# PROGRAMA.

Se desea saber si por alguno de los muchos métodos descubiertos despues de la invencion del cálculo diferencial se puede resolver el problema que aquí se propone: tambien si algun Geómetra se ha ocupado en investigaciones de esta naturaleza, resolviendo otros semejantes, y deduciendo de su método teorémas que conduzcan al adelantamiento de la Geometría superior; pues habiéndose hallado hace diez y seis años un método para resolver este problema y qualesquiera de la misma clase que puedan proponerse con cierta mira, que no es de pura curiosidad, ni dirigida á una vana ostentacion de ingenio, no ha sacado su Autor de ninguna de las obras matemáticas que ha visto principio que le encaminase á su idea; pero como esta circunstancia no es suficiente para calificarle por nuevo, la solucion del problema manifestará el juicio que deba formarse. De este modo los grandes Geómetras Newton y Leibnitz demostráron ser los primeros inventores del cálculo diferencial ó método de las fluxîones; y los problemas propuestos en aquella época con dificultad podrian resolverse sino por el mismo cálculo.

Los métodos matemáticos, que son las fuentes de todos los descubrimientos hechos en estas ciencias, por lo comun han debido su orígen á la resolucion de problemas particulares. Esta verdad es conocida de todos los inteligentes: es cosa sabida que los problemas isoperimétricos fuéron el orígen del cálculo de las variaciones. Otros muchos métodos que son conocidos en la Geometría superior tuviéron su principio de la resolucion de problemas particulares, y despues se han generalizado. Lo mismo se podria demostrar en otros exemplares si se comparasen con un riguroso exâmen las cosas inventadas.

No es el ánimo del Inventor de este método embarazar ni fatigar con el problema que propone los ingenios de los grandes Matemáticos, cuyos talentos respeta como es justo; ántes al contrario está persuadido que muchos podrán tal vez por el mismo método, ó por otro mas ingenioso, llegar á su solucion. Solamente asegura como cosa ciertísima que no ha hallado en ninguna obra matemática la série de combinaciones que le constituyen; añadiendo que los problemas se van complicando gradualmente hasta un cierto término, de manera que aunque dentro de este término es infinito el número de problemas que están al alcance del método, si se pasa, es mucho mayor el número de los que no pueden resolverse. Así su generalidad está circunscripta por ciertos límites.

¿Pero cómo podrá asegurar que no se halla en ningun escrito matemático otra série de combinaciones ó la misma? Qualquiera pues que sea la série de combinaciones con que se satisfaga á la solucion del problema, y á las condiciones que se han de prescribir, si esta se halla señalada en algun Autor ántes de la propuesta, manifiestamente se demostrará que otro ha descubierto tambien un método semejante.

Por lo que es natural y consiguiente averiguar qual haya sido el objeto del Autor que se indique, por si coincide con el intento del que pregunta; pues deduciéndose tanto de la solucion de este problema como de la de otros mas sencillos aplicaciones y teorémas dignos en su juicio de la atencion de los Geómetras, el fin á que se dirige su trabajo y esta propuesta es „saber lo que hay adelantado sobre esta materia, „para sujetar despues su método y aplicaciones, si le fuere „concedido, al juicio y censura de otros mas sábios, por cu„yo medio fixado el mérito de esta invencion sea conducida „por otros á mayor perfeccion, si se considerase útil." Esto á todos interesa, y no debe excitar los zelos de ninguno.

# PROBLEMA.

Hallar la equacion integral correspondiente á esta diferencial

$$\frac{ar^2dx}{\sqrt{(r-x).x}}+\frac{br^2dx}{\sqrt{(4r-x).x}}+\frac{cr^2du}{\sqrt{(r-u).u}}+\frac{er^2du}{\sqrt{(4r-u).u}}$$

$$+\frac{frdx\sqrt{4r^2-rx}}{\sqrt{(r-x).x}}+\frac{hrdx\sqrt{r^2-rx}}{\sqrt{(4r-x).x}}+\frac{krdu\sqrt{4r^2-ru}}{\sqrt{(r-u).u}}$$

$$+\frac{grdu\sqrt{r^2-ru}}{\sqrt{(4r-u).u}}+\frac{lrdx\sqrt{4r-u}}{\sqrt{x}}+\frac{mrdu\sqrt{4r-x}}{\sqrt{u}}$$

$$+\frac{nrdx\sqrt{r-u}}{\sqrt{x}}+\frac{prdu\sqrt{r-x}}{\sqrt{u}}+\frac{qrdx\sqrt{(4r-u).(r-u)}}{\sqrt{rx}}$$

$$+\frac{srdu\sqrt{(4r-x).(r-x)}}{\sqrt{ru}}+\frac{trudx}{\sqrt{rx}}+\frac{zrxdu}{\sqrt{ru}}=dY.$$

### *Advertencias para la solucion de este problema.*

1.ª $(r)$ es una recta constante é invariable; $(x)$, $(u)$ son dos rectas variables; $(Y)$ es tambien cantidad variable.

2.ª Sea $(\varphi)$ otra recta variable, $F(\varphi)$, $F'(\varphi)$ dos funciones algébricas y racionales de la recta $(\varphi)$ combinada con la constante $(r)$; si $(x)$, $(u)$ se representan por funciones de $(\varphi)$ combinada con $(r)$, debe ser $x=F(\varphi)$; $u=F'(\varphi)$.

$F(\varphi)$, $F'(\varphi)$ se han de mirar como cantidades incógnitas, y entre todas las funciones algébricas y racionales de $(\varphi)$ combinada con $(r)$ solamente aquellas serán los valores de $(x)$, $(u)$ que satisfagan á la solucion del problema.

De $F(\varphi)$, $F'(\varphi)$ se saca el valor de $Y = F''(\varphi)$. Esta funcion es tambien algébrica, pero no del todo racional, porque envuelve cantidad radical.

3.ª Tambien se pide la equacion finita de $(x)$, $(u)$, $(r)$ que determina la razon en que deben estar estas rectas.

Por lo que toda la dificultad se reduce á *hallar dos funciones algébricas y racionales de $(\varphi)$ combinada con $(r)$, las quales si se supone que son los valores de $(x)$, $(u)$ resuelven el problema propuesto.*

4.ª $(a)$, $(b)$, $(c)$ &c. $(t)$, $(z)$ son los coeficientes de los términos y números constantes, cuyos valores se determinan por la solucion del problema.

5.ª Las integrales de los términos que entran en la equacion diferencial propuesta han de tener el mismo punto de orígen desde el qual comienza á contarse el principio de sus incrementos, y suponiendo $x = o$, todas estas cantidades integrales se han de desvanecer como tambien las variables $(u)$, $(Y)$. De esta condicion resulta que si se representan los términos de la equacion diferencial por los de esta $a r dA + b r dB + c r dC + e r dE + f r dF + h r dH + k r dK + g r dG + l dL + m dM + n dN + p dP + q dQ + s dS + t dT + z dZ = dY$ que se ha de mirar como idéntica á la primera, su integral $a r A + b r B + c r C + e r E + f r F + h r H + k r K + g r G + l L + m M + n N + p P + q Q + s S + t T + z Z = Y$ tiene sus valores reales posibles entre los límites $x = o$, $x = r$; y tambien entre los límites $u = o$, $u = r$; quando $x = o$, ó $u = o$, $a r A + b r B$ &c. $= Y = o$: quando $x = r$, ó $u = r$ cada término toma un valor determinado.

6.ª Los quatro términos $a r A = a r^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(r-x)} \cdot x}$, .......

$$b\,r\,B = b\,r^2\int\frac{dx}{\sqrt{(4r-x)\,.\,x}}\,,\quad c\,r\,C = c\,r^2\int\frac{du}{\sqrt{(r-u)\,.\,u}}\,,$$

$e\,r\,E = e\,r^2\int\frac{du}{\sqrt{(4r-u)\,.\,u}}$ se refieren á sectores de un mismo círculo y un mismo radio $= r$, siendo solamente diferentes los arcos de estos sectores. Así, si se suponen $(A)$ $(B)$ $(C)$ $(E)$ estos arcos: por la solucion del problema se tendrán los valores de los coeficientes que los multiplican.

7.ª Los dos términos $f\,r\,F = f\,r\int\frac{dx\sqrt{4r^2-r\,x}}{\sqrt{(r-x)\,.\,x}}$, .........

$k\,r\,K = k\,r\int\frac{du\sqrt{4r^2-r\,u}}{\sqrt{(r-u)\,.\,u}}$ dependen de la rectificacion de una Elipse; representando en el primer término por $F$, en el segundo por $K$ la recta igual al arco elíptico: se hallarán por la misma solucion los valores de los coeficientes $(f)$, $(k)$ que multiplican estos arcos.

8.ª Asimismo los dos términos $h\,r\,H = h\,r\int\frac{dx\sqrt{r^2-r\,x}}{\sqrt{(4r-x)\,.\,x}}$,

$g\,r\,G = g\,r\int\frac{du\sqrt{r^2-r\,u}}{\sqrt{(4r-u)\,.\,u}}$ dependen de la rectificacion de una Hypérbola, y contienen ademas una integral finita. Represéntese en el primer término por $(H)$, y en el segundo por $(G)$ la recta que resulta del arco hyperbólico, y de la integral finita: los coeficientes $(h)$, $(g)$ se determinarán por dicha solucion.

9.ª Los términos siguientes se pueden representar por áreas curvilineas; siendo $l\,L = l\,r\int\frac{dx\sqrt{4r-u}}{\sqrt{x}}$, .......

$$n\,N = n\,r\int\frac{dx\sqrt{r-u}}{\sqrt{x}}\,,\quad q\,Q = q\,r\int\frac{dx\sqrt{(4r-u)\,.\,(r-u)}}{\sqrt{r\,x}}\,,$$

$tT = tr\int\frac{u\,dx}{\sqrt{rx}}$: si se supone $\sqrt{rx}$ la abscisa comun, será muy fácil determinar la ordenada correspondiente en cada término; y representando por $(L)$, $(N)$, $(Q)$, $(T)$ estas áreas, de la solucion del problema se sacarán los valores de los coeficientes $(l)$, $(n)$, $(q)$, $(t)$ que multiplican cada una de ellas.

Lo mismo se entenderá dicho de los términos ........

$$mM = mr\int\frac{du\sqrt{4r-x}}{\sqrt{u}},\ pP = pr\int\frac{du\sqrt{r-x}}{\sqrt{u}},$$

$$sS = sr\int\frac{du\sqrt{(4r-x).(r-x)}}{\sqrt{ru}},\ zZ = zr\int\frac{x\,du}{\sqrt{ru}},\ \text{en}$$

los quales la abscisa comun es $\sqrt{ru}$.

10.ª Ninguna de estas diferenciales $dA$, $dB$, &c. $dS$, $dZ$ es separadamente integrable en términos finitos por los métodos que hasta ahora son conocidos.

*Agustin de Pedrayes.*

# PROGRAMMA.

Quid sciri in animo sit, hoc programmate declaratur: nimirum utrum ex methodis ab inventione calculi differentialis hucusque notis deduci possit sequentis problematis solutio. Denuo utrum Geometra quisque investigationibus hujusce naturæ incumbens, problemata similia solverit erueritque theoremata ad Geometriam sublimiorem promovendam conducentia. Deprehensa enim XVI ab hinc annis methodo qua non solum hoc problema solvitur, sed et alia ejusdem generis fere infinita quæ proponi possunt, hujus methodi Auctor susceptum assecutus consilium, quod nec puræ curiositatis seu vanæ ingenii ostentationis specimen exhibet, ex nullis scriptis mathematicis quæ perlustrare licuit principium inventionis hausit, sed hæc circumstantia cum sufficiens haud sit ad legitimam super ejus novitate sententiam ferendam, solutio siqua detur verum judicium ostendet: eandem insistentes viam viri clarissimi Newtonus ac Leibnitzius demonstrarunt, primos fuisse inventores calculi differentialis seu methodi fluxionum, nec ad problemata hac ipsa epocha proposita facilis erat aditus nisi ope hujus calculi.

Methodos mathematicas, quæ et ut fontes inventionum æstimari possunt, ex singularium problematum solutione sæpius derivari, satis compertum est omnibus in scientiis mathematicis versatis. Problemata isoperimetrica calculo variationum originem et progressionem dedere; plurimæque extant methodi in Geometria superiori familiares, quæ ex solutione problematum particularium ortæ, postmodum devenere methodi generales: quod et in aliis planum fiet, si ipsa adinventa sedulo examine perpendantur.

Nec suspicari licet, mentem Auctoris esse Mathematicorum ingenia, quorum illustria nomina obsequio prosequitur, in solutione problematis torquere et fatigare; quin immo ab hac vanitatis labe immunis non mirum dicet, si, quemadmodum ipse, alii etiam ad eandem solutionem analysi ipsa aut sublimiori pervenerint. Seriem combinationum quæ methodum conficiunt in operibus mathematicis se non invenisse, ut verissimum Auctor affirmat, et adjungit ipsam esse certa lege comprehensam, nec in solutione problematum ultra certum terminum progredi licere, ut, et si generalis, tanquam limitibus circumscripta methodus habenda sit.

Eandem vero seriem aut aliam in nullis scriptis mathematicis contineri asserere non audet. Quæcumque ergo sit series illa combinationum solutioni problematis conditionibusque præscribendis satisfaciens, si ante propositionem in Auctore aliquo indicetur, plene demonstrabitur methodum esse etiam ab alio detectam.

Unde et consequens est, ut Auctoris, qui indicetur mentem, si cum proposito quærentis conveniat, fas sit comperire. Cum enim tam in hujus problematis quam in aliorum simpliciorum solutione applicationes et theoremata eliciantur Geometris, suo quidem judicio, non improbanda; hoc tantum fine ducitur, „ut sciens quæ in hac materia sunt inventa, methodum cum applicationibus, si id concessum fuerit, „sapientum judicio submittat; sicque merito inventionis „præfixo, ab aliis, quo ipse non potuit, perducatur." Sub hoc aspectu, omnique sublata occasione invidiæ, præsens negotium ad universos spectat.

# PROBLEMA.

Invenire æquationem integralem respondentem huic differentiali

$$\frac{ar^2dx}{\sqrt{(r-x).x}}+\frac{br^2dx}{\sqrt{(4r-x).x}}+\frac{cr^2du}{\sqrt{(r-u).u}}+\frac{er^2du}{\sqrt{(4r-u).u}}$$

$$+\frac{frdx\sqrt{4r^2-rx}}{\sqrt{(r-x).x}}+\frac{hrdx\sqrt{r^2-rx}}{\sqrt{(4r-x).x}}+\frac{krdu\sqrt{4r^2-ru}}{\sqrt{(r-u).u}}$$

$$+\frac{grdu\sqrt{r^2-ru}}{\sqrt{(4r-u).u}}+\frac{lrdx\sqrt{4r-u}}{\sqrt{x}}+\frac{mrdu\sqrt{4r-x}}{\sqrt{u}}$$

$$+\frac{nrdx\sqrt{r-u}}{\sqrt{x}}+\frac{prdu\sqrt{r-x}}{\sqrt{u}}+\frac{qrdx\sqrt{(4r-u).(r-u)}}{\sqrt{rx}}$$

$$+\frac{srdu\sqrt{(4r-x).(r-x)}}{\sqrt{ru}}+\frac{trudx}{\sqrt{rx}}+\frac{zrxdu}{\sqrt{ru}}=dY.$$

*Animadversiones de problematis solutione.*

1.ª $(r)$ est recta constans et invariabilis; $(x)$, $(u)$ sunt rectæ variabiles; $(Y)$ est etiam quantitas variabilis.

2.ª Sit $(\varphi)$ alia recta variabilis et $F(\varphi)$, $F'(\varphi)$ functiones algebraicæ et rationales ejusdem variabilis $(\varphi)$ cum constante $(r)$ combinatæ: ex conditione in solutione problematis servanda erit $x=F(\varphi)$, $u=F'(\varphi)$.

Functiones istæ ut quantitates incognitæ haberi debent, atque inter omnes functiones variabilis $(\varphi)$ cum constante $(r)$

combinatæ illæ tantummodo exhibebunt valores ($x$) et ($u$) per quas solutio problematis obtineatur.

Ex functionibus $F$ ($\varphi$) $F'$ ($\varphi$) deducetur valor ipsius $\Upsilon = F''$ ($\varphi$), quæ functio est etiam algebraica, sed involvens partem rationalem cum quantitate radicali.

3.ª Ulterius exigitur æquatio numero terminorum finita inter rectas variabiles ($x$) ($u$) et constantem ($r$) qua ratio istarum rectarum determinetur.

Ex expositis itaque consequitur quæstionem his terminis etiam posse proponi: *si rectæ variabiles* ($x$) ($u$) *per functiones algebraicas et rationales alterius variabilis* ($\varphi$) *cum constanti* ($r$) *combinatæ designentur, illas invenire quæ solutioni problematis satisfaciant.*

4.ª Factores ($a$) ($b$) &c. ($t$) ($z$) terminorum sunt numeri constantes determinati, eorumque valores ex solutione problematis habentur.

5.ª Termini integrales respondentes terminis æquationis differentialis præfatæ idem habent originis punctum ex quo initium incrementorum computari debet, ut evanescente ($x$) omnes hi termini evanescant atque etiam variabiles ($u$) ($\Upsilon$): posita ergo hac æquatione differentiali $ardA + brdB + crdC + erdE + frdF + hrdH + krdK + grdG + ldL + mdM + ndN + pdP + qdQ + sdS + tdT + zdZ = d\Upsilon$ identica æquationi problematis, ejusdem integralis $arA + brB + crC + erE + frF + hrH + krK + grG + lL + mM + nN + pP + qQ + sS + tT + zZ = \Upsilon$ consequitur omnes valores veros possibiles inter limites $x = 0$ $x = r$ et inter limites $u = 0$ $u = r$. Cum $x = 0$ aut $u = 0$, $arA + brB$ &c. $+ tT + zZ = \Upsilon = 0$; et quando $x = r$ aut $u = r$ terminus quisque valorem sortitur determinatum.

6.ª Termini $arA = ar^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(r-x).x}}$, $brB = br^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(4r-x).x}}$,

$crC = cr^2 \int \frac{du}{\sqrt{(r-u) \cdot u}}$, $erE = er^2 \int \frac{du}{\sqrt{(4r-u) \cdot u}}$ referunt sectores ejusdem circuli ejusdemque radii $= r$, discrimenque eorum petitur ex arcu tantum quo quisque sector insistit. Ponantur arcus isti $(A)$ $(B)$ $(C)$ $(E)$: ex solutione problematis eruentur valores factorum $(a)$ $(b)$ $(c)$ $(e)$ per quos termini multiplicantur.

7.ª Termini $frF = fr \int \frac{dx \sqrt{4r^2 - rx}}{\sqrt{(r-x) \cdot x}}$, $krK = kr \int \frac{du \sqrt{4r^2 - ru}}{\sqrt{(r-u) \cdot u}}$

à rectificatione Elipsis pendent, et si in primo termino repræsentetur per $F$ recta arcui eliptico æqualis, in secundo autem per $K$: ex ipsa solutione eruentur factores $(f)$ $(k)$ arcus multiplicantes.

8.ª Sed termini $hrH = hr \int \frac{dx \sqrt{r^2 - rx}}{\sqrt{(4r-x) \cdot x}}$, .........

$grG = gr \int \frac{du \sqrt{r^2 - ru}}{\sqrt{(4r-u) \cdot u}}$ à rectificatione Hyperbolæ pendent insuper continentes integralem finitam. Sit in primo termino $(H)$ et in secundo $(G)$ recta ex arcu hyperbolico et integrali finita procedens, non absimili modo factores $(h)$ $(g)$ deducentur.

9.ª Termini sequentes arearum curvilinearum formam apte exhibent: sit $lL = lr \int \frac{dx \sqrt{4r-u}}{\sqrt{x}}$, $nN = nr \int \frac{dx \sqrt{r-u}}{\sqrt{x}}$,

$qQ = qr \int \frac{dx \sqrt{(4r-u) \cdot (r-u)}}{\sqrt{rx}}$, $tT = tr \int \frac{u\,dx}{\sqrt{rx}}$: posita abscissa communi $= \sqrt{rx}$ facillime determinabitur coordinata orthogonalis in unoquoque termino: et si per $(L)$ $(N)$ $(Q)$ $(T)$ designantur areæ, factores numerici $(l)$ $(n)$ $(q)$ $(t)$ ut superius eruentur.

Eadem ut dicta intelligantur de terminis ..................

$$mM = mr\int\frac{du\sqrt{4r-x}}{\sqrt{u}},\ pP = pr\int\frac{du\sqrt{r-x}}{\sqrt{u}},$$

$$sS = sr\int\frac{du\sqrt{(4r-x).(r-x)}}{\sqrt{ru}},\ zZ = zr\int\frac{x\,du}{\sqrt{ru}}$$ in quibus abscisa communis est $= \sqrt{ru}$.

10.ª Ex differentialibus $dA$, $dB$ &c. $dT$, $dZ$, nulla seorsum est integrabilis serie numero terminorum finita per methodos saltem quas calculus hucusque demonstratas suppeditat.

*Augustinus Pedrayes.*

EX TYPOGRAPHIA REGIA.

ANNO M.DCC.XCVI.