarse mediante dos cilindros y un cono. Constrúyanse, pues, entre los planos paralelos, tanto los cilindros cuyas bases sean las secciones producidas por aquellos planos en la superficie reglada, como el cono director ó correlativo de esta misma superficie, cuyo vértice está en uno de dichos planos paralelos y cuyas aristas ó generatrices son paralelas á las generatrices rectilíneas de la superficie reglada. Y el duplo del segmento dado será la suma de los dos cilindros construidos disminuida en el cono director ó correlativo (*).

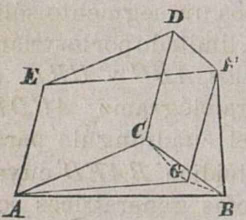
Demostracion. Supongamos un segmento sólido, limitado por los triángulos ABC y CBD, el paralelógramo $ACDE$, y el cuadrángulo paraboloidico $BAED$ cuyas rectas generatrices son paralelas al plano BCD (8). Completando el prisma con las aristas paralelas CD, AE y BF, las rectas del cuadrángulo paraboloidico aparecerán como diagonales de para-



(*) La cubatura de los poliedros especiales de esta clase fué calculada por Meier Hirsch 1806, (*Géom. Aufg. II*, 102, 155, 189). Su interpretacion geométrica y la deduccion de las fórmulas correspondientes fueron halladas por Koppe, 1838 (*J. de Crelle, A.* 18, *p.* 275 y *Neuer Lehrsatz der Stereom.* Essen 1843). Véase Grunert (*Arch.* 9, *p.* 82). Otra cubatura de los segmentos sólidos, arriba considerados, publicó Steiner 1842 (*J. de Crelle* 23, *p.* 275). Véanse tambien Brix (*J. de Crelle A.*, 25, *p.* 129); August (*J. de Borchardt A.* 60, *p.* 377) y la conclusion de este párrafo.

lelógramos, tales como el $pqrs$, que son secciones del prisma por planos paralelos al $BCDF$. De la biseccion de estas secciones paralelas del prisma por sus respectivas diagonales se deduce (105) que el prisma es bisecado tambien por el cuadrángulo parabolóidico $BAED$. Si por h designamos la distancia de la recta DE al plano ABC, el volúmen del prisma será $ABC.h$, y el del segmento dado, por consecuencia, $\frac{1}{2}ABC.h$ (*).

Sea ahora otro segmento sólido, limitado por el paralelógramo $ACDE$, los cuadrángulos parabolóidicos $CBFD$ y $BAEF$, y por los triángulos paralelos ABC y DFE. Completando el prisma con las aristas paralelas CD, AE y GF, cuya altura es h, el segmento dado queda dividido en partes de especie conocida y su volúmen es



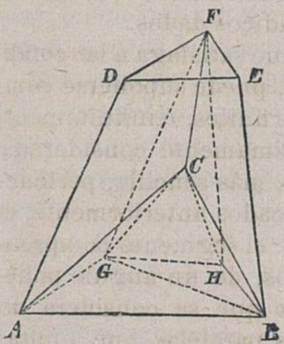
$$\frac{1}{2}ABG.h + \frac{1}{2}BCG.h + \frac{1}{2}CAG.h + \frac{1}{2}DEF.h.$$

(*) Este segmento fué cubicado mediante el cálculo integral por TINSEAU 1780 (*Mém. de Math. et Phys. prés. t. 9, p.* 612), y por MEIER HIRSCH (*l. c.* 181) elementalmente. Por el método explicado se reconoce tambien que un tetraedro es bisecado por un cuadrángulo parabolóidico que tiene por lados opuestos las aristas opuestas de aquél. Así, por ejemplo, el tetraedro $ABDE$ es bisecado por el cuadrángulo parabolóidico $ABDE$; porque sus secciones, tales como $pq'rs'$, que son paralelas á las aristas BD y EA, son bisecadas por sus diagonales. MÖBIUS (*baryc. Calcul., p.* 238) y STEINER (*l. c., p.* 280).

Y como *(Planim.* 76) $ABG + BCG + CAG = ABC$, el segmento dado tendrá por volúmen

$$\tfrac{1}{2}(ABC + DEF)h.$$

Si un segmento sólido está limitado por los cuadrángulos parabolóidicos, $ACFD$, $CBEF$ y $BADE$, y los triángulos paralelos ABC y DFE, cuya distancia es h, se trazan por F rectas paralelas con DA y EB que cortan el plano ABC en los puntos G y H, y se construye el cuadrángulo parabolóidico $BGFE$ cuyas rectas generatrices son paralelas al plano FGH. Ahora bien, el segmento limitado por los cuadrángulos parabolóidicos $CBEF$ y $BGFE$, y los triángulos GCF y GBC, tiene por volúmen:

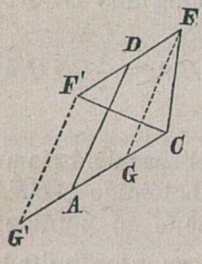


$$\tfrac{1}{2}GBH.h + \tfrac{1}{2}BCH.h + \tfrac{1}{2}CGH.h - \tfrac{1}{6}CGH.h$$
$$= \tfrac{1}{2}BCG.h - \tfrac{1}{6}CGH.h.$$

El segmento, limitado por el paralelógramo $GADF$, por el cuadrángulo parabolóidico $ACFD$ y los triángulos CGF y CAG, tiene su volúmen $= \tfrac{1}{2}CAG.h$. Y, por último, el segmento, limitado por el parelelógramo $AGFD$, los cuadrángulos parabolóidicos $GBEF$ y $BADE$, y los triángulos ABG y DFE, tiene, segun ántes dijimos, un volúmen $= \frac{1}{2}(ABG + DEF)h$; y sumando se halla el segmento dado $= \frac{1}{2}(ABC + DEF)h - \frac{1}{6}CGH.h$. Aquí es CGH la base del cono (ó pirámide) director de la superficie parabolóidica. En efecto, las rectas que por F pueden trazarse, sobre las caras GFH, HFC y CFG del triedro formado en F, son paralelas respectivamente á las rectas mediante las cuales son construidas las caras de los cuadrángulos parabolóidicos dados.

Todo segmento sólido, que satisfaga á las condiciones del teorema anterior, puede suponerse compuesto de segmentos sólidos finitos, ó infinitamente pequeños, de la especie últimamente considerada.

120. El segmento sólido, más sencillo, perteneciente á la clase de los cubicados anteriormente, es el *tronco de pirámide*, ó sea: el segmento comprendido entre planos paralelos, de un ángulo poliédrico; y el *tronco de cono* que se considera del mismo modo. Las secciones paralelas que limitan el segmento, y la base del cono director ó correlativo, que designamos por a, b y d, son en este caso figuras semejantes, cuyos segmentos correspondientes verifican la proporcion $AC : DF : GC = 1 : m : 1 - m$ y, por consecuencia:



$$a : b : d = 1 : m^2 : (1 - m)^2.$$

De este modo la fórmula ó expresion $\frac{1}{2}(a + b)h$

$-\frac{1}{6}dh$, hallada para el volúmen del tronco de pirámide (119), adquiere el valor

$$\frac{1}{2}[1 + m^2 - \frac{1}{3}(1 - m)^2]ah = \frac{1}{3}(1 + m + m^2)ah$$
$$= \frac{1}{3}(a + \sqrt{ab} + b)h \quad (*)$$

Si las aristas de la pirámide (ó del cono) se cortan dentro de la capa limitada por los planos paralelos, como AD y CF', por ejemplo, deberá sustituirse m por $-m$, segun la figura indica.

El mismo volúmen para el tronco de pirámide se halla inmediatamente, considerándolo como diferencia (ó suma) de las pirámides cuyas bases son a y b, y cuyas alturas son $h \mp x$ y x. En este caso tenemos

$$h \mp x : x : h = \sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{a} \mp \sqrt{b}$$

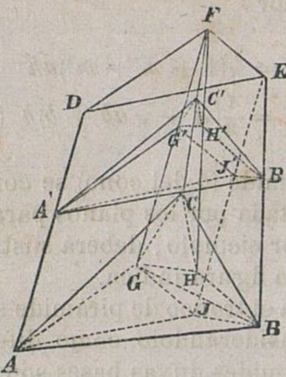
y, por consecuencia:

$$\frac{1}{3}a(h \mp x) \pm \frac{1}{3}bx = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{a} \pm b\sqrt{b}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}h = \frac{1}{3}(a \mp \sqrt{ab} - b)h$$

121. Toda seccion del segmento sólido considerado ántes (119), por un plano normal á su altura, puede calcularse mediante sus superficies limitadoras, paralelas, y la base de su cono director ó correlativo. Sea, pues, el plano de la seccion

(*) Publicada por Leonardo de Pisa *(Practica Geometriae fól. 113)* y Commandino *(de centro gravitatis prop. 23)*. Por $\frac{1}{3}(1+m+m^2)$ puede tambien ponerse $\frac{1}{4}(1+m)^2 + \frac{1}{12}(1-m)^2$.

$A'B'C'$, parelelo á los planos ABC y DEF, y en tal situacion que divida la capa entre DEF y ABC, de modo que $A'D = v.AD$, etc. El cuadrángulo parabolóidico $ACFD$ es cortado en la recta $C'A'$ por el plano $A'B'C'$, al cual son paralelas AC y FD (8).



Ahora bien, la seccion $A'B'C'$, comparada con la base ABC, contiene en lugar del triángulo CAG el triángulo $C'A'G'$, cuya razon con CAG tiene el valor v; por ser $A'G' = AG$, el ángulo $A'G'C' = AGC$, y el lado $G'C' = v.\ GC$.

La misma seccion $A'B'C'$ contiene, en lugar del triángulo CGH, el semejante $C'G'H'$, cuya razon con el otro es v^2.

Tambien contiene $A'B'C'$, en vez del triángulo ABC, el triángulo $A'B'G' = G'A'J' + A'B'J' + B'G'J'$; siendo J y J' los puntos en que son cortados los planos ABC y $A'B'C'$ por la recta trazada por E paralela con DA. De los últimos triángulos, es el $G'A'J' = GAJ = DEF$; el $A'B'J' = v.ABJ'$, etc.: por lo cual

$$A'B'G' = v.ABJ + v.BGJ + GAJ$$
$$= v.ABG + (1 - v)\ DEF.$$

Por las mismas razones es

$$B'C'G' = v.BCH + v^2.CGH + v.GBH$$
$$= v.BCG - v(1 - v)\ CGH.$$

Y, de consiguiente:

$$A'B'C' = v.CAG + v.ABG + v.BCG$$
$$+ (1-v)DEF - v(1-v)CGH$$
$$= v.ABC + (1-v)DEF - v(1-v)CGH.$$

Designando, pues, por a y b las superficies extremas, inferior y superior, por d la base del cono, y por f la seccion del segmento dado, tendremos (*):

$$f = av + b(1-v) - dv(1-v)$$
$$= b - (b + d - a)v + dv^2$$

Esta fórmula enseña que la seccion puede desaparecer *(Planim.* 77), si las raíces $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ y $\sqrt{d}$ no son entre sí como los lados de un triángulo; y que entre todas las secciones hay una mínima, cuando d es positiva *(Álgebra*-41).

La fórmula encontrada expresa la *seccion media*, c, del segmento sólido considerado, si en ella se supone $v = \frac{1}{2}$. En efecto, entónces

$$c = \tfrac{1}{2}(a + b) - \tfrac{1}{4}d.$$

Y, utilizando este valor, en vez de la expresion

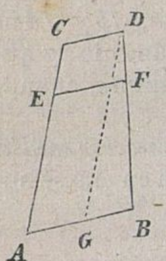
(*) Esta fórmula para la seccion transversal del cuerpo llamado *obelisco*, fué hallada por Tinseau, Koppe y Brix, mediante el cálculo, sin tener en cuenta la significacion geométrica de d. Con el expresado nombre de *obelisco* designan Brix y Koppe un poliedro, limitado por dos polígonos paralelos y por cuadrángulos ó triángulos planos, que ántes llevó la denominacion de *prismoide*.

$\frac{1}{2}(a+b)h - \frac{1}{6}dh$ para el volúmen del segmento cubicado, encontramos la fórmula (*)

$$\frac{1}{6}(a+b+4c)\,h \quad \text{ó} \quad ch + \frac{1}{12}dh$$

122. Si la superficie reglada, cuyos segmentos y secciones hemos estudiado anteriormente, es *desarrollable*, ó consta de partes planas, finitas, ó infinitamente pequeñas, el perímetro de una seccion transversal, cualquiera, de dicha superficie y de su cono director podrá ser expresado mediante los perímetros de dos secciones paralelas de la misma.

Supongamos que tres planos paralelos corten la porcion plana de la superficie desarrollable, contenida entre las rectas AC y BD, en los segmentos paralelos AB, CD y EF, de modo que $EC{:}AC = v$. Entónces (*Planim.* 64) será



$$EF = v.AB + (1-v)\,CD$$

Completando el paralelógramo $ACDG$, resulta $GB = AB - CD$; y designando por α, β, φ y δ los perímetros de las tres secciones paralelas y de la base del cono director, de los cuales son partes los segmentos AB, CD, EF y GB respectivamente, se halla por adicion:

$$\varphi = v\alpha + (1-v)\,\beta, \quad \delta = \alpha - \beta.$$

(*) La primera fué demostrada geométricamente por Steiner (*l. c.*) y la segunda, por Koppe en el escrito citado ántes.

Si $v = \frac{1}{2}$ se obtiene el perímetro de la seccion media (STEINER, *l. c.*) $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$.

123. Un segmento sólido, cualquiera, puede cubicarse siempre que esté comprendido entre planos paralelos y se conozcan sus secciones transversales, paralelas á aquellos planos. Si una de estas secciones, á la distancia x de la base del segmento propuesto, es una funcion dada $f(x)$, de x, el prisma, cuya base sea $f(x)$ y cuya altura sea la n^a parte de la altura h del segmento entero, tendrá por volúmen $\frac{h}{n} f(x)$. Y la suma de los prismas con igual altura,

$$\frac{h}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}h\right) + f\left(\frac{2}{n}h\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}h\right)\right]$$

expresará el volúmen que buscamos (104), en el supuesto de que n crezca indefinidamente. El cálculo de esta suma es un problema del *Cálculo integral*, que puede, sin embargo, resolverse elementalmente, cuando $f(x)$ sea una funcion *entera* de x, tal como

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$$

Pues entónces:

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f\left(\frac{1}{n}h\right) &= a_0 + \frac{1}{n} h a_1 + \frac{1}{n^2} h^2 a_2 + \ldots \\ f\left(\frac{2}{n}h\right) &= a_0 + \frac{2}{n} h a_1 + \frac{2^2}{n^2} h^2 a_2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Y, sumando por columnas y multiplicando por $\frac{h}{n}$, se halla la suma que debemos formar

$$= ha_0 + \frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n^2}h^2a_1$$
$$+ \frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}h^3a_2$$
$$+ \frac{1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3}{n^4}h^4a_3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots -$$

Mas, cuando n es infinitamente grande, sabemos (*Aritm. univ.* 46) que

$$\frac{1^r+2^r+\ldots+(n-1)^r}{n^{r+1}} \text{adquiere el valor } \frac{1}{r+1}$$

Luego la suma que se busca, ó sea el volúmen del segmento sólido propuesto, tiene el valor

$$ha_0 + \tfrac{1}{2}h^2a_1 + \tfrac{1}{3}h^3a_2 + \ldots + \frac{1}{k+1}h^{k+1}\,a_k$$

Ejemplo. Una pirámide de base b y altura h es cortada por un plano paralelo á la base, á la distancia x de su cúspide, en una figura semejante á la base misma. Para la seccion resultante, en consecuencia, se halla el valor

$$f(x) = \frac{bx^2}{h^2}$$

Y, sustituyendo en la fórmula general, $a_0 = 0$,

$a_1 = 0$, $a_2 = \frac{b}{h^2}$, se obtiene el volúmen de la pirámide (107)

$$\frac{1}{3}\frac{bh^3}{h^2} = \frac{bh}{3}$$

124. NEWTON (*) enseñó á calcular aproximadamente un segmento sólido mediante sus secciones paralelas (ó una superficie plana mediante sus cuerdas paralelas) y dió la regla particular para, mediante tres secciones equidistantes, hallar aproximadamente el volúmen del segmento comprendido. Esta regla dice así: súmense las secciones extremas con el cuádruplo de la seccion media, y multiplíquese esta suma por la sexta parte de la distancia entre las secciones extremas. A las fórmulas de NEWTON añadió MACLAURIN 1742 *(Fluxions, número* 848) términos complementarios, susceptibles de ser conocidos inmediatamente, con los cuales diese la regla enunciada el volúmen buscado *exactamente:* en el supuesto de que la seccion ántes designada por $f(x)$ fuese una funcion entera de x, que no pasase del *tercer grado* (**). Segmentos, cuyos volúmenes se hallan exactamente por la regla

(*) *Methodus diferentialis prop.* 6, ampliado por COTES (obras póstumas (1722) sobre el *Meth. diff.* de NEWTON) y perfeccionado por GAUSS *(Meth. nova integralium valores,* etc., 1814. *Comm. Götting. f.* 3). Reglas particulares fueron ya establecidas por TORRICELLI, como Perelli refiere en el apéndice á las *Instituzioni delle sezioni coniche*, Firenze 1744, de GUIDO GRANDI.

(**) BRUNACCI *(Compendio del cálculo sublime*, Milano 1811, *II.*, *p.* 67); AUGUST *(Prog. des Cöln. Kealgymn. Berlin* 1849, *p.* 28 y *J. de Crelle A.* 45, *p.* 239).

mencionada, han sido indicados por Torricelli, Th. Simpson (*), y especialmente por Steiner *(l. c.)*.

Para mostrar la eficacia de la regla expuesta consideremos que el segmento entre $f(0)$ y $f(4)$ es la suma de los segmentos comprendidos entre $f(0)$ y $f(2)$, y $f(2)$ y $f(4)$. Ahora bien, si $f(x)$ es una funcion de x, de tal suerte que el volúmen del segmento dado pueda exactamente calcularse por la referida regla, tendremos idénticamente:

$$\frac{4}{6}[f(0) + 4f(2) + f(4)]$$
$$= \frac{2}{6}[f(0) + 4f(1) + f(2)] + \frac{2}{6}[f(2) + 4f(3) + f(4)],$$
$$f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4) = 0$$

Pero, en la hipótesis $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, será

$$\begin{aligned} & f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4) \\ = & \; a_0 \\ & - 4a_0 - 4a_1 - 4a_2 - 4a_3 - 4a_4 - \ldots \\ & + 6a_0 + 12a_1 + 24a_2 + 48a_3 + 96a_4 + \ldots \\ & - 4a_0 - 12a_1 - 36a_2 - 108a_3 - 324a_4 - \ldots \\ & + a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 + \ldots \\ = & \; 24a_4 + \ldots \end{aligned}$$

Ecuacion idénticamente nula, cuando $a_4, a_5 \ldots$ se anulan ó cuando $f(x)$ no pasa del tercer grado.

(*) *Math. Disertations* 1743 *p.* 109. La regla de Newton se llama tambien por ésto *regla de Simpson;* pero así se llama con más precision otra regla que dió Simpson *(l. c.)*, deducida de aquella, para calcular con mayor aproximacion un segmento de una superficie ó de un cuerpo, mediante mayor número de secciones *(Klügel math. W. 4 p. 150)*.

Encuéntrase, efectivamente, bajo tal hipótésis, la ecuacion

$$\begin{aligned} f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}h) + f(h) = a_0 & \\ & + 4a_0 + 2ha_1 + h^2a_2 + \tfrac{1}{2}h^3a_3 \\ & + a_0 + ha_1 + h^2a_2 + h^3a_3 \\ & = 6a_0 + 3ha_1 + 2h^2a_2 + \tfrac{3}{2}h^3a_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{h}{6}[f(0)+4f(\tfrac{1}{2}h)+f(h)] & \\ & = ha_0 + \tfrac{1}{2}h^2a_1 + \tfrac{1}{3}h^3a_2 + \tfrac{1}{4}h^4a_3 \end{aligned}$$

Fórmula que coincide con la deducida (123) para el volúmen de un segmento comprendido entre $f(0)$ y $f(h)$.

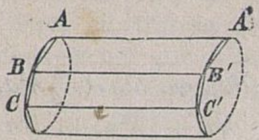
En los segmentos cubicados (119) es $f(x)$ de segundo grado (121); y, por consecuencia, la regla newtoniana que, en general, da el volúmen aproximado, sirve para calcularle con exactitud, bajo las condiciones establecidas, segun demostró STEINER geométricamente.

X.—Superficie del cilindro, del cono y de la esfera.

125. La *zona de un cilindro*, comprendida entre planos paralelos, es igual á un paralelógramo cuya latitud es el contorno de una seccion normal y cuya longitud es la arista de la zona (*)

(*) Las zonas de los cilindros y los conos de revolucion fueron calculadas por ARQUÍMEDES *(Sph. et. Cyl. I.*, 14–17). Zonas de otros conos fueron expresadas en integrales por VARIGNON *(Misc. Berol. f.* 3, *p.* 280) y EULER 1747 *(Nov. Comm. Petrop f.* 1, *p.* 3 y en la memoria publicada como apéndice de las *Nova Acta Petrop. f.* 3, *p.* 69.

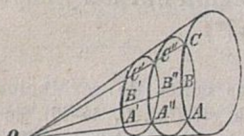
DEMOSTRACION. Sean AA', BB', CC' ... aristas de la zona cilíndrica. La zona de un prisma inscrito en el cilindro dado se compondrá de los paralelógramos $ABB'A'$, $BCC'B'$, ... que tienen todos la misma longitud (AA'), y por latitudes los lados de una seccion normal del prisma. La suma de estos paralelógramos, por consecuencia, es un paralelógramo de la misma longitud, cuya latitud es el perímetro de la seccion normal del prisma referido. Y este prisma se confunde con el cilindro en el momento que ambos tengan todas sus aristas comunes.



La seccion normal de un cilindro de revolucion es un círculo; las de otros cilindros no son círculos, sino otras figuras cuyos perímetros se calculan por integrales.

126. La *zona de un cono,* limitada por una esfera concéntrica, es igual á un sector circular cuyo rádio es la arista de la zona y cuyo arco tiene la misma longitud que el perímetro de la seccion esférica.

DEMOSTRACION. Sean OA, OB, OC, ... aristas de la zona cónica, limitadas por una esfera descrita alrededor del centro O. La zona de una pirámide esférica, inscrita en el cono, se compondrá de los sectores circulares, OAB, OBC, ...; por cuya adicion se obtiene un sector circular, de rádio OA, que tiene



por arco el contorno del polígono esférico ABC...

Ahora bien, cuando la pirámide esférica, inscrita, tenga todas sus aristas comunes con el cono, su zona se confundirá con la de éste, y el perímetro de su base esférica coincidirá con el de la seccion esférica que limita la zona cónica. Luego, etc.

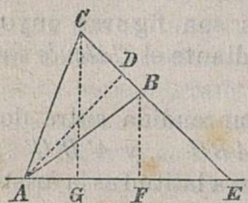
La seccion esférica de un cono de revolucion es un círculo; las de otros conos son figuras cuyos perímetros se determinan mediante el *Cálculo integral*.

Observacion. La zona comprendida entre dos secciones esféricas del cono, ABC ... y $A'B'C'$ ... es igual á un parelelógramo cuya latitud es la arista de la zona, AA', y cuya longitud es el perímetro de la seccion esférica $A''B''C''$ ... sobre la cual se hallan los puntos medios de las aristas AA', BB'... En efecto, la zona en cuestion es la diferencia de dos sectores circulares concéntricos, con el mismo ángulo central; y, por consecuencia, la diferencia entre dos triángulos isósceles con el mismo ángulo en sus vértices, que es un paralelógramo cuya anchura es la arista AA' de la zona y cuya largura es el medio aritmético de los contornos ABC ... y $A'B'C'$ .... Pero, si el rádio OA'' es el medio aritmético de los rádios OA y OA', el perímetro de la seccion esférica, $A''B''C''$ ... será tambien el medio aritmético de los perímetros de las secciones esféricas, ABC ... y $A'B'C'$ ... que limitan la zona cónica propuesta.

127. La medida de la superficie encerrada dentro de un perímetro dado sobre una superficie curva cualquiera, es generalmente un problema, de mayores dificultades que la cuadratura de una figura

plana, que lleva el nombre de *complanacion* de la superficie no plana. La complanacion de la esfera y de sus zonas puede referirse á la cubatura de la misma esfera y de un sector esférico, mediante el teorema siguiente:

Por la revolucion del triángulo rectilíneo ABC alrededor del eje AE quepasa por el vértice A, sobre su mismo plano, se engendra un cuerpo de revolucion cuyo volúmen es igual al de un cono que tiene por altura la distancia del vértice A al lado BC, y por base, la zona cónica, descrita por este mismo lado BC (*)



Demostracion. Sea E el punto de interseccion del eje con BC; la recta DA normal á BC; y la FB normal al eje AE. El volúmen del cuerpo descrito por el triángulo AEB, por su revolucion alrededor de AE, puede mirarse como suma de dos conos, á saber:

$$\frac{1}{3}\pi.FB^2.AE = \frac{1}{3}\pi.FB.2AEB = \frac{1}{3}\pi.FB.EB.DA.$$

La zona cónica, descrita por el segmento EB, es $\pi.FB.EB$, como ya sabemos (126); y, designándola por (EB), el volúmen descrito por AEB tomará el valor $\frac{1}{3}(EB).DA$. Del mismo modo, el descrito por AEC será $\frac{1}{3}(EC).DA$; y restando, se halla el descrito por ABC, cuyo valor es $\frac{1}{3}(BC).DA$.

(*) Arquímedes (*Sph. et Cyl. I*, 20).

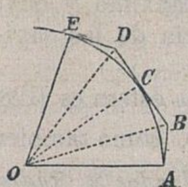
Si BC es paralelo al eje, se halla para el volúmen descrito por ABC la misma expresion, trazando GC normal al eje, y calculando, segun indica la ecuacion

$$ABC = GFBC + AGC - AFB,$$

un cilindro y dos conos.

128. Un sector esférico es igual á un cono cuya base es la zona esférica y cuya altura es el rádio de la esfera. El volúmen de la esfera es igual á un cono, cuya base es la superficie esférica y cuya altura es el rádio de la misma (*). Una pirámide esférica es igual á un cono, cuya base es la figura esférica que limita la pirámide esférica inscrita, y cuya altura es el rádio de la esfera.

Demostracion. Supongamos que el sector esférico sea descrito por la revolucion del sector circular OAE alrededor del rádio OA. Si construimos en el arco AE las tangentes AB, BC, CD y DE, la figura $OABCDE$ describirá, en su revolucion alrededor de OA, un cuerpo cuyo volúmen es igual á un cono cuya altura es el rádio OA y cuya base es la suma de las zonas cónicas, descritas por AB, BC, CD y DE



(127). Pero, cuando la línea quebrada, constituida por las tangentes dichas, toque en todos sus puntos al arco AE, la figura $OABCDE$ coincidirá con el sector circular OAE; el cuerpo descrito por la revolucion de aquélla, con el sector esférico des-

(*) Arquímedes (*l. c.* 50 *y* 36).

crito por éste; y la suma de las zonas cónicas, descritas por AB, BC, ..., con la zona esférica, descrita por el arco AE.

Ahora bien, el sector esférico abraza el volúmen de toda la esfera, cuando el arco AE se convierte en un semicírculo; y las anteriores consideraciones son en este caso aplicables enteramente.

El cuerpo incluido por dos planos, que pasen por el centro de la esfera, y un ángulo esférico (huso), tiene con el volúmen de la esfera la misma razon que el ángulo esférico correspondiente con la superficie esférica. De lo que se deduce (36) que tambien una pirámide esférica trilátera tendrá con el volúmen de la esfera la misma razon que el triángulo esférico, que forma su base, con la superficie de la esfera. Etc.

129. La superficie de la esfera es el cuádruplo de la de un círculo máximo. Una zona esférica es igual á un paralelógramo, cuya base tiene la longitud de un círculo máximo y cuya altura es la sagita ó la diferencia de las sagitas (*).

Demostracion. El volúmen de la esfera es (128) el producto, $\frac{1}{3}$ Superficie $\times$ *Rádio*, como tambien (115) el producto, $\frac{4}{3}\pi$. *Rádios cuadrados* $\times$ *Rádio*. Luego

$$\textit{Superficie esférica} = 4\,\pi\ \textit{Rádios cuadrados}:$$

ó igual á la zona del cilindro circunscrito (125). El

(*) Arquímedes (*l. c.* 35 *y* 48).

volúmen del sector esférico es el producto, $\frac{1}{3}$ *Zona esférica* × *Rádio*, como tambien $\frac{2}{3}\pi$ *Rádios cuadrados* × *Sagita* (116). Y, por consecuencia:

$$\textit{Zona esférica} = 2\,\pi\ \textit{Rádios} \times \textit{Sagita}.$$

ó igual al área de un círculo cuyo rádio sea el medio geométrico entre el diámetro de la esfera y la sagita. Una zona esférica, comprendida entre dos círculos, es la diferencia de dos zonas esféricas, cada una de las cuales está limitada por un círculo: luego, etc.

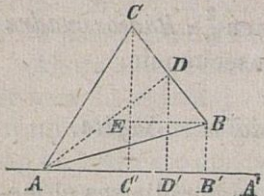
OBSERVACION. Zonas de la misma esfera son iguales cuando sus sagitas ó diferencias de sagitas (alturas) son iguales. La superficie de un ángulo esférico tiene con un hemisferio la misma razon que el ángulo de los círculos máximos, que determinan el ángulo esférico, con 180°. La superficie de un triángulo esférico tiene con un hemisferio la misma razon que su exceso con 360°. Etc. (36).

130. Independientemente de su cubatura puede hallarse la complanacion de la esfera mediante el teorema siguiente:

Por la revolucion del triángulo isósceles ABC, alrededor del eje AA', que pasa por su vértice A en su mismo plano, engendra su base BC una zona cónica, igual á un paralelógramo cuya latitud es la circunferencia del círculo que tiene por rádio la distancia DA del vértice A á la base BC, y cuya longitud es la proyeccion normal, $B'C'$, de BC, sobre el eje AA' (PAPPUS V., 21).

DEMOSTRACION. Trácense las normales al eje

BB', CC' y DD'; la última de las cuales, DD', es el medio aritmético de las otras dos, BB' y CC', en virtud de la igualdad $BD = DC$. La zona cónica descrita por BC, en su revolucion alrededor de AA', es $=2\pi.DD'.BC$ (126-*Obs.*).



Si se traza BE paralela á $B'C'$, el triángulo rectángulo BCE será semejante al DAD', por ser iguales los ángulos ECB y $D'AD$; y, de consiguiente: $BC : BE = DA : DD'$ ó $DD'.BC = DA.BE$. Luego

$$2\pi.DD'.BC = 2\pi.DA.B'C'.$$

Observacion. Con auxilio de esta expresion de la zona cónica, descrita por BC, se obtiene (127) el volúmen del cuerpo de revolucion engendrado por ABC, á saber: $\frac{2}{3}\pi.AD^2.B'C'$; ó sean, los $\frac{2}{3}$ de un cilindro cuya base es la superficie de un círculo, descrito con el rádio AD, y cuya altura es la proyeccion normal $B'C'$.

131. Un polígono plano, compuesto de triángulos isósceles congruentes, ABC, ACD, ADE, ... por su revolucion alrededor del eje AB, engendra con sus lados BC, CD, DE, ... zonas cónicas. Pues la suma de todas estas zonas es igual á un paralelógramo, cuya longitud es la proyeccion normal sobre el eje AB de la línea quebrada, constituida por los segmentos BC, CD, DE, ... y cuya latitud es el perímetro del círculo inscrito en dicha línea quebrada (130). Cuando el número de puntos de

contacto de esta línea con el círculo sea infinito, aquélla se confundirá con éste; la suma de las zonas cónicas se convertirá en una zona esférica (la superficie de la esfera); y la proyeccion de la línea quebrada será la sagita (el diámetro) de la zona esférica.

Por el mismo método, las cubaturas de la esfera y del sector esférico, dadas ántes (IX), se deducen de la expresion hallada (130) para el volúmen del cuerpo que el polígono regular $ABCDE$ ... engendra en su revolucion alrededor del eje AB.

XI. — Centros de gravedad de las figuras.

132. Si los lados de un polígono plano, cerrado, se proyectan sobre una recta cualquiera de su plano, por paralelas en cualquiera direccion, la suma de las proyecciones es nula. En efecto, si B_1, B_2, ... B_n son las proyecciones sobre una recta de los vértices del polígono A_1A_2 ... A_n; y, por consecuencia, B_1B_2, B_2B_3, ... B_nB_1 las proyecciones de sus lados, tomando en cuenta los signos de los valores de aquéllas será *(Planim.* 111):

$$B_1B_2 + B_2B_3 + \dots + B_nB_1 = 0$$

y la proyeccion de un lado, igual y contraria á la suma de las proyecciones de los lados restantes.

Si los segmentos conocidos en su posicion y magnitud, pero separados sobre un plano, A_1B_1, A_2B_2, ... A_nB_n, se proyectan sobre una recta cualquiera del mismo plano, por paralelas de direccion arbitraria, la suma de las proyecciones depende, en general, de la direccion de las rectas proyectantes. En efecto, trazando desde un orígen arbitrario, C, los segmentos CC_1, C_1C_2, ... $C_{n-1}C_n$, de igual magnitud y direccion que los dados, el punto final C_n no coincidirá generalmente con el inicial C. Pero, si los segmentos iguales y de la misma direccion, A_1B_1 y CC_1, se proyectan sobre la misma recta por paralelas, sus proyecciones serán tambien iguales y de la misma direccion; y, por consecuencia, cualquiera que sea la direccion de las proyectantes, siempre se verificará que la suma de las proyecciones de los segmentos A_1B_1, A_2B_2 ... A_nB_n, sobre una recta, es igual á la suma de las proyecciones de los segmentos CC_1, C_1C_2, ... $C_{n-1}C_n$; ó sea, igual á la proyeccion del segmento CC_n. Luego, cuando C_n coincida con C, desaparece la suma de las proyecciones de A_1B_1, A_2B_2, ... A_nB_n sobre cualquiera recta, sea cualquiera la direccion de las paralelas proyectantes; porque $CC_n = 0$.

Supongamos ahora que los segmentos dados A_1B_1, A_2B_2, ... A_nB_n, en un plano, sean proyectados varias veces, de diferentes modos, por paralelas en cualquiera direccion, sobre una recta cualquiera; y que cada vez se haga la suma de las proyecciones. Si para dos direcciones distintas de las proyectantes desaparece la suma de las proyecciones, desaparecerá tambien para toda otra direccion; porque todo polígono CC_1C_2 ... C_n, constituido por los segmentos dados, trasportados paralelamente á sí mismos, es un polígono cerrado. Para que así no fuese y no coincidiese, por lo tanto, C_n

con C, sería preciso que las proyectantes fuesen paralelas con CC_n, en cuyo solo caso se anularia la proyeccion de este segmento CC_n: lo cual es contra la hipótesis establecida, de que la suma de las proyecciones de los segmentos dados, y entre ellas la proyeccion de CC_n, se anula para dos direcciones diferentes de las proyectantes (*).

A una conclusion análoga se llega tratándose de segmentos dados en posicion y magnitud, pero en el espacio, A_1B_1, A_2B_2 ..., que sean proyectados varias veces, de diversos modos, sobre una recta cualquiera, por planos paralelos de cualesquiera posturas. Siempre que en tres posturas diversas de los planos proyectantes, que no contengan ninguna direccion comun, desaparezca la suma de las proyecciones, esta suma desaparecerá tambien para toda otra postura de los planos proyectantes; porque todo polígono formado por los segmentos dados, trasportados paralelamente á sí mismos, resultará cerrado.

133. Dados en el espacio los puntos A, B, C, ... con sus correspondientes coeficientes (masas, pesos) α, β, γ, ..., si la suma $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ no se anula, puede construirse un punto S en tal situacion, que, para otro punto cualquiera O, el segmento $(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)OS$ resulte compuesto de los segmentos $\alpha.OA$, $\beta.OB$, $\gamma.OC$ ... trasportados paralelamente á sí mismos; ó de otro modo: que el polígono constituido por todos los segmentos dichos, $\alpha.OA$, $\beta.OB$, ... $(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)SO$, trasportados

(*) MÖBIUS (*Statik*, 47).

paralelamente, resulte cerrado. Trazando por los puntos A, B, C, ... S, paralelas en cualquiera direccion, que corten á un plano cualquiera en los puntos A', B', C' ... S' respectivamente, se verificará la ecuacion

$$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)SS' = \alpha.AA' + \beta.BB' + \gamma.CC' + \ldots$$

El punto S, determinado así por los puntos A, B, C, ... y la proporcion de sus coeficientes $\alpha:\beta:\gamma:\ldots$, toma el nombre de *centro de gravedad (baricentro)* de los puntos $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, ... (*).

Demostracion. Por el punto O trázense las rectas cualesquiera, OX, OY, OZ, que no estén sobre un mismo plano; y proyéctense los puntos dados A, B, C, ... sobre OX, OY, OZ, por planos paralelos á los OYZ, OZX, OXY. Designando por A_x, A_y, A_z las proyecciones del punto A, etc.; las posi-

(*) Los centros de gravedad, tanto de los cuerpos físicos (figuras materiales) como tambien de figuras geométricas, fueron por vez primera investigados por Arquímedes y aplicados á la Geometría (cuadratura de la parábola, y los dos libros acerca del equilibrio de los planos y acerca de los cuerpos flotantes). Aplicaciones del centro de gravedad fueron hechas por Pappus (Guldin 144); y en los tiempos modernos, por L'Huilier (*polygonometría*, 1789), Carnot (*Géom. de position*, 1803), Steiner (*die Krümmungs-Schwerpuncte* 1838, *J. de Crelle A.* 21, *p.* 36), y, en general, por Möbius (*Barycent. Calcul.* 1827). La ecuacion característica del centro de gravedad, contenida en los teoremas de Arquímedes (*ecuacion de los momentos*) figura á la cabeza del escrito de Commandino, titulado *de centro gravitatis* 1565. Sobre la misma debe verse el *Calc. baric.* de Möbius, 8; y los *géom. Aufg.*, *II*, *p.* 330, por Meier Hirsch.

ciones de los puntos S_x, S_y, S_z sobre los ejes OX, OY, OZ, se determinan por las ecuaciones

$$OS_x = \frac{\alpha . OA_x + \beta . OB_x + \gamma . OC_x + \ldots}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}$$

$$OS_y = \frac{\alpha . OA_y + \beta . OB_y + \gamma . OC_y + \ldots}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}$$

$$OS_z = \frac{\alpha . OA_z + \beta . OB_z + \gamma . OC_z + \ldots}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}$$

y de este modo queda determinado el punto S por sus proyecciones S_x, S_y, S_z, como el punto comun de tres planos proyectantes determinados.

Las tres ecuaciones anteriores, cuando se trasladan todos sus términos á un sólo miembro, ó se reducen á cero, enseñan que todo polígono, constituido por los segmentos $\alpha . OA$, $\beta . OB$, $\gamma . OC$, ... $(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)SO$, trasportados paralelamente, es cerrado (132). Luego, si los puntos A, B, C, ... S, O se proyectan sobre una recta cualquiera P, por planos paralelos, de cualquiera postura, la suma de las proyecciones de $\alpha . OA$, $\beta . OB$, $\gamma . OC$, ... $(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)SO$ desaparece ó se anula. Mas las proyecciones de OA, OB, OC, ... SO son respectivamente iguales, en magnitud y direccion, á las rectas $A'A$, $B'B$, $C'C$, ... SS', siempre que estas rectas hayan sido trazadas paralelamente á la recta p, y corten en A', B', C', ... S' al plano proyectante del punto O. Por lo cual tambien se verificará la ecuacion

$$0 = \alpha . A'A + \beta . B'B + \gamma . C'C + \ldots + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots)SS'$$

ó esta otra:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)\,SS'=\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+\ldots$$

Adicion. Dedúcese de lo dicho que, si para tres direcciones (no paralelas á un mismo plano) de las paralelas SS', AA', BB', ... limitadas por un plano cualquiera, se verifica la ecuacion

$$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)\,SS'=\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+\ldots$$

sin que la suma $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ desaparezca, dicha ecuacion se verificará tambien para toda otra direccion de las paralelas expresadas; y el punto S será el centro de gravedad de los puntos $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, ...

De otro modo: si $MNOP$ ... es un polígono cualquiera; S, un punto cualquiera; y los segmentos $\alpha.SA$, $\beta.SB$, $\gamma.SC$, ... iguales en magnitud y direccion á los lados MN, NO, OP, ... respectivamente; S será el centro de gravedad de $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$ ... (*) Trazando, en efecto, por los puntos S, A, B, ... paralelas, de direccion arbitraria, que corten respectivamente á dos planos paralelos, de postura cualquiera, en S y S', A'' y A', B'' y B', ... segun lo demostrado ántes tendrá lugar la ecuacion

$$0=\alpha.AA''+\beta.BB''+\gamma.CC''+\ldots$$

Pero tambien es $SS'=A''A'=B''B'=\ldots$ Luego idénticamente:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)\,SS'=\alpha.A''A'+\beta.B'B''+\gamma.C''C'+\ldots$$

(*) L'Huilier *(Polig.* 86) y Carnot *(Géom. de pos.* 269, en el caso $\alpha=\beta=\gamma=\ldots$).

Y sumando esta ecuacion con la anterior resulta, finalmente, la que sigue:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)SS'=\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+\ldots$$

134. El sistema de los puntos $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, ... sólo tiene un centro de gravedad S. Admitamos que T sea otro centro de gravedad de los puntos dados; y tracemos por los puntos S, T, A, B, C,... rectas paralelas, en cualquiera direccion, que encuentren á un plano que contenga al punto T, pero no al S, en los puntos S', T, A', B', C', ... Segun sabemos (133), por ser nulo TT deberá ser

$$0=\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+\ldots$$

Pero, segun las hipótesis sentadas, ni desaparece $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$, ni tampoco SS'; y, por consecuencia, debe ser $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)SS'$ diferente de $\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+\ldots$; y esto pide que S no sea el centro de gravedad del sistema dado: contra lo supuesto.

Si los puntos dados caen sobre una recta, su centro de gravedad caerá sobre la misma recta. Admitamos que así no sucede, y que el centro de gravedad S caiga fuera de la recta AB. Tracemos por S, A, B, ... rectas paralelas, de cualquiera direccion, cuyos puntos de interseccion con una recta paralela á la AB, que pase por S, sean S, A', B', ... Porque $SS=0$, y $AA'=BB'=\ldots$, es $\alpha+\beta+\gamma+\ldots=0$: contra la hipótesis.

Si los puntos dados caen sobre un plano, su baricentro cae sobre el mismo plano. Admitamos que el centro de gravedad S caiga fuera del plano ABC. Por los puntos S, A, B, ... trácense paralelas de cualquiera direccion, que sean cortadas por un plano, paralelo al ABC y que contenga al punto S, en los puntos S, A', B', ... Como $SS = 0$ y $AA' = BB' = ...$, se halla, como ántes, $\alpha + \beta + \gamma + ... = 0$: contra la hipótesis.

135. El baricentro P, de los puntos $\alpha.A$ y $\beta.B$, divide al segmento AB segun la razon $\beta : \alpha$, interior ó exteriormente, segun que β y α tenga el mismo signo ó signos opuestos. En efecto, de la proporcion $AP : PB = \beta : \alpha$ se deduce la ecuacion

$$\alpha.AA' + \beta.BB' = (\alpha + \beta)PP'$$

para cualquiera direccion de las paralelas AA', BB', PP', y para toda recta que las corte en los puntos A', B', P' *(Planim.* 64).

El baricentro Q, de los puntos $\alpha.A$, $\beta.B$ y $\gamma.C$, es el baricentro de los $(\alpha + \beta)P$ y $\gamma.C$, y divide el segmento PC segun la razon $\gamma : (\alpha + \beta)$. En efecto, de la proporcion $PQ : QC = \gamma : \alpha + \beta$ se desprende la ecuacion

$$(\alpha + \beta)PP' + \gamma.CC' = (\alpha + \beta + \gamma)QQ'$$

y, como consecuencia, esta otra:

$$\alpha.AA' + \beta.BB' + \gamma.CC' = (\alpha + \beta + \gamma)QQ'$$

para cualquiera direccion de las paralelas, y para todo plano que corte á las mismas en los puntos A', B', C', P', Q'. Y así sucesivamente.

En general, en la determinacion del centro de gravedad de $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, ..., dos ó más puntos del sistema pueden ser sustituidos por su baricentro particular, al cual se dará por coeficiente la suma de los coeficientes de los puntos que hayan de ser sustituidos.

Cuando algunos de los coeficientes sean negativos, puede determinarse primeramente el centro de gravedad, M, de los puntos que tengan coeficientes positivos; despues el centro de gravedad, N, de los puntos con coeficientes negativos; y finalmente, el centro de gravedad, S, de los puntos $\mu.M$ y $-\nu.N$, en los que μ y $-\nu$ designan las sumas de los coeficientes positivos y negativos respectivamente. El punto S será entónces el centro de gravedad del sistema propuesto.

136. El centro de gravedad Q, de los puntos $\alpha.A$, $\beta.B$ y $\gamma.C$, que no están sobre una recta, divide la superficie del triángulo ABC segun la proporcion (*):

$$BCQ : CAQ : ABQ : ABC = \alpha : \beta : \gamma : \alpha + \beta + \gamma$$

En efecto, si C_1 representa el baricentro de $\alpha.A$ y $\beta.B$, tendremos:

$$ABQ : ABC = C_1Q : C_1C = \gamma : \alpha + \beta + \gamma;$$

porque $C_1Q : QC = \gamma : \alpha + \beta$ (135). Etc.

El centro de gravedad R, de los puntos $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$ y $\delta.D$, que no están sobre un plano, di-

(*) Möbius (*Baryc. Calcul.*, 24 y sig.).

vide el volúmen del tetraedro $ABCD$ segun la proporcion:

$$CBDR : ACDR : BADR : ABCR : ABCD = \alpha : \beta : \gamma : \delta : \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

En efecto, si A_1 es el centro de gravedad de los puntos $\beta.B$, $\gamma.C$ y $\delta.D$, se verifica la proporcion:

$$CBDR : ABCD = CBDR : CBDA = A_1R : A_1A = \alpha : \alpha+\beta+\gamma+\delta;$$

porque $A_1R : RA = \alpha : \beta + \gamma + \delta$ (135). Etc.

Nótese en estos teoremas que $ABC = BCA = CAB$; $ABC + ACB = 0$ (*Planim.* IX); $ABCD = BCAD = \ldots$; $ABCD + ABDC = 0$ (112).

Un punto cualquiera de la recta AB puede mirarse como centro de gravedad de $\alpha.A$ y $\beta.B$; un punto cualquiera del plano ABC, como centro de gravedad de $\alpha.A$, $\beta.B$ y $\gamma.C$; un punto cualquiera del espacio, como centro de gravedad de $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, y del punto $\delta.D$ que cae fuera del plano ABC: con tal que á las razones $\alpha : \beta$, $\alpha : \beta : \gamma$, $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ se les asignen los valores convenientes (*Principio del cálculo baricéntrico*).

137. Si la suma de los coeficientes, $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$, se anula, el sistema de los puntos $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, ... tendrá, en general, un centro de gravedad infinitamente distante, en una direccion determinada; y la suma

$$\alpha.AA' + \beta.BB' + \gamma.CC' + \ldots$$

se anulará para cualquiera direccion de las paralelas AA', BB', ..., bajo la condicion de que el plano que las corta en A', B', ... pase por dicho centro de gravedad, ó sea paralelo, en otros términos, á la recta en cuya direccion se halle tal centro (*). Sea R el baricentro de $\beta.B$, $\gamma.C$, ... que se halla á distancia finita; porque la suma $\beta+\gamma+\ldots$ no es nula, sino igual á $-\alpha$. El baricentro del sistema dado es, pues, el baricentro de $\alpha.A$ y $-\beta.R$, que divide el segmento AR, por consecuencia, segun la razon $-\alpha:\alpha=-1$, y cae sobre la recta AR, á distancia infinita. Trazando por R, A, B, C, ... rectas paralelas, en cualquiera direccion, que sean cortadas por un plano cualquiera en R', A', B', C', ..., segun (133) tenemos:

$$\beta.BB'+\gamma.CC'+\ldots=(\beta+\gamma+\ldots)RR'=-\alpha.RR'$$

De consiguiente: la suma $\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+\ldots$ adquiere el valor $\alpha\,(AA'-RR')$, y se anulará cuando el plano secante, referido, sea paralelo á la recta AR. Designando además por Q el centro de gravedad de $\alpha.A$, $\gamma.C$, ... se halla para $\alpha.AA'+\beta.BB'+\gamma.CC'+\ldots$ el valor $\beta(BB'-QQ')$ que se anulará en el solo hecho de ser el plano secante paralelo á BQ. Luego esta recta BQ debe ser tambien paralela con AR; etc.

En el caso particular, de que un punto del sistema dado sea al mismo tiempo el centro de gravedad de los puntos restantes, cualquier punto del sistema será el centro de gravedad de los restantes; y entónces el sistema de todos los puntos no tiene ningun centro de gravedad; y la suma $\alpha.\,AA'+$

(*) Möbius (*Baryc. Calcul.*, 9 y 10).

$\beta.BB' + \gamma.CC' + \ldots$ se anula para cualquiera direccion de las paralelas y cualquiera postura de su plano secante. Así sucede, por ejemplo, si A es el centro de gravedad de $\beta.B$. $\gamma.C$, ... ; porque entónces, para cualquiera direccion de las paralelas y cualquiera postura de su plano secante, es

$$\beta.BB' + \gamma.CC' + \ldots = (\beta + \gamma + \ldots)\, AA';$$

y, como $\beta + \gamma + \ldots = -\alpha$, resulta: etc.

Se obtendrá un sistema sin centro de gravedad, cuando al sistema $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, ..., se agregue su centro de gravedad, S, con el coeficiente $-(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)$

138. Designando por S el centro de gravedad de los puntos $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, ..., y por O un punto cualquiera, se verificará la ecuacion (*)

$$\alpha.OA^2 + \beta.OB^2 + \gamma.OC^2 + \ldots - (\alpha + \beta + \gamma + \ldots)\, OS^2$$
$$= \frac{\alpha\beta.AB^2 + \alpha\gamma.AC^2 + \ldots + \beta\gamma.BC^2 + \ldots}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}$$

Demostracion. Por el punto O trázense, como ántes (133), las rectas OX, OY, OZ; pero de modo que sean aristas de un triedro trirectángulo, ó, en otras palabras, que aquellas rectas sean tres *ejes ortogonales*. Proyéctense los segmentos OS, OA, OB, OC, ... sobre OX, OY, OZ, por planos paralelos respectivamente á los OYZ, OZX, OXY; y designemos por x, x_1, x_2, x_3, ... las proyecciones sobre OX; por y, y_1, y_2, y_3, ... las proyecciones

(*) Teorema de Lagrange (*Mém. de Berlin*, 1783, p. 290).

sobre OY; y por $z, z_1, z_2, z_3, \ldots$ las proyecciones sobre OZ. Segun (133) tendremos:

$$(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)\, x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \ldots$$

et cætera. Y por consiguiente:

$$(\alpha+\beta+\ldots)\,(\alpha x_1{}^2 + \beta x_2{}^2 + \ldots - (\alpha \ + \beta \ + \ldots)^2 x^2$$
$$= (\alpha+\beta+\ldots)\,(\alpha x_1{}^2 + \beta x_2{}^2 + \ldots - (\alpha x_1 + \beta x_2 + \ldots)^2$$

Desarrollando esta última fórmula se verá que no queda ningun término con los coeficientes α^2, β^2, ...; mientras que el coeficiente $\alpha\beta$ afecta á tres términos cuyo conjunto es

$$\alpha\beta(x_1{}^2 - 2x_1x_2 + x_2{}^2) = \alpha\beta\,(x_1 - x_2)^2$$

et cætera. Luego:

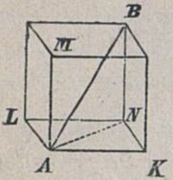
$$(\alpha + \beta + \ldots)\,(\alpha x_1{}^2 + \beta x_2{}^2 + \ldots) - (\alpha + \beta + \ldots)^2 x^2$$
$$= \alpha\beta\,(x_1 - x_2)^2 + \alpha\gamma\,(x_1 - x_3)^2 + \ldots + \beta\gamma(x_2 - x_3)^2 + \ldots$$

Y del mismo modo se deducen las ecuaciones

$$(\alpha + \beta + \ldots)\, \alpha y_1{}^2 + \beta y_2{}^2 + \ldots) - (\alpha + \beta + \ldots)^2\, y^2$$
$$= \alpha\beta\,(y_1 - y_2)^2 + \alpha\gamma\,(y_1 - y_3)^2 + \ldots + \beta\gamma\,(y_2 - y_3)^2 + \ldots,$$
$$(\alpha + \beta + \ldots)\,(\alpha z_1{}^2 - \beta z_2{}^2 + \ldots) - (\alpha + \beta + \ldots)^2\, z^2$$
$$= \alpha\beta\,(z_1 - z_2)^2 + \alpha\gamma(z_1 - z_3)^2 + \ldots + \beta\gamma\,(z_2 - z_3)^2 + \ldots$$

Mas las diferencias, $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$, son, segun la construccion hecha, las proyecciones normales del segmento BA sobre las rectas OX, OY,

OZ, mediante las cuales puede ser expresado el segmento mismo. Para esto, por el punto A trázense las rectas AK, AL y AM, paralelas respectivamente á OX, OY y OZ; y por el extremo B, planos paralelos con los ALM, AMK y AKL, que cortan á las rectas AK, AL y AM en los puntos K, L y M. Así hemos construido un paralelepípedo rec-



tángulo, cuyas aristas AK, $AL = KN$, y $AM = NB$ son las proyecciones normales de la diagonal AB sobre rectas que tienen las mismas direcciones que OX, OY y OZ. Ahora bien, segun el teorema de Pitágoras:

$$AK^2 + KN^2 = AN^2, \quad AN^2 + NB^2 = AB^2$$

y, por lo tanto:

$$AK^2 + AL^2 + AM^2 = AB^2$$

ó

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = AB^2$$

et cætera. Por otra parte:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = OA^2, \text{ etc.}$$

Y, sumando las tres ecuaciones precedentes, resulta, por fin, esta otra:

$$(\alpha + \beta + \ldots)(\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \ldots) - (\alpha + \beta + \ldots)^2 OS^2$$
$$= \alpha\beta . AB^2 + \alpha\gamma . AC^2 + \ldots + \beta\gamma . BC^2 + \ldots$$

de la cual se deduce, dividiendo por $\alpha + \beta + \ldots$, la que deseábamos demostrar.

Observacion. Si el punto arbitrario, O, coincide con el centro de gravedad, S, el segmento OS se anula, y la ecuacion se convierte en la siguiente (*)

$$\alpha.SA^2+\beta.SB^2+\ldots=\frac{\alpha\beta.AB^2+\alpha\gamma.AC^2+\ldots+\beta\gamma.BC^2+\ldots}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$$

139. La suma $\alpha.OA^2+\beta.OB^2+\gamma.OC^2+\ldots$ permanece constante para diferentes puntos O, siempre que OS sea invariable. Si, pues, A, B, C, ... son puntos dados, y α, β, γ, ..., números dados cuya suma no se anula, los puntos O, para los que la suma $\alpha.OA^2+\beta.OB^2+\ldots$ conserva el mismo valor, caerán sobre una esfera cuyo centro es el de gravedad de $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, ... (**).

En general, segun la ecuacion de Lagrange, la suma $\alpha.OA^2+\beta.OB^2+\ldots$ tendrá un valor mínimo, ó un valor máximo, conforme $\alpha+\beta+\ldots$ sea positiva ó negativa: valores que tienen lugar cuando el punto arbitrario, O, se confunda con el centro de gravedad, S. En el supuesto de que la suma $\alpha.OA^2+\beta.OB^2+\ldots$ tenga un valor constante que, en el primer caso, no llegue al valor de $\alpha SA^2+\beta.SB^2+\ldots$, y, en el otro caso, le sobrepuje, los puntos O caerán sobre una esfera imaginaria: con su centro S, real; pero con su rádio imaginario.

Cuando $\alpha+\beta+\gamma+\ldots=0$, los puntos O, para los que conserva la suma $\alpha.OA^2+\beta.OB^2+\ldots$ un

---

(*) Lagrange *(l. c.)* y Carnot *(Géom. de pos.* 280 para el caso $\alpha=\beta=\gamma=\ldots$).

(**) *Planim.* (132); Carnot *(l. c.)*; Meier Hirsch *(Géom. Aufg. II, p.* 336 *y sig.)*.

mismo valor, se hallan, en general, sobre una esfera determinada cuyo centro es el punto de gravedad infinitamente distante del sistema $\alpha.A$, $\beta.B$, ... (137): lo cual quiere decir que dichos puntos están sobre un plano determinado, normal á la direccion en que se encuentra el punto, ó centro de gravedad, infinitamente distante. Si es R, en efecto, el baricentro de $\beta.B$, $\gamma.C$, ..., para un punto cualquiera O tenemos (138) la ecuacion:

$$\beta.OB^2 + \gamma.OC^2 + \ldots - (\beta+\gamma+\ldots)\, OR^2 = \frac{\beta\gamma.BC^2 + \ldots}{\beta + \gamma + \ldots};$$

y, como $\beta + \gamma + \ldots = -\alpha$,

$$\alpha.OA^2 + \beta.OB^2 + \gamma.OC^2 = \alpha(OA^2 - OR^2) + \frac{\beta\gamma.BC^2 + \ldots}{\beta + \gamma + \ldots}$$

Lo cual prueba que la suma $\alpha.OA^2 + \beta OB^2 + \ldots$ permanece invariable, mientras la diferencia $OA^2 - OR^2$ no cambie de valor, ó sea, mientras el punto O esté sobre un plano determinado, normal á OR (*Planim.* 112).

En el caso particular, de que los puntos dados, $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, ... no tengan ningun centro de gravedad, y entónces cada uno de ellos es el centro de gravedad de los restantes (137), la suma $\alpha.OA^2 + \beta.OB^2 + \gamma.OC^2 + \ldots$, para cualquier punto O tendrá el mismo valor (*), que podrá expresarse de diferentes maneras: por

$$\frac{\beta\gamma.BC^2 + \ldots}{\beta + \gamma \ldots}$$

(*) Möbius (*J. de Crelle, A.* 26, *p.* 28).

por ejemplo, cuando se anule la diferencia $OA^2 - OR^2$; por

$$\beta.AB^2 + \gamma.AC^2 + \ldots,$$

cuando se anule OA; etc.

140. Una figura (línea, superficie, cuerpo) se dice *homogénea* cuando todos sus puntos tienen un mismo coeficiente. Todas las figuras geométricas se suponen homogéneas en tanto que expresamente no se diga lo contrario.

Los centros de gravedad de un segmento, de un paralelógramo, y de un parelelepípedo, caen en los centros de estas figuras. Porque á cada punto, X, de una de estas figuras, corresponde otro punto, X' de la misma, situados ambos de modo que el centro es el medio del segmento XX'; y, por consecuencia, el centro de gravedad de los puntos X y X' cae en el centro expresado; y en este mismo centro, el de gravedad de la figura, ó sea: el centro de gravedad de todos los pares de puntos, como X y X'.

El centro de gravedad de una figura que tiene *un eje ó un plano*, mediante los cuales es dividida en dos partes simétricas respecto del eje ó del plano, cae sobre tal eje ó tal plano. Pues á cada punto, X, de semejante figura, corresponde otro punto, X', de la misma, en tal situacion que el segmento XX' es bisecado normalmente por el eje ó el plano referidos; y el centro de gravedad de X y X' cae sobre dichos, eje ó plano. Pero el centro de gravedad de la figura cae sobre la recta, ó sobre el plano, que contenga los centros de gravedad de todos los pares de puntos, X y X', (135 y 134). Luego, etc.

Cuando un cuadrángulo plano tenga dos lados paralelos, el centro de gravedad de su superficie caerá sobre la recta que une los puntos medios de dichos lados paralelos. Si un prisma está limitado por dos planos, no paralelos, el centro de gravedad de su volúmen cae sobre el plano que pasa por los puntos medios de sus aristas paralelas.

Y del mismo modo se concluye que, si una figura tiene un *centro*, como sucede particularmente con toda figura *regular*, el centro de gravedad no difiere del centro de tal figura.

141. *El centro de gravedad de la superficie del triángulo ABC, es el centro de gravedad de los puntos A, B y C, y divide á una mediana del triángulo interiormente, en dos partes cuya razon es* 1 : 2. En efecto, si desde el punto medio C_1, del lado AB, se traza la mediana CC_1, que divide la superficie del triángulo en dos partes iguales, á cada punto, X, de una de estas dos mitades corresponderá un punto, X', de la otra mitad, situados de modo que el segmento XX' es paralelo al lado AB y bisecado por la mediana CC_1. Sobre esta recta CC_1 caen los centros de gravedad de todos los pares de puntos, como X y X'; y, por consecuencia, sobre la misma caerá tambien el centro de gravedad de la superficie ABC. Del mismo modo se demuestra que este centro de gravedad cae tambien sobre las rectas que unen los demás vértices, A y B, con los puntos medios de los lados respectivamente opuestos, BC y CA. Lo cual prueba que tal centro de gravedad es el punto comun de las tres medianas del triángulo; y, de consiguiente, el centro de gravedad de los puntos A, B y C (101).

El centro de gravedad del tetraedro sólido $ABCD$ es el centro de gravedad de los puntos A, B, C y D, y divide la distancia entre el centro de gravedad de una de sus caras y el vértice opuesto á ella, segun la razon 1 : 3. Por el punto medio C_1, de la arista AB, trácese el plano C_1CD que divide en dos mitades al sólido $ABCD$. A cada punto, X, de una mitad, corresponde un punto, X', de la otra: situados ambos de modo que su distancia XX' es paralela con AB y bisecada por el plano C_1CD. Y esto prueba que el centro de gravedad del sólido $ABCD$ cae sobre el plano que pasa por una arista del tetraedro y el punto medio de la arista opuesta; confundiéndose, por lo tanto, con el centro de gravedad de los puntos A, B, C y D (75).

El centro de gravedad de una pirámide sólida divide la distancia entre el centro de gravedad de su base y su vértice, segun la razon 1 : 3. Pues tal punto se ofrece como centro de gravedad de los centros de gravedad de todas las secciones trasversales del sólido propuesto, paralelas con su base, siempre que los coeficientes de los expresados centros sean entre sí como las secciones á que pertenecen éstos. Estas secciones son semejantes y están en perspectiva; y, por ésto, sus centros de gravedad caen, con el de la pirámide, sobre la recta que une el centro de gravedad de la base con el vértice de este sólido. Mas el centro de gravedad de la pirámide lo es tambien de los centros de gravedad de los tetraedros en que aquella se descompone por triángulos diagonales; y estos centros de gravedad de los tetraedros componentes caen sobre el plano paralelo á la base y que divide la distancia entre la base y el vértice segun la razon 1 : 3. Sobre el mismo plano debe caer el baricentro de la pirámide; luego etc.

El centro de gravedad de un prisma sólido es el centro de gravedad de la seccion media, que biseca sus aristas iguales y paralelas. Puesto que los centros de gravedad de todos los segmentos paralelos á las aristas del prisma, y limitados por las caras paralelas del mismo, se hallan sobre el plano de la seccion media. El baricentro del prisma es el baricentro de aquellos puntos, afectados con iguales coeficientes, ó sea, el baricentro de la seccion media; en virtud de que todos los segmentos, que son sustituidos por sus centros de gravedad, son iguales.

El centro de gravedad de un prisma trilátero $ABCA'B'C'$, cuya seccion media sea $A''B''C''$, coincide con el centro de gravedad de los puntos A'', B'' y C''; y, por consecuencia, con el centro de gravedad de los puntos A, B, C y A', B', C'.

142. El centro de gravedad de un sistema de segmentos (rectilíneos), de superficies planas triangulares, y de tetraedros sólidos, es el centro de gravedad de los puntos $\alpha.A, \beta.B, \gamma.C, \ldots$, en el supuesto de que los centros de gravedad de los elementos dados (segmentos, triángulos, etc.) sean designados por A, B, C ..., y los coeficientes $\alpha : \beta : \gamma : \ldots$ sean entre sí como los elementos dados, respectivamente (135). Con arreglo á esta ley puede determinarse el centro de gravedad del *contorno de un polígono*, el de la *superficie de un polígono plano*, el de la *superficie de un poliedro*, y el del *poliedro sólido*. Cuando se trata de una línea, ó de una superficie, curvas, se

toma como auxiliar un polígono inscrito, ó un poliedro, que tengan respectivamente con la línea, ó con la superficie, dadas, cuantos puntos comunes deseemos; se busca el baricentro para el contorno ó la superficie del polígono, para la superficie ó el cuerpo, poliédricos, y se determina su posicion en el caso limite, en que el polígono con la línea curva, ó el poliedro con la superficie curva, tenga todos sus puntos comunes. Este último proceso pide de ordinario el manejo del *Cálculo integral.*

El baricentro del contorno del triángulo ABC es el centro del círculo inscrito en el triángulo $A'B'C'$, cuyos vértices A', B' y C' son los puntos medios de los lados BC, CA y AB (*). En efecto, los centros de gravedad de estos segmentos, BC, CA y AB, son A', B' y C' (140); y, por lo tanto, el baricentro del contorno ABC es el baricentro de $BC.A'$, $CA.B'$ y $AB.C'$. Pero el baricentro de $BC.A'$ y $CA.B'$ divide el segmento $A'B'$ segun la razon $CA : BC = C'A' : B'C'$ (135), y cae sobre la bisectriz del ángulo $A'C'B'$ (*Planim.* 66): luego, etc.

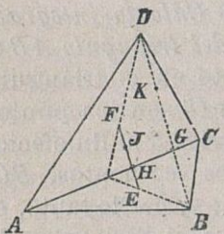
El baricentro de la superficie del tetraedro ABCD es el centro de la esfera inscrita en el tetraedro $A'B'C'D'$ cuyos vértices A', B', C' y D' son los baricentros respectivos de las caras CBD, ACD, BAD y ABC (**). En efecto, el baricentro de la superficie dada es el baricentro de $CBD.A'$, $ACD.B'$, $BAD.C'$ y $ABC.D'$. El baricentro de $CBD.A'$ y $ACD.B'$ divide al segmento $A'B'$ segun la razon $ACD : CBD = A'C'D' : C'B'D'$, y cae

(*) Poinsot (*Statique* 150).

(**) Gerono (*Ann. de Gerg.* 17, *p.* 330).

sobre el plano bisector del diedro $A'\overline{C'D'}B'$ (110); etc.

Para construir el *baricentro de la superficie del cuadrángulo plano* $ABCD$ (*), se construyen los baricentros E y F de los triángulos ABC y ACD, y se determina así el baricentro de $ABC.E$ y $ACD.F$. Admitiendo que BD sea cortada en G por AC, se verificará la proporcion $ABC : ACD = BG : GD$; y, por consecuencia, el punto que buscamos será el baricentro de $BG.E$ y $GD.F$ ó sea, de $BG.A$, $BG.B$, $BG.C$ y $GD.A$, $GD.C$ y $GD.D$. En lugar de $BG.A$ y $GD.A$, puede ponerse $BD.A$; por $BG.C$ y $GD.C$, puede ponerse $BD.C$; y por $BG.B$ y $GD.D$, puede ponerse $BD.K$; despues de haber hecho $BK = GD$ sobre la diagonal BD (135). Y esto enseña que el punto buscado es el baricentro de A, C y K.



El segmento EF, paralelo con BD, es cortado en H por AC; y, de consiguiente: $EH : HF = BG : GD$. Lo cual prueba que el punto buscado, J, cae sobre EF de modo que $EJ = HF$.

Por otra parte:

$$ACJ + CFJ + FAJ = ACF$$

$$CFJ = CHE,\ FAJ = HAE,\ CHE + HAE = AEC$$

$$ACJ + AEC = ACF$$

(*) *Quart. Journ.* 1864, *f.* 6, *p.* 127. Este baricentro fué conocido en el siglo XVI, S. STEVIN (*Statica II, prop.* 6); HORNER 1827. *Astron. Nadir V., p.* 281); MÖBIUS (*Statik* 113).

Y, por consecuencia:

$$ACJ = ACF - AEC = \frac{1}{3}(ACD - ABC)$$

Cuando, en particular, sea CD paralela con AB, el baricentro J caerá sobre la recta que una los puntos medios de AB y CD (140).

Acerca del centro de gravedad de una figura esférica véase la *Trigonometría* (61).

143. Para un *segmento sólido, cualquiera, comprendido entre planos paralelos*, podrá calcularse la distancia de su baricentro á su base, siempre que la seccion trasversal del expresado cuerpo, paralela á la base del mismo, á la distancia cualquiera, x, sea una funcion entera de x, que designamos por $f(x)$. En efecto, el prisma, cuya base es la seccion trasversal, $f(x)$, y cuya altura es la n^a parte de la altura h del segmento dado, tiene por volúmen $\frac{h}{n}f(x)$; la distancia de su centro de gravedad á la base del segmento es $x + \frac{h}{2n}$ (141); y dicho centro tiene por coeficiente $\frac{h}{n}f(x)$. Designando por u la distancia del baricentro del cuerpo dado á la base de este mismo, formaremos, por una parte, el producto de u por la suma, A, de los valores que produce la fórmula $\frac{h}{n}f(x)$, cuando en ella se atribuyen á x estos otros:

$$0, \ \frac{1}{n}h, \ \frac{2}{n}h, \ \ldots \ \frac{n-1}{n}h;$$

y, por otra, la suma, B, de los valores que arroja la fórmula $\left(x+\frac{2}{2n}\right)\frac{h}{n}f(x)$, para los escritos anteriormente de x. Y el producto uA será igual (133) á la suma B, cuando el número arbitrario, n, aumente hasta el infinito.

Ahora bien, la suma A, cuando n es infinito, expresa el volúmen del segmento dado (104); la suma B consta de la suma, C, de los términos que se desprenden de la fórmula $\frac{h}{n}xf(x)$, y de la suma, D, de los términos que se derivan de la fórmula $\frac{h}{2n}\frac{h}{n}f(x)$. Pero la suma D tiene el valor $\frac{h}{2n}A$ que desaparece cuando u crece indefinidamente. Luego para determinar la distancia n nos queda la ecuacion $uA=C$ solamente.

Si $f(x)$ es una funcion entera de x, que no pasa del *segundo grado*, la expresion $xf(x)$, que designamos por $g(x)$, será una funcion de x, de tercer grado á lo sumo: y, por lo tanto (124):

$$A=\tfrac{1}{6}h\left[f(0)+4f\left(\tfrac{1}{2}h\right)+f(h)\right]$$

$$C=\tfrac{1}{6}h\left[g(0)+4g\left(\tfrac{1}{2}h\right)+g(h)\right]$$

Y, como ahora $g(0)=0$, $g\left(\frac{1}{2}h\right)=\frac{1}{2}hf\left(\frac{1}{2}h\right)$, $g(h)=hf(h)$, será (*)

$$\frac{u}{h}=\frac{2f\left(\frac{1}{2}h\right)+f(h)}{f(0)+4f\left(\frac{1}{2}h\right)+f(h)}$$

(*) Brix y August (124).

Observacion. El cuerpo más sencillo, para el que puede, segun esta fórmula, calcularse la altura de su baricentro, es el *tronco de pirámide*. Por el mismo procedimiento puede hallarse tambien, para un segmento superficial plano, comprendido entre cuerdas paralelas, la distancia de su baricentro á la secuerda que se toma por base, siempre que la seccion trasversal, paralela, del mismo segmento, sea una funcion dada de su distancia á la expresada base.

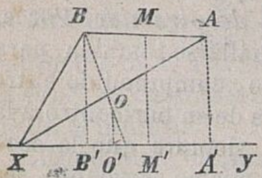
144. Si una figura plana, dada, da vueltas alrededor de una recta, dada, de su plano, la superficie de revolucion engendrada por su contorno es el producto de su perímetro por el camino ú órbita que traza su baricentro; y el cuerpo de revolucion engendrado por su superficie es el producto de esta superficie por la órbita recorrida por su centro de gravedad (*).

Demostracion. Un polígono plano, con un lado AB que tiene el punto medio M, da vueltas alrededor de un eje, XY, situado en su plano. El lado

---

(*) Este doble teorema es conocido por el nombre de *Regla de* Guldin. Investigaciones acerca de los cuerpos de revolucion hizo ántes que nadie Arquímedes *(De conoidibus et sphaeroidibus)*. Las prosiguió Keppler en su *Stereometria doliorum* 1615, donde ya aparecen algunos casos de la regla guldiana *(Theor.* 18 y *sig.)*. Esta regla fué descubierta por Pappus y publicada al fin de la Introduccion al 7.° libro de la *Collect. math;* y en tiempos más modernos por Guldin en la segunda parte de su obra, *Centrobaryca* 1640, en la que se aplica á muchos ejemplos, pero no se demuestra en general. De la misma regla habla minuciosamente Meier Hirsch *(Géom. Aufg. II*, 160 y *sig.)* y Zehme *(Géom. d. Körper* 1859.)

AB describe la zona cónica $AB.2\pi.MM'$ (126-*Obs.*), llamando MM' la distancia del punto M al eje XY. El baricentro, N, del contorno entero, es el baricentro de los puntos de gravedad (puntos medios) de los lados cuyos coeficientes son los lados mismos. Multiplicando, pues, cada lado por la distancia de su punto de gravedad al eje, y sumando los productos, se obtiene el producto del contorno por la distancia, NN', de su centro de gravedad al eje (130). Luego la suma de las zonas cónicas, descritas por los lados, es el producto del perímetro por $2\pi.NN'$, ó sea, por la circunferencia descrita por el centro de gravedad N.



Trazando AA' y BB' normales al eje XY, el cuadrángulo $ABXB'$ es la suma de triángulos, $XAB + XB'A$, y tambien la suma $XB'B + BB'A = XB'B + BB'A' = XA'B$; y, por consecuencia, $XAB = XA'B - XB'A$.

El cuerpo de revolucion, engendrado por el triángulo $XA'B$, es $\frac{1}{3}\pi.BB'^2.XA' = XA'B.\frac{2}{3}\pi.BB'$. Designando por O el centro de gravedad de la superficie $XA'B$, y trazando OO' normal al eje, será $OO' = \frac{1}{3}BB'$; y el cuerpo de revolucion, por consecuencia: $XA'B.2\pi.OO'$. Del mismo modo se halla el volúmen del cuerpo de revolucion, engendrado por $XB'A$, que es $= XB'A.2\pi.PP'$, si P representa el centro de gravedad de la superficie generatriz $XB'A$, y PP' una normal al eje. Designando además por Q el centro de gravedad de la superficie

$XAB = XA'B - XB'A$, y trazando QQ' normal al eje, Q será el centro de gravedad de $XA'B.O$ y $- XB'A.P$, esto es:

$$XA'B.OO' - XB'A.PP' = XAB.QQ'$$

Y, de consiguiente, el cuerpo de revolucion engendrado por XAB, tiene por volúmen $XAB.2\pi.QQ'$.

La superficie de la figura plana, dada, es la suma de los triángulos, cuyas bases son las partes de su contorno y cuyo vértice comun es X (*Planim.* 77). Su centro de gravedad, R, es el centro de gravedad de los centros de gravedad de cada uno de los triángulos componentes, con tal que aquellos puntos tengan por coeficientes las áreas de estos triángulos. El producto de la superficie total por la distancia RR', de su centro de gravedad al eje, es la suma de los productos de cada uno de sus triángulos componentes por las distancias respectivas al eje de los centros de gravedad de estos triángulos (133). Luego el cuerpo engendrado por la figura dada es el producto de la superficie generatriz por $2\pi.RR'$, que es la órbita ó circunferencia descrita por el centro de gravedad, R, de dicha figura.

Si el polígono AB... está inscrito en una curva, con la cual coincide en un número infinito de puntos, los centros de gravedad del contorno y la superficie del polígono se confunden con los correspondientes centros de gravedad de la curva; etc.

145. Si un círculo da vueltas alrededor de un eje, situado en su plano, la superficie y el volúmen del anillo engendrado por aquel círculo, pueden calcularse segun la regla de Guldin.

Designando por p la periferia del círculo, por f su área, y por a la distancia de su centro al eje de revolucion, tendrémos:

$$\text{Superficie anular} = p.2\pi a$$
$$\text{Cuerpo anular} = f.2\pi a$$

Puesto que el centro de gravedad de la circunferencia y de la superficie del círculo se confunden en el centro de este mismo.

En general, si una figura plana, dotada de un eje de simetría, da vueltas alrededor de una recta de su plano que sea paralela á su eje expresado, las dos mitades de su contorno p, y de su superficie f, engendrarán superficies y cuerpos anulares, cuyas semidiferencias son iguales respectivamente á la superficie y al volúmen engendrado por la revolucion de una de sus mitades al rededor de su propio eje de simetría (*). Si representamos por b, b' y b'' las distancias de los centros de gravedad del contorno de la figura dada y de sus dos mitades al eje de revolucion, y por O, c y $-c$, aquellas mismas distancias al eje de la figura, será $b' = b + c$ y $b'' = b - c$; y, por lo tanto:

Superficie anular total $= p.2\pi b$

$$\text{» externa} = \tfrac{1}{2}p.2\pi b' = \tfrac{1}{2}p.2\pi b + \tfrac{1}{2}p.2\pi c$$

$$\text{» interna} = \tfrac{1}{2}p.2\pi b'' = \tfrac{1}{2}p.2\pi b - \tfrac{1}{2}p.2\pi c$$

Y estas igualdades prueban que la semidiferencia

(*) Meier Hirsch (*Géom. Aufg. II*, 173).

de las superficies anulares, externa é interna, vale $\frac{1}{2}p.2\pi c$.

Así se hallarían las expresiones correspondientes para los volúmenes.

Cuando la figura plana que da vueltas no tiene eje, pero está dotada de un centro, y se considera dividida por el diámetro paralelo al eje de revolucion, se hallan los mismos resultados que anteriormente.

Si se conoce la figura, ó forma geométrica (superficie ó cuerpo), engendrada por la revolucion de una figura plana (línea ó superficie) alrededor de una recta de su plano, puede, sin más, calcularse tambien la forma engendrada por dicha figura plana, mediante la revolucion de esta misma al rededor de otra recta de su plano: siempre que los dos ejes de revolucion sean paralelos. Sea A, en efecto, el centro de gravedad de la figura móvil q, y supongamos que la normal desde A, á los ejes de revolucion, corte al primero en B y al otro en C. La diferencia de los dos cuerpos de revolucion descritos estará expresada por

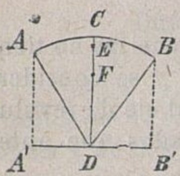
$$q.2\pi.AC - q.2\pi.AB = q.2\pi.BC;$$

donde BC representa la distancia entre los dos ejes, positiva ó negativa, segun que la distancia del centro de gravedad al segundo eje sea mayor ó menor que la distancia del mismo centro al primer eje.

146. Dados, la superficie y el volúmen de un cuerpo de revolucion, pueden calcularse por la regla de Guldin los centros de gravedad del con-

torno y de la superficie de su figura meridiana (*).

El centro de gravedad, E, del arco circular AB, por ejemplo, y el centro de gravedad, F, del sector DAB, están sobre el rádio DC que biseca al arco y al sector (140). Si arco y sector dan la vuelta al rededor de la normal á DC trazada por D, la superficie descrita por el arco tendrá por expresion



$$AB.2\pi.DE = A'B'.2\pi.DC \ (131);$$

en la cual representa $A'B'$ la proyeccion normal del arco AB sobre el eje de revolucion; y el volúmen engendrado por el sector estará expresado por

$$DAB.2\pi.DF = A'B'.\tfrac{2}{3}\pi.DC^2 \ (131)$$

y, como el sector $DAB = \frac{1}{2} AB.DC$, será finalmente:

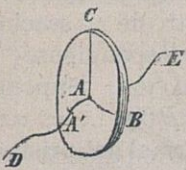
$$\frac{DE}{DC} = \frac{A'B'}{AB}, \quad DF = \frac{2}{3}\frac{A'B'}{AB} DC = \frac{2}{3} DE$$

147. La regla guldiniana sirve tambien para calcular la superficie y el volúmen que engendra una figura plana móvil, siempre que los puntos de esta figura plana no describan círculos paralelos,

(*) Meier Hirsch (*Géom. Aufg. II*, 192).

sino otras curvas cualesquiera, paralelas entre sí, y normales al plano de la figura generatriz (*).

La figura plana ABC se mueve de modo: que el punto A marcha sobre una curva plana, dada, DE, á la cual corta siempre normalmente el plano ABC; y que la recta AB, comun en un instante dado al plano de la figura móvil y al de la curva de DE, permanece siempre sobre el plano de esta misma curva DE. Mientras el punto A recorre el arco AA', describen el contorno y la superficie de la figura móvil un segmento de superficie y de cuerpo tubular, que podrán calcularse segun la regla de GULDIN, con tanta mayor aproximacion cuanto menor sea el arco AA'. El segmento descrito, de superficie ó de cuerpo tubular, puede, en efecto, reemplazarse por un segmento de superficie ó de cuerpo, tubulares tambien, descritos por la figura plana ABC, si comenzase á dar la vuelta alrededor del eje que, situado en su plano ABC, es normal á AB y pasa por el centro de curvatura del arco AA'. La suma de todos estos segmentos es el producto del contorno ó de la superficie de la figura móvil por la suma de todas las órbitas ó trayectorías de su baricentro correspondiente. Y la órbita del centro de gravedad no difiere en longitud de su paralela, descrita por el punto A.

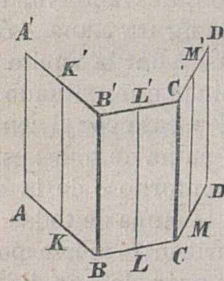


(*) Esta consideracion fué hecha, en parte, por LEIBNIZ (*Acta Erud.*, 1695, p. 493); pero EULER estableció sus condiciones precisas en su Memoria *Ueber krumme Cylinder*, 1778. (*Nov. Act. Petrop.*, 12, p. 91). Véase: MEIER HIRSCH (*Geom. Aufg. II*, 174 y siguientes) y POISSON (*Mecan.* 84).

La curva DE puede tambien no ser plana; y entónces, por su plano en el punto A deberá comprenderse el plano que contiene su centro de curvatura y el arco evanescente AA'. Etc.

148. Por *tronco de prisma (ungula)* se comprende un trozo de prisma, limitado por dos planos no paralelos. Constrúyase una seccion normal del prisma; determínese el centro de gravedad de su contorno; y por este punto de gravedad trázese la recta paralela á las aristas del prisma. El segmento de esta recta, comprendido entre los dos planos no paralelos que limitan el tronco, lleva el nombre de *arista baricéntrica, correspondiente al contorno de la seccion normal.*

La superficie lateral de un tronco de prisma (ó de cilindro) es el producto del perímetro de su seccion normal por la arista baricéntrica correspondiente (*).



Demostracion. Suponemos que $ABCD$ ... es una seccion normal del prisma; y K, L, M, ..., los puntos medios de AB, BC, CD, ... El baricentro S del contorno $ABCD$... es el baricentro de $AB.K$, $BC.L$, $CD.M$,... Ahora bien, si las aristas que pasan por

(*) Gregorio de S. Vicentio fué el primero que calculó el área lateral y el volúmen de los troncos de cilindro sin consideraciones baricéntricas (*Opus. Géom.*, 1647). Meier Hirsch (*Géom. Aufg. II*, 163) estableció el teorema general del texto; pero no del todo exactamente, como observaron Steiner y otros.

los puntos A, B, C,... y las paralelas á ellas por los puntos S, K, L, M,..., son cortadas por un plano cualquiera en A', B', C',... y en S', K', L', M',... respectivamente, será (133):

$$AB.KK' + BC.LL' + CD.MM' + \ldots$$
$$= (AB + BC + \ldots)\, SS'$$

Para otro plano, que corte á las mismas rectas, tendremos asimismo:

$$AB.KK'' + BC.LL'' + CD.MM'' + \ldots$$
$$= (AB + BC + \ldots)\, SS''$$

Y restando:

$$AB.K'K'' + BC.L'L'' + CD.M'M'' + \ldots$$
$$= (AB + BC + \ldots)\, S'S''$$

Mas la porcion de la superficie del tronco, situada sobre el plano $ABB'A'$, es $= AB.K'K''$, etc., y $S'S''$ es la arista baricéntrica, correspondiente al contorno de la seccion normal: luego, etc.

Observacion. Dos troncos de un prisma (ó cilindro) tendrán iguales superficies laterales (ó zonas) cuando sus aristas baricéntricas, correspondientes al contorno de la seccion normal del prisma, sean de igual longitud.

149. Los baricentros de las superficies de todas las secciones de un prisma caen sobre una recta, paralela á sus aristas (*).

(*) Meier Hirsch (*l. c.* 161).

Demostracion.—Las superficies de los triángulos ABC, ACD,... que componen una seccion $ABCD$... del prisma, tienen por centros de gravedad los puntos K, L,...; y la superficie de la seccion $ABCD$... tiene por centro de gravedad S. Trazando por S, K, L,... rectas paralelas á las aristas del prisma, que corten el plano de otra seccion del mismo $A'B'C'D'$... en los puntos S', K', L' ..., tendremos:

$$AA' + BB' + CC' = 3KK',$$

$$AA' + CC' + DD' = 3LL',...$$

$$ABC.KK' + ACD.LL' + ... = (ABCD ...)\, SS'$$

Si además por los puntos A', B' ... trazamos paralelas, en cualquiera direccion, que corten al plano ABC en los puntos A'', B''... los planos $AA'A''$, $BB'B''$, ..., serán paralelos entre sí, y semejantes los triángulos situados sobre los mismos; y, por lo tanto:

$$A''A' : B''B' : ... = AA' : BB' : ...$$

Síguese de aquí que $A''A' + B''B' + C''C' = 3K''K'$, ó sea, que es K' el baricentro de los puntos A', B' y C', y de la superficie $A'B'C'$, etc. Resulta tambien que

$$ABC.K''K' + ACD.L''L' + ... = (ABCD...)\, S''S'.$$

Mas sabemos (103) que

$$A'B'C' : A'C'D' : ... = ABC : ACD : ...$$

Luego tambien:

$$A'B'C'.K'K' + A'C'D'.L''L' + \ldots = (A'B'C'D'\ldots)S''S'$$

Y esta ecuacion prueba que es S' el baricentro de la superficie $A'B'C'D'\ldots$

150. Para hallar el volúmen de un tronco de prisma se determina el baricentro de la superficie de su base, y se traza por dicho punto la recta paralela á las aristas del prisma. El segmento de esta recta, comprendido entre los dos planos, no paralelos, que limitan el tronco, se llama *arista baricéntrica correspondiente á las áreas de las secciones del prisma* (149).

El volúmen del tronco de prisma es el producto del área de la seccion normal del prisma por su arista baricéntrica correspondiente (*).

Demostracion. Sean $A'B'C'D'\ldots$ y $A''B''C''D''\ldots$ las secciones del prisma que limitan el tronco, y $ABCD$ su seccion normal. Las rectas paralelas á las aristas del prisma, trazadas por los baricentros $K, L, \ldots S$, de las superficies ABC, $ACD, \ldots$, $ABCD\ldots$, cortan á los planos de las secciones limitadoras en los puntos $K', L', \ldots S'$ y $K'', L'', \ldots S''$, respectivamente. Así, pues:

$$ABC.KK' + ACD.LL' + \ldots = (ABCD\ldots)\ SS'$$
$$ABC.KK'' + ACD.LL'' + \ldots = (ABCD\ldots)\ SS''$$

(*) Meier Hirsch (*l. c.* 162). Steiner (*J. de Crelle*, A. 16, p. 90). La descomposicion del tronco de prisma trilátero es de Legendre (*Élém. de Géom.*, 2.ª).

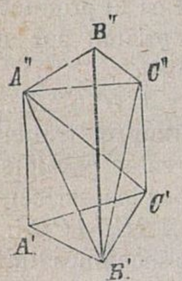
y, por consecuencia:

$$ABC.K'K'' + ACD.L'L'' + \ldots = (ABCD\ldots)\,S'S''$$

El tronco de prisma trilátero, $A'B'C'A''B''C''$ es descompuesto por los triángulos diagonales $A''B'C'$ y $A''B'C''$, en las pirámides triláteras $A'B'C'A''$, $A''B'C'C''$ y $A''B'C''B''$: de las cuales es $A''B'C'C'' = A'B'C'C''$, por ser $A''A'$ paralela á la cara $B'C'C''$; y

$$A''B'C''B'' = A'B'C''B'' = A'B'C'B''$$

por ser $A''A'$ paralela á la cara $B'C''B''$, y $C''C'$ paralela á la cara $A'B'B''$. Mas $A'B'C'A''$ es el tercio del prisma, cuya seccion normal es ABC y cuya arista lateral es $A'A''$; et cætera. Luego el tronco trilátero $A'B'C'A''B''C''$ es



$$= \tfrac{1}{3}ABC(A'A'' + B'B'' + C'C'') = ABC.K'K''$$

y el tronco total, por consecuencia:

$$= ABC.K'K'' + ACD.L'L'' + \ldots = (ABCD\ldots)S'S''$$

Observacion. En particular, dos troncos de un prisma (ó cilindro) tendrán volúmenes iguales cuando sus aristas baricéntricas, correspondientes á las áreas de las secciones del prisma, tengan longitudes iguales.

Designando los tetraedros $A'B'C'A''$, $A''B'C'B''$, $A'B'C'C''$ por v_1, v_2, v_3, respectivamente, y por v el tronco de prisma, tendremos (106):

$$v_1 : v_2 = A'A'' : B'B'', \quad v_2 : v_3 = B'B'' : C'C'',$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3.$$

Si representamos ahora por h y z, z_1, z_2, z_3, las distancias al plano de las aristas $B'B''$ y $C'C''$, de la arista $A'A''$ y de los baricentros de v, v_1, v_2, v_3, será (141 y 133):

$$vz = v_1z_1 + v_2z_2 + v_3z_3$$

$$4z_1 = 2h, \quad 4z_2 = h, \quad 4z_3 = h$$

$$4vz = h(2v_1 + v_2 + v_3) = h(v + v_1)$$

$$z = \tfrac{1}{4}h\left(1 + \frac{A'A''}{A'A'' + B'B'' + C'C''}\right)$$

Brianchon, 1839. *J. de Lionville, t.* 4, *p.* 345.

151. El volúmen de un poliedro puede considerarse compuesto por troncos de prisma (Meier Hirsch, *l. c.* 165); así como la superficie de un polígono, por fajas limitadas (*Planim.* 84). Por los vértices del poliedro trácense paralelas, en cualquiera direccion y cortémoslas normalmente por un plano. Así se obtienen tantos troncos de prisma como caras tiene el poliedro y la proyeccion normal de cada cara sobre el plano secante. Designando por A, B, C,... los baricentros de cada una de las caras; por A', B', C'... las proyecciones normales de estos puntos sobre el plano secante; y por

α, β, γ,... las proyecciones normales de las caras sobre este mismo plano; los volúmenes de los troncos de prisma serán $\alpha.AA'$, $\beta.BB'$, $\gamma.CC$... (150); y el del poliedro dado, la suma

$$\alpha.AA' + \beta.BB' + \gamma.CC' + \ldots$$

Los perímetros de las caras del poliedro (113) determinan los de las proyecciones normales de estas caras; y, por consecuencia, los signos de α, β, γ...

La suma de las proyecciones normales de las caras del poliedro, $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$, es nula *(Trigonometría*-62); y, por lo tanto, el sistema $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$... tiene un baricentro, infinitamente distante (137). Si, en particular, el sistema $\alpha.A$, $\beta.B$,... no tiene ningun baricentro, el volúmen del poliedro es nulo.