INSTITUTO DEL CARDENAL CISNEROS

GUIA DEL BACHILLER.

CIENCIAS.

SEGUNDA ENSEÑANZA.

GUIA
DEL BACHILLER

POR

D. FÈLIX SANCHEZ Y CASADO.

SEGUNDA PARTE:

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.
GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA.
FÍSICA Y QUÍMICA.
FISIOLOGÍA E HIGIENE.
HISTORIA NATURAL.

MADRID.

IMPRENTA Á CARGO DE GREGORIO JUSTE,
Isabel la Católica, 23, 2.º
1874.

GEOMETRÍA

Y

TRIGONOMETRÍA

PARA USO

DE LOS ALUMNOS DE LOS INSTITUTOS, COLEGIOS Y SEMINARIOS

Y TAMBIEN PARA LAS PERSONAS

QUE DESEEN ADQUIRIR UNA NOTICIA LIGERA PERO EXACTA

DE ESTAS IMPORTANTÍSIMAS CIENCIAS

POR

D. FÈLIX SANCHEZ Y CASADO.

Tercera edicion.

ILUSTRADA CON NUMEROSOS GRABADOS INTERCALADOS EN EL TEXTO.

MADRID.

IMPRENTA Á CARGO DE GREGORIO JUSTE,

Isabel la Católica, 23, 2.º

1874.

PRECIO EN TODA ESPAÑA.
4 rs en rústica
6 rs en cartoné.

Los pedidos pueden hacerse al Autor (calle de San Roque, núm. 12 y 14, 2.º derecha, Madrid), el cual hará una rebaja del 25 por 100 siempre que el pedido exceda de 100 rs. y se acompañe su importe en libranzas ó en letras de facil cobro.

PRÓLOGO.

Al emprender la nueva edicion de este cuaderno de *Geometría y Trigonometría* hemos procurado cautivar la mente del alumno no solo exponiendo las verdades de esta ciencia en su encadenamiento lógico, sino tambien haciendo interesante esta asignatura ante cuyas dificultades no pocos jóvenes se descorazonan y se abaten.

Para esto hemos evitado un lenguaje demasiado técnico, asimilando en lo posible la redaccion á la enseñanza oral, y además haciéndo uso de una innovacion, que nos parece sumamente útil en la enseñanza, poniendo á la vista, siempre que ha sido posible, no solo el objeto de la demostracion, sino tambien las hipótesis hechas sobre los datos, y casi siempre el cuadro de los cálculos por medio de los cuales se obtiene la demostracion. Creemos que por este medio se conseguirán dos ventajas: primera, que el alumno que ha de sufrir un exámen oral se acostumbre á seguir el órden más acomodado en la disposicion de lo que ha de escribir en la pizarra; y segunda, que la simple inspeccion de la figura abrace el conjunto de cálculos en que descansa su demostracion. De suerte que la figura dispuesta de este modo es para la enseñanza de la Geometría lo que el *mapa mudo* para la de la Geografía.

GEOMETRÍA.

INTRODUCCION.

1. Definiciones generales. Todo lo que afecta nuestros sentidos se llama *cuerpo*.

En todo cuerpo hay que considerar tres dimensiones: longitud, latitud y profundidad ó grueso.

La Geometría prescinde de la materia de los cuerpos y no considera más que el espacio que ocupan, esto es, su *volúmen* (1).

La *superficie* (2) es el límite que separa á un cuerpo del espacio que le rodea. La superficie no tiene grueso.

La *línea* (3) proviene de la interseccion de dos superficies. No tiene por lo tanto latitud, ni grueso.

El *punto* (4) resulta de la interseccion de dos líneas. No tiene pues dimensiones en ningun sentido, y un punto no se distingue de otro más que por su posicion.

Se llaman *figuras* (5) los volúmenes, las superficies y las líneas.

Dos figuras son *iguales* cuando tienen la misma forma y extension; son *equivalentes*, cuando tienen la misma extension, pero diferente forma; y son *semejantes*, cuando tienen la misma forma, pero diferente extension.

Geometría (6) es la ciencia que tiene por objeto el

---

(1) De la palabra latina *volumen*, libro, derivada de *volvo*, arrollar.
(2) De las palabras latinas *super*, sobre y *facies*, cara, lado.
(3) De la palabra latina *linea*, hilo, raya.
(4) Del verbo latino *pungo*, pinchar.
(5) Del nombre latino *figura*, forma, derivado de *fingo*, formar.
(6) De las palabras griegas *ge*, tierra y *metreo*, medir.

estudio de las propiedades de las figuras y la medida de su extension.

La geometria se cree que nació en Egipto y que debió su origen á la necesidad de remediar la confusion que producian en los limites de las propiedades las inundaciones anuales del Nilo.

Esta ciencia es la base de las obras públicas; es la madre de la astronomia y la guia del navegante; á sus preceptos debemos todas las artes de construccion, los edificios públicos, nuestras casas, las fortificaciones de nuestras ciudades, los caminos, los canales y la sábia arquitectura de los numerosos buques que surcan los mares. Ella mide y dibuja, segun sus proporciones, las diversas partes de los países; ella dirige el uso de las máquinas de guerra, y á sus medidas y cálculos están sujetos los movimientos de los ejércitos. En fin, todas las ciencias están enlazadas con la geometria, la cual, es la base de la mecánica, de la hidráulica, de la óptica y todas las partes de la física reciben de ellos continuos auxilios.

En una esfera ménos elevada esta ciencia nos enseña á medir y á representar nuestros campos, nuestros edificios y nuestros jardines; á evaluar y á comparar sus gastos y sus productos; mide alturas y distancias inaccesibles; guia la mano del dibujante; y por último, ofrece una multitud de aplicaciones aisladas usadas frecuentemente en la economía doméstica.

Las líneas pueden ser rectas, quebradas ó curvas.

La *línea recta* (1) es indefinible y sus principales propiedades son las siguientes:

1.ª *Es idéntica en todos sus puntos y superponible á sí misma de cualquier modo que se la vuelva;*

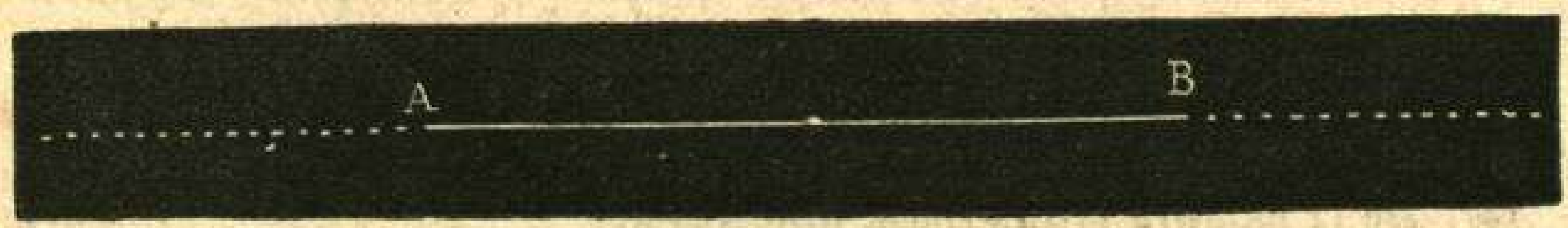
2.ª *Es el camino más corto entre dos puntos;*

3.ª *Por dos puntos dados no puede pasar más que una línea recta.*

De aqui se infiere que *dos rectas diferentes no pueden tener más que un solo punto comun*; pues si tuviesen dos puntos comunes, no serian diferentes.

Por la idea misma que tenemos de la linea recta la concebimos prolongada indefinidamente en ambos sentidos

Una línea recta ó más brevemente una *recta* se designa con dos de su puntos; asi la *recta* AB es la recta que pasa por los puntos A y B.



(1) Del nombre latino *rectus*, derecho, derivado de *rego*, dirigir.

Si tuviésemos que considerar más particularmente la porcion comprendída entre los dos puntos A y B se diria el *segmento* (1) *de recta* AB, pero para abreviar se suele decir la *recta* AB ó tambien la *longitud* AB.

La línea compuesta de porciones consecutivas de rectas diferentes se llama *línea quebrada* (2).

Toda línea que no es recta ni quebrada se llama *línea curva* (3) ó más brevemente *curva*.

El *plano* (4) es á las superficies lo que la línea recta es á las líneas en general; se le define comunmente diciendo que es: *una superficie á la que puede adaptarse una recta en todas direcciones.*

Todo plano se puede considerar prolongado indefinidamente.

De esta definicion del plano y de las propiedades de la línea recta se infiere:

1.° *Que una recta no puede estar en parte en un plano y en parte fuera de él.*

2.° *Que una recta que tiene dos puntos en un plano está toda ella contenida en él.*

De aquí resulta que todas las figuras de que trata la Geometría pueden dividirse en dos grandes clases:

1.ª *Figuras planas ó de dos dimensiones*, que están contenidas por completo en un solo plano:

y 2.ª *Figuras de tres dimensiones*, que no pueden estar contenidas en un solo plano.

2. **Division de la geometría.** De aquí se infiere la division de la Geometría en dos partes: *geometría plana*, que estudia las figuras planas, y *geometría del espacio*, que trata de las figuras de tres dimensiones.

---

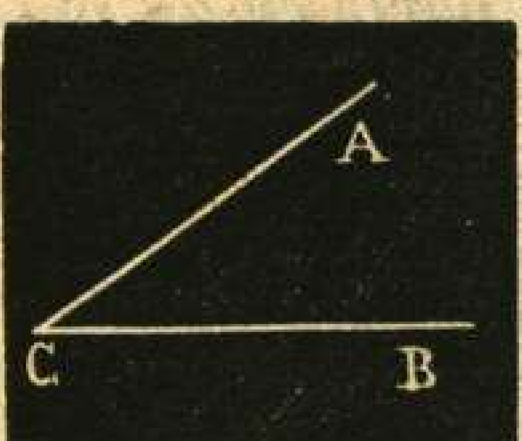
(1) Del nombre latino *segmentum*, pedazo, trozo; derivado de *seco*, cortar.
(2) Del verbo *quebrar*, derivado por metátesis del latino *crepare*, estallar.
(3) Del adjetivo latino *curvus*, curvo.
(4) Del adjetivo latino *planus*, llano.

GEOMETRÍA PLANA.

LIBRO PRIMERO.

Nociones preliminares y definiciones.

3. Angulos y paralelismo de las rectas. Cuando dos rectas dadas están situadas en un mismo plano, pueden presentarse dos casos: 1.º que se corten, prolongándolas suficientemente, y 2.º que no se corten, por más que se las prolongue.



1er. *caso.* Cuando se cortan, prolongándolas hasta que se encuentren, se obtiene una figura como la adjunta, que se llama *ángulo* (1).

Un ángulo es, pues, una superficie plana situada entre dos líneas que parten de un punto y se extienden hasta lo infinito.

Las dos líneas AC y CB se llaman *lados* del ángulo; y el punto C, en que se cortan, es su *vértice* (2).

La magnitud de un ángulo no depende, por tanto, de la longitud de sus lados, sino de la separacion ó abertura que dejan entre sí.

Los ángulos se designan con tres letras: una propia de cada lado y la tercera del vértice; ésta se escribe y se lee enmedio de las otras dos, y así se dirá el ángulo ACB ó BCA.

Cuando no es posible confundirle, el ángulo se designa con una sola letra, que es la del vértice.

Dos ángulos son iguales cuando se pueden hacer coincidir á la vez sus dos lados uno sobre otro.

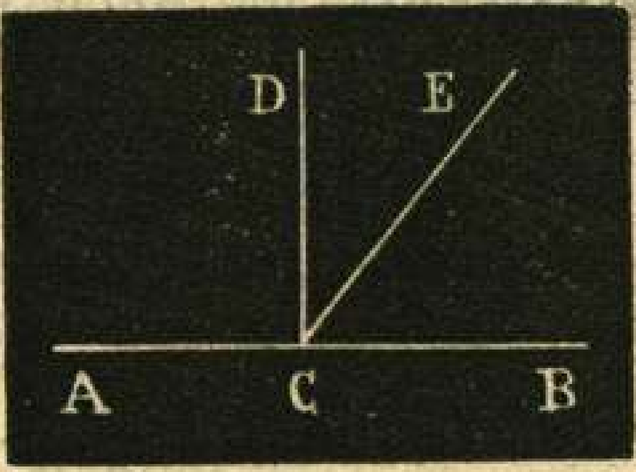
(1) De la palabra griega *anculos*, rincon, esquina

(2) Del nombre latino *vertex*, punta.

2.° *caso*. Cuando dos rectas no se cortan, por más que se prolonguen, se dice que son *paralelas* (1). Es menester no olvidar que hemos supuesto ya que se trataba de rectas situadas en el mismo plano; dos rectas, para ser paralelas, es preciso que cumplan con las condiciones siguientes:

1.ª *Estar situadas en un mismo plano.*

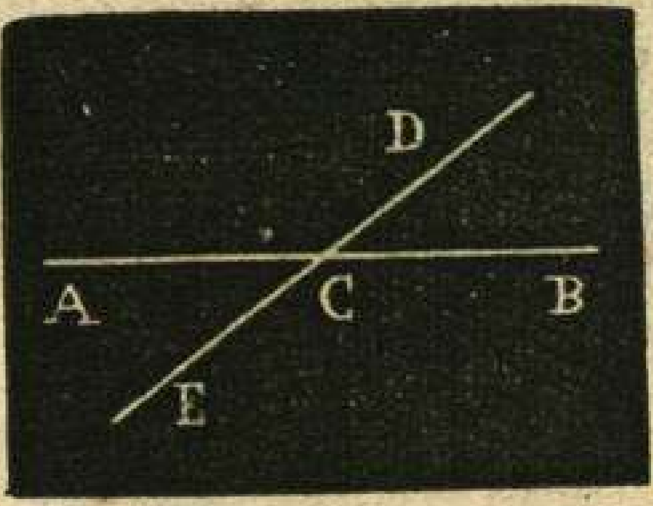
2.ª *No encontrarse por más que se prolonguen.*



4. **Definiciones** Se llaman *ángulos adyacentes* (2) los que tienen un lado comun, y los otros dos lados son prolongaciones uno de otro.

Los ángulos ACD y DCB son adyacentes y tambien lo son los ACE y ECB.

Cuando una recta corta á otra, formando con ella ángulos adyacentes iguales, se dice que estos ángulos son *rectos*, y la recta se llama *perpendicular* (3).



Dos rectas que se cortan se llaman *oblícuas* (4) entre sí, cuando no son perpendiculares, esto es, cuando los dos ángulos adyacentes que forman no son iguales.

Las rectas AB y ED son oblícuas entre sí, porque los ángulos adyacentes, que forman ACD y DCB, son desiguales.

Un ángulo es *agudo* (5) ú *obtuso* (6) segun que es menor ó mayor que un recto.

Los ángulos ACE y DCB son agudos, y los ACD y ECB son obtusos.

---

(1) Del nombre griego *paralellos*, uno enfrente de otro.

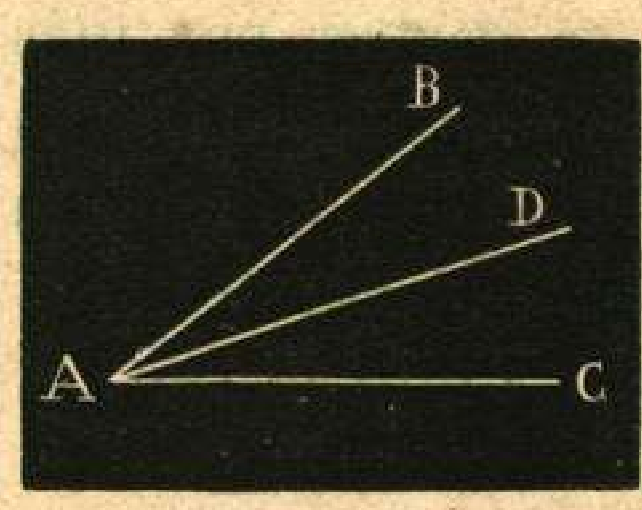
(2) De las palabras latinas *ad*, junto á y *jaceo*, estar colocado.

(3) Del nombre latino *perpendiculum*, plomada; derivada de *perpendo*, pesar con cuidado y exactamente, comparacion tomada de la balanza.

(4) De la palabra latina *obliquus*, transversal.

(5) De la palabra latina *acutus*, puntiagudo, afilado.

(6) De la palabra latina *obtusus*, romo, chato, sin punta; derivada de *obtundo*, embotar.

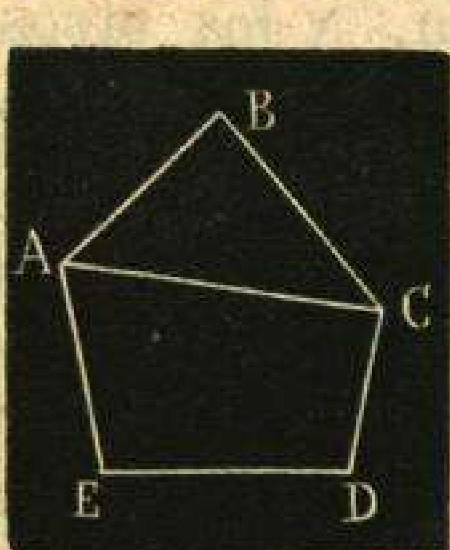


Se llama *bisectriz* (1) de un ángulo la recta que le divide en dos partes iguales.

La recta AD es la bisectriz del ángulo BAC.

Dos ángulos cuya suma es igual á dos rectos se llaman *suplementarios;* y *complementarios,* son aquellos cuya suma es igual á un recto.

5. **Figuras formadas por la interseccion de muchas rectas**. Cuando muchas rectas se encuentran sucesivamente, limitando en todas direcciones cierta porcion de plano, forman lo que se llama un *polígono* (2).



Los ángulos que forman son los ángulos del polígono; las porciones de recta, que le limitan, son los *lados* del mismo; y el conjunto de los lados forma el *contorno* ó el *perímetro* (3) del polígono.

La recta, que une dos vértices no adyacentes de un polígono, se llama *diagonal* (4).

ABCDE es un polígono; A, B, C, D y E son sus ángulos; AB, BC, CD, DE, EA son sus lados; y AC es una diagonal.

El número de lados de un polígono es evidentemente igual al número de ángulos.

El número de lados ó de ángulos de los polígonos, constituye un medio natural de clasificacion de estas figuras. Los polígonos más sencillos han recibido nombres especiales. Así se llama

(1) De las latinas *bis*, en dos y *seco*, cortar.

(2) De las palabras griegas *polys*, muchos y *gonia*, ángulos.

(3) De las palabras griegas *peri*, al rededor y *metron*, medida.

(4) De las palabras griegas *dia*, á través y *gonia*, ángulo; porque une dos ángulos.

Triángulo (1) el polígono de *tres* lados.
Cuadrilátero (2) — de *cuatro* —
Pentágono (3) — de *cinco* —
Exágono (4) — de *seis* —
Octógono (5) — de *ocho* —
Decágono (6) — de *diez* —

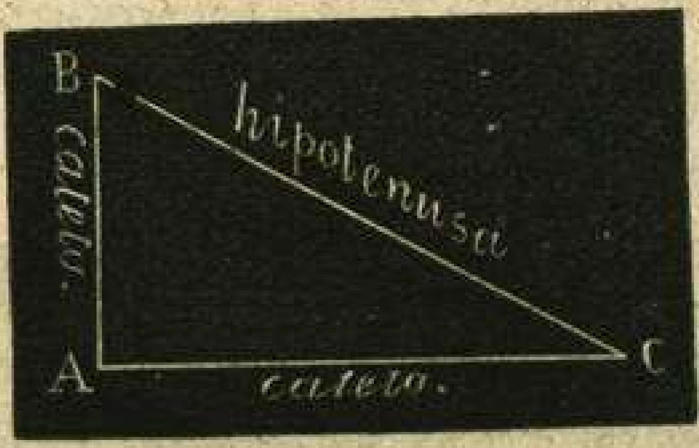
6. Especies de triángulos. Un triángulo se llama *equilátero* (7), cuando sus tres lados son iguales; y *equiángulo* (8), cuando sus tres ángulos son iguales.

Más adelante veremos que todo triángulo equilátero es tambien equiángulo.

Triángulo *isósceles* (9) es el que tiene dos lados iguales. El tercer lado se llama *base* del triángulo.

Triángulo *escaleno* (10) es aquel cuyos tres lados son desiguales.

Cuando en un triángulo un ángulo es recto (y ya

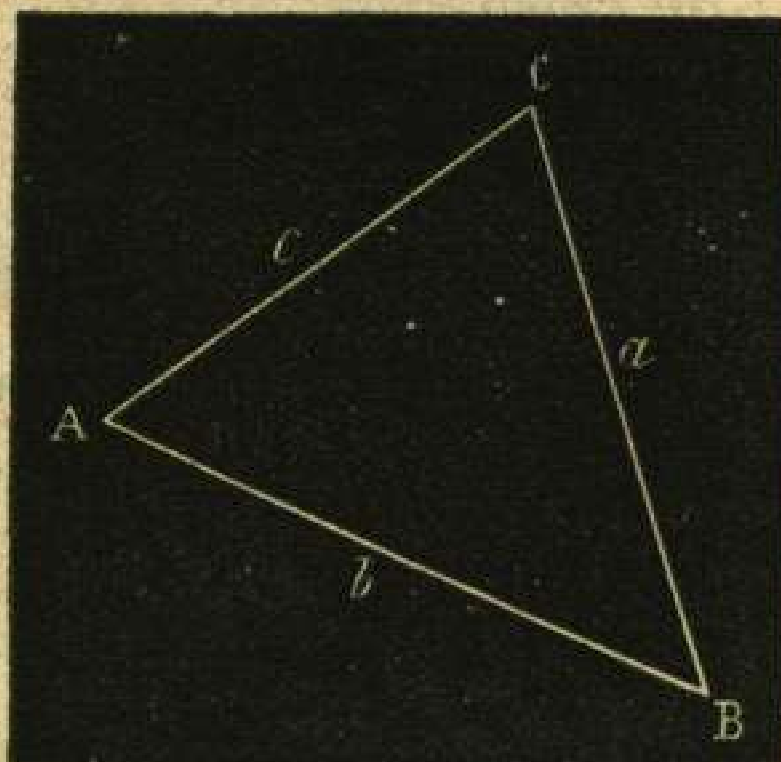


veremos que no puede haber más que uno) el triángulo se llama *rectángulo.* Los dos lados que forman dicho ángulo se llaman *catetos* (11) y el lado opuesto se llama *hipotenusa* (12).

El triángulo que tiene un ángulo obtuso se llama

(1) De las palabras latinas *tres*, tres y *ángulus*, ángulo.
(2) De las palabras latinas *quadrini*, cuatro y *latus*, lado
(3) De las palabras griegas *pente*, cinco y *gonia*, ángulo.
(4) De las palabras griegas *ex*, seis y *gonia*, ángulo
(5) De las palabras griegas *octo*, ocho y *gonia*, ángulo.
(6) De las palabras griegas *deca*, diez y *gonia*, ángulo.
(7) De las palabras latinas *æquus*, igual y *latus*, lado.
(8) De las palabras latinas *æquus*, igual y *angulus*, ángulo.
(9) De las palabras griegas *isos*, igual y *squelos*, piernas.
(10) De la palabra griega *scalenos*, cojo.
(11) De la palabra griega *cathetos*, vertical, á plomo; porque son perpendiculares entre sí.
(12) De la palabra griega *hypoteino*, estar opuesto á; porque es el lado opuesto al ángulo recto.

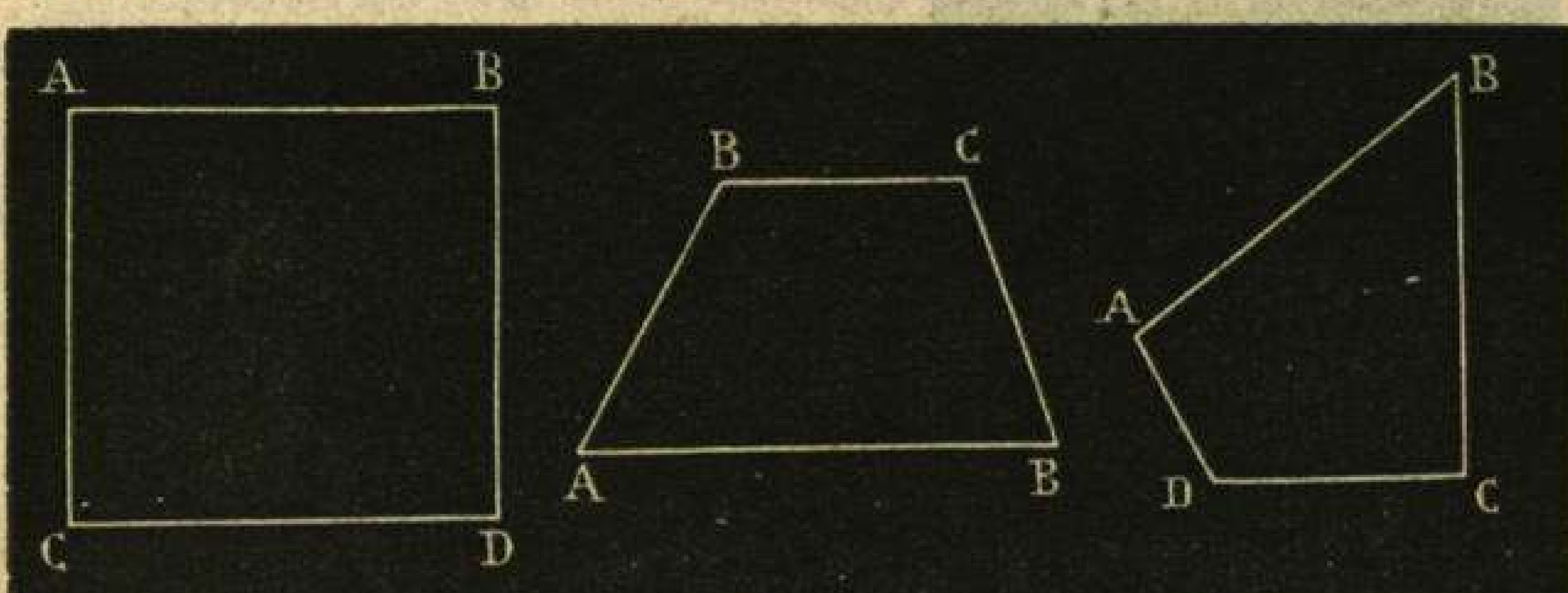
obtusángulo; y el triángulo cuyos tres ángulos son agudos se llama *acutángulo.*



Como siempre es ventajoso, cuando se puede, designar los elementos de una figura con las notaciones más sencillas, los ángulos de un triángulo se denotan simplemente con la letra del vértice y los lados se designan con la letra minúscula correspondiente á la mayúscula que lleva el vértice opuesto, lo cual no ofrece ninguna ambigüedad, pues en el triángulo los lados y los ángulos son opuestos dos á dos.

7. Especies de cuadriláteros. Los cuadriláteros se dividen del siguiente modo:

Cuadriláteros.	Lados no paralelos.			*Trapezoide* (2).
	Sólo dos lados paralelos.			*Trapecio* (3).
	Cuatro lados respectivamente paralelos *(paralelógramo)* (1)	ángulos desiguales	lados desiguales	*Romboide* (4).
			lados iguales	*Rombo* (5).
		ángulos iguales	lados desiguales	*Rectángulo* (6).
			lados iguales	*Cuadrado* (7).



Cuadrado. Trapecio. Trapezoide.

(1) De las palabras griegas *paralellos*, paralelo y *gramma*, línea.

(2) De las palabras griegas *trapeza*, trapecio y *eidos*, forma.

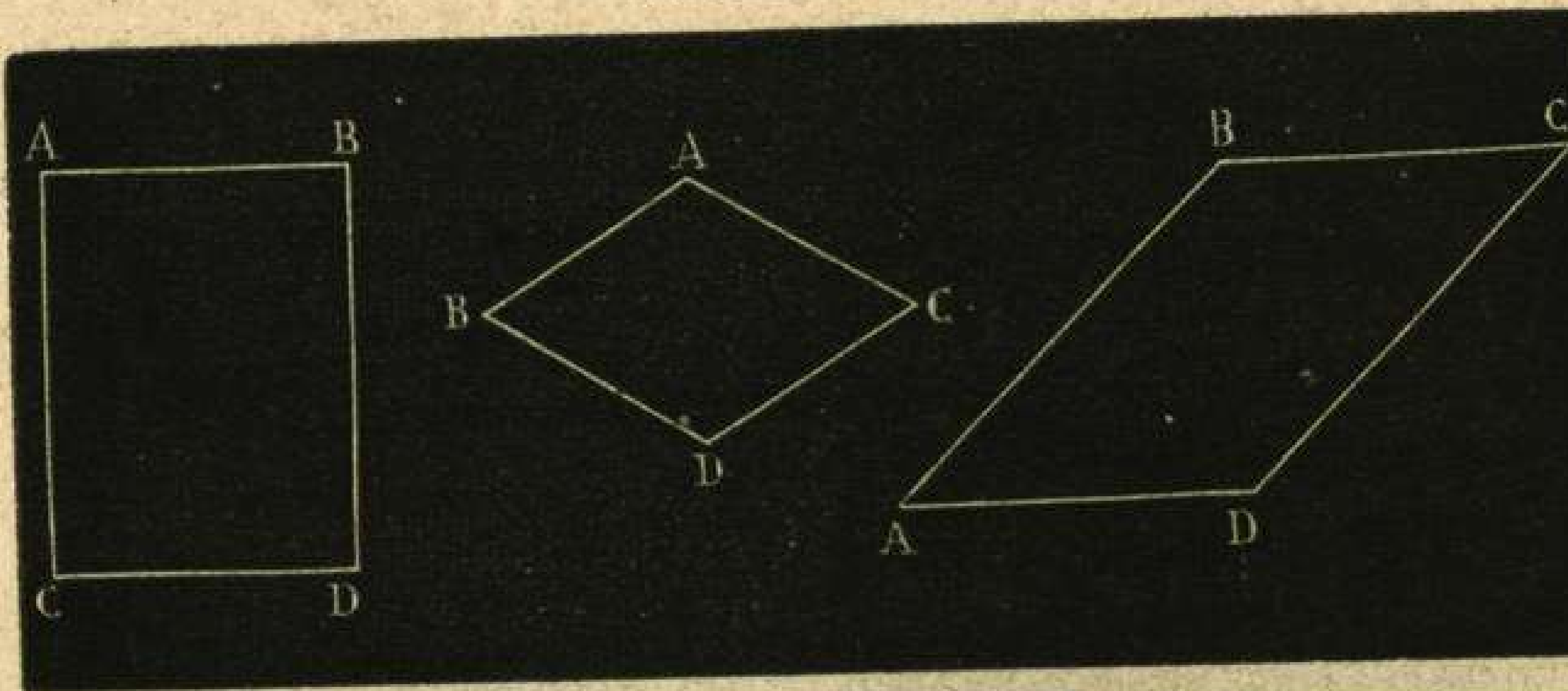
(3) De la palabra griega *trapeza*, mesa, compuesta de *tetra*, cuatro y *peza*, piés, porque las mesas entre los griegos tenian la forma de trapecio.

(4) De las griegas *rombos*, rombo y *eidos*, forma.

(5) De la griega *rombos*, rombo.

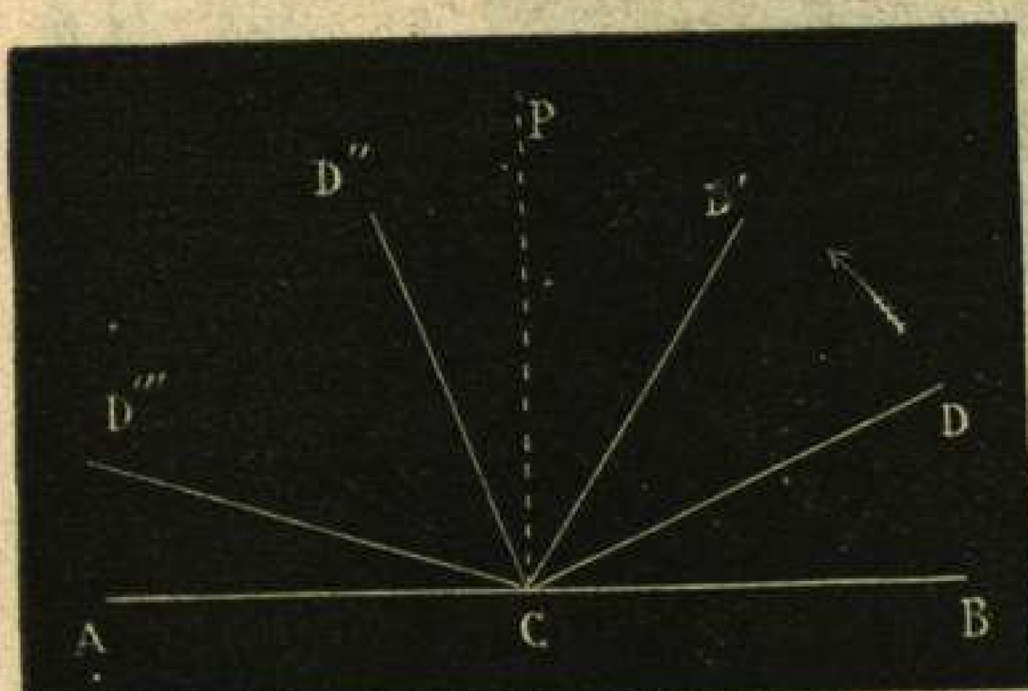
(6) De las palabras latinas *rectus*, recto y *angulus*, ángulo.

(7) Del nombre latino *quadratus*, cuadrado, derivada de *quatuor*, cuatro.



Rectángulo. Rombo Romboide.

Angulos formados por la concurrencia de dos rectas.



8. Teorema I.—*En un punto cualquiera* C *de una recta* AB *se puede levantar una perpendicular á dicha recta, pero no se puede levantar más que una.*

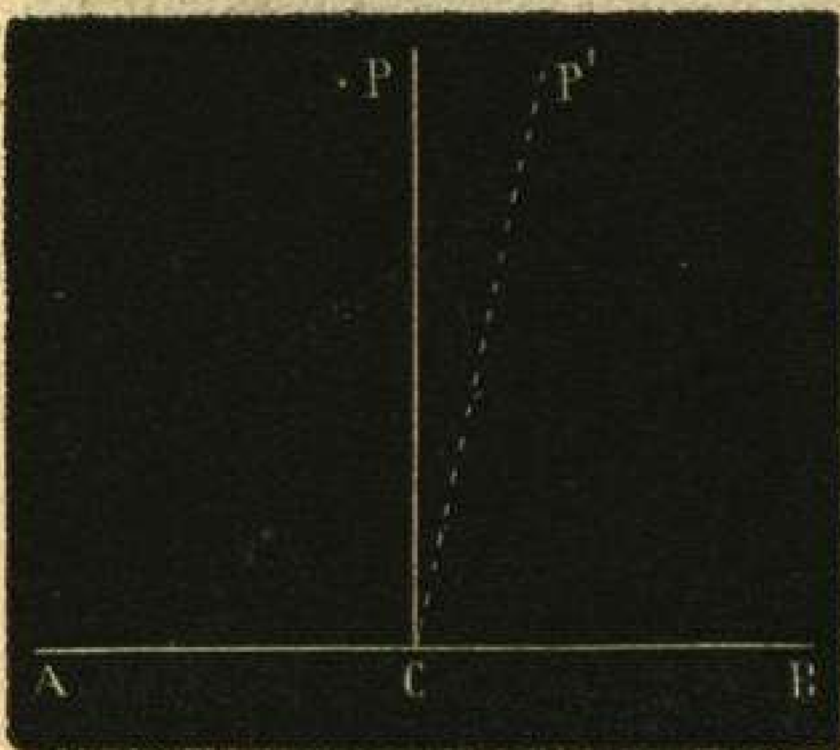
1.° Se puede levantar una.

En efecto, supongamos una recta CD, movible alrededor del punto C, la cual colocada primero sobre CB, se aleje de ella, moviéndose en la direccion indicada por la flecha, hasta venir por último á coincidir con AC.

En este movimiento la recta pasará de un modo contínuo por una infinidad de posiciones diferentes, como CD, CD′, CD″, etc.

A una posicion cualquiera de esta recta, por ejemplo CD′, corresponden dos ángulos adyacentes ACD′ y BCD′, desiguales por lo comun; pero al principio del movimiento el ángulo de la derecha es evidentemente menor que el de la izquierda y lo contrario tiene lugar al fin del movimiento.

Tenemos, pues, dos cantidades, la primera de las cuales es en un principio menor y despues mayor que la segunda; pero como estas dos cantidades han variado de una manera continua, no han podido ménos de ser iguales en un momento dado. Existe, pues, una posicion CP de la recta movible, en que el *ángulo* ACP=*ángulo* BCP, lo cual equivale á decir que la recta CP es perpendicular á la AB.



2.° No se puede levantar más que una.

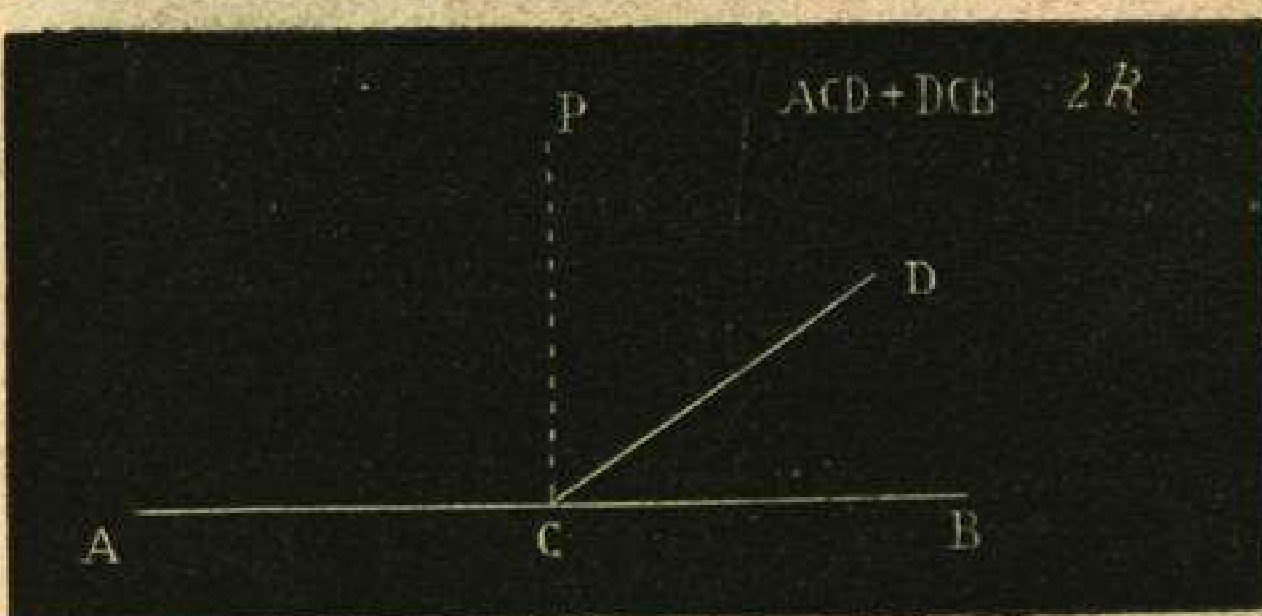
Porque si otra recta CP′ fuese tambien perpendicular á AB en el punto C, tendriamos

ángulo ACP′=*ángulo* BCP′,

lo cual es evidentemente incompatible con la hipótesis, segun la cual tenemos

Angulo ACP = *Angulo* BCP.

Corolario. Todos los ángulos rectos son iguales.



9. Teorema II.—*Cuando una recta* CD *encuentra á otra AB, los dos ángulos adyacentes* ACD y DCB, *que forma con ella, son suplementarios.*

Tracemos la perpendicular CP; segun la figura tendremos

ACD+DCB=ACP+PCB=2R (1).

Corolario 1.° *Si uno de los ángulos adyacentes es recto, el otro tambien lo será.*

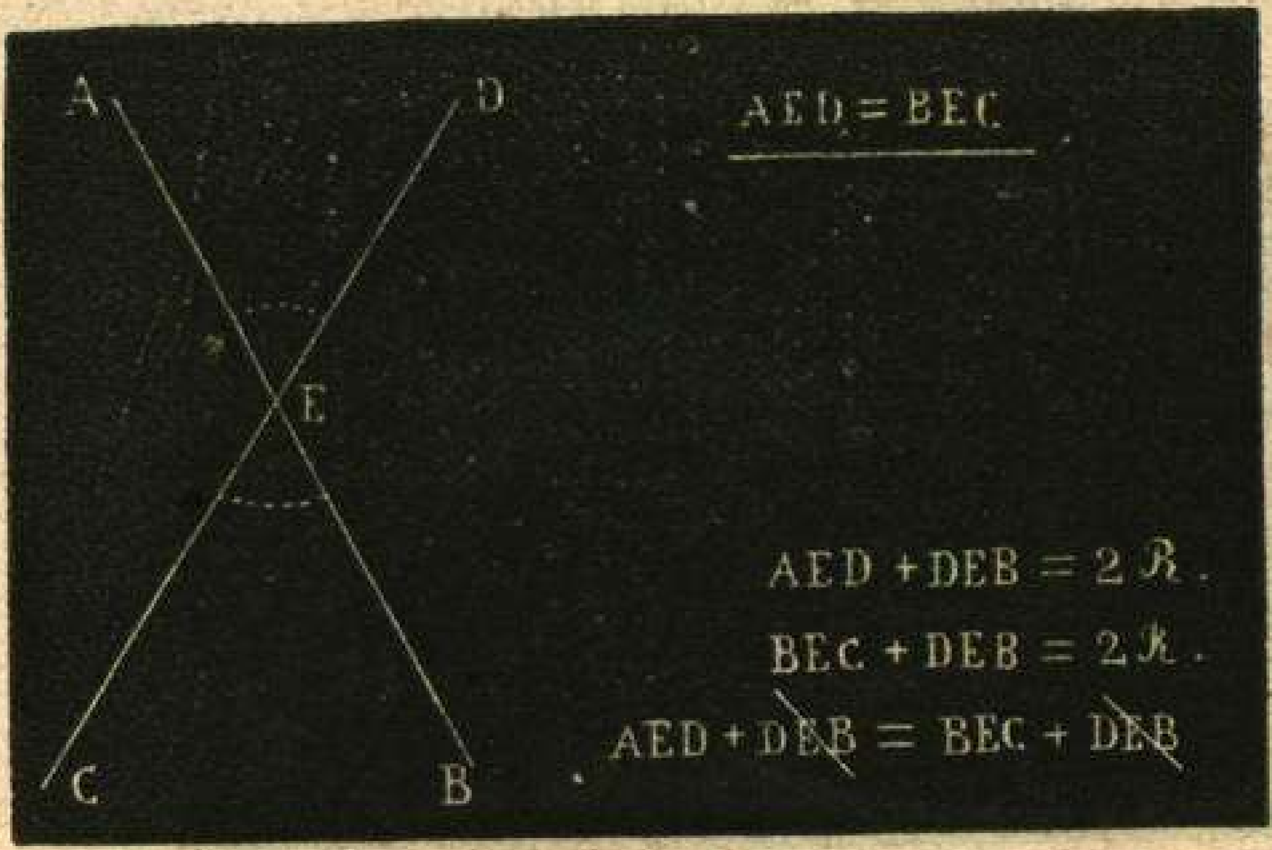
Corolario 2.° *Si una recta* CP *es perpendicular á otra* AB, *recíprocamente ésta será perpendicular á aquella.*

Corolario 3.° *La suma de todos los ángulos consecutivos, que se pueden formar á un mismo lado de una recta por otras rectas cualesquiera, que salen de un mismo punto, es igual á dos rectos.*

Corolario 4.° *La suma de todos los ángulos consecutivos formados alrededor de un mismo punto por varias rectas es igual á cuatro rectos.*

(1) En adelante representaremos con R el ángulo recto.

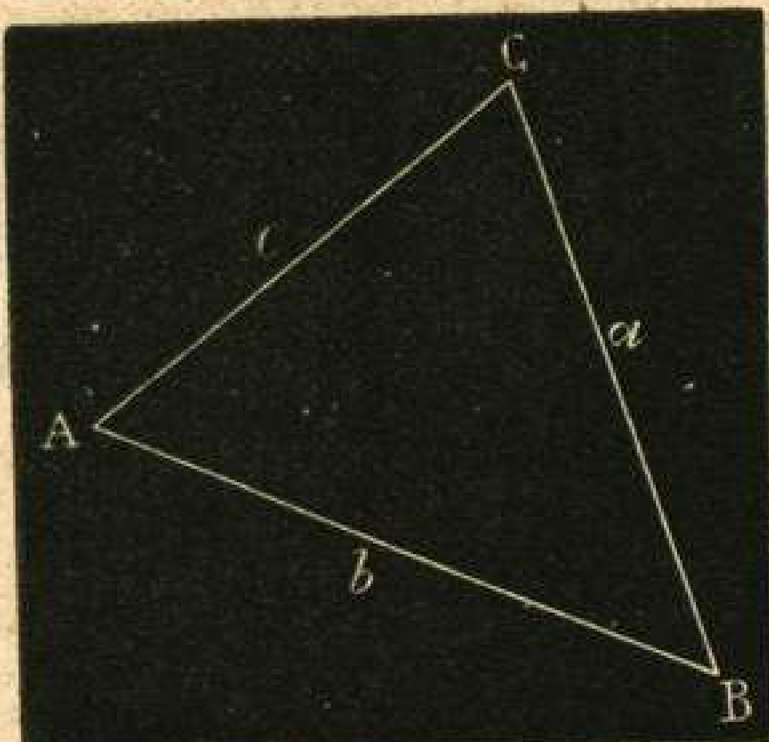
Recíproco. *Cuando dos ángulos adyacentes son suplementarios sus lados exteriores están en línea recta.*



10. TEOREMA III. - *Cuando dos rectas* AB y CD *se cortan, los ángulos opuestos por el vértice* AED y BEC (ó tambien AEC y BED) *son iguales.*

En efecto, segun el teorema II, tenemos: AED+DEB=2R y DEB+BEC=2R; de donde resulta AED+DEB= DEB+BEC, y suprimiendo la cantidad DEB, comun á los dos miembros de la ecuacion, queda AED=BEC.

Teoremas relativos á las líneas quebradas.



11. TEOREMA IV.—*En todo triángulo un lado cualquiera es:*

1.° *Menor que la suma de los otros dos;*

y 2.° *Mayor que su diferencia.*

1.° El lado BC, por ejemplo, es menor que la suma AB+AC de los otros dos; porque BC, linea recta, es el camino más corto entre los puntos B y C (núm 1).

Tenemos, pues, las siguientes desigualdades:

$$BC<AB+AC; \quad AB<AC+BC; \quad y \quad AC<AB+BC.$$

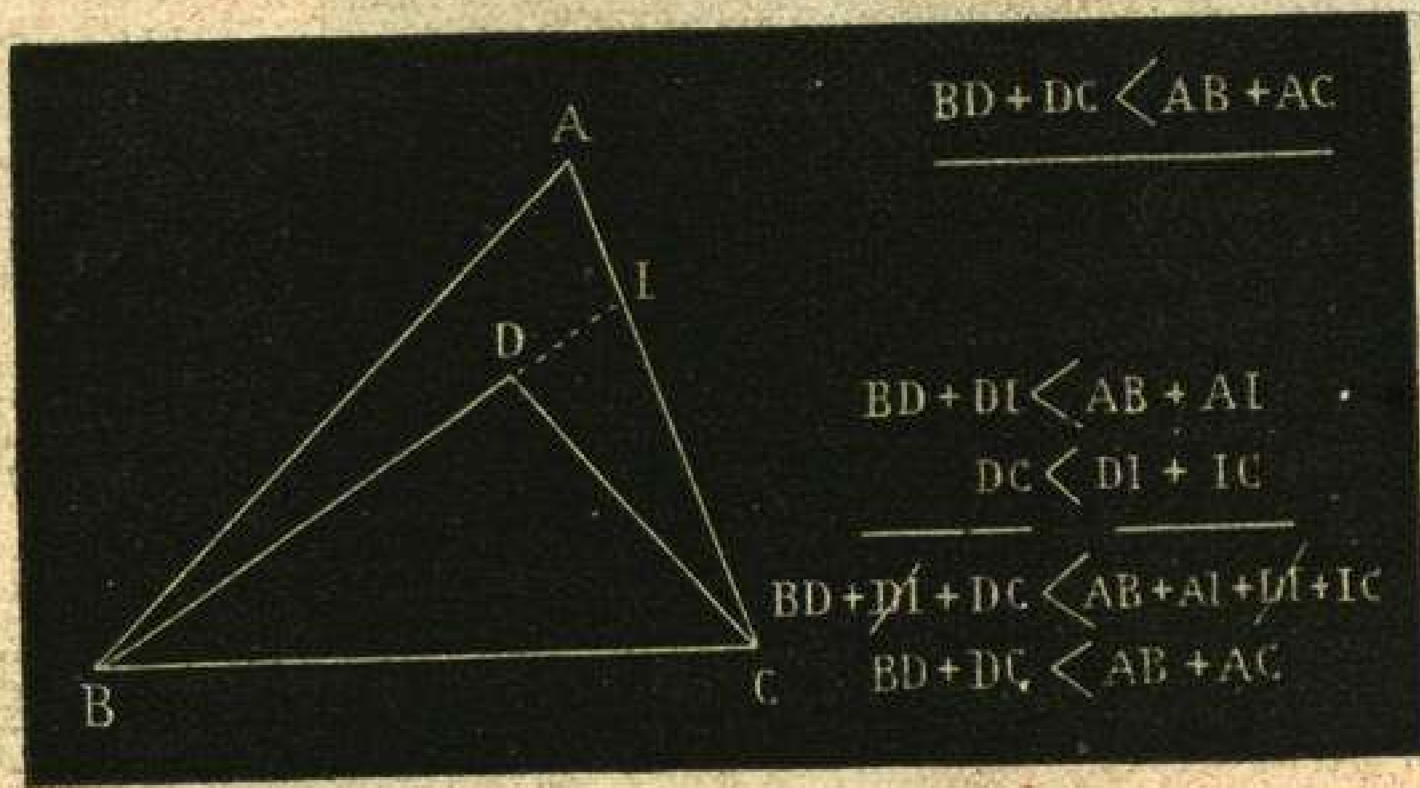
2.° Tomemos una de estas desigualdades, por ejemplo, la segunda

$$AB<AC+BC$$

Restando AC de los dos miembros, tendremos

$$AB-AC<BC.$$

12. TEOREMA V.—*Si desde un punto* D, *tomado en el* *interior de un triángulo, se trazan las rectas* DB *y* DC, *á los extremos de un mismo lado, la suma de estas dos líneas es menor que la suma de los dos lados.*



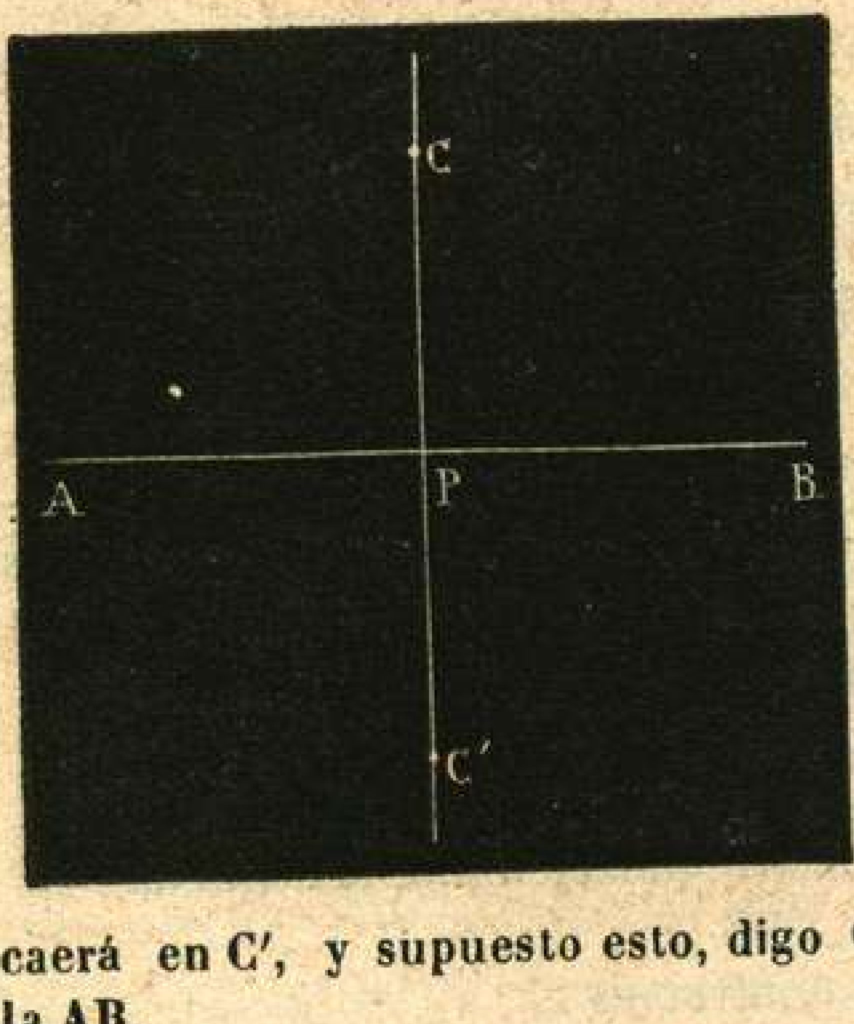
Prolonguemos la recta BD hasta que encuentre en I el lado AC.

Segun el teorema anterior, en el triángulo BAI tendremos BI ó BD+DI<AB+AI, y en el triángulo DIC, DC<DI+IC.

Sumando miembro á miembro estas dos desigualdades, y suprimiendo DI, parte comun á los dos miembros de la desigualdad, quedará

BD+DC<AB+AC.

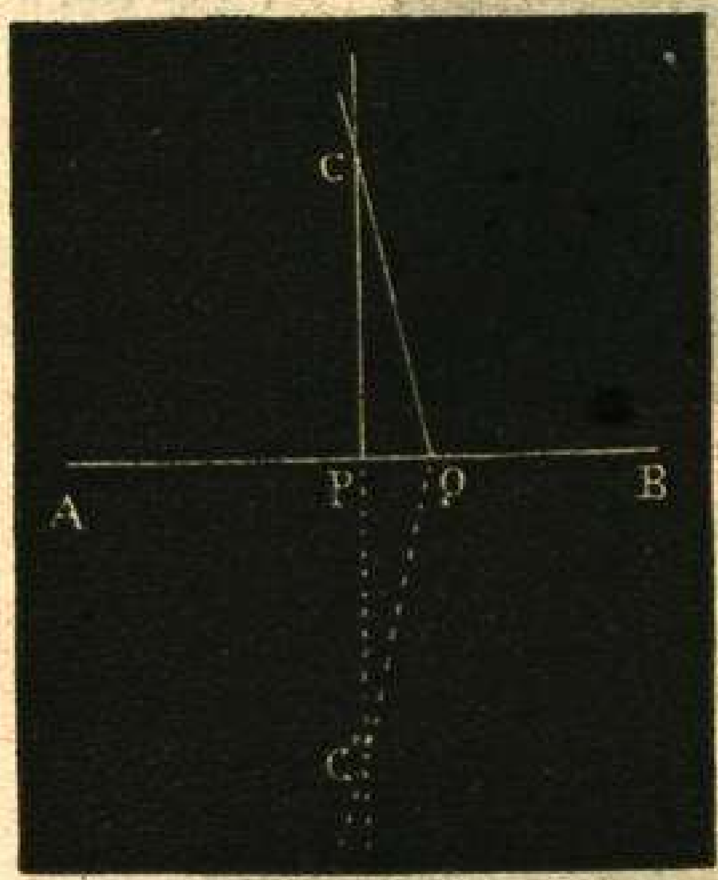
De la perpendicular y de las oblícuas trazadas á una recta desde un punto exterior.



13. Teorema VI.—*Desde un punto* C, *tomado fuera de una recta* AB, *se puede bajar una perpendicular á esta recta, y no se puede bajar más que una.*

1.º Se puede bajar una: Figurémonos que se haga girar al rededor de la recta AB, como si fuera una visagra, la parte superior del plano del encerado, de modo que caiga sobre la parte inferior; el punto C caerá en C′, y supuesto esto, digo que la recta CC′ es perpendicular á la AB.

En efecto, siendo P el punto en que la recta CC′ corta á la AB, es fácil de ver que los dos ángulos CPB y C′PB son iguales; porque si hacemos caer de nuevo la parte superior sobre la parte inferior del plano, el punto C volverá á caer sobre C′, y las dos líneas PC y PC′ coincidirán; pero como los dos ángulos CPB y C′PB no dejan de tener el lado PB comun, se ve que son iguales, puesto que coinciden, luego la AB es perpendicular á CC′ y recíprocamente (Teor. II, Cor. 2.°) CC′ es perpendicular á AB.



2.° No se puede bajar más que una, es decir, que ninguna recta CQ, diferente de la CP, puede ser perpendicular á la AB.

En efecto, si la línea CQ fuese perpendicular á la AB, el ángulo CQB sería recto, y doblando la figura, el ángulo C′QB sería tambien igual á un recto. De lo cual resultaría, que, siendo adyacentes y valiendo dos rectos, sus lados exteriores QC y QC′ estarian en línea recta (Recip. del Teor. II) lo cual es inadmisible; porque la línea CPC′ es recta por construccion, y por dos puntos dados C y C′ no se puede hacer pasar más que una línea recta.

Escolio. Dos puntos C y C′ situados asi en una misma perpendicular á una recta AB, de tal modo que se tenga CP=PC′, se dice que son *simétricos entre si respecto de la recta* AB.

14. TEOREMA VII.—*Cuando desde un punto tomado fuera de una recta se tiran á ésta una perpendicular y varias oblícuas.*

1.° *La perpendicular es menor que cualquiera oblícua;*

2.° *Dos oblícuas que equidistan del pié de la perpendicular, son iguales;*

Y 3.° *De dos oblícuas, que se apartan desigualmente del pié de la perpendicular, la que más se aparta es la mayor.*

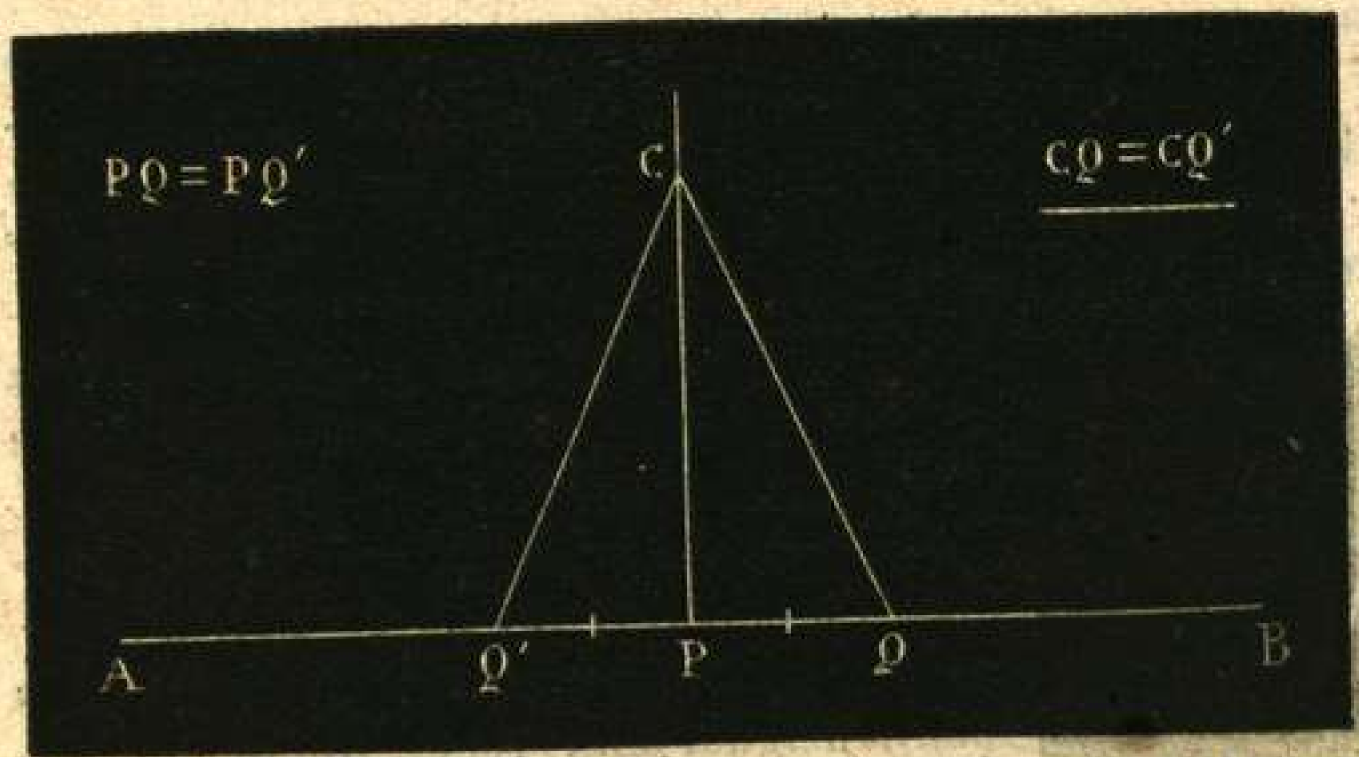
1.° La perpendicular CP, (figura anterior), es menor que una oblícua cualquiera CQ. En efecto, acabamos de ver, en la segunda parte del teorema anterior, que la línea CQC′ es necesariamente una línea quebrada; tendremos, pues,

$$CP+C'P<CQ+C'Q$$

pero como, segun la misma construccion de la figura, tenemos:

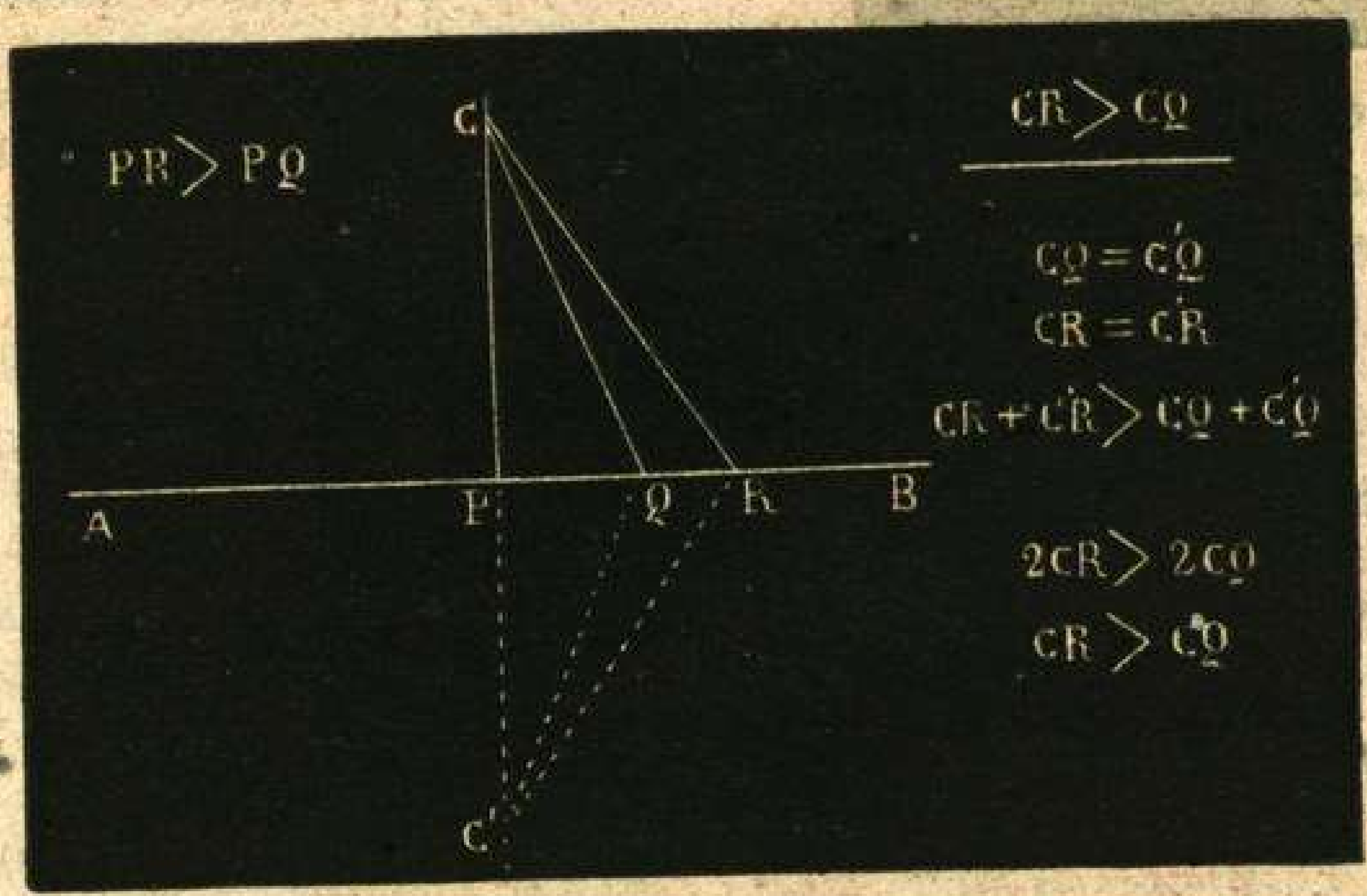
$$CP=C'P \quad \text{y} \quad CQ=C'Q$$

resulta que $CP<CQ$.



2.° Dos oblícuas CQ y CQ′, cuyos piés Q y Q′ equidistan del pié de la perpendicular, son iguales

Doblemos la figura por la línea CP de modo que la parte de la izquierda, por ejemplo, caiga sobre la parte de la derecha. Siendo iguales los ángulos en P, como rectos, la línea PA caerá sobre PB, y como, por hipótesis, la distancia PQ′ es igual á PQ, el punto Q′ caerá sobre el punto Q. Como por otra parte, el punto C no cambia de posicion, la CQ′ coincidirá completamente con la CQ; luego son iguales.



3.° De dos oblícuas CQ y CR, que distan desigualmente del pié de la perpendicular, la más distante es la mayor

Doblemos, como ya lo hemos hecho, la parte superior sobre la inferior; el punto C caerá en C′, y las líneas CP, CQ y CR tomarán las posiciones C′P, C′Q y C′R. Esto supuesto, el punto Q se hallará dentro del triángulo CC′R y tendremos (Teor. V) $CR+C'R>CQ+C'Q$ ó $2CR>2CQ$ ó por último $CR>CQ$

Corolario 1.° *Dos oblícuas iguales equidistan del pié de la perpendicular.*

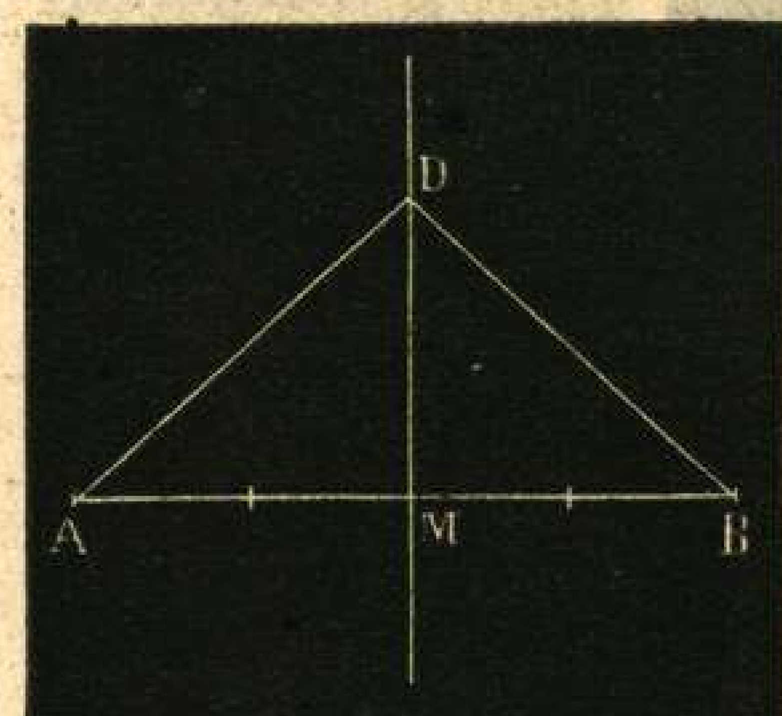
Corolario 2.° *De dos oblícuas desiguales, la mayor dista más del pié de la perpendicular.*

Corolario 3.° *Desde un mismo punto, tomado fuera* *de una recta, no se pueden trazar á dicha línea más que dos rectas iguales.*

Escolio. Puesto que la perpendicular bajada desde un punto á una recta es la línea más corta que se puede trazar desde este punto á la recta, esta línea se toma por medida de la distancia del punto á la recta. Por eso se llama *distancia de un punto á una recta, la longitud de la perpendicular bajada desde dicho punto á la recta.*

15. TEOREMA VIII.—*Cuando se levanta una perpendicular* MD *en el punto medio* M *de una recta* AB,

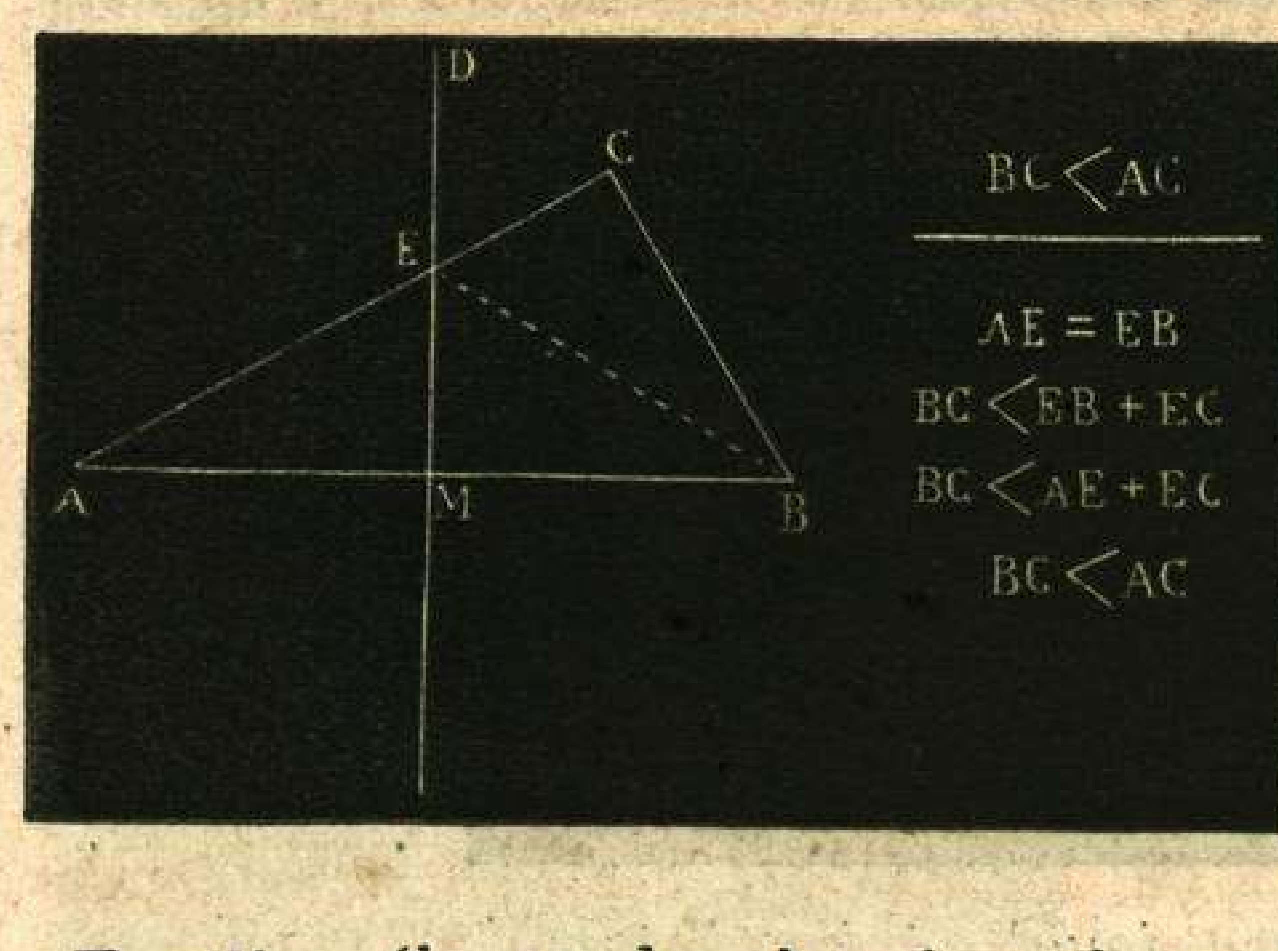
1.° *Todo punto* D *tomado en la perpendicular, equidista de los extremos* A y B *de la recta,*



Y 2.° *Todo punto tomado fuera de la perpendicular, no equidista de los extremos* A y B

1.° Tendremos AD=BD, porque estando el punto M en la mitad de la recta AB, síguese que estas dos rectas son dos oblícuas que se apartan igualmente del pié de la perpendicular, son pues iguales. (Teor. VII, 2.°)

2.° Sea un punto C, situado fuera de la perpendicular MD, tendremos BC<AC.



Para demostrarlo unamos los puntos E y B, en el triángulo BEC tendremos:

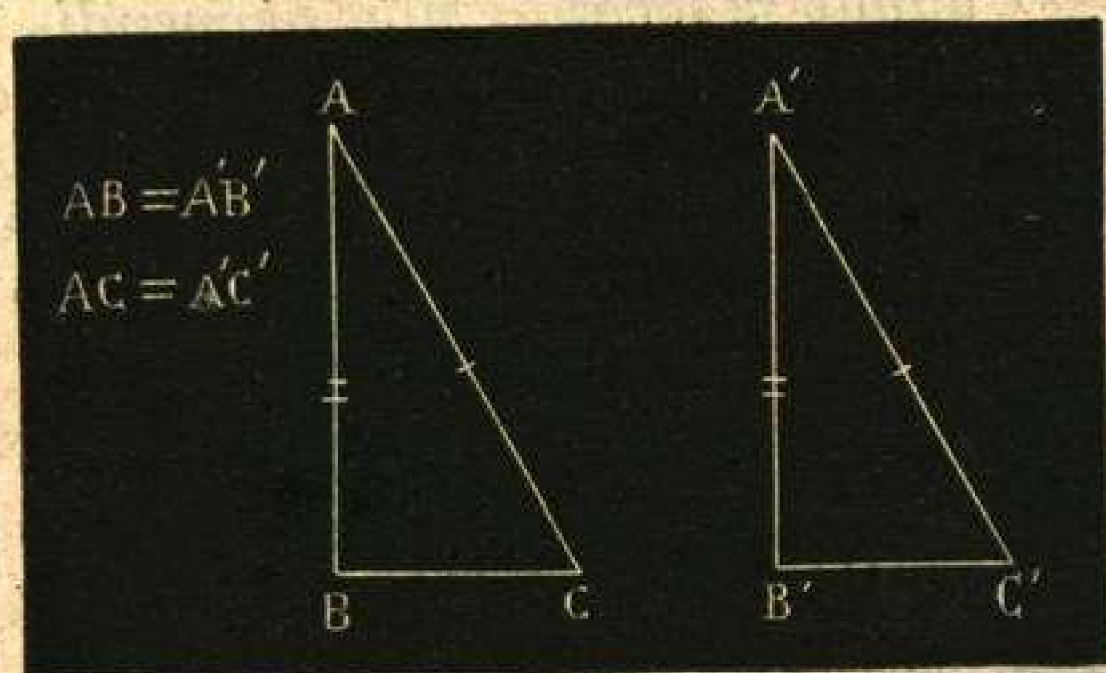
BC<EB+EC

y como sabemos que EB=AE resulta que BC<AE+EC. es decir BC<AC

Escolio. Se puede abreviar el enunciado de este teorema diciendo: La perpendicular levantada en el punto medio de una recta es el *lugar geométrico* de los puntos equidistantes del punto medio de dicha recta.

Se llama *lugar geométrico* un conjunto de puntos que cumplen con ciertas condiciones dadas, con exclusion de todos los demás puntos del plano, cuando se trata de figuras planas, ó de todos los demás del espacio, cuando se trata de figuras de tres dimensiones.

Casos de igualdad de los triángulos rectángulos.

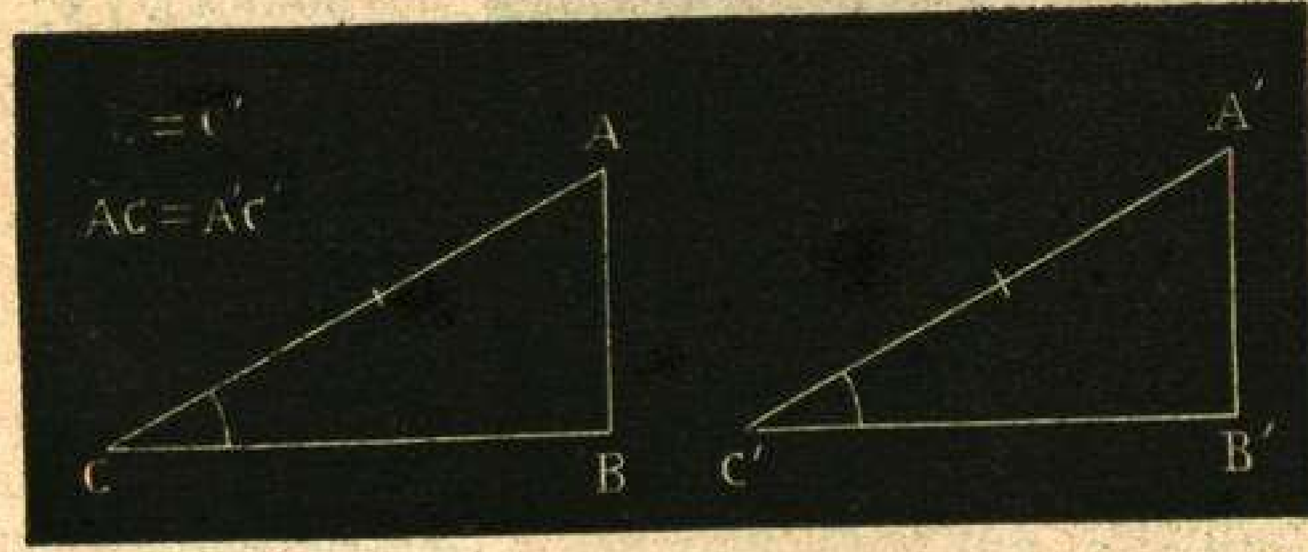


16. Teorema IX.—*Dos triángulos rectángulos ABC y A'B'C' son iguales, cuando tienen la hipotenusa igual, y un cateto del uno igual á un cateto del otro.*

Sea AC=A'C' y AB=A'B'

Coloquemos el triángulo A'B C' sobre el triángulo ABC, de modo que coincidan desde luego los ángulos rectos B y B' de estos triángulos.

Como por hipótesis AB=A B', el punto A' caerá en A. El punto C caerá tambien en C, porque siendo iguales las dos oblicuas A'C' y AC, trazadas desde un mismo punto A, deben apartarse igualmente del pié de la perpendicular (Teor. VII, Cor. 1 º); lo cual exige que el punto C' caiga sobre C Estos dos triángulos son, pues iguales, puesto que sus vértices, y por tanto sus lados coinciden



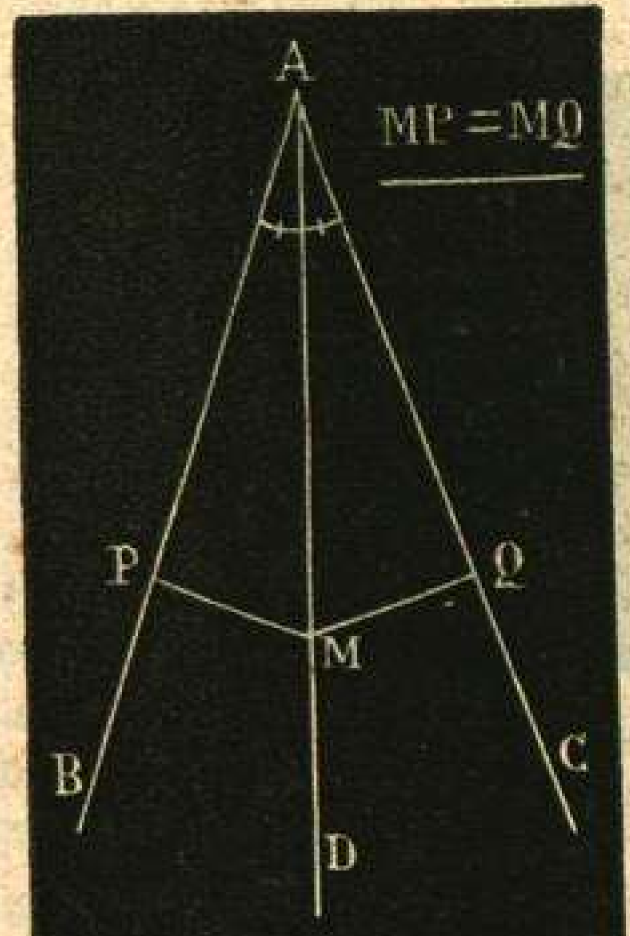
17. Teorema X.—*Dos triángulos rectángulos son iguales, cuando tienen la hipotenusa igual, é igual tambien un ángulo agudo.*

Sea *ángulo* C=*ángulo* C′ y AC=A′C′.

Coloquemos el triángulo A′B′C′ sobre el triángulo ABC, haciendo coincidir desde luego los ángulos iguales C y C′. Como, por hipotésis, los lados AC y A′C′ son iguales, el punto A′ caerá sobre el punto A. Esto supuesto, digo que el lado A′B′ coincidirá con el lado AB, porque, por hipótesis, los ángulos B y B′ son rectos, y desde un punto A no se puede bajar más que una perpendicular á una recta CB. Los dos triángulos son pues, superponibles, y por consiguiente iguales.

De la bisectriz de un ángulo.

18. Teorema XI.—*Cuando un ángulo* BAC *se divide en dos partes iguales,*

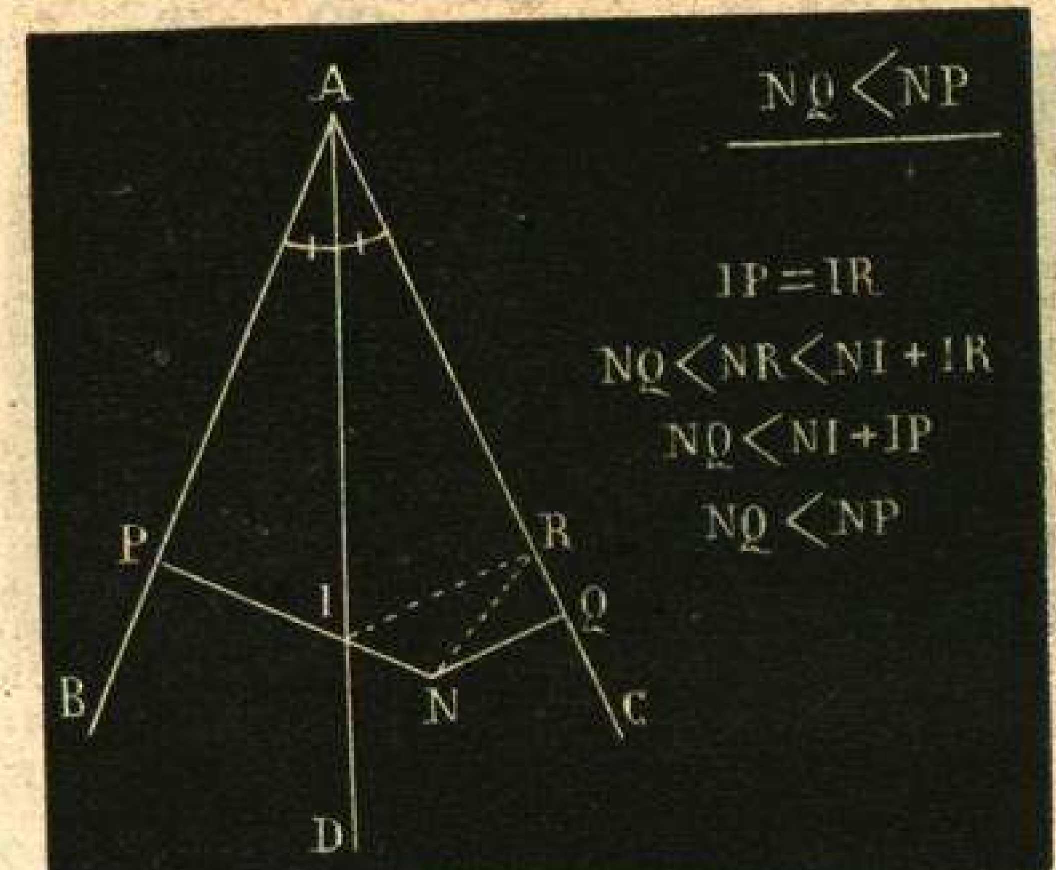


1.° *Todo punto* M, *situado en la bisectriz, equidista de los lados del ángulo;*

Y 2.° *Todo punto* N, *situado fuera de la bisectriz, no equidista de los lados del ángulo.*

1.° Todo punto M de la bisectriz equidista de los lados del ángulo, es decir, que las perpendiculares MP y MQ son iguales.

Doblemos la figura por la bisectriz AD de modo que la parte izquierda, por ejemplo, caiga sobre la derecha; hallándose dividido en dos partes iguales el ángulo BAC, por hipotésis, el lado AB vendrá á caer sobre AC, y como desde un punto M no se puede bajar más que una perpendicular á una recta, la MP coincidirá con MQ, luego estas dos líneas son iguales.



2.° Sea un punto N situado fuera de la bisectriz, tendremos NQ<NP.

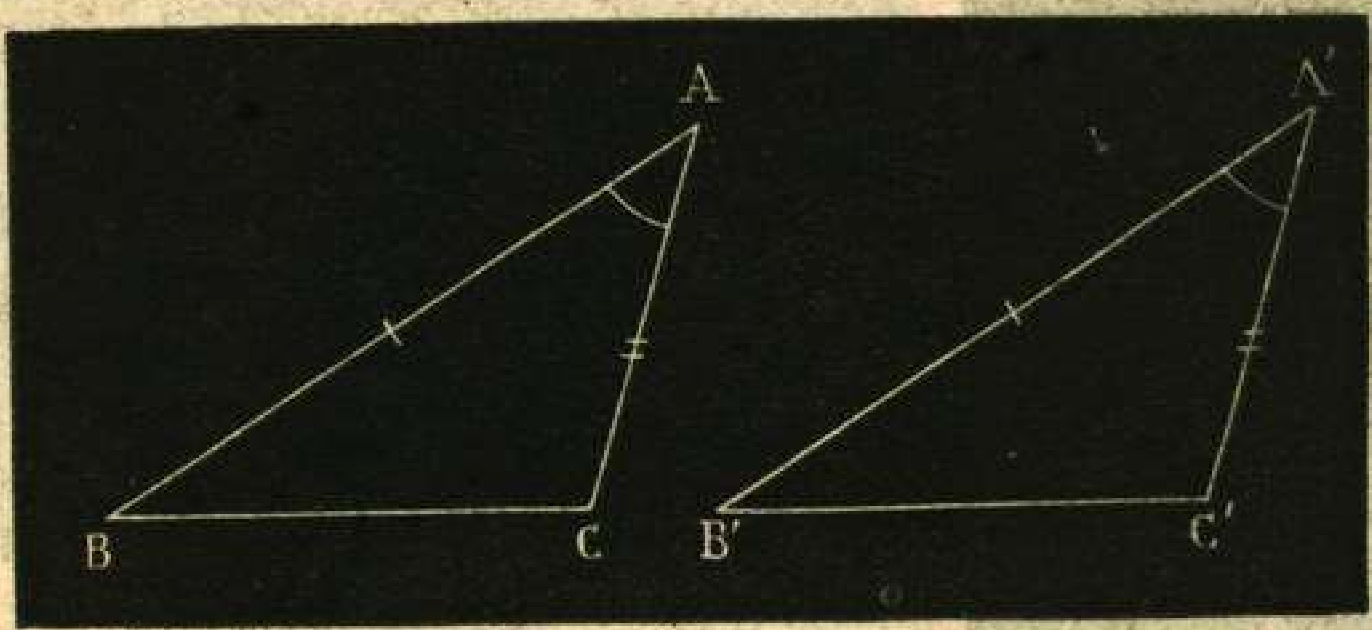
Desde el punto en que la NP corta á la bisectriz, tracemos la IR perpendicular á AC, segun la primera parte del teorema tendremos IP=IR. Esto supuesto, unamos los puntos N y R. La perpendicular NQ es menor que la oblicua NR; pero en el triángulo INR un lado cualquiera NR es menor que la suma de los otros dos NI+IR; luego *a for-*

tiori la distancia NQ es menor que NI+IR, ó lo que es lo mismo NI+IP, es decir, NP.

Escolio. Estas dos partes del teorema se pueden resumir en un solo enunciado diciendo: *La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo.*

Casos de igualdad de dos triángulos cualesquiera.

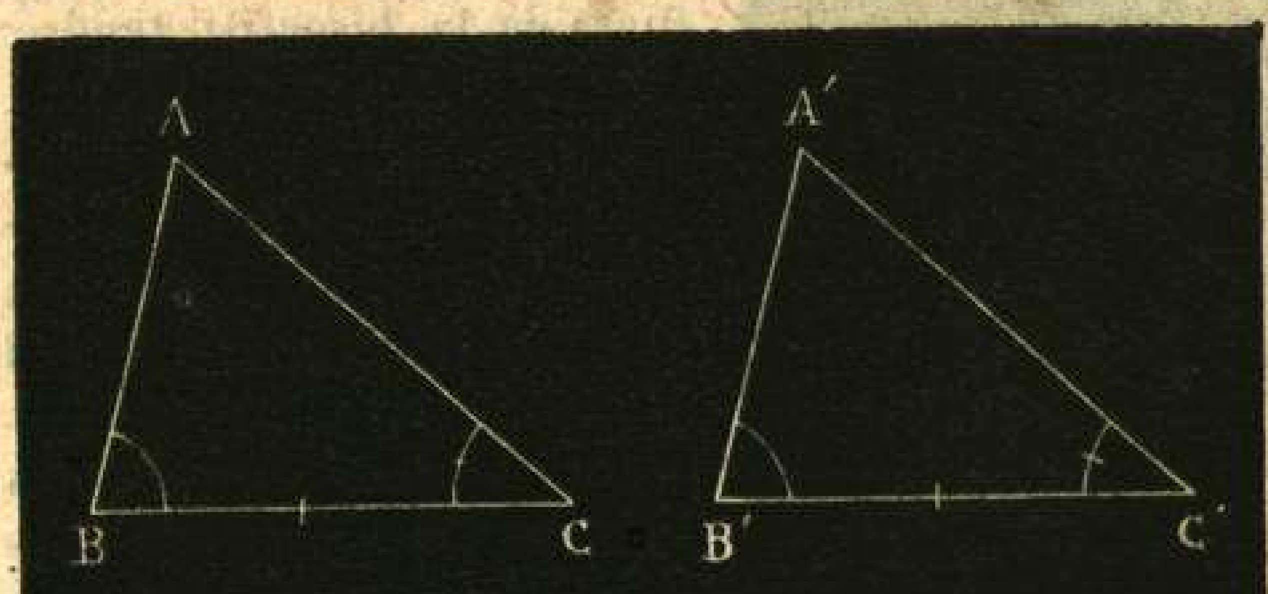
19. TEOREMA XII.—*Dos triángulos que tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido son iguales.*



Supongamos que: *angulo* A=*angulo* A′, AB=A B′ y AC=A′C′.

Coloquemos el triángulo A′B C′ sobre el triángulo ABC de modo que coincidan los lados de los dos ángulos A y A , lo cual es posible, pues, por hipótesis estos dos ángulos son iguales. Además, como la longitud A′B′ es igual á AB, el punto B caera sobre el punto B; y por la misma razon el punto C′ caerá sobre el punto C.

Los dos triángulos son, pues, superponibles é iguales por consiguiente.



20. TEOREMA XIII.—*Dos triángulos que tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, son iguales.*

Supongamos que, *ángulo* B=*ángulo* B′, *ángulo* C=*ángulo* C′, BC=B′C′.

Coloquemos el triángulo A′B′C′ sobre el triángulo ABC haciendo coincidir primeramente los vértices B′ y B, C′ y C, lo cual es posible, pues por hipótesis B C′=BC. Además, como el ángulo B′ se supone igual al ángulo B, el lado B A′ tomará la direccion BA; por idéntica razon el lado C A′ tomará la direccion CA, y el punto A′, que tiene que hallarse á la vez en las líneas BA y CA, habrá de caer sobre el punto A, interseccion de ámbas.

Los dos triángulos son, pues, superponibles é iguales por consiguiente.

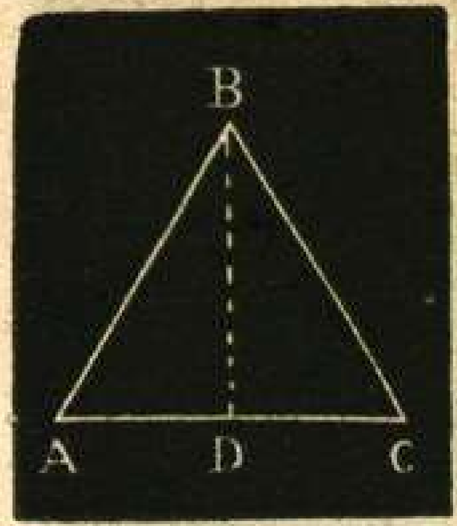
21 Teorema XIV.—*Cuando dos triángulos tienen un ángulo desigual comprendido entre dos lados respectivamente iguales, el lado opuesto al ángulo mayor, es mayor que el lado opuesto al ángulo menor.*

Recíproco. *Cuando dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y otro lado desigual, el ángulo opuesto al lado mayor, es mayor que el ángulo opuesto al lado menor.*

22. Teorema XV.—*Dos triángulos que tienen sus tres lados respectivamente iguales, son iguales.*

Sean A y A′ dos ángulos de estos triángulos situados entre lados iguales. Digo que estos dos ángulos deben ser iguales. En efecto no pueden ser diferentes, porque si fuesen diferentes los lados opuestos lo serian tambien, segun el recíproco del teorema anterior, y esto estaria en contradiccion con la hipótesis, segun la cual todos los lados son iguales. Siendo iguales los ángulos A y A′, los dos triángulos tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados respectivamente iguales, luego son iguales (Teor. XII).

Propiedades del triángulo isósceles.



23. Teorema XVI —*En un triángulo isósceles* ABC *los ángulos* A y C, *opuestos á los lados iguales* AB y BC, *son iguales.*

Unamos el vértice B, opuesto á la base AC, con el punto medio D de la base. De este modo el triángulo ABC queda dividido en dos triángulos ADB y BDC, que son iguales, por tener sus tres lados respectivamente iguales, á saber: los lados AB y BC iguales por hipótesis el lado BD comun y los lados DA y DC iguales por construccion. De lo cual resulta que los ángulos A y C, comprendidos entre lados respectivamente iguales en estos dos triángulos, son iguales.

Corolario. *Todo triángulo equilátero es al mismo tiempo equiángulo.*

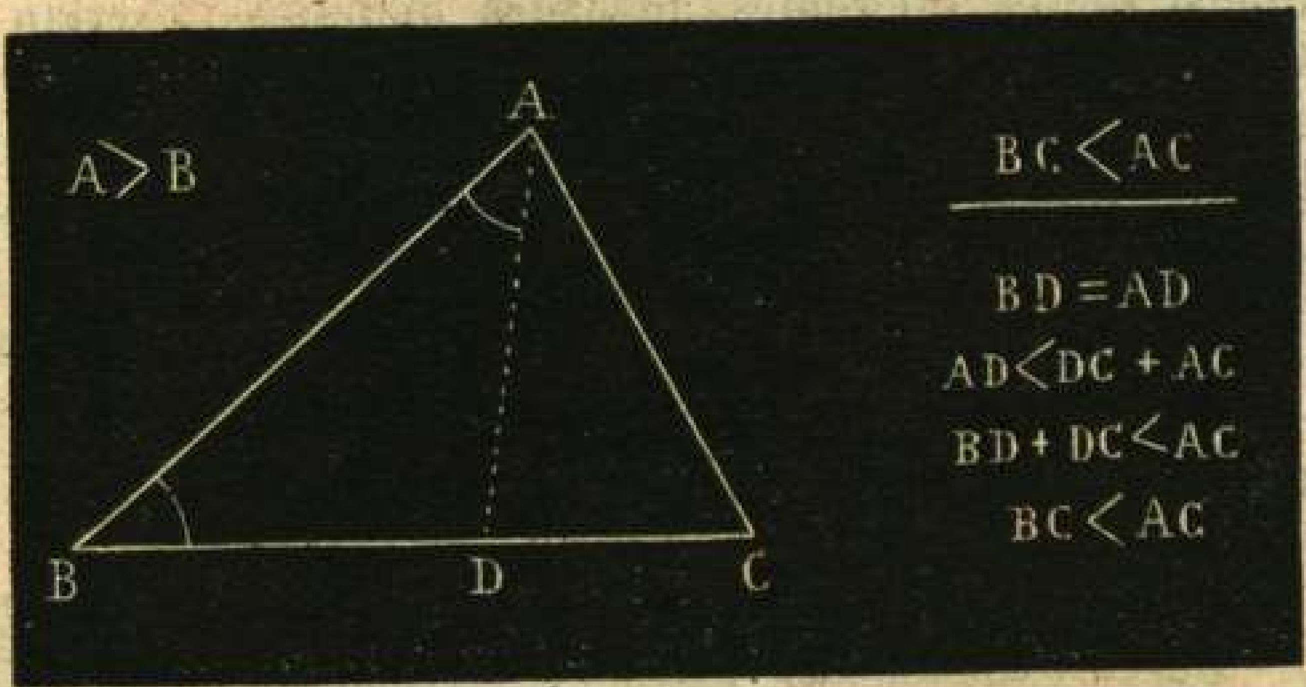
Recíproco. *Cuando en un triángulo dos ángulos son iguales, los lados opuestos son iguales, y por consiguiente, el triángulo es isósceles.*

Corolario. *Todo triángulo equiángulo es al mismo tiempo equilátero.*

Escolio. *En un triángulo isósceles, la línea que une el punto medio de la base con el vértice opuesto, es perpendicular á la base y divide al ángulo opuesto en dos partes iguales.*

Relacion de magnitud entre los lados y los ángulos de un triángulo.

24. Teorema XVII.—*Si en un triángulo dos ánguos son desiguales, á mayor ángulo se opone mayor lado.*



Sea el triángulo ABC en el cual suponemos que el ángulo A es mayor que el B, vamos á demostrar que el lado BC opuesto al ángulo A, es mayor que el lado AC, opuesto al ángulo B.

Puesto que el ángulo A es mayor que el ánguló B, siempre se podrá trazar en el interior de este ángulo A una recta AD, que forme con el lado AB un ángulo igual al ángulo B, y hallándose esta recta dentro del ángulo A, encontrará al lado BC en un punto D, situado entre los extremos B y C de este lado.

Esto supuesto, teniendo el triángulo ABD, por construccion, dos ángulos iguales, es isósceles, y por tanto CD=AD; pero la recta AC es más corta que la quebrada AD+DC, ó lo que es igual BD+DC esto es, BC; luego BC es mayor que AC.

Recíproco. *Cuando en un triángulo dos lados son desiguales, á mayor lado se opone mayor ángulo.*

Teoría de las paralelas.

25. Postulado.—*Por un punto situado fuera de una recta no se puede trazar más que una paralela á dicha recta.*

Corolario 1.° *Cuando dos rectas son paralelas, toda recta, que corta á una de ellas, prolongada suficientemente, corta necesariamente á la otra*

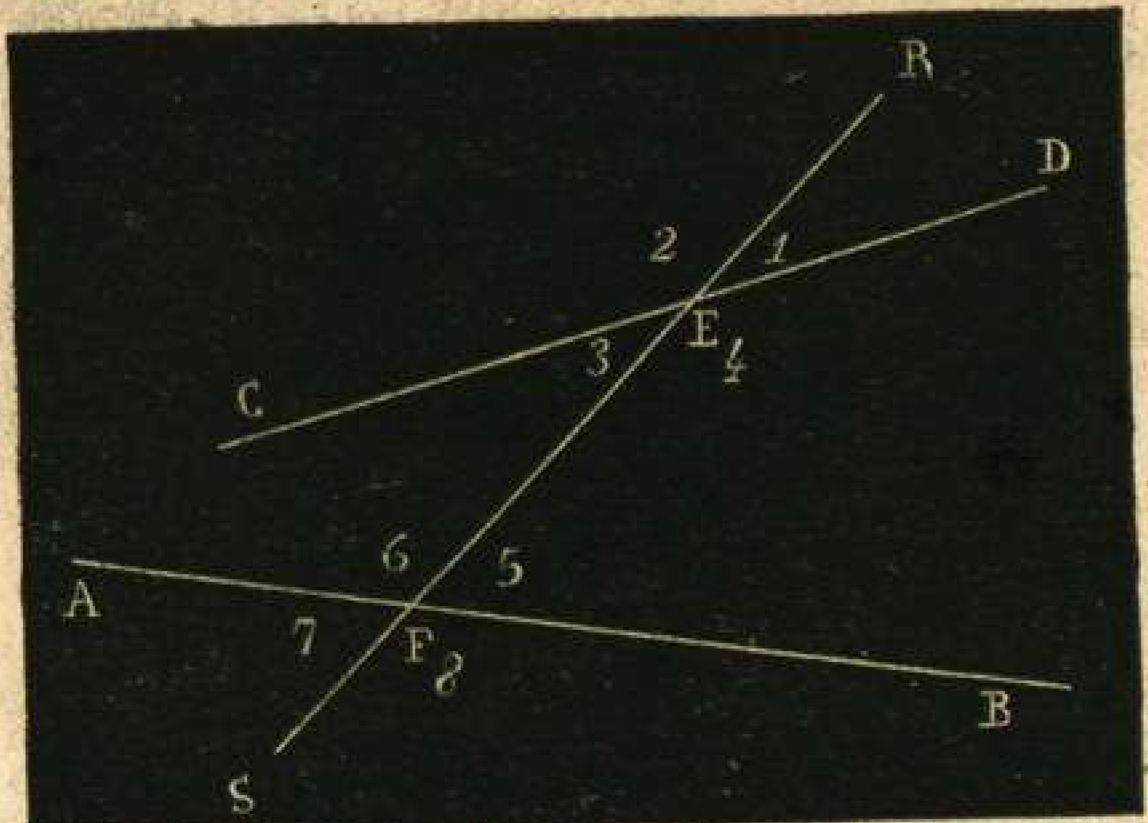
Corolario 2.° *Dos rectas paralelas á una tercera, son paralelas entre sí.*

26. Teorema XVIII.—*Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí.*

Corolario. *Cuando dos rectas son la una perpendicular y la otra oblícua á una misma recta, dichas rectas, suficientemente prolongadas, se encontrarán.*

Recíproco del teorema. *Cuando dos rectas son paralelas, toda recta perpendicular á la una lo es tambien á la otra.*

27. Definiciones de algunas voces.—Cuando dos rectas, sean ó nó paralelas, como AB y CD, son cortadas por una tercera RS, se dá con frecuencia á esta tercera el nombre de *secante* (1) ó *transversal* (2).



La interseccion de la transversal con las dos rectas en los puntos E y F, dá lugar á la formacion de ocho ángulos, los cuales por lo comun se agrupan de dos en dos, dándoles

(1) De la palabra latina *secans*, derivada del verbo *seco*, cortar.

(2) De la palabra latina *transversus*, atravesado, puesto al través.

nombres á propósito para recordar su posicion respecto de la transversal y de las líneas AB y CD. Hé aquí el cuadro de estos diversos grupos; siendo de notar, que cada uno de ellos debe componerse de uno de los ángulos en E y de otro en F.

Angulos 1 y 5 — 2 y 6 — 3 y 7 — 4 y 8	*correspondientes.*	Porque se *corresponden* estando situados del mismo modo respecto de la transversal y de cada una de las líneas AB y CD.
Angulos 4 y 6 — 3 y 5	*alternos internos.*	*Alternos*, porque están situados uno á un lado y otro al otro lado de la trasversal, é *internos* porque se hallan dentro de las rectas.
Angulos 1 y 7 — 2 y 8	*alternos externos.*	Esta denominacion se explica como la precedente.
Angulos 4 y 5 — 3 y 6	*interiores del mismo lado*	Hay que sobreentender *de la secante.*
Angulos 1 y 8 — 2 y 7	*exteriores del mismo lado.*	Id.

28. Teorema XIX.—*Cuando dos paralelas son cortadas por una secante:*

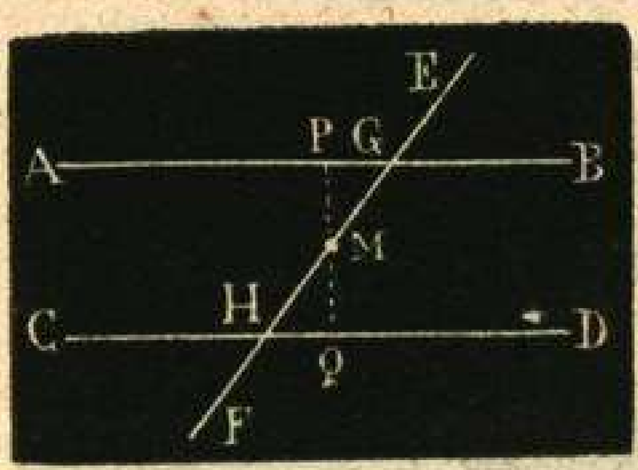
1.° *Los ángulos alternos internos son iguales* (respectivamente).

2.° *Los ángulos correspondientes son iguales* (respectivamente).

3.° *Los ángulos alternos externos son iguales* (respectivamente);

4.° *Los ángulos interiores del mismo lado son suplementarios;*

y 5.° *Los ángulos exteriores del mismo lado son suplementarios.*



1.° Demostraremos en primer lugar que los dos ángulos alternos internos, por ejemplo AGF y EHD, son iguales.

Para esto tomemos el punto medio M de la porcion GH de la secante, interceptada entre las dos paralelas, y por el punto M tracemos la PQ perpendicular á la AB y que por consiguiente lo será tambien á CD (Teorema XVIII, Recip.

Esto supuesto, los dos triángulos MPG y MQH rectángulos en P y en Q, tienen iguales los ángulos en M como opuestos por el vértice y las hipotenusas MG y MH iguales por construccion; luego son iguales (Teor. X.)

De lo cual resulta que los ángulos AGF y EHD, que pertenecen á triángulos iguales, son iguales.

Los otros dos ángulos alternos internos BGF y CHE son evidentemente iguales tambien, pues son suplementarios de los ángulos AGF y EHD, que acabamos de demostrar que son iguales.

2.° Los ángulos correspondientes EGB y EHD son iguales; en efecto los dos ángulos EGB y AGF son iguales, como opuestos por el vértice; pero como hemos demostrado que AGF=EHD, resulta EGB=EHD.

De un modo análogo se demostraría que los otros ángulos correspondientes son tambien respectivamente iguales.

3.°, 4.° y 5.°—El objeto de estos últimos párrafos se deduce tambien de la igualdad de los ángulos alternos internos.

Recíproco. *Cuando dos rectas cortadas por una secante, forman con ella*

1.° *Angulos alternos internos iguales,*

2.° *Angulos correspondientes iguales,*

3.° *Angulos alternos externos iguales,*

4.° *Angulos interiores del mismo lado suplementarios,*

ó por último: 5.° *Angulos exteriores del mismo lado suplementarios,*

entonces dichas dos rectas son paralelas.

29. Teorema XX.—*Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos son:*

1.° *iguales* (cuando los lados paralelos están ambos en la misma direccion ó en direcciones opuestas),

ó 2.° *suplementarios* (cuando los lados paralelos están dirigidos dos en la misma direccion y los otros dos en sentido contrario uno de otro).

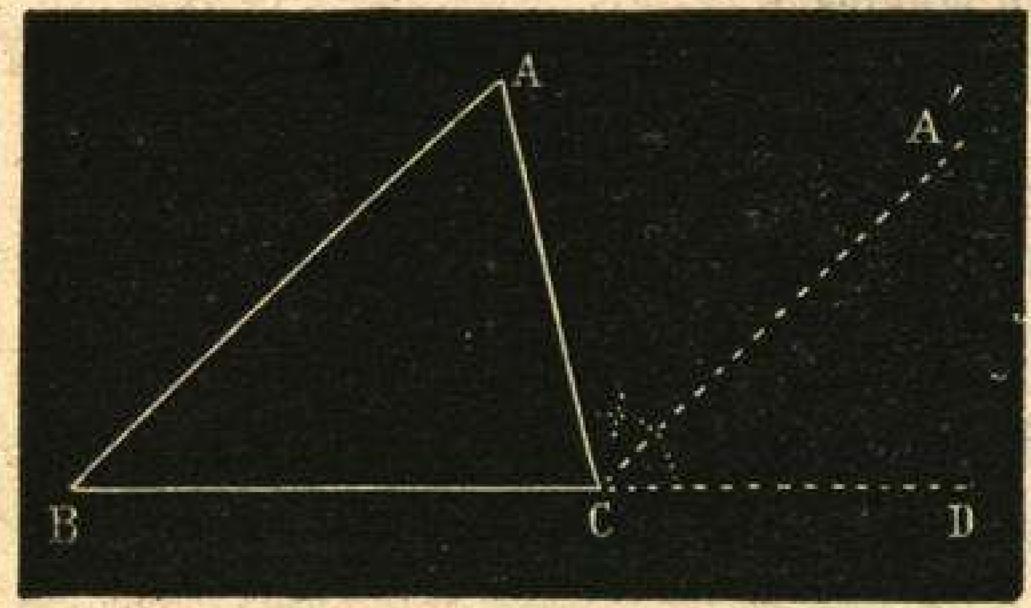
30. TEOREMA XXI.—*Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son:*

1.° *iguales* (cuando ambos son agudos),

ó 2.° *suplementarios* (cuando uno es agudo y el otro obtuso).

Suma de los ángulos de un triángulo y de un polígono cualquiera.

31. TEOREMA XXII.—*En todo triángulo la suma de los ángulos interiores es igual á dos ángulos rectos.*



Prolonguemos en CD uno de los lados del triángulo ABC, por ejemplo el lado BC, y despues por el vértice C tracemos una paralela CA′ al lado opuesto BA. Hecho esto los ángulos BAC y ACA′ son iguales, por ser alternos internos respecto de las dos paralelas AB y CA′, siendo la secante AC; los ángulos ABC y A′CD son iguales, como correspondientes en las mismas paralelas siendo la secante BD: luego los tres ángulos en C son iguales á los tres ángulos del triángulo. Pero la suma de los ángulos en C es igual á dos rectos (Teor. II, Cor 3); luego tambien la suma de los ángulos del triángulo

Siguiendo la notacion adoptada, se podrá escribir:

$$A+B+C=2R.$$

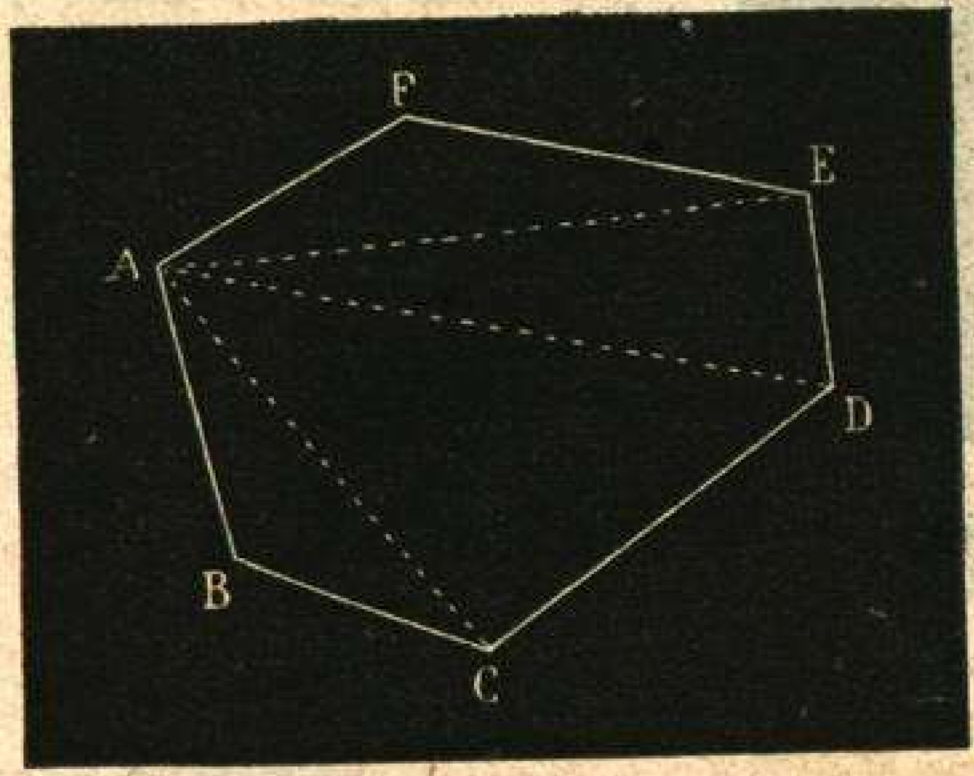
Corolario 1.° *En todo triángulo no puede haber más que un ángulo recto, y con mayor razon, tampoco puede haber más que un ángulo obtuso.*

Corolario 2.° *En un triángulo rectángulo, la suma de los ángulos adyacentes á la hipotenusa, es igual á un recto.*

Corolario 3.° *Cuando dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, los terceros son tambien iguales entre sí.*

Corolario 4.º *El ángulo exterior* (formado por un lado de un triángulo y la prolongacion del lado adyacente) *es igual á la suma de los dos ángulos opuestos.*

32. TEOREMA XXIII. —*La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo* (1) *es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos.*



Para demostrarlo unamos un vértice cualquiera A del polígono con todos los demás. Dividiremos así el polígono en tantos triángulos como lados tiene ménos dos. Si designamos con n el número de lados $(n-2)$, será el número de estos triángulos. Pero segun la figura la suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos *rectos*, la de los ángulos de los $(n-2)$ triángulos será igual á $(n-2)$ veces 2 *rectos*; luego la suma de los ángulos del polígono tendrá el mismo valor.

Escolio. Segun esto la suma S de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados, está representada por la fórmula:

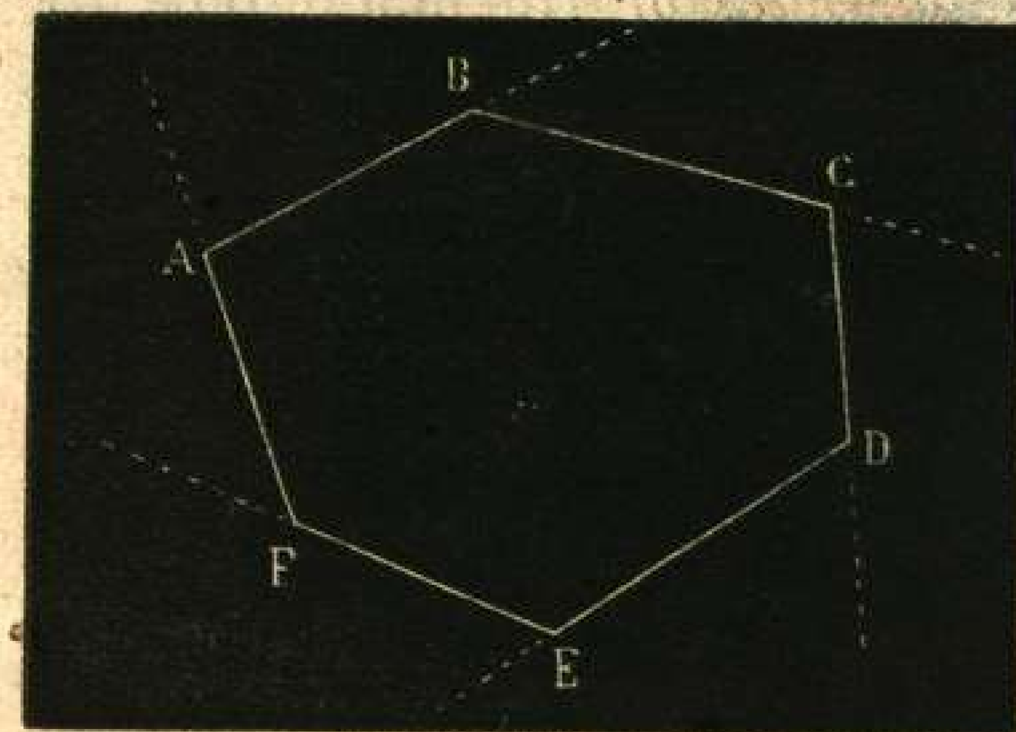
$$S=(n-2)\,2R.$$

Efectuando la multiplicacion, tendremos:

$$S=2nR-4R.$$

Corolario. *Cuando se prolonga en una misma direccion todos los lados de un polígono convexo, la suma de los ángulos exteriores así formados es igual á cuatro rectos.*

(1) Se llama *línea convexa* la que no puede ser cortada por una recta en mas de dos puntos.



En efecto, á cada vértice del polígono corresponden dos ángulos adyacentes: uno interior y otro exterior, cuya suma es igual á dos *rectos*, si hay n lados y por consiguiente n vértices, tendremos:

Suma de los áng. exteriores+Suma de los ang. interiores$=2nR$.

Pero como acabamos de ver que el valor de la suma de los ángulos interiores es: $S=2nR-4R$; vemos que agregando á los ángulos interiores, bien la suma de los ángulos exteriores, bien cuatro rectos, siempre se tiene el mismo resultado. Lo cual quiere decir que

Suma de los ángulos exteriores$=4R$.

Propiedades del paralelógramo, del rombo y del trapecio.

33. Teorema XXIV.—*En un paralelógramo los lados opuestos son iguales y dos ángulos opuestos tambien lo son*

Corolario 1.° *Las porciones de diferentes paralelas comprendidas entre dos paralelas son iguales.*

Corolario 2.° *Cuando dos rectas son paralelas todos los puntos de la una equidistan de la otra.*

Corolario 3.° *La diagonal de un paralelógramo le divide en dos triángulos iguales.*

Recíproco. *Un cuadrilátero que tiene sus ángulos opuestos iguales es un paralelógramo.*

Escolio. Se llama *distancia de dos paralelas* la longitud de la perpendicular trazada desde un punto de la una á la otra. Segun el corolario segundo se vé que esta longitud es en todos puntos la misma

34. Teorema XXV.—*Cuando en un cuadrilátero dos lados opuestos son iguales y paralelos, los otros dos lados son tambien iguales y paralelos, y la figura es un paralelógramo.*

35. Teorema XXVI.—*Cuando en un cuadrilátero los lados opuestos son iguales, los lados son paralelos y la figura es un paralelógramo.*

36. Teorema XXVII.—*En todo paralelógramo las diagonales se cortan mútuamente en dos partes iguales.*

Escolio. Centro del paralelógramo. El punto en que se cortan las dos diagonales del paralelógramo se llama *centro del paralelógramo*; porque toda línea que pasa por este punto divide al paralelógramo en dos partes iguales.

Recíproco. *Un cuadrilátero es un paralelógramo cuando sus diagonales se cortan mútuamente en dos partes iguales.*

37. Teorema XXVIII.—*Las diagonales del rombo se cortan en ángulo recto y son las bisectrices de los ángulos opuestos.*

Escolio. Las diagonales del cuadrado gozan de las mismas propiedades y además son iguales entre sí.

38. Teorema XXIX.—*Las diagonales de un rectángulo son iguales.*

39. Teorema XXX.—*En todo trapecio la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos, es:*

1.° *Paralela á las dos bases* (1).

2.° *Igual á su semi-suma* (2)

y 3.° *Equidista de cada una de ellas.*

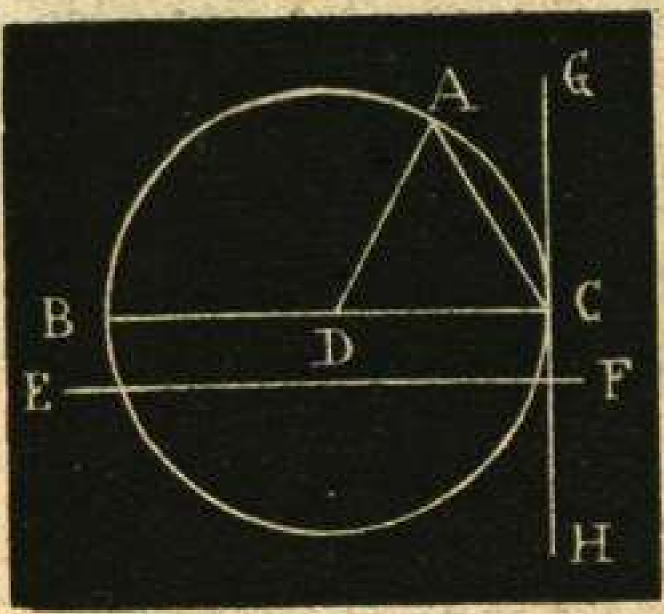
---

(1) Se llaman *bases* de un trapecio los lados paralelos.

(2) De las palabras latinas *semi*, mitad y *summa*, suma.

LIBRO SEGUNDO.

Propiedades generales de la circunferencia.



40. Definiciones.—Se llama *circunferencia* (1) una línea curva, cerrada y plana BAC cuyos puntos equidistan de uno interior D, llamado *centro* (2).

Toda línea como DA que une un punto cualquiera de la circunferencia con su centro se llama *radio* (3).

Toda línea, como BC, que pasa por el centro y termina en la circunferencia se llama *diámetro* (4).

Es evidente que la longitud de un diámetro es igual á dos veces la de un radio

Segun la definicion todos los radios de un mismo círculo son iguales entre sí y todos los diámetros lo son tambien.

Es claro que, segun que un punto es exterior ó interior á una circunferencia, su distancia al centro es mayor ó menor que el radio de la circunferencia; y recíprocamente, segun que un punto situado en el plano de una circunferencia está á una distancia del centro de la circunferencia mayor ó menor que el rádio, éste punto está situado fuera ó dentro de la circunferencia.

Una porcion AC de la circunferencia se llama un *arco* (5).

La recta AC que une los extremos del arco se llama *cuerda* (6).

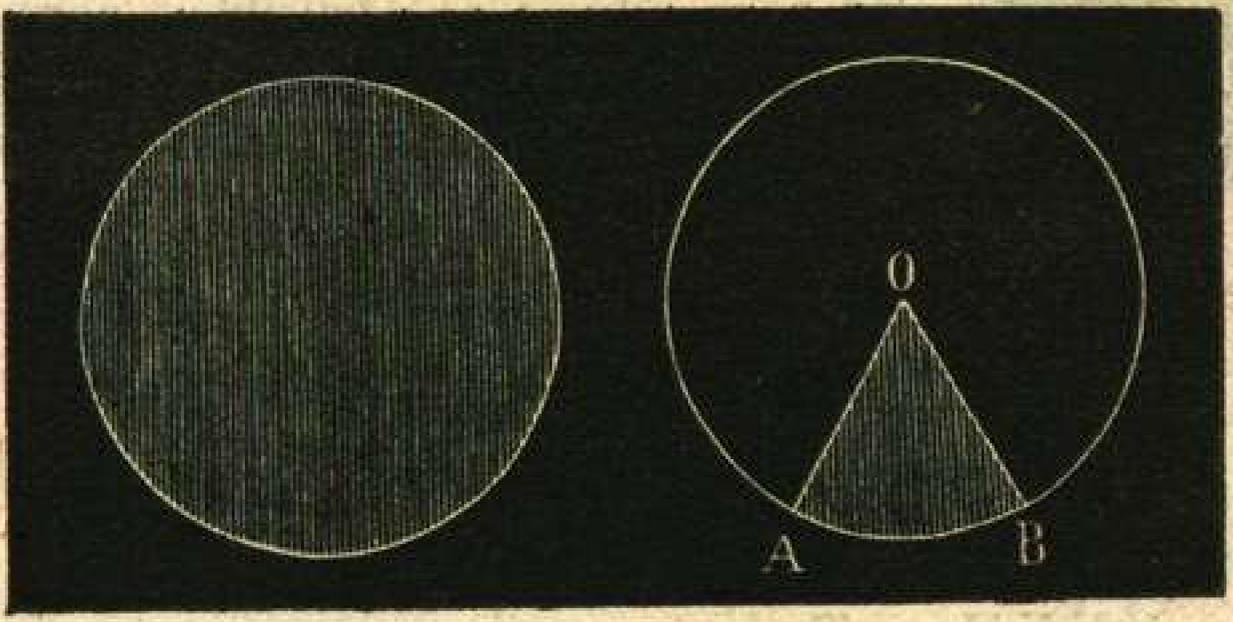
---

(1) De las palabras latinas *circum*, alrededor y *fero*, llevar.
(2) De la palabra griega *quentron*, aguijon, centro.
(3) De la palabra latina *radius*, varita, estaca, rayo de una rueda.
(4) De las palabras griegas *dia*, á través de parte á parte y *metreo*, medir.
(5) De la palabra latina *arcus*, arco, usado en la guerra y en la caza.
(6) De la palabra griega *chorde*, originariamente *intestino*, y despues *cuerda* de instrumento de música.

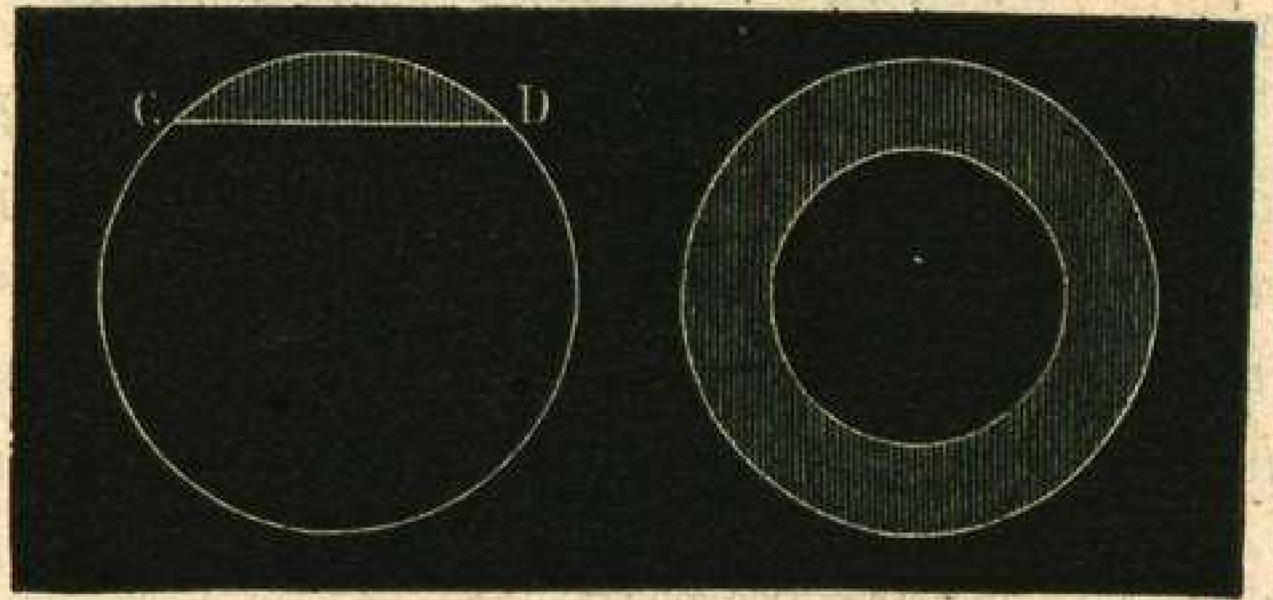
Se dice que la cuerda *subtiende* (1) al arco.

La recta que como EF corta á la circunferencia en dos puntos se llama *secante* (2); y la que como GH solo tiene un punto comun con la circunferencia se la designa con el nombre de *tangente* (3).

Se llama *círculo* (4) la porcion de plano comprendida en el interior de la circunferencia.



Se llama *sector* (5) la porcion AOB de la superficie del círculo comprendida entre un arco AB y los dos rádios OA y OB que van á parar á sus extremos.

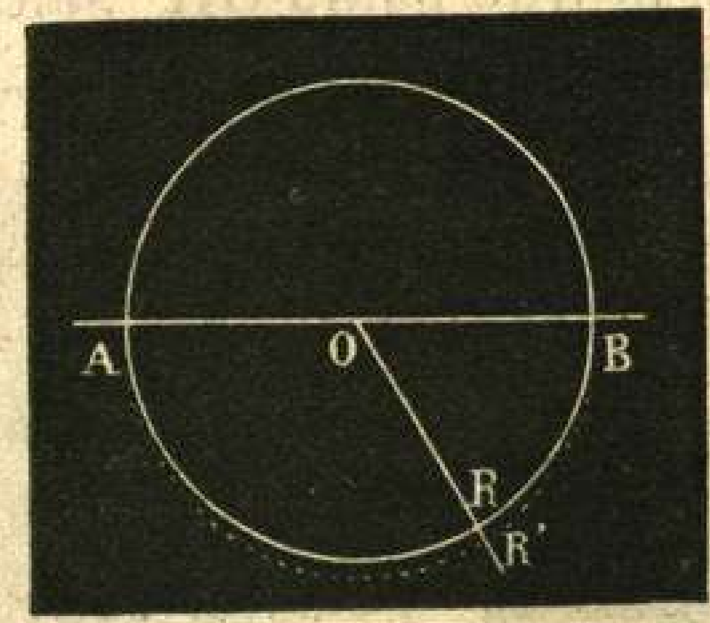


Se dá el nombre de *segmento* (6) *de círculo*, la porcion de la superficie del círculo comprendida entre una cuerda CD y el arco que ella subtiende.

Recibe el nombre de *corona* la superficie anular comprendida entre dos círculos concéntricos, esto es, cuyos centros coinciden.

(1) Del verbo latino *subtendo*, extender debajo.
(2) Del verbo latino *seco*, cortar.
(3) Del verbo latino *tango*, tocar.
(4) Del nombre latino *circulus*, corro de gente, derivado de *circus*, circo.
(5) Del verbo latino *seco*, cortar.
(6) De la palabra latina *segmentum*, corte, tajo, tajada, trozo.

41. Teorema XXXI.—*Todo diámetro divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales.*



Doblemos la parte superior de la circunferencia sobre la inferior: si estas dos partes son iguales, deberán coincidir; pues si asi no fuese, trazando una recta cualquiera OR por el centro, encontraria en R á la parte inferior de la circunferencia, y en R' á la parte superior doblada; pero esto no es admisible; porque las distancias de dos puntos cualesquiera R y R' de una circunferencia á su centro deben ser iguales.

Las dos partes iguales en que el diámetro divide á la circunferencia se llaman *semicircunferencias* (1) y las dos partes, tambien iguales, en que divide al círculo se llaman *semicírculos* (2).

42. Teorema XXXII.—*Toda cuerda es menor que el diámetro.*

43. Teorema XXXIII.—*Una recta no puede cortar á la circunferencia en más de dos puntos.*

Escolio 1.° *Los dos puntos en que una circunferencia corta á una recta equidistan del pié de la perpendicular trazada desde el centro á la recta.*

2.° *Para que una circunferencia corte á una recta es necesario que la distancia del centro á la recta sea menor que el rádio.*

44. Teorema XXXIV.—*En un mismo círculo ó en círculos iguales, arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales.*

Recíproco. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, cuerdas iguales subtienden arcos iguales.*

45. Teorema XXXV.—*En un mismo círculo ó en cír-*

---

(1) De las palabras latinas *semi*, medio y *circumferencia*, circunferencia.

(2) De las palabras latinas *semi*, medio y *circulus*, círculo.

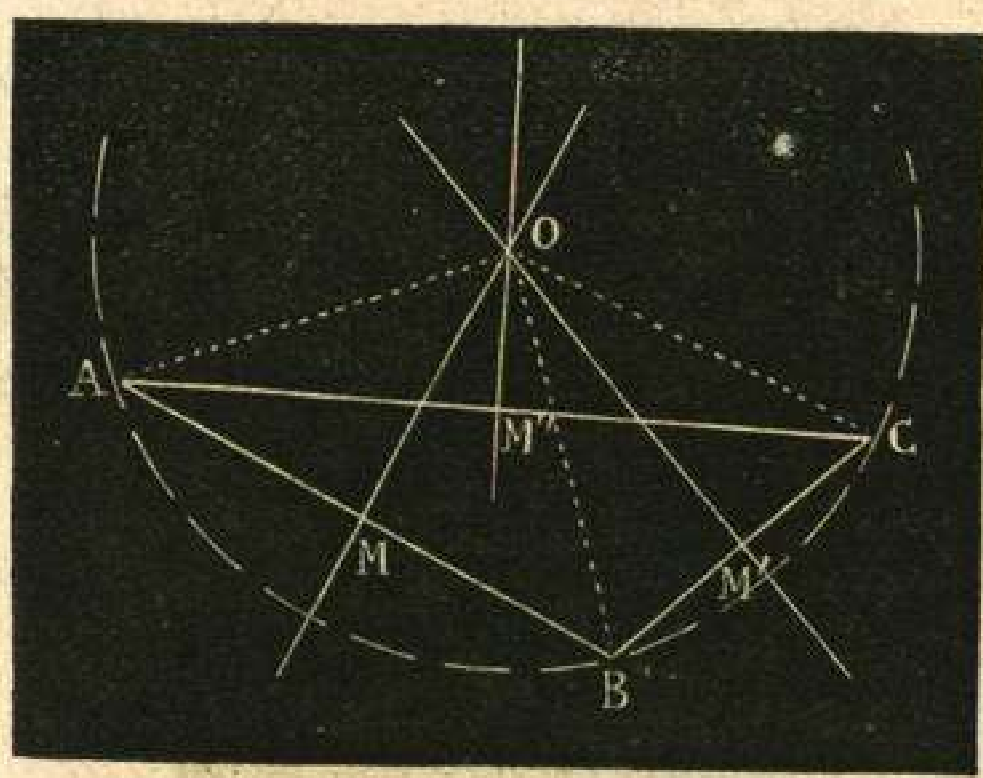
culos iguales, si dos arcos son desiguales, el mayor es subtendido por la cuerda mayor.

Recíproco. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, si dos cuerdas son desiguales, el arco subtendido por la mayor es mayor que el subtendido por la menor.*

NOTA. Como toda cuerda subtiende dos arcos: uno mayor y otro menor que una semicircunferencia, se supone siempre en estos teoremas que se trata del menor de los dos arcos subtendidos por una cuerda.

46. TEOREMA XXXVI.—*Todo diámetro perpendicular á una cuerda divide á dicha cuerda y á cada uno de los dos arcos que ella subtiende en dos partes iguales.*

47. TEOREMA XXXVII.—*Por tres puntos* A, B y C, *que no están situados en línea recta, se puede hacer pasar siempre una circunferencia, pero no se puede hacer pasar más que una.*



Hallar el centro de una circunferencia que pase por los tres puntos A, B y C, es hallar un punto O equidistante de estos tres puntos.

La perpendicular levantada en el punto medio de la recta AB es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de A y de B; la perpendicular levantada en el punto medio de la recta BC goza de las mismas propiedades respecto de los puntos B y C; luego el punto O en que estas rectas se cortan, equidista de A, de B y de C, y debe pertenecer á la perpendicular levantada en el punto medio de la recta AC.

Ahora bien, no es posible encontrar un punto distinto de O, que equidiste de los tres puntos A, B y C, puesto que un punto para gozar de esta propiedad debe hallarse en dos de las perpendiculares OM, OM′ y OM″ y estas se cortan en el mismo punto.

Corolario. *Dos circunferencias distintas no pueden cortarse en más de dos puntos.*

48. TEOREMA XXXVIII.—*En un mismo círculo ó en círculos iguales:*

1.° *Cuerdas iguales equidistan del centro;*

y 2.° *De dos cuerdas desiguales la menor es la que más dista del centro.*

Recíproco 1.° *Dos cuerdas que equidistan del centro son iguales.*

2.° *De dos cuerdas que no equidistan del centro, la más distante es la menor.*

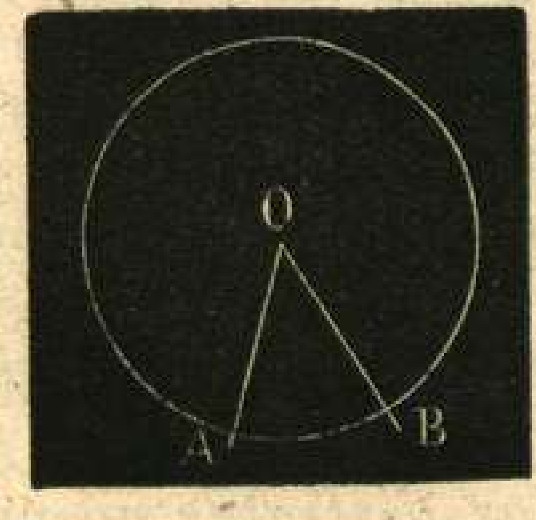
49. Teorema XXXIX.—*La tangente en un punto de una circunferencia es perpendicular al rádio que pasa por dicho punto.*

Recíproco. *La perpendicular trazada en el extremo de un rádio es tangente á la circunferencia en dicho punto.*

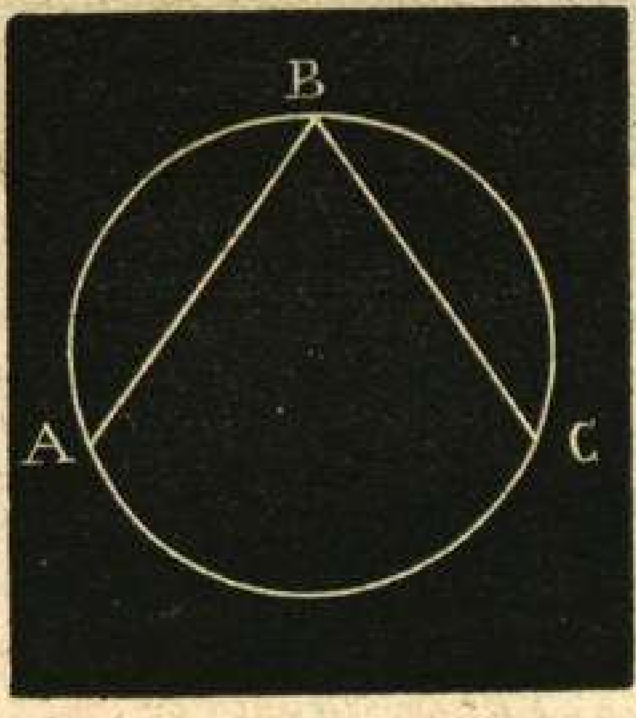
50. Teorema XL.—*Los arcos comprendidos entre paralelas son iguales.*

Medida de los ángulos por medio de los arcos interceptados por sus lados.

51. Definiciones.—Un ángulo cuyos lados cortan á una circunferencia pueden tener diferentes posiciones respecto de la misma.



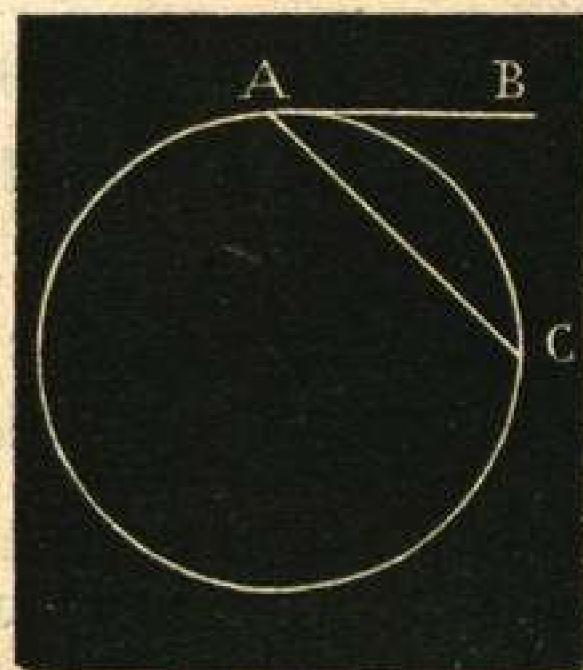
Angulo central.



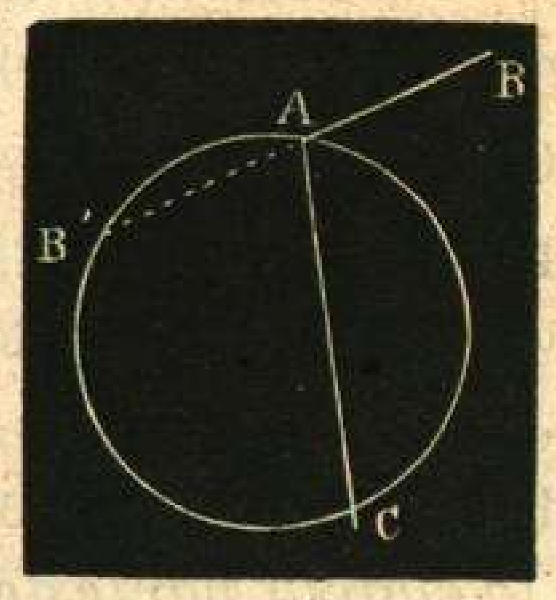
Angulo inscrito.

1.° Si el vértice del ángulo coincide con el centro de la circunferencia, el *ángulo* se llama *central.*

2.° Si el vértice del ángulo está situado en la circunferencia y sus lados son dos cuerdas, entonces el ángulo se llama *inscrito* (1).



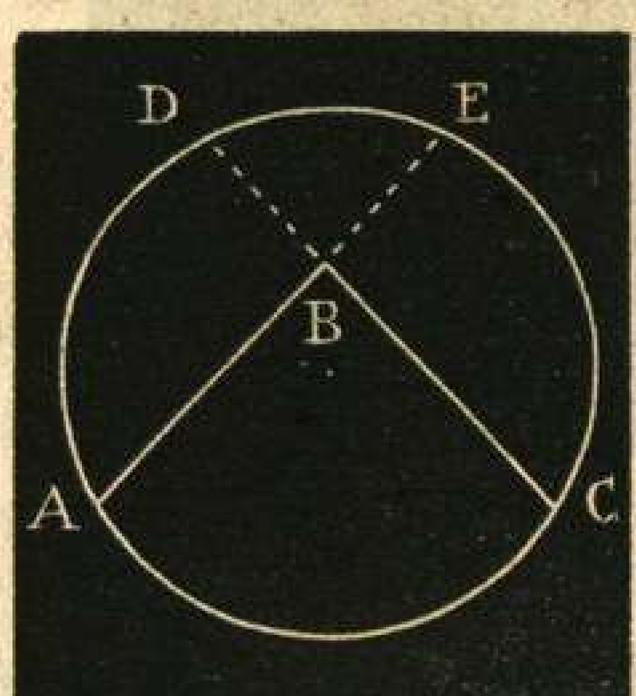
Angulo semi-inscrito



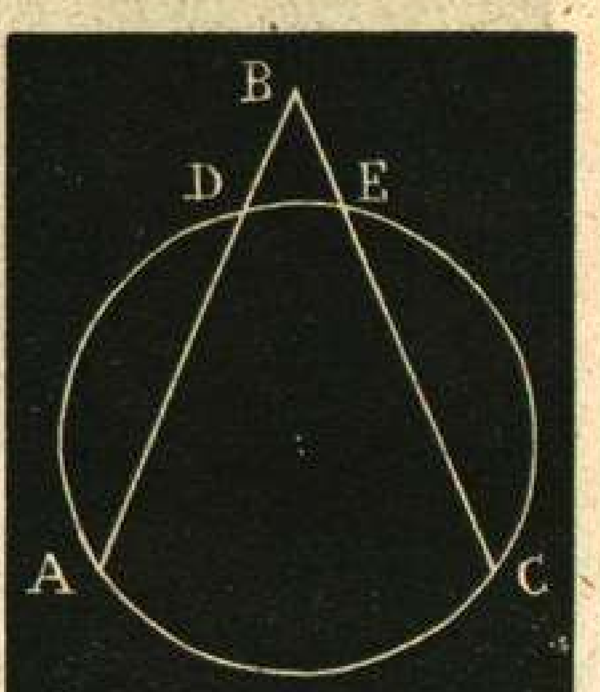
Angulo ex-inscrito

3.° Si el vértice está en la circunferencia, pero uno de sus lados es una cuerda y el otro una tangente, se llama *ángulo semi-inscrito* (2).

4.° Si teniendo el vértice en la circunferencia, uno de los lados es una cuerda y otro la prolongacion de otra, recibe el nombre de *ex inscrito* (3).



Angulo interior.



Angulo exterior.

5.° Si está formado por dos cuerdas, que se cortan, se llama *interior*.

---

(1) De las palabras latinas *in*, en, dentro y *scribo*, trazar.
(2) De las palabra latinas *semi*, medio é *inscriptus*, inscrito.
(3) De las palabras latinas *ex*, fuera é *inscriptus*, inscrito.

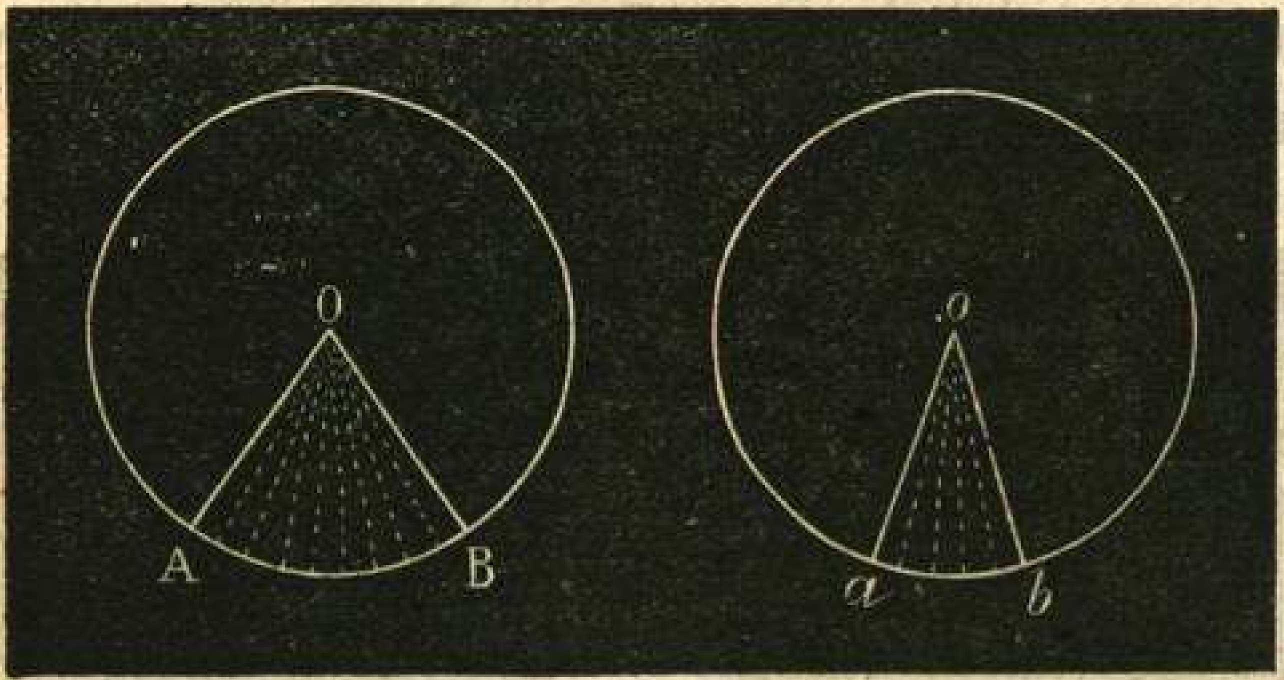
y 6.° Si tiene su vértice fuera de la circunferencia y sus lados son dos secantes, una secante y una tangente, ó dos tangentes, entonces se llama *ángulo exterior*.

52. TEOREMA XLI.—*En un mismo círculo ó en círculos iguales, ángulos centrales iguales interceptan en la circunferencia arcos iguales.*

Recíproco. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, si los arcos son iguales los ángulos centrales son iguales.*

Escolio. *Al ángulo recto central corresponde un arco igual á la cuarta parte de la circunferencia, y recíprocamente.*

53. TEOREMA XLII.—*En un mismo círculo ó en círculos iguales, la razon de dos ángulos centrales AOB y aob, es igual á la razon de los arcos AB y ab que comprenden.*



Es decir que tendremos $\frac{\textit{ángulo}\ \mathrm{AOB}}{\textit{ángulo}\ \mathrm{aob}} = \frac{\textit{arco}\ \mathrm{AB}}{\textit{arco}\ ab}$.

Supongamos que los dos ángulos AOB y aob tengan una medida comun que esté contenida m veces, por ejemplo, en AOB, y n veces en aob, la razon $\frac{\textit{ángulo}\ \mathrm{AOB}}{\textit{ángulo}\ \mathrm{aob}}$ será igual á $\frac{m}{n}$, y podemos concebir estos dos ángulos divididos, el primero en m y el segundo en n pequeños ángulos, iguales todos entre sí; luego el arco AB contendrá m de estos arcos, y el arco ab contendrá n de los mismos; luego la razon $\frac{\textit{arco}\ AB}{\textit{arco}\ ab}$ es tambien igual á $\frac{m}{n}$.

La razon de los dos ángulos AOB y aob es, pues, medida por el mismo número que la de los dos arcos que comprenden, y se puede escribir

$$\frac{\acute{a}ngulo\ AOB}{\acute{a}ngulo\ aob} = \frac{arco\ AB}{arco\ ab}.$$

Corolario. *Un ángulo central tiene por medida el arco comprendido entre sus lados.*

En efecto, si convenimos en que la unidad del ángulo corresponda á la unidad del arco, aplicándolo al teorema que acabamos de demostrar, tendremos

$$\frac{\acute{a}ngulo\ AOB}{unidad\ del\ angulo} = \frac{arco\ AB}{unidad\ del\ arco}$$

lo cual quiere decir que, por medio de esta convencion, el número que expresa la magnitud del ángulo AOB es el mismo que expresa la magnitud del arco AB. El ángulo y el arco son, pues, medidos por el mismo número; luego el uno puede servir de medida al otro.

54. DIVISION DE LA CIRCUNFERENCIA.—Para expresar la magnitud de los ángulos se ha convenido en dividir la circunferencia en cierto número de partes iguales. La division más antigua, y que todavía está en vigor, consiste en dividir la circunferencia en 360 partes iguales, que se llaman *grados*. La cuarta parte de la circunferencia ó el *cuadrante* (1), que corresponde al ángulo recto, consta por consiguiente de 90°.

Cada grado se subdivide en 60 *minutos*, y cada minuto en 60 *segundos*, por lo cual esta division se llama *sexagesimal* (2).

Para expresar un número de *grados*, *minutos y segundos*, se escribe ° despues del guarismo de los grados, ′ despues del guarismo de los minutos, y ″ despues del guarismo de los segundos. Así 48° 50′ 13″ se leerá 48 *grados*, 50 *minutos*, 13 *segundos*.

55. TEOREMA XLIII.—*Un ángulo inscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

---

(1) De la palabra latina *quadrans*, cuarta parte.

(2) De la palabra latina *sexagésimus*, sesenta en órden, sexagésima parte.

Corolario 1.° *Todos los ángulos inscritos en un mismo segmento son iguales.*

Corolario 2.° *Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.*

Corolario 3.° *Un ángulo inscrito es agudo ú obtuso, segun que tiene su vértice en un arco mayor ó menor que una semicircunferencia.*

56. Teorema XLIV.—*Un ángulo semi-inscrito tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtiende dentro del ángulo.*

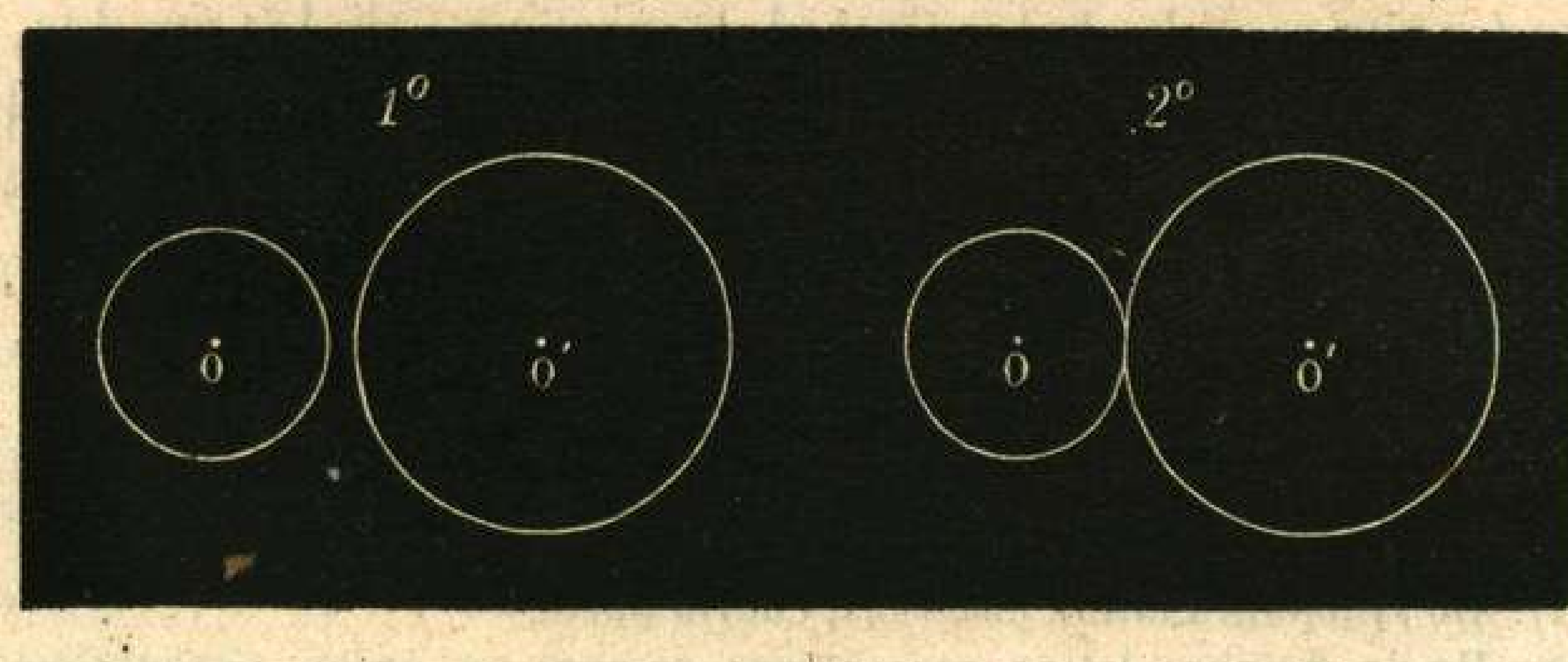
57. Teorema XLV.—*Un ángulo ex-inscrito tiene por medida la semisuma de los arcos subtendidos por las cuerda que le forman.*

58. Teorema XLVI.—*Un ángulo interior tiene por medida la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.*

59. Teorema XLVII.—*El ángulo exterior tiene por medida la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.*

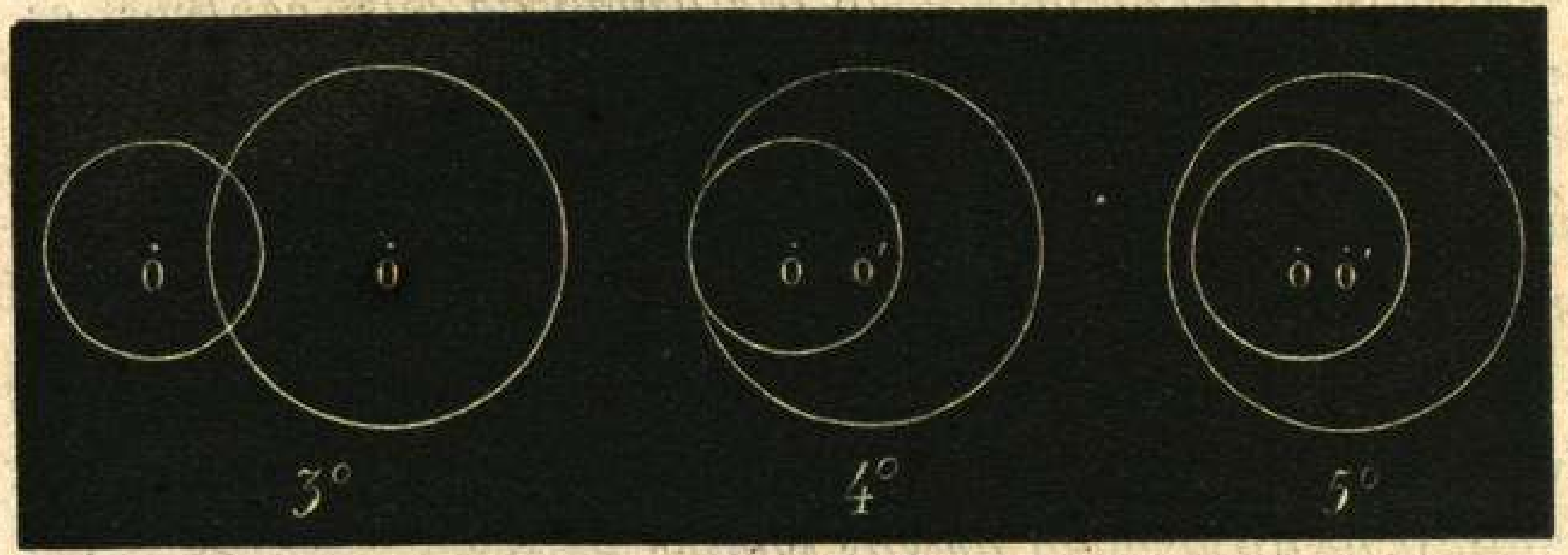
Posiciones relativas de dos circunferencias.

60. Definiciones.—Dos circunferencias trazadas en un mismo plano pueden presentarse en las cinco posiciones siguientes:



1.° Que cada una no tenga ningun punto comun con la otra, y entonces se dice que son *exteriores* una á otra.

2.° Que todos los puntos de la una estén fuera de la otra, pero que tengan un punto comun, en cuyo caso son *tangentes exteriormente*, y su posicion se llama *contacto exterior*.



3.° Que cada una de las dos tenga á la vez puntos dentro y puntos fuera de la otra, y entonces se llaman *secantes*.

4.° Que una de ellas esté completamente dentro de la otra, pero que tengan un punto comun, en cuyo caso son *tangentes interiormente*, y su posicion se llama *contacto interior*.

y 5.° Que la menor esté completamente dentro de la mayor y tenga sus puntos comunes con ella, en cuyo caso se llama *interior*.

61. Teorema XLVIII.—*Cuando dos circunferencias tienen un punto comun fuera de la recta que une sus centros, tienen además otro comun simétrico respecto de esta línea.*

Escolio. La recta que une los dos puntos en que se cortan dos circunferencias se llama *cuerda comun*.

Corolario 1.° *Cuando dos circunferencias se cortan, la recta que une sus centros es perpendicular en su punto medio á la cuerda comun.*

Corolario 2.° *Cuando dos circunferencias son tan-*

gentes, el punto de contacto está situado en la línea de los centros.

62. Teorema XLIX.—*Cuando dos circunferencias son exteriores, la distancia de sus centros es mayor que la suma de sus rádios.*

63. Teorema L.—*Cuando dos circunferencias son tangentes exteriormente, la distancia de sus centros es igual á la suma de sus rádios.*

64. Teorema LI.—*Cuando dos circunferencias son secantes, la distancia de sus centros es menor que la suma de sus rádios y mayor que su diferencia.*

65. Teorema LII.—*Cuando dos circunferencias son tangentes interiormente, la distancia de sus centros es igual á la diferencia de sus rádios.*

66. Teorema LIII.—*Cuando una circunferencia es interior á otra, la distancia de sus centros es menor que la diferencia de los rádios.*

Recíprocos de los teoremas anteriores. 1.° *Cuando la distancia de los centros de dos circunferencias es mayor que la suma de sus rádios, dichas circunferencias son exteriores.*

2.° *Cuando la distancia de los centros es igual á la suma de los rádios, las dos circunferencias son tangentes exteriormente.*

3.° *Cuando la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios y mayor que su diferencia, las dos circunferencias son secantes.*

4.° *Cuando la distancia de los centros es igual á la diferencia de los rádios, las dos circunferencias son tangentes interiormente.*

y 5.° *Cuando la distancia de los centros es menor que la diferencia de los rádios, una de las circunferencias es interior á la otra.*

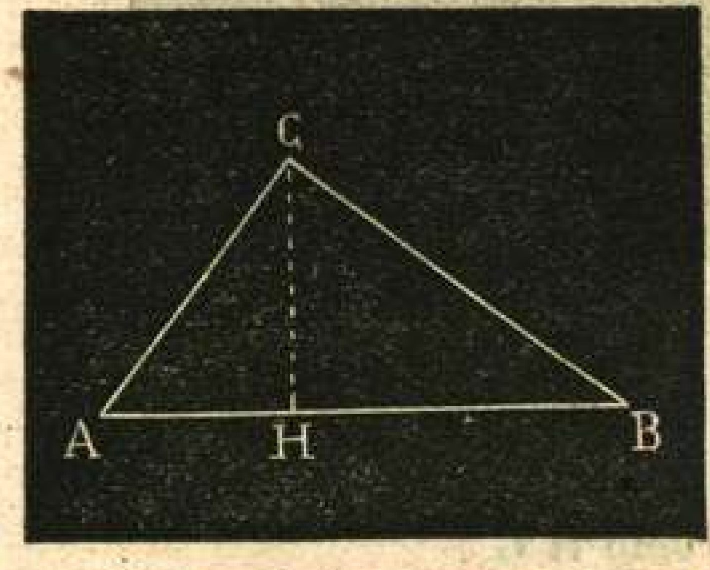
LIBRO TERCERO.

Definiciones.

67. Area.—Se llama *área* (1) de una figura la superficie de la misma considerada bajo el punto de vista de su magnitud.

Medir una superficie es averiguar cuantas veces contiene á una superficie conocida tomada como unidad.

El *metro cuadrado*, ó sea un cuadrado que tiene un metro de lado, es la unidad de superficie.



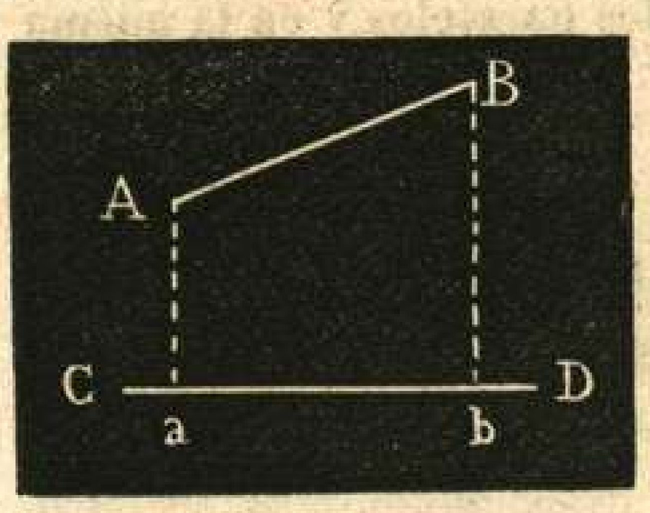
68. Altura.—Se llama *altura* de un punto sobre una recta la longitud de la perpendicular bajada desde dicho punto á la recta.

CH es la altura del punto C respecto de la recta AB.

Cuando el punto es el vértice C de un triángulo, se refiere la posicion de este vértice al lado opuesto AB, que entonces lleva el nombre de *base*.

No hay razon alguna para tomar por base un lado con preferencia á otro; asi es que todo triángulo tiene *tres bases* y *tres alturas*. El uso ha consagrado estas expresiones, porque sirven para abreviar el discurso.

Se llama tambien *altura* la distancia de dos lados paralelos de un paralelógramo ó de un trapecio.



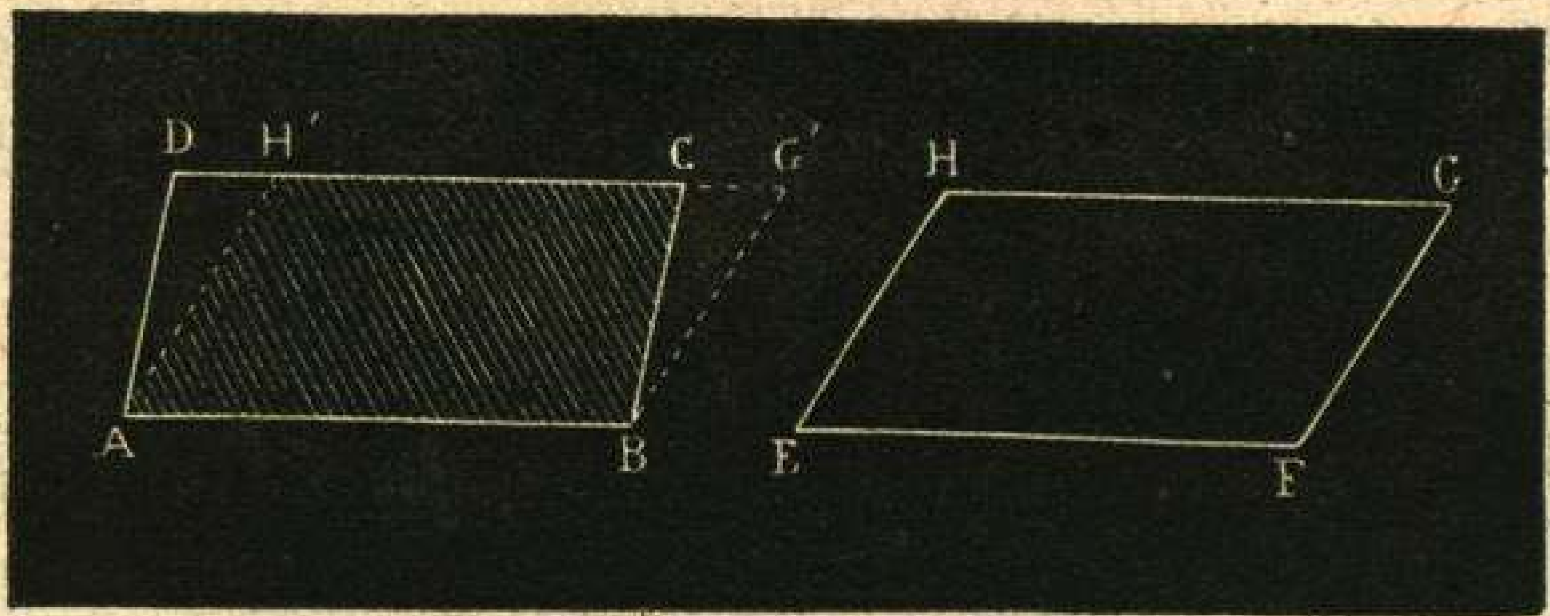
69. Proyeccion.—Se dá el nombre de *proyeccion* (2) de un punto A sobre una recta CD el pié *a* de la perpendicular bajada desde el punto A á dicha línea CD. Se llama *proyeccion* de una recta AB la distancia *ab* de las proyecciones de sus extremos.

(1) De la palabra latina *área*, era, solar.

(2) Del nombre latino *projectio*, derivado del verbo latino *projicio*, echar hácia delante.

Teoremas fundamentales para la medida de las áreas.

70. TEOREMA LIV.—*Dos paralelógramos* ABCD *y* EFGH, *que tienen bases iguales y la misma altura, son equivalentes.*



Coloquemos el paralelógramo EFGH sobre el ABCD, de modo que la base EF coincida con la base AB, lo cual podrá hacerse, pues son iguales por hipótesis. Siendo tambien iguales las alturas, la base superior HG tomará sobre la recta CD una posicion tal como H G'.

En esta situacion, los dos paralelógramos tienen una parte comun ABCH: si á esta parte comun se añade el triángulo ADH, tendremos el paralelógramo ABCD; y si á la misma parte se agrega el triángulo BG'C, tendremos el paralelógramo ABG H, que es idéntico al EFGH. Si pudiéramos demostrar que estos dos triángulos son iguales, habríamos demostrado que los dos paralelógramos están compuestos de una parte comun y de partes iguales entre sí, y son por consiguiente equivalentes, es decir, iguales en extension.

Ahora bien, los dos triángulos ADH' y BCG' tienen los lados AD=BC y AH'=BG' como lados opuestos de los mismos paralelógramos, y además el *ángulo* DAH'=*ángulo* CBG', por tener sus lados paralelos y en la misma direccion; luego estos triángulos son iguales.

Corolario. *Todo paralelógramo es equivalente á un rectángulo de la misma base y de la misma altura.*

71. TEOREMA LV.—*Dos rectángulos de la misma altura son entre sí como sus bases.*

Se demuestra como el teorema XLII.

Corolario. *Dos rectángulos de igual base son entre sí como sus alturas.*

72. Teorema LVI.—*Dos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

Sean los dos rectángulos R y r, á cuyas bases llamaremos respectivamente B y b, y á sus alturas H y h.

Figurémonos un tercer rectángulo R′ que tenga la base B del primero y la altura h del segundo; teniendo este rectángulo R′ una dimension comun con cada uno de los dos rectángulos R y r, estos podrán compararse segun el teorema anterior. Entonces expresaremos los valores de R y de r por medio de R′, y comparando entre sí estos valores, tendremos la razon de R á r, que buscamos. Por este procedimiento hallaremos:

$$\frac{R}{R'}=\frac{H}{h}, \text{ de donde resulta } R=R'\times\frac{H}{h} \qquad (1)$$

$$\text{y } \frac{r}{R'}=\frac{B}{b}, \text{ de donde resulta } r=R'\times\frac{b}{B} \qquad (2)$$

Dividiendo las dos igualdades (1) y (2) miembro á miembro, tendremos

$$\frac{R}{r}=\frac{R'\times\frac{H}{h}}{R'\times\frac{b}{B}}$$

Suprimiendo el factor comun R′ y efectuando la division indicada de las dos fracciones $\frac{H}{h}$ y $\frac{b}{B}$, resulta

$$\frac{R}{r}=\frac{B\times H}{b\times h}$$

lo cual justifica el enunciado del teorema.

Corolario. *Dos paralelógramos son entre sí como el producto de sus bases por sus alturas.*

73. Teorema LVII.—*El área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

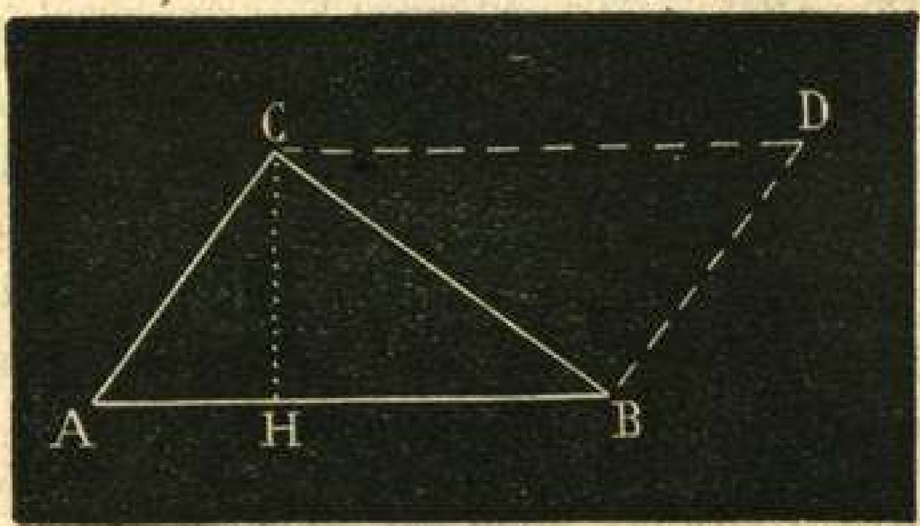
En efecto, pudiendo escribirse la razon de dos rectángulos

$$\frac{R}{r}=\frac{B\times H}{b\times h} \qquad (1)$$

si suponemos que r sea el cuadrado construido con la unidad de longitud, entonces $b=h=$*unidad de longitud*, de modo que B y H son los números que expresan las longitudes de la base y de la altura medidas con esta misma unidad; luego la igualdad (1) quiere decir que el rectángulo R contiene tantas veces la unidad de superficie, como unidades hay en el producto de los números que miden su base y su altura ó más brevemente *que es medido por el producto de su base por su altura*.

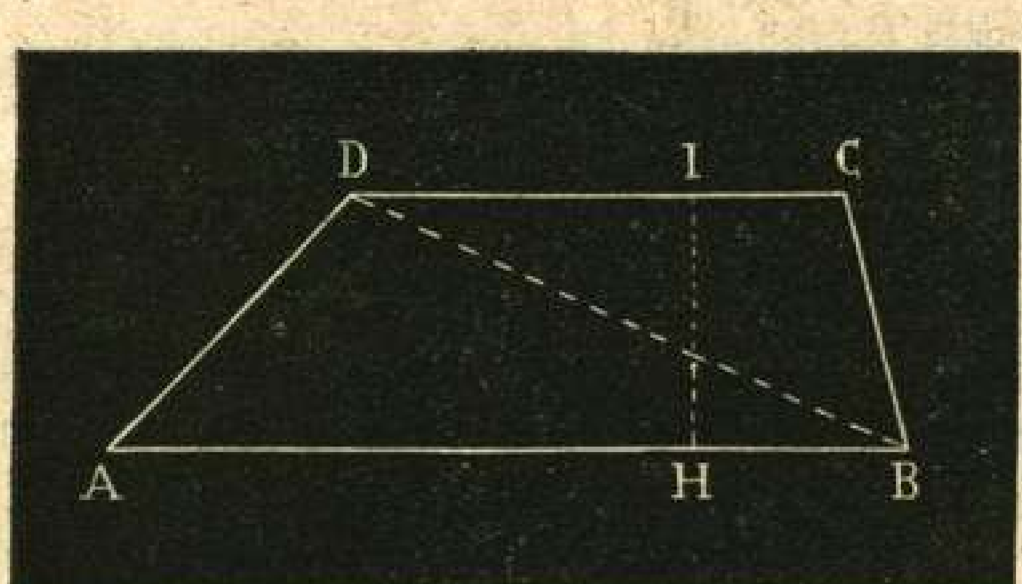
Como en el caso supuesto se toma al rectángulo r por unidad, tendremos $r=1$, $b=1$, $h=1$ y se escribirá $R=B\times H$.

Corolario. *El paralelógramo tiene por medida el producto de su base por su altura.*



74. Teorema LVIII.—*Siendo todo triángulo la mitad de un paralelógramo de la misma base y de la misma altura, tiene por medida la mitad del producto de su base por su altura.*

Sea el triángulo ABC, tracemos por los vértices C y B las paralelas CD y BD á los lados AB y AC; tendremos un paralelógramo ABCD, que tiene la misma base AB y la misma altura CH que el triángulo ABC. Además el triángulo ABC es la mitad del paralelógramo (Teor XXIV, Cor. III.); tiene, pues, por medida la mitad del producto de su base por su altura.



75. Teorema LIX. —*El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semi-suma de sus bases.*

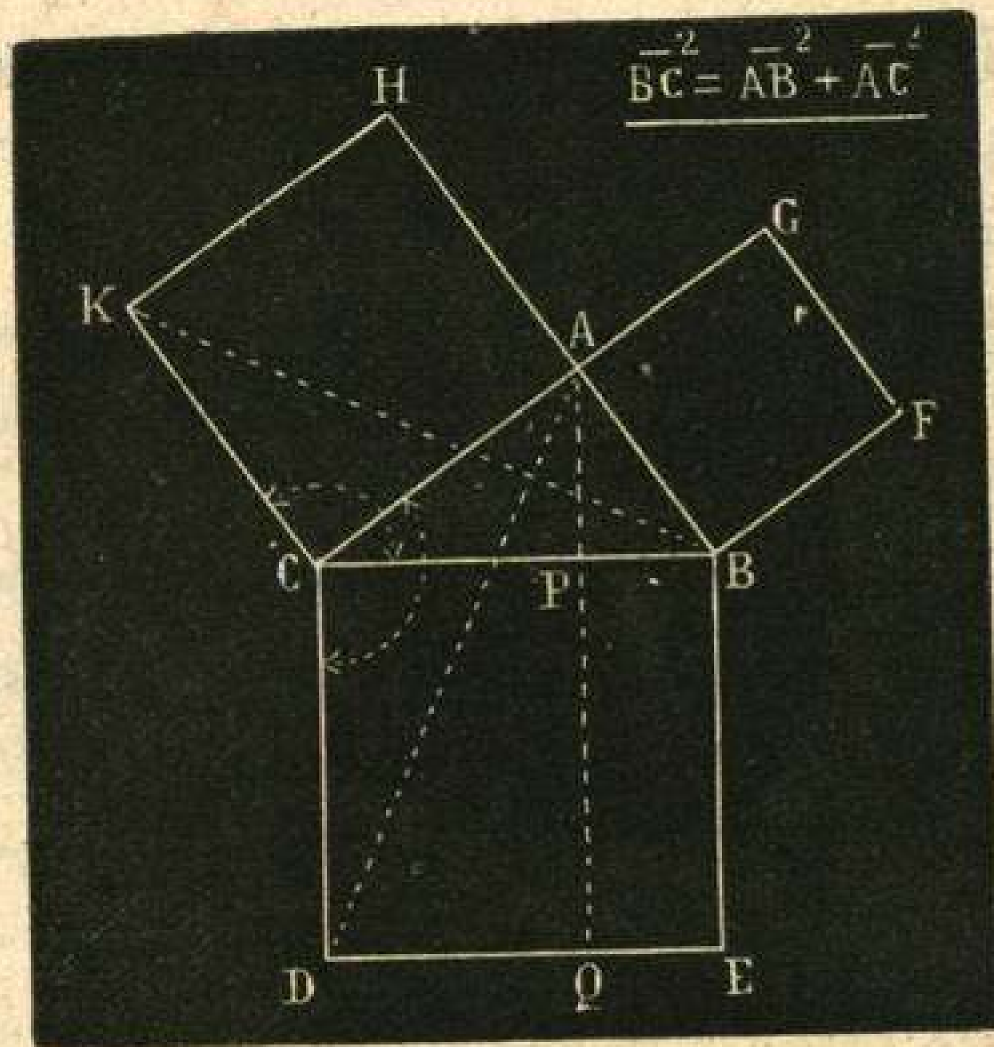
Dividamos el trapecio ABCD en dos triángulos por medio de la diagonal BD tendremos

triángulo $ABD = \frac{1}{2} AB \times IH$, y *triángulo* $DCB = \frac{1}{2} CD \times IH$

El trapecio, que es la suma de los dos triángulos, tendrá, pues, por medida $\frac{1}{2} AB \times IH + \frac{1}{2} CD \times IH$; ó haciendo la reduccion, $\frac{1}{2} (AB + CD) \times IH$

Escolio. *El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.*

76. Teorema LX.—*El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.*



Sobre la hipotenusa BC y sobre cada uno de los catetos AB y AC del triángulo rectángulo ABC construyamos los cuadrados BCDE, ABFG y ACKH.

Hecho esto, desde el vértice A del ángulo recto bajemos una recta AP perpendicular á la hipotenusa BC; y prolonguemos esta recta hasta que encuentre en Q al lado DE del cuadrado BCDE. Este cuadrado se halla asi dividido en dos rectángulos PQDC y PQEB, los cuales son respectivamente equivalentes á los cuadrados ACKH y ABFG.

Demostraremos primero la equivalencia del cuadrado ACKH y del rectángulo PQDC

Para esto, unamos el punto K con el punto B y el punto A con el punto D, con lo cual tendremos los triángulos BCK y ACD, que son iguales, pues sus ángulos en C son iguales, por estar compuestos cada uno de un ángulo recto y de la parte comun ACB, los lados AC y CK son iguales como lados de un mismo cuadrado, y por igual razon lo son tambien los lados BC y CD.

Asi es que tenemos

triángulo BCK=*triángulo* ACD.

Pero el triángulo BCK tiene la misma base CK y la misma altura AC que el cuadrado ACKH, luego es equivalente á la mitad de ese cuadrado; por la misma razon, el triángulo ACD es equivalente á la mitad del rectángulo PQDC. Siendo, pues, equivalentes las mitades de este cuadrado y de este rectángulo á triángulos iguales, podemos decir

rectangulo PQDC equivalentes al *cuadrado* ACKH.

Uniendo el punto A con el punto E y el punto C con el punto F se demostraria igualmente que

rectangulo PQEB equivalente al *cuadrado* ABFG

De donde se deduce que la suma de los rectángulos PQEB y PQDC, es decir, el *cuadrado* BCDE, es equivalente al *cuadrado* ABFG más el *cuadrado* ACKH.

Escolio. Como las áreas de los cuadrados construidos sobre las rectas BC, AB y AC, están representadas por los productos BC×BC, AB×AB, y AC×AC, ó $\overline{BC}^2$,

$\overline{AB}^2$ y $\overline{AC}^2$, este teorema puede expresarse por la igualdad

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

Corolario. *El cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa, ménos el cuadrado del otro cateto.*

77. Teorema LXI.—*En todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto á un ángulo agudo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos dos veces el rectángulo de uno de estos lados por la proyeccion del segundo sobre el primero.*

Escolio. Este teorema puede tambien enunciarse del siguiente modo: En todo triángulo el cuadrado ó segunda potencia del lado opuesto á un ángulo águdo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, *ménos* el doble producto de uno de ellos, por la proyeccion que sobre él forma el otro.

78. Teorema LXII.—*En todo triángulo obtusángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más dos veces el rectángulo de uno de estos lados por la proyeccion del segundo sobre el primero.*

Escolio. Este teorema puede enunciarse de un modo análogo al anterior diciendo: el lado opuesto á un ángulo obtuso es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, *mas* el duplo de uno de ellos por la proyeccion, que forma el otro sobre él.

De las líneas proporcionales de los triángulos.

79. Teorema LXIII.—*Toda recta paralela á una de los lados de un triángulo divide á los otros dos lados en partes proporcionales.*

Corolario 1.° *Dos segmentos correspondientes están con los lados de que forman parte en la misma razon.*

Corolario 2.° *Dos segmentos correspondientes están entre sí en la misma razon que los lados á que pertenecen.*

Corolario 3.° *Cuando dos rectas son cortadas por* *muchas líneas paralelas entre sí, los segmentos correspondientes están en una razon constante.*

Recíproco del teorema. *Toda recta que divide dos lados de un triángulo en partes proporcionales es paralela al tercer lado.*

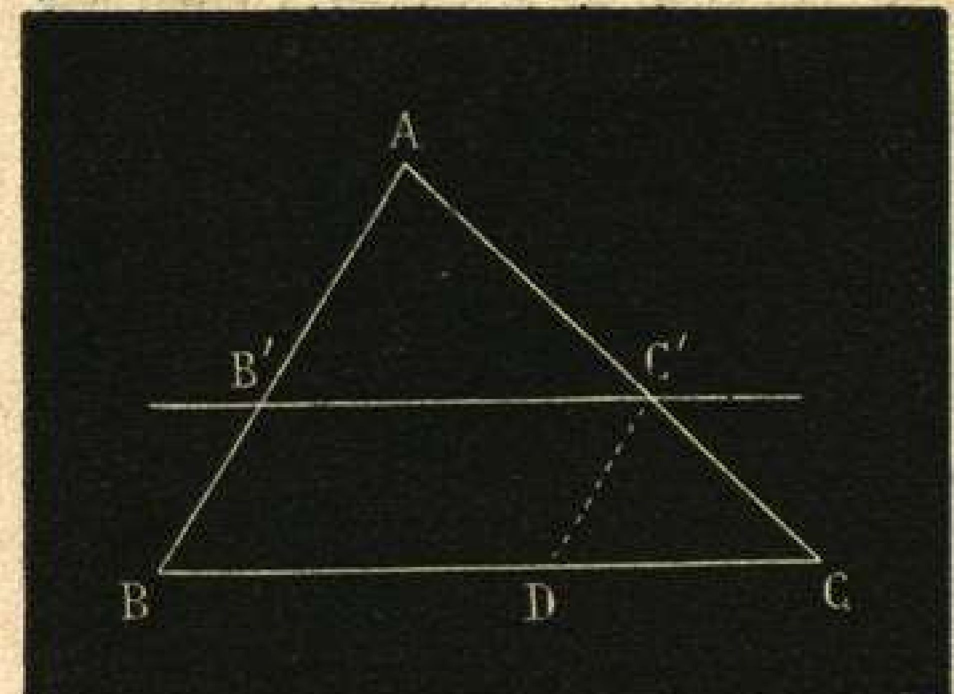
80. TEOREMA LXIV.—*La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto á dicho ángulo en dos partes proporcionales á los lados adyacentes.*

Semejanza de triángulos.

81. DEFINICIONES. Dos figuras son *semejantes* cuando constan de un mismo número de figuras respectivamente semejantes y semejantemente dispuestas.

Se dice que dos triángulos son *semejantes*, cuando los ángulos del uno son respectivamente iguales á los del otro, y los lados opuestos á ángulos iguales son proporcionales entre sí.

Lados *homólogos* (1) de dos polígonos semejantes son los adyacentes á ángulos respectivamente iguales.



82. TEOREMA LXV.—*Si en un triángulo* BAC *se traza una recta* B′C′ *paralela á un lado* BC, *el triángulo parcial* AB′C′ *que resulta es semejante al triángulo propuesto.*

En efecto, los triángulos BAC y B′AC′ tienen comun el ángulo A, iguales los ángulos B y B′ como correspondientes entre paralelas, y por la misma razon tambien iguales los ángulos C y C′. Ahora bien, siendo B′C′ paralela á BC, tendremos (Teorema LXIII, Cor. 1.°)

---

(1) De las palabras griegas *homos*, semejante y *logos*, relacion, esto es, *semejantemente colocados.*

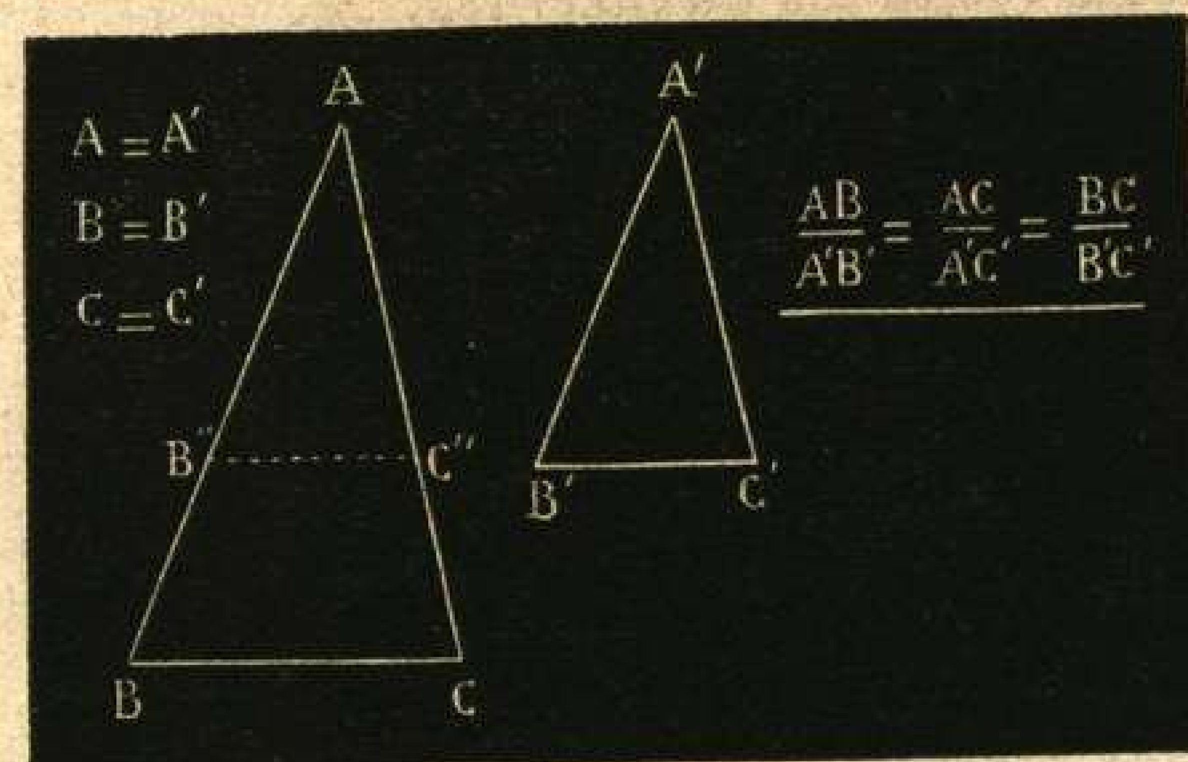
$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}$$

Tracemos la recta C D paralela al lado AB y tendremos:

$$\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{BD}$$

Pero BD y B′C′ son iguales, como paralelas comprendidas entre paralelas, luego podremos decir:

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{B'C'}$$



83. Teorema LXVI.—*Dos triángulos* ABC *y* A′B′C′, *que tienen sus ángulos respectivamente iguales, tienen los lados proporcionales, y por consiguiente son semejantes.*

Coloquemos el triángulo A′B′C′ sobre el triángulo ABC, de modo que coincidan los ángulos A y A′, lo cual es posible, pues son iguales por hipótesis. Entonces el triángulo A B′C′ tomará la posicion AB″C″. Ahora bien, no siendo el ángulo B″ otra cosa que el B′, y siendo este igual por hipótesis al ángulo B, resulta que las dos líneas BC y B″C″ son paralelas (Teor. XIX, Recip. 2.°); luego estamos en el caso del teorema anterior.

Corolario 1.° *Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales son semejantes.*

Corolario 2.° *Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares son semejantes.*

84. Teorema LXVII.—*Dos triángulos que tienen sus lados proporcionales, tienen los ángulos respectivamente iguales, y por consiguiente son semejantes.*

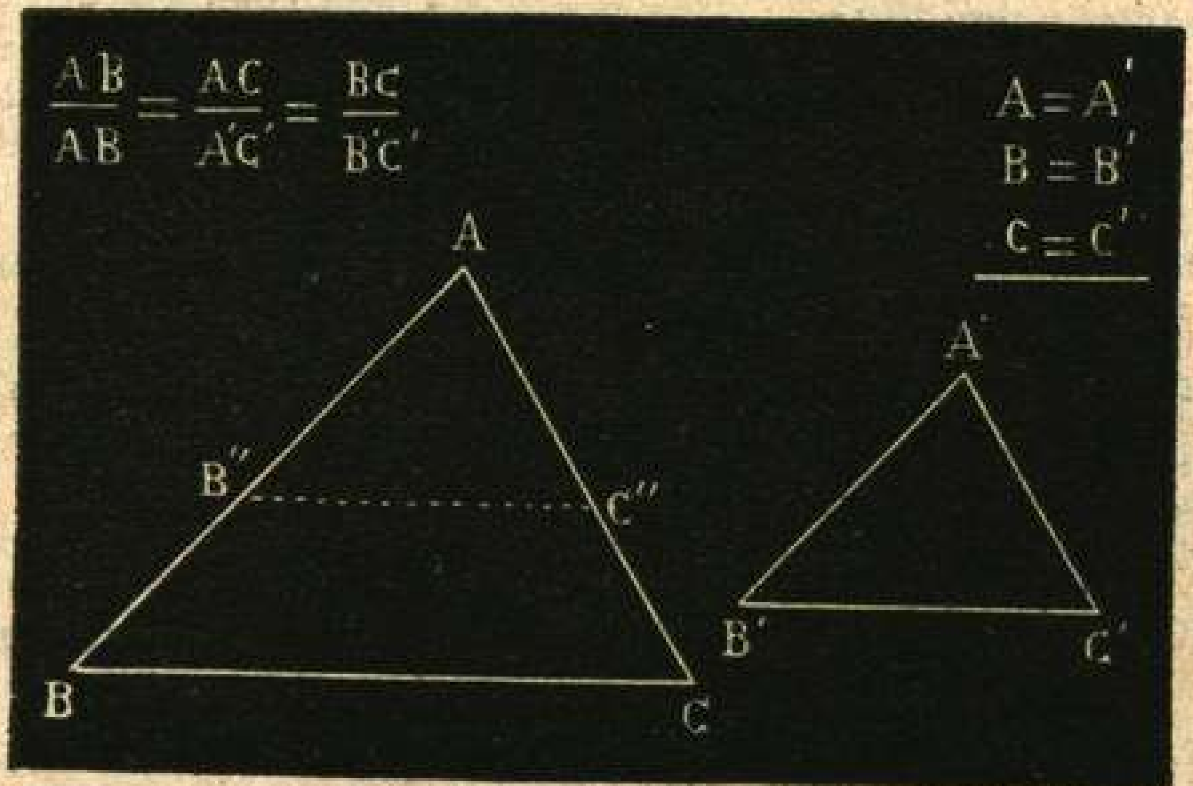
Supongamos que los triángulos ABC y A B′C′ sean tales que tengamos

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \qquad (1)$$

digo que los ángulos de estos triángulos serán respectivamente iguales.

Para demostrarlo, tomemos en los lados AB y AC del triángulo ABC dos longitudes $AB''=A'B'$ y $AC''=A'C'$, y tendremos en virtud de la igualdad (1).

$$\frac{AB}{AB''}=\frac{AC}{AC''}$$



pero entonces la recta $B''C''$, que divide á los lados AB y AC en partes proporcionales, será paralela al lado BC (Teor. LX. Recip.); luego el triángulo $AB''C''$ será semejante al triángulo ABC (Teor. LXI).

Tendremos, pues,

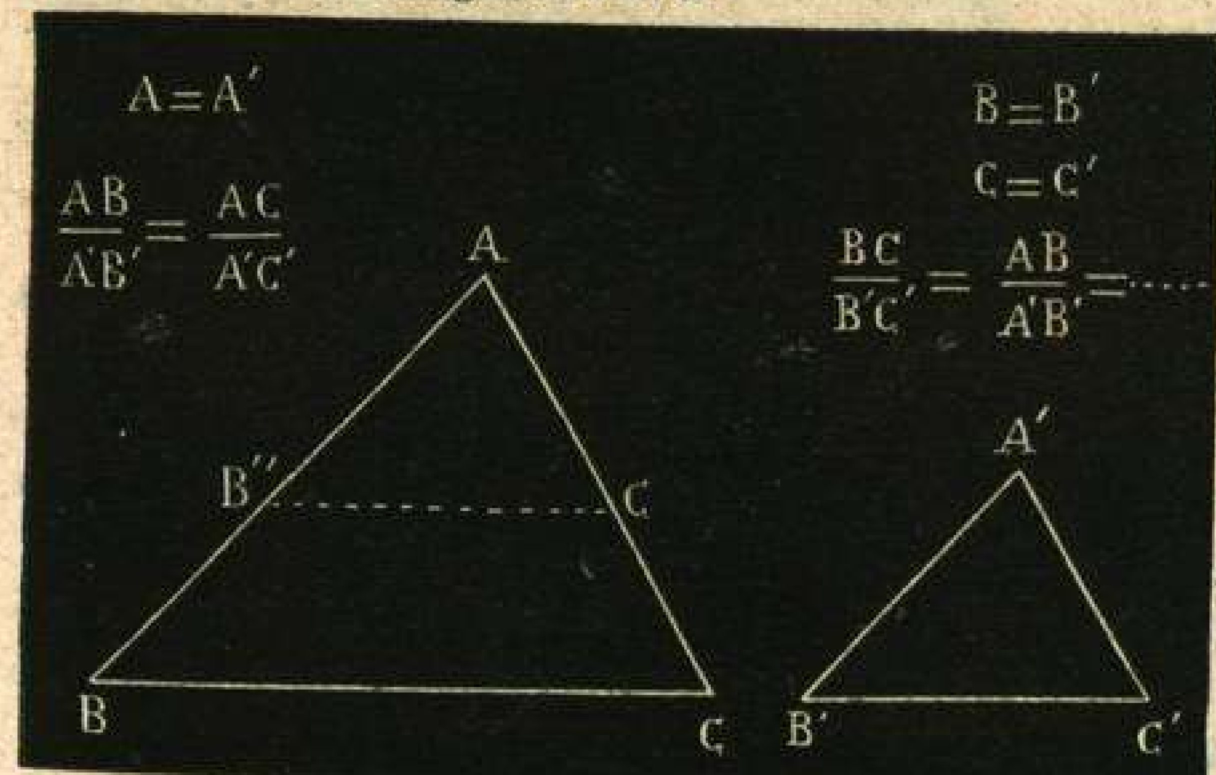
$$\frac{AB}{AB''}=\frac{AC}{AC''}=\frac{BC}{B''C''} \qquad (2)$$

Pero por construccion $AB''=A'B'$ y $AC''=A'C'$, luego las terceras razones de (1) y (2) son iguales, esto es, que

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{BC}{B''C''}$$

lo cual hace ver que $B''C''=B'C'$.

De aquí se infiere que el triángulo $AB''C''$ y el triángulo $A'B'C'$ son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales, y como los ángulos del triángulo $AB''C''$ son iguales á los del triángulo ABC, sucede lo mismo con el triángulo $A'B'C'$.



85. Teorema LXVIII.— *Dos triángulos que tienen los lados proporcionales é igual el ángulo comprendido son semejantes.*

Siendo el ángulo A′ igual al ángulo A, podremos colocar el primero sobre el segundo, y entonces el punto B′ caerá en B″ y el punto C′ en C″; pero como tenemos además

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$$

tendremos por consiguiente

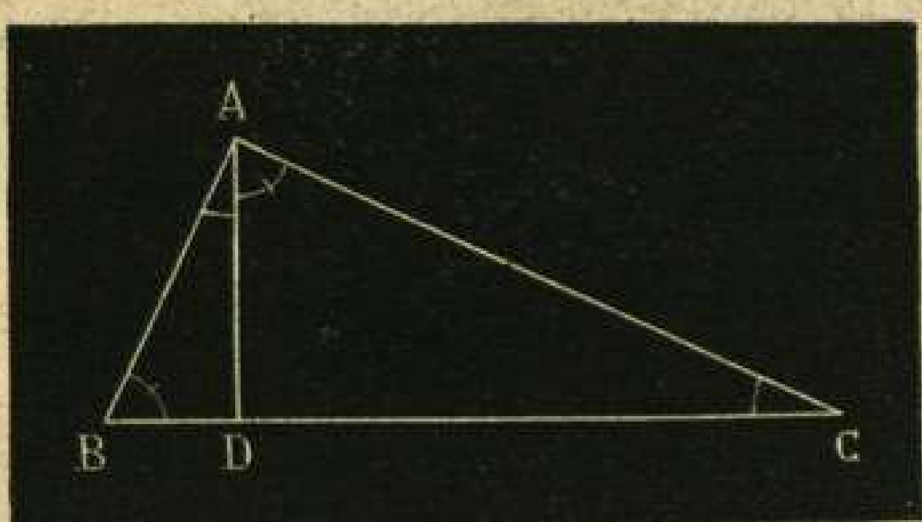
$$\frac{AB}{AB''}=\frac{AC}{AC''}$$

de lo cual resulta (Teor. LXIII. Recip.) que la línea B″C″ es paralela al lado BC.

El triángulo AB″C″ es, pues, (Teor. LXII) semejante al triángulo ABC, y lo mismo sucede, por consiguiente, con el triángulo A′B′C′ que es igual al triángulo AB″C″.

Aplicaciones de los teoremas relativos á la semejanza de los triángulos.

86. Teorema LXIX. —*Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa:*



1.° *Los dos triángulos parciales son semejantes entre sí y tambien al triángulo total;*

2.° *Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyeccion sobre ella;*

3.° *La perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa;*

4.° *Los cuadrados de los catetos son entre sí como sus proyecciones sobre la hipotenusa.*

1.° Sea AD la perpendicular bajada á la hipotenusa desde el vértice A del ángulo recto, la cual divide al triángulo BAC en otros dos ABD y ADC. El triángulo ADC tiene el ángulo C comun con el triángulo total, y como ambos son rectángulos, tienen dos ángulos respectivamente iguales y por consiguiente son semejantes (Teor. LXVI, Cor. 1.°)

Del mismo modo se demostraría que el triángulo ABD es tambien semejante al triángulo ABC; y los triángulos ABC y ADC semejantes á un tercero serán semejantes entre sí.

2.° De la semejanza del triángulo ABD con el triángulo total resulta:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}, \quad \text{de donde} \quad \overline{AB}^2=BC\times BD$$

Comparando igualmente el triángulo ADC con el ABC tendremos

$$\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{AC}, \quad \text{de donde} \quad \overline{AC}^2=BC\times BD.$$

3.° De la semejanza de los triángulos parciales entre sí, se infiere:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{DC}{AD}, \quad \text{de donde} \quad \overline{AD}^2= BD\times DC$$

4.° Acabamos de encontrar que

$$\overline{AB}^2=BC\times AD \quad \text{y} \quad \overline{AD}^2=BC\times DC.$$

Dividiendo miembro á miembro estas dos ecuaciones, resulta

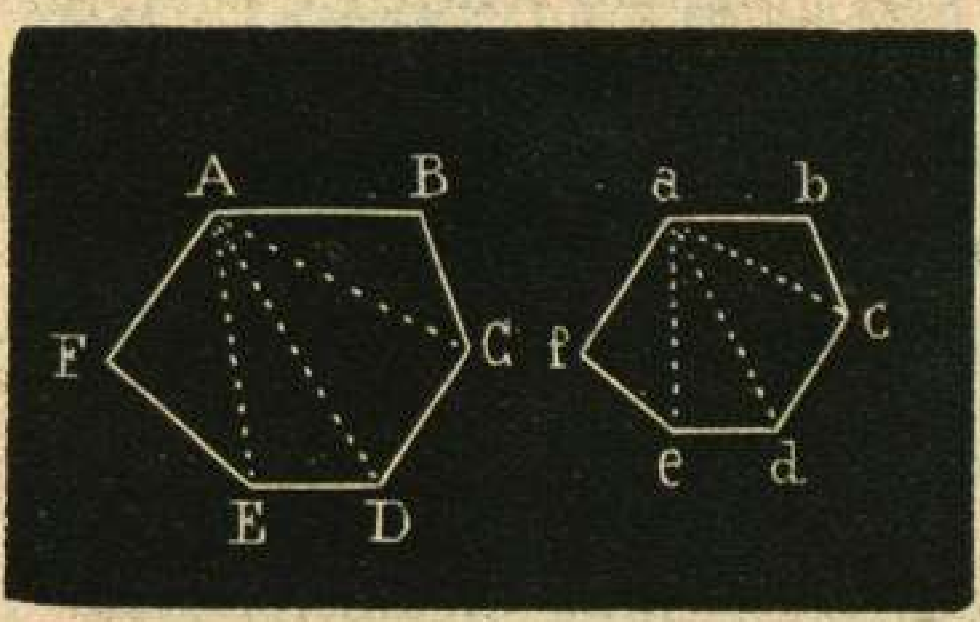
$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2}=\frac{BD}{DC}$$

Escolio. Sumando las igualdades

$$\overline{AB}^2=BC\times BD \quad \text{y} \quad \overline{AD}^2=CD\times DC$$

resulta $\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=BC\,(BD+DC)=AC\times AC=\overline{AC}^2$ teorema llamado del cuadrado de la hipotenusa (Teorema LX) y por otro nombre *teorema de Pitágoras.*

Semejanza de polígonos.



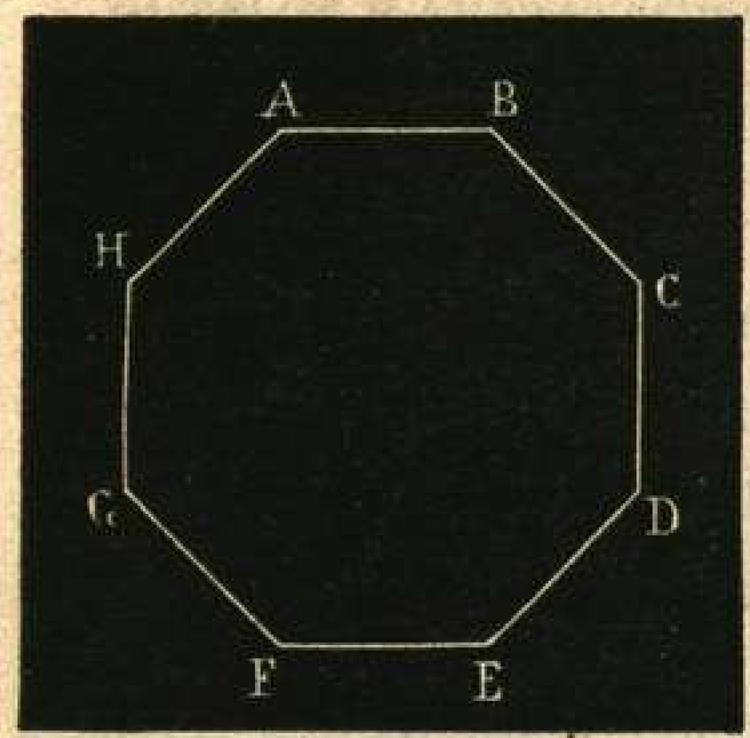
87. DEFINICION.—Dos polígonos son *semejantes* están compuestos de un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos.

88. TEOREMA LXX. *Dos polígonos semejantes tienen los ángulos homólogos iguales y los lados homólogos proporcionales.*

89. TEOREMA LXXI. *Los perímetros de dos triángulos, y en general de dos polígonos semejantes, son proporcionales á sus lados homólogos.*

LIBRO CUARTO.

Propiedades de los polígonos regulares.



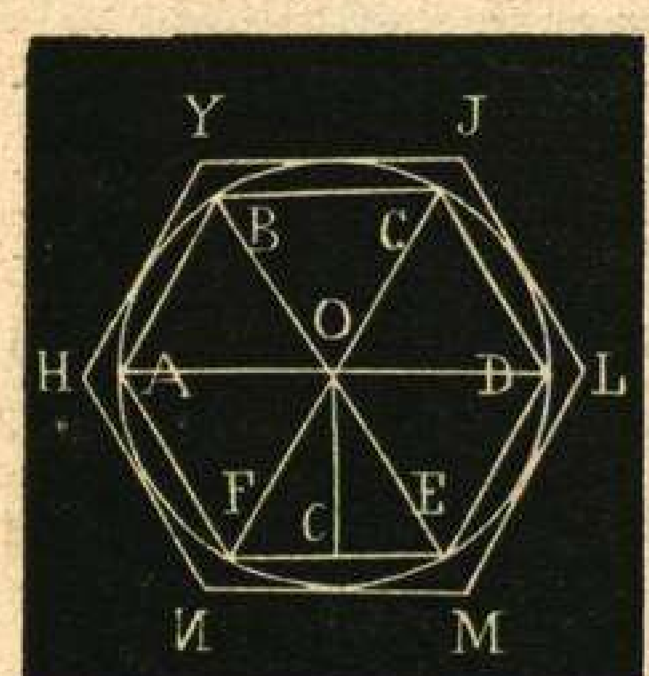
90. Definicion. Un polígono es *regular* cuando tiene todos sus ángulos iguales y todos sus lados tambien iguales.

El polígono adjunto ABCDEFGH es un polígono regular.

Segun esta definicion el *polígono regular de tres lados* es el *triángulo equilátero*, puesto que sabemos que el triángulo equilátero es tambien equiángulo (Teorema XVI, Corol.) El *cuadrilátero regular* es el *cuadrado*.

En general cuando se sabe el número n de los lados de un polígono regular es fácil inferir el valor del ángulo interior A formado por dos lados adyacentes de este polígono, pues estará representado por la expresion

$$A = \frac{n-2}{n} 2R$$



Un polígono ABCDEF está *inscrito* en una circunferencia ó una circunferencia está *circunscrita* á un polígono, cuando todos los lados de este son cuerdas de la circunferencia.

Un polígono HYJLMN esta *circunscrito* á una circunferencia ó una circunferencia está *inscrita* en un polígono, cuando los lados de éste son tangentes á la circunferencia.

91. Teorema LXXII.—*En todo polígono regular las bisectrices de los ángulos interiores concurren en un mismo punto.*

Corolario. *A todo polígono regular se le puede circunscribir una circunferencia, pero no se le puede circunscribir más que una.*

Escolio. El rádio de la circunferencia circunscrita á un polígono regular se llama *rádio de este polígono.*

92. Teorema LXXIII.—*Las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados de un polígono regular se encuentran todas en un mismo punto.*

Corolario. *A todo polígono regular se puede inscribir una circunferencia, pero no se le puede inscribir más que una.*

Escolio. El rádio de la circunferencia inscrita á un polígono regular se llama *apotema* (1) del mismo.

El centro comun de la circunferencia circunscrita al polígono se llama *centro* del mismo.

El ángulo formado por dos rádios que van á parar á los extremos del mismo lado es constante, y su valor es evidentemente igual á $\frac{4R}{n}$, siendo n el número de lados del polígono. Este ángulo se llama *ángulo en el centro* del polígono.

93. Teorema LXXIV.—*Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.—Los rádios y las apotemas de dichos polígonos son proporcionales á sus lados.*

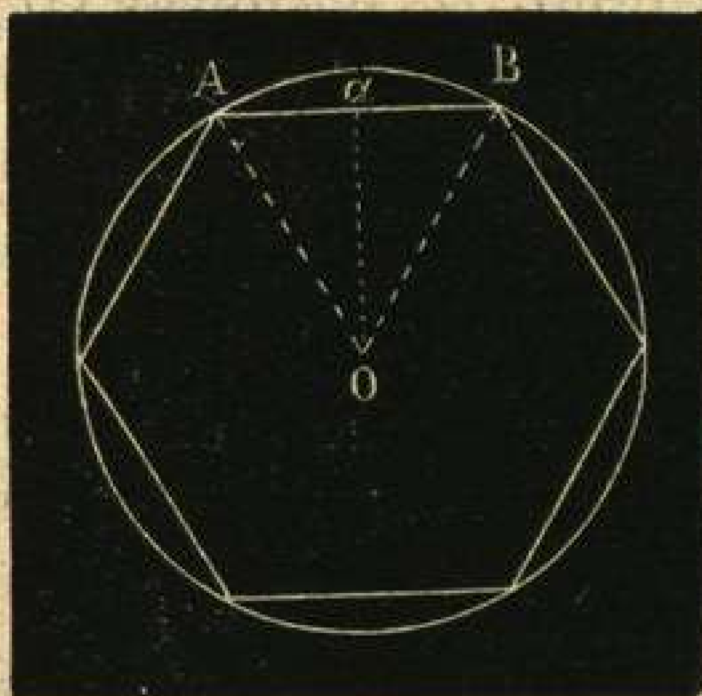
Corolario. Los *perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados son proporcionales á los rádios y á las apotemas.*

Las áreas de dos polígonos regulares son proporcionales á los cuadrados de sus rádios y de sus apotemas.

94. Teorema LXXV.—*El área de un polígono regular es igual á su perímetro multiplicado por la mitad de la apotema.*

---

(1) De las palabras griegas *apo*, lejos de y *tithemi*, poner.



Tracemos la apotema Oa y unamos el centro O con los vértices del polígono, el cual quedará dividido en tantos triángulos iguales como lados tenga; pero como cada uno de ellos tiene por medida $AB\times\frac{Oa}{2}$, todos tendrán la misma superficie. Siendo este polígono un exágono, su área será igual á $6AB\times\frac{Oa}{2}$, ó al perímetro del exágono, 6AB multiplicado por la mitad de la apotema $\frac{Oa}{2}$.

Si en general designamos con P el perímetro de un polígono regular, con a su apotema, y con A su área, tendremos

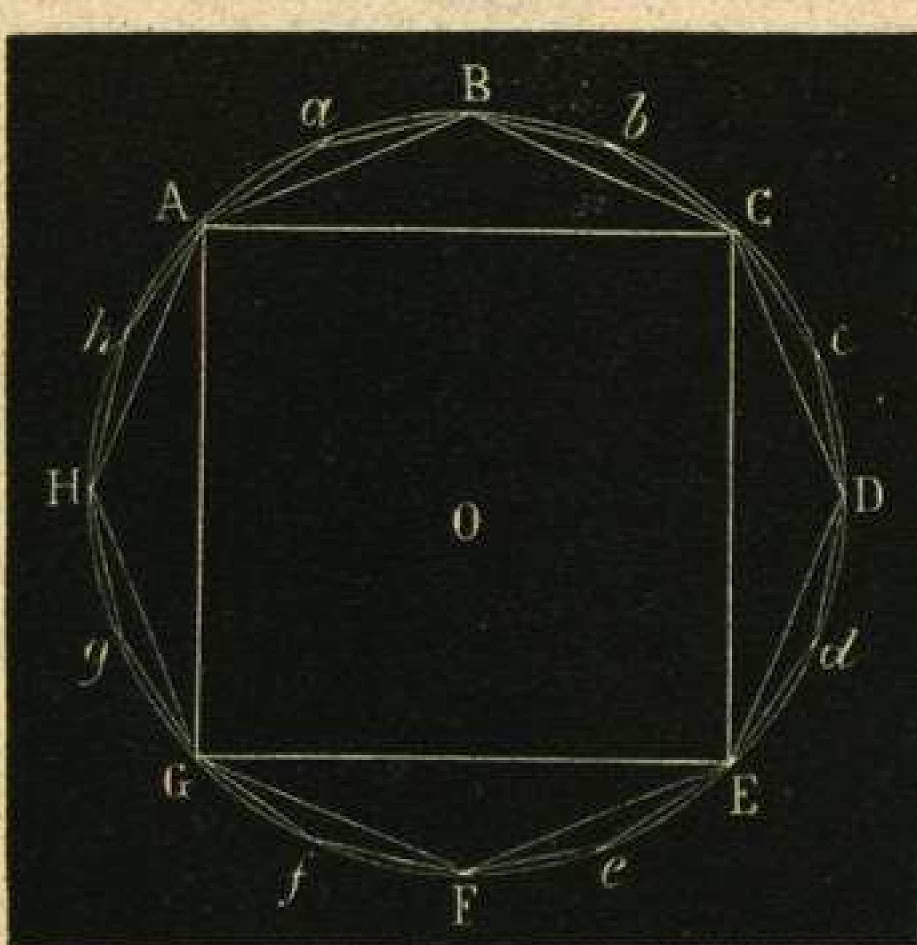
$$A=P\times\frac{a}{2}.$$

95 Teorema LXXVI. *El lado del cuadrado es al rádio del círculo circunscrito como* $\sqrt{2}$ *es á la unidad.*

96. Teorema LXXVII. *El lado del exágono regular es igual al rádio del círculo circunscrito.*

97. Teorema LXXVIII. *El lado del triángulo equilátero es al rádio del círculo circunscrito como* $\sqrt{3}$ *es á 1.*

Medidas de la longitud de la circunferencia y del área del círculo.



98. Preliminares.—Dado un círculo, inscribamos en él un polígono regular de cualquier número de lados, por ejemplo, el cuadrado AGEC; y despues el polígono ABCDEFGH de doble numero de lados; luego el AaBbCc.... de doble número de lados que el anterior; y así sucesivamente.

No hay más que mirar la figura para echar de ver:

1.° *Que el perímetro de cada uno de estos polígonos vá aumentando á medida que se duplica el número de lados, pero que continúa siendo menor que la circunferencia;*

2.° *Que la superficie de los polígonos vá siempre aumentando, pero continúa siendo menor que la del círculo;*

3.° *Que las áreas y los perímetros de estos polígonos tienden á confundirse con el área del círculo y con la circunferencia.*

Segun esto, podremos sustituir el área del círculo y su circunferencia al área y al perímetro de un polígono inscrito de un número de lados suficientemente grande para que la diferencia sea despreciable, y además esta diferencia se podrá hacer tan pequeña como se quiera aumentando el número de lados del polígono

De este modo podemos considerar al círculo como un polígono regular de infinito número de lados, y entonces todas las propiedades de los polígonos regulares, que son independientes del número de lados, podrán aplicarse al círculo.

Así es como los teoremas LXXIV y LXXV nos conducen á los dos siguientes:

99. Teorema LXXIX. 1.° *Las circunferencias son proporcionales á sus rádios.*

2.° *Las áreas de dos círculos son proporcionales á los cuadrados de sus rádios.*

Corolario 1.° *Existe una razon constante entre la circunferencia y el rádio, y por consiguiente entre la circunferencia y su diámetro.*

Corolario 2.° *Existe una razon constante entre el área del círculo y el cuadrado de su rádio*

100. Teorema LXXX. *El área de un círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el rádio.*

Corolario. *La razon del área del círculo al cuadrado del rádio es igual á la razon de su circunferencia al diámetro.*

Escolio. El valor de la razon de la circunferencia al diámetro, segun acabamos de ver, es un número cuyo conocimiento es esencial para la resolucion de todas las cuestiones que conducen á cálculos acerca de la circunferencia ó acerca de un círculo cualquiera.

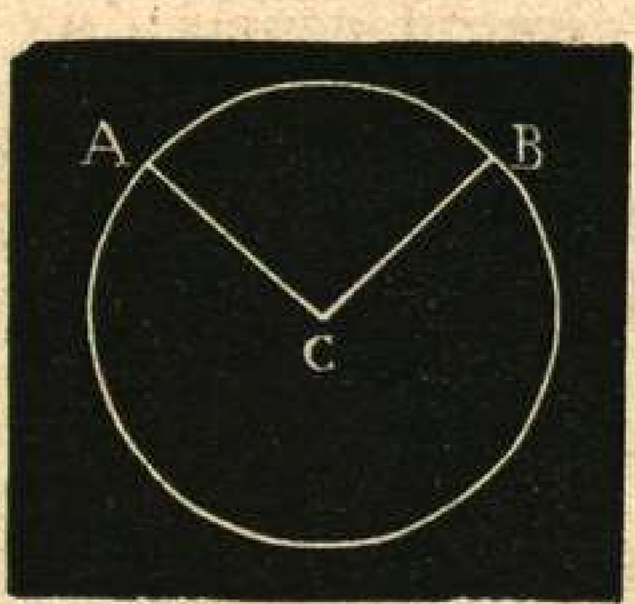
Este número se designa comunmente con la letra griega π (*pi*) (1). Tenemos, pues, por definicion

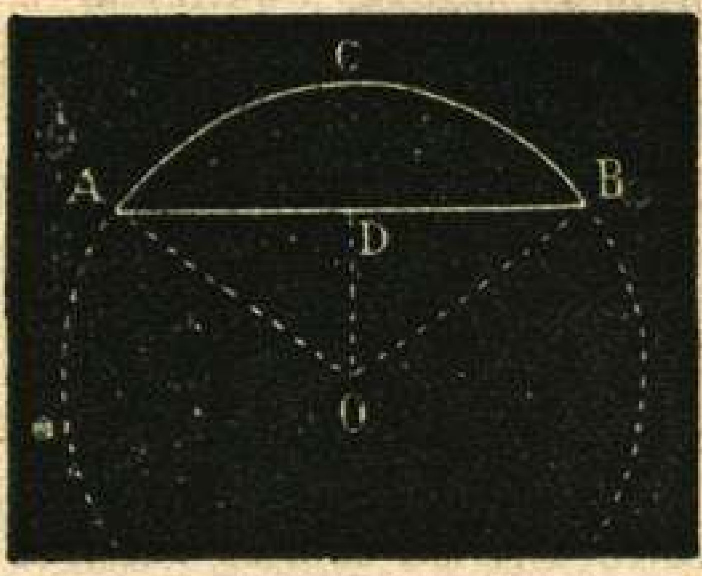
$$\frac{\textit{circunferencia } O}{2r}=\pi,\ \text{de donde } \textit{circunferencia } O=2\pi r,$$

$$\text{y } \textit{círculo } O=\textit{circunf}^{a}\, O\times\frac{r}{2}=2\pi r\times\frac{r}{2}=\pi r \quad . (2)$$

Escolio. El número π es inconmensurable, su valor aproximado es

$$\pi=3{,}141592\ldots..$$





101. TEOREMA LXXXI.—*El área de un sector* ACB *tiene por medida la longitud de su arco* AB *multiplicada por la mitad del rádio.*

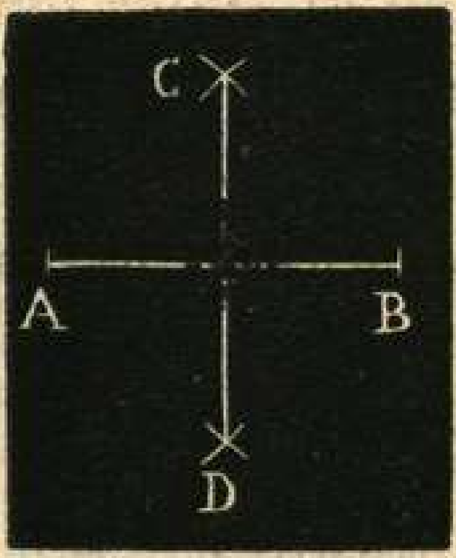
Escolio. El área de un *segmento circular* ACB, es igual la del sector circular correspondiente OABC ménos la del triángulo AOB.

---

(1) La π es la primera letra de la palabra griega *perifereia*, circunferencia.

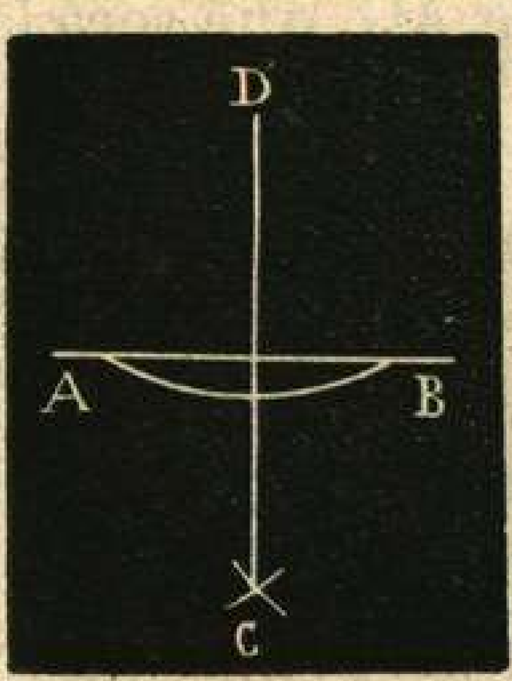
(2) En estas fórmulas r designa el rádio.

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PLANA.

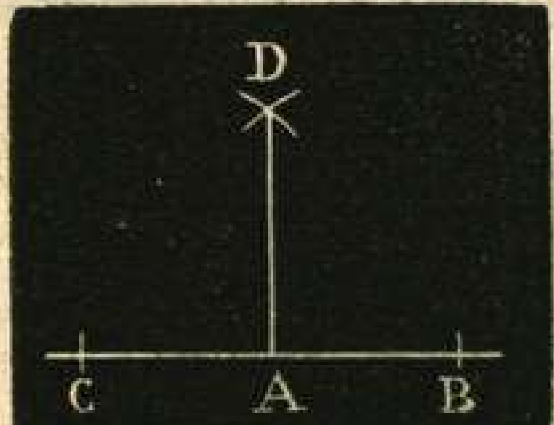


102. Dada una recta AB dividirla en dos partes iguales por medio de una perpendicular. Desde los puntos A y B, como centros, con un mismo rádio, mayor que la mitad de AB, se describen dos arcos que se corten en C, encima de AB; se hace despues la misma construccion por debajo, y CD será la perpendicular pedida.

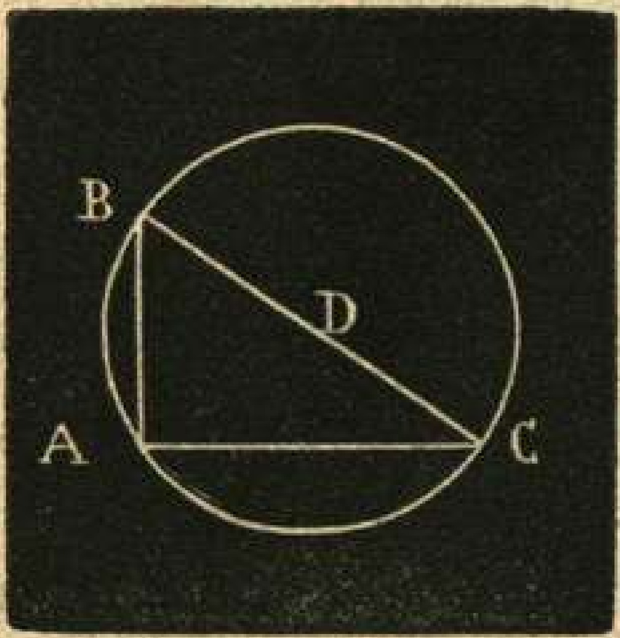
103. Desde un punto D dado fuera de una recta AB bajar una perpendicular á dicha recta. Desde el punto D como centro, se traza una circunferencia que corte á la línea AB en los puntos A y B; desde estos puntos como centros, y con un rádio mayor que la mitad de AB, se describen dos arcos que se corten en C, se unen los puntos D y C, y se tendrá la perpendicular pedida.



104. En un punto A de una recta CB levantar una perpendicular á dicha recta. Tomo sobre la recta dada, á uno y otro lado del punto A, dos partes iguales AB y AC; haciendo centro en los puntos B y C, con un rádio mayor que AB, describo dos arcos, los cuales se cortarán en D; uno dicho punto con A, y la recta DA será la perpendicular pedida.

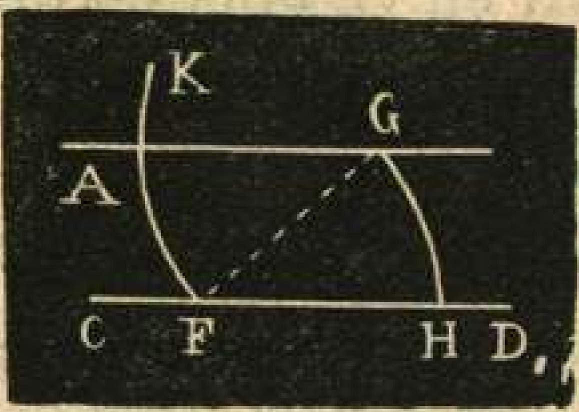


105. Levantar una perpendicular en el extremo A de una recta AC que no se puede prolongar. Trácese una circunferencia que pase por A, y corte á AC en un punto cualquiera C; trácese tambien el diámetro BC y

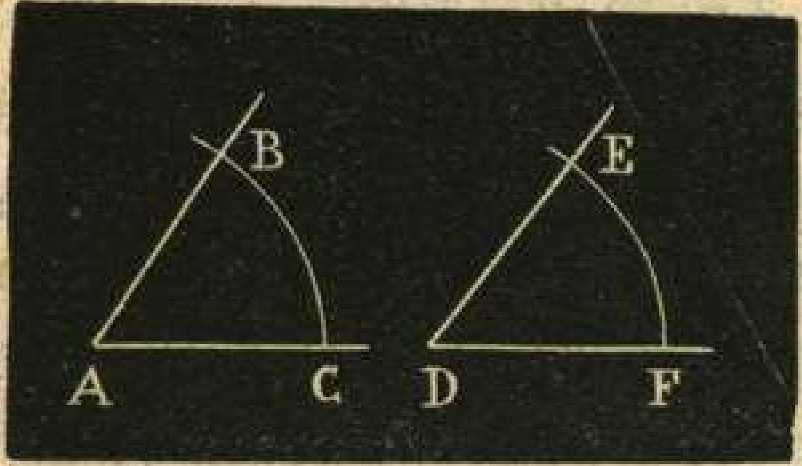


la cuerda AB, la cual será la perpendicular en el extremo A de la recta dada.

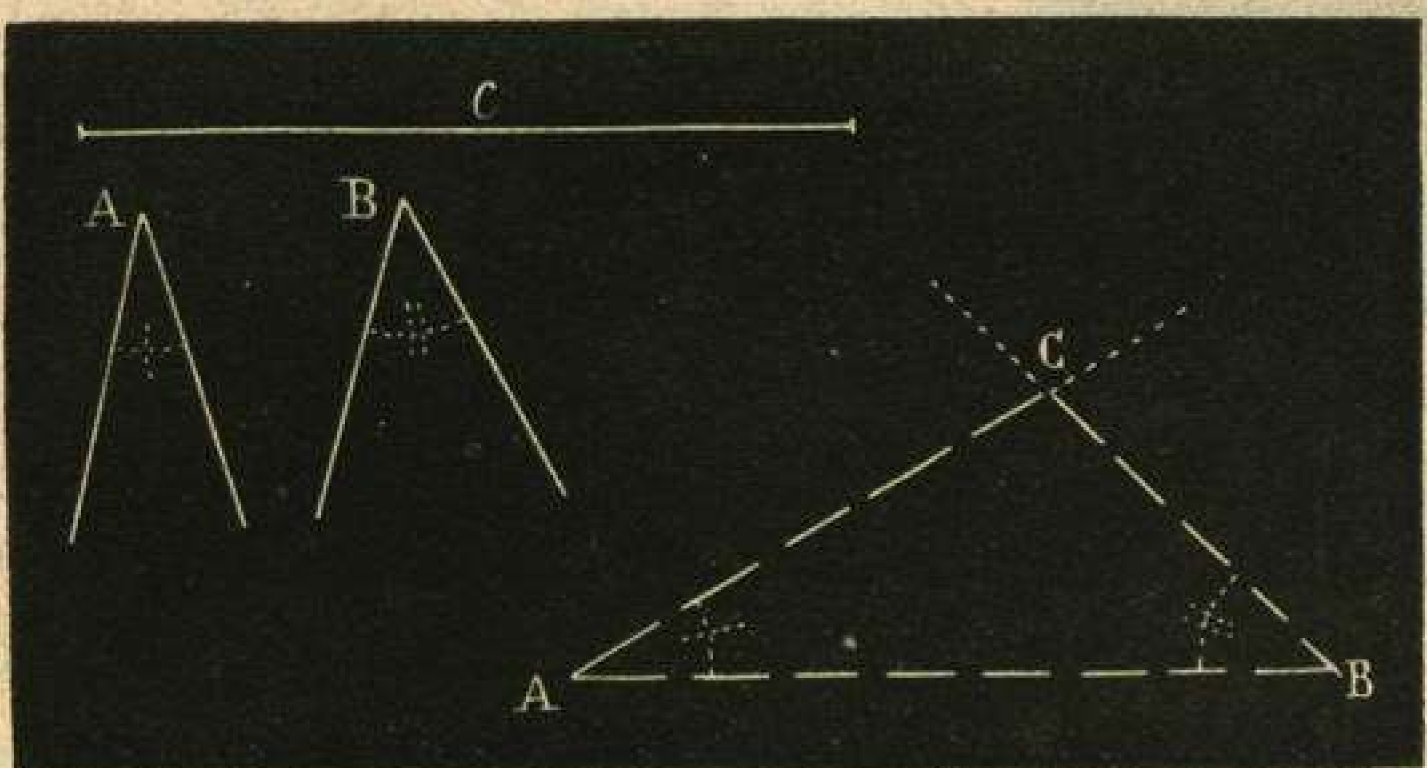
106. Por un punto G fuera de una recta CD tirar una paralela á dicha recta. Desde el punto A como centro y con un rádio bastante grande se traza el arco indefinido FK. Desde el punto F como centro, y con el mismo rádio, se describe el arco GH, y tomando AF=GH, se traza la AG, que será la paralela pedida.



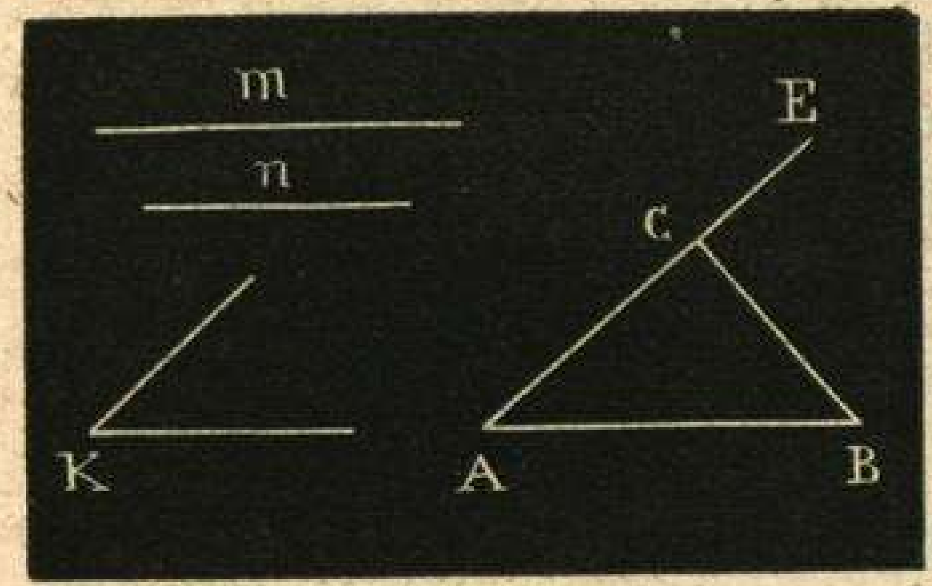
107. Por un punto D dado en una recta DF formar con ella otro igual á un ángulo dado A. Desde el punto F como centro, y con un rádio bastante grande, se describe el arco indefinido FE, sobre el cual se toma el arco BC á partir del punto F. Se determina así el punto E, y tirando la DE, se tiene el ángulo D=A.



108. Construir un triángulo dados un lado C y dos

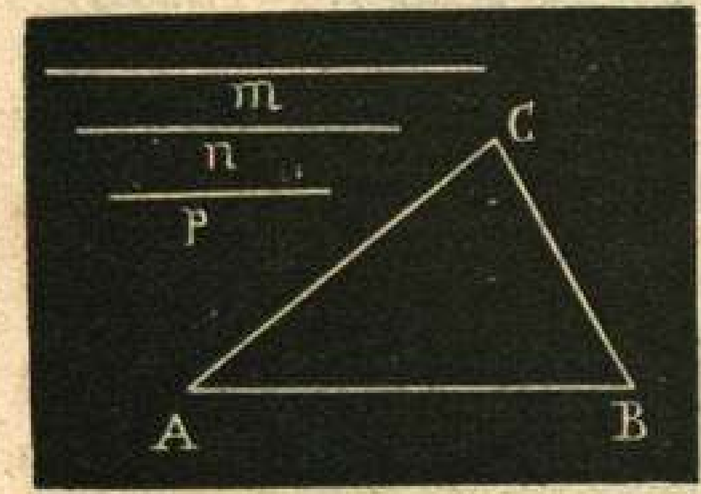


Ángulos AB. En los extremos de la recta AB=C se construyen dos ángulos A y B respectivamente iguales á los dados, y el triángulo ABC será el pedido.

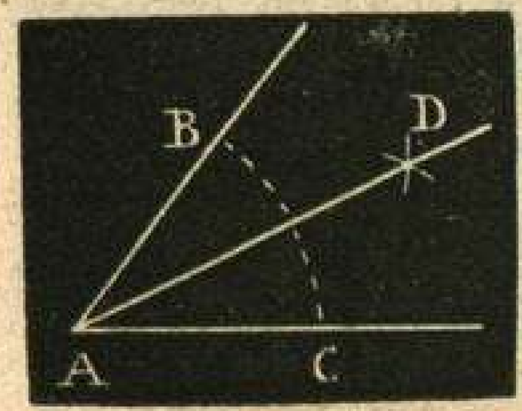


109. Construir un triángulo dados dos lados *m* y *n* y el ángulo comprendido K. En el extremo A de una recta AB=*m* se construye un ángulo A=K, se toma sobre la recta AE una parte AC=*n*, se tira la AC, y el triángulo ABC será el pedido.

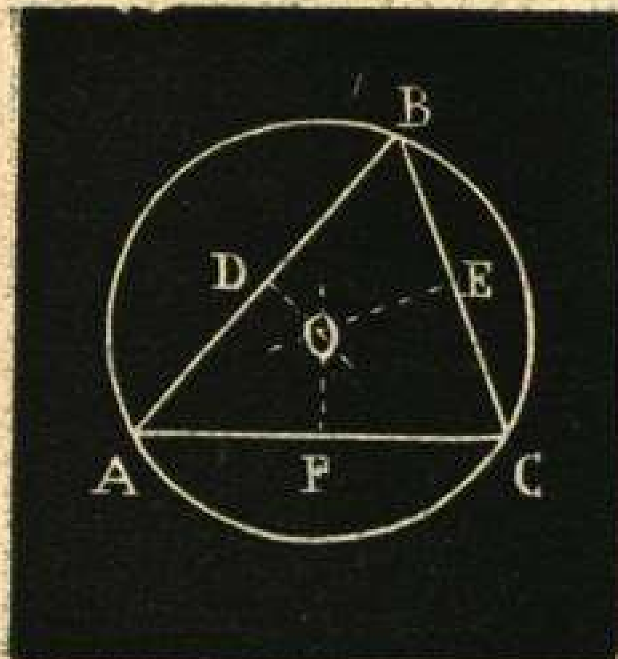
110. Construir un triángulo dados los tres lados *m*, *n* y *p*. Haciendo centro en los extremos de una recta AB=*m*, se describen dos arcos con dos rádios iguales á *n* y *p*; se trazan, desde el punto C de interseccion de estos dos arcos, las rectas CA y CB, y el triángulo ABC será el pedido.



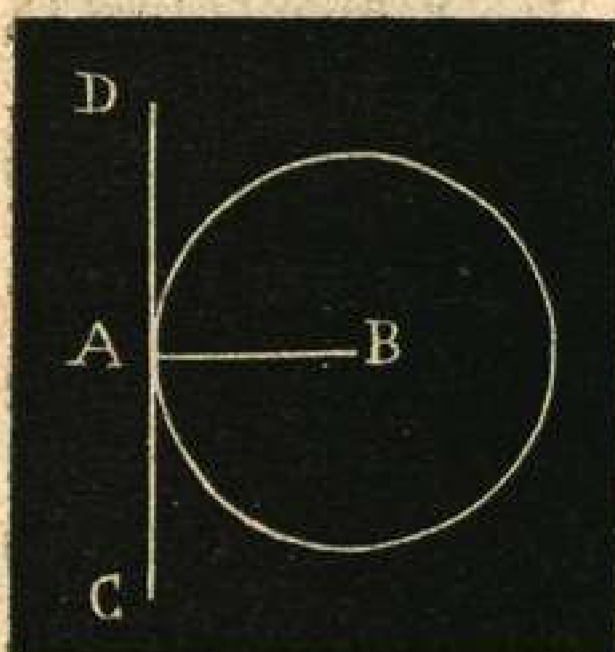
111. Dividir un ángulo A en dos partes iguales. Desde el vértice A del ángulo, con un rádio cualquiera, se describe un arco BC, y desde los puntos B y C, con un rádio mayor que la mitad de la cuerda del arco BA, se describen dos arcos, se une el punto de interseccion D con el vértice A, la AD será la bisectriz, y por consiguiente, el ángulo quedará dividido en dos partes iguales.



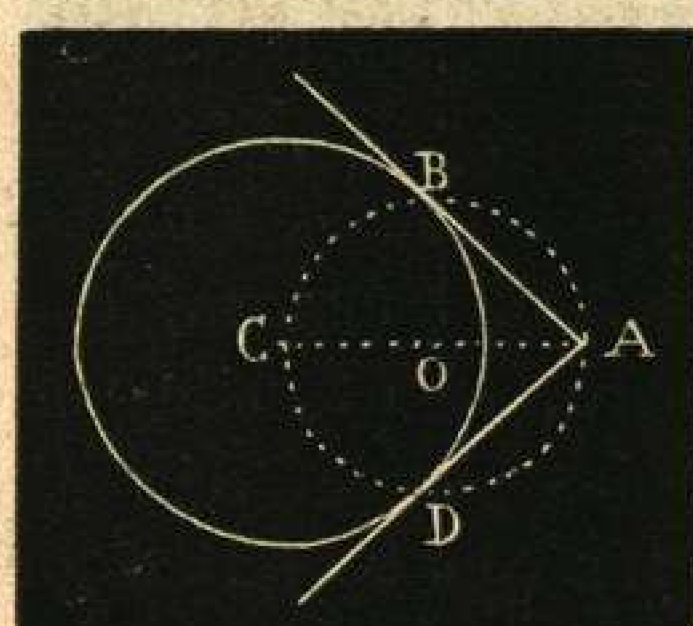
112. Dado un círculo ó un arco hallar su centro. Elegidos tres puntos en dicho arco ó circunferencia se unen con dos cuerdas, y la interseccion de las perpendiculares á estas cuerdas en su punto medio será el centro pedido.



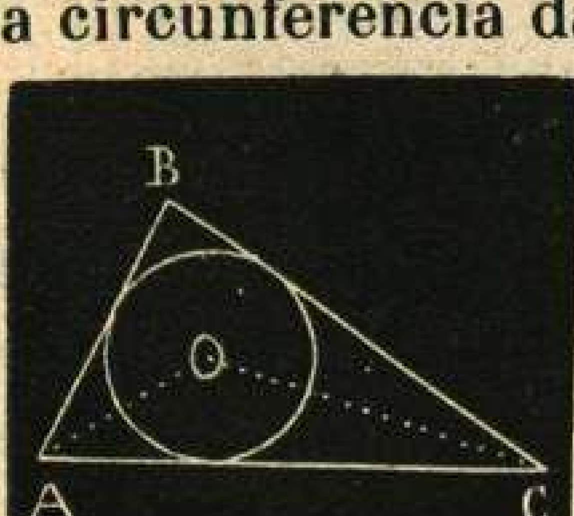
113. Trazar una circunferencia que pase por los vértices del triángulo ABC. En los puntos medios de los lados AB y AC se levantan perpendiculares, y haciendo centro en el punto de interseccion O, se describe con un rádio OA una circunferencia, que pasará por los tres vértices.



114. Por un punto A dado en una circunferencia B trazar una tangente á dicha circunferencia. Trácese el rádio BA al punto de tangencia, y la recta CD, perpendicular á BA en el punto A, será la tangente pedida.

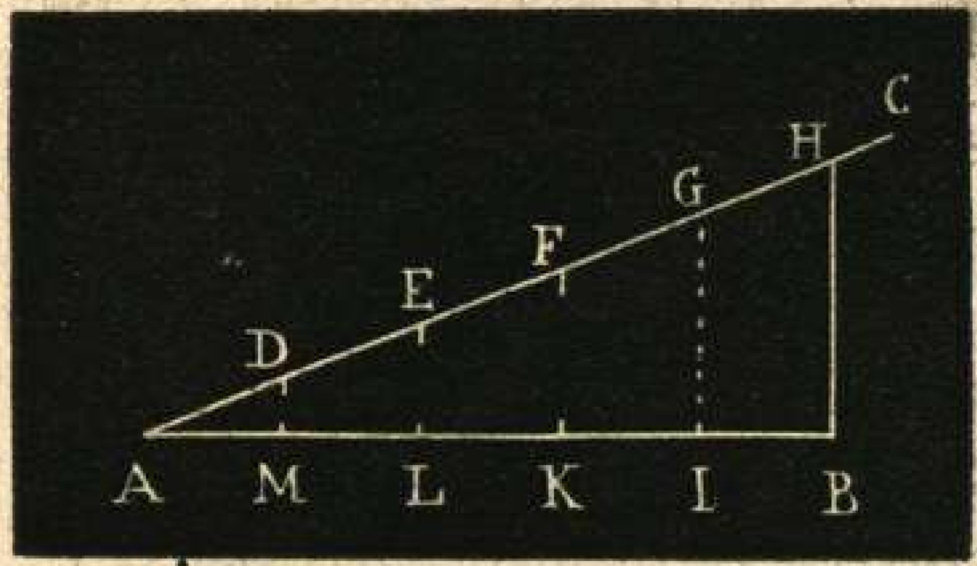


115. Por un punto A fuera de un círculo trazar una tangente á la circunferencia. Únanse los puntos C y A por medio de la recta CA, trácese sobre esta recta, como diámetro, una circunferencia, únanse los puntos de interseccion B y D con el punto dado A, y las rectas BA y AD serán tangentes á la circunferencia dada.

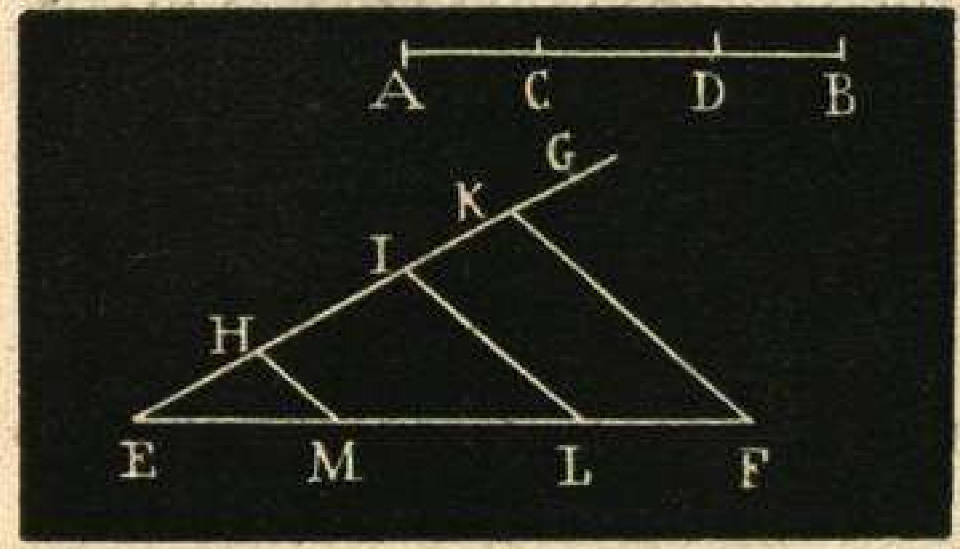


116. Trazar una circunferencia á la que sean tangentes los tres lados del triángulo ABC. Trácense las bisectrices de los ángulos A y C, las cuales se encontrarán en el punto O, centro de la circunferencia pedida, la cual tendrá por rádio la perpendicular bajada desde O á cualquiera de los lados.

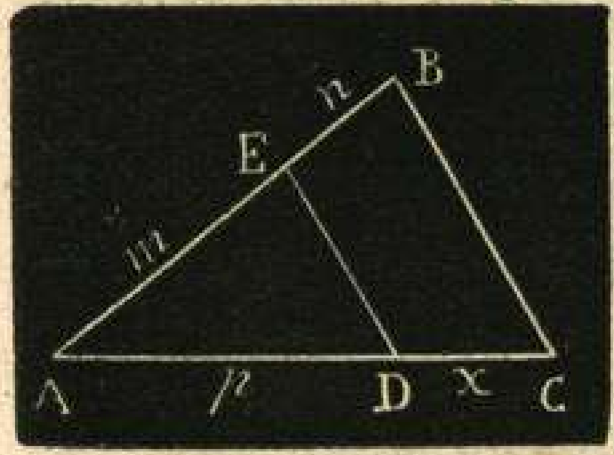
117. DIVIDIR UNA RECTA AB EN CUALQUIER NÚMERO DE PARTES IGUALES, POR EJEMPLO, EN CINCO. Trácese por uno de los extremos de la recta AB otra indefinida AC, tómense en esta partes iguales, á partir desde el extremo comun A, y uniendo los puntos H y B, y trazando por los demás D, E, F, G, paralelas á HB, quedará dividida la recta dada en cinco partes iguales.

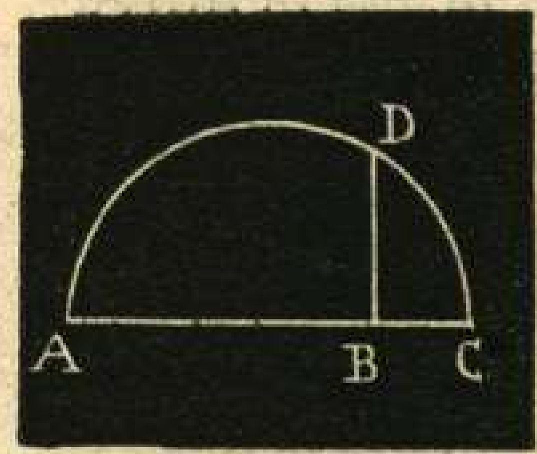


118. DIVIDIR UNA RECTA EF EN PARTES PROPORCIONALES Á LAS DE OTRA RECTA AB. Trácese por uno de los extremos de la recta EF la indefinida EG; tómense en esta las partes EH, HI, IK, iguales respectivamente á las AC, CD, DB; tírese la KF, y por los puntos I, H, las paralelas IL, HM á la KF; y las partes EM, ML, LF en que ha sido dividida la EF, serán proporcionales á las EH, HI, IK.

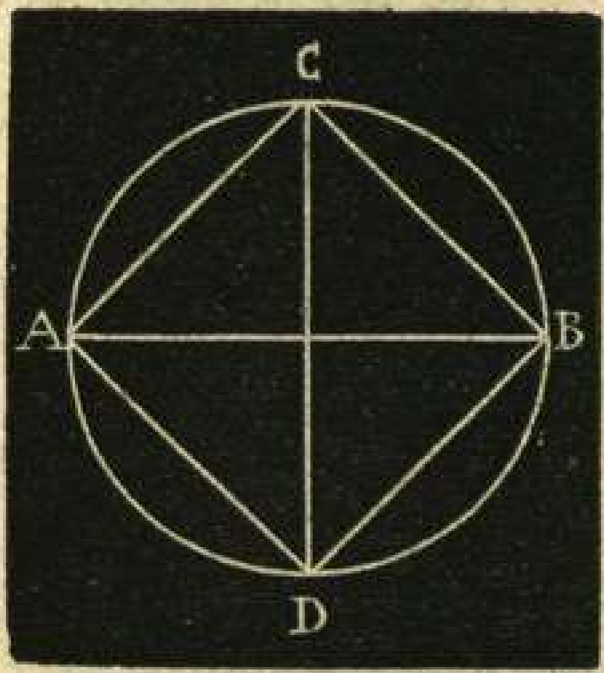


119. HALLAR UNA CUARTA PROPORCIONAL Á TRES RECTAS DADAS m, n, p. Tómense en uno de los lados de un ángulo cualquiera A, los dos primeros términos de la proporcion, es decir, $AE=m$, y $EB=n$, tómese igualmente en el otro lado el tercer término $AD=p$, y trazando la recta ED, y por B la paralela BC, tendremos DC, que es la x, cuarta proporcional pedida.

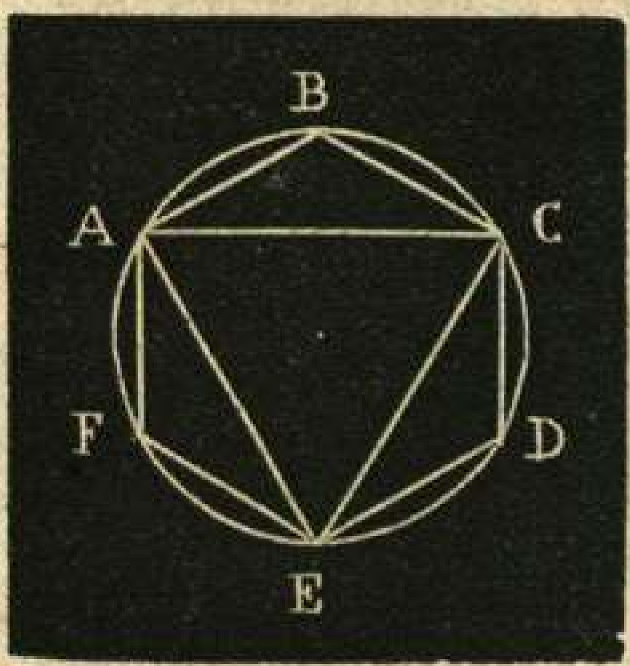




120. Hallar una média proporcional entre dos rectas dadas *m* y *n*. Trazando sobre la BC, igual á *m* y *n*, media circunferencia, la perpendicular BD, levantada en el punto comun B, será la media proporcional.

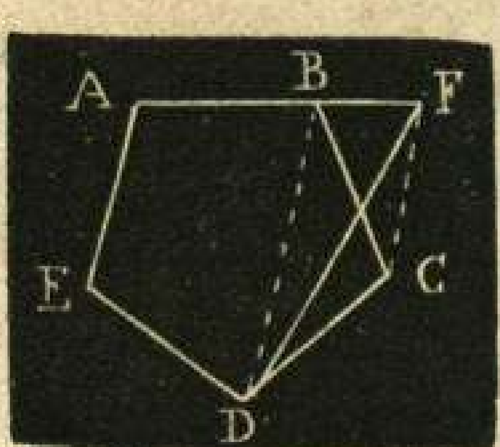


121. Inscribir un cuadrado en un círculo. Trácense dos diámetros perpendiculares AB y CD, únanse sus extremos, y la figura resultante ACBD es un cuadrado inscrito.



122. Inscribir en un círculo un exágono regular y un triángulo equilátero. Llévese el rádio como cuerda sobre la circunferencia, y esta quedará dividida en seis arcos iguales AB, BC, etc., tirando las cuerdas de los seis arcos se tendrá el exágono regular inscrito ABCDEF. Tírense las cuerdas AC, CE, EA de los arcos duplos, y se tendrá el triángulo equilátero inscrito ACE.

123. Reducir un polígono ABCDE á otro equivalente que tenga un lado ménos. Por los extremos B y D de dos lados adyacentes BC y CD, trácese la diagonal BD, prolónguese la AB, tírese por C una paralela á la diagonal, únase el punto F con D, y se tendrá el polígono AFDE equivalente al propuesto y de un lado ménos.



124. Reducir un triángulo á cuadrado equivalente. Hállese una media proporcional entre la base y la mitad de la altura, y constrúyase sobre ella un cuadrado.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

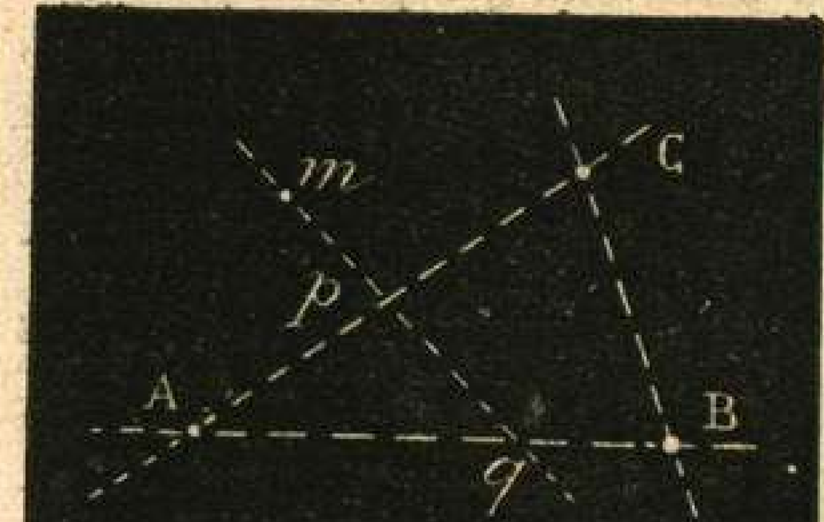
LIBRO PRIMERO.

Introduccion.

125. Teorema LXXXII.—*Una recta que tiene más de un punto comun con un plano está toda ella en el plano.*

Supongamos, en efecto, que una recta tenga dos puntos A y B, comunes con un plano P; y para abreviar, llamemos D á esta recta, digo que toda ella está contenida en el plano. Siendo el plano una superficie tal que se puede aplicar á ella una recta en todos sentidos, habrá siempre en el plano P una recta que pase por los dos puntos A y B, la cual coincidirá con la recta D, pues dos rectas que tienen dos puntos comunes coinciden. La recta D está, pues, situada toda entera en el plano P, con el cual tiene dos puntos comunes.

126. Teorema LXXXIII.—*Tres puntos, que no están en línea recta, determinan la posicion de un plano; ó lo que es igual, por tres puntos, que no están en línea recta, puede pasar un plano y no puede pasar más que un solo plano.*



1.° Sean los tres puntos A, B y C. Digo que por estos tres puntos se puede siempre hacer pasar un plano; en efecto, siempre se puede concebir que tomando un plano se le haga pasar desde luego por dos de estos puntos, por ejemplo A y B, y despues haciéndole girar alrededor de AB en el espacio, se le den diversas posiciones hasta que pase por el punto C.

Hagamos notar ademas que, segun el teorema anterior, todo plano que pase por los tres puntos A, B y C contendrá las tres rectas AB, AC y BC.

2.° Esto supuesto, digo que dos planos no pueden pasar por los mismos tres puntos sin confundirse uno con otro, para lo cual vamos á demostrar, que si se conciben dos planos que pasen por estos tres puntos A, B y C, todo punto *m* tomado en uno de ellos pertenecerá tambien al otro. En efecto, si en el plano en que hemos supuesto que tomábamos el punto *m*, trazamos una recta que corte en *p* y en *q* á las dos rectas AB y AC, por ejemplo, la recta *pq* estará toda ella en cada uno de los dos planos, pues segun la observacion precedente, los puntos *p* y *q* pertenecen á los dos planos, por ser puntos de las rectas AB y AC. Ahora bien, hallándose toda la recta *pq* en cada uno de los dos planos, debe suceder lo mismo con el punto *m* que forma parte de ella.

Corolario 1.º *Una recta y un punto situado fuera de ella determinan la posicion de un plano.*

Corolario 2.º *Dos rectas que se cortan determinan la posicion de un plano.*

Corolario 3.º *Dos rectas paralelas determinan la posicion de un plano.*

Corolario 4.º *Por un punto dado en el espacio no se puede trazar más que una sola paralela á una recta dada.*

127. TEOREMA LXXXIV.—*La interseccion de dos planos es una línea recta.*

Rectas y planos perpendiculares.

128. DEFINICIONES.—Cuando una recta corta á un plano, el punto de interseccion se llama *pié* de la recta en el plano.

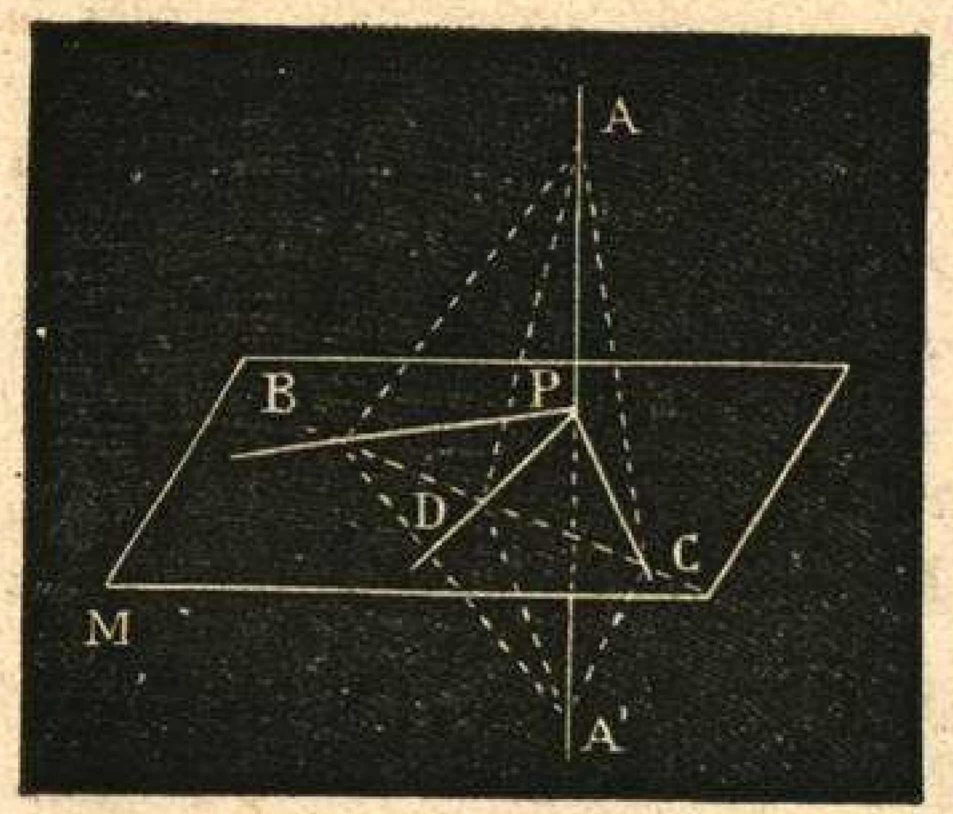
Una recta se llama *perpendicular á un plano*, cuando es perpendicular á todas las rectas que pasan por su pié en dicho plano.

Cuando una *recta* es *perpendicular á un plano*, recíprocamente *el plano* se dice *que es perpendicular á la recta*.

Toda recta que no es perpendicular á un plano y que tampoco está contenida en él, se dice que es *oblícua al plano*, y recíprocamente se dice que el plano es oblícuo á la recta.

129. TEOREMA LXXXV.—*Si una recta es perpendicular á otras dos que pasan por su pié en un plano, es per-*

pendicular á otra cualquiera recta que pase por su pié en dicho plano, y por consiguiente es perpendicular al mismo.



Sea AP una recta perpendicular á otras dos PB y PC, que pasan por su pié en el plano MN. Digo que es tambien perpendicular á cualquiera recta PD que pase por su pié en el mismo plano.

Para demostrarlo, tracemos una recta BC que corte á las tres líneas PB, PD y PC; prolonguemos la AP hácia el otro lado del plano, y tomemos en su prolongacion la parte PA'=PA. Hecho esto, unamos los puntos A A' con los puntos B, D y C. Siendo por construccion P el punto medio de la recta AA', y siendo por hipótesis PB perpendicular á AP, tendremos AB=A'B (Teor. VIII); y por igual razon AC=A'C.

De lo cual resulta que los dos triángulos ABC y A'BC son iguales por tener sus lados respectivamente iguales. Los triángulos ABD y A'BD son tambien iguales por tener dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido; luego AD=A'D.

La recta PD tiene, pues, dos puntos P y D equidistantes de los puntos A y A', luego es perpendicular á la recta AA' en su punto medio; luego recíprocamente AP es perpendicular á la recta PD, la cual ha sido trazada por su pié en el plano MN.

130. Teorema LXXXVI.—*Por un punto dado en una recta,*

1.° *Se puede hacer pasar un plano perpendicular á dicha recta,*

y 2.° *No se puede hacer pasar más que uno.*

Corolario 1.° *Todas las perpendiculares que se pueden levantar á una recta en un punto dado en ella están contenidas en un mismo plano, que es el plano perpendicular á esta recta en dicho punto.*

Corolario 2.° *El plano perpendicular en el punto medio de una recta es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos de dicha recta.*

131. Teorema LXXXVII.—*Por un punto dado fuera de una recta,*

1.° *Se puede hacer pasar siempre un plano perpendicular á dicha recta,*

y 2.° *No se puede hacer pasar más que uno.*

132 Teorema LXXXVIII.—*En un punto dado en un plano,*

1.° *Se puede levantar una perpendicular á dicho plano,*

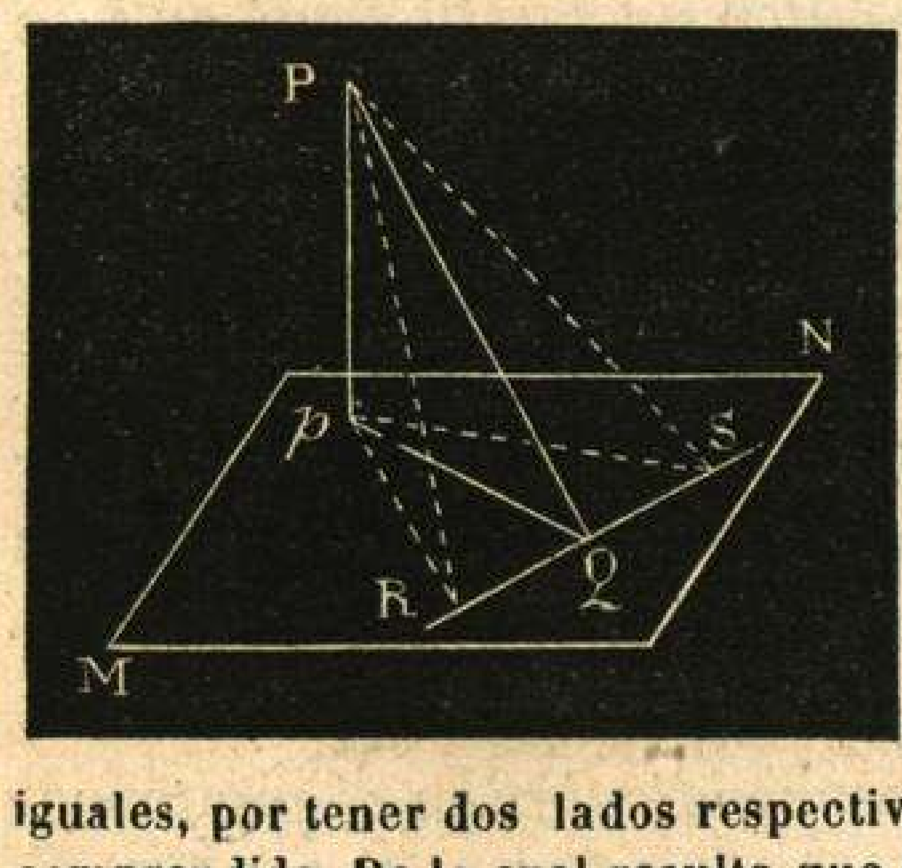
y 2.° *No se puede levantar más que una.*

133. Teorema LXXXIX.—*Desde un punto dado fuera de un plano,*

1.° *Se puede bajar siempre una perpendicular á dicho plano,*

y 2.° *No se puede bajar más que una.*

134. Teorema XC.—(Llamado tambien *teorema de las tres perpendiculares.*) *Si desde un punto P tomado fuera de un plano se baja á dicho plano la perpendicular Pp y una oblícua PQ, se une el pié de la perpendicular con el de la oblícua, y despues se traza en el plano y por el pié Q de la oblícua una perpendicular RS á la línea de union Qp, esta recta RS es perpendicular á la oblícua.*



Para demostrarlo, tomemos en la recta RS dos puntos R y S equidistantes del punto Q, y unámoslos á los dos puntos P y *p*.

Siendo por construccion la RS perpendicular á la *p*Q, las longitudes *p*R y *p*S serán iguales. Ademas, como la línea P*p* es por hipótesis perpendicular al plano MN, los ángulos P*p*R y P*p*S son iguales por ser rectos, y los dos triángulos P*p*R y P*p*S son tambien iguales, por tener dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido. De lo cual resulta que el punto P equidista de los puntos R y S; luego la recta PQ es perpendicular á la RS en su punto medio; luego recíprocamente RS es perpendicular á la PQ

De la perpendicular y de las oblícuas trazadas desde un punto á un plano.

135. TEOREMA XCI.—*Si desde un punto dado fuera de un plano se bajan á dicho plano una perpendicular y varias oblícuas;*

1.° *La perpendicular es más corta que cualquiera oblícua;*

2.° *Las oblícuas, cuyos piés equidistan del pié de la perpendicular son iguales;*

3.° *De las oblícuas, cuyos piés no equidistan del de la perpendicular, aquella que más dista es la mayor.*

Escolio I. De este teorema resulta que desde un mismo punto se pueden bajar á un plano una infinidad de oblícuas iguales, y que los piés de todas estas oblícuas están situados en una circunferencia, que tiene por centro el pié de la perpendicular bajada desde dicho punto al plano.

Escolio II. Siendo la perpendicular la línea más corta que puede trazarse desde un punto á un plano, se toma como medida de la *distancia del punto al plano.*

Paralelismo de las rectas y de los planos.

136. DEFINICIONES.—Dos planos se llaman *paralelos* cuando no se encuentran por más que se prolonguen.

Segun esta definicion es evidente que:

Si dos planos son paralelos toda recta trazada en uno de ellos es paralela al otro.

137. TEOREMA XCII.—*Cuando dos rectas son paralelas, si una de ellas es perpendicular á un plano, la otra lo es tambien.*

Recíproco. *Dos rectas perpendiculares á un mismo plano son paralelas entre sí.*

Corolario. *Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí.*

138. TEOREMA XCIII.—*Si dos rectas son paralelas, todo plano trazado en la direccion de una de ellas es paralelo al otro.*

Escolio. *Cuando dos rectas son paralelas se puede hacer pasar por cada una de ellas una infinidad de planos paralelos á la otra.*

1er. Recíproco. *Todo plano trazado en la direccion de una recta paralela á un plano corta á éste en una línea paralela á dicha recta.*

2.° Recíproco. *Dada una recta y un plano paralelos, si por un punto del plano se traza una paralela á la recta, la paralela estará toda ella en el plano.*

Corolario 1.° *La interseccion de dos planos que pasan por dos rectas paralelas entre sí es paralela á estas dos rectas.*

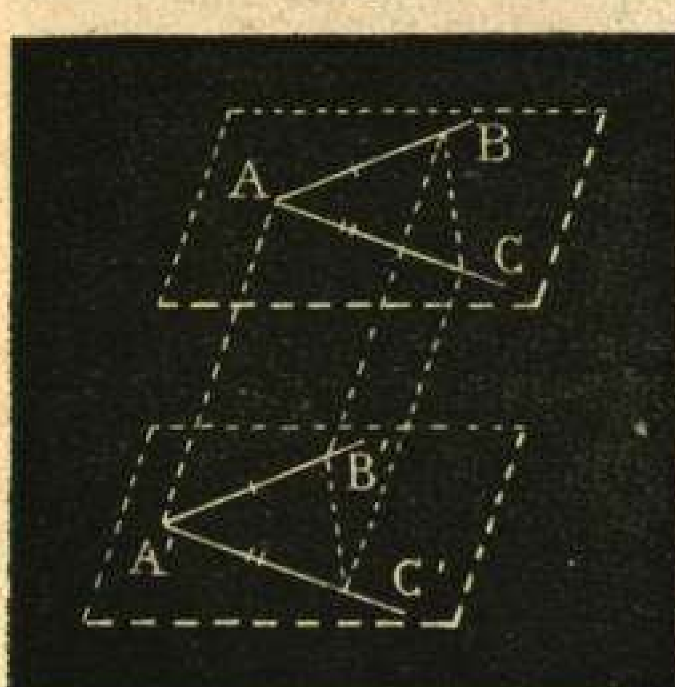
Corolario 2.° *Una recta paralela á dos planos que se cortan es paralela á su interseccion.*

Corolario 3.° *Cuando dos rectas son paralelas, todo plano que corta á la una corta tambien á la otra.*

139. TEOREMA XCIV.—*Si dos ángulos BAC y B'A'C', no situados en un mismo plano, tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido,*

1.° *Estos ángulos son iguales.*

2.° *Sus planos son paralelos.*



1.° Los ángulos BAC y B'A'C' son iguales.

Tomemos AC=A'B', y AC=A'C' y despues tracemos las rectas AA',BB', CC', BC y B'C'.

El cuadrilátero AA'B'B, que tiene sus dos lados AB y A'B' iguales y paralelos, es un paralelógramo; luego el lado AA' es igual y paralelo al lado BB'; por la misma razon la recta CC' es igual y paralela á AA'. Las dos líneas BB' y CC' son pues iguales y paralelas y BB'C'C es un paralelógramo.

De lo cual resulta que BC=B'C' y que por consiguiente los dos triángulos ABC y A'B'C' son iguales, por tener sus lados respectivamente iguales. De lo que se infiere la igualdad de los ángulos BAC y B'A'C'.

2.º Los planos de estos ángulos son paralelos.

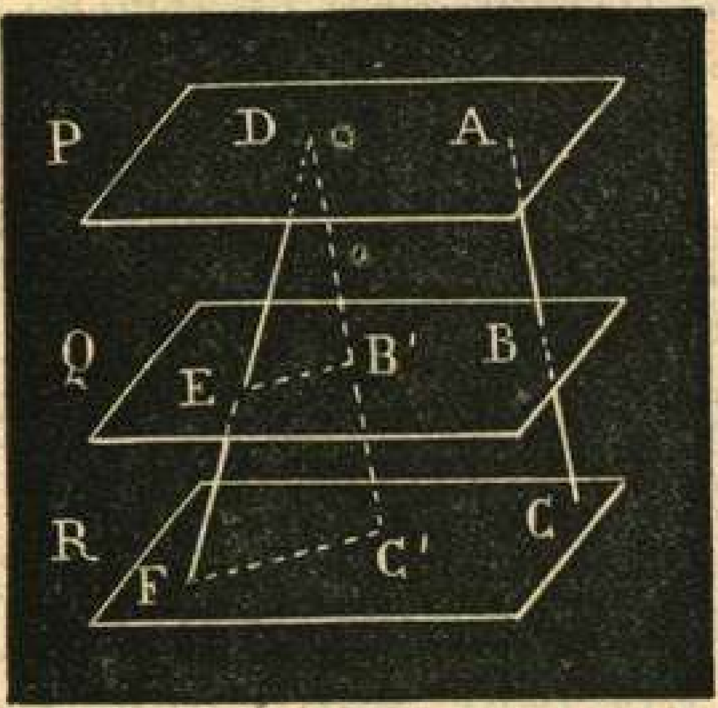
En efecto, si estos planos no fuesen paralelos, su interseccion debería ser paralela á la vez á las dos rectas AB y AC (Teor. XCIII, Recip. 1.º) lo cual es imposible.

140. Teorema XCV.—*Una recta y un plano perpendiculares á una misma recta son paralelos.*

141. Teorema XCVI.—*Dos planos perpendiculares á una misma recta son paralelos entre sí.*

Interseccion de las rectas y de los planos paralelos.

142. Teorema XCVII.—*Si á dos planos paralelos corta un tercer plano, las intersecciones son paralelas.*



143. Teorema XCVIII.—*Las partes de paralelas comprendidas entre planos paralelos son iguales.*

144. Teorema XCIX.-*Si tres planos paralelos cortan á dos rectas cualesquiera, las dividen en segmentos proporcionales.*

Sean las dos rectas AC y DF cortadas por tres planos paralelos P, Q y R, digo que entre los segmentos de las rectas, tendremos la proporcion

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

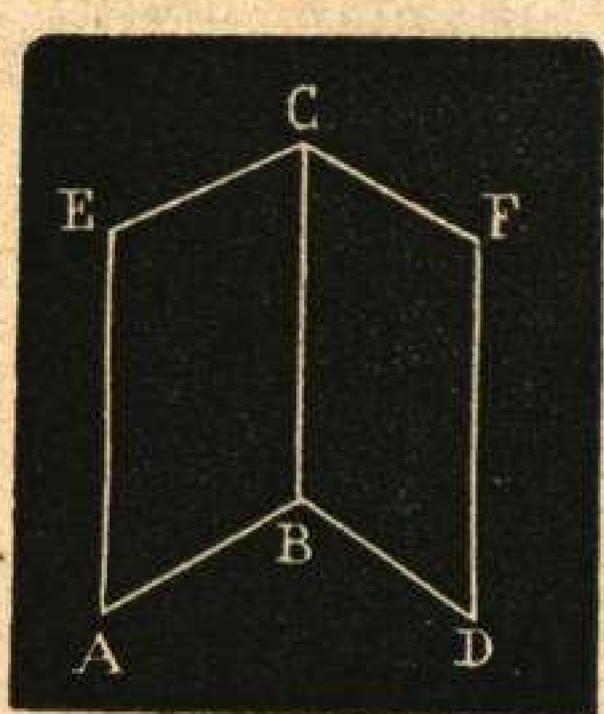
Tracemos por el punto D una paralela á la AC que cortará á los planos Q y R en los puntos B' y C' Segun el teorema anterior, tendremos

$$DB'=AB \quad y \quad B'C'=BC.$$

Pero las dos rectas DF y DC' determinan un plano que corta á los dos planos paralelos Q y R en la direccion de las dos rectas EB' y FC, que son paralelas (Teor. XCVII), y entonces el triángulo DFC' da la proporcion

$$\frac{DB'}{B'C'}=\frac{DE}{EF} \quad \text{de donde resulta} \quad \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

De los ángulos formados por los planos.

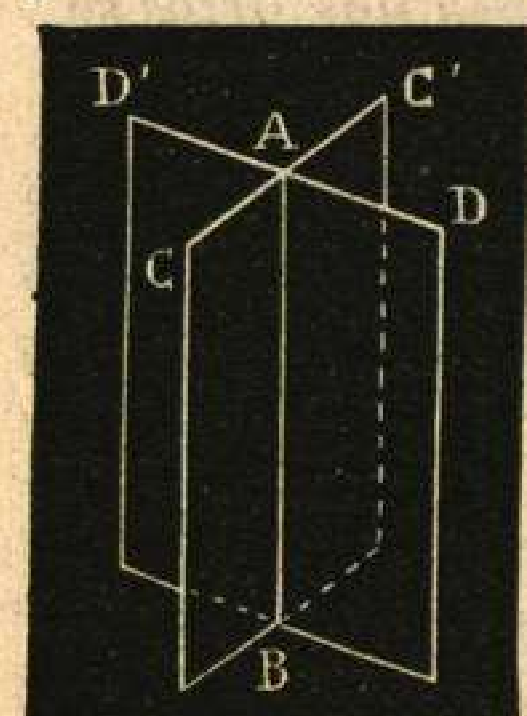


145. Definiciones.—Se llama *ángulo diedro* (1) (ó más brevemente *diedro*) la figura formada por dos planos ABC y DBC, que se cortan, suponiendo á cada uno de ellos limitados en un sentido por su interseccion BC.

Estos planos se llaman *caras* del ángulo diedro, y su interseccion recibe el nombre de *arista* (2).

Un libro entreabierto presenta la imágen de un diedro.

Un ángulo diedro se designa de dos modos, ó bien con las dos letras de la arista CB, ó bien con cuatro letras, una de cada cara y dos de la arista, cuidando de poner enmedio estas últimas del modo siguiente: ABCD.



Cuando dos planos se cortan y se consideran prolongados por su interseccion se vé que forman cuatro ángulos diedros.

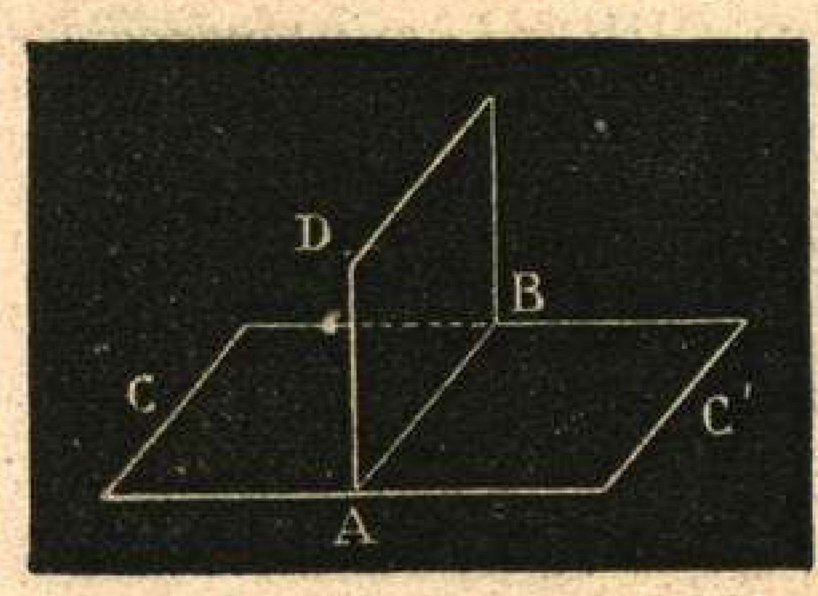
Los dos diedros DABC′ y CABD′ que las caras del uno son prolongacion de las caras del otro se llaman *opuestos por la arista.*

Dos diedros CABD y CABD′ que tienen la arista AB y una cara CB comun y que las otras dos caras BD y BD′ son un mismo plano se llaman *adyacentes.*

Se llama *plano bisector* (3) de un ángulo diedro un

(1) De las palabras griegas *dis*, dos y *edra*, base.
(2) De la palabra latina *arista*, arista, punta de la espiga.
(3) De las dos palabras latinas *bis*, en dos partes y *sector*, el que corta.

plano que trazado por la arista de este diedro le divide en otros dos diedros iguales (1).



Cuando un plano ABD corta á otro CBC′ formando dos ángulos diedros adyacentes CABD y C′ABD iguales, se dice que el primer plano es perpendicular al segundo. Cada uno de los ángulos diedros así formados se llama *diedro recto.*

146. Teorema C.—*Por una recta dada en un plano no se puede levantar más que un solo plano perpendicular al primero.*

Corolario. *Todos los diedros rectos son iguales.*

Un diedro es *obtuso* ó *agudo* segun que es mayor ó menor que un recto. Dos ángulos diedros son *suplementarios* cuando su suma es igual á dos ángulos rectos; y *complementarios*, cuando juntos valen un recto.

147. Teorema CI.—*La suma de los ángulos diedros adyacentes es igual á dos rectos.*

Corolario 1.° *Si un diedro es recto, el diedro adyacente tambien lo es.*

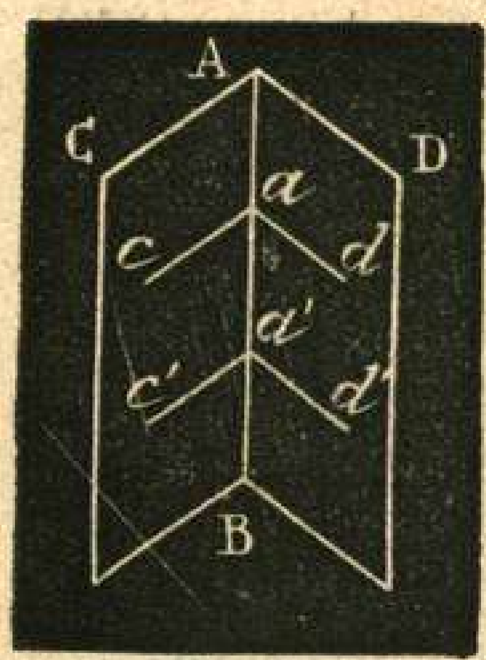
Corolario 2.° *Si un plano es perpendicular á otro, recíprocamente el segundo lo es al primero.*

Corolario 3.° *La suma de todos los ángulos diedros consecutivos formados hácia un mismo lado de un plano es igual á dos rectos.*

Corolario 4.° *La suma de todos los ángulos diedros consecutivos, formados alrededor de una recta por varios planos que salen de ella es igual á cuatro rectos.*

(1) Como se vé todas estas definiciones están calcadas sobre las dadas en la Geometría plana para los ángulos formados por dos rectas que se cortan (*ángulos planos*), analogía que seguirá en los teoremas á que pueden dar lugar los ángulos formados por dos planos que se cortan (*ángulos diedros*).

148. TEOREMA CII.—*Los ángulos diedros opuestos por la arista son iguales.*



149. TEOREMA CIII.—*Las intersecciones de las dos caras de un mismo ángulo diedro por planos perpendiculares á la arista forman siempre entre sí el mismo ángulo.*

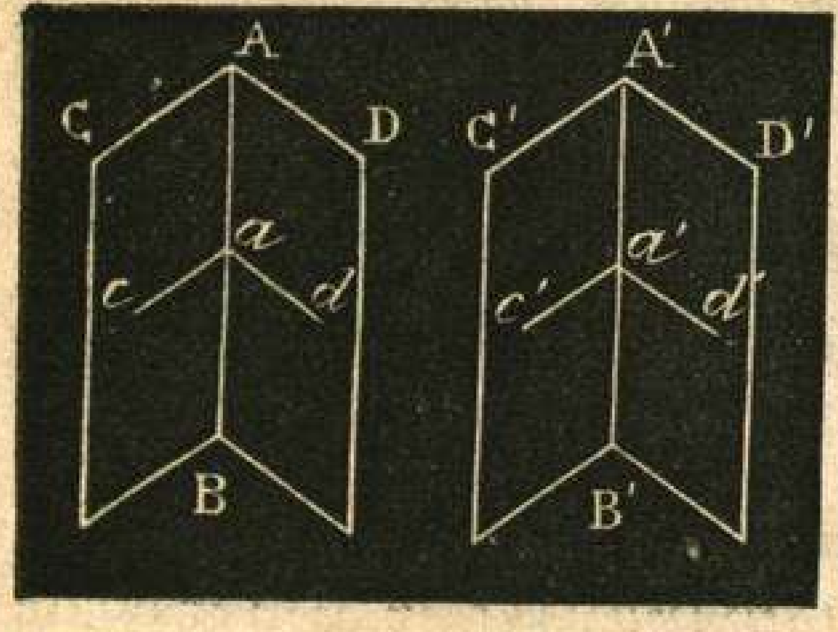
Siendo los planos *cad* y *c'a'd'* perpendiculares á la arista AB del diedro, son paralelos entre sí; y por tanto las rectas *ac* y *a'c'*, que resultan de la interseccion de los dos planos paralelos con un tercero, son paralelas entre sí (Teor. XCVII.); por igual razon lo son tambien las rectas *ad* y *a'd'*.

Los ángulos *cad* y *c'a'd'* son, pues, iguales, por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido (Teor. XCI.)

Escolio. El ángulo *cad* se llama *ángulo rectilíneo* ó *ángulo plano correspondiente al ángulo diedro* CABD.

Se puede decir tambien que *el ángulo plano correspondiente á un ángulo diedro es el ángulo formado por las perpendiculares á su arista levantadas en cada una de sus caras*, porque como la arista AB es perpendicular al plano *cad*, es perpendicular á las rectas *ac* y *ad*, que están contenidas en este plano.

150. TEOREMA CIV.—*Si dos ángulos diedros* CABD *y* C'A'B'D' *son iguales, sus ángulos planos correspondientes cad y c'a'd' son iguales.*



En efecto, siendo iguales los ángulos diedros, podemos hacerlos coincidir, colocando, por ejemplo, el diedro C'A'B'D' sobre el diedro CABD; importando poco que el punto *a'* caiga en *a* ó en otro punto, puesto que sabemos, que el ángulo plano correspondiente á un ángulo diedro es el mismo cualquiera que sea el punto de la arista en que se forme.

Corolario. *A un ángulo diedro recto, corresponde un ángulo plano recto.*

151. TEOREMA CV.—*Dos ángulos diedros son proporcionales á sus ángulos planos correspondientes.*

Corolario. *La medida de un ángulo diedro es su ángulo plano correspondiente.*

De los planos perpendiculares entre sí.

152. TEOREMA CVI.—*Si dos planos son perpendiculares entre sí, toda recta trazada en uno de ellos perpendicularmente á su interseccion es perpendicular al otro.*

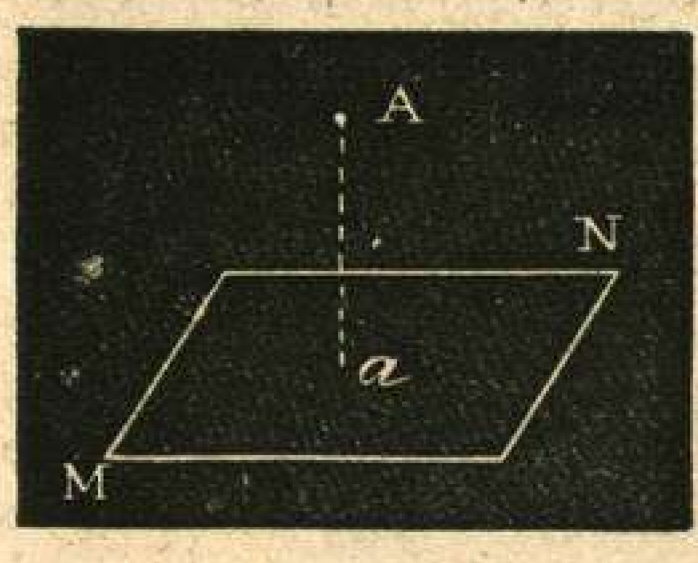
153. TEOREMA CVII.—*Si una recta es perpendicular á un plano, todo plano que pase por ella es perpendicular al primero.*

Corolario 1.° *Si dos planos son perpendiculares á un tercero, la interseccion de los dos primeros será perpendicular á este tercer plano.*

Corolario 2.° *Por una recta no perpendicular á un plano se puede siempre hacer pasar un plano perpendicular al primero, pero no se puede hacer pasar más que uno.*

154. TEOREMA CVIII.—*Un plano y una recta perpendiculares á un mismo plano son paralelos.*

Proyeccion de una recta sobre un plano.



155. DEFINICION. Se llama *proyeccion* de un punto A del espacio sobre un plano MN el pié *a* de la perpendicular bajada desde el punto al plano.

Esta perpendicular se llama *recta proyectante, y el plano sobre que se* proyecta es el *plano de proyeccion.*

Se llama *proyeccion de una línea* y en general de *una figura cualquiera* la reunion de las proyecciones de los puntos que componen la recta ó la figura.

156. Teorema CIX.—*La proyeccion de una recta es una recta.*

Escolio. El plano que contiene todas las rectas proyectantes de los diferentes puntos de una recta se llama el *plano proyectante* de esta recta.

Segun el teorema CVII el plano proyectante de una recta es perpendicular al plano sobre que se proyecta.

157. Teorema CX.—*El ángulo agudo que forma una recta con su proyeccion, es menor que el que forma dicha recta con otra cualquiera, que pase por su pié en el plano de proyeccion.*

Escolio. Se toma por medida de la *inclinacion de una recta sobre* un plano el ángulo que forma esta recta con su proyeccion sobre el plano, el cual se llama *ángulo de la recta y del plano.*

De los ángulos poliedros.

158. Definiciones.—Se llama *ángulo poliedro* (1) y tambien *ángulo sólido* la figura formada por varios planos que pasan todos por un mismo punto S y que cada uno termina en sus intersecciones con los dos planos adyacentes.

Cada uno de los ángulos planos ASB, BSC, CSD,... etc., lleva el nombre de cara del ángulo poliedro. Cada una de las intersecciones SA, SB, SC, etc., de las caras entre sí, se llama una *arista*. El punto S por donde pasan todas las caras y todas las aristas es el vértice del ángulo poliedro. Un ángulo poliedro se enuncia con la letra del vértice ó con dicha letra seguida de otra de cada arista.

(1) De las palabras griegas *polys*, muchos y *edra*, base.

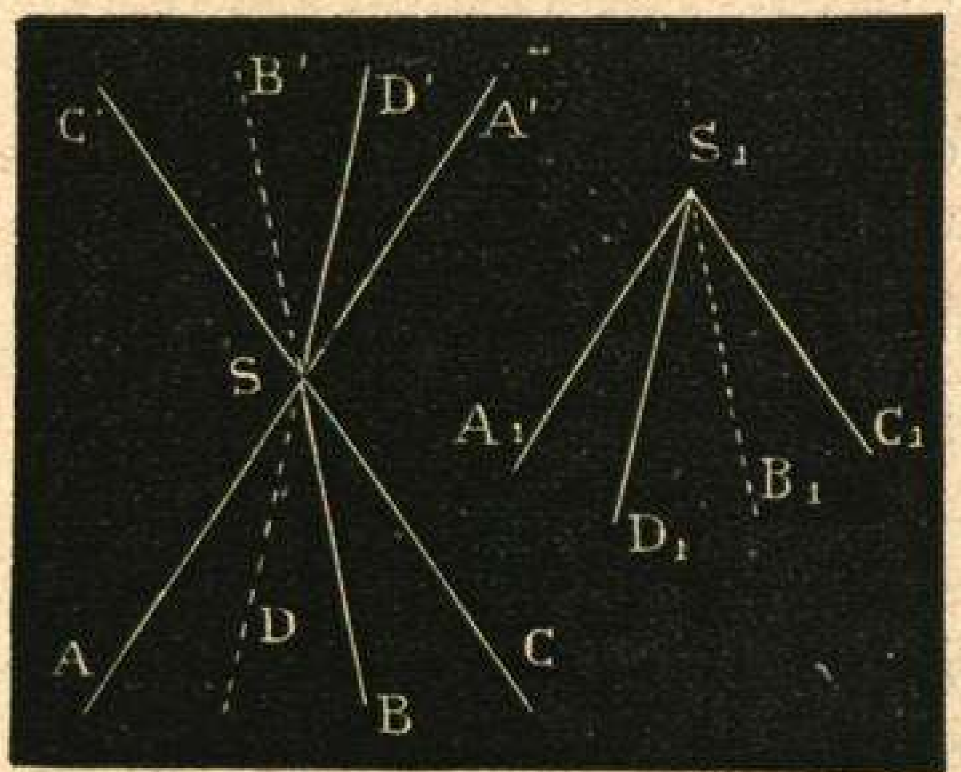
Los planos de dos caras consecutivas forman un *ángulo diedro* del ángulo poliedro. Los *ángulos diedros* y los *ángulos planos* ó *caras* de un ángulo poliedro son sus elementos ó partes, como los lados y los ángulos de un polígono son sus elementos.

Se llama ángulo poliedro *convexo* el ángulo poliedro cuyas caras no pueden ser cortadas por una recta más que en dos puntos.

El número de aristas, de caras y de ángulos diedros de un ángulo poliedro es evidentemente igual.

Por lo ménos se necesitan tres planos para formar un ángulo poliedro, que entonces toma el nombre de *ángulo triedro* ó simplemente de *triedro* (1).

Un triedro es *rectángulo* cuando tiene *un* diedro recto;
— *birectángulo* — *dos* diedros rectos;
— *trirectángulo* — *tres* diedros rectos.



Dos ángulos poliedros SABCD y SA′B′C′D′ se llaman opuestos por el vértice cuando las aristas del uno son prolongacion de las aristas del otro.

Es evidente que los ángulos diedros son respectivamente iguales y que tambien lo son los ángulos planos; pero se puede facilmente concebir que estos elementos están dispuestos en un órden inverso en uno y en otro, lo cual impide que los dos ángulos poliedros sean superponibles, aun cuando todos sus elementos sean respectivamente iguales, por lo cual se los llama *simétricos*.

159. Lema.—*Si desde un punto tomado en el interior de un ángulo diedro se bajan dos perpendiculares á sus dos caras, el ángulo de dichas perpendiculares es suple-*

---

(1) De las palabras griegas *treis*, tres y *edra*, base.

mento del diedro (esto es, del ángulo plano correspondiente al ángulo diedro).

160. Teorema CXI.—*Si desde un punto tomado en el interior de un triedro se bajan perpendiculares á los planos de sus caras, estas tres rectas son las aristas de un segundo triedro, cuyas caras son los suplementos de los ángulos diedros del primero.*

Recíproco. *Las caras del primer triedro son los suplementos de los ángulos diedros del segundo.*

Escolio. Dos triedros se llaman *suplementarios* cuando las caras del uno son suplementos de los ángulos diedros del otro.

161. Teorema CXII.—*En todo ángulo triedro un ángulo plano cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.*

162. Teorema CXIII.—*La suma de todos los ángulos planos de un poliedro convexo es menor que cuatro rectos.*

163. Teorema CXIV.—*La suma de los diedros de un triedro es mayor que dos rectos y menor que seis.*

164. Teorema CXV.—*Dos triedros son iguales cuando tienen dos ángulos planos respectivamente iguales, igualmente dispuestos é igual el ángulo diedro comprendido.*

165. Teorema CXVI.—*Dos triedros son iguales cuando tienen un ángulo plano igual y los diedros adyacentes respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

166. Teorema CXVII.—*Dos triedros son iguales cuando tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

167. Teorema CXVIII.—*Dos triedros son iguales cuando tienen sus tres diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

LIBRO SEGUNDO.

Preliminares.

168. Definiciones.—Se llama *poliedro* el cuerpo terminado por superficies planas.

Estas superficies planas con sus intersecciones sucesivas forman polígonos, que se llaman *caras* del poliedro.

Se llama *diagonal* de un poliedro la recta que une dos vértices que no pertenecen á la misma cara.

El poliedro más sencillo es el que tiene *cuatro* caras al cual se le da el nombre de *tetraedro* (1). Tambien se dan nombres particulares á los poliedros siguientes:

pentaedro (2)	poliedro de	*cinco*	caras.
exaedro (3)	—	*seis*	—
octaedro (4)	—	*ocho*	—
dodecaedro (5)	—	*doce*	—
icosaedro (6)	—	*veinte*	—

Dos poliedros son iguales cuando todos los vértices del uno pueden coincidir á la vez con todos los vértices del otro; porque entonces las aristas coinciden y tambien los planos de las caras, y por consiguiente las caras mismas.

Un poliedro se llama *regular* cuando sus caras son

(1) De las palabras griegas *tetra*, cuatro y *edra*, base.
(2) De las palabras griegas *pente*, cinco y *edra*, base.
(3) De las palabras griegas *ex*, seis y *edra*, base.
(4) De las palabras griegas *octo*, ocho y *edra*, base.
(5) De las palabras griegas *dodeca*, doce y *edra*, base.
(6) De las palabras griegas *eicosi*, veinte y *edra*, base.

todas polígonos regulares é iguales y cuando sus ángulos diedros son todos iguales.

No hay más que *cinco poliedros regulares* á saber:

el *tetraedro regular*, cuya superficie está compuesta de *tres* triángulos equiláteros reunidos de tres en tres alrededor de cada vértice;

el *exaedro regular*, de *seis* cuadrados reunidos de tres en tres;

el *octaedro regular*, de *ocho* triángulos equiláteros agrupados de cuatro en cuatro;

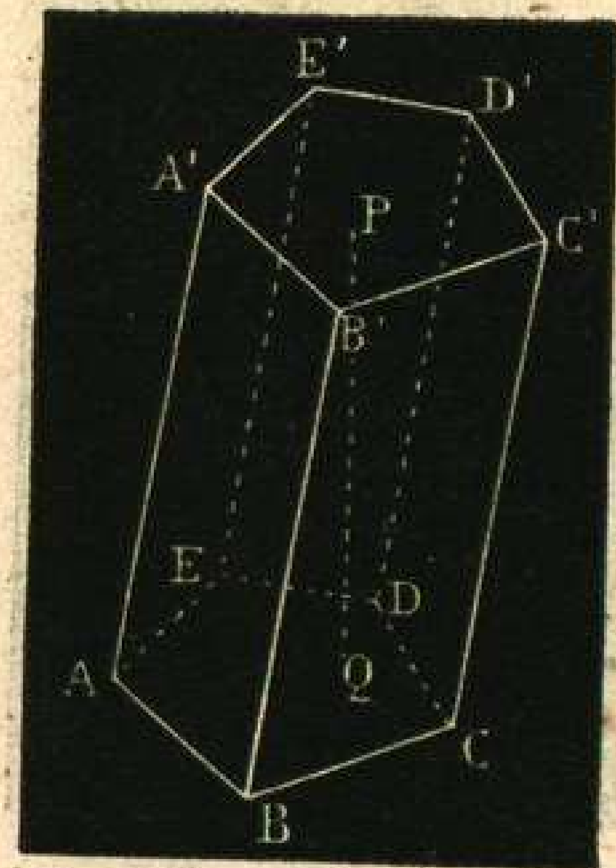
el *dodecaedro regular*, de *doce* pentágonos reunidos en tres en tres;

y el *icosaedro regular*, de *veinte* triángulos equiláteros reunidos de cinco en cinco.

En efecto, exigiendo un ángulo sólido por lo ménos tres ángulos planos y no pudiendo pasar estos de 360° (Teor. CXIII), basta examinar cuales son los polígonos regulares, cuyos ángulos reunidos de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5, etc., den una suma menor que 4 rectos. Ahora bien, valiendo 60° cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero, para construir un ángulo sólido, se pueden reunir estos ángulos de 3 en 3, de 4 en 4 ó de 5 en 5, lo cual nos dará el *tetraedro*, el *octaedro* y el *icosaedro*. Es evidente que estos ángulos no pueden reunirse de 6 en 6, porque un ángulo sólido tiene menos de 360° y 6 veces 60°=360°. Valiendo 90° los ángulos de un cuadrado no se pueden reunir estos ángulos más que de 3 en 3, lo cual da el *exaedro*. En cuanto al pentágono, valiendo cada uno de los ángulos 108°, no se podrán reunir los ángulos más que de 3 en 3, lo cual nos dará el *dodecaedro*. Valiendo cada ángulo del exágono 120°, es imposible construir un ángulo sólido reuniendo 3 de estos ángulos; la imposibilidad de construir un ángulo sólido, reuniendo tres ángulos de un polígono regular, existe *a fortiori* si el polígono tiene más de seis lados; luego no hay más que cinco poliedros regulares.

Entre todas las formas que pueden tener los poliedros existen dos tipos, cuyas propiedades sirven de punto de partida para todas las cuestiones relativas á los poliedros: estos dos tipos son el *prisma* y la *pirámide*.

Del prisma.



169. Definiciones.—Se llama *prisma* (1) todo poliedro que tiene dos caras ABCDE y A'B'C'D'E' que son polígonos iguales, situadas en planos paralelos, cuyos lados son respectivamente paralelos, y las demás caras son planos que determinan dos á dos los lados homólogos de estos dos polígonos.

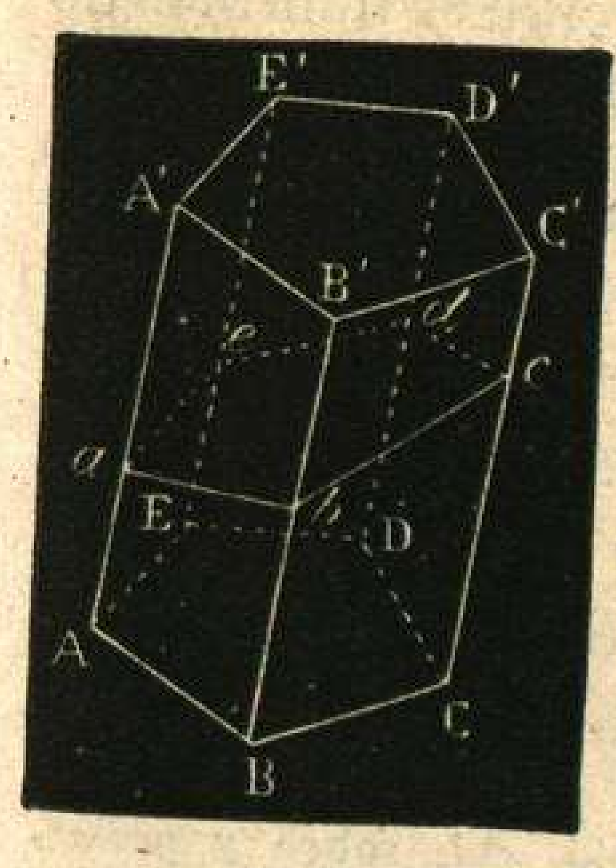
Las dos caras ABCDE y A'B'C'D'E' son las *bases* del prisma; y la distancia PQ de los planos de las bases es su *altura*.

Las otras caras se llaman *caras laterales*.

Siendo las aristas AB y A'B' iguales y paralelas, la figura A'ABB' es un paralelógramo y las aristas AA' y BB' son iguales y paralelas; lo mismo puede decirse de BB' de CC' y de las demás; de modo que en un prisma *todas las aristas laterales son iguales y paralelas.*

Un prisma se llama *recto* cuando sus aristas laterales son perpendiculares á los planos de las bases, en el caso contrario se llama *oblícuo*.

Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos



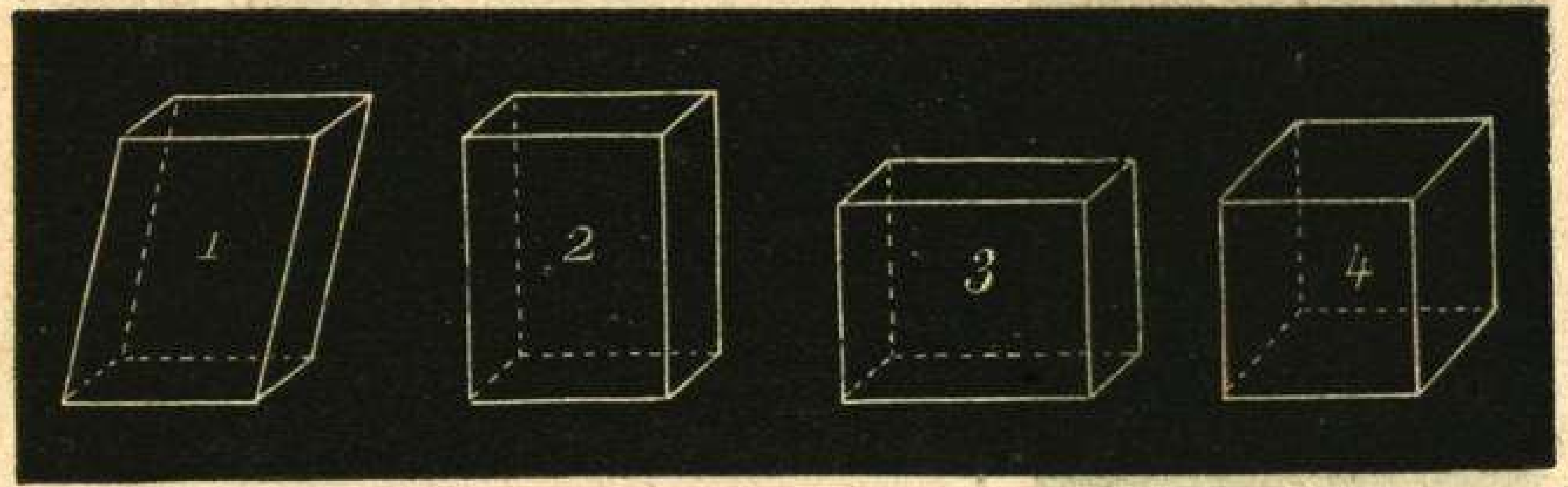
Cuando se corta un prisma AA'BB'CC'.... por un plano *abcde* que corta todas las aristas y que no es paralelo á las bases, cada uno de los dos sólidos A*a* B*b* C*c*... y A'*a*B'*b*C'*c*.. en que queda dividido el prisma lleva el nombre de *tronco de prisma.*

Un prisma se llama *triangular*. *cuadrangular*, *pentagonal*, *exagonal*,

(1) De la palabra griega *prisma*, derivada de *prio*, serrar, porque está como cortado por todos lados por diferentes planos.

etc., segun que el polígono que le sirve de base sea un *triángulo,* un *cuadrilátero,* un *pentágono*, un *exágono*, etc.

Un prisma *recto* se llama *regular* cuando tiene por base un polígono regular.



Entre los prismas cuadrangulares se distingue el que tiene por base un paralelógramo, el cual recibe el nombre de *paralelepípedo* (1) (Fig. 1).

Puede, pues, definirse el *paralelepípedo* diciendo: es un sólido cuyas caras son todas paralelógramos.

Si las aristas del paralelepípedo son perpendiculares al plano de las bases se dice que es *recto* (Fig. 2).

Si un paralelepípedo recto tiene por base un rectángulo se le llama *paralelepípedo rectangular* (Fig. 3).

Por último, cuando todas las caras de un paralelepípedo rectangular son cuadrados, recibe el nombre de cubo (2) y es el *exaedro regular* (Fig. 4).

Propiedades generales del prisma. Determinacion de su área lateral.

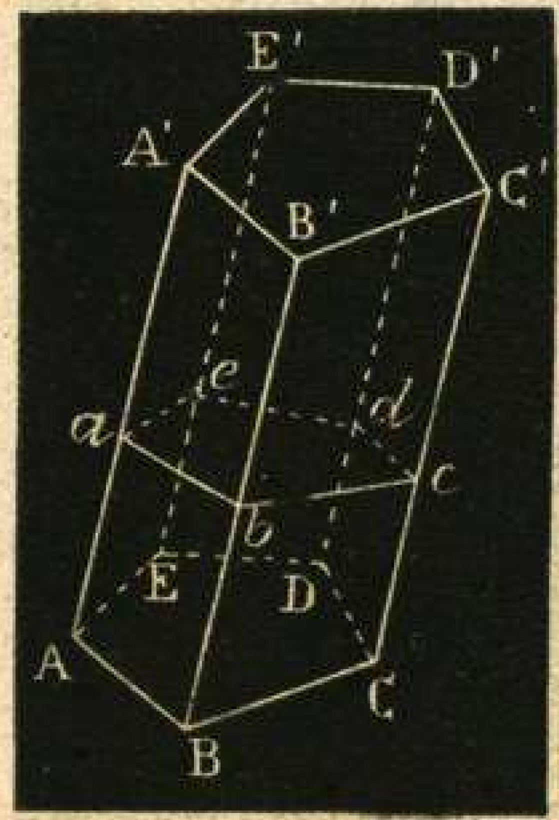
170. TEOREMA CXIX.—*Toda seccion paralela á la base de un prisma es igual á dicha base.*

Escolio. Se llama *seccion recta* de un prisma el polígono que resulta de la interseccion de su superficie lateral por un plano perpendicular á las aristas.

---

(1) De las palabras griegas *parallelos*, paralelo, *epi*, sobre y *pedion*, plano.

(2) Del nombre griego *cybos*, dado.



171. Teorema CXX. *El área lateral de un prisma tiene por medida el producto del perímetro de su seccion recta por la longitud de su arista lateral.*

El área lateral se compone de la reunion de los paralelógramos $AA'BB'$, $BB'CC'$, etc.

Ahora bien, siendo perpendicular á las aristas el plano que determina la seccion recta, las líneas ab, bc, etc., son las alturas de los paralelógramos, y tendremos

$$\textit{Superf. lat. del prisma} = AA' \times ab + BB' \times bc + \ldots = AA'(ab + bc + \ldots)$$

Corolario. *El área lateral de un prisma recto es igual á su altura multiplicada por el perímetro de la base.*

En efecto, la altura es igual á la arista, y la base á la seccion recta.

172. Teorema CXXI.—*Dos prismas son iguales cuando tienen un ángulo diedro igual comprendido entre una base y una cara respectivamente iguales y semejantemente dispuestas.*

Corolario. *Dos prismas rectos que tienen la misma base é iguales alturas son iguales.*

173. Teorema CXXII.—*Todo prisma oblícuo es equivalente á un prisma recto que tenga la misma arista que él y su seccion recta por base.*

Propiedades del paralelepípedo.

174. Teorema CXXIII.—*En todo paralelepípedo las caras opuestas son iguales y paralelas.*

Corolario 1.° *En un paralelepípedo dos caras opuestas cualesquiera pueden ser tomadas por bases.*

Corolario 2.° *Toda seccion hecha en un paralelepípedo por un plano que corte sus cuatro caras laterales es un paralelógramo.*

175. TEOREMA CXXIV.—*En todo paralelepípedo las cuatro diagonales se cortan mútuamente en partes iguales.*

Escolio. El punto en que se cortan las cuatro diagonales del paralelepípedo se llama *centro* del mismo; porque toda recta que pasa por dicho punto y termina en la superficie del parelelepípedo, es dividida por dicho punto en dos partes iguales.

Determinacion del volúmen de un paralelepípedo y de un prisma cualquiera.

176. TEOREMA CXXV.—*Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos de iguales bases son proporcionales á sus alturas.*

Escolio. Siendo rectángulos los paralelepípedos, las dos dimensiones de sus bases son tambien dos de sus dimensiones (1), de modo que el teorema puede enunciarse: *Dos paralelepípedos rectángulos que tienen dos dimensiones comunes son proporcionales á sus terceras dimensiones*

177. TEOREMA CXXVI.—*Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos de la misma altura son proporcionales á sus bases.*

Escolio. Este teorema podría tambien enunciarse así: *Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos que tienen una dimension comun son proporcionales á los productos de las otras dos dimensiones.*

178. TEOREMA CXXVII.—*Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

179. TEOREMA CXXVIII.—*El volúmen de un paralelepípedo rectángulo es expresado por el producto de su*

---

(1) Las *dimensiones* de un paralelepípedo rectángulo son las tres aristas de uno de sus ángulos triedros.

base por su altura (tomando por unidades de volúmen y de superficie el cubo y el cuadrado construidos sobre la unidad de longitud).

Corolario 1.º *El paralelepípedo rectángulo tiene por medida el producto de sus tres dimensiones.*

Corolario 2.º *El volúmen de un cubo es igual á la tercera potencia de su lado.*

Esto explica porque comunmente se llama *cubo de un número* á la *tercera potencia* del mismo.

180. Teorema CXXVII.—*Dos paralelepípedos cualesquiera de la misma base y de igual altura son equivalentes.*

181. Teorema CXXVIII.—*El volúmen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto del área de su base por su altura;* porque un paralelepípedo cualquiera es equivalente á un paralelepípedo rectángulo de base equivalente y de la misma altura.

182. Teorema CXXIX.—*Un plano trazado por dos aristas opuestas de un paralelepípedo le divide en dos prismas triangulares equivalentes.*

Corolario. *Todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de la misma altura y de doble base.*

183. Teorema CXXX.—*El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto del área de su base por su altura.*

De la pirámide.

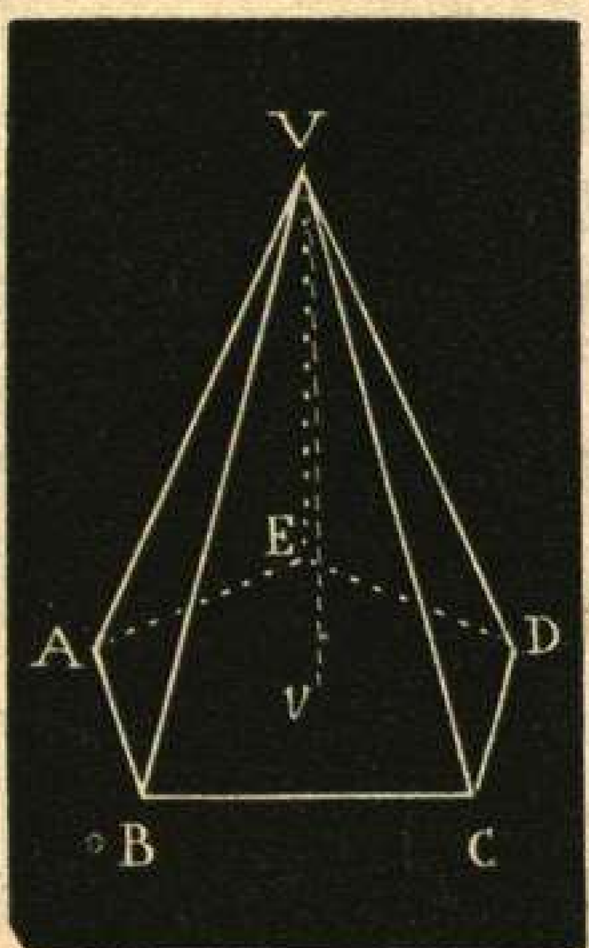
184. Definiciones.—Se llama *pirámide* (1) todo poliedro que puede ser considerado como el resultado de la interseccion de un ángulo poliedro cualquiera por un plano que corte todas sus aristas.

Segun esto, se vé que toda pirámide está limitada por una cara poligo-

---

(1) De la palabra griega *pyramis*, derivada de *pyr*, llama.

nal ABCDE y por un conjunto de triángulos que tienen todos un vértice comun V.



El polígono ABCDE es la *base*; el punto V es el *vértice* ó *cúspide* de la pirámide, y los triángulos VAB, VBC, etc., son sus caras laterales.

La distancia *Vv* desde la cúspide al plano de la base es la *altura* de la pirámide.

Una pirámide se llama *regular* cuando tiene por base un polígono regular, y su vértice se halla en una perpendicular levantada al plano de la base en su centro.

La pirámide es *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, *exagonal*, etc., segun que tenga por base un *triángulo*, un *cuadrilátero*, un *pentágono*, un *exágono*, etc.

La pirámide más sencilla de todas es la *triangular*, que no tiene más que cuatro caras, inclusa la base, y por eso se llama *tetraedro*.

Se llama *pirámide troncada* ó *tronco de pirámide* un trozo de pirámide comprendido entre la base y un plano cualquiera que corte á todas las aristas laterales.

185. Teorema CXXXI.—*Dos tetraedros son iguales cuando tienen un diedro igual comprendido entre dos caras respectivamente iguales y semejantemente dispuestas.*

186. Teorema CXXXII.—*Dos tetraedros son iguales cuando tienen una cara igual adyacente á tres ángulos diedros respectivamente iguales y semejantemente dispuestos.*

187. Teorema CXXXIII.—*Dos tetraedros son iguales cuando tienen tres caras respectivamente iguales y semejantemente dispuestas.*

188. Teorema CXXXIV.—*Dos pirámides son iguales* *cuando tienen un diedro igual comprendido entre bases y caras respectivamente iguales y semejantemente dispuestas.*

Todos estos teoremas se demuestran muy fácilmente por medio de la superposicion.

189. Teorema CXXXV.—*Todo plano paralelo á la base de una pirámide,*

1.° *Determina en su superficie un polígono semejante á la base,*

y 2.° *Corta sus aristas y su altura en partes proporcionales.*

190. Teorema CXXXVI.—*Dos pirámides triangulares de la misma altura y de bases equivalentes son equivalentes.*

191. Teorema CXXXVII.—*Todo prisma triangular puede descomponerse en tres tetraedros equivalentes, uno de los cuales tiene la misma base y la misma altura que el prisma.*

Recíproco. *Toda pirámide triangular es la tercera parte de un prisma de igual base y altura.*

192. Teorema CXXXVIII.—*El volúmen de una pirámide es igual al tercio del producto del área de su base por su altura.*

Escolio. Este teorema nos dá el medio para determinar el volúmen de un poliedro cualquiera, porque todo poliedro puede descomponerse fácilmente en pirámides.

193. Teorema CXXXIX.—*Todo prisma triangular troncado es equivalente á la suma de tres tetraedros, que tienen por base comun la del prisma, y cuyos vértices son los de la otra base del prisma.*

Corolario. *El volúmen de un prisma triangular troncado es igual al producto de su seccion recta por el tercio de la suma de sus aristas laterales.*

194. Teorema CXL.—*Todo tronco de pirámide de bases paralelas es equivalente á la suma de tres pirámides de la misma altura que el tronco y que tengan por bases su base superior, su base inferior y una media proporcional entre ambas.*

Semejanza de poliedros.

195. Definiciones. Dos tetraedros son semejantes cuando las aristas del uno son proporcionales á las del otro, y están semejantemente dispuestas.

Dos poliedros son semejantes cuando están compuestos de un mismo número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos.

196. Teorema CXLI.—*En dos tetraedros semejantes las caras homólogas son semejantes; y los ángulos planos, los triedros y los diedros homólogos son iguales.*

Recíproco. *Dos tetraedros son semejantes:*

1.° *Cuando sus caras son respectivamente semejantes y semejantemente dispuestas,*

2.° *Cuando sus triedros son respectivamente iguales,*

y 3.° *Cuando sus ángulos diedros son respectivamente iguales y semejantemente dispuestos.*

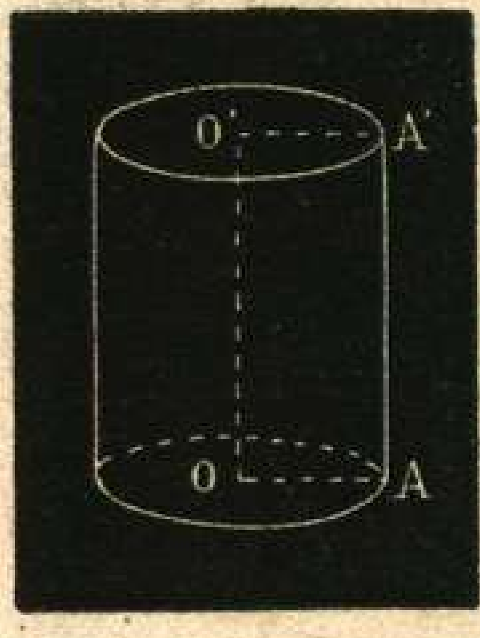
197. Teorema CXLII.—*Si una pirámide se corta por un plano paralelo á la base, resulta una pirámide parcial semejante á la total.*

198. Teorema CXLIII.—*Dos tetraedros, que tienen un diedro igual comprendido entre dos caras respectivamente semejantes y semejantemente dispuestas, son semejantes.*

LIBRO TERCERO.

Cilindro.

199. Definiciones.—Se llama *cilindro* (1) *circular recto* al sólido engendrado por la revolucion de un rectángulo AA′OO′ al girar alrededor de un lado inmóvil OO′.



Los círculos descritos por OA y por O′A′ son las *bases* del cilindro, el lado inmóvil OO′ es su *eje* ó *altura*, y el lado AA′ es la *generatriz* de la *superficie lateral* del cilindro.

Se dice que dos cilindros rectos son *semejantes* cuando sus alturas son proporcionales á los rádios de sus bases, esto es, cuando son engendrados por rectángulos semejantes.

Un cilindro cualquiera se llama *recto* ú *oblicuo*, segun que sus aristas laterales son perpendiculares ú oblicuas á los planos de sus bases.

200. Teorema CXLIV.—*El cilindro circular recto es el límite hácia que tiende un prisma recto inscrito que tiene por bases dos polígonos regulares cuyo número de lados aumenta indefinidamente.*

Luego el cilindro circular puede considerarse como el límite á que tiende un prisma recto inscrito á medida que los lados de su base y sus caras laterales son más numerosos y más pequeños.

201. Teorema CXLV.—*La superficie lateral de un cilindro circular recto tiene por medida la circunferencia de su base multiplicada por su altura.*

Designando con a la altura de un cilindro circular recto, con r el rádio de su base y con S su superficie lateral, tendremos la fórmula:

---

(1) De la palabra griega *cylindros*, derivada de *cylio* ó *cylindo*, rodar arrollar.

$$S=2\pi ra.$$

Siendo las áreas de las bases del cilindro, iguales una á otra, y tenien do por medida πr^2, la superficie total del cilindro será

$$2\pi ra+2\pi r^2$$

y si representamos con S′ esta área total, tendremos:

$$S'=2\pi ra+2\pi r^2$$

$$S'=2\pi r(a+r).$$

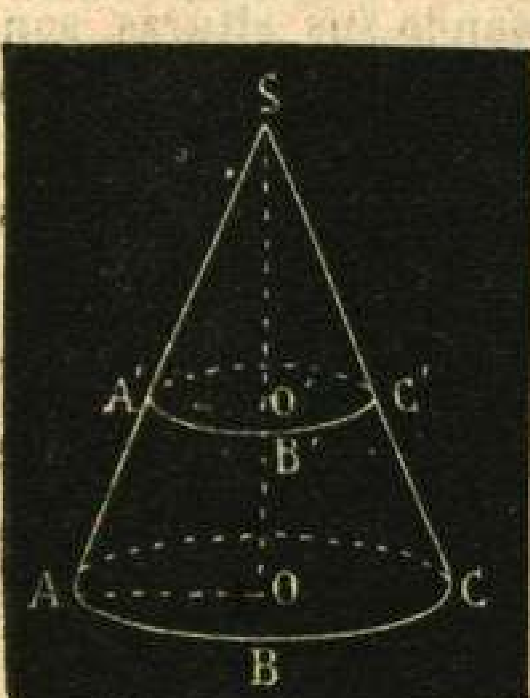
202. Teorema CXLVI.—*El volúmen de un cilindro circular recto es igual al producto del área de su base por su altura.*

Designando con r el rádio de la base de un cilindro, con a su altura y con V su volúmen, se tiene la fórmula:

$$V=\pi r^2 a.$$

Cono.

203. Definiciones.—Se llama *cono* (1) *recto de base circular* el sólido engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo ASO, que gira alrededor de uno de sus catetos SO.



La *base* del cono es el círculo engendrado por el cateto movible AO. Este círculo tiene su centro en O y OA por rádio.

El cateto inmóvil es el *eje* ó *altura* del cono, y el punto S es su *vértice*.

La hipotenusa AS, que describe la *superficie lateral del cono*, se llama indistintamente *lado*, *apotema* del cono ó *generatriz de la superficie cónica*.

Dos conos rectos circulares son *semejantes*, cuando sus alturas son proporcionales á los rádios de sus bases, es decir, cuando son engendrados por triángulos rectángulos semejantes.

(1) De la palabra griega *conos*, piña, peon.

204. Teorema CXLVII.—*Toda seccion paralela á la base de un cono es un círculo, cuyo centro está en el eje.*

205. Cono truncado.—Se llama *cono troncado* ó *tronco de cono* la porcion de volúmen de un cono comprendida entre la base y un plano que corte á todos los lados del cono. El volúmen AA′C′C es un tronco de cono de bases paralelas, la recta OO′, distancia de las bases, es la altura del tronco, y AA′ es su *lado*.

206. Teorema CXLVIII.—*El cono circular recto es el límite á que tiende una pirámide inscrita que tenga por base un polígono regular, cuyo número de lados crece indefinidamente.*

207. Teorema CXLIX.—*La superficie lateral de un cono recto de base circular tiene por medida el producto de la circunferencia de su base por la mitad de su lado.*

Designando con r el rádio de la base del cono, con l su lado ó generatriz, y con S la superficie lateral, tendremos la fórmula:

$$S=2\pi r\times\frac{l}{2}=\pi rl.$$

Siendo πr^2 la superficie de la base del cono, el área total será

$$\pi rl+\pi r^2$$

Representando con S′ la superficie total tendremos

$$S'=\pi rl+\pi r^2$$

y poniendo πr como factor comun, resulta

$$S'=\pi r(l+r).$$

208. Teorema CL.—*La superficie lateral de un tronco de cono recto de bases paralelas tiene por medida la semisuma de las circunferencias de sus bases multiplicada por el lado.*

Designando con R el rádio de la base mayor y con r el de la menor, con l el lado del tronco, y con S la superficie lateral, tendremos

$$S=\frac{2\pi R+2\pi r}{2}\times l=\pi l(R+r).$$

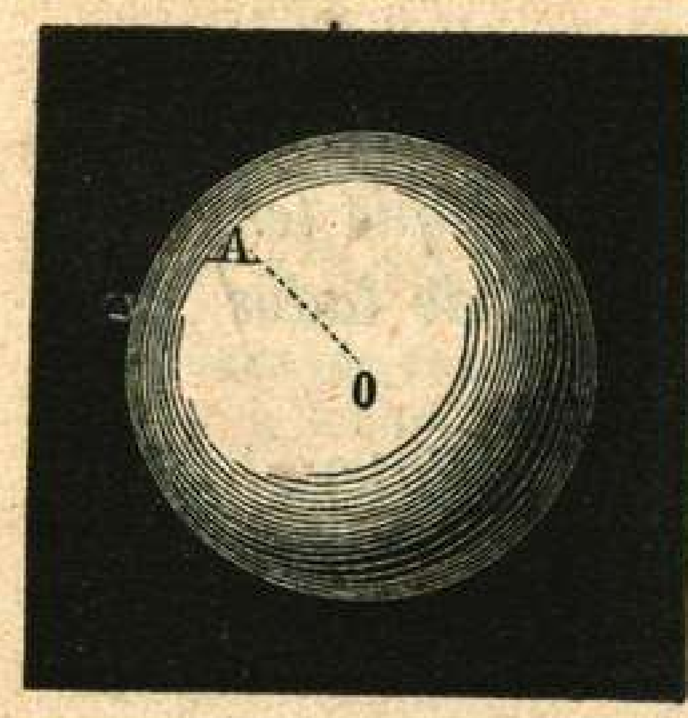
209. Teorema CLI.—*El volúmen de un cono cual-*

quiera tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura.

Designando con r el rádio de la base del cono, con a su altura y con V su volúmen, tendremos

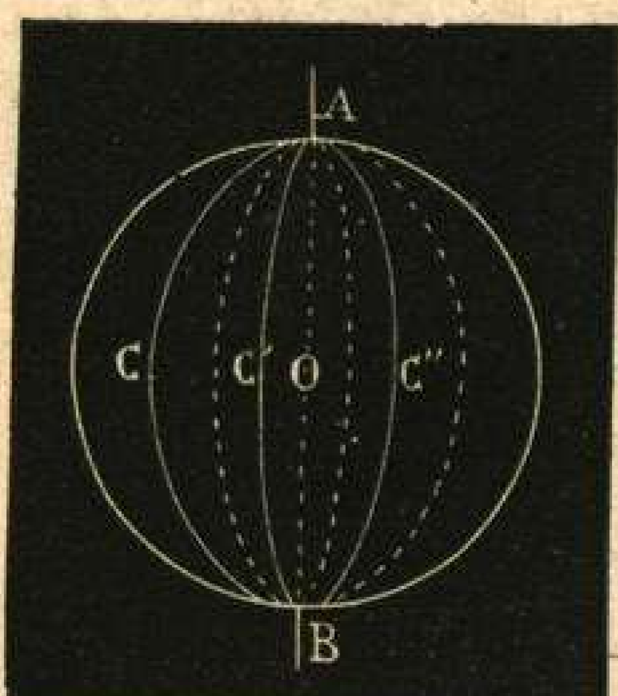
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 a$$

Esfera.



210. Definiciones.—Se llama *esfera* (1) un sólido terminado por una superficie curva, cuyos puntos equidistan de uno interior llamado *centro*.

La esfera se puede considerar engendrada por la revolucion de uu semicírculo ACB alrededor de su diámetro ó *eje* AB; porque en este movimiento un punto cualquiera C está siempre á la misma distancia del centro O, que permanece fijo.



Se llama *rádio* de la esfera toda recta OA que vá desde el centro á un punto de la superficie.

Diámetro es toda recta que pasa por el centro y que por una parte y por otra se termina en la superficie: AB es un diámetro.

Se llaman *secciones planas* de la esfera todas las secciones hechas en la esfera por planos.

211. Teorema CLII.—*Toda seccion plana de la esfera es un círculo.*

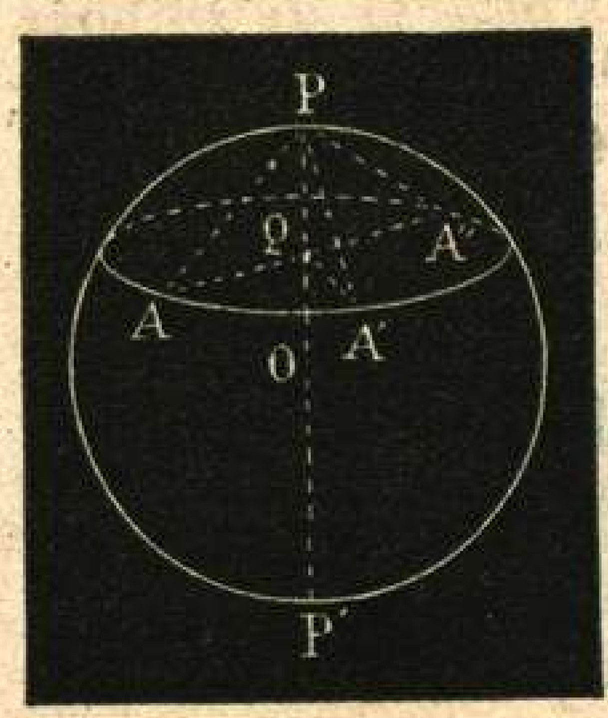
Círculos máximos son los que pasan por el centro de la esfera y *círculos mínimos* los que no pasan por él.

Como los círculos máximos tienen el mismo rádio que la esfera, son todos iguales.

212. Polos de un círculo. Se llama polo de un

(1) De la palabra griega *sfaira*, globo, bola, pelota

círculo de la esfera el extremo del diámetro perpendicular al plano del mismo.



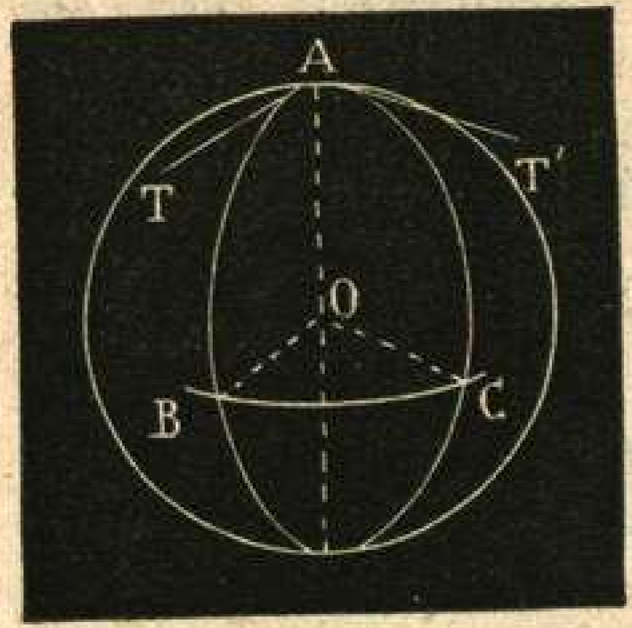
Así los extremos P y P′ del diámetro PP′ perpendicular al plano del círculo AA′A″ son los polos de este círculo.

Segun esta definicion los círculos de la esfera tienen dos polos, y todos los círculos cuyos planos son paralelos tienen los mismos polos.

213 Teorema CLIII.—*Los polos de un círculo de la esfera equidistan de los puntos de la circunferencia del mismo.*

214. Angulo esférico.--Se dá este nombre á la abertura de dos arcos de círculo máximo AB y AC.

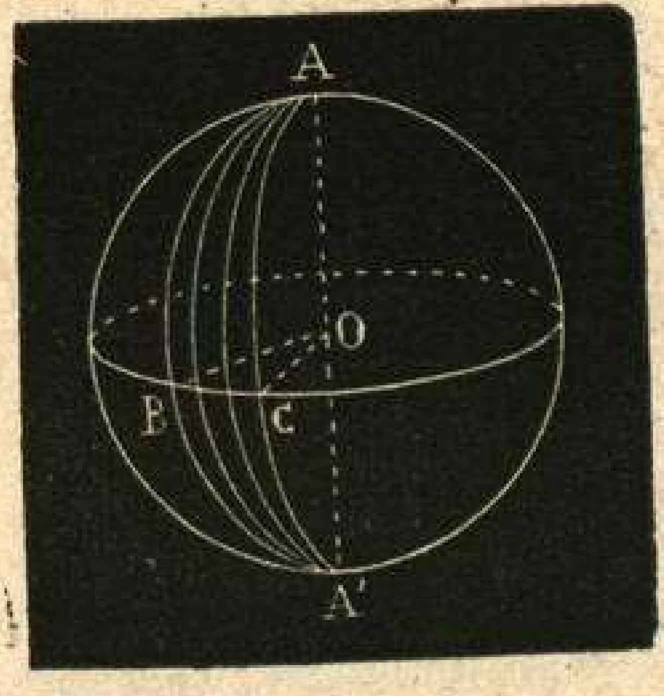
Lados del ángulo esférico son los dos arcos que le forman, y *vértice* del mismo es su punto de interseccion.



El valor de un ángulo esférico BAC se aprecia por el ángulo rectilíneo TAT′ formado por dos tangentes AT y AT′ trazadas á los arcos AB y AC en el vértice de dicho ángulo.

Segun esto, el ángulo esférico BCA y el ángulo diedro BOAC formado por los planos de los arcos del primero, tienen la misma medida; pues el ángulo TAT′ es el ángulo plano correspondiente al diedro BOAC.

215. Huso esférico. Se dá este nombre á la porcion de superficie esférica comprendida entre dos semicircunferencias máximas.

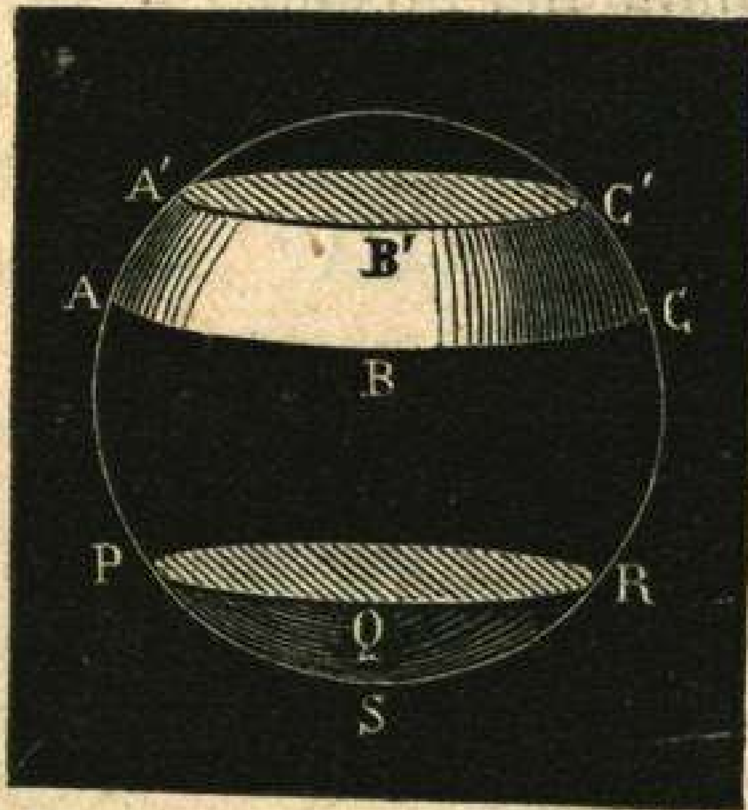


La porcion ABA′C de la superficie esférica determinada por los arcos ABA′ y ACA es un huso.

El ángulo de estos dos arcos es el ángulo del huso.

El ángulo de un huso le determina completamente, porque es evidente que en la misma esfera ó en esferas iguales, los husos del mismo ángulo son iguales y recíprocamente, por este motivo se designa un huso con su ángulo.

216. ZONA ESFÉRICA. Se da el nombre de *zona* (1) *esférica* á la porcion de superficie de la esfera comprendida entre dos planos paralelos. Los dos círculos ABC y A′B′C′ determinados por estos planos se llaman *bases* de la zona y la distancia de ambas bases es la *altura* de la zona. Cuando la zona no tiene más que una base como PQRS se llama *casquete* esférico.



217. TEOREMA CLIV.—*El área de una zona es igual al producto de su altura por una circunferencia máxima.*

Designando con Z el área de la zona, con a su altura y con r el rádio de la esfera, tendremos

$$Z=2\pi ra.$$

218. TEOREMA CLV.—*El área de la superficie de una esfera es igual al producto de su diámetro por la circunferencia del círculo máximo.*

Designando con A el área de la esfera y con r su rádio, tendremos

$$A=2r\times 2\pi r=4\pi r^2$$

Corolario. *El área de una esfera es igual al cuádruplo del área de un círculo máximo.*

219. TEOREMA CLVI.—*El volúmen de una esfera es igual al producto de su área por el tercio del rádio.*

Designando con V el volúmen de la esfera, y su rádio con r tendremos

$$V=4\pi r^2\times\frac{1}{3}r=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

(1) Del nombre griego *zone*, cinturon, faja, banda.

INDICE.

Páginas.

LIBRO IV.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

LIBRO I.

LIBRO II.

LIBRO III.

1878.

CASADO

[G]UIA DEL BACHILLER

CIENCIAS

Madrid

I. del C. C.