DE
ÆQUATIONUM
Natura, Constitutione, & Limitibus
Opuscula Duo.

Incepta à

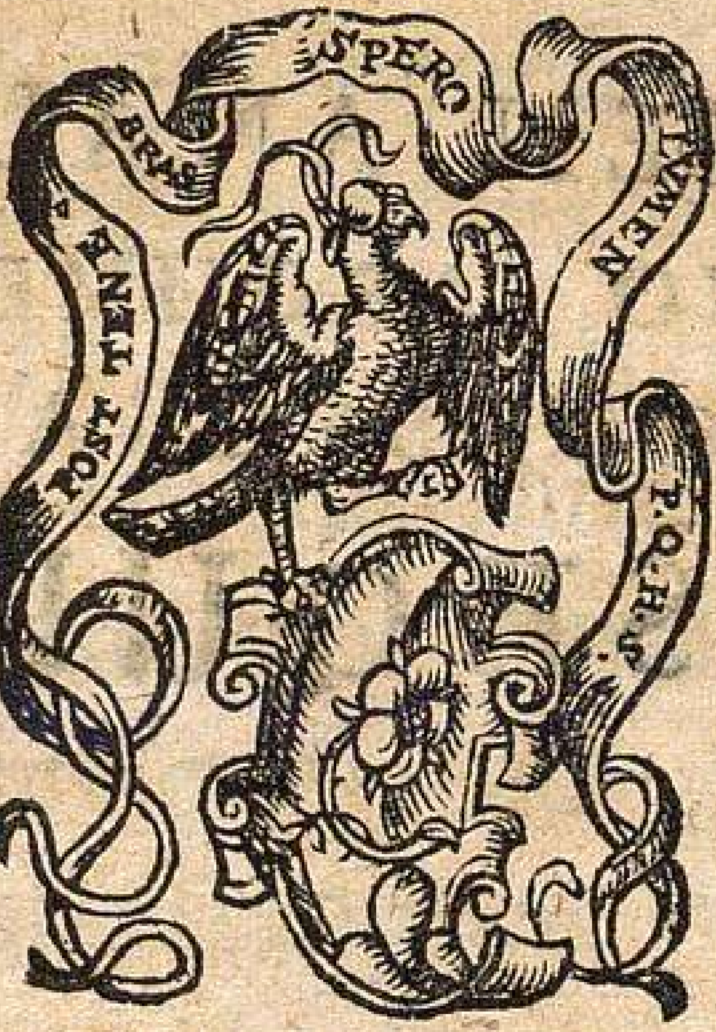
FLORIMONDO DE BEAUNE,

In Curia Blesensi Consiliario Regio;

Absoluta verò, & post mortem ejus edita

ab

ERASMIO BARTHOLINO,
Medicinæ & Mathematum in Regia Academia
Hafniensi Professore publico.



FRANCOFURTI,
Apud JOHANNEM FRIDERICUM KNOCH.
CIϽ IϽC XCV.

SUMMO MUSARUM
MECOENATI
ILLUSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO
DOMINO,

JOACHIMO GERSDORPH

TOPARCHÆ IN TUNDBYHOLM, &c.
EQUITI AURATO,
REGNI DANIÆ SUMMO AULÆ MAGISTRO,
PRINCIPI SENATORI,
REGIÆ MAJESTATIS PRÆSIDI BORINGHOLMENSI
HOC
SPECIMEN ANALYTICES
NOVO ARGUMENTO
CONSECRAT
OBSEQUIUM.

Quod

QUod jam pridem in votis erat, ſtudii & pietatis meæ experimentum Tibi probari, id recentiſſima Muſarum Algebra interpretabitur. Etſi enim, beneficia maxima, quibus me totamque domum noſtram oneraſti, quàm grato animo exceperim, mihi ipſe ſim teſtis; tamen miſeram eam vitam putavi, cui eſſe gratam probare antea non licuit: id aliquo obſequio, tum ipſi Tibi, tum cæteris omnibus indicatum, maximeque perſpicuum eſſe deſideravi. Neque æquum eſt, virtutis deprædicationem privatis tantùm parietibus claudi. Inter ingratos etiam annumerantur ii, qui beneficia accepta paucis commemorant; totus Orbis, adhibendus eſt, pietatis noſtræ teſtis & conſcius. Quoniam verò monimentum Tuarum virtutum nulla unquam obſcurabit oblivio; nullum erit tali Heroï dignius genus obſequii, quàm quod nulla temporis circumſcriptione terminatur. Quocirca hoc opuſculum Algebraïcum opportuniſſimum exiſtimavi, quod meæ perpetuæ obſervantiæ teſtem ſempiternum conſtituerem ; in quod haud obſcurè conjicio, nihil ſenectuti, nihil ſucceſſoribus licere. Mirandam Algebræ vim multis verbis exponere ſupervacuum eſt, quippe ſecura demonſtrationis ſuæ, ſemper & pacis & belli ſerviit artibus; in qua hoc eximium eſt, quòd abundantias defectuſque pari momento æſtimet, neque illi, quæ plus habent, magis neceſſaria ſunt, quàm quæ minus; atque hoc ſuæ ſcientiæ habet monimentum, quod mortales faciunt Virtutis. Verùm, artium & ſcientiarum incrementa, non in ipſarum modò ingenio, ſed etiam in ſuperiorum clementia ſita ſunt; æſtimantur quoque pleraque mortalium pretio, quod libido calumniandi conſtituit; & quis neget, eximium decus, ſæpiùs favoris, quàm virtutis eſſe beneficium? unde patrono & defenſore iis opus eſt, ſub cujus auſpiciis floreant. Algebræ nihil ad augendum faſtigium ſupereſt, hoc tamen uno modo creſcere poteſt. Te ergo præſertim invocat, cujus cepimus & affectus & judicii experimentum, quantum maximum

Muſæ

Musæ capere potuerunt. Indulgentiæ Tuæ propinquum exemplum est Astronomia, quam in Tuo gremio suscepisti, cum naufragium illud observationum Tychonicarum, quas invidiosâ tranquillitate provectas improvisus turbo abstulerat, Tuâ benignitate resarcires. Tuo beneficio patriam receperunt Taceo literas Græcas, quas majoribus suis ita reddidisti, ut illæ utrum plus Tibi, an Tu illis debeas, ambigi possit. Et ut verbo absolvam, Tuæ benevolentiæ usum nec litteris nec hominibus unquam denegasti. Quare illud extremum oro, ut eidem Generositati, cui tribuisti hoc, ut literas susciperes, attribuas, ut susceptas tuearis ac foveas: atque hoc grati animi, non omnino quale velim, sed quale possum hoc tempore monimentum, favore excipere digneris. Celebratum est famâ & acclamatione quantum Astronomiam amplificaverit Dania, Tibi verò renascentis Astronomiæ gratia debetur. Et si proposito annueris, non tam patriæ quàm Tibi debitorem constitues etiam Algebram, hoc est, Mathesin Universalem. Ego florentem virtutis Tuæ gloriam æternam opto, Tibique felicissimos annos precatus, in clientelam Tuam receptum esse, supra humanum solatium recreabor.

Illæ & Excmæ Dni Væ

Hafniæ, Anno
CIↃ IↃC LVII.

Deditissimus

ERASMIUS BARTHOLINUS,
Medicinæ & Mathematum Professor Regius.

ERASMI BARTHOLINI
Ad Tractatum de Natura & Constitutione Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS

Ad Clarißimum Virum

CLAUDIUM HARDY,

Regis Galliæ Consiliarium.

Quamvis sinistra hujus seculi judicia parùm apud me valeant, tamen à divulgandis ejusmodi quemlibet jure absterrerent, quæ diversas hominum censuras vitare nequeunt. Verùm ego alto supercilio spretis calumniis, æquitatis amantior & publicæ utilitatis, proposito desistere nolui, tibiq;, Vir Clarißime, exponere constitui, ea, quæ ad præfationem utilia esse putavi, eò libentiùs, quò cognoverim amicißimum tibi fuisse, dum in vivis esset, D. De Beaune, in Curia Blesensi Consiliarium Regium. Nam etsi vir hic fuerit pereleganti ingenio, & in tantum laudandus, in quantũ intelligi virtus potest; tamen hoc in eo maximum fuit, quòd Mathemata doctißimus, ut tempore æqualis Viro summo D. Des-Cartes, ita Analytices speciosæ peritiâ proximus. Quo momento impulsus, dum Blesiis linguæ Gallicæ exercendæ gratiâ degerem,

gerem, amicitiam tanti Viri colui, diligenterque eâ familiaritate usus sum, quâ ipse me comiter amplectebatur. Interea de rebus Mathematicis omnis ferè sermo, & quoties alterutri de Analyticis sermocinari volupe, toties nostra conferri colloquia necesse erat. Unde non obscurè intellexi, quantis fuerat ingenii dotibus ac studiorum eminens, à quo, si publica negotia permitterent, perfectio Algebræ maximè sperari posset. Quare variis precibus hortatus sum, ut, quæ meditatus erat, publicis destinaret usibus. Verùm ille multa sibi obstare, occupationes tam publicas quàm privatas, valetudinem, operas amicorum, ea denique principia, quæ ad intellectum suarum meditationum necessaria erant, desiderari innuebat. Tum ego, & meam operam ipsi polliceri paratissimam cœpi, & significare conscriptam esse à me Isagogen Cartesianam, quorum neutrum proposito moram afferre diutiùs posset. Quibus valde recreatus, de edendis operibus suis seriò cogitabat. Sed, cum Arthriticis doloribus plus solito lecto detineretur, omnem à Mathematicis, ad corporis valetudinem, curam transferre cogebatur. Ego interim ad perlustrandas reliquas

Gal-

Galliæ provincias avocatus, per aliquod tempus substiti Flexiæ; unde, cum varia negotia reverti Lutetiam suaderent, placuit Castrum Blesense transire, ut de sanitate amici certior fierem. Quem in prædio suo, cum doloribus Colicis acriter conflictantem, cùm deprehendissem, & affirmantem parùm prosperâ valetudine ex eo tempore se usum fuisse; non mediocriter dolui, egregiis inventis fortunam tam esse adversam: mea verò studia iteratò obtuli, promittens, me bono publico, ejusque gratiâ, quasvis subiturum molestias. Sed postquam relaxationis morbi nulla affulgeret spes, suspirans valedixi, iterque susceptum ingressus, Lutetiam redii. Vix ibi consueta studia revocaveram, cum literæ mihi redderentur ab hospite meo, Viro humanissimo, D. Antonio Marchais, in urbe Blesense tunc linguæ Gallicæ Professore, nunc verò Serenissimi Principis Gastonis, Ducis Aurelianensium, Mathematico, quibus nuntiabatur, ægrum nostrum, oculorum usu privatum fuisse, temporibus solstitii Brumalis, ab acrimonia defluxionis Arthriticæ; exoptasse verò meam præsentiam tanto desiderio, ut de editione cogitationum suarum desperaret, nisi meâ

H *operâ*

operâ uti posset; adeoque rogâsse, nisi grave nimis esset, operam quam pollicitus eram accommodarem. Exarserat eâ tempestate, bellum civile inter Regem Galliæ & Principes consanguineos, sedesque exercitus Principum erat Stampæ, quam obsidione aggrediebatur Dux exercitus Regii. Hac cum transeundum esset iis, qui ad Comitatum Blesensem pergunt; ancipiti curâ distractus, constitueram tamen longissimis viarum ambagibus, per Normanniam & Ducatum Andegavensem potiùs iter moliri, quàm spes amici deserere. Quippe ea pars territorii Parisiensis, Rothomagum versùs, tantùm militibus vacavit. Cum inexspectato, propter adventum exercitus Lotharingici, solutâ obsidione Stampæ, ager Gastinensis, milite utriusque partis liberaretur; prædonibus tamen infestari vias significatum est. Quare arreptâ occasione, dissuadentibus amicis, itineri me commisi; parvi æstimans, uno periculo, & amico prodesse, & præclara inventa redimere. Neque primas spes fortuna destituit; quippe emenso periculosissimo itinere, salvus revisi amicum, corpore satis sanum, nisi lumen oculorum rapuisset ægritudo. Sed dubium itine-

ris

ris eventum deterior fortuna excepit; cum in primordio nostrorum operum, forsan quòd diligentius, quàm permitteret anni tempus, Algebraïcis subtilitatibus incumberem, æstate mediâ, summis caloribus, sub Caniculam, in gravissimum morbum ex febri synocho inciderem. Et jam de mea salute desperantibus Medicis, inopinatò animam efflavit Vir Amplissimus D. De Beaune. Nam, cum amico aliquo, qui lecto ejus assederat, de rebus Analyticis differentem, subitò destituit vox, deinde totum corpus vitalis calor reliquit, atque evasit perpetuam valetudinem die 19 *Augusti, Anno* 1652, *natus Anno* 1601 *die* 27 *Sept. Sic præcipitantibus fatis, fefellit spes omnium mortalitas. Ego cum mihi indicari inconsultum ducerent nostri, dum morbus nondum declinaret, ne ægritudinem aggravarent, non nisi post multum tempus id rescivi. Tum nihil cunctatus, operam dedi, ut fidei meæ committerentur, quæ relicta fuerant adversaria, nullam curam mortuo detrectans, quam vivo destinaveram, publicæ utilitatis rationem habiturus. Reluctantibus verò hæredibus, cum alius pecuniâ sollicitasset animos eorum; parum abfuit, quin idem scripta, qui auctorem, casus traxisset. Ergo omni studio demonstrare occœpi, perituros omnes defuncti conatus nisi mihi traderentur; sparsas chartas, sine ordine, sine numero, sine explicatione, notis & characteribus exaratas supputationes, non ab alio intelligi posse, quàm qui aliquo tempore cum ipso familiariter vixisset. Quibus perpensis, tandem obtinui propositum, sed majori labore, quàm successu. Quippe omnia diligentiùs inspiciens, animadverti plura affectata quàm effecta. Inter tot adversaria solummodo absolutum inveni opus de Angulo Solido, quod jam pridem in publicum edidissem, nisi sumptus, propter copiam figurarum, Bibliopolæ fastidivissent. Tractatûs de Natura & Constitutione Æquationum ne litera quidem extabat, menti tamen D. de Beaune pleraque conformia esse differendo dum licuit cum vivo comperi. Ex iis, quæ de Limitibus Æquationum conscripsi, quædam reperta sunt in adversariis, quibus, cum multa desiderarentur, ultimam manum imponere necesse* *habui. Præfationem denique, quam Author huic operi præmittendam duxit, ne religio esset omittere, addidi. Non ignoras, Vir Clarissime, me rogatu Authoris omnia Gallicè prius conscripsisse, tibique & aliis perlegenda dedisse & corrigenda; tamen nunc Latinè edere coactus sum, ne diutiùs laterent. Nam etsi tibi, dum in Italia degerem, adeò cordi fuerit horum scriptorum à me tibi relictorum editio, ut sumptibus propriis excudi parares, quo nomine multum tibi debebunt posteri; tamen ne in Gallia quidem votum assecutus es. Quocirca, cum Amstelodami iterato prælo subjiceretur Geometria Renati Des-Cartes, id operam dedi, ut hæc unà imprimerentur. Consentiente verò Typographo modò Latinè extarent, placuit Latinam interpretationem in consilium adhibere, & potiùs authoris precibus inobediens, quàm publici negligentior reputari. Quod perpendendum relinquo iis, qui me violatæ fidei tacitè accusabunt. Subjunxissem alia, quorum vestigia adhuc supersunt in adversariis, sed quædam tanti indigent laboris, ut de restitutione quasi desperem, alia remoratur multitudo figurarum: cuncta tamen brevi videbit benevolus Lector, si Typographi obedierint. Interea hisce fruere, tuque Vir Clarissime, judica quid ex meis curis, & difficillimis itineribus, fructus colligi possit, tuum namque judicium erit instar omnium. Quod si tamen & alii confiteantur, hinc non exiguum emolumentum ad omnes redundare, rogo ut id Manibus Viri Clarissimi Florimondi de Beaune acceptum referant; errores verò si offenderint, benigne corrigant, meæque humanitati ascribant. Vale.*

FLO-

PRÆFATIO.

DEcreveram in publicum edere hosce tractatus, multò prolixiores atque perfectiores, proximo insequente anno. Verùm anni hujus initio conflictatus cum gravissimo ad oculos defluxu, oculorum usu privatus fui. Unde proposito planè destitissem, nisi D. Erasmius Bartholinus operam mihi suam, ne mea circa hanc artem inventa oblivione sepulta jacerent, obtulisset. Ejus igitur auxilio hoc opus composui, ad quod intelligendum suppono Lectores jam in Geometria Renati Des-Cartes versatos, additisque in eam Notis, à nobis olim (non quidem animo illas in publicum edendi) concinnatis; ut & doctissimis Francisci à Schooten Commentariis; nec non Principiis Matheseos Universalis, seu Introductione ad Methodum Geometriæ Renati Des-Cartes, ab eodem Bartholino editâ.

PRIOR TRACTATUS
DE
NATURA
ET
CONSTITUTIONE
ÆQUATIONUM.

DE

DE
NATURA AEQUATIONUM.

CAPUT I.

MUltò faciliùs inveniemus Naturam & Conſtitutionem Æquationum ex earum generatione & comparatione cum ſimilibus ſeu ejuſdem formæ, quàm conferendo earum radices cum certis mediis Geometricè proportionalibus, ut præſtitit Vieta.

Æquationes autem facilitatis gratiâ ita diſponere libet, ut omnes termini ab una parte reperiantur æquales nihilo, ponendo ipſos ordine, prout gradatim per incognitæ quantitatis dimenſiones deſcendunt. Primum enim terminum vocabimus, ipſam quantitatem incognitam, quæ plurimarum dimenſionum exiſtens nullis aliis quantitatibus adficitur; ſecundum verò, in quo incognita quantitas unâ dimenſione minor eſt; tertium in quo duabus; & ſic deinceps, uſque ad terminum omnino cognitum, quem pro ultimo habemus. Deinde, loca, ubi terminorum aliqui deficiunt, aſteriſco complebimus, quæ tum ſub numero terminorum comprehendentur. Hæc omnia beneficio tranſpoſitionis facilè peraguntur.

Ex iis, quæ ſcripta & commentata ſunt in Geometriam Renati des Cartes, nota eſt methodus cognoſcendi, quot haberi poſſint radices in qualibet Æquatione: nimirum, poſſe Æquationem tot habere veras radices, quot mutationes ſignorum continuæ adfuerint, & quoties eadem ſigna ſe invicem ſequuntur immutata, tot poſſe reperiri falſas radices: modò in numerum terminorum ii numerentur, qui deficiunt.

Porrò, duas Æquationes ſimiles eſſe dicimus ſeu ejuſdem formæ, quando in utraque idem eſt primus terminus, & reliqui termini in utraque ſimiliter ſunt affecti; & ſi in una terminus aliquis abfuerit, ut is quoque abſit in altera. Nam cùm ſimiles ſunt Æquationes, eandem habebunt conſtitutionem & naturam, & fieri poterit comparatio ſeu collatio ſingulorum terminorum unius cum ſingulis terminis correſpondentibus alterius.

Caput II.

De natura & conſtitutione Æquationum Quadratarum, ſeu duarum dimenſionum.

Quando æquationes hæ ſunt affectæ, reducuntur omnes ad tres formas ſequentes:

$$xx + lx - mm \propto 0$$
$$xx - lx - mm \propto 0$$
$$xx - lx + mm \propto 0.$$

1 *Propoſitio.*

Ad intelligendam naturam & conſtitutionem prioris æquationis, formetur per multiplicationem harum duarum $x - b \propto 0$ & $x + c \propto 0$ ſequens æquatio: $xx \begin{matrix}-b\\+c\end{matrix}x - bc \propto 0$. Supponendo igitur c majorem quàm b, eandem habebit formam atque prima propoſitarum $xx + lx - mm \propto 0$. & per conſequens, binæ hæ æquationes erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat collatio unius cum altera; & per comparationem terminorum ſecundorum habebimus $c - b \propto l$. Unde diſcimus, l eſſe differentiam inter falſam radicem c & veram b; &, cognitâ falsâ c, veram b eſſe æqualem ipſi $c - l$; &, cognitâ verâ b, falſam c eſſe æqualem ipſi $b + l$.

Præterea, ex comparatione poſtremorum terminorum habebimus mm æqualem bc. Unde ſequitur mm eſſe æquale rectangulo ſub vera & falſa radice; &, cognitâ falsâ c, veram b æqualem eſſe $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falſam c æqualem eſſe $\frac{mm}{b}$.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda æquatione propoſita formetur rurſus per multiplicationem duarum $x - b \propto 0$ & $x + c \propto 0$, æquatio $xx \begin{matrix}-b\\+c\end{matrix}x - bc \propto 0$. In qua ſi ſupponamus b majorem quàm c, erit ipſa ejuſdem formæ cum ſecunda propoſita $xx - lx - mm \propto 0$. Et per conſequens duæ illæ æquationes erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo collatione unius cum altera, habebimus ex collatio-latione ſecundorum terminorum $c - b \infty - l$, vel $l \infty b - c$. Unde diſcimus, quòd l eſt differentia inter veram radicem b & falſam c; & ſi cognita fuerit falſa c, erit vera b æqualis $l + c$; & ſi fuerit cognita vera b, falſa c erit æqualis $b - l$.

Porrò, per comparationem poſtremorum terminorum, habebimus $mm \infty bc$. Unde ſequitur mm eſſe æquale rectangulo ſub vera & falſa radice; &, cognitâ falsâ c, veram b eſſe æqualem $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falſam c eſſe $\infty \frac{mm}{b}$.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia ſupra poſita æquatione, formemus, per multiplicationem duarum $x - b \infty 0$ & $x - c \infty 0$, æquationem ſequentem $xx \begin{matrix} -b \\ -c \end{matrix} x + bc \infty 0$, & habebit eandem formam atque propoſita tertia $xx - lx + mm \infty 0$, & conſequenter hæ binæ æquationes erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Comparemus ergo unam cum altera, atque ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$. Unde diſcimus, quòd l eſt ſumma duarum verarum radicum, & ſi una earum, exempli gratiâ, c, eſt cognita, reliqua b æquabitur $l - c$.

Præterea ex comparatione ultimorum terminorum habebimus $mm \infty bc$, hoc eſt, mm æquale rectangulo ſub duabus veris radicibus, quarum ſi alterutra eſt nota, exempli gratiâ, c, altera b æquabitur $\frac{mm}{c}$.

Quantum ad æquationem quadratam $xx - mm \infty 0$, quæ non eſt affecta, ipſa oritur ex duabus ſequentibus $x - m \infty 0$, & $x + m \infty 0$. Unde ſequitur ipſam duas poſſidere radices, unam veram, alteram falſam, quarum utraque æquatur ipſi m.

CAPUT III.

De natura & conſtitutione Æquationum Cubicarum ſeu tertiæ dimenſionis, ſecundo termino carentium.

OMnes hæ æquationes reducuntur ad tres ſequentes formas:

$$x^3 * + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 * - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 * - mmx + n^3 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem prioris æquationis propositæ, formemus per multiplicationem harum duarum $xx + bx + cc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^3 * \begin{array}{l}-bbx\\+cc\end{array} - bcc \infty 0$. Supposito autem cc majori quàm bb, ipsa eandem habebit formam atque prima proposita $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0$. & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat igitur illarum collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $cc - bb \infty mm$. Unde constat, si vera radix b cognoscitur, cc fore æquale $mm + bb$, & consequenter $xx + bx + mm + bb \infty 0$. quæ æquatio duas reliquas radices respicit, ac cum vera radice b concurrit ad formandam æquationem propositam.

Præterea, factâ comparatione ultimorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$. Unde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b} \infty 0$ similiter duas reliquas radices respicere, & cum vera b concurrere ad formationem propositæ æquationis.

2 *Propositio.*

Pro secunda æquatione proposita formetur rursus per multiplicationem duarum $xx + bx + cc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 * \begin{array}{l}-bbx\\+cc\end{array} - bcc \infty 0$. Supposito autem bb majori quàm cc, habebit illa eandem formam atque secunda $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$, & per consequens habebunt eandem naturam & constitutionem. Fiat igitur collatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $bb - cc \infty mm$. Unde constat, cc esse æquale $bb - mm$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \infty 0$ duas reliquas radices concernere. Porrò, ex comparatione duorum postremorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$, unde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b}$ similiter ad duas reliquas respicere.

3 Pro-

3 *Propositio.*

Ad inveniendam naturam & constitutionem tertiæ æquationis propositæ, fiat ex duabus hisce $xx + bx - cc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ æquatio $x^3 * \begin{array}{l} -bbx \\ -cc \end{array} + bcc \propto 0$, eandem habens formam cum tertia proposita $x^3 * - mmx + n^3 \propto 0$. Unde & ipsæ eandem habebunt naturam atque constitutionem. Fiat ergo collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $bb + cc \propto mm$. Unde constat, cc æquale esse $mm - bb$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \propto 0$ ad duas reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $n^3 \propto bcc$, & per consequens $cc \propto \frac{n^3}{b}$. Quare, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx + bx - \frac{n^3}{b} \propto 0$ similiter duas reliquas radices concernet.

CAPUT IV.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, tertio termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur ad tres formas sequentes:

$$x^3 + lxx * - n^3 \propto 0.$$
$$x^3 - lxx * - n^3 \propto 0.$$
$$x^3 - lxx * + n^3 \propto 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis, fiat per multiplicationem harum duarum $xx + cx + bc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l} -bxx \\ -c \end{array} * - bbc \propto 0$. Et suppositâ c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam cum prima proposita $x^3 + lxx * - n^3 \propto 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ. Factâ ergo collatione, habebimus ex comparatione secundorum terminorum $c - b \propto l$, hoc est, $c \propto l + b$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, æquationem $xx \begin{array}{l}+b\\+l\end{array} x + bb + bl \infty 0$ duas reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione duorum ultimorum terminorum, habebitur $n^3 \infty bbc$, unde sequitur c esse æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ radice b, æquationem $xx + \frac{n^3}{bb}x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex multiplicatione harum duarum $xx + cx + bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l}-b\\+c\end{array} xx * - bbc \infty 0$. Et suppositâ b majore quàm c, erit ejusdem formæ cum secunda propositarum $x^3 - lxx * - n^3 \infty 0$, adeoque erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ igitur collatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $b - c \infty l$. Unde constat, c esse æqualem $b - l$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} x + bb - bl \infty 0$ duas reliquas radices respicere.

Porrò per comparationem postremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bbc$. Unde sequitur c esse æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, si vera radix fuerit cognita, hanc æquationem $xx + \frac{n^3}{bb}x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione formemus ex duabus $xx - cx - bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}-c\\-b\end{array} xx * + bbc \infty 0$, quæ habebit eandem formam atque tertia æquationum propositarum $x^3 - lxx * + n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Quare factâ collatione, per comparationem secundorum terminorum habebimus $c + b \infty l$. Unde discimus, quòd c æquetur $l - b$; &, si vera radix b sit cognita, quòd æquatio $xx \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} x + bb - bl \infty 0$ ad duas reliquas radices investigandas referri debeat.

Præ-

Praeterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $n^3 \infty bbc$, unde sequitur c æquari $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx - \frac{n^3}{bb}x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ reliquis duabus inveniendis inservire.

CAPUT V.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, in quibus omnes termini extant.

ÆQuationes hæ reducuntur ad septem formas sequentes:

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0.$$

I *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione $xx - cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$, æquatio sequens $x^3 \begin{array}{l} -bxx \\ -c \end{array} \begin{array}{l} +ddx \\ +bc \end{array} - bdd \infty 0$. atque eandem habebunt naturam & constitutionem. Factâ ergo comparatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$, vel $c \infty l - b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd + bc \infty mm$; hoc est, $dd \infty mm + bb - bl$, quoniam c est inventa æquari $l - b$. Unde apparet, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l} -lx \\ +b \end{array} + mm + bb - bl \infty 0$ duas reliquas radices respicere. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $bdd \infty n^3$, unde constat, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l} -lx \\ +b \end{array} + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ æquatio hæc

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -bxx & -bcx & -bdd & \propto 0. \\ & +c & +dd & & \end{array}$$

& suppositâ c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit eandem formam, quam propositio secunda $x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $c - b \propto l$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc \propto - mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, habebitur $dd \propto bl + bb - mm$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{ll} xx + lx + bb + bl - mm \propto 0 \\ + b & \end{array}$$

duabus reliquis radicibus investigandis esse utilem. Denique, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $bdd \propto n^3$. Unde sequitur dd fore æqualem $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ vera radice b, æquationem hanc

$$\begin{array}{l} xx + bx + \frac{n^3}{b} \propto 0 \\ + l \end{array}$$

reliquis duabus inservituram.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione, fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ eadem æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -bxx & -bcx & -bdd & \propto 0. \\ & +c & +dd & & \end{array}$$

Et suppositâ b majore quàm c, & bc majore quàm dd, erit ejusdem formæ cum tertia propositarum $x^3 - lxx - mmx - n^3 \propto 0$, & consequenter ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $c - b \propto - l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc \propto - mm$, hoc est, substituto valore invento ipsius c, erit $dd \propto bb - bl - mm$. Unde constat, quòd, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{lll} xx & + bx & + bb \propto 0 \\ & - l & - bl \\ & & - mm \end{array}$$

ad duas investigandas reliquas adhiberi possit. Denique, ex collatione

latione poſtremorum terminorum, habebitur $bdd \propto n^3$. Unde ſequitur, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} x + \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad duas reliquas quærendas eſſe utilem.

4 Propoſitio

Pro quarta propoſitarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ eadem æquatio $x^3 \begin{array}{l}-b\\+c\end{array} xx \begin{array}{l}-bc\\+dd\end{array} x - bdd \propto 0$. Et ſuppoſitâ c majore quàm b, & dd majore quàm bc, erunt ejuſdem formæ ac quarta propoſitio $x^3 + lxx + mmx - n^3 \propto 0$, & conſequenter ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $c - b \propto l$, ſeu $c \propto l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $dd - bc \propto mm$, hoc eſt, reſtituto valore ipſius c invento, erit $dd \propto bb + bl + mm$. Unde conſtat, cognitâ vera radice b, hanc æquationem $xx \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} x + bb + bl + mm \propto 0$ duas reliquas radices reſpicere. Denique ex collatione poſtremorum terminorum habebimus $bdd \propto n^3$. Unde ſequitur, dd fore æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{array}{l}+b\\+l\end{array} x + \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad indagandas duas reliquas adhiberi poſſe.

5 Propoſitio.

Pro quinta propoſitione fiat ex multiplicatione $xx - cx - dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ æquatio $x^3 \begin{array}{l}-c\\-b\end{array} xx \begin{array}{l}-dd\\+bc\end{array} x + ddb \propto 0$. Et ſuppoſito bc majore quàm dd, erit ejuſdem formæ cum quinta propoſitarum $x^3 - lxx + mmx + n^3 \propto 0$, & conſequenter ejuſdem naturæ & conſtitutionis erunt. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione ſecundorum terminorum, habebimus $l \propto c + b$, vel $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $bc - dd \propto mm$, hoc eſt, reſtituto valore ipſius c invento, erit $dd \propto bl - bb - mm$. Unde diſcimus, cognitâ radice verâ b, æqua-

æquationem hanc $xx \begin{smallmatrix}-l\\+b\end{smallmatrix}x - bl + bb + mm \infty 0$ duabus reliquis inveniendis esse usui. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd$. Unde colligitur dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ radice verâ b, hanc æquationem $xx \begin{smallmatrix}-l\\+b\end{smallmatrix}x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ duabus reliquis inveniendis inservire.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione formetur ex duabus $xx + cx - dd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 \begin{smallmatrix}+c\\-b\end{smallmatrix}xx \begin{smallmatrix}-dd\\-bc\end{smallmatrix}x + ddb \infty 0$. Et, suppositâ c majori quàm b, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositarum $x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, seu $c \infty l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum erit $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituto valore c invento, habebitur $dd \infty mm - bl - bb$. Unde constat, si vera radix b sit cognita, hanc æquationem $xx \begin{smallmatrix}+l\\+b\end{smallmatrix}x \begin{smallmatrix}-mm\\+bl\\+bb\end{smallmatrix} \infty 0$, pro duabus reliquis inveniendis usui futuram. Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $ddb \infty n^3$: & per consequens $dd \infty \frac{n^3}{b}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx \begin{smallmatrix}+l\\+b\end{smallmatrix}x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad investigandas duas reliquas utilis erit.

7 *Propositio.*

Pro septima propositione formetur ex duabus $x - b \infty 0$ & $xx + cx - dd \infty 0$ æquatio $x^3 \begin{smallmatrix}+c\\-b\end{smallmatrix}xx \begin{smallmatrix}-dd\\-bc\end{smallmatrix}x + ddb \infty 0$. Suppositâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam cum septima propositarum $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ igitur comparatione, orietur ex collatione secundorum terminorum,

$l \infty b -$

$l \propto b - c$, seu $c \propto b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $mm \propto bc + dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, habebitur $dd \propto mm - bb + bl$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{array}{l} +bx \\ -l \end{array} - mm + bb - bl \propto 0$ ad inveniendas duas reliquas inservire. Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $ddb \propto n^3$, unde erit dd æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cùm cognoscitur vera radix b, hæc æquatio $xx \begin{array}{l} +bx \\ -l \end{array} - \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad duas reliquas inveniendas adhiberi poterit.

CAPUT VI.

De naturâ & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentium.

HUjus generis æquationes ad tres formas sequentes reducuntur:

$$x^4 ** + n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 ** - n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 ** \mp n^3x + p^4 \propto 0.$$

I *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis formemus ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 ** \begin{array}{l} +c^3x \\ -b^3 \end{array} - bc^3 \propto 0$. Supposito verò c^3 majore quàm b^3, habebit ea eandem formam atque prima propositio $x^4 ** + n^3x - p^4 \propto 0$, & per consequens erit ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebitur $c^3 - b^3 \propto n^3$, hoc est, $c^3 \propto n^3 + b^3$. unde cognoscimus, quando innotescit vera radix b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx + n^3 + b^3 \propto 0$ spectare ad investigationem trium reliquarum radicum.

Prætérea, collatis ultimis terminis, fit $p^4 \propto bc^3$: unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

 $x^3 +$

$x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas investigandas posse usurpari.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * * + c^3 x - bc^3 \infty 0$. Et, si pona-
$- b^3$
tur b^3 major quàm c^3, habebit illa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 * * - n^3 x - p^4 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 - b^3 \infty - n^3$, hoc est, $c^3 \infty b^3 - n^3$. Unde cognoscimus, inventâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 - n^3 \infty 0$, ad tres reliquas radices respicere. Porrò, comparatis inter se terminis ultimis, habebimus $p^4 \infty bc^3$. Unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tres reliquas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx - c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^4 * * - c^3 x + bc^3 \infty 0$, & habebit eandem
$- b^3$
formam atque tertia propositarum $x^4 * * - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 + b^3 \infty n^3$, hoc est, $c^3 \infty n^3 - b^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - n^3 + b^3 \infty 0$ ad tres reliquas investigandas adhiberi posse. Præterea ex collatione ultimorum habebitur $p^4 \infty bc^3$. Unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas quærendas esse utilem.

CAPUT VII.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, tertio & quarto termino carentium.

ÆQuationes hæ ad sequentes tres formas reducuntur:

$$x^4 + lx^3 ** - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 ** - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 ** + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione harum duarum $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + \begin{array}{l} c \\ -b \end{array} x^3 ** - b^3 c \infty 0.$ Supposità vero c majore quàm b, habebit illa eandem formam atque prima propositio $x^4 + lx^3 ** - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + \begin{array}{l} b \\ +l \end{array} xx + \begin{array}{l} bl \\ +bb \end{array} x + b^3 + bbl \infty 0$ tribus reliquis investigandis inservire. Deinde, collatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty b^3 c$. unde sequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + \frac{p^4}{b^3} xx + \frac{p^4}{bb} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas adhiberi posse.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + \begin{array}{l} c \\ -b \end{array} x^3 ** - b^3 c \infty 0.$ Et supponendo b superare ipsam c, habebit illa eandem formam atque secunda propositio $x^4 - lx^3 ** - p^4 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo æquatio, & collatis secundis terminorum habebimus $-b + c \infty - l$, hoc est,

est, $c \infty b - l$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 \begin{smallmatrix}+b\\-l\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+bb\\-bl\end{smallmatrix} x + b^3 - bbl \infty 0$ ad tres reliquas investigandas usurpari posse. Præterea, comparando postremos terminorum, habebimus $p^4 \infty b^3 c$. Unde sequitur, c æquari $\frac{p4}{b3}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + \frac{p4}{b3} xx + \frac{p4}{bb} x + \frac{p4}{b} \infty 0$ tribus reliquis inservire.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione formetur ex duabus $x^3 - cxx - bcx - bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio hæc $x^4 \begin{smallmatrix}-c\\-b\end{smallmatrix} x^3 ** + b^3 c \infty 0$, & erit ejusdem formæ atque tertia propositarum $x^4 - lx^3 ** + p^4 \infty 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{smallmatrix}-l\\+b\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}-bl\\+bb\end{smallmatrix} x - bbl + b^3 \infty 0$ tribus reliquis inservire. Porrò, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \infty b^3 c$, & per consequens $c \infty \frac{p4}{b3}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 - \frac{p4}{b3} xx - \frac{p4}{bb} x - \frac{p4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas radices investigandas adhiberi.

Non operæ pretium duximus meminisse æquationum quatuor dimensionum, in quibus secundus & quartus terminus desunt: quia illæ omnes reducuntur ad Quadratas, ac idcirco earum natura & constitutio eodem modo habetur.

CAPUT VIII.

De natura & conſtitutione Æquationum quatuor dimenſionum, ſecundo termino carentium.

ÆQuationes hæ reducuntur ad ſeptem formas ſequentes:

$$x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \propto 0.$$
$$x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0.$$

1 *Propoſitio.*

Ad cognoſcendam naturam & conſtitutionem primæ propoſitionis, fiat ex multiplicatione duarum $x^3 + bxx - ccx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 * \begin{array}{l} -ccxx \\ -bb \end{array} \begin{array}{l} +d^3x \\ +bcc \end{array} - bd^3 \propto 0$, quæ eandem habebit formam atque prima propoſitarum $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione tertiorum terminorum habebimus $mm \propto cc + bb$, hoc eſt, $cc \propto mm - bb$. Deinde, comparando terminos quartos, erit $n^3 \propto d^3 + bcc$, hoc eſt, reſtituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \propto n^3 + b^3 - bmm$. Unde comperimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l} -mmx \\ +bb \end{array} \begin{array}{l} +n^3 \\ +b^3 \\ -bmm \end{array} \propto 0$ tribus reliquis indagandis inſervire. Præterea, conferendo inter ſe terminos ultimos, habebimus $p^4 \propto bd^3$. Unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, inventâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l} -mmx \\ +bb \end{array} + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas quærendas adhiberi poſſe.

2 *Propositio.*

Pro secunda fiat ex multiplicatione $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ per $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * + \begin{matrix} cc \\ -bb \end{matrix} xx + \begin{matrix} d^3 \\ -ccb \end{matrix} x - d^3 b \infty 0$. Supposito verò cc majore quàm bb, & ccb majore quàm d^3, habebit illa eandem formam cum secunda propositarum $x^4 * + mm\,xx - n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc est, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $-ccb + d^3 \infty -n^3$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty b\,mm + b^3 - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem $x^3 + bxx + \begin{matrix} mm \\ +bb \end{matrix} x + \begin{matrix} b\,mm \\ +b^3 \\ -n^3 \end{matrix} \infty 0$, tribus reliquis investigandis inservire.

Præterea, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + \begin{matrix} mm \\ +bb \end{matrix} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas posse usurpari.

3 *Propositio.*

Pro tertia, fiat ex duabus his $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^4 * + \begin{matrix} cc \\ -bb \end{matrix} xx + \begin{matrix} d^3 \\ -ccb \end{matrix} x - d^3 b \infty 0$. Et, supposito bb majore quàm cc, & ccb majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 * - mm\,xx - n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Unde factâ adæquatione, ex collatione tertiorum terminorum habebimus $-mm \infty -bb + cc$, hoc est, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $-n^3 \infty -ccb + d^3$, hoc est, substituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty b^3 - b\,mm - n^3$. unde patet, si cognita sit radix vera b, hanc æquationem $x^3 + bxx + \begin{matrix} bb \\ -m^2 \end{matrix} x + \begin{matrix} b^3 \\ -bm^2 \\ -n^3 \end{matrix} \infty 0$

tri-

tribus reliquis investigandis inservire. Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$, ac proinde $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 + bxx \begin{array}{l} +bbx \\ -mm \end{array} + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres investigandas usurpari.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositarum formemus ex duabus $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^4 * \begin{array}{l} +ccxx \\ -bb \end{array} \begin{array}{l} +d^3x \\ -ccb \end{array} -d^3b \infty 0$. Et supposito cc majore quàm bb, ac d^3 majore quàm ccb, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc est, $cc \infty mm + bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty d^3 - ccb$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty b^3 + bmm + n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx \begin{array}{l} +mmx \\ +bb \end{array} \begin{array}{l} +b^3 \\ +bmm \\ +n^3 \end{array} \infty 0$ tribus reliquis quærendis inservire. Denique, collatis ultimis terminis, erit $d^3b \infty p^4$; & per consequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 + bxx \begin{array}{l} +mmx \\ +bb \end{array} + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres indagandas erit adhibenda.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus $x^3 + bxx - ccx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * \begin{array}{l} -ccxx \\ -bb \end{array} \begin{array}{l} -d^3x \\ +bcc \end{array} + d^3b \infty 0$. Et supposito bcc majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \infty cc + bb$,

hoc

hoc eſt, $cc \infty mm - bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty bcc - d^3$; ideoque, reſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty bmm - b^3 - n^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l}-mm\\+bb\end{array} x \begin{array}{l}-bmm\\+b^3\\+n^3\end{array} \infty 0$ reliquis tribus quærendis inſervituram. Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $d^3b \infty p^4$. Unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l}-mm\\+bb\end{array} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas inveſtigandas poſſe adhiberi.

6 Propoſitio.

Pro ſexta propoſitione formemus ex duabus $x^3 + bxx + ccx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^4 * \begin{array}{l}+cc\\-bb\end{array} xx \begin{array}{l}-d^3\\-ccb\end{array} x + d^3b \infty 0$. & ſupponendo cc majus quàm bb, habebit ipſa eandem formam cum ſexta propoſitarum $x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens erit utraque ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc eſt, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc eſt, reſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty n^3 - bmm - b^3$. Unde patet, datâ verâ radice b, æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l}+mm\\+bb\end{array} x \begin{array}{l}-n^3\\+bmm\\+b^3\end{array} \infty 0$ ad trium reliquarum inveſtigationem poſſe uſurpari.

Poſtremò, comparando ultimos terminos, erit $p^4 \infty d^3b$, unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l}+mm\\+bb\end{array} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres quærendas eſſe adhibendam.

I *Propositio.*

Pro septima propositarum fiat ex duabus $x^3 + bxx + ccx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * \begin{array}{l}+cc\\-bb\end{array} xx \begin{array}{l}-d^3\\-bcc\end{array} x + bd^3 \infty 0$. Et supposito bb majore quàm cc, habebit ipsa eandem formam atque septima propositio $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $-mm \infty -bb + cc$, hoc est, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty n^3 - b^3 + bmm$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l}+bb\\-mm\end{array} x \begin{array}{l}-n^3\\+b^3\\-bmm\end{array} \infty 0$ ad reliquas tres investigandas utilem esse. Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde discimus, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l}+bb\\-m^2\end{array} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres quærendas adhiberi posse.

CAPUT IX.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, quarto termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur omnes ad septem sequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad investigandam naturam & constitutionem primæ propositionis, formemus ex duabus $x^3 - cxx + ddx + bdd \propto 0$ & $x - b \propto 0$ æquationem hanc

$$\begin{array}{llll} x^4 & - cx^3 & + ddxx * & - bbdd \propto 0; \\ & - b & + bc & \end{array}$$

habebitque ipsa eandem formam atque prima propositio $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \propto 0$, & per consequens duæ illæ æquationes ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \propto c + b$, seu $c \propto l - b$. Deinde, comparando tertios terminos, erit $mm \propto dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \propto mm - bl + bb$. unde constat, si cognoscitur vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & - lxx & + mmx & + bmm \propto 0 \\ & + b & - bl & - bbl \\ & & + bb & + b^3 \end{array}$$

ad reliquas tres investigandas inservire.

2. *Propositio.*

Pro secunda propositione formemus ex duabus $x^3 + cxx + ddx + bdd \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 & + cx^3 & + ddxx & * - ddbb \propto 0. \\ & - b & - bc & \end{array}$$

Suppositâ verò c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit illa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \propto 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, erit $-mm \propto dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \propto bl + bb - mm$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & + blx & + bbl \propto 0 \\ & + b & + bb & + b^3 \\ & & - m^2 & - bm^2 \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas posse adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bbdd$, unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cùm cognoscitur vera

radix

radix b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+l\\+b\end{array} xx \begin{array}{l}+bl\\+bb\\-mm\end{array} x + \frac{p^4}{b} \propto 0$ tres reliquas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione, fiat ex duabus $x^3+cxx+ddx+bdd \propto 0$ & $x-b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+c\\-b\end{array} x^3 \begin{array}{l}+dd\\-bc\end{array} xx * -bbdd \propto 0$. Suppositis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4-lx^3-mmxx*-p^4 \propto 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $-l \propto c-b$, hoc est, $c \propto b-l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $-mm \propto dd-bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \propto bb-bl-mm$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} xx \begin{array}{l}+bb\\-bl\\-m^2\end{array} x \begin{array}{l}-bbl\\+b^3\\-bm^2\end{array} \propto 0$ tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} xx \begin{array}{l}+bb\\-bl\\-mm\end{array} x + \frac{p^4}{b}$ pro tribus reliquis usurpari.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3+cxx+ddx+bdd \propto 0$ & $x-b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+c\\-b\end{array} x^3 \begin{array}{l}+dd\\-bc\end{array} xx * -bbdd \propto 0$. Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4+lx^3+mmxx*-p^4 \propto 0$, ac per consequens duæ illæ æquationes eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $l \propto c-b$, hoc est, $c \propto l+b$. Dein-

 de,

de, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bl + bb$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + mmx & + bmm & \infty\ 0 \\ + b & + bl & + bbl & \\ & + bb & + b^3 & \end{array}$$

ad tres reliquas adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + mmx & + \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ + l & + bl & & \\ & + bb & & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas esse utilem.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - cx^3 & - ddxx\ * & + bbdd & \infty\ 0. \\ - b & + bc & & \end{array}$$

Et supponendo bc majus quàm dd, erit ipsa ejusdem formæ cum quinta propositione $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, & comparatis secundis terminis, habebimus $l \infty b + c$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc est, restituendo valorem inventum c, erit $dd \infty bl - bb - mm$. unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - bbl & \infty\ 0 \\ + b & + bb & + bmm & \\ & + mm & + b^3 & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas adhiberi posse.

Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $bbdd \infty p^4$, ac per consequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ + b & + bb & & \\ & + mm & & \end{array}$$

pro tribus reliquis investigandis inservire poterit.

6 Propositio.

Pro sexta propositarum, fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 + cx^3 & - ddxx & * + bbdd & \infty\ 0. \\ \quad\ - b & - bc & & \end{array}$$

Supponendo autem c majorem quàm b, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositio, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm - bl - bb$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & - mmx & - bmm & \infty\ 0 \\ \quad + b & + bl & + bbl & \\ & + bb & + b^3 & \end{array}$$

tres reliquas radices respicere.

Postremò, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty bbdd$, ac per consequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & - mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad + b & + bl & & \\ & + bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas erit adhibenda.

7 Propositio.

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 + cx^3 & - ddxx & * + bbdd & \infty\ 0. \\ \quad\ - b & - bc & & \end{array}$$

Suppositâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam atque septima propositarum $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bb + bl$. unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & - bmm & \infty\ 0 \\ \quad - l & - bl & - bbl & \\ & + bb & + b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire. Denique, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$, ac per consequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$x^3 \begin{array}{l} +bxx \\ -l \end{array} \begin{array}{l} -mmx \\ -bl \\ +bb \end{array} -\frac{p^4}{b} \infty 0$$

ad tres reliquas erit referenda.

Caput X.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, tertio termino carentium.

Reducuntur autem hæ æquationes ad septem sequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 * + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0.$$

I Propositio.

Pro natura & constitutione primæ propositionis, formemus ex duabus $x^3 - cxx - bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hanc æquationem

$$x^4 \begin{array}{l} -cx^3 \\ -b \end{array} * \begin{array}{l} +d^3x \\ +bbc \end{array} - bd^3 \infty 0,$$

& habebit ipsa eandem formam atque prima propositio $x^4 - lx^3 * + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis Fiat ergo adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc est, restituendo valorem inventum c, erit $d^3 \infty n^3 - bbl + b^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l} -lxx \\ +b \end{array} \begin{array}{l} -blx \\ +bb \end{array} \begin{array}{l} +n^3 \\ +b^3 \\ -bbl \end{array} \infty 0$$

ad tres reliquas quærendas adhiberi posse. Denique, comparando ulti-

ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l}-lxx\\+b\end{array} \begin{array}{l}-blx\\+bb\end{array} + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres erit referenda.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+cx^3\\-b\end{array} * \begin{array}{l}+d^3x\\-bbc\end{array} - d^3b \infty 0$. Suppoſitis autem c majore quàm b, & bbc majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque ſecunda propoſitio $x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus, $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $d^3 - bbc \infty -n^3$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem c inventum, erit $d^3 \infty bbl + b^3 - n^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+lxx\\+b\end{array} \begin{array}{l}+blx\\+bb\end{array} \begin{array}{l}+bbl\\+b^3\\-n^3\end{array} \infty 0$ tribus reliquis inſervire. Poſtremò, per comparationem ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty bd^3$, ac per conſequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l}+lxx\\+b\end{array} \begin{array}{l}+blx\\+bb\end{array} + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas inveſtigandas erit utilis.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+cx^3\\-b\end{array} * \begin{array}{l}+d^3x\\-bbc\end{array} - d^3b \infty 0$. Suppoſitis autem b majore quàm c, & bbc majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque tertia propoſitio $x^4 - lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat itaque earum adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $-l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty -l + b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $d^3 - bbc \infty -n^3$, hoc eſt, reſti-

restituendo valorem c inventum, erit $d^3 \propto -lbb + b^3 - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -lxx & -blx & -lbb & \propto 0 \\ & +b & +bb & +b^3 & \\ & & & -n^3 & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas esse utilem. Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto d^3 b$, ac per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -lxx & -blx & +\frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ & +b & +bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

4 Propositio.

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & +cx^3 & * & +d^3x & -d^3b & \propto 0. \\ & -b & & -bbc & & \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & d^3 majore quàm bbc, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositarum $x^4 + lx^3 * + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis terminis habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto b + l$. Deinde, comparando quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 - bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \propto n^3 + b^3 + bbl$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & +bbx & +n^3 & \propto 0 \\ & +l & +bl & +b^3 & \\ & & & +bbl & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto d^3 b$, ac per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & +bbx & +\frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ & +l & +bl & & \end{array}$$

tribus reliquis inserviet.

5 Propositio.

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - bcx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & -cx^3 & * & -d^3x & +bd^3 & \propto 0. \\ & -b & & +bbc & & \end{array}$$

Supponendo autem bbc majus quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque

atque quinta propoſitio $x^4 - lx^3 * + n^3x + p^4 \propto 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque ſecundos terminos habebimus $l \propto c + b$, hoc eſt, $c \propto l - b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \propto bbc - d^3$, hoc eſt, $d^3 \propto bbl - b^3 - n^3$, ſubſtituto nempe valore c invento. Unde patet, cùm innoteſcit vera radix b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & -lxx & -blx & -bbl & \propto 0 \\ & +b & +bb & +b^3 & \\ & & & +n^3 & \end{array}$$
tribus reliquis inſervire.

Poſtremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \propto d^3b$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & -lxx & -blx & -\frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ & +b & +bb & & \end{array}$$
ad tres reliquas inveſtigandas eſſe adhibendam.

6 *Propoſitio.*

Pro ſexta propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, æquatio
$$\begin{array}{llllll} x^4 & +cx^3 & * & -d^3x & +bd^3 & \propto 0. \\ & -b & & -bbc & & \end{array}$$
Suppoſitâ autem c majore quàm b, habebit ipſa eandem formam atque ſexta propoſitarum $x^4 + lx^3 * - n^3x + p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque ſecundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \propto d^3 + bbc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \propto n^3 - bbl - b^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & +lxx & +blx & -n^3 & \propto 0 \\ & +b & +bb & +bbl & \\ & & & +b^3 & \end{array}$$
tribus reliquis inſervire.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bd^3$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & +lxx & +blx & -\frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ & +b & +bb & & \end{array}$$
ad reliquas tres eſſe referendam.

I Propositio.

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+c\\-b\end{array} x^3 * \begin{array}{l}-d^3\\-bbc\end{array} x + bd^3 \infty 0$. Supponendo autem b majorem quàm c, habebit ipsa eandem formam atque septima propositarum $x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $c - b \infty - l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - b^3 + bbl$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} xx \begin{array}{l}+bb\\-bl\end{array} x \begin{array}{l}-n^3\\-bbl\\+b^3\end{array} \infty 0$ reliquis tribus inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty d^3b$. unde constat, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} xx \begin{array}{l}+bb\\-bl\end{array} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

CAPUT XI.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, in quibus nullus terminus deest.

REducuntur hæ æquationes omnes ad quindecim sequentes formas:

$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$

$x^4 -$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis dignoscendâ fiat ex duabus hisce, $x^3 - cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & +ddxx & -f^3x & +bf^3 \infty 0, \\ & -b & +bc & -bdd & \end{array}$$

quæ eandem habebit formam atque prima propositarum $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bl + bb$. Tum per collationem quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc est, substituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl - bmm - b^3$. Unde constat, cùm innotescit vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & -n^3 \infty 0 \\ & +b & +bb & -bbl \\ & & -bl & +bmm \\ & & & +b^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & -ddxx & -f^3x & +bf^3 \infty 0. \\ & -b & +bc & +bdd & \end{array}$$

Suppositis autem bc majore quàm dd, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty bl - bb - mm$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty bbl - b^3 - bmm - n^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +n^3 \infty 0 \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & -bl & +bmm \\ & & & -bbl \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas posse adhiberi.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$, & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & -ddxx & -f^3x & +bf^3 \infty 0. \\ & -b & +bc & +bdd & \end{array}$$

Suppositis autem dd majore quàm bc, & f^3 majore quàm bdd, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $bc - dd \infty - mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty bl + mm - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $bdd - f^3 \infty - n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl + bmm - b^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æqua-

æquationem $\begin{array}{llll} x^3 & -l\,xx & -bl\,x & -n^3 \;\infty\; 0 \\ & +b & -mm & -bbl \\ & & +bb & -bm^2 \\ & & & +b^3 \end{array}$ tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{llll} x^3 & -l\,xx & -mm\,x & -\frac{p4}{b} \;\infty\; 0 \\ & +b & -bl & \\ & & +bb & \end{array}$ ad tres reliquas esse referendam.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $\begin{array}{lllll} x^4 & -c\,x^3 & -dd\,xx & -f^3\,x & +bf^3 \;\infty\; 0. \\ & -b & +bc & +bdd & \end{array}$ Suppositis autem dd majore quàm bc, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $c \infty l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $bc - dd \infty - mm$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm + bl - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm + bbl - b^3 - n^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -l\,xx & -mm\,x & -bmm \;\infty\; 0 \\ & +b & -bl & -bbl \\ & & +bb & +b^3 \\ & & & +n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{llll} x^3 & -l\,xx & -mm\,x & -\frac{p4}{b} \;\infty\; 0 \\ & +b & -bl & \\ & & +bb & \end{array}$ ad tres reliquas esse referendam.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, formemus ex duabus, $x^3 + cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 + cx^3 & + ddxx & - f^3x & + bf^3 \infty 0. \\ - b & - bc & - bdd & \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos, habebimus $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty mm + bl + bb$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty f^3 + ddb$, hoc est, restituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 - mmb - bbl - b^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + mmx & - n^3 & \infty 0 \\ + b & + bl & + m^2b & \\ & + bb & + bbl & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \infty p^4$, ac per consequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty 0 \\ + b & + bl & & \\ & + bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 - bx^3 & - bcxx & - bddx & + bf^3 & \infty 0. \\ + c & + dd & - f^3 & & \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty - mm$, hoc est, substituto valore c inven-

invento, erit $dd \infty bl + bb - mm$. Tum, comparando quartos terminos, habebitur $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc est, restituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + bmm - b^3 - bbl$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 + lxx & + blx & - n^3 & \infty\ 0 \\ \quad\ + b & + bb & - bmm & \\ & - mm & + bbl & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad\ + b & + bb & & \\ & - mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

7 *Propositio.*

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & - ddxx & - f^3x & + bf^3 & \infty\ 0. \\ \quad\ - b & - bc & + bdd & & \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque septima propositio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty b + l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bb - bl$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - b^3 - bbl - n^3$. Unde sequitur, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$$\begin{array}{lllll} x^3 + bxx & - mmx & - bmm & \infty\ 0 \\ \quad\ + l & + bb & + b^3 & \\ & + bl & + bbl & \\ & & + n^3 & \end{array}$$

reliquis tribus inservire.

Postremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquatiotionem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +l & +bb & \\ & & +bl & \end{array}$$

ad reliquas tres esse referendam.

8 *Propositio.*

Pro octava propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & -cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b \infty 0. \\ & -b & +bc & -bdd & \end{array}$$

Supposito autem bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque octava propositio $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bl + bb$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - bdd \infty - n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - bbl - n^3 + b^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +bmm \infty 0 \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & -bl & -bbl \\ & & & -n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +\frac{p4}{b} \infty 0 \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

9 *Propositio.*

Pro nona propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & -cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b \infty 0. \\ & -b & +bc & -bdd & \end{array}$$

Supposito verò f^3 majore quàm bdd, erit ipsa ejusdem formæ cum propositione nona $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per con-

consequens habebunt duæ illæ æquationes eandem naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty b + c$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc est, subrogato valore c invento, erit $dd \infty mm + bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, fiet $n3 \infty f3 - bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f3 \infty n3 + b3 + bmm - bbl$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x3 \begin{array}{l} -\,l \\ +\,b \end{array} xx \begin{array}{l} +\,mm \\ +\,bb \\ -\,bl \end{array} x \begin{array}{l} +\,n^3 \\ +\,bmm \\ +\,b^3 \\ -\,bbl \end{array} \infty\; 0$$

tribus reliquis inservire.

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $f^3 b \infty p^4$. unde sequitur, $f3$ æquari $\frac{p4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l} -\,l \\ +\,b \end{array} xx \begin{array}{l} +\,mm \\ +\,bb \\ -\,bl \end{array} x + \frac{p4}{b} \infty\; 0$$

ad tres reliquas esse referendam.

10 *Propositio.*

Pro decima propositione fiat ex duabus hisce $x3 + cxx + ddx + f3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$x^4 \begin{array}{l} +\,c \\ -\,b \end{array} x^3 \begin{array}{l} +\,dd \\ -\,bc \end{array} xx \begin{array}{l} +\,f3 \\ -\,bd^2 \end{array} x - f3b \infty\; 0.$$

Suppositis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, necnon bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque decima propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $c - b \infty - l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty - mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty bb - bl - mm$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebitur $f3 - bdd \infty - n3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f3 \infty b3 - bbl - bmm - n^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x3 \begin{array}{l} +\,b \\ -\,l \end{array} xx \begin{array}{l} +\,bb \\ -\,bl \\ -\,m^2 \end{array} x \begin{array}{l} +\,b3 \\ -\,bbl \\ -\,bmm \\ -\,n3 \end{array} \infty\; 0$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty bf^3$. unde constat, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & -l & -bl & \\ & & -mm & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

11 *Propositio.*

Pro undecima propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & +cx^3 & -ddxx & +f^3x & -bf^3 \infty 0. \\ & -b & -bc & +ddb & \end{array}$$

Suppositâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam atque undecima propositio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm - bb + bl$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebitur $n^3 \infty f^3 + ddb$, hoc est, substituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 - mmb + b^3 - bbl$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & -mmx & +n^3 \quad \infty 0 \\ & -l & +bb & -bbl \\ & & -bl & -mmb \\ & & & +b^3 \end{array}$$

reliquis tribus inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $bf^3 \infty p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & -mmx & +\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & -l & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad reliquas tres esse referendam.

12 *Propositio.*

Pro duodecima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b \infty 0. \\ & -b & -bc & -bdd & \end{array}$$

Suppo-

Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque duodecima propositio $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty o$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde conferendo secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd - bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bb + bl$. Tum comparando quartos terminos habebimus $f^3 - bdd \infty - n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm + bbl + b^3 - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \infty o \\ + l & + bl & + bbl & \\ & + mm & + bm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis postremis terminis, habebimus $bf^3 \infty p^4$, ac per consequens $f^3 \infty \frac{p4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p4}{b} & \infty o \\ + l & + bl & & \\ & + mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

13 *Propositio.*

Pro decima tertia propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty o$ & $x - b \infty o$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & + ddxx & + f^3x & & \\ - b & - bc & - bdd & - f^3b & \infty o. \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non f^3 majore quàm bdd, habebit ipsa eandem formam atque decima tertia propositio $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty o$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis terminis, habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, restituto valore c invento, erit $dd \infty mm + bb + bl$. Tum, comparatis quartis terminis, habebimus $n^3 \infty f^3 - bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + b^3 + bbl + bmm$. Unde constat, cognitâ

 verâ

vera radice b, hanc æquationem $\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & +bbx & +b^3 & \infty\, 0 \\ & +l & +bl & +bbl & \\ & & +m^2 & +n^3 & \\ & & & +bm^2 & \end{array}$

reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \infty p^4$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +\frac{p^4}{b} \infty\, 0 \\ & +l & +bl & \\ & & +mm & \end{array}$ ad reliquas tres eſſe referendam.

14 *Propoſitio.*

Pro decima quarta propoſitione formemus ex duabus hiſce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty\, 0$ & $x - b \infty\, 0$ hanc æquationem $\begin{array}{llllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b & \infty\, 0. \\ & -b & -bc & -bdd & & \end{array}$ Suppoſitis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque decima quarta propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty\, 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty -mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \infty bb + bl - mm$. Tum collatis quartis terminis habebitur $f^3 - bdd \infty -n^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty b^3 + bbl - bmm - n^3$. Unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & +bbx & +b^3 & \infty\, 0 \\ & +l & +bl & +bbl & \\ & & -m^2 & -bm^2 & \\ & & & -n^3 & \end{array}$ tribus reliquis inſervire.

Denique, ex comparatione poſtremorum terminorum, habebimus $p^4 \infty f^3b$. unde ſequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +\frac{p^4}{b} \infty\, 0 \\ & +l & +bl & \\ & & -m^2 & \end{array}$ ad tres reliquas eſſe referendam.

15 *Pro-*

15 Propositio.

Pro decima quinta & ultima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & + cx^3 & - ddxx & + f^3x & - bf^3 \propto 0. \\ & - b & - bc & + bdd & \end{array}$$

Suppositâ verò c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam atque decima quinta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, conferendoque secundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \propto dd + bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto mm - bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, habebitur $n^3 \propto f^3 + bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto b^3 + bbl + n^3 - bmm$. Undedifcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & + bbx & + b^3 \propto 0 \\ & + l & + bl & + bbl \\ & & - mm & + n^3 \\ & & & - bm^2 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto f^3 b$, ac per consequens $f^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & + l & + bl & \\ & & - mm & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

OBSERVANDA

hîc in genere nonnulla.

1. NOtandum, nos in omnibus præcedentibus adæquationibus supponere æquationes comparatas inter se habuisse æque multas radices, aut veras, aut falsas, aut imaginarias. Et ad dignoscendas imaginarias à reliquis, inserviet Tractatus Dioristicus, quem subjungere animus est.

2. Quòd si diligenter perpendantur ea, quæ præcedunt, patebit,

tebit, mutatis ſignis terminorum locorum parium, ut 2di, 4ti, &c. non mutatis ſignis reliquorum, (comprehendendo ſub terminorum numero etiam locos vacantes:) ſecundum terminum ſemper æquari ſummæ radicum æquationis, affectarum cum ſuis ſignis + & —; tertium verò, ſummæ productorum earundem radicum, cùm ſingulæ binæ in ſe invicem ducuntur: & quartum, ſummæ productorum multiplicationis, factæ ex ſingulis ternis, atque ſic deinceps.

Unde ſequitur, deficiente ſecundo termino, ipſam falſam ſummamvé falſarum radicum æquari ipſi veræ vel verarum ſummæ; &, deficiente tertio termino, productum vel ſummam productorum ex binis, per ſignum + vel — deſignatorum, æquari ſummæ productorum vel ei, quod ex reliquis binis producitur ac cum contrario ſigno afficitur, & ſic de cæteris.

Primum Exemplum. Fiat ex multiplicatione $x - b \infty 0$ per $x + c \infty 0$ hæc æquatio $xx \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} x - bc \infty 0$. Quare mutatis ſignis ſecundi termini ac retento ſigno tertii, habebimus $xx \begin{smallmatrix}+b\\-c\end{smallmatrix} x - bc \infty 0$. Unde apparet, $b - c$ eſſe ſummam radicis veræ $+b$ & falſæ $-c$; & $-bc$ eſſe productum ex multiplicatione falſæ $-c$ per veram $+b$.

Secundum Exemplum. Fiat deinde alia æquatio $xx \begin{smallmatrix}-b\\-c\end{smallmatrix} x + bc \infty 0$, ex multiplicatione $x - b \infty 0$ per $x - c \infty 0$. Quare mutatis ſignis ſecundi termini, retento ſigno tertii, habebitur $xx \begin{smallmatrix}+b\\+c\end{smallmatrix} x + bc \infty 0$. Unde apparet, $+b+c$ eſſe ſummam duarum verarum radicum, & $+bc$ eſſe productum ex earum multiplicatione.

Tertium Exemplum. Fiat ex continua multiplicatione trium radicum $x - b \infty 0$, $x - c \infty 0$, & $x + f \infty 0$ æquatio ſequens: $x^3 \begin{smallmatrix}-b\\-c\\+f\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+bc\\-bf\\-cf\end{smallmatrix} x + bcf \infty 0$. Quare mutatis ſignis terminorum loco pari poſitorum, relinquendo ſigna reliquorum, habebimus $x^3 \begin{smallmatrix}+b\\+c\\-f\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+bc\\-bf\\-cf\end{smallmatrix} x - bcf \infty 0$. Unde apparet, ſecundum termi-

num

num $+b+c-f$ esse summam verarum radicum $+b$, $+c$, & falsæ $-f$; & tertium terminum $bc-bf-cf$ esse summam trium productorum $+bc$, $-bf$, & $-cf$, prout singulæ binæ radices in se invicem ducuntur; at quartum terminum $-bcf$ esse productum multiplicationis trium radicum $+b$, $+c$, & $-f$. Patet quoque, deficiente secundo termino, falsam f æquari summæ duarum verarum $+b$ & $+c$; &, deficiente tertio termino, producta multiplicationis $-bf$ & $-cf$, signo $-$ affecta, æquari producto $+bc$, signo $+$ affecto.

Quartum Exemplum. Formemus æquationem ex continua multiplicatione trium $x-b \infty 0$, $x-c \infty 0$, & $x-d \infty 0$, quæ sit

$$\begin{array}{llll} x^3 & -bxx & +bcx & -bcd \infty 0. \\ & -c & +db & \\ & -d & +dc & \end{array}$$

Et mutatis signis locorum parium, retentis signis reliquorum, habebimus

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +dcx & +bcd. \\ & +c & +bd & \\ & +d & +bc & \end{array}$$

Unde perspicimus, secundum terminum $+b+c+d$ esse summam radicum $+b$, $+c$, $+d$; & tertium terminum $+dc+db+bc$ esse summam productorum ex singulis binis radicibus in se invicem ductis; at quartum terminum $+bdc$ esse productum multiplicationis omnium trium radicum.

Quintum Exemplum. Fiat ex multiplicatione quatuor $x-b \infty 0$, $x-c \infty 0$, $x-d \infty 0$, & $x+f \infty 0$ sequens æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -bx^3 & +bcxx & -bcdx & -bcdf \infty 0. \\ & -c & +bd & +bcf & \\ & -d & +cd & +bdf & \\ & +f & -bf & +cdf & \\ & & -cf & & \\ & & -df & & \end{array}$$

Unde mutatis signis terminorum, locis paribus constitutorum, retentis signis reliquorum, habebimus

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +bx^3 & +bcxx & +bcdx & -bcdf \infty 0. \\ & +c & +bd & -bcf & \\ & +d & +cd & -bdf & \\ & -f & -bf & -cdf & \\ & & -cf & & \\ & & -df & & \end{array}$$

Atque apparet, $+b+c+d-f$ esse summam quatuor radicum æqua-

æquationis; & tertium terminum esse summam productorum ex singulis binis radicibus in se invicem ductis; at quartum terminum esse summam productorum ex singulis ternis radicibus; ac denique ultimum terminum esse productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $-f$, in se invicem ductarum. Patet quoque, deficiente secundo termino, falsam radicem $-f$ æquari summæ trium verarum $+b$, $+c$, & $+d$. Et, deficiente tertio termino, summam productorum ex binis, per $-$ designatorum, æquari reliquæ summæ productorum ex binis, cum signo $+$ affectorum. Non secus se res habet cum defecerit quartus.

Sextum & ultimum exemplum. Fingamus quoque ex multiplicatione continua quatuor radicum $x - b \infty 0$, $x - c \infty 0$, $x - d \infty 0$, & $x - f \infty 0$ hanc exurgere æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^4 - bx^3 & + bcxx & - bcdx & + bcdf & \infty\ 0. \\ - c & + bd & - bcf & & \\ - d & + cd & - bdf & & \\ - f & + bf & - cdf & & \\ & + cf & & & \\ & + df & & & \end{array}$$

Et mutatis signis locorum parium, retentis reliquis, habebimus

$$\begin{array}{lllll} x^4 + bx^3 & + bcxx & + bcdx & + bcdf & \infty\ 0. \\ + c & + bd & + bcf & & \\ + d & + cd & + bdf & & \\ + f & + bf & + cdf & & \\ & + cf & & & \\ & + df & & & \end{array}$$

Atque apparet, secundum terminum $+b+c+d+f$ esse summam quatuor radicum; tertium terminum $+bc+bd+cd+bf+cf+df$ esse summam productorum multiplicationis ex singulis binis; quartum $+bcd+bcf+bdf+cdf$ esse summam productorum multiplicationis ex singulis ternis; ac denique $+bcdf$ esse productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $+f$, in se invicem ductarum.

Ca-

CAPUT XII.

Regula pro inveniendis reliquis Æquationis-radicibus, unâ falsarum datâ.

OPortet mutare signa terminorum locorum parium æquationis propositæ, ita ut falsæ radices evadant veræ, & veræ falsæ. Transformatâ hoc pacto æquatione, suppositâque radice datâ pro vera, inveniatur æquatio, reliquis radicibus inveniendis inserviens, sicuti supra docuimus. Atque in æquatione sic inventa mutentur signa terminorum locorum parium, habebimusque æquationem requisito satisfacientem.

Exempli gratiâ. Esto æquationis $x^3 - lxx - mmx + n^3 \propto 0$ falsa radix data, quæ sit b, atque mutatis signis terminorum locorum parium, habebimus $x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto 0$. Supponatur jam radix falsa b hujus æquationis esse vera, atque ut habeatur æquatio, reliquis duabus radicibus inserviens, consulatur Capitis V. Prop^{tio} 2da; & elicientur inde hæ duæ æquationes

$$xx\begin{array}{l}+lx\\+b\end{array}\begin{array}{l}+bb\\+bl\\-mm\end{array}\propto 0 \quad \& \quad xx\begin{array}{l}+bx\\+l\end{array}+\frac{n^3}{b}\propto 0.$$

Quocirca mutatis utriusque æquationis signis locorum parium, habebimus $xx\begin{array}{l}-lx\\-b\end{array}\begin{array}{l}+bb\\+bl\\-mm\end{array}\propto 0$ & $xx\begin{array}{l}-bx\\-l\end{array}+\frac{n^3}{b}\propto 0$, quarum quælibet quæsito satisfaciet.

CAPUT XIII.

Ad tollendum secundum terminum Æquationum QUADRATARUM.

$xx + lx - mm \propto 0$. Sit $z - \frac{1}{2}l \propto x$, & habebimus $zz * \begin{array}{l}-\frac{1}{4}ll\\-mm\end{array}\propto 0$.

$xx - lx - mm \propto 0$. Sit $\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}l + z \propto x,\\ \frac{1}{2}l - y \propto x;\end{array}\right\}$ eritque $\left\{\begin{array}{l}zz * \begin{array}{l}-\frac{1}{4}ll\\-mm\end{array}\propto 0\\ yy * \begin{array}{l}-\frac{1}{4}ll\\-mm\end{array}\propto 0.\end{array}\right.$

$$xx - lx + mm \propto 0.\ \text{Sit} \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{2} l - y \propto x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{ll} zz * & - \frac{1}{4} ll \propto 0. \\ & + mm \\ yy * & - \frac{1}{4} ll \propto 0. \\ & + mm \end{array}\right.$$

CUBICARUM.

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \propto 0.\ \text{Sit} \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3} l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{3} l - y \propto x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{lll} z^3 * & - \frac{1}{3} llz & - \frac{2}{27} l^3 \propto 0. \\ & + m^2 & - n^3 \\ & & + \frac{1}{3} lm^2 \\ y^3 * & - \frac{1}{3} lly & + \frac{2}{27} l^3 \propto 0. \\ & + m^2 & + n^3 \\ & & - \frac{1}{3} lm^2 \end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \propto 0.\ \text{Sit} \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3} l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{3} l - y \propto x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{lll} z^3 * & - \frac{1}{3} llz & - \frac{2}{27} l^3 \propto 0. \\ & - m^2 & - \frac{1}{3} lm^2 \\ & & - n^3 \\ y^3 * & - \frac{1}{3} lly & + \frac{2}{27} l^3 \propto 0. \\ & - m^2 & + \frac{1}{3} lm^2 \\ & & + n^3 \end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \propto 0.\ \text{Sit} \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3} l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{3} l - y \propto x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{lll} z^3 * & - \frac{1}{3} llz & - \frac{2}{27} l^3 \propto 0. \\ & + mm & + \frac{1}{3} lm^2 \\ & & + n^3 \\ y^3 * & - \frac{1}{3} lly & + \frac{2}{27} l^3 \propto 0. \\ & + m^2 & - \frac{1}{3} lm^2 \\ & & - n^3 \end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \propto 0.\ \text{Sit} \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3} l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{3} l - y \propto x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{lll} z^3 * & - \frac{1}{3} llz & - \frac{2}{27} l^3 \propto 0. \\ & - m^2 & - \frac{1}{3} lm^2 \\ & & + n^3 \\ y^3 * & - \frac{1}{3} lly & + \frac{2}{27} l^3 \propto 0. \\ & - m^2 & + \frac{1}{3} lm^2 \\ & & - n^3 \end{array}\right.$$

$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto 0.\ \text{Sit}\ z - \frac{1}{3} l \propto x,\ \text{eritque}\ \begin{array}{lll} z^3 * & - \frac{1}{3} llz & + \frac{2}{27} l^3 \propto 0. \\ & - m^2 & + \frac{1}{3} lm^2 \\ & & - n^3 \end{array}$$

$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \propto 0.\ \text{Sit}\ z - \frac{1}{3} l \propto x,\ \text{eritque}\ \begin{array}{lll} z^3 * & - \frac{1}{3} llz & + \frac{2}{27} l^3 \propto 0. \\ & + m^2 & - \frac{1}{3} lm^2 \\ & & - n^3 \end{array}$$

$x^3 +$

$$x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\ z - \frac{1}{3} l \infty x,\ \text{eritque}\ \begin{array}{llll} z^3 * & -\frac{1}{3} llz & +\frac{2}{27} l^3 & \infty 0. \\ & -m^2 & +\frac{1}{3} lm^2 & \\ & & +n^3 & \end{array}$$

QUADRATO-QUADRATARUM.

$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.\ \text{Esto}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}l + z \infty x,\\[3em] \frac{1}{4}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8} llzz & -\frac{1}{8} l^3 z & -\frac{3}{256} l^4 & \\ & +m^2 & +\frac{1}{2} lm^2 & +\frac{1}{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4} ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8} llyy & +\frac{1}{8} l^3 y & -\frac{3}{256} l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2} lm^2 & +\frac{1}{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4} ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}l + z \infty x,\\[3em] \frac{1}{4}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8} llzz & -\frac{1}{8} l^3 z & -\frac{3}{256} l^4 & \\ & -m^2 & -\frac{1}{2} lm^2 & -\frac{1}{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4} ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8} llyy & +\frac{1}{8} l^3 y & -\frac{3}{256} l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2} lm^2 & -\frac{1}{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4} ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}l + z \infty x,\\[3em] \frac{1}{4}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8} llzz & -\frac{1}{8} l^3 z & -\frac{3}{256} l^4 & \\ & +m^2 & +\frac{1}{2} lm^2 & +\frac{1}{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4} ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8} llyy & +\frac{1}{8} l^3 y & -\frac{3}{256} l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2} lm^2 & +\frac{1}{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4} ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.\ \text{Esto}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}l + z \infty x,\\[3em] \frac{1}{4}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8} llzz & -\frac{1}{8} l^3 z & -\frac{3}{256} l^4 & \\ & -m^2 & -\frac{1}{2} lm^2 & -\frac{1}{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4} ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8} llyy & +\frac{1}{8} l^3 y & -\frac{3}{256} l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2} lm^2 & -\frac{1}{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4} ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 \propto 0. \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & +p^4 \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & -mm & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llmm \propto 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & +p^4 \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \propto x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & -mm & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llmm \propto 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & +p^4 \end{array}$$

$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$. Esto $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \propto x, \end{array}\right\}$ eritque

$$\left\{\begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 \propto 0. \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3y & -\frac{3}{256}l^4 \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 \propto 0. \\ & & +n^3 & -\frac{3}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array}\right.$$

$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$. Esto $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \propto x, \end{array}\right\}$ eritque

$$\left\{\begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 \propto 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3y & -\frac{3}{256}l^4 \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 \propto 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array}\right.$$

$x^4 -$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{ eritque } \left\{ \begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{15}llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{ eritque } \left\{ \begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \infty 0 \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array} \right.$$

$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & +\frac{1}{2}n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

Unde colligere licet, omnes ſuppoſitiones, quæ ad tollendum ſecundum terminum adhibentur, neceſſariò exhibere æquationem realem, modò reales radices adfuerint in æquatione propoſita; & ſi nullæ in his fuerint, id indicio eſſe, nullas quoque eſſe imaginarias in æquatione propoſita. Nam, exempli gratiâ, ſi ſit æquatio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$: patet, ſi radix eſt realis, x neceſſariò debere æqualem eſſe $\frac{1}{4}l$, vel majorem, vel minorem. Si æqualis fuerit $\frac{1}{4}l$, ultimus terminus æquationis transformatæ deficere debet; ſi major fuerit quàm $\frac{1}{4}l$, æquatio transformata denominata à radice z erit realis; ſi denique minor fuerit, transformata æquatio à radice y denominata itidem realis erit.

Quòd ſi ſecundus terminus æquationis propoſitæ afficitur ſigno $+$, ut, exempli gratiâ, ſi ſit $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$: patet, ſi adfuerit radix aliqua realis, ſuppoſitionem hanc $z - \frac{1}{4}l \propto x$ ſemper eſſe neceſſariò realem ac denotare aliquam quantitatem; adeoque transformatam æquationem admittere quoque aliquam radicem.

Deinde conſtat, radices veras æquationum à radice y denominatarum eſſe falſas æquationum à radice z denominatarum; & contra, radices veras æquationum à radice z denominatarum eſſe falſas æquationum à radice y denominatarum.

CAPUT XIV.

Continens modum tollendi penultimum terminum Æquationum, ſecundo termino carentium.

Pro Cubicis. Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^2 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic æquatio transformetur, in qua demum penultimus deficiet terminus.

Pro Quadrato-quadratis. Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^3 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & tum rurſus transformatâ æquatione penultimus terminus deficiet.

Pro æquationibus quinque dimenſionum ſupponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^4 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic in infinitum, transmutatis deinde æquationibus, uti dictum eſt.

Sed

Sed pro æquationibus quatuor dimensionum commodius est, supponere radicem quadratam ultimi termini divisam per incognitam quantitatem R esse æqualem radici incognitæ, atque ita transformare æquationem.

Exemplum Cubicarum. Proponatur $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, &, transformatâ æquatione, habebitur $\frac{n^9}{R^6} + \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty 0$. Hinc multiplicatis omnibus per R^6, fiet $n^9 + mmn^3 R^4 - n^3 R^6 \infty 0$, adeoque divisis per n^3, fiet $n^6 + mmR^4 - R^6 \infty 0$, hoc est, per transpositionem, habebitur $R^6 - mmR^4 * - n^6 \infty 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex suppositione habetur $x \infty \frac{n^3}{R^2}$.

Aliud Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, fietque $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty 0$, hoc est, $R^6 + mmR^4 * - n^6 \infty 0$. æquatio cubica, in qua penultimus terminus deficit, & in qua cùm datur R^2, ex supra posita suppositione habetur x.

Tertium Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, eritque, transformatâ æquatione, $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} + n^3 \infty 0$, hoc est, $R^6 - mmR^4 * + n^6 \infty 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex suppositione id habetur quod requiritur.

Exemplum Quadrato-quadratarum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$. Esto $\frac{p^2}{R} \infty x$, &, transformatâ æquatione, fiet $\frac{p^8}{R^4} - \frac{mmp^4}{R^2} + \frac{n^3 pp}{R} - p^4 \infty 0$. Hoc est, multiplicatis omnibus per R^4, habebimus $p^8 - mmp^4 R^2 + n^3 pp R^3 - p^4 R^4 \infty 0$, ac proinde divisis per p^4, habebitur $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 + mmR^2 * - p^4 \infty 0$. æquatio quatuor dimensionum, carens penultimo termino.

Exemplum secundum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$. Supponendo $\frac{pp}{R} \infty x$, transformetur æquatio, fietque $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 + mmR^2 * + p^4 \infty 0$. æquatio in qua penultimus terminus deficit.

Exem-

Exemplum tertium. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$. Suppositâ $x \propto \frac{pp}{R}$, æquatio transformata erit $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 - mmR^2 * + p^4 \propto 0$, carens penultimo termino.

Exemplum quartum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$. Supposito $\frac{pp}{R} \propto x$, erit transformata æquatio $R^4 + \frac{n^3}{pp} R^3 - mmR^2 * + p^4 \propto 0$, penultimo termino destituta.

Exemplum quintum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$. Et supposito $\frac{pp}{R} \propto x$, æquatio transformata erit $R^4 + \frac{n^3}{pp} R^3 - mmR^2 * - p^4 \propto 0$, carens penultimo termino.

Exemplum sextum. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$. Et supposito $\frac{pp}{R} \propto x$, erit æquatio transformata $R^4 + \frac{n^3}{pp} R^3 + mmR^2 * - p^4 \propto 0$, quæ destituitur penultimo termino.

Exemplum septimum. Proponatur $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$. Supposito $\frac{pp}{R} \propto x$, transformata æquatio erit $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 - mmR^2 * - p^4 \propto 0$, carens penultimo termino.

Ex quibus manifestum est, ex omnibus æquationibus auferri posse penultimum terminum, quandoquidem superiùs ostensum est, ex omni æquatione tolli posse secundum, ac modò jam est demonstratum, quo pacto ex æquationibus, secundo termino carentibus, penultimus terminus auferatur. Id quod annotasse operæ pretium duximus, cum Vieta, postquam Capite 1mo de *Æquationum Emendatione* secundum terminum cujusque æquationis tollere docuit, versùs finem ejusdem Capitis affirmet, posse etiam aliquando alios auferri æquationis terminos, atque ex hac nostra quidem methodo constet, quomodo semper penultimus tolli queat.

Ca-

CAPUT XV.

Methodus transmutandi Æquationes Cubicas compositas, in quibus secundus terminus deest, in Æquationes Cubicas simplices, quando id fieri potest.

PRoponatur hæc æquatio $x^3 * + 3mmx - n^3 \infty 0$. Supponamus $zz - zx - mm \infty 0$, hoc est, $x \infty \frac{zz - mm}{z}$. Unde, transformatâ æquatione, habebitur
$\frac{z^6 - 3mmz^4 + 3m^4zz - m^6}{z^3} + \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 \infty 0$, hoc est, multiplicatis omnibus per z^3, invenietur hæc æquatio $z^6 - n^3z^3 - m^6 \infty 0$, vel $z^6 \infty n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 \infty \frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ est æquatio cubica simplex.

Cognitâ autem ejus radice z, erit ex supra positis radix altera $x \infty \frac{zz - mm}{z}$. Quæ semper est possibilis, cum z major sit quàm m.

Aliter. Supponatur $zz + zx - mm \infty 0$, eritque $x \infty \frac{mm - zz}{z}$. Unde transformatâ æquatione habebimus $z^6 + n^3z^3 - m^6 \infty 0$, hoc est, $z^6 \infty - n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 \infty - \frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ rursus æquatio est cubica simplex. Cujus ope, cùm cognoscitur z, habebitur $x \infty \frac{mm - zz}{z}$, quæ semper erit possibilis.

Proponatur item hæc æquatio $x^3 * - 3mmx - n^3 \infty 0$, supponaturque $zz - zx + mm \infty 0$, hoc est, $x \infty \frac{zz + mm}{z}$. Unde transformatâ æquatione habebimus $\frac{z^6 + 3mmz^4 + 3m^4zz + m^6}{z^3}$ $- \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 \infty 0$, hoc est, $z^6 - n^3z^3 + m^6 \infty 0$, seu $z^6 \infty n^3z^3 - m^6$, cujus radix est $z^3 \infty \frac{1}{2}n^3 8 \sqrt{\frac{1}{4}n^6 - m^6}$. Unde

Unde patet, oportere m^6 non majus esse quàm $\frac{1}{4}n^6$, ut æquatio hæc $z^6 \infty n^3 z^3 - m^6$ locum obtineat. Nam si majus sit, non posset proposita æquatio $x^3 * - 3mmx - n^3 \infty 0$ sic in simplicem cubicam transmutari.

CAPUT XVI.

Methodus generalis, concernens usum secundarum radicum, ad tollenda signa radicalia ex Æquatione proposita.

SI fuerint duæ æquationes, in quibus eadem litera reperitur, licet ipsas reducere comparando cum duabus aliis, in quibus hæc litera pauciores habet dimensiones.

Exempli gratiâ, habeamus hasce duas æquationes $x^3 + bxx - ccx - d^3 \infty 0$ & $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$. Quibus transpositis, habebimus $x^3 \infty - bxx + ccx + d^3$ & $x^3 \infty + lxx - mmx + n^3$, ac per consequens $\begin{array}{l} lxx \\ b \end{array} \begin{array}{l} - mmx \\ - cc \end{array} \begin{array}{l} + n^3 \\ - d^3 \end{array} \infty 0$, hoc est, $xx \infty \frac{mmx + ccx + d^3 - n^3}{l + b}$. in quâ litera x paucioram est dimensionum. Atque ut habeatur adhuc alia, multiplicetur tantùm æquatio inventa per x, & invenietur $x^3 \infty \frac{\begin{array}{l} mmxx + d^3 x \\ cc \quad - n^3 \end{array}}{l + b}$.

Quæ comparata cum aliqua ex præcedentibus, verbi gratiâ, cum secunda, exhibet sequentem æquationem

$$\begin{array}{l} + m^2 \\ + cc \\ - ll \\ - lb \end{array} xx \begin{array}{l} - n^3 \\ + lm^2 \\ + bm^2 \\ + d^3 \end{array} x \begin{array}{l} - ln^3 \\ - bn^3 \\ \\ \\ \end{array} \infty 0.$$

in quâ litera x similiter duarum tantùm est dimensionum. Sed si collata fuisset cum prima æquatione, inventa fuisset alia, ubi x adhuc pauciores habuisset dimensiones, ita ut eligenda sit ad comparationem facillima. Atque sic continuando inveniri hîc possunt duæ aliæ, ubi x est unius dimensionis, & tandem alia ubi prorsus deest. Quod ipsum docet, dari tales æquationes, in quibus litera, quæ in utraque inveniri debet, mutuâ illâ comparatione planè aufertur. Unde apparet, posse quidem aliquando auferri hanc literam, quamvis non diminuatur numerus dimensionum.

Exem-

Exempli gratiâ, si dentur hæ æquationes $xx - bx - cc \infty 0$ & $xx - bx + dd - bb \infty 0$, habebimus $xx - bx \infty cc$, & $xx - bx \infty + bb - dd$, ergo $cc \infty bb - dd$.

Venio jam ad asymmetrias seu irrationales quantitates, pro quibus tollendis, oportet tantùm supponere literas æquales singulis terminis asymmetris æquationis propositæ. Quâ quidem ratione non tantùm obtinebimus æquationem propositam, in qua omnes hæ literæ sunt substitutæ; sed etiam tot alias, quot literæ fuerunt suppositæ Unde collatis ordine omnibus hisce æquationibus, devenietur ad æquationem, ubi nulla literarum invenitur ac per consequens nullum signum radicale.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $c + \sqrt{C.\,bbx} - \sqrt{dx} \infty 0$. Ad tollendas igitur ejus asymmetrias, ponamus $R \infty \sqrt{C.\,bbx}$, & $z \infty \sqrt{dx}$. Quibus in æquatione proposita substitutis, habebimus $c + R - z \infty 0$; atque ex reliquis suppositionibus erit $R^3 \infty bbx$, & $zz \infty dx$. Primò, ad tollendum R, habebimus $R \infty z - c$, ideoque $R^3 \infty z^3 - 3czz + 3ccz - c^3$. Atqui est quoque $R^3 \infty bbx$. Quare erit $z^3 - 3czz + 3ccz - c^3 - bbx \infty 0$, & per consequens $z^3 \infty + 3czz - 3ccz + c^3 + bbx$. Sed si multiplicetur superiùs proposita æquatio $zz \infty dx$ per z, habebitur etiam $z^3 \infty dxz$. Ergo erit

$\begin{array}{l} 3czz - 3ccz + c^3 \\ \quad - dx \quad + bbx \end{array} \infty 0$, & substituto dx loco zz, habebimus $\begin{array}{l} 3cdx - 3ccz + c^3 \\ \quad - dx \quad + bbx \end{array} \infty 0$, hoc est, $3ccz \infty 3cdx + bbx$,
$\quad dx \quad c^3$

seu $z \infty \dfrac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quæ si multiplicetur per z, fiet

$zz \infty \dfrac{3cdxz + bbxz + c^3z}{3cc + dx}$. Sed est quoque $zz \infty dx$. Igitur habebimus $3cdxz + bbxz + c^3z \infty 3ccdx + ddxx$,

hoc est, $\dfrac{3ccdx + ddxx}{3cdx + bbx + c^3} \infty z$. Inventa autem est

$z \infty \dfrac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quare habebimus tandem

$$\begin{array}{llll} d_3x_3 & -\,3ccddxx & +\,3c^4dx & -\,c^6 \propto 0. \\ & -\,6bbcd & -\,2c^3bb & \\ & -\,b^4 & & \end{array}$$

In qua æquatione nullus terminus irrationalis reperitur. Quòd si autem alii adhuc reperirentur, oporteret tantùm operando ut supra auferre cæteras literas, cæteris terminis irrationalibus æquales suppositas. Quâ quidem ratione omnes omnino termini irrationales tollentur, calculus verò prolixior evadet.

Necessitas hujus methodi vel hinc patet, quòd, si fuerint plures quatuor terminis irrationalibus, signa radicalia, per methodum à Vieta traditam, Capite quinto de Emendatione Æquationum, tolli non possint.

FINIS.

AD TRACTATUM
DE
LIMITIBUS ÆQUATIONUM

EPISTOLA PRÆLIMINARIS.

Clarissimo Viro

FRANCISCO à SCHOOTEN,

Mathematum in Illustri Leidensi Academia Professori,

ERASMIUS BARTHOLINUS

S. P.

Nisi meminissem, quanto majore animo honestatis fructus in conscientia, quàm in fama reponatur; nequaquam opportunum fuisset, in edendis hisce opusculis Analyticis consilium. Verùm quia communibus magis commodis quàm privatæ jactantiæ studui, eò animus ausus est, deliberato consilio obsequi. Cujus meæ conscientiæ interpretem, non alium magis desidero, quàm te, Vir Clarissime, quem utilitatibus aliorum

rum, plus quàm propriæ laudi, indies deservire, compertum habeo. Venit in mentem studiosum illud otium, quod Leidæ mihi semper emolumento, utrisque deinde solatio erat, cujusq; varietates si oratione repetere vellem, prout animo pleraque obversantur, non dubito quin existimationi hominum diligentia & fides nostra, & in plerisque etiam pietas subjiceretur. Et licèt nesciam, an ullum tempus jucundiùs exegerim; tamen eâ de causâ magnifacio, quòd amicitiæ tuæ, usque ad intimam familiaritatem, capacem me redderet. Neque aliam interpretationem habuit, quòd Leidâ discessurus, Isagogen Cartesianam typis excudendam concinnaveram, ut meam famam cum tua extenderem. Quâ de causâ, cum non modò offensas, verùm etiam simultates varias subierim; non ignoro, quæ futura sit de hisce jam edendis sententia. Ne dubites tamen quin omnia æquo animo toleraverim, præsertim quia pietas & obsequium causam junxêre. Quem enim præterit, fatum literatorum? Mihi certè non improvisa est calumniandi vanitas. Est ita naturâ comprobatum, ut benefactis major ex conscientiâ merces, quàm in ore hominum reponatur: nam plerique, tantum suæ detractum iri gloriæ existimant, quantum cesserit alienæ: postremò, ignavissimus quisque aliorum scripta carpere non veretur. Sic contendere pro moribus temporum eruditio est. Quod recordantem, posteritatis magna miseratio subit. Quot enim præclara inventa putas obscurari, propter scelus hoc obtrectandi? Plerique se intra perpetuum silentium tenere amant, potiùs quàm malignitati interpretantium exponi. Ita communem hunc errorem, bonum publicum magnis detrimentis expiabit. Ego aliorum exemplo quidem didici nullam ex meis laboribus sperare laudem; tanta tamen mihi semper fuit reverentia posterûm, ut censuram erroris non tam reformidem quàm inhumanitatis. Sed, ut de pictore *nisi Artifex judicare, ita nisi Mathematicus non satis potest perspicere Mathematica; tuæ potissimùm sententiæ hæc exponuntur. Eximium habent usum ea quæ sequenti tractatu exponentur, ad numerosam Æquationum resolutionem, ut reliquas utilitates pertranseam, quia Tu eas ignorare non potes. Quare Lectores rogo, ut judiciis parcant, donec penitus omnia inspexerint. Et si qui hæc recusaverint, sciant se nec inventis gratiam adimere, nec mihi laudis conscientiam. Te verò, Vir Clarissime, si offenderint, omnibus commendationibus destituta reputabo. Vale.*

POSTE-

POSTERIOR TRACTATUS DE LIMITIBUS ÆQUATIONUM,

Seu

Quo pacto ex forma Æquationum affectarum definiri possint limites, intra quos radices veræ debent offendi.

DE

DE LIMITIBUS ÆQUATIONUM:

CAPUT I.

De Æquationum Quadratarum seu duarum dimensionum limitibus.

Prop. 1. $xx - lx + mm \infty 0$.

PEr transpositionem erit $mm \infty lx - xx$, & si prima pars fuerit realis, erit etiam altera pars realis, ideoque lx majus quàm xx; & diviso utroque termino per x, erit l major quàm x. Quin & per transpositionem propositæ æquationis habebitur $xx \infty lx - mm$: ideoque altera pars est realis, & lx majus quàm mm. Unde diviso utroque termino per l, erit x major quàm $\frac{mm}{l}$. Quare æquationis propositæ utraque radix x major erit quàm $\frac{mm}{l}$, sed minor quàm l.

Prop. 2. $xx - lx - mm \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $xx \infty lx + mm$, ideoque xx majus erit quàm mm, & x major quàm m, ac proinde mx majus quàm mm. Unde xx minus erit quàm $lx + mx$, adeoque si utraque pars dividatur per x, erit x minor quàm $l + m$. Rursus quoniam xx æquatur $lx + mm$, erit xx majus quàm lx; ac proinde si uterque terminus dividatur per x, erit x major quàm l, & lx majus quàm ll. Hinc cum xx æquetur $lx + mm$, erit xx majus quàm $ll + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Postremò, quandoquidem x major est quàm m, erit lx majus quàm lm, & xx majus quàm $lm + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{lm + mm}$. Unde radix æquationis propositæ erit major quàm maxima harum duarum $\sqrt{ll + mm}$ & $\sqrt{lm + mm}$, sed minor quàm $l + m$.

Prop. 3. $xx + lx - mm \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $xx + lx \infty mm$, & per consequens $\frac{mm}{l}$ majus erit quàm x. Rursus existente $xx + lx \infty mm$, erit mm majus quàm xx; & m major quàm x, ac proinde mx majus quàm xx. Atqui habemus $xx + lx \infty mm$. Ergo $mx + lx$ majus erit quàm mm. Hinc divisâ utrâque parte per $m + l$, fiet x major quàm $\frac{mm}{l+m}$. Quare inventa est x radix æquationis propositæ major quàm $\frac{mm}{l+m}$, at minor quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

CAPUT II.

De limitibus Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, secundo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$.

PEr transpositionem habebimus $x^3 \infty + mmx - n^3$, eritque mmx majus quàm n^3. Unde diviso utroque termino per mm, erit x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Deinde per transpositionem erit $mmx - x^3 \infty n^3$, ac per consequens mm majus quàm xx, & m major quàm x. Quare inventa est utraque radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{mm}$, & minor quàm m.

Prop. 2. $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \infty n^3$, eritque xx majus quàm mm, & x major quàm m. Erit quoque $x^3 - n^3 \infty mmx$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, ac proinde nnx majus quàm n^3. Atqui per transpositionem propositionis habemus $mmx + n^3 \infty x^3$. Quare $mmx + nnx$ majus erit quàm x^3; & divisa utrâque parte per x, erit $mm + nn$ majus quàm xx; ideoque x minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Inventa ergo est x radix æquationis propositæ major quàm m & n, at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Atque liquet, ad evitandam extractionem radicis cubicæ ipsius n^3, quòd loco nn in vinculo assumi possit quantitas aliqua, quæ non sit

sit minor. Id quod non non erit difficile, cognitis nempe tribus dimensionibus ipsius n^3, sumendoque loco nn rectangulum sub duabus quantitatibus; quarum alterutra non sit ipsâ n minor. Eritque hoc ad sequentia notatu dignum.

$$Prop. 3. \; x^3 * + mmx - n^3 \infty 0.$$

Per transpositionem habebimus $x^3 \infty n^3 - mmx$, eritque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Rursus erit $mmx \infty n^3 - x^3$, & consequenter n^3 major quàm x^3, & n major quàm x, ac proinde nnx majus quàm x^3. Sed per transpositionem æquationis propositæ est quoque $x^3 + mmx \infty n^3$. Ergo $mmx + nnx$ majus erit quàm n^3, & divisâ utrâque parte per $nn + mm$, erit x major quàm $\frac{n^3}{nn+mm}$. Inventa itaque est radix x æquationis propositæ esse major quàm $\frac{n^3}{mm+nn}$, sed minor quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n. Possumus etiam loco nn accipere rectangulum duarum maximarum dimensionum ipsius n^3, ut radicis cubicæ extractio evitetur.

Caput III.

De limitibus Æquationum Cubicarum, penultimo termino carentium.

$$Prop. 1. \; x^3 - lxx * + n^3 \infty 0.$$

Per transpositionem erit $x^3 + n^3 \infty lxx$, ideoque xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Rursus erit $n^3 \infty lxx - x^3$, & consequenter l major quàm x. Quælibet igitur radicum x æquationis propositæ major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & minor quàm l.

$$Prop. 2. \; x^3 - lxx * - n^3 \infty 0.$$

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \infty n^3$, ideoque x major quàm l. Rursus erit $x^3 - n^3 \infty lxx$, & consequenter x major quàm n, & xx majus quàm nn, & nxx majus quàm n^3. Atqui habemus quoque per transpositionem $lxx + n^3 \infty x^3$. Quare erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Dividatur utraque pars per xx, eritque $l + n$ major

major quàm x. Inventa itaque eſt radix x æquationis propoſitæ major quàm l & n, ſed minor quàm $l+n$. Manifeſtum eſt quoque ad evitandam extractionem radicis cubicæ ex n^3, quòd loco n ſumi poſſit minor trium dimenſionum ipſius n^3, quando x major eſt; & quando minor perhibetur quàm $l+n$, quòd tunc loco n maxima trium dimenſionum ipſius n^3 accipi queat, & ſic de reliquis, quibus ob nimiam facilitatem non immoramur.

Prop. 3. $x^3 + lxx * - n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 \infty n^3 - lxx$, ac per conſequens $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Eſt etiam $lxx \infty n^3 - x^3$, & conſequenter n major quàm x, & nxx majus quàm x^3. Sed habetur $x^3 + lxx \infty n^3$. Ergo $nxx + lxx$ majus erit quàm n^3, hoc eſt, diviſâ utrâque parte per $n+l$, erit xx majus quàm $\frac{n^3}{n+l}$. Inventa eſt itaque radix x æquationis propoſitæ major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+n}}$, ſed minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n. Demonſtratur præterea $nnx + lnx$ majus eſſe quàm n^3, & $nx + lx$ majus quàm nn, & conſequenter x major quàm $\frac{nn}{l+n}$, quandoquidem n major eſt quàm x.

CAPUT IV.

De Æquationibus Cubicis, in quibus omnes termini extant.

Prop. 1. $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem habebimus $x^3 - lxx \infty n^3 - mmx$. Hinc ſi x æquetur ipſi l, erit etiam x ipſi $\frac{n^3}{mm}$ æqualis. Ideoque, ſi viciſſim l æquetur ipſi $\frac{n^3}{mm}$, hoc eſt, $lmm \infty n^3$, erit ſimiliter x radix æquationis propoſitæ æqualis ipſi l & $\frac{n^3}{mm}$. Præterea ſi $x^3 - lxx$ eſt realis, hoc eſt, x major quàm l, erit quoque $n^3 - mmx$ realis, & conſequenter $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Quòd ſi autem eadem quantitas $x^3 - lxx$ nihilo minor ſit, tranſponatur propoſita æquatio hâc ratione $lxx - x^3 \infty mmx - n^3$. Et quandoquidem ſupponitur

tur $lxx - x^3$ esse realis, hoc est, l major quàm x, erit $mmx - n^3$ etiam realis, & consequenter major erit x quàm $\frac{n^3}{mm}$. Inventa est itaque radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & ipsi $\frac{n^3}{mm}$, cùm duo hi termini æquantur. Et si unam tantùm habeat aut tres, quælibet earum erit intra hos limites, quando inæquales sunt; si verò æquales, hoc est, $lmm \propto n^3$, substituto lmm loco n^3 in æquatione proposita, & dividendo per $x - l$, cognoscemus eam non habere aliam radicem in hoc casu quàm l.

Prop. 2. $x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \propto n^3 - lxx$. Quòd si ergo xx & mm sunt æqualia, erit etiam xx ipsi $\frac{n^3}{l}$ æquale; & si xx majus est quàm mm, erit quoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx; & si xx minus est quàm mm, minus quoque erit $\frac{n^3}{l}$ quàm xx. Inventi itaque sunt duo limites m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, quorum cuilibet æquatur radix æquationis propositæ, si fuerint æquales, hoc est, si lmm æquatur ipsi n^3; aut necessariò inter duos erit, si inæquales fuerint. Eadem est ratio duorum reliquorum limitum n & $\frac{mm}{l}$.

Prop. 3. $x^3 - lxx - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \propto mmx + n^3$, ideoque x major quàm l. Rursus cum per transpositionem sit $x^3 - mmx \propto lxx + n^3$, erit xx majus quàm mm, & x major quàm m, & mxx majus quam mmx. Sed per transpositionem est quoque $x^3 - n^3 \propto lxx + mmx$, & per consequens x major quàm n, & nxx majus quàm n^3. Quin & per transpositionem propositæ habetur $lxx + mmx + n^3 \propto x^3$, atque inventum est mxx majus quàm mmx, & nxx majus quàm n^3. Ergo erit $lxx + mxx + nxx$ majus quàm x^3. Quocirca si utraque pars dividatur per xx, erit $l + m + n$ major quàm x. Inventa est itaque radix x æquationis propositæ major quàm l, m, & n, sed minor quàm $l + m + n$.

Prop. 4. $x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + mmx \infty n^3 - lxx$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Sed est quoque $x^3 + lxx \infty n^3 - mmx$, ideoque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. At verò est etiam $lxx + mmx \infty n^3 - x^3$, & consequenter n major quàm x; quare & nnx majus erit quàm x^3, & lnx majus quàm lxx. Atqui est $x^3 + lxx + mmx \infty n^3$. Ergo $nnx + lnx + mmx$ majus erit quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{nn+ln+mm}$. Quare inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{nn+ln+mm}$, at minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, $\frac{n^3}{mm}$, & n.

Prop. 5. $x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $mmx + n^3 \infty lxx - x^3$, ideoque l major quàm x. Rursus erit $x^3 + n^3 \infty lxx - mmx$, & per consequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, & minorem quàm l. Sed per transpositionem est quoque $x^3 + mmx \infty lxx - n^3$, & consequenter xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Quare & x major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$.

Prop. 6. $x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + lxx \infty mmx - n^3$, ideoque x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Similiter erit $x^3 + n^3 \infty mmx - lxx$, & per consequens $\frac{mm}{l}$ major quàm x. Rursus erit $lxx + n^3 \infty mmx - x^3$, & consequenter m major quàm x. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$, sed minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Prop. 7. $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \infty mmx - n^3$. Unde patet, si x æqualis est ipsi l, quòd tunc quoque x ipsi $\frac{n^3}{mm}$ est æqualis. Ideoque si l æquatur ipsi $\frac{n^3}{mm}$, hoc est, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis terminorum l & $\frac{n^3}{mm}$; & si inæquales fuerint, neutra ex duabus radicibus æquationis propositæ poterit esse inter hos terminos. Quia videmus, cùm x major est quàm l, tum quoque x majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$; & si minor est quàm l, tum similiter x minorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$. Sed per transpositionem est etiam $x^3 - mmx \infty lxx - n^3$. Hinc si xx æquetur ipsi mm, erit quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$. Ideoque si fuerint hi termini mm & $\frac{n^3}{l}$ æquales, hoc est, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propositæ major erit unoquoque terminorum æqualium m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ erit inter duos ex his terminis. Præterea per transpositionem est quoque $x^3 + n^3 \infty lxx + mmx$, ideoque $lxx + mmx$ majus quàm x^3, & $lx + mm$ majus quàm xx. At x erit realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, si æquatio proposita fuerit realis. Et si æqualis fuerit vel major quàm m, erit & $lx + mx$ majus quàm xx, ac per consequens $l + m$ major quàm x. Quòd si autem minor fuerit quàm m, multo magis $l + m$ major erit quàm x. Porrò ex hac eadem æquatione constat, quòd $lxx + mmx$ etiam majus est quàm n^3. Hinc cum $l + m$ major sit quàm x, ideoque $llx + lmx$ majus quàm lxx; erit quoque $llx + lmx + mmx$ majus quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$. Invenimus igitur, quòd quælibet radicum æquationis propositæ major est quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$, & multo major quàm $\frac{n^3}{ll + 2lm + mm}$, at minor quàm $l + m$. Denique, quoniam $l + m$ major est quàm x, si major fuerit x quàm m, erit inter hosce terminos $l + m$ & m. Quòd si verò m major est quàm x, invenimus, quòd $lxx + mmx$ est majus

jus quàm $n3$, hinc $lmx + mmx$ multo magis erit majus quàm $n3$; adeoque x major quàm $\frac{n3}{lm + mm}$, & consequenter x major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{n3}{lm + mm}$.

Caput V.

De Æquationibus quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 ** - n^3 x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 \propto n^3 x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p4}{n3}$. Sed per transpositionem est quoque $p^4 \propto n^3 x - x^4$, & consequenter n^3 major quàm x^3, ac n major quàm x. Ergo utraque radix x æquationis propositæ major erit quàm $\frac{p4}{n3}$, at minor quàm n.

Prop. 2. $x^4 ** - n^3 x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 - n^3 x \propto p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & $nnxx$ majus quàm $n^3 x$. Sed est quoque $x^4 - p^4 \propto n^3 x$, ideoque x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & $ppxx$ majus quàm p^4. At per transpositionem est etiam $n3x + p^4 \propto x^4$. Ergo $nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4. Hinc divisâ utrâque parte per xx, erit xx minus quàm $nn + pp$, & x minor quàm $\sqrt{nn + pp}$. Invenimus igitur, quod radix æquationis propositæ est major quàm n & p, sed minor quàm $\sqrt{nn + pp}$, ac proinde multo minor quàm $n + p$.

Prop. 3. $x^4 ** + n^3 x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^4 \propto p^4 - n^3 x$, ac per consequens $\frac{p4}{n3}$ major quàm x. Similiter erit $n^3 x \propto p^4 - x^4$, & consequenter p^4 majus quàm x^4, & p major quàm x, & $p^3 x$ majus quàm x^4. Sed est præterea $x^4 + n3x \propto p^4$, ideoque $p^3 x + n3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p4}{p^3 + n3}$. Invenimus itaque, quòd radix æquationis propositæ est major quàm $\frac{p4}{p^3 + n^3}$, at minor quàm $\frac{p4}{n3}$ & p.

Ca-

CAPUT VI.

De Æquationibus quatuor dimensionum, in quibus tertius & quartus terminus deficiunt.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 ** + p^4 \infty 0.$

PEr transpositionem est $x^4 \infty + lx^3 - p^4$, ideoque x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. At verò est etiam $p^4 \infty lx^3 - x^4$, & consequenter l major quàm x. Invenimus igitur, quòd unaquæque duarum radicum æquationis propositæ est major quàm $\sqrt{C.}\frac{p^4}{l}$, at minor quàm l. Hinc quoniam l major est quàm x, & lx^3 majus quàm p^4, habebitur $llxx$ majus quàm p^4, & consequenter xx majus quàm $\frac{p^4}{ll}$, & x major quàm $\frac{pp}{l}$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 ** - p^4 \infty 0.$

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4$, ideoque x major quàm l. Similiter est $x^4 - p^4 \infty lx^3$, & consequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, ac proinde px^3 majus quàm p^4. Sed est etiam $lx^3 + p^4 \infty x^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l + p$ major quàm x. Invenimus igitur, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm l & p, at minor quàm $l + p$.

Prop. 3. $x^4 + lx^3 ** - p^4 \infty 0.$

Per transpositionem est $x^4 \infty p^4 - lx^3$, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter est $lx^3 \infty p^4 - x^4$, ac per consequens p major quàm x, & px^3 majus quàm x^4. Atqui est etiam $x^4 + lx^3 \infty p^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm p^4, & x^3 major quàm $\frac{p^4}{l+p}$. Quare invenimus, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm $\sqrt{C.}\frac{p^4}{l+p}$, sed minor quàm p & $\sqrt{C.}\frac{p^4}{l}$. Facillimè verò evitantur extractiones radicum cubicarum, sumendo terminos paulò majores aut minores, prout necessitas requirit. Atque in hoc casu, quoniam x^3 major est quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & p major quàm x, erit pxx majus quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lp+pp}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lp+pp}}$. Præterea, quandoquidem $\frac{p^4}{l}$ majus est quàm x^3, erit $\frac{p^4x}{l}$ majus quàm x^4, & $lppx$ majus quàm lx^3, quia p major est quàm x. Atqui est $x^4+lx^3 \infty p^4$. Ergo $\frac{p^4x}{l}+lppx$ majus erit quàm p^4. Hinc, multiplicatâ utrâque parte per l, & divisâ per pp, habebitur $ppx+llx$ majus quàm lpp, & x major quàm $\frac{lpp}{ll+pp}$.

De æquationibus quatuor dimensionum, in quibus secundus & quartus terminus deficiunt, nihil addimus: siquidem illæ ad quadratas referuntur, ita ut ipsarum limites eodem modo quo quadratarum inveniri possint.

CAPUT VII.

De Æquationibus quatuor dimensionum, secundo termino carentibus.

Prop. I. $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem erit $x^4 - mmxx \infty p^4 - n^3x$. Unde apparet, quòd, si fuerit xx æquale ipsi mm, hoc est, $x \infty m$, etiam x ipsi $\frac{p^4}{n^3}$ sit æqualis futura. Ideoque si fuerit m æqualis ipsi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc est, $mn^3 \infty p^4$, radix x æquationis propositæ æquabitur singulis terminorum m & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam sive tres habuerit, semper erit inter duos hosce terminos. Præterea cognoscitur, si duo hi termini fuerint æquales, hoc est, $mn^3 \infty p^4$, substituto mn^3 loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x-m$, fore, ut non possit habere aliam radicem realem præter m.

Prop.

Prop. 2. $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - n^3x \infty p^4 - mmxx$. Unde constat, si x æqualis fuerit ipsi n, fore etiam $xx \infty \frac{p4}{mm}$; hoc est, $x \infty \sqrt{\frac{p4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$; & si fuerit $n \infty \sqrt{\frac{p4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$, tunc radicem æquationis fore æqualem cuilibet horum terminorum; & si inæquales fuerint, tunc eam necessariò futuram inter hosce duos. Idem demonstrabitur de duobus reliquis p & $\frac{n3}{mm}$; nempe si fuerint æquales, radix æquationis propositæ æquabitur unicuique illorum duorum; sin inæquales, necessariò constituetur inter duos, transpositâ scilicet æquatione in hunc modum $x^4 - p^4 \infty n^3x - mmxx$.

Prop. 3. $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^4 - mmxx \infty n^3x + p^4$, ideoque xx majus quàm mm, & x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Sed est etiam $x^4 - n^3x \infty mmxx + p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & nx^3 majus quàm n^3x. Eodem modo est $x^4 - p^4 \infty mmxx + n^3x$, & consequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Atqui per transpositionem est quoque $mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$. Quare $mx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $m + n + p$ major quàm x. Consimili ratione demonstrabitur, quòd $mmxx + nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4, & consequenter $mm + nn + pp$ majus quàm xx. Invenimus ergo, quòd radix x propositæ æquationis major est quàm m, n, & p, at minor quàm $m + n + p$, & $\sqrt{mm + nn + pp}$.

Prop. 4. $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + mmxx \infty p^4 - n^3x$, ideoque $\frac{p4}{n3}$ majus quàm x. Similiter est $x^4 + n^3x \infty p^4 - mmxx$, ac per consequens

sequens $\frac{p4}{mm}$ majus quàm xx, hoc est, $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Atqui est quoque $mmxx + n^3 x \infty p^4 - x^4$, & consequenter p^4 majus quàm x^4, ac p major quàm x, & $p^3 x$ majus quàm x^4, nec non $mmpx$ majus quàm $mmxx$. Sed est etiam $x^4 + mmxx + n^3 x \infty p^4$. Quare $p^3 x + mmpx + n^3 x$ majus est quàm p^4, ac per consequens, divisâ utrâque parte per $p^3 + mmp + n^3$, erit radix x propositæ æquationis major quàm $\frac{p4}{p3 + mmp + n3}$; at minor quàm $\frac{p4}{n3}$, $\frac{pp}{m}$, & p.

Prop. 5. $x^4 * - mmxx + n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $n^3 x + p4 \infty mmxx - x^4$, ideoque mm majus quàm xx, & m major quàm x. Similiter est $x^4 + p^4 \infty mmxx - n^3 x$, & consequenter x major quàm $\frac{n3}{mm}$. Præterea est $x^4 + n^3 x \infty mmxx - p^4$, ac per consequens xx majus quàm $\frac{p4}{mm}$, hoc est, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo quamlibet radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{n3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm m.

Prop. 6. $x^4 * + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + mmxx \infty n^3 x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p4}{n3}$. Sed est etiam $x^4 + p^4 \infty n^3 x - mmxx$, ac per consequens $\frac{n3}{mm}$ majus quàm x. Similiter est $x^4 + mmxx + p^4 \infty n^3 x$, ideoque n^3 major quàm x^3, & n major quàm x. Invenimus ergo quamlibet duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p4}{n3}$, at minorem quàm $\frac{n3}{mm}$ & n.

Prop. 7. $x^4 * - mmxx - nx^3 + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty n^3 x - p^4$. Unde patet,

tet, si xx æquatur ipsi mm, hoc est, $x \infty m$, eandem x fore æqualem ipsi $\frac{p4}{n3}$; ac per consequens, si fuerint termini hi m & $\frac{p4}{n3}$ æquales, erit una radicum æquationis propositæ æqualis singulis ipsorum; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter illos duos m & $\frac{p4}{n3}$. Eodem modo per transpositionem est $x^4 - n^3 x \infty mmxx - p^4$. Unde similiter discimus, si x^3 æquatur ipsi n^3, hoc est, $x \infty n$, fore etiam $xx \infty \frac{p4}{mm}$, hoc est, $x \infty \frac{pp}{m}$. Ideoque si hi termini n & $\frac{pp}{m}$ fuerint æquales, una ex radicibus æquationis propositæ æquabitur singulis eorundem terminorum; sin verò inæquales fuerint, nulla radicum æquationis propositæ inter illos duos constituta erit. Præterea per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty mmxx + n^3 x$, ideoque $mmxx + n^3 x$ majus quàm x^4, & $mmx + n^3$ majus quàm x^3. Porrò, si proposita æquatio est realis, erit x realis, & æqualis, vel major, vel minor quàm n. Si fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^3, & $mm + nn$ majus quàm xx, hoc est, x minor erit quàm $\sqrt{mm + nn}$. Si fuerit x minor quàm n, minor etiam erit quàm $\sqrt{mm + nn}$. Quare patet, quamlibet radicum æquationis propositæ necessariò minorem esse quàm $\sqrt{mm + nn}$. Denique existente $x^4 + p^4 \infty mmxx + n^3 x$, erit similiter $mmxx + n^3 x$ majus quàm p^4. Et quia inventa est $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x, erit consequenter $mmx\sqrt{mm + nn}$ majus quàm $mmxx$, ideoque $mmx\sqrt{mm + nn}, + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p4}{mm\sqrt{mm + nn}, + n3}$. Quare inventus est terminus unus major & alter minor quàm quælibet duarum radicum æquationis propositæ. Atque ita modo sequenti capite observato propositione septimâ demonstrari potest, quòd x major est quàm minor horum terminorum n & $\frac{p4}{mmn + n3}$.

Caput VIII.

De Æquationibus quatuor dimensionum, penultimo termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx$. Unde constat, si x est æqualis ipsi l, etiam xx æquari $\frac{p4}{mm}$, hoc est, $x \infty \frac{pp}{m}$; ideoque si l æqualis est ipsi $\frac{pp}{m}$, hoc est, $lm \infty pp$, erit radix æquationis propositæ æqualis singulis terminorum l & $\frac{pp}{m}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam, sive tres habuerit, semper erit inter hos terminos; sed si fuerint æquales, hoc est, $lm \infty pp$, & $llmm \infty p^4$, substituto $llmm$ loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x - l$, cognoscemus in hoc casu non haberi aliam radicem veram præter l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty p^4 - lx^3$. Unde constat, si fuerit $x \infty m$, etiam $\sqrt{C.}\ \frac{p4}{l}$ æquari ipsi x; ideoque si duo termini m & $\sqrt{C.}\ \frac{p4}{l}$ sint æquales, erit radix æquationis æqualis singulis horum terminorum; sin verò inæquales fuerint, erit illa necessariò inter duos. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty mmxx - lx^3$. Unde discimus, quòd si x æqualis est ipsi p, fore quoque eam æqualem ipsi $\frac{mm}{l}$: ideoque si termini p & $\frac{mm}{l}$ æquantur, erit radix æquationis æqualis unicuique illorum; sed si inæquales fuerint, erit illa necessariò inter utrosque constituta.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty mmxx + p^4$, ideoque x major

major quàm l. Sed & per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty lx^3 + p^4$, ideoque x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty lx^3 + mmxx$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Præterea per transpositionem propositionis est $lx^3 + mmxx + p^4 \infty x^4$, ideoque $lx^3 + mx^3 + px^3$ majus quàm x^4, & $l + m + p$ majus quàm x. Quare invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm l, m, & p, at minorem quàm $l + m + p$. Denique per transpositionem est $x^4 \infty lx^3 + mmxx + p^4$, ideoque x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx + mm$. Atqui demonstratum est superiùs x majorem esse quàm l, ac proinde ll minus quàm lx. Multò igitur magis xx majus erit quàm $ll + mm$, & x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$, $\sqrt{\sqrt{m^4 + p^4}}$, & $\sqrt{\sqrt{mmpp + p^4}}$.

Prop. 4. $x^4 + lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 \infty p^4 - mmxx$, ideoque $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, & $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Similiter est, $lx^3 + mmxx \infty p^4 - x^4$, ac per consequens p major quàm x, & $ppxx$ majus quàm x^4, & $lpxx$ majus quàm lx^3. Sed per transpositionem propositionis est etiam $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$. Quare $ppxx + lpxx + mmxx$ majus erit quam p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{pp + lp + mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp + lp + mm}}$. At verò existente $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$, erit quoque p^4 majus quàm lx^3, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3, & $\sqrt{C.}\,\frac{p^4}{l}$ majus quàm x. Inventa igitur est radix x æquationis propositæ major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp + lp + mm}}$; at minor quàm $\frac{pp}{m}$, $\sqrt{C.}\,\frac{p^4}{l}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major

jor quàm x. Deinde est $x^4 + p^4 \infty lx^3 - mmxx$, ac per consequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea est $x^4 + mmxx \infty lx^3 - p^4$, ac proinde x^3 major quàm $\frac{p4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.}\, \frac{p4}{l}$. Invenimus igitur, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$ & $\sqrt{C.}\, \frac{p4}{l}$, at minorem quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty mmxx - lx^3$, ideoque $\frac{mm}{l}$ majus quàm x. Deinde est $lx^3 + p^4 \infty mmxx - x^4$, ac proinde m major quàm x. Præterea est $x^4 + lx^3 \infty mmxx - p^4$, & consequenter xx majus quàm $\frac{p4}{mm}$, hoc est, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty mmxx - p^4$. Unde patet, si x æqualis est ipsi l, ipsam x quoque fore æqualem ipsi $\frac{pp}{m}$; & per consequens, si fuerint termini l & $\frac{pp}{m}$ æquales, erit una radicum æquationis propositæ æqualis singulis illorum; & si fuerint inæquales, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter illos duos constituta. Eodem modo per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty lx^3 - p^4$. Unde similiter constat, si fuerit x æqualis ipsi m, fore quoque x æqualem ipsi $\sqrt{C.}\, \frac{p4}{l}$; ideoque si æquales fuerint m & $\sqrt{C.}\, \frac{p4}{l}$, una radicum æquationis propositæ æqualis erit cuilibet horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter illos duos constituta. Porrò per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + mmxx$, unde $lx^3 + mmxx$ majus erit quàm x^4, & $lx + mm$ majus quàm xx. Jam si fuerit æquatio proposita realis,

lis, erit x vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, & $l+m$ major quàm x. Quòd si fuerit x minor quàm m, multo magis ipsa minor erit quàm $l+m$.

Deinde ex eadem æquatione $x^4+p^4 \infty lx^3+mmxx$ etiam constat, quòd lx^3+mmxx majus est quàm p^4. Atqui inventa est $l+m$ major quàm x. Ergo $llxx+lmxx$ majus erit quàm lx^3, & $llxx+lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, ideoque xx majus quàm $\frac{p4}{ll+lm+mm}$. Hinc cum $llxx+2lmxx+mmxx$ multò majus sit quàm p^4, erit quoque per consequens $lx+mx$ majus quàm pp, & x major quàm $\frac{pp}{l+m}$. Quare invenimus quamlibet duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\sqrt{\frac{p4}{ll+lm+mm}}$ & $\frac{pp}{l+m}$, at minorem quàm $l+m$.

Cæterùm quoniam invenimus, quòd x necessariò est minor quàm $l+m$; patet, si x supponitur major quàm m, eam fore inter hos terminos $l+m$ & m. Quòd si m fuerit æqualis aut major quàm x; quoniam lx^3+mmxx majus est quàm p^4, erit & $lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p4}{lm+mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p4}{lm+mm}}$. Quare unaquæque duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p4}{lm+mm}}$, at minor quàm $l+m$.

CAPUT IX.

De limitibus Æquationum quatuor dimensionum tertio termino carentium.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 * + n3x - p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - n^3x$. Unde patet, quòd si x æqualis est ipsi l, fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p4}{n3}$; ideoque si fuerit l æqualis ipsi $\frac{p4}{n3}$, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, radix æquationis propositæ æqualis erit singulis terminorum l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam, sive tres habuerit, semper erit inter hos terminos. Præterea cognoscimus, quòd, si fuerint hi ultimi termini æquales, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, substituto in æquatione proposita ln^3 loco p^4, & divisâ æquatione per $x-l$, ipsa non possit aliam habere veram radicem quàm l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - n^3 x \infty p^4 - lx^3$. Unde constat, si x æqualis est ipsi n, fore quoque $x^3 \infty \frac{p^4}{l}$, hoc est, $x \infty \sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$; & si fuerit n æqualis ipsi $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, radix æquationis æquabitur singulis horum terminorum; & si fuerint inæquales, erit necessariò inter duos. Deinde per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty n^3 x - lx^3$. Unde patet si fuerit x æqualis ipsi p, fore quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$, hoc est, $x \infty \sqrt{\frac{n^3}{l}}$; ideoque si fuerit p æqualis ipsi $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, radix æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum, & si fuerint inæquales, erit necessariò inter utrosque.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty n^3 x + p^4$, ideoque x major quàm l. Eodem modo est $x^4 - n^3 x \infty lx^3 + p^4$, ac proinde x major quàm n, & nx^3 majus quàm $n^3 x$. Similiter est $x^4 - p^4 \infty lx^3 + n^3 x$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Sed per transpositionem est quoque $lx^3 + n^3 x + p^4 \infty x^4$. Quare $lx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l + n + p$ major quàm x. Ergo invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm $l, n,$ & p, at minorem quàm $l + n + p$. Porrò ex hac æquatione $lx^3 + n^3 x + p^4 \infty x^4$ etiam constat, quòd $lx^3 + n^3 x$ est minus quàm x^4: & quandoquidem invenimus l minorem esse quàm x, erit $l^3 x$ minus quàm lx^3, ideoque $l^3 x + n^3 x$ multò minus quàm x^4, & x^3 major quàm $l^3 + n^3$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$ & $\sqrt{\sqrt{ln^3 + p^4}}$.

Prop.

Prop. 4. $x^4 + lx^3 * + n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + lx^3 \infty p^4 - n^3 x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Eodem modo eſt $x^4 + n^3 x \infty p^4 - lx^3$, ac proinde $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter eſt $lx^3 + n^3 x \infty p^4 - x^4$, & per conſequens p major quàm x, & $p^3 x$ majus quàm x^4, ac $lppx$ majus quàm lx^3. Sed per tranſpoſitionem propoſitionis eſt quoque $x^4 + lx^3 + n^3 x \infty p^4$. Quare $p^3 x + lppx + n^3 x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$. Et ſic inventa eſt radix x æquationis propoſitæ major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\sqrt{C.}\, \frac{p^4}{l}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 * + n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $n^3 x + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Deinde eſt $x^4 + p^4 \infty lx^3 - n^3 x$, quare erit xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$, hoc eſt, x major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Sed eſt quoque $x^4 + n^3 x \infty lx^3 - p^4$, ideoque x^3 majus quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.}\, \frac{p^4}{l}$. Quare invenimus, quòd quælibet duarum radicum æquationis propoſitæ neceſſariò major eſt quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & $\sqrt{C.}\, \frac{p^4}{l}$, at minor quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 * - n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + p^4 \infty n^3 x - lx^3$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx, hoc eſt, x minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Deinde eſt $x^4 + lx^3 \infty n^3 x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Præterea eſt $lx^3 + p^4 \infty n^3 x - x^4$, & idcirco n^3 major quàm x^3, hoc eſt, x minor quàm n. Ergo invenimus, unamquamque duarum radicum x æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty n^3x - p^4$. Unde patet, si x æqualis est ipsi l, fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; & per consequens, si fuerint hi termini l & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, una ex radicibus æquationis propositæ æqualis erit singulis horum terminorum æqualium l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter ipsos. Deinde per transpositionem est $x^4 - n^3x \infty lx^3 - p^4$. Unde simili modo patet, si x æquatur ipsi n, ipsam x quoque æquari ipsi $\sqrt{C.}\,\frac{p^4}{l}$; ideoque si termini hi n & $\sqrt{C.}\,\frac{p^4}{l}$ æquales fuerint, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter utrosque. Porrò per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + n^3x$, ideoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm x^4, & $lxx + n^3$ majus quàm x^3. Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major vel minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Sin verò minor sit, erit x multò minor quàm $l + n$. Quare utraque duarum radicum propositæ æquationis necessariò minor erit quàm $l + n$. Quin & existente $x^4 + p^4 \infty lx^3 + n^3x$, erit quoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4. Atqui invenimus $l + n$ majorem esse quàm x, ac proinde $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx, & $l^3 + lnn + 2lln$ majus quàm lxx, nec non $l^3x + lnnx + 2llnx$ majus quàm lx^3. Ergo $l^3x + lnnx + 2llnx + n^3x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$. Et quandoquidem cubus ex $l + n$ major est quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l + n$. Invenimus itaque quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ major est quàm p^4 divisum per cubum ex $l + n$, ut & major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$, at minor quàm $l + n$. Præterea, quoniam $l + n$ major est quàm x, si fuerit x major

major quàm n, erit neceſſariò inter hos terminos $l+n$ & n. Quòd ſi verò n fuerit vel æqualis vel major quàm x, quia $lx^3 + n^3x$ majus eſt quàm p^4, erit & $lnnx+n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{lnn+n^3}$. Ac proinde quælibet radicum æquationis propoſitæ major erit quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, at minor quàm $l+n$.

Caput X.

De limitibus Æquationum quatuor dimenſionum, in quibus nullus terminus deeſt.

Prop. I. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem eſt $lx^3+n^3x \infty x^4 + mmxx + p^4$, ideoque lx^3+n^3x majus quàm x^4, & $lxx+n^3$ majus quàm x^3. Jam ſi fuerit propoſita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd ſi fuerit æqualis vel major, erit $lxx+nxx$ majus quàm x^3, hoc eſt, $l+n$ major quàm x; & ſi x minor quàm n, multò magis minor erit quàm $l+n$. Ergo x neceſſariò minor erit quàm $l+n$. Deinde ex eadem æquatione $lx^3+n^3x \infty x^4 + mmxx + p^4$ conſtat, eſſe lx^3+n^3x majus quàm p^4. Sed inventa eſt $l+n$ major quàm x, ac per conſequens $ll+nn+2ln$ majus quàm xx, & $l^3x+lnnx+2llnx$ majus quàm lx^3. Quare erit $l^3x+lnnx+2llnx+n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3+lnn+2lln+n^3}$; & quandoquidem cubus ex $l+n$ major eſt quàm $l^3+lnn+2lln+n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 diviſum per cubum ex $l+n$. Inventus eſt itaque terminus unus major & alter minor quàm unaquæque radicum æquationis propoſitæ, ſive hæc duas ſive quatuor radices habuerit. Præterea, quoniam invenimus, quòd $l+n$ ſemper major eſt quàm x, ſi ponatur x quoque major quàm n; manifeſtum eſt eam eſſe inter duos terminos $l+n$ & n. Quòd ſi autem x fuerit æqualis vel minor quàm n, quoniam eſt lx^3+n^3x majus quàm p^4; erit $lnnx+n^3x$

 majus

majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lnn + n^3}$. Ergo unaquæque radicum propositæ æquationis, sive duas, sive tres habuerit, major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn + n^3}$, at minor quàm $l + n$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $mmxx + n^3x + p^4 \propto lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Similiter est $x^4 + n^3x + p^4 \propto lx^3 - mmxx$, ac idcirco x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea est $x^4 + mmxx + p^4 \propto lx^3 - n^3x$, ac per consequens xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Denique est $x^4 + mmxx + n^3x \propto lx^3 - p^4$, & consequenter x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. Quare invenimus, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & $\sqrt{C.}\frac{p^4}{l}$, at minorem quàm l.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $lx^3 + mmxx + n^3x \propto x^4 + p^4$, ideoque $lx^3 + mmxx + n^3x$ majus quàm x^4. Jam si proposita æquatio fuerit realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm maxima duarum m & n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx^3 + mx^3 + nx^3$ majus quàm x^4, & $l + m + n$ major erit quàm x, & magis si fuerit x minor quàm maxima duarum m & n. Quare $l + m + n$ erit necessario major quàm x. Præterea m erit aut æqualis, aut major, aut minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis aut major, & quidem x major quàm m, erit radix æquationis propositæ inter hosce terminos $l + m + n$ & m. Quòd si, existente m æquali aut majore quàm n, etiam m sit æqualis vel major quàm x; erit & $lmmx + m^3x$ $+ n^3x$

$+ n^3 x$ æquale aut majus quàm $lx^3 + mmxx + n^3x$, ac per consequens majus quàm p^4; ideoque x major quàm

$\frac{p^4}{lmm + m^3 + n^3}$. Unde si fuerit m vel æqualis vel major quàm n, erit x necessariò major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{p^4}{lmm + m^3 + n^3}$; & si n fuerit major quàm m, consimili ratione demonstrabitur x etiam necessariò majorem esse minore horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn + mmn + n^3}$. Invenimus ergo unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse minore horum terminorum m & $\frac{p^4}{lmm + m^3 + n^3}$, si m vel æqualis vel major fuerit quàm n; aut majorem minore duorum n & $\frac{p^4}{lnn + mmn + n^3}$, si n major sit quàm m; at verò semper minorem quàm $l + m + n$.

Prop. 4. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $lx^3 + mmxx \propto x^4 + n^3x + p^4$, ideoque $lx^3 + mmxx$ majus quàm x^4, & $lx + mm$ majus quàm xx. Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx + mx$ majus quàm xx, & $l + m$ major quàm x; & multò magis, si fuerit x minor quàm m. Ergo x necessariò minor erit quàm $l + m$. Unde si fuerit x major quàm m, erit inter hosce terminos $l + m$ & m. Quòd si x fuerit vel æqualis vel minor quàm m, quandoquidem & $lx^3 + mmxx$ majus est quàm p^4; erit $lmxx + mmxx$ majus quàm p^4; ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{lm + mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm + mm}}$. Quare quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm + mm}}$, at minor quàm $l + m$.

Prop. 5. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Demonstrabitur ex transpositionibus requisitis n^3x fore majus quàm x^4, ideoque n majorem quàm x; & n^3x majus quàm lx^3, ac proinde $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx; & denique n^3x majus quàm p^4, & per consequens x majorem quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Invenimus itaque terminum unum majorem singulis radicum æquationis propositæ, at verò duos alios minores.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + n^3x \infty x^4 + lx^3 + p^4$, ideoque $mmxx + n^3x$ majus quàm x^4, & $mmx + n^3$ majus quàm x^3. Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^3, & $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x; & multò magis, si fuerit x minor quàm n. Quare erit $\sqrt{mm + nn}$ semper major quàm x, & x erit inter terminos $\sqrt{mm + nn}$ & n, si major est quàm n. Quòd si fuerit æqualis aut minor quàm n, quoniam est $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, erit quoque $mmnx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Ergo quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{mmn + n^3}$, at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$.

Prop. 7. $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Factis transpositionibus requisitis, demonstrabitur esse x minorem quàm m & $\frac{mm}{l}$, at majorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$.

Prop. 8. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty n^3x + p^4 - mmxx$, ideoque si fuerit $x^4 \infty lx^3$, erit $x \infty l$, & $ln^3 \infty n^3x$, & $n^3x + p^4 \infty mmxx$, ac proinde $ln^3 + p^4 \infty mmxx$, & $x \infty \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$. Unde patet, si fuerit $l \infty \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$, hoc est, si habeatur $llmm \infty ln^3 + p^4$; radicem æquationis propositæ fore æqualem singulis terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$: ac idcirco, substituto in hoc casu in æquatione proposita valore ipsius p^4, nempe $llmm - ln^3$, ipsam esse divisibilem per $x - l$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm lx^3, hoc est, x major quàm l, erit quoque $n^3x + p^4$ majus quàm $mmxx$; & si fuerit lx^3 majus quàm x^4, hoc est, l major quàm x, erit & $mmxx$ majus quàm $n^3x + p^4$. Jam quandoquidem æquatio proposita est realis, erit x realis & vel æqualis, vel major, vel minor quàm p. Quòd si fuerit æqualis vel major quàm p, sitque major quàm l, quoniam tunc $n^3x + p^4$ quoque majus est quàm $mmxx$, erit & $n^3x + p^3x$ majus quàm $mmxx$, & $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ majus quàm x. Ergo in hoc casu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quòd si autem x minori existente quàm l, ipsa sit æqualis vel minor quàm p, quoniam & tunc $n^3x + p^4$ minus est quàm $mmxx$, erit similiter $n^3x + p^3x$ minus quàm $mmxx$, & consequenter $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ minus quàm x. Igitur in hoc casu erit x minor quàm l, & major quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quare universaliter apparet, æquationem propositam non habere præter unam radicem realem ipsi l æqualem, cùm est $llmm \infty ln^3 + p^4$; modò quælibet radicum, sive unam, sive tres habuerit, fuerit semper necessariò inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{n^3 + p^3}{mm}$, & $\sqrt{\frac{n^3p + p^4}{mm}}$.

Prop. 9. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx - n^3x$, ideoque si fuerit $x^4 \infty lx^3$, hoc est, $x \infty l$, erit $mmxx \infty - n^3x + p^4$, & per consequens $mmxx \infty - n^3l + p^4$, & $xx \infty \frac{p^4 - ln^3}{mm}$, & $x \infty \sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$. Quòd si ergo l æqualis est $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$, hoc est, si fuerit $llmm \infty p^4 - ln^3$; radix æquationis propositæ æqualis erit unicuique terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$: ideoque si in hoc casu in æquatione proposita loco p^4 substituatur ejus valor, nempe $llmm + ln^3$, apparebit ipsam dividi posse per $x - l$, atque nullam aliam radicem veram admittere præter l. Si verò x^4 fuerit majus quàm lx^3, hoc est, x major quàm l, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$; & contra, si fuerit l major quàm x, erit etiam $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4. Jam si æquatio proposita est realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm n. Esto igitur, quòd x major quàm l sit vel æqualis vel major quàm n; quare cum & p^4 tunc majus sit quàm $mmxx + n_3x$, erit quoque p^4 majus quàm $mmnx + n^3x$; ideoque $\frac{p^4}{mmn + n^3}$ majus quàm x. Quare in hoc casu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Quòd si x, cùm major est quàm l, minor fuerit quàm n, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$, ideoque multò majus quàm $mmxx + nnxx$, & consequenter $\frac{p^4}{mm + nn}$ majus quàm xx, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$ major quàm x. Quare in hoc casu x erit major quàm l, & minor quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Quòd si verò x, cùm minor est quàm l, vel æqualis fuerit vel major quàm n, erit $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque $mmxx + nnxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{mm + nn}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Ergo in hoc casu erit x

minor

minor quàm l, & major quàm $\sqrt{\frac{p4}{mm+nn}}$. Postremò, cùm x minor quàm l, etiam ipsa minor sit quàm n, erit $mmxx+n^3x$ majus quàm p^4, & $mmnx+n^3x$ multò majus quàm p^4, & per consequens x major quàm $\frac{p4}{mmn+n3}$. Igitur x in hoc casu, minor erit quàm l, & major quàm $\frac{p4}{mmn+n3}$.

Quæ cum ita sint, constat universaliter, æquationem propositam non habere nisi unam veram radicem, quæ æqualis est ipsi l, quando est $llmm \infty p^4 - ln^3$, modo unaquæque radicum, sive unam tantùm, sive tres habuerit, fuerit semper necessario inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{p4}{mmn+n3}$, & $\sqrt{\frac{p4}{mm+nn}}$.

Prop. 10. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Factis necessariis transpositionibus, demonstrabitur quòd x major est quàm l, m, n, & p. Deinde erit quoque per transpositionem $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$, & per consequens $lx^3 + mx^3 + nx^3 + px^3$ majus quàm x^4, & $l+m+n+p$ major quàm x. Porrò, quoniam est $x^4 \infty lx^3 + mmxx + n^3x + p^4$, erit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx + mm$, ideoque multo magis x major erit quàm $\sqrt{ll+mm}$ & $\sqrt{lm+mm}$. Similiter, cum x^3 major sit quàm $lxx + mmx + n^3$, erit multo magis major quàm $l^3 + m^3 + n^3$, $l^3 + lmm + n^3$, & $2lmm + n^3$, & sic de reliquis terminis, quos substituere licet loco x^3, minores quàm x^3. Sic x^4 majus est quàm $l^4 + m^4 + n^4$, quàm $m^4 + n^4 + p^4$, & sic reliquis. Præterea, quoniam x major est quàm n & p, & $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$, erit $lx^3 + mmxx + nnxx + ppxx$ majus quàm x^4, ideoque $lx + mm + nn + pp$ majus quàm xx aliquâ quantitate; quæ quidem quantitas, etiamsi sit incognita, si appelletur zz, habebitur $lx + mm + nn + pp \infty xx + zz$. Quantitas autem hæc incognita zz necessariò minor erit quàm $mm + nn + pp$, aliàs, ablatis ex duabus partibus æquationis præcedentis, æqualibus, aut minori quantitate ex prima &

ma & majori ex secunda, esset reliqua lx aut æqualis, aut major quàm xx. Quod foret absurdum, quandoquidem x demonstrata est major quàm l. Quare habemus hanc æquationem $xx \propto lx + mm + nn + pp - zz$, quæ erit realis, eritque $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp - zz}$. Manifestum verò est, quòd $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp$ majus est quàm $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp - zz$. Ergo $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$ major erit quàm x, ideoque $\frac{1}{2}l + \sqrt{ll + mm + nn + pp}$ multo magis major erit quàm x; ita ut radix propositæ æquationis necessariò sit inter $\sqrt{ll + mm}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$.

Prop. II. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 - mmxx \propto p^4 - n^3x$. Unde, si fuerit $x^4 - lx^3 - mmxx \propto 0$, hoc est, omnibus per xx divisis, $xx - lx - mm \propto 0$, erit quoque $p^4 - n^3x \propto 0$. Hoc est, si fuerit $xx \propto lx + mm$, vel $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; erit & $p^4 \propto n^3x$, vel $x \propto \frac{p^4}{n^3}$. Quare constat, si fuerit $\frac{p^4}{n^3} \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propositæ fore æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc est, xx majus quàm $lx + mm$; erit p^4 etiam majus quàm n^3x, hoc est, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Jam existente xx majori quàm $lx + mm$, erit $xx \propto lx + mm$ plus aliquâ quantitate. Quæ quidem quantitas, etiamsi sit incognita, si vocetur zz: habebitur $xx \propto lx + mm + zz$, & $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + zz}$, eritque x major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc casu erit x minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit x^4 minus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc est, xx minus quàm $lx + mm$; erit & p^4 minus quàm n^3x, hoc est, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc existente xx minori quàm $lx + mm$,

erit

erit $xx \infty lx + mm$ minus aliquâ quantitate. Quæ si nominetur zz, habebitur $xx \infty lx + mm - zz$, hoc est, $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, eritque x minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Ergo in hoc casu erit x major quàm $\frac{p4}{n3}$, & minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare universaliter patet, radicem æquationis propositæ æqualem esse ipsi $\frac{p4}{n3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, quando $\frac{p4}{n3}$ æquatur ipsi $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; Sin secus, quamlibet radicum, sive unam tantùm, sive tres habuerit, semper esse inter hosce terminos $\frac{p4}{n3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

Prop. 12. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x4 - p4 \infty n^3x - lx^3 - mmxx$; ideoque si fuerit $x \infty p$, erit quoque $n^3x \infty lx^3 + mmxx$, & $x \infty \frac{n3}{lp + mm}$. Unde constat, si $lpp + mmp$ æquetur n^3, radicem æquationis fore æqualem singulis terminorum æqualium p & $\frac{n3}{lp + mm}$. Quòd si fuerit $x4$ majus quàm $p4$, hoc est, x major quàm p, erit quoque n^3x majus quàm $lx^3 + mmxx$. Jam si æquatio proposita est realis, erit & x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major quàm m, & eadem quantitas x etiam major sit quàm p, quandoquidem & tunc n^3x majus est quàm $lx3 + mmxx$, erit $n3x$ majus quàm $lmxx + mmxx$, & $\frac{n3}{lm + mm}$ majus quàm x. Quare in hoc casu erit x major quàm p, & minor quàm $\frac{n3}{lm + mm}$. Quòd si existente x majore quàm p ipsa minor sit quàm m, erit $n3x$ majus quàm $lx3 + mx^3$, & $\frac{n3}{l + m}$ majus quàm xx. Ergo in hoc casu erit x major quàm p, & minor quàm $\sqrt{\frac{n3}{l + m}}$. Quòd si verò, x minori existente quàm p, ipsa sit major quàm m, vel eidem æqualis, quandoquidem & tunc n^3x minus est quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x

minor quàm $lx^3 + mx^3$, hoc eſt, xx majus quàm $\frac{n^3}{l+m}$. Quare in hoc caſu erit x minor quàm p, & major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$. Denique, cùm fuerit x minor quàm p, & ipſa etiam minor quàm m, quoniam & tunc n^3x minus eſt quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x minus quàm $lmxx + mmxx$, & x major quàm $\frac{n^3}{lm+mm}$. Unde conſtat univerſaliter, radicem æquationis propoſitæ eſſe æqualem ſingulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp+mm}$, cùm eſt $lpp + mmp$ æquale ipſi n^3; ſed cùm inæquales ſunt, eſſe radicem æquationis propoſitæ neceſſariò inter majorem & minorem terminorum p, $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$, & $\frac{n^3}{lm+mm}$.

Prop. 13. $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Factis neceſſariis tranſpoſitionibus, demonſtrabitur x fore minorem quàm p, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, $\sqrt{\frac{p^4}{mm}}$, & $\frac{p^4}{n^3}$; at verò majorem quàm $\frac{p^4}{p^3+lpp+mmp+n^3}$.

Prop. 14. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3x \infty mmxx + p^4 - lx^3$; ideoque ſi fuerit $x^4 \infty n^3x$, hoc eſt, $x \infty n$, erit $mmxx + p^4 \infty lx^3$, hoc eſt, $\frac{mmnn+p^4}{l} \infty x^3$. Quòd ſi fuerit x major quàm n, erit & $mmxx + p^4$ majus quàm lx^3: ſin minor fuerit, erit $mmxx + p^4$ minus quàm lx^3. Jam, ſi x major eſt quàm n, & etiam vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx + p^4$ majus eſt quàm lx^3, multo magis erit $mmxx + ppxx$ majus quàm lx^3, hoc eſt, $\frac{mm+pp}{l}$ majus quàm x. Ergo in hoc caſu erit x major quàm n, & minor quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Quòd ſi x major fuerit quàm n, & etiam minor quàm p, quoniam & tunc $mmxx + p^4$ majus eſt quàm lx^3, erit quoque $mmpp + p^4$ majus quàm lx^3, hoc eſt, x^3 minor quàm $\frac{mmpp+p^4}{l}$, & x minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Quare

Quare in hoc casu erit x major quàm n, & minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p4}{l}}$. Quòd si x minor fuerit quàm n, & vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx+p4$ minus est quàm lx^3, erit quoque $mmpp+p4$ minus quàm lx^3, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p4}{l}}$. Ergo in hoc casu erit x minor quàm n, & major quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p4}{l}}$. Quòd si verò x minor fuerit quàm n, & ipsa etiam minor sit quàm p, quoniam & tunc $mmxx+p4$ minor est quàm lx^3; erit quoque $mmxx+ppxx$ minus quàm lx^3, & $\frac{mm+pp}{l}$ minus quàm x. Quare in hoc casu, erit x minor quàm n, & major quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Unde universaliter apparet, radicem æquationis propositæ necessariò esse inter maximum, & minimum trium terminorum n, $\frac{mm+pp}{l}$, & $\sqrt{C.\frac{mmpp+p4}{l}}$.

Prop. 15. $x^4+lx^3-mmxx+n^3x-p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x4+lx^3-mmxx \propto p^4-n^3x$; ideoque si fuerit $x4+lx^3-mmxx \propto 0$, seu, divisis omnibus terminis per xx, $xx+lx-mm \propto 0$; erit quoque $p4-n3x \propto 0$, hoc est, si est $xx \propto -lx+mm$, vel $x \propto -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$, erit $p4 \propto n3x$, seu $x \propto \frac{p4}{n3}$. Unde patet, si $\frac{p4}{n3}$ est æquale ipsi $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$, radicem æquationis propositæ esse æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p4}{n3}$ & $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd si fuerit $x4+lx3$ majus quàm $mmxx$, hoc est, $xx+lx$ majus quàm mm, erit quoque $p4$ majus quàm $n3x$, hoc est, $\frac{p4}{n3}$ majus quàm x. Ac proinde cum $xx+lx$ majus sit quàm mm, erit $xx+lx$ majus quàm mm aliquâ quantitate. Quantitas autem hæc, licèt sit incognita, vocetur zz, eritque $xx+lx \propto mm+zz$, seu $xx \propto -lx+mm+zz$, hoc est, $x \propto -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm+zz}$, ideoque x major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Ergo in hoc casu x minor erit quàm $\frac{p4}{n3}$, & major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd si fuerit $x4+lx^3$ minus

nus quàm $mmxx$, hoc est, $xx + lx$ minus quàm mm, erit quoque $p4$ minus quàm $n3\,x$, hoc est, x major quàm $\frac{p4}{n3}$ Hinc cum $xx + lx$ minus sit quàm mm, erit $xx + lx$ minor quàm mm aliquâ quantitate. Vocetur quantitas hæc quamvis incognita zz, eritque $xx + lx + zz \infty mm$, vel $xx \infty - lx + mm - zz$, hoc est, $x \infty - \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, ideoque x minor erit quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc casu erit x major quàm $\frac{p4}{n3}$, & minor quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Atque ita in genere perspicuum est, cùm $\frac{p4}{n3}$ æquatur ipsi $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propositæ æqualem esse singulis terminorum æqualium $\frac{p4}{n3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; sin minus, quamlibet radicum, sive unam tantùm, sive tres habuerit, necessariò esse inter hosce terminos $\frac{p4}{n3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

FINIS.