TRATADO DE *ARITMETICA*, QUE PROVISIONALMENTE SE DESTINA PARA EL USO DE LA *ACADEMIA* DE LAS TRES NOBLES ARTES, ESTABLECIDA EN LA CIUDAD DE CADIZ.

Año de 1789.

Con Licencia:

REIMPRESO EN CADIZ, POR DON JUAN XImenez Carreño, Calle de San Miguel.

Regalado á la biblioteca provl. de Cadiz por su bibliotecario

26 130 L. Igartuburu

mayo/852

TABLA
DE LAS MATERIAS QUE
se contienen en este tomo.

PARTE PRIMERA.

ART.

Capitulo Tercero.

Capitulo Quarto.

Capitulo Quinto.

CA-

Capitulo Sexto.

Capitulo Septimo.

Capitulo Octavo.

ART.

Capitulo Noveno.

COM-

COMPENDIO
DE
MATEMATICAS.
PRIMERA PARTE.
QUE TRATA DE LA ARITMETICA INFERIOR Ó NUMERAL.

DEFINICIONES.

M*ATEMATICA ES LA CIENCIA que averigua y demuestra las propiedades y atributos de la cantidad discreta y continua*: esto es, de la cantidad en quanto es numerable ó mensurable: y así aunque la Matemática se divide en muchas partes como son la Aritmética, Geometría, Fortificacion,

cion, Stática, Artillería &c. solo la Aritmética y Geometría son las mas principales, por ser Matemàticas puras: pues la primera trata de la cantidad discreta, y la segunda de la continua. Las demas son físico-matemàticas, por participar de las afecciones físicas y propiedades matemáticas.

Su modo de proceder es por *definiciones*, *axîomas*, *postulados*, *y proposiciones* que acaban siempre en *demostracion*. Las proposiciones se dividen en *lemas*, *teoremas*, *y problemas* que tienen aparte su *resolucion*, y todas pueden tener sus *corolarios* y sus *escolios*.

Definicion es una expresion clara y simple que subministra las primeras noticias esenciales que la distinguen de todas las demas cosas, y no pueden convenir à otra alguna.

Axîoma es una asercion evidente de por sí, concedida por todos, y que no necesita prueba.

Postulado es lo que se pide ó supone, y no se puede negar ni contradecir, por ser verdadero de por sì, ó deducirse de definicion, ó de nociones verdaderas.

Proposicion es todo lo que se asegura ó se niega: necesita su prueba: consta de *ipótesis* y de *tésis*, la primera es lo que se supone, y la segunda lo que se asegura ó se niega.

Lema es una proposicion que debe servir para probar, facilitar y abreviar la prueba de otra proposicion.

Teorema es una proposicion especulativa que constituye un punto de doctrina general. A mas de la proposicion tiene la demostracion. En esta se declaran las razones que evidencian la verdad de la proposicion.

Problema es una proposicion práctica en que se executa algo, como *dividir una cantidad en tantas*

par-

partes que tengan entre si tal ó tal relacion que se expresa. Tiene tres partes : la proposicion que dice lo que se ha de hacer : la resolucion ó solucion, que lo executa : y la demostracion que prueba haberse conseguido.

Corolario es una nueva proposicion que se infiere de otra que se acaba de demostrar.

Escolio de una proposicion es una anotacion que la aclara ó ilustra.

EXPLICACION DE LOS SIGNOS QUE SE USAN para abreviar y facilitar las operaciones.

Este signo $=$ puesto entre dos cantidades denota que la una es igual á la otra ; y así la expresion $a = b$ indica que la cantidad representada por a, es igual á la representada por b.

Este signo $+$ puesto entre dos cantidades expresa la suma de ellas : y así $a + b$ quiere decir que la cantidad representada por a se ha de sumar con la cantidad representada por b : y así se llama *signo de mas, positivo, ó afirmativo.*

Este signo — puesto entre dos cantidades indica que lá de la derecha se ha de restar de la de la izquierda : y así *a menos b*, se escribe así $a - b$: por lo que se llama *signo de menos ó negativo.*

Este signo $\times$ puesto entre dos cantidades denota que la una se ha de multiplicar por la otra : y así $a \times b$ expresa que la cantidad representada por a se ha de multiplicar por la cantidad significada por b.

La particion ó division indicada, se escribe así $\frac{a}{b}$, ó $a : b$, que quiere decir que la cantidad representada por a se ha de partir por la representada por b.

Para

Para marcar la desigualdad que hay entre dos cantidades sirve este signo $>$, de suerte que la punta se ha de hallar al lado de la cantidad menor, y así $a > b$, ó bien $b < a$, expresa que la cantidad significada por a es mayor que la representada por b, ó bien que la cantidad b es menor que la cantidad a.

Este signo $\sqrt{}$ sin número alguno encima, ó con un 2 así $\sqrt[2]{}$ significa la raiz quadrada de la cantidad que comprende debaxo: así $\sqrt{4} = \sqrt[2]{4} = 2$ como se verà despues: si tuviere un 3 encima como $\sqrt[3]{}$ expresa la raiz cúbica &c. Dicho signo se llama *radical*, y las cifras 2, y 3 que encima de él se ponen, se dicen *exponentes* de la potestad cuya raiz expresan, lo que se entenderá mas adelante.

Definicion de la Aritmetica.

1 *Aritmética es ciencia que exerce sus operaciones con los números, por ser la que trata de la cantidad discreta ó numerable.*

2 Los números, ó cifras de que usa la Aritmética para sus càlculos son los siguientes.

uno . dos . tres . quatro . cinco. seis . siete. ocho. nueve. cero.
1.....2.....3........4..........5.....6........7........8.......9........0

Con las quales haciendo distintas combinaciones y operaciones, se ha llegado à conseguir la mas útil inteligencia para el régimen y govierno de la vida humana.

Pre-

Preliminar.

3 Cada cifra de las sobredichas tomada solamente, no tiene mas valor que el expresado; pero si se hace combinacion con algunas de ellas, como por exemplo 5, 3, la primera de la derecha conserva su valor de *tres unidades*, y la que sigue asciende à *decenas*, *ó dieces*; y así la cifra 5 que solo valia *cinco unidades simples*, combinada vale *cinco decenas* ó *dieces*, ó bien *cincuenta unidades simples*, que juntas con las 3, es el valor de las dos cifras 5 y 3 combinadas, cincuenta y tres unidades simples.

4 Asimismo si à las dos cifras expresadas se les pospone otra, como el 7: esto es 5, 3, 7 la cifra añadida 7, solo queda con su valor de *siete unidades simples*, y el 3 que sigue varió su valor de tres unidades simples, y se elevó *á tres decenas ó dieces*, *ó á treinta unidades simples*, las que juntas con las *siete* hacen *treinta y siete*: y la cifra cinco que en la primera observacion habia subido à *cincuenta unidades simples*, en virtud de esta asciende à *cinco centenas*, *ó cientos*, ó *quinientas unidades simples*, las quales juntas con las treinta y siete anteriores, componen *quinientas treinta y siete unidades simples*, que es el valor de las tres cifras combinadas así 537, à cuya combinacion se le dá el nombre de *guarismo*.

Corolario.

5 Infierese de lo dicho que en todo guarismo la primera cifra de la derecha conserva su valor; pero las que le siguen ascienden à dieces, cientos, miles, diez miles &c. segun el lugar que vayan ocupando: y así para la inteligencia y saber leer un

un guarísmo, se ha de considerar que las cifras en toda su extension no ocupan mas que tres lugares, el primero principiando por la derecha es de *unidades simples*; el segundo de *decenas*: y el tercero de *centenas*: despues vuelven á repetirse las unídades, decenas, y centenas; pero estas son ya de *mil*: los tres lugares que siguen son de *cuento*, y los tres que siguen son de *millar de cuento*: y asi succesivamente segun fuere la extension del guarismo.

6 A cada seis cifras del guarismo principiando por la derecha, se le da el nombre de *dignidad completa*: y si pasan de seis, y no llegan à doce, componen dos dignidades: la primera de la derecha es completa, y la segunda incompleta. La primera cifra de la derecha en la primera dignidad es de *unidades simples*, en la segunda de *cuentos*, en la tercera de *bicuentos*, en la quarta de *tricuentos* &c.

7 Adviertase que la cifra, o, no tiene por sí valor alguno; pero puesta á la derecha de qualquiera otra cifra, le aumenta su valor, porque hace variar el lugar, y aumenta la dignidad: y asi esto entendido, siempre que se proponga un guarismo, se dividirà de tres en tres cifras principiando por la deréch, con lo que quedarán conocidos los lugares, y dignidades: y haciendo despues atencion á la figura de cada cifra, se leerá con prontitud qualquiera guarismo como el presente.

A B C D E F G H J K L M N O P Q R S T V X Z.
2. 4 9 5. 3 7 8. 0 9 2. 3 4 8. 6 0 1. 5 0 2. 7 3 4.
3 2 1

8 Dividido è indicado el guarismo como se ha prevenido, y se ve en el exemplo, se conoce distin-

tintamente el valor de cada cifra, segun el lugar y dignidad en que se halla: pues las tres cifras VXZ, valen setecientas treinta y quatro unidades simples: las RST, quinientas y dos mil: las OPQ, seiscientos y un cuento: las LMN, trescientos quarenta y ocho mil cuentos: las HJK, noventa y dos bicuentos: las EFG, trescientos setenta y ocho mil bicuentos: las BCD, quatrocientos noventa y cinco tricuentos: y la A vale dos mil tricuentos: luego con esta claridad es facil leer todo el guarismo, cuyo valor es 2 mil, 495 tricuentos, 378 mil 092 bicuentos, 348 mil 601 cuentos, 502 mil 734 unidades simples.

9 Del mismo modo se leerà qualquier otro guarismo, haciendo la misma reflexîon y anotacion que se ha prevenido en el propuesto, con cuya inteligencia se comprenderán las operaciones siguientes.

CAPITULO I.º

DE LAS QUATRO REGLAS DE LOS NUMEROS ENTEROS.

ARTICULO I.º

Del Sumar.

10 *SUMAR es juntar muchas cifras ó guarismos de una misma especie, en uno que sea igual à todos los propuestos.*

11 Las cantidades que se han de sumar, se co-

lo-

locan unas baxo las otras, de suerte que las unidades correspondan baxo las unidades, las decenas baxo las decenas &c. Colocados de esta suerte los guarismos, se conseguirá la suma, principiando por las unidades, juntandolas todas, y si la suma no llegare à diez se pondrá la cifra que exprese el número de ellas, baxo de todas en su correspondiente coluna, y si compusiere diez, veinte, treinta &c. unidades justas, se pondrà un cero en su lugar, y el número de dieces que compusiere, se juntará con las decenas: pero si excediere algunas unidades de diez, veinte, treinta, &c. se pondrá el exceso en su lugar, y el número que señale los dieces, se junta con los de su especie, y haciendo lo mismo con las decenas, y centenas &c. se conseguirá un guarismo que será igual à todos los propuestos: esto se manifiesta con el siguiente exemplo.

12 Pidese sumar el guarismo A = 4576, con B = 8937, con C = 542, con D = 97.

DISPOSICION.

HGFE.
A = . . . 4576.
B = . . . 8937.
C = ... 542.
D = ... 97.
———————
Suma . 14152 = A + B + C + D.

13 Dispuestos los guarismos como se ha prevenído y se ve en el exemplo, se principia por las unidades diciendo, 6 y 7 son 13 y 2 son 15, y 7 son 22: esto es dos decenas y 2 unidades: pònganse las dos unidadádes baxo la linea de su coluna E, y las dos decenas se llevan para juntarlas con las de su coluna F, diciendo 2 y 7 son 9, y 3 son 12, y 4 son 16, y 9 son 25: y porque 25 decenas com-

po-

ponen 2 centenas y cinco decenas, se ponen estas baxo de su coluna F, y las dos centenas se llevan para juntarlas con las de su coluna G, diciendo 2 y 5 son 7, y 9 son 16, y 5 son 21 centenas, que son 2 millares y 1 centena: se pone la una centena en su respectivo lugar, y los 2 millares se llevan para juntarlos con los de la coluna H diciendo 2 y 4 son 6, y 8 son 14 millares, que componen una decena de millar y quatro millares: se ponen los 4 millares en su lugar correspondiente, y la una decena de millar se pone á continuacion por no haber otra de su especie con quien juntarla, con lo que resulta el guarismo S que es la suma de los guarismos A + B + C + D propuestos.

ARTICULO II.º

Del Restar.

RESTAR es manifestar la diferencia que hay entre dos cantidades de una misma especie, y esto se consigue quitando la menor de la mayor.

15 La cantidad mayor se llama *restando*: la menor *restador*: y la diferencia *residuo*. Para executar la operacion se pone primero el restando, y debaxo el restador como si se hubiera de sumar. Puestos en esta disposicion se principiarà por las unidades, sacando el exceso que tiene cada cifra del restando à su correspondiente del restador, con lo que resultarà un guarismo de excesos que será el residuo que se busca. Esta operacion es tan clara, siempre que sean las cifras del restador menores que las correspondientes del restando, que no necesita de exemplo para su inteligencia.

16 Toda la dificúltad de esta operacion consiste en saber como se ha de restar quando una cifra del restador es mayor que su correspondiente del restando, en cuyo caso se sacará una unidad de la cifra inmediata del restando que vale 10 de las que se quiere restar, y juntandolas á ella, resultará de mas valor que la del restador, con lo que se podrá restar; pero quedará la cifra á quien se sacó la unidad, con ella menos en su valor: todo se hará manifiesto en los exemplos siguientes.

Exemplo I.

Se ha de restar el guarismo B = 78945 del guarismo A = 164756.

DISPOSICION.

	H G F E D C.
A =	1 6 4 7 5 6.
B =	. . 7 8 9 4 5.
Residuo R =	. 8 5 8 1 1 = A — B.

Dispuestos los guarismos como se ha prevenido y se ve en el exemplo, se principia por las unidades diciendo: el exceso de 6 à 5 es 1 que se pondrá baxo de la linea en su coluna C: el exceso de 5 à 4 es 1 que se pondrá en su coluna D; pero al continuar se vé que la cifra 9 no se puede restar de 7 y asi se sacarà de la cifra 4 de la coluna F una unidad que vale diez de las unidades de la coluna E, con lo que la cifra 4 queda reducida á 3, y la cifra 7 valdrá 17: hecho esto, ó considerado, saquese el exceso de 17 à 9 el qual es 8, que se pondrá en su coluna E: continúese diciendo, respecto que el 4 de la coluna F quedó en 3 y no se pue-

puede restar de él la cifra 8 del restador, se sacará de las 6 decenas del millar de la coluna G una decena de millar que vale 10 millares, los quales juntos con los tres que quedan en F, componen 13, y de ellos restando el 8 quedan 5 que se pondrán en su coluna F, y la cifra 6 de su coluna G quedará con el valor de 5 decenas de millar, de las quales no se pueden restar las 7 del restador, á menos de no reducir la una centena de millar que hay en H à 10 decenas de millar, que es su valor, y juntarlas con las 5 que quedaron en la coluna G; lo qual hecho componen 15 decenas de millar, de las quales restando las 7 del restador, es el residuo 8 que se pondrá en su coluna G: con lo que el guarismo R formado de los excesos de cada cifra del restando à su correspondiente del restador, es el residuo que se busca.

Exemplo II.

Se ha de restar el guarismo B = 487536 del guarismo A = 700500.

DISPOSICION.

	HGFEDC.
A =	7 0 0 5 0 0.
B =	4 8 7 5 3 6.
Residuo R =	2 1 2 9 6 4 = A—B.

Respecto de que la cifra C del restando A no tiene por si valor alguno, y ser preciso restarle el correspondiente 6 del restador B, es necesario valerse de la cifra mas inmediata donde se encuentre valor para comunicarselo, y en este exemplo es en la coluna E, de donde sacando una centena de las

3 quedarán estas en 4, y como la que se sacó vale 10 decenas, se dexarán 9 en la coluua D en lugar del cero, y la que sobra vale 10 unidades que se considerarán en C: hecho esto, ó considerado, se dirá el exceso de 10 à 6 es 4 que se pondrà baxo la linea de su coluna C: el exceso de 9 à 3 es 6 que se pondrá en su coluna D: y continuando se ve que las 5 centenas del restador, no se pueden restar de las 4 que quedaron en el restando, y no teniendo las dos cifras que siguen valor para comunicarselo, es forzoso valerse de la cifra H, de la qual sacando una unidad, quedarà reducida á 6: y como la que se sacó vale 10 de las de la coluna G, se dexaràn 9 en ella, y de la restante que vale 10 de las de la coluna F se dexarán 9 en esta, y valiendo la que queda 10 de las de la coluna E, se juntarán con las 4 que hay en esta, con lo que compondràn 14, y restando 5 de 14 quedan 9 que se pondràn en su coluna E: y continuando la operacion se dirà: el exceso de 9 à 7 es 2, que se pondrà en su coluna F: el exceso de 9 à 8 es 1 que se pondrá en su coluna G, y finalmente sacando el exceso de 6 á 4 es 2 que se pondrà en su correspondiente lugar, con lo que el guarismo R formado de los excesos de las cifras del restando, á sus correspondientes del restador, es el residuo que se desea.

ARTICULO II.º

Del Multiplicar.

17 MULTIPLICAR *es buscar una cifra ó guarismo que contenga tantas veces á la canti-*

tidad que se multiplica, como unidades contiene la cantidad por quien se multiplica.

18 La cantidad que se multiplica se llama *Multiplicando*: aquella por quien se multiplica se dice *Multiplicador*, y la que sale de la multiplicacion *Producto*.

19 Para multiplicar con desembarazo, es preciso saber de memoria la siguiente tabla: pues ella enseña á multiplicar una cifra por sí misma, y por todas las demas, cuya inteligencia es la siguiente.

TABLA PITAGORICA.

1	2								
2	4	3							
3	6	9	4						
4	8	12	16	5					
5	10	15	20	25	6				
6	12	18	24	30	36	7			
7	14	21	28	35	42	49	8		
8	16	24	32	40	48	56	64	9	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	10
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

20 Si se quisiere saber el producto de 6 × 9, ó de 9 × 6 que es lo mismo, busquese la casilla en donde concurren las dos colunas de los números propuestos, y se hallarà que es 54: asimismo si se quiere el producto de 7 × 4 ó de 4 × 7 busquese la casilla que está en el concurso de las dos colunas de los numeros propuestos, y se hallará que es 28: y asi de las demas.

21 Para multiplicar se pondrá primero el multiplicando, y debaxo el multiplicador, como si se hubieran de sumar, y las cifras que vayan resultando de la multiplicacion, se irán colocando en su correspondiente lugar: esto se hará manifiesto en los exemplos siguientes.

Exem-

Exemplo I.

Se ha de multiplicar el guarismo A = 57384, por la cifra B = 6.

Principiese la operacion por las unidades diciendo 6 veces 4 son 24: esto es 2 decenas y 4 unidades: ponganse las 4 unidades baxo de su coluna, y se llevaràn las 2 decenas para juntar con las decenas: prosigase, 6 veces 8 son 48 y 2 que llevaba son 50; pero 50 decenas son 5 centenas justas, luego se pondrá cero en lugar de las decenas, y se llevaràn las 5 centenas para juntarlas con las de su especie diciendo, 6 veces 3 son 18 y 5 que llevo son 23; pero 23 centenas componen 2 millares y 3 centenas: luego se pondrán las 3 centenas en su lugar correspondiente, y los 2 millares se juntaràn con los millares diciendo, 6 veces 7 son 42 y 2 que llevo son 44: esto es 4 decenas de millar y 4 millares: ponganse los 4 millares baxo de su coluna, y las 4 decenas de millar se juntaràn con las de su especie diciendo, 6 veces 5 son 30 y 4 que llevo son 34: esto es 3 centenas de millar y 4 decenas: ponganse las 4 decenas de millar baxo de su coluna, y à continuacion las 3 centenas de millar, por no haber mas cifras en el multiplicando y ser este el lugar que le corresponde: y así el guarismo P, resultante de esta operacion es el verdadero producto de A × B.

DISPOSICION.

A = 5 7 3 8 4 Multiplicando.
B = ... 6 Multiplicador.

P = 3 4 4 3 0 4 = A × B. Producto.

Exem-

Exemplo II.

Se ha de multiplicar el guarismo A = 57384 por B = 46.

A	=	57384	Multiplicando.
B	=	. . . 46	Multiplicador.
P	=	344304	Productos parciales.
Q	=	229536	
S	=	2639664.	Producto total de A × B.

Multiplicando todo el multiplicando A por las 6 unidades del multiplicador B (segun se ve en el exemplo primero) resulta el producto P. Para multiplicar todo el multiplicando por las 4 decenas del multiplicador se dirá: 4 decenas por 4 unidades producen 16 decenas, que componen 1 centena y 6 decenas, las que se pondrán en su correspondiente coluna, como se vé en el exemplo, y la centena se llevarà para juntarla con la de su especie diciendo, 4 decenas por 8 decenas producen 32 centenas y una que llevaba son 33: esto es 3 millares y 3 centenas: ponganse estas en su correspondiente lugar, y los 3 millares se reservarán para juntarlos con los de su especie: y continuando del mismo modo que se ha practicado en el primer exemplo, resulta el producto Q: y sumando estos dos productos parciales, serà la suma S el producto que se desea.

22 Semejantemente se operará si el multiplicador tuviere mas de dos cifras, considerando que así como decenas por unidades da decenas, tambien centenas por unidades da centenas: y así succesivamente, por lo que estas deben colocarse ba-

xo

xo làs de su especie, y en todo lo demas se observará lo executado en los exemplos antecedentes.

ARTICULO IV.º

Del Partir.

23 *PARTIR es buscar una cifra ó guarismo que contenga tantas unidades, como la cantidad que se parte contiene á la cantidad por quien se parte.*

24 La cantidad que se parte se llama *Dividendo*: aquella por quien se parte *Divisor*: y la que sale de la particion *Cociente*.

25 Para la operacion se pondrá primero el dividendo, y en seguida un poco apartado el divisor separado con una linea, y debaxo de esta se irà poniendo el cociente: y principiando por la izquierda del dividendo, se separarán de él tantas cifras como tuviere el divisor, atendiendo á que si estas no son iguales ó mayores que las del divisor, no se podrán partir, y en este caso será preciso tomar una cifra mas: hecho esto se verà quantas veces el divisor se incluye en las cifras separadas del dividendo, y el número de veces que se incluya se pondrá baxo del divisor, y multiplicando dicho número por el divisor, se restará el producto de las cifras separadas del dividendo: si fuere igual à ellas quedará por residuo cero, y si fuere menor, se añadirá al residuo que resulte la cifra que sigue del dividendo para continuar la operacion. Esto se entenderà mejor con los exemplos siguientes.

Exem-

Exemplo I.

Se ha de partir el guarismo A = 1424 por la cifra B = 4.

Dividendo A = 1424 | 4 = B. Divisor.
X . . 12 | 356 = Q Cociente.
Z . 022
V . . 20
T . . 024
R . . 24
o

Separada en el dividendo una cifra por haber otra en el divisor, se ve que no se puede partir, y por tanto es preciso tomar dos; pero estas (no considerando el lugar que ocupan) son lo mismo que 14, en donde se ve que el divisor 4 está contenido en el dividendo 3 veces, y por consiguiente se debe poner 3 en el cociente Q: hecho esto, multipliquese el 3 por el 4, y el producto 12 réstese de 14, y al residuo 2 se añadirá la cifra 2 que sigue del dividendo para continuar la operacion, diciendo: respecto que 22 contiene al divisor B 5 veces, se pondrá 5 en el cociente Q, y multiplicando 5 por 4, el producto V se restarà de Z, y al residuo T se añadirà la cifra 4 que sigue en el dividendo, con lo que se dirá: respecto que 24 contiene al divisor B, 6 veces, se pondrà 6 en el cociente Q, y multiplicando 6 por 4, el producto R se restará de T, y no queda resíduo alguno, con lo que està concluida la operacion por no haber mas cifras que baxar del dividendo, manifestándose que el dividendo A contiene al divisor B 356 veces justas.

Exemplo II.

Se ha de partir el guarismo $A = 19224$ por $B = 54$.

Respecto que las dos primeras cifras del dividendo son menores que las 2 que tiene el divisor se deberán tomar tres para principiar la operacion:

$$
\begin{array}{ll|l}
\text{Dividendo } A = & 19224 & 54 = B \text{ Divisor.} \\
 & & \overline{} \\
C. & 162 & 356 = Q \text{ Cociente.} \\
 & \overline{} & \\
D & 0302 & \\
E. & 270 & \\
 & \overline{} & \\
F. & 324 & \\
G. & 324 & \\
 & \overline{} & \\
 & 0 & \\
\end{array}
$$

y asi vease quantas veces contiene 192 à 54, lo que se conocerá haciendo el tanteo con las dos primeras cifras de la izquierda del dividendo y primera del divisor: esto es con 19 y 5 pues claramente se ve que 19 contiene al 5 tres veces, por lo que se pondrá 3 en el cociente Q, y multiplicando 3 por 54, se restará el producto C de 192, y al residuo 30 se añadirá la cifra 2 que sigue en el dividendo, como se ve en D: continuese diciendo, aunque 30 contiene à 5 seis veces, no se puede poner en el cociente mas que 5, porque multiplicando 5 por 54, da el producto E, que restado de D el residuo 32 es menor que el divisor 54, y si se hubiera puesto 6 en el cociente el producto de 6 por 54 no se hubiera podido restar de D, y por consiguiente en esto se debe poner gran cuidado. Añadase á dicho residuo la cifra que sigue del dividendo, como se

ve

ve en F, y observando del mismo modo que F contiene á B seis veces se pondrá 6 en el cociente, y restando de F el producto G, que lo es de 6 × B, quedará por residuo final cero, con lo que se conocerà que el dividendo A contiene al divisor B 356 veces, por ser estas las unidades que contiene el cociente Q.

26 Si concluida la particion quedase algun residuo menor que el divisor (porque mayor no puede ser) se debe añadir al cociente, poniendòlo sobre una linea, y debaxo el divisor. Para la inteligencia bàsta la figuracion de este exemplo.

Dividendo	789	53
	53	$14 + \frac{47}{53}$
	259	
	212	
	47	

ARTICULO V.º

De la prueba ó examen de las quatro reglas precedentes.

27 PAra conocer si la suma de muchos guarismos està bien hecha, se volverán à sumar dichos guarismos, omitiendo alguno ó algunos, y esta segunda suma se restará de la primera, y si el residuo que resulte fuere igual à la cantidad omitida, ó à la suma de las cantidades omitidas, estarà bien hecha la primera suma: basta para la inteligencia la figuracion de los presentes exemplos.

80
———
74
96
10
———
260. . total.
180. . suma de las tres.
———
80. $\left\{\begin{array}{l}\text{residuo igual à la}\\ \text{cantidad omitida.}\end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{r}15\\64\end{array}\right\}$. . . 109
$\left.\begin{array}{r}28\\36\end{array}\right\}$. . . 64
———
173. . total.
64. . suma de las dos últimas.
———
109. $\left\{\begin{array}{l}\text{resíduo igual à la suma}\\ \text{de las dos primeras.}\end{array}\right.$

28 Para conocer si el residuo de dos cantidades es el verdadero, se sumará este con el restador, y si saliere la suma igual al restando, la operacion estará bien hecha: basta la figuracion de este exemplo para inteligencia.

8457 . . restando.
5738 . . restador.
———
2719 . . residuo.
———
8457 la suma igual al restando.

29 Para conocer si el producto de dos cantidades es el verdadero, se partirà este por el multiplicador, y si el cociente que resulte fuere igual al multiplicando, estarà la operacion bien hecha: esto se hará manifiesto en este exemplo.

Multiplicando. . 356
Multiplicador. . . 24

1424
712

Producto. . . . . 8544 | 24 Divisor el Multiplicador.
72 356 Cociente el Multiplicando.

134
120

144
144

0

30 Para conocer si el cociente de dos cantidades es el verdadero, se multiplicarà por el divisor, y si el producto resultare igual al dividendo, estará la operacion bien hecha, como se ve en este exemplo.

Dividendo. . . 8544 | 24 Divisor.
356 Cociente.

144
120
72

8544 Producto igual al Dividendo.

31 Si en la particion hubiere sobrado algo como en el exemplo siguiente, se debe añadir al producto para que el dividendo salga justo.

Dividendo 789 | 53 Divisor.

14 + $\frac{47}{53}$ Cociente.

212
53
47

789 Producto igual al dividendo.

ARTICULO VI.

De los Divisores simples y compuestos de una cantidad.

32 Llamanse *Divisores* de una cantidad, aquellos números por los quales partiendo dicha cantidad sale justa la particion, y como las cantidades pueden tener distintos divisores, el método general para encontrarlos es el siguiente.

33 Se pide hallar todos los divisores del número 30.

Pàrtase 30 por 2, y el cociente 15 pongase en A, y el divisor 2 en B: pártase 15 por 3 por no poderse partir por 2, y el cociente 5 póngase en A, y el divisor 3 en B, finalmente, no pudiendose partir 5 por otro numero que por sí mismo se partirà por él, y el cociente 1 se pon-

A	B			
30	2			
15	3	6		
5	5	10	15	30
1				

pondrá en A, y el divisor 5 en B, con lo que se tienen los *divisores simples* 2, 3 y 5 del número 30, y con ellos se hallarán los *compuestos* de este modo.

34 Multiplíquese el segundo por el primero, y el producto 6 es el primer *divisor compuesto*, el qual se pondrá al lado del segundo simple, como se ve en el exemplo. Para hallar los demas multiplíquese el tercer divisor simple por el primero y segundo, y por el compuesto hallado, y los productos 10, 15 y 30, son divisores compuestos, de suerte que por qualquiera de estos números que se parta el numero 30, que son 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30, saldrà justa la particion como se manifiesta en este exemplo.

35 Sí se piden todos los divisores del número 36.

Pàrtase 36 por 2, y el cociente 18 póngase en A, y el divisor 2 en B: pártase 18 por 2, y el cociente 9 se pondrà en A, y el divisor 2 en B: pàrtase 9 por 3, y el cociente 3 se pondrá en A, y el divisor 3 en B, pártase finalmente 3 por 3 y el cociente 1 se pondrà en A, y el divisor 3 en B, con lo que se tienen los divisores simples del número 36.

A B
— —
36 . . 2
18 . . 2 . . 4
9 . . 3 . . 6 . . 12
3 . . 3 . . 9 . . 18 . . 36
1

36 Para hallar los compuestos, multiplíquese el segundo por el primero, y el producto 4 serà el primer divisor compuesto, multiplíquese el tercero por los dos primeros, y el compuesto hallado, y de los productos 6, 6 y 12 que resultan, no se pondrán mas que 6 y 12 al lado de dicho tercer divisor simple, porque el otro 6 es superfluo: multiplíquese finalmente el último divisor simple

ple por todos los demas simples, y compuestos encontrados, y resultan los productos, 6, 6, 12, 9, 18 y 36: y omitiendo los 6, 6 y 12 por tenerlos ya anotados, solo se pondrán los 9, 18 y 36, con lo que se tienen todos los divisores del número 36, que son 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36, de suerte que por qualquiera de ellos que se parta el número 36, saldrá justa la particion.

Semejantemente se practicará para hallar los divisores de otros qualesquiera números.

CAPITULO II.º

De los Quebrados ó Fracciones.

DEFINICIONES.

37 Qualquiera cantidad mayor comparada con otra menor de su misma especie se llama *todo*, como 8 respecto del 2 es todo, y 2 respecto de 8 es *parte*; pero segun la doctrina que se ha de dar en este capitulo, se llama todo, aquella cantidad que estando representada por la unidad, puede ser dividida en partes iguales como un quintal, una vara, un doblon &c. pues en esta significacion es una unidad, pero cada una de ellas se puede dividir en distintas partes iguales: por exemplo, el doblon de á 8 en 16 partes iguales, que cada una es un peso fuerte, ó en 320 partes iguales que cada una es un real, y finalmente en aquel número de partes iguales que convenga para la exâctitud de las operaciones.

38 La parte se divide en *aliquota*, y *aliquanta*:

ta: parte aliquota es aquella que repetida algunas veces compone el todo, como el 2 es parte aliquota de 8, pues repetido quatro veces compone el 8: parte aliquanta es aquella que repetida algunas veces no compone jamas el todo: como el 3 respecto de 8 es parte aliquanta, pues repetido dos veces compone 6, y repetido tres veces hace 9.

49 Llàmanse *quebrados* ó *fracciones*, aquellas expresiones numéricas que se forman con el todo y su parte, poniendo baxo de una linea el número que indica las partes iguales en que està dividido el todo ó la unidad, y encima el número que señala las que de ellas toma la parte: por exemplo, teniendo un quintal quatro arrovas, que es lo mismo que estar dividido en 4 partes iguales, si se toma una de ellas, es tomar su quarta parte, y esta expresion se escribe aritméticamente asi $\frac{1}{4}$: asímismo teniendo un quintal 100 libras, que es lo mismo que estar dividido en 100 partes iguales, si se toma una arrova, es lo mismo que tomar 25 partes de las 100 en que está dividido el quintal, y esta expresion se escribe asi $\frac{25}{100}$, y es igual à la primera porque ambas son la quarta parte del quintal. Finalmente teniendo cada libra 16 onzas, tendrá el quintal $100 \times 16 = 1600$ onzas ó partes iguales: luego segun esto la arrova tendrà $25 \times 16 = 400$ onzas ó partes iguales, y será $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \frac{400}{1600}$ porque todos son iguales á la quarta parte del quintal, esto es à una arrova.

40 El número que està baxo de la linea en todos los quebrados se llama *denominador*, porque denomina ó señala las partes en que está dividido el todo ó la unidad; y el que está sobre la linea se dice *numerador*, porque numera las partes que se toman de las iguales en que està dividido el todo.

41

41 Los quebrados cuyos denominadores son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, se llaman medios, tercios, quartos, quintos, sextos, septimos, octavos, novenos y decimos, y serán tantos quantos expresare la cifra que fuere numerador: por exemplo si el quebrado fuere $\frac{5}{7}$ se nombrarà *cinco septimos*, y así de los demas. Los quebrados cuyos denominadores pasan de 10 hasta el infinito, se nombran con sus propios números, principiando por el numerador, añadiendo á los denominadores esta partícula *avos*, que sirve para terminar el acento, y así el quebrado $\frac{15}{45}$ se pronuncia *quince, quarenta y cinco avos*, y $\frac{7}{23}$ se pronuncia *siete, veinte y tres avos*, y asi los demas.

Corolarios.

42 DE lo dicho se infiere que expresando el númerador de todo quebrado las partes que toma de las iguales en que está dividido el todo, ó la unidad, este representa el valor de dicho quebrado.

43 Quanto mayor sea el numerador respecto de su denominador, tanto mayor será el quebrado, y al contrario.

44 En llegando el numerador á ser igual al denominador, el quebrado es igual à la unidad, ó al todo: y si exede será mayor que el todo: á dichos quebrados se les da el nombre de *impropios*.

45 Los quebrados impropios se reducen a enteros partiendo el numerador por el denominador, y así si se quiere reducir á enteros el quebrado impropio $\frac{59}{8}$ se partirá 59 por 8, y el cociente 7 seràn los enteros, y los 3 que sobran son 3 partes

de

de las 8 en que está dividido el todo: de suerte que es $\frac{59}{8} = 7 + \frac{3}{8}$ de otro entero.

46 Por el contrario, los enteros se reducen á quebrados, cuyo denominador sea dado, multiplicando los enteros por el denominador dado, y el producto que resulte serà el numerador del quebrado: y así si se quieren reducir 8 enteros á la especie de sextos, se multiplicarà 8 por 6, y al producto 48 se le pondrá por denominador el 6, con lo que resultarà el quebrado impropio $\frac{48}{6} = 8$ enteros. Tambien se reducen los enteros á quebrados poniendoles por denominador la unidad: y así 8 enteros se expresarà así $\frac{8}{1}$.

47 Si permaneciendo el numerador de un quebrado se multiplica su denominador por qualquiera número, se disminuirà tanto el quebrado, como unidades contiene el número por quien se multiplicó: por exemplo si en el quebrado $\frac{2}{3}$, permaneciendo el numerador 2, su denominador 3 se multiplica por 4, resultarà el quebrado $\frac{2}{12}$ que es 4 veces menor que $\frac{2}{3}$, lo que es manifiesto.

48 De aquí se infiere el modo de dividir un quebrado en las partes iguales que se quiera, pues multiplicando el denominador por el número que exprese las partes en que se quiere dividir, y poniendo al producto el mismo numerador que tenia, el nuevo quebrado que resulte, será igual à una de las partes de la division.

49 Al contrario: si permaneciendo el denominador de un quebrado, se multiplica su numerador por qualquier número, el nuevo quebrado que resulta es tanto mayor que el propuesto, quanto el número que multiplica es mayor que la unidad §§§ 43, 46 y 47.

50 De lo dicho se infiere, que si el numerador y denominador de un quebrado, se multiplican

can ó parten por una misma cantidad, el nuevo quebrado que resulta, conserva el mimo valor que el primero.

51 Finalmente: serán iguales todos los quebrados cuyos numeradores se incluyan ó incluyan igual número de veces en sus denominadores, ó à sus denominadores.

ARTICULO I.º

De la reduccion de los quebrados compuestos á simples.

52 Quebrados compuestos ó quebrados de quebrados son aquellos que son parte de otros quebrados simples, ó bien aquellos cuyos denominadores no representan el todo ó la unidad, sino alguna, ó algunas partes suyas: como por exemplo el quebrado $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{7}$ quiere decir los *dos tercios de quatro septimos*, esto es que el denominador 3 del quebrado $\frac{2}{3}$ no representa al todo ó unidad, sino á los $\frac{4}{7}$ del todo ó unidad divididos en 3 partes iguales: y así esta especie de quebrados es necesario reducirlos à simples para operar con ellos donde se encontraren, lo que se executa del modo siguiente.

53 Multipliquense los numeradores entre si, y el producto será el numerador del quebrado simple, y multiplicando los denominadores será el producto, el denominador: por exemplo, se ha de reducir el quebrado compuesto $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{7}$ á simple.

Mul-

Multipliquense los numeradores 2 por 4, y el produćto 8 es el numerador del quebrado simple: multipliquense los denominadores 3 por 7: y el produćto 21 es el denominador, con lo que quedará el quebrado compuesto $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{7}$ reducido al simple $\frac{8}{21}$.

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$$

54 La razon es porque el denominador 3 del quebrado $\frac{2}{3}$ representa los $\frac{4}{7}$ de la unidad divididos en 3 partes iguales: luego dividiéndolos sera $\frac{4}{21}$ la tercera parte de $\frac{4}{7}$ § 48: pero el numerador 2 del quebrado $\frac{2}{3}$ expresa que se ha de tomar 2 veces la tercera parte de $\frac{4}{7}$: luego $\frac{4}{21} \times 2 = \frac{8}{21}$ seràn $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{7}$ § 49; pero lo mismo resulta multiplicando numerador por numerador, y denominador por denominador: luego dicha operacion es buena. La misma se harà aunque los quebrados propuestos sean mas compuestos.

ARTICULO II.º

Del valor de los quebrados.

55 Hallar el valor de un quebrado es buscar quanto vale en aquella especie à que està contraido. Para el intento se multiplica el numerador del québrado por la cantídad, el produćto se parte por el denominador, y el cociente serà el valor del quebrado: y así si se quieren los $\frac{2}{3}$ de un peso, se multiplicará el numerador 2 por la cantidad 15 (supuesto que el peso sea de 15 reales), el produćto 30 se partirá por el denominador 3, y el cociente 10 será el valor del quebrado: esto es que los $\frac{2}{3}$ de 15 reales son 10 reales.

56

56 La razon es porque pedir los $\frac{2}{3}$ de 15 no es otra cosa que reducir el quebrado compuesto $\frac{2}{3}$ de $\frac{15}{1}$ à simple; pero esto § 52 se executa multiplicando numerador por numerador, y denominador por denominador; siendo el denominador de 15 la unidad, este con su multiplicacion no aumenta el denominador 3, y por consiguiente el quebrado simple que resulta es el impropio $\frac{30}{3}$ que reducido à enteros § 45 son 10 enteros; pero esto mismo resulta por la operacion, luego es buena.

57 Si haciendo la operacion sobre-dicha, sobrare algo en la particion, será parte de una de las unidades del cociente: por exemplo, si se quieren los $\frac{3}{5}$ de 24 reales, se multiplicará 24 por 3, el producto 72 se partirá por 5, y el cociente 14 reales y $\frac{2}{5}$ de otro real, es el valor del quebrado.

ARTICULO III.º

De la mayor medida comun de los números.

58 Medida comun de dos ó mas números, es aquella que es parte aliquota de todos ellos: y así la medida comun de los números 18 y 24, es el 2, 3 y 6, pues qualquiera de ellos es divisor justo de 18 y 24 § 32: y aunque el 18 y 24 tienen otras partes aliquotas, no son comunes à entrambos: entendido pues esto, lo que en el exemplo se pide es hallar entre las partes aliquotas comunes á los números propuestos, la mayor de ellas: esto es si los números propuestos, son 18 y 24, cuyas partes aliquotas comunes (como se ha di-

dicho) son el 2 , el 3 y el 6 , se pide hallar la mayor 6 , y esto se consigue haciendo la operacion siguiente.

59 Se pide hallar la mayor medida comun de dos números : se partirá el número mayor por el menor : y si sobrare algo se partirà el número menor por lo que sobró , y si en esta segunda particion sobrare algo se partirá el residuo primero por el segundo , y así succesivamente se irà continuando hasta que el último residuo sea cero , ó la unidad : si fuere cero , el último divisor serà la mayor medida comun de los números propuestos ; pero si el ultimo residuo fuere la unidad , no tendrán dichos números medida comun , y estos tales se llaman *números entre sí primos* , y los que tienen medida comun se dicen *números entre sí compuestos.*

Exemplo.

Se quiere la mayor medida comun de los números 125 y 75.

Partiendo 125 por 75 les toca à 1 y sobran 50 : partiendo 75 por 50 sobran 25 : y partiendo 50 por 25 sale justa la particion , por lo que el último divisor 25 es la mayor medida comun de los números 125 y 75 propuestos.

$$\begin{array}{r|l} 125 & 75 \\ \hline 50 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 50 \\ \hline 25 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 25 \\ \hline 00 & 2 \end{array}$$

60 La razon es porque los divisores de 125 son 5 , y 25 , y los de 75 son 3 , 5 , 15 y 25 § 32 , y el mayor de los divisores comunes es 25 : luego &c.

61 Si se quiere la mayor medida comun de tres ó mas números , se buscará primero là de dos.

y,

y despues con esta medida encontrada, y otro número se hará la misma operacion que con los dos primeros, y así succesivamente, y la última mayor medida que se encuentre serà comun á todos los números propuestos; pero si con alguno no se pudiere encontrar, seràn los números propuestos entre sí primos.

Corolario.

62 INfiérese el modo de reducir los quebrados á la menor expresion: porque hallada la mayor medida comun del numerador y denominador (si la tuvieren), y partiendo por ella el numerador y denominador, se formarà con los cocientes un nuevo quebrado que serà igual al propuesto § 50: y así si se pide reducir á la menor expresion el quebrado $\frac{75}{125}$ se hallarà la mayor medida comun del numerador 75, y del denominador 125, la qual es 25 § 58, y partiendo 75 y 125 por 25 se formará con los cocientes 3 y 5 el quebrado $\frac{3}{5}$ que es igual à $\frac{75}{125}$ el que queda expresado con los menores números posibles por ser 25 el mayor divisor comun del numerador y denominador.

ARTICULO IV.º

De la reduccion de los quebrados à un comun denominador.

63 R*Educir los quebrados á un comun denominador*, es reducirlos á otros quebrados, que

que conservando el mismo valor que los propuestos, tengan la unidad ó el todo dividido en igual número de partes iguales, para lo que se operarà del modo siguiente.

64 Si los quebrados que se hubieren de reducir á un comun denomidador fueren dos, se multiplicarán los denominadores entre sí, y el producto será el *denominador comun*: y multiplicando despues el numerador de cada quebrado por el denominador del otro, seràn los productos los nuevos numeradores.

Exemplo.

Se quiere reducir á un comun denominador los quebrados $A = \frac{3}{5}$ y $B = \frac{4}{7}$.

Multiplíquense los denominadores 5 y 7, y el producto 35 es el denominador comun. Multiplíquese el numerador 3 del quebrado A por el denominador 7 del quebrado B, y el producto 21 es el nuevo numerador del quebrado A, y multiplicando el numerador 4 del quebrado B por el denominador 5 del quebrado A, el producto 20 es el nuevo numerador del quebrado B, con lo que quedan reducidos los quebrados A y B, à otros dos que tienen un mismo denominador, y son iguales á los propuestos: esto es el quebrado $A = \frac{3}{5} = \frac{21}{35}$, y el quebrado $B = \frac{4}{7} = \frac{20}{35}$.

$$\begin{array}{c} 21 \quad 20 \\ A = \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = B \\ 35 \end{array}$$

65 La razon es porque habiendo multiplicado tanto el numerador como el denominador del quebrado A (en virtud de la operacion) por una misma cantidad 7, el nuevo quebrado $\frac{21}{35}$ que resulta, es igual al quebrado A § 50. Por la misma razon el

el quebrado $\frac{\text{[illegible]}}{35}$ es igual al quebrado B: luego la operacion executada es verdadera.

66 Si los quebrados que se quieren reducir à un comun denominador fueren mas de dos, se multiplicaràn todos los denominadores entre sí, y el producto será el denominador comun, y multiplicando despues el numerador de cada uno por los denominadores de los otros, el producto serà el nuevo numerador de cada quebrado.

Exemplo.

Se han de reducir à un comun denominador los quebrados $A = \frac{2}{3}$ $B = \frac{4}{5}$ $C = \frac{3}{4}$.

Multiplíquense los denominadores 3, 5 y 4, y el producto 60 es el denominador comun. Multiplíquese el numerador 2 del quebrado A por los denominadores de B y C, y el producto 40 es el nuevo numerador del quebrado A: asímismo multiplíquese el numerador 4 del quebrado B, por los denominadores de A y C, y el producto 48 es el nuevo numerador del quebrado B: y finalmente multiplicando el numerador 3 del quebrado C por los denominadores de A y B, el producto 45 es el nuevo numerador del quebrado C, con cuya operacion resulta $A = \frac{2}{3} = \frac{40}{60}$: $B = \frac{4}{5} = \frac{48}{60}$, y $C = \frac{3}{4} = \frac{45}{60}$.

$$\begin{array}{ccccc} 40 & & 48 & & 45 \\ A = \dfrac{2}{3} & \times & B = \dfrac{4}{5} & \times & C = \dfrac{3}{4} \\ & & 60 & & \end{array}$$

67 La demostracion es la misma que là del exemplo antecedente: pues tanto el numerador como el denominador de cada quebrado se ha multiplicado por una misma cantidad, la qual es el producto de los denominadores de los otros quebrados.

Co-

Corolario.

68 Infiérese el modo de conocer entre dos ó mas quebrados qual es el mayor, pues reduciendolos à un comun denominador, aquel quebrado serà mayor, cuyo nuevo numerador fuere mayor § 43.

ARTICULO V.º

Del sumar quebrados.

69 SI los quebrados que se han de sumar tuvieren un mismo denominador, se sumaràn los numeradores, y à la suma se pondrá el denominador comun: y así si se quiere sumar los quebrados $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ y $\frac{7}{8}$, se sumarán los numeradores 3, 5 y 7, y à la suma 15 se le pondrá el comun denominador 8, con lo que el quebrado $\frac{15}{8}$ es la suma de los quebrados propuestos, el qual reducido à enteros § 45 serà $1 + \frac{7}{8}$.

70 Si los quebrados no tuvieren un mismo denominador, se reducirán à èl §§ 64, 66, y despues se sumarán como en el caso antecedente.

71 Si los quebrados que se han de sumar fueren compuestos, se reduciràn à simples § 52, y despues à un comun denominador (si lo sacaren diferente), y finalmente se sumaràn como en los casos antecedentes.

72 Si se han de sumar enteros y quebrados, con enteros y quebrados, se sumaràn primero los quebrados, y la suma de estos se añadirá à los enteros.

 Exem-

Exemplo.

Se han de sumar $24\frac{1}{2}$ con $18\frac{2}{5}$ y con $9\frac{4}{5}$

Sáquense aparte los quebrados para reducirlos á un comun denominador como se ve en P; súmense los nuevos numeradores como se ve en Q, y poniendo á la suma el denominador comun, resultarà el quebrado R, el qual es la suma de los quebrados propuestos, que reducido á enteros, son los que se ven en S: los que añadidos à los enteros es la suma total la que se manifiesta en Z.

$$\begin{array}{llcr}
 & \text{P} & & \text{Q} \\
 & 15 \quad 20 \quad 24 & & 15 \\
 & \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} & & 20 \\
24\frac{1}{2} & 30 & & \underline{24} \\
18\frac{2}{5} & & & \\
\underline{9\frac{4}{5}} & & & \underline{59} \\
\text{Z.}\;.\; 52\frac{29}{30}. & \text{R} & & \text{S} \\
 & \frac{59}{30} = 1 + \frac{29}{30} & &
\end{array}$$

ARTICULO VI.º

Del Restar Quebrados.

73. SI los quebrados que hacen el restando y restador tuvieren un mismo denominador, se restará el numerador del restador, del numerador del restando, y al residuo se le pondrá el denominador comun: así si se ha de restar $\frac{3}{8}$ de $\frac{7}{8}$ se restara 3 de 7, y al residuo 4 se le pondrá el comun denominador 8, con lo que resultará el quebrado $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ que es la diferencia entre los quebrados propuestos.

74 Si los quebrados no tuvieren un mismo denominador, se reducirán à èl, y despues se restarán como en el caso antecedente.

75 Si los quebrados que hacen el restando, y restador, ó bien uno de ellos, fueren compuestos, se reducirán à simples, y despues à un comun denominador (si los sacaren diferentes), y finalmente se restarán como en los casos antecedentes.

76 Si se ha de restar entero y quebrado, de entero y quebrado, se debe atender à que si el quebrado del restador, es menor que el del restando, se harà la resta como se ha dicho, y su diferencia se añadirà al residuo de los enteros; pero si el quebrado del restador fuere mayor que el del restando, en este caso para poderlo restar se ha de sacar una unidad de los enteros del restando: y formando con ella un quebrado impropio de la especie de su quebrado, se sumarà con él, y del quebrado que resulte se restará el del restador, y el residuo que quede se añadirà al de los enteros, para que el residuo total tenga todo su valor.

Exemplo.

Se pide restar $8\frac{4}{5}$ de $12\frac{2}{3}$.

Respecto que el quebrado del restador es mayor que el del restando, se sacarà de los enteros del restando una unidad, y se formarà con ella el quebrado impropio $\frac{3}{3}$, y sumàndolo con su quebrado, se tendrá $12\frac{2}{3} = 11\frac{5}{3}$ con lo que se podrá restar el quebrado del restador. Hecho esto se sacarán aparte los quebrados para reducirlos à un comun de-

$$
\begin{array}{l}
12\frac{2}{3} = 11\frac{5}{3} \\
\;\;8\frac{4}{5} = \;\;8\frac{4}{5} \\
\hline
Z. \;.\; .\; .\; 3\frac{13}{15}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\text{Y} & & \text{V} & \text{L} \\
25 & 12 & 25 & \frac{13}{15} \\
\frac{5}{3} & \frac{4}{5} & \frac{12}{12} & \\
15 & & &
\end{array}
$$

denominador como se ve en Y, se restarán los nuevos numeradores como se ve en V, y poniendo al residuo el denominador comun, resulta el quebrado L, el qual es la diferencia entre los quebrados propuestos, que añadida al residuo de los enteros, será el residuo total el que se manifiesta en Z.

ARTICULO VII.

Del Multiplicar Quebrados.

77 PAra multiplicar un quebrado por otro, se multiplicaràn entre sí los numeradores, y el producto serà el numerador del quebrado propuesto, y multiplicando los denominadores, el producto será el denominador: y así si se han de multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, se multiplicaràn los numeradores 2 y 4, el producto 8 es el numerador del producto: multiplicando luego los denominadores 3 y 5, el producto 15 es el denominador, con lo que resulta $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, y asi de los demás.

78 La razon es, porque multiplicar segun su definicion, es buscar un número que contenga tantas veces al multiplicando, como unidades tiene el multiplicador § 17, luego en el caso que el multiplicador sea menor que la unidad, como sucede en los quebrados, debe ser el producto menor que el multiplicando, y será tanto menor quanto lo fuere el multiplicador respecto de la unidad, para que convenga con la esencia del multiplicar: y así, si el multiplicador fuere por exemplo $\frac{1}{3}$ de la unidad, deberá ser el producto un tercio del multiplicando, y por consiguiente en la multiplicacion de los que-

bra-

brados se debe sacar tal parte del multiplicando para producto, qual es el multiplicador de la unidad: porque pidièndose multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ el producto debe ser los $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, por ser el multiplicador los $\frac{4}{5}$ de la unidad, mas para sacar los $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, se hace multiplicando numerador por numerador, y denominador por denominador § 52: luego para multiplicar un quebrado por otro se debe hacer la misma operacion, que era, &c

79 Para multiplicar entero, por entero y quebrado, se multiplican primero los enteros entre sí, y despues se multiplica el quebrado del multiplicador por el entero dèl multiplicando, lo que se executa sacando del multiplicando, la parte correspondiente al quebrado del multiplicador, cuya cantidad debe añadirse al producto de los enteros, para que tengan todo su valor: esto se entenderá bien en el caso siguiente.

80 Para multiplicar entero y quebrado, por entero y quebrado, se multiplicarán primero los enteros entre sí: despues los enteros del multiplicador por el quebrado del multiplicando, y los enteros de este por el quebrado del multiplicador, y finalmente los quebrados entre sí: y la suma de todos los productos parciales serà el producto que se desea.

Exemplo.

Se ha de multiplicar $12\frac{1}{2}$ por $8\frac{2}{3}$.

Multiplicando los enteros por los enteros da el producto A, y multiplicando los enteros del multiplicador por el quebrado del multiplicando como se ve en P. da el producto Q, que reducido á enteros son los que se ven en R, los quales se pondràn en B: asimismo multiplicando los enteros del multiplicando por el quebrado del multiplicador, como se ve en S, da el producto T que reducido á enteros, son los que se ven en V que se pondrán en C: finalmente multiplicando el quebrado del multiplicando por él del multiplicador como se ve en X da el producto Y, que reducido á la menor expresion, es el que se ve en Z, el qual se pondrà en D: y sumando todos estos productos parciales, la suma total E es el producto que se desea.

$$
\begin{array}{ll}
\quad 12\frac{1}{2} & \\
\quad 8\frac{2}{3} & \quad P \qquad Q \qquad R \\
\hline
 & \frac{8}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4 \\
A.\ 96 & \\
B.\ .\ 4 & \quad S \qquad T \qquad V \\
C.\ .\ 8 & \frac{12}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{24}{3}=8 \\
D.\ .\ 0\frac{8}{3} & \\
\hline
 & \quad X \qquad Y \qquad Z \\
E.\ 108\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \\
\hline
\end{array}
$$

81 Tambien se multiplican los enteros y quebrados por enteros y quebrados, reduciendo los enteros à la especie de sus quebrados, y operando despues con ellos como si fueran quebrados.

ARTICULO VIII.º

Del partir Quebrados.

82 PAra partir un quebrado por otro, se multiplica primero el numerador del dividendo por el denominador del divisor y el producto es el numerador del cociente; y despues el numerador del divisor por el denominador del dividendo y el producto es el denominador: y así si se ha de partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ se multiplicará el numerador 4 del dividendo por el denominador 3 del divisor, y el producto 12 es el numerador del cociente; y multiplicando el numerador 2 del divisor por el denominador 5 del dividendo el producto 10 es el denominador, con lo que resulta $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$ y así de otros.

83 La razon es porque partir (segun su definicion) es buscar un número que contenga tantas unidades como veces contiene el dividendo al divisor § 23; mas para saber quantas veces el quebrado dividendo contiene al quebrado divisor, es necesario reducirlos à un comun denominador, para que siendo de una misma especie se pueda averiguar lo que se pretende: pues estando el valor de los qubrados en los numeradores § 42, se contendrá el quebrado divisor en el quebrado dividendo tantas veces como el nuevo numerador del divisor en el nuevo numerador del dividendo: luego partiendo el nuevo numerador del dividendo por el nuevo numerador del divisor, el cociente será el que se desea; pero esto es lo que se ha practicado en el exemplo: luego, &c.

84 Para partir entero, por entero y quebrado,

ó al contrario, se reducirá el entero à quebrado poniendole por denominador la unidad, y el otro entero à la especie de su quebrado, y despues se operarà como en el caso antecedente.

85 Basta para la inteligencia la figuracion de este exemplo.

Se quiere partir 8 por $2\frac{2}{3}$.

86 Para partir entero y quebrado, por entero y quebrado se reduciràn los enteros del dividendo y divisor, cada uno à la especie de su quebrado, y haciendo despues la particion como en el caso primero se conseguirá lo que se pretende.

$$8 \,;\, 2\tfrac{2}{3}$$

$$\tfrac{8}{1} : \tfrac{8}{3} = \tfrac{24}{8} = 3.$$

Exemplo.

Se pide partir $8\frac{3}{4}$: por $3\frac{2}{3}$.

Reducidos los 8 enteros del dividendo à la especie de su quebrado, y sumado con él, hacen $\frac{35}{4}$: asimismo reducidos los 3 enteros del divisor à la especie de su quebrado, y sumado con él, hacen $\frac{11}{3}$, y partiendo $\frac{35}{4}$ por $\frac{11}{3}$ es el cociente $\frac{105}{44}$ el qual reducido á enteros, son $2 + \frac{17}{44}$ de otro entero, y asi de los demás.

$$8\tfrac{3}{4} : 3\tfrac{2}{3}$$

$$\tfrac{35}{4} : \tfrac{11}{3} = \tfrac{105}{44} = 2\tfrac{17}{44}$$

CA-

CAPITULO III.º

De las Fracciones Decimales.

87 ADemas de las fracciones de que acabamos de hablar, hay otras de mucho uso en las Matemàticas, cuyo conocimiento es absolutamente necesario para quando se trata de tener algunas cantidades con toda la posible aproxìmacion.

DEFINICIONES.

88 Si se divide la unidad por la misma unidad seguida de uno ó mas ceros, es decir por los números 10, 100, 1000, 10000, &c. que son las potencias succesivas de 10, y si se toman algunas de estas partes, la fraccion que indica quantas de ellas se toman se llama *fraccion decimal*, y se expresa así $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{48}{100}$ &c.

89 Se ha encontrado pues el modo de operar con estas especies de fracciones lo mismo que con los números naturales, como igualmente el de reducir toda fraccion à otra decimal igual á la misma, ó que solo difiera de ella en una cantidad infinitamente pequeña, y por tanto es muy freqüente su uso en las Matematicas.

ESCOLIO I.

90 SIendo las fracciones decimales verdaderos quebrados pueden tambien expresarse como estos: y así para indicar 3 décimos, 58

cen-

centécimos se escribirà así $\frac{3}{10}$, $\frac{58}{100}$; pero hay otro modo de señalarlos, y es escribir el numerador solamente, con lo que ya se indica el denominador. Por exemplo: en lugar de escribir $\frac{3}{10}$, $\frac{58}{100}$ se escriben .3, .58, poniendo un punto á la izquierda del numerador, de modo que despues de él, haya tantas cifras como habria ceros en el denominador despues de la unidad. Del mismo modo si hubiere enteros amàs de las fracciones, como 15 enteros y $\frac{25}{100}$ 38 enteros y $\frac{245}{1000}$ se escribirá 15. 25 y 38. 245. De este modo aunque no se halle expresado el denominador, podrá conocerse qual debe ser: porque sí hay dos cifras despues del punto, corresponderà que el denominador sea 100, si tres 1000 y asi de los demas.

91 Síguese de aquí que la expresion 253. 27, equivale â 253 $\frac{27}{100}$: asimismo 483. 547, significa 483 entéros y $\frac{547}{1000}$. Tambien se sigue que para colocar en forma de decimales la cantidad 28 $\frac{3}{100}$ se deberà escribir 28. 03, poniendo un cero antes del tres, à fin de que haya dos cifras despues del punto, con lo que se conoce que el denominador es la unidad seguida de dos ceros ó 100. Del mismo modo para poner en esta forma 53 $\frac{48}{10000}$ se escribirà 53. 0048, poniendo dos ceros antes de las cifras 48 para indicar que el denomidador tiene quatro ceros despues de la unidad, ó 10000.

92 Sino hubiere enteros con la fraccion, y si solo $\frac{325}{1000}$ se escribirà así o. 325, haciendo ver por el cero puesto antes del punto que no hay enteros. Si bien se reflexiona se advertirà que esta expresion o. 325 es igual á $\frac{3}{10}$ mas $\frac{2}{100}$ mas $\frac{5}{1000}$, porque $\frac{3}{10}$ es igual â $\frac{30}{100}$ y $\frac{300}{1000}$: y $\frac{2}{100}$ tambien es igual á $\frac{20}{1000}$, porque una fraccion no varia de valor quando se multiplica su numerador y su denominador por una misma cantidad: luego en lugar

gar de expresar la fraccion o. 325 diciendo $\frac{325}{1000}$ se hubiera podido indicar asi $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{5}{1000}$ lo que hace ver que las cifras de esta cantidad o. 325, van aumentando en razon décupla de derecha á izquierda, y disminuyendo en la misma proporcion de izquierda à derecha, porque es evidente que un centésimo es diez veces mayor que un milésimo, y que un décimo es diez veces mayor que un centésimo. Considerando las fracciones decimales baxo este aspecto, pueden definirse diciendo que *son números menores que los enteros, que siguen la proporcion de las diferentes órdenes de la numeracion.*

93 En efecto despues de haber fixado el término de las unidades, ó números enteros, nada embaraza imaginar otros números de los quales las unidades siguen siempre la progresion, como en este número 6325. 489, en el qual las unidades de la primera cifra dos que està á la izquierda del cinco donde se terminan los enteros, son diez veces mayores que las unidades del mismo cinco, y las unidades del quatro que está inmediatamente à la derecha del cinco, son diez veces mas pequeñas que las unidades del cinco: las unidades del tres que ocupa el segundo lugar à la izquierda de la cifra cinco de las unidades, son cien veces mayores que las del mismo cinco; y las unidades del ocho que ocupa el segundo lugar hacia la derecha despues del cinco, son cien veces menores que las unidades del mismo cinco, y así de los demás que ocupen lugares iguales á la derecha y à la izquierda de la cifra de las unidades. De suerte que partiendo desde esta cifra hacia la derecha, puede decirse unidades, decenas, centenas, millares, &c. del mismo modo que se dice partiendo desde esta misma cifra hacia la izquierda, unidades, decenas, centenas, millares, &c. Este modo de representarse las

frac-

fracciones decimales dà mucha luz en todas las operaciones que se hacen con ellas.

ESCOLIO II.

94 VArias fracciones decimales como 0. 3, 0. 54, 0. 008, ó sus iguales $\frac{3}{10}$, $\frac{54}{100}$, $\frac{8}{1000}$, puestas en el primer modo, podràn reducirse facilmente à una misma denominacion, porque $\frac{3}{10}$ como ya se ha dicho es igual $\frac{30}{100}$, y à $\frac{300}{1000}$, y $\frac{54}{100}$ es igual à $\frac{540}{1000}$: luego las fracciones propuestas podrán tambien escribirse en esta forma 0. 300, 0. 540, 0. 008. Es evidente que esta variedad de expresiones no altera el valor de las fracciones, porque en esta operacion se multiplican los numeradores, y denominadores por las mismas cantidades.

95 Una vez comprendidos estos principios se ve facilmente que puede operarse con las fracciones decimales lo mismo que con los números enteros, y como toda fraccion puede reducirse à otra decimal, igual á la misma, ó que difiera insensiblemente de ella, se sigue que todas las operaciones de los quebrados pueden referirse à las de los números enteros, por lo qual se omitirá la repeticion de exemplos, bastando para su inteligencia la práctica de lo dicho en las quatro reglas de los números enteros, y despues se dará el modo de reducir una fraccion qualquiera á decimal, y las diversas aplicaciones que pueden hacerse de estas operaciones á los cálculos mas usados.

ARTICULO I.º

Del sumar Fracciones decimales.

96 SI las fracciones propuestas no estan reducidas á una misma denominacion, serà esta la primera operacion. Hecha esta se colocarán unas baxo de otras, de modo que las decenas esten baxo de las decenas, las centenas baxo de las centenas, los millares baxo de los millares, formando el lugar de cada cifra úna coluna, y despues se hará la suma segun las reglas que se han dado para la de los números enteros. Por exemplo si se quiere tener la suma de las fracciones 0. 3, 0. 25, 0. 489 y 0. 056, se reducirán á la misma denominacion que la cantidad 0. 489, ó 0. 056 teniendo uno y otro millares, y disponiendolo en el órden conveniente se tendrá

0. 300
0. 250
0. 489
0. 056

Luego la suma serà. 1. 095

Esto es un entero y $\frac{95}{1000}$

97 Si tuviesen enteros y fracciones, como en lòs números siguientes 25. 43, 3. 054, 69. 067, 36. 48, la operacion será la misma, pues sumándolos como se manifiesta al màrgen, despues de haber reducido las cantidades à la denominacion de 3. 054, que es la mayor denominacion de las fracciones, se tendrá por là suma 134. 031: esto es 134 enteros y $\frac{31}{1000}$.

25. 430
3. 054
69. 067
36. 480
134. 031

98

98 Puede tambien escusarse la reduccion de las fracciones propuestas à una misma denominacion, haciendo atencion à lo dicho anteriormente § 94 y observando en su conseqüencia el órden de la colocacion de las cifras. Por exemplo: si se quieren sumar las fracciones siguientes 0. 35, 0. 48, 0. 54, 0. 345, y 0. 0048, se dispondrán en el modo que se manifiesta al margen, y se tendrà por la suma, un entero y $\frac{7198}{10000}$.

0. 35
0. 48
0. 54
0. 345
0. 0048
1. 7198

ARTICULO II.°

Del Restar Fracciones decimales.

99 SI las fracciones no tienen una misma denominacion, para mayor facilidad se dará principio reduciendolas á la del mayor denominador, segun el método explicado § 92. Despues se dispondrán de modo que las decenas esten baxo de las decenas, las centenas baxo de las centenas, y asi de los demas números: luego se hará la resta del modo que se practica con los números enteros. Por exemplo: para restar la fraccion decimal 0. 0250, de 0. 5364, se escribirà como se ve al margen, y haciendo la resta serà el residuo 0. 5114.

0. 5364
0. 0250
0. 5114

100 Si hubiere que restar enteros y fracciones, de enteros y fracciones, el método será el mismo: por exemplo; para restar 47. 9453, de 68. 05489,

se

se escribiràn sin reducir una denomi-	68. 05489
nacion á otra en el modo puesto al	47. 9453
margen, y el residuo será 20. 10959.	20. 10959

101 La demostracion de estas dos operaciones es la misma que la de los números enteros, porque tomàndose la suma ó la diferencia de las decenas, centenas, millares, &c. tambien se tiene la suma ó la diferencia de estas fracciones, pues no contienen otra cosa que decenas, centenas y millares, &c. Tambien se hace la prueva de estas operaciones por la contraria como en los números enteros, por lo que no parece necesario insistir mas sobre este punto.

ARTICULO III.º

Del Multiplicar Fracciones Decimales.

102 Para multiplicar dos números de los quales uno, ó entrambos contienen partes decimales, se hará la multiplicacion como si los tales números fuesen enteros, y despues de hallado el producto, se separarán con un punto, contando de la derecha hacia la izquierda otras tant s cifras como decimales se contienen en el multiplicando y multiplicador. Las cifras que esten á la izquierda del punto indicarán los enteros, y las que queden á la derecha serán los decimales. Por exemplo para multiplicar 24. 35, por 2. 3, se escribirá

Ha-

Habiendo hecho la multiplicacion como sino hubiese decimales, y hallado el producto 56. 005, se escribirá 56. 005 dejando tres cifras à la derecha del punto, por quanto habia otras tantas de decimales en el multiplicando y multiplicador, à saber dos en el primero, y una en el segundo.

$$\begin{array}{r} 24.35 \\ 2.3 \\ \hline 7305 \\ 4870 \\ \hline 56.005 \end{array}$$

103 Puede ocurrir el caso de que el numero de los decimales del multiplicando y multiplicador juntos, sea mayor que él de las cifras del producto expresivas de la cantidad decimal que resulta de la multiplicacion, lo que sucede quando no habiendo enteros en el multiplicando ó multiplicador á mas de las fracciones decimales, y siendo estas en corto número, corresponden á grandes denominadores; en este caso se pondrán hacia la izquierda de las cifras significativas del producto, tantos ceros, quantos se necesiten para completar el número de cifras decimales que contienen el multiplicando y el multiplicador.

Por exemplo: para multiplicar estas dos cantidades, que solo tienen decimales 0. 0054 por 0. 012, dispuestas como se ve al márgen, y hecha la multiplicacion á lo ordinario, se halla ser el producto de cifras significativas 648: en este caso se escribirá 0. 0000648, disponiendolos de modo que con la adiccion de quatro ceros á la izquierda de las cifras significativas, sean las decimales ó cifras despues del punto, tantas como se contienen en el multiplicando y multiplicador.

$$\begin{array}{r} 0.0054 \\ 0.012 \\ \hline 108 \\ 54 \\ \hline 0.0000648 \end{array}$$

DE-

DEMOSTRACION.

104 Para entender mas facilmente la razon con que se demuestra la operacion antecedente, la aplicarémos al primer exemplo § 102, en el qual se trataba de multiplicar 24. 35 por 2. 3. Quando se multiplican estos números entre si, como si no hubiese en ellos decimales, se hace el multiplicando cien veces mayor de lo que es, pues las unidades del quatro que se hallaban por el punto en la clase de unidades simples, ascienden por la supresion del mismo punto à la clase de centenas. Del mismo modo, el multiplicador 2. 3, se hace diez veces mayor de lo que es efectivamente, considerandolo veinte y tres, luego el producto que resulta de estos dos números sera diez veces, cien veces mayor de lo que debe ser, ó bien mil veces mayor: luego para considerarle en su justo valor, es preciso hacerlo mil veces menor, y esto se consigúe cortando hacia la derecha tantas cifras decimales, quantas se contienen en el multiplicando y multiplicador. En nuestro caso se han cortado tres, de que ha resultado que la cifra 6 del producto 56005, que estaba en el órden de los millares, se ha hallado en el de las unidades con escribir 56. 005. Este mismo razonamiento puede aplicarse á otro qualquier exemplo.

ARTICULO IV.°

Del partir Fracciones Decimales.

105 PAra partir un número decimal por otro, yá sea, qúe solo contengan decimales,

ya que el dividendo y divisor tengan à demas numero entero, ó que solo uno de los dos comprenda entero y decimàl, se tomaràn por regla general estos números como si solo fuesen enteros: se pàrtiràn uno por otro, segun el método de la particion de los numeros enteros, y hallado el cociente se cortarán sus números de forma, que queden à la derecha del punto tantas cifras quantas son las decimales del dividendo, menos las del divisor. Por exemplo: para partir 88. 392, por 2. 54, pàrtanse estos dos números como si fuesen 88392 y 254, y habiendo hallado el cociente 348 se escribirà 34. 8, de modo que despues del punto se halle una cifra de decimales, por razon de que el dividendo comprende tres, y el divisor dos, cuya diferencia es una.

88. 392	2. 54
76 2	34. 8
12 19	
10 16	
2 032	
2 032	

106 De esta regla general se sigue, que si el dividendo y divisor contienen igual número de decimales, los números del cociente serán enteros: porque en este caso será cero la diferencia de los decimales, y por consiguiente no los hay. Tambien, se sigue que si el divisor no los tuviere, seràn los del cociente quantos tenga el dividendo. Si este no los tuviere, ó fueren menos que los del divisor, se le añadiràn los ceros que basten hasta igualar los decimales del divisor, y en este caso el cociente tendrá siempre números enteros, á menos que los enteros del divisor excedan à los del dividendo. Por exemplo; si se trata de partir 883. 92 por 2. 54, el cociente serà 348, porque la diferencia de los decimales del dividendo y divisor es cero.

Del mismo modo, si se quiere partir 5952 por

1. 24 se añadirán dos ceros al dividendo, á causa de que tiene dos decimales el divisor, y haciendo despues la particion de los numeros 5952. 00 y 1. 24 como si fueran 595200 y 124, saldran al cociente 4800 enteros.

Para entender con mas facilidad la demostracion de esta regla general, añadiremos los siguientes.

ESCOLIOS.

107 TOda fraccion decimal que contiene enteros y decimales, puede indicarse como si solamente comprendiera decimales: y así la fraccion 24. 32 que vale 24 enteros y 32 centésimos, puede expresarse así $\frac{2432}{100}$, porque $\frac{2400}{100}$ ó dos mil quatrocientos centésimos valen 24 enteros, por ser el numerador 24 veces mayor que el denominador.

108 Las unidades del cociente deben ser siempre de la misma especie que las del dividendo, porque el divisor es un número que solo indica el número de veces, y así si el dividendo tiene por unidades milesimos, y el divisor es un número entero absoluto como 3 ó 4, el cociente valdrà la tercera ó quarta parte de los milesimos del dividendo, y tendrá por consiguiente unidades de la misma especie.

109 Quanto mayor sea el divisor, siempre que el dividendo no se altere, tanto menor será el cociente, y reciprocamente quanto menor sea el divisor, suponiendo siempre uno mismo el dividendo, tanto mayor será el cociente: porque es evidente, que quanto menor sea un número, mas veces debe contenerse en otro.

DE-

DEMOSTRACION DE LA *regla general.*

110 PAra hacer mas inteligible esta demostracion nos referiremos en su explicacion al exemplo que antecede § 105. Si se parte el número 88. 392 por 2. 54, suponiendo que ni uno ni otro contienen decimales, es constante que siendo el dividendo y divisor números enteros, tambien lo será el cociente: si suponemos que el dividendo es 88. 392, y no 88392, es decir 88 millares y 392 milésimos, las 254 unidades del cociente, por el escolio § 94 deben ser milésimos: luego en tal caso el cociente 348 será mil veces mayor de lo que debe ser, y se escribirà así 0. 348. Supongamos ahora que el divisor no es un nùmero entero, sino 2. 54 como efectivamente lo es, ó 254 centésimos; y siendo làs centenas cien veces menores que las unidades, el número 2. 54 serà tambien cien veces menor que 254: luego el cociente debe resultar cien veces mayor § 109, y esto se consigue cortándo una cifra decimal de la derecha à la izquierda en el cociente 0. 348, en cuyo caso es este 34. 8: porque mediante esta operacion, las unidades del tres que eran dècimos vienen á ser decenas: las unidades del quatro que eran centésimos se convierten en unidades simples, y por consiguiente el cociente 0. 348 escrito en esta forma 34. 8, es cien veces mayor: de donde se sigue que el método dado produce un cociente igual al que debe ser.

111. Para entender la razon de las operaciones indicadas § 105, se atenderà á que el cociente de una particion no varia quando el divisor y el dividendo se multiplican por un mismo número. Así

12 partido por 4 da 3 al cociente, si se multiplican el 12 y el 4 por 5, y se parte el producto 60 por el producto 20, se tendrà el mismo cociente 3. Esto supuesto si se parten dos cantidades que tengan el mismo número de decimales, desatendiendo á esta circunstancia como sino los tuviesen, no se hace otra cosa que multiplicar el dividendo y divisor por un mismo número, lo que no debe variar el cociente. Asi quando se parte 883. 92 por 2. 54, como si fuera 88392 y 254, multiplicàndose el dividendo y divisor por 100, el cociente no deberà ser diverso; pero el cociente de 88392 partido por 254, es 348: luego este mismo número es el verdadero cociente de 883. 92 partido por 2. 54. Esta razon puede dàr la demostracion de todos los casos imaginables, por lo que será bien reflexionarla atentamente.

ARTICULO V.º

DEL USO DE LAS FRACciones Decimales.

Hallar con la aproxîmacion que se quiera el cociente de una particion que no lo dé exâcto.

112 HAllese desde luego el cociente del dividendo partido por el divisor, y pónganse à continuacion del residuo tantos ceros como decimales se quiera que salgan al cociente: si se quiere tener el cociente con la aproxîmacion de milesimos, ó de diez milésimos se añadirán tres ó quatro

tro ceros al residuo, y se seguirá la particion como á lo ordinario, poniendo los números seguidamente en el cociente como resulten despues de haberlos separado de los enteros por un punto, como se verá en el siguiente exemplo.

Pidese partir 553 por 15, y encontrar un cociente que no defiera del verdadero la diez milésima parte de la unidad.

Despues de haber partido 353 por 15, y encontrado el cociente 23 con 8 de reciduo, añadiendo â este quatro ceros porque se trata de aproximar en diez milésimos, y continuando la particion como à lo ordinario, saldrán al cociente los números 5, 3, 3 y 3 que se pondrán á continuacion del cociente hallado 23, separándolos de este con un punto para indicar que las cifras siguientes son decimales: y como en el caso presente resulta un residuo que constantemente será 5, y por consiguiente 3 la cifra que salga al cociente, podrà tenerse de una vez tan aproximado, si se quiere, que no difiera del verdadero la cien milésima parte de la unidad, ó con mayor aproximacion, añadiendo tantas veces la cifra 3, quantas requiera el denominador que se considere en la fraccion decimal.

353	15
30	23.5333
53	
45	
8.0000	
7.5	
50	
45	
50	
45	
50	
45	
5	

Hallar una fraccion decimal igual á otra dada menor que la unidad, ó lo que es lo mismo, hacer la particion de un número por otro mayor.

113 Pidese reducir la fraccion $\frac{5}{7}$ à decimales, ó lo

lo que es lo mismo encontrar el próximo cociente de 5 partido por 7, que no difiera de la misma fraccion la millonèsima parte de la unidad. Para esto se pondrán à continuacion del númerador 5, seis ceros, y haciendo la particion como á lo ordinario, saldrá al cociente, 0. 714285 ó 714 mil 285 millonésimos por cociente de 5 partido por 7, ó por el valor próximo de la fraccion $\frac{5}{7}$, con residuo 5, ó cinco millonésimos, del qual aun se debe tomar la sèptima parte. Si se quiere seguir mas la particion, se encontraria una serie de periodos iguales á 714285: porque es evidente que poniendo un cero despues del cinco, habrà tambien que partir 50 por 7, y los mismos cocientes volverân â parecer con los mismos residuos, lo que daria en un instante una aproximacion prodigiosa; pero con todo, siempre seria tal que le faltaria algo para ser exâcta. En la prâctica mas escrupulosa solo se acostumbra por lo regular hallar seis cifras decimales, ó á lo mas ocho.

```
5.000000 | 7
         ---------
49         0.714285
 10
  7
  30
  28
   20
   14
    60
    56
     40
     35
      5
```

114 Hay quebrados que pueden reducirse justamente à fracciones decimales, y otros que jamas producen una fraccion exâcta, como los quebrados $\frac{5}{7}$ y $\frac{6}{7}$, los quales reducidos a decimales producen, el primero la fraccion decimal que se expresó en el exemplo antecedente, y el segundo 0. 857142, 857142, continuando quantos periodos se quiera iguales á estos. Hay otros quebrados como $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{16}$ los quales pueden reducirse à fracciones decima-

males completas sin residuo: pues hecha con estos la particion en el modo expresado, resultan las fracciones, o. 8, o. 3125, las quales son enteramente iguales à los quebrados $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{16}$.

Reducir à Fraccion decimal las partes conocidas de una cierta medida, ò peso, como es la Toesa, el Píe, la Libra, &c.

115 PAra esto se formará desde luego una fraccion que tenga por numerador el número de partes que se quieren reducir à decimales, y por denominador el número que indique quantas veces esta parte se contiene en la medida de que se trata. Se reducirá esta fraccion á decimales por el parrafo antecedente, y se tendrá la fraccion decimal que se solicita. Por exemplo, si se quiere hallar una fraccion decimal de toesa que valga cinco pies, ó bien reducir cinco pies à partes decimales de la toesa, tómese el quebrado $\frac{5}{6}$ cuyo numerador 5, señalara el numero de pies de que se pide hallar el valor en decimales, y el denominador 6 indicarà quantas veces el pie se contiene en la toesa: reduzcase este quebrado $\frac{5}{6}$ á decimales § 113, y se tendra por el valor de 5 pies en decimales, o. 8333, cuya diferencia del verdadero valor de este quebrado no llega à un diez milésimo de la toesa.

116 Asimismo si se quiere reducir 9 pulgadas à de-

decimales de la toesa, ó lo que es lo mismo hallar una parte decimal de la toesa igual á 9 pulgadas, formese el quebrado $\frac{9}{72}$, cuyo numerador indicará las veces que la pulgada está contenida en la toesa: y partiendo 9 por 72, § 113 resulta por el valor de 9 pulgadas en partes decimales de la toesa, o. 125. Si se quisiera tener una parte decimal de la toesa igual á 5 pies y 9 pulgadas, se tomaria la suma de los dos números decimales o. 8333 y o. 125, ó o. 1250 que se hallaria de o. 9583: ó bien se reducirian à pulgadas los 5 pies y 9 pulgadas, y formando el quebrado $\frac{69}{72}$ se reduciria este à decimales en el modo expresado, de cuya sola operacion resultaria la misma fraccion decimal, o. 9583.

117 Si se quisieren reducir à partes decimales de libra, alguna cantidad de onzas y adarmes, se observará el mismo método, Por exemplo: si se pide hallar una parte decimal de la libra igual à 7 onzas y 8 adarmes, fórmese el quebrado $\frac{7}{16}$ cuyo denominador indica el número de onzas en que se divide la libra; hàllese despues una fraccion decimal igual à $\frac{7}{16}$ que será o. 4375: tomese despues el quebrado $\frac{8}{256}$ cuyo denominador indica los adarmes en que se divide la libra: hállese la fraccion decimal correspondiente á este quebrado que será o. 03125: súmese esta fraccion decimal con la primera, añadièndo â esta un cero para igualar al número de las cifras, y la suma o. 46875 serà la fraccion decimal de libra igual á 7 onzas y 8 adarmes: ó bien reduciendo las 7 onzas y 8 adarmes á este último peso, se tendrán $\frac{120}{256}$, cuyo denominador indica los adarmes en que se divide la libra: y reduciendo este quebrado à fraccion decimal se tendrá, o. 46875, la misma que por el método antecedente.

Por el mismo se reducirán á fracciones decimales las monedas que sean parte de otra mayor, y en general toda fraccion referente à un entero del qual se conocen las partes en que se divide.

Hacer la multiplicacion de los números complexos por medio de decimales.

118 PIdese hallar el importe de 27 toesas, 5 pies y 9 pulgadas, à dos pesos 5 reales y 17 maravedises la toesa. Redúzcanse los 5 pies y 9 pulgadas à partes decimales de la toesa § 115 y se tendrà 27. 9583 toesas. Asimismo redúzcanse 5 reales y 17 maravedis à fraccion decimal de peso, y se tendrà 2. 3666 pesos: multipliquense estos dos números como si fuesen enteros en lugar de multiplicar 27 toesas, 5 pies y 9 pulgadas por 2 pesos, 5 reales y 17 maravedises, y el producto serà 66. 16611278: córtense en él, de la derecha hacia la izquierda ocho cifras, qúe son el número de los decimales comprendidos en el multiplicando y multiplicador, y se tendrán por el producto que se busca 66 pesos, mas la parte de un peso correspondiente à las 8 cifras del decimal.

```
     27. 9583
      2. 3666
   ----------
      1677498
     1677498
    1677498
    838749
   559166
  -----------
  66. 16611278
```

119 Para hallar este valor, teniendo un peso 15 reales de vellon, multipliquese por este número la fraccion decimal, 0. 16611278, y partiendo el producto, 2. 49169170 por el denominador de la fraccion, que equivale à cortar desde la derecha à la izquierda las ocho cifras que este tiene, la cifra 2 que queda à la izquierda del punto da el número de los reales a que es igual la fraccion, 0. 16611278, con mas la parte de un real à que corresponde la fraccion decimal, 0. 49169170 que resulta de esta operacion.

Para hallar últimamente el valor de esta fraccion de real: componiendose este de 34 maravedises, multipliquese dicha fraccion por 34, y cortando del producto 16. 71751780, ocho cifras que contiene la fraccion decimal 0. 49169170, el número 16 que queda à la izquierda del punto son los maravedises à que es igual dicha fraccion de real, con mas un rèsiduo que por ser mayor que la mitad de la unidad se toma por un entero, considerando 17 maravedises por el valor de dicha fraccion: resultando de todo que la multiplicacion de 27 toesas, 5 pies y 9 pulgadas, por 2 pesos, 5 reales y 17 maravedises, da 66 pesos, 2 reales y 17 maravedises con una diferencia menor que medio maravedi.

120. Por este mismo método se reducirà qualquiera otra fraccion: pues únicamente se requiere saber en que parte està dividido el todo à que la fraccion se refiere. Por exemplo: para hallar el valor de la fraccion de toesa 0. 54 se multiplicará esta por 6 pies en que la toesa se divide, y cortando 2 cifras del producto resulta su valor de 3 pies y una fraccion de pie, cuyo valor se hallará multiplicandola por 12 pulgadas en que se divide el pie, y cortando otras dos cifras del producto,

se tendrán dos pulgadas por el valor de la fraccion de pie, con mas una fracion de pulgada que se reducirà à lineas en igual forma.

CAPITULO IV.º

De los Números denominados.

121 NUmeros denominados son aquellos que numeran cosas de varias especies, como doblones, pesos, reales &c.: quintales, arrovas, libras &c.: varas, pies, pulgadas, lineas &c.

122 Para la inteligencia de este calculo se hace precisa la noticia de las monedas, pesos, y medidas de todos los Reynos y Provincias con quien se tiene trato ó comercio, de cuya materia tratan muchos Autores largamente, por cuyo motivo se omiten en este compendio por no dilatarlo; pero se advertiràn aquellas especies de que se pondrán exemplos, para que por el mismo estilo se proceda con las demas.

Monedas de Castilla.

123 EL doblon de à ocho nuevo vale 16 pesos fuertes, y el antiguo 16 pesos fuertes, un real y 6 maravedises de vellon. El peso fuerte vale 20 reales de vellon. El peso sencillo vale 15 reales de vellon. El escudo de plata ó medio peso fuerte vale diez reales de vellon. El du-

ducado 11 reales de vellon. El real vale 34 maravedises, ú 8 quartos y medio.

Pesos de Castilla.

124 EL quintal tiene 4 arrobas, la arroba 25 libras, la libra 16 onzas, y la onza 16 adarmes.

Medidas de Castilla.

125 LA braza tiene dos varas, la vara 4 palmos, y el palmo 12 dedos: la tercera parte de la vara se llama *pie*, el qual se divide en 12 partes iguales que se llaman *pulgadas*, la pulgada en 12 *lineas*, y la linea en 12 *puntos*. Tambien se usa en los cuerpos del exército para la talla de la tropa, y materias facultativas, una medida llamada *toesa*, cuya sexta parte se llama *Pie de Paris*, ó *de Rey*, el qual es mayor que el de Castilla, de suerte que seis de los primeros hacen proxîmamente 7 de los últimos.

ARTICULO I.º

Del sumar números denominados.

126 LAs especies que se han de sumar se colocan unas baxo de otras, de suerte que

que las de cada especie correspondan baxo de una misma coluna. Puestas en esta disposicion se principiará la suma por la especie menor, y sacando de ella los enteros que componga de la especie proxîma mayor se añadirán á esta, con la qual haciendo lo mismo que con la primera, y succesívamente con las demas, se conseguirà la suma que se pretende.

Exemplos.

127 PRincipiando la operacion en el exemplo primero por los maravedises, se ve que componen 61, que hacen un real y 27 maravedises: pónganse estos baxo de los de su especie, y el real se añadirá à la suma de los reales, los quales componen 41, que son 2 pesos fuertes y un real, y ponieno el real baxo de la coluna de los de su especie, se añadiràn los dos pesos à la suma de los pesos, los quales com-

I.

Doblon.	*Pes. fuer.*	*Reales.*	*Marav.*
15	12	18	27
9	10	13	23
26	14	9	11
52	6	1	27

II.

Quints.	*Arrobas.*	*Libras.*	*Onzas.*
19	3	22	13
13	2	19	15
20	1	24	11
54	0	17	7

po-

ponen 38, que son 2 doblones y 6 pesos fuertes, y poniendo estos baxo de los de su especie, se añadirán los 2 doblones á la suma de los doblones, y componen 52, con lo que quedan sumadas las especies propuestas en el exemplo primero: cuya suma total es 52 doblones, 6 pesos fuertes, un real y 27 maradedises: y siguiendo el mismo estilo con los demas exemplos se conseguirà la suma de ellos.

III.

Toes.	*Pies.*	*Pulgs.*	*Lins.*	*Punts.*
18	2	7	9	11
20	1	10	11	7
7	0	9	0	9
39	5	3	10	3

ARTICULO II.º

Del restar números denominados.

128 LAs especies que se han de restar se colocan del mismo modo que si se hubieran de sumar, poniendo el restador baxo del restando, y se principiará la resta por la especie menor, advirtiendo que quando el número del restando fuere menor que el correspondiente del restador, se le ha de añadir una unidad de la especie proxîma mayor, la qual valiendo aquel número de unidades determinado de la especie á que se quiere añadir, le aumentará su valor: esto se manifestará en los exemplos siguientes, en los qua-

quales se pide restar las especies que en ellos se expresan.

Exemplos.

La operacion de el exemplo primero está manifiesta, y la del segundo se entenderà con la explicacion del tercero.

129 Principiando la operacion en el exemplo tercero por la especie menor, se ve que 9 lineas no se pueden restar de 7, por lo que es necesario valerse de la especie inmediata, y como esta no tiene valor para comunicarselo, es preciso recurrir à la especie donde se encuentre, que es la coluna de los pies, y sacando uno de los dos que se hallan en el restando, que componen 12 pulgadas, se dexaràn 11 en la coluna de las pulgadas en lugar del cero que hay en ella, y la restante que vale 12 lineas, se juntarà con las

I.

Doblon.	*Pes. fuer.*	*Reales.*	*Marav.*
34	12	17	23
23	9	15	19
11	3	2	4

II.

Quints.	*Arrobas.*	*Libras.*	*Onzas.*
28	8	17	10
18	2	15	12
10	1	1	14

III.

Toesas.	*Pies.*	*Pulgadas.*	*Lineas.*
12	2	0	7
5	2	6	9
6	5	5	10

las 7, y compondrán 19, de las quales se restarán las 9 del restador, y el residuo 10 se pondrá baxo de su coluna, y pasando á las pulgadas se restaràn 6 de 11, y el residuo 5 se pondrà baxo de las de su especie: y continuando la operacion se vé que no pudiendo restar 2 pies de uno es preciso sacar de las 12 toesas una, la que compone 6 pies y uno que hay son 7, de los que restando los dos del restador, es el residuo 5 que se pondrà en su respectiva coluna, y restando las 5 toesas de las 11 que quedaron en el restando, se pondrà el residuo 6 baxo de su coluna, con lo que el residuo total es 6 toesas, 5 pies, 5 pulgadas y 10 lineas.

ARTICULO III.º

Del Multiplicar Números Denominados.

130 VArios mètodos hay para multiplicar los números denominados; pero el mas facil es el que vulgarmente llaman *multiplicar por partes aliquotas*: lo que se executa dividiendo cada especie succesiva en partes aliquotas de la especie proxîma mayor, y de las mismas partes, para sacar con comodidad el valor correspondiente à cada quebrado: esto se entenderà mejor con los exemplos.

Exemplo I.º

131 PAra multiplicar entero y quebrado, por entero solo, se multiplicará primero el

 en-

entero por el entero, y para multiplicar despues el entero por el quebrado se divirà este en partes aliquotas de una de las unidades de la especie proxîma mayor, y sacando del multiplicador el valor correspondiente á dichas partes aliquotas, se harà la suma de todos, y esta será el producto que se desea.

132 Valiendo un quintal de qualquier genero 8 pesos fuertes, se desea saber quantos valdrán 12 quintales, 3 arrobas y 15 libras.

Dispuestas las especies como se ve en el exemplo, se multiplicarán primero los 12 quintales por los 8 pesos; y el producto 96 seràn los pesos que valen los 12 quintales. Para hallar el valor correspondiente á las 3 arrobas, se dividiràn estas en partes aliqúotas del quintal: esto es en 2 y 1, cuyos indices se pondràn á la izquierda del exemplo como se ve en él, para que á su lado se pongan sus correspondientes valores: respecto que 8 pesos es el valor de un quintal, serán 4 pesos el valor de 2 arrobas, y él de una arroba seran 2 pesos, cuyos valores se colocaran al lado de sus indices, como se ve en el exemplo.

	Quint.	*Arrobas.*	*Libras.*
	12 . .	3 . . .	15
	8 *Pesos.*		
	96		
2	4		
1	2		
5	0 . .	8 *rs.*	
5	0 . .	8	
5	0 . .	8	
	103 *Pes.*	4 *rs.*	

Para saber el valor de las 15 libras, se dividiràn en las partes 5, 5, 5, aliquotas de la arroba: se sacarà la quinta parte de dos pesos fuertes, ó de 40 reales (por ser 5 la quinta parte de una arroba) y sera su valor 8 reales; y poniendo el mismo

mo

mo valor por cada quinta parte, se tendrá el valor de las 15 libras. y sumando todos los productos parciales, será la suma 103 pesos fuertes y 4 reales, el valor de 12 quintales, 3 arrovas y 15 libras á razon de 8 pesos fuertes el quintal.

Exemplo II.º

133 Se han de multiplicar 9 varas, 2 pies y 7 pulgadas, por 6 varas

	Varas. Pies. Pulgadas.
	9 . . 2 7
	6
	54
1	2
1	2
0	1
1	0 . 0 . . 6
	59 . 0 . . 6

	Varas. Pies. Pulgadas.
	19 . . 2 2
	3
	57
1	1
1	1
2	0 . 0 . . . 6
	59 . 0 . . . 6

Multiplicando las 9 varas por las 6, es el producto 54 varas quadradas, como se demostrará en la Geometría.

Para hallar el producto de 2 pies por 6 varas, se dividirán los dos pies en las partes 1 y 1 aliquotas de la vara, y siendo el multiplicador el valor de una vara (como se supone) se sacara por cada pie la tercera parte del multiplicador, cuyo valor de de cada pie es dos varas quadradas, las que se pondràn en su lugar correspondiente.

Para hallar el producto de 7 pulgadas por 6 varas, se dividirán las 7 pulgadas en las partes 6 y una aliquotas del pie, y siendo 6 pulgadas la mitad del pie, le corresponde por producto la mitad del de un pie: esto es una vara quadrada, y à una pulgada le corresponde la sexta parte del producto de las 6 pulgadas, que son 6 pulgadas, que se llaman *corrientes sobre vara* (como se demostrarà en la Geometria) y sumando estos productos parciales, la suma total 59 *varas quadradas*, *y 6 pulgadas corrientes sobre vara* es el producto que se desea.

El mismo producto sale si se dobla el multiplicando, y se multiplica por la mitad del multiplicador, como se ve en el exemplo segundo, lo que puede servir de prueba en estas operaciones del multiplicar.

134 Si se hubiere de multiplicar entero y quebrado, por entero y quebrado, se multiplicará primero el entero y quebrado del multiplicador por el entero del multiplicando, como se ha executado en los exemplos antecedentes, y despues se sacará del multiplicador la parte correspondiente á cada quebrado del multiplicando.

Exem-

Exemplo III.^{o}

Valiendo un quintal de qualquier genero, 9 pesos fuertes, 6 reales, y 18 maravedises, se desea saber quanto valdràn 16 quintales, 3 arrobas, y 16 libras.

Quint.	*Arrob.*	*Libras.*
16	3	16
9 *Pes.*	6 *rs.*	18 *mrs.*

	144			A
5	4			B
1	0	16		C
17	0	8		D
1	0	0	16	E
2	4	13	9	
1	2	6	$21\frac{1}{2}$	
5	0	9	$11\frac{1}{10}$	
5	0	9	$11\frac{1}{10}$	
5	0	9	$11\frac{1}{10}$	
1	0	1	$29\frac{21}{50}$	
	157 *Pes.*	14 *rs.*	$7\frac{11}{50}$ *ms.*	

Quint.	*Arrob.*	*Libras.*
33	3	7
4 *Pes.*	13 *rs.*	9 *ms.*

	132		
10	16	10	
2	3	6	
1	1	13	
9	0	8	25
2	2	6	$21\frac{1}{2}$
1	1	3	$10\frac{3}{4}$
5	0	4	$22\frac{11}{20}$
1	0	0	$31\frac{71}{100}$
1	0	0	$31\frac{71}{100}$
	157 *Pes.*	14 *rs.*	$7\frac{11}{50}$ *mrs.*

Multipliquense primero los 16 quintales por los 9 pesos, y el producto será 144 pesos. Para saber el valor de los 16 quintales por los 6 reales, véase que parte es 6 reales de un peso, ó de 20 reales, y respecto que es parte aliquanta, se divirà en las partes 5 y 1 aliquotas del peso, y siendo do 5 reales su quarta parte se sacará la quarta parte de 16, y será 4 pesos el valor de 16 quintales por 5 reales, y siendo un real la quinta parte de 5 reales, se sacará la quinta parte del último producto, la qual es 16 reales. Asimismo para saber el valor de 16 quintales por 18 maravedises, véase que parte es 18 maravedises de un real, ó de 34 maravedises, y respecto que es parte aliquanta se dividirá en las aliquotas 17 y 1, y siendo 17 maravedises la mitad de un real, será su valor 8 reales, mitad del producto correspondiente à un real, y sacando de este último producto el $\frac{1}{17}$ por el valor de un maravedí, es 16 maravedises, con lo que la suma de los productos A, B, C, D, E, es el producto de los 16 quintales por 9 pesos, 6 reales, y 18 maravedises.

Para saber el valor correspondiente á las 3 arrobas, se atenderá á que siendo todo el múltiplicador el valor de un quintal, y las 3 arrobas sus tres quartas partes, debe ser el valor de las 3 arrobas los $\frac{3}{4}$ de todo el multiplicador; más para mayor facilidad se dividirán las 3 arrobas en 2 y 1, y siendo 2 arrobas la mitad del quintal, será su valor la mitad del multiplicador: esto es 4 pesos, 13 reales y 9 maravedises, y él de una arroba, será la mitad de este producto: esto es 2 pesos, 6 reales, y $21\frac{1}{2}$ maravedises.

Para hallar el valor correspondiente á las 16 libras, se dividirán estas en las partes 5, 5 5 y 1, aliquotas de la arroba, y sacando por cada 5 libras la quinta parte del valor de una arroba, la qual es 9 reales y $11\frac{1}{10}$ maravedises, y por la una libra la quinta parte de uno de estos últimos productos que es un real y $29\frac{21}{50}$ maravedises, se su-

sumarán todos los productos parciales, y la suma total 157 pesos, 14 reales y $7\frac{11}{50}$ maravedises es el valor que se desea.

Exemplo IV.º

135 Se pide multiplicar 24 varas y 9 pulgadas, por 8 varas, 2 pies y 7 pulgadas.

Multiplicando las 24 varas por las 8, el producto es 192 varas quadradas. Para multiplicar las 24 varas por los 2 pies, se dividirán estos en las partes 1 y 1 aliquotas de la vara, y siendo un pie la tercera parte de la vara, se sacará la tercera parte de las 24 varas, que es 8 varas quadradas, y poniendo el mismo producto por el otro pie, se tendrán los productos correspondientes á los 2 pies por las 24 varas.

	Varas.	*Pies.*	*Pulgads.*	*Lines.*
	24	0	9	
	8	2	7	
	192			
1	8			
1	8			
6	4			
1	0	2		
1	2	2	10	4
6	1	1	5	2
3	0	2	2	7
	214	2	7	9

Para

Para hallar el valor de las 24 varas por las 7 pulgadas, se dividirán estas en 6 y 1 (tambien se pudiera dividir en 3, 3 y 1, ó en 4, 2 y 1) y siendo 6 pulgadas la mitad de un pie, será su producto la mitad del de un pie: esto es, 4 varas quadradas, y sacando de este producto la sexta parte que es 2 *pies corrientes sobre vara*, se tendrà el producto de una pulgada, que junto con el de las 6, serà la suma el producto de las 7 pulgadas por 24 varas.

	Var.	Pies.	Pulg.	Lin.	Punt.
	12	0	4	6	
	17	2	2	0	
	84				
	12				
1	4				
1	4				
2	0	2			
1	5	2	8	8	
3	1	1	5	2	
1	0	1	5	8	8
6	0	0	8	10	4
	214	2	7	9	0

Para hallar el producto de las 9 pulgadas del multiplicando por todo el multiplicador, es preciso sacar en falso el valor de un pie para sacar de este el que corresponde à las 9 pulgadas, y así siendo un pie la tercera parte de la vara, será su producto la tercera parte del multiplicador: esto es, 2 *varas quadradas*, 2 *pies*, 10 *pulgadas*, *y* 4 *lineas corrientes sobre vara*, el qual se marcarà para conocer que no se ha de sumar con los demas productos, y solo se expresa para sacar de él, el valor de las 9 pulgadas, para lo que se dividirán en las partes 6 y 3, y siendo 6 pulgadas la mitad de un pie, se sacarà la mitad del valor falso del pie, que es una vara quadrada, un pie, 5 pul-

pulgadas y 2 lineas, y se tendrà el valor de las 6 pulgadas: y siendo 3 pulgadas la mitad de 6, será su valor la mitad de este último producto, esto es 2 pies, 2 pulgadas y 7 lineas, y sumando todos los productos parciales, excepto el falso, la suma total 214 varas, 2 pies, 7 pulgadas y 9 lineas, es el producto que se desea.

ARTICULO IV.º

DEL PARTIR NUMEROS denominados.

136 PAra partir números denominados se reduce tanto el dividendo como el divisor à su última especie, y â cada uno se le pone por denominador una unidad de la especie mayor, dividida en tantas partes, como unidades tiene de la especie última á que se reduce el numerador, y partiendo el quebrado dividendo por el divisor, el cociente será èl que se busca.

Exemplo.

137 SIendo el valor de 6 quintales, 2 arrobas, y 3 libras, 26 pesos fuertes, 12 reales y seis maravedises, se desea saber quanto vale el quintal.

Reduzcase el dividendo à su última especie, reduciendo primero los 26 pesos á reales, multiplicándolos por 20, y al producto 520 se añadiràn los 12 reales, y la suma 532 reales se reducira à maravedises multiplicandolos por 34, y seràn 18088 maravedises, y añadiendoles los 6, seràn 18094 á cuyo número poniendo por denominador un peso reducido à maravedises resultará el quebrado $\frac{18094}{680}$.

Asimismo reduciendo los 6 quintales à arrobas, son 24, y añadiendoles las 2 son 26, las quales multiplicadas por 25 son 650 libras, y añadiendoles las 3 son 653, à cuyo número poniendo por denominador 100, que es un quintal reducido á libras, resulta el quebrado $\frac{653}{100}$: y partiendo $\frac{18094}{680}$ por $\frac{653}{100}$ el cociente $\frac{1809400}{444040} = 4$ pesos, 1 real, y 16 $\frac{590}{658}$ maravedises es el valor del quintal.

CAPITULO V.º

De la razon ó proporcion de la Cantidad en general.

138 *Cantidad ó magnitud, es todo aquello que puede ser ó pudiera haber sido mayor ó menor quando no en su esencia, en sus accidentes,* y de aquí nace la razon y proporcion que hay entre cantidades de un mismo genero, ó especie para averiguarla se da el método en este Capitulo, cuya inteligencia es muy útil en toda la Matemática.

DEFI-

DEFINICION.

139 *RAzon es la relacion, ó respeto que una cantidad tiene á otra de un mismo género*: como si se compara una cantidad de 8 libras de oro, à otra de 5 libras tambien de oro, se dice que la primera tiene à la segunda la razon de 8 á 5.

140 La primera cantidad que se compara se llama *antecedente*, y la segunda á quien se compara se dice *conseqüente.*

141 Si quando se comparan las cantidades se atiende á quanto excede la una á la otra, se llama *razon aritmética*: pero si se atiende á quantas veces la una cantidad contiene a la otra se dice *razon geométrica*: y asi si comparando 8 à 4 se atiende à quanto excede el 8 al 4 es razon aritmética; pero si se atiende á quantas veces el 8 contiene al 4 es razon geométrica: de esta solo hablarèmos en el presente Capitulo.

142 Si el antecedente es igual al conseqüente como en la razon de 8 à 8, se llama *razon de igualdad*: si es mayor que el conseqüente como en la razon de 12 à 7, se dice *razon de mayor desigualdad*, y si es menor como en la razon de 7 á 12, se nombra *razon de menor desigualdad.*

Los nombres que tienen las razones de desigualdad son los siguientes.

143 *Razon multiplice* se llama quando el antecedente contiene al conseqüente algun número de veces exáctamente: si lo contiene dos veces se llama *dupla*: si tres, *tripla*: si quatro, *qüadrupla*: si cinco *quintupla*, &c.: por exemplo la primera serà la de 8 á 4: la segunda la de 9 á 3: la tercera la de 16 à 4, y la quarta la de 20 á 4 &c.

si

si fueren dos razones iguales se llaman *equimultiplices.*

144 La razon puede ser *racional ó irracional,* la primera es la que se puede expresar por números como la de 7 à 4, ó de 3 á 5 &c. La segunda es la que no se puede expresar por números, como la razon que tiene 9 con el número que multiplicado por si mismo dé el producto 32, porque no hay cifra que pueda expresar este número.

145 Para denotar que una cantidad tiene razon geométrica á otra se les interpondrá dos puntos: y asi la razon de 8 á 4 se expresarà asi 8 : 4, y à la razon aritmética se le pondrà para distinguirla un solo punto, asi 8. 4.

DEFINICION II.

146 *Razones semejantes ó iguales*, si son de mayor desigualdad son aquellas cuyos antecedentes contienen à sus conseqüentes igual número de veces: y si son de menor desigualdad los antecedentes se contienen en sus consequentes igual número de veces.

COROLARIOS.

147 La razon geométrica es lo mismo que un quebrado. Porque por razon no se entiende otra cosa que quantas veces el antecedente contiene al conseqüente, ó està contenido en él: y por quebrado no se entiende otra cosa que quantas veces el numerador contiene al denominador,

dor, ó està contenido en él: luego lo mismo es razon que quebrado, y por consiguiente se puede expresar la razon en forma de quebrado, poniendo por numerador el antecedente, y por denominador el consequente: y asi la razon de $8 : 4 = \frac{8}{4}$: de que se sigue que se puede hacer con las razones las mismas operaciones que con los quebrados.

148 Las razones que son iguales á otra son iguales entre sí: porque si la razon de $8 : 4$, es igual à la de $12 : 6$ será $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$, y $\frac{10}{5} = \frac{12}{6}$; pero las cantidades iguales à una misma son iguales entre si luego sera $\frac{8}{4} = \frac{10}{5}$, y por consiguiente la misma razon tendrá el numerador 8 á su denominador 4, que el numerador 10 á su denominador 5: esto es, será $8 : 4 = 10 : 5$, que era &c.

149 De aquí se infiere que la razon que tienen dos partes aliqúotas de dos cantidades, es igual á la que tienen otras dos partes aliquotas semejantes de las mimas cantídades, porque tienen la misma razon que las cantidades de quienes son partes aliquotas.

DEFINICION III.

150 Llàmase *exponente ó denominador* de la razon geométrica el cociente que resulta partiendo el consequente por el antecedente: y asi el exponente de la razon de $12 : 4$ es $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$: el de $9 : 36$ es $\frac{36}{9} = 4$: el de $7 : 22$ es $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$.

CO-

COROLARIOS.

151 INfiérese que el consequente de toda razon es igual al producto del antecedente por el exponente: en el supuesto de que el exponente de la razon de 8 : 4 es $\frac{1}{2}$ será $4 = 8 \times \frac{1}{2}$.

152 A razones iguales corresponden exponentes iguales, y entre las desiguales la mayor tiene el exponente menor. Lo primero: la razon de 8 : 4 es igual à la de 10 : 5, porque los antecedentes de entrambas comprenden igual número de veces à sus respectivos conseqüentes. El exponente de la primera es $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$: el de la segunda es $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$: luego &c. Lo segundo: supónganse las razones de 8 : 4, y de 12 : 8, de las quales la primera es de mayor desigualdad porque el antecedente 8 comprehende dos veces al conseqüente 4, y el antecedente 12 de la segunda razon solo comprende $1\frac{1}{2}$ veces á su conseqüente 8. El exponente de la primera razon es $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$: el de la segunda es $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, mayor que el primero: luego en la comparacion de razones desiguales la menor tiene el exponente mayor.

153 La razon que tiene qualquier antecedente á su conseqüente es la misma que la que tiene la unidad al exponente: porque siendo $\frac{1}{2}$ el exponente de la razon de 8 : 4, será $8 : 4 :: 8 : 8 \times \frac{1}{2}$, y por consiguiente $\frac{8}{4} = \frac{\frac{8}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$: luego será $8 : 4 :: 1 : \frac{1}{2}$: esto es como la unidad al exponente.

El

154 El producto de los antecedentes de qualquier número de razones, tiene al producto de los conseqüentes de las mismas, la razon que tiene la unidad al producto de los exponentes de dichas razones. Sean las razones 8 : 4 y 9 : 3, cuyos exponentes son $\frac{1}{2}$ el de la primera, y $\frac{1}{3}$ el de la segunda. Por lo dicho en el corolario antecedente, resultará que $\frac{8}{4} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$ y $\frac{9}{3} = \frac{1}{\frac{1}{3}}$, y por consiguiente $\frac{8}{4} : \frac{9}{3} :: \frac{1}{\frac{1}{2}} : \frac{1}{\frac{1}{3}}$: esto es $8 \times 9 : 4 \times 3 :: 1 : \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ y hechas las multiplicaciones $72 : 12 :: 1 : \frac{1}{6}$. Y manifestandose iguales estas razones queda demostrado que él producto de los antecedentes de varias razones al producto de los conseqüentes de las mismas, es como la unidad al producto de los exponentes.

DEFINICION IV.

155 LA razon qne tiene el producto de los antecedentes al producto de los conseqüentes de qualquier número de razones, se llama *razon compuesta* de dichas razones. Si la razon es compuesta de dos, tres, quatro &c. razones iguales se llama *razon duplicada*, *triplicada*, *quadruplicada &c.* segun el número de razones que la compusieren: y las razones componentes si son dos, se llaman *subduplicadas*, si tres *subtriplicadas*, *&c.*

ESCOLIO.

156 SI un número se multiplica por si mismo el producto que resulta se llama *quadrado* del número, y si el quadrado se multiplica por el mismo número el producto que resulta se llama *cubo* de dicho número, y si el cubo se multiplica por el mismo número se dice *quadrado quadrado* del número &c.

COROLARIOS.

157 LA razon compuesta de qualquier número de razones, es igual à la que tiene la unidad al producto de los exponentes de las mismas razones § 154.

158 Las razones compuestas de igual número de razones iguales, son iguales: porque siendo las razones de que se compone cada una iguales en número y razon, seràn los exponentes de las unas, iguales à los exponentes de las otras, y por consiguiente los productos; pero cada razon compuesta es igual á la que tiene la unidad al producto de los exponentes § 157: luego § 148 serán iguales.

159 La razon duplicada es la misma que la que tiene la unidad al quadrado del exponente de una de las razones componentes: y tambien es igual á la que tiene el quadrado del antecedente al quadrado del conseqüente de una de las razones componentes.

160 La triplicada es la misma que la que tiene la unidad al cubo del exponente de una de las razo-

zones componentes: tambien es igual à la que tiene el cubo del antecedente al cubo del consequente de una de las razones componentes. Semejantemente se debe entender de las razones quadruplicadas &c.

161 Las razones duplicadas, triplicadas &c. de razones iguales son tambien iguales § 158.

162 El exponente de la razon compuesta es el producto de los exponentes de las razones que la componen: y el de las razones duplicadas, triplicadas &c es el quadrado, cubo &c. del exponente de las razones subduplicadas, subtriplicadas &c.

163 Si hay muchas cantidades, como 2, 4, 8, 16, 32, &c. y que de ellas se formen razones, de suerte que la que es consequente de la primera razon sirva de antecedente en la que sigue, y asi succesivamente, será la compuesta de dichas razones, igual à la que tiene la primera cantidad 2 á la última 32. Porque formando las razones 2 : 4, 4 : 8, 8 : 16, 16 : 32: será la compuesta $\frac{2 \times 4 \times 8 \times 16}{4 \times 8 \times 16 \times 32}$, y partiendo el numerador y denominador de este quebrado por $4 \times 8 \times 16$, quedarà igual á 2 : 32: luego $2 \times 4 \times 8 \times 16 : 4 \times 8 \times 16 \times 32 = 2 : 32$: luego el producto de todos los antecedentes de las razones continuas, al producto de los consequentes, es como el antecedente de la primera razon al consequente de la última.

DEFINICION V.

164 PRoporcion ó *analagia*, es la semejanza ó igualdad de dos razones iguales: y *ási* siendo la razon de 9 à 3 igual á la de 12 à 4 se forma la proporcion 9 à 3 como 12 à 4, la qual en adelante se indicará asi 9 : 3 : : 12 : 4. Y si una cantidad fuere à otra segunda, como esta á la tercera: esto es siendo 16 : 8 : : 8 : 4, dicha proporcíon que se llama *continua* se suele expresar con solos tres términos anteponiendoles este signo ∺ que quiere decir que los terminos son *continuos proporcionales geomètricos*, y asi 16 : 8 : : 8 : 4 = ∺ 16 : 8 : 4

165 Constando la proporcion de dos razones, y cada razon de dos términos, la proporcion constará de quatro, de los quales el primero y quarto se llaman *extremos*, y el segundo y tercero *medios*.

166 Llàmanse terminos *homólogos ó semejantes* en la proporcion, los antecedentes de dichas razones, y tambien los conseqüentes.

167 Los términos de qualquiera proporcion se pueden comparar de siete modos sin que dexen de ser proporcionales; á saber: *directamente*, *alternando*, *invirtiendo*, *permutando*, *componiendo*, *dividiendo y convirtiendo*; pero este último modo debe entenderse de dos maneras, *convirtiendo componiendo*, *y convirtiendo dividiendo*: todo se manifiesta en el siguiente formulario.

	Antec.	Conseq.	Antec.	Conseq.	
Directamente. .	2 :	4 : :	8 :	16 . .	L
Alternando. . .	2 :	8 : :	4 :	16 . .	M
Invirtiendo. . .	4 :	2 : :	16 :	8 . .	N
Permutando. . .	8 :	16 : :	2 :	4 . .	P
Componiendo. .	2+4 :	4 : :	8+16 :	16 . .	Q
Dividiendo. . .	2−4 :	4 : :	8−16 :	16 . .	R
Convirtiendo .	2 :	2+4 : :	8 :	8+16 . .	S
	2 :	2−4 : :	8 :	8−16	

168 Comparar directamente es comparar cada antecedente á su conseqüente, ó bien la primera comparacion que se hace al tiempo de formar la analogía, como se vé en L.

Comparar alternando es comparar el antecedente de la primera razon al antecedente de la segunda, y el conseqüente al conseqüente como en M.

Comparar invirtiendo es comparar cada conseqüente à su antecedente, como se vé en N.

Comparar permutando es poner la segunda razon en lugar de la primera y esta en lugar de la segunda, como se vé en P.

Comparar componiendo es comparar la suma de antecedente y conseqüente al mismo conseqüente, como se vé en Q.

Comparar dividiendo es comparar la diferencia de antecedente y conseqüente al mismo conseqüente, como se vé en R.

Comparar convirtiendo es comparar el antecedente á la suma ó diferencia que hay entre el antecedente y conseqüente, como se vé en S.

ARTICULO I.º

DE LAS PROPIEDADES de las razones.

169 *SI hubiere muchas cantidades de una parte como* 4, 8, 16, *y otras tantas de otra como* 6, 12, 24, *y que sean proporcionales* 4: 8: : 6: 12; *y* 8: 16: : 12: 24, *digo que tambien será* 4: 16: : 6: 24.

DEMOSTRACION.

LA razon de 4: 16, es compuesta de las razones 4: 8 y 8: 16 y la razon de 6: 24 es compuesta de las razones 6: 12 y 12: 24 § 163; pero las razones que componen la primera, son iguales á las que componen la segunda: luego § 158 sera la razon de 4: 16: : 6: 24, que era &c.

Esta comparacion se llama *por igualdad ordenada.*

170 En las mismas ó semejantes cantidades, si son proporcionales de esta suerte 4: 8: : 12: 24, y 8; 16: : 6: 12 se demostrará del mismo modo que son 4: 16: : 6: 24, cuya comparacion se llama *por igualdad perturbada, ó desordenada.*

171 *Los productos que tienen producentes iguales y desiguales, tienen la misma razon que lós producentes desiguales.*

Expli-

Explicacion y demostracion.

SEan los productos $2\times4\times6$ y $4\times6\times5$, que tienen los producentes 4 y 6 iguales, y 3 y 5 desiguales, digo que serán $3\times4\times6 : 4\times6\times5 :: 3 : 5$. Porque si se parte el antecedente y conseqüente de la primera razon por el mismo producto 4×6, tendrémos $\frac{3\times4\times6}{4\times6} = 3$, y $\frac{4\times6\times5}{4\times6} = 5$: luego los expresados productos siendo iguales el primero à 3, y el segundo á 5, se hallan en la misma razon que estas cantidades.

172 *Qualesquiera dos razones tienen entre si la misma razon que tiene el producto de los términos extremos al producto de los términos medios.*

Explicacion y demostracion.

SEan las dos razones $4 : 8$ y $6 : 12$, digo que será $\frac{4}{8} : \frac{6}{12} :: 4\times12 : 6\times8$ porque si las razones $\frac{4}{8}$ y $\frac{6}{12}$ se reducen á un comun conseqüente resulta $\frac{4}{8} = \frac{4\times12}{8\times12}$ y $\frac{6}{12} = \frac{6\times8}{12\times8}$: luego en razon de igualdad seràn proporcionales $\frac{4}{8} : \frac{6}{12} :: \frac{4\times12}{8\times12} : \frac{6\times8}{12\times8} :: 4\times12 : 6\times8$, que era &c.

CO-

COROLARIOS.

173 INfierese que si los antecedentes de dos qualesquiera razones fuesen iguales, tendrá la primera razon à la segunda, la misma razon que tiene el conseqüente de la segunda al conseqüente de la primera: esto es tendrán dichas razones la razon reciproca de sus conseqüentes. Porque si las razones son las de 4 : 8, y 4 : 12 serà $\frac{4}{8} : \frac{4}{12} ::$ 4x12 : 4x8; pero 4x12 : 4x8 :: 12 : 8 § 171 : luego § 148 serà $\frac{4}{8} : \frac{6}{12} ::$ 12 : 8, que era &c.

174 Los quebrados que tienen un mismo numerador, tienen la razon reciproca de sus denominadores.

175 Si un mismo dividendo se parte por divisores desiguales, tendràn los cocientes la razon reciproca de los divisores.

176 *Si quatro cantidades son proporcionales, el producto de los tèrminos extremos es igual al de los medios: y si el producto de dos contidades extremas fuere igual al de otras dos medias serán dichas cantidades proporcionales,*

Explicacion y demostracion.

SEan proporcionales 2 : 4 : : 8 : 16, digo que serà $2x16 = 4x8$. Porque $\frac{2}{4} : \frac{8}{16} ::$ 2 x 16 : 4x8 § 172, y siendo por suposicion $\frac{2}{5} = \frac{8}{16}$ serà $2x16 = 4x8$, que era lo primero.

Digo lo segundo que si es $2 \text{ x } 16 = 4 \text{x} 8$ será 2 : 4 :: 8 : 16. Porque $\frac{2}{4} : \frac{8}{16} ::$ 2x16 : 4x8 § 172: lue-

luego siendo $2 \times 16 = 4 \times 8$, por suposicion, será $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$: esto es $2 : 4 :: 8 : 16$, que era &c.

COROLARIOS.

177 INfiérese que los productos cuyos producentes estàn en razon recíproca son iguales: esto es que si primero y quarto término están en un producto, y segundo y tercero en otro, son iguales. Porque si los productos son 4×12, y 8×6 que sean proporcionales $4 : 8 :: 6 : 12$, ó bien $4 : 6 :: 8 : 12$, ó tambien $8 : 4 :: 12 : 6$, ó $6 : 12 :: 4 : 8$, y de qualquier suerte que se comparen recíprocamente los producentes, siempre será el producto de los extremos igual al producto de los medios: esto es $4 \times 12 = 8 \times 6$, que era &c.

178 De aqui se infiere que si quatro cantidades son directamente proporcionales, lo seràn tambien alternando, invirtiendo y permutando: porque siempre resulta el producto de los extremos igual al de los medios.

179 Siendo en quatro términos proporcionales el producto de los extremos igual al de los medios, se infiere que si se parte el producto de los términos medios por qualquiera de los extremos, el cociente serà el otro extremo, y si el producto de los extremos se parte por uno de los medios, el cociente serà el otro medio: y asi siendo proporcionales $4 : 8 :: 6 : 12$, será $4 \times 12 = 6 \times 8$, y por consiguiente

$$4 = \frac{8x6}{12} : 12 = \frac{8x6}{4} : 8 = \frac{4x12}{6}, \text{y } 6 = \frac{4x12}{8},$$

que era &c.

180 En qualquiera proporcion continua el producto de los extremos es igual al quadrado del término medio: porque si son proporcionales 4 : 8 : : 8 : 16, será § 176 $4 \times 16 = 8 \times 8$ y por consiguiente $4 = \frac{8 \times 8}{16}$ y $16 = \frac{8 \times 8}{4}$

181. Infierese el modo de hallar à tres cantidades 4, 8, 16, una quarta proporcional: porque suponiendo que esta sea X, serán proporcionales 4 : 8 : : 16 : X, y por tanto $4 \times X = 8 \times 16$: luego X $= \frac{8x16}{4} = 32$, y por consiguiente para hallar una quarta proporcional a tres cantidades dadas se debe multiplicar la segunda por la tercera, y el producto partirlo por la primera, cuyo cociente serà la quarta.

182 Asimismo si à las dos cantidades 4 y 8, se ha de buscar una tercera proporcional, se formarà la proporcion 4 : 8 : : 8 : X, y por consiguiente será $4 \times X = 8 \times 8$, $X = \frac{8 \times 8}{4}$: luego partiendo el quadrado del término medio por el primer termino, el cociente será el tercero proporcional que se busca.

183 *Si quatro cantidades* 9, 4, 12, 6, *son proporcionales directamente* 8 : 4 : : 12 : 6, *lo serán*

tam-

tambien componiendo $8+4:4::12+6:6$, *dividiendo* $8-4:4::12-6:6$, *convirtiendo componiendo* $8:8+4::12:12+6$, *y convirtiendo dividiendo* $8:8-4::12:12-6$.

DEMOSTRACION.

Siendo por suposicion $8:4::12:6$ será § 176 $8\times6=4\times12$: tambien § 172 son proporcionales $\frac{8+4}{4}:\frac{12+6}{6}::8\times6+4\times6:4\times12+4\times6$; pero $8\times6+4\times6=4\times12+4\times6$ por ser $8\times6=4\times12$ y 4×6 comun en ambos; luego serà $\frac{8+4}{4}=\frac{12+6}{6}$ y por consiguiente $8+4:4::12+6:6$.

Semejantemente se demuestran las otras tres propiedades.

184 *Si de quatro cantidades la primera tiene mayor razon á la segunda que la tercera à la quarta, será el producto de la primera y quarta mayor que él de la segunda y tercera: y si el producto de la primera y quarta fuere mayor que él de la segunda y tercera, tendra una de las extremas, á qualquiera de las medias, mayor razon que la otra media à la otra extrema.*

Explicacion y demostracion.

SEan las quatro cantidades 12, 4, 6, 3 y que sea $12:4 > 6:3$, digo que será $12 \times 3 > 4 \times 6$: porque $\frac{12}{4} : \frac{6}{3} :: 12 \times 3 : 4 \times 6$ § 172; pero $\frac{12}{4} > \frac{6}{3}$ por suposicion: luego será $12 \times 3 > 4 \times 6$, que era lo primero.

Lo segundo digo, que siendo $12 \times 3 > 4 \times 6$ será $12:4 > 6:3$; porque $\frac{12}{4} : \frac{6}{3} :: 12 \times 3 : 4 \times 6$; pero por suposicion es $12 \times 3 > 4 \times 6$; luego será $\frac{12}{4} > \frac{6}{3}$ y por consiguiente $12:4 > 6:3$, que era lo segundo.

COROLARIO.

185 INfiérese que siendo $12:4 > 6:3$, será $12:6 > 4:3$ y $4:12 < 3:6$, y tambien $6:3 < 12:4$; esto es que si de quatro cantidades la primera tiene mayor razon à la segunda que la tercera à la quarta, tambien alternando tendrà la primera à la tercera mayor razon que la segunda à la quarta; è invirtiendo tendrà la segunda á la primera menor razon que la quarta á la tercera; y permutando la tercera á la quarta menor razon que la primera à la segunda.

186 *Si de quatro cantidades la primera tiene mayor razon á la segunda que la tercera á la quarta, tambien la compuesta de primera y segunda tendrá á la segunda mayor razon que la compuesta de la tercera y quarta á la quarta.*

Explicacion y demostracion.

SEa $12:4 > 6:3$, digo que será $12+4$:

$> 6 + 3 : 3$; porque $\frac{12 + 4}{4} : \frac{6 + 3}{3} :: 12 \times 3 + 4 \times 3 : 4 \times 6 + 4 \times 3$; pero $12 \times 3 + 4 \times 3 > 4 \times 6 + 4 \times 3$, por ser $12 \times 3 > 4 \times 6$ por suposicion, y 4×3 comun en ambos: luego será $\frac{12 + 4}{4} > \frac{6 + 3}{3}$, y por consiguiente $12 + 4 : 4 > 6 + 3 : 3$, que era &c.

187 Del mismo modo se demuestra que el exceso de la primera y segunda tiene á la segunda, mayor razon que el exceso de la tercera y quarta á la quarta. Asimismo se demuestra que la primera tiene à la suma de la primera y segunda, mayor razon que la tercera á la compuesta de la tercera y quarta: y que la primera tiene a la diferencia de primera y segunda, menor razon que la tercera al exceso de tercera y quarta.

188 *Si varias cantidades son proporcionales en una misma razon, será la suma de los antecedentes à la suma de los conseqüentes, como un solo antecedente, á un solo conseqüente. Y tambien será la diferencia de los antecedentes á la de los conseqüentes, como un solo antecedente, á un solo conseqüente.*

Explicacion y demostracion.

Sean proporcionales $16 : 8 :: 12 : 6 :: 4 : 2$, digo que será $16 + 12 + 4 : 8 + 6 + 2 :: 16 : 8$. Porque $\frac{16 + 12 + 4}{8 + 6 + 2} : \frac{16}{8} :: 16 \times 8 + 12 \times 8$

$+ 4 \times 8 : 8 \times 16 + 6 \times 16 + 2 \times 16$ § 172; pero por suposicion es $16 \times 6 = 8 \times 12$, $16 \times 2 = 8 \times 4$; luego será $16 \times 8 + 8 \times 12 + 8 \times 4 = 16 \times 8 + 16 \times 6 + 16 \times 2$ por tener 16×8 comun, y por consiguiente $\frac{16 + 12 + 4}{8 + 6 + 2} = \frac{16}{8}$ y $16 + 12 + 4 : 8 + 6 + 2 :: 16 : 8$, que era &c.

Digo lo segundo que $16 - 12 - 4 : 8 - 6 - 2 :: 16 : 8$. Porque $\frac{16 - 12 - 4}{8 - 6 - 2} : \frac{16}{8} :: 16 \times 8 - 12 \times 8 - 4 \times 8 : 16 \times 8 - 16 \times 6 - 16 \times 2$; pero $16 \times 8 - 12 \times 8 - 4 \times 8 = 16 \times 8 - 16 \times 6 - 16 \times 2$ por lo dicho; luego será $\frac{16 - 12 - 4}{8 - 6 - 2} = \frac{16}{8}$, y por consiguiente $16 - 12 - 4 : 8 - 6 - 2 :: 16 : 8$.

CAPITULO VI.º

DE LA FORMACION DE *las potestades y extraccion de sus raices.*

DEFINICION I.

179 POtestad ó *potencia* de un número es qualquier producto de los que salen de

de la multíplicacion continua de dicho número por si mismo: por lo que las potestades se distinguen con diferentes nombres: por exemplo, si el número 6 se considera como una cantidad, y no como producto de otra ú otras cantidades se llama *potestad primera ó ráiz* de las potestades que de ella pueden salir. Si dicho número 6 se multiplica por si mismo, el producto 36 que resulta se llama *segunda potestad, potencia ó grado del número* 6, ó bien su *quadrado*, y si este se multiplica por su raiz 6, el producto 216, que resulta se llama *cubo*, ó *tercera potestad* de dicho número 6, y si succesivamente se vá multiplicando el último producto por su raiz se tendrá la quarta, quinta y demàs potestades à que se dan diversos nombres; mas para evivar confusion llamarémos á la primera *raiz*, á la segunda *quadrado*, y á la tercera *cubo*: no siendo de nuestro intento la denominacion de las potestades succesivas.

190 Lo que se ha dicho del número 6 se debe entender de otro qualquiera. En la siguiente tabla se contienen las tres primeras postetades succecivas de las nueve cifras generales, que se deben tener muy presentes para obrar con acierto quando se explique la extraccion de las raices de las expresadas potestades.

 Tabla

Tabla de las Potestades.

Primera potestad ó raiz.	Segunda potestad ó quadrado.	Tercera potestad ó cubo.
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

DEFINICION II.

191 LAs potestades se dividen en *racionales* ó *comensurables*, y en *irraciones* ó *incomensurables*, las primeras son las que tienen raiz justa que se puede expresar por números, como todas las contenidas en la tabla, y las que resultan de la multiplicacion continua de qualquier número por si mismo: y las segundas son aquellas que carecen de raiz justa, ó que no se puede expresar por números, como 32 si considera como quadrado; pues no hay número entero ni quebrado que multiplicado una vez por si mismo dé el producto 32, ó como 400 si se considera cubo; pues tampoco hay número que multiplicado por sí mismo,

mo, y el producto vuelto á multiplicar por el mismo número de 400, y asi de otros.

ESCOLIO.

192 EN qualquier quadrado irracional hay siempre comprendido un quadrado menor que tiene raiz justa ó racional, y asi la raiz quadrada racional de 5 es 2, cuyo quadrado es 4 menor que 5. Tambien la raiz quadrada racional de 26 es 5, cuyo quadrado es 25; por lo que quando sè haya de sacar la raiz quadrada de algun quadrado irracional como 32, quiere decir que se saque aquella raiz del mayor quadrado que está contenido en 32, y que tenga raiz justa el qual es 25, cuya raiz justa es 5. Lo mismo se debe entender para la extraccion de la raiz cubica, ó tercera potestad irracional.

ARTICULO I.º

DE LAS PROPIEDADES *de la segunda potestad ò quadrado y de la tercera ò cubo.*

193 *SI qualquier cantidad se divide como quiera en dos partes, será el quadrado de la toda igual á los quadrados de las partes y á dos pro-*

ductos de las mismas partes. Asimismo el cubo de la toda es igual à los cubos de las partes, mas á un producto del triplo del quadrado de la primera parte por la segunda, y mas à otro producto del triplo del quadrado de la segunda parte por la primera.

Explicacion y demostracion.

SEa la cantidadad $24 = 20 + 4$: digo que es $24^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 4 + 4^2$. Porque siendo $24 = 20 + 4$, si cada parte de la igualacion se multiplica por si misma resulta $24^2 = 20^2 + 20 \times 4 + 20 \times 4 + 4^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 4 + 4^2$.

Del mismo modo será $24^3 = 20^3 + 3 \times 20^2 \times 4 + 3 \times 20 \times 4^2 + 4^3$. Porque si cada uno de los términos del quadrado $24^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 4 + 4^2$ se multiplica por su raiz, resultará el cubo § 190; pero multiplicando en efecto $24^2 \times 24 = (20^2 + 2 \times 20 \times 4 + 4^2) \times (20 + 4)$ resulta $24^3 = 20^3 + 2 \times 20^2 \times 4 + 20 \times 4^2 + 20^2 \times 4 + 2 \times 20 \times 4^2 + 4^3 = 20^3 + 3 \times 20^2 \times 4 + 3 \times 20 \times 4^2 + 4^3$: luego &c.

NOTA.

De esta proposiciou sc deduce la siguiente tabla en la qual se manifiestan los productos que forman las potestades succesivas de un binomio ó cantidad compuesta de dos términos, hasta la tercera, los quales sirven de fórmula para formar las potestades de qualquier polinomio ó cantidad compuesta de muchos términos; y tambien para extraer sus raices, cuyo uso será freqüente en este capitulo.

TA-

TABLA DE LAS POTESTADES.

$$24 = 20 + 4 = 24.$$

$$24^2 = (20+4)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 4 + 4^2 = 400 + 160 + 16 = 576.$$

$$24^3 = (20+4)^3 = 20^3 + 3 \times 20^2 \times 4 + 3 \times 20 \times 4^2 + 4^3 = 8000 + 4800 + 960 + 64 = 13824.$$

Se omiten las demas potestades por no ser al intento de nuestro objeto.

COROLARIOS.

195 POr lás fórmulas que anteceden pueden deducirse las correspondientes à un trinomio ó polínomio qualquiera, considerandolo como si fuese binomio, á cuyo fin se considerara reducido à dos términos, tomando por uno solo dos ó mas cantídades: por exemplo, si se quiere el quadrado del número 364 que es un trinomio compuesto de las tres cantidades $300 + 60 + 4$, se tomarán los dos primeros términos por uno solo, y se elevará dicha cantidad à la segunda potestad como si solo constase de dos términos: á saber $(300 + 60) + 4$, y asi sera $(364)^2$ $((300 + 60) + 4)^2 = (300 + 60)^2 + (2 \times (300 + 60)) \times 4 + 4^2$, y haciendo las multiplicaciones efectivas se tendrà $364^2 = 90000 + 3600 + 36000 + 2880 + 16 = 132496$, de que se infiere que el quadrado de todo número que conste de unidades, decenas y centenas, se compone del quadrado de las centenas, mas un producto del duplo de las centenas

por las decenas, mas el quadrado de las decenas, mas otro producto del duplo de las decenas y centenas por las unidades, y mas el quadrado de las unidades.

196 Si se quiere el cubo del mismo número 364, se considerará como antes dividido en dos términos de los quales será el primero $(300+60)$ y el segundo 4, y elevando este binomio á la tercera potestad por el mètodo explicado en su fórmula respectiva, se tendrá el cubo de $((300+60)+4)^3$, cuyos productos parciales son los siguientes: $(300+60)^3 = 27000000 + 16200000 + 3240000 + 216000 = 46656000$: $(3\times(300+60)^2)\times 4 = (3\times(90000+36000+3600))\times 4 = 1080000$ $432000 + 43200 = 1555200$: $(3\times(300+60))\times 4^2) = (900+180)\times 16 = 14400 + 2880 = 17280$: y $4^3 = 64$ y por consiguiente $(300+60)^3 + (3\times(300+60)^2)\times 4 + (3\times(300+60))\times 4^2 + 4^3 = 46656000 + 1555200 + 17280 + 64 = 48228544$ de que se infiere que el cubo de todo número que consta de unidades, decenas y centenas se compone de los productos siguientes: primero el cubo de las centenas: segundo el triplo del quadrado de las centenas por las decenas: tercero el triplo de las centenas por el quadrado de las decenas: quarto el cubo de las decenas: quinto el triplo de las decenas y de las centenas por las unidades: sexto el triplo de las centenas y decenas por el quadrado de las unidades: septimo el cubo de las unidades.

197 Si se compusiese de quatro ó mas términos el polinomio se considerarà dividido igualmente en dos términos tomando dos de los quatro en cada uno: por exemplo, si fuere 3664 se tomará por el primer término $3000+600$, y por el segundo $60+4$, y lo mismo se entenderà si fuere de cinco

co ó mas términos el polinomio ; pero estos exemplares que sirven para manifestar los términos de que consta cada potestad, no se aplicaràn en la pràctica comun de la Aritmética numeral de que tratamos, y se elevarán las cantidades à las potencias respectivas, multiplicandolas por su raiz el número de veces que corresponda à su exponente como antes se dixo.

198 *Si á un quadrado se le añade el duplo de su raiz y la unidad, se tendrà el quadrado próximo mayor: y si se le resta el duplo de su raiz menos la unidad, se tendrá el próximo menor.*

Asimismo si á un cubo se le añade el triplo del quadrado de la raiz, mas el triplo de la raiz, y la unidad, se tendrà el cubo proximo mayor: y si se le resta el triplo del quadrado de la raiz y la unidad, y al residuo se añade el triplo de la raiz, se tendrà el próximo menor.

Explicacion y demostracion.

199 SEa el quadrado $16 = 10 + 6$ cuya raiz es 4: digo que si se le añade $8 + 1$ que es el duplo de su raiz, y la unidad, se tendrá $16 + 8 + 1 = 25$ quadrado próximo mayor de 16. Porque siendo 4 la raiz de 16 será $4 + 1$ raiz del quadrado próximo mayor que 16; pero si $4 + 1 = 5$ se quadra, resultará el quadrado 25, cuya raiz es $5 = 4 + 1$: luego añadiendo al quadrado, dado el duplo de su raiz mas la unidad se tendrà el quadrado próximo mayor.

200 Digo lo segundo que si á $4^2 = 16$ cuya raiz es 4, se le restan 8, duplo de su raiz, y al residuo $16 - 8 = 8$ se le añade la unidad, la suma $16 - 8 + 1 = 9$ es el quadrado próximo menor de 4^2. Porque siendo 4 la raiz de 4^2, serà $4 - 1 = 3$ la raiz del quadrado 9 próximo menor del quadrado 16; pero quadrando $4 - 1 = 3$ resulta 9 quadrado menor que 16: luego &c.

201 Digo lo tercero que si à $4^3 = 64$ cuya raiz es 4, se añaden $3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1$, es decir el triplo del quadrado de la raiz, mas el triplo de la raiz, y mas la unidad, la suma $4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1 = 125$ es el cubo próximo mayor de 4, ó bien la raiz de 5^3. Porque siendo 4 la raiz de 64, serà $4 + 1$ la raiz del cubo próximo mayor; pero cubicando $4 + 1 = 5$ resulta el cubo 125: luego si á qualquiera cubo se añade el triplo del quadrado de su raiz, mas el triplo de la raiz, mas la unidad, la suma dara el cubo próximo mayor, que era &c.

Semejantemente se demuestra la quarta propiedad què se ha propuesto.

202 *Si qualquiera dos potestades de un mismo grado se multiplican entre si, será el producto una potestad de dicho grado, cuya raiz será el producto de las raices de las potestades propuestas.*

Expli-

Explicacion y demostracion.

SEan las dos potestades $3^3 = 27$ y $4^3 = 64$, digo que el producto $3^3 \times 4^3$ es una potestad del mismo grado cuya raiz es $3 \times 4 = 12$ producto de las raices de los cubos 27 y 64 propuestos. Esto es tan manifiesto que no necesita de mas demostracion que ver que $3 \times 4 = 12$: y $12 \times 12 \times 12 = 1728$ asi como $3^3 \times 4^3 = 27 \times 64 = 1728$: luego &c.

ARTICULO II.º

DE LA EXTRACCION DE *las raices de las potestades numéricas.*

ADVERTENCIAS.

203 TOdo el fundamento de la operacion que se executa para extraer las raices de qualquiera potestad consiste en buscar aquellos números que multiplicados por si mismos una ò mas veces, segun la raiz que representen, componen la potestad de que son raices, y esto se consigue haciendo el escrutinio de los productos que fueron producidos para su formacion, lo que no es dificultoso, atendiendo á la tabla de las potestades, y

y à las advertencias que se daràn en este lugar. Y asi sabiendo que la segunda potestad de un binomio se compone del quadrado de la primera parte, mas de dos productos de la primera por la segunda, mas del quadrado de la segunda: se sabrà por exemplo que el quadrado de 26: esto es de 20 + 6 es igual á 400 + 240 + 36 = 676: luego si se propusiera dicho quadrado para extraer su raiz se debe hacer el escrutinio de 400 + 240 + 36: esto es del quadrado de 400 cuya raiz es 20, del duplo de 20 que es 40, multiplicado por la raiz del último quadrado 36 que es 6, y tambien de dicho quadrado: con lo que se vé que en la primera cifra 6, ó 600 de la izquierda del quadrado propuesto, está contenido el quadrado 4 ó 400, y que su raiz es 2, ó 20. Tambien se advierte que en el residuo 276 que queda restados los 400 de que se sacó la raiz, se contiene un producto formado del duplo de 20 (primera cifra hallada) por la segunda, y mas el quadrado de la segunda: esto es 240 + 36 = 276 de que se ha de sacar la segunda cifra, como se dirà en su lugar. Y lo mismo se ha de entender del cubo ó tercera potestad

207 Se debe tener de memoria la tabla de las potestades de las nueve cifras generales § 190 para obrar con desembarazo en la extraccion de las raices de las potestades que se propongan, como tambien es escolio § 192 que sirve para conocer la potestad mayor racional que se contiene en una irracional, sin cuyo conocimiento no se puede comprender la extraccion de las raices.

205 Si el número ó guarismo de una potestad no consta de mas cifras que hay unidades en su exponente, no tendrà mas que una cifra en su raiz: si en la potestad no hubiere mas cifras que el duplo

plo de las unidades de su exponente, no tendrà mas de dos cifras la raiz: y si pasare de los términos dichos, siempre tendrà una cifra mas en su raiz: como por exemplo el quadrado 100 debe tener dos cifras en su raiz, porque siendo dos las unidades del exponente, son tres las cifras de la potestad: tambien el quadrado 9801 debe tener dos cifras en su raiz, porque siendo dos las unidades del exponente, son quatro las cifras de la potestad, cuyo número no excede del duplo de las unidades del exponente: asimismo el cubo 729 debe tener una sola cifra en su raiz, por ser el número de las unidades del exponente igual á las cifras de la potestad: el cubo 970299 debe tener solo dos cifras, porque el número de estas excede à las unidades del exponente sin llegar á ser mayor que el duplo: y el cubo 1000, tambien tiene dos cifras, porque el número de las que contiene no excede del duplo de las unidades del exponente.

206 De aqui se infierc que qualquier potestad que se proponga para extraer su raiz se debe dividir de la derecha para la izquierda de tantas en tantas cifras, como unidades tenga su exponente: y que quantas divisiones se hicieren, tantas cifras tendrà su raiz, por lo que se deberá sacar de la primera division de la izquierda la primera cifra de la raiz, porque ocupando las últimas cifras de la potestad el mas alto lugar; la cifra que de ellas salga para la raiz, lo debe ocupar tambien.

207 Para la mayor seguridad se debe tener presente la fórmula correspondiente á la potestad que se proponga para extraer su raiz, considerando que la primera cifra que se saque para la raiz, representa la primera parte del binomio, y que la segunda que se busca reprenta la segunda parte: con cuyo conocimiento se comprenderá lo que se debe

debe executar para la resolucion: por exemplo si se quiere sacar la raiz quadrada de una cantidad como 1056, se tomará el formulario de la segunda potestad $20^2 + 2 \times 20 \times 4 + 4^2$, del qual sacando la primera raiz de 20^2 que es 20 queda por residuo $2 \times 20 \times 4 + 4^2$, que es de donde se ha de sacar la segunda parte, y siendo dicho residuo un producto hecho de $(2 \times 20 + 4) \times 4$, no teniendo conocido el segundo término no puede ser otro el divisor para encontrarlo que 2×20: esto es, que el divisor para encontrar la segunda cifra de la raiz, tratandose de la quadrada, no puede ser otro que el duplo de la primera cifra encontrada: por lo que en la particion se debe ir con cuidado, atendiendo siempre que al divisor le falta (en este caso) tanto como la cantidad que se busca: y asi con estas advertencias y la práctica de los exemplos, se comprenderà su esencia.

ARTICULO III.º

Del modo de extraer la raiz quadrada de un guarismo que conste de mas de dos cifras.

208 COmprendido todo lo prevenido en el articulo precedente se conseguirà extraer

traer la raiz quadrada del número que se proponga, del modo siguiente.

Exemplo I.º

209 Pidese la raiz quadrada del guarismo 1296.

Dividase el guarismo propuesto de dos en dos cifras principiando por las unidades, y respecto que este tiene dos divisiones, tendrá dos cifras en su raiz, de las quales la una ocuparà el lugar de las decenas, y la otra él de las unidades: consta de lo dicho § 206.

√	12.96	36 . . K
	9	
R . .	396	60 . . P
S . .	360	6
T . .	36	
V . .	396	
	9	

210 Principiese la operacion por la primera division de la izquierda, que en este exemplo corresponde ser el número 12: sáquese la raiz de 9, mayor quadrado racional contenido en 12, la qual es 3 que se pondrà en K por primera cifra de la raiz, que ocupa el lugar de decenas, y restando 9 de 12, queda por residuo 3, â que añadiendo las dos cifras de la segunda division, se tendrá en R 396 por residuo, de que se ha de sacar la segunda cifra de la raiz que se busca.

211 A este residuo considerado como dividendo, búsquesele su divisor que debe ser el duplo de la raiz hallada: esto es 60, y no puede ser otro,

porque el residuo R es un producto hecho del duplo de la primera cifra encontrada por la que se busca, y mas el quadrado de la que se busca, como se díxo § 207, y no teniendose esta conocida, es preciso valerse del duplo de la primera cifra encontrada, por el qual se debe hacer la particion siguiendo el tanteo prudencial. Esto entendido pártase el residuo 396 por 60, y se vé que le toca à 6, que es la segunda cifra de la raiz que se busca, la qual se pondrá al lado de la primera en K.

212 Multipliquese la segunda cifra 6 por 60 duplo de la primera, y el producto 360 se pondrà en S: colóquese baxo de este el quadrado 36 de la segunda cifra como se ve en T, y restando la suma de estos dos productos V del residuo R queda cero: con lo que se vé que el número propuesto 1296 es quadrado perfecto, y su raiz justa es la hallada 36.

Exem-

Exemplo II.º

213 PIdese la raiz quadrada del quadrado 127449.

Dividido el guarismo como se ha dicho, se conoce que habiendo tres cifras en la raiz, y siendo la primera de la derecha de unidades, serà la primera de la izquierda de centenas.

$\sqrt{}$	12.74.49	357 . . K
	9	
R . .	374	60
B . .	300	5
C . .	25	
D . .	325	
E . .	4949	700
F . .	4900	7
G . .	49	
H . .	4949	
	0	

214 Principìese la operacion por la primera division de la izquierda, que en este exemplo corresponde al número 12, del qual no siendo quadrado racional se sacará la raiz de 9, que es el mayor quadrado racional contenido en 12, la qual es 3 que se pondrà en K por primera cifra de la raiz, que ocupa el lugar de centenas, y restando 9 de 12 queda por residuo 3, á que añadiendo las dos cifras de la segunda division, se tendrà en R por residuo 374, que es de donde se ha de sacar la segunda cifra de la raiz que se busca.

215 A este residuo, considerado como dividendo, búsquesele su divisor el qual debe ser el duplo de la raiz hallada, considerada en el lugar de decenas para facilitar la operacion: esto es 60, por lo dicho § 211, y partiendo 374 por 60 se vé que aunque le podia tocar á 6, no se puede dar al cociente mas que 5, cuya cifra es la segunda de la raiz, que se pondrà en K al lado de la primera, y multiplicando por ella el divisor, el producto 300 se pondrà en B, y poniendo debaxo el quadrado de la segunda cifra encontrada, 25 como se ve en C, se sumarán los dos productos B y C: la suma D se restará de R, y al residuo E se añadiràn à continuacion las dos cifras de la última division, con lo que se tendrá en E 4949, que es de donde se ha de sacar la tercera cifra de la raiz.

216 Para hallarla se consideraràn las dos ya encontradas como si fueran una sóla ó la primera, y se harà la misma operacion que para encontrar la segunda: y así duplando 350 será su duplo 700: pàrtase pues 4949 por 700, y el cociente 7 se pondrà en K por tercera cifra de la raiz, que ocupa el lugar de las unidades: multiplíquese 7 por el divisor 700, y el producto 4900 se pondrà en F, y poniendo debaxo el quadrado de la tercera cifra 49 como se ve en G, se sumarán los productos F y G, y la suma H se restarà de E: y sino quedare residuo, como sucede en este exemplo, será el guarismo propuesto 127449, quadrado racional, y su raiz justa 357. Si quedare algun residuo se debe añadir à la raiz, poniendole por numerador de un quebrado, cuyo denominador serà el duplo de la raiz hallada mas la unidad § 199.

ES-

ESCOLIOS.

217 SI el número propuesto para sacar la raiz fuere tal que operando como se ha enseñado resultase el residuo R todos ceros, se debe poner un cero por segunda cifra de la raiz como se ve en A.

218 Quando el residuo R fuere menor que el duplo de la raiz mas la unidad, como se vé en *B*, tambien se debe poner cero por segunda cifra de la raiz, y en este caso se dirà que la raiz 60 es la del número quadrado mayor racional comprendido en el propuesto 3718, y que sobran 118 que por ser este número próximo al duplo de la raiz mas la unidad, si se toma por raiz 61 en lugar de 60, será próxima mayor; pero mas inmediata á la verdadera del número propuesto 3718.

A

$$\sqrt[2]{36.00} \;|\; 60$$

36

R . 0000

$$\sqrt[2]{37.18} \;|\; 60$$

36

B

R . 118 | 121

219 Si el guarismo que se proponga para extraer la raiz constare de mas de tres cifras en ella, se executarà del mismo modo que se ha practicado en el exemplo antecedente: pues todo consiste en considerar las cifras halladas como si fuesen una sola, ó la primera, y operar con ellas como para hallar la segunda.

ARTICULO IV.º

DEL MODO DE EXtraer la Raiz Cubica de un guarismo que conste de mas de tres cifras.

220 PAra la resolucion de este caso y de todos sus semejantes sirven de direccion los formularios de la tabla § 196 que expresan la potestad, cuya raiz se busca: pues mudamente van enseñando sus productos lo que se debe hacer, y asi se operará como sigue.

Exem.

Exemplo I.º

PIdese extraer la raiz cúbica del guarismo 46656.

221 Divídase el guarismo propuesto de tres en tres cifras principiando por las unidades, y respecto que hay dos divisiones, habrà dos cifras en su raiz, de las quales la primera ocupará el lugar de decenas, y la otra de unidades: consta de lo dicho § 206.

		L
	$\sqrt[3]{46.656}$	36
K . .	27	
X . .	19656	2790
E . .	16200	
F . .	3240	
G . .	216	
H . .	19656	
	0	

Divisor.

2700 +	90
6	36
16200	540
	270
	3240

222 Principiese la operacion por la primera division de la izquierda, que en este exemplo correponde al número 46, y por no ser cubo racional se sacará la raiz de 27, cubo mayor racional contenido en 46, la qual es 3 que se pondrà en L por la primera cifra de la raiz que ocupa el lugar de decenas, y restando 27 de 46 queda por residuo 19, al qual añadiendo las tres cifras de la segunda division, se tendrá en X 19656 por residuo, del qual se ha de sacar la segunda cifra de la raiz que se busca.

223 A este residuo, considerado como dividendo, busquesele su divisor, el qual debe ser el

tri-

triplo del quadrado de la raiz hallada, y mas el triplo de ella: esto es $2700 + 90 = 2790$: y no puede ser otro porque el residuo X esta compuesto de un producto formado del triplo del quadrado de las decenas por las unidades, mas de otro producto del triplo de las decenas por el quadrado de las unidades, y mas el cubo de las unidades, como consta del formulario de la tercera potestad § 196 y de lo dicho § 207: luego no teniendo conocidas las unidades es preciso valerse del triplo del quadrado de las decenas, mas del triplo de ellas, por el qual se debe hacer la particion, siguiendo el tanteo prudencial. Esto entendido partase el residuo 19656 por 2790, y se ve que aunque le podia caber á 7, no se puede dar al cociente mas que 6, el qual es la segunda cifra de la raiz, que se colocará en L al lado de la primera.

224 Multipliquese 2700, triplo del quadrado de la primera cifra, por 6 segunda encontrada, y el producto 16200, se pondrà en E. Multipliquese tambien 90 triplo de la primera cifra, por 36 quadrado de la segunda, y el producto 3240 se pondrà en F: agreguese á estos productos 216, cubo de la segunda cifra como se ve en G, y sumando los productos E, F, G, se restará la suma H del residuo X, y sino quedare residuo alguno, como sucede en este exemplo, serà el número propuesto cubo racional.

Exem-

Exemplo II.º

225 **P**idesè la raiz cúbica del guarismo 48228544.

		A		
	$\sqrt[3]{48.228.544}$	364		
	27			
R . .	21228	2790		
B . .	16200	6		
C . .	3240		2700 + 90	
D . .	216		6	36
E . .	19656		16200	3240
F . .	01572546	389880		
G . .	1555200	4		
H . .	17280			
Y . .	64		388800 + 1080	
			4	16
K . .	1572544		1555200	17280
	0			

Dividido el guarismo propuesto de tres en tres cifras, por tener tres unidades su exponente se conoce que habiendo tres divisiones corresponden tres cifras en la raiz, y siendo la primera de la derecha, de unidades, serâ la primera de la ízquierda de centenas.

226 Principiese la operacion por la primera division 48, y no siendo este número cubo racional, busquese el cubo mayor racional contenido en él, que es 27, cuya raiz es 3 que se pondrá en A por primera cifra de la raiz que ocupa el lugar de centenas, y restando 27 de 48 queda el residuo 21, al qual añadiendo la segunda division 228 se tendrà en R 21228 de que se ha de sacar la segunda cífra de la ráiz.

227 Para encontrarla se partirá 21228 por el triplo del quadrado de la primera cifra encontrada considerada en el lugar de decenas, y mas el triplo de ella: esto es por 2700 + 60 = 2790, por lo dicho § 223, y haciendo el tanteo prudencial es el cociente 6 que se pondrá en A, por segunda cifra de la raiz.

228 Multipliquese 2700 por 6, y el producto 16200 se pondrá en B: multipliquese tambien 90 por 36, y el producto 3240 se pondrá en C: agreguese á estos productos el cubo 216 de la segunda cifra, como se ve en D, y sumando los tres productos parciales B, C y D, se restarà la suma E de, 21228, que hay en R, y al residuo 1572 se añadirà à continuacion la tercera division, con lo que se tendrà en F 1572544 de que se ha de sacar la tercera cifra de la raiz.

229 Para encontrarla se deben considerar las dos cifras halladas, como si fueran una sola ó la primera, y en esta consideracion se practica la óperacion como para encontrar la segunda: y asi entendido esto, pártase el residuo F = 1572544 por el triplo del quadrado de 360, mas el triplo de 360, que son las dos cifra halladas tomadas como

como una sola ó la primera, y consideradas en lugar de decenas: esto es por 388800 + 1080 = 389880, y haciendo el tanteo prudencial es el cociente 4, cifra tercera de la raiz, que se pondrá en A.

230 Multipliquese 388800 por 4, y el producto 1555200 se pondrá en G: multipliquese tambien 1080 por 16, quadrado de la tercera cifra, y el producto 17280 se pondrá en H: añádase à estos productos el cubo de la tercera cifra que es 64, como se ve en Y, y sumando los productos parciales G, H, Y, si la suma K fuere igual al residuo F, como lo es en este exemplo, se dirá que el guarismo propuesto 48228544 es cubo racional, y su raiz justa es 364. Pero si restando la suma K del residuo F quedare alguna cantidad, se debe añadir à la raiz, poniendola por numerador de un quebrado, cuyo denominador serà el triplo del quadrado de la raiz hallada, mas el triplo de la misma, y mas la unidad § 201.

Semejantemente se operará, aunque el guarismo conste de mas de tres cifras en la raiz.

ESCOLIOS.

231 SI el número propuesto para extraer la raiz fuese tal que operando como se ha enseñado resultase el residuo R todo ceros, se debe poner cero por segunda cifra de la raiz como se ve en A.

232 Quando el residuo R fuere menor que el triplo del quadrado de la raiz hallada, mas el triplo de la misma, y mas la unidad, como se ve en C, tambien se debe poner cero por segunda cifra de la raiz, y en tal caso se dirá que la raiz 60, es la del número cúbico próximo menor que el propuesto 225256, y que sobran 9256, cuya cantidad añadida á la raiz, puesta por numerador de un quebrado, y por denominador el triplo del quadrado de 60, y mas el triplo de 60, con la unidad: esto es $10800 + 180 + 1 = 10981$ será $60 + \frac{9256}{10981}$ la raiz mas próxima à la verdadera § 201.

A

$\sqrt[3]{216.000}$ | 60

216

R . . 0000

$\sqrt[3]{225.256}$ | $60 + \frac{6}{10981}$

216

C

R . 9256 | 10981

ARTICULO V.º

Del modo de extraer la raiz de los quebrados.

233 ASI como multiplicando una cantidad por si misma produce su quadrado, y este multiplicado por la misma cantidad produ-

ce su cubo, del mismo modo multiplicando un quebrado por si mismo produce su quadrado, y este multiplicado por el mismo quebrado produce su cubo &c. Y asi entendido esto, es facil la extraccion de las raices de los quebrados, pues solo consiste en sacar la raiz que se pide tanto del numerador, como del denominador del quebrado propuesto: y asi si se quiere la raiz quadrada del quebrado $\frac{4}{25}$, sacando la raiz del numerador es 2, y la del denominador es 5, con lo que el quebrado $\frac{2}{5}$ es la raiz quadrada del quebrado propuesto.

234 Si se quiere la raiz cúbica del quebrado $\frac{729}{1000}$, sacando la raiz del numerador es 9, y la del denominador es 10, con lo que el quebrado $\frac{9}{10}$ es la raiz cúbica del quebrado propuesto.

235 Muchos quebrados se presentan que parecen irracionales; pero reducidos à la menor expresion resultan racionales: como si se pide la raiz quadrada del quebrado $\frac{8}{18}$ en que se ve que tanto el numerador 8 como el denominador 18 son irracionales, y que si se reduce á la menor expresion resulta el quebrado racional $\frac{4}{9}$, cuya raiz quadrada es $\frac{2}{3}$ la que lo es tambien del quebrado $\frac{8}{18}$. Porque siendo $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ la raiz quadrada de este lo será igualmente del otro.

236 Tambien si se pide la raiz cúbica de $\frac{24}{81}$ se ve que en dicha disposicion es irracional; pero si se reduce à la menor expresion, resulta el quebrado racional $\frac{8}{27}$, cuya raiz cúbica es $\frac{2}{3}$, la que lo es tambien de su igual $\frac{24}{81}$. Y asi siempre que se proponga un quebrado para extraer de él qualquiera raiz, si se conociese que en dicha disposicion es irracional, es preciso reducirlo á la menor expresion, y si resultase racional se sacará su

raiz

raiz, y sino se expresará la raiz de otro modo, que es por aproximacion, como se explicara en el articulo siguiente, ó con el signo radical, como se manifestarà en los escolios del mismo.

237 Si la raiz que se ha de sacar fuere de entero y quebrado, se reducirá el entero á la especie del quebrado, y del quebrado impropio que resulte se sacará la raiz que se pide: por exemplo si se pide la raiz quadrada de $6\frac{1}{4}$, se reduciran los 6 enteros á la especie del quebrado, y sumado con él resulta $\frac{25}{4}$, cuya raiz quadrada es $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$: y asi de otros.

ARTICULO VI.º

DEL MODO DE APROXI-*mar quanto se quisiere las raices irracionales.*

238 YA se sabe que la raiz irracional es la que no se puede expresar por número entero ni quebrado, como la raiz cúbica de 9, que es mas que dos, y no se puede expresar la justa; pero no obstante se puede aproximar à la verdadera quanto se quisiere, cuyo método es el siguiente.

239 Despues de sacada la raiz de la potestad racional contenida en la propuesta se añadirán al residuo tantos ceros como hay unidades en el exponente de la potestad, cuya raiz se quiere aproxi-

mar:

mar : esto es lo mismo que decir que en la segunda potestad se multiplique el último residuo por el quadrado 100, y en la tercera por el cubo 1000 &c. Y à este residuo aumentado, se le buscarà la segunda cifra de la raiz correspondiente à la potestad de que se busca (suponiendo ser la primera cifra, la cifra ó cifras proximamente halladas) la qual se pondrá por numerador de un quebrado, cuyo denominador será la raiz de la potestad que multiplicó al ùltimo residuo.

Exemplo.

SE pide la raiz quadrada del quadrado irracional 74.

Dígase, el quadrado mayor racional contenido en el irracional 74 es 64, cuya raiz es 8 y sobran 10 : multiplíquese este residuo por el quadrado 100, y será el producto 1000 : búsquese á este la segunda cifra de la raiz, suponiendo ser la primera 8, que es la raiz del quadrado racional 64, y como se considera por primera será lo mismo que 80 : doblese esta y se tendrá 160 por divisor de 1000, y buscando la segunda cifra, se hallarà que es 6, y que queda por residuo 4 : pongase la segunda cifra 6 por numerador de un quebrado, y por denominador 10, raiz quadrada de 100 que multipli-

	M	
$\sqrt[2]{74}$	$8 + \frac{6}{10}$	
64		
1000	160	
960	6	
36		
996		
4		

plicó el primer residuo, con lo que se tendrá $8 + \frac{5}{10}$, que es la raiz próxima del quadrado irracional 74, como se ve en el exemplo M.

Si se quiere aproximar mas se multiplica otra vez el último residuo 4 por el quadrado 100, y á su producto 400 se le buscarà una segunda cifra, suponiendo ser la primera 86 y que ocupa el lugar de decenas: dóblese esta, y se tendrà 1720 por divisor del dividendo 400, y como este es menor que el divisor, la cifra que se busca será cero: con lo que se concluye que la raiz aproximada en esta operacion segunda en $8 + \frac{60}{100}$, cómo se ve en el exemplo X. Y si la operacion se continuase con el residuo 400, daria la raiz aproximada en partes milésimas.

X

$8 + \frac{60}{100}$

400 } 1720

0

240 Lo que se ha practicado en la raiz quadrada se debe entender en la cúbica &c., con la diferencia de que los últimos residuos se deben multiplicar por el cubo 1000, y buscar la segunda cifra de la raiz, por las reglas dadas en sus proposiciones, advirtiendo que pueden omitirse los denominadores de los quebrados poniendo un punto despues de los números enteros de la raiz, en conformidad á lo explicado anteriormente, hablando de los decimales § 90.

241 La demostracion de esta pràctica se deduce de lo dicho § 202. Porque si el quadrado racional 9 se multiplica por el racional 100, resulta el quadrado racional 900, cuya raiz quadrada 30 es el producto de las dos raices de los quadrados propuestos: luego si este producto se parte por la raiz de 100, que es 10, dará por cociente 3, raiz del quadrado 9, y si en lugar del quadrado racional 9, se

se pone el irracional 74, será el producto de los dos quadrados 7400, cuya raiz próxima es 86 y sobran 4: luego si esta raiz 86, se parte por 10, raiz quadrada de 100, será el cociente $8 + \frac{6}{10}$ la raiz proxîma del quadrado irracional 74: luego &c.

ESCOLIOS.

242 Del mismo modo se aproxîma la raiz de los quebrados: esto es tanto del numerador, como del denominador.

243 Tambien se expresa la raiz de las potestades irracionales con el signo radical, de suerte que si se quiere expresar la raiz quadrada del quadrado irracional 5 se executa así $\sqrt[2]{5}$: si la cúbica asi $\sqrt[3]{5}$ &c, cuyas expresiones se llaman *cantidades ràdicales.*

244 Los signos radicales van acompañados con el exponente de la potestad cuya raiz expresan, y quando no llevan exponente, como $\sqrt{3}$, es lo mismo que $\sqrt[2]{3}$.

Se suprime el cálculo de los radicales por no ser al intento de este Compendio.

CAPITULO VII.º

DE LAS PROGRESIONES.

DEFINICIONES.

245 PRogresion es una serie de números que se van excediendo con alguna diferencia proporcional.

Dos generos hay de progresiones, *Aritmética*, y *Geomètrica.*

246 *Progresion Aritmètica* es qualquier número de términos continuos proporcionales en razon aritmética, como C ÷ 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. &c. y D ÷ 15, 12. 9. 6. 3. 0.

247 *Progresion Geomètrica* es qualquier número de tèrminos continuos proporcionales en razon geométrica, como A ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 &c. y B ∺ 243 : 81 : 27 : 9 : 3 : 1 : $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{9}$: $\frac{1}{27}$ &c.

Las progresiones C y A se llaman ascendentes, y las B y D descendentes.

DE LA FORMACION DE *la progresion Aritmética.*

248 PAra continuar una progresion Aritmética dado el primer término y la diferencia que han de llevar entre si los términos, añadase

dase al primero la diferencia, y la suma será el segundo: añadase â este la diferencia, y se tendrá el tercero, y así succesivamente se continuará hasta encontrar quantos términos se quisieren. Por exemplo sea el primer término 3 y la diferencia 2: luego será el segundo término 5, el tercero 7, el quarto 9, y continuando de este modo se forma la progresion A $\div$ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. &c.

249 Si la progresion se quiere descendente, se restará la diferencia del término dado, y el residuo serà el segundo término, y restando de este la diferencia se tendrà el tercero, y así succesivamente: por exemplo, sea el primer término 15 y la diferencia 2: luego serà 13 el segundo término, el tercero 11, y continuando de este modo se tendrá la progresion B $\div$ 15. 13. 11. 9. 7. 5. 3. 1. &c.

COROLARIO.

250 Infiérese que toda progresion, ó una misma progresion se puede considerar como ascendente ó como descendente. Porque la misma que es ascendente como A, invirtiendo es descendente como B, por cuya razon en el artículo siguiente tratarémos de sus propiedades, prescindiendo de si son ascendentes ó descendentes.

ARTICULO II.°

DE LAS PROPIEDADES de las progresiones.

251 La suma de los extremos en toda progresion aritmética es igual á la suma de otros dos qualesquiera términos equidistantes de los extremos. Y si la progresion fuere de términos impares, será la suma de los extremos igual al duplo del término medio, como se ve en la progresion A $\div$ 3². 5. 7. 9. 11. &c., donde se advierte que $3 + 11 = 5 + 9 = 7 + 7 = 14$, duplo de 7.

De aqui se infiere que si entre dos números se quisiere hallar un medio proporcional aritmético, será este igual á la mitad de la suma de dichos números.

252 Qualquier término restado de la suma de otros dos, dista tanto de uno de los términos sumados, quando el residuo dista del otro, como se ve en la progresion A $\div$ 3². 5. 7. 9. 11. 13: pues si se resta el segundo término 5 de la suma del primero y último que es 16, el residuo 11 dista tanto de 13 como 5 dista de 3: ó bien si se resta el término 7 de la suma de los extremos que es 16, el residuo 9 dista tanto de 13 como 7 dista de 3.

254 En toda progresion aritmética el mayor extremo es igual al producto del número de los términos menos uno, por la diferencia que llevan entre sí los términos, añadiendo à este producto el me-

menor extremo, como se ve en la progresion ÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15, en la qual si se multiplica 6, número de los términos menos uno, por la diferencia 2, y al producto 12 se le añade el menor extremo 3, la suma 15 es el mayor extremo.

254 La suma de todos los tèrminos de qualquiera progresion aritmética, es igual á la suma de los extremos multiplicada por la mitad del número de los términos, como se ve en la progresion antecedente, en la qual la suma de todos los términos es 63; pero $3 + 15 \times 3\frac{1}{2} = 18 \times 3\frac{1}{2}$, mitad del número de los términos, es tambien 63: luego &c.

ESCOLIO.

255 Teniendo presente lo dicho § 246 y los siguientes, se resolverán con facilidad los casos que vamos á proponer pertenecientes á la progresion aritmética, dando conocidas tres cosas de las cinco siguientes.

1 . . . Primer término ó menor extremo.
2 . . . Ultimo término ó mayor extremo.
3 . . . Número de los términos.
4 . . . Diferencia que llevan entre si los términos.
5 . . . Suma de todos los términos de la progresion: con cuyos datos se resuelven todas las qüestiones semejantes á las siguientes, en que se busca el término ó términos que no se conocen.

Question Primera.

256 *Dado el primer término 4, el último 28, y el*

el número de los términos 7, se pide hallar la diferencia, que llamarémos d.

Por lo dicho § 253 el último término es igual al producto del número de los términos por la diferencia, menos la diferencia, mas el primér término: luego será $28 = 7 \times d - d + 4$: luego $28 - 4 = 7 \times d - d$: luego $\frac{28-4}{7-1} = d = \frac{24}{6} = 4$.

$\div 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 .$

Por este problema se hallan quantos medios aritméticamente proporcionales se quisiere entre dos números dados.

Question Segunda.

257 *Dado el primer término* 4: *el último* 28, *y la diferencia* 4, *hallár el número de los términos, que llamarêmos* n.

Por lo dicho § 253 el último término es igual al producto de la diferencia multiplicada por el número de los términos, menos una diferencia, mas el primer término: luego será $28 = 4 \times n - 4 + 4$: luego $n = \frac{28}{4} = 7$, número de los términos de la progresion.

Question Tercera.

258 *Dado el último término* 28: *el número de los*

los términos, y la diferencia 4, hallar el primer término, que llamarémos p.

Por lo dicho § 253 el último término es igual á la diferencia multiplicada por el número de los términos, menos la misma diferencia, mas el primer término: luego $28 = 7 \times 4 - 4 + p$: luego $28 - 7 \times 4 + 4 = 28 - 28 + 4 = 4 = p$, primer término que se busca.

Question Quarta.

259 *Dado el primer término 4: el número de los términos 7, y la suma de la progresion 112, hallar el último término, que llamarémos* u.

Por lo dicho § 254 la suma de la progresion es igual à la suma del primero y ultimo término multiplicada por la mitad del número de los términos; luego será $112 = \frac{7}{2} \times 4 + \frac{7}{2} \times u$: luego $112 - 14 = \frac{7}{2} \times u$: luego $\frac{112 - 14}{\frac{7}{2}} = u$: luego $\frac{98}{\frac{7}{2}} = u = 28$, último término que se busca.

Question Quinta.

260 *Dado el último término 28, el número de los términos 7, y la suma de la progresion 112, hallar el primer término, que llamarémos* p.

Por la misma propiedad aplicada en la qüestion antecedente será $112 = \frac{7}{2} \times p + \frac{7}{2} \times 28$: luego go $112 - \frac{7}{2} \times 28 = \frac{7}{2} \times p$: luego $\frac{112 - \frac{7}{2} \times 28}{\frac{7}{2}} = p$ $= 4$, primer tèrmino que se busca.

Question Sexta.

261 *Dado el primer tèrmino* 4 : *el último* 28 , *y la suma* 112 , *se pide hallar el número de los términos , que llamarèmos* n.

Por la misma propiedad aplicada à las dos qüestiones que anteceden será $112 = 4 \times \frac{n}{2} + 28 \times \frac{n}{2}$: luego $\frac{112}{\frac{4 + 28}{2}} = n = 7$, número de los tèrminos que se busca.

Question Septima.

262 *Dado el primer termino* 4 , *el último* 28 , *y la suma* 112 , *hallar la diferencia que llamarémos* d ; *y el número de términos que llamarémos* n.

Por lo dicho § 253 el último término es igual al número de los términos multiplicado por la diferencia , menos la misma diferencia , mas el primer término. Por la qüestion primera § 257 , la diferencia es igual al último término menos el primero , partido por el número de los términos menos uno : y por la antecedente , el número de los términos es igual à la suma de la progresion partida por la mitad de la suma del primero y último término : luego go será $28 = n \times d - d + 4$: $d = \frac{28 - 4}{n - 1}$; y $n = \frac{112}{\frac{4 + 28}{2}} = \frac{112}{16} = 7$: luego substituyendo en lugar del denominador $n - 1$ de la segunda qüestion, su valor 6, serà $d = \frac{28 - 4}{6} = 4$.

Question Octava.

263 *Dado el primer término 4, la diferencia tambien 4, y el último término 28, hallar la suma de la progresion que llamarémos* s, *y el número de los términos que llamarémos* n.

Por lo dicho § 254 la suma de la progresion es igual à la suma del primero y último término multiplicada por la mitad del número de los términos, y este igual al último término menos el primero partido por la diferencia, mas la unidad: luego será $s = \frac{1}{2}n \times 4 + \frac{1}{2}n \times 28$, y $n = \frac{28 - 4}{4} + 1 = \frac{24}{4} + 1 = 6 + 1 = 7$: luego substituyendo en lugar de n su valor 7, será $s = \frac{7}{2} \times 4 + \frac{7}{2} \times 28 = 14 + 98 = 112$, suma de la progresion.

Question Nona.

264 *Dado el ultimo tèrmino* 28 , *el número de ellos* 7 , *y lá suma de la progresion* 112 , *hallar la diferencia , y el primer término que llamaremos* d , *y* p.

Por la qüestion primera § 256 el último término menos el primero partido por el número de los términos menos uno , es igual á la diferencia : y por la qüestion quinta § 260 , la suma de la progresion menos el producto del último término por la mitad del número de ellos partida por la mitad del número de los términos , es igual al primer término : luego será $\frac{28 - p}{7 - 1} = d$, y $\frac{s - 28 \times \frac{7}{2}}{\frac{7}{2}} = p = \frac{112 - 98}{\frac{7}{2}} = \frac{14}{\frac{7}{2}} = 4$: luego si en lugar de p en el numerador de la igualación antecedente , se pone su valor 4 será $\frac{28 - 4}{7 - 1} = \frac{24}{6} = 4$, valor de la diferencia.

Question Decima.

265 *Dada la suma de la progresion* 112 , *el número de los términos* 7 , *y la diferencia* 4 , *hallar el último tèrmino y el primero , que llamarémos* u , *y* p.

Por la qüestion quarta § 259 el último término es igùal á la suma de la progresion , menos el producto del primer termino multiplicado por la mitad del número de los términos , partida por la mitad

tad del número de los terminos: y por lo dicho § 253 es tambien el último término igual al número de los términos multiplicado por la diferencia, menos una diferencia, mas el primer termino: luego

será $u = \dfrac{112 - \frac{7}{2} \times p}{\frac{7}{2}}$ y $u = 7 \times 4 - 4 + p$: luego

comparando los valores del ultimo término en las dos igualaciones que anteceden, será $\dfrac{112 - \frac{7}{2} \times p}{\frac{7}{2}} = 7 \times 4 - 4 + p$, y si una y otra cantidad se multican por $\frac{7}{2}$ serà $112 - \frac{7}{2} \times p = 24 \times \frac{7}{2} + \frac{7}{2} \times p$, y si à una y otra cantidad se añade una misma como $\frac{7}{2} \times p$ será $112 - \frac{7}{2} \times p + \frac{7}{2} \times p = 24 \times \frac{7}{2} + \frac{7}{2} \times p + \frac{7}{2} \times p$, y como en la primera parte se desvanecen las dos cantidades iguales $\frac{7}{2} \times p$, sera $112 = 84 + 7 \times p$, y si de una y otra cantidad se resta 84 será $112 - 84 = 84 - 84 + 7 \times p$, y hechas las restas efectivas, resultan $28 = 7 \times p$, y partiendo una y otra cantidad por 7, será $\frac{28}{7} = p = 4$, primer término que se busca.

Hallado el valor de este primer término y substituyendole en la segunda igualacion en lugar de p serà $u = 7 \times 4 - 4 + 4 = 28$, valor del último término.

ARTICULO III.º

DE LA FORMACION DE *la progresion geomètrica.*

266 PAra formar una progresion geométrica, dado el primer término, y el denominador ó exponente de la razon que han de llevar entre sí los terminos, multipliquese el primer término por el exponente, y el producto serà el segundo término: multiplíquese este por el exponente, y el producto serà el tercer término, y así succesivamente, si la progresion se quiere ascendente.

Si se quiere descendente se partirá el tèrmino dado por el exponente, y el cociente será el segundo tèrmino: y partiendo este por el exponente se tendrà el tercero, y así de los demas. Esto se ve manifiesto en las progresiones A y B, en las quales el primer término es 8, y el exponente 2.

A ∺ 8^2 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 &c.
B ∺ 8^2 : 4 : 2 : 1 : $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{8}$ &c.

COROLARIOS.

267 EN toda progresion geomètrica el producto de los extremos es igual al producto de otros qualesquiera dos tèrminos equidistantes de los extremos.

Asímismo si la progresion constare de términos im-

impares, será el producto de los extremos igual al quadrado del término medio, como se ve en la progresion A: pues $8 \times 512 = 16 \times 256 = 32 \times 128 = 64 \times 64 = 4096$.

De aqui se infiere el modo de hallar entre dos números dados un medio proporcional geométrico: pues este será igual á la raiz quadrada del producto de dichos números. Omitirémos las propiedades restantes respecto á que para la solucion de las qüestiones que se resuelven por ellas, se hace preciso extraer las raices quarta, quinta &c. cuya explicacion no se ha dado por no ser al intento de este Compendio.

CAPITULO VIII.º

DE LA REGLA DE TRES ò de proporcion.

268 Regla de tres, ó de proporcion es aquella con que se resuelve una qüestion hallando á tres números dados un quarto proporcional.

269 La proporcion se dispone segun el sentido de la qüestion, y asi unas veces resulta *directa*, y otras *reciproca* ó *inversa*, resulta directa quando los términos que deben compararse, tienen el orden directo: esto es quando el primero es al segundo, como el tercero al quarto: y reciproca ó inversa quando el segundo es al tercero, como el quarto al primero: ó el tercero al segundo, como el primero al quarto.

270 Tanto la proporcion directa como la reciproca pueden ser *simples* ó *compuestas*: llàmase simple quando para resolver la qüestion no se necesita mas que formar dos razones: y compuesta quando es preciso formar mas de dos razones.

271 Si de los términos conocidos que precisamente se han de dar, se pidiere formar dos razones en que la incógnita èntre como antecedente ó como conseqüente, se dispondrán estas en proporcion: por exemplo si 6 ganan 3, se pregunta, 8 quanto ganaràn, en donde se conoce por *axîoma natural* que las ganancias han de ser segun los fondos ó principales, y así serán proporcionales 6 : 3 :: 8 : x, y por consiguiente será $x = \frac{3 \times 8}{6} = \frac{24}{6} = 4$.

272 Quando por crecer ó disminuir el antecedente, ó conseqüente de la razon en que se halla la incógnita respecto èl de la otra razon, se sigue que tambien la incógnita crece ó disminuye proporcionalmente, se dice que la proporcion es directa ó vulgarmente *regla de tres directa.*

273 Quando exâminando la qüestion se conoce que à mayor cantidad conocida corresponde menor incógnita, se llama la proporcion inversa, ó vulgarmente *regla de tres inversa.*

AR-

ARTICULO I.º
EN QUE SE PROPONEN *varios Exemplos de la regla de tres ó de proporcion simple.*

Exemplo I.º

274 SI con 20 doblones se ganan 56 pesos, con 24 doblones quantos pesos se ganarán?

Exâminada esta qüestion se conoce que si con 20 doblones se ganan 56 pesos, con 24 doblones se deben ganar mas pesos: y así creciendo el antecedente y conseqüente de la segunda razon respecto del antecedente y conseqüente de la primera, la proporcion es directa, y por consiguiente son proporcionales $20 : 56 :: 24 : x$: luego será $x = \frac{56 \times 24}{20} = \frac{1344}{20} = 67 + \frac{4}{20} = 67\frac{1}{5}$ que son los pesos que se habrian ganado con 24 doblones.

Exemplo II.º

275 Un comerciante en 6 meses ganó 50 doblones, y desea saber quantos doblones tendria ganados à los 4 meses.

Exâminada esta qüestion se conoce que si en 6 meses ganó 50 doblones, à los 4 meses habria ga-

ganado menos, por lo que tambien es directa la proporcion, porque el antecedente y conseqüente de la segunda razon disminuyen respecto del antecedente y conseqüente de la primera, y así son proporcionales $6 : 50 :: 4 : x$, y por consiguiente será $x = \frac{50 \times 4}{6} = \frac{200}{6} = 33\frac{1}{3}$, pesos que habia ganado en los 4 meses.

Exemplo III.º

276 Si 20 hombres abren un foso en 9 dias, 30 hombres en quantos dias lo abrirán?

Exâminada esta qüestion se conoce que si 20 hombres abren un foso en 9 dias, 30 hombres lo abrirán en menos tiempo, y así creciendo el antecedente 30 respecto del antecedente 20, y disminuyendo el conseqüente x respecto del conseqüente 9, es inversa la proporcion, por lo que es preciso mudar los antecedentes en esta forma, para resolver la qüestion: $30 : 9 :: 20 : x$, con lo que resulta $x = \frac{9 \times 20}{30} = \frac{180}{30} = \frac{18}{3} = 6$ dias que necesitan los 30 hombres para hacer la excavacion que executan los 20 hombres en los 9 dias.

Exemplo IV.º

277 En una fortaleza que tiene de guarnicion 1000 hombres, hay viveres para 6 meses, se necesi-

cesita para fortalecer otro puesto sacar de ella 400 hombres, y se desea saber para el resto quantos meses tendrán viveres?

Exâminada esta question se conoce que si 1000 hombres tienen viveres para 6 meses, 600 hombres que son los que quedan, tendrán viveres para mas tiempo: y así disminuyendo el antecedente 600 respecto del antecedente 1000, y creciendo el conseqüente x respecto del conseqüente 6, es inversa la proporcion, por lo que para resolverla se mudarán los antecedentes en esta forma $600 : 6 :: 1000 : x$ y por consiguiente serà $x = \frac{6 \times 1000}{600} = \frac{6000}{600} = \frac{60}{6} = 10$ que son los meses que necesitan los 600 hombres para consumir los viveres.

ARTICULO II.º

EN QUE SE PROPONEN varios Exemplos de la regla de tres ó de proporcion compuesta.

Exemplo I.º

278 SI 8 hombres en 5 dias abren 20 varas de foso, 12 hombres en 4 dias quantas varas de foso abrirán?

En dicha qüestion concurren quatro razones, y por consiguiente dos proporciones simples, que son, la primera: si 8 hombres abren 20 varas de foso, 12 hombres quantas abrirán? la segunda: si en 5 dias se abren 20 varas de foso, en quatro dias quantas se abrirán? cuyas dos proporciones exâminadas, se conoce que son directas, y por consiguiente la compuesta de ellas tambien es directa, y asi para su resolucion se expresará de esta forma.

Homb.	*Dias.*	*Varas.*	*Homb.*	*Dias.*	*Varas.*
8	5	20	12	4	x

$$A \ldots 40 : 20 :: 48 : x$$

$$B . x = \frac{20 \times 48}{40} = \frac{960}{40} = \frac{96}{4} = 24 \text{ varas de foso.}$$

Y multiplicando el termino primero por el segundo, y el quarto por el quinto, se forma la proporcion simple A, de la qual sacando el valor de x, es el que se manifiesta en B.

Exemplo II.°

279 Si 8 hombtes abren 20 varas de foso en 5 dias, 12 hombres para abrir 24 varas, quantos dias necesitarán?

Exâminadas las dos proporciones simples de que consta, se conoce que la primera es inversa, y la segunda directa: porque si 8 hombres abren un foso en 5 dias, 12 hombres lo abrirán en menos tiempo: y si 20 varas de foso se abren en 5 dias, 24 varas se abrirán en mas: y asi para resolver esta qüestion, es preciso mudar los antecedentes

tes de la proporcion simple inversa, que son los términos donde se halla la inversion, con lo que se expresará de esta forma.

Homb.	*Dias.*	*Varas.*	*Homb.*	*Dias.*	*Varas.*
12	20	5	8	24	x

$$A \ldots 240 : 5 :: 192 : x$$

$$B \ldots x = \frac{5 \times 192}{240} = \frac{960}{240} = \frac{96}{24} = 4 \text{ dias.}$$

Y multiplicando el término primero por el segundo, y el quarto por el quinto, resulta la proporcion simple A: de la qual sacando el valor de x, es el que se manifiesta en B.

ARTICULO III.º

EN QUE SE DA OTRO metodo de resolver las questiones proporcionales directas que tienen conexion con el tiempo.

280 SOn inumerables las qüestiones en las que se dá la *causa* y se busca el *efecto*, ó bien se dà este y se busca la causa, y como toda causa necesita tiempo para producir su efecto, se sigue que en dichas qüestiones suelen ocurrir diferen-

rentes terminos de tiempo, de cuya disposicion pende la resolucion de la qüestion, y para este fin se tendrá presente la regla siguiente.

281 Multiplíquese cada causa por el tiempo que gastó en producir el efecto, y este producto se pondrá por antecedente de una razon, cuyo conseqüente será el efecto, con lo que resultarán tantas razones iguales como causas, con las quales se formarán proporciones para determinar las causas si se dán conocidos los efectos, ó para determinar estos si se dan conocidas las causas.

282 Fundase esta regla en el axîoma fisico de *que las causas son proporcionales con sus efectos producidos en un mismo tiempo*: y así multiplicando cada causa por su tiempo resultan los efectos como producidos en un mismo tiempo, porque si una causa como a produce un efecto b en 5 dias, 5 causas iguales cada una á la causa a, produciran el mismo efecto b en un dia: y si otra causa como c, produce un efecto x en 3 dias, tres causas iguales cada una á la causa c, producirán el mismo efecto x en un dia: luego segun el axîoma fisico serán proporcionales $5a : b :: 3c : x$, y por consiguiente será $x = \frac{b \times 3c}{5a}$ con cuya inteligencia se resolverán quantas qüestiones se propongan colas siguientes.

283 Si 6 hombres en 4 dias ganan 36 pesos, 9 hombres en 6 dias quantos pesos ganarán?

En la primera parte 6 hombres es la causa, 4 dias el tiempo y 36 pesos el efecto: luego la primera razon será $6 \times 4 = 24 : 36$: en la segunda parte 9 hombres es la causa, 6 dias el tiempo y x el efecto: luego la segunda razon es $9 \times 6 = 54 : x$; pero dichas razones son iguales segun el axîoma fisico:

co: luego seràn proporcionales $24 : 36 :: 54 : x$, y por consiguienté será $x = \frac{36 \times 54}{24} = \frac{1944}{24} = 81$ pesos que ganaràn los 9 hombres en 6 dias.

284 Este metodo es general, ya sea la proporcion directa ó inversa, como se vé en la qüestion siguiente.

285 Si 6 hombres ganan 36 pesos en 4 dias, 9 hombres para ganar 81, quantos dias necesitarán?

En la primera parte segun se ha dicho resulta la razon de $24 : 36$: y en la segunda lá de $9 \times x : 81$; pero dichas razones son iguales: luego serán proporcionales $24 : 36 :: 9 \times x : 81$, y por consiguiente multiplicando extremos y medios será $1944 = 324 \times x$ y $x = \frac{1944}{324} = 6$ días que necesitan los 9 hombres para ganar los 81 pesos.

ARTICULO IV.º

EN QUE SE RESUELVEN *alguna questiones por la regla de tres ó de proporcion.*

186 AUnque de lo expresado en este capitulo se deduce el modo de resolver por tér-

términos proporcionales quantas qüestiones se propongan de esta especie, y como en la preparacion de los términos pueden ocurrir varias dificultades, se pondran algunos exemplos para que à su imitacion se resuelvan qualesquiera otros.

287 Un Negociante compró cierta mercaderia por 300 pesos, y desea saber por quanto la habrá de vender para ganar á razon de 8 por 100.

Digase: si 100 le dan 108, quanto es lo que darán 300, esto es $100 : 108 :: 300 : x$, y por consiguiente será $x = \frac{108 \times 300}{100} = \frac{32400}{100} = 324$ pesos, y por tanto la debe vender.

288 Un Negociante vendió cierta mercaderia por 324 pesos, y halló que ganaba à 8 por 100, se quiere saber quanto le costó dicha mercadería.

Fórmese la proporcion $108 : 100 :: 324 : x$: luego será $x = \frac{100 \times 324}{108} = \frac{32400}{108} = 300$ pesos, que es lo que le costó la dicha mercadería.

289 Pedro prestó à Juan 2400 reales por 8 meses à razon de 5 por 100 al año, y desea saber á quanto sube el interés.

Digase si 100 en 12 meses ganan 5, 2400 en 8 meses quanto ganarán. Multipliquese cada causa por su tiempo, y formese la razon con su efecto, y resultará la proporcion $1200 : 5 :: 19200 : x$, y por

por consiguiente será $x = \frac{5 \times 19200}{1200} = \frac{96000}{1200} = \frac{960}{12} =$ 80 reales, que es la ganancia que debe dar Juan à Pedro al fin de los 8 meses.

390 Pedro prestó à Juan 450 reales por 12 años á razon de 5 por 100 al año, y desea saber quanto le ha de volver al fin de los 12 años.

Digase si 100 en un año dan 5, los mismos 100 en 12 años quanto daràn? y resuelta la regla se hallará que los 100 en 12 años darán 60, con lo que se formará otra proporcion diciendo si 100 dan 160, que daràn los 450, y resuelta esta regla sale por quarto término 720, que son los reales que le ha de volver al fin de los 12 años.

ARTICULO V.º

EN QUE SE DA EL METODO de resolver las questiones pertenecientes á compañias.

291 LA resolucion de esta especie de qüestiones consiste en la observancia de la regla dada § 281 y los siguientes, si hubiese términos desiguales de tiempo entre los de la qüestion, y en dividir qualquier número en partes que tengan entre sí la misma razon que otros números dados, lo que se executa del modo siguiente.

292 Se ha de dividir el número 240 en tres par-

partes, de suerte que la primera á la segunda sea como 9 à 6, y la segunda à la tercera como 6 á 3.

Súmense los números 9, 6 y 3, y la suma 18 serà el primer término de cada proporcion: el segundo serà el número dado 240, y el tercero el 9, 6 y 3, cada uno de su proporcion, y así se dirá $18 : 240 :: 9 : x = 120$: fórmese otra proporcion, $18 : 240 :: 6 : z = 80$: finalmente digase $18 : 240 :: 3 : u = 40$, y los números 120, 80 y 40, son los que satisfacen.

QUESTIONES.

293 Tres Negociantes hicieron compañia: el primero puso 20 doblones, el segundo 18, y el tercero 12: ganaron 100 doblones, y desean saber quanto corresponde á cada uno.

RESOLUCION.

Negoci.	*Princi.*	*Ganan.*
1°	20	40
2°	18	36
3°	12	24
	50	100

Súmense las tres partidas, y la suma será el primer término de la proporcion, el segundo será la ganancia 100 de los tres negociantes, y el tercero será cada caudal en particular: esto supuesto digase $50 : 100 :: 20 : x = 40$, ganancia del primero: fórmese otra regla $50 : 100 :: 18 : z = 36$, ganancia del segundo: finalmente se dirá $50 : 100 :: 12 : u = 24$, ganancia del tercero, y la suma de las

las tres ganancias parciales han de componer la total ganancia 100 para que la operacion esté bien hecha.

294 Tres Negocianres pusieron en compañia 50 doblones, y al fin de ella ganaron 100: al primero le dieron por su ganancia 40 doblones: al segundo 36; y al tercero 24, se desea saber lo que puso cada uno.

Invirtiendo la regla antecedente se verá que el primero puso 20 doblones, el segundo 18, y el tercero 12.

295 Han de repartirse 4000 bombas en quatro baterias de morteros: la primera dispara al dia 70 bombas: la segunda 200: la tercera 250, y la quarta 280. Pidese saber quantas bombas han de llevarse à cada bateria para que todas se consuman à un mismo tiempo.

Súmense los números 70, 200, 250 y 280, y la suma 800 será el primer termino: el segundo será 4000, y el tercero los numeros 70, 200, 250 y 280, cada uno de su proporcion, y resolviendo la qüestion como las antecedentes se hallarán las bombas que han de llevarse á cada bateria, como se vè en el exemplo.

1.	70	350
2.	200	1000
3.	250	1250
4.	280	1400
	800	4000

296 Pedro tiene tres acreedotes: al primero debe 40 pesos: al segundo 36; y al tercero 24, solo se halla con 50 pesos, y quiere saber quanto dará à cada uno, guardando la proporcion de las deudas.

Súmense 40, 36 y 24, y la suma será el primer termino: el segundo será el haber 50, y el tercero los numeros 40, 36 y 24, cada uno de su proporcion; y resolviendo la qüestion se hallará lo que debe dar à cada uno, como se vé en el exemplo.

1°	40	20
2°	36	18
3°	24	12
	100	50

ARTICULO VI.°

DE LA REGLA DE COMpañia compuesta.

297 SI en la compañia hay tiempo, se multiplicará cada caudal por el tiempo que permaneció en la compañia, y con los productos se formarà la misma regla, ó la proporcion anterior, advirtiendo que en todos los caudales ha de ser el tiempo de una misma especie, como años, meses &c.

QUESTIONES.

298 DOs Negociantes hicieron compañia: el primero puso 320 pesos por 5 meses, y el segundo 300 por 6: ganaron 340 pesos, y desean saber lo que le corresponde á cada uno.

Mul-

1°	320	5	1600	160
2°	300	6	1800	180
			3400	340

Multiplique-se el caudal de cada uno por el tiempo que permaneció en la compañia: esto es $320 \times 5 = 1600$, y $300 \times 6 = 1800$: sumense estos dos productos, y la suma 3400, será el primer termino de cada proporcion: la ganancia 340 será el segundo; cada producto del tiempo por el caudal será el tercero de su proporcion, y los quartos términos que resulten, serà lo que á cada uno corresponde.

299 Pagaron entre quatro el precio de una lampara; el primero dió $\frac{1}{5}$ del precio; el segundo los $\frac{2}{7}$; el tercero los $\frac{3}{10}$, y el quarto 15 pesos; se desea saber el precio de la lampara.

Reduzcanse los quebrados $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{10}$ á un comun denominador, y será $\frac{1}{5} = \frac{70}{350}$, $\frac{2}{7} = \frac{100}{350}$ y $\frac{3}{10} = \frac{105}{350}$; sumense dichos quebrados, y la suma $\frac{275}{350}$ es lo que dieron los tres primeros, y por consiguiente los 15 pesos que dió el quarto será lo mismo que $\frac{75}{350}$, que es la diferencia que hay entre $\frac{275}{350}$ (parte de los tres primeros) á $\frac{350}{350}$, que es el precio total de la lampara; luego se sabrá este formando la proporcion siguiente: $\frac{75}{350} : 15 :: \frac{350}{350} : x$ (por tener los quebrados un mismo denominador) y resuelta la regla sale $x = 70$ pesos, precio total de la lampara: y por consiguiente el primero dió $\frac{70}{5} = 14$ pesos: el segundo los $\frac{2}{7}$ de 70 que son 20: el tercero los $\frac{3}{10}$ que son 21, y el quarto los 15 pesos, que todos juntos componen 70 pesos.

300 Cierto caudal se ha de repartir entres tres hermanos à razon de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$: al primero le cor-

res-

responde por su parte 900 pesos : se desea saber quanto importa todo el caudal, y la parte de los otros.

Reduzcanse los quebrados á un comun denominador, como se vé en A, y la suma de ellos $\frac{74}{120}$ es la que representa toda la hacienda, con lo que se formarà la proporcion diciendo si $\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$ dan $\frac{74}{120}$, que es todo el caudal, que darán 900 que es la parte del primero, y resuelta la regla sale por quarto término 2220, que es el valor del caudal.

	A	
30	24	20
$\frac{1}{4}$ x	$\frac{1}{5}$ x	$\frac{1}{6}$
	120	

Para saber la parte que corresponde à los otros se formaràn las proporciones siguientes : para el segundo $\frac{30}{120} : 900 :: \frac{24}{120} : x = 720$, para el tercero $\frac{30}{120} : 900 :: \frac{20}{120} : x = 600$.

CAPITULO IX.º

DE LAS ALIGACIONES.

301 *A*ligacion es una liga, mezcla ó composicion de diferentes especies, de que resulta otra especie media.

302 En toda aligacion han de concurrir á lo menos 6 términos: á saber tres especies, *mayor*, *menor y media*, representadas por sus precios ó valores, y tres cantidades, una de la especie mayor, otra de la menor, y otra de la media, y para que la mezcla resulte en la debida proporcion se han de tomar las cantidades de suerte que lá de la especie mayor tenga con là de la especie menor la mis-

misma razon que tiene la diferencia entre la menor y media con la diferencia entre la media y mayor, y para esto se resolverán las qüestiones del modo que se dirà en el articulo siguiente.

ARTICULO I.º

EN QUE SE PROPONEN varias questiones sobre la regla de aligacion.

QUESTION I.ª

303 SE han reconocido con el morterete de prueba dos calidades de pólvora; la una que arroja la bala à la distancia de 60 toesas, y la otra que con igual cantidad la arroja á la distancia de 25: se quiere con las dos hacer una mezcla que arroje la bala á la distancia de 46 toesas, y se desea saber que cantidad se ha de tomar de cada especie.

DISPOSICION.

Mayor. .	60	21	Diferencia entre la menor y media
Media.	46		
Menor. .	25	14	Diferencia entre la media y mayor.
		35	

Sáquese la diferencia que hay entre 25 y 46, y y el residuo 21 pongase al lado de la especie mayor: sàquese asimismo la diferencia que hay de la media 46 à la mayor 60, y el residuo 14 póngase al lado de la especie menor, con cuya operacion resulta que tomando 21 libras, arrobas, &c. de la especie mayor, y 14 de la menor, componen 35 de la especie media; esto es lo mismo que decir que la cantidad de pólvora que se tome de là de mayor potencia, à la que se tome de lá de menor para componer la media, ha de tener la razon que 21 diferencia entre la menor y media à 14, diferencia entre la media y mayor.

304 La razon es porque la potencia que falta á la pólvora que arroja la bala á menor distancia, para que la arroje à donde se desea, se ha de aumentar con la pólvora de mayor potencia, y así deberá tomarse de esta la cantidad que baste á suplir este defecto; asímismo lo que excede la pólvora que arroja el globo à mayor distancia, à la pólvora media que se desea, se ha de rebajar con la pólvora de menor potencia; luego se deberà tomar de esta cantidad la que baste á rebaxar este exceso; pero estas cantidades deben tener la misma razon que la diferencia entre la menor y media tiene con la diferencia entre la media y mayor; luego la resolucion de esta especie de qüestiones debe hacerse como la del exemplo propues-

COROLARIOS.

305 Infiérese que la suma de las partes componentes; esto es $21 + 14 = 35$ es igual à la diferencia entre la especie mayor y menor.

306 Infierese tambien que averiguadas del modo dicho, y terminadas las partes de la mezcla, se harà la suma del mixto, con lo que se determinaràn por términos proporcionales los quintales, arrobas &c. que se piden.

NOTA I.

Aunque el exemplo antecedente puede servir para comprender el modo de resolver las qüestiones sobre este articulo, debe advertirse que en la práctica no serà justo el resultado de las operaciones ante dichas, porque los alcances de la pólvora no guardan proporcion con las cantidades, lo que es conveniente anotar desde ahora.

NOTA II.

Quando alguna de las especies que se han de mezclar no tiene valor expreso; como quando se mezcla oro con cobre, se pondrà cero en lugar de la especie menor.

QUESTION II.ª

307 Un Platero quiere hacer 66 onzas de oro de 16 quilates mezclando cobre con oro de 22 quilates, y desea saber quantas onzas mezclarà de cobre, y quantas de oro.

RE-

RESOLUCION.

Dispuestas las especies, y hecha su resolucion como se ha dicho en el exemplo primero se ve que las onzas que se han de tomar de oro á las que se han de tomar de cobre, han de tener la misma razon que 16, diferencia entre la menor y media, á 6 diferencia entre la media y mayor; y para determinarlas se formarán las proporciones siguientes 22 : 66 : : 16 : x = 48; y 22 : 66 : : 6 : x = 18; en las quales se manifiesta que para hacer 66 onzas de oro de 16 quilates, se han de mezclar 48 onzas de oro de 22 quilates con 18 onzas de cobre.

	22	16 . . .	48
16			
	0	6 . . .	18
		22	66

QUESTION III.ª

308 De 66 onzas de oro de 16 quilates que tiene liga de cobre, se ha de hacer oro de 22 quilates; pidese quantas onzas de liga se dexarán consumir en el fuego.

Dispuestos los terminos, se harà la misma operacion antecedente de sacar las diferencias y sumarlas; y formando la proporcion si 22 suma de las diferencias dan 66 cantidad del mixto, que darán 16 diferencia entre la menor y media; y resuelta la regla, sale al quarto término 48, que son las onzas de oro que le deben quedar, para que resulten de 22 quilates; las 18 restantes deben consumirse en el fuego.

AR-

ARTICULO II.º

EN QUE SE DA EL MOdo de resolver la regla de Aligacion quando en ella se contienen mas de dos simples.

309 Quando las especies que se han de mezclar fueren mas de dos, se harán dos ó mas aligaciones, segun fuere el número de las especies que se han de mezclar, y tendrà la qüestion en semejantes casos, diferentes resoluciones: y asi para proceder con acierto se observarán las reglas siguientes.

310 Si las especies son 3 ó 4, se dividirá la cantidad de la mezcla en dos partes iguales ó desiguales: si son 5 ó 6, se dividirá en tres partes: si son 7 ú 8 en quatro &c. Con cada una de estas partes de la mezcla se aligarán dos especies, cuidando siempre que la una sea mayor, y la otra menor que la especie media, ó valor que ha de tener la mezcla, tomando si fuere necesario dos, ó tres veces una misma especie. Esto se harà manifiesto con las qüestiones siguientes.

QUESTION I.ª

311 Tiene un platero oro de 22, 20, 15 y 13

quilates, y quiere hacer 56 onzas de mezcla de 16 quilates: desea saber quanto tomará de cada especie.

RESOLUCION.

Dividanse 56 en qualesquiera dos partes, y sean en 36 y 20: hecho esto formense dos aligaciones, una por exemplo de los 22 y 13 con las 36 onzas, y se hallarà que en las 36 onzas ha de haber 12 de 22 quilates, y 24 de 13 que componen las 36 de 16 quilates.

	22	3 . . .	12
16			
	13	6 . . .	24
		9	36

Fórmese otra aligacion de los 20 y 15 quilates con las 20 onzas de mezcla; y se hallará que en las 20 onzas han de entrar 4 de 20 quilates, y 16 de 15; y asi para componer las 56 onzas de 16 quilates debe mezclar 12 de 22, 24 de 13, 4 de 20, y 16 de 15 quilates.

	20	1 . . .	4
16			
	15	4 . . .	16
		5	20

Si se multiplica 22 por 12, 13 por 24, 20 [illegible] 4, y 15 por 16, la suma de dichos productos que es 896 debe ser igual al producto de 56 por [illegible] lo que puede servir de prueba.

QUESTION II.ª

312 Se quiere hacer una mezcla de 50 onzas de oro

oro de 16 quilates con oro de 22, de 20, y de 13, quanto se tomarà de cada especie.

RESOLUCION.

Divídanse las 50 onzas en dos qualesquiera partes, y serán 36 y 14. Fórmense dos aligaciones: la una de 22 con 13, y la otra de 20 con el mismo 13, y resueltas las dos se hallarà que en las 50 onzas para que sean de 16 quilates, se han de mezclar 12 onzas de 22, 6 de 20, y á el oro de 13 quilates se ha de poner por una parte 24 onzas y por otra 8, que son 32 onzas: donde se ve que con el oro de 13 quilates se han formado dos aligaciones; y si fuera necesario se harían muchas mas.

	22	3 ...	12
16			
	13	6 ...	24
		9	36

	20	3 ...	6
16			
	13	4 ...	8
		7	14

QUESTION III.ª

313 Hay una mezcla, ó composicion de 50 onzas de oro en las que se han mezclado 8 onzas de oro de 24 quilates, $17\frac{1}{3}$ de 20, $8\frac{2}{3}$ de 8, y 16 de 12, se desea saber de quantos quilates serà la mezcla.

RESOLUCION.

Multipliquense los 24 quilates por las 8 onzas de de su valor, los 20 por las $17\frac{1}{2}$ &c. y será la suma de los productos 800: pártase 800 por 50 que es la suma de las cantidades, y el cociente 16 son los quilates de la mezcla.

NOTA.

Con las reglas dadas se pueden resolver innumerables qüestiones: solo se advierte que en algunas es preciso buscar el precio, ó valor medio antes de hacer la aligacion.

QUESTION IV.ª

314 Se han de comprar 800 fanegas de trigo por 24000 reales, y hay trigo de 35 reales la fanega, de 32, de 28 y de 24, pidese que cantidad se habrá de tomar de cada especie para que juntas compongan las 800 fanegas, y valgan los 24000 reales.

RESOLUCION.

Búsquese primero el precio medio partiendo 24000 por 800., y el cociente 30 es el precio medio que se busca, hallado este dispónganse los terminos, y hagase la aligacion como en la qüestion segunda, y quedará resuelta esta.

FIN.

ARITME
TICA