D'5
10

Analisis Geometrica.

+

Analisis Geometrica

Despues que fuere ynstruido enlos elementos Geometricos elque desea ocuparse enla geometria practica, y coger elfruto desutrauajo, debe tener algun camino prebenido parasi pormedio delqual adquiera lafuerza, y facultad deallar lasolucion dequalquier problema quelefuere propuesto.

Este camino sellama Analisis oSolucion; ycomunmte ledifinen todos destasuerte; es Vna Asuncion de cosa Buscada, asi como concedida poraquellas cosas que despues seconsiguen procedidas decosas concedidas; Pero labuelta debuscadas aconcedidas sellama Sintesis, ocomposicion; ypor que esta Asuncion de cosa Buscada asicomo concedida, nopromete cosacierta, antes alguna dificultad, que consiste enreducir lascosas dadas, ybuscadas aVna comoda contiguedad. Y puesto loque seba abuscar asi como concedido, seheligiran algunas cosas quepormedio dellas selogre el allar aquello que sedeseare saber. los antiguos autores, alaberdad noslas dejaron oscuras, de donde sucede que quando ai alguna cuestion yntrincada, yobscura, entrelas cosas dadas, ylas buscadas, el analista llega adonde sebuelbe ignorante. Confiesenlo todos pues ninguno delos antiguos seatrebiera aperfeccionarlo; Pues despues de aber Scripto tanto, y tan grandes Bolumenes de libros acerca desta materia (como lo enseña Papo del principio del lib. 7.º) no obstante, y contemos lo mas delos antiguos Sospechar de sus proposiciones que no tubieron Varon Berdadera para resolber. Pero los Modernos, y trabaladores en la Algebra especiosa paree que se adbudican a si mismos esta fuerza de resolber, o tala fuerza tan facil la geometrica demonstracion, como la resolucion Algebrica Pero dista tanto Vno de otro que es encompatible.

El Analisis Se difine asi es Vna asumcion de conceder las cosas como buscadas que pasas por necesarias Consequencias haciento, y terminado fin que se dessea.

Del fin del analisis

La resolucion de todos los problemas que se pueden proponer Se entiende desta manera, que desembueltas todas las condiciones, la magnitud yncognita Se muestre igual a otra magnitud conocida, O que solamente Sea necesario allar el medio, tercero, quarto, proporcional o dos terminos Reciprocos cuia Suma o difa, de ellos Sea conozida, O que se deduzca en el mismo, y tambien Siendo necesario mostrar, quatro, o mas terminos proporcionales Dados los extremos, Sumas difas, o productos y lo mismo delos medios, Por lo qual, y porque

acada paso ocurre deviera ser declarado
este Problema enlos elementos, porser estos
Vnos principios ciertos, y demonstrados porto-
dos paraqueria licito abstenerse delas apro
baciones comunes, yfrequentes, y respecto de
no allarse enlos elementos Sepondrá aqui
porque Setenga presente enlas operaciones
deste tratado siempre que ocurra qualquiera
enlasmas delas operaciones.

Prop.

Allar dos Rectas cuia Suma, odifª Sea
conocida Reciprocas ados Rectas dadas.

Dada lasuma
Combiene allar primero dos Rectas ax,
xb, cuia Suma dada sea la Recta ab,
Reciprocas alasdos Rectas dadas pc . cq.
Construccion
Entre pc, cq Sealle (prop. 13. lib. 6º eV.)
lamedia cd, y (prop. 11. lib. 1º eV.) Sobrela
Recta ab, dequalquiera desuspuntos extre-
mos, como delpunto b, Selebante la
perpendicular bg, laqual (prop. 3. lib. 1º,
eV.) Seponga igual ala Recta cd, y sobre
ab, dividiendola (prop. 10. lib. 1º eV.) permetad

Se descriua el semicirculo, cuio centro sea m,
y (prop. 31. lib. 1° eu) se tire gf, paralela ala
recta ab, y del punto f donde la paralela
cortare ael semicirculo, caiga (prop. 12. lib. 1°
eu) la perpendicular fx: Digo, que las rectas
ax . . xb (cuia suma es la dada ab) son
reciprocas alas dos rectas dadas pc . . cg esto
es que son proporc.; pc . . ax . . xb . . cg.

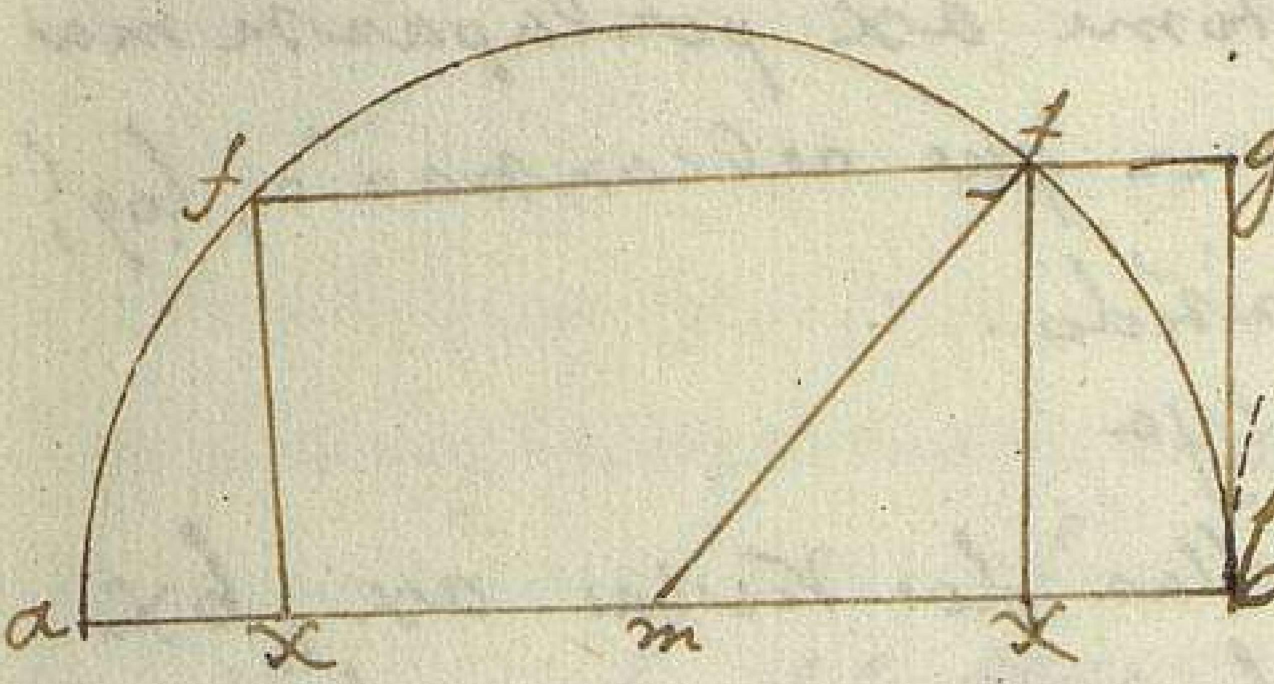
Demonstracion

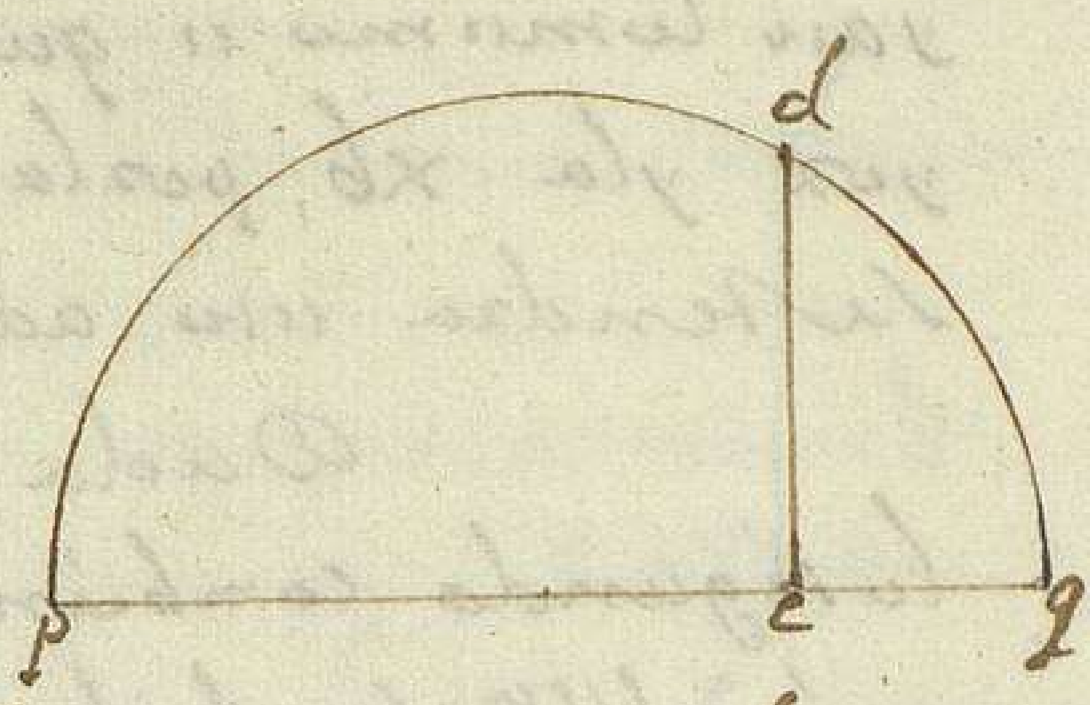
Por construccion es un paralelogramo el
quadrilatero fb. luego (prop. 34. lib. 1° eu)
fx es igual ala gb (pero esta se hizo igual
ala ala cd) luego (ax. 1° eu) fx, es igual
ala cd. pero (por construccion) son porcio-
nales las tres rectas pc . . cd . . dc . . cg
y tambien lo son ax . . xf . . fx . . xb
luego (prop. 11. lib. 5°) pc . . ax . . xb . . cg
luego (prop. 14. lib. 6° eu) las rectas ax, xb, son
reciprocas alas rectas pc, cg, que es lo que se auia
de demonstrar.

Otra demonstracion

Por quanto ab esta cortada igualmente en
m, y desigualmte. en x, (prop. 5a. lib. 2° eu)
los rectangulos son $axb + mxm \sqcap mbm$
esto es (coro. prop. 46. lib. 1°) $axb + mxm \sqcap mfm$
esto es (prop. 47. lib. 1° eu) $axb + mxm \sqcap mxm + xfx$
luego (ax. 3° eu) lo son $axb \sqcap xfx$
y (pro. 14. lib. 6° eu) son, ax . . xf . . fx . . xb

+





esto es como ansi son propor.s pc . . ax . . xb . . . cg
que es lo que hauia de demonstrar.

Determinacion

Combiene pues que la Recta cd esto es que la media proporcional entre las dos Rectas pc, cg no sea maior que la mitad de toda la Recta ab esto es que no sea maior que, mb, es a saber la mitad de la suma de las partes Reciprocas ax y xb que se buscan porque de otra manera el semicirculo afb, no cortara a la ala paralela fg y el problema fuera imposible. Y porque en la construccion es libre el continuar la paralela gf sin tocar al semicirculo esto es que prolongada la Recta gf, no corta al circulo, si solo le toca sera unica la solucion pero si le corta como al presente en los puntos f, f, se allara el que se puede responder ya por la parte mayor ax y la menor xb o ya por la parte menor ax, y la maior xb por lo qual parece responder con dos soluciones, pero en la verdad no es necesario que alternar los terminos porque siendo proporcionales los quatro terminos, pc . . ax . . xb . . cg
luego (Def.n 12. lib. 5.o e V) pc . . xb . . ax . . cg

y asi lo mismo es que se tome ax por la parte ma
yor y la xb, por la menor que al contrario, lo q
se tendrá muy adbertido.

Dada la difª

lo segundo combiene allar dos rectas ax, bx
cuia difª sea dada ab, reciprocas a las dadas
pc, cg ó a la misma cd, que es media entre
ellas.

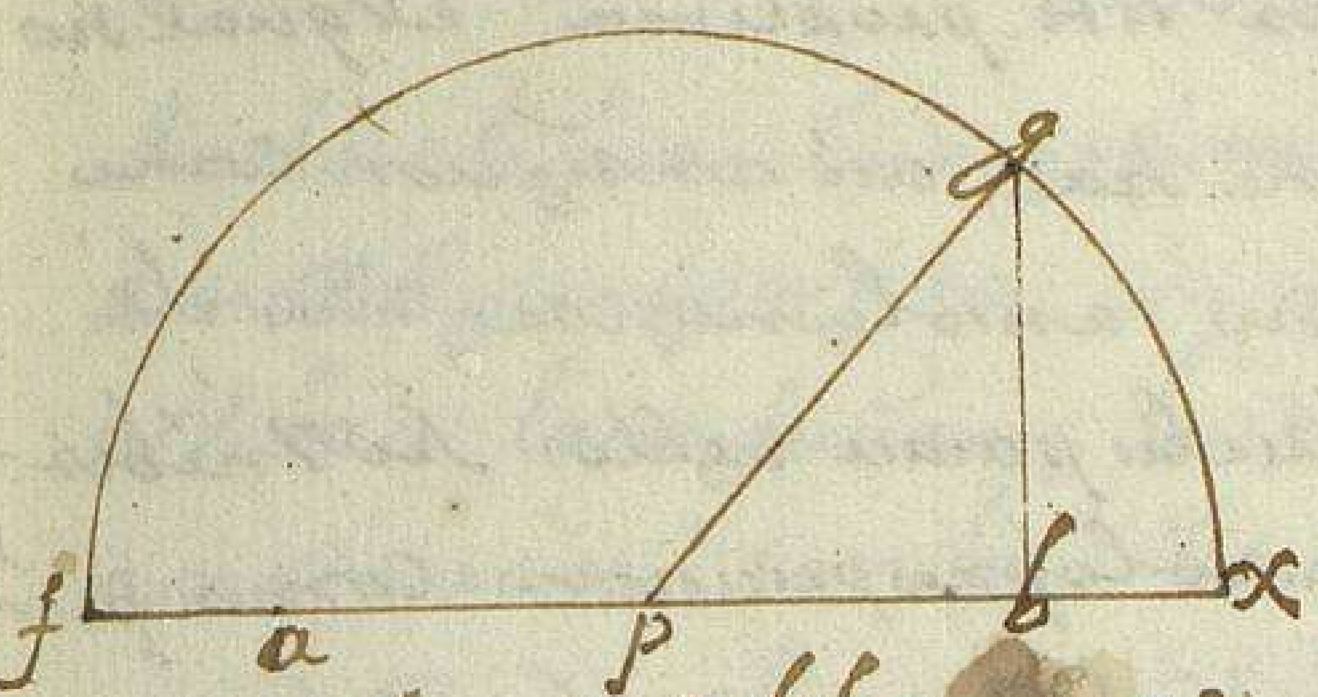
Construccion

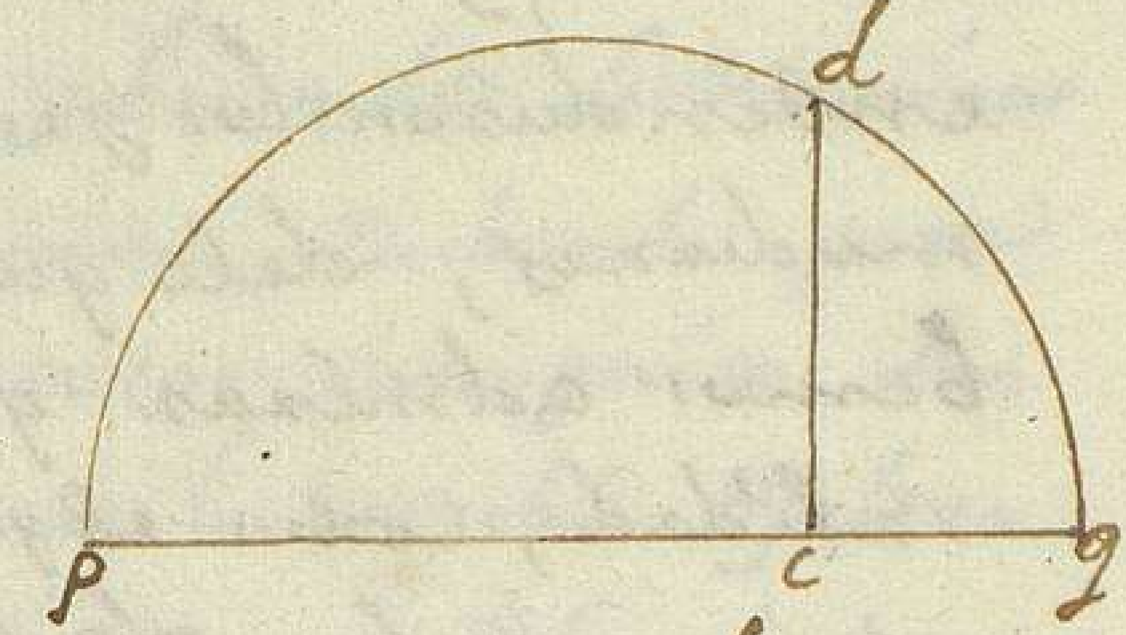
De qualquier termino como del punto b
se lebante (prop. 11. lib. 1º eu) sobre la dada ab
perpendicular bg igual a la cd, y (prop. 10
lib. 1º eu) se divida ab, en el punto, p, y
se tire la recta gp, y centro p, intervalo
pg se describa (post. 3º eu) el semicirculo fgx:
Digo, que las rectas ax, bx, cuia difª es ab,
son reciprocas a las dadas pc, cg, ó a la cd

Demonstracion

Por quanto fp, px (difª 15. lib. 1º eu) son
iguales, tambien lo serán (ax. 2º eu) fb, ax
luego el rectangulo contenido devajo de
fb y bx será igual al contenido devajo de ax
y xb pero (estos) son iguales (prop. 8ª 13, y 17
lib. 6º eu) el rectangulo al quadº, $fbx \sqcap bgb$
esto es (por ser iguales gb y cd) $fbx \sqcap cdc$
estos por las mismas lo son $pcg \sqcap cdc$
luego (ax. 1º eu) lo son . . . . . $pcg \sqcap fbx$
y (prop. 14. lib. 6º eu) proporl, pc . . fb . . bx . . cg

+





estos (prop. 7. lib. 5° e V) pc . . ax . . bx . . cq
luego las rectas ax bx cuia difª es la dada
ab son reciprocas a las dadas pc, cq, que es lo que
se havia de demonstrar.

Determinacion

Podemos tomar en la construccion las partes proporcionales en esta forma, pc . . fa . . fb . . cq de donde se ve que se puede tomar ax ya por la parte maior y la bx por la menor y al contrario fa por la parte menor y fb por la parte maior con el pasado argumento. y quedaran los reciprocos alternados en la forma q̃ se dixo antes.

Otra demonstracion

Porque ab esta dividida igualmente en p, y se le añadio bx. (por la 6ª al 2° e V) el rectangulo contenido de la toda, estos, $axb+pbp \sqcap pxp$
estos (coro. prop. 46. lib. 1° e V) $axb+pbp \sqcap pgp$
estos (prop. 47. lib. 1° e V) . . $axb+pbp \sqcap pbp+bgb$
luego (ax. 3° e V) lo son $axb \sqcap bgb$
estos son iguales los rectang.s $axb \sqcap pcq$
y (prop. 14. lib. 6° e V) propor.s pc . . ax . . bx . . cq
que es lo que se havia de demonstrar.

Scholio

De otros muchos modos (los quales omito) se podia

construir, y demonstrar este problema el qual no entendieron los geometras, asi antiguos como modernos, delo que no tansolamente nos debemos admirar que se les pasase a ellos su Vniber-salidad, como el que no lo propusiesen como principio, y Regla dela Resolucion en los Elementos.
La primera parte trae el Reberendo Padre Clabio asi como especial en la prop. 13 del lib. 6.º delos Elementos; la segunda ala berdad la podia traer con la misma facilidad sele Vbiera encontrado alguna Vtilidad.

Ynstruccion

Todo el arte analitico consiste en la Repeticion, y Reduccion delos terminos del problema de vnos a otros; hacese la Repeticion quando alguna linea, y algun angulo se muda en posicion; y la Reduccion, quando alguna magnitud ō alguna Razon se combierte en otra igual aella; Pero el quando, y como se deva hacer la Repeticion, y Reduccion lo enseña la misma necesidad como maestra de todo, y la misma naturaleza que nos lo dicta.
Y asi combiene que estemos abisados, Porque en este artificio, toda la materia desta obra, consiste Para proceder sin herrores en las Resoluciones, y asi Repetimos los terminos del problema, o los Reducimos Para sacar despues las consequencias mas comodas. y asi obserbarse los siguientes abisos.

+

Aviso 1º

Toda linea incognita, y buscada se termina en algun punto incognito, de donde para evitar la confusion, los puntos incognitos se anotaran con las ultimas letras del Alfabeto x, y, z, v, porque se distingan de los puntos conocidos como son a, b, c, d &ª, y si fuere necesidad, vn mismo punto se puede anotar en dos lineas, (si assi es) quando concurre en algunas lineas assi conocidas, como no conocidas. Assimismo, (por la brebedad) se deue vsar para las sumas, de esta señal + que quiere decir, mas, y tambien de esta señal — que quiere decir menos, para las restas.

Aviso 2º

a —— b —— c —— d

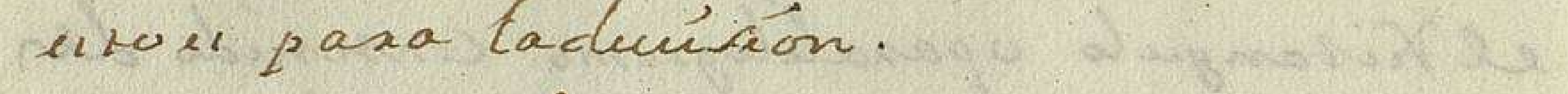
Conservamos la costumbre antigua en el nombrar las magnitudes, el rectangulo hecho de estas de las rectas ab y, bc, en qualquier angulo (esto es) el rectangulo o paralelogramo contenido de estas de las rectas ab, y bc, el qual lo escriuimos assi, abc, o tambien de este modo ab:bc (es a saber) con dos puntos en medio vno encima de otro principalmente, quando aquellas lineas rectas carecen de punto comun de estas de las quales se contiene el rectangulo o paralelogramo hecho, como si quisieremos escreuir el contenido de estas de las rectas, ab y cd, lo denotaremos por mas brebedad de este modo ab:cd, Pero el quadrado

+

y el Rombo descripto dela Recta ab, lo denotaremos así aba, y finalmente señalaremos el cubo que se ha de hazer dela misma ab de este modo ab^3 ó de este modo abab, esto es el que está hecho debaxo de las tres dimensiones iguales ab, ab, ab, ó tambien quando la dimension se suplica con una sola letra como supongamos la dimension a se suplicará su quadrado así, aa su cubo así, aaa, ó de esta manera $\overset{2}{a}$ y su cubo así $\overset{3}{a}$, y si las dimensiones siendo diferentes se suplican (Vg), las magnitudes a, b, c, & el plano de una por otra se suplica así ab, ac, bc, y el solido delas tres se suplica así abc y así delos demas porque el mapa analitico no consiente prolijidad.

Definicion 1ª

llamamos Razon adectiva cuios terminos estan dispuestos ala adicion esto es ala composicion, llamamos Razon subtractiva quando los terminos estan aptos para la subtraccion esto es para la division.



Sea la Recta ac dividida en los puntos b, y x, llamamos pues Razon adectiva, la que está entre ab y bx, porque los terminos ab y bx componen toda la Recta ax, Pero llamamos Razon subtractiva ala que está entre ax y, bx, porque los terminos ax, bx se diferencian en la Recta ab y así delas demas.

+

Aviso 3º

Si en el Analisis se guarda el horden de las lineas procederan los puntos assi como en la figura que por solo su vista se manifiesta si la razon se da adictiba, o subtractiva, y consiguientem.te si combiene componer o dividir porque en la razon ac . . ax que es subtractiva el punto comun a, necesariam.te alterna lo qual no puede suceder en la razon adictiva ab . . bx .

Aviso 4º

Combiene con la repeticion de alguno de los terminos combertir qualquiera razon de adictiva en subtractiva, o de subtractiva en adictiva.

a —— b —— c —— d

Como si quisiesemos combertir la razon adictiva entre ab . . bd, se ara bc igual ala, ab, y quedara reducida en la subtractiva bc . . bd. Y semejantemente, si la razon subtractiva bc . . bd se quiere reducir en adictiva se ara ab, igual ala bc y quedara la razon ab . . bc la misma que antes, y siempre que combenga el reducir una razon a otra se egecutara en esta misma conformidad.

Aviso 5º

Quando se propone alguna proporcionalidad insistiendo sobre alguna linea combtiene queseargumente porlas proporcionales, porquenocombiene proceder deotromodo Sinosi porlacomposicion, oporladivision, yasi Siuna, yotra razon fuere aditiva, el Analista deberà arguir componiendo oporcomposicion. Pero Siuna, yotra razon fuere Subtractiva Seargüirà dividiendo oporladivision de manera quesiempre Sirve deaquel argum.to queparesiere mas Combeniente para lacon-serbacion delos terminos conocidos. Pero Siunarazon fuere aditiva, yotra Subtrac-tiva, esta Sereduzca en aditiva ò aquella en Subtractiva paraqueuna, yotra Sean deunmismo genero loqual facilmente Seobserbaa por el precedente avisso, y Sedebe obserbar quando losterminos delarazon que Sehade reducir fuesen conocidos, perosi fue-sen incognitos, y Susuma odif.a fuese cono cida Seentenderamejor, porlas dos proposi-ciones Siguientes,

Prop.

Siuna linea recta Sedivide, igual, y desigualmente laparte intermedia es la semidif.a delas partes desiguales. a———g———m———x———b

Sea larecta ab dividida igualm.te en m, y desigualmente en x. digo quelaparte mx, es la Semidif.a delas partes ax, xb. Agase mg. igual ala mx. yporque am, y mb, Soniguales los residuos ag, xb, dedonde gx esladif.a delas partes desiguales ax, xb: luego $2mx$ es igual a la gx por lo qual mx es semidifa de las partes ax, xb. que es lo que se avia de demonstrar.

Prop

Si una linea recta se divide igualmte y se le añade otra qualquiera la compuesta de la mitad con la añadida, es la semisuma de la toda con la añadida y de la añadida

g a m b x

Sea la recta ab dividida igualmente en m, y añadasele qualquiera como bx: digo que mx es la semisuma de la compuesta ax y bx. Porque ma y mb son iguales, y haciendo ga igual a la bx quedaran mg y mx iguales y, gx igual à $2mx$ por lo qual mx, es la semisuma de la ax y bx. y la difa de la ax y bx toda la recta ab que es lo que se avia de demonstrar: de aqui se sigue el poder dar al agregado de los terminos de la razon subtractiva, y de la anterior, la difera, de los terminos de la razon aditiva. De donde serà licito arguir por la division o por la composicion como mas convenga.

Definicion 2a

llamamos razon comun ha aquella que se halla en dos proporcionalides, ora sea directa, o indirecta.

Suponganse proporcionales a. . b. . d. . e
como tambien lo eran . . b. . c. . e. . f
y una y otra analogia convienen la comun razon directa b. . e. luego (prop. 11. lib. 5o e V) se deverà arguir por igualdad como a. . d. asi c. . f.

y del mismo modo sean a. .b. .e. .f
y tambien lo seran propor.s b. .c. .d. .e
y porque en vna y otra proporcionalidad se hallan dos terminos b y e que hazen en si la razon reciproca le llamamos a esta razon comun por lo que tiene dicer comun a vna y a otra proporcionalidad: luego se puede citar la prop. 11. lib. 5.º e V.) y arguir por igualdad. a. .c. .d. .f

Aviso 6.º

Si fueren dos proporciones que tengan vna razon comun directa o in directa se arguira por igualdad: Pero si faltare la razon comun se ade introducir para poder pasar mas adelante, lo qual se puede hacer con la repeticion o reducion de alguna razon en otra igual a ella.

Y del mismo modo si alguna proporcion se hallare en vn triangulo, o en otra figura, y faltaren los terminos para pasar adelante, necesariam.te se ade añadir la nueba proporcion con la repeticion de algun angulo, para que se constituian dos terminos iguales en dos proporciones con lo qual se pueda arguir por igualdad, de donde esta claro el que se deue repetir aquel angulo, que pareciere constituie la similitud mas comoda en los triangulos, Por los angulos i las lineas de las figuras, asi conocidas como no conocidas.

+

Aviso 7

Puesto, ya lo buscado así como concedido todo el cognato se deue atender de manera que las magnitudes conocidas siempre se retengan en las argumentaciones, y que se obscurezca el punto incognito quanto fuere posible, y quando el analista viere que la razon adictiua o subtrac-tiua se constituie en vna proporcion y la ra-zon comun en dos proporcionalidades (si antes no era constituida) seguira su argumentacion hasta tanto que la magnitud incognita al fin del problema se halle igual a otra magnitud conocida, o que el punto incognito se halle en el tercero, o quarto termino proporcional, ô en dos medios, o extremos, cuia suma o difa. sea conocida pues el tercero o quarto termino o los dos reciprocos satisfaran y estara resuelto el problema cuia determinacion se ara por las props. 11, 12 y 13 del lib. 6° de E.) y para los reciprocos la prop. 1a de esta introduccion, por lo qual se de-ben tener mui presentes, y mui egercitado en sus operaciones.

Aviso 8°.

finalmente acauada la argumentacion Analitica queda manifiesto, y claro el orden de la construccion, y demonstracion. Porque para la construccion, no se requiere otra cosa sino es que el Analista aga aquello que supone hecho en el analisis, y para la demonstracion, no se requiere

Nacional sinou comenzando por el fin del analisis, prosiguir con los contrarios argumentos bolviendo del vibes ara llegar del principio. Porque donde el analisis argue alternando bolbiendo del vivis ocombirtiendo tambien la sintesis deue alternar eimbertir, pues q.do el analisis compone la sintesis diuide y al contrario &a.

n.1

Prop. 1

Dado la recta ab suma de quatro continuos proporcionales, y dado el quadrado aca, suma de sus quadrados, se piden los quatro continuos. ax . . xy . . yz . . zb.

a — x — y — z — b

Analisis

Por continuos son propor. $ax\ .\ .\ xy\ .\ .\ xy\ .\ .\ yz$

luego (prop. 18. lib. 5.° eu.) $ay\ .\ .\ xy\ .\ .\ xz\ .\ .\ yz$

Por continuos lo son . . $xy\ .\ .\ yz\ .\ .\ yz\ .\ .\ zb$

luego (prop. 18. lib. 5.° eu.) $xy\ .\ .\ xz\ .\ .\ yz\ .\ .\ yb$

luego (prop. 11. lib. 5.° eu. . $ay\ .\ .\ xz\ .\ .\ xz\ .\ .\ yb$

y (prop. 16. lib. 6.° eu.) $ayb \sqcap xzx$

y elevando lo son $2ayb \sqcap 2xzx$

y también lo son $xyb \sqcap xzy$

y (prop. 4.ª lib. 2.° eu. $aba \sqcap aca + 2axb + 2xyb + 2yzb$

ittem (axi. 3.° y dime.do, $\frac{aba - aca}{2} \sqcap axb + xyb + yzb$

ittem por la igualdad $\frac{aba - aca}{2} \sqcap axb + xzy + yzb$

ittem (prop. 1.ª lib. 2.° eu.) $\frac{aba - aca}{2} \sqcap axb + xb:yz$

ittem lo son iguales $hh \sqcap axb + xb:yz$

y deprimiendo $\frac{hh}{xb} \sqcap ax + yz$

Pero también lo son $aba \sqcap aya + yby + 2ayb$

ittem (prop. 4.ª lib. 2.° eu.) $aba \sqcap aca + 2axy + 2yzb + 2xzx$

luego (axi. 3.° y dime.do, $\frac{aba - aca}{2} \sqcap axy + yzb + xzx$

ittem (axi. 3.°) también lo son $hh - xzx \sqcap axy + yzb$

Digo que está resuelta la proposicion y manifiesta su determinacion la qual será como a la buelta en las operaciones siguientes.

a x y z b

es pues la igualacion anterior $\frac{hh}{xb}\ \Omega\ ax+yz$
esto es quedara como se ve $\frac{hb}{ab-ax}\ \Omega\ p$
luego elebando quedaran ... $hh\ \Omega\ abp-pax$
esto es (ax 1.° 2.° y 3.° er.) quedan iguales $pax\ \Omega\ abp-hh$
y deprimiendo por p, quedaran iguales $ax\ \Omega\ ab-\frac{hh}{p}$
luego queda conocido el primer termino el qual es ax y porque el cociente p, es la suma del prim.° y tercer termino quedarà $yz\ \Omega\ p+\frac{hh}{p}-ab$
luego queda conocido el tercer termino en el qual se halla siempre el quadrado del denominador multiplicado por el primer termino: luego, si el tercer termino se divide por el primero y del cociente se saca la raiz quadrada, esta raiz será el denominador de los quatro continuos proporcionales que se piden.

queda asimismo la igualacion siguiente $hh-xzx\ \Omega\ axy+y$ por la qual se ve manifiesto el que el rectangulo de los quatro continuos unos por otros es igual al rectangulo del 1.° por el 2.°, y del 3.° por el 4.° juntos con el quadrado de la suma del 2.° y 3.°: luego quitado dicho quadrado del rectangulo de los dichos quatro continuos queda la suma de los dos rect.os del 1.° por el 2.°, y del 3.° por el quarto. Como parese figurado en la igualacion: luego seran proporcionales los siguientes $h-xz \cdot g \cdot g \cdot h+xz$
luego el quadro gg. se debe igualar a los dos rect.os del 1.° por el 2.° y del 3.° por el 4.°.

n.2 Determinacion quarta

Sea la suma de los quatro continuos propor.s 15 y la de sus quadrados sea el quadrado . . . 85 y se hallara (prop. 1.a lib. 2.o eV) el Rectangulo de los terminos Unos por otros ser el Plano setenta . . . 70 q.3 partido por 15 − ax viene el cociente 5: luego seran proporcionales 15 − ax . . 10 . . 7 . . . 5: luego (prop. 16. lib. 6.o eV) son iguales 70 ⊓ 75 − 5ax luego (axi. 2.o y 3.o) quedaran 5ax ⊓ 5 y de primiendo por 5 quedaran . . ax ⊓ 1: luego el primer termino es Uno que rrestado de 5 suma del primero y tercero quedan 4 por el tercero: luego si este se divide por el primero que es 1 vendra el cociente 4 cuya raiz es 2, el qual es el denominador y seran los quatro continuos 1 . . 2 . . 4 . . 8 luego esta resuelta y demostrada la proposicion en el primer caso que demostramos.

en el caso segundo quedaron hh − xzx ⊓ axy + yzb
Digo que son propor.s 15 . . 85 . . xz . . hh − xzx
estos (prop. 15. 6. 5.o eV) 3 . . 17 . . xz . . hh − xzx
luego quedaran (axi. 2.o eV) $\frac{17xz}{3}$ + xzx ⊓ hh
estos quedan iguales $\frac{17xz}{3}$ + xzx ⊓ 70
y (prop. 14. lib. 6.o eV) propor.s $\frac{17}{3}$ + xz . . 10 . . 7 . . xz
luego esta Vuelta pues se reduce ha hallar dos Rectas cuya dif.a es conocida reciprocas a las dos Rectas dadas 10, y 7,

n.3 Operacion Geometrica

Sobre la Recta ab suma de los quatro continuos se describa el semicirculo acb, y en el (prop. 1ª. lib. 4º est) se acomode la recta ac, cuyo quadrado sea igual a la suma de los quadrados de los quatro continuos y (prop. 12. lib. 1º. est) se dele caer la perpendicular cd, sobre ab, y se tire la recta cb, sobre la qual se haga el triangulo, y isoceles rectangulo en el punto e, y alarguese ce hasta f, de suerte que ef sea igual a la recta ad, y sobre ella se describa el circulo ehf y por su centro se tire las recta bgh la qual cortara a la periferia del circulo en y, y en h; digo, que la recta by, es la suma de las medias continuas que se piden.

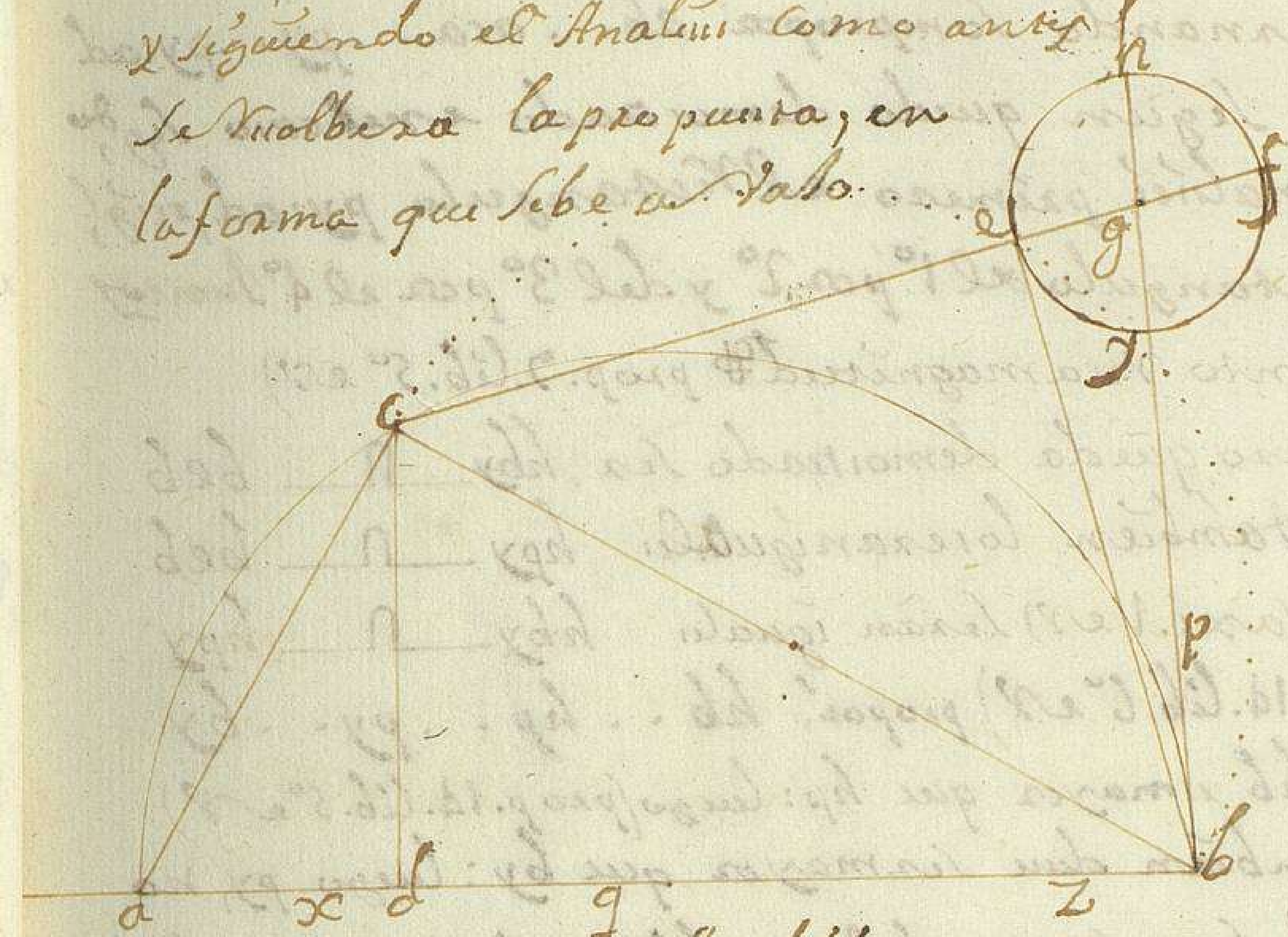
Demonstracion

el angulo acb (prop. 31. lib. 3º est) es recto. y (coro. 2º prop. 8ª. lib. 6º est) propor.^s, ba . . ac . . ca . ad luego (prop. 16. lib. 6º est) son iguales bad ⊓ aca y porquanto el triangulo rectangulo y isoceles sus quadrados cec y beb juntos son iguales (prop. 47. lib. 1º est) a el quadrado bcb: luego sera bcb ⊓ 2beb estos es (prop. 36. lib. 3º est) seran 2hby ⊓ 2beb y demediando seran iguales . . . hby ⊓ beb y (prop. 14. lib. 6º est) propor.^s hb . . be . . eb . . by

Alleme las dos rectas hb, by cuya difª es conocida hy igual a la recta ef, ō ad. y allada quiera se suponga su igual aq, y sera qb suma de las extremas y seran las quatro continuas las rectas siguientes . . . zb . . ax . . xq . . qz

estos seran . . ra . . ax . . xq . . qz

y siguiendo el Analisis como antes se Vuolbera la propuesta, en la forma que se be a Dado.



Analisis

Por ser continuos son propor. Va . . ax . . ax . . xq
luego (prop. 18. lib. 5º eV) lo son Vx . . ax . . aq . . xq
y por ser continuos, lo son ax . . xq . . aq . . qz
luego (prop. 18. lib. 5º eV) lo son ax . . aq . . xq . . xz
luego (prop. 11. lib. 5º eV) lo son Vx . . aq . . aq . . xz
luego Vuelto pues se Reduce hahallar las dos Rectas Vx, xz cuya suma es ab Reciprocas ala dada aq (prop. 1ª yntroducion de Vgo o elementos, Kresa, Nota, ala prop. 17. lib. 6º eV) que es lo que se duce hazer para su determinacion.

Si se dixere que la Recta by no es la suma delas medias, Precisamente sera menor, o mayor, y sea si es posible menor como py: luego (prop. 1ª lib. 6º eV) seran propor. ab . . py . . ab:yh . . pyh
esto es seran propor. . . ab . . py . . bad . . py:ad
esto es seran propor. . . ab . . py . . aca . . py:ad

y alternando son propor. ab . . aca . . py . . py:ad
luego segun queda demostrado en el caso sego.
del analisis primero el rectangulo py:ad, es ygl.
a el rectangulo del 1º por 2º y del 3º por el 4º juntos
por quanto una magnitud + prop. 9. lib. 5º er)

Pero queda demostrado ser hby ⊓ beb
luego tambien los eraniguales hpy ⊓ beb
luego (axi. 1 er) seràn iguales hby ⊓ hpy
y prop. 14. lib. 6º er) propor. hb . . hp . . py . . by
Pero hb es mayor que hp: luego (prop. 14. lib. 5º er)
py tambien deve ser mayor que by: luego py, no
no puede ser suma de las medias ni tampoco la
suma de las medias puede ser mayor que by
porque se seguiria el mismo absurdo (contra
el axioma 9 er): luego by es la suma de las
medias y suponiendo aq igual a la recta by
quedara qb, igual a la suma de las extremas; que
es lo que se avia de demostrar.

n. 4 Por Algebra

Sea pues la suma de las quatro continuos propor.
15 y la de sus quadrados 85. y sea pues x la suma
de los extremos: luego 15 − x sera la suma de los medios cuyo quadrado es $225 + x^2 - 30x$ aquien
sele añada el quadrado x^2 de la suma de los
extremos y sera la suma $225 + 2x^2 - 30x$ de quien
se restara la suma dada 85 y quedara de residuo
$140 + 2x^2 - 30x$, que dividido por 4 sera el
cociente $\frac{70 + x^2 - 15x}{2}$ el qual es el producto
de los extremos ò su igual el de los medios.

Agase el cubo dela suma delos medios el qual sera $3375+45x^2-x^3-675x$ y este cubo se divida por la suma delos estremos junta con el triplo delos medios cuyo cociente sera $\frac{3375+45x^2-x^3-675x}{45-2x}$ el qual tambien es producto delos estremos o medios y seran iguales $\frac{3375+45x^2-x^3-675x}{45-2x} = \frac{70+x^2-15x}{2}$ y elibando por sus denominadores quedaran

$$6750+90x^2-2x^3-1350x = 3150+75x^2-2x^3-815x$$

y repelando (axi. 2° y 3° eV) quedara reducida la igualacion alasiguiente $3600 = 535x-15x^2$ y deprimiendo por 15 quedara $240 = \frac{107}{3}x-x^2$ y (prop. 14. lib. 6° eV) propor^{s} x . . 10 . . 24 . . $\frac{107}{3}-x$ luego vuelto pues se reduce hahallar las dos rectas x, y $\frac{107}{3}-x$ cuya suma es conocida reciprocas alas dos rectas 10 y 24 dadas.

Determinacion

la mitad de $\frac{107}{3}$ es $\frac{107}{6}$ su quadrado es $\frac{11449}{36}$ de qui en se reste 240 q reducido sera este $\frac{8640}{36}$ y quedara este residuo cuya raiz quadrada sera $\frac{53}{6}$ la qual restada delos $\frac{107}{6}$ quedan $\frac{54}{6}$ estos es 9 enteros por el valor dela letra x suma delos estremos luego restados de 15 sera 6 suma delos medios

es pues la suma delos estremos 9
la delos medios es 6
la suma de todos es 15
su mitad es el siguiente $7\frac{1}{2}$ y su quadrado $56\frac{1}{4}$
el quadrado dela suma delos medios 6, es este . . 36
la difª delos dos quadrados es la siguiente $20\frac{1}{4}$
cuya raiz quadrada es $4\frac{1}{2}$ aquien añadiendo

 7½ será la suma 12, y será la de 3º y 4. y qui-
tando 12 de 15 quedan 3 suma de 1º y 2º y si dirá
12 y 6 son 18 dan 12 $\frac{3}{q}$ darán 12 y hallarán 8
el quarto término que restado de 12 quedan 4
por el 3º término y este restado de 6 quedarán 2
y la suma de los 3, será 14 $\frac{2}{q}$ restados de 15 quedará 1
por el primer término luego consta.

Corolarios

1 Del quadrado de la suma de todos se reste la suma
de los quadrados de todos y tomese la semidifª, la
qual se guarde. Partase la suma de los quadra-
dos de todos por la suma de los quatro términos,
y tomese la mitad del cociente cuyo quadrado
se añada a la semidifª que se guardo, y saquese su
raíz quadrada de quien se reste la mitad del cociente,
y el residuo será la suma de los dos términos me-
díos de dhos quatro continuos.

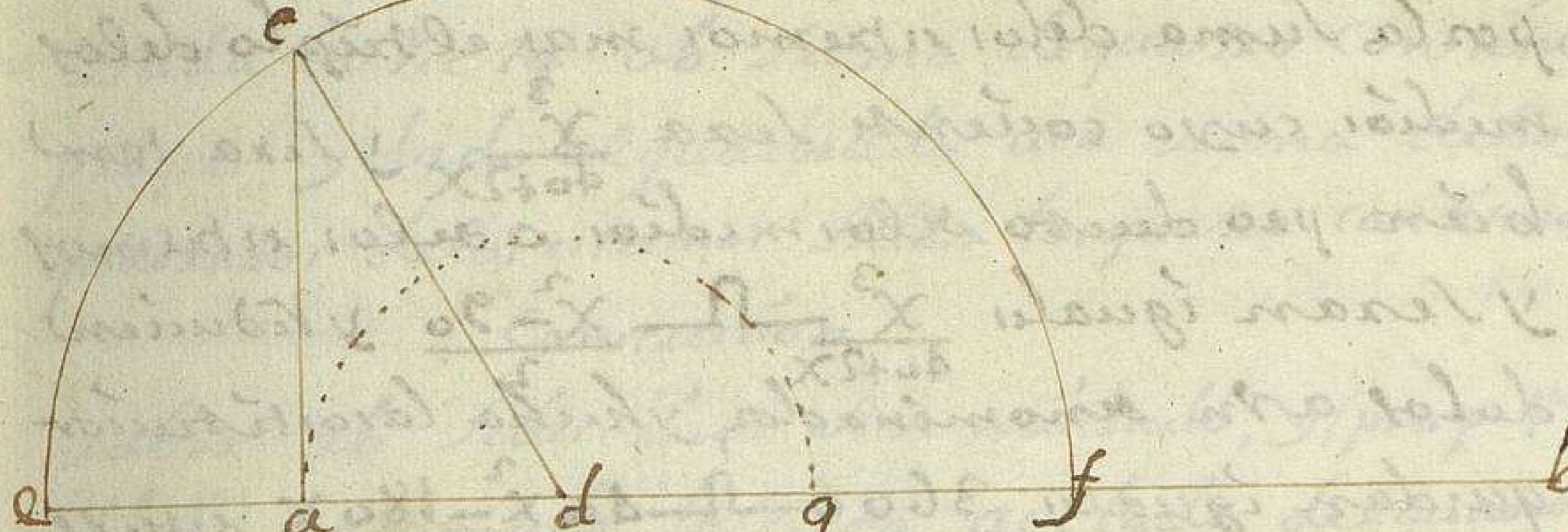
2 Lo segundo queda demonstrado ser proporcionales
la suma de los quatro continuos a la suma de los
dos términos medíos así la suma de los quadra-
dos de todos a la suma de los dos planos primero
por segundo, y tercero por quarto. 15. .6. .85. .34

Prop. 2

Dada la recta ab suma de quatro continuos
y dado el quadrado aca suma de los quadºs
de los medíos se piden los quatro continuos.

Analisis

Agamese (prop. 11. lib. 6º de E) ba. .ac. .ca. .ad
luego (prop. 16. lib. 6º de E) bad ⸺ ⸺ aca



levantese (prop. 11. lib. 1.º e.V.) la perpendicular ac, y del punto d, como centro se describa el semicirculo ecf con el interbalo dc: Digo, que af sera la suma de las medias.

Demonstracion

(Prop. 47. lib. 1.º e.V.) son iguales los qu.dos aca+ada ☊ cdc estos por radios del circulo lo seran aca+ada ☊ dfd luego (axi. 3.º e.V.) quedaran iguales aca ☊ dfd-ada estos (prop. 6.º y ntro. dexgo lo seran aca ☊ afg y (prop. 14. lib. 6.º e.V.) propor.s af . . ac . . ca . . gf estos (prop. 11. lib. 5.º e.V.) ba . . af . . gf . . ad luego esta resuelto porque se reduce ha hallar dos rectas af, gf cuia dif.a ag, es conocida recipro cas a las dos rectas dadas ba, ag.

Por Algebra

Sea dada la suma de los quatro continuos 40 y sea dado el agregado de los quadrados de los medios 90. y sea x suma de los medios de cuyo quadrado restando 90 quedara el residuo x^2-90 cuya mitad es $\frac{x^2-90}{2}$ y sera (prop. 4.a lib. 7.º e.V.) el rectangulo s medios ô de

10 los extremos: divídase el cubo de los medios por la suma de los extremos mas el triplo de los medios cuyo cociente será $\frac{x^3}{40+2x}$ y será también producto de los medios o de los extremos y serán iguales $\frac{x^3}{40+2x} \,\Omega\, \frac{x^2-90}{2}$ y reduciendolos a un denominador, y hecha la substitución quedan iguales $3600 \,\Omega\, 40x^2-180x$ esto es quedarán iguales $90 \,\Omega\, x^2-\frac{9x}{2}$ y (prop. 14. lib. 6° eu) proporcionales $x-\frac{9}{2} \,..\, 9 \,..\, 10 \,..\, x$ luego vuelto pues se reduce ha hallar dos rectas $x-\frac{9}{2}$, y x cuia difª $\frac{9}{2}$ es conocida recíprocas a las rectas 9 y 10 dadas.

Corolario

la suma de los quadrados de los medios se divida por la suma de todos, y el quadrado del cociente se sume con la suma de los quadrados de los medios, y de esta suma se saque la raíz, a quien se añada el cociente zitado, cuya suma será la de los medios que restada de la suma de todos quedará la de los extremos.

la suma de todos 40 se multiplique por x suma de los medios, y será el producto $40x$ y restando 90 quedarán $40x-90$ su duplo, $80x-180$ se reste del quadrado de la suma de todos el qual es 1600 quedará $1780-80x$ y serán proporcionales los quatro términos siguientes $40 \,..\, x \,..\, 1780-80x \,..\, 40x-90-x^2$ esto es (prop. 15. lib. 5 eu) $2 \,..\, x \,..\, 89-4x \,..\, 40x-90-x^2$ y haciendo los productos de extremos, y medios, y substitución y quedan como antes $90 \,\Omega\, x^2-\frac{9x}{2}$.

+

Prop. 3ª

Dada la recta ab suma de quatro continuos propor.s y dado el quadrado aca suma de los quadrados de los extremos. Allar los quatro continuos

Construcion

Sobre ab se discriva el semicirculo, y (prop. 1ª lib. 4º) se acomode la recta ac, lado del quadrado dado, y tire la recta cb, y (prop. 12. lib. 1º er) la perpendicular cy, y alarguese el diametro ab hacia d.

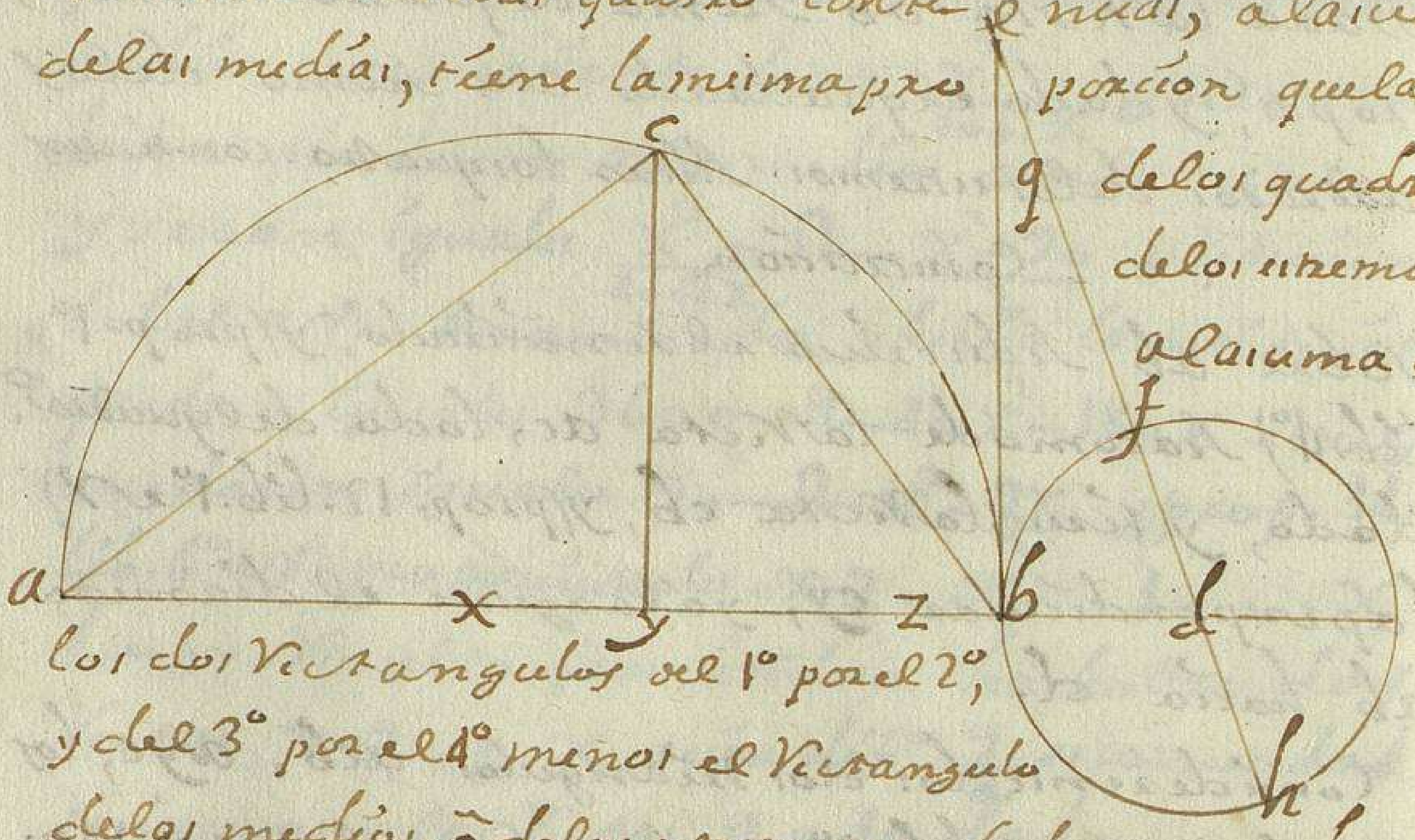
Consideremse los dos triangulos acb, ayc, los quales (prop. 8ª lib. 6º er) son semeiantes y (co. 2º) sus lados proporcionales ba. .ac. .ca. .ay Haganse (prop. 12. lib. 6º er) . . 3ba. .ay. .ab. .bd luego (prop. 14. lib. 5º er) la recta ay deve ser tripla de la recta bd sobre la qual centro d, y nterualo b se discriva el circulo bfh, y (prop. 13. lib. 6º er) sea hagan propor.s ab. .be. .eb. .by que (coro. 2º de la 8ª del 6º er) la recta be sera igual a la recta bc. y (prop. 11. lib. 1º er) se lebante perpendicular la recta be sobre el diametro ab en el punto b. que sera (coro. prop. 16. lib. 3º er) tanjente al circulo bfh, y del punto e por el centro d se tire la recta eh: digo, que la recta fe, es la suma de las medias.

Demonstracion

Sino se dixere que no lo es, lo sera otra menor, o mayor, sea se pudiere menor como la recta gf; y porque

+

la suma de todas quatro conti-nuas, a la suma de las medias, tiene la misma pro-porcion que la su[ma] de los quadrados de los extremos a la suma de



los dos rectangulos del 1º por el 2º, y del 3º por el 4º menos el rectangulo de los medios, ô de los extremos: Se deveran hazer proporcionales ab . . fg . . aca . . axy+yzb−xyz porquanto son continuos bz . . zy . . yx . . xa pero (prop. 1ª lib. 6º eV) ab . . fg . . bay . . fg:ay luego, prop. 11. lib. 5º eV) bay . . fg:ay . . aca . . axy+yzb−xyz luego (prop. 14. lib. 5º eV) fg:ay ⊓ axy+yzb−xyz

Pero la recta hf contiene en si dos terceras partes de la recta ay ergo $\frac{2ay}{3}$ ⊓ hf luego elevando por, fg, quedaran fg:2ay ⊓ 3hfg

Pero el rectangulo fg:2ay junto con el quad.^{do}, aca mas el triplo quadrado fgf sera igual al quadrado, aba ergo son iguales fg:2ay+aca+3fgf ⊓ aba por la proporcion primera ergo por ser, ba . . ac . . ca . . ay Pero tambien lo son iguales aca+cbc ⊓ aba luego (axi. 1º y 3º eV) fg:2ay + 3fgf ⊓ cbc ergo (axi. 1º y, co. 2º de la 8ª del 6º, eV) 3hfg+3fgf ⊓ beb ergo (prop. 5 lib. 2º y 36. lib. 3º eV) 3hgf ⊓ hef

Pero 3hgf es mayor que, hef: luego no pueden ser iguales (por ser contra el axioma 9 est): luego fg, no puede ser suma de las medias porq.^{to} fg es menor que fe. ni tampoco lo pudiera otra mayor que fe. porq.^{3} seguiría el mismo absurdo. que es lo que se ha demonstrado.

Por Algebra

Sea la suma de los quatro continuos 15, y la suma de los quadrados de los extremos sea 65 y sea x, suma de los medios, sera $15-x$ suma de los extremos cuyo quadrado es $225+x^2-30x$ de quien restado el quad.^{o} de los extremos 65 quedan $160+x^2-30x$ el qual es el duplo rectangulo de las medias ó de las extremos: luego el rectangulo sera $\frac{160+x^2-30x}{2}$ luego si el cubo de la suma de los medios se divide por la suma de los extremos mas el triplo de la suma de los medios, el cociente es el producto de los medios ó de los extremos: luego $\frac{x^3}{15+2x} = 80+\frac{x^2}{2}-15x$ y elebando quedaran iguales $2x^3 = 2400+2x^3-45x^2-130x$ y (ax. 2.^{o} y 3.^{o}, y exprimiendo quedaran $x^2+\frac{26x}{9} = \frac{480}{9}$ la mitad de 26 es, 13 su quadrado 169 que sumado con 4320 hacen 4489 de cuya raiz 67 se restan los 13 quedan 54 estos es 6 enteros suma de los medios que restados de 15 quedan 9 suma de los extremos cuya determinacion se allara en la pro p. 1.^{a} f.^{o} deste tratado: luego resuelta.

Por Algebra el mismo

Sea la suma 15 como atras y 65 suma de los

+

quadrados delos extremos, y sea x suma de los extremos: luego $15-x$ serà suma delos medios: luego (prop. 4. lib. 2º eN) $\frac{x^2-65}{2}$ serà el Rectangulo delos extremos (ô delos medios) Agase el quadrado dela suma delos medios el qual es $225+x^2-30x$ de quien restando x^2-65 q dara $290-30x$ por residuo el qual es la suma delos quadrados delos medios. Pero son proporcionales $15 .. 15-x .. 290-30x .. \frac{x^2-65}{2}$: luego (prop. 16. lib. 6º eN) haciendo las operaciones segun (axi. 2º y 3º, y prop. 15. lib. 5º eN) quedara la ultima igualacion la siguiente $215 \ \Omega\ \frac{296x}{9}-x^2$ (Vuelta;) Porq la mitad de $\frac{296}{9}$ es, $\frac{148}{9}$ su q^{do}, $\frac{21904}{81}$ de quien restado 215 quedan $\frac{4489}{81}$ su Raiz, $\frac{67}{9}$ restada de $\frac{148}{9}$ q dan $\frac{81}{9}$ esto es 9 enteros valor de, x; luego los quatro continuos son $1 .. 2 .. 4 .. 8$.

Corolario

Aqui queda manifiesto, el que, la suma de quatro continuos ala suma delos medios; asi la suma delos quadrados delos medios al Rectangulo de los medios ô delos extremos. esto es, $15 .. 6 .. 20 .. 8$

Y prebengo que si el quadrado dela suma delos medios se multiplicare, por la difª que ay entre las dos sumas de extremos, y la delos medios, y el solido q saliere se partiere por la suma delos extremos, mas el triplo dela suma delos medios el cociente serà el quadrado dela difª delos medios. esta noticia podra serbir en ocasiones.

+

Prop. 4

Dada la recta ab suma de quatro continuos y dado el quadrado bcb difa. de los dos quadrados el uno dela suma delos medios y el otro dela suma delos extremos.

a ——y——x——d——————z—— b

Sea la recta ax suma delos medios, y sera xb suma delos extremos.

Analisis

Por la suposicion son iguales xbx – axa ⩲ bcb dividase (prop. 10. lib. 1º E) la recta, ab, en el punto d, y (prop. 6ª, y otro. de Vyo) seran 2ab : xd ⩲ bcb y (prop. 14. lib. 6º E) propor.s, 2ab. . bc. . cb. . xd luego Vuelta. Hallese (prop. 11. lib. 6º E) la tercera proporcional xd, la qual añadida â db y restada de, ad se conoceran ax, y, xb, cuyos quadrados se diferencian en el quad.do bcb

y seran los quatro conte.s, zb . . ay . . yx . . xz

y seran (propor.s . . zb . . ay . . ay . . yx

agase Va ⩲ zb, y seran Va . . ay . . ay . . yx

luego (prop. 18. lib. 5 E) Vy . . ay . . ax . . yx –

pero tambien lo son ay . . yx . . yx . . xz

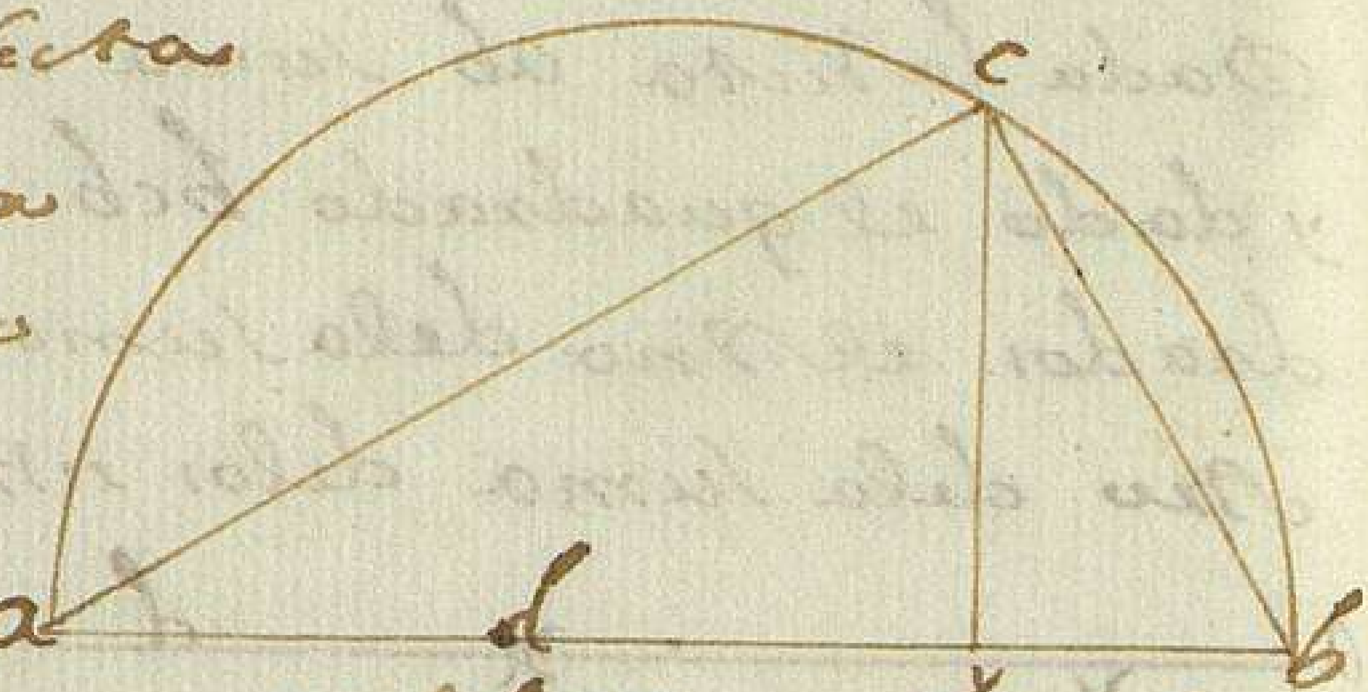
luego (prop. 18. lib. 5º E) ay . . ax . . yx . . yz –

luego (prop. 11. lib. 5 E) Vy . . ax . . ax . . yz

luego Vuelta segun la prop. 1ª f.s dute tratado.

Por geometria

Sobre la recta ab, se ducrinas el semicirculo, y (prop. 1ª lib. 4 E) sea como de en el la recta, bc, lado del quadrado dado y tírese la recta ac y (prop. 12. lib. 1º eV) se dexe caer la recta cy, perpendicular sobre el diámetro ab, y se consideren los triángulos



acb, y, ayc, que (prop. 31. lib. 3º y 8ª del lib. 6º eV) son semejantes, y propor. ba . . ac . . ca . . ay divídase ay en d, y serán (por el corolario de la prop. 23 lib. 5º eV) propor. 2ba . . ac . . ca . . ad luego (prop. 16. lib. 6º eV) serán 2bad = aca

Digo que ad es la suma de las medias y db de las extremas cuyos quadrados se diferencian en el quadrado dado bcb.

Demonstración

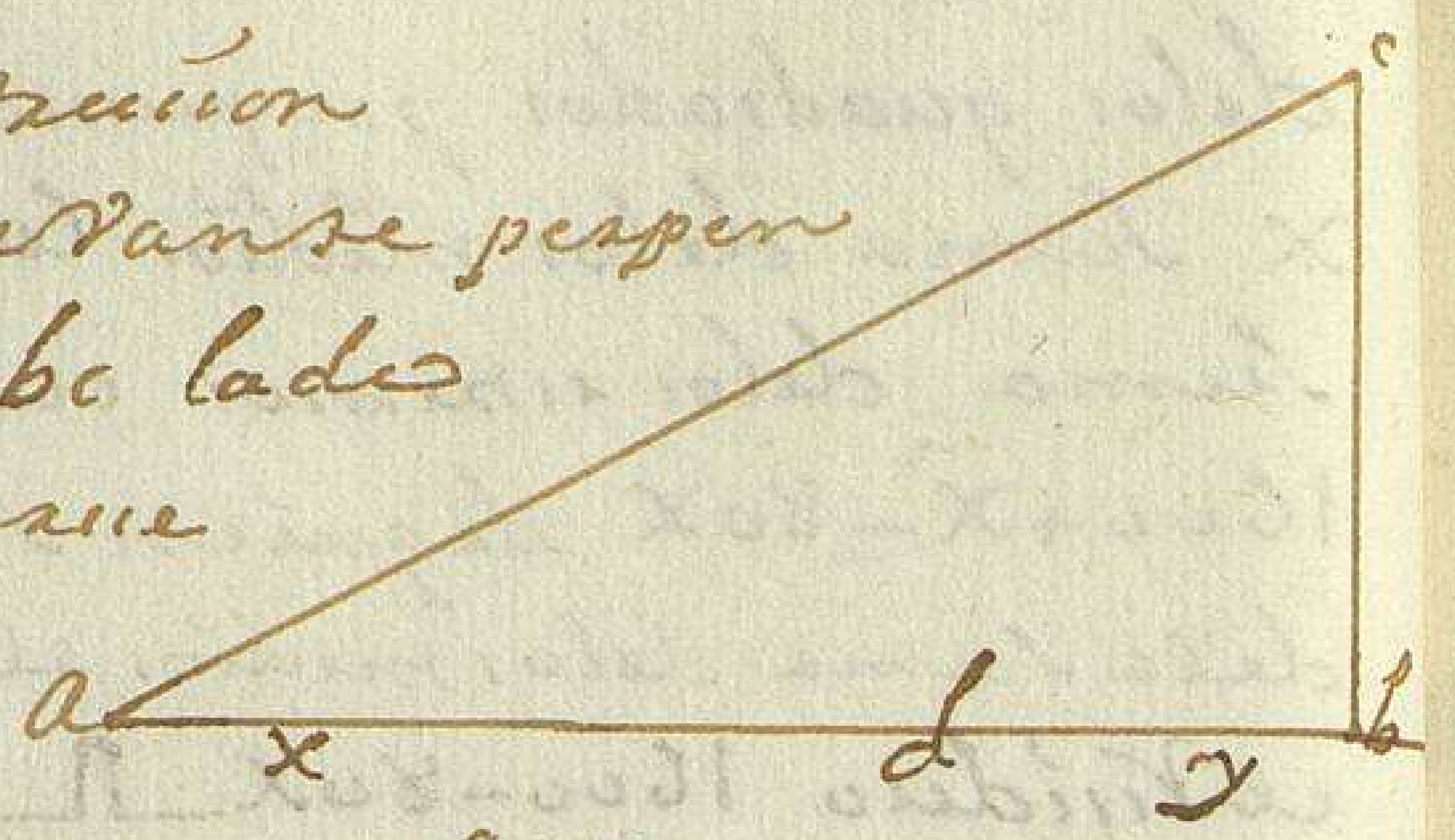
(Por la 47. lib. 1º eV) son iguales aba = aca+bcb
estos por construcción lo son aba = 2bad+bcb
estos (prop. 3º lib. 2º eV) aba = 2ada+2adb+bcb
estos (prop. 4ª lib. 2º eV) aba = ada+dbd+2adb
luego (axi. 1º eV) lo son ada+dbd+2adb = 2ada+2adb+bcb
luego (axi. 3º eV) quedarán dbd−ada = bcb
luego vuelta porque los dos quadrados de las rectas ad y db se diferencian en el quadrado dado bcb: luego la recta ad es la suma de las medias, y la recta db, es la suma de las extremas, cuya determinación como antes;

Por Algebra

Sea la suma de los quatro 40, y sea la difer.

delos quadrados propuestos 640. y sea pues
x suma delos medios luego 40−x sera la
suma delos extremos cuyo quadrado sera
$1600+x^2-80x$ dequien sutr. elquadrado
dela suma delos medios elqual es x^2 y queda
el residuo $1600-80x \;\Omega\; 640$ y dispuesto
(axi 2° y 3° ex.) y quedara $960 \;\Omega\; 80x$ y deprie
miendo quedara $12 \;\Omega\; x$ porla suma delos
medios luego sera 28 suma delos extremos
luego sera clara ladeterminacion como
antes laqual es comosigue
Suma de extremos 28 suquadrado es 784
suma de medios 12 suquadrado es 144
difa. de sus quadrados es elquesedio 640
Suma detodos es 40
lasemisuma es 20 suquadrado es 400
Suma demedios 12 suquadrado es 144
difa. delos quadrados es 256
su raiz quadrada es 16
semisuma detodos es 20
cuya suma es el 3° y 4° laqual es 36
suma delos medios es 12
los dos ultimos partidos suman 48
Se formara laproporcion 48..12..12..3, seg.do dis.
y seran los terminos 1..3..9..27
Porq. 3 sacado el 2°, se resta de 12 queda 9 el
tercero y este restado de 36 q. da 27 el 4°.
2a. Demonstracion geometrica
Sea la recta ab suma delos quatro
y sea el qq.do bcb diferencia comoantes

Construccion



Sobre ab se levante perpendicular la recta bc lado del quadrado, y tirese la recta ac

Analisis

Aganse (prop. 11. lib. 6.º E.) 2ba . . ac . . ca . . ad
luego (pro. 16. lib. 6.º E.) son iguales 2bad ∩ aca
digo que ad es la suma delas extremas.
por la 47 del 1.º de E.) son iguales aba+bcb ∩ aca
ergo (axi. 1.º E.) son iguales aba+bcb ∩ 2bad
ergo (prop 3.ª y 4.ª del 2.º E.) ada+dbd+2adb+bcb ∩ 2ada+2a
luego (axi. 3.º E.) quedan iguales, bcb ∩ ada-dbd
luego se a demonstrado ser el quadrado bcb
igual alos quadrados el uno delas extremas ad
y el otro delas medias db.
Son pues proporc. . . . . ax . . by . . by . . yd
ergo suponiendo la prim.ª 2b.
luego (prop. 18. lib. 5.º E.) 2y . . by . . bd . . yd
y por ser continuas son proporc. by . . yd . . yd . . dx
luego (prop. 18. lib. 5 E.) lo son by . . bd . . yd . . yx
luego (prop. 11. lib. 5 E.) lo son 2y . . bd . . bd . . yx
luego resuelto, allense las rectas 2y, yx cuya
suma es toda la recta ab reciprocas ala bd.

Prop. 5.ª

Dada la suma ab como antes, y el quadrado bcb dif.ª delos quadrados ada suma de las extremas y dbd suma de las medias se piden las quatro continuas.

a x y z b c

Sea la Recta ab suma de las quatro continuas
y sea el quadrado bcb difª de los quadrados yby
y del Rectangulo ayb ó xzx.

Analisis

Por ser continuas son propor.ˡ ax . . xy . . xy . . yz
luego (prop. 18. lib. 5º eV) lo son ay . . xy . . xz . . yz –
y tambien son propor.ˡ . . xy . . yz . . yz . . zb
y (prop. 18. lib. 5º eV) lo son xy . . xz . . yz . . yb –
luego (prop. 11. lib. 5º eV) lo son ay . . xz . . xz . . yb
luego (prop. 16. lib. 6º eV) los planos ayb $\sqcap$ xzx
luego por la suposicion deuen ser yby-ayb $\sqcap$ bcb
como tambien lo deuen ser yby-xzx $\sqcap$ bcb
Pero el 3º y 4º suman la Recta yb. luego
la suma del 1º y 2º será ab-yb
cuyo producto de los dos es aby-yby el qual
restará del quadrado yby y que dará
la diferencia, y igualdad 2yby-aby $\sqcap$ bcb
esto es deprimiendo por 2. yby-$\frac{aby}{2}$ $\sqcap$ $\frac{bcb}{2}$
luego esta resuelto y se podra pasar a la deter-
minacion en la forma siguiente
el quadrado de la 1ª parte de ab esto es $\frac{ab}{4}$ cuyo qq.do
es $\frac{aba}{16}$, sumado con $\frac{bcb}{2}$ será la suma aba+8bcb
cuya Raiz sumada con $\frac{ab}{4}$ será toda la suma
$\frac{ab+\sqrt{aba+8bcb}}{4}$ el valor de la suma del tercero y del
quarto la qual restada de la suma de todos que
da la suma del primero y segundo, y multipli
cando estas dos sumas una por otra y sacando
la Raiz qq.da esta será suma del 2º y 3º.

Resolucion desta misma proposicion por el Algebra suponiendo la suma de todos 15 y la difª de los quadrados de la suma de 3 y 4 y el de la suma del 2, y 3º, 108 sera la operacion siguiente.

Supongase la suma del 3º y 4º ser .. x luego la suma del 1º y 2º sera $15-x$ luego el producto de las dos sumas $15x-x^2$ el qual restado del qq.do de la suma del terzero y 4º sera la igualacion $2x^2-15x$ ⩊ 108 y deprimiendo quedara $x^2-\frac{15x}{2}$ ⩊ 54 luego esta resuelto y se pasara a la determinacion asi = el qq.do de $\frac{15}{4}$, es $\frac{225}{16}$ que sumado con 54 reducidos al quebrado sera la suma $\frac{1089}{16}$ cuya raiz qq.da sale $\frac{33}{4}$ que sumados con los $\frac{15}{4}$ sera toda la suma $\frac{48}{4}$ estos 12 enteros por la suma del 3º y 4º los que restados de 15 quedan 3 por la suma del 1º, y, 2º y multiplicando 3 por 12 son 36 su raiz son 6 suma del 2º y, 3º. luego se halla fazil la determinacion si 18 .. 12 .. 12 .. 8 luego el quarto termino restado del 12 q.dan 4 los que restados del, 6 queda el 2º termino 2 el que restado de 3 queda el primero .. 1 luego &c.ª que es lo q. se deseava saber.

Aora pasare a la resolucion de la misma proposicion en Geometria en la mejor forma que Dios me diese a entender para la qual sera comsigue.

Sea dada la Recta ab suma de quatro continuas, y sea dado el quadrado bcb la diferencia de los dos^m quadrados, el uno de la suma del tercero y quarto y el otro de la suma del segundo y tercero.

Agase el quadrado bdb ygual a la mitad del quadrado bcb y la Recta be ygual a la quarta parte de ab y sobre ab, y centros h y e yntervalos hb y eb se descrivan los semicirculo, y circulo y por el centro e y extremo d de la Recta bd (lado del qq^{do} bdb) puesta perpendicular sobre ab en el punto b, se tire la Recta dg que cortara el circulo pequeño en los puntos f, g. luego por $\overset{3}{q}$ db tangente y gd secante sera (prop. 36. lib. 3° eu.) el rectang.° gdf $\sqcap$ bdb y elebando por dos seran 2gdf $\sqcap$ 2bdb esto es sera el duplo gdf igual es 2byh $\sqcap$ 2bcb para lo qual se pondra la Recta by $\sqcap$ gd

Digo que yb es la suma de la 3ª y 4ª y que la parte ay es la suma de la 1ª y 2ª, y que la Recta yl, la qual (prop. 13 lib. 6° eu.) es media proporcional entre ay, y la Recta yb, es la suma de la 2ª y 3ª y puesta la Recta my igual a la yl, seran propor. lo primero lo son propor. ay . . yl . . by . . yb y tambien son propor. mb . . yb . . yb . . qb y sera qb el quarto termino.

Prop. 6

Dada la suma de las quatro continuas ab y dado el quadrado bcb el qual es la dif.a entre los qq.dos de la suma de prim.o y segun do y el de segundo y tercero se piden los quatro continuos.

Analisis

Por ser continuos son propor.s $ax \,..\, xy \,..\, xy \,..\, yz$
luego (prop. 18 lib. 5 e.d) lo son $ay \,..\, xy \,..\, xz \,..\, yz$
Por ser continuos son propor.s $xy \,..\, yz \,..\, yz \,..\, zb$
luego (prop. 18 lib. 5.o e.d) lo son $xy \,..\, xz \,..\, yz \,..\, yb$
luego (prop. 11. lib. 5 e.d) lo son $ay \,..\, xz \,..\, xz \,..\, yb$
luego (prop. 16. lib. 6.o e.d) los rectang.s $ayb = xzx$
Pero la recta $ay = ab - yb$: luego el rectan de la recta ay sera $aya = bay - ayb$
luego quedara la igualazion $2ayb - bay = bcb$
y deprimiendo por 2 quedaran $ayb - \frac{bay}{2} = \frac{bcb}{2}$
Agase el quadrado de la quarta parte de la recta $\frac{ba}{4}$ el qual sera $\frac{aba}{16}$ que sumado con la mitad de $\frac{bcb}{2}$ sera la suma $aba+8bcb$, a cuya raiz añadida la $\frac{ba}{4}$ sera el quadrado de la suma de 2.o y 3.o cuya raiz sera suma de dho 2.o y 3.o seran $\frac{ba + \sqrt{aba+8bcb}}{4}$ el quadrado de la suma de 2.o y 3.o o el producto de la suma del 1.o y 2.o por la suma del 3.o y 4.o consta del analisis arriba demostrado: luego esta resuelto, y se determin.r como antes.

Resuelbese eramesma Por algebra, y por diferen-
ciar Viaxe dela Algebra Usando solo delineas
Enlaforma siguiente

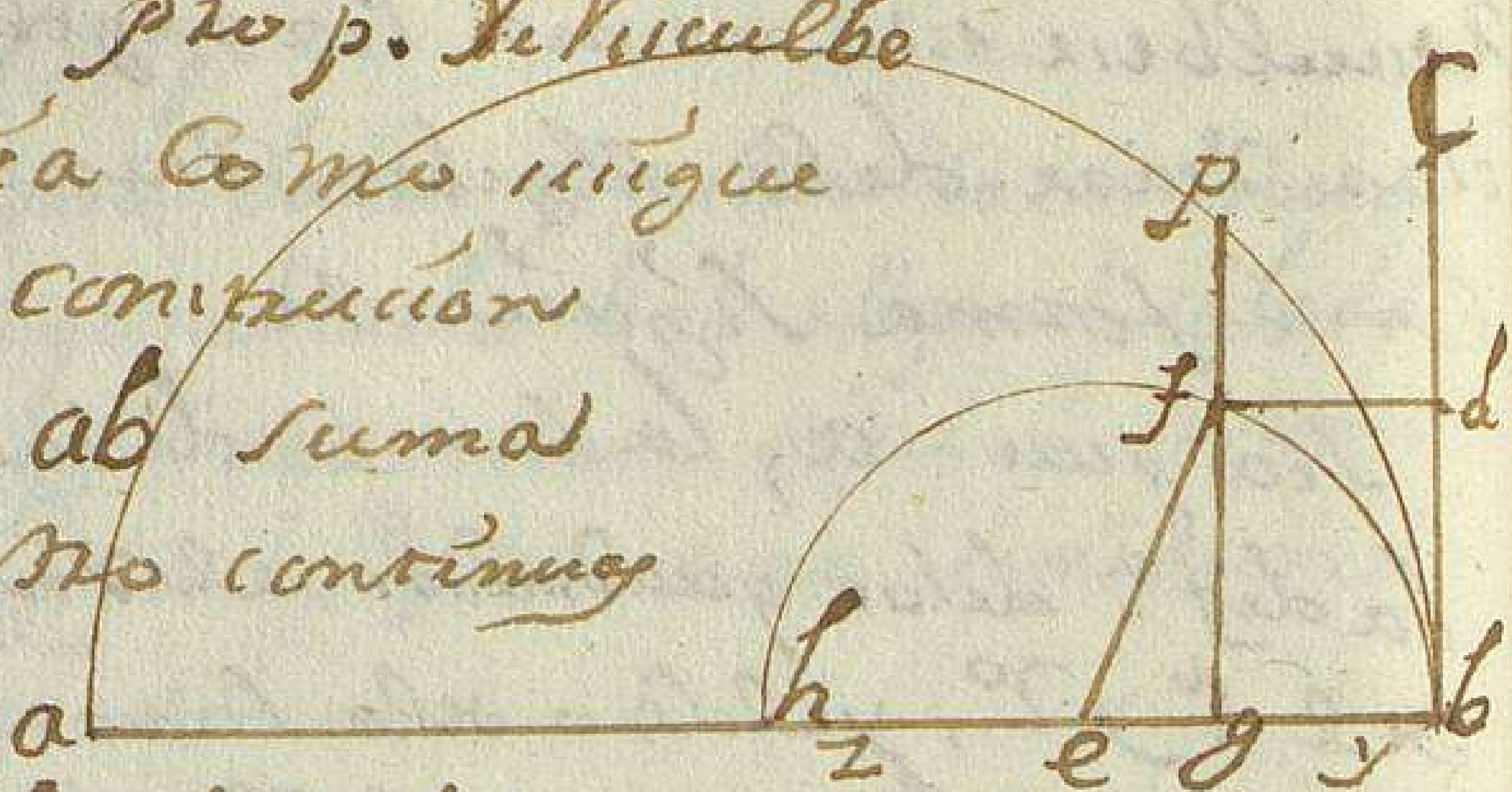
Sea pues a, la suma detodos, y sea b,
ladifa delos quadrados elUno dela suma
del 1° y 2°, yelotro dela suma del 2° y 3° y
sea pues la suma del 3° y 4°, x: luego serà
$a-x$ lasuma del 1° y 2°: luego elRectang.
delas dos sumas serà $ax-x^2$ del qual
siendo el quadrado dela suma del 1° y 2°
elqual a^2+x^2-2ax quedarà $3ax-2x^2-a^2 \mathrel{\Omega} b$
luego (axi. 3° eV) quedaran iguales $3ax-2x^2 \mathrel{\Omega} a^2+b$
y demediando quedaran iguales $\frac{3ax}{2}-x^2 \mathrel{\Omega} \frac{a^2+b}{2}$
luego esta resuelto. y para su determinacion
seaga el qqdo. de $\frac{3a}{4}$ elqual serà $\frac{9a^2}{16}$ dequien
serrite $\frac{a^2+b}{2}$ reduciendolo alaespecie del quebrado
paraquetengan Uncomun denominador ye-
ra $\frac{8a^2+8b}{16}$ yquedara deresiduo $\frac{a^2-8b}{16}$ cuya
raiz quadrada serà $\sqrt{\frac{a^2-8b}{16}}$ laqual suma-
da con $\frac{3a}{4}$ serà la suma $\frac{3a}{4}+\sqrt{\frac{a^2-8b}{16}}$ cuya
suma partida por quatro serà elcociente
la suma del 3° y 4° que restada dela suma deto-
dos seconocerà la suma del 1° y 2° qedicar.

Corolarios puestos alos folios siguientes.

Alfo 8, coro. 2° contra son propor.s 15. . 6. . 85. . 34
Alfo 10. coro, contra son propor.s 15. . 6. . 20. . 8
luego (prop. 11. lib. 5 eV) son propor.s 85. . 20. . 34. . 8
y (prop. 17. lib. 5. eV) losson propor.s 65. . 20. . 26. . 8

24 esta misma prop. se resuelbe
en Geometria como sigue

construcion



Sea la recta ab suma
de todas quattro continuas
y sea el
quadrado bcb difª de los quadrados de la
suma de primero y segundo, y el de la suma del
segundo y tercero. y sea bdb mitad del qua
drado bcb, y sea eb quarta parte de todas
la suma ab, centro e y nterbalo eb se
discriba el semicirculo hfb. y puesta la recta
bd perpendicular sobre ab en el punto b,
del punto d se tire paralela a la ab la
recta df, asta que toque la perifesia del circulo
en f desde donde caiga la perpendicular fg
y tirese la recta ef: digo, que la recta gb, es
la suma del 1º y 2º, y la recta ag, es la suma
del 3º y 4º, y la recta gp es la suma del 2º,
y 3º,

Demonstracion

Por ser continuas son propor az . . zg . . zg . . gy
luego (prop. 18. libro 5º eV) ag . . zg . . zy . . gy-
Por ser continuas lo son zg . . gy . . gy . . yb
luego (prop. 18. lib. 5º eV) lo son zg . . zy . . gy . . gb-
luego (prop. 11. lib. 5º eV) lo son ag . . zy . . zy . . gb
y tos (prop. 13 lib. 6º eV) ag . . gp . . pg . . gb
luego esta resuelta y demonstradas ser las partes
az . . zg . . gy . . yb continuas cuya suma
ab, 4ª y 3ª ag . 2ª y 1ª gy, 2 yb, 3, y, 2ª, gp

ssossi son lo quatro continuos by . . yg . . gz . . za delos quales se deseava saber: luego &c.

Prop. 7

Dada la suma del 1° y 2°, ab, y dado el quad. bcb, difª de dos quadrados el uno de la suma de 2° y 3° y el otro de 3° y 4 se piden los quatro terminos continuos

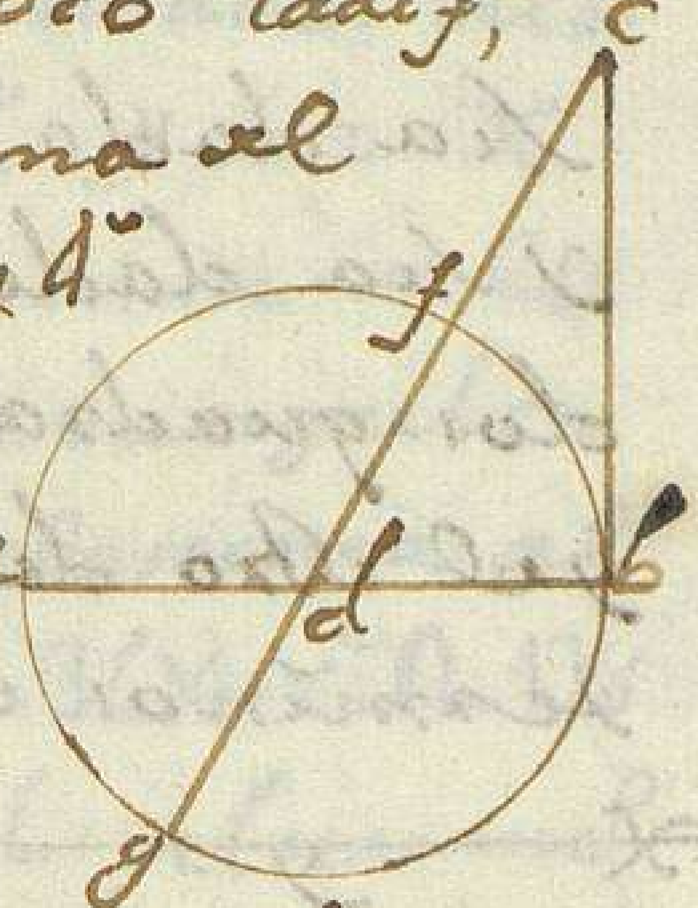
Analisis

Por suposicion son propor. ax . . xb . . xb . . by
luego (prop. 18. lib. 5. eV) lo son ab . . xb . . xy . . by
por suposicion son propor. xb . . by . . by . . yz
luego (prop. 18. lib. 5° eV) lo son xb . . xy . . by . . bz
luego (prop. 11. lib. 5 eV) lo son ab . . xy . . xy . . bz
luego (prop. 16. lib. 6° eV abz = xyx
luego por suposicion bzb − abz = bcb
Digo que esta vuelto. Agase bg = ab
y seran iguales (prop. 2ª lib. 2° eV) bzb = bzg + zbg
pero tambien lo son iguales abz = zbg
luego (axioma 3° eV) quedan bzg = bcb
y (prop. 17 lib. 6° eV) propor. bz . . bc . . cb . . gz
luego sea reducido ha hallar dos rectas bz, y gz cuia difª bg es conocida reciprocas ala recta da bc lado del quadrado dado, bcb luego esta resuelta y demostrada la posicion y bolbiendo por los contrarios argumentos dade el fin al principio quedaran conocidos los quatro terminos conts, ax . . xb . . by . . yz los quales deseabamos conocer.

+

Resuelbese esta misma prop. por Algebra
Sea pues a la suma del 1º y 2º y sea
x la suma del 3º y el 4º: luego como cons
ta del analisis el rectangulo ax sera
ygual al quadrado de la suma del 2º y 3º,
cuyo quadrado se restara del quadrado de
la suma del 3 y 4 el qual es x^2 y el residuo
se yguale ha la cantidad b^2 la qual se ada
da por difª de los dos quadrados hechos el uno
de la suma de 2º y 3º y el otro de la suma de 3º y 4º,
cuya igualacion sera la siguiente $x^2 - ax = b^2$
luego esta clara la determinacion.
Agase el quadrado de $\frac{a}{2}$ el qual sera $\frac{a^2}{4}$
que sumado con b^2, sera la suma
$\frac{4b^2+a^2}{4}$ cuia raiz sera $\sqrt{\frac{4b^2+a^2}{4}}$ aquien
añadiendole $\frac{a}{2}$ sera la suma $\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{4b^2+a^2}{4}}$
cuya mitad sera el valor de la letra x que
hemos puesto por suma de 3º y 4º: luego sien
do conocida dha suma se podra conocer
su quadrado a quien restado la cantidad b^2,
el residuo sera el quadrado de la suma de
2º y 3 pues conocido su quadrado se conocera
la suma de dho 2º y 3º: luego se conoceran
cada uno de los quatro terminos como antes
que es lo que se dusca.

Esta misma prop. se resuelbe por geometria
en la forma siguiente.
Sea pues la recta ab suma del 1º y 2º



termino y sea el quadrado bcb la difª de los quadrados el uno de la suma del 2º y 3º y el otro de la suma de 3º y 4º
Ponganse ab, y bc lado del quadrado (por la 11 del 1º de E) en angulos rectos y sobre ab, como diametro se describa el circulo y por su centro d se tire la recta cg que cortara al circulo en los puntos f, g
Digo que la linea gc equivale a la suma de los dos terminos 3º y 4º.

Demostracion

Por la (prop. 47 libro 1º de E) dcd = dbd+bcb
luego (axi. 1º de E) lo seran dcd−dbd = bcb
esto es (prop. 36 lib. 3º de E) lo son gcf = bcb
y (prop. 14 lib. 6º de E) propor. gc . bc :: cb . cf
luego como queda demostrado en el analisis se reduce a hallar las dos rectas gc, cf cuya difª conocida gf, o su igual ab reciprocas a la recta bc, lado dado del quadrado bcb: luego el rectangulo cgf hecho de la suma de 1ª y 2ª por la suma de la 3ª y 4ª, es el quadrado de la suma de 2ª y 3ª cuya raiz es la suma de la 2ª y 3ª: luego como consta del Analisis esta clara la terminacion de las partes continuas las quales se deseaban saber que es lo que deseamos demostrar: luego queda resuelto el problema.

Prop. 8

Sea dada la Recta ab suma del 3.º y 4.º y sea dado el quadrado aca Difª de los dos quadrados, el uno, de la suma del 1.º y 2.º y el otro del 2.º y 3.º, se piden los quatro terminos continuos proporcionales.

g x y a z b

Analisis

por supocicion son propor. xy..ya..ya..az
luego (prop. 18. lib. 5.º E) . . xa..ya..yz..az
por supocicion son propor. ya..az..az..zb
luego (prop. 18. lib. 5.º E) ya..yz..az..ab
luego (prop. 11. lib. 5.º E) xa..yz..yz..ab
luego (prop. 16. lib. 6.º E) xab ― = ― yzy
luego por supocicion seran xab-xax ― = ― aca
Agase ga = ab y seran gax ― = ― xab
esto es (prop. 3.ª lib. 2.º E) gax ― = ― gxa+axa
luego quedaran iguales gxa ― = ― aca
y (prop. 14. lib. 6.º E) propor. gx..ac..ca..xa
luego esta Vuelta pues se reduce hahallar dos Rectas gx, xa cuya suma es ga como cada Reciprocas ala Recta dada ac, lado del quadrado dado aca: luego halladas que sean las Reciprocas Bolbiendo por los contrarios argumentos se determinaran las quatro continuas las quales se deseaban saber.

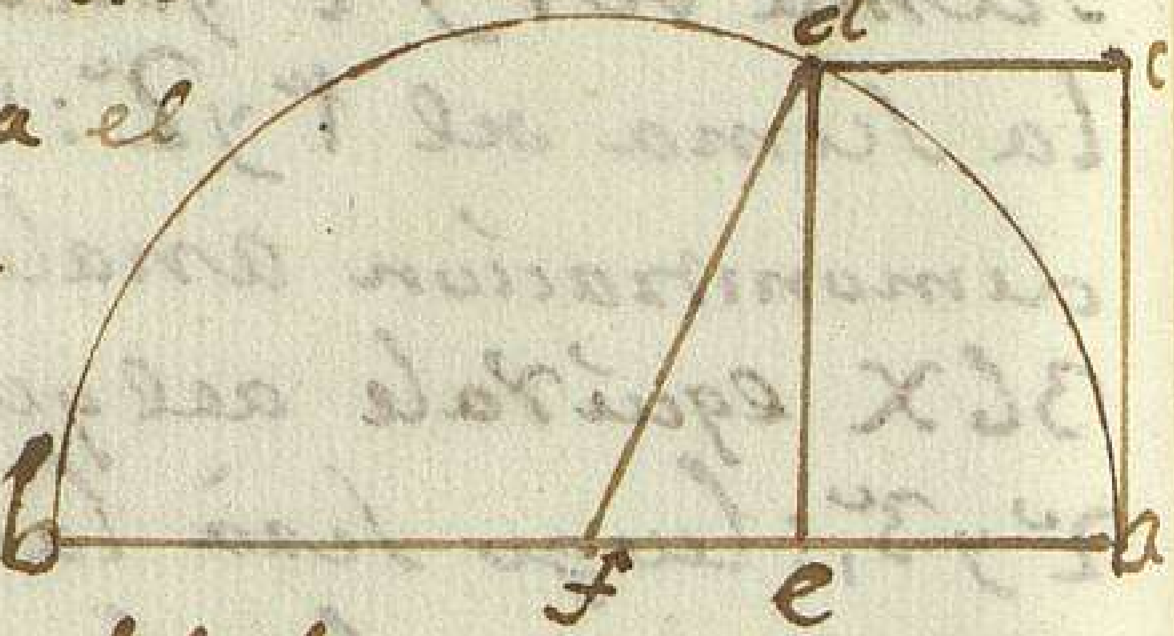
Resuelbese por Algebra

Sea pues la suma de 3.º y 4.º, 36 y sea dado el numero 128 difª delos quadrados dela suma del 1º y 2º y dela del 2º y 3º, y sea X la suma del 1º y 2º: luego como consta dela demonstracion analitica el rectangulo 36X equivale al quadrado dela suma del 2º y 3º; luego será la igualacion $36X - X^2 \Omega 128$ Ayase el quadrado dela mitad del numº que acompaña ala X el qual es 36 su mitad es 18 su quadrado 324 del qual restado el numero dado q. es 128 queda de residuo 196 cuya raiz quadrada es 14 que restado de 18 quedan 4 suma del 1º y 2º valor dela X: multiplicando 36 por 4 el producto es 144 cuya raiz quadrada es 12 suma del 2º y 3º, y para la terminacion delos continuos como antes, 36 y 12 son 48 y son proporcionales 48 . 12 . 12 . 3 y este 3 es el segundo termino que restado de 4 viene 1 por primer termino, y restado el 3 del 12 quedan 9 tercer termino y este resta do de 36 quedan 27 y son los quatro terminos continuos 1 . 3 . 9 . 27. que se deseavan saber: luego se a resuel to por Algebra la misma prop.

Esta misma Prop. se resuelbe por Geometria en la forma siguiente.

Sea dada la recta ab suma del 3º y 4º como antes y sea dado el quad. aca difª delos dos quadrados el uno dela suma del 1º y 2º y el otro ala suma del 2º y 3º.

Construccion



Sobre ab se describa el semicirculo, y pongase la recta ac. lado del quadrado dado perpendicular al extremo del diametro, y tirese cd paralela (prop. 31. lib. 1º eu) ala ab, y dexese caer (prop. 12. lib. 1º eu) la perpendicular de, sobre el diametro ba. en el punto e: digo, que la recta ea es la suma del primero y 2º terminos

Demonstracion

tirese del centro fd, y considerese el triangulo que por construccion es rectangulo: luego (prop. 47 lib. 1º eu) son iguales los quadra.s fdf Ω fef + ded
luego (axi. 3º eu) tambien lo son fdf - ded Ω fef
estos son iguales (coro. prop. 46. lib. 1º) fdf - aca Ω fef
estos tambien son iguales . . . bfb - fef Ω aca
estos (prop. 6º y ... ... diccion, rgo) bea Ω aca
luego (prop. 14. lib. 6º eu) propor.' be . . ac . . ca . . ea
luego emos venido a parar en allar las dos rectas be, ea, cuia suma es la recta conocida ba reziproca ala dada ac, y alladas quedan, poner, las rectas ba. ea en una recta, y obrando como queda demonstrado en la primera resolucion analitica se pararan los terminos continuos que se dicen sacar, que es lo que se avia de demonstrar.

Prop. 9

Dada la Recta ab suma del 1º y 3º, y dado el quadrado bcb el qual sea contenido de la suma del 1º y 2º por la difª del 3º y el 4º se piden los quatro terminos continuos proporcionales.

a x m y b

Analisis

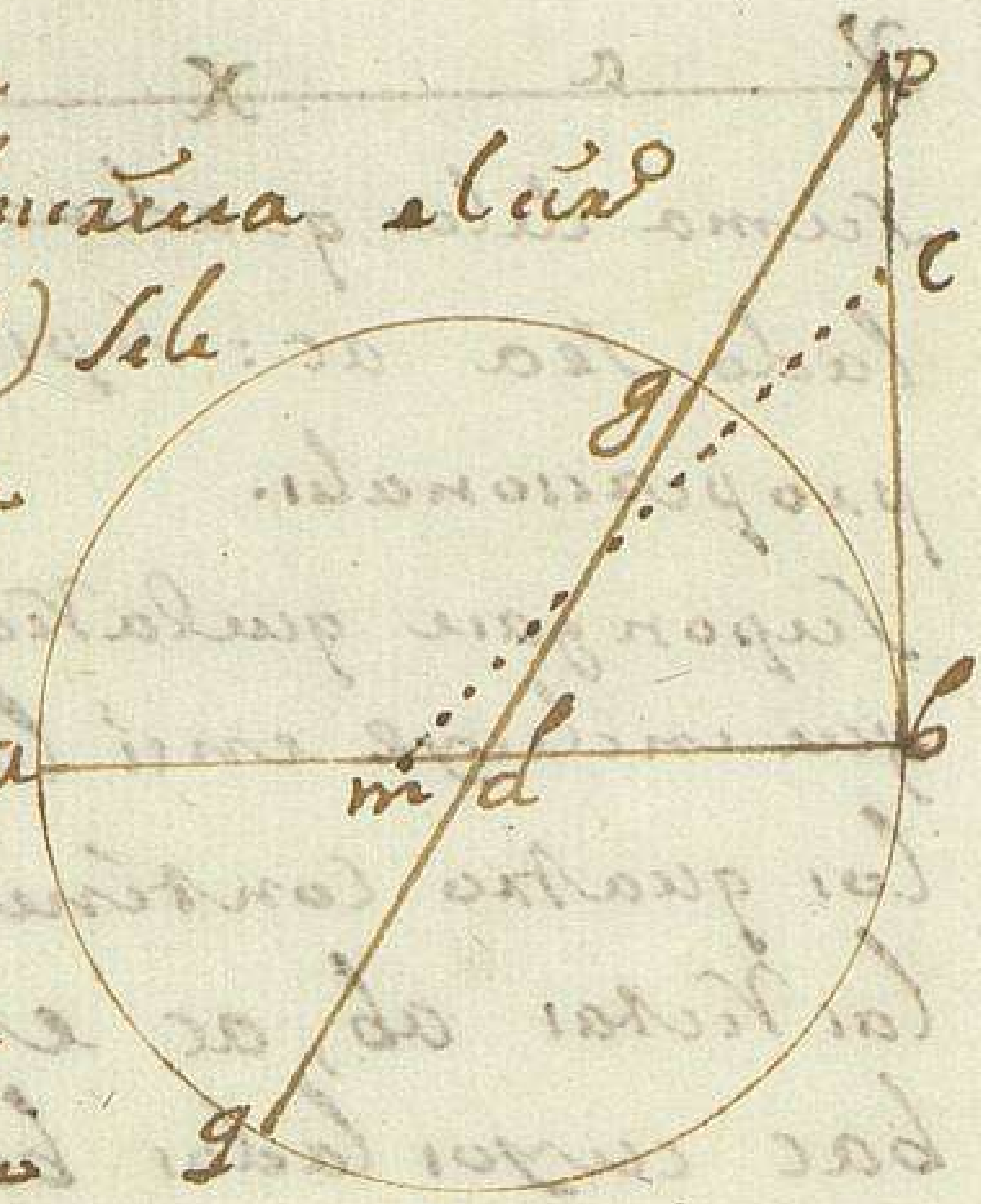
Sea la Recta ab divida (prop. 10 lib. 1º eV.) dividida por mitad en m: digo que dos, estos 2mx es la difª entre ax, y xb estos es entre el 1º y 3º, terminos de los quatro continuos que se buscan: luego si la difª, 2mx se añade a la suma ab estos ab+2xm sera igual â 2xb estos seran iguales . . . . $ab+2xm = 2xb$
y de la misma suerte seran $ab-2xm = 2ax$
luego la suma sera . . $2ab = 2ax+2xb$
cuya mitad componen la Recta $ab = ax+xb$
luego 2xm es la difª del 1º y 3º y sea $xm = my$
esto demostrado seraa el Rectangulo de ab+xy por la misma xy y sera ab:xy+xyx el qual se ygualara al Duplo bcb, estos es, $ab:xy+xyx = 2bcb$
Digo que esta Resuelto porque (prop. 14. lib. 6º eV) son propor.s los terminos ab+xy . 2bc . . cb . . xy y se reduce ha hallar las dos Rectas, ab+xy , xy, cuya difª es ab conocida Reciprocas a las dos Rectas dadas 2bc, y cb.

esta misma prop. se resuelbe Por el Algebra en la forma que se berâ a la Buelta.

Sea pues la Suma del primero y el tercero 51
y sea dado el numero 2160 el qual es pro
ducto dela Suma del 1º y 2º por la difª del 3º y el 4º
y supongamos ser X la difª del 1º y el 3º
luego como antes $51+X$ por X produzen
$51X+X^2$ y sera la igualacion $51X+X^2 \;\Omega\; 4320$
el quadrado dela mitad de 51 sera $\frac{2601}{4}$ que su
mado con 4320 reducidos a el qª brado $\frac{17280}{4}$ sera
la Suma $\frac{19881}{4}$ cuya raiz quadrada $\frac{141}{2}$ ala
qual sele añade los $\frac{51}{2}$ sera la Suma $\frac{192}{2}$ cuya
mitad seran 96 el qual es el duplo del 3º ter
mino: lo qual queda demonstrado en el Analisi
luego sera el 3º 48 que quitados de 51 suma del
3º y 1º sera el 1º, 3, y porque la proporcion
se pide continua multiplicando el primero
por el tercero, y del producto sacando la raiz
quadrada se conocera el 2º como en el caso
presente 48 por 3 hazen 144 su raiz son 12
luego son los quas continuos 3..12..48..192
la difª del 3º y 4º esto es de 48 y 192 es 144 que
multiplicada por 15 suma del 1º y 2º el
producto sale 2160 el qual es el mesmo que
se dio y sumando primero con tercero esto es
3 con 48 hazen 51: luego se han hallado los
quatro continuos que se deseava saver.

Esta mesma prop. se resuelve por
Geometria en la forma que se ve en la
siguiente operacion.

Construcion



Sobre la Recta ab se descriva el circ.° agb, y (propo. 11. lib. 1.° E.) levante la perpendicular bc, lado del quadrado dado bcb, y alarguese a hasta p de suerte que bp sea lado del quadrado duplo de bcb, y por el centro d se tire la Recta pg: Digo que la Recta gp es la dif.ª del primero y tercer termino, (cuya suma de ambos es lado ab ó su igual, gg) la qual es la quarta proporcional porque (prop. 36. lib. 3.° E.) el Rectangulo gpg = bpb: luego (prop. 14. lib. 6.° E.) proporcion: gp . . bp . . pb . . gp. cuya gp corresponde a la xy, que en el analisis quedo demonstrado ser dif.ª del 1.° y 3.° termino: luego esta resuelto. Para hacer un quadrado duplo de otro se be en el triangulo rect.° ysosceles mbc, a cuya ypotenusa mc, se a de poner igual bp. y al contrario para hacer un quadrado mitad de otro sobre la mc ó su igual bp se descriva un circulo y en el se inscriva el quadrado (prop. 6. lib. 4.° E.) y qualquier lado será lado del quadrado que ha de ser mitad del quadrado bp ó de su igual mc.

Prop. 10

Dada la suma de los quadrados del 1.° y 4.° termino cuyo lado sea la Recta ab y dada la

+

$\overline{V \quad a \quad x \quad c \quad b \quad y \quad g}$

suma delos quadrados del 2° y 3° termino cuyo lado sea ac: Se piden los quatro continuos proporcionales.

Supongase que la recta ag es lado del quadro que incluye en si la suma delos quadrados de los quatro continuos para lo qual se consideran las rectas ab, ac en angulos rectos el triangulo bac cuyos lados ba, ac y su potenusa sea ag. que (prop. 47. lib. 1° E) los quadrados aba+aca seran iguales al quadrado esto es, aba+aca Ω aga y por $\overset{3}{q}$ (prop. 22. lib. 6.° E) los quadrados proporles estan sobre lados proporles se formara la proporcion.

Analisis

Sonpues los quatro continuos los terminos siguientes . yg . . ax . . xc . . cy

Agase Va Ω yg, sera, Va . . ax . . xc . . cy

y porque son continuas proporles

luego singuira Va . . ax . . ax . . xc

y componiendo Vx . . ax . . ac . . xc -

y tambien lo son ax . . xc . . xc . . cy

luego (prop. 18. lib. 5 E) ax . . ac . . xc . . xy

luego (prop. 11. lib. 5° E) Vx . . ac . . ac . . xy

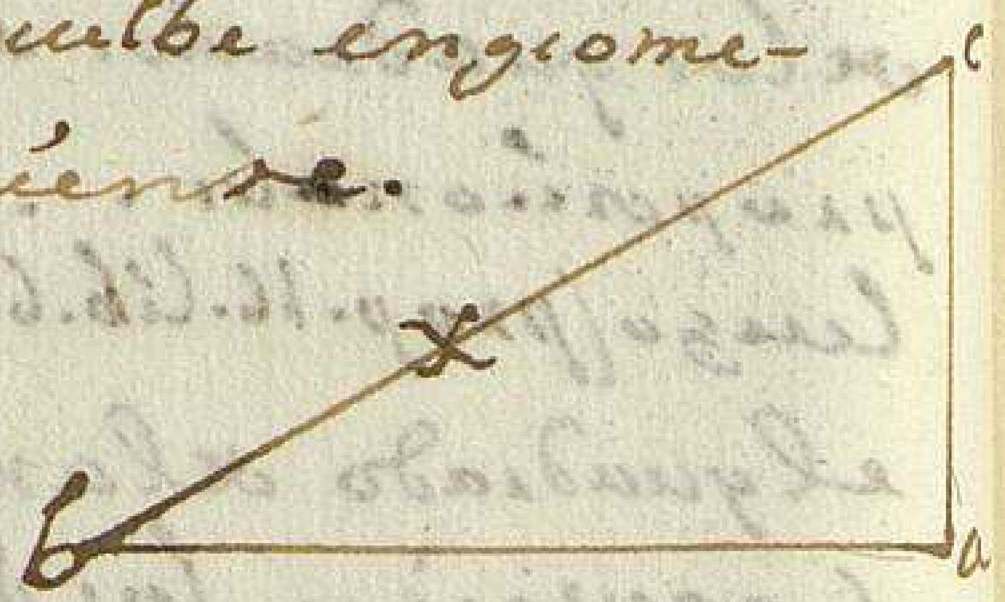
Digo que esta resuelto porque se reduxo a ha hallar dos quadrados cuyos lados son Vx y xy su suma el ado ag, reciprocos al quadrado aca cuios lados son ac.

Por Algebra sea aga Ω 85, y sea aba Ω 65 y sea aca Ω 20, sea x suma delos qq.dos 2° y 3°: luego precisamente ~~se~~ sera 85 — x la suma

de los quadrados del 3º y 4º terminos, y seran proporcionales . . . . . $85-x$ . . 20 . . 20 . . x
luego (prop. 16. lib. 6º de E.) seran $85x-x^2 \sqcap 400$
el quadrado de la mitad de 85, es $\frac{7225}{4}$ de quien se restaran los 400 q̃ reducidos son $\frac{1600}{4}$ y queda de residuo $\frac{5625}{4}$ cuya raiz quadrada es $\frac{75}{2}$ que restados de los $\frac{85}{2}$ quedan $\frac{10}{2}$ esto es 5, enteros suma del 1º y 3º y restado de los 85 quedan 80 a quien añadiendole los 20 suma de los quadrados del 2º y 3º sera la suma 100 cuya raiz quadrada es 10 suma del 2º y 4º luego la suma de todos quatro es 15: luego (por la 3ª proposicion) supongase y por la suma de los medios y sera $15-y$ suma de los extremos cuyo quadrado $225+y^2-30y$ de que restado el quadrado dado 65 queda de residuo $160+y^2-30y$; digo que son proporcionales $15+2y$ . . $2y^2$ . . y . . $160+y^2-30y$ esto es demediando q̃ dan $15+2y$ . . y^2 . . y . . $80+\frac{y^2}{2}-15y$
luego (prop. 16. lib. 6º de E.) $2400 \sqcap 45y^2+130y$
y deprimiendo por 5 q̃ dan $480 \sqcap 9y^2+26y$
y deprimiendo por 9 quedan $\frac{480}{9} \sqcap y^2+\frac{26y}{9}$
luego la mitad de $\frac{26}{9}$ son $\frac{13}{9}$ su quadrado sera $\frac{169}{81}$ sumado con $\frac{480}{9}$ esto es reducidos $\frac{4320}{81}$ hazen la suma $\frac{4489}{81}$ cuya raiz quadrada $\frac{67}{9}$ de quien restando $\frac{13}{9}$ quedan $\frac{54}{9}$ esto es 6 enteros valor de y suma de los medios: luego quedan 9 por la suma de los extremos cuya determinacion de cada uno por la 2ª prop. se hallara seran los siguientes . . 1 . . 2 . . 4 . . 8 q̃ eran dados.

Esta misma prop. se resuelbe en geome-
tria en la forma siguiente.

Construcion



Sea la recta ba la pot
tad del quadrado delos es
tremos y la ac delos medios, ponganse en
angulos rectos (prop. 11. libro 1º de E. y tirese la
recta cb. la qual nos representa la potencia
que diximos ag, en el analisis: digo que siendo
el quadrado de la ba lado del quadrado que es la
suma delos quadrados del 1º y 4º termino, y
el quadrado dela ac suma delos quadrados
del 2º y 3º termino: luego el quadrado dela
bc (prop. 47. lib. 1º de E) es igual a estos $bcb = aba + aca$
Luego esta resuelto ya mostrado en el
Analisis el q̃ se hallen propor. bx . ac . ca . xc
cuya suma delos reciprocos bx, xc sea la recta
bc y allados que seran la recta bx, suma de 1º y 2º
y la recta xc suma de 3 y 4º. luego &a.

Prop. 11.

Dada la difª delos quadrados delos extremos
y dada la difª delos quadrados delos medios
Hallar los quatro continuos proporcionales.

Analisis

Sea dada la recta ab lado de un quadrado
el qual sea difª delos quadrados delos terminos
primero y quarto de quatro continuos propor
cionales, y sea asimismo dado el quadrado cbc
difª delos quadrados delos dos terminos segun-

y tercero, se piden a ——— x ——— c ——— b
los quatro continuos proporcionales.
Esta prop. es inbersa dela anterior en la qual
se pedia la recta ag, lado del quadrado que
ynclu[í]a en sí la suma delos quadrados de todos:
luego, en esta tomaremos dif.^a y siendo, ab, lado
del quadrado que incluye la dif.^a delos quadrados
delos extremos, como asimismo cb, lado del quad.
que incluye la dif.^a delos quadrados delos medios:
luego la dif.^a de ab, y cb, que es ac se deve
dividir reciprocamente, con el lado cb, ha
ciendo las proporc.^s ax.: cb. bc. xc
la qual prop. queda resuelta.

De la misma manera se resuelbe por el
Algebra pues se ve mediante.
Sea pues el quadrado aba, 63 y el quadrado
cbc 12: luego la dif.^a sera 51 el qual repre
senta el quadrado aca: luego seran
proporcionales los ter.^s 51-x. 12. 12. x
luego (prop. 16. lib. 6.^o) seran $51x - x^2$ ═ 144
el quadrado dela mitad de 51 es $\frac{2601}{4}$ deguien
se quite el quadrado 144 que reducido $\frac{576}{4}$ quedan
$\frac{2025}{4}$ cuya raiz quadrada es $\frac{45}{2}$ que restados
delos $\frac{51}{2}$ quedan $\frac{6}{2}$ esto es 3 enteros por el
valor dela letra x la qual representa el qua
drado que incluye la dif.^a delos quadrados del 1.^o
y 2.^o termino que en este exemplo es 3 el que
restado delos 51 quedan 48 dif.^a delos quadrados
del 3.^o y 4.^o termino: luego conocidas las dif.^as y

38 delos quadrados sera facil deconozer los qua
drados pues las diferencias seran enla mis
ma proporcion que sus quadrados.

Demonstracion

Sean quatro terminos conti. a . . b . . c . . d
q. vayan demayor amenor
luego (prop. 22. lib. 6.º) sus quad.s a^2 . . b^2 . . c^2 . . d^2
tambien lo son propor. . a^2 . . b^2 . . b^2 . . c^2
y (prop. 17. lib. 5.º eV) lo son a^2-b^2 . . b^2 . . b^2-c^2 . . c^2
y (Difr. 12. lib. 5.º eV) lo son a^2-b^2 . . b^2-c^2 . . b^2 . . c^2 —
y tambien son propor. b^2 . . c^2 . . c^2 . . d^2
y (propo. 17. lib. 5.º eV) lo son b^2-c^2 . . c^2 . . c^2-d^2 . . d^2
y (Difr. 12. lib. 5.º) lo son b^2-c^2 . . c^2-d^2 . . c^2 . . d^2
luego las difs. son . b^2-c^2 . . c^2-d^2 . . a^2 . . b^2
y son (prop. 11. libro 5.º eV): luego las difas. tienen
entresi la misma proporcion que sus quadra
dos que es lo que se avia dedemonstrar.

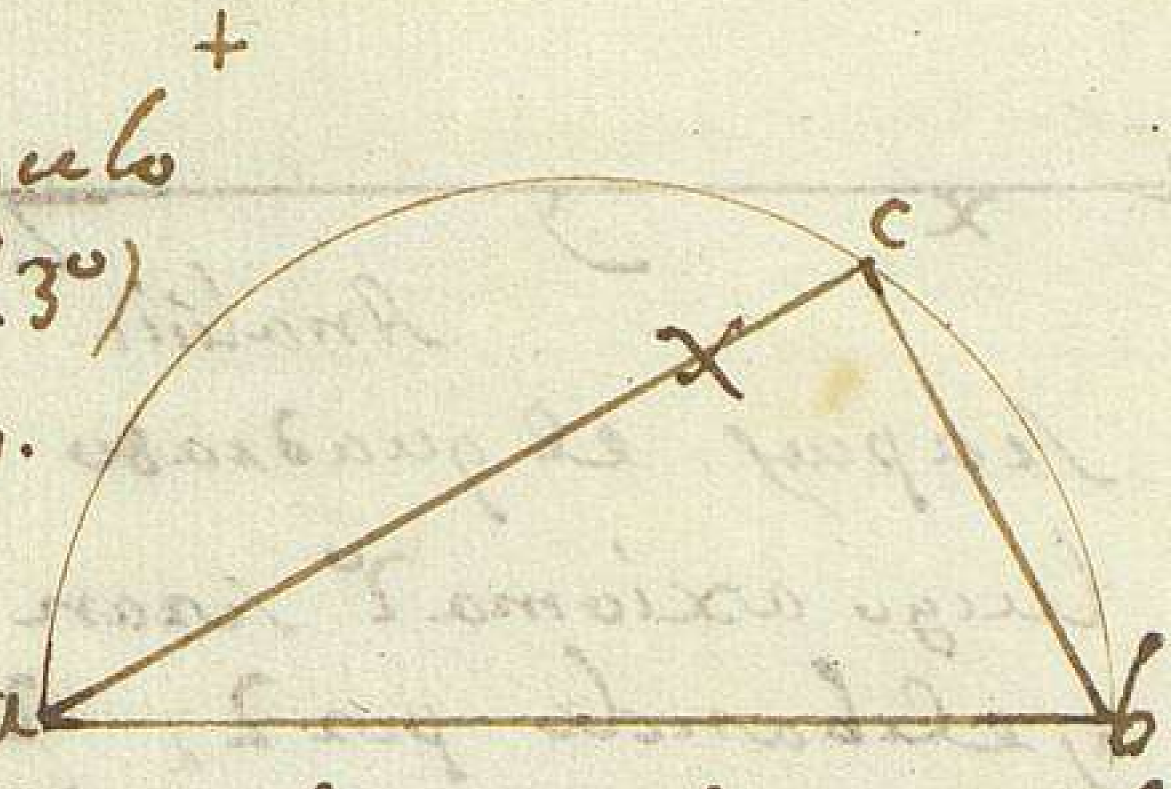
Y lo mismo se deve entender delos
Agregados porq. se puede Arguir Compo
niendo Co[n]tra Arguiendo Dividiendo.

Demuestrase esta propn. por geome
tria en la forma siguiente.

Construcion

Sobre la recta ab lado del quadrado, di
fa. delos quadrados delos estremos se descri
ba el semicirculo y acomodese enel (pro
p. 1.ª lib. 4.º) la recta bc, lado del quadrado
que incluye en si la difa. delos quadrados
delos medios, y tirese la recta ca.

consideresse el triangulo que acb que (prop. 31. lib. 3º) es rectangulo y (prop. 47. lib. 1º est) los quadrados desus lados



ac y cb son iguales al qdo. de ab esto es, aba ꭥ aca + bcb luego (axi. 3º est) quedan iguales aba - bcb ꭥ aca luego la proporcion seara bc . . cx . . xa . . cb luego esta resuelto que es lo que se deseava saber pues la parte xc representa la difa. delos quadros del 1º y 2º termino, y la parte ax representa la difa delos quadrados del 3º y 4º.

Prop. 12

Dada la suma delos quadrados de quatro conti nuos propor, y dado el rectangulo contenido dela suma del 1, 2, y 3º terminos por la suma del 2º y 4º termino se piden los quatro continuos.

En esta prop. bien entendida nos enseñan que dada la suma delos quadrados delos quatro con tinuos y dado el rectangulo delos mismos se pide la suma de todos, y sabida esta se reduce ala primera deste quaderno por lo qual se seguira la misma operacion por los contra rios argumentos

Sea dado el quadrado aca suma de los quadrados, y sea dado el quadrado hh, el qual es contenido de todo dela suma del primero segundo y tercero, por la suma del segun. y quarto.

40 a —— x —— y —— z —— b

Analisis

Sea pues el quadrado $hh - xzx \sqcap axy + yzb$

luego axioma 2º seran $hh \sqcap axy + yzb + xzx$

y elebando por 2, $2hh \sqcap 2axy + 2yzb + 2xzx$

luego (axi. 2º eu) $2hh + aca \sqcap aca + 2axy + 2yzb + 2xzx$

esto es (prop. 4. lib. 2º eu) $aba \sqcap aca + 2axy + 2yzb + 2xzx$

esto es lo seran $aba \sqcap aya + yby + 2xzx$

esto es seran $aba \sqcap aya + yby + 2ayb$

luego queda conocida la suma ab compuesta de la suma de los quatro continuos si demostrare asi. Son pues iguales .. $2ayb \sqcap 2xzx$

luego amediando lo son $ayb \sqcap xzx$

y (prop. 14. lib. 6º eu) son ay . . xz . . xz . yb

pero esta demostrado ser . . xy . . xz . . yz . . yb

luego (prop. 17. lib. 5º eu) . . . xy . . yz . . yz . . zb

y tambien lo son . . . ay . . xy . . xz . . yz

luego (prop. 17. lib. 5º eu) . . ax . . xy . . xy . . yz

esto es (prop. 11. lib. 5º eu) ax . . xy . . yz . . zb

luego emos allado las quatro continuas que es lo que se deseaba saber.

Por algebra

Sea pues el quadrado aca igual â 85

y el Plano o quadrado hh igual â 70

luego dos hh, ó otro hh sera . . . 70

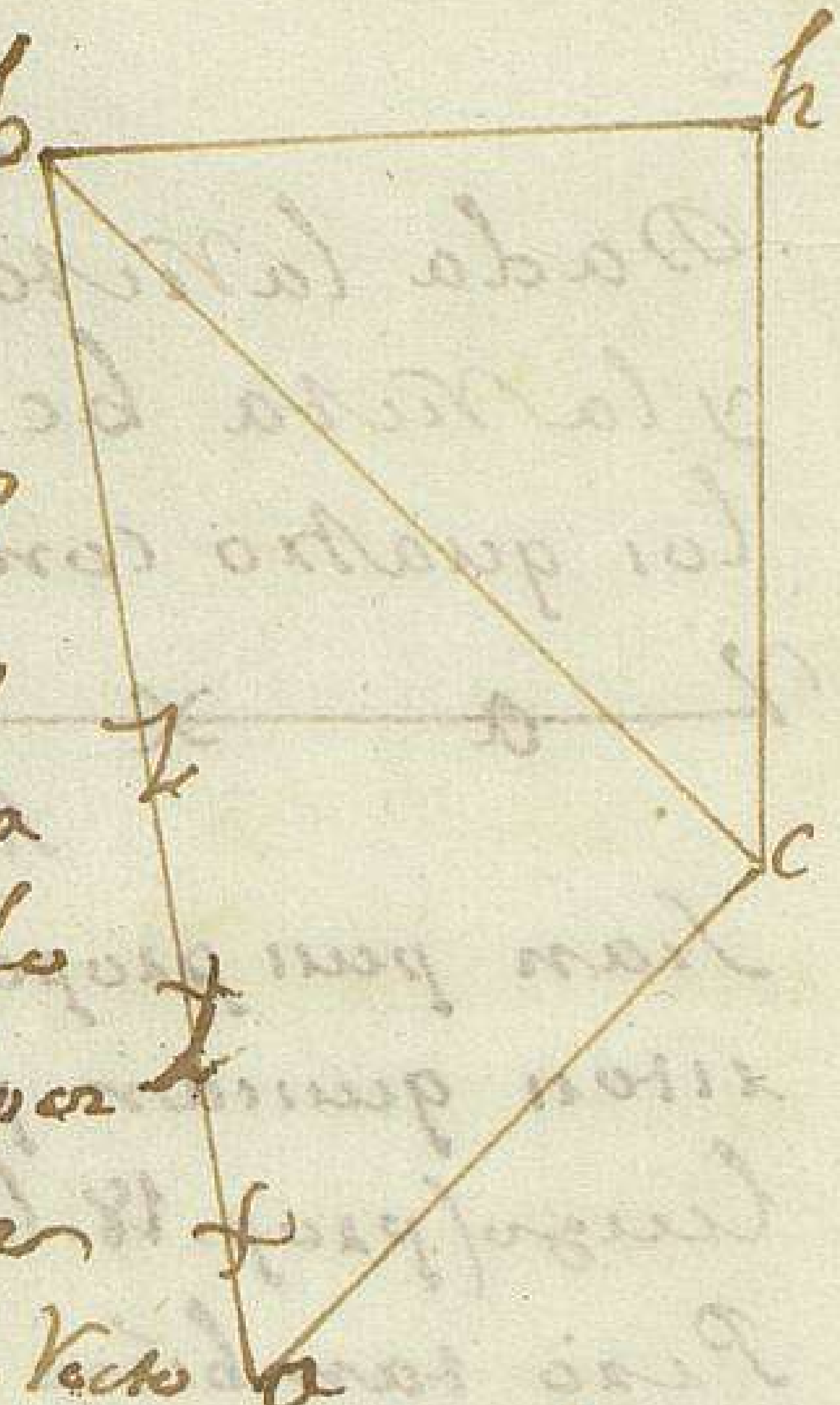
cuya suma de todos sera . . . 225

su raiz quadrada 15 y los son 1 . . 2 . . 4 . . 8

la suma del 1º, 2º y 3º son 7, la suma de 2º y 4º

son 10 cuyo producto 70. luego &c.

Esta misma prop. se demues-
tra geometricamente assi.



Construccion

Sea pues como antes el quad.º
aca suma de los quadrados
de los quatro continuos, y sea
el quadrado bhb el contenido
debaxo de la suma del 1º 2º y 3º por
la suma del 2º y 4º, Pongansse
bh y hc iguales, y en angulo recto
en h, y tirese la hipotenusa bc, sobre la qual
se levante (prop. 11. lib. 1º eucl.) la perpendicular
ca, y se tire la hipotenusa ab: digo, que
ab, es la suma de los quatro continuos pro
porcionales los quales son ax. xy. yz. zb

Demonstracion

Por suposicion el quadrado bhb es el de los rectan
gulos: luego su duplo sera bhb+hch, Pero (pro
p. 47. lib. 1º eucl.) el quadrado bcb = bhb+hch
y por la misma se sigue aba = bcb+aca
luego ab, es la suma de los quatro continuos
pues su quadrado se iguala al quadrado, aca,
suma de los quadrados, y al quadrado bcb
suma del duplo rectangulo contenido
de los quatro continuos que es lo que se
avia de demonstrar.

+

Prop. 13

Dada la recta ab suma de los medios y la recta bc suma de los extremos se piden los quatro continuos proporcionales.

v — a — x — b — y — c

Analisi

Sean pues propor^s. como se pide $yc..ax..ax..xb$
estos queran proproporcionales $va..ax..ax..xb$
luego (prop. 18. lib. 5 e V) ... $vx..ax..ab..xb$
Pero tambien lo son ... $ax..xb..xb..by$
luego componiendo lo son $ax..ab..xb..xy$
y (prop. 11 lib. 5 e V) son propor^s. $vx..ab..ab..xy$
luego resuelta pues se reduce ha hallar las dos rectas, vx, xy cuya suma conocida es ac, reciprocas ala recta dada ab.

Demonstrase por algebra

Sea pues la recta ab suma de los medios y su balor sea 6, y sea la recta bc suma de los extremos, y su balor sea 9: luego por ser continuos proporcionales si el quadrado del tercero se parte por el segundo el cociente sera el quarto; y si el quadrado del segundo se parte por el tercero el cociente sera el primero: luego la suma de los cocientes se igualara ala suma de los extremos 9.

Sea supuesto ser 6 la suma del segundo y el tercero, sea pues x el segundo luego sera $6-x$ el tercer termino cuyo quadrado es $36+x^2-12x$ que partido por el

2° quien x sera el cociente $\frac{36+x^2-12x}{x}$ igual del
quarto termino, y de la misma forma el quadra-
do del 2° es x^2 que partido por el 3° sera el
cociente $\frac{x^2}{6-x}$ igual del primero cuya suma
de los dos cocientes se igualaran ha 9 por
ser la suma del 1° y 4°, y porque para sumar
quebrados se deven reducir a un comun deno-
minador se reduciran los quebrados $\frac{36+x^2-12x}{x}$
$\frac{x^2}{6-x}$ y reducidos seran $\frac{216+18x^2-108x-x^3}{6x-x^2}$ y el
primero $\frac{x^3}{6x-x^2}$ los quales sumados sera la
suma de ambos $\frac{216+18x^2-108x}{6x-x^2}$ cuya suma
se deve igualar a los 9 y sera la igualacion
$\frac{216+18x^2-108x}{6x-x^2}\ \Omega\ 9$ y elebando seran
iguales, $216+18x^2-108x\ \Omega\ 54x-9x^2$ como entre
luego (axio. 2° y 3°) dan $216\ \Omega\ 162x-27x^2$ y supri-
miendo por 27 quedan $8\ \Omega\ 6x-x^2$: luego
esta esta vuelto como antes pues son pro-
porcionales $1..6-x..x..2$ y la deter-
minacion se hara asi, la mitad de 6 es 3 su
quadrado es 9 de quien se restaran los 8 y del
residuo 1 se saque la raiz quadrada y sumada con
tres asen 4 y sera el 3° termino y la raiz resta-
da de los 3 quedan 2 sera el 2° termino cuyo
quadrado es 4 partido por el 3° que es 4 viene
del cociente 1 que es el primero, el quadrado del 3°
es 16 partido por el 2° viene del cociente 8 quarto
termino, y son los quatro continuos $1..2..4..8$
que son los que di[...] saber.

Corolario

el cubo dela Suma del 2º y 3º separta por el triplo de dha suma junta con la suma del 1º y 4º y el cociente se resta del quadrado dela semisuma del 2º y 3º y del residuo se saque la raiz quadrada, la que se restará de dha semi suma, y quedará el 2º termino, y añadien do la raiz, a dha semisuma, será el 3º termº, como se ve en el exemplo, el cubo de 6, es 216 partido por el triplo de 6 y mas 9 suma del 1º y 4º (que todo haze 27 el partidor) viene del cociente 8 el qual restado del quadrado dela semisuma del 2º y 3º que es 9, y seguido 9 queda de residuo 1 cuya raiz quadrada es 1 restada dela semi suma del 2º y 3º que es 3 quedan 2 por el 2º ter mino, y añadida la raiz 1 al 3 que es dha semi suma hazen 4 por el valor del 3º termino y esto mismo se executará en todos, y qualquiera propocion continua que se den cono cidos suma de medios, y suma de extremos.

Demostracion en geometria

Sea dada la suma de los extremos la recta g, y sea dada la recta ab suma de los medios y haganse propor.^s^ g+3ab . . ab . . aba . . bcb luego los solidos serán g+3ab:bcb ∩ abab esto es que el solido sobre el quadrado bcb, en la altura, g junta con el triplo ab será igual al cubo abab. Sobre la recta ab, se des crive el semicirculo adb, y levantando las

perpendicular bc (prop. 11. lib. 1º)
y tire la recta cd paralela
a la ab, y del punto d,
prop. 12 lib. 1 eu.) la perpen
dicular de, sobre el diametro ab: Digo que
las rectas ae, eb son las dos medias continuas pro
porcionales.

Demonstracion

Por construccion son proporc.^s $g+3ab\ .\ ab\ ..\ aba\ .\ bcb$
y tambien lo son iguales . . . . . $\frac{abab}{g+3ab} \sqcap bcb$
otros (coro. prop. 16. lib. 1º eu.) lo son iguales $\frac{abab}{g+3ab} \sqcap ded$
Tire la recta fd del zentro f: luego (prop. 47. lib. 1º eu.)
los quadrados en el triang.º rectang.º son iguales $fdf \sqcap fef + ded$
luego (axi. 3º eu.) quedaran iguales . . . $fdf - ded \sqcap fef$
luego si el lado fe del quadrado fef, se añade a la af,
y se quita de la fb, suma i difer.ª quedaran ae, y eb
pero (prop. 17. lib. 6º eu.) proporc.^s $ae\ ..\ ed\ ..\ ed\ ..\ eb$
luego (prop. 16 del mismo lib.) son iguales $aeb \sqcap ede$
otros lo son iguales los planos . . $aeb \sqcap bcb$
luego (axi. 1º eu.) lo son iguales $\frac{abab}{g+3ab} \sqcap aeb$
y proporc.^s lo son . . . . $g+3ab\ ..\ ab\ ..\ aba\ ..\ aeb$
y (prop. 15. lib. 5º eu.) lo son $g+3ab\ ..\ 3ab\ ..\ aba\ ..\ 3aeb$
y (prop. 17. lib. 5º eu.) lo seran $g\ ..\ 3ab\ ..\ aba-3aeb\ ..\ 3aeb$
otros (prop. 15. lib. 5º eu.) $g\ ..\ ab\ ..\ aba-3aeb\ ..\ aeb$
luego fue clara la demostracion dicen propor
cionales el agregado de los extremos junto con
el triplo de los medios a la suma de los medios
así el quadrado de la suma de los medios ael

Rectangulo delos dos terminos medios al aeb que es loque sehabia de demostrar.

Asimismo queda demostrado enla ultima analogía ser proporcionales como la suma delos extremos ala suma delos medios assi el quadrado dela suma delos medios menos el triplo Rectangulo delos medios, al Rectangulo delos medios, y inbirtiendo como la suma delos medios ala suma delos extremos assi el Rectangulo delos medios ala difª entre el quadrado dela suma delos medios y el triplo Rectangulo delos medios.

Otra demonstracion

Sea g suma delos extremos, y sea ab, suma delos medios: digo, que son proporcionales como la suma delas medias ala difª dela dha suma, y suma delas extremas assi el Rectangulo delas medias al quadrado dela difª delas mismas medias, Porque queda demostrado ser propors. $g \,.\, ab \,::\, aba-3aeb \,.\, aeb$
luego (prop. 17 lib. 5º eV) $g-ab \,.\, ab \,::\, aba-4aeb \,.\, aeb$
y (Defn 13. lib. 5º eV) lo son $ab \,.\, g-ab \,::\, aeb \,.\, aba-4aeb$
Digo, que $aba-4aeb$, es el quadrado dela difª delas medias loqual se demuestra assi.

Por el corolario 3º (prop. 4ª lib. 2º eV) $aba \sqcap 4fdf$
Pero (prop. 47 lib. 1º eV) lo son $fef+ede \sqcap fdf$
luego elebando por 4 lo seran $4fef+4ede \sqcap 4fdf$
pero (prop. 13 lib. 6 eV) lo son $aeb \sqcap ede$
luego elebando por 4 lo seran $4aeb \sqcap 4ede$
luego seran iguales . . $4fef+4aeb \sqcap 4fdf$

luego (axi. 1º es ∇) $aba \;\Omega\; 4fef + 4aeb$
luego (axi. 3º es ∇) $aba - 4aeb \;\Omega\; 4fef$
pero (prop. 7. yntroducio de Xyo) $2fe$, es la difª delas partes ae, y, eb, y el

quadrado deladtha difª es $4fef$: luego queda demostrado elque $aba - 4aeb$, es elquadrado deladifª delas medias que es loque ofreci demostrar. y Juntamente queda demostrado elque son proporcionales la Suma delas medios ala difª dedtha Suma, y suma deextremos. asi el Rectangulo delos medios, al quadrado dela difª delos mesmos medios.

Corolarios

1 Si fueren quatro continuos proporcionales elquadrado dela Suma delos medios Sumado, conel Rectangulo dela Suma dedhos medios porlasuma delos estremos, es igual al Rectangulo contenido dela Suma detodos porla Suma delos medios.

2 losegundo Son proporcionales lasuma delos extremos Junta conel triplo dela Suma delos medios, ala Suma delos medios. asi elquadrado delasuma delos medios al Rectangulo delos mesmos medios: luego seran propors lasuma delos estremos Junta conel triplo dela Suma delos medios ala Suma delos medios asi el quadrado dela Suma delos medios al Rectangulo contenido delos medios.

3 Lo tercero, son proporcionales lasuma delos extremos Junta conel triplo dela Suma delos medios

ala difa dela suma delos medios, y suma delos extremos, assi el quadrado dela suma delos medios al quadrado dela difa delos mismos medios.

4 Lo quarto si fueren quatro continuos proporcionales sera como la suma delos medios ala difa dela dha suma, y suma delos extremos assi el rectangulo delos medios, ô delos extremos al quadrado dela difa delos medios.

5 Lo quinto en la primera prop. queda demostrado ser propor.s la suma del primero, y segundo ala suma del segundo, y tercero, assi esta suma ala de tercero, y quarto: luego respecto deque esta la suma de extremos y medios se conoce la suma detodos la qual se dividira en dos terminos reciprocos ala suma delos medios.

6 Lo sexto, del quadrado dela suma delos extremos se reste el quadrado dela suma delos medios y el residuo se multiplique por el quadrado de los medios, cuio producto se parta por el quadrado dela suma detodos junto con el duplo rectangulo dela suma detodos por la suma delos medios, cuyo cociente será el quadrado dela diferencia delos medios.

Desta manera se resuelbe por Algebra el mismo problema por diferencias

Sea dada la suma delos medios 6 y la delos extremos 9, y sea la difa delos extremos, x: luego $\frac{9+x}{2}$ será el 4.º termino, y $\frac{9-x}{2}$ sera el 1.º, termino cuya suma restituyen el 9.

Multipliquese $\frac{9+x}{2}$ por $\frac{9-x}{2}$ cuyo producto será $\frac{81-x^2}{4}$ el qual se multiplique por la suma delos extremos 9 será el producto $\frac{729-9x^2}{4}$ el qual se resta del cubo dela suma delo medios que es 216 q̃ reducido al quebrado será $\frac{864}{4}$ quedará dexsiendo $\frac{135+9x^2}{4}$: Multipliquese $\frac{81-x^2}{4}$ por la suma delos medios 6, será el producto $\frac{486-6x^2}{4}$ y este producto se multiplique por 3 diferencia de las sumas de extremos y medios, y será el producto $\frac{1458-18x^2}{4}$ cuyo producto se igualará á $\frac{135+9x^2}{4}$ dará fuerte $1458-18x^2 \sqcap 135+9x^2$ luego (axi. 2° y 3° est.) q̃ darán $1323 \sqcap 27x^2$: luego deprimiendo por 27 quedan $49 \sqcap x^2$, cuya raiz quadrada será 7 igual (esto es) $7 \sqcap x$: luego de la difª delos terminos extremos cuya difª 7 sumada con 9 hazen 16 su mitad es 8 quarto termino, y si d.ho 7 se resta del 9 quedan 2 su mitad 1 es el primer termº; luego está claro conocer los medios y serán 1. 2. 4. 8 los quatro continuos como antes.

Corolario.

1. Si fueren quales quiera quatro cantidades continuas proporcionales, sus diferencias tambien lo son continuas proporˡ.

2 Lo segundo si fueren quatro continuas proporcionales, serán como la difª delos extremos, ala difª delos medios asi la suma delos extremos junta con el duplo dela suma delos medios, ala suma delos medios.

3 Lo tercero el quadrado dela suma delos extremos junta con el duplo dela suma delos medios al quadrado ala

50 difª, de los extremos assi la suma de los extremos junta con el triplo de la suma de los medios a la difª de la suma de los extremos, y de los medios. Y al contrario ymbertido los corolarios = Bean repetido ff.

A la resolucion de la misma

En la primera prop. de la quinta analogia analitica consta ser propor' ay..xz..xz..yb estos la suma de primero y segundo, a la suma de segundo y tercero, assi esta, a la suma de tercero y quarto: luego, se reduce a allar los terminos ay, yb cuya suma es ab conocida reciprocos a la suma de los medios el qual se da conocida.

esto mismo se explica en el corolario 5 anterior a los antecedentes: luego si de la suma de todos es 15 y la de 1º y 2º ay sera la de 3º y 4º 15-ay y o seran propor' ay..6..6..15-ay, y los planos siguientes seran iguales 15ay-aya ⌒ 36, y el quadrado de la mitad de 15 es $\frac{225}{4}$ de quien en tirando los 36 reducidos al quebrado quedan de residuo $\frac{81}{4}$ cuya raiz quatro y medio que tirados a siete y medio quedan 3 por la suma del 1º y 2º y añadida la raiz $4\frac{1}{2}$ a los $7\frac{1}{2}$ hacen 12 suma del 3º y 4º, la determinacion de cada uno de per si queda explicada en muchas partes, por lo que no repito.

esta misma prop. se resuelbe en geometria en la forma siguiente

Sea dada la recta ab suma de los medios y sea la recta ac, suma de los extremos. sobre esta se describa el circulo, y a como dice en el prop. 1º lib. 4º d

laRecta ab, y tirese laRecta bc laqual seprolonge que hasta elpunto e cuya Recta be sea media pro porcional entre lasuma delas dos Rectas ac y ab y la tripla ac. estos que se agan (prop. 13. lib. 6° eV) proporcionales los terminos ac+ab . . be . . eb . . 3ac
luego (prop. 17. lib. 6° eV) 3aca+3bac Ω beb
pero (prop. 31. lib. 3° eV) el angulo en elpunto b es Recto: luego (prop. 47. lib. 1° eV)
el quadrado aca Ω aba+bcb: luego ele Vando seran 3aca Ω 3aba+3bcb: luego lo seran iguales lossiguientes 3aba+3bcb+3bac Ω beb
Agamos (propor. porla 12. del 6°) eb . . ba . . cb . . bd
luego tambien sus quadrados
(prop. 22. lib. 6° seran propor. beb . . aba . . bcb . . bdb -
estos son proporcionales beb . . aba . . aca-aba . . bdb
Digo quelaRecta bd es ladif.ª delos terminos medios porque sinolos sea otra mayor como fb dicese que seran (coro. 1° prop. 8 lib. 6° eV) ea . . ab . . cf . . fb
y (prop. 22. lib. 6° eV) sus quad.os eae . . aba . . cfc . . fbf
estos (prop. 47 lib. 1° eV) aba+beb . . aba . . fbf+bcb . . fbf
y (prop. 17. lib. 5° eV) lo son beb . . aba . . bcb . . fbf -
luego (prop. 11. lib. 5° eV) bcb . . bdb . . bcb . . fbf
luego (prop. 14. lib. 5° eV) son iguales bdb Ω fbf
y (coro. prop. 46. lib. 1° eV) sus raizes db Ω fb
(contra el axioma 9) no puede ser: luego no puede ser mayor, ni tampoco menor, que bd la dif.ª delos terminos medios.

apendice, o corolarios

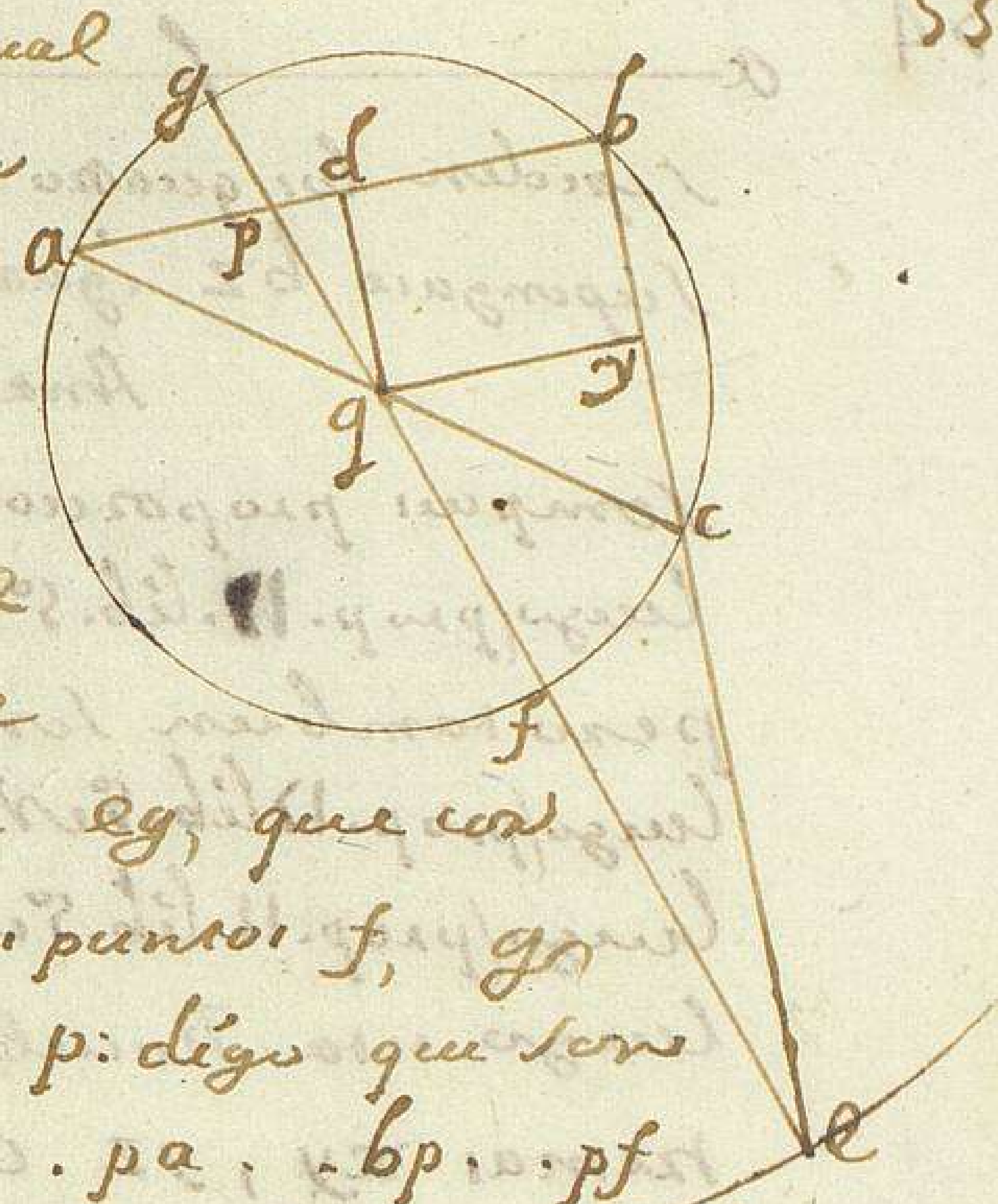
1º Si fueren quatro cantidades propor., el quadrado de la suma de los extremos junto con el quad. de la difª de los medios es igual a la suma de los quadrados de todos. y lo mismo se entiende del quadrado de la suma de los medios junto con el quadrado de la difª de los extremos.

2º el quadrado de la suma de los extremos (prop. 4ª lib. 2º e V) es igual a los quadros de los extremos mas el duplo rectangulo de los medios ô de los extremos.

3 el quadrado de la difª de los extremos junto con el duplo rectangulo de ellos mismos es igual a la suma de sus quadrados. y lo mismo se entiende de los terminos medios: luego el quadrado de la suma de los extremos junto con el quadrado de la difª de los medios es igual a los qq.dos de los quatro terminos proporcionales; y lo mismo se entiende del quadrado de la suma de los medios junto con el q.do de la difª de los extremos; de lo qual se infiere que la misma difª ay entre el quadrado de la suma de los medios ael de los extremos, que del quadrado de la difª de los medios ael de la difª de los extremos. por lo qual el quadrado de la difª de los extremos es ig.l a la difª de los dos quadrados el uno de la suma de extremos, y el otro de la suma de los medios, junto con el quadrado de la difª de los medios.

Otra segunda demonstracion

Sobre la misma suma de los extremos AC.



Se describa el círculo en el qual se acomode como antes la recta ab suma de los medios, y se tire la recta bc, la qual se prolongue asta el arco descripto con el radio qe, igual a la recta ab y qf, y por el centro q, se tire la recta eg, que cortara la circunferencia en los puntos f, g y a la recta ab en el punto p: digo que son continuas propor.s gp . . pa . . bp . . pf del centro q, se tiren las perpendiculares qd, qy, y se consideren los triangulos eyq, qdp, los quales son semexantes, y (prop. 4.a lib. 6.o e.) sus lados son proporc.s pd . . dq . . qy . . ye
y (prop. 22. lib. 6.o e.) lo son pdp . . dqd . . qyq . . yey
entons (coro. prop. 46. lib. 1.o e.) pdp . . byb . . dbd . . yey
entons (coro 3.o prop. 4.a lib. 2.o e.) 4pdp . . bcb . . dbd . . yey
entons (por la anterior) son 4pdp . . bcb . . aba . . beb
luego (prop. 7.a y retro. de ygo pd, es la semidif.a de las partes ap y pb: luego 2pd es la dif.a cuyo cuadrado es 4pdp: luego los quatro continuos proporcionales son los siguientes gp . . pa . . bp . . pf que es lo q.e se avia de demonstrar.

y por el apendiz anterior gfg + 4pdp Ω aba + 4pgp
y por el mismo son iguales fpf + pgp + bpb + apa Ω aba + 4pgp
y tambien lo son iguales gfg + 4pdp − aba Ω 4pgp

Prop. 14

Dada la dif.a de los estremos ac y la de los medios bc a b c x y z

si piden los quatro continuos cx .. cy . by ax
Supongase bz igual ala ax. y seran bz

Analisis

Siempre proporcionales cx . . cy . . cy . . by
luego (prop. 17. lib. 5° eu) xy . . cy . . bc . . by.
pero tambien son cy . . by . . by . . bz
luego (prop. 17 lib. 5° eu) cy . . bc . . by . . yz.
luego (prop. 11. lib. 5° eu) xy . . bc . . bc . . yz
luego esta Resuelto el problema que las estremas xy, yz componen la suma xz la qual es igual ala recta ab: luego se reduçe este Problema ha hallar las rectas xy, yz cuya suma es conocida reciprocas alado bc que es lo que avia de demonstrar.

Resuelbese por Algebra

Sea dado el numero 26 difª delos estremos, y sea dado el numero 6 difª delos medios, y supongase x el 2° termino: luego sera x+6 el tercer termino: luego (como en la prop. 13) el quadrado de x+6 partido por x sera el quarto termino, y el quadrado de x partido por x+6 sera el primer termino, y la difª delos dos cocientes se igualara al numero 26
Son pues los cocientes $\frac{x^2}{x+6}$ el prim°, $\frac{x^2+12x+36}{x}$ el 4° termino cuya difª de ambos la qual es $\frac{18x^2+108x+216}{x^2+6x}$ Ω 26 que reducidas sera la igualdad en esta $18x^2+108x+216 \;\Omega\; 26x^2+156x$
y (axi 3° eu) quedara asi $216 \;\Omega\; 8x^2+48x$

y deprimiendo por 8 ^{3} q dan 27 Ω X^2 + 6X: luego la mitad del numero que acompaña al X, es 3 su quadrado 9 sumado con 27 hazen 36 su raiz quadrada 6 a quien si se quita el 3 y se le añade el 3 seran 3 y 9 los medios el quadrado de 9 son 81 partido por 3 son 27 el quarto y el quadrado de 3 son 9 partido por el 3°, 9 viene 1 por el 1° sompues 1. 3. 9. 27 los quatro continuos propor.s q se piden.

Y si la incognita X se pusiere por el tercero termino, y X−6 por el segundo siguiendo la misma operacion saldra la ultima igualacion la siguiente X^2 Ω 27 + 6X ô tambien lo seran los siguientes X^2 − 6X Ω 27 y seran quatro terminos propor.s X−6 . 3. . 9. . X: luego esta clara la determinacion

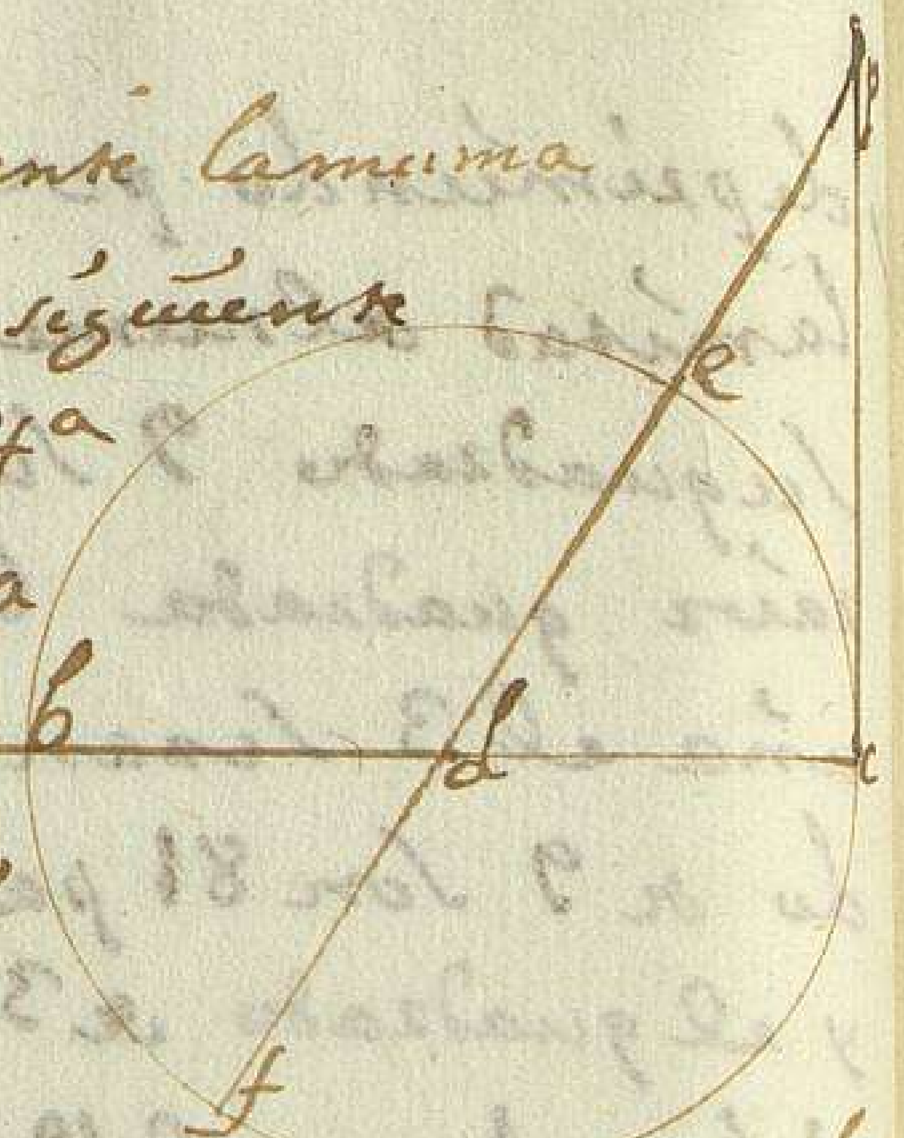
Corolarios

1 Si fueren quatro continuos propor.s sera como la suma de las dos dif.as de extremos y medios a la dif.a de los medios, asi el quadrado de la suma de los medios al rectangulo de los mismos medios ô de los extremos.

2 Lo segundo como la suma de los extremos a la suma de los medios, asi el quadrado de la dif.a de los medios junto con el rectangulo de los medios (ô de los extremos) al mismo rectangulo de medios ô extremos.

3 Lo tercero como la dif.a de los extremos menos el triplo de la dif.a de los medios, a la dif.a de los medios; asi el quadrado de la dif.a de los medios al plano contenido de los medios ô de los extremos.

†



Demonstrare geometricamente la misma
Proposicion en la forma siguiente
Sea pues la Recta ac difa
de los extremos, y sea la Recta
bc difa de los medios, sobre la
qual se describa el circulo
y (prop. 12. lib. 6º eV) hagan proporcionales
los terminos siguientes ac−3bc . . bc . . bcb . . cpc
y al lado el quadrado cpc su lado cp se ponga
perpendicular sobre bc, y Por el centro d se
tire la Recta pd que corte la periferia en los
puntos e, y, f: Digo, que fp, y ep (cuya
difa fe,) son los dos terminos medios. Porque
por construccion son propos, ac−3bc . . bc . . bcb . . cpc
luego (coro. 3º anterior) el plano cpc, es el conteni-
do debaxo de los medios (ô de los extremos) y por la
47. lib. 1º eV) son iguales los quadrados dpd = dcd+cpc
y (axi. 3º eV) quedan iguales . . dpd−dcd = cpc
esto es (Sexta prop. ynstro. de Vgo) . . fpe = cpc
y (prop. 14. lib. 6º eV) propos, fp . . cp . . pc . . pe
y porque son propors, ac−3bc . . bc . . bcb . . cpc
luego tambien lo son ac−3bc . . bc . . bcb . . fpe
luego (coro. 3º desta prop.) el Rectangulo fpe es el
contenido de los dos terminos ep, el 2º, y fp, el
3º cuya difa fe, (ô bc,) es igual: luego esta resuel-
to el problema y demostrado.
Sea asimismo en la misma proposicion
Difa de los extremos ac, y difa de los medios

+

la recta bc: digo, que son propor.s la difa. de los extremos menos el triplo de la difa. de los medios ala suma de las dos difas. de extremos, y medios; aū el quadrado de la difa. de los medios al quadrado de la suma de los mismos medios. Cortese (prop. 10. lib. 1º E) la recta ab, en el punto g, y será (prop. 8ª. y 10. de Ego) 2gc el agregado de las dos difas. ac y bc, y de la misma, lo será 2dp el agregado de las medias fp, ep. Demostracion

por la propo. 3ª. lib. 2º E) son iguales fpe ⌒ fep + epe
luego el ibando por 4 lo serán 4fpe ⌒ 2fpe+2fep+2epe
Pero (coro. prop. 46 E. lib. 1º) son lo, bcb ⌒ fef
luego (axi. 2º E) lo serán 4fpe+bcb ⌒ fef+2fpe+2fep+2epe
pero (prop. 4. lib. 2º E) lo son fpf ⌒ fef+2fep+epe
luego substituyendo lo son 4fpe+bcb ⌒ fpf+2fpe+epe
Pero esta demostrado (prop. anterior) ser proporcionales los terminos, ac-3bc . . bc . . bcb . . fpe
luego (prop. 15. lib. 5º E) ac-3bc . . 4bc . . bcb . . 4fpe
luego (prop. 18. lib. 5. E) ac-3bc . . 2gc . . bcb . . bcb+4fpe
esto es, ac-3bc . . 2gc . . bcb . . fpf+2fep+epe
cuya raiz del quarto termino es fp + ep, (o su igual 2dp.) luego serán proporcionales los quatro terminos siguientes ac-3bc . . 2gc . . bcb . . 4dpd
y demediando ac-3bc . . gc . . bcb . . 2dpd
luego queda manifiesto y demostrado.

Por Algebra

Sea la difa. de los extremos 2b y la de los medios b y sea x suma de los medios: luego los terminos

+

58 Seran $\frac{x-6}{2}$ el 2.º y $\frac{x+6}{2}$ el tercero. y porque son continuos el quadrado del 2.º partido por el tercero el cociente sera el primero y el quadrado del 3.º partido por el 2.º el cociente sera el quarto termino luego los quatro continuos son $\frac{x^2+36-12x}{2x+12}$ . . $\frac{x-6}{2}$ . . $\frac{x+6}{2}$ . . $\frac{x^2+12x+36}{2x-12}$

luego si el primero se resta del quarto quedara la difª $\frac{18x^2+216}{x^2-36}$ Ω 26: luego elebando quedara la igualacion hasi $18x^2+216$ Ω $26x^2-936$

luego (axi. 2.º y 3.º en 8) quedara 1152 Ω $8x^2$

y deprimiendo por 8 quedara 144 Ω x^2

cuya raiz quadrada es ..... 12 Ω x

y porque pusimos x suma de los medios y su valor a salido 12 diremos ser este 12 la suma de los medios y respecto de tener a raya los quatro continuos en los terminos siguientes $\frac{x^2+36-12x}{2x+12}$ . . $\frac{x-6}{2}$ . . $\frac{x+6}{2}$ . . $\frac{x^2+12x+36}{2x-12}$

luego sera facil el mostrar los quatro terminos continuos proporcionales que deseavan saber los quales se hallara el que son los siguientes 1. .3. .9. .27 todo lo qual queda bastantemente demostrado por lo qual no queda que dudar.

Prop. 15

Dada la recta ac, difª de los extremos y dada la recta bc, difª de los medios, se a ——— g ——— p ——— b ——— c ——— x

pide la suma delos extremos laqual sea ax.
Agase pb, igual ala bc y cortese ab igual
mente enel punto g: digo que asi como enla
prop. 14 queda demonstrado ser proporcio
nales los quatro ter. ac-3bc. 2gc. bcb. $\frac{bcb:2gc}{ac-3bc}$
Dela mesma suerte son proporcionales los
quatro terminos ac-3bc. 2gc. apa. $\frac{apa:2gc}{ac-3bc}$
digo, que el quarto termino desta operas
ción es el quadrado dela suma delos extremos
y (prop. 11 lib. 5º) bcb. apa. $\frac{bcb:2gc}{ac-3bc}$. $\frac{apa:2gc}{ac-3bc}$
seran (Prop. 15. lib. 5º) y (Prop. 1ª lib. 6º ev) son pro
porcionales. bcb. apa. bcb:2gc. apa:2gc
luego, q̃da vuelto, y demostrado pues bolbien
do porlos contrarios argumentos se buelbe al
principio: esto Para losque no estan versados
enla geometria, ni analisis se verifica asi.
sea ac, 26. y sea bc, 6, sera ac-3bc, 8 y
y sera 2gc, 32 que es lo mesmo que ac+bc. ya
simesmo, ap, 14 porque es lo mesmo que ac-2bc
luego siendo ac-3bc. 2gc. bcb. $\frac{bcb:2gc}{ac-3bc}$
Viene a ser usando delos numeros la pro
porcion siguiente 8. 32. 36. 144,
y dela mesma manera enla siguiente
siendo propor. ac-3bc. 2gc. apa. $\frac{apa:2gc}{ac-3bc}$
y enlos numeros 8. 32. 196. 784 cuyos
raizes delos terminos 144 y 784 son 12
y 28 sumas delos medios y delos extremos
luego queda bastantemente demostrado

Por Algebra

Sea la difª de los extremos 26 y la de los medios 6
y sea la suma de los extremos x: luego $\frac{x-26}{2}$ de-
berá ser el primero, y $\frac{x+26}{2}$ será el quarto, cuyo
producto de uno por otro será $\frac{x^2-676}{4}$ el
qual multiplicado por 26 produce el sólido
$\frac{26x^2-17576}{4}$ del qual se resta el cubo de la
difª de los medios el qual 216 que reducido
al denominador será $\frac{864}{4}$ y quedará
$\frac{26x^2-18440}{4}$ el qual es el triplo del sólido
sobre el plano de los medios por la difª de los
mismos medios: Por lo qual el plano $\frac{x^2-676}{4}$
se multiplique por 6 y será $\frac{6x^2-4056}{4}$ y este 2
se multiplique por 3 será el producto
$\frac{18x^2-12168}{4} = \frac{26x^2-18440}{4}$: luego (axi.
2º y 3º &c) $6272 = 8x^2$ y deprimiendo
por 8 queda $784 = x^2$ cuya raiz qua-
drada es $28 = x$: luego esta vuel-
to, y restandole 26 quedan 2 su mitad 1
el primero y añadiendo al 28 los 26 la
suma 54 cuya mitad 27 y serán los
quatro continuos 1 . . y . . y+6 . . 27: luego
queda vuelto pues esta clara y facil la
determinacion de los medios. 3

Corolarios

1 Si fueren quatro continuos proporcionales
será la suma de la difª de los extremos, y medios
a la difª de ellas mismas; así la suma de los
extremos mas el triplo de la suma de los medios

a la difª de la suma de los extremos y suma de los medios; y de la misma manera el quadrado de la suma de los medios al quadrado de su difª.
Sea a, difª de los extremos, sea b, difª de los medios, sea c, suma de los extremos, sea d, suma de los medios.

Digo q son propor.s $a+b \,.\, a-3b \,.\,.\, c+3d \,.\, c-d$
y assimismo lo son $a+b \,.\, a-3b \,.\,.\, dd \,.\, bb$
luego (prop. 11. lib. 5º) $c+3d \,.\, c-d \,.\,.\, dd \,.\, bb$ —
y (prop. 15. lib. 5º) $c+3d \,.\, 3c-3d \,.\,.\, dd \,.\, 3bb$
y (prop. 18. lib. 5º) $4c \,.\, 3c-3d \,.\,.\, dd+3bb \,.\, 3bb$
eccos (prop. 15. lib. 5) $4c \,.\, c-d \,.\,.\, dd+3bb \,.\, bb$

2 Lo segundo son propor.s la suma de los extremos mas el triplo de la suma de los medios, a la difª de la suma de extremos, y suma de medios assi el quadrado de la suma de los extremos, al quadrado de la difª de los extremos menos el duplo de la diferencia de los medios.

eccos son propor.s $c+3d \,.\, c-d \,.\,.\, cc \,.\, aa+4bb-4ab$ —
luego (prop. 11. lib. 5º) $dd \,.\, bb \,.\,.\, cc \,.\, aa+4bb-4ab$
y tambien son $a+b \,.\, a-3b \,.\,.\, cc \,.\, aa+4bb-4ab$
y dhos corolarios se pueden imbertir y alternar (o permutar) como mas combenga.

3 Lo tercero si de la difª de los extremos se quitare el duplo de la difª de los medios y del quadrado del residuo se quitara el quadrado de la difª de los medios este ultimo residuo, al quadrado de la difª de los medios tiene la misma proporcion que el qq.do de la difª de los extremos menos el

quadrado dela difª delos medios al quadrado de la suma delos mismos medios. cuya analogia es la q.^e sigue $aa+3bb-4ab$ . . bb . . $aa-bb$ . . dd
Por numeros son 160 . . 36 . . 640 . . 144

Prop. 16

Sea como antes dada la recta ac difª delos extremos y sea bc difª delos medios, se piden los mismos quatro continuos.

a ——— q x b y ——— c

Difº 19 corolario 1º se dize como dados quatro continuos propor.^s lo seran tambien sus difª.^s Por lo qual seran proporcionales los terminos xb . . bc . . cb . . ax agase $by \Omega xb$, seran by . . bc . . cb . . ax y aganse proporcion.^s cy . . yb . . cb . . bq y componiendo, (imb.^do) yb . . bc . . bq . . cq Digo que es la buscada y que bq es el ter.^o segundo y, cq es ter.^o tercero. Para lo qual se allaran, primero las rectas xb, ax cuya suma es conocida la recta ab reciprocas a la recta da bc. y la demostracion es por los contrarios argumentos.

Por Algebra

Siendo la difª delos medios 6 y la difª delos extremos 26 y el residuo 20 es igual del agregado dela difª del primero y segundo, y la del tercero y quarto: luego se ponemos x por difª de 1º y 2º seran proporcionales como antes x . . 6 . . 6 . . $20-x$: luego $36 \Omega 20x-x^2$

esto es iguales $x^2 \Omega 20x - 36$. la mitad de 20, es 10, su quadrado 100, de quien se resten los 36, quedan 64, su raiz 8 restada de 10 quedan 2, valor de x difa. del 1º y 2º termos, y quitando 2 de 20 quedan 18 difa. del 3º y 4º termino, y seran continuas las tres difas. del 1º y 2º, de 2º y 3º, de 3º y 4º como se dice en el coro. citado, las quales son 2 . . 6 . . 18 y la suma de todas tres difas. es igual ala difa. del 1º y 4º termino de los quatro continuos y se formarà la proporcion diciendo como la difa. de 2 y 6, a 2 esto es que sean proporcionales 4 . . 2 . asi 6 . . 3 y comp. e inbird. 2 . . 6 . asi 3 . . 9 y los quatro continuos 1 . 3 asi 9 . . 27 que es lo que se deseava saber.

Otra por el Algebra

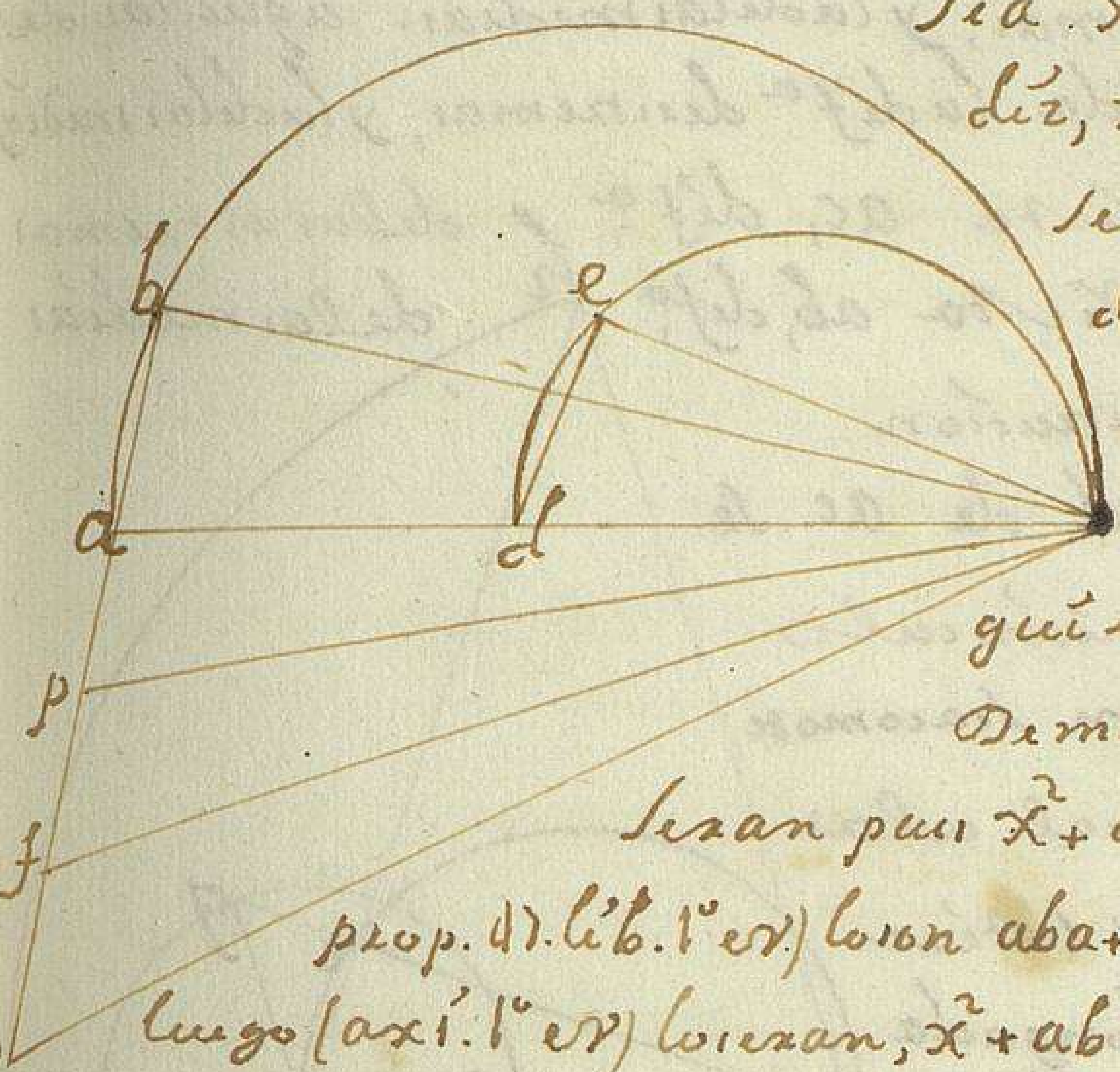
Sea la difa. de los extremos 26, y la de los medios 6 y sea x, suma de los medios: luego (Coro. 2º f. 49) son propors. $6 . . 26 . . x . . \frac{13x}{3}$ luego $\frac{13x}{3}$ serà la suma de los extremos mas el duplo de la suma de los medios: luego siendo x suma de los medios 2x serà su duplo, que restada de $\frac{13x}{3}$ queda $\frac{7x}{3}$ valor de la suma de los extremos Pero (f. 52 en el apendiz caso 1º) se deven igualar $\frac{49x^2}{9} + 36 \Omega x^2 + 676$, porque qualquiera de ellos se iguala ala suma de los quadrados

+

64 Juntos delos quatro terminos propor^s, luego (axio. 3^o eV) quedaran $\frac{49x^2}{9}$ ⩲ $x^2 + 64$, y elevando por 9 quedan $49x^2$ ⩲ $9x^2 + 576$, y (axio. 3^o eV) quedaran $40x^2$ ⩲ 576, y deprimiendo por 40 q^e daran x^2 ⩲ 144, cuya Raiz quadrada sera x ⩲ 12, suma delos medios, que es lo q^e se demanda.

En geometria

Sea la recta ac Difer^a delos extremos y sea la recta ab dif^a delos medios. Sobre ac se describa el semicirculo en quien sea como de la recta ab, y tomese ad, du pla dela recta ab, y sobre dc se describa el semicirculo pequeño en quien sea como de de igual ala recta ab, y se tiren las rectas cb, y, ce, y seagan propor^s ce . . ed . . cb . . bf : Digo que la linea bf, es la suma delas medias. por que si se digere que es mayor (ô menor) como bp: luego el quadrado bpb + aca (prin. f^o 52) se deve igualar ala suma delos quadrados de todos. Pero (prop. 47. lib. 1. eV) el quadrado aca se iguala estos es aca ⩲ aba + bcb: luego el quadrado bpb + aba + bcb estos es los tres quadrados jun- tos se deven igualar ala suma delos quadra dos de todos. Pero el quadrado dela suma delos extremos junto con el quadrado dela dif^a delos medios tambien se iguala ala suma delos quadrados de todos: (prin. ctho) luego, suponiendo q^e la suma delos extremos



Sea X: luego (por el apen
diz, zitado, y axi. 1º e.V.)
serán iguales los qua-
drados que se de
muestran en las
analoxías si-
guientes.

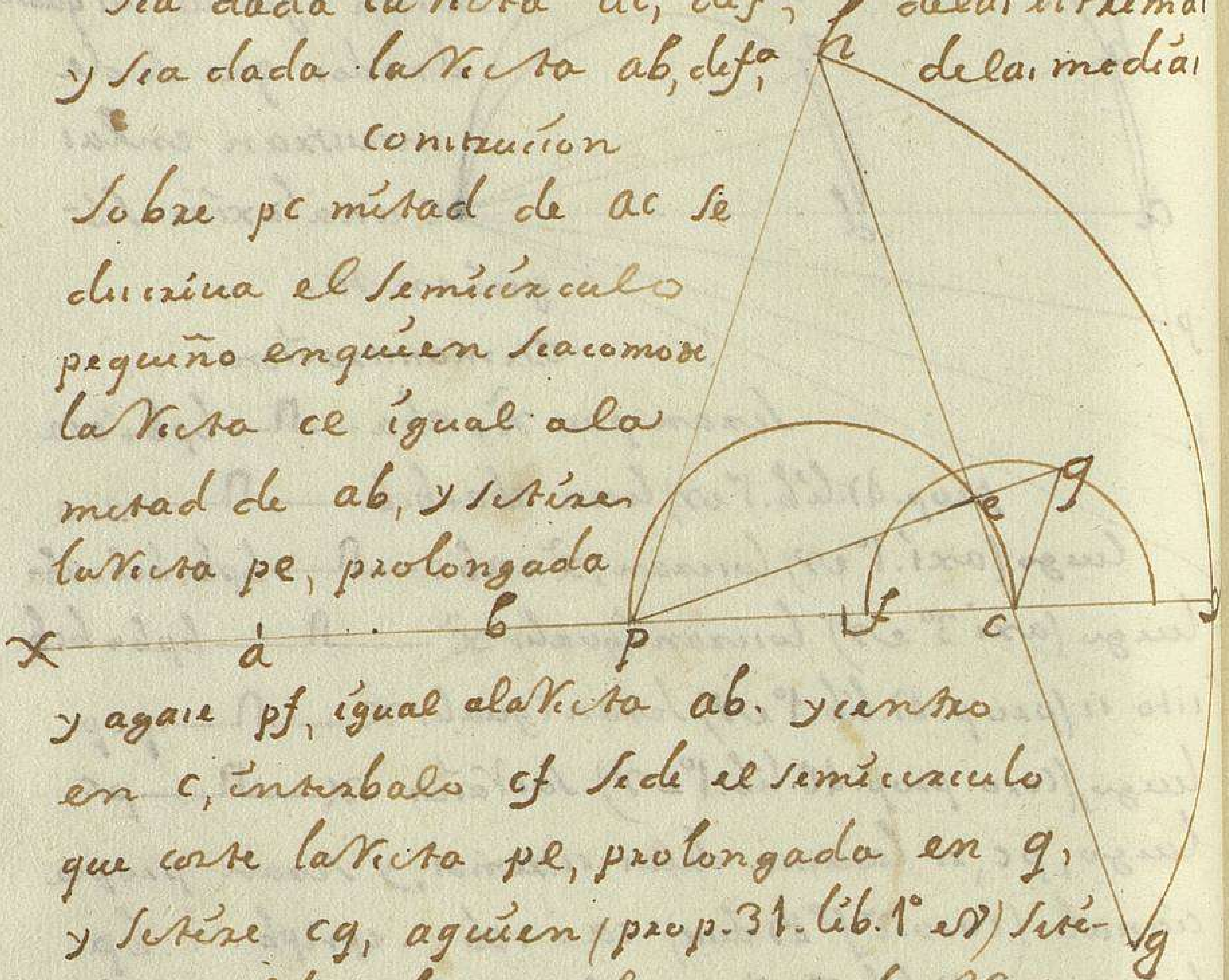
Demonstrazion.

Serán pues $x^2 + aba \sqcap bpb + aca$
(prop. 47. lib. 1º e.V.) lo son $aba + bcb \sqcap aca$
luego (axi. 1º e.V.) lo serán, $x^2 + aba \sqcap bpb + bcb + aba$
luego (axi 3º e.V.) lo serán iguales $x^2 \sqcap bpb + bcb$
esto es (prop. 47. lib. 1º e.V.) serán iguales $x^2 \sqcap pcp$
luego, (coro. prop. 46. lib. 1º e.V.) lo serán $x \sqcap pc$
luego, pc, es la suma de las extremas, y serán propor
cionales (coro. 2º fº 49 dize) ca . . ab . . cp+2pb . . bp
luego (prop. 17. lib. 5º e.V.) . . cd . . ab . . cp . . pb
esto es (prop. 7ª lib. 5 e.V. . . cd . . de . . cp . . pb
y (prop. 22. lib. 6º, e.V.) cdc . . ded . . cpc . . pbp
luego (prop. 17. lib. 5º e.V.) cec . . ded . . bcb . . pbp
luego (prop. 22. lib. 6º e.V.) ce . . ed . . cb . . bp
pero (por construccion) son ce . . ed . . cb . . bf
luego (prop. 14. lib. 5º e.V.) son iguales $bp \sqcap bf$
(contra el axi. 9 e.V.) no pudiendo ser: luego la suma de
de las medias, no pudiendo ser mayor ni menor que
bf. que es lo que se avía de demonstrar.

En la prop. 13 después del apendiz se
demonstraron las quatro contínuas dada

la suma destremas, y la de las medias. aquí las de
mostraremos dada la difª de extremas, y la de las medias

Sea dada la recta ac, difª de las extremas
y sea dada la recta ab, difª de las medias



construcción

Sobre pc mitad de ac se describa el semicírculo pequeño en quien se acomode la recta ce igual a la mitad de ab, y se tire la recta pe, prolongada

y agase pf, igual a la recta ab. y centro en c, intervalo cf se de el semicírculo que corte la recta pe, prolongada en g, y se tire cg, a quien (prop. 31. lib. 1º el) se tire paralela ph, y prolonguense las rectas ac, ce hacia unas, y otras partes, y centro en p, con el intervalo ph donde la ce prolongada concurre con la ph se describa el círculo que terminara los quatro puntos h, y, g, x, en donde quedan terminadas las dos rectas prolongadas ac y ce: Digo que las rectas que se buscan continuas son, yc..cg..hc..cx

Demonstración

la difª de las extremas ac, esta dividida igualmente en el punto p. y se le añada dió la Recta cy: luego (prop. 8ª, yntroducion de Rgo) la Recta py, es la semisuma de las partes ay, cy. Y porque ac, esta dividida igualmte en el punto p. centro del circulo mayor: luego xa sera igual ala parte cy, por lo qual la difª de las partes extremas yc, cx es la Recta dada ac. Y en el semicirculo pequeno pec (prop. 31. lib. 3º el angulo en el punto e, es Recto luego prop. 3ª dicho lib. 3º eV) la Recta hg, esta cortada igualmte en el punto e, y desigual mente en el punto c; luego (prop. 7ª dela introducion de Rgo) la Recta ec, es la semidifª de las partes hc, cg: luego asi como de las extremas yc, cx se ha demostrado la semidifª pc, dela misma suerte se ha demostrado la semidiferencia de las medias gc . ch, pero (prop. 35. lib. 3º eV) los Rectangulos ycx ⊓ gch y (prop. 14. lib. 6º eV) propor. yc . . eg . . hc . . cx cuia difª de extremas es ac, y la de los medios 2ce o su igual ab, dadas: luego esta demonstrado.

Otra demonstracion

Considerense los triangulos phe, gce, los quales son semejantes, y propor. ph . he . . gc . ce y (prop. 15. libr: 5º eV) propor. ph . he . . yx . gh luego (prop. 11. lib. 5 eV) lo son gc . . ce . . yx . . gh estos (prop. 7ª lib. 5º eV) lo son fc . . ce . . yx . . gh luego (prop. 5ª lib. 5º eV) fc . . ce . . yx-fc . . gh-ce y (prop. 11. lib. 5º eV) . . yx-fc . gh-ce . . yx . . gh luego esta demonstrado, y manifiesta la determinacion.

+

Prop. 17

Dada la suma delos quadrados de quatro terminos continuos proporcionales, y dada la suma delos dos rectangulos, el uno contenido del primero, y segundo. y el otro contenido del tercero, y quarto, se piden los quatro terminos continuos.

v a x c y b

Supongase la recta ab cuio quadrado sea igual a la suma delos quadrados de los quatro continuos, y supongase la recta ac cuyo quadrado sea igual ala suma delos dos rectangulos el uno contenido del primero por el segundo, y el otro contenido del tercero por el quarto, y considerese la esta mesma recta ac suma delas medias, y asimismo se considere la recta cb, suma de las extremas: luego la recta ab consideraremos suma de todos los quatro continuos y seran los quatro yb . . ax . . xc . . cy luego, la operacion como en la prop. 13 deste

Analisis

Sea pues como se pide yb . . ax . . ax . . xc
luego (prop. 18. lib. 5.° el) va
seran proporcionales vx . . ax . . ac . . xc
pero tambien lo son ax . . xc . . xc . . cy
luego por la mesma lo son ax . . ac . . xc . . xy
luego (prop. 11. lib. 5.° el) vx . . ac . . ac . . xy
luego esta resuelta, y clara la determinacion

Allense las Restas rx, xy cuia sumas les Resta ab Reciprocas ala Recta ac conocida y tendremos conocida rx suma del primero y segundo, y xy suma del tercero y quarto la determinacion supuesto en diferentes pro posiciones, y porque se dió la suma de los quadrados cuya raiz dela dha suma ab no se puede esplicar por numeros como tampoco las Rectas ac, ni cb, Para poderla resolber Por algebra uaremos enla forma siguiente.

Por algebra

Sea la suma delos quadrados de todos 85
Sea la suma delos rectangulos 1º por 2º, y 3º por 4º, . . 34
la difª delas dos cantidades son 51
y porque de ninguna delas tres se puede sacar raiz que nos representen las rectas ab, ac, cb abremos de usar delos planos como si fueren lineas y formaremos la proporcion segun nos muestra el Analisis como se be . . $85 - x$ . . 34 . . 34 . . x
luego (prop. 16. lib. 6º e) $85x - x^2 \;\Omega\; 1156$
luego el quadrado dela mitad de 85 es $\frac{7225}{4}$ de quien restando el quadrado 1156 reduciendolo ala especie de su comun anomi.dor sera $\frac{4624}{}$ y el residuo o diferencia sera esta $\frac{2601}{4}$ cuya raiz quadrada se allará ser $\frac{51}{2}$ que restada dela mitad delos 85 esto es de $\frac{85}{2}$ quedan $\frac{34}{2}$ y añadiendo $\frac{51}{2}$ alos $\frac{85}{2}$ la suma será $\frac{136}{2}$, esto es 17 enteros por el primero y segundo, y 68 enteros por la suma del tercero, y quarto, para cuya

+

10 segregación se hará de la regla puesta en dife-
rentes partes la qual es como sigue 68 y 34,
suman 102 y formar la proporción diciendo
si 102 dan 34 q(ue) darán 34 y vendrá por
quarto término $11\frac{1}{3}$ esto es $\frac{34}{3}$ el qual es el
segundo término de la progresión continua y
por q(ue) salió 17 enteros suma del 1º y 2º si el 2º
$\frac{34}{3}$ se resta de los 17 quedará $\frac{17}{3}$ por valor del
primero y serán los quatro términos continuos
los siguientes $\frac{17}{3}$ . . $\frac{34}{3}$ . . $\frac{68}{3}$ . . $\frac{136}{3}$ y porque
estos vienen de la suma de los quadrados que es de
85 habremos de ponerlos incógnitos en la for-
ma siguiente $\frac{17X}{3}$ . . $\frac{34X}{3}$ . . $\frac{68X}{3}$ . . $\frac{136X}{3}$ y
sus quadrados sumados se igualarán a la
suma 85: son pues los quatro continuos qua-
drados $\frac{289X^2}{9}$ . . $\frac{1156X^2}{9}$ . . $\frac{4624X^2}{9}$ . . $\frac{18496X^2}{9}$
cuya suma de todos es $\frac{24565X^2}{9} \sqcap 85$ y eleva-
do por 9 quedan iguales $24565X^2 \sqcap 765$
esto es deprimiendo por 5 q(ue)dan $4913X^2 \sqcap 153$
luego deprimiendo serán iguales $X^2 \sqcap \frac{153}{4913}$
y elevando serán $289X^2 \sqcap \frac{153}{17}$ esto es que
darán iguales $289X^2 \sqcap 9$ cuya raíz quadrada
será $17X \sqcap 1$ el qual es primer término
de los quatro continuos los quales son 1 . 2 . 4 . 8
luego está resuelta la proposición porque la
suma de los quadrados es 85 y los rectángulos
del 1º y 2º es 2 del 3º y 4º es 32 cuya suma
de ambos es 34 que es lo que se nos propuso.

+

Corolarios

1 El 3º corolario fº 49 parece quedo algo confuso, y se deve entender asi, a la suma de los quatro continuos se le añada la suma de los dos terminos medios y de esta ultima se haga un quadrado y este se pondra por primer termino de la proporcion que alli se dice.

2 Como el quadrado de la suma de los medios al rectangulo de los medios o extremos; asi la difª de los extremos junta con la difª de los medios, a la difª de los mismos medios

3 Como la suma de los quadrados de los extremos a la suma de los dos planos, primero por segundo, tercero por quarto menos el rectangulo de los medios o extremos; asi la suma de todos a la suma de los medios.

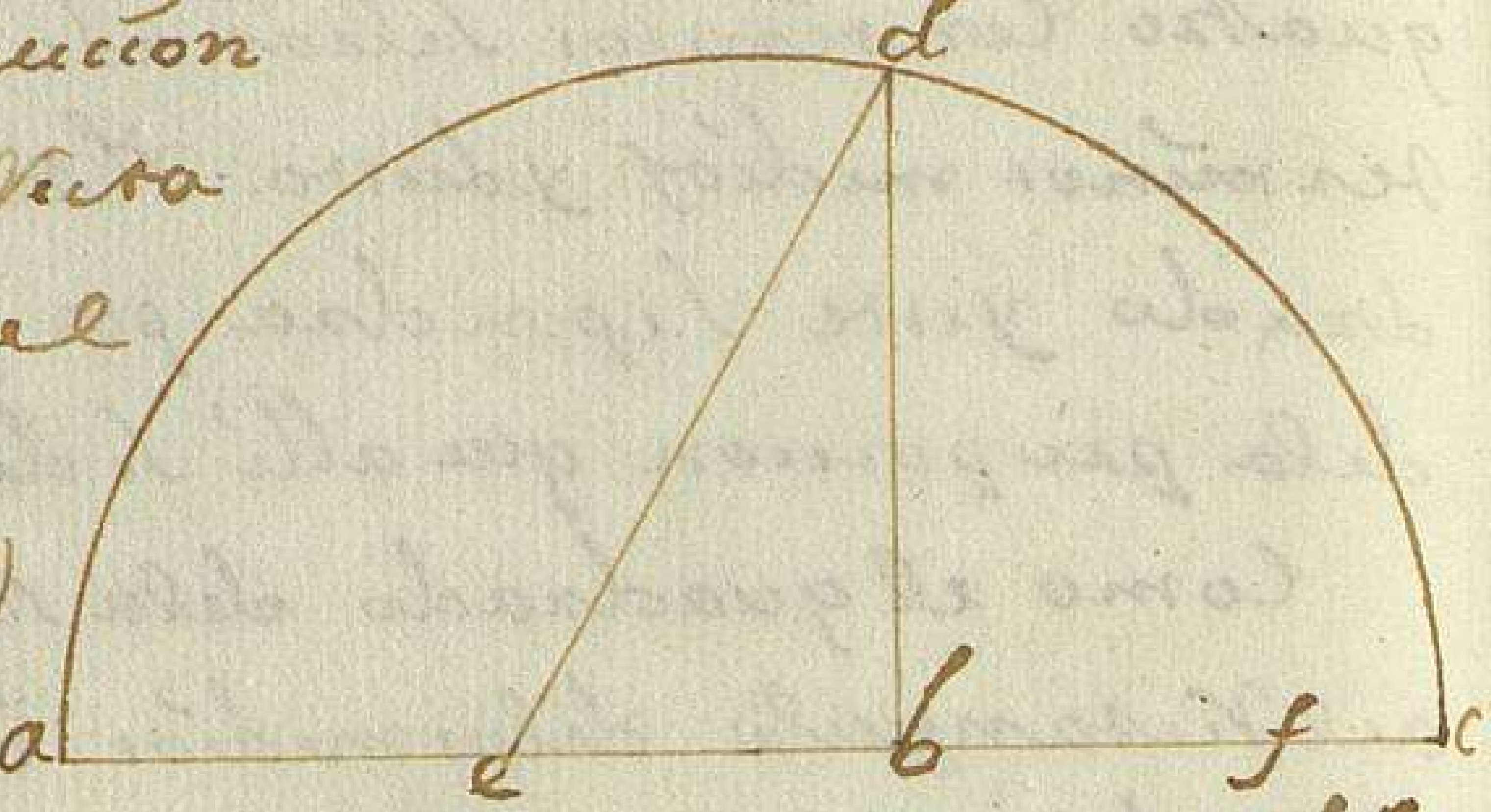
4 Como el quadrado de la suma de todos al quadrado de la suma de los medios; asi la suma de los quadros de los extremos junta con el triplo de la suma de los quadrados de los medios, a la suma de los quadrados de los medios: luego dividiendo, el quadrado de la suma de todos menos el triplo del quadrado de la sumª de los medios, al quadrado de la suma de los medios; asi la suma de los quadrados de los extremos, a la suma de los quadrados de los medios.

Prop. 18

la suma de los quadrados de los extremos a la suma delos quadrados delos medios tienen la misma proporcion que ab, a bc si fueren los quatro terminos continuos propor.s

construccion

Sobre toda la recta ac se describa el semicirculo, y (prop. 11. lib. 1° E.) se levante la recta bd perpendicular. y (prop. 13. lib. 6° E.) se hagan propor.s . . $3bc$ . . be . . eb . . cb



y tirese la recta ed y, ed . . bc . . bc . . fc

luego (prop. 16. lib. 6° E.) sera $3bcb \cap beb$

y por la misma son iguales $bcb \cap ed{:}fc$

y tambien son iguales . . . . $bdb \cap abc$

y (prop. 47. lib. 1° E.) lo son iguales $bdb+beb \cap ded$

y porquanto son conti.s ed . . bc . . bc . . fc

luego (prop. 22. lib. 6° E.) ede . . bcb . . bcb . . fcf

luego seran iguales . . . . $\frac{bcb:bcb}{ede} \cap fcf$

Digo que la recta fc, es la suma delas medias.

Pero, (prop. 17. lib. 6° E.) ab . . bd . . db . . bc

luego (coro. prop. 19. lib. 6° E.) ab . . bc . . dbd . . bcb

y (prop. 18 lib. 5°, y 47 libro 1° E.) por ser $3bcb$, iguales al quadrado beb, seran $ab+3bc$ . . bc . . ded . . bcb

Pero f.° 23 corolarios ultima analogia ser proporcionales, como la suma delos quadrados delos extremos ala suma delos quadrados delos medios en quatro continuos proporcionales; asi la suma delos dos rectangulos, 1º por 2º y 3º por 4º, menos el rectangulo de medios, o delos extremos, al mismo rectang.° delos medios o delos extremos: luego seran ab . . bc. a la suma delos rectangulos dhos a reza menos el rectangulo delos medios ō extremos ā dho rectangulo. (Y prop. 18. lib. 5. e V) ab+3bc . . bc como el rectangulo de 1º en 2º y del 3º por el 4º juntos mas el duplo rectang.° delos medios ō extremos al dho rectangulo. (Y prop. 15. lib. 5. e V) ab+3bc . . bc. a el duplo rectangulo del 1º por el 2º y 3º por el 4º mas el quadruplo rectang.° delos medios, ō extremos, al mismo duplo rectangulo delos medios ō extremos: luego (prop. 11. lib. 5. e V) son proporcionales ded . . bcb a el duplo rectang.° de 1º por 2º y 3º por 4º juntos con el quadruplo rectang.° delos medios, o extremos, al mismo duplo rectang.° delos medios, o extremos; luego (prop. 12 lib. 5 e V) el quadrado ded . . bcb a todos los antecedentes juntos a todos los consequentes juntos; Pero todos los antecedentes, esto es los quadrados delos extremos, mas el triplo delos quadrados delos medios, mas el duplo delos rectangulos 1º por 2º, y 3º, por 4º mas el quadruplo del rectang.° delos medios, o extremos, hacen el quadrado dela suma de todos (prop. 1ª dur) Pero todos los consequentes, esto es los quadrados delos medios mas el duplo rectangulo delos medios o extremos (prop. 4ª lib. 2º e V) son iguales al quadrado dela suma delos medios; Pero son proporcionales, ded . . bcb . . bcb . fcf: luego la linea de ala linea bc. asi lalinea bc ala linea fc, luego fc es la suma delos medios que restada delalinea bc suma detodos quedara bf suma delos estremos. cuya separacion hara como enla prop. 13 deste tratado.

apendix

Deaqui esta claro dequemodo, sepuedan allar quatro terminos continuos proporcionales dada la razon delos quadrados decada uno alos quadrados delos estremos o medios por que diuidiendo seran tambien enlamisma razon. yademas, esta claro dequemodo se pueda allar cada uno dada qualquiera suma o difa. delos quatro terminos continuos proporcionales y la razon delos quadrados delestremos, amedios, porque sera como lasuma o difa omologa delas quatro alladas acada uno delas alladas asi la suma o difa allada alas otras. y seue claramente queste Problema sepuede resolber porla prop. 10 deste tratado usando delos dos terminos dela razon dada y despues como sifuera lasuma delos quadrados delos estremos y lasuma delos quadrados de los medios. enfin se ve que este problema se puede resolber destemodo poniendo x, porlasuma delos medios y usando del primer termino dela razon porlasuma detodos.

Por Algebra

Sea dada la razon dela suma delos quadrados delos extremos ala suma delos quadrados delos medios como 13 á 4 y supongan la suma delos medios sea la incognita x, el exarc asimismo el menor termino dela razon da, 4ᵃ; ó por la suma delos quatro terminos continuos luego sera $4-x$ la suma delos extremos; y coro. 2. f.º 42 son propor.ˢ $4+2x$ . . x . . x^2 . . $\frac{x^3}{4+2x}$ luego $\frac{x^3}{4+2x}$ es el rectangulo delos medios ó de los extremos por ser continuos proporcionales. Y (prop. 4ᵃ lib. 2º eu) si del quadrado dela suma de los medios se resta el duplo rectangulo $\frac{2x^3}{4+2x}$ quedara la suma delos quadrados delos medios y lo mesmo si se resta del quadrado dela suma delos extremos quedara la suma delos quadrados delos extremos esto sentado, del quadrado x^2 se resta $\frac{2x^3}{4+2x}$ y queda el residuo $\frac{4x^2}{4+2x}$. Asimesmo del quad.ᵈᵒ de $4-x$ el qual es $16+x^2-8x$ se resta $\frac{2x^3}{4+2x}$ y quedara de residuo $\frac{64-12x^2}{4+2x}$ y seran propor.ˢ segun la propuesta $\frac{64-12x^2}{4+2x}$ . . $\frac{4x^2}{4+2x}$ . . 13 . . 4 luego (prop. 15. lib. 5º eu) seran proporcionales los quatro terminos $16-3x^2$ . . x^2 . . 13 . . 4 y (prop. 18. lib. 5 eu) lo seran 16 . . x^2 . . 25 . . 4 luego (prop. 16. lib. 6º eu) seran $64 \frown 25x^2$ estos quedaran iguales los siguientes $\frac{8}{5} \frown x$ luego sale $\frac{8}{5}$ suma delos medios y restada de 4 que dara $\frac{12}{5}$ suma delos extremos: luego por la regla, f.º 12 se hallara ser $\frac{4}{15}$. $\frac{8}{15}$. $\frac{16}{15}$. $\frac{32}{15}$ los quales (pro

76 p. 15. lib. 5.º eV) son 1 . . 2 . . 4 . . 8 que son
los que se deseaban saber Pues la suma
delos quadrados delos extremos es 65. y la de
los medios es 20 y son propor.^l 65. . 20. . 13. . 4
luego esta resuelto el problema.

Corolario.

el quadrado quadrado del segundo termino
dela razon se divida por el plano delos termi-
nos dela razon mas el triplo quadrado del
2.º termino y del cociente se saque la raiz quadrada
cuya sera el valor dela incognita x, Vg.ª
el quadrado de 4 es 16, el quadrado de 16 es 256
el rectangulo de 13 por 4 es 52 sumado con el
triplo 16 que es 48 suman 100 y sera el parti-
dor: luego el cociente sera $\frac{256}{100}$ cuya raiz
quadrada es $\frac{16}{10}$ su mitad $\frac{8}{5}$ valor de x co-
mo antes.

Prop. 19

Dada la razon, dela suma delos quadrados
delos medios del plano dela suma de todos
por la suma delos medios se piden los quatro
terminos continuos proporcionales

a —— b —— d —— c

Sea dada la razon ab — ā bc, y tomese
dela bc, la bd igual ala dupla ab, esto
es que se haga la, bd ∩ 2ab y (prop. 11. lib. 6
se hagan proporcionales dc. . ab. . ba. . be
Pero (prop. 1.ª lib. 2.º eV) el rect.º abc ∩ abd + ab:d
esto es por construccion, son abc ∩ 2aba + ab:d

Pero (prop. 1ª lib. 6º eV) $dc:ab\ .\ aba\ -\ .\ dc\ .\ .\ ab$ 77
luego (prop. 11 lib. 5 eV) $dc:ab\ .\ .\ aba\ .\ .\ ab\ .\ .\ be$
luego (prop. 16 lib. 6º eV) seran $\frac{aba:ab}{dc:ab}$ — Ω — be
luego aviendo dividido el cubo de ab por el
rectangulo dc en ab avenido por cociense
geometrico la linea be.

Digo que si la linea be, fuere suma delos
medios el menor termino dela razon dada ab
sera la suma detodos. Pero la suma detodos
ala suma delos medios (prop. 1ª lib. 6º eV) assi el rectang.
dela suma detodos porla suma delos medios al quad.
dela suma delos medios estos, $ab\ .\ .\ be\ .\ .\ abe\ .\ .\ beb$
Pero (coro, f. 14) en esta ser propor.^s, la suma detodos
ala suma delos medios assi la suma delos quadrados
delos medios al rectangulo delos medios (ô delos extremos.)
luego el rectangulo dela suma detodos porla
suma delos medios al quadrado dela suma de
los medios, assi la suma delos quadrados delos
medios al rectangulo delos medios ô delos extremos,
y permutando será el rectangulo dela suma
detodos porla suma delos medios ala suma delos
quadrados delos medios, assi el quadrado dela su
ma delos medios al rectangulo delos medio ô &.
Y (prop. 17. lib. 5º eV) será el rectangulo dela suma
detodos porla suma delos medios menos el duplo
dela suma delos quadrados delos medios alas
suma de dhos quadrados assi esta suma al
rectangulo delos medios ô extremos. Pero se
a supuesto que la suma delos quadrados delos

78 medios es del Rectangulo dela suma de todos por la suma delos medios, y la misma suma delos quadrados delos medios del Rectangulo delos extremos ó delos medios es como la suma de todos ala suma delos medios esto es el Rectangulo dela suma de todos por la suma delos medios al quadrado delos medios así de . ab es a de . ab . ab . be: luego el quadrado ó suma delos quadrados delos medios del Rectangulo delos medios ó extremos así la suma de todos ab. á be: luego be es la suma delos medios que es lo que se avía dedemonstrar.

Todo esto executaremos en los numeros.

Sean quatro terminos continuos Proporcionales los siguientes 1 . 2 . 4 . 8 digo que son propor.^s como 15 . 6 . 90 . 36

y tambien lo son propor.^s 15 . 6 . 20 . 8 luego

(prop. 11 lib. 5 e.) son 90 . 36 . 20 . 8 y

y (prop. 16 lib. 5 e.) lo son 90 . 20 . 36 . 8 luego

(prop. 17 lib. 5 e.) lo son 50 . 20 . 20 . 8 luego si del Rectangulo dela suma de todos por la suma delos medios que es 90 se quita el duplo dela suma delos quadrados delos medios que es 20 el residuo ala suma de dhos quadrados así la misma suma del Rectangulo delos medios ó extremos que es 8 . esto es son proporcionales 50 . 20 . 20 . 8 como se be enlas analoxías puestas arriba.

Por Algebra

Sea la razon dada 2 á 3 y sea la suma delos medios x y el s... el menor termino

dela Razon 2, porla suma detodos y porq̃ 798
en qualquier serie dequatro terminos con
tinuos proporcionales el cubo dela suma delos
medios (Coro. 2° f.a 41 dice) diuido porla suma delos
extremos mas eltriplo dela suma delos medios
cuyo cociente es el Rectangulo delos medios,
o delos extremos: luego $\frac{x^3}{2+2x}$ es el Rectangulo de
los medios o extremos. luego (prop. 4.a lib. 2° e V)
si el duplo Rectangulo $\frac{2x^3}{2+2x}$ se resta del quadrado
x^2 que devendrá $\frac{2x^2}{2+2x}$ por el Valor dela suma delos
dos quadrados delos dos terminos medios: luego
auiendo elegido 2 porla suma detodos, y x su-
ma delos medios seran Proporcionales los
quatro terminos $\frac{2x^2}{2+2x}$ . . $2x$ . . 2 . . 9 esto es
(Prop. 15. lib. 5. eV) seran x^2 . . x . . $4+4x$ . . 9: luego
(prop. 16 lib. 6° eV) seran iguales los Rect.los $4x+4x^2 = 9x^2$
esto es (axi. 3° eV) y deprimiendo q̃ dan $4 = 5x$
esto es quedara el Valor dela incognita $x = \frac{4}{5}$
que quitado dela suma detodos, 2 quedara deresi-
duo $\frac{6}{5}$ suma delos extremos, y para su deter
minacion Porla Regla f.a 17 la qual es como sigue,
la semisuma detodos $\frac{5}{5}$ su quadrado es . . . $\frac{25}{25}$
la suma delos medios $\frac{4}{5}$ su quadrado es . . . $\frac{16}{25}$
la dif.a delos dos quadrados es la siguiente $\frac{9}{25}$
su Raiz quadrada es la siguiente . . . . . $\frac{3}{5}$
la semi suma detodos es los dhos arriba $\frac{5}{5}$
cuia suma son $\frac{8}{5}$ suma de 3° y 4° termino y aña
diendole los dhos $\frac{4}{5}$ suma de medios sera toda la suma

80 $\frac{12}{5}$ y sedixa se 12 . . 1 . . $\frac{4}{5}$ quedaran y se allaxa
dar por 4.º termino dela analogia $\frac{4}{15}$ y este
es el 2.º termino de los continuos que vixado de los $\frac{4}{5}$
suma de los medios quedara $\frac{8}{15}$ tercer termino
y todos quatro continuos $\frac{2}{15}$ . . $\frac{4}{15}$ . . $\frac{8}{15}$ . . $\frac{16}{15}$ estos
(prop. 12 lib. 5º eX) son los continuos 1 . . 2 . . 4 . . 8
la suma de todos 15 suma de los medios 6 el pro
ducto 90, suma de los quadrados de los dos termi
nos medios son 20 à 90 es como 2 à 9:)
luego queda disuelta la question; que es lo que
se propuso y se demanda saver.

Corolario

del Producto de los dos terminos de la Razon
dada se sirve el duplo quadrado del menor ter
mino, y por el residuo se divida el cubo del me
nor termino de la Razon cuyo cociente sera
suma de los medios, el qual vixado de la suma
de todos, (supuesta en el menor termino) se ten
dra la suma de los extremos.

apendix

Aqui queda manifiesto el poder proceder por diferentes mo
dos por el Algebra y de que modo dada qualesquiera suma
o difª de los 4 continuos y la Razon de los planos se pueda
allar cada termino de los quatro continuos; y final
mente como se puede Voulber dada la suma de los quadra dos
de los medios del quadrado de la suma de todos menos los quadrados de cada
uno de ellos, y menos el plano sobre la suma de los tres meno
res por la suma del 2º y 4º, pues compuesto se sera la misma Razon
dada como todo queda manifiesto.

+

Prop. 20

Dada la razon del agregado delos dos planos primero por segundo, y tercero por quarto; ael Rectangulo delos medios ó extremos; de quatro continuos propor.s hallar dhos quatro terminos continuos proporcionales

a b c e d

Sea la razon dada ab, bc y agase cd igual ala bc, y agase propor.l ad . . cd . . cde . . ded luego (propo. 16. lib. 6.º eV) el cubo dela recta cd dividido por ad viene aelcociente el quadrado dela de, ó el cubo dela bc esigual ael solido dela altura ad sobre el quadrado dela recta bc menor termino dela razon

Digo que la recta cd es la suma delos dos terminos medios, y que la ce es la suma delos extremos. cuya demonstracion sera la siguiente

Supongamos ser los quatro continuos pro proporcionales los siguientes 1. . 2. . 4. . 8 f.º 23 dice consta ser proporcionales la suma de los quad.s delos extremos ala suma delos quadrados delos medios asi la suma delos dos rectangulos del 1.º por 2.º y del 3.º por 4.º, menos el rectangulo delos medios ó extremos ael mismo rectangulo dedhos medios ó extremos, estos son propor.s 65. . 20. . 26. . 8 luego (prop. 18 lib. 5.º eV) seran proporcionales la suma delos quadrados delos extremos mas el triplo dela suma delos quadrados delos

medios ala suma delos quadrados delos medios asi
~~la suma delos rectangulos del 1º en 2º~~ y 3º en 4º
mas el duplo rectangulo delos medios extre
mos, aldho rectangulo dedhos medios extremos
estos q̃ dan propor^l. 65..20..26..8
luego como q̃ da dho son 125..20..50..8
y (prop. 15 lib. 5º d V.) duplicando 125..20..100..16
luego son propor^s la suma delos quadrados delos
extremos mas el triplo dela suma delos quadrados
delos medios ala suma dedhos quadrados delos medios
asi el duplo rectangulo del 1º por 2º y de 3º por 4º,
mas el quadruplo rectangulo delos medios ô
extremos, al duplo rectangulo de medios extre
mos: luego (prop. 12. lib. 5º d V.) como todos los
antecedentes juntos atodos los consequentes
juntos asi un antecedente a un consequente:
luego son proporcionales 225..36..100..16
estos son proporcionales el quadrado suma de
los quadrados delos extremos, mas el triplo delos
quadrados delos medios, mas el duplo delos rectan
gulos del 1º en 2º y 3º por 4º mas el quadruplo
rectangulo delos medios extremos, ala suma de
los quadrados delos medios mas el duplo rectan^o
delos medios (estos el quadrado dela suma de todos
al quadrado dela suma delos medios) asi las
suma del duplo rectangulo del 1º por 2º y 3 por 4
mas el quadruplo rectangulo delos medios al duplo
rectangulo delos medios como uno a uno; y de
mediando son proporcionales 225..36..50..8

ctoes son proporcionales 50. . 8. . 225. . 36, luego el Rectangulo dela 1ª por 2ª y dela 3ª por 4ª mas el duplo Rectangulo delas medias o extremas a otro Rectangulo es el quadrado dela suma de todas al quadrado dela suma de las medias: luego si el Rectangulo dela 1ª en 2ª y dela 3ª por la 4ª al Rectangulo delas medias o extremas es como ab à bc: luego (prop. 18. lib. 5º e 1) como ad. à cd. es el Rectang.º dela 1ª por 2ª y dela 3ª por 4ª mas el duplo Rectang.º delas medias o extremas, al mismo Rectangulo de las medias o extremas. Por loqual son proporcionales ad. . cd es el quadra dela suma de todas al quadrado dela suma delas medias: luego

a ——— b c e d

son proporcionales como ad. . cd. . cde. . ded Por loqual cd representa la suma de todas, y la ed, suma delas medias, y ce suma delas extremas. que es loque se devia dedemonstrar.

Corolario

De aqui queda demonstrado como consta dela en el primer renglon el que si fueren quatro terminos continuos proporcionales serà como el Rectangulo dela 1ª por 2ª y dela 3 por la 4ª mas el duplo Rectangulo delas medias o extremas a dho Rectangulo, es el quadrado dela suma de todos quatro terminos al quadrado dela suma delos dos terminos medios.

+

Por Algebra

Sea dada la razon 17 á 4 y supongase X suma delos medios, y asimesmo supongase 4, (menor termino dela razon) ser la suma de todos los quatro continuos: luego $4-X$ serà suma delos extremos: luego (coro. 2º fº 47 deste tratado) son propor.s $4+2X$ . . X . así X^2 . . $\frac{X^3}{4+2X}$ luego $\frac{X^3}{4+2X}$ es el rectangulo delos medios ó delos extremos: luego si $\frac{2X^3}{4+2X}$ se resta del quadrado dela suma delos medios el qual es X^2 quedarà (prop. 4ª lib. 2º e.d) el residuo $\frac{4X^2}{4+2X}$ suma delos quadrados delos dos terminos medios. Y similarmente si el duplo rectangulo delos extremos $\frac{2X^3}{4+2X}$ se resta del quadrado dela suma delos extremos $4-X$ el qual es $16+X^2-8X$ que reducido a el quebrado serà $\frac{64+2X^3-12X^2}{4+2X}$ quedarà el residuo $\frac{64-12X^2}{4+2X}$ el qual es la suma delos quadrados delos extremos luego si a esta suma añadimos los quadrados delos medios los quales son $\frac{4X^2}{4+2X}$ serà toda la suma $\frac{64-8X^2}{4+2X}$ y esta serà la suma delos quadrados detodos los quatro continuos. Pero a el fº 23, dixe, queda demonstrado ser proporcionales la suma detodos ala suma delos medios así la suma delos quadrados detodos ala suma delos rectangulos del 1º por 2º, y del 3º por el 4º: luego son proporcionales, 4 . . X . . $\frac{64-8X^2}{4+2X}$ . . $\frac{64X-8X^3}{16+8X}$ estas disminuyendo los quebrados y (prop. 15 lib. 5º e.d) son proporcionales 4 . . X . . $64-8X^2$ . . $16-2X^3$ luego $16-2X^3$ es suma delos rectangulos 1º por 2º y 3º por 4º,

luego son proporcionales $16-2x^3 . . x^3 . . 17 . . 4$
y (prop. 18. lib. 5º e.V.) lo son $16 . . x^3 . . 25 . . 4$
y duplicando (prop. 15. lib. 5 e.V.) $16 . . x^3 . . 50 . . 8$
luego (prop. 16. lib. 6º e.V.) seran $50x^3 \sqcap 128$
y deprimiendo quedan iguales $x^3 \sqcap \frac{128}{50}$
estos seran iguales los siguientes $x^3 \sqcap \frac{64}{25}$
Pero tenemos demonstrado ser proporcionales el rectangulo 1º por 2º y 3º por 4º mas el duplo rectangulo de los medios ó extremos ael otro rectangulo asi el quadrado de la suma de todos ael quadrado de la suma de los medios coro lario anterior luego $50 . . 8 . . 16 . . \frac{64}{25}$
luego $\frac{64}{25}$ es el quadrado de la suma de los medios cuya raiz es $\frac{8}{5}$ suma de los medios y sera $\frac{12}{5}$ suma de los extremos. Para cuya determinacion se ara la operacion que en la anterior y se allara ser los quatro continuos $\frac{4}{15} . . \frac{8}{15} . . \frac{16}{15} . . \frac{32}{15}$
estos (prop. 15 lib. 5 e.V.) seran los quatro terminos continuos proporcionales $1 . . 2 . . 4 . . 8$
cuya suma de los rectangs. prim. por 2º y 3º por 4º son 34 y el rectangulo de los medios ó extremos es 8 luego tienen la razon que 17. ó 4. luego queda resuelta y demonstrada que es lo que se des[e]a Saver.

Corolario

el Cubo del menor termino de la razon dada se divida por el mayor termino mas el duplo del menor termino, y el cociente sera el quadrado de la suma de los medios, cuya raiz quadrada, se tendra por

suma delos medios, y se restara del menor ter-
mino dela razon dada, y el residuo se tendra
por suma delos dos terminos extremos los quales
conocidos se hara la operacion, ya explicada antes
para la determinacion delos quatro continuos
que se deuaxen saver. la operacion hallaras fs. 79 vta.

Exemplo

Sea la razon dada 82 â 9 el cubo de 9 es
729 que partido por 82 mas el duplo de 9, que es
18 sera la suma 100 digo que $\frac{729}{100}$ es el quadra-
do dela suma delos dos terminos medios cuya raiz
es $\frac{27}{10}$ suma delos medios que restada de $\frac{90}{10}$ quedan
$\frac{63}{10}$ suma delos extremos.

operacion, la suma de todos es $\frac{90}{10}$: luego sera

la semisuma $\frac{45}{10}$ su quadrado es	2025 | 100
la suma delos medios es $\frac{27}{10}$ su quadrado es	729 | 100
la difa delos dos quadrados es la presente	1296 | 100
su raiz quadrada es la siguiente	36 | 10
la semisuma de todos es la siguiente	45 | 10

cuya suma son $\frac{81}{10}$ suma de 3º y 4º termi-
no que restada delos $\frac{90}{10}$ quedan $\frac{9}{10}$ suma del 1º y 2º
y porque la suma del 3º y 4º son $\frac{81}{10}$ añadi-
endole $\frac{27}{10}$ sera toda la suma $\frac{108}{10}$ y se formara
la proporcion como 108 . . 27 . . $\frac{27}{10}$ . . $\frac{1296}{1080}$
estos son propors, 4 . . 1 . . $\frac{27}{10}$ . . $\frac{27}{40}$ y sera
$\frac{27}{40}$ el 2º termino que restado delos dhos $\frac{9}{10}$ queda-
ran $\frac{9}{40}$ por el 1º y seran todos quatro conti-
nuos proporcionales $\frac{9}{40}$ . . $\frac{27}{40}$ . . $\frac{81}{40}$ . . $\frac{243}{40}$ luego
(prop. 15 lib. 5 eu) lo son 1 . . 3 . . 9 . . 27 que es lo q.

apendix

Aquí queda manifiesto el que dada qualquiera suma o difª de los quatro continuos, y la razon de los planos, es lo bastante para allar a cada uno de los quatro continuos, porque se puede arguir como la suma o difª omologa de los quatro allados a cada uno dellos (prop. 12. lib. 5º eu) y ademas de esto, se manifiesta el poder resolber el problema de otra suerte, poniendo la incognita X por suma de los medios, y eligiendo el menor termino de la razon dada por suma de todos.

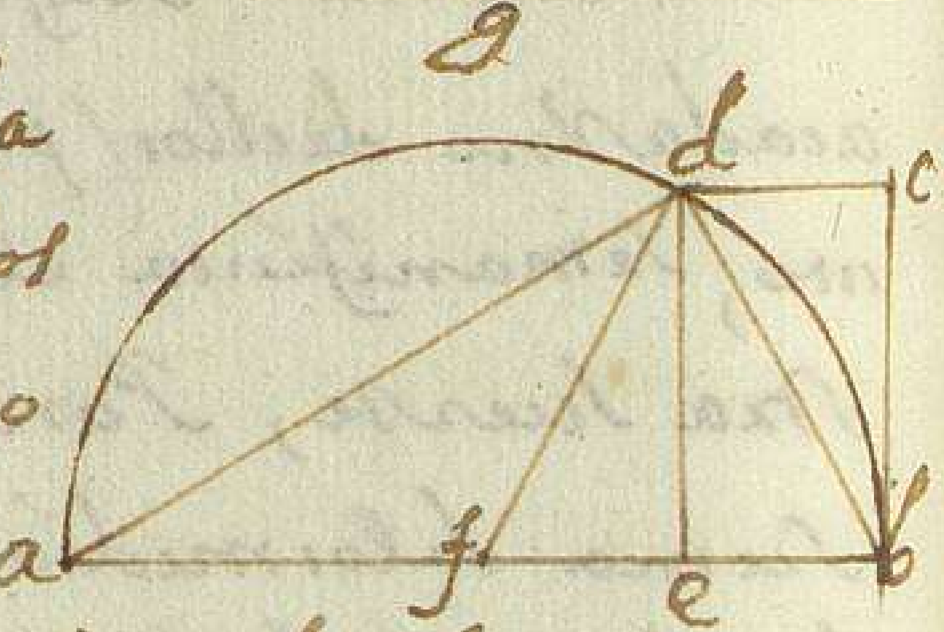
Prop. 21

Dada la suma de los extremos, y dada la suma de los cubos de los dos terminos medios, allar los quatro terminos continuos proporcionales.

Por Algebra

Sea la suma de los extremos 9, y sea la suma de los cubos de los medios 72, y supongamos ser la incognita X uno de los extremos: luego $9-X$ será el otro extremo cuyo producto de los extremos será $9X-X^2$, y porque en qualesquiera serie de quatro continuos proporcionales la suma de los cubos de los medios es igual ael solido sobre el producto de los medios (ò de los extremos) en la altura de la suma de los extremos como se vera en los quatro continuos sigtes $X..cX..c^2X..c^3X$ pues la suma de los cubos de los medios es $c^6X^3+c^3X^3$, y lo mismo se allará sobre el producto de los medios ò extremos el qual es c^3X^2 multiplicandolo por c^3X+X sale $c^6X^3+c^3X^3$. esto ya demonstrado unatecible[?]

Operacion: luego $9X - X^2$ multiplicado por 9 sera el producto $81X - 9X^2 \sqcap 72$ y deprimiendo por 9 quedara $9X - X^2 \sqcap 8$ y seran proporcionales los terminos $X\,.\,.\,2\,.\,.\,4\,.\,.\,9 - X$ estos son propor.s $1\,.\,.\,2\,.\,.\,4\,.\,.\,8$ que es lo que se avia de demonstrar.



Por Geometria

Sea la Recta ab suma de los extremos y sea la Recta g cuyo cubo sea suma de los cubos de los medios, y haganse proporcionales los quatro terminos siguientes ab . . g . . gg . . bcb y (prop. 11. lib. 1.º E) se lebante perpendicular bc sobre ab y descripto el semicirculo se tire (prop. 31 lib. 1.º E) cd, paralela a la Recta o diametro ab asta que corte la periferie en el punto d, desde donde se dexe caer (prop. 12. lib. 1.º E) la perpendicular de; Digo que be, ea son los dos terminos extremos.

Demonstracion

Tirese al centro la Recta df, y tirense las Rectas db, da, Por construccion son ab . . g . . gg . . bcb: luego el cubo ggg dividido por ab, tendra al cociente (prop. 16. lib. 6.º E) el quadrado bcb estos seran iguales como se ve $\frac{ggg}{ab} \sqcap bcb$ estos seran iguales los siguientes $\frac{ggg}{ab} \sqcap ded$ quitese el quadrado ded del quadrado dfd, y quedara (prop. 47. lib. 1.º E) el quadrado fef cuyo lado fe añadido y restado de la semisuma ab resultan las partes ae eb. Por los extremos.

+

En la Resolucion anterior Algebraica se puso la

serie de quatro continuos segui.tes $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x$

luego (prop. 1 lib. 6º e.r) los son propor.l $c^2x^2 \,..\, c^3x^2 \,..\, cx \,..\, c^2x$

y por la misma los son propor.l $cx \,..\, c^2x \,..\, x \,..\, cx$

luego (prop. 11. lib. 5º e.r) los son $c^2x^2 \,..\, c^3x^2 \,..\, x \,..\, cx$

luego (prop. 16. lib. 6º e.r) los solidos $c^3x^3 \sqcap c^3x^3$

y (prop. 1 lib. 6º e.r) son propor.l $c^4x^2 \,..\, c^3x^2 \,..\, c^3x \,..\, c^2x$

luego (prop. 16. lib. 6º e.r) los solidos $c^6x^3 \sqcap c^6x^3$

luego (axi. 2º e.r) son iguales $c^6x^3 + c^3x^3 \sqcap c^6x^3 + c^3x^3$

luego aviendose demonstrado el que la suma de los cubos de los dos terminos medios iguala al solido debajo del plano o rectangulo de los medios o extremos en la altura de la suma de los extremos estos son iguales por construccion $ggg \sqcap ded:ab$ estos (prop. 13 lib. 6º e.r) los son igua.l $ggg \sqcap aeb:ab$ luego siendo por suposicion el solido ggg suma de los solidos de los dos terminos medios y la recta ab suma de los extremos debaxo de cuya altura y plano aeb esta el solido $aeb:ab$ luego por lo dicho, y lo demonstrado arriba queda asimesmo demonstrado ser los dos extremos de los quatro continuos be y ea g^3 a los g^3 se trata de demonstrar.

hasta aqui solo emos allado los dos extremos $be \,..\, ea$ pero es mui deficil el allar las dos medias por no averse encontrado la figura o la demonstracion que reduzca, lo que a motibado a muchos Geometras, yntentar resolberle por barios modos practicos.

+

Corolarios

En quanto a los numeros sera mui facil la determinacion como se ha dicho, pues si la suma de los cubos de las medias se divide por la suma de las extremas, y el cociente se resta del quadrado de la semisuma de las extremas y se sacare la raiz quadrada del residuo y esta raiz se le restare la mitad de la suma de las extremas se tendra el termino primero q. restado de la suma dada se tendra el quarto termino.

y asimismo si la suma de los cubos de las medias se divide por el rectangulo de las medias o de las extremas vendra al cociente la suma de las extremas, y al contrario.

Si fueren quatro terminos continuos propor.s el cubo de la suma de las medias, es igual al triplo solido sobre la suma de las medias en el plano de las medias o extremas, mas el solido sobre el plano de las medias o extremas en la altura de las extremas, esto es sean continuos los quatro terminos a..b..c..d Digo q. son iguales $b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \;\Omega\; abc+3b^2c+3bc^2+dbc$ luego (ax. 3º) seran $b^3+c^3 \;\Omega\; abc+dbc$ esto es que los cubos de los medios se igualan a los solidos del 1º 2º y 3º junto con el solido del 2º por 3º y 4º como se ha figurado.

Prop. 22

Dada la difª de los extremos de quatro continuos proporcionales, y la difª de los cubos de los medios mostrar los quatro continuos

Por Algebra

Sea dado el numero 7 difª de los extremos, y sea dado 56 difª de los cubos de los medios. y Supongamos x primer termino: luego $x+7$ sera el quarto termino cuyo producto de los extremos sera x^2+7x

Sean pues continuos propor. $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x$
en la prop. anterior se demostro ser $c^6x^3 + c^3x^3 \;\Omega\; c^6x^3 + c^3x^3$
luego (axi. 3º) si se quitan de cada parte . . $2c^3x^3 \;\Omega\; 2c^3x^3$
quedaran iguales los residuos . . $c^6x^3 - c^3x^3 \;\Omega\; c^6x^3 - c^3x^3$
luego esta claro que en qualquiera serie de quatro continuas propor. la difª de los cubos de los medios es igual al solido sobre el producto de los medios o extremos en la altura de la difª de los extremos
luego se deven igualar los siguientes $7x^2+49x \;\Omega\; 56$
y deprimiendo por 7 quedaran $x^2+7x \;\Omega\; 8$
y (prop. 14. lib. 6º e V) propor. $x \,..\, 2 \,..\, 4 \,..\, x+7$
luego vuelva a hallar dos rectas x y $x+7$ cuya difª 7 es conocida reciprocas a las dos rectas 2 y 4 dadas que es lo que se deseava saber

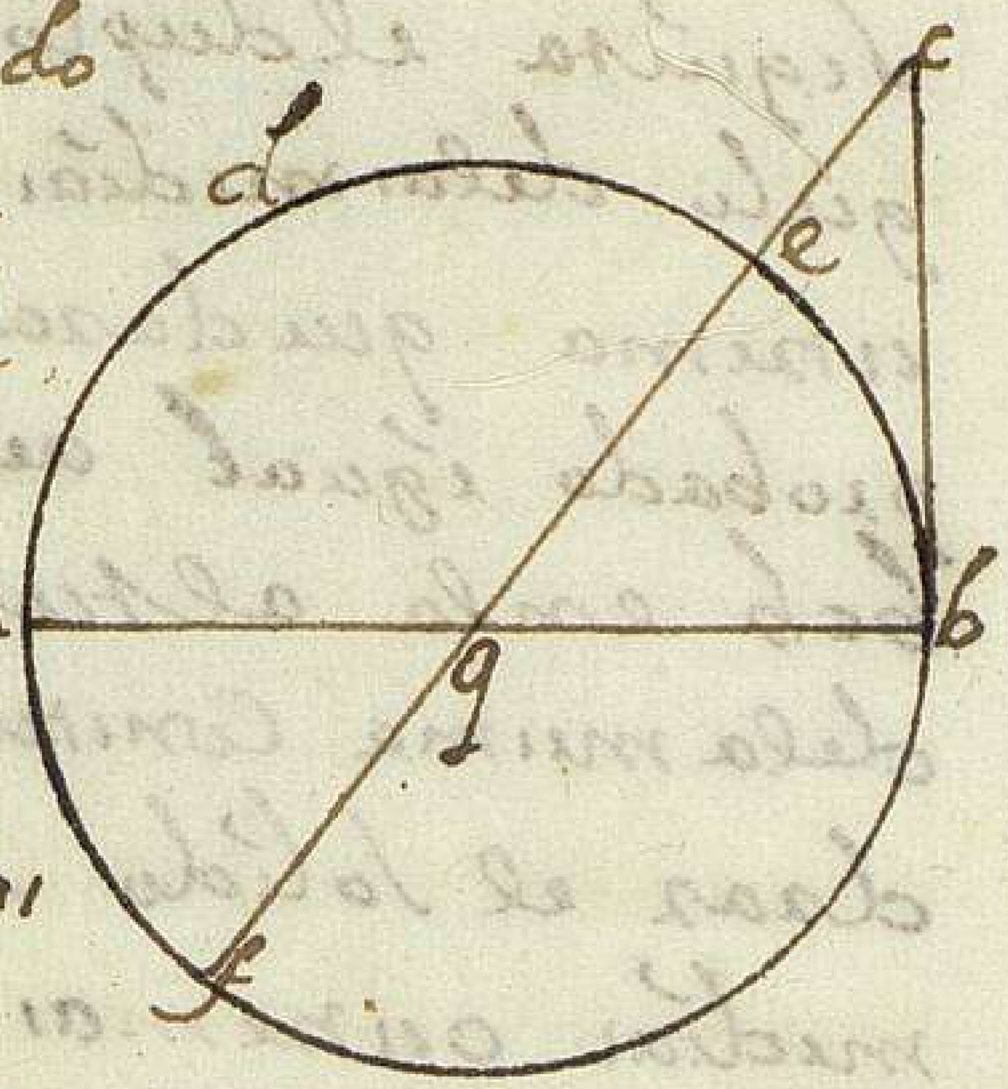
+

Por Geometria

92 Sea dada ladifª delos extremos la Recta, ab, y sea dado el cubo ggg difª delos cubos delos dos terminos medios.

Agansse (prop. 12 lib. 6º eV) ab . . g . . gg . . bcb y (prop. 11. lib. 1º eV) Sobre ab, enel punto b, se levante perpendicular bc y centro g, yn tervalo b, Sedescriua elcirculo bed, y del punto c, y por elcentro g, Setire laRecta cf que cortarà laperiferia enlos puntos e, y f: Digo, que las Rectas fc ec Son las extremas cuia difª es la Recta fe igual ala Recta dada ab. porque siendo por construcion propor cionales losquatro termˢ. ab . . g . . gg . . bcb esto es (prop. 36. lib. 3º eV). . ab . . g . . gg . . fce y Siendo asimesmo en quales quiera dos can tidades desiguales, lineas, planos, ô Solidos, la maior cantidad, igual alamenor junta con ladifª deambas delo qual Sigue que en qualquiera Serie dequatro proporcionales la Suma delas extremas contiene ala menor dos beces y aladifª deambas Una vez: luego Semejantemente la Suma delos cubos delos medios contiene dos beces al cubo dela media menor, y Una bez aladifª deambas cubos cuya Suma dada es elcubo dado ggg. Pero por construcio como se sean hecho propor. ab . . g . . gg . . fce luego (prop. 16. lib. 6º eV) los solidos ggg — fce: ab

Pero queda demonstrado enla presente proposicion quela Suma delos cubos delos medios Siguala ael Solido Sobre el plano delos medios enla altura dela dela Suma delas estremas: luego el Solido



Sobre el rectangulo delas medias o estremas enla Suma (o altura) delas estremas contiene dos veces ael cubo dela media menor y una vez ael cubo ggg que es igual ael intervalo o difa delos cubos delas medias: luego quando la suma delas estremas contenga dos veces ala estrema menor, y una vez ala difa delas estremas será el solido sobre el rectangulo delas medias o estremas enla Suma delas estremas igual ael duplo solido Sobre el rectangulo delas medias o estremas enla estrema menor junto con el Solido Sobre el mismo rectangulo enla altura dela difa delas estremas ab.

Lo segundo enla proposicion anterior aura se demonstro que el Solido Sobre el rectangulo delas medias o estremas enla estrema menor Siguala ael cubo dela media menor: luego el duplo deaquel Solido Será igual ael duplo cubo dela media menor. y a demas si dela Suma delos cubos delas medias

94 Seguira el duplo solido sobre el rectangulo delas medias o extremas enla menor extrema quedara el cubo ggg que ya q̃da probado igual al solido sobre el quadrado bcb enla altura ab. Pero esta declarado dela misma construcion que se ade engendrar el solido sobre el rectangulo delas medias o extremas enla misma altura ab: luego el solido sobre bcb enla altura ab se igualara al solido sobre el rectang.^{lo} delas medias o extremas enla altura ab: el quadrado bcb ò se igual el rectangulo fce, es igual al rectangulo delas medias o extremas: luego las rectas fc ec son las extremas que es lo que se abia de demonstrar

Corolario

Si fueren quatro terminos continuos propor.^{s} la dif.^{a} delos cubos delos medios se igualarà al cubo dela dif.^{a} delos medios junto con el triplo solido sobre la dif.^{a} delos medios en el plano sobre las medias o extremas. este theorema se infiere delo demonstrado enlas dos proposiciones anteriores y dela prop. 14 deste mismo tratado. f.^{o} 53.

Prop. 23

Dada la suma delos cubos delos medios y dada la suma delos cubos delos extremos de quatro continuos, estos se piden.

Sean pues los quatro continuos a . . b . . c . . d
Pero en la prop. 21 deste f.° 87 queda demonstrado
ser iguales los cubos de los medios al solido
sobre el plano de los medios en la altura de la
extrema menor junto con el solido sobre dho
plano en la altura de la mayor extrema
esto es como de alli consta $b^3 + c^3 \sqcap a{:}bc + bc{:}d$
esto es (prop. 16 lib. 6.° E.) $b^3 + c^3 \sqcap a^2d + ad^2$
luego elevando por 3, $3b^3 + 3c^3 \sqcap 3a^2d + 3ad^2$
Añadase a cada parte $a^3 + d^3 \sqcap a^3 + d^3$
y quedaran (axi 2.° E.) $3b^3 + 3c^3 + a^3 + d^3 \sqcap a^3 + 3a^2d + 3ad^2 + d^3$
luego vuelto pues esta claro que se deve
añadir el triplo de los cubos de los medios
a los cubos de los extremos, y sacando la raiz
cubica de la dha suma se tendra la suma
de los extremos: luego conocida la suma de los
extremos, y la suma de los cubos de los medios
seran conocidos los quatro continuos pro
porles por la prop. 21 deste tratado. Por lo qual
no paso adelante. quien luego tenia de demons
trar

Prop. 24

Dada la dif.a de los cubos de los medios, y dada la dif.a de los cubos de los extremos de quatro terminos continuos propor.s se pide los quatro continuos

Digo que los quatro son x . . cx . . c^2x . . c^3x
y (prop. 22 lib. 6.° E.) tambien son x^3 . . c^3x^3 . . c^6x^3 . . c^9x^3,
cuyas dif.as son conocidas $c^6x^3 - c^3x^3$ y tambien, $c^9x^3 - x^3$

96 Y porque la difª delos cubos delos extremos es $c^9x^3-x^3$ sera manifiesto el que dha difª, viene del cubo que se engendra dela difª de dhos extremos. Seara el cubo de c^3x-x su quadrado es $c^6x^2-2c^3x^2+x^2$ y su cubo es $c^9x^3+3c^3x^3-3c^6x^3-x^3$: luego si de $c^9x^3-x^3$ difª delos cubos delos extremos se quita el triplo dela difª delos cubos de los medios cuyo triplo es $3c^6x^3-3c^3x^3$ quedara la difª siguiente $c^9x^3+3c^3x^3-3c^6x^3-x^3$ igual al cubo dela difª delos mismos extremos cuya raiz cubica es c^3x-x como queda demonstrado luego (prop. 22 deste tratado) este problema esta resuelto. Porloque no se necesita de mas operacion que la que consta en dha proposicion.

Prop. 25

Dada la suma delos medios, y dado el solido sobre el plano delos medios o extremos enla altura dela difª que ay entre la suma delos extremos y suma delos medios. Mostrar los quatro terminos continuos proporcionales

Digo que los quatro terminos continuos proporcionales son los siguientes $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x$ la suma delos extremos es c^3x+x y la suma delos medios es c^2x+cx, la difª delas dos sumas es c^3x+x-c^2x-cx que multiplicada por el plano siguiente c^3x^2 el qual es delos medios, o extremos, produce el solido $c^6x^3+c^3x^3-c^5x^3-c^4x^3$ el qual es el solido dado. Pero este solido es igual al solido

+ 97

Sobre el quadrado dela difª delos medios enla altura delas suma delos mesmos medios segun se explican los signos Vgª, la difª delos medios es $c^2x - cx$ su quadrado es $c^4x^2 - 2c^3x^2 + c^2x^2$ que elebado por la suma de ellos q̃ es esta, $c^2x + cx$ Produce el solido siguiente $c^6x^3 + c^3x^3 - c^5x^3 - c^4x^3$: luego esta clara, y manifiesta la resolucion, y terminacion delos quatro continuas propor.

Por Analisis

Sea pues, a, suma delos medios y sea la linea b cuio solido sea igual ael solido sobre el plano delos medios, o extremos, enla altura dela difª delas dos sumas delos medios, y extremos segun lo propuesto.

Y avrá (prop. 12. lib. 6º E) propor. a . . b . . bb . . cc luego (prop. 16. lib. 6º E) son iguales $bbb = cca$ luego el cubo, bbb, es igual a ael solido sobre el quadrado, cc, enla altura a, por lo qual deprimiendo por a, quedara $\frac{bbb}{a} = cc$ Digo que la linea c es difª delos dos terminos medios los quales son $\frac{a-c}{2}$ el 2º termino, y $\frac{a+c}{2}$ el tercer termino fº 58 dese tratado, prop. 14 Por lo que este problema se aclarara de el bien motivo por que se declara resuelto.

Apendix

Delo demonstrado consta el que se pueden resolver los problemas siguientes.

Dado el mesmo solido, y difª delos medios allar los quatro continuas propor.

Lo segundo dado el solido sobre el quadrado dela difª delas medias enla suma delas mismas medias seran dado el solido enla altura dela suma delas medias sobre el quadrado dela difª dela suma de medios y suma de extremos: y ~~dado~~ el mismo solido sobre el plano de los medios.

Prop. 26

Dada la suma del 5º, 3º y 1º y dada la suma del 4º y 2º terminos de cinco continuos proporcionales Mostrar quales sean

Analisis

Digo que son los siguientes, $x \cdot\cdot \overset{}{c}x \cdot\cdot \overset{2}{c}x \cdot\cdot \overset{3}{c}x \cdot\cdot \overset{4}{c}x$

y sea pues como se pide $a \sqcap \overset{4}{c}x + \overset{2}{c}x + x$

y sea pues como se pide $b \sqcap \overset{3}{c}x + cx$

y supongase asimismo $z \sqcap \overset{2}{c}x$: luego,

(prop. 15 lib. 5 aV) $az \sqcap \overset{6}{c}\overset{2}{x} + \overset{4}{c}\overset{2}{x} + \overset{2}{c}\overset{2}{x}$

pero tambien lo son $\overset{2}{z} \sqcap \overset{4}{c}\overset{2}{x}$

luego (axi. 2º aV) $az + \overset{2}{z} \sqcap \overset{6}{c}\overset{2}{x} + 2\overset{4}{c}\overset{2}{x} + \overset{2}{c}\overset{2}{x}$

y (prop. 14. lib. 6º aV) $z \cdot\cdot \overset{3}{c}x + cx \cdot\cdot \overset{3}{c}x + cx \cdot\cdot a + z$

esto es por supuestos $\overset{2}{c}x \cdot\cdot b \cdot\cdot b \cdot\cdot a + \overset{2}{c}x$

luego vuelto pues se reduce ha hallar dos rectas $\overset{2}{c}x$ y $a + \overset{2}{c}x$ cuia difª a sea dada conocida reciprocas ala recta dada b.

Por Algebra

Sea la suma del 5º, 3º, y 1º, 21, y sea la suma del 4º y 2º, 10 y supongase x por el tercer termino; y porque en qualquiera progresion Geometrica el producto delos extremos es igual al producto delos dos terminos igualmente distantes delos extremos o igual al quadrado del termino medio quando

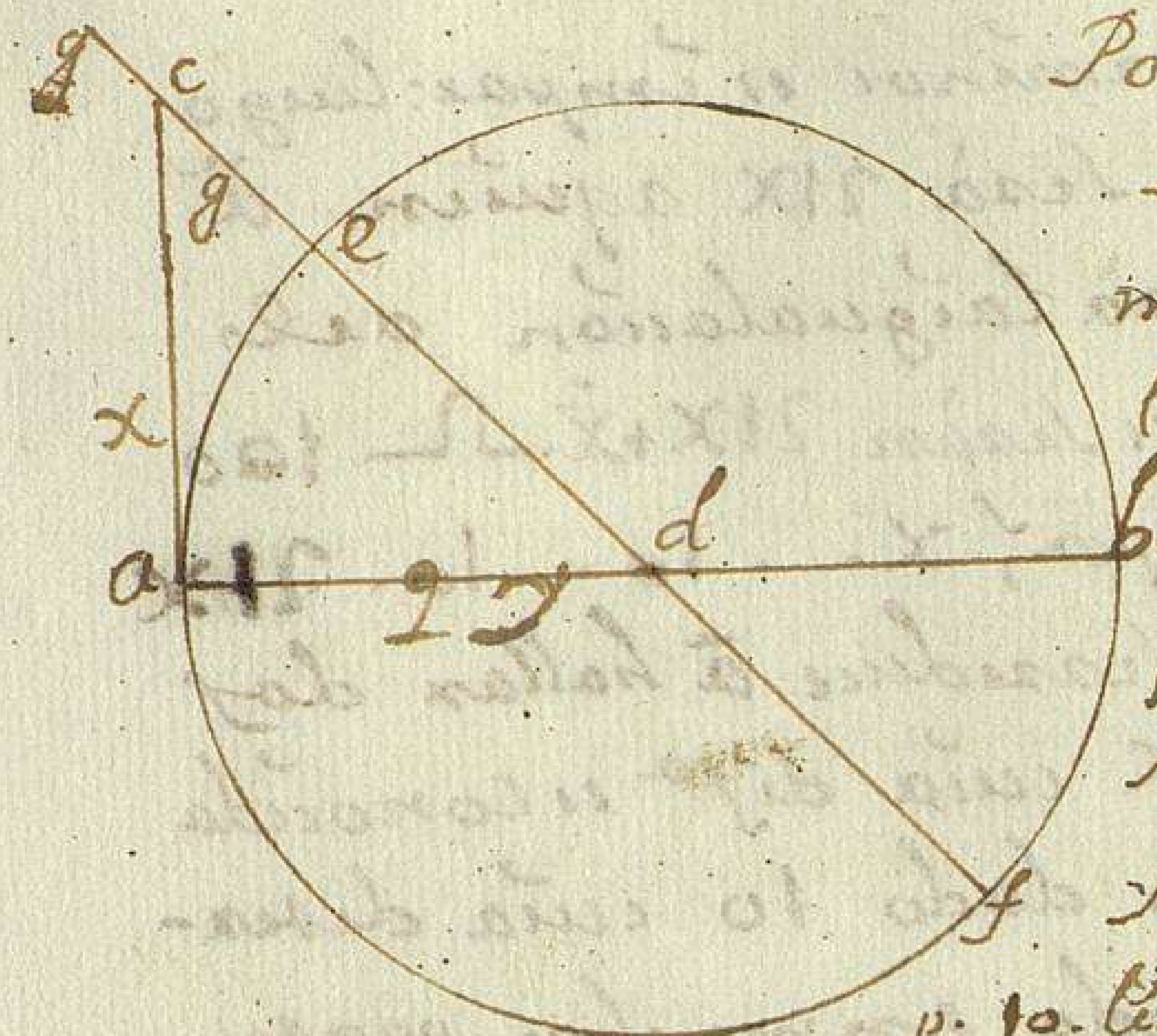
+

el numero delos terminos es impar: luego elevando x por 21 será 21X aquien añadiendole x^2 será la igualacion del quadrado de 10, estos serán $21X+x^2$ ⩲ 100 y (prop. 14. lib. 6º eu) propors. X . . 10 . . 10 . 21+X luego vuelto pues se reduce á hallar dos terminos x, y 21+X cuia difa es conocida reciprocos del numero dado 10 cuia determinacion queda explicada en muchas partes por la que se hallara ser 4 el valor dela incognita X que rebatado de 21 quedan 17 por el valor del 5º y 1º termino, por lo que se podrà formar otra analoxia, Z . . 4 . . 4 . . 17-Z y dela misma manera otra, y . . 4 . . 4 . . 10-y y quedaran conocidos todos. 1 . . 2 . . 4 . . 8 . . 16 los quales son continuos proporcionales y los quales se deseava saber.

Corolario

Si fueren cinco continuos propors. la suma delos extremos mas el duplo termino medio, suma del 2º y 4º termino, y el terso medio son continuos estos, 4 . . 10 . . 10 . . 25 Por lo qual tambien son proporcionales (coro. prop. 17. lib. 6º eu) . . 4 . . 25 . . 16 . . 100 esto es como el termino medio ala suma delos extremos mas el duplo del termino medio así el quadrado del termino medio al quadrado dela suma del 2º y 4º termis. como se ve demonstrado.

Por geometria



Sea dada la recta ab suma del 5º 3º y 1º, y sea dada la recta ac suma del 1º y 2º terminos continuos proporcionales. cuyas dos lineas se pongan en angulos rectos y dividida la recta ab (prop. 10. lib. 1º eucl.) en el punto d desde el qual como centro, y intervalo da se describa el circulo, y del punto c, y por el centro tirese la recta cd, que corte al circulo en los puntos e, y, f; Digo que la recta ec es el termino medio de los cinco continuos que se buscan. Saber. pues señalase, será mayor ô menor, como eg

Demonstracion

(Prop. 47. lib. 1º eucl.) son iguales los qq.dos aca + ada = dcd luego del quadrado dcd sera su lado dc del q.do si se quita de que es semisuma de la recta ab queda el residuo ec que sera el termino medio de los cinco continuos que igualmente dista de los extremos como queda demonstrado en las dos resoluciones anteriores. y ademas que se dijere ser mayor o menor como eg: luego (prop. 3ª lib. 2º eucl.) será fge = geg + gef Pero la recta fg se compone de la fe (igual a la recta ab) suma de la 5ª 3ª y 1ª y ademas la parte, eg que se quiere sea igual a la 3ª,

luego el Rectangulo fge era contenido
dela 5ª y 1ª Juntas con dos vezes la 3ª, pero
este Rectangulo [3] q̃da demonstrado ser igual
alos dos planos siguientes, esto es, $fge = geg + gef$
Pero por el analisis queda demonstrado ser
el quadrado dela suma dela 4ª y 2ª igual
al Rectangulo dela suma dela 5ª 3ª y 1ª por
la 3ª junto con el quadrado dela misma 3ª,
esto es son iguales los siguientes $aca = geg + gef$
Luego (axi. 1º eV) tambien lo son $fge = aca$
pero (prop. 36 lib. 3º eV) lo son $fce = aca$
luego (axi. 1º eV) tambien lo son $fge = fce$
luego la parte igual a su todo contra el axi. 9.
no puede ser: luego la media no puede ser mayor
ni menor que la recta ec que es lo que se avia de de-
monstrar: luego quedando ya conocida
la recta ec se podra formar otra analo-
gia diciendo son propor.^s $ax \;.\;.\; ec \;.\;.\; ec \;.\; xc$
y aciendo $ag = ec$ seran $gy \;.\;.\; ec \;.\;.\; ec \;.\; yb$
y quedaran conocidos todos los cinco terminos
continuos como se dixeran. los quales seran
los siguientes $gy \;.\; ax \;.\; ec \;.\; xc \;.\; yb$
los mismos que se dixan saber: luego queda re-
suelta geometricamente.

Prop. 27

Dada la suma delos extremos, y dada la suma de
los medios, de cinco terminos continuos pro-
porcionales mostrar quales sean dichos cinco
terminos continuos proporcionales.

102 Digo que los cinco continuos son los que seben en la serie siguiente $x \;..\; cx \;..\; c^2x \;..\; c^3x \;..\; c^4x$

Analisis

Sea pues como se pide . . . . $a \cap c^4x + x$

Sea asimismo como se pide $b \cap c^3x + c^2x + cx$

y supongase la incognita $z \cap c^2x$

luego (axi. 3º eV) seràn $b - z \cap c^3x + cx$

luego sus quadrados $b^2 + z^2 - 2bz \cap c^6x^2 + 2c^4x^2 + c^2x^2$

Pero corolario anterior $z \;..\; b-z \;..\; b-z \;..\; a+2z$

luego (prop. 16. lib. 6º) $b^2 + z^2 - 2bz \cap az + 2z^2$

estos son propor.s $c^2x \;..\; b-c^2x \;..\; b-c^2x \;..\; a+2c^2x$

luego (prop. 16. lib. 6º eV) $b^2 + c^4x^2 - 2bc^2x \cap ac^2x + 2c^4x^2$

luego (axi. 3º eV) seràn $b^2 - 2bc^2x \cap ac^2x + c^4x^2$

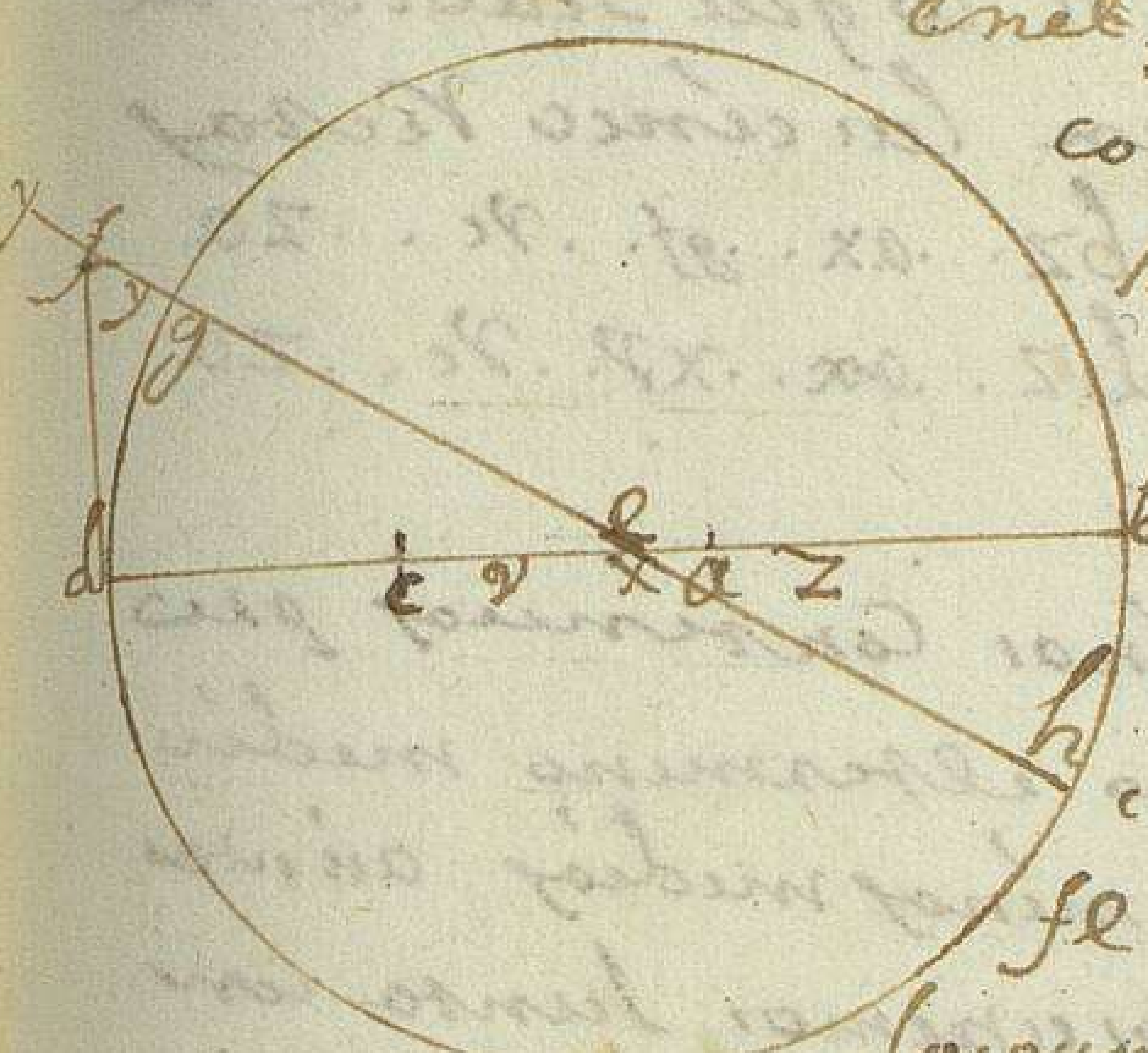
luego (axi. 2º eV) seràn $b^2 \cap ac^2x + c^4x^2 + 2bc^2x$

luego (prop. 14. lib. 6º eV) $c^2x \;..\; b \;..\; b \;..\; a+2b+c^2x$

luego Vuelta pues se reduce ha hallar dos rectas c^2x, y, $a+2b+c^2x$, cuia difª es $a+2b$ conocida reciprocas ala recta dada, la qual es b. hecha pues la operacion como queda dho en la anterior (y en muchas partes) se conocerà el termino medio el qual conocido, es facil el conocer los demas terminos, por el corolario y proposicion anterior por lo que no es necesario mas respecto quedar ya demonstrado.

Por geometria

Sea dada la recta ab suma de los extremos y sea dada la recta ca suma de los tres terminos medios y añadase de igual ala recta ca, y dividase toda la recta db (prop. 10. lib. 1º eV)



enel punto, e desde el qual
como centro, y intervalo d,
se describa el circulo: (y por la
prop. 11. lib. 1º eV) se levante
df perpendicular, igual
ala Recta dc, y Por el
centro e, se tire la secante
fe que cortara el circulo en
los puntos g, h: Digo que la li-
nea, fg, es el termino medio delos cinco continuos
Pues del analisis, y dela prop. 36. lib. 3º eV) Continuas
son proporcionales gf . . fd . . df . . fh —
estoes son propor. gf . . fd . . df . . ab+2ca+gf
Porquanto la Recta fh ba+2ca+gf como
se be manifiesto: luego esta resuelto el problema:
y si dijere que la linea fg no es la tercera
proporcional delas cinco que se buscan, Lo sera
otra mayor, o menor, Como gy, luego
(prop. 3ª lib. 2º eV) sera . hyg ygy+ygh
pero la Recta hy, se compone dela hg, y dela
parte gy esto es dela Recta ba+2ac y dela
parte gy; luego propor. gy . fd . . df . . hy —
luego (prop. 11. lib. 5º eV) gy . : gf . fh . . hy
Pero gy, es menor que gf: luego (prop. 14. lib. 5º
eV) hf deve ser menor deve ser menor que
hy, y si se toma gy mayor que gf, hf sera ma-
yor que hy Pero es asi que no lo son: luego la
Recta tercera proporcional, delas cinco con-
tinuas propor. no puede ser mayor ni menor

104 quela recta fg, que es lo que se habia de demonstrar. y seran las cinco rectas continuas las siguientes, $bz \ldotp\ldotp ax \ldotp\ldotp gf \ldotp\ldotp rc \ldotp\ldotp za$ ero es son continuas . $bz \ldotp\ldotp ax \ldotp\ldotp xr \ldotp\ldotp rc \ldotp\ldotp za$

Corolarios

1º Si fueren cinco terminos continuos proporcionales sera como el termino medio ala suma delos tres terminos medios aiuntos[?] sama, ala suma delos extremos junto con el duplo dela suma del 2º y 4º mas el triplo del termino medio.

2º Lo segundo, como el tercer termino ala suma delos extremos mas el duplo del 2º y 4º mas triplo del termino medio; asi el quadrado del ~~[illegible]~~ medio, al quadrado dela suma delos tres terminos medios.

Sean los cinco continuos $x \ldotp\ldotp cx \ldotp\ldotp c^2x \ldotp\ldotp c^3x \ldotp\ldotp c^4x$
(coro. 1º) son propor.^{es} $c^2x \ldotp\ldotp c^3x+c^2x+cx \ldotp\ldotp c^4x+x+2c^3x+2cx+3c^2x$
(coro. 2º) son propor.^{es} $c^4x^2 \ldotp\ldotp c^6x+2c^5x^2+3c^4x^2+2c^3x^2+c^2x^2 \ldotp\ldotp$ Asi es $c^2x \ldotp\ldotp c^4x+x+2c^3x+2cx+3c^2x$ este segundo corolal es el mismo corolario dela prop. 19 del libro sexto de e.^{s})

Prop. 28

Dada la suma del 5º, 4º, 2º y 1º ~~[illegible]~~ dado el 3º termino de cinco continuos proporcionales demonstrar quales son.

Analisis

Digo que son los siguientes $x \ldotp\ldotp cx \ldotp\ldotp c^2x \ldotp\ldotp c^3x \ldotp\ldotp c^4x$ y sea como se pide $a = c^4x+c^3x+cx+x$

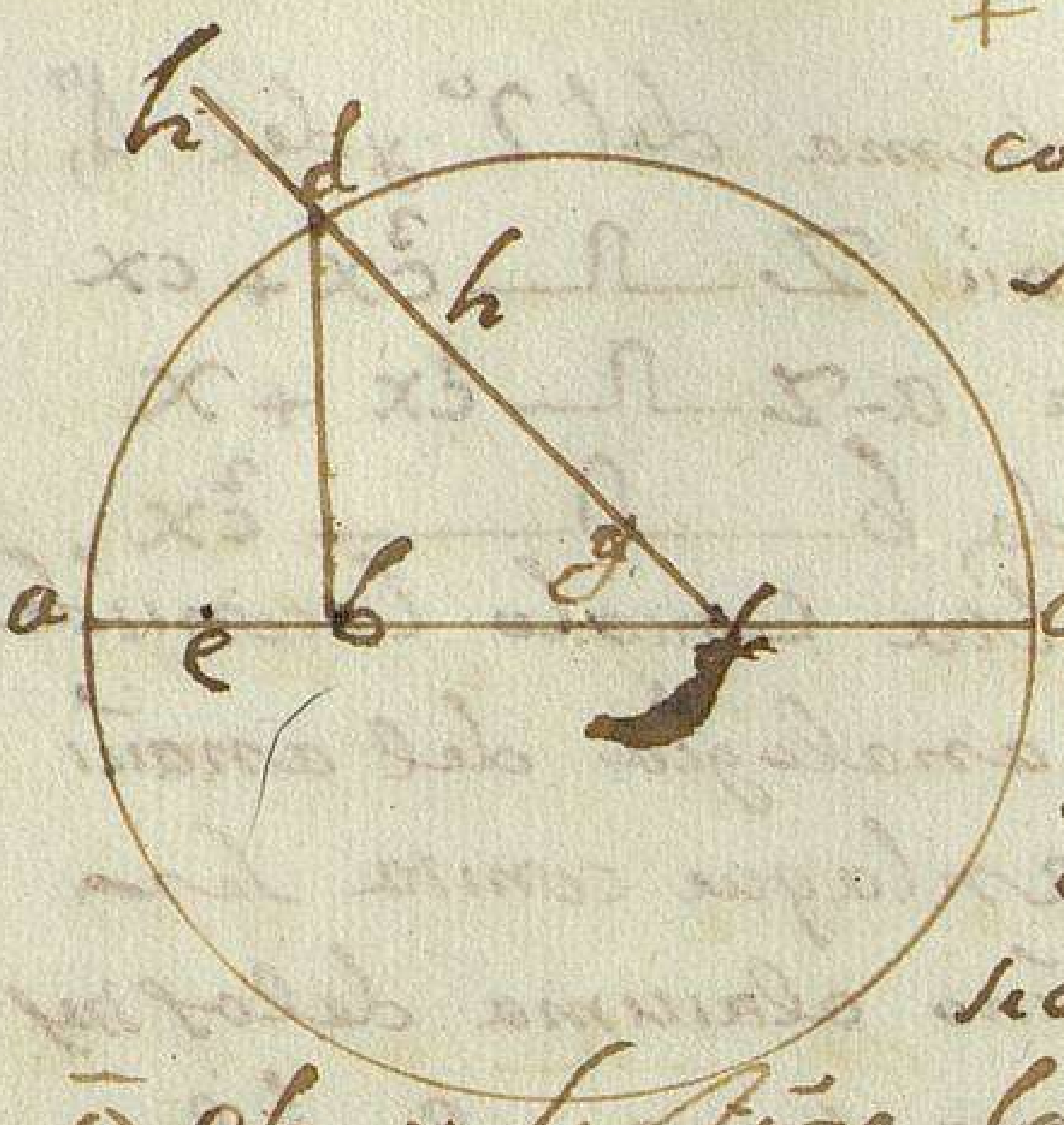
y Supongase Z por la suma del 2.º y del 4.º, cuya igualacion sera asi $Z \sqcap c^3x + cx$ luego (ax.º 3.º el V) lo seran $a-Z \sqcap c^4x + x$ y sea asimesmo la conocida, $b \sqcap c^2x$,

Esta propuesta se resuelva como lo la consideracion dela ultima analogia del analisi dela prop. anterior en la que consta ser propor.' el tercer termino ala suma delos tres terminos medios asi esta suma ala delos extremos junta con el duplo delos tres terminos medios mas el mesmo termino medio o tercero de todos cinco: luego delo dicho se sigue la analogia sig.te, Compues propor.' b . . $b+Z$ . . $b+Z$ . . $3b+a+Z$ luego (prop. 17 lib. 5.º Eu.) b . . Z . . $b+Z$ . . $2b+a$ luego resuelta se reduce ha hallar dos rectas Z, y $b+Z$ cuia dif.ª b, es conocida reciprocas alas dos rectas, b y $2b+a$ conocidas que es lo que se havia de demonstrar. La determinacion esta clara, y en muchas partes dicho, por lo q.' terminada la incognita Z se formara una nueba analogia asi y . . b . . b . . $Z-y$ y quedaran conocidos los tres terminos medios cadauno de por si, y consiguientemente los otros dos por el denominador delos tres.

Por geometria

Sea dada la recta ab suma o valor del termino medio, y sea dada la recta bc suma delas otras quatro 5.ª, 4.ª, 2.ª y 1.ª, y puestas todas en una suma

106 +



como ac sobre la qual se descrivira el semicirc.
y (prop. 11. lib. 1.º e.V.) se lebante la per-
pendicular bd, y (pro-
p. 10. lib. 1.º e.V.) se divida
ab en el punto, e, y
haga bf tripla de ae,
ō eb y se tire la recta df y pongase
fg igual ala ae ō eb: digo que la recta
dg, es la suma dela 2.ª y 4.ª, delas cinco con-
tinuas propors. que se buscan.

Demonstracion

Por quanto la recta bf por construccion
es tripla dela eb: luego (coro. 3.º prop. 4.ª lib.
2.º e.V.) el quadrado, bfb, es nobduplo del
quadrado beb esto es seran bfb ⩏ 9beb
pero (prop. 47. lib. 1.º e.V.) bfb + bdb ⩏ dfd
de cuio lado df si se quita si se quita fg, igual
ala eb mitad dela ab, quedara la recta
gd. suma dela 2.ª, y 4.ª, delas cinco con-
tinuas proporcionales que se buscan.
y si se dijere que gd no pudiese suma
de la 2.ª y 4.ª, lo abra de ser otra maior, ō
menor, como una delas dos rectas, gh,
luego (prop. 4.ª lib. 2.º e.V.) fhf ⩏ fgf + 2fgh + ghg
pero (por la misma) lo es dfd ⩏ fgf + 2dgf + dgd
esto es la recta df es suma dela 2.ª y 4.ª y
mitad dela tercera, delas dhos cinco

+

termenos continuos cuio quadrado sebe igual del quadrado fgf (ò del beb suigual) cuyo lado es mitad del tercer termino delos cinco quebusca; mas el duplo Rectangulo estoes mas el Rect.º contenido dela suma dela 2.ª y 4.ª por la misma tercera delas cinco continuas; y mas el quadrado dela suma dela suma dela 2.ª y 4.ª esto es como queda ya demonitrado $dfd \frown fgf + dg:ab + dgd$

pero se dice serlo . . . $fhf \frown fgf + gh:ab + ghg$

luego (axi. 1.º eV) seran iguales $dfd \frown fhf$

y (prop. 14. lib. 6.º eV) propor.ᵗ $df \,.\, fh \,.\,.\, hf \,.\,.\, fd$

pero (prop. 14. lib. 5.º eV) df es mayor que fh: luego fh tambien es maior que df. Contra el (axi 9) lo que no pudiera: luego hg no pudiera suma dela 2.ª y 4.ª; luego loes la Recta dg.

y dela misma manera seran iguales los quadrados $fgf + dg:ab + dgd \frown fgf + gh:ab + ghg$

luego (axi. 3.º eV) $dg:ab + dgd \frown gh:ab + ghg$

luego (prop. 14. lib. 6.º eV) $dg \,.\,.\, gh \,.\, ab + gh \,.\, ab + dg$

esto es son propor.ᵗ $dg \,.\,.\, gh \,.\,.\, 2gf + gh \,.\, 2gf + dg$

luego (prop. 14. lib. 5.º eV) quando la Recta dg se suponga menor tambien lo seran 2gf + gh que 2gf + dg: luego prop. 17. lib. 5.º eV) seran proporcionales $dg \,.\, hd \,.\, 2gf + gh \,.\, hd$

luego la parte mayor y menor contra (el axi. 9.) lo que no pudiera: luego la suma del 2.º y 4.º termino delos cinco continuos proporcionales no pudiera mayor ni menor que la Recta dg que es lo q.ᵉ havia de demonitrar.

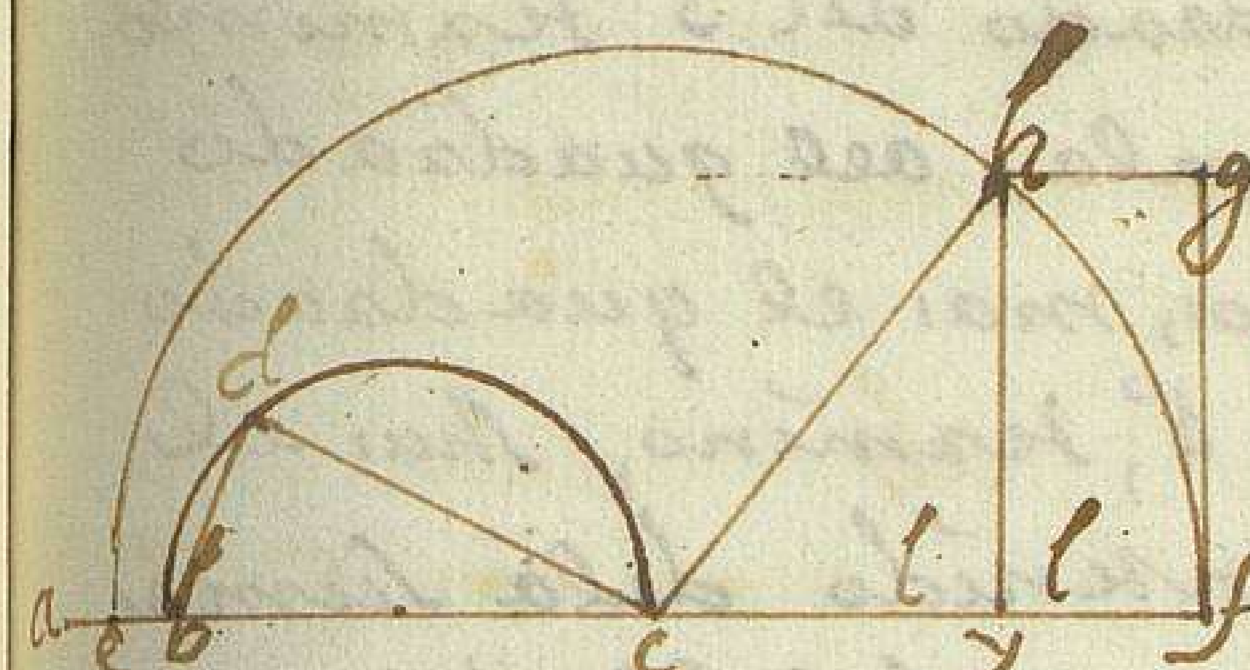
la misma prop. se demuestra geometricamte, Por otra operacion como sigue

Construcion

Sea como antes la recta ab, el termino medio, y sea la recta bc suma del 5º, 4º, 2º y 1º, sobre la qual se describa el semicirculo en quien se acomode (prop. 1º lib. 4º e.d.) la recta bd cuio quadrado sea igual al duplo quadrado de la recta ab y se tire la recta dc. Dividase la recta ab (prop. 10. lib. 1º en el punto e, y centro en c, y intervalo ce se describa el semicirculo ehf cuio diametro ef y a su extremo f (prop. 11. lib. 1º e.d.) se levante la perpendicular fg, igual a la recta dc y (prop. 31. lib. 1º e.d.) se de la gh, paralela al diametro ef, que cortara la periferie del semicirculo en h, de donde (prop. 12. lib. 1º e.d.) caiga la perpendicular hy sobre el diametro ef: Digo que la linea yf, es la suma de las rectas extremas de las cinco continuas que se buscan.

Demonstracion

(en la prop. 31. lib. 3º e.d.) el angulo bdc es recto: luego (prop. 47. lib. 1º e.d.) $bcb = bdb + dcd$ luego (axi. 3º e.d.) quedaran $bcb - bdb = dcd$ luego porquanto el quadrado bdb se supone duplo del quadrado aba esto es $bdb = 2aba$ luego seran iguales los iggdos, $bcb - bdb = chc$



esto es bcb-bdb ⩍ cec
quitese el qq.do hyh y que-
dara (axi. 3.o e.o) la igual-
lacion bcb-bdb-hyh ⩍ cec-hyh
esto es bcb-bdb-fyf ⩍ chc-hyh
esto es quedaran iguales bcb-bdb-fyf ⩍ cyc
cuyo lado cy quitado del radio ce, ó de, cf
quedara el residuo yf.

y se dijere que la yf no es la suma delas ex-
tremas sera maior ó menor como fl. Pero
por suposicion la recta ec es igual ala suma dela
5.a, 4.a, 2.a y 1.a y mas la mitad dela 3.a: el diametro
ef contiene ael duplo dela 5.a y 1.a y ael duplo
dela 4.a y 2.a y mas la 3.a sola de donde se dice
que fl es la suma dela 5.a y 1.a quedara la recta
el ala suma dela 5.a y 1.a y ael duplo dela 4.a y 2.a
y mas toda la 3.a Por lo qual el rectangulo
fle (Pro p. 3.a li. 2.o e.o) sera igual ael quadra-
do dela suma delos extremos, mas el duplo rect.o,
de rato dela suma delos extre.s, en la suma
dela 4.a y 2.a y mas el rectangulo de rato dela
dha suma delos extremos por el 3.o termino
Pero este poiner rectangulo es igual, ala suma
delos quadrados dela 2.a y 4.a

y asimismo los quadrados dela 2.a, y 4.a juntos
con el duplo rectangulo dela 2.a y 4.a (el qual
es el duplo quadrado dela media ab) se
iguala, ael quadrado dela suma dela 1
2.a, y 4.a (Pro p. 4.a lib. 2.o e.o): luego el rectan.o

+

fle, mas el duplo quadrado del 3º termino
esto es fle+2aba siguala al quadrado
dela suma delos extremos, mas el quadrado
dela suma delo 2º, y 4º termino, mas el
duplo rectangulo contenido dela suma
delos extremos por la suma del 2º, y 4º; el qual
Por lo precito es como sigue fle+2aba = bcb
esto es (prop. 47. lib. 1º eV) fle+2aba = bdb+dcd
esto es (axi. 3º eV) quedaran fle = dcd
por quanto se supuso 2aba = bdb. Pero por
construcion de, siguala ala recta fg, ó
(prop. 34. lib. 1º eV) ala recta hy: luego coro
lario prop. 16 lib. 1º eV) seràn fle = hyh
pero (prop. 17. lib. 6º eV) lo son eyf = hyh
luego (axi. 1º eV) tambien fle = eyf
y (prop. 14. lib. 6º eV) propor. fl . ye . . yf . le
luego (prop. 14. lib. 5º eV) quando la recta fl
sea mayor que la recta fy, la recta ey sera
maior ~~sera que~~ la recta el, y siendo la recta
fl, menor que la fy tambien la recta ey
sera menor que la el: Pero sibi lo contrario
luego la suma delas extremas delos cinco
terminos continuos no puede ser maior, ni
menor que la recta yf. que es lo que se avia
de demonstrar.

Corolario

Si fueren cinco terminos continuos
proporcionales el quadrado dela suma de
los extremos; el quadrado dela suma del 1º, 2º,

4º y 5º quitando de dicho quadrado el duplo quadrado del tercer termino; y el quadrado del duplo de la suma de todos menos la suma del 1º 3º y 5º, todos tres quadrados son continuos proporcionales. cuias raizes (prop. 22. lib. 6º eu) tambien lo son estos fyf . . yhy . . yhy . . yey luego sus raizes lo son fy . . yh . . yh . . ye

Prop. 29

Dada la suma de cinco terminos continuos proporcionales, y dada la suma de sus quadrados se piden los cinco continuos.

Analisis

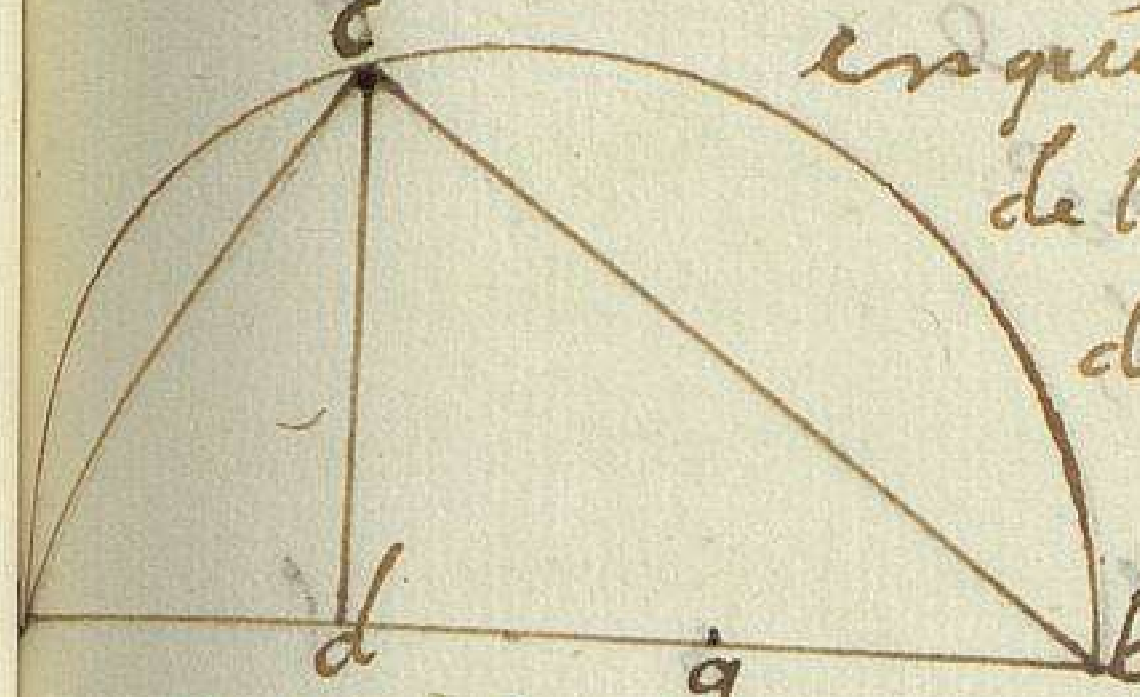
Digo que son los cinco siguientes. $x \,.\,.\, cx \,.\,.\, c^2x \,.\,.\, c^3x \,.\,.\, c^4x$ cuia suma conocida es, $a \sqcap x+cx+c^2x+c^3x+c^4x$ cuio quadrado $a^2 \sqcap x^2+2cx^2+3c^2x^2+4c^3x^2+5c^4x^2+4c^5x^2+3c^6x^2+2c^7x^2+c^8x^2$ sea asimismo $b^2 \sqcap x^2 + c^2x^2 + c^4x^2 + c^6x^2 + c^8x^2$ luego (axi. 3º) $a^2-b^2 \sqcap 2cx^2+2c^2x^2+4c^3x^2+4c^4x^2+4c^5x^2+2c^6x^2+2c^7x^2$. supongase ser lo iguales $2z \sqcap 2cx + 2c^3x$ luego elevando, $2az \sqcap 2cx^2+2c^2x^2+4c^3x^2+4c^4x^2+4c^5x^2+2c^6x^2+2c^7x^2$ luego (axi. 1º eu) lo seran $a^2-b^2 \sqcap 2az$: luego deprimiendo que daran $\frac{a^2-b^2}{2a} \sqcap z$: luego (axi. 1º eu) seran iguales . . $\frac{a^2-b^2}{2a} \sqcap cx + c^3x$ luego (axi. 3º eu) $\frac{a^2+b^2}{2a} \sqcap x + c^2x + c^4x$: luego queda conocida la suma del 2º y 4º terminos, como asimismo la suma del 1º 3º y 5º terminos como se ha demonstrado: luego por las dos proposiciones anteriores 26 y 27 se determinaran los demas esto es los cinco terminos cada uno de por si y quedara resuelta en el todo, como se sigue.

Por la prop. 26 dixe y por lo demostrado en la anterior son iguales $\frac{a^2+b^2}{2a} = c^4x+c^2x+x$
y tambien lo son iguales $\frac{a^2-b^2}{2a} = c^3x+cx$
y supongase assi mismo $y = c^2x$
luego elebando $\frac{a^2y+b^2y}{2a} = c^6x^2+c^4x^2+c^2x^2$
Pero tambien lo son $y^2 = c^4x^2$
luego (axi. 2° e.) $\frac{a^2y+b^2y+2ay^2}{2a} = c^6x^2+2c^4x^2+c^2x^2$
luego (prop. 14 lib. 6° e.) $y \;.\,.\; c^3x+cx \;.\,.\; c^3x+cx \;.\,.\; \frac{a^2+b^2+2ay}{2a}$
estos son proporcionales $y \;.\,.\; \frac{a^2-b^2}{2a} \;.\,.\; \frac{a^2-b^2}{2a} \;.\,.\; \frac{a^2+b^2+2ay}{2a}$
estos (prop. 7 y 15 libro 5° de e.) son proporcionales los siguientes $c^2x \;.\,.\; \frac{a^2-b^2}{2a} \;.\,.\; a^2-b^2 \;.\,.\; a^2+b^2+2ac^2x$
estos por la misma $2ac^2x \;.\,.\; a^2-b^2 \;.\,.\; a^2-b^2 \;.\,.\; a^2+b^2+2ac^2x$
luego Vuelta; pues se reduce ha hallar las dos rectas $2ac^2x$, y $a^2+b^2+2ac^2x$ cuia difa a^2+b^2 es conocida reciprocas a la recta dada a^2-b^2, que es lo que se avia de demostrar.

Conocida pues la recta $2ac^2x$ se diuide por $2a$ quedarà conocida la recta c^2x que es el tercer termino de los cinco continuos y por consiguiente se conocerán los demas por la prop. 27 determinado como ia queda dho antes; Por lo que no contê nuo la operacion.

Por geometria

Sea dada la recta ab, suma de los cinco continuos proporcionales, y sea a tiempo mismo dado el quadrado aca suma de los quadrados de todos cinco. Sobre la recta ab se describa el semicirculo



es quien (prop. 1ª lib. 4º eN) se acomode la recta ac lado del quadrado aca, y tírese la recta cb, y (prop. 12. lib. 1º eN) perpendicular al diametro se tire la recta cd: digo que el segmento, db es el duplo de la suma del 2º y 4º termino y que su mitad gb es suma del 2º y 4º y que ag es la suma del 1º 3º y 5º como asimismo el segm.to ad es la dif.a entre la suma de todos y el duplo de la suma del 2º y 4º.

Demonstracion

(Prop. 31. lib. 3º y prop. 8ª lib. 6º eN) los triangulos acb, adc, cdb, son semejantes, y (prop. 4ª lib. 6º eN) propor.l sus lados ab . . bc . . cb . . bd

luego (prop. 17. lib. 6º eN) son iguales $bcb \sqcap abd$

y dividiendo por ab, quedan $\frac{bcb}{ab} \sqcap bd$

y tambien quedan . . . $\frac{bcb}{2ab} \sqcap gb$

pero (prop. 47. lib. 1º eN) lo son $aba \sqcap bcb+aca$

luego (axi. 3º eN) lo son . . $aba-aca \sqcap bcb$

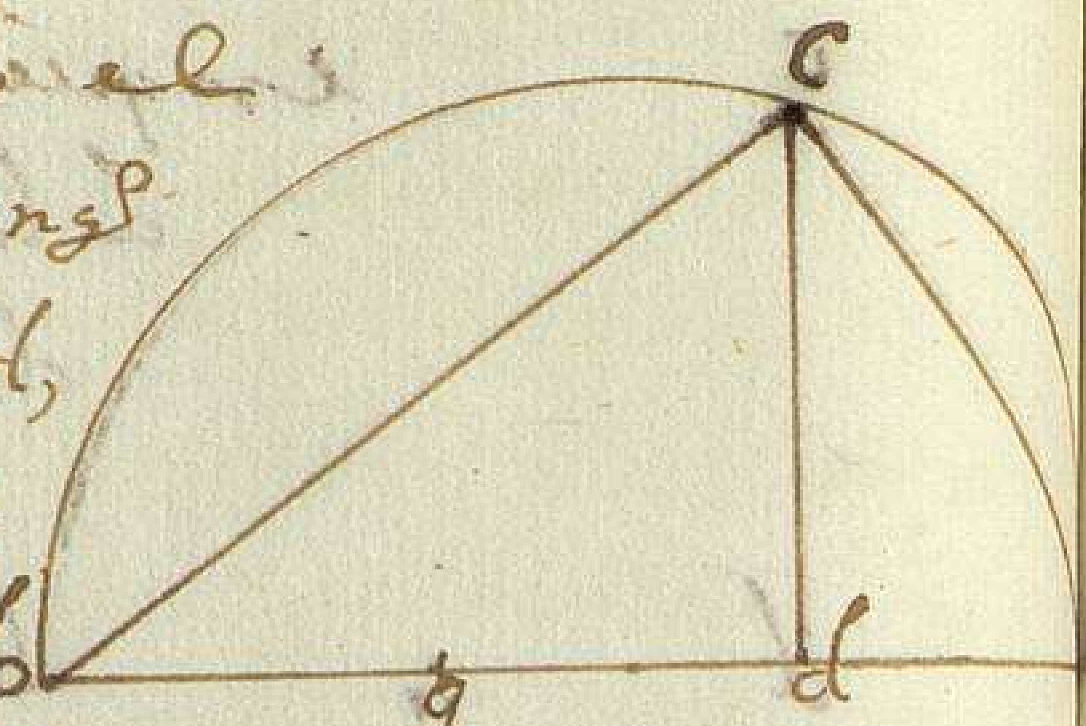
estos son iguales los siguientes $aba-aca \sqcap abd$

luego (prop. 4ª lib. 2º eN) el quadrado bcb ó su igual el rectangulo abd es igual al duplo rectangulo de los cinco, continuos proporcio.s,

luego quedan iguales $\frac{aba-aca}{2ab} \sqcap gb$

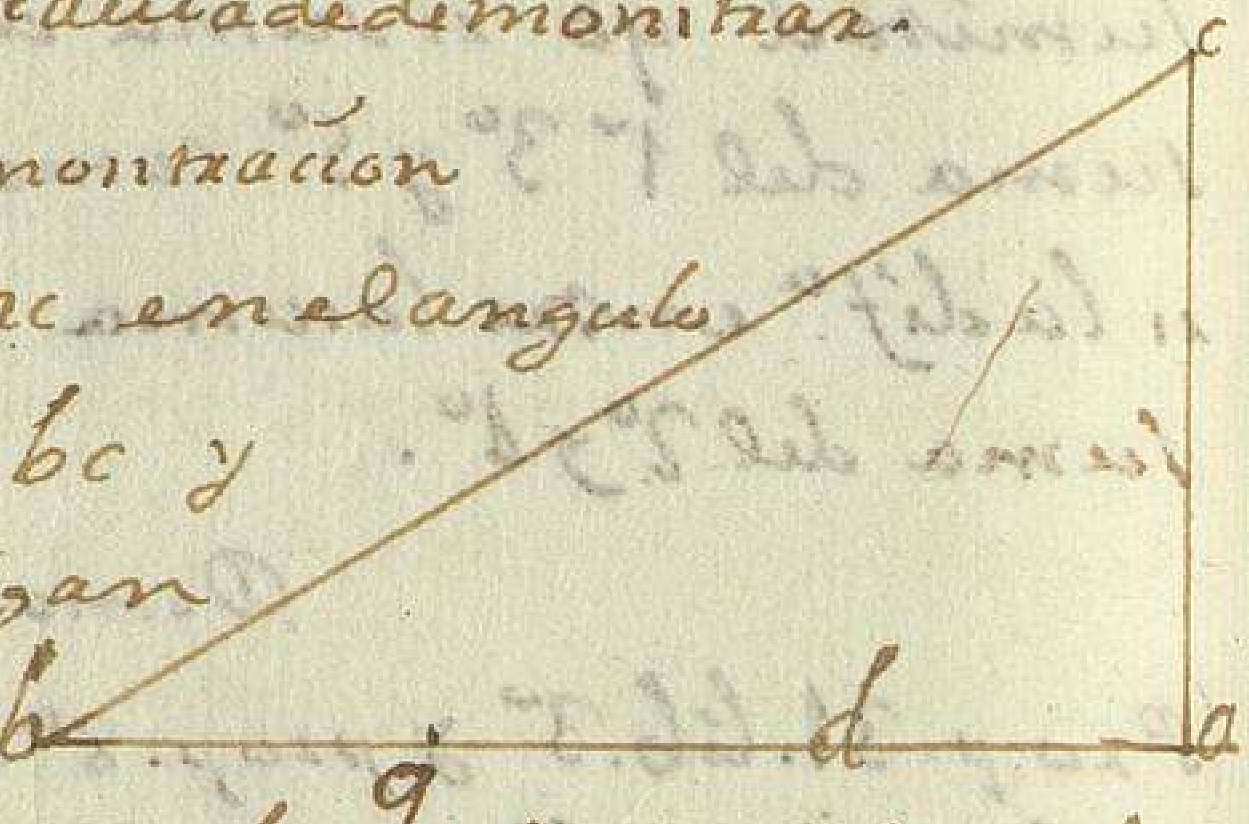
Pero queda demonstrado en el argumento analitico el q dividiendo el duplo rectangulo de los cinco continuos por el duplo de la suma de todos viene por cociente la suma del 2º y 4º termino

delos cinco: luego siendo el
quadrado bcb el duplo Rectang.
ó sea igual el Rectangulo, abd,
dividido por 2ab viene al
cociente bg elqual es



la suma del 2° y 4° porloqual quedara ga suma
del 1° 3° y 5° terminos, delos cinco continuos que
se buscan que es loque avia de demonstrar.

Otra demonstracion



Pónganse las ba y ac en el angulo
recto y tirese la recta bc y 1
(prop. 11. lib. 6° el.) sacan
proporcionales
los terminos siguientes 2ab. : . bc . . cb . . bd
Digo que la recta bd es la suma del 1° 3° y 5°, y
que el segmento da, es la suma del 2° y 4° termi-
nos delos cinco continuos que se buscan. 2

Por la Demonstracion y construccion
son iguales los Rectangulos, 2abd $\sqcap$ bcb
como tambien son iguales ab:2bd $\sqcap$ bcb
y (prop. 47. lib. 1° el.) son iguales ab:2bd $\sqcap$ bab+aca
Pero en la primera figura esta demonstrado el 3°
ser iguales bad $\sqcap$ aca esto es el Rectangulo
contenido dela suma de todos por la difa en
dicha suma, y el duplo dela suma del 2° y 4°
termino cuia difa (en la segunda figura) es bg: luego
seran iguales los Rectangulos en la segunda
figura los siguientes abg $\sqcap$ aca
luego tambien lo seran ab:2bd $\sqcap$ aba+abg

y (prop. 16 lib. 6° ex.) propor.s ab . . ab+bg . . ab . . 2bd
luego (prop. 14. lib. 5° ex.) son iguales ab+bg ꙍ 2bd
luego la suma de todos, mas la dif.a entre dha ser
may y el duplo dela suma del 2° y 4° terminos
es igual al duplo dela suma del 1° 3° y 5°: luego
dexpriniendo quedaran iguales $\frac{ab+bg}{2}$ ꙍ bd
luego bd es la suma del 1° 3° y 5° terminos y el
segmento da suma del 2° y 4° terminos que
es lo que se avia de demonstrar.

Corolarios

1 En la primera demonstracion consta que si fuesen cinco terminos continuos proporcio.s y del quadrado dela suma de todos se restase la suma delos quadrados de todos; el residuo dividido por el duplo dela suma de todos vendra al cociente la suma del 2° y 4° terminos.

2 Lo segundo, la suma delos quadrados de todos es ig.l al rectangulo, contenido dela suma de todos por la dif.a entre dha suma, y el duplo dela suma del 2° y 4° terminos esto es, aca ꙍ bad porque son proporcionales ba . . ac . . ca . . ad

3° Lo tercero sera el quadrado dela suma de todos, ala suma delos quadrados de todos como la suma de todos, ala dif.a entre dha suma y el duplo dela suma del 2° y 4° terminos
esto es (coro. prop. 19. lib. 6° ex.) aba . . aca . . ab . . ad
y por la misma razon . . . aba . . bcb . . ab . . bd
y (prop. 11. lib. 5° ex.) . . . aca . . bcb . . ad . . db
luego tambien como el quadrado dela suma

116 de todos al duplo Rectangulo de los terminos conti-
nuos assi la suma de todos a la suma dupla del
2º y 4º terminos, como queda demonstrado.
y por la igualdad, son proporcionales como
como la suma de los quadrados de todos al
duplo Rectangulo de todos assi la difª entre la
suma de todos y el duplo de la suma del 2º y 4º
terminos a la dcha dupla suma del 2º y 4º ter-
minos como tambien queda demonstrado.

4 En la segunda demonstracion consta que
el Rectangulo contenido de cada de la suma
de todos por el duplo de la suma del 1º, 3º y 5º
es igual al quadrado de la suma de todos junto
con la suma de los quadrados de todos.

Prop. 30

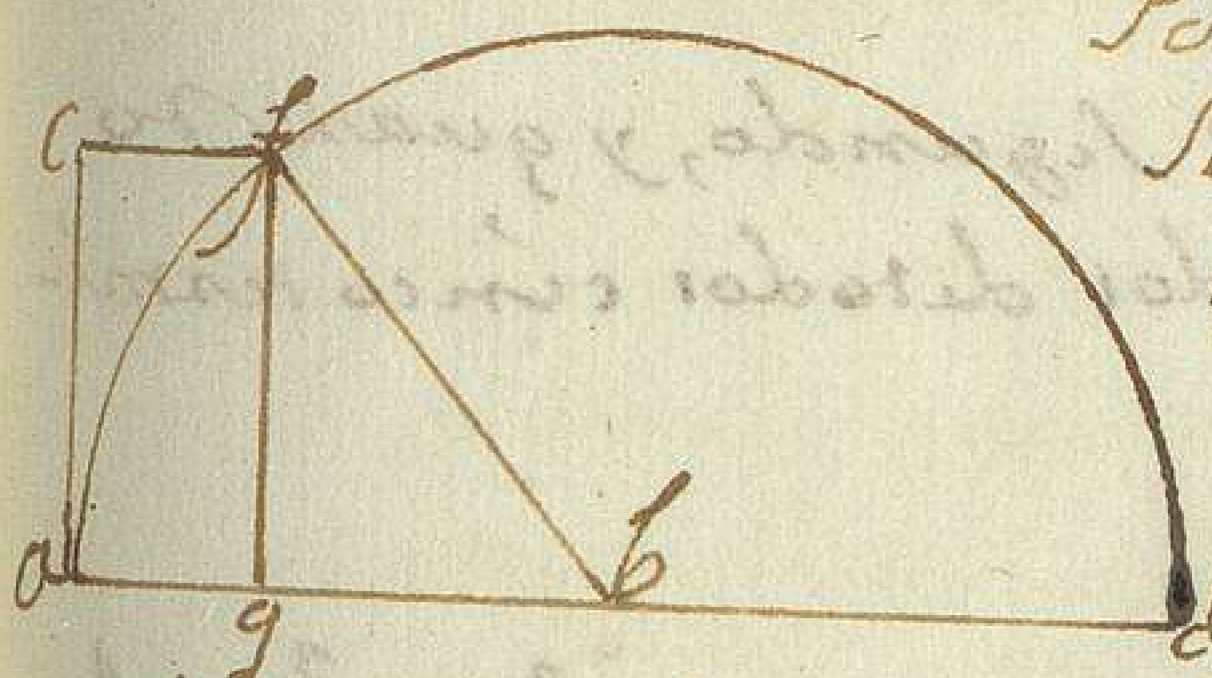
Dada la suma del 1º 3º y 5º y dada la suma de
los quadrados de todos se piden los cinco ter-
minos continuos proporcionales.

Analisis

Digo que son los cinco igˢ y $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$
y sean como se propone . . . $a = x + c^2x + c^4x$
y sean assimismo $b^2 = x^2 + c^2x^2 + c^4x^2 + c^6x^2 + c^8x^2$
En la primer demonstracion geometrica proposi-
cion anterior se demonstro como la recta ag es
suma del 1º, 3º y 5º y quitando ad queda
dg igual a la suma del 2º y 4º termino: suponi-
endo ser la difª ad, la incognita Z sera
la suma del 2º y 4º la gs que $a - Z = cx + c^3x$
y la suma de todos $2a - Z = x + cx + c^2x + c^3x + c^4x$

y tambien consta dela misma prop. que el Rect.º dela suma detodos porla dif.ª d.ha esto es bad es igual ala suma delos qq.dos esto es bad Ω aca luego llamando porla incognita z la suma detodos sera la igualacion $2az - z^2 \;\Omega\; x^2 + c^2x^2 + c^4x^2 + c^6x^2 + c^8x^2$ esto es (ax. 1.º es) seran iguales $b^2 \;\Omega\; 2az - z^2$ luego (prop. 14. lib. 6.º es) propor.s $b \,.\, 2a-z \,.\,.\, z \,.\, b$ luego esta Resuelto Pues se reduce ha hallar dos Rectas $2a-z$, z cuia suma $2a$ es conocida Reciprocas ala Recta dada, b.

Porgeometria



Sea la Recta ab suma del 1.º 3.º y 5.º, y sea dado el quadrado aca suma de los quadrados detodos cinco terminos continuos centro b, yntervalo, ba, se describa el semicirculo cuio diametro ad y (prop. 11. lib. 1.º es) se ponga ac, (lado del quadrado) perpendicular sobre ba, y (prop. 31. lib. 1.º es) se dela paralela cf, y cortara ael semicirculo en f desde donde (prop. 12. lib. 1.º es) caiga fg perpendicular sobre ab: digo que ag, es dif.ª entre la suma del 1.º 3.º y 5.º y la suma del 2.º y 4.º terminos y la Recta gd es la suma detodos, y la Recta gb suma del 2.º y 4.º: luego (prop. 13. lib. 6.º) proporcionales dg . gf . fg . ga esto es (prop. 34.ª lib. 1.º y 7.ª del 5.º es) dg . ac . ca . ga luego (prop. 17. lib. 6.º es) son iguales dga Ω aca luego P.ª que es lo que se havia de demonstrar.

+

Corolario

Si fueren cinco terminos continuos propor.les ó mas como sean impares. el quadrado dela suma del 1.º 3.º y 5.º es igual ala suma delos quad.s de todos cinco mas el quadrado dela suma del 2.º y 4.º termino.

dela misma manera si fueren siete terminos el quadrado dela suma del 1.º, 3.º, 5.º y 7.º es igual ala suma delos q.dos de todos, mas el quadrado dela suma del 2.º, 4.º y 6.º terminos.

Prop. 31

Dada la suma del segundo, y quarto y la suma delos quadrados de todos cinco terminos hallar quales son

Analisis

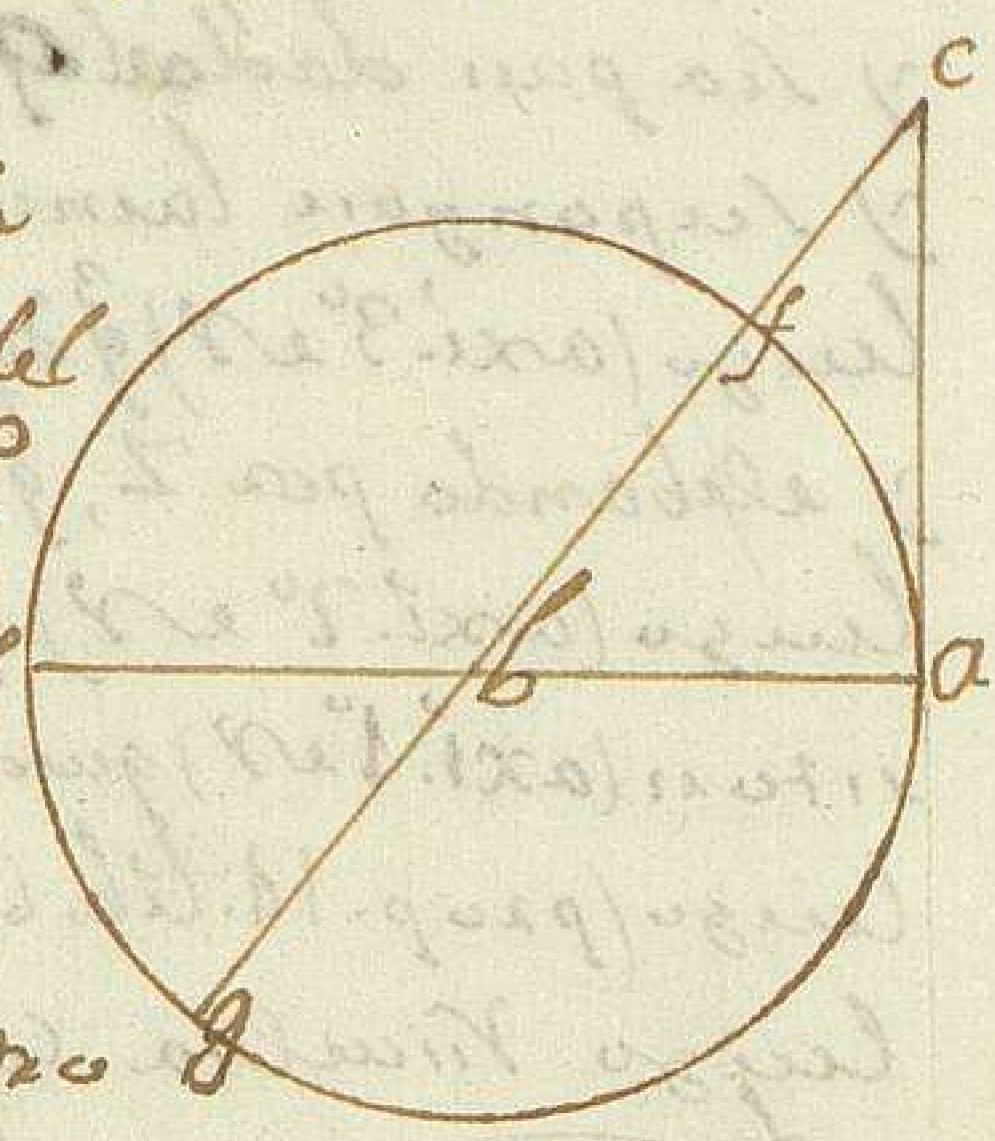
Digo q. son los cinco siguientes. $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$
cuya suma del 2.º y 4.º sea $a \;\Omega\; cx + c^3x$
y sea asimismo $b^2 \;\Omega\; x^2 + c^2x^2 + c^4x^2 + c^6x^2 + c^8x^2$
y por la dif.a que ay entre la suma del 1.º 3.º y 5.º y la suma del 2.º y 4.º se suponga la incognita z.
luego la suma de todos sera $2a+z \;\Omega\; x + cx + c^2x + c^3x + c^4x$
luego (coro. n.º prop. 29 deste) $2az+z^2 \;\Omega\; x^2 + c^2x^2 + c^4x^2 + c^6x^2 + c^8x^2$
luego (axi. 1.º deste) son iguales $b^2 \;\Omega\; 2az+z^2$
luego (prop. 14. lib. 6.º deste) propor.s $b \,..\, 2a+z \,..\, z \,..\, b$
luego resuelta pues se reduce hallar las dos rectas $2a+z$, z cuia dif.a es $2a$ conocida reciprocas ala recta dada b. que es lo que se avia de demonstrar.

Para la determinacion decada uno delos cinco

+

terminos Se ocurrira a las proposiciones 26, y 27 deste tratado como queda adbertido en la 29 f 111 Por lo qual se prosigue en quitar prolijidad.

Por geometria



Sea la recta ba suma del 2º y 4º termino y el quadrado aca suma de los quadrados de todos cinco. y (prop. 11. lib. 1º eV) se pongan en el angulo recto bac. y centro b y intervalo a, se describa el circulo, y por el centro se tire cg, que cortara a el circulo en f, y en g. Digo, que bc es la suma del 1º, 3º y quinto terminos, y, gc, suma de todos, y fc, la difª entre la suma del 1º 3º y 5º y entre la suma del 2º y 4º. porque (prop. 36. lib. 3º eV) el rectangulo rectos.. gcf ——— aca luego esta demostrado Porque el rectangulo gcf esta contenido de la suma de todos, que es gc y de la cf difª entre la suma del 1º 3º y 5º la qual es (como queda dicho) bc y la suma del 2º y 4º que es por suposicion ba o su igual bf: luego &ª.

Prop. 32

Dada la suma del 1º 3º y 5º, y dada la suma de los quadrados del 2º y 4º terminos de cinco continuos proporcionales se piden dichos cinco continuos.

Analisis

Digo q son los siguientes $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$

Sea pues dada la recta $a \sqcap x + c^2x + c^4x$

y sea pues dado el quad.o $b^2 \sqcap c^2x^2 + c^6x$

y supongase la incognita $z \sqcap c^2x$

luego (axi. 3° ex) q dan $a-z \sqcap x + c^4x$

y elebando por z, q dan $az-z^2 \sqcap c^2x^2 + c^6x^2$

luego (axi. 2° ex) q dan $az \sqcap c^2x^2 + c^4x^2 + c^6x^2$

estos (axi. 1° ex) quedan $az-z^2 \sqcap b^2$

luego (prop. 14. lib. 6° ex) $b \,..\, a-z \,..\, z \,..\, b$

luego vuelta como la prop. 30: luego &a.

Por geometria

Sea dada la linea ab suma del 1° 3 y 5° y sea el quadrado b aca suma de los quadrados del 2° y 4° terminos, Pongase ac perpendicular sobre ab y sobre ab se descriva el semicirculo, y tirese la cd paralela a la ab y sobre esta la perpendicular de: digo, que la recta ae, es la media, y la recta eb suma de los extremos.

Demonstracion

(Prop. 47. lib. 1° ex) los q.dos son iguales, ded+efe $\sqcap$ dfd luego (axi. 3° ex) quedaron efe $\sqcap$ dfd-ded cuyo lado ef, quitado de la mitad de la ab queda la recta ae y añadido compone la recta eb suma de los extremos.

Si se dixere que la media es mayor o menor que la recta ae como ag: luego, gb

será la suma delas extremas porquanto ab
es suma dela 1.ª 3.ª y 5.ª: luego, el rectangulo
agb es igual ala suma delos quadrados
dela 2.ª y 4.ª estos son iguales agb —∩— aca
estos (prop. 34. y coro. prop. 46. lib. 1.º) agb —∩— ded
estos (prop. 13 y 17. lib. 6.º e.V.) . . agb —∩— aeb
luego (prop. 14. lib. 6.º e.V.) propor. ag . . ae . . eb . . gb
Pero (prop. 5.ª lib. 2.º e.V.) agb + gfg —∩— dfd
y por la mesma razon aeb + efe —∩— dfd
luego (axi. 1 e.V.) seran agb + gfg —∩— aeb + efe
luego (axi. 3.º e.V.) seran gfg —∩— efe
la parte igual a su todo contra el axioma 9 de
e.V.) lo que no puede ser: luego la media no puede
ser mayor ni menor que la recta ae, que
es lo que se avia de demonstrar

Corolario

Si fueren cinco terminos continuos propor-
cionales, el quadrado dela suma del 1.º 3 y 5.º,
es al quadrado contenido dela suma delos quadra-
dos del 2.º 3.º y 4, asi la suma destos quadrados
al quadrado del 3.º termino: Porque (pro-
p. 8.ª y 4.ª del 6.º e.V.) son propor. ba . . ad . . da . . ae
luego (prop. 22. lib. 6.º e.V.) . . bab . . ada . . ada . . aea
y tambien son propor. ab . . bd . . db . . be
luego por la mesma razon aba . . bdb . . bdb . . beb
y tambien seran propor. be . . ed . . de . . ea
luego por la mesma son propor. beb . . ede . . ede . . aea
y tambien son propor. be . . ea . . beb . . ede
y (prop. 11. lib. 5.º e.V.) seran be . . ea . . ede . . aea

y tambien en qualquiera serie, el solido contenido sobre el quadrado, que fuere suma delos quadrados dela 2ª y 4ª en la altura dela media es igual ael solido sobre el quadrado dela media en la altura dela suma delas extremas porque son propor.s be. .ea. .ede. .eae luego (prop. 16. lib. 6º e.) be : eae ——Ω—— ea : ede

En el numero segundo deste coro lario queda demonstrado ser proporcionales la suma del 1º 3º y 5º, ala suma del 1º y 5º asi la suma delos quadrados del 2º y 4º mas el quadrado dela suma del 1º, y, 5º terminos ael quadrado dela suma del 1º y 5º, esto es son proporcionales ab. .bd. .bd. .be luego (coro. prop. 19. lib. 6º) ab. .be. .bdb. .beb y los solidos como arriua ab : beb ——Ω—— be : bdb

Apendix

De aqui se sigue la orden de resolber este Problema.

Dada la suma de dos terminos, y dada la suma delos quadrados delos otros tres terminos, de cinco continuos propor.s, hallar los dhos cinco terminos continuos propor.s

Pero mejor se entendera y resolbera por la siguiente proposicion.

Prop. 33

Dada la suma delos extremos, y dada la suma delos quadrados delos intermedios hallar los cinco terminos continuos proporcionales.

+

Analisis

Digo q̃ son los siguientes $x \;..\; cx \;..\; \overset{2}{c}x \;..\; \overset{3}{c}x \;..\; \overset{4}{c}x$

sea dada la suma . . . $a \sqcap \overset{4}{c}x + x$

y la de los quadrados $b^2 \sqcap \overset{6}{c}\overset{2}{x} + \overset{4}{c}\overset{2}{x} + \overset{2}{c}\overset{2}{x}$

sea la incognita . . . $z \sqcap \overset{2}{c}x$

luego elebando $az \sqcap \overset{6}{c}\overset{2}{x} + \overset{2}{c}\overset{2}{x}$

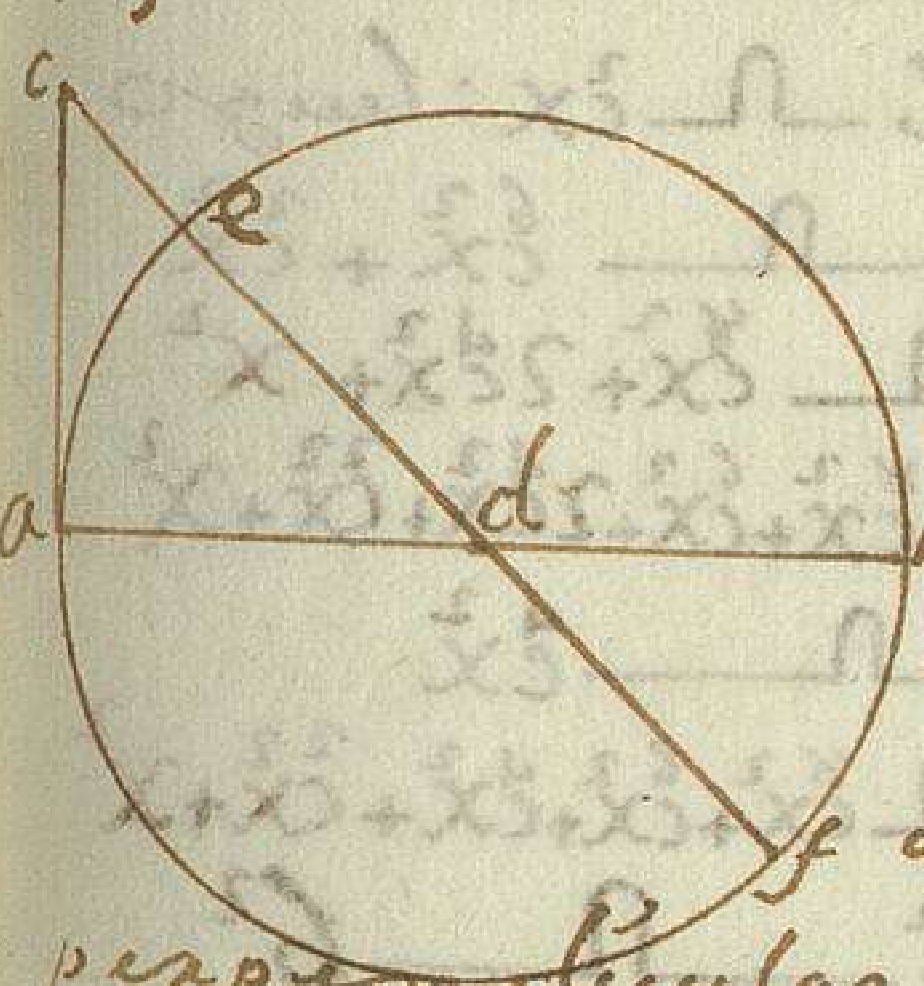
Pero tambien son $z^2 \sqcap \overset{4}{c}\overset{2}{x}$

luego (axi. 2° e.) los son $az + z^2 \sqcap \overset{6}{c}\overset{2}{x} + \overset{4}{c}\overset{2}{x} + \overset{2}{c}\overset{2}{x}$

luego (axi. 1° e.) los son $b^2 \sqcap az + z^2$

luego (prop. 14. lib. 6° e.) $b \;..\; a+z \;..\; z \;..\; b$

luego buelta como queda dho en otros. y co
nida la media sera otra analogia como
se sigue sean propor. $y \;..\; \overset{2}{c}x \;..\; \overset{2}{c}x \;..\; a-y$
y quedaran conocidos con facilidad todos



Por geometria

Sea ab, suma suma de las extremas, y el quadrado aca b suma de los quadrados de las tres medias, Pongase ac lado del quadrado, (prop. 11. lib. 1° e.) perpendicular sobre ab, y describase el circulo, y por su centro d tirese la secante cf que corte al circulo en el punto e: Digo que ce, es la tercera de las cinco continuas porque (prop. 36. lib. 3° e.) es $fce \sqcap aca$
y (prop. 14. lib. 6° e.) propor. $fc \;..\; ca \;..\; ac \;..\; ce$
pero (26 prop. de este f° 98. en la quarta igualacion consta que el rectangulo contenido de la suma de la 1ª 3ª y 5ª por la 3ª es igual al quad.

+

delos tres terminos medios, y siendolo el quadrado aca, y igual al Rectangulo fcl como assimismo fe igual al diametro ab suma delas extremas: luego fc es la suma del 1º 3º y 5º termino por lo qual ec es el 3º termino que es lo que se avia de demonstrar.

Prop. 34

Dada la suma delos extremos, y dada la suma delos quadrados de todos, hallar los cinco terminos continuos proporcionales.

Analisis

Digo q̃ son los siguientes $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$

sea dada la suma . . . $a = c^4x + x$

y sea la delos quadrados, $b^2 = c^8x^2 + c^6x^2 + c^4x^2 + c^2x^2 + x^2$

y supongase la incognita $z = c^2x$: luego

elibando seran . . $az = c^6x^2 + c^2x^2$

Pero (prop. 4ª lib. 2º etc) $a^2 = c^8x^2 + 2c^4x^2 + x^2$

luego (axi. 2º etc) $a^2 + az = c^8x^2 + c^6x^2 + 2c^4x^2 + c^2x^2 + x^2$

Pero son iguales . . . $z^2 = c^4x^2$

luego (axi. 3º etc) $a^2 + az - z^2 = c^8x^2 + c^6x^2 + c^4x^2 + c^2x^2 + x^2$

luego (axi. 1º etc) $a^2 + az - z^2 = b^2$

luego (prop. 14. lib. 6º etc) $b \,..\, \frac{a^2}{z} + a - z \,..\, z \,..\, b$

o tambien lo son iguales . . . $az - z^2 = b^2 - a^2$

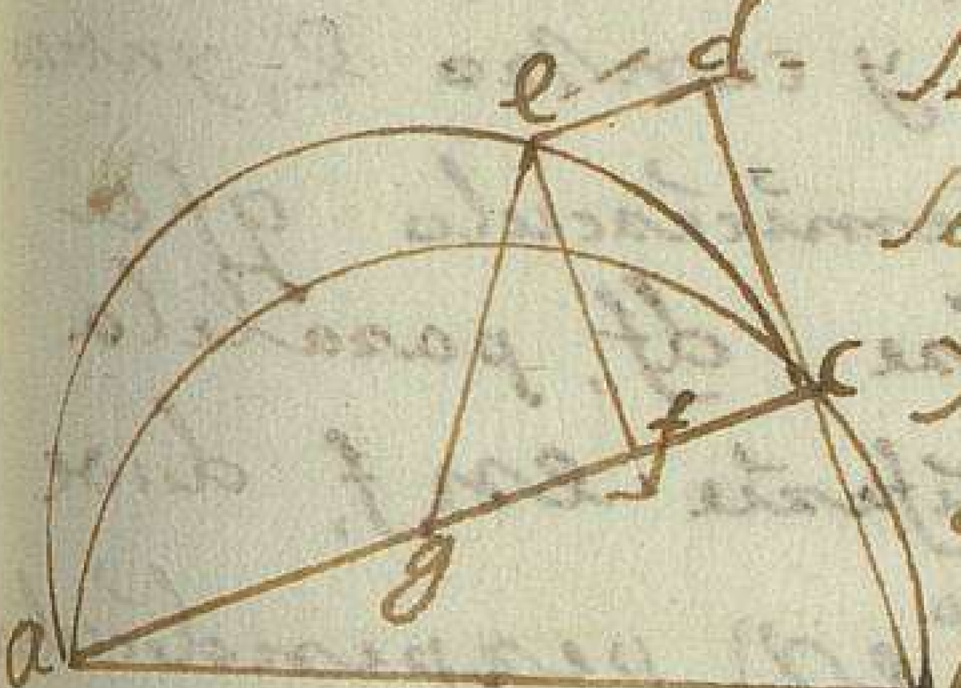
estos son iguales los siguientes $az - z^2 = hh$

luego (prop. 14. lib. 6º etc) $h \,..\, a - z \,..\, z \,..\, h$

luego resuelta como las demas. Dela suma delos quadrados de todos se resta el quadrado dela suma delos extremos cuya diferencia sea el quadrado hh, y hallense $a - z \,..\, z$

cuya suma es a, recíprocas ala recta cono-
zida h. y confacilidad seconocerán des
pues los demas terminos. pues sepodrà for
mar lanueba analoxía x . . cx . . cx . . a-x
y despues otra quierà cx . . cx . . cx . . cx
y siquisiere otra qͤ sera x . . cx . . cx . . cx
y lo mismo seobservara entodas.

Por geometria



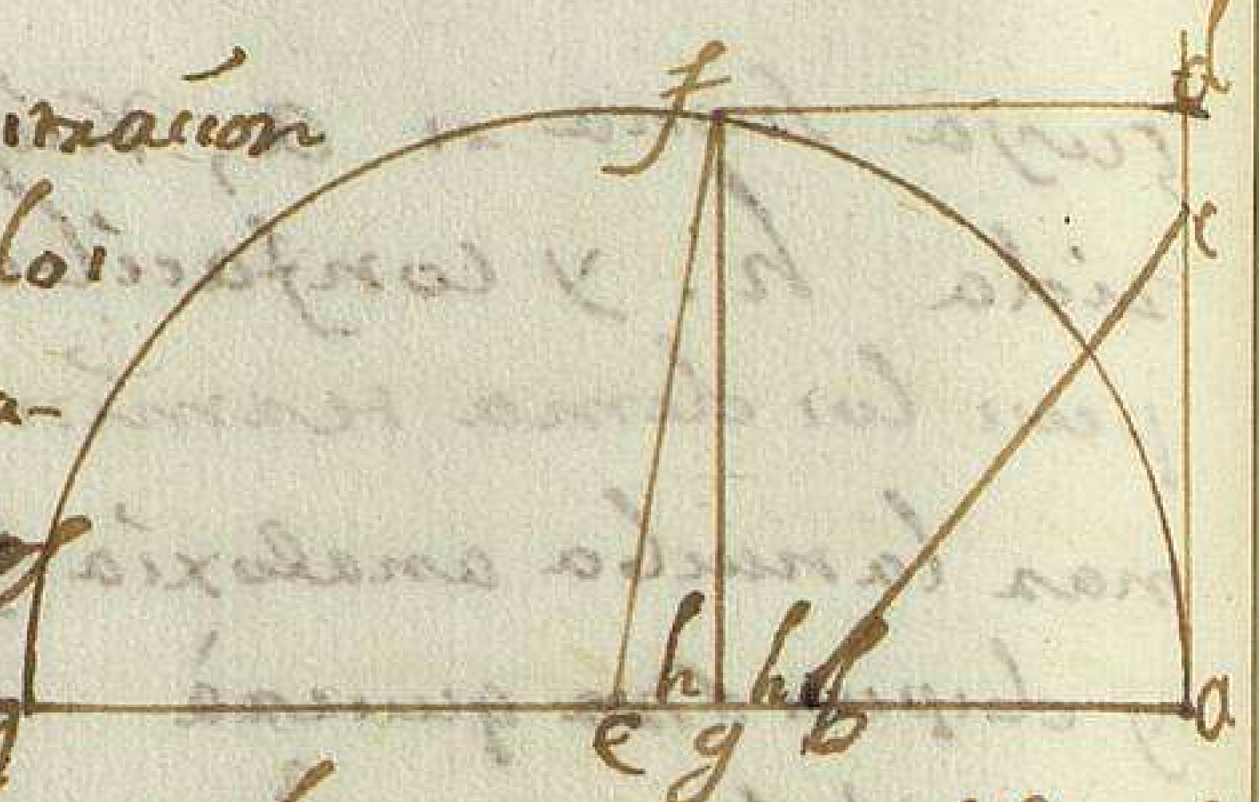
Sea dado elquadrado aba suma delos quadrados detodos y sea dada larecta ac suma delas extremas: sobre ab se b duzca el semicirculo, y en seacomode ac, sobre quien sedescriva, otro semicirculo, tirese larecta bc, y seprolongue haciendo cd, igual ala bc, tirese de, paralela ala ac que corte el semicirculo en e, de donde caiga perpendicular ef, sobre ac, y setire eg: digo que fc es lamedia.

Demonstracion

(Prop. 47. lib. 1º eV) soniguales los dos aba ⩠ aca+bcb
luego (axi. 3º eV) seraniguales aba-aca ⩠ bcb
entonces (prop. 34. libr. 1º eV) ycoro. prop. 16 dho libro seran iguales los siguientes . aba-aca ⩠ efe
entonces soniguales los siguientes hh ⩠ afc
y (prop. 14. lib. 6º eV) proporᶜ h . . af . . fc . . h
luego reculta como antes enel analisis pues
reducese, hallar dos rectas cuia suma ac recipro
cas aladada h que es lo q.³ seavia dedemonstrar.

+

Otra demostracion



Sea ba suma delos extremos, y sea el quadrado aca suma delos quadrados delos dos cinco terminos ponganse ba y ac en llanos Recto (prop. 11. lib. 1.º eu.) y tirese bc, aquien se ponga igual ad, y alarguese ab, despues que be, sea mitad de, ba y centro e, ynter valo ea se describa el semicirculo gfa y (prop. 31. lib. 1.º eu.) se tire df, paralela ala ab, que corta la periferie en f, dicese donde caiga (prop. 12. lib. 1.º eu.) perpendicular fg, y tirese fe: Digo, que la Recta ag es la suma dela 1.ª 3.ª y 5.ª y que la gb es la 3.ª delas cinco

Demonstracion

(Prop. 47. lib. 1.º eu.) son iguales los quad.dos bab+aca ꭥ bcb estos es (coro. prop. 46. lib. 1.º eu.) lo son bab+aca ꭥ ada estos es por la misma y 34 del 1.º de eu.) bab+aca ꭥ fgf Pero por la misma son iguales fef ꭥ ege+fgf luego (axi. 3.º eu.) lo quedan fef−fgf ꭥ ege cuyo lado es el segmento eg que quitado de el Radio ea queda de residuo ag. suma delos tres terminos 1.º 3.º y 5.º y siendo (por suposicion) ba igual ala suma del 1.º y 5.º el residuo gb es el 3.º

Y si se dijere que la 3.ª o media delas cinco continuas es maior, ō menor, que bg (como bh: luego siendo por construccion ..ae ꭥ $\frac{3ab}{2}$ luego el baxado seran tambien

iguales las cantidades siguientes $2ae \sqcap 3ab$
estos (def.ⁿ 15. lib. 1º eV) lo seran $ga \sqcap 3ab$
luego) seran iguales las Rectas. . $gb \sqcap 2ab$
luego quitando la media bh de la toda ah que
sigue ser el que es la suma de la 1ª 3ª y 5ª quedará
tambien la Recta gh estos $gh \sqcap 2ab$
luego (axi. 1º eV) serán iguales $gh \sqcap gb$
la parte igual a su todo, lo que no puede ser
(axi. 9. eV): luego, la media o tercer termino
de los cinco continuos no pudiera mayor, ni
menor que bg. que es lo que se avía de demonstrar.

Por otro modo

Sean pues los cinco continuos, $x \,.\,.\, cx \,.\,.\, c^2x \,.\,.\, c^3x \,.\,.\, c^4x$
Sea pues como antes . . $a \sqcap c^4x + x$
y sea como antes . . . $b^2 \sqcap c^6x^2 + c^4x^2 + c^2x^2 + c^8x^2 + x^2$
y supongase la incognita $z \sqcap c^4x + c^2x + x$
luego (axi. 3º eV) sera $z - a \sqcap c^2x$
luego elevando seran $az - a^2 \sqcap c^6x^2 + c^2x^2$
Pero tambien lo son $a^2 \sqcap c^8x^2 + 2c^4x^2 + x^2$
y tambien son iguales $z^2 + a^2 - 2az \sqcap c^4x^2$
luego (axi. 3º eV) q. dan $2az - z^2 \sqcap c^8x^2 + c^4x^2 + x^2$
luego (axi. 2º eV) seran $3az - z^2 - a^2 \sqcap c^8x^2 + c^6x^2 + c^4x^2 + c^2x^2 + x^2$
luego (axi. 1º eV) son iguales $3az - z^2 - a^2 \sqcap b^2$
luego, axi. 2º eV) lo son $3az - z^2 \sqcap b^2 + a^2$
estos son iguales . . $3az - z^2 \sqcap hh$
luego (prop. 14. lib. 6º eV) $h \,.\, 3a - z \,.\,.\, z \,.\,.\, h$
luego vuelta, pues se reduce a hallar dos
Rectas cuia suma es 3a conocida Recipro-
cas a la dada h q. es lo que se deve hacer.

corolario

Si fueren cinco terminos continuos pro porcionales, el triplo dela suma delos extremos menos la suma delos tres terminos 1º 3º y 5. ala Raíz quadrada dela suma delos quadrados detodos, junta dha suma conel quadrado dela suma delos extremos; así dha Raíz ala suma del 1º 3º y 5º termino. Porque enla demonstra cion geometrica, (coro. 8ª prop. lib. 6º eV) son proporcionales gg. .gf. .fg. .ga. y enla demonstracion analitica se concluio (embertidos los terminos 3a-Z. .h. .h. .Z y es así que se supone Z igual ala suma de 1º 3º y 5º; luego el corolario esta claro. y (prop. 22. libro 6º eV) sus quadrados son propor.; todo lo qual queda de mostrado.

Prop. 35

Dada la suma delos extremos, y dada la suma delos quadrados del 1º 2º 4º y 5º terminos hallar los cinco terminos continuos proporcionales, los quales se desea saber.

Analisis

Digo q. son los siguientes $x. .cx. .c^2x. .c^3x. .c^4x$

Sea como se propone . . . $a \sqcap c^4x+x$

y sea tambien $b^2 \sqcap c^8x^2+c^6x^2+c^2x^2+x^2$

y supongase la incognita $Z \sqcap c^2x$

luego elebando sera $aZ \sqcap c^6x^2+c^2x^2$

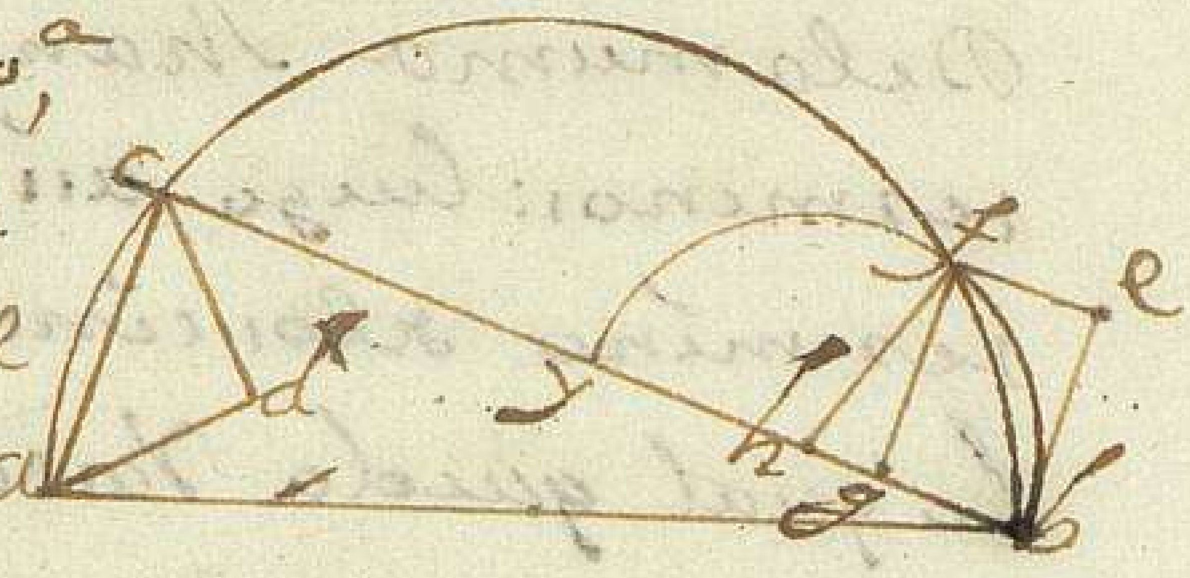
Pero son iguales (4º al 2º) $a^2 \sqcap c^8x^2+2c^4x^2+x^2$

y tambien lo son iguales $2Z^2 \sqcap 2c^4x^2$

+

luego (ax. 3º e.) quedan iguales $\overset{2}{a}-2\overset{2}{z} \sqcap \overset{8}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{x}$
luego (ax. 2º e.) quedan iguales $\overset{2}{a}+az-2\overset{2}{z} \sqcap \overset{8}{c}\overset{2}{x}+\overset{6}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{x}$
luego (ax. 1º y 3º e.) q.dan iguales $az-2\overset{2}{z} \sqcap \overset{2}{b}-\overset{2}{a}$
y dividiendo por dos serán $\frac{az}{2}-\overset{2}{z} \sqcap \frac{\overset{2}{b}-\overset{2}{a}}{2}$
estos serán iguales $\frac{az}{2}-\overset{2}{z} \sqcap hh$: luego
(prop. 14. lib. 6º e.) proporcion.s $\frac{a}{2}-z \,.\, h \,.\, h \,.\, z$
luego vuelva como las anteriores.

Demonstracion geo.ca



Sea dado el quadrado aba suma de los quadrados del 1º, 2º, 4º y 5º terminos, y sobre su lado ab se describa el semicirculo, en quien se acomode la recta bc, igual a la suma de los extremos. y se tire ac, y será (prop. 31. lib. 3º e.) el angulo acb recto. y sobre ac, como base se forme el triangulo, ysosceles rectangulo en d. y dividida (prop. 10 lib. 1º e.) bc en y, sobre yb, se describa el semicirculo pequeño, y sobre yb se levante la perpendicular $be \sqcap ad$ y (prop. 31. lib. 1º e.) se tire ef, paralela a la yb, corta.a el semicirculo pequeño en f de donde (prop. 12. lib. 1º e.) caiga fg, perpendicular, y se tire fh al centro: Digo, que gb, es la media de las cinco continuas.

(Prop. 47. lib. 1º e.) los quad.s $aca+cbc \sqcap aba$
luego (ax. 3º, e.) q.daran, . . $aca \sqcap aba-cbc$
estos (prop. 47. lib. 1º e.) lo son $2ada \sqcap aba-cbc$
estos deprimiendo, lo son $ada \sqcap \frac{aba-cbc}{2}$
estos son iguales los quadra.s $beb \sqcap \overset{2}{pp}$
estos (prop. 34. y coro. prop. 46. lib. 1º e.) $gfg \sqcap pp$
estos (prop. 8.a lib. 6º coro. e.) ɣ $gb \sqcap pp$

luego (prop. 14. lib. 6.º eX) propor.^{s} $yg \cdot\cdot p \cdot\cdot p \cdot\cdot gb$
y por el analisis son propor.^{s} $\frac{a}{2}-z \cdot\cdot h \cdot\cdot h \cdot\cdot z$
y asi que a, es la suma de las extremas, como
cb suma de las mismas extremas: luego, $a \;\Omega\; cb$
y sus mitades, tambien son iguales, $\frac{a}{2} \;\Omega\; yb$
luego tambien son iguales sus partes $z \;\Omega\; gb$
luego (ax. 3.º eX) tambien son iguales $\frac{a}{2}-z \;\Omega\; yg$
De la misma manera lo son iguales los demas
terminos: luego asi como z es el tercero
termino de los cinco asi tambien lo es gb
lo qual queda Vastantemente demonstrado.

Apendix

De la misma manera se podra Resolber este problema. Dada la diferencia del segundo, y quarto termino, de los cinco continuos proporcionales y dado el agregado de los quadrados del 1.º 2.º, 4.º y 5.º hallar los cinco continuos. Porque si de la suma de los quadrados del 1.º 2.º 4.º y 5.º se resta el quadrado de la difª dada el residuo, es el quadrado de la suma de los extremos: luego por la proposicion anterior quedara facil la resolucion del problema. Y semejantemente se puede resolber el siguiente: Dada la suma de los extremos y dada la difª del 2.º y 4.º, hallar los cinco terminos continuos proporcionales. Porque el quadrado de la suma de los extremos, y el quadrado de la difª dada, juntos dhos quadrados componen la suma de los quadrados del 1.º 2.º 4.º y 5.º luego por el problema anterior se resuelve.

Prop. 36

Dada la suma delos extremos, y la suma delos quadrados del 2.º y 4.º, hallar los cinco terminos continuos propor.ˡ

Analisis

Digo q̃ son los siguientes, $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$

Sea como se propone . . $a = c^4x + x$

y sea como se propone . . $b^2 = c^6x^2 + c^2x^2$

Supongase la incognita . $Z = c^2x$

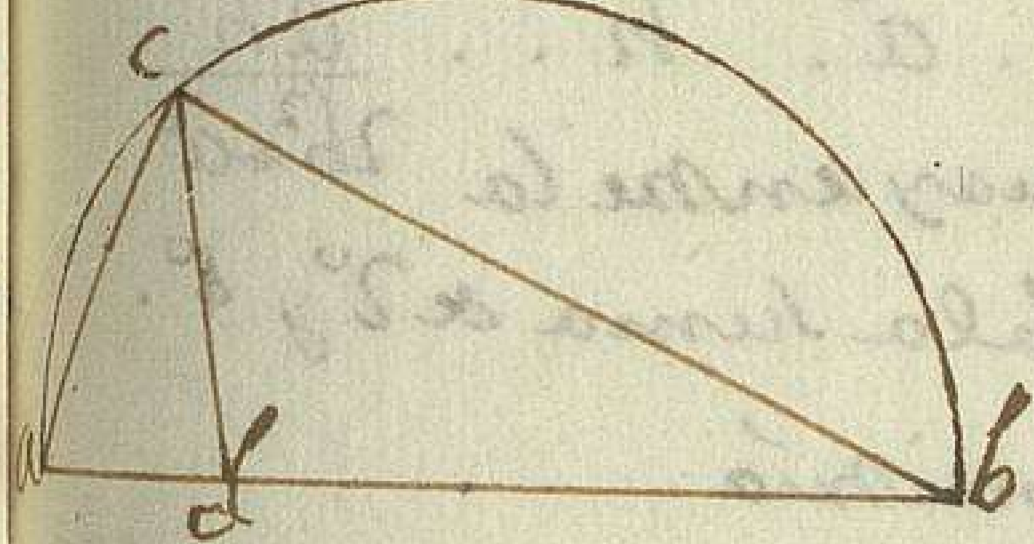
luego (prop. 15. lib. 5.º eV) $az = c^6x^2 + c^2x^2$

luego (ax. 1.º eV) son iguales $az = b^2$

luego (prop. 14. lib. 6.º eV $a \,.\, .\, b \,.\, .\, b \,.\, .\, Z$

luego (prop. 11. lib. 6.º eV) Vuelta

Por geometria



Sobre ab, suma delos extremos se describa el semicirculo, en quien se acomode ac cuyo quadrado sea igual ala suma delos quadrados del 2.º y 4.º, y se tire cb y (prop. 31. lib. 3.º eV) el angulo acb sera recto desde donde (prop. 12. lib. 1.º eV) caiga perpendicular cd: Digo, que ad, es la media delas cinco continuas porque (coro. prop. 8.ª lib. 6.º eV) son proporcionales los siguientes, ba . . ac . . ca . . ad y es la misma proporcion que a . . b . . b . . Z que consta del analisis ser Vuelta por lo que concluio diciendo esta Vuelta. y su determinacion clara.

+

Prop. 37

Dada la suma de los quadrados de cinco terminos continuos proporcionales, y dado el rectang.º contenido debaxo de la suma de todos por el 2º y 4º terminos mostrar los cinco continuos.

Analisis

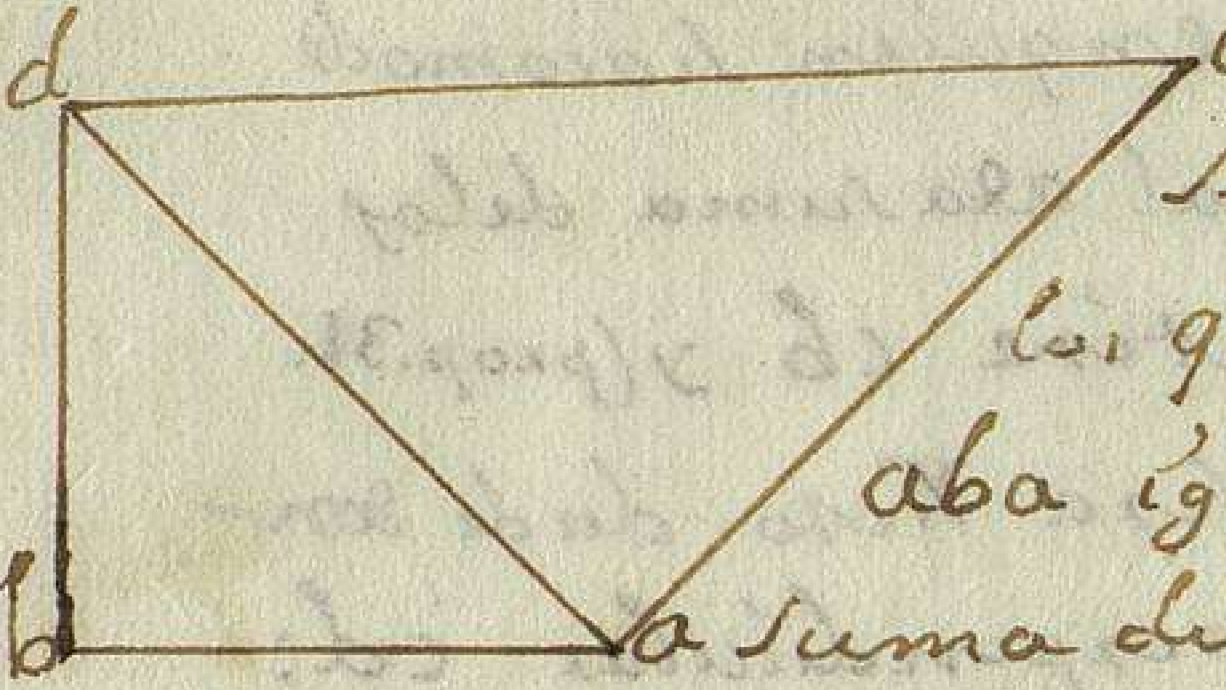
Digo que son los siguientes, $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$

Sea como se propone $a^2 = x^2 + c^2x^2 + c^4x^2 + c^6x^2 + c^8x^2$

y sea $b^2 = cx^2 + c^2x^2 + 2c^3x^2 + 2c^5x^2 + 2c^4x^2 + c^6x^2 + c^7x^2$

luego $2b^2 + a^2 = x^2 + 2cx^2 + 3c^2x^2 + 4c^3x^2 + 5c^4x^2 + 4c^5x^2 + 3c^6x^2 + 2c^7x^2 + c^8x^2$

luego resuelto porque $2b^2 + a^2$ es el quadrado de la suma de todos cuya raiz es h conocida y seran (coro. 3º prop. 29 deste tratado) proporcionales los terminos $2b^2+a^2 \,..\, a^2 \,..\, h \,..\, \frac{a^2h}{2b^2+a^2}$ cuyo cociente es la difª que ay entre la suma de todos, y el duplo de la suma de 2º y 4º.



Por geometria

Sea el quadrado aca suma de los quadros de todos, y el quadrad.º aba igual al rectang.º debaxo de la suma de todos por la suma del 2º y 4º ponganse ab y bd iguales y en el angulo recto b, y tírese da, sobre la qual se lebante perpendicular al lado del quadrado dado, aca, y tírese dc cuyo quadrado dcd (prop. 47 lib. 1º eucl.) es igual a, 2 aba (estos por la misma) ada + aca = dcd: luego dcd es el quadrado de la suma de todos, y propor. dcd . . aca . . dc . . $\frac{aca}{dc}$ luego resuelto como antes por Analisis.

+

Prop. 38

Dada como antes la suma de los quadrados de cinco terminos continuos proporcionales y dado el rectangulo contenido debaxo de la suma de todos por la suma del 1.º, 3.º y 5.º, mostrar los cinco terminos.

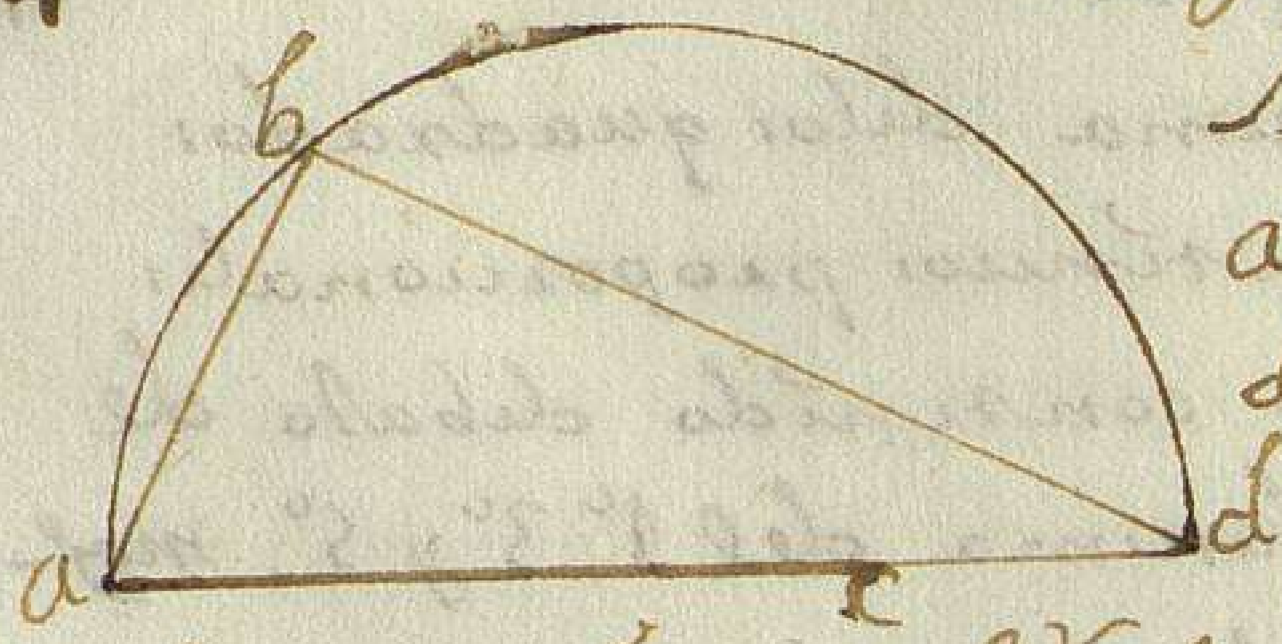
Analisis

Digo q son los siguientes, $x\,.\,.\,cx\,.\,.\,c^2x\,.\,.\,c^3x\,.\,.\,c^4x$
y sea como se propone, $a^2 \sqcap x^2+c^2x^2+c^4x^2+c^6x^2+c^8x^2$
y sea $b^2 \sqcap x^2+cx^2+2c^2x^2+2c^3x^2+3c^4x^2+2c^5x^2+2c^6x^2+c^7x^2+c^8x^2$
luego $2b^2-a^2 \sqcap x^2+2cx^2+3c^2x^2+4c^3x^2+5c^4x^2+4c^5x^2+3c^6x^2+2c^7x^2+c^8x^2$
luego vuelvo porque esta tercera igualacion es el quadrado de toda la suma de los cinco continuos, y como antes propor. $2b^2-a^2\,.\,.\,a^2\,.\,.\,h\,.\,.\,\frac{a^2h}{2b^2-a^2}$ luego conocido el quarto termino de esta analogia su esta cantidad se resta de la suma de todos la mitad del residuo, es la suma del 2.º y 4.º, y quitada esta de la suma de todos queda conocida la suma del 1.º, 3.º y 5.º como queda dicho en la anterior (tirando corolario) luego nos allaremos con el titulo de la prop. 26. f.º 98, por donde esta facil el determinar quales sean los cinco continuos.

Y (por la prop. 27 desta) tambien esta clara la determinacion bien su propuesta que dize dada la suma de los cinco terminos, y la suma de sus quadrados: luego en la analogia desta se conoze a^2 y su reciproca h, luego esta facil la conclusion de los cinco ter.s

+

Por geometria



Sea dado el quadrado aba suma delos quadrados delos cinco continuos, y sea dado el quadrado aca, igual al rectangulo contenido del lado dela suma detodos, por la suma del 1º 3º y 5º. Haganse (prop. 13. lib. 6º eu) propor. 2ac . . ad . . da . . ca y seran (prop. 17. lib. 6º eu) iguales 2aca = ada Sobre ad se describa el semicirculo, en quien se acomode la recta ab lado del quadrado dado, y se tire la recta bd: Digo que la recta bd es la suma detodos cinco terminos. Porque por construccion son iguales 2aca = ada y (prop. 31 del 3º y 47 del 1º eu) lo son aba + bdb = ada luego (ax. 1º eu) son iguales 2aca = aba + bdb luego (ax. 3º eu) son iguales 2aca − aba = bdb luego como en la demonstracion analitica anterior son propor. bdb . . aba . . bd . . $\frac{aba}{bdb}$ luego vuelta, y su determinacion como queda dicho en la demonstracion analitica.

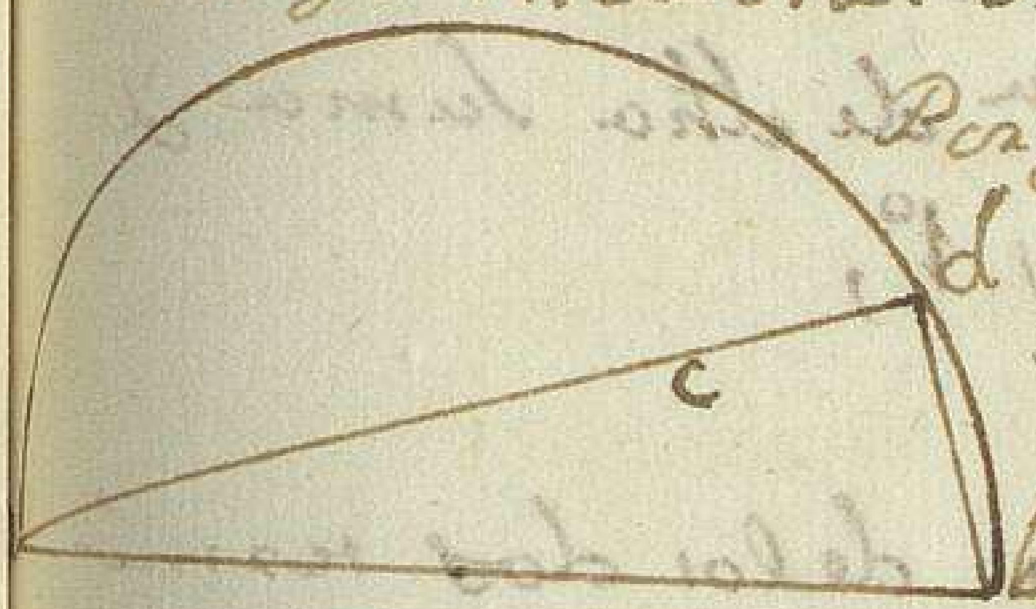
Prop. 39.

Dada la suma delos quadrados como en la anterior, y dado el plano rectangulo contenido del lado dela suma dela 2ª y 4º por la difª que ai entre la suma del 2º y 4º y la suma del 1º, 3º y 5º, hallar los cinco terminos continuos proporcionales.

Analisis

Digo que son los siguientes . . x . . cx . . c^2x . . c^3x . . c^4x
Sea como se propone ; $a^2 \sqcap x^2 + c^2x^2 + c^4x^2 + c^6x^2 + c^8x^2$
y sea el rectangulo dado el siguiente . b^2
y supongase la dif.ª de las partes propuestas, z
luego (Coro. 3º f 115 de la prop. 29 deste tratado)
se deuen ygualar los siguientes $2b^2 + z^2 \sqcap a^2$
luego (ax. 3º de E) seran yguales $z^2 \sqcap a^2 - 2b^2$
estos son yguales los siguientes $z^2 \sqcap hh$
luego sus raizes tambien lo son $z \sqcap h$
luego resuelta. Su determinacion clara.

Por geometria



Sea dado el quadrado aba suma de los quadrados de todos cinco. y sea dado el quadrado aca igual al rectangulo de todo de la suma del 2º y 4 por la dif.ª z estos que sean iguales los siguientes $aca \sqcap cxz + c^3xz$
Agora (prop. 13. lib. 6º de E) $2ac$ . . ad . . da . . ca
luego (prop. 17. lib. 6º de E) $2aca \sqcap ada$
estos se son iguales (axi. 1º de E) $2cxz + 2c^3xz \sqcap ada$
Pero (prop. 47. lib. 1º de E) por quanto sobre ab hase echo el semicirculo en quien se halla acomodada la recta ad seran iguales, $aba \sqcap ada + dbd$
estos seran iguales sustituyendo, $aba \sqcap 2aca + dbd$
luego (axi. 3º de E) quedaran . . $aba - 2aca \sqcap dbd$
estos seran iguales . . . $hh \sqcap dbd$
y sus raizes lo seran iguales $h \sqcap db$
luego resuelta como arriba; cuya determinacion de los cinco era clara.

Apendix

De lo demonstrado, se sigue el resolver este Pro blema siguiente.

Dada la suma de los quadrados de los cinco continuos, y dado el plano contenido debaxo de la suma del 5º 3º y 1º, por la difª de dicha suma y suma del 2º y 4º. mostrar los cinco con tinuos proporcionales. Porque si el plano se resta de la suma de los quadrados, el residuo será el plano contenido debaxo de la suma del 2º y 4º, por la difª de dicha suma y suma de los tres, 5º, 3º, y 1º,

Prop. 10

La difª de los quadrados de los dos terminos extremos, sumada con la difª de los dos quadrados del 2º y 4º termino se da cono cida. y asimismo se da conocida la suma del 5º, 3º y 1º termino, mostrar, los cinco terminos continuos.

Analisis

Digo q̃ son los siguientes, $x \because cx \because c^2x \because c^3x \because c^4x$

y sea como se propone, $a \sqcap c^8x^2 + c^6x^2 - c^2x^2 - x^2$

y sea como se propone $b \sqcap c^4x + c^2x + x$

luego dividiendo quedan $\frac{a}{b} \sqcap c^4x - x$

luego (ax. 3º etc) quedara asi $b - \frac{a}{b} \sqcap c^2x + 2x$

Supongase la incognita siguiente $z \sqcap c^2x$

y sera la igualacion como sigue $\frac{b^2 - a - bz}{2b} \sqcap x$

luego sera conocido el primer termino

luego se conocerá el quinto, $\frac{b^2 + a - bz}{2b} \sqcap c^4x$

y porque son continuos el quadrado del
tercero dividido por el primero viene ael
cociente el quinto: luego $2bz^2+bz \sqcap b^2+a$
y dividiendo quedan $z^2+\frac{z}{2} \sqcap \frac{b^2+a}{2b}$
luego esta vuelta la proposicion, y clara
la conclusion como en muchas partes queda
egecutado por lo que zeio.

Nota

delo demonstrado sale claro que dividiendo
la letra a suma delas difes. delos quadrados
por la letra b, y sumando el cociente con
el divisor b cuia suma multiplicada por el
mismo divisor, b cuio producto dividido
por el duplo b, esto es por 2b este ultimo coci-
ente es el quadrado del tercer termino
sumado con la mitad del mismo tercer ter-
mino: luego esta facil el conocerle, y por con
siguiente el conocer los demas terminos.

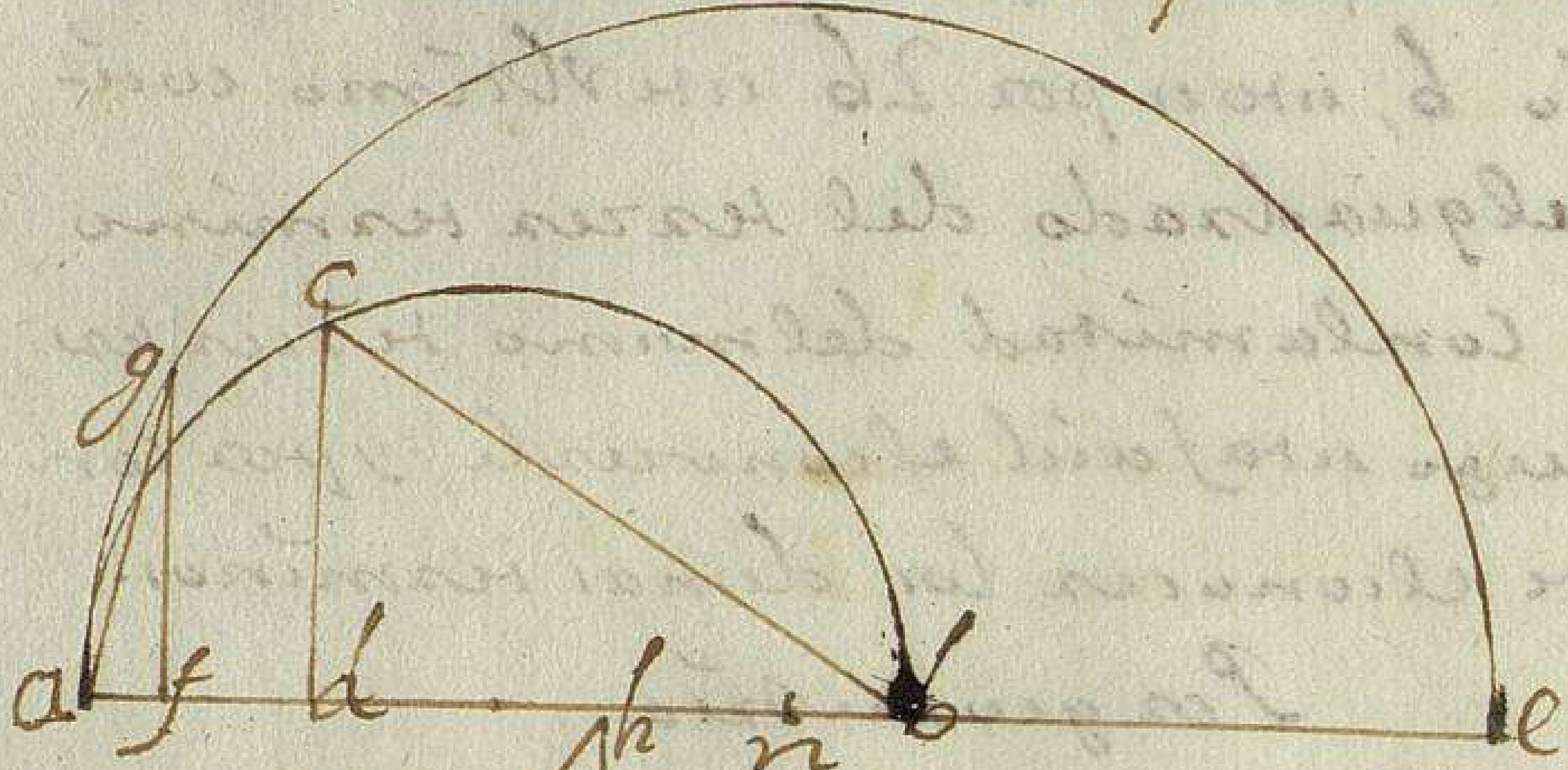
Por geometria.

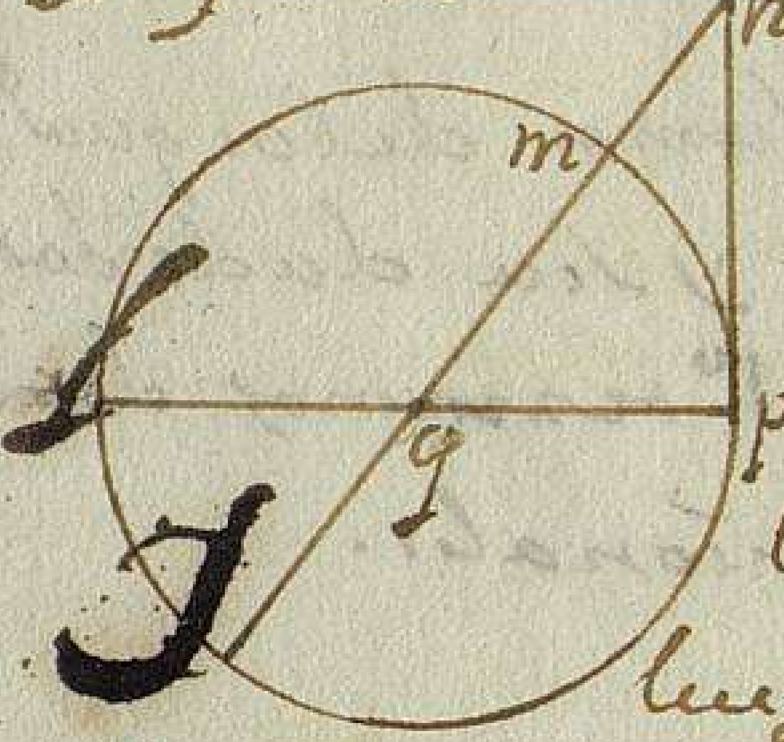
Sea dado el quadrado bcb suma delos quadrados
quion difes. como se a propuesto, y sea dada
la recta ab suma del 5o 3o y 1o terminos de
los cinco continuos proporcionales.

Construcion

Sobre ab se describa el semicirculo en
quien se acomode bc lado del quadrado
dado bcb, y caiga (prop. 12. lib. 1o eu.) del punto
c, la perpendicular cd sobre el diametro
ab y alarguese el diametro, asta e y que sea

be igual al segmento db, y sobre ae se des-
cribe el semicirculo, y tomese af tercia parte
de la recta ad, y (prop. 11. lib. 1° se lebante fg
perpendicular a el maior semicirculo y tírese
ag. tomese, pq igual a la tercia parte de la
recta ab, y centro q intervalo qp se descri-
ba el circulo cuyo diametro pl será las
dos tercias partes de la ab. lebantese perpen-
dicular ph, igual a la recta ag. y por el
centro q se tire hq, a el punto y
que cortará al circulo en el punto m:
digo que mh es la tercera proporcional
de las cinco continuas que se buscan.





Demonstracion

(Por el coro. prop. 8. lib. 6° eN)
son propor.s ab . . bc . . bc . . bd
luego (prop. 17. lib. 6° eN) $abd \sqcap bcb$
luego dividiendo seran $\frac{bcb}{ab} \sqcap bd$
luego (ax. 2° eN) seran iguales $ab+\frac{bcb}{ab} \sqcap ae$
estos son iguales $\frac{aba+bcb}{ab} \sqcap ae$
estos eliminando son iguales $aba+bcb \sqcap eab$
y dividiendo por 2, ab seran $\frac{aba+bcb}{2ab} \sqcap ne$
luego segun la nota precitada Supues del

+

analisis la recta re, ó su igual ar contiene en si tantas unidades como el quadrado del tercer termino sumado con su mitad. 139

Pero (prop. 8.ª lib. 6.º por su coro, eV) son proporcionales los terminos ea . . ag . . ga . . af esto es (por construccion) ea . . ph . . hp . . af pero ph, es tangente: luego (prop. 36. lib. 3.º eV) y (prop. 14. lib. 6.º eV) son propor. yh . . hp . . ph . . hm luego (prop. 11. lib. 5.º eV) ea . . yh . . mh . . af luego vuelta pues se reduce à allar las dos rectas yh, mh cuia difª ym es conocida reciprocas a las dos rectas dadas.

Digo que para inteligencia del curioso me a parecido determinar estas operaciones en el guarismo en la forma siguiente

Sea el quadrado bcb cuio valor . . . 315

y sea ab, 21 cuio quadrado aba sera 441

luego suma de quadrados aba+bcb ⊓ 756

luego dividos por 2 ab esto es por 42 seran los cocientes iguales $\frac{aba+bcb}{2ab}$ ⊓ 18

luego el cociente diez y ocho del quadrado 16 y de 2; luego el tercer termino es 4 raiz del dicho quadrado. esto es $Z^2+\frac{Z}{2}$ ⊓ 18

y st al es la suma de ab, y del segmento db esto es por el numero 21 se divida los 315 y vendra por cociente 15 que sera db y sumando 15 con 21 sera la suma 36 valor de la ea y restando 15 de 21 quedan 6 valor de ad

cuia tercia parte 2 es el Valor de af, y porque ab Vale 21 su tercia parte 7 Valor de pq y su duplo 14 Valor del diametro lp ó ym, y porque son ea . yh . . mh . . af la mitad de ym es 7 su quadrado es . . 49
el Rectangulo eaf es 18 ó 36 por 2, es 72
la suma de ambos productos es el siguiente 121
su Raiz quadrada es 11 Valor de gh de quien restando gm que Vale 7 quedaran 4 Valor de mh tercer termino de los cinco continuos que se buscan. y Porque ab Vale 21 suma del 5.º 3.º y 1.º luego sera el 5.º y 1.º 17 y seran propor.s y . . 4 . . 4 . . 17 - y y conocidos los extremos seran conocidos los demas pues entre el 1.º y el 3.º se allara el medio como entre el 3.º y el 5.º y con esta hor de se procedera siempre, para tener conocidos todos los cinco terminos continuos proporcionales que se de sea saber: luego las operaciones egecutadas son legitimas que es lo que se avia de demonstrar.

apendix

De lo demonstrado consta como se puede resolber este problema. Dada la suma del 5.º 3.º y 1.º, ab, y la dif.ª de los extremos db Allar los cinco terminos continuos propor.s pues es mas facil allar la media mh.

Prop. 41

Dada la suma del 5º, 3º y 1º, y dada la Razon dela difª delos quadrados del 2º y 4º, ala difª delos quadrados delos extremos, mostrar los cinco terminos continuos propor.ˢ

Analisis

Digo q. son los siguientes $x \,.\,.\, cx \,.\,.\, c^2x \,.\,.\, c^3x \,.\,.\, c^4x$

sea como se propone a —— ∩ $c^4x + c^2x + x$

y como se propone . . $p \,.\,.\, q \,.\,.\, c^6x^2 - c^2x^2 \,.\,.\, c^8x^2 - x^2$ —

luego (prop. 1ª lib. 6º eu) por la comun altura $c^4x - x$ son propor. $c^2x \,.\,.\, c^4x + x \,.\,.\, c^6x^2 - c^2x^2 \,.\,.\, c^8x^2 - x^2$ —

luego (prop. 11. lib. 5º eu) $p \,.\,.\, q \,.\,.\, c^2x \,.\,.\, c^4x + x$

luego (prop. 18. lib. 5º eu) $p+q \,.\,.\, q \,.\,.\, c^4x + c^2x + x \,.\,.\, c^4x + x$

ex eo (prop. 7. lib. 5º eu) $p+q \,.\,.\, q \,.\,.\, a \,.\,.\, c^4x + x$

y ynbirtiendo lo son $p+q \,.\,.\, p \,.\,.\, a \,.\,.\, c^2x$

Luego vuelta pues quedan conocidos en ambas analogias los terminos, tercero y suma del 5º y 1º y para segregar estos queda ya dicho en muchas parte.

Corolario

Si fueren cinco terminos continuos proporcionales, sera como la suma delos extremos ala media, asi la difª delos quadrados delos extremos, ala difª delos quadrados del segᵈᵒ y quarto termino.

Prop. 42

Dada la suma delos extremos, y dada la Razon dela suma delos quadrados del 1º, 2º y 3º ala suma delos quadrados del 3º 4º y 5º mos-mar los cinco terminos continuos.

Analisis

Digo que son los sig.tes $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$
sea como se propone a ——— $c^4x + x$
y sea la razon $p \,.\, q \,..\, c^4x^2 + c^2x^2 + x^2 \,..\, c^8x^2 + c^6x^2 + c^4x^2$
luego (prop. 1.a lib. 6.o eV) por la comun altura, $c^4x + c^2x + x$
son propor.s $x \,..\, c^4x \,..\, c^4x^2 + c^2x^2 + x^2 \,..\, c^8x^2 + c^6x^2 + c^4x^2$
luego (prop. 11. lib. 5.o eV) $p \,.\, q \,..\, x \,..\, c^4x$
luego (prop. 18 lib. 5.o eV) $p + q \,..\, q \,..\, c^4x + x \,..\, c^4x$
esto es (prop. 7.a lib. 5.o eV) $p + q \,..\, q \,..\, a \,..\, c^4x$
luego vi vuelta como la anterior. A estas tres rectas dadas (prop. 12. lib. 6.o eV) allar la quarta proporcional y allada restandola de la suma dada se sabe la primera, por quien se divida la 5.a y el cociente sera c^4, cuia raiz sera el denominador dela progression y quedaran declarados todos los cinco continuos proporcionales que es lo que se avia de demostrar.

Corolario

Si fueren cinco terminos continuos proporcionales como el primero al quinto asi la suma delos quadrados del primero segundo, y tercero, ala suma delos quadrados del tercero quarto y quinto.

Prop. 43

Dada la razon dela suma delos quadrados delos extremos ala suma delos quadrados del 2.o y 4.o mostrar, los cinco continuos

+

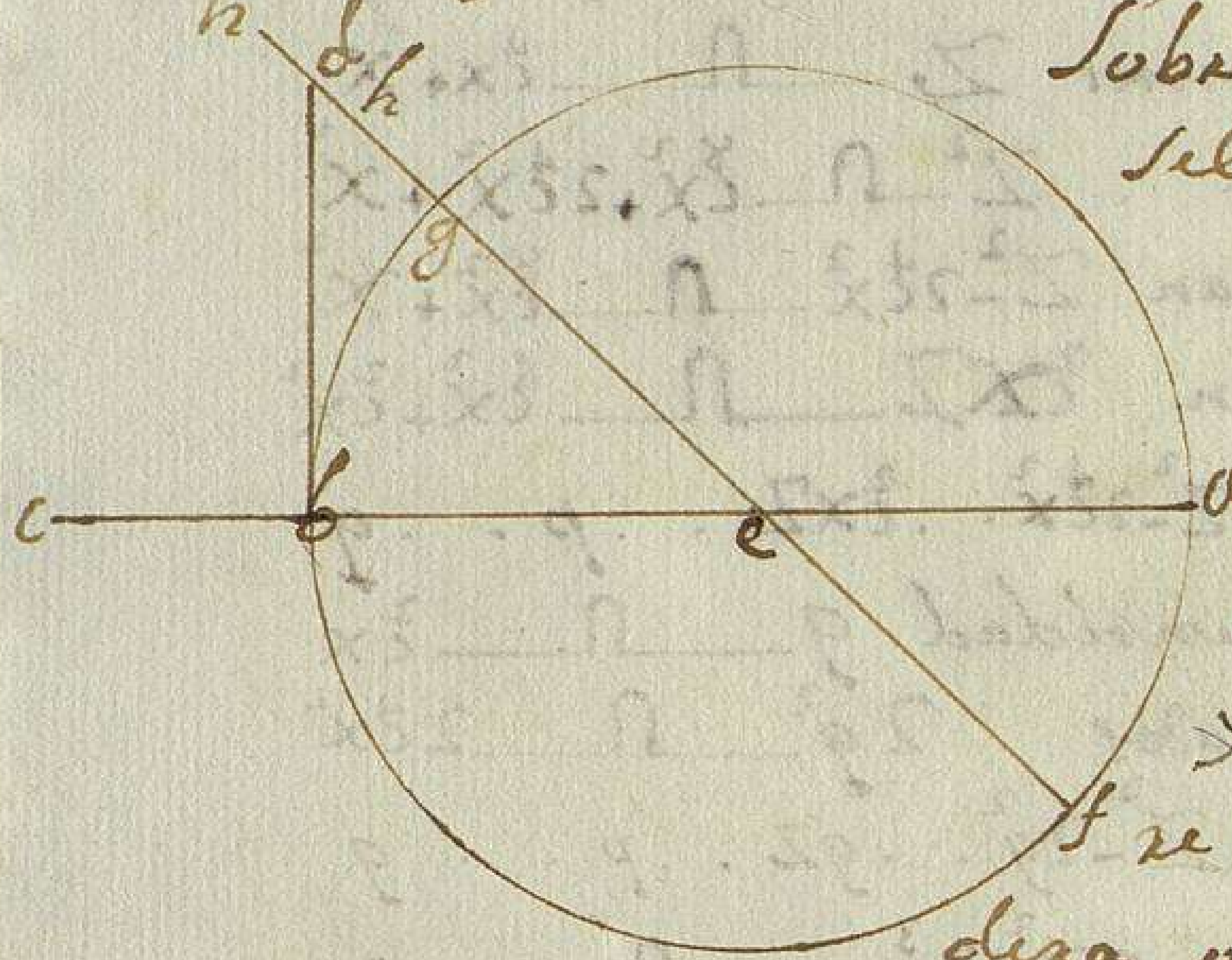
Digo que son los siguientes, $x \,.\, .cx \,.\, .c^2x \,.\, .c^3x \,.\, .c^4x$

Analisis

Sean como se propone $c^8x^2+x^2 \,.\, .c^6x^2+c^2x^2 \,.\, .p \,.\, .q$
luego (prop. 1ª lib. 6º E) $c^8+1 \,.\, .c^6+c^2 \,.\, .p \,.\, .q$
Sean iguales los siguientes $Z \sqcap c^4x+x$
luego sus quadrados lo seran $Z^2 \sqcap c^8x^2+2c^4x^2+x^2$
luego (ax. 3º E) lo seran $Z^2-2c^4x^2 \sqcap c^8x^2+x^2$
y de la misma suerte lo son $c^2xZ \sqcap c^6x^2+c^2x^2$
luego son proporcionales $Z^2-2c^4x^2 \,.\, .c^2xZ \,.\, .p \,.\, .q$
Supongase la menor cantidad $q \sqcap c^2x$
luego sus duplos quadrados $2q^2 \sqcap 2c^4x^2$
luego seran proporcionales $Z^2-2q^2 \,.\, .qZ \,.\, .p \,.\, .q$
luego (prop. 16. lib. 6º E) $qZ^2-2q^3 \sqcap pqZ$
y deprimiendo por q . . $Z^2-2q^2 \sqcap pZ$
luego (ax. 2º y 3º E) quedaran $Z^2-pZ \sqcap 2q^2$
luego (prop. 17. lib. 6º E) $q \,.\, .Z \,.\, .Z-p \,.\, .2q$
luego vuelta pues se reduce ha hallar dos rectas Z y $Z-p$ cuia difª es p, reciprocas a las dos rectas dadas q y $2q$ y halladas que sean sera conocida la suma de los extremos con cuia suma y terminos de la razon dada se podran formar nuebos argumentos arreglandose a seguir el analisis desde el fin (de suerte que se buelba por los contrarios argumentos) a buscar el principio del mismo Analisis con cuia orden se conoceran todos los cinco terminos que se buscan continuos proporcionales, que es lo que se avia de demonstrar.

Por geometría

Sea dada la razon $ab \cdot \cdot bc$ y aganse (prop. 13. lib. 6º eV) $2bc \cdot \cdot bd \cdot \cdot db \cdot \cdot cb$ luego (prop. 16. lib. 6º eV) seran $2bcb \;\Omega\; bdb$



Sobre ab, (prop. 11. lib. 1º eV) se lebante perpendicular bd, lado del quadrado que es duplo del quadrado de la recta bc. y sobre ab se descrivira el circulo y por su centro e, se tire la recta df que se dividira por la periferia del circulo en los puntos g, y f: Digo que la recta df, es la suma de los terminos extremos de los cinco continuos que se buscan. porque esta manifiesto el que observando las partes del argumento analitico, los quadrados beb y bdb, juntos (prop. 42 lib. 1º eV) componen el quadrado ded, a cuio lado de añadiendole be que es la mitad de la ab, compone toda la recta df, y la media es bc;

y si se digere que df, no es la suma de las extremas, precisamente sera mayor, o menor, como la fh. Pero (defin. 11. lib. 1º eV) son iguales, $ab \;\Omega\; fg$ luego (prop. 1º lib. 6º eV) propor, $ab \cdot \cdot bc \cdot \cdot hfg \cdot \cdot hf{:}bc$ Pero en el analisis a la quarta igualacion queda demonstrado que el rectangulo contenido dela suma de los extremos por la media, es igual

ala suma delos quadrados del 1.º y 2.º terminos delos cinco continuos: luego el Rectangulo hf:bc contenido hf, que se dice ser la suma delas extremas y, dela bc que ~~es~~ es, el tercer termino, es igual ala suma delos quadrados del 1.º y 2.º de donde el Rectangulo hfg será igual ala suma delos quadrados delos extremos, Por quanto se ha demonstrado ser propor. ab. . bc. . hfg. . hf:bc
Pero el quadrado (prop. 2.ª lib. 2.º eu) hfh ⊓ hfg + fhg luego el Rectangulo fhg es igual al duplo quad.º del tercer termino estos son iguales fhg ⊓ 2bcb estos (ax. 1.º eu) son iguales . . fhg ⊓ bdb
Pero (prop. 36. lib. 3.º eu) son iguales fdg ⊓ bdb luego (ax. 1.º eu) son iguales fhg ⊓ fdg la parte igual al todo ó el todo igual ala parte (contra el axioma 9, eu) lo que no puede ser: luego la suma delos extremos no puede ser mayor ni menor que la recta df, que es lo que se havia de demonstrar.

Apendix

Esta claro el que se puede poner por la suma delos extremos qualquier incognita Z y por el termino medio se puede elegir el menor termino dela razon dada.

Por Algebra

Sea dada la razon 257, á, 68 y supongase Z suma delos extremos, y, 68, Por el tercero 2.º termino: luego como consta delanalisis ala tercera igualacion Z^2-9248, es la suma delos

extremos, y a la quarta igualacion consta que $68Z$
es la suma delos quadrados del 1º y 2º terminos: luego
son proporcionales $Z^2-9248 \;..\; 68Z \;..\; 257 \;..\; 68$
y (prop. 15. lib. 5º eV) $Z^2-9248 \;..\; Z \;..\; 257 \;..\; 1$
luego (prop. 16. lib. 6º eV $Z^2-9248 \;\Omega\; 257Z$
y (ax. 2º y 3º eV) son iguales $Z^2-257Z \;\Omega\; 9248$
el quadrado dela mitad de 257 es, $\frac{66049}{4}$, aquien
añadiendole 9248, q̃ reducidos seran $\frac{36992}{4}$ sera
la suma $\frac{103041}{4}$ cuya raiz quadrada es, $\frac{321}{2}$ que su
mada con los $\frac{257}{2}$ sera toda la suma $\frac{578}{2}$ es, y
289 suma delos extremos y se formara la nueva
analogia de propor.ⁿ, $y \;..\; 68 \;..\; 68 \;..\; 289-y$
luego (prop. 16. lib. 6º eV) $.. \; 4624 \;\Omega\; 289y-y^2$
el quadrado dela mitad de 289, es $\frac{83521}{4}$ de quien
restando 4624 que reducidos seran $\frac{18496}{4}$ queda
el residuo $\frac{65025}{4}$ cuia raiz quadrada es $\frac{255}{2}$ que resta
da delos $\frac{289}{2}$ saca de residuo $\frac{34}{2}$ esto es 17 enteros
valor dela incognita y primer termino: luego
sera el ultimo 272 y seran los cinco terminos
continuos los siguientes, 17 . . 34 . . 68 . . 136 . . 272
esto es en los minimos termi.ᵒˢ 1 . . 2 . . 4 . . 8 . . 16
cuya suma delos quadrados delos extremos es 257.
y la suma delos quadrados 1º y 2º es 68, terminos
dela razon dada: luego qualquiera delas dos
progresiones satisfacen la question, Por lo que
buelbo a decir, los argumentos anterio-
res del analitica, como la geometrica, y al
gebra presente son legitimos y se deuen
seguir con toda seguridad.

Por otro modo

Sea pues el mismo Problema anterior.

Analisis

Digo q. son los siguientes, $x \,.\,.\, cx \,.\,.\, c^2x \,.\,.\, c^3x \,.\,.\, c^4x$

y sea como se propone $c^8x^2+x^2 \,.\,.\, c^6x^2+c^2x^2 \,.\,.\, p \,.\,.\, q$

y supongase iguales $z = c^2x$

y supongame iguales $c^4x+x = q$

luego (prop. 4ª. lib. 2º E) $c^8x^2+2c^4x^2+x^2 = q^2$

Pero tambien lo son iguales $2c^4x^2 = 2z^2$

luego (ax. 3º E) son iguales $c^8x^2+x^2 = q^2-2z^2$

y tambien lo son iguales $c^6x^2+c^2x^2 = qz$

luego son proporcionales $q^2-2z^2 \,.\, qz \,.\,.\, p \,.\,.\, q$

luego (prop. 16. lib. 6º E) $q^3-2qz^2 = pqz$

y deprimiendo quedan $q^2-2z^2 = pz$

y otros (axi. 2º E) son iguales $q^2 = 2z^2+pz$

y deprimiendo son iguales $\frac{q^2}{2} = z^2+\frac{pz}{2}$

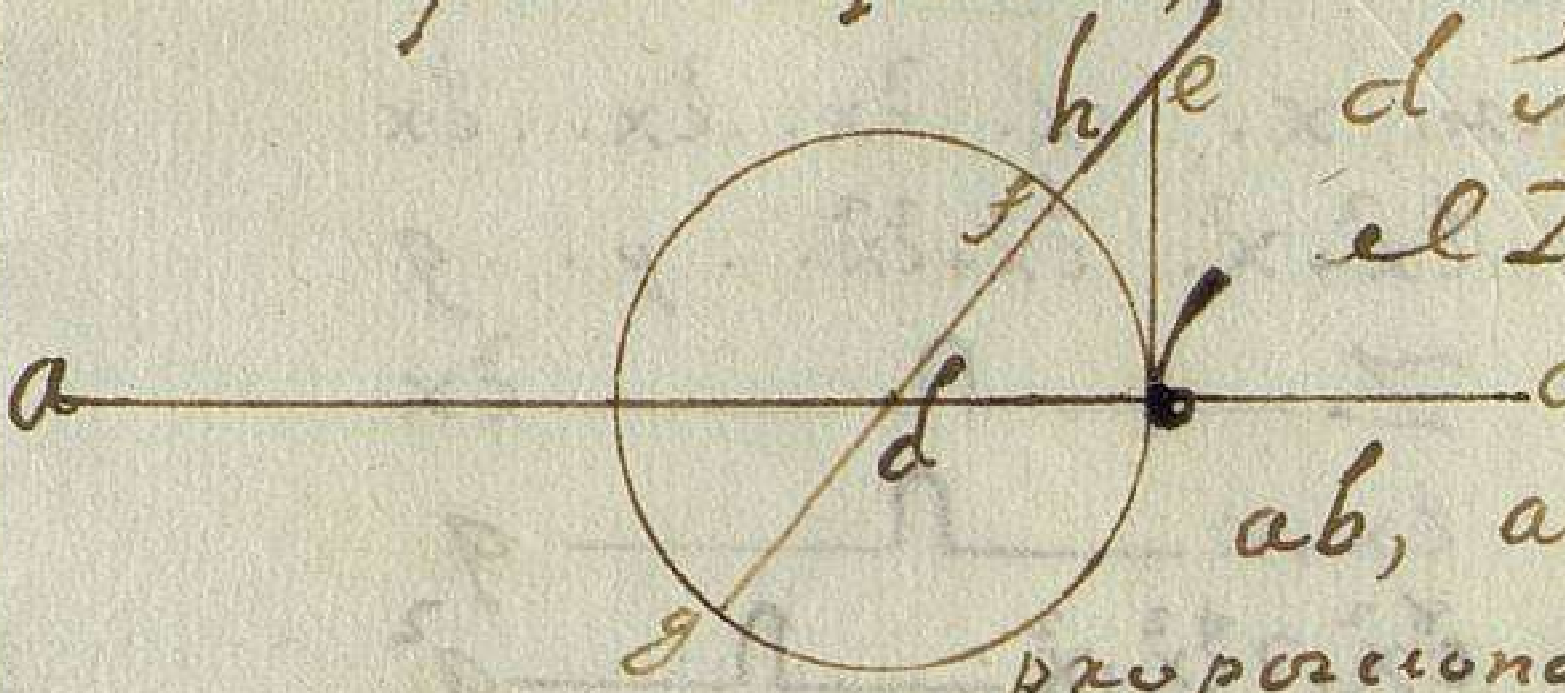
y (prop. 14. lib. 6º E) propor. $q \,.\,.\, z \,.\,.\, z+\frac{p}{2} \,.\,.\, \frac{q}{2}$

luego resuelta, pues se reduce a hallar dos lineas rectas z y $z+\frac{p}{2}$ cuia difª conocida es media, p, reciprocas a las dos rectas dadas q y $\frac{q}{2}$ las quales reciprocas a lladas que sean será conocido el tercer termino de los cinco continuos que se buscan, y siguiendo el analisis desde el fin por los contrarios argumentos asta bolber al principio se bendrá en el conocimiento de todos los cinco terminos continuos proporcionales que son los que se buscan saber.

+

Por geometria

Sea dada la recta ab . . bc, y hagase db quarta parte de toda la recta ab y centro d interbalo db se describa el Zerculo y se ponga be perpendicular a la ab, aviendo hecho antes proporcionales, bc . . be . . eb . . $\frac{cb}{2}$



estos q̃ sean (prop. 16. lib. 6º Eu) iguales $\frac{bcb}{2}$ Ω beb y tírese la secante eg por el centro d, la qual será dividida en la periferie en los puntos f, y g. Digo que la recta fe es el termino medio de los cinco continuos que se buscan. Pues esta claro si se obserban las partes analíticas, pues si el quadrado dbd junto con el quadrado beb el qual por construccion es mitad del quadrado bcb, seran (prop. 47 libro 1º Eu) estos son iguales, dbd+beb Ω ded zirculo lado de si quita df, que es la quarta parte de la ab, queda el residuo fe por el tercer termino, y que en la bc existe la suma de los extremos.

Y si se dixere que fe, no es el termino medio precisamente sera maior, o menor como fh: luego, contenido debajo de la suma de los extremos bc y fh, el rectangulo, sera igual al quad. que sea suma de los q.dos de la 4a y 2a y seran proporcionales (prop. 1 lib. 6º Eu) bc . . ab . . bc:fh . . ab:fh e inbirtiendo, Def. 13. lib. 5º Eu) ab . . bc . . ab:fh . . bc:fh luego siendo el rectangulo bc:fh suma delos quadrados del 4.º y 2.º terminos, tambien (prop. 7.ª lib. 5.º eN) el rectangulo ab:fh, es igual ala suma delos quadrados delos extremos. Pero db es quarta parte dela recta ab; luego fg sera mitad dela recta ab, Porloqual seran yguales los rectangulos sig.tes 2hfg ⎯⎍⎯ ab:fh luego 2hfg tambien es igual ala suma de los quadrados delos extremos: luego, añadiendo el duplo quadrado estos 2fhf sera (ax. 3.º eN) baxamos iguales . . 2hfg+2fhf ⎯⎍⎯ ab:fh+2fhf estos (ax. 1.º eN) seran 2hfg+2fhf ⎯⎍⎯ bcb, estos (prop. 3.ª lib. 2.º eN) . . 2ghf ⎯⎍⎯ bcb y demediando son iguales ghf ⎯⎍⎯ $\frac{bcb}{2}$ estos (axioma 1.º eN) son iguales ghf ⎯⎍⎯ beb Pero (prop. 36. lib. 3.º eN) son iguales gef ⎯⎍⎯ beb luego (ax. 1.º eN) son iguales ghf ⎯⎍⎯ gef la parte igual al todo ô el todo ygual ala parte (contra el ax. 9, eN) no puede ser: luego la recta termino medio delas cinco continuas no puede ser maior, ni menor, que la fe, que es loque se avia de demonstrar.

Apendix

De aqui sea claro elque se puede suponer qual quier yncognita Z por el termino medio y el menor termino dela razon dada se puede elegir porla suma delos extremos

Y semetante mente se puede suponer

lamisma incognita Z por el mismo termino medio y qual quiera termino dela Razon conocida por la suma del 1º 2º y 4º ó por la suma del segundo quarto y quinto.

Y tambien se puede suponer la incognita por la suma de qualesquiera tres de los referidos y tomar el mismo termino dela Razon por el termino medio con lo qual se vendra en conocimto de nuebas analogias asi analiticas como geometricas. Por las quales se declara como se puedan allar los cinco terminos continuos proporcionales.

Dada la Razon dela suma de los quadrados de los extremos ala suma de los quadrados del 2º y 4º. Pues con qualquiera suma o difas se pueden allar siendo las partes omologas conocidas porque como las sumas asi son las difas entre si proporcionales 15 lib. 5º e 8) Por ser licito el arguir componiendo, dividiendo y mbirtiendo, y componiendo y dividiendo a un tpo como mejor la necesidad lo pidiere.

Dela misma suerte se podran allar los cinco terminos continuos proporcionales. Dada la Razon de los quadrados de todos menos el del termino medio ala suma delos quadrados delos 2º

extremos ō alos dla segunda y quarta
Porque dividiendo se allara la razon
dada dlos quadrados dlos extremos ala
suma dlos quadrados dl 2° y 4° termi
nos o al contrario.

Prop. 44

Dada la razon dela suma delos quadrados delos tres terminos medios al quadrado dela suma delos extremos se piden los cinco terminos continuos proporcionales

Analisis

Digo que son los siguientes $x \,.\, \overset{}{c}x \,.\,.\, \overset{2}{c}x \,.\,.\, \overset{3}{c}x \,.\,.\, \overset{4}{c}x$

Sea como se propone $\overset{6}{c}\overset{2}{x}+\overset{4}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{c}\overset{2}{x} \,.\,.\, \overset{8}{c}\overset{2}{x}+2\overset{4}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{x} \,.\,.\, p \,.\,.\, q$

Supongase la incognita $Z \sqcap \overset{4}{c}x+x$

Su quadrado (prop. 4ª, lib. 2° eu) $Z^2 \sqcap \overset{8}{c}\overset{2}{x}+2\overset{4}{c}\overset{2}{x}+x^2$

Supongase el termino menor $p \sqcap \overset{2}{c}x$

Su quadrado es el siguiente $p^2 \sqcap \overset{4}{c}\overset{2}{x}$

y tambien son iguales . . $pZ \sqcap \overset{6}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{c}\overset{2}{x}$

luego (ax. 2° eu) son iguales $pZ+p^2 \sqcap \overset{6}{c}\overset{2}{x}+\overset{4}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{c}\overset{2}{x}$

luego como se propone propor. $pZ+p^2 \,.\,.\, Z^2 \,.\,.\, p \,.\,.\, q$

luego (prop. 16. lib. 6° eu) $qpZ+qp^2 \sqcap pZ^2$

y deprimiendo por, p, quedan $qZ+qp \sqcap Z^2$

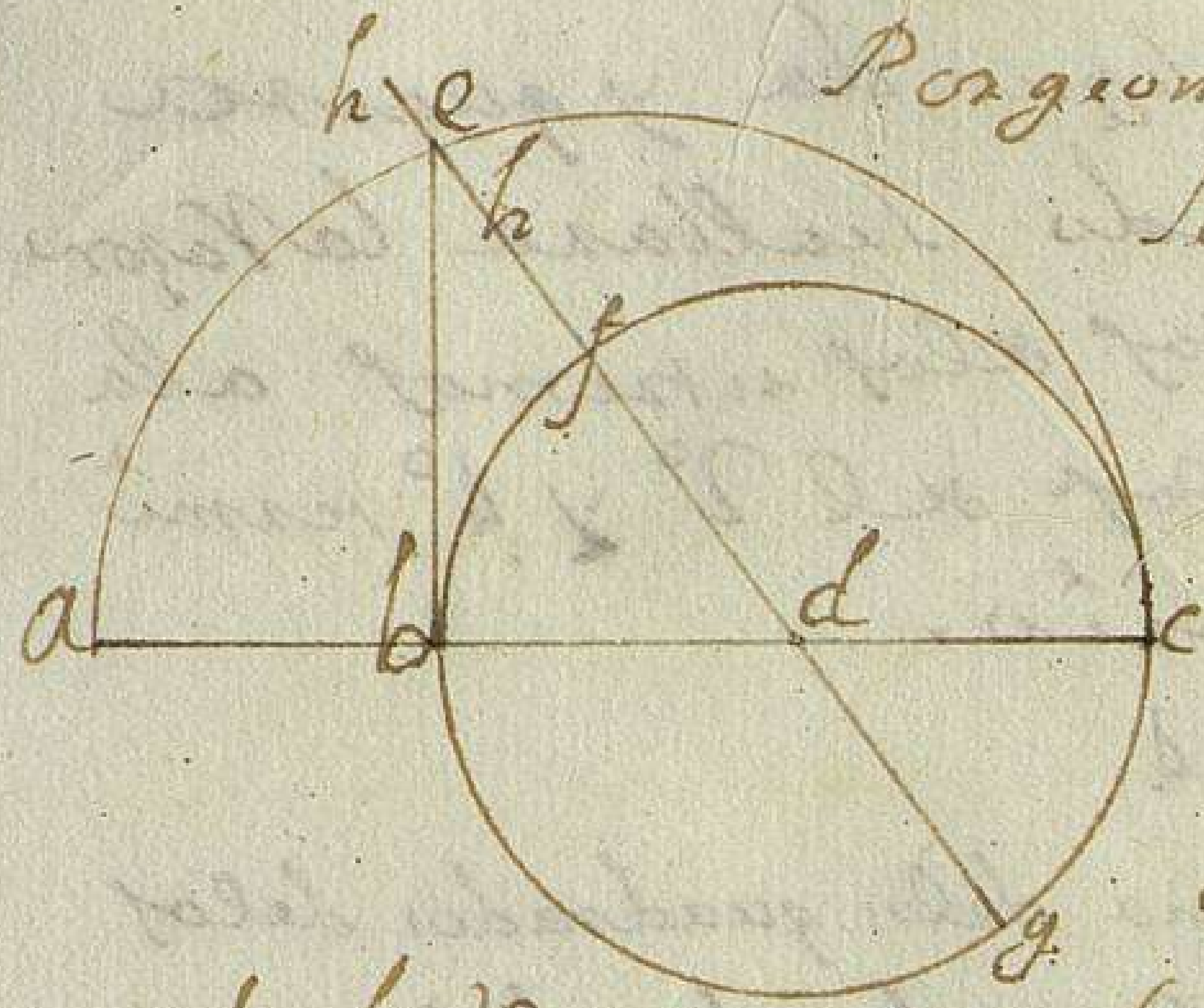
y (ax. 3° eu) quedan iguales $qp \sqcap Z^2-qZ$

y (prop. 14. lib. 6° eu) propor. $q \,.\,.\, Z \,.\,.\, Z-q \,.\,.\, p$

luego vuelta pues se reduce ā allar dos rectas Z y $Z-q$ cuia difª es la conocida, reciprocas alas dos q y p, las quales halladas se terminaran los demas terminos como queda dho, en la antecedte

Que es lo que se deuia saber.

152



Por geometria

Sea dado la razon dela ab. . bc, diuidase la bc (prop. 10 lib. 1.º eV) enel punto d, sobre bc se describira el circulo cuio centro d. y sobre toda la recta ac se describira el semicirculo y del punto b (prop. 11. lib. 1.º eV) se lebantara per-pendicular be, que se termine enel semicirculo enel punto e, desde donde se tire porel centro d, la recta eg, laqual quedara diuidida por la periferie enlos puntos f, g; Digo que la linea eg, es suma delas extremas, y que la ab menor termino dela razon es el tercer termino delos cinco continuos que se buscan. Pues obserbando las partes analiticas, el quad.do bdb, junto conel quadrado beb ō (prop. 8.ª libro 6.º eV) son iguales, estos (Prop. 47. lib. 1.º eV) aelquadrado ded estos, bdb+beb ⩋ ded estos son iguales. . bdb+abc ⩋ ded estos (porla 4.ª lib. 2.º eV) bdb+abc ⩋ efe+fdf+2efd estos (ax. 3.º eV) son iguales abc ⩋ efe+efg estos (prop. 3.ª lib. 2.º eV) son ig.les abc ⩋ gef y (prop. 14. lib. 6.º eV) propor.' bc. . ge. . ef. . ab Por lo que afirmo el que la recta eg es la suma delas extremas, y corresponde ala incognita Z que se supuso enla operacion analitica.

Y si se dijere que la recta eg, no es suma delas

extremas lo será otra, maior o menor como la
vista hg. Pero por construcción, y def.n 17. lib.
1.o ev.) son iguales los diametros bc ⊓ fg
luego (prop. 9. lib. 5.o y 1.a del 6.o ev.) ab . . fg . . ab:hg . . hgf
luego 5.a analogía analítica de esta prop. es vista,
ab:hg contenido dela hg quiendize ser suma
delas extremas, y dela media ab, será igual
ala suma delos quadrados del 2.o y 4.o terminos
luego siendo propor.s ab . . bc . . ab:hg . . hgf
y (prop. 1.a lib. 6.o ev.) lo son ab . . bc . . aba . . abc
estos (ult.a prop. lib. 5.o y 17 del 6.o) ab . . bc . . aba . . beb
luego (prop. 11. lib. 5.o ev.) lo son ab:hg . . hgf . . aba . . beb
luego (prop. 12. lib. 5.o ev.) ab:hg+aba . . hgf+beb . . aba . . beb
estos (prop. 11. lib. 5.o ev.) ab:hg+aba . . hgf+beb . . ab . . bc
siendo por supo.n proporcionales la suma delos quad.s
delos tres terminos medios al quadrado dela suma
delos extremos así ab à bc: luego hgf+beb, se deue
igualar al quadrado dela suma delos extremos,
estos son iguales los siguientes hgf+beb ⊓ hgh
pero (prop. 2.a lib. 2.o ev.) son iguales hgf+ghf ⊓ hgh
luego (ax. 1.o ev.) son iguales hgf+beb ⊓ hgf+ghf
estos (ax. 3.o ev.) son iguales . . beb ⊓ ghf
y (prop. 14. lib. 6.o ev.) propor.s gh . . be . . eb . . hf
estos (coro. prop. 8.a lib. 6.o ev.) gh . . ab . . bc . . hf
estos (prop. 7.a lib. 5.o ev.) . . gh . . ab . . fg . . hf
luego (prop. 14. lib. 5.o ev.) gh es mayor que gf: luego
ab también es maior que hf estos quando
la gh se supone maior que ge y al contrario q.do
la gh se supone menor lo qual es absurdo. Por lo-

qual la suma delas extremas no puede ser, maior, ni menor, que la recta eg, que es lo que mas avia de demonstrar.

Por otro modo

Sea el mismo Problema Propuesto.

Analisis

Digo q̃ son los siguientes $x \,.\,. cx \,.\,. c^2x \,.\,. c^3x \,.\,. c^4x$

y seran como se proponen, $c^6x^2+c^4x^2+c^2x^2 \,.\,. c^6x^2+2c^4x^2+x^2 \,.\,. p \,.\,. q$

Supongase la incognita $Z \sqcap c^2x$

y supongase el maior termino delos dos dela razon dada igual ala suma delos extremos seran, $q \sqcap c^4x+x$

luego elebando seran $qZ \sqcap c^6x^2+c^2x^2$

y tambien lo son $\,.\,. Z^2 \sqcap c^4x^2$

luego (ax. 2.º eV) lo son $Z^2+qZ \sqcap c^6x^2+c^4x^2+c^2x^2$

luego como se propone, $Z^2+qZ \,.\,. q^2 \,.\,. p \,.\,. q$

luego (prop. 16. lib. 6.º eV) $qZ^2+q^2Z \sqcap qp$

y deprimiendo por q, $\,.\,. Z^2+qZ \sqcap qp$

y (prop. 14. lib. 6.º eV) propor. $p \,.\,. Z \,.\,. Z+q \,.\,. q$

luego vuelta como antes pues se reduce à allar los dos rectas Z y $Z+q$ cuia difª, q, se da conocida, reciprocas alas dos rectas dadas terminos dela razon dada $p \,.\,. q$.

Por geometria

Sea en la misma figura anterior: y sea la razon dada $ab \,.\,. bc$: digo que la media es la recta ef, y la suma delas extremas entre sobre la dada bc termino posterior, y el maior delos dos dela razon dada.

Si se dijese que ef non el termino medio

lo será otro maior o menor, como hf: luego
analogía 3.ª de igualacion analítica el Rectangu-
lo hfg contenido de la hf que se supone ser la
tercera, por fg suma de las extremas es igual a la
suma de los quadrados del 2.º y 4.º termino, a qui-
en añadiendole el quadrado hfh será (prop.
3.ª lib. 2.º eV) serán iguales hfg + hfh ⩋ ghf
y será el Rectangulo ghf igual a la suma de
los quadrados de los tres terminos medios, y serán
proporcionales como se propone ghf . . bcb . . ab . . bc
y (defn. 13. lib. 5.º eV) lo son bcb . . ghf : . bc . . ab
pero (prop. 8. lib. 6.º coro) bc . . be . . eb . . ba
y (coro. prop. 19. lib. 6.º eV) bcb . . beb . . bc . . ab
luego (prop. 11. lib. 5.º eV) bcb . . ghf . . bcb . . beb
luego (prop. 14. lib. 5.º eV) son igs. ghf ⩋ beb
pero (prop. 36. lib. 3.º eV) son iguales gef ⩋ beb
luego (ax. 1.º eV) son iguales . . ghf ⩋ gef
la parte igual al todo lo que es contra el (ax
9 eV) No pudiera: luego tampoco la media pu-
diera maior, ni menor, que la recta ef; que es
lo que se havía de demonstrar

Por Algebra

Sea dada la razon 84 . . 289 . y suponi-
gase Z suma de las extremas, y 84 por el
tercer termino: luego como consta del
analisis $Z^2 - 289Z$ ⩋ 24276 el quadrado de
la mitad de los 289 es, $\frac{83521}{4}$ a quien añadien
dole los 24276 quebrados $\frac{97104}{4}$ la suma es $\frac{180625}{4}$
cuya raíz quadrada es $\frac{425}{2}$ que sumada con $\frac{289}{2}$

156 sera la suma $\frac{714}{2}$ esto es 357 enteros valor dela incognita Z suma delos extremos con lo qual se formara la nueba proporcion siguiente. y . . 84 . . 84 . . 357 — y y sera la igualacion siguiente 7056 ⩍ $357y - y^2$ el quadrado dela mitad delos 357 es $\frac{127449}{4}$ de quien restando, 7056 que reducidos, $\frac{28224}{4}$ el residuo sera $\frac{99225}{4}$ cuya raiz quadrada serán $\frac{315}{2}$ que restados delos $\frac{357}{2}$ sera el residuo $\frac{42}{2}$ esto es 21 enteros valor dela incognita y, primer termi, y el tercero sera 336: luego seran continuos 21 . . 84 . . 336 y porque el tercer termino delos cinco que se pusieron esto es . x . . cx . . c^2x . . c^3x . . c^4x se halla el primero x multiplicado por el quadrado del denominador: luego si 84 se divide por 21 sera el cociente 4 cuia raiz es 2 valor del denominador c, luego son los cinco contis. 21 . . 42 . . 84 . . 168 . . 336 y en los minimos ters. 1 . . 2 . . 4 . . 8 . . 16 luego queda resuelta la question y se hallaron que tienen la condicion que se dio en la razon dada; lo que por estar tan claro no gasto mas prolijidad; pues bastan las operaciones hechas para que el curioso venga en conocimiento de que son legitimos los argumentos que se han seguido en estas y otras analogias.

apendix

Por muchos modos se puede proceder en la operacion analitica; Porque se puede suponer Z, por suma de los extremos y el ultimo termino de la razon dada por el termino medio. Como asimesmo tomando Z por el termino medio y elegir el primer termino de la razon dada por suma de los extremos. o eligiendo la incognita Z por la suma del 1.º 2.º y 4.º o por la suma de los 2.º 4.º y 5.º y qualquier termino de la razon dada elegirle por el medio o por suma de los extremos; o al contrario eligiendo un termino de las razon dada por la suma de quales quiera ~~de los~~ tres terminos 1.º 2.º y 4.º, o por la suma del 2.º 4.º y 5.º y la incognita Z, por el termino medio Por lo qual sabe claro el que se puede proceder en las operaciones por modos diversos Para resolber el problema propuesto tanto analiticamente como geometricamente.

Asimesmo sabe claro del modo que se a de seguir el argumento, Para allar los cinco terminos continuos proporcionales Dada la razon de la suma de los quadrados de los

158 tres terminos ael dela suma delos extremos y con qualquier suma o difª, delos cinco: Porque sino teniendo razon desta suma o difª se allan los cinco continuos en la razon dada como hasta aqui se a hecho; Y se ace como la suma o difª delos terminos omologos (prop. 12 lib. 5º eV) delas que se an allado alas mismas, asi la suma o difª delas que se buscan alas mismas que se buscan y se allara vuelto el problema.

Asimesmo esta claro como, proceder para allar los cinco continuos proporcionales, dada la razon dela suma de sus quadrados mas el quadrado del termino medio duplo, ala suma delos quadrados delos tres terminos medios 2º 3º y 4º, o ael quadrado ala suma delos extremos, porque se puede arguir divi.do, y se tendra la razon dela suma delos quadrados delos tres terminos 2º 3º y 4º, ael quadrado dela suma delos extremos o ael contrario.

Y asimesmo queda claro el modo de proceder para allar los cinco terminos continuos proporcionales, dada la suma delos extremos y la suma delos quadrados delos tres intermedios como se a executado en la proposicion.

Prop. 45

Dada la razon dela suma delos quadrados delos tres terminos intermedios, ala suma delos quadrados delos extremos, hallar, los cinco continuos propor.ˡᵉˢ

Analisis

Digo que son los siguientes. $x \,.\,.\, cx \,.\,:\, \overset{2}{c}x \,.\,.\, \overset{3}{c}x \,.\,.\, \overset{4}{c}x$

sea como se propone, $\overset{6}{c}x^2+\overset{4}{c}x^2+\overset{2}{c}x^2 \,.\,.\, \overset{8}{c}x^2+x^2 \,.\,.\, p \,.\,.\, q$

Supongase la incognita $Z \sqcap \overset{4}{c}x+x$

y sea asimismo la conocida $p \sqcap \overset{2}{c}x$

luego elevando . . . $pZ \sqcap \overset{6}{c}x^2+\overset{2}{c}x^2$

y tambien sus quadrados seran $p^2 \sqcap \overset{4}{c}x^2$

luego (ax. 2° eu.) lo seran $pZ+p^2 \sqcap \overset{6}{c}x^2+\overset{4}{c}x^2+\overset{2}{c}x^2$

y tambien lo seran $Z^2 \sqcap \overset{8}{c}x^2+2\overset{4}{c}x^2+x^2$

luego (ax. 3° eu.) . . . $Z^2-2p^2 \sqcap \overset{8}{c}x^2+x^2$

luego como se propone $pZ+p^2 \,.\,.\, Z^2-2p^2 \,.\,.\, p \,.\,.\, q$

luego (prop. 16. lib. 6. eu.) $qpZ+qp^2 \sqcap pZ^2-2p^3$

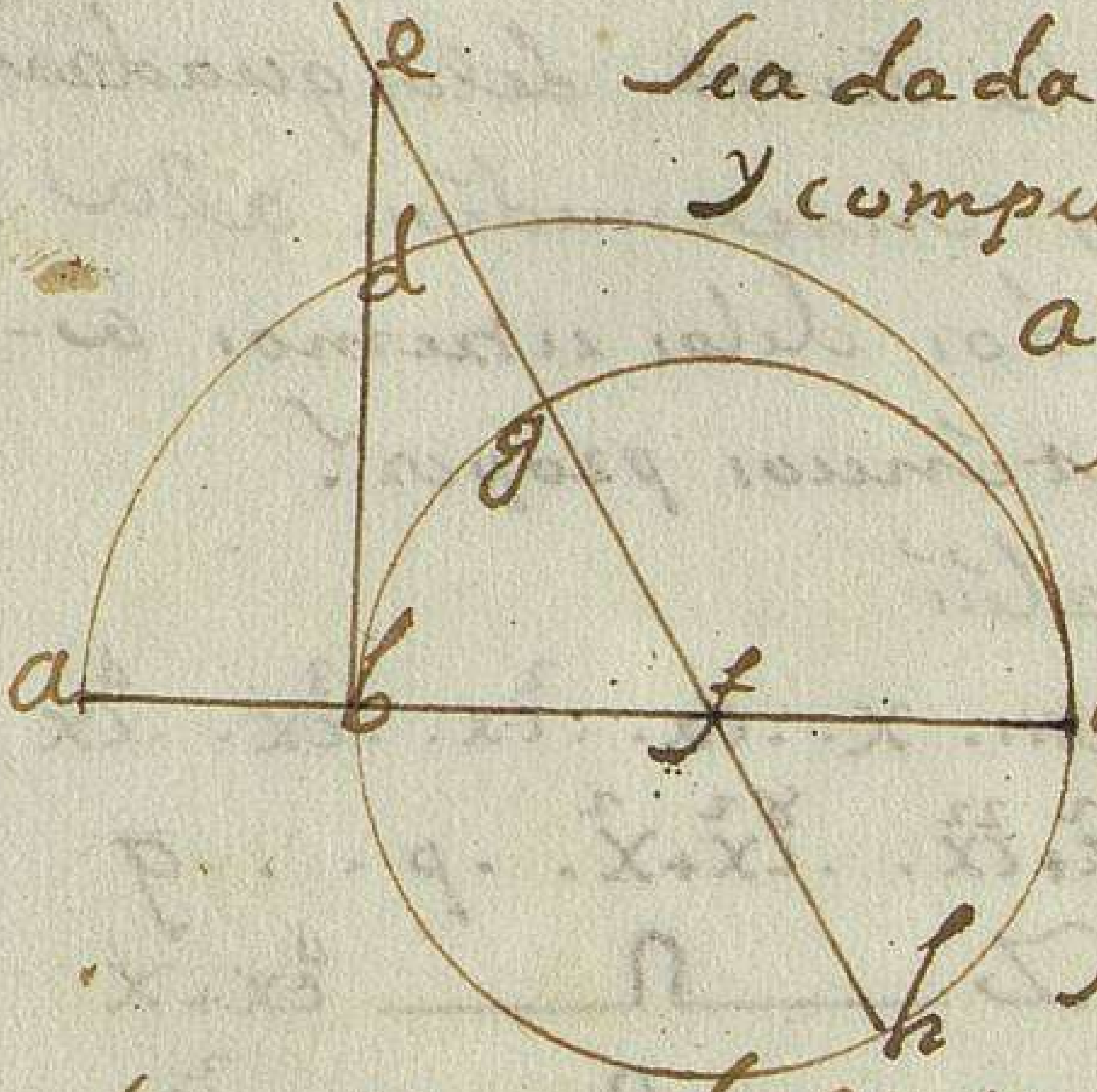
y deprimiendo seran $qZ+qp \sqcap Z^2-2p^2$

luego (ax. 2° y 3° eu.) lo son $2p^2+qp \sqcap Z^2-qZ$

y (prop. 14. lib. 6. eu.) propor.ˡᵉˢ $2p+q \,.\,.\, Z-q \,.\,.\, Z \,.\,.\, p$

luego vuelto pues se reduce, se hallaran dos rectas $Z-q$ y Z cuya dif.ᵃ es, q, reciprocas alas dadas $2p+q$, y p. las quales despues de halladas siguiendo el analisis desde el fin asta el principio se allaran los cinco terminos como quedan determinados en las proposiciones anteriores por lo qual concluio.

Por geometria



Sea dada la razon, ab . . bc
y compuestas en una linea
ac se describa sobre ella
el semicirculo, y del
punto b (prop. 11. lib. 1° e.) se levante la per
pendicular bd, la qual
se prolongue asta e, de
suerte que la recta be ó su quadrado
sea igual a los siguientes $2aba+bdb \;\Omega\; beb$
y sobre bc se describa el circulo entero
y por su centro f se tire la secante
eh, la qual quedara dividida por la
periferie en los puntos g, h; Digo,
que eh, es suma de los dos terminos
extremos. Porque observando la ultima
analogia de la operacion analitica se
allará (prop. 8ª, coro. lib. 6° e.) que el quadrado
bdb es igual al rectangulo abc, y este com
puesto al de pq en aquella añadiendo 2aba
que los corresponden a $2p^2$, sale la misma
suma en aquella ^{3}general, esto es $2p^2+qp \;\Omega\; 2aba+bdb$
cuyo motivo obliga a la igualacion puesta
arriba la qual es la siguiente, $2aba+bdb \;\Omega\; beb$
y por ${}^{3}g$, bf es mitad de bc su quad.do es .. $bfb \;\Omega\; bfb$
cuyas sumas (ax. 2° e.) son, $2aba+bdb+bfb \;\Omega\; beb+bfb$
estos (prop. 47. lib. 1° e.) son iguales $beb+bfb \;\Omega\; fef$
a cuyo lado ef añadiendo bf, ó su igual, fh

compone la suma ch que corresponde a la incognita Z, y de la operacion analitica que se supuso por la suma de las extremas: luego queda demonstrado el que la recta ch es la suma de las extremas por lo que no se prosigue.

Por otro modo

Analisis

Digo que son los siguientes $x \ldots cx \ldots \overset{2}{c}x \ldots \overset{3}{c}x \ldots \overset{4}{c}x$

Supongase la incognita $Z \sqcap \overset{4}{c}x + x$

y sea el maior termino de la razon $q \sqcap \overset{2}{c}x$

sus quadrados lo son . . . $q^2 \sqcap \overset{4}{c}x^2$

luego tambien lo son $qZ + q^2 \sqcap \overset{6}{c}x^2 + \overset{4}{c}x^2 + \overset{2}{c}x^2$

y tambien lo son iguales $Z^2 - 2q^2 \sqcap \overset{8}{c}x^2 + x^2$

luego como se propone . $qZ + q^2 \,.\,.\, Z^2 - 2q^2 \,.\,.\, p \,.\,.\, q$

luego (prop. 16. lib. 6° eV.) $q^2Z + q^3 \sqcap pZ^2 - 2q^2p$

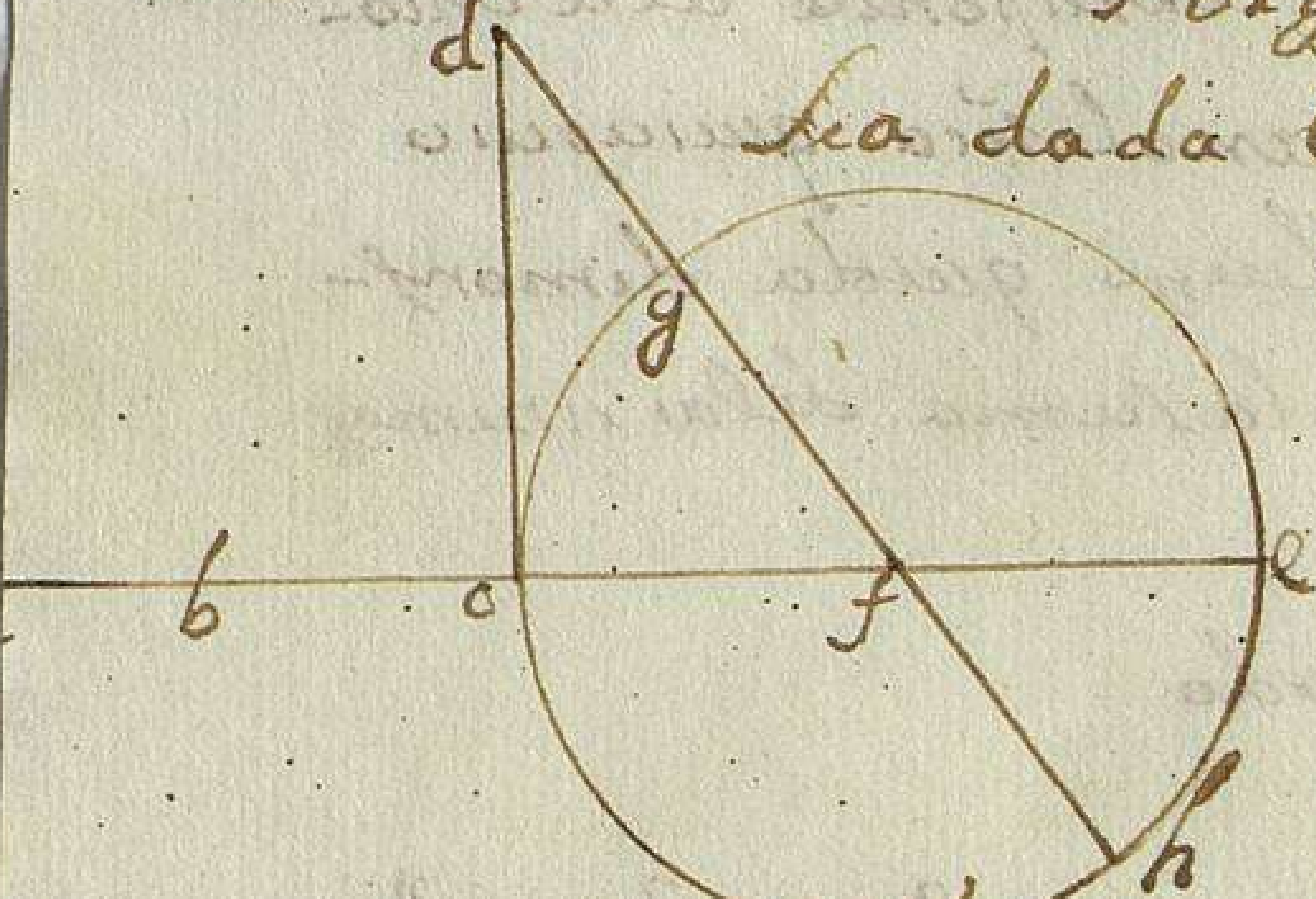
luego (ax. 2° y 3° eV.) lo son. $2q^2p + q^3 \sqcap pZ^2 - q^2Z$

y dividiendo lo son $2q^2 + \frac{q^3}{p} \sqcap Z^2 - \frac{q^2Z}{p}$

luego (prop. 14. lib. 6° eV.) $q \,.\,.\, Z \,.\,.\, Z - \frac{q^2}{p} \,.\,.\, 2q + \frac{q^2}{p}$

luego vuelto pues se reduce ha hallar las dos rectas Z y $Z - \frac{q^2}{p}$ cuia difª $\frac{q^2}{p}$ es conocida reciprocas a las dos rectas q y $2q + \frac{q^2}{p}$ dadas. las quales halladas, y bolbiendo desde el fin, por los contrarios argumentos se bolberà al principio donde quedaran conocidos los cinco terminos continuos como en muchas partes queda dicho, que es lo que se avia de demonstrar.

+



Por geometria

Sea dada la razon ab..bc, y (prop. 12 lib. 6°) se hagan propor.

ab..2ab+bc..bcb..cdc

ab..bc..bc..ce

sobre ce (prop. 11. lib. 1. eu) del punto c, se lebante perpendicular cd; y sobre el diametro ce se describa el circulo cuio centro f, por el qual del punto d, se tire la secante dh, que quedara dividida por la periferie en los puntos g, h; Digo, que la recta dh, es la suma de las extremas, y que el maior termino de la razon da (el qual es bc) es el tercer termino de los cinco continuos proporcionales; la demonstracion esta clara observando las partes analiticas correspondientes a estas geometricas. Pues se an hecho propor. ab..2ab+bc..bcb..cdc luego (prop. 16. lib. 6° eu) 2ab:bcb+bcbc = ab:cdc esta igualacion corresponde a la setima igualacion, en la analitica operacion anterior, en la que se ben sumados dos solidos, el uno, sobre el quadrado del mayor termino de la razon dada en la altura del duplo del menor termino de la razon dada, y el otro solido, es el cubo del mayor termino de la dicha razon dada, lo mismo se be en los dos solidos 2ab:bcb+bcbc; solo falta

demostrar si el solido ab:cdc corresponde à
la dif.^a de los dos solidos en dicha igualacion
analitica. cuya demonstracion es clara
Porque son hecho propor.^l ab . . bc . . bc . . ce
y en el analisis lo son . . p . . q . . q . . $\frac{q^2}{p}$
luego los omologos ala una son iguales a los
omologos de la otra proporcionalidad, y mas bien
porque el rectangulo dhg es igual al $\frac{q^2Z}{p}$
luego son iguales los siguientes dhg $\sqcap$ $\frac{q^2Z}{p}$
como asimismo lo son iguales hdg $\sqcap$ $Z^2 - \frac{q^2Z}{p}$
porque (ax. 2º etc) lo son iguales hdh $\sqcap$ Z^2 luego
tambien sus lados tambien lo son dh $\sqcap$ Z
y es asi que en la operacion analitica se su-
puso Z por suma de los extremos: luego dh
es igual tambien a suma de los que es lo
que se avia de demonstrar. y ademas son lo
iguales (prop. 36. lib. 3º etc) cdc $\sqcap$ hdg
luego elevando lo seran ab:cdc $\sqcap$ ab:hdg
luego tambien (ax. 1º etc) lo seran iguales
los solidos siguientes, 2ab:bcb+bcbc $\sqcap$ ab:hdg
y deprimiendo, lo seran $\frac{2ab:bcb+bcbc}{ab:dg}$ $\sqcap$ dh
luego por un modo y otro queda demonstrado
el ser la recta dh suma de los extremos.

Apendiz

En las operaciones analiticas se puede su-
poner Z por el termino medio de los continuos
y qual quier termino de los de la razon dado
se puede elegir por suma de los extremos
Semejantemente se puede suponer Z

por suma de qualesquiera tres terminos, y qualquier termino de la razon dada se puede elegir por el termino medio o por suma de los extremos. y tt se puede elegir Z por la suma de los extremos, y qualquier termino de la razon dada, se puede elegir por la su ma de tres terminos de los continuos. y tt, se puede suponer Z por termino medio y qualquier termino de la razon dada se puede elegir por la suma de qualesquiera tres terminos de los continuos.

De lo dicho sigue el poderse allar los cinco terminos continuos proporcionales, dada la razon de la suma de los quadrados de cada uno o la razon de qualquier quadrado a la suma de los quadrados de los extre mos o a la suma de los quadrados de los tres terminos medios. Porque (prop. 1 libro 5º e 8) se puede arguir dividien do o como la necesidad lo pidiere con lo qual se allara tambien, la razon de la suma de los quadrados de los tres inter medios a la de los extremos y al contrario.

Asimismo se pueden allar los cinco continuos proporcionales, si se da la suma o diferencia con la proporcion de los quadrados de los tres terminos inter medios con los quadrados de los extre

+ 165

mos; porque allando primero los cinco en la razon dada delos dhos quadrados, y sargüie como uno a uno assi los agregados delos cinco allados acada uno, assi la suma o difa. dada a otras. y quedara resuelto el problema.

Assimismo se pueden allar los cinco terminos continuos proporcionales dada la razon dela diferencia entre la suma delos quadrados delos tres terminos intermedios, y suma delos quadrados delos extremos a la misma suma delos extremos, porque se puede argüir (prop. 18. lib. 5o. eu.) o (prop. 17 del mismo lib. 5o eu.) como uno a uno assi los agregados o difas. y quedara el problema resuelto lo mismo ǭ [illegible] ḡedeca.

Prop. 46

Dada la razon dela suma delos quadrados del quarto, y segundo, ala suma delos quadrados del quinto, tercero, y primero, mostrar los cinco terminos continuos.

Analisis

Digo que son los siguientes $x \,.\,.\, cx \,.\,.\, \overset{2}{c}x \,.\,.\, \overset{3}{c}x \,.\,.\, \overset{4}{c}x$

sea como se propone, $\overset{6}{c}x^2 + \overset{2}{c}x^2 \,.\,.\, \overset{8}{c}x^2 + \overset{4}{c}x^2 + x^2 \,.\,.\, p \,.\,.\, q$

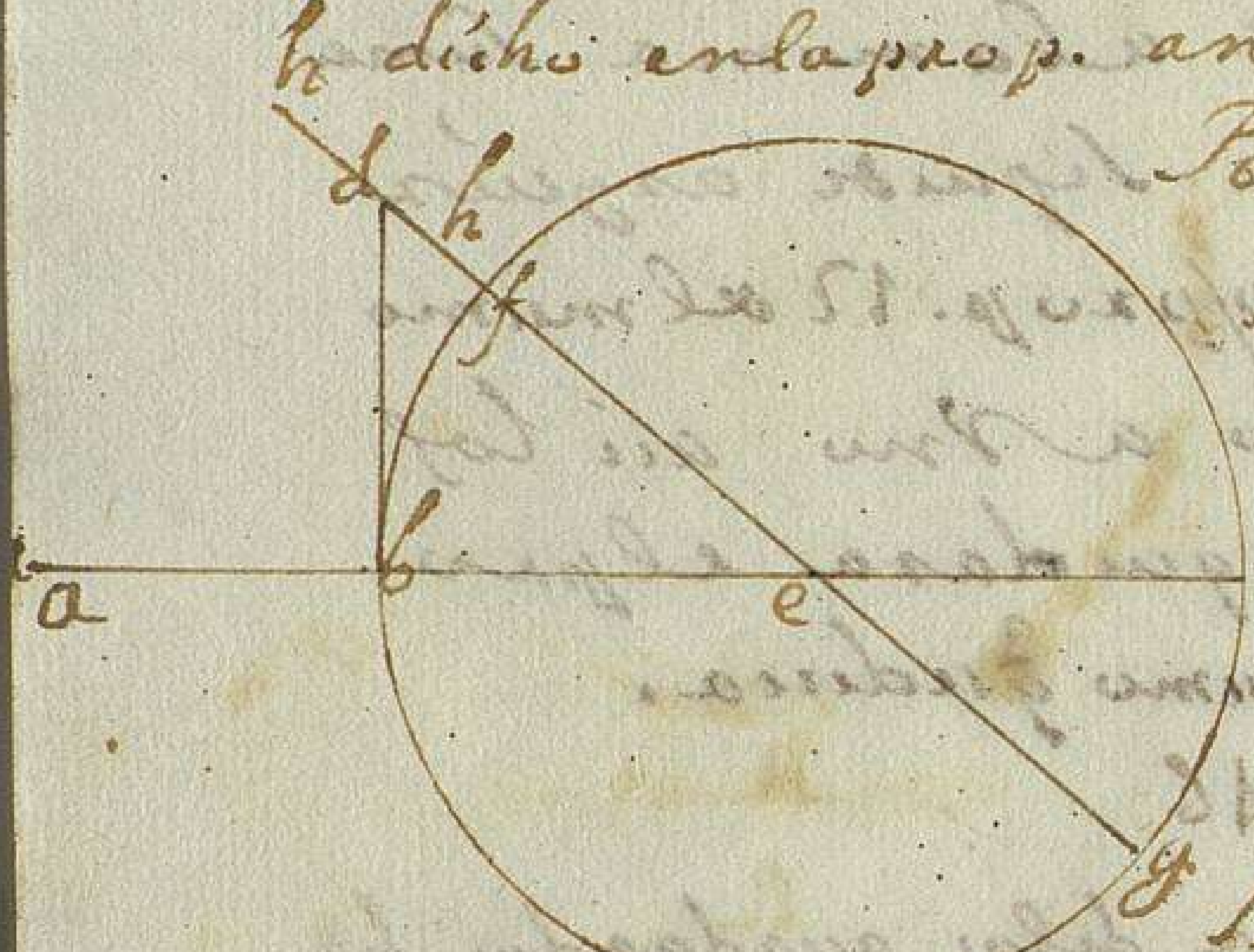
supongase la incognita $Z \sqcap \overset{4}{c}x + x$

y supongase el menor . . $p \sqcap \overset{2}{c}x$

luego elebando los seran $pZ \sqcap \overset{6}{c}x^2 + \overset{2}{c}x^2$

(Prop. 4a lib. 2o eu.) lo son $Z^2 \sqcap \overset{8}{c}x^2 + 2\overset{4}{c}x^2 + x^2$

 yqualacion delabiualta Z^2 $\frown$ $\overset{8}{c}{}^{2}x + 2\overset{4}{c}{}^{2}x + x^2$
ytambien soniguales p^2 $\frown$ $\overset{4}{c}x^2$
luego (ax. 3º eV) lo son $Z^2 - p^2$ $\frown$ $\overset{8}{c}{}^{2}x + \overset{4}{c}{}^{2}x + x^2$
luego propor. comoiepropone $pZ \,.\, .Z^2 - p^2 \,.\, .\, p \,.\, .\, q$
luego (prop. 16. lib. 6º eV) qpZ $\frown$ $pZ^2 - p^3$
y depremiendo soniguales qZ $\frown$ $Z^2 - R^2$
luego (ax. 2º y 3º eV) loson p^2 $\frown$ $Z^2 - qZ$
luego (prop. 14. lib. 6º eV) $.\, .\, p \,.\, Z \,.\, .Z - q \,.\, .\, p$
luego Vuelta, Pues seVeduce ahallar dos Vectas
Z y $Z - q$ (cuia difª es q) Vecíprocas ala Vecta
dada p. yalladas seprocedera como queda
dicho enlaprop. anterior.



Porgeometria
Seadada laVazon $ab \,.\, .bc$
Pónganse enangulos Vectos
de suerte que ab $\frown$ bd
ysobre bc sedescriva el
circulo, y poniendo
setire la Vecta dg quese
cortara enla periferie enlos puntos, f, g:
Digo, que lasuma dg, es lasuma delas extremas
delos cinco continuos delos quales la
Vecta ab eslamedia. laVazon es clara
Porque elquadrado delamitad dela
bc estoes elquadrado beb junto conel
quadrado aba, o sus igual bdb son iguales
estoes (prop. 47. lib. 1º eV) $beb + bdb$ $\frown$ ded
acuio lado de añadiendole be, o su igual
eg componen toda lasuma dg suma delas

extremas delas cinco continuas.

Si se digere que la recta dg no es suma delas extremas lo sera otra, maior, o menor, como gh: luego por quanto bc = fg
sera (prop. 7. lib. 5° eV) ab . . bc . . ab . . fg
luego (prop. 1. lib. 6° eV) ab . . fg . . ab:hg . . hgf
estos (prop. 11. lib. 5° eV. ab . . bc . . ab:hg . . hgf
Pero por suposicion como ab . . bc asi es la suma delos quadrados dela quarta y segunda ala suma delos quadrados dela 5ª 3ª y 1ª; luego el rectangulo hgf es igual ala suma delos tres quadrados estos alos delos extremos y el dela media. Pero el quadrado dela suma delos extremos (prop. 4. lib. 2° eV) es igual a alos quadrados delos extremos y mas el duplo quadrado dela media; y es (prop. 2. lib. 2° eV) el quadrado dela gh, estos ghg = hgf + ghf
luego tambien son iguales hgf + aba = hgf + ghf
estos seran iguales estos hgf + bdb = hgf + ghf
luego (ax. 3°) lo seran iguales bdb = ghf
Pero (prop. 36. lib. 3° eV) lo son bdb = gdf
luego (ax. 1° eV) lo son iguales ghf = gdf
el todo igual ala parte o la parte igual al todo (contra el axioma 7 eV) lo que no puede ser luego tampoco puede ser, maior, ni menor, que la recta dg, la suma delas extremas que es lo que se avia de demonstrar.

Por otro modo

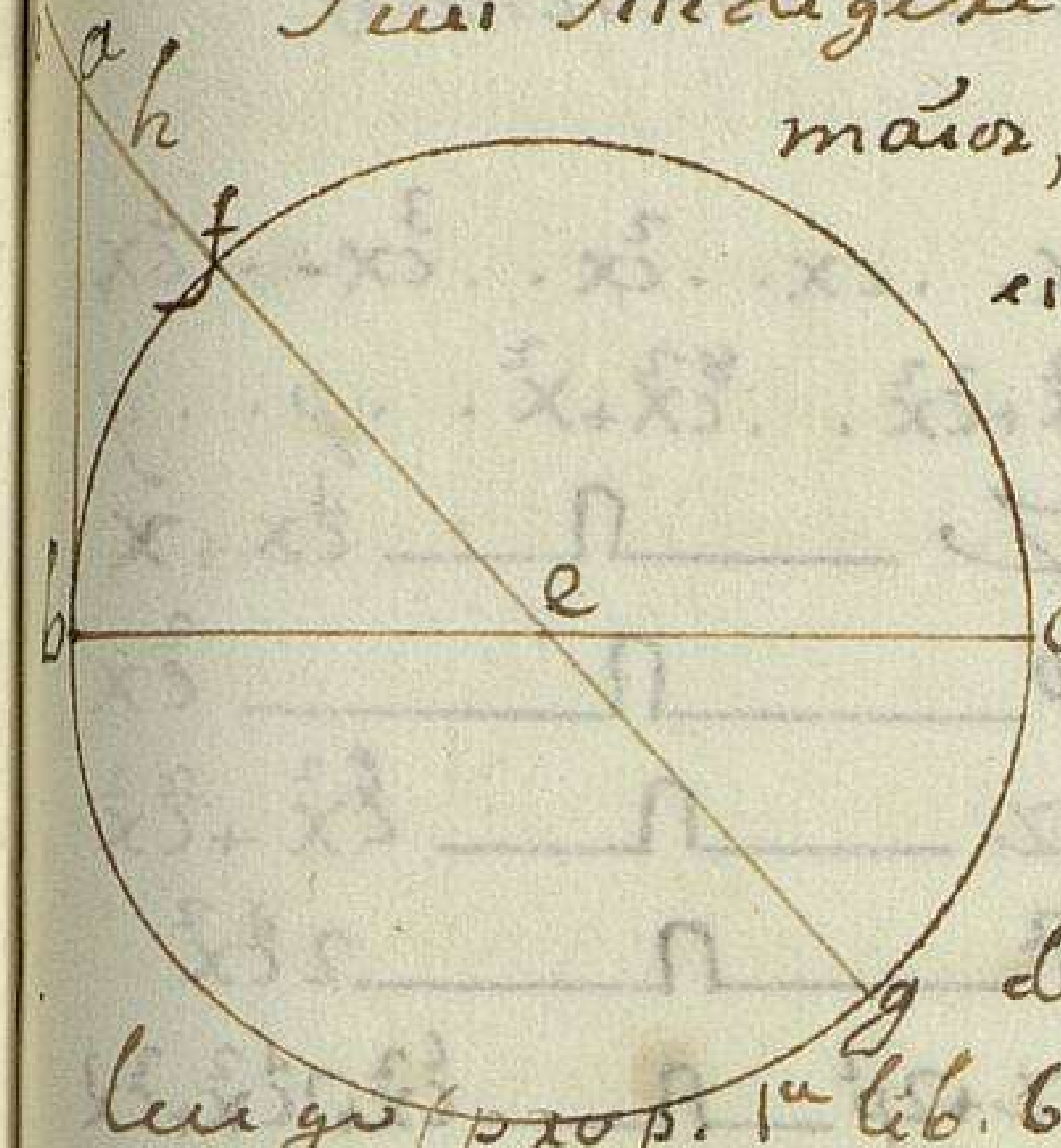
D Analisis

Digo que son las siguientes $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$
sean como se proponen $c^6x^2+c^2x^2 \,..\, c^8x^2+c^4x^2+x^2 \,..\, p \,..\, q$
supongase la incognita $z \sqcap c^2x$
y supongase el menor termino $p \sqcap c^4x+x$
luego elevando lo seran $pz \sqcap c^6x^2+c^2x^2$
pero (prop. 4. lib. 2º eu.) $p^2 \sqcap c^8x^2+2c^4x^2+x^2$
como tambien lo son $z^2 \sqcap c^4x^2$
luego (ax. 3º eu.) lo son $p^2-z^2 \sqcap c^8x^2+c^4x^2+x^2$
luego como se propone, propor.ᶜ $pz \,..\, p^2-z^2 \,..\, p \,..\, q$
luego (prop. 16. lib. 6º eu.) $qpz \sqcap p^3-pz^2$
y deprimiendo por p, $qz \sqcap p^2-z^2$
luego (ax. 2º eu.) lo seran $qz+z^2 \sqcap p^2$
y (prop. 14. lib. 6º eu.) propor.ᶜ $p \,..\, z \,..\, q+z \,..\, p$
luego resuelto pues se reduce ha hallar dos rectas z y $q+z$ cuya difª q reciprocas a la recta dada p. las quales hallados se seguira el analisis desde el fin por los argumentos contrarios hasta hallar su principio.

Por geometria

Sea dada la razon $ab \,..\, bc$, pongase los lados rectos en el angulo recto b, y sobre bc se descrive el circulo y por su centro e se tire la secante ag, que se cortara por la periferia en los puntos f, g: Digo que el segmento af es el tercer termino de los cinco continuos y que el menor termino de la razon dada (por suposicion) ab, contiene en si la suma de los extre[mos] af

+



Pues si se dijese que no lo es la recta otra maior, o menor, como hf; Pero està demonstrado analitica mente, el rectangulo contenido de la media por la suma de las extremas, ser igual a la suma de los quadrados del 1º y 2º terminos

luego (prop. 1ª lib. 6º eu). ba:hf . . hfg . . ab . . bc

luego si el rectangulo ba:hf es igual al contenido del 1º y 2º termino esto es a la suma de sus quadrados: luego el rectangulo hfg. (prop. 9. lib 5º eu) sera igual a la suma de los quadrados del 5º 3º y 1º terminos; Pero (prop. 3ª lib. 2º eu)

se igualan los rectangulos hfg+hfh $\sqcap$ ghf

Pero por suposicion ab, es la suma de los extremos

luego (prop. 4ª lib. 2º eu) lo seran hfg+hfh $\sqcap$ aba

pero (prop. 36. lib. 3º eu) lo son gaf $\sqcap$ aba

luego (ax. 1º eu) son iguales . hfg+hfh $\sqcap$ gaf

pero està demonstrado arriba hfg+hfh $\sqcap$ ghf

luego (ax. 1º eu) lo seran ghf $\sqcap$ gaf

la parte igual al todo, lo que no puede ser (ax 9 eu) luego la recta que pertenece al tercer termino de los cinco continuos no puede ser otra maior, ni menor, que la recta af, que es lo que se avia de demonstrar.

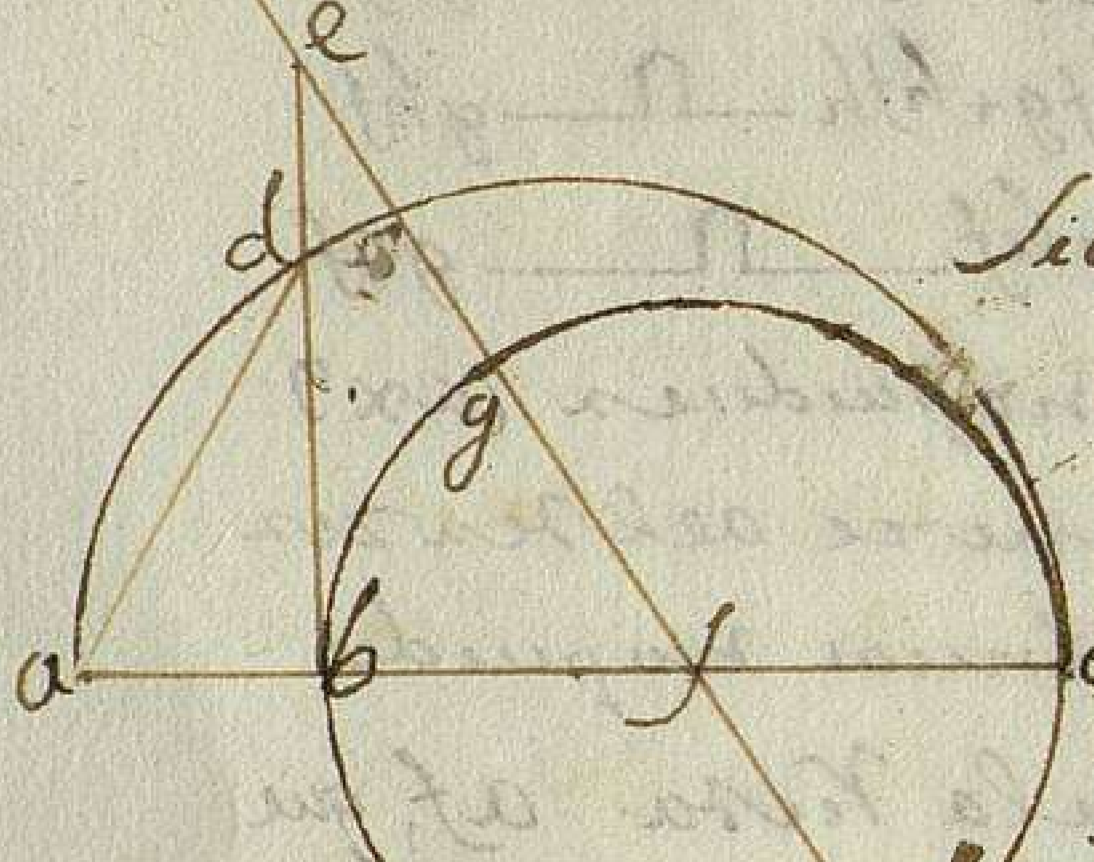
prop. 17

Dada la razon del quadrado de la suma del 1º y 2º terminos, a la suma de los quadrados de los numeros mostrar los cinco continuos

Analisis

Digo q̃ son los siguientes, x . . cx . . c^2x . . c^3x . . c^4x
sean como se propone $c^6x^2+2c^4x^2+c^2x^2$ . . $c^8x^2+x^2$ . . p . . g
supongase la incognita $z \sqcap c^4x+x$
y supongase el minor termº, $p \sqcap c^2x$
luego elevando lo seran $pz \sqcap c^6x^2+c^2x^2$
y tambien son iguales $2p^2 \sqcap 2c^4x^2$
luego (ax. 2º eV) lo seran $pz+2p^2 \sqcap c^6x^2+2c^4x^2+c^2x^2$
y (prop. 4ª lib. 2º eV) lo son $z^2 \sqcap c^8x^2+2c^4x^2+x^2$
luego (ax. 3º eV) lo seran $z^2-2p^2 \sqcap c^8x^2+x^2$
luego como se propone, propor.s $pz+2p^2$ . . z^2-2p^2 . . p . . g
luego (prop. 16. lib. 6º eV) $gpz+2gp^2 \sqcap pz^2-2p^3$
luego (ax. 2º y 3º eV) lo son $2gp^2+2p^3 \sqcap pz^2-gpz$
y deprimiendo son iguales $2gp+2p^2 \sqcap z^2-gz$
luego (prop. 14. lib. 6º eV) . . $2g+2p$ . . z . . $z-g$ . . p
luego Vuelvo, hallar dos Rectas cuia difª es g, mayor termino de la Razon dada Reciprocas a las dos Rectas dadas 2ª q̃ es lo q̃ se habia de demostrar.

Por geometria



Sea dada la Razon ab . . bc, y sobre toda la Recta ac, se describa el semicirculo, y (prop. 11. lib. 1º eV) se elevante la perpendicular, bd, y se tire la Recta ad, y (prop. 13 lib. 6º eV) sean $2ad$ . . be . . eb . . da
luego (prop. 17. lib. 6º eV) iguales $2ada \sqcap beb$
sobre bc se describa el circulo, y por su centro f se tire la secante eh, que sera dividida

por la periferie en los puntos g, h,
Digo, que la recta eh es la suma de las extremas
y que en el menor termino ab de la razon dada
y nime el termino tercero de los cinco contin^s,
cuya demonstracion se clara observando las
partes analíticas, (Prop. 8. lib. 6° eV) $ada \sqcap cab$
y (prop. 15. lib. 5° eV) lo son . . . $2ada \sqcap 2cab$
estos (ax. 1° eV) lo son tambien $beb \sqcap 2cab$
estos (prop. 3ª lib. 2° eV) lo son . . $beb \sqcap 2abc+2bab$
estos (prop. 36. lib. 3° eV) lo son $heg \sqcap 2abc+2bab$
y (prop. 16. lib. 6° eV) proporc^s, $2bc+2ab$ . . he . . eg . . ab
estos son proporcionales . . 2ca . . he . . eg . . ab
Pero estas analogías corresponden a las analí-
ticas: luego, esta demonstrado porque los recipro-
cos he, eg se diferencian en el diametro gh
ygual al diametro bc termino maior de la
razon dada por lo que se afirma ser suma
de las extremas la recta eh, y no [illegible]a.

Por otro modo

Analisis

Digo, q son los siguientes, x . . cx . . c^2x . . c^3x . . c^4x
sean como se propone, $c^6x^2+2c^4x^2+c^2x^2$ . . $c^8x^2+x^2$ . . p . . q
supongase la incognita $z \sqcap c^4x+x$
y supongase el maior termino $q \sqcap c^2x$
luego elebando lo seran $qz \sqcap c^6x^2 + c^2x^2$
y tambien lo son iguales $2q^2 \sqcap 2c^4x^2$
luego (ax. 2° eV) lo son $qz+2q^2 \sqcap c^6x^2+2c^4x^2+c^2x^2$
y tambien lo son iguales $z^2-2q^2 \sqcap c^8x^2+x^2$
y como se propone propor^l $qz+2q^2$ . . z^2-2q^2 . . p . . q

luego (prop. 16 lib. 6.° eu.) lo son $q^2z+2q^3 \sqcap pz^2-2pq^2$

luego (ax. 2.° y 3.° eu.) lo son $2pq^2+2q^3 \sqcap pz^2-q^2z$

y deprimiendo quedan iguales $2q^2+\frac{2q^3}{p} \sqcap z^2-\frac{q^2z}{p}$

luego (prop. 14 lib. 6.° eu.) propor. $2q+\frac{2q^2}{p} \,..\, z \,..\, z-\frac{q^2}{p} \,..\, q$

luego vuelto, hallar dos rectas cuia difª es conocida reciprocas a las dos conocidas.

Por geometria

Sea dada la razon ab . . bc y (prop. 12 lib. 6.° eu.) se hagan propor. ab . . 2ac . . bcb . . cdc

y tambien ab . . bc . . bc . . ce

y sobre ce, se describa el círculo, y (prop. 11 lib. 1.° eu.) se ponga cd perpendicular sobre ce en el punto c, y tirese por el centro f la secante dh, quedará cortada por la periferie en los puntos g, h:

Digo, que la linea dh, es la suma de las extremas y que en el [illegible] termino bc de la razon da el igual es el maior, es el tercer termino de los cinco continuos que se buscan; la demonstracion es tan clara si se observan las partes analiticas porque siendo propor. ab . . 2ac . . bcb . . cdc

luego (prop. 16 lib. 6.° eu.) $2ac{:}bcb \sqcap ab{:}cdc$

y deprimiendo quedan $\frac{2ac{:}bcb}{ab} \sqcap cdc$

y porq. son proporcionales ab . . bc . . bc . . ce

luego tambien lo son iguales $\frac{bcb}{ab} \sqcap ce$

y elevando (prop. 15 lib. 5 eu.) lo seran, $2ac{:}bcb \sqcap 2ace$

luego (ax. 1.° eu.) lo seran iguales $\frac{2ace}{ab} \sqcap cdc$

y (prop. 14 lib. 6.° eu.) propor. 2ac . . cd . . dc . . ce

estos (prop. 36. lib. 3º eV) son iguales, 2ace ⊓ hdg
luego (prop. 14. lib. 6º eV) propor.s 2ac . . hd . . dg . . ce
Por lo que se ve que todas partes analíticas corres-
ponden a todas las partes geométricas.

Asimismo porque son propor.s ab . . 2ac . . bcb . . cde
y también porque lo son ab . . bc . . bc . . ce
luego (prop. 12. lib. 5º eV) ab . . bc . . ac . . be
y (prop. 15. lib. 5º eV) lo son ab . . bc . . 2ac . . 2be
y por la misma lo son . . ab . . bcb . . 2ac . . 2ebc
luego prop. 11. lib. 5º eV) bc . . 2be . . bcb . . 2ebc
o también (prop. 3ª lib. 2º eV) bc . . 2be . . bcb . . 2bcb+2bce
estos (por la 11 del 5º eV) ab . . 2ac . . bcb . . 2bcb+2bce
estos por la misma lo son bcb . . cde . . bcb . . 2bcb+2bce
luego (prop. 14. lib. 5º eV) son ig.s cde ⊓ 2bcb+2bce
Pero (prop. 36. lib. 3º eV) lo son cde ⊓ hdg
luego (ax. 1º eV) lo son iguales, hdg ⊓ 2bcb+2bce
estos (prop. 3ª lib. 2º eV) lo son . . hdg ⊓ 2ebc
y proporcionales (prop. 14. lib. 6º eV) bc . . dg . . hd . . 2eb
y también según lo demostrado bc . . ce . . 2ac . . 2eb
luego por la prop. anterior presente, o por lo demos-
trado anteriormente así en lo analítico como
como en lo geométrico en diferentes conclusio-
nes se ve que la recta dh es la suma de las
extremas que es lo que se deseaba saber.

Prop. 48

Dada la razon del quadrado de la suma del
quarto y segundo termino a la suma de los
quadrados del quinto tercero, y primero
mostrar los cinco continuos proporcionales.

+

Analisi

Digo que son los siguientes $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$

Sean como se proponen $c^6x^2+2c^4x^2+c^2x^2 \,..\, c^8x^2+c^4x^2+x^2 \,..\, p \,..\, q$

Supongase la incognita $Z = c^4x + x$

y supongase asimismo $p = c^2x$

luego elebando los son $pZ = c^6x^2 + c^2x^2$

luego (ax. 2° ed) los son $pZ+2p^2 = c^6x^2+2c^4x^2+c^2x^2$

y también los son . . . $Z^2-p^2 = c^8x^2+c^4x^2+x^2$

luego como se propone $pZ+2p^2 \,..\, Z^2-p^2 \,..\, p \,..\, q$

luego (prop. 16. lib. 6° ed) $qpZ+2qp^2 = pZ^2-p^3$

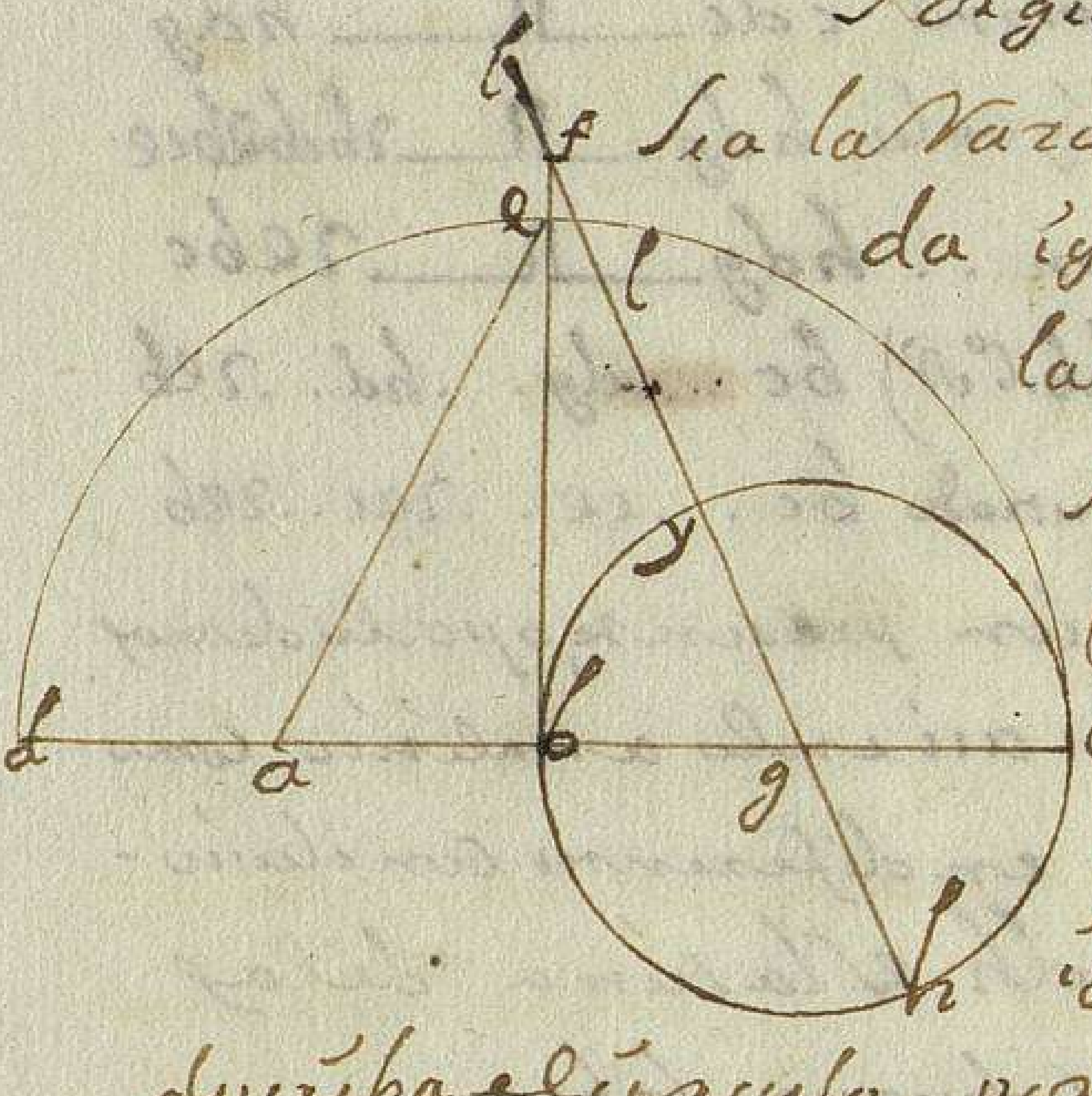
y deprimiendo quedan $qZ+2qp = Z^2-p^2$

luego (ax. 2° y 3° ed) los son $2qp+p^2 = Z^2-qZ$

luego (prop. 14. lib. 6° ed) $p \,..\, Z \,..\, Z-q \,..\, 2q+p$

luego resuelto como las anteriores

Por geometria



Sea la razon dada $ab \,..\, bc$, agase da igual a la ab. y sobre toda la recta dc se describa el semicirculo, y lebantese (prop. 11. lib. 1° ed) la perpendicular be, y tirese la recta ae, a la qual se haga igual bf, y sobre bc, se describa el circulo, por cuio centro g; se tire la secante fh, la qual quedara dibidida por la periferia en los puntos y, h.

Digo que la linea fh, es suma de las extremas y el menor termino de la razon dada, ab es el tercer termino de los cinco continuos

la demonstracion sera clara, observando
las partes analiticas, pues por construccion
db es dupla dela ab: luego, 2abc ⊓ dbc
esto es (prop. 8 coro. lib. 6° eu) 2abc ⊓ beb
y añadiendo el quadrado aba ⊓ aba
quedaran (ax. 2° eu). 2abc+aba ⊓ beb+aba
esto es (prop. 47. lib. 1° eu) 2abc+aba ⊓ aea
esto es (coro. prop. 46. lib. 1° eu) 2abc+aba ⊓ bfb
y añadiendo el quadrado bgb ⊓ bgb
q.dan (ax. 2° y 47 lib. 1° eu) 2abc+aba+bgb ⊓ fgf
luego si ala recta fg, lado del quadrado fgf
sele añade bc, ó su igual gh, sera toda la recta
fh: Pero queda demonstrado 2abc+aba ⊓ bfb
luego (prop. 36. lib. 3° eu) 2abc+aba ⊓ hfy
luego tambien lo son . . hfy+gby ⊓ fgf
luego dela misma suerte si al el lado del quadra-
do sele añade la recta gh sera la suma fh.
la qual es suma delas extremas.

Y si se dixese que no lo es la recta otra mayor,
ó menor como la recta lh: luego el rectang.°
contenido dela media ab, y dela lh suma
delas extremas sera igual ala suma delos quadra
dos dela 4ª y 2ª como sobre 3ª igualacion analitica
Pero (prop. 9. lib. 5° eu) son ab. . bc. . ab. . yh
luego (prop. 1. lib. 6° eu) ab. . yh. . ab:lh. . lhy
y tambien lo son . . . . ab. . bc. . aba. . abc
y (prop. 15. lib. 5 eu) lo son ab. . bc. 2aba. . 2abc
esto es son proporcionales ab. . bc. 2aba. . dbc
esto es (coro. prop. 8. lib. 6° eu) ab: . bc. 2aba. . beb

+

176 luego (prop. 11. lib. 5 eV) ab : lh . . lhy . . 2aba . . beb
luego (prop. 12. lib. 5. eV) ab : lh + 2aba . . lhy + beb . . ab . . bc
Pero ab : lh + 2aba, como consta dela quarta
igualacion analitica es igual al quadrado
dela suma del 4º y 2º termino: luego (prop. 7. lib.
5º eV) lhy + beb será igual ala suma delos qdos
del 5º 3º y 1º terminos Respecto de que son
proporcionales ab : lh + 2aba . . lhy + beb . . ab . . bc:
Pero el quadrado bfb (o de s. igual ala
Prop. 47. lib. 1º eV) esto es . . bfb ⊓ beb + aba
luego, si el rectangulo lhy + beb se iguala a los
tres quadrados juntos del 5º 3º y 1º, y el quadrado
bfb se iguala, a los dos quadrados juntos, beb + aba
luego tambien se igualaran lhy + bfb al quadra
do de la suma de las estremas esto es (prop. 4ª lib. 2º eV)
a los quadrados de las estremas mas el duplo quadrado
de la media (ab) seran iguales lhy + bfb ⊓ hlh
pero (prop. 2ª lib. 2º eV) lo son lhy + hly ⊓ hlh
luego (ax. 1º eV) lo son lhy + bfb ⊓ lhy + hly
luego (ax. 3º eV) lo seran bfb ⊓ hly
pero (prop. 36. lib. 3º eV) lo son bfb ⊓ hfy
luego (ax. 1º eV) lo son hfy ⊓ hyl
la parte igual al todo no puede ser (ax. 9. eV)
luego la suma de las estremas no puede ser, ma-
yor, ni menor, que la recta fh todo lo qual queda
demonstrado en la comparacion (anterior) de los
planos como en la presente, argumentacion
de proporcionales y conclusion de planos iguales
que es lo que se habia de demonstrar.

Otra Resolucion

Analisis

Digo que son los siguientes $x \;..\; cx \;..\; c^2x \;..\; c^3x \;..\; c^4x$

sean como se propone $c^6x^2+2c^4x^2+c^2x^2 \;..\; c^8x^2+c^4x^2+x^2 \;..\; p \;..\; g$

supongase el termº. maior $g \sqcap c^2x$

y supongase la incognita $Z \sqcap c^4x+x$

luego el producto $gZ \sqcap c^6x+c^2x^2$

luego (ax. 2º eu.) $gZ+2g^2 \sqcap c^6x^2+2c^4x^2+c^2x^2$

y por la misma $Z^2-g^2 \sqcap c^8x^2+c^4x^2+x^2$

y como se propone $gZ+2g^2 \;..\; Z^2-g^2 \;..\; p \;..\; g$

luego (prop. 16. lib. 6º eu.) $g^2Z+2g^3 \sqcap pZ^2-pg^2$

luego ax. 2º y 3º eu. $2g^3+pg^2 \sqcap pZ^2-g^2Z$

y deprimiendo $\frac{2g^3}{p}+g^2 \sqcap Z^2-\frac{g^2Z}{p}$

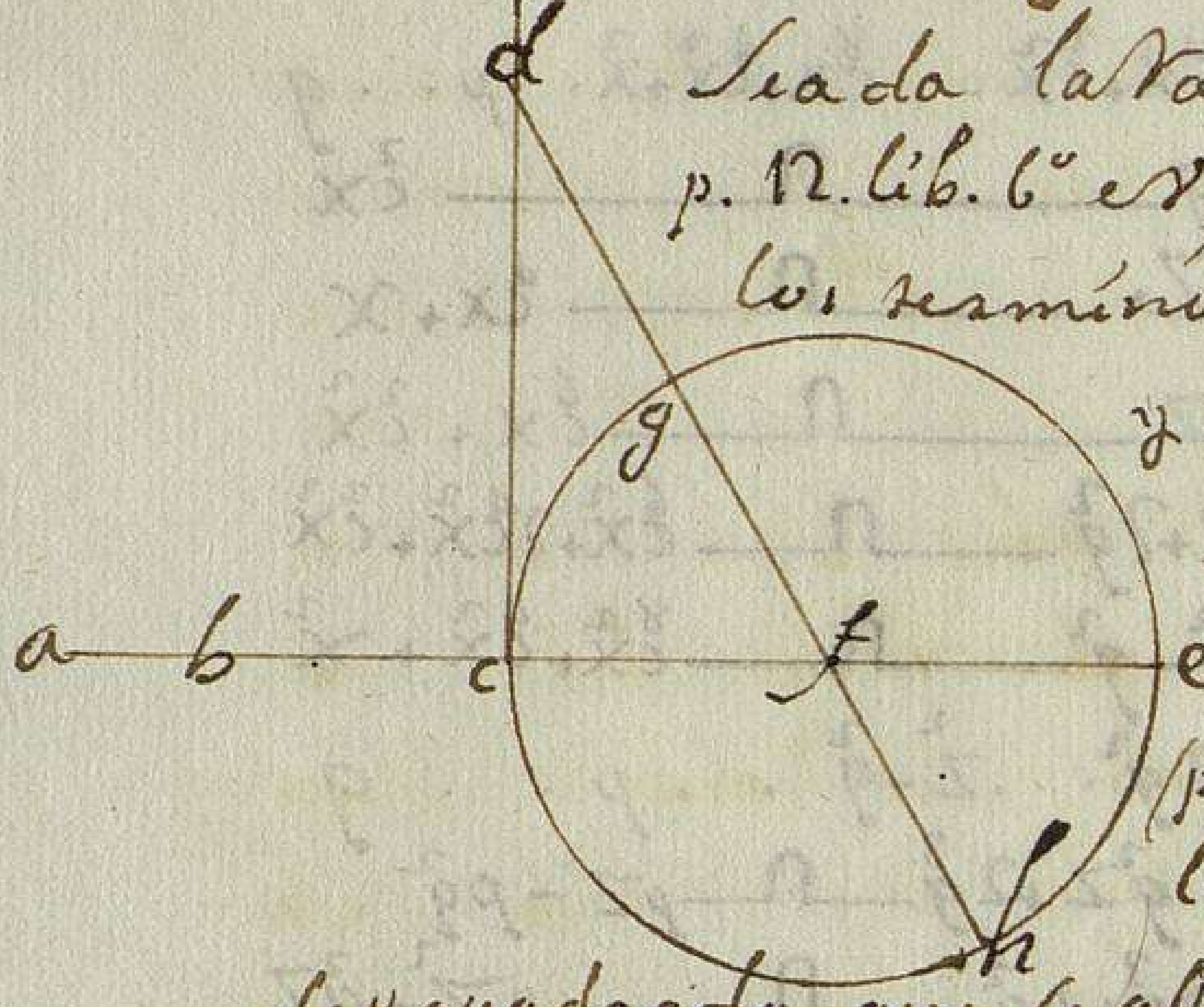
luego (prop. 14. lib. 6º eu.) $g \;..\; Z-\frac{g^2}{p} \;..\; Z \;..\; \frac{2g^2}{p}+g$

luego vuelvo como antes pues se reduce ha hallar las dos rectas $Z-\frac{g^2}{p} \;..\; Z$ cuia difª $\frac{g^2}{p}$ reciprocas a las dos rectas dadas g, y $\frac{2g^2}{p}+g$.

Aunque la determinacion en los numeros queda explicada en diferentes partes la repetire aquí. el duplo cubo del valor de la letra, g, se divida por el valor de la letra, p, a cuio cociente se le añada el quadrº. del valor de la misma letra g, cuia suma se guarde. y despues se partira el mismo quadraº, de la letra, g, por el valor de la letra p, y su medio cociente se quadrara al qual se le añada la suma que se guardo, y de esta segunda suma se le sacara la raiz quadra, y a esta raiz se le añadira el medio cociente que se quadro, y tambien se resta, cuia suma o resta sera el valor de Z, y

Vltimamente, se executara todo lo que se denota por la ultima igualacion.

Por geometria



Sea dada la razon ab..bc. y (por p. 12. lib. 6º e.V.) se hagan proporcionales los terminos ab..ac+bc..bcb..cdc y ab..bc..bc..ce y sobre la recta ce, se describa el circulo y (prop. 11. lib. 1º) se levante la perpendicular cd lado del quadrado que se allò en la primera analogia y por el centro del circulo f, se tire la recta dh que quedara dividida por la periferia en, g, h

Digo que la linea dh es la suma de las extremas. La demonstracion es clara si se observan las operaciones analiticas, Pues aviendose hecho proporcionales ab..ac+bc..bcb..cdc esto es son propor.s ab..ab+2bc..bcb..cdc luego (prop. 16. lib. 6º e.V.) son 2bcbc+ab:bcb Ω ab:cdc esta igualacion corresponde a la setima igualacion analitica anterior: luego, dividiendo por ab, seran los cocientes $\frac{2bcbc+bcb}{ab}$ Ω cdc que tambien corresponde a la ultima ygualacion analitica anterior. Y porque se hicieron proporcionales los siguientes, ab..bc..bc..ce luego (prop. 17. lib. 6º e V) seran bcb Ω ab:ce Por lo qual tambien lo son $\frac{bcb}{ab}$ Ω ce y sus mitades los son iguales $\frac{bcb}{2ab}$ Ω cf

cuio quadrado cfc sumado con el quadrado cdc,
será dha suma (prop. 47. lib. 1° eV) cfc+cdc Ω dfd
a cuia raiz df si se le añade cf, ô su igual fh será
toda la suma dh y así digo que la dh ‖ la suma
de las extremas, y que el tercer termino de los con
tinuos ‖ el maior termino bc de la razon
dada ab . . bc.

Y porquanto son ab . . bc . . cb . . ce
y tambien lo son . . ab . . ac+bc . . bcb . . cdc
y (prop. 12. lib. 5° eV) uno, a otro ab . . bc . . ac+bc . . be+ce
luego (prop. 11. lib. 5° eV) bc . . be+ce . . bcb . . cdc =
pero (prop. 1a lib. 6° eV) bc . . be+ce . . bcb . . ebc+bce =
luego (prop. 11. lib. 5°) bcb . . cdc . . bcb . . ebc+bce
luego (prop. 14. lib. 5° eV) son cdc Ω ebc+bce
esto es (prop. 3a. lib. 2° eV) son cdc Ω bcb+2bce
esto es (prop. 36. lib. 3° eV) lo son cdc Ω hdg
luego (ax. 1° eV) son iguales hdg Ω bcb+2bce
luego, el quadrado cdc, esto es el rectangulo
hdg si iguala al quadro del termino tercero
de los tres continuos mas el duplo rectangulo
contenido del mismo y de la recta ce por lo
qual, y la demonstracion del primer caso
la recta dh ‖ la suma de las extremas, que
es lo que se havia de demonstrar.

Apendix

De lo demonstrado consta, se puede poner Z
por el termino medio, y qual quier termino
de la razon dada, por la suma de los extremos.
Asimesmo se puede poner, Z por la suma

 de terminos impares, y qual quier termino dela razon dada, por la suma delos extremos ó por el medio. y tt. Se puede poner Z por la suma delos extremos o por el medio, y qual quier termino dela razon dada, se puede tomar o suponer por la suma de terminos, impares, Por lo qual se puede proceder de muchos modos en el analisis como en geometria.

De aqui se sigue el allar cinco continuos propor, dada qualquiera suma o difª delos quadrados dichos, y la razon, porque (prop. 17. lib. 5º e.V.) se puede arguir. y (prop. 12. lib. 5 e.V.) como vno a vno asi los agregados o difªs.

lo tercero, se sigue el allar los cinco, dada la razon delos quadrados juntos, mas el quadº del tercero, a la suma delos quadrados delos extremos, porque como vno a vno &ª. o como la misma suma delos quadrados de todos mas el quadrado del tercero, a la suma de estos dos quadrados, porque como vno, a vno, assi los agregados o difªs.

Digo lo quarto, se puede allar los cinco continuos proporcionales, dada la razon dela diferencia, del quadrado dela suma de dos terminos, y dela suma delos quadrados delos extremos, a ellos mismos, pues como vno, a vno asi los agregados.

asimismo se sigue de aqui el resolver el problema siguiente.

Problema

Dada la suma del 2º y 4º termino, y la suma delos quad.s delos extremos, allar los cinco

Analisis

Digo q̃ son los siguientes, $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$

Supongase la incognita $Z \sqcap c^2x$

y Supongase la conocida $p \sqcap c^3x+cx$

luego seran iguales $p^2-2Z^2 \sqcap c^6x+c^2x^2$

y deprimiendo q̃ dan $\underline{p^2-2Z^2} \sqcap c^4x+x$

luego (prop. 4. lib. 2º e.V.) q̃ dan $\frac{p^4-2p^2Z^2-Z^4}{Z^2} \sqcap c^8x^2+x^2$

Sea pues dada la suma, $q \sqcap c^8x^2+x^2$

luego (axi. 1º e.V.) lo son $q \sqcap \frac{p^4-2p^2Z^2-Z^4}{Z^2}$

y elebando quedan $qZ^2 \sqcap p^4-2p^2Z^2-Z^4$

luego (ax. 2º e.V.) quedan, $qZ^2+2p^2Z^2+Z^4 \sqcap p^4$

luego esta Resuelto como los demas.

Prop. 49

Dada la razon del quadrado del termino medio, ala suma delos quadrados delos otros quatro terminos, mostrar los cinco terminos continuos proporcionales

Analisis

Digo q̃ son los siguientes, $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$

como se propone, $c^4x^2 \,..\, c^8x^2+c^6x^2+c^2x^2+x^2 \,..\, p \,..\, q$

Supongase la incognita $Z \sqcap c^4x+x$

y Supongase la conocida $p \sqcap c^2x$

luego elevando. $pZ \sqcap c^6x+c^2x^2$

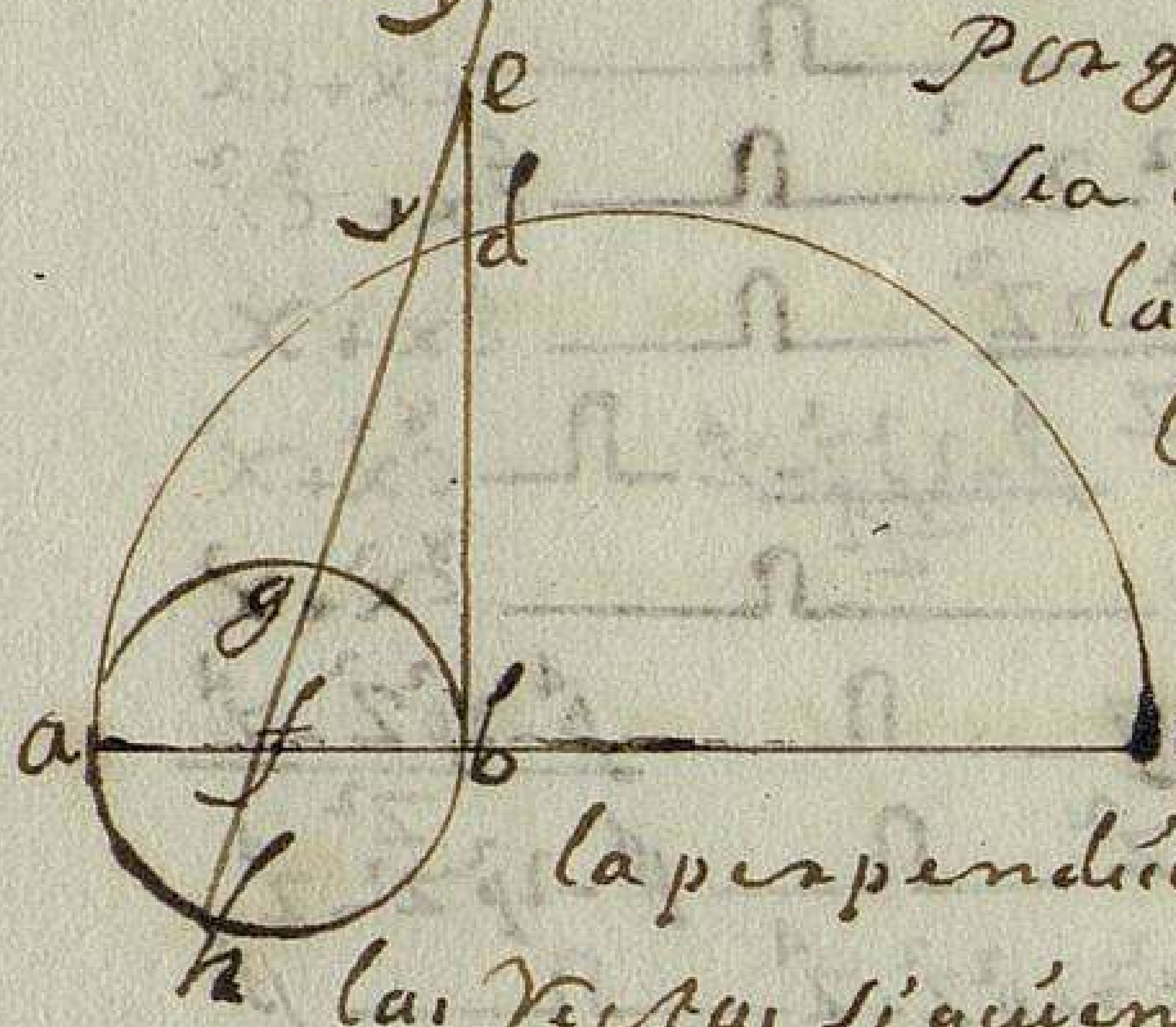
y tambien lo son $Z^2-2p^2 \sqcap c^8x^2+x^2$

luego (ax. 2º e.V.) $pZ+Z^2-2p^2 \sqcap c^8x^2+c^6x^2+c^2x^2+x^2$

como se propone. $p^2 \,..\, pZ+Z^2-2p^2 \,..\, p \,..\, q$

+

luego (prop. 18. lib. 5.° eu.) $p^2 \;.\;.\; pz+z^2 \;.\;.\; p \;.\;.\; 2p+g$
luego (prop. 16. lib. 6.° eu.) $p^2z+z^2p \;\Omega\; 2p^3+p^2g$
y deprimiendo quedan $pz+z^2 \;\Omega\; 2p^2+pg$
luego (prop. 14. lib. 6.° eu. $p \;.\;.\; z \;.\;.\; z+p \;.\;.\; 2p+g$
luego vuelta, allar dos rectas z, $z+p$ cuia
difa p, conocido reciprocas a las dadas . .



Por geometria

Sea dada la razon $ab \;.\;.\; bc$ las quales se pongan en vna linea ac, sobre la qual se duzirá el semicirculo y se lebante (prop. 11 lib. 1.° eu.) la perpendicular bd. y aganse propors las rectas siguientes $2ab \;.\;.\; be+bd \;.\;.\; be-bd \;.\;.\; ba$ estos queallen dos rectas $be+bd$, y $be-bd$ cuia difa, es $2bd$, reciprocas a las rectas $2ab$ y ab: luego alladas quedan, sera (prop. 16 lib. 6.° eu.) $2aba \;\Omega\; beb-bdb$, esto es (ax. 2.° eu.) $2aba+bdb \;\Omega\; beb$ y dividida ab en f se descriua el circulo y por el centro f, se tire la recta eh, que quedara dividida por la periferie en los puntos g, h:

Digo que la recta ge, es la suma de las extremas, la demonstracion esta clara si no observan las partes analiticas, Porque el Rectangulo contenido de los terminos de la razon dada esto es abc ó su igual (prop. 17. lib. 6.° eu.) bdb, con el duplo quadrado aba, esto es, $2aba+abc \;\Omega\; beb$

y esta igualacion corresponde ala ultima igualacion analitica: luego si al quadrado beb sele añade el quadrado dela mitad de ab, esto es (prop. 4ª lib. 1º eV), quedaran iguales . . beb + fbf ——⊓—— fef deciso lado fe quitando fb o su igual fg queda el residuo ge suma delas extremas.

Y si se dixere que la ge, no es la suma delas extremas los era otra maior, o menor, como gy: luego el rectangulo hyg contenido dela suma del prim tercero, y quinto, por la suma del primero, y quinto es igual al quadrado dela suma delos extremos, mas el rectangulo dela suma delos extremos por el tercero esto es (prop. 3ª lib. 2º eV) son iguales hyg ⊓ hyy + gyg (pero el rectangulo contenido dela suma delos extremos por el tercero termino, queda probado en la operacion analitica ser la suma delos quadrados delo segundo, y quarto.) y el quadrado gyg dela suma delos extremo (prop. 4. lib. 2º eV) es igual alos quadrados delos extremos mas el duplo quadrado del tercer termino: luego el rect. hyg es igual a alos quadrados de todos, y mas el quadrado del 3º termino. Pero (prop. 1ª lib. 6º eV) son proporcionales ab . . bc . . aba . . abc esto es (prop. 8ª lib. 6 eV) . . ab . . bc . . aba . . bcb pero por la suposicion como ab . . bc assi el quadrado del tercer termino esto es aba a la suma delos quadrados del 5º 4º 2º y 1º: luego el quadrado bcb (prop. 7 lib. 5º) se deve igualar ala suma delos quadrados del 5º, 4º, 2º y 1º

+

Pero por construcion son $2aba + bdb = beb$
luego el quadrado beb es igual ala suma
delos quadrados de todos cinco terminos y mas
el quadrado del tercero, y es asi que queda
demonstrado que el Rectangulo hyg es igual a
alos quadrados de todos, juntos, y mas el quadrado
del tercero, luego (ax. 1°) $hyg = beb$
Pero (prop. 36. lib. 3° eV) $heg = beb$
luego (ax. 1° eV) lo seran $hyg = heg$
la parte igual al todo, (contra el ax. 9)
no puede ser: luego la suma delas extremas
no puede ser, mayor, ni menor, que la ge, que
es lo que se debia de demonstrar.

Corolario

Si fueren cinco terminos continuos propor.s
el quadrado, dela suma delos extremos, el quadrado
(esto es) la suma delos quadrados de todos, juntos con
mas el quadrado del termino medio. la suma de
los quadrados delos extremos, junta con duplo quadrado
del 2°, mas el triplo del quadrado del 3°, mas el duplo
del quadrado del 4° terminos son continuos
proporcionales. Porque (prop. 36. lib. 3° eV) los
Planos Rectangulos son $heg = beb$
y (prop. 14. lib. 6° eV) propor.s $ge\,..\,eb\,..\,be\,..\,eh$
luego (prop. 22. lib. 6° eV) $geg\,..\,beb\,..\,beb\,..\,ehe$
queda demonstrado que, ge es suma delos extremos luego
geg es el quadrado dela suma delos extremos, y el qua
drado, beb se ha demonstrado igual ala suma delos
quadrados de todos, y el quadrado del tercero juntos.

y (prop. 2ª. lib. 2º eV) tambien son $ehe \sqcap hey + ehg$
y como (prop. 36. lib. 3º eV) loson $ehe \sqcap beb + ehg$
Pero el Rectangulo ehg, es igual ala suma delos
quadrados del 2º, 3º y 4º, y el quadrado beb, ala suma
delos quadrados del 1º, 2º, 3º 4º y 5º, y ademas repetido el
quadrado del 3º: luego el quadrado ehe es igual
ala suma delos quadrados del 1º y 5º y dos veces el quad.
del 2º, y tres quadrados del 3º y dos quadrados del
4º termino que es lo que se havia de demonstrar.

Por otro modo

Analisi

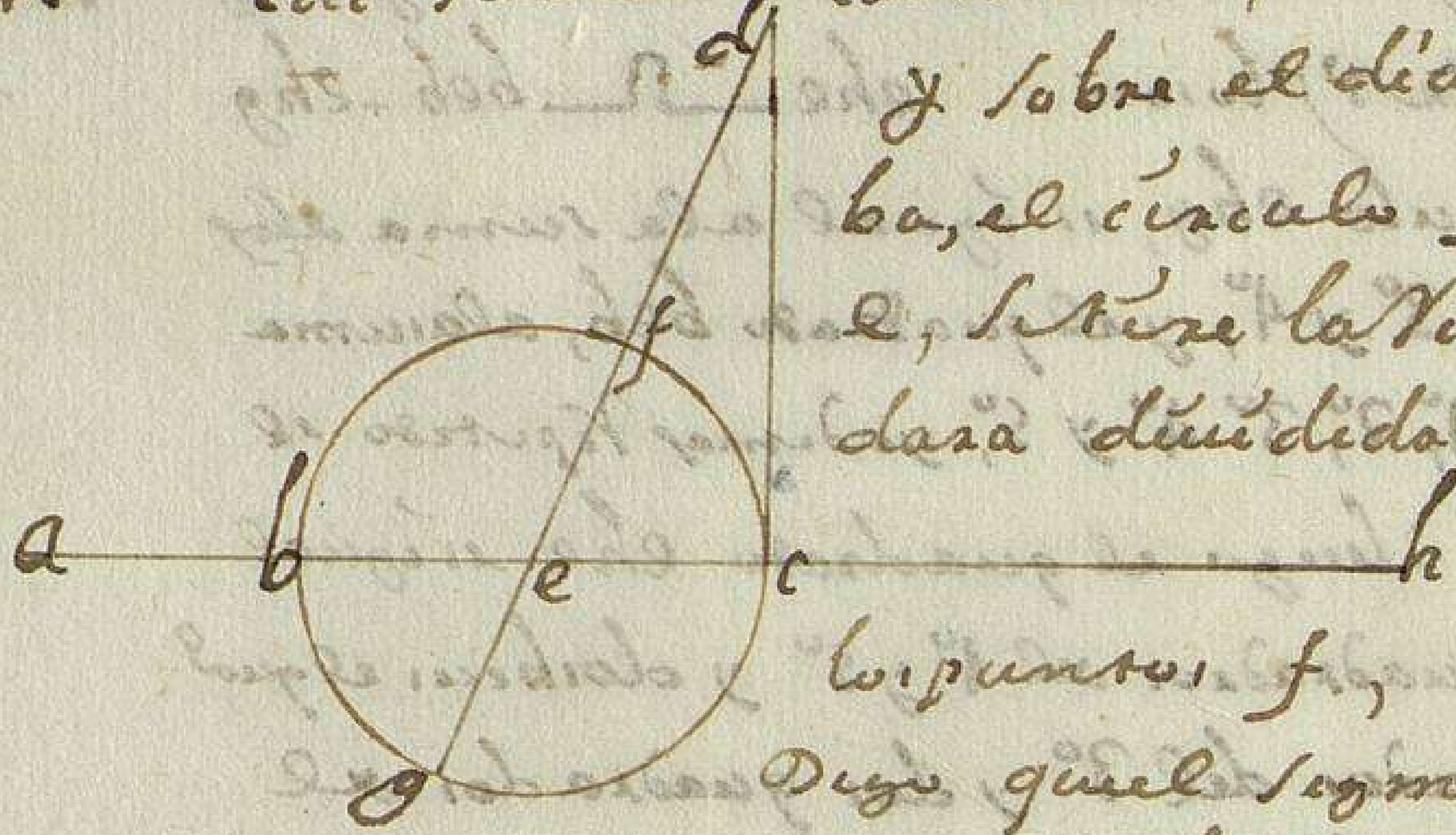
Digo q̃ son las siguientes, $x \,.\,.\, cx \,.\,.\, \overset{2}{c}x \,.\,.\, \overset{3}{c}x \,.\,.\, \overset{4}{c}x$
como se propone $\overset{4}{c}x \,.\,.\, \overset{8}{c}\overset{2}{x}+\overset{6}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{x} \,.\,.\, p \,.\,.$
supongase la incognita $z \sqcap \overset{4}{c}x + x$
y supongase el mayor termino, $q \sqcap \overset{2}{c}x$
luego elebando seran $qz \sqcap \overset{6}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{c}\overset{2}{x}$
y tambien loson $\overset{2}{z}-2\overset{2}{q} \sqcap \overset{8}{c}x+\overset{2}{x}$
luego (ax. 2º eV) loson $qz+\overset{2}{z}-2\overset{2}{q} \sqcap \overset{8}{c}\overset{2}{x}+\overset{6}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{x}$
luego como se propone, $\overset{2}{q} \,.\,.\, qz+\overset{2}{z}-2\overset{2}{q} \,.\,.\, p \,.\,.\, q$
luego (prop. 18. lib. 5º) $\overset{2}{q} \,.\,.\, qz+\overset{2}{z} \,.\,.\, p \,.\,.\, q+2p$
luego (prop. 16. lib. 6º eV) loson $\overset{3}{q}+2\overset{2}{q}p \sqcap qpz+p\overset{2}{z}$
luego deprimiendo, loson $\frac{\overset{3}{q}}{p}+2\overset{2}{q} \sqcap qz+\overset{2}{z}$
luego (prop. 14. lib. 6º eV) $q \,.\,.\, q+z \,.\,.\, z \,.\,.\, \frac{\overset{2}{q}}{p}+2q$
luego resulta como antes que es lo que se havia &ª.

Por geometria

Sea dada la razon $ab \,.\,.\, bc$ y (prop. 12. lib. 6º eV) hagan propor.s $ab \,.\,.\, ac+ab \,.\,.\, bb \,.\,.\, cd$
y (prop. 11. lib. 1º eV) sobre ac del punto c se
levante perpendicular la recta cd. lado del quad,

+

1486 cde sobre la recta ac, dividase bc por medio, y sobre el diametro bc se describa, el circulo y por su centro e, se tire la recta dge que quedara dividida por la periferia del circulo en los puntos f, g.



Digo que el segmento fd es la suma de las extremas. la demonstracion es clara si se observan las partes analiticas; Por que seran hecho propor' $ab \,..\, ac+ba \,..\, bcb \,..\therefore\, cde$ luego (prop. 16. lib. 6º eV) $ac:bcb+ab:bcb \;\Omega\; ab:cde$ y (prop. 1ª lib. 2º eV) lo son, $bcbc+ab:2bcb \;\Omega\; ab:cde$ esta, ygualacion es la misma que consta en la sexta igualacion analitica la qual es, la que se sigue y q da en la plana antes $q^3+2q^2p \;\Omega\; qpz+pz^2$ y dividiendo quedan $\frac{bcbc}{ab}+2bcb \;\Omega\; cde$ y de la misma forma ... $q^3+2q^2 \;\Omega\; qz+z^2$ luego las igualaciones geometricas son las mismas que las que quedan hechas analiticamente: luego (prop. 47. lib. 1º eV) seran $cdc+ece \;\Omega\; ded$ decimo lado, de, si se quita ec, ô su igual ef, queda el residuo fd, suma de las extremas; y el termino q, de la razon dada sera el tercer termino de los cinco continuos.

Y si se dixere que no lo es seran (prop. 12. lib. 6º eV) propor' $ab \,..\, bc \,..\, bc \,..\, ch$ luego (prop. 18. lib. 5º eV) $ab \,..\, ac+ab \,..\, bc \,..\, bh+bc$ pero tambien lo son $ab \,..\, ac+ab \,..\, bcb \,..\, cde$

luego (prop. 11. lib. 5º eV.) lo son, bc . . bh+bc . . bcb . . cdc
y (prop. 18. lib. 5º eV.) lo son bcb . . hbc+bcb . . bcb . . cdc
luego (prop. 14. lib. 5º eV.) son hbc+bcb Ω cdc
esto es (prop. 3ª lib. 2º eV.) lo son bch+2bcb Ω cdc
esta ultima igualacion corresponde ala ultima igualacion analitica enla primera Resolucion donde huba esta igualacion, $2p^2+pg$ Ω $pZ+Z^2$ enla qual sabe el duplo quadrado dela media junto conel rectangulo, pg, igual al $pZ+Z^2$ y lo mismo sabe enla igualacion dearriba porque bc es la media cuio duplo quadrado conel rectangulo bch es igual al quadrado cdc, Por lo qual no puede ser otra recta que la fd, suma delas extremas que es lo que se avia de demonstrar.

apendix

Pudiese poner Z por el termino medio y qualquier termino dela razon dada por suma delos extremos o por suma delos tres terminos medios o qualesquiera tres terminos. Pudiese poner Z por la suma de qualesquiera tres terminos, y qualquier termino dela razon dada se tomar por el tercer termino o por suma delos extremos. Pudiese poner Z por la suma delos extremos, y qualquier termino dela razon dada por la suma de qualesquiera tres terminos. Por lo qual se puede resolver de muchos modos assi analiticamte como en geometria.

De aquí consta de que modo se pueden allar cinco terminos continuos proporcionales dada qualesquiera suma o diferencia de las que quedan referidas con la razon del quadrado de la media a los quadºˢ de los demas.

Asimesmo se pueden allar, dada la razon de los quadrados de cada uno a los quadrados de la 1ª 2ª 4ª y 5ª cantidad o termino.

Declarase finalmente el poderse allar los cinco terminos continuos dada la razon del quadrado del termino medio a la difª en la qual el otro quadº excede a los quadrados de los demas porque componiendo, y por la combertida &c.

Prop. 50

Dada la razon del quadrado del termino medio a la difª que ai entre la suma de los quadrados de los extremos, y la suma de los quadrados del segundo, y quarto termino mostrar los cinco terminos continuos proporcionales.

Analisis

Digo que son los siguientes, $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$

se proponen propors, $c^4x^2 \,..\, c^8x^2+x^2-c^6x^2-c^2x^2 \,..\, p \,..\, g$

Supongase la incognita $Z \sqcap c^4x+x$

y supongase la conocida $p \sqcap c^2x$

luego elebando son $pZ \sqcap c^6x^2+c^2x^2$

y (prop. 4ª lib. 2º de E) son $Z^2 \sqcap c^8x^2+2c^4x^2+x^2$

luego (ax. 3º de E) son $Z^2-2p^2 \sqcap c^8x^2+x^2$

y por el mesmo son $Z^2-pZ-2p^2 \sqcap c^8x^2+x^2-c^6x^2-c^2x^2$

proporcionales $p^2 \,..\, Z^2-pZ-2p^2 \,..\, p \,..\, g$

+ 189

luego (prop. 18. lib. 5.º eV) seran $p^2 \;..\; z^2 - pz \;..\; p \;..\; q+2p$

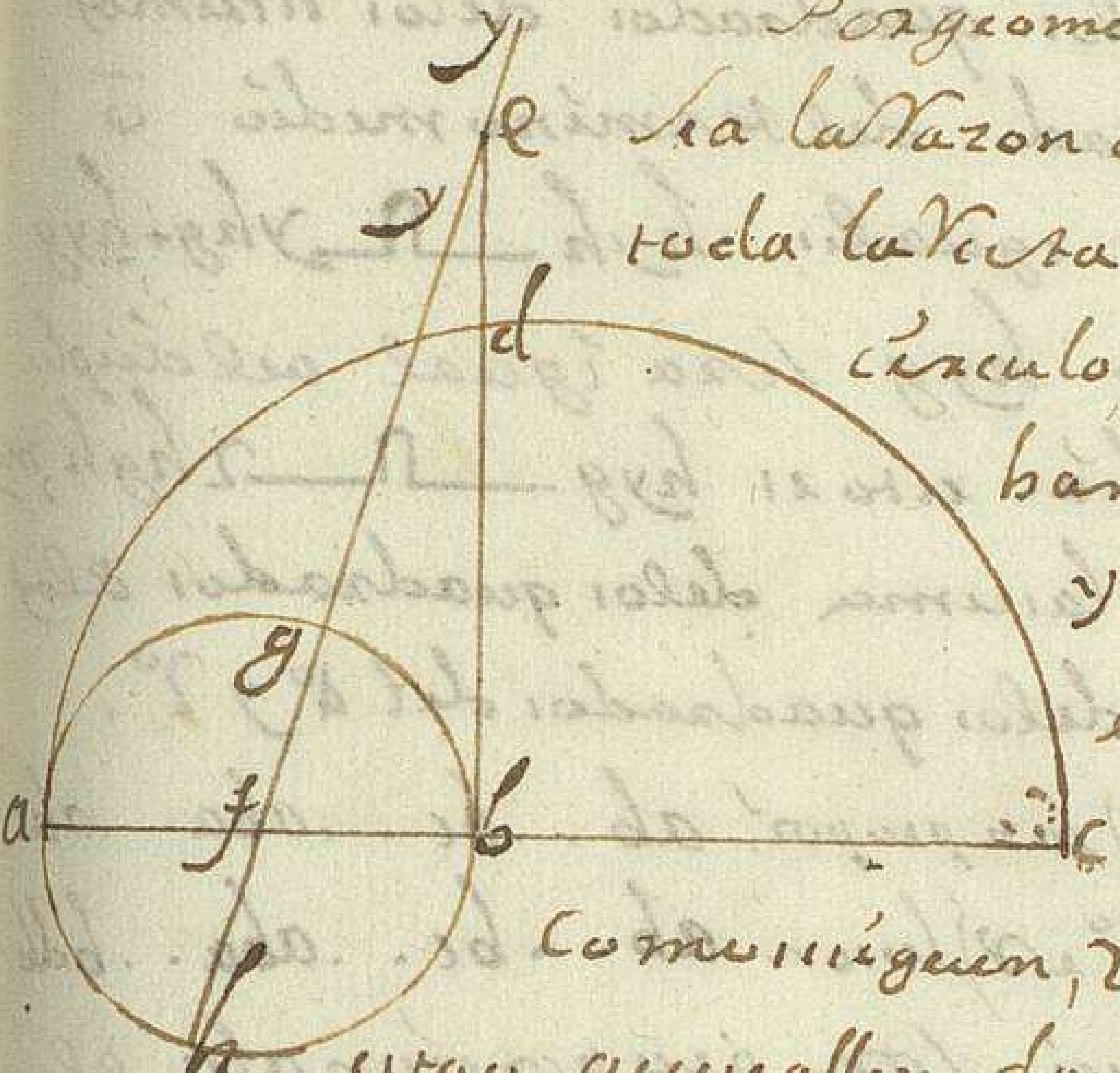
luego (prop. 16. lib. 6.º eV) seran $pz^2 - p^2z = p^2q + 2p^3$

y (prop. 15. lib. 5.º eV) deprimiendo $z^2 - pz = pq + 2p^2$

y (prop. 14. lib. 6.º eV) propor.ª $p \;..\; z \;..\; z - p \;..\; q+2p$

luego Vuelta, allar dos rectas cuia difª es conocida reciprocas a las dos rectas dadas.

Por geometria



Sea la razon dada $ab \;..\; bc$, y sobre toda la recta ac se describa el semicirculo, y (prop. 11. lib. 1.º eV) se levante la perpendicular bd y aganse (prop. 12. lib. 6.º eV) proporcionales las rectas siguientes comuniquen, $2ab \;..\; be+bd \;..\; be-bd \;..\; ab$ y como que se allen dos rectas cuia difª es $2bd$ reciprocas a las rectas $2ab$ y ab: luego alladas que sean sera (prop. 16. lib. 6.º eV) $2aba = beb - bdb$

y (ax. 2.º eV) lo seran . . $2aba + bdb = beb$

Dividase (prop. 10 lib. 1.º eV) ab en f, desde f como centro se describa el circulo pequeño que pase por los puntos a, y b, y se tire la recta eh, que passe por f quedara dividida en la periferia del circulo en los puntos g, y, h;

Digo, que la secante eh, es la suma de las extremas, cuia demonstracion es la misma ella, por ella, que la que se vio, (prop. anterior, fº 182 que es lo que se devia de demonstrar.

Y si se dijese que la eh no es la suma de las extremas luera otra maior, ó menor, como hy luego (prop. 1ª lib. 2º eV) el Rectangulo yhg contedo de la suma de las extremas por la media hg es igual ala suma delos quadrados dela 1ª y 2ª, (tercera igualacion analitica) Pero (prop. 4. lib. 2º eV) el quadrado dela suma delos extremos hyh es igual ala suma delos quadrados delos extremos mas el duplo quadrado del termino medio ó (prop. 2ª lib. 2º eV) son iguales hyh ⏜ $yhg + hyg$ luego el Rectangulo hyg sera igual al duplo quadrado dela media esto es hyg ⏜ $2hgh$, mas la difª que ay entre la suma delos quadrados delos extremos, y la suma delos quadrados del 1º y 2º. Pero (prop. 1ª lib. 6º eV) son propor. $ab..bc..aba..abc$ esto es (coro. prop. 8ª lib. 6º eV) lo son $ab..bc..aba..bdb$ Pero por la supocic son proporcionales el quadrado aba ala difª con que excede la suma delos quadrados delos extremos, ala suma delos quadrados del 1º y 2º. luego, siendo como son propor. $aba..bdb..ab..bc$ luego (prop. 7. lib. 5º eV) el quadrado bdb, se deve igualar ala difª entre la suma delos quadrados delos extremos, y suma delos quadrados del 1º y 2º luego se deven igualar esto es, hyg ⏜ $2hgh + bdb$ esto es (coro. prop. 46. lib. 1º eV) lo son hyg ⏜ $2aba + bdb$ esto es (axi. 1º eV) son iguales hyg ⏜ beb esto es (prop. 36. lib. 3º eV) lo son heg ⏜ beb esto es (ax. 1º eV) son lo, iguales hyg ⏜ heg la parte al todo (ax. 9.) no puede ser: luego &c.

+

Corolario

Si fueren cinco cantidades continuas propor.ˡ, el quadrado dela suma delos extremos, el duplo quadrado del termino medio sumado (con la difᵃ de la suma delos quadrados delos extremos, y suma delos quadrados del 1º y 2º), y el quadrado dela difᵃ entre la suma delos extremos, y el termino medio son continuos proporcionales. porque son proporcionales las rectas siguientes $he \,.\,.\, eb \,.\,.\, be \,.\,.\, eg$
luego (prop. 22. lib. 6º eᵈ) $heh \,.\,.\, beb \,.\,.\, beb \,.\,.\, geg$

otra resolucion

Analisis

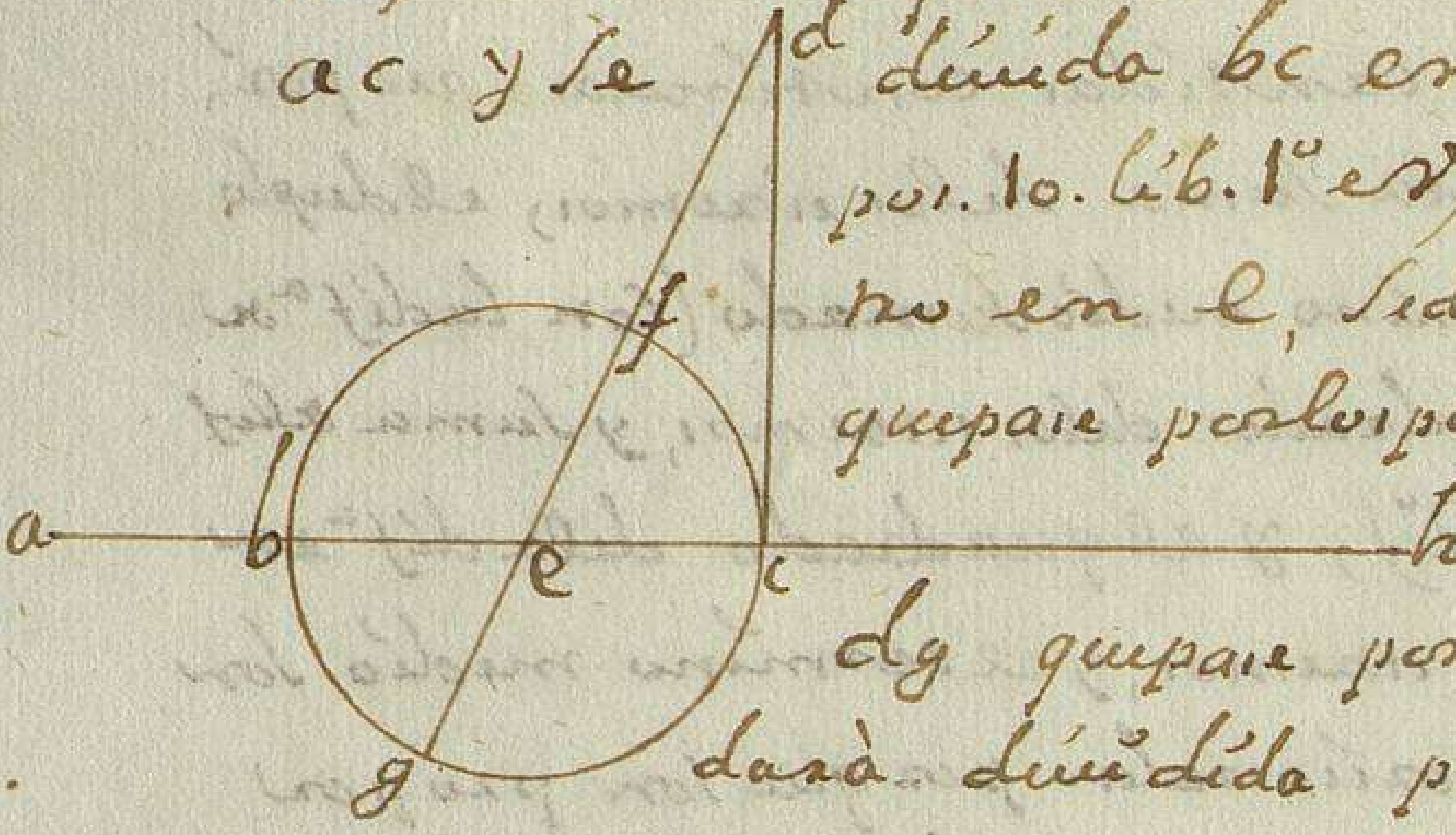
Digo q̃ son los siguientes $x \,.\,.\, cx \,.\,.\, \overset{2}{c}x \,.\,.\, \overset{3}{c}x \,.\,.\, \overset{4}{c}x$
supongase la magnitud . $z \sqcap \overset{4}{c}x + x$
y supongase la letra . . $q \sqcap \overset{2}{c}x$
luego (prop. 15. lib. 5º eᵈ) $qz \sqcap \overset{6}{c}\overset{2}{x} + \overset{2}{c}\overset{2}{x}$
y prop. 4. lib. 2º eᵈ) $z^2 \sqcap \overset{8}{c}\overset{2}{x} + 2\overset{4}{c}\overset{2}{x} + x^2$
luego (ax. 3º) seran $z^2 - 2q^2 \sqcap \overset{8}{c}\overset{2}{x} + x^2$
y por el mismo seran $z^2 - qz - 2q^2 \sqcap \overset{8}{c}\overset{2}{x} + x^2 - \overset{6}{c}\overset{2}{x} - \overset{2}{c}\overset{2}{x}$
y propor.ˡ compuesta $q^2 \,.\,.\, z^2 - qz - 2q^2 \,.\,.\, p \,.\,.\, q$
luego (prop. 18. lib. 5º eᵈ) $q^2 \,.\,.\, z^2 - qz \,.\,.\, p \,.\,.\, q + 2p$
luego (prop. 16. lib. 6º eᵈ) $pz^2 - pqz \sqcap q^3 + 2q^2p$
y dividiendo quedan $z^2 - qz \sqcap \frac{q^3}{p} + 2q^2$
y (prop. 14. lib. 6º eᵈ) propor.ˡ $q \,.\,.\, z \,.\,.\, z - q \,.\,.\, \frac{q^2}{p} + 2q$
luego resuelta como antes.

Por geometria

Sea dada la razon $ab \,.\,.\, bc$ y (prop. 12. lib. 6º eᵈ) hagan propor.ˡ $ab \,.\,.\, ac + ab \,.\,.\, bcb \,.\,.\, cdc$
y (prop. 11. lib. 1º eᵈ) se lebantese la perpendicular

+

cd, lado del quadrado cdc, sobre la recta ac y se divida bc en el punto e (prop. 10. lib. 1º E.) y haciendo centro en e, se describa el circulo que pase por los puntos b, c, y



se tire la secante dg que pase por el centro e, quedará dividida por la periferie en los puntos f, g.

Digo que la linea dg es la suma de las extremas y que en bc termino segundo de la razon dada es el tercer termino de los cinco continuos proporcionales. la demostracion es clara si se observan las partes analiticas, porque se an hecho proporcionales los terminos ab. : ac+ab. .bcb. .cdc luego (prop. 16. lib. 6º E.) . . ac:bcb+ab:bcb = ab:cdc esto es (prop. 1º lib. 2º E.) bcbc + ab:2bcb = ab:cdc esta igualacion corresponde a la penultima igualacion analitica como se puede ber y deprimiendo quedar $\frac{bcbc}{ab}$+2bcb = cdc esta corresponde a la ultima igualacion analitica. y proporcionales bc. . cd. .dc. .$\frac{bcb}{ab}$+2bc luego la misma operacion necesita que a seguido geometrica que la que se siguio analitica y assi si digo que la dicha secante dg, es la suma de las extremas, y si no dixere que no, se sacar (Prop. 12. lib. 6º E.) propor. ab. .bc. .bc. .ch y (prop. 18. lib. 5º E.) lo son ab. .ac+ab. .bc. .bh+bc

Pero por construccion son $ab \,..\, ac+ab \,..\, bcb \,..\, cdc$

luego (prop. 11. lib. 5° eV) son $bc \,..\, bh+bc \,..\, bcb \,..\, cdc$

y (prop. 15. lib. 5° eV) lo son $bcb \,..\, bc{:}bh+bcb \,..\, bcb \,..\, cdc$

luego (prop. 14. lib. 5° eV) $bc{:}bh+bcb = cdc$

esto es (prop. 3ª lib. 2° eV) ... $bch+2bcb = cdc$

luego (prop. 36. lib. 3° eV) son $gdf = cdc$

luego (ax. 1° eV) lo son $bch+2bcb = gdf$

y (prop. 14. lib. 6° eV) $bc \,..\, gd \,..\, df \,..\, ch+2bc$

luego por la antecedente la recta dg, es la suma de las extremas.

Prop. 51

Dada la razon de la suma de los quadrados de todos, al quadrado de la suma del 2° y 4° terminos hallar, los cinco conti nuos proporcionales.

Analisis

Digo q son los siguientes $x \,..\, cx \,..\, c^2x \,..\, c^3x \,..\, c^4x$

sean propor^s, $c^8x^2+c^6x^2+c^4x^2+c^2x^2+x^2 \,..\, c^6x^2+2c^4x^2+c^2x^2 \,..\, p \,..\, q$

supongase la incognita $z = c^4x+x$

y supongas la conocida $q = c^2x$

luego elebando, son $qz = c^6x^2+c^2x^2$

luego (ax. 2° eV) son $qz+2q^2 = c^6x^2+2c^4x^2+c^2x^2$

y (prop. 4ª lib. 2°) son ... $z^2 = c^8x^2+2c^4x^2+x^2$

luego (ax. 3° eV) son $z^2-q^2 = c^8x^2+c^4x^2+x^2$

luego (ax. 2° eV) son, $z^2+qz-q^2 = c^8x^2+c^6x^2+c^4x^2+c^2x^2+x^2$

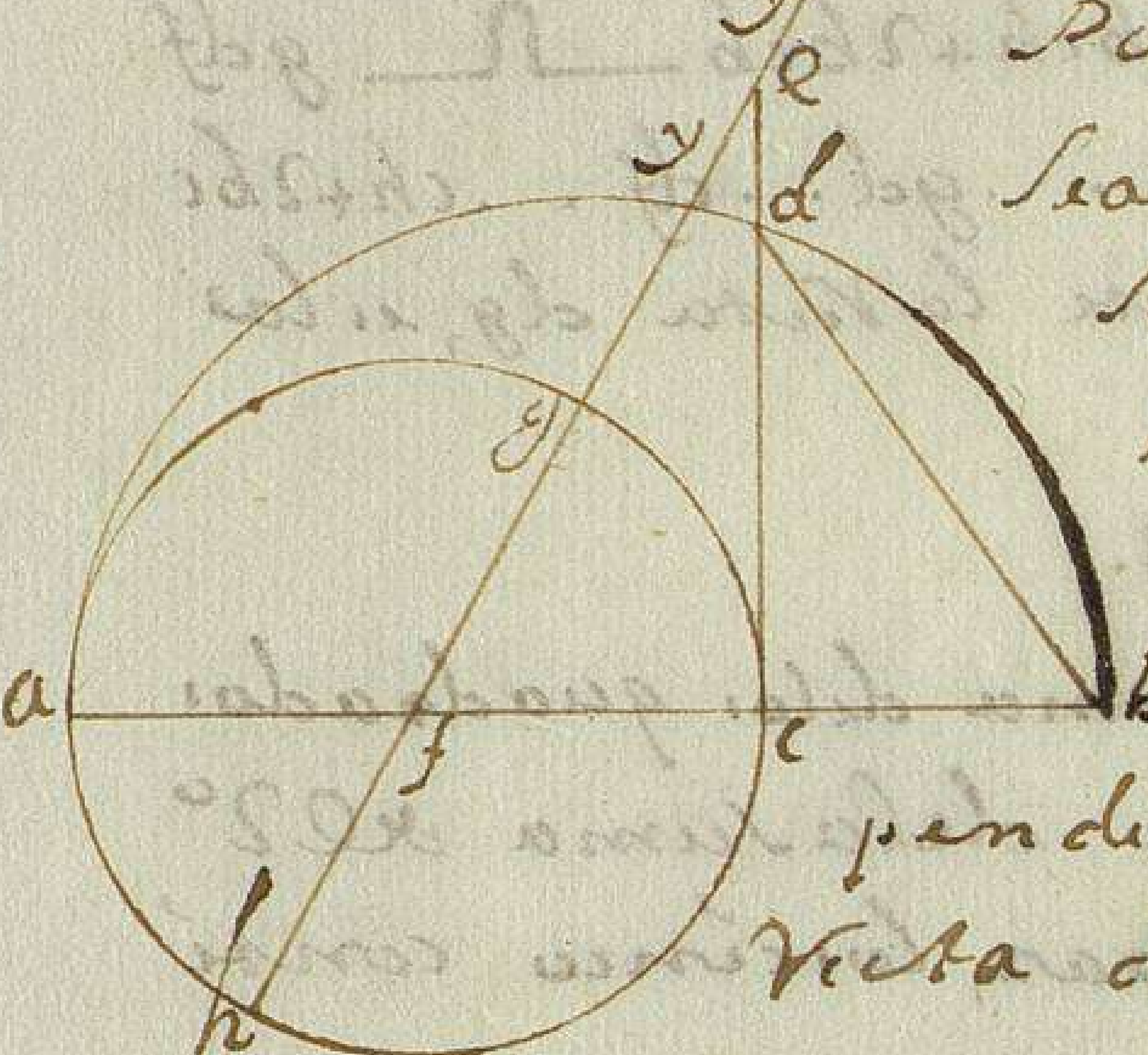
luego propor^s, $z^2+qz-q^2 \,..\, qz+2q^2 \,..\, p \,..\, q$

luego (prop. 16. lib. 6°) $qz^2+q^2z-q^3 = pqz+2q^2p$

y deprimiendo ... $z^2+qz-q^2 = pz+2qp$

luego (ax. 2º y 3º, eV) son $z^2+qz-pz \sqcap q^2+2qp$
luego (prop. 14. lib. 6º eV) $q \cdot\cdot z \cdot\cdot z+q-p \cdot\cdot q+2p$
luego Vuelto, allar dos Rectas cuia difa. es $q-p$ Reciprocas a las dos Rectas dadas cuia determinacion queda explicada en diferentes proposiciones

Por geometria



Sea dada la Razon ab . . bc sobre ab se describa el semicirculo y (prop. 11. lib. 1º eV) sobre ab del punto c se lebante la perpendicular cd, y se tire la Recta db. y (prop. 13. lib. 6º eV) se agan proporcionales, 2bd . . ce . . ec . . db
luego (prop. 16. lib. 6º eV) son $2bdb \sqcap cec$
y sobre ac se describa el circulo por cuio centro f se tire la secante eh, quedarà dividida por la periferie del circulo en los puntos g, h,
Digo que la linea eh, es la suma de las extremas, la demonstracion es clara si se observan las partes analiticas, Porque (coro. Prop. 8. lib. 6º) son proporcionales, ab . . bd . . db . . bc
luego (prop. 17. lib. 6º eV) son $abc \sqcap bdb$
y (prop. 15. lib. 5º eV) lo son $2abc \sqcap 2bdb$
Pero (por construccion) son $cec \sqcap 2bdb$
luego (ax. 1º eV) lo son . . $2abc \sqcap cec$
luego (ax. 2º eV) lo son $2abc+fcf \sqcap cec+fcf$
es asi (prop. 47. lib. 1º eV) $2abc+fcf \sqcap fef$

esta vltima igualazion corresponde ala vltima analitica porloqueconcluio afirmando ser la suma delas extremas larecta eh.

Y sime digere quenoloes loserà otra que sea maior, ò menor, como hy, esto supuesto, los diametros (Dⁿ 15. lib. 1º esV) son hg ⌐⌐ ac luego (prop. 7. lib. 5º esV) son, hy. .cb. .ac. .cb y (prop. 1ª lib. 6º esV) loson yhg. .cb:yh. .ac. .cb- enla 3ª igualacion analitica, consta, que el rectangulo cb:yh contenido porlamedia, cb y suma delas extremas hy ser igual ala suma delos quadros del 4º y 2º terminos. Pero (prop. 17. lib. 6º esV) son propor.^s ac. .cd. .dc. .cb luego (coro. prop. 19) del 6º esV) ac. .cb. .cdc. .cbc- luego (prop. 11. lib. 5º esV) yhg. .cb:yh. .cdc. .cbc y (prop. 15. lib. 5º esV) yhg. .cb:yh. .2cdc. .2cbc luego (prop. 12. lib. 5º esV) ac. .cb. .yhg+2cdc. .cb:yh+2cbc luego porlodicho arriba, y 4ª igualacion analitica, lasuma de estos planos cb:yh+2cbc seiguala ael quadrado dela suma del 4º y 2º terminos Pero porla suposicion son propor.^s ab. .cb como lasuma delos quadrados detodos, ael quadrado dela suma del 4º y 2º terminos: luego (prop. 12. lib. 5º esV) como las diferencias (asi vno, a otro) estos, ac. .cb. .yhg+2cdc. .cb:yh+2cbc luego el tercer termino desta proporcionalidad seiguala ala suma delos quadrados delos extremos menos elquadrado deltermino medio; Pero (prop. 4ª lib. 2º esV) porsuponerse, hy,

suma delos extremos, su quadrado hyh
se iguala alos quadrados delos extremos mas
el duplo quadrado del termino medio (Beáse, la 5.ª igualacion analitica) y tambien
(prop. 2.ª lib. 2.º e V) lo son iguales hyh $\frown$ yhg+hyg
luego se deuera igualar hyg $\frown$ 3cbc+2cdc
o son (prop. 47. lib. 1.º e V) . . hyg $\frown$ 2bdb+cbc
Pero por construccion . . cec $\frown$ 2bdb
luego (ax. 2.º y 1.º e V) . . hyg $\frown$ cec+cbc
Pero (prop. 16 y 36. lib. 3.º e V) heg $\frown$ cec
luego (ax. 2.º y 1.º e V). . hyg $\frown$ heg+cbc
la parte igual al todo, o el todo ala parte,
no puede ser (ax. 9. e V): luego la suma delas
extremas no es maior, ni menor que eh. que es
lo que se auia de demonstrar.

Otra operacion

Analisis

Digo $\overset{3}{q}$ son los siguientes, $x \cdot\cdot cx \cdot\cdot \overset{2}{c}x \cdot\cdot \overset{3}{c}x \cdot\cdot \overset{4}{c}x$

Supongase la incognita $Z \frown \overset{4}{c}x+\overset{2}{c}x+x$

y supongase la conocida $q \frown \overset{3}{c}x+cx$

(prop. 4.ª lib. 2.º e V) $Z^2 \frown \overset{8}{c}x^2+2\overset{6}{c}x^2+3\overset{4}{c}x^2+2\overset{2}{c}x^2+x^2$

y por la misma $q^2 \frown \overset{6}{c}x^2+2\overset{4}{c}x^2+\overset{2}{c}x^2$

(ax. 3.º e V) $Z^2-q^2 \frown \overset{8}{c}x^2+\overset{6}{c}x^2+\overset{4}{c}x^2+\overset{2}{c}x^2+x^2$

luego como se propone, $p \cdot\cdot q \cdot\cdot Z^2-q^2 \cdot\cdot q^2$

(Prop. 18. lib. 5.º e V) $p+q \cdot\cdot q \cdot\cdot Z^2 \cdot\cdot q^2$

luego (prop. 16. lib. 6.º e V) $pq^2+q^3 \frown qZ^2$

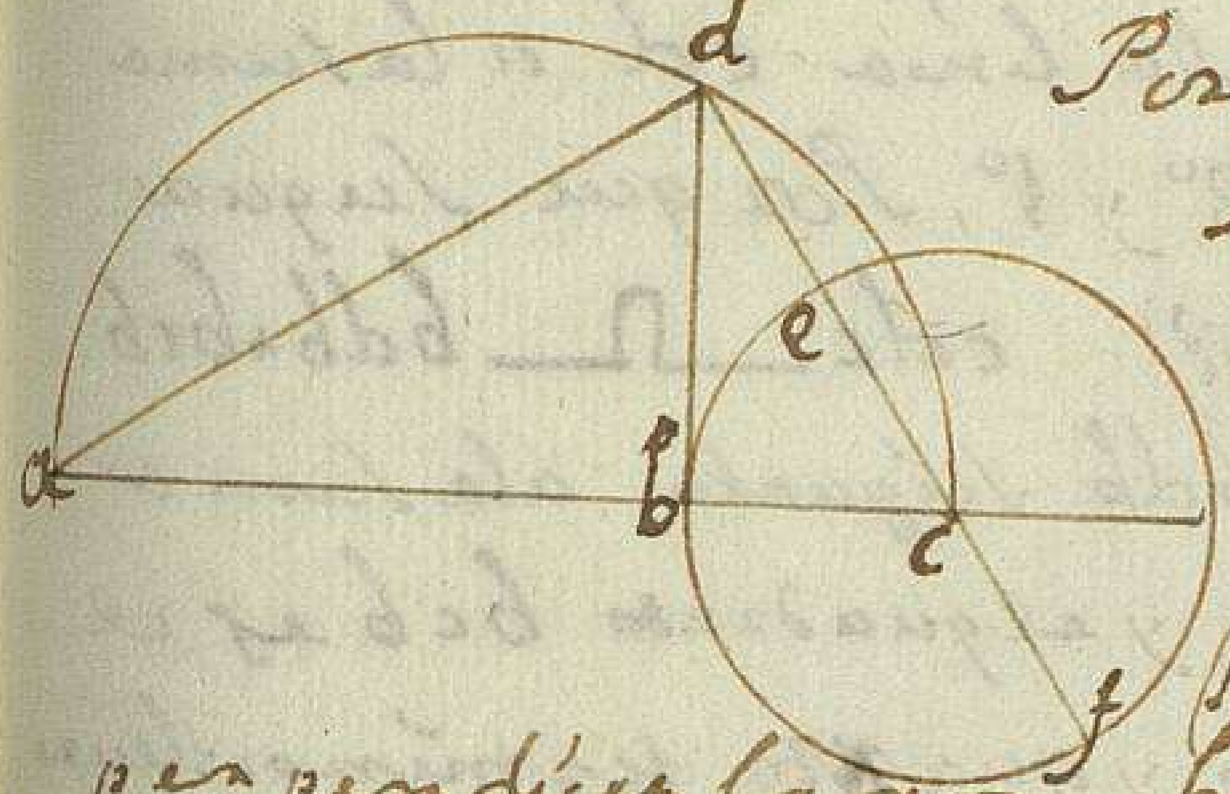
y deprimiendo lo son $pq+q^2 \frown Z^2$

luego V vuelto. y es tan claro que el producto delos
terminos dela razon dada, sumado con el quad-

drado del menor termino dela dicha razon
se iguala ala suma delos quadrados delos cinco
terminos continuos con mas el quadrado dela
suma del 4.º y 2.º termino ō tambien se hace
que el producto delos dos terminos dela razon
dada :: la suma delos quadrados alos dos cinco.

Otra operacion

Supongase la incognita $Z \sqcap c^8x + c^6x^2 + c^4x^2 + c^2x^2 + x^2$
Supongase la conocida, $g^2 \sqcap c^6x^2 + 2c^4x^2 + c^2x^2$
luego como se propone, $p \,.\, g \,.\, Z \,.\, g^2$
luego elebando y deprimiendo $pg \sqcap Z$
luego buelbo y sabe lo q̃ se a dicho arriba.



Por geometria

Sea dada la razon ab . . bc
sobre la recta ac se describa el semicirculo y
(prop. 11. lib. 1.º) se lebante la
perpendicular bd, y se tire la recta
ad; y centro c, y nterbalo cb se describa el
circulo entero y se tire la recta dc, pro-
longada asta el punto f.

Bastantemente tenemos ala vista, asi por
las operaciones analiticas, como por el (coro. prop.
8.ª lib. 6.º e.V.) el que se igualan $abc \sqcap bdb$
luego (ax. 2.º e.V.) se añade el qua.do $bcb \sqcap bcb$
quedaran (pro. 3.ª lib. 2.º, y 47. lib. 1.º e.V.) $acb \sqcap cdc$
a cuio lado dc si se le añade bc, ō cf su igual
la suma sera df.

Digo lo primero que el quadrado bdb

es igual ala suma delos quadrados detodos,
y que enel postrer termino bc dela Razon
dada seincluie lasuma delos dos terminos
segundo y quarto delos cinco continuos que
sebuscan: porsuposicion son propor.s ab . . bc
asi lasuma delos quadrados detodos aelqua
drado dela suma del segundo y quarto ter
minos; pero (prop. 1.a lib. 6.o eV) ab . . bc . . abc . . bcb
ereos (cor. prop. 8.a lib. 6.o, y 5.a del 5.o) ab . . bc . . bdb . . bcb
y es asi que (prop. 15. lib. 5.o eV) abc . . bcb . . bdb . . bcb
luego el quadrado bdb es igual ala suma de
los quadrados detodos. prop. 31 deeste tratado.

Digo losegundo quela linea cd es lasuma
delos tres terminos, 5.o 3.o y 1.o, Porque su qua
drado (prop. 47. lib. 1.o eV) cdc $\frac{\quad}{}\Omega\frac{\quad}{}$ bdb+bcb
luego siel quadrado bdb esigual ala suma
delos quadrados detodos, y elquadrado bcb es el
dela suma del segundo y quarto terminos: luego
cd es lasuma del 5.o 3.o y 1.o, (Coro prop. 30.)

Digo lo tercero quela df, es lasuma detodos.
Porque queda demonstrado ser de suma del
5.o 3.o y 1.o y la bc, o su igual suma del 2.o y 4.o, luego
todala df es lasuma detodos cinco terminos
continuos. que es lo q.e seavia dedemonstrar.

Dada pues lasuma detodos df, o lasuma
delos tres, dc, y lalinea bd cuio quadrado es
igual alasuma delos quadrados detodos, allar
los cinco continuos. porlas proposiciones, 29
y 30, deeste tratado.

+

Apendix

De estos muchos modos se puede Proceder en las operaciones analiticas como muchas veces se a dicho, Pues se pueden allar los cinco contenuos, dada qualesquiera suma o difª de los quadrados (anteriormente dichos) porque se puede arguir como la suma o difª omologa de las dadas a la suma o difª omologa de las que se buscan ultimamente prop. 12. lib. 5º e V)

De la misma suerte, se allaran los cinco terⁿ Dada la Razon de la suma de los quadrados de todos mas el quadrado de la suma del 2º y 4º a la suma de los quadrados del 2º y 4º, o al quadrado de la suma del 2º y 4º pues se puede arguir (Difⁿ 15. lib. 5º e V)

De la misma suerte se allaran, Dada la Razon de la suma de los quadrados de todos, a la suma de los quadrados de los extremos, menos el quadrado del termino medio, Porque se puede componer, y dividir &ª.

Ultimamente se ve manifiesto el poder proceder de otro modo para resolver el problema Propuesto en la prop. 31 deste, porque dada la suma de los qqdos de todos, y la suma de qualesquiera dos terˢ &ª.

Prop. 52

Dada la Razon de la suma de los quadrados de todos al quadrado de la suma de los extremos hallar cinco terminos continuos proporcionales.

Analisis

Digo que son los siguientes, x. . cx. . $\overset{2}{c}x$. . $\overset{3}{c}x$. . $\overset{4}{c}x$

+

Supongase la incognita Z $=$ $\overset{2}{c}x$

y supongase la conocida g $=$ $\overset{4}{c}x+x$

luego elebando, son gZ $=$ $\overset{6}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{c}\overset{2}{x}$

y (prop. 4ª lib. 2º eV) son g^2 $=$ $\overset{8}{c}\overset{2}{x}+2\overset{4}{c}\overset{2}{x}+x$

y tambien lo son . . . . Z^2 $=$ $\overset{4}{c}\overset{2}{x}$

luego (ax. 3º eV) lo son g^2-Z^2 $=$ $\overset{8}{c}\overset{2}{x}+\overset{4}{c}\overset{2}{x}+x^2$

luego (ax. 2º V) lo son $gZ+g^2-Z^2$ $=$ $\overset{8}{c}\overset{2}{x}+\overset{6}{c}\overset{2}{x}+\overset{4}{c}\overset{2}{x}+\overset{2}{c}\overset{2}{x}+x^2$

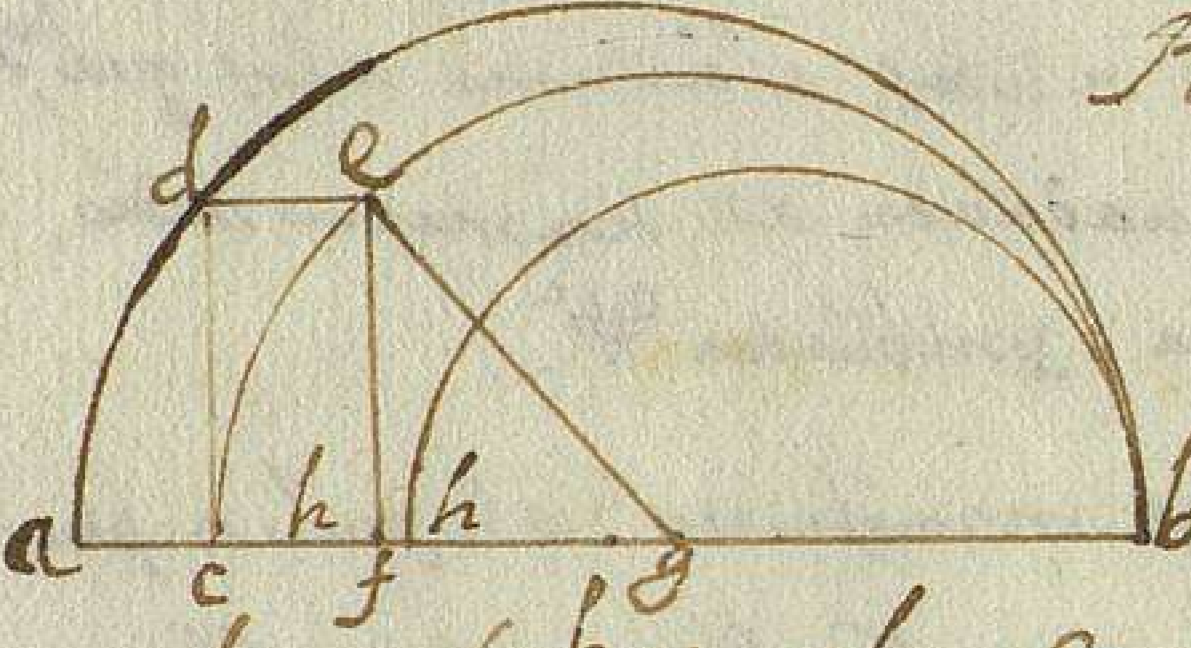
Como se propone $gZ+g^2-Z^2 \,.\,.\; g^2 \,.\,.\; p \,.\,.\; g$

luego (prop. 17. lib. 5º eV) $gZ-Z^2 \,.\,.\; g^2 \,.\,.\; p-g \,.\,.\; g$

elevando, y dividiendo $gZ-Z^2$ $=$ $pg-g^2$

y (prop. 14. lib. 6º eV) $g \,.\,.\; z \,.\,.\; g-z \,.\,.\; p-g$

luego Vuelto, allar dos rectas $z \,.\,.\; g-z$ cuia suma conocida, g, reciprocas a las dadas $p-g$ y g. la conclusion queda en muchas partes explicada, por lo que no repito



Por geometria

Sea dada la razon ab . . cb, sobre ab se deszriva el semicirculo y sobre cb otro, y (prop. 11. lib. 1º eV) se lebante la perpendicular cd, y (prop. 31. lib. 1º eV) se tire de paralela ala ab, y (prop. 12. lib. 1º) se deje caer la perpendicular ef, y se tire eg: Digo, que la cf es la media, la demonstracion es clara, si se obserban las partes analiticas. Porque el solido cbc:ab y el cubo cbcb se diferencian en el solido cbc:ac esto es que son iguales cbc:ab$-$cbcb $=$ cbc:ac porque deprimiendo $\overset{3}{q}$dan ab$-$cb $=$ ac

Porlo qual sabe claro que el solido sobre el quadrado cbc enla altura ab se diferencia del cubo cbcb enel solido sobre el quad.do cbc enla altura ac. Porloque siendo (coro. prop. 8. lib. 6.º eV) propor.s bc . . cd . . dc . . ca y (coro. prop. 19. lib. 6.º eV) . . bc . . ca . . cbc . . cdc luego (prop. 16. lib. 6.º eV) los solidos $ac{:}cbc \sqcap bc{:}cdc$ esto es por la igualdad (prop. 34. lib. 1.º) $ac{:}cbc \sqcap bc{:}efe$ y deprimiendo quedan iguales $ac{:}cb \sqcap efe$ luego (ax. 2.º eV) lo son, $ac{:}cb+fgf \sqcap efe+fgf$ esto es (prop. 47. lib. 1.º y cor. prop. 46.) $ac{:}cb+fgf \sqcap cgc$ y (ax. 3.º eV) quedan iguales $fgf \sqcap cgc-efe$ cuyo lado fg, quitado dela mitad dela cb esto es dela cg queda la dif.a cf. tercer termino delos cenio, y que el termino q contiene la suma delos extremos en cuio lugar se a puesto cb.

Y si se dijere que la cf no es la media sera una maior, o menor, como ch: luego el rectangulo bch contenido dela suma delas extremas bc y dela media ch sera igual ala suma delos quadrados del 2.º y 4.º termino 3.a ygualacion analitica: luego (prop. 3.a lib. 2.º eV y, 3.º axi.) seran, $chb \sqcap bch-chc$ pero son proporcionales ab . . cb asi la suma de los quadrados detodos al quadrado cbc: luego (prop. 17. lib. 5.º eV) seran propor.s ac . . cb asi la su.a delos quadrados detodos menos el quadrado dela suma delos extremos al quadrado cbc. Pero (coro. prop. 8. lib. 6.º eV) son ac . . cb . . cdc . . cbc y (prop. 15. lib. 5.º eV) lo son, acb . . cbc . . cdc . . cbc luego el quadrado cdc al quadrado cbc

añes el quadrado que contenga en si la suma de los quadrados de todos menos el quadrado de la suma de los extremos al quadrado cbc: luego seran iguales los quadrados estos cdc y el agregado de los quadrados de todos menos el quadrado cbc de la suma de los extremos. Ultimamente son propor', ac . . cb . . cdc . . cbc luego (prop. 18. lib. 5.° eV) ab . . cb . . cdc+cbc . . cbc luego la suma de los dos quadrados, cdc+cbc es igual a la suma de los quadrados de todos, por lo qual el quadrado cdc es igual al quadrado de la 2.ª y 4.ª juntos menos el quadrado de la media que dice ser ch.

Pero se a demonstrado ser el rectangulo chb igual al quadrado de la 2.ª y 4.ª menos el quadrado de la media ch; luego se deue hacer la siguiente igualacion chb ⊓ cdc
Pero tambien lo son acb ⊓ cdc
luego (ax. 1.ª eV) lo son. chb ⊓ acb
pero (prop. 34. y coro. prop. 46. lib. 1.°) cdc ⊓ efe
luego (coro. prop. 8.ª libro. 6 eV) cfb ⊓ acb
luego (ax. 1.ª eV) lo son chb ⊓ cfb
la parte a su todo o el todo a la parte (contra el, ax. 9) no pudiera: luego la media no pudiera mayor, ni menor, que la cf que es lo que auia de demonstrar.

Otra operacion
Analisi

Digo que son los siguientes, $x \ldots cx \ldots c^2x \ldots c^3x \ldots c^4x$

Supongase la incognita $z = c^4x + x - c^2x$

y supongase la conocida $q = c^4x + x$

luego (ax. 3° eu.) quedan $q - z = c^2x$

y (prop. 15. lib. 5 eu.) $q^2 - qz = c^6x + c^2x^2$

y (prop. 4. lib. 2° eu.) $q^2 = c^8x^2 + 2c^4x^2 + x^2$

y por la misma $q^2 + z^2 - 2qz = c^4x^2$

luego (axioma 3° eu.) $2qz - z^2 = c^8x^2 + c^4x^2 + x^2$

luego, ax. 2° eu.) $q^2 + qz - z^2 = c^8x^2 + c^6x^2 + c^4x^2 + c^2x^2 + x^2$

luego como se propone $q^2 + qz - z^2 \ldots q^2 \ldots p \ldots q$

luego (prop. 17. lib. 5° eu.) $qz - z^2 \ldots q^2 \ldots p - q \ldots q$

luego (el lib.do y despie.do) son $qz - z^2 = qp - q^2$

y (prop. 14. lib. 6° eu.) $\ldots q \ldots z \ldots q - z \ldots p - q$

luego vuelta como antes, y halladas las dos Reciprocas cuia suma se conocida Bolbiendo desde el fin por los argumentos contrarios asta el principio se conoceran los cinco continuos como queda prebenido

Por geometria

En la misma figura sea dada la razon $ab \ldots cb$

Digo que fb, es la difa entre la suma de los extremos y la media, y que en el segundo termino cb de la razon dada incluye la suma de los extremos: la demonstracion, es claro, porque si, cb, es la suma de los extremos, y cf el tercero: luego fb es la difa que se pretende saber: luego vuelto.

apendix

Por muchos modos se puede proceder analiticam^te^ Pues se puede suponer la incognita z por suma de diversos terminos, y qualquier termino de la razon da por la suma de otros, y se originaran muchas operaciones assi analiticas como geometricas.

De aqui se be claro el poderse resolber el problema, si se diere qualesquiera suma o difa. de los cinco continuos proporcionales, y la razon de sus quadrados, con lo qual se puede allar cada termino, porque se puede arguir (prop. 12. lib. 5º eu.) como uno a uno assi los agregados, o las difas. y finalmente se allaran otros problemas componiendo o dibidiendo de suerte que siempre se ade usar de aquel argum^to^ q mas combinga.

Prop. 53

Dada la razon de la suma de los quadrados de todos al quadrado de la suma de qualesquiera tres terminos allar cinco terminos continuos proporcionales.

Analisis

Digo que son los siguien.^tes^ $x \,.\,.\, cx \,.\,.\, \overset{2}{c}x \,.\,.\, \overset{3}{c}x \,.\,.\, \overset{4}{c}x$

supongase la incognita $z = \overset{2}{c}x$

y supongase la conocida $g = \overset{4}{c}x + \overset{2}{c}x + x$

luego (ax. 3º eu.) seran $g - z = \overset{4}{c}x + x$

y (prop. 15. lib. 5º eu.) $gz - z^2 = \overset{6}{c}x + \overset{2}{c}x^2$

y (prop. 4ª lib. 2º eu.) $g^2 + z^2 - 2gz = \overset{8}{c}x^2 + 2\overset{4}{c}x^2 + x^2$

y tambien son igual $z^2 = \overset{4}{c}x^2$

luego (ax. 3º eu.) $g^2 - 2gz = \overset{8}{c}x^2 + \overset{4}{c}x^2 + x$

luego (ax. 2º etc) $g^2 - gz - z^2 \sqcap c^8x^2 + c^6x^2 + c^4x^2 + c^2x^2 + x^2$

luego como se propone, $g^2 - gz - z^2 \;.\,.\; g^2 \;.\,.\; p \;.\,.\; g$

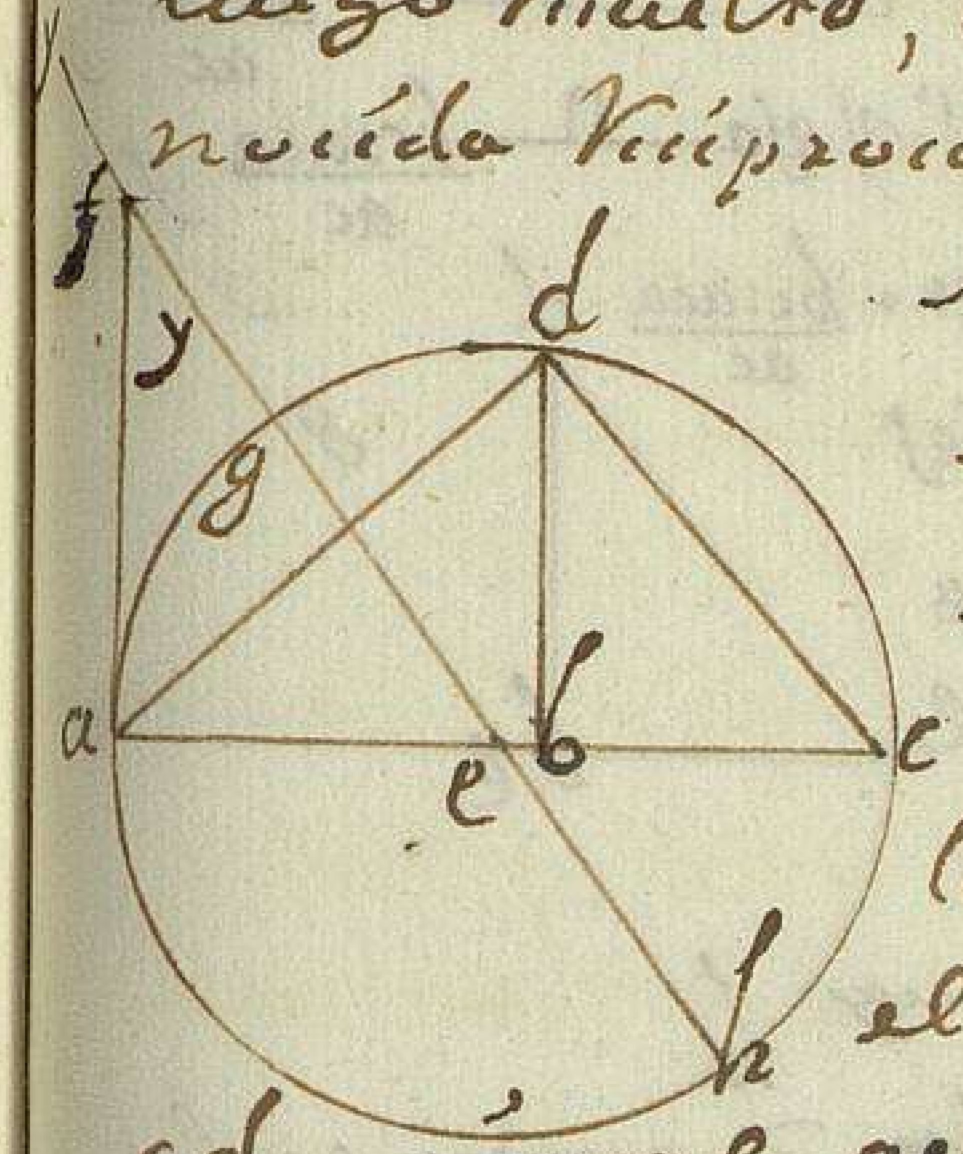
luego (prop. 16. lib. 6º etc) $g^3 - g^2z - gz^2 \sqcap g^2p$

y deprimiendo quedan $g^2 - gz - z^2 \sqcap gp$

luego (ax. 2º y 3º etc) son $g^2 - gp \sqcap z^2 + gz$

luego (prop. 14. lib. 6º etc) $g \;.\,.\; z \;.\,.\; z+g \;.\,.\; g-p$

luego buelbo, a las dos rectas cuia difª es conocida reciprocas a las dos rectas conocidas.



Por geometria

Sea dada la razon ab . . ac y sobre ac se describa el circulo y (prop. 11. lib. 1º etc) se lebante la bd perpendicular sobre el diametro ac, y se tire la recta cd, y igual a ella se lebante perpendicular af, y se tire por el centro e, la secante fh, que sera dividida por la periferie del circulo en los puntos g, h; digo, que la linea fg, es la tercera proporcional de las cinco, y el diametro ac contiene los tres terminos 2º, 3º y 1º,

la demonstracion es clara Porque si del cubo de la ac se quita el solido rectangulo sobre el quadrado de la ac en la altura ab, queda el solido rectangulo sobre el quadrado de ac en la altura bc: Porque son (prop. 8ª y 4ª lib. 6 etc) Proporcionales las tres rectas bc . . cd . . dc . . ca

luego (coro prop. 12. lib. 6º) bc . . ca . . bcb . . cdc

y tambien lo son ac . . bc . . aca . . cdc

luego (pro. 16. lib. 6º etc) $ac : cdc \sqcap bc : aca$

206 estos (el de la bulto) iguales . . . $ac{:}cde \sqcap bc{:}aca$

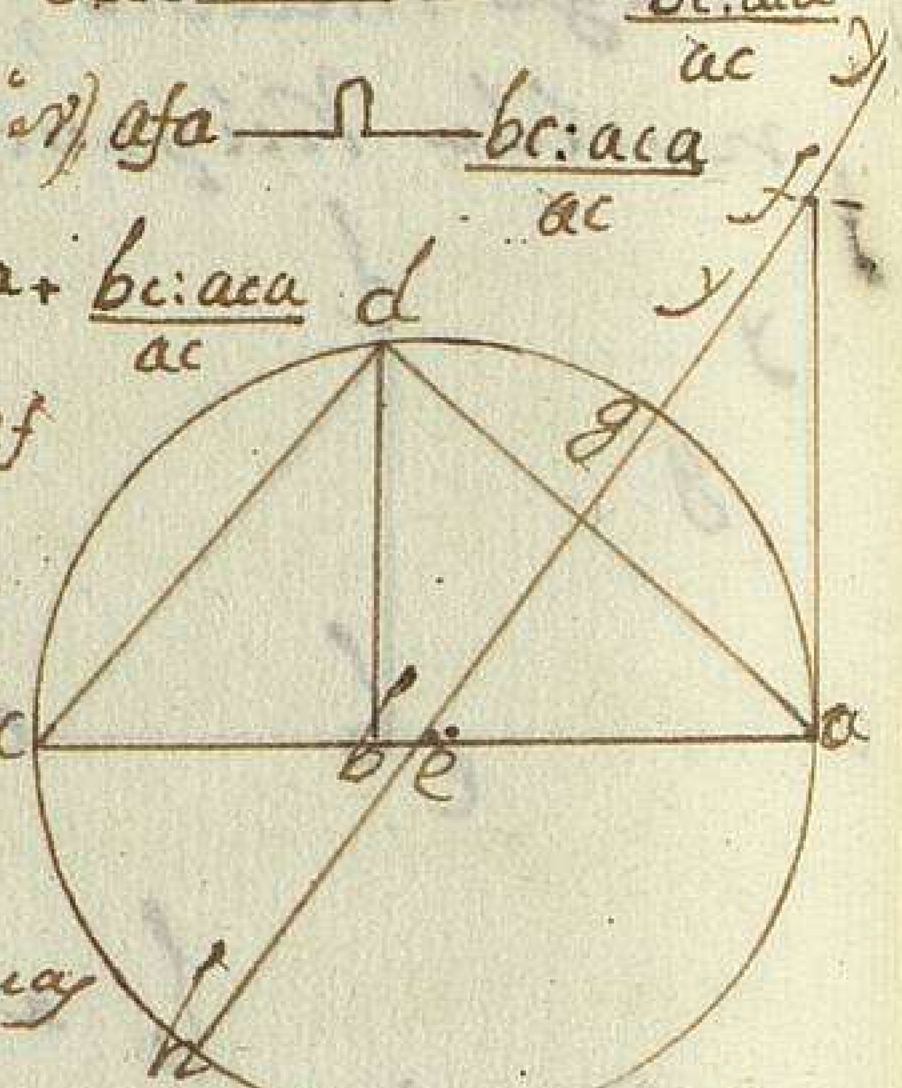
Por lo qual el Solido Rectangulo sobre el quadrado aca en la altura bc, se á igualado al Solido sobre el quadrado cdc en la altura ac. luego el Solido Rectangulo sobre el quadrado aca en la altura bc dibidido por ac, viene al cociente el quadrado cdc, estos dividiendo quedan iguales $cdc \sqcap \frac{bc{:}aca}{ac}$

estos (por construcion, y coro. prop. 46. lib. 1º eu) $afa \sqcap \frac{bc{:}aca}{ac}$

pero (ax. 2º eu) son $afa+aea \sqcap aea + \frac{bc{:}aca}{ac}$

(Prop. 47. lib. 1º eu) $afa+aea \sqcap fef$

luego (ax. 1º eu) lo son $fef \sqcap aea + \frac{bc{:}aca}{ac}$



y si del lado del quadrado fef el igual a fe se quita eg queda el residuo fg, tercer termino de la continua la qual corresponde a la incognita z puesta en la operacion analitica.

Y si se dijere que no lo es tercera ó mas maior, ó menor) como gz; luego el Rectangulo hyg contenido de la media yg, y de la hy suma de las extremas mas el duplo de la media es igual al quadrado de la suma del 2º y 4º termino (coro. prop. 26. dive, fº 99.) y siendo proporcionales por suposicion y inbersa ac . . ba assi el quadrado de la suma de los ~~tres~~ terminos quinto tercero, y primero, a la suma de los quadrados de todos estos (por suposicion) ac . ba . . aca . $\frac{ba{:}aca}{ac}$

Pero (coro. prop. 8ª y 4ª lib. 6º) ca . . ad . da . . ab.

y (coro. prop. 19. lib. 6º eu) ca . ba . aca . . ada

luego (prop. 11. lib. 5. eu) aca . . $\frac{ba{:}aca}{ac}$. aca . . ada

luego (prop. 14. lib. 5º eu) $\frac{ba{:}aca}{ac} \sqcap ada$

esto es son iguales los siguientes $cab \sqcap ada$
luego el quadrado ada es igual a la suma de los
quadrados de todos. Pero el quadrado aca es
(prop. 47. lib. 1 y 31. del 3° eV) igual esto es $aca \sqcap ada + cdc$
Pero el quadrado aca, (coro. Rev p. 3 o f° 118) es i-
gual a la suma de los quadrados de todos cinco
mas el quadrado de la suma del 2° y 4°: luego el
quadrado cdc, ó su igual afa es el quadrado del
agregado de la 2ª y 4ª; por lo qual el quadrado
afa se deve igualar al rectangulo hyg. esto es
se deve hazer la siguiente ig.n $afa \sqcap hyg$
Pero (prop. 36. lib. 3° eV) lo son $afa \sqcap hfg$
luego (ax. 1° eV) lo son iguales $hyg \sqcap hfg$
la parte del todo del todo igual a la parte lo que
no puede ser (ax. 9 eV) luego la tercera ó media
de las cinco magnitudes continuas no puede
ser maior, ni menor que la fg, é insistiendo en
la recta ac ó en hg su igual la suma de los
tres terminos que son 5° 3° y 1° que es lo que se avia
de demonstrar.

Otra resolucion

Analisis

Digo que son los siguientes, $x. .cx. .c^2x. .c^3x. . c^4x$
supongase la incognita $z \sqcap c^4x + x$
y supongase la conocida $q \sqcap c^4x + c^2x + x$
luego (ax. 3° eV) lo son $q - z \sqcap c^2x$
luego (prop. 15. lib. 5° eV) $qz - z^2 \sqcap c^6x^2 + c^2x^2$
y (prop. 4. lib. 2° eV) lo son $z^2 \sqcap c^8x^2 + 2c^4x^2 + x^2$
y por la misma lo son $q^2 + z^2 - 2qz \sqcap c^4x^2$

208 luego (ax. 3.º eº) lo son $2qz-q^2 \sqcap c^8x^2+c^4x^2+x^2$

Pero lo son iguales . . $qz-z^2 \sqcap c^6x^2+c^2x^2$

luego (ax. 2.º eº) lo son $3qz-z^2-q^2 \sqcap c^8x^2+c^6x^2+c^4x^2+c^2x^2+x^2$

luego como se propone, $3qz-z^2-q^2 \,.\,.\, q^2 \,:\,:\, p \,.\,.\, q$

luego (prop. 18. lib. 5.º eº) $3qz-z^2 \,.\,.\, q^2 \,:\,:\, p+q \,.\,.\, q$

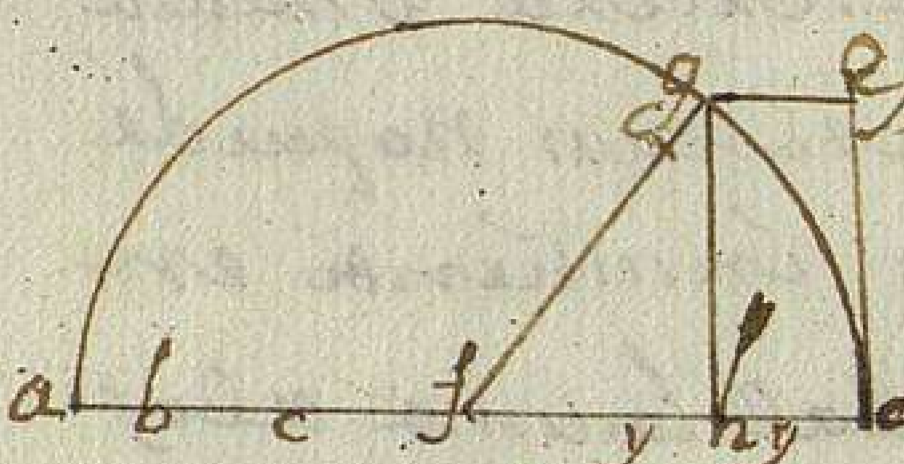
luego (prop. 16. lib. 6.º eº) $3q^2z-qz^2 \sqcap pq^2+q^3$

y deprimiendo quedan $3qz-z^2 \sqcap pq+q^2$

luego (prop. 14. lib. 6.º eº) $q \,.\,.\, z \,:\,:\, 3q-z \,.\,.\, p+q$

luego vuelto allar dos rectas cuia suma es $3q$ reciprocas a las dos rectas dadas q y $p+q$. las quales alladas, bolbiendo por los contrarios argumentos desde el fin hasta el principio se conocerán las partes que se ignoran, y para la determinación de los cinco g^{do} ya se esplicado.

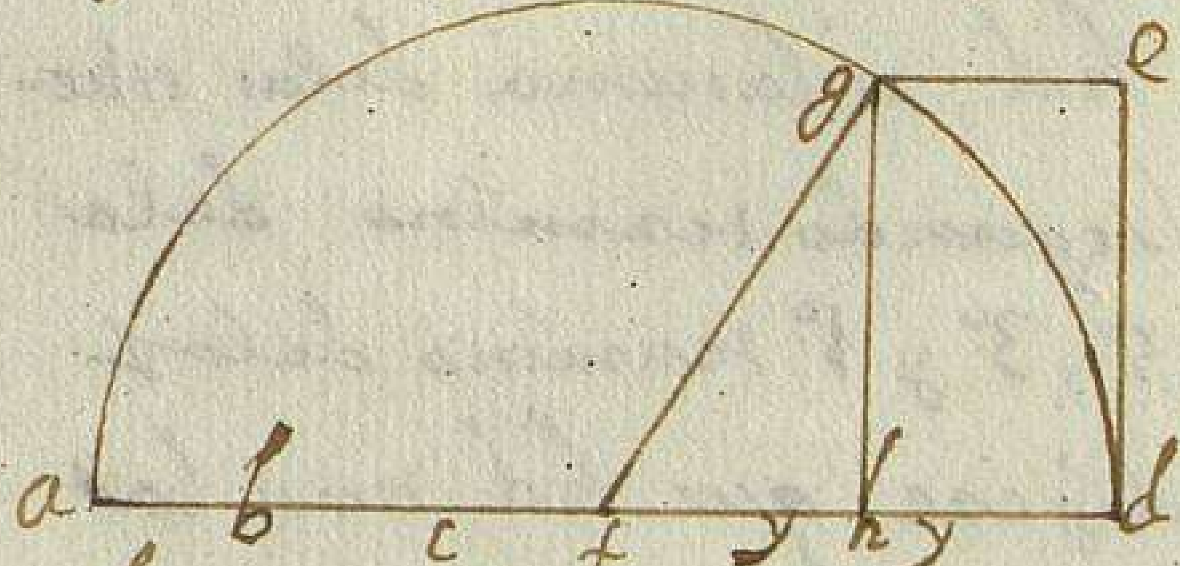
Por geometría



Sea da como antes ab . . ac y (prop. 12 lib. 6.º eº) proporcionales, $ac \,.\,.\, ac+ba \,:\,:\, aca \,.\,.\, ded$ esto así do allar (prop. 13. lib. 6.º eº) la media de entre las dos rectas ac y $ac+ab$, porque son proporcionales continuos $ac \,.\,.\, de \,:\,:\, ed \,.\,.\, ac+ab$ y (coro. prop. 19. lib. 6.º eº) lo son ac . . $ac+ab$: : aca . . ded y siendo clara la última analogía analítica pues ac me representa la q, y $ac+ab$ me representa $q+p$ y toda la recta ad me representa ser igual a las $3q$, ó $3ac$, por lo qual sobre toda la recta ad se describa el semicírculo y en su extremo punto d (prop. 11. lib. 1.º eº) se lebante la perpendicular de, y (proposición 31. lib. 1.º eº) se de la recta eg, paralela, á la ad, y del punto g, (prop. 12. lib. 1.° eV) caiga sobre ob, perpendicular la recta gh:

Digo, que el segmento hd, es la suma de las extremas ynsistiendo en ac (segundo termino de la razon dada) la suma del 5.°, 3.° y 1.° termino de los cinco quebrados, y si se dixere que hd no es la suma de las extremas, lo serà otra maior, o menor, como yd: luego si todo el diametro, es ac ad y ac se iguala a la suma del 5.°, 3.° y 1.°: luego si yd contiene la suma de los extremos quedarà ay, igual a dos vezes el 5.°, dos vezes el 1.° y tres vezes el 3.°, por lo qual (prop. 1.ª lib. 2.° eV) el rectangulo ayd se iguala al duplo rectangulo de la suma del 5.° 3.° y 1.° por la suma de los extremos, mas el rectangulo contenido de la suma de los extremos, por el 3.° pero este, se iguala a suma de los quadrados del 2.° y 4.° y el rectangulo contenido de la suma del 5.° 3.° y 1.° por la suma de los extremos es igual al quadrado de la suma de los extremos mas el rectangulo contenido de la suma de los extremos por el termino medio: luego ayd se iguala a los quadrados del 2.° y 4.° juntos, mas el duplo quadrado de la suma de los extremos, mas el duplo rectangulo contenido de la suma de los extremos por el termino medio. Pero esta suma se compone asimismo de la suma de los quadrados de todos, y mas el quadrado de la suma del 5.° 3.° y 1.°: luego el rectangulo ayd, se iguala a la suma de los quadrados de todos, y mas el quadrado de la suma

210. del 5º, 3º y 1º terminos de los cinco continuos. Pero por la suposicion son propor.s ab . . ac asi la suma de los



quadrados de todos al qua.do de la suma del 5º 3º y 1º; luego (prop. 18. lib. 5º eV) seran propor.s, ab+ac . . ac . asi la suma de los quadrados de todos mas el quadrado de la suma del 5º 3º y 1º al quadrado de la misma del 5º, 3º y 1º y (def.n 13. lib. 5º eV) ac . . ab+ac . . aca . al quadrado de la suma del 5º, 3º y 1º; mas la suma de los quadrados de todos. Pero por construccion son proporcionales los quatro ter.s, ac . . ab+ac . . aca . . ded luego (prop. 9. libro 5º eV) el quadrado ded, es igual a la suma de los quadrados de todos, mas el quadrado de la suma del 5º, 3º y primer termino. pero el quadra.do ded (prop. 34. y coro. prop. 46. lib. 1º eV) es igual a el quadrado ghg; esto es (coro. prop. 8 y 17 del lib. 6º eV) el rectangulo dha. luego (ax. 1º eV) ayd = dha la parte igual al todo (ax. 9 eV) no puede ser: luego la suma de las extremas no puede ser mayor, ni menor que la recta hd, que es lo que se avia de demonstrar.

Corolario

Si fueren cinco terminos continuos proporcionales, el quadrado de la suma de los extremos; la suma de los quadrados de todos, mas el quadrado de la suma del 5º 3º y 1º; y et el quadruplo del qua.do de la suma del 5º 3º y 1º, el quadruplo de la suma de los quadrados del 2º 3º y 4º y mas otro quadrado del 3º, son continuos proporcionales por ser los dh . . ghg . . ha

Otro modo

Analisis

Digo que son los siguientes, $x \,.\,.\, cx \,.\,.\, c^2x \,.\,.\, c^3x \,.\,.\, c^4x$
supongase la incognita $Z \sqcap c^8x^2 + c^6x^2 + c^4x^2 + c^2x^2 + x^2$
y supongase la conocida $q \sqcap c^4x + c^2x + x$
luego como se propone propor.^{l}, $Z \,.\, q^2 :: p \,.\, q$
luego vuelta porque son $qp \sqcap z$

Por geometria

Sea la razon dada $ab \,.\,.\, ac$ y entre los dos dichos proporcion 13 libro 6.^{o} de E.) se halle la media ad, luego (prop. 17. lib. 6.^{o} seran proporcionales $ca \; ad \,.\,.\, da \,.\,.\, ab$ porque son iguales $cab \sqcap ada$ Digo que el quadrado ada es la suma de los quadrados de todos. y que el segundo termino, ac de la razon dada incluye en si la suma de los tres terminos 5.^{o} 3.^{o}, y 1.^{o}, Porque siendo por suposicion proporcionales $ab \,.\,.\, ac$ como la suma de los quadrados de todos al quadrado de la suma del 5.^{o} 3.^{o} y 1.^{o} y como $ab \,.\,.\, ac \,.\,.\, ada \,.\,.\, aca$ luego el quadrado ada al quadrado aca tiene la misma razon que la suma de los quadrados de todos al quadrado aca contenido de la suma de los terminos 5.^{o}, 3.^{o} y 1.^{o} luego (prop. 9. lib. 5. de E.) el quadrado ada se debe igualar a la suma de los quadrados de todos.

Dada la linea ac y la linea ad cuio quad.^{do}, sea igual a la suma de los quadrados de todos

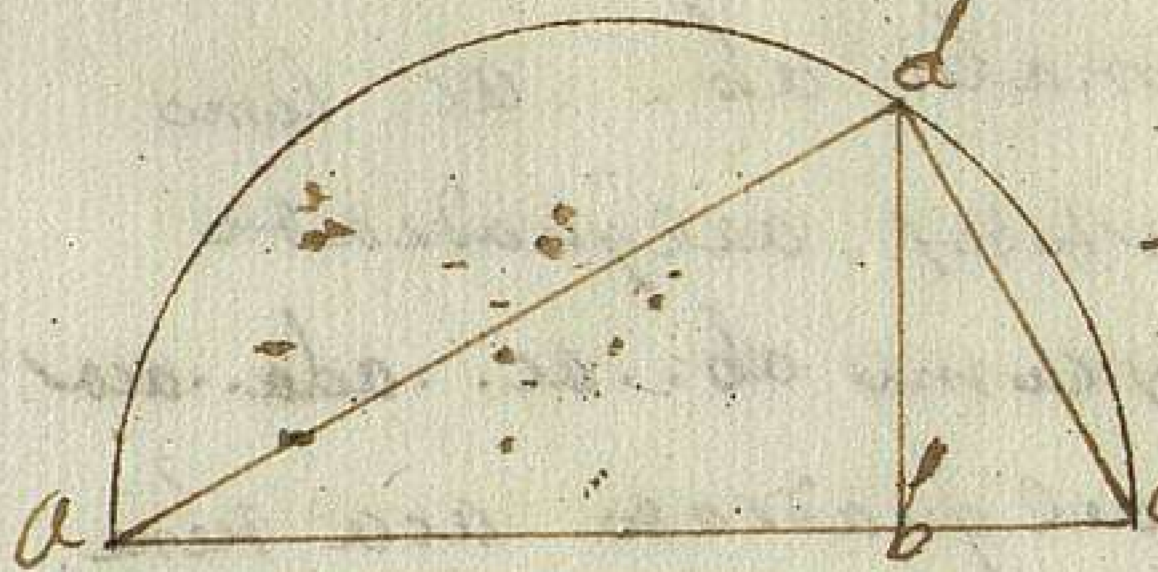
+

Sigue de Resolver el problema prop. 30 arriba.

Una operacion

Analisis

Digo que son los siguientes, $x \,.\,.\, cx \,.\,.\, c^2x \,.\,.\, c^3x \,.\,.\, c^4x$
Supongase la incognita $z = c^3x + cx$
y Supongase la conocida, $g = c^4x + c^2x + x$
luego la suma de todos, $g+z = c^4x + c^3x + c^2x + cx + x$
de cuio quadrado, $g^2 + 2gz + z^2$ si se resta el duplo del contenido de $g+z$, por z que es igual $2gz + 2z^2$, quedara el residuo, $g^2 - z^2 = c^8x^2 + c^6x^2 + c^4x^2 + c^2x^2 + x^2$ (Prop. 4ª lib. 2º eu) luego seran segun lo propuesto, proporcionales $g^2 - z^2 \,.\,.\, g^2 \,.\,.\, p \,.\,.\, g$
luego (prop. 16. lib. 6º eu) son iguales $g^3 - gz^2 = g^2p$
y deprimiendo lo son iguales . . $g^2 - z^2 = gp$
y (ax. 2º y 3º eu) lo son iguales . . $g^2 - gp = z^2$
y (propo. 14. lib. 6º eu) propor.^{l} $g \,.\,.\, z \,.\,.\, z \,.\,.\, g-p$
luego Resuelto entre las dos rectas, g y g menos p allar la media (prop. 13. lib. 6º eu)



Por geometria

Sea dado la razon $ab \,.\,.\, ac$ sobre, ac, se descriva el semicirculo, y (prop. 11. lib. 1º eu) se libante la perpendicular bd, y se tiren las rectas ad, dc:

Digo, que la linea dc, es la suma de la 2ª y 4ª Porque (prop. 8ª 4ª y 17 del 6º eu) $acb = cdc$ esto es el rectangulo acb contenido del maior termino de la razon ac y de la bc difª de los minimos terminos de la razon dada es igual del quadrado cdc

que corresponde al quadrado dela incognita Z
enla operacion analitica como se be manifiesto
y sobre la ac insiste la suma del 5º 3º y 1º. Pero
el quadrado aca, (coro. prop. 30 fº 118) es igual a
ala suma delos quadrados detodos, mas el quadrado
dela ~~s~~ suma del 2º y 4º termino, (prop. 47. lib. 1º
de E) son iguales los quadrados aca ⏜ cd + ada
Porser el angulo enel semicirculo recto (prop. 31. lib.
3º de E) pero (prop. 8 y 4ª del 6º de E) cab ⏜ ada
luego el quadrado ada es igual ala suma delos
quadrados detodos y el quadrado cdc el dela suma
del 2º y 4º terminos y el diametro ac suma del 5º
3º y 1º Por lo qual queda demonstrado ser cd
suma del 2º y 4º que es lo que se havia de demonstrar.

apendix

Yàavadicho como se puede proceder demuchos modos enla operacion, assi analitica como geometrica delos quales vuelvan nuebas resoluciones enlos problemas; Pero algo se lea de dexar ael discurso del geometra aficionado. respecto de quedar, yà dicho en otra parte Poder allar los nuevos continuos dada qualesquiera suma o difª y la razon delos quadrados, pues dividiendo o componiendo se podran encontrar terminos que vuelban la question.

214

+

Prop. 54

Dada la suma del 2.° y 4.°, y dado el Solido sobre el quadrado del 3.° en la altura de la suma de los extremos y el duplo del 3.°, allar los cinco terminos continuos proporcionales.

Analisis

Digo que son los siguientes, $x \;..\; cx \;..\; \overset{2}{c}x \;..\; \overset{3}{c}x \;..\; \overset{4}{c}x$

Supongase la incognita $z \sqcap \overset{2}{c}x$

y Supongase la conocida $p \sqcap \overset{3}{c}x + cx$

el quadrado de la $z^2 \sqcap \overset{4}{c}x^2$

y sea la conocida . . $q^3 \sqcap \overset{8}{c}x^3 + 2\overset{6}{c}x^3 + \overset{4}{c}x^3$

(coro. prop. 26. f.° 99) son propor.s $z \;..\; p \;..\; p \;..\; \frac{pp}{z}$

y coro. prop. 19. lib. 6.° de E.) lo son, $z \;..\; \frac{pp}{z} \;..\; z^2 \;..\; pp$

luego (prop. 16. lib. 6.° de E.) $ppz \sqcap q^3$

y deprimiendo quedan $z \sqcap \frac{q^3}{pp}$

luego Vuelto Pues diuidiendo el Solido conocido, q^3, por el quadrado pp, hecho de la suma del 2.° y 4.° termino Viene al cosiente el termino medio de los cinco continuos. la de terminar los demas es clara por la 26 citada.

apendix

De aqui se manifiesta el como se puede Vuolber este Problema. Dada la suma de los extremos y mas el duplo del termino medio; y dado el Solido sobre el quadrado de la Suma del 2.° y 4.° termino en la altura del 3.° termino, Hallar los cinco continuos proporcionales. Se resuelbe por el mismo corolario citado arriba.

Prop. 55

Dada la suma delos extremos, y dado el solido sobre el agregado delos quadrados del 2º y 4º terminos en la altura del termino medio Allar los cinco terminos continuos proporcionales.

Analisis

Digo que son los sig.tes $x \;.\,.\; cx \;.\,.\; c^{2}x \;.\,.\; c^{3}x \;.\,.\; c^{4}x$

Supongase la tercera, z ——— ∩ ——— $c^{2}x$

Supongase la conocida, p ——— ∩ ——— $c^{4}x + x$

Supongase el solido g^{3} ——— ∩ ——— $c^{8}x^{3} + c^{4}x^{3}$

Luego (coro. prop. 26. deste) son, $p \;.\,.\; g \;.\,.\; g^{2} \;.\,.\; z^{2}$

Luego resuelto por que elibando produce el mismo solido sobre el quadrado del 3º en la altura del agregado del 5º y 1º terminos que sobre la suma de los quadrados del 2º y 4º terminos en la altura del 3º termino lo qual era manifiesto.

apendix

Delo dicho se sigue la resolucion deste Problema

Dada la suma delos quadrados del 2º y 4º terminos, y dado el solido sobre el quadrado del termino 3º en la altura dela suma delos extremos Allar los cinco continuos Proporcionales.

+

Prop. 86

Dada la suma de todos, y dado el solido sobre la suma de los quadrados de todos en la altura de la suma del 2º y 4º terminos. Allar los cinco terminos continuos proporcionales.

Analisis

Digo que son los sigui^tes $x . . cx . . c^2x . . c^3x . . c^4x$

Supongase la incognita $Z \sqcap c^3x + cx$

y supongase la conocida $p \sqcap c^4x + c^3x + c^2x + cx + x$

y sea el solido conocido q^3 el contenido sobre la suma de los quadrados de todos en la altura de la suma del 2º y 4º terminos Z: luego (como, prop. 29 de este fº 115) propor^l $p^2 . . \frac{q^3}{2Z} . . p . . \frac{q^3}{2pZ}$ de donde el quarto termino $\frac{q^3}{2pZ}$ es la dif^a que ay entre la suma del 1º 3º y 5º, y la suma del 2º y 4º, por lo qual siendo Z suma del 2º y 4º añadiendo $2Z$ al termino $\frac{q^3}{2pZ}$ sera la suma $\frac{q^3}{2pZ}+2Z$ igual a la suma de todos, por lo qual se debera hacer una igualacion $p \sqcap \frac{q^3}{2pZ}+2Z$

y elebando (prop. 15. lib. 5º e V) $p^2Z \sqcap q^3 + 2pZ^2$

y (ax. 3º e V) seran iguales $p^2Z - 2pZ^2 \sqcap q^3$

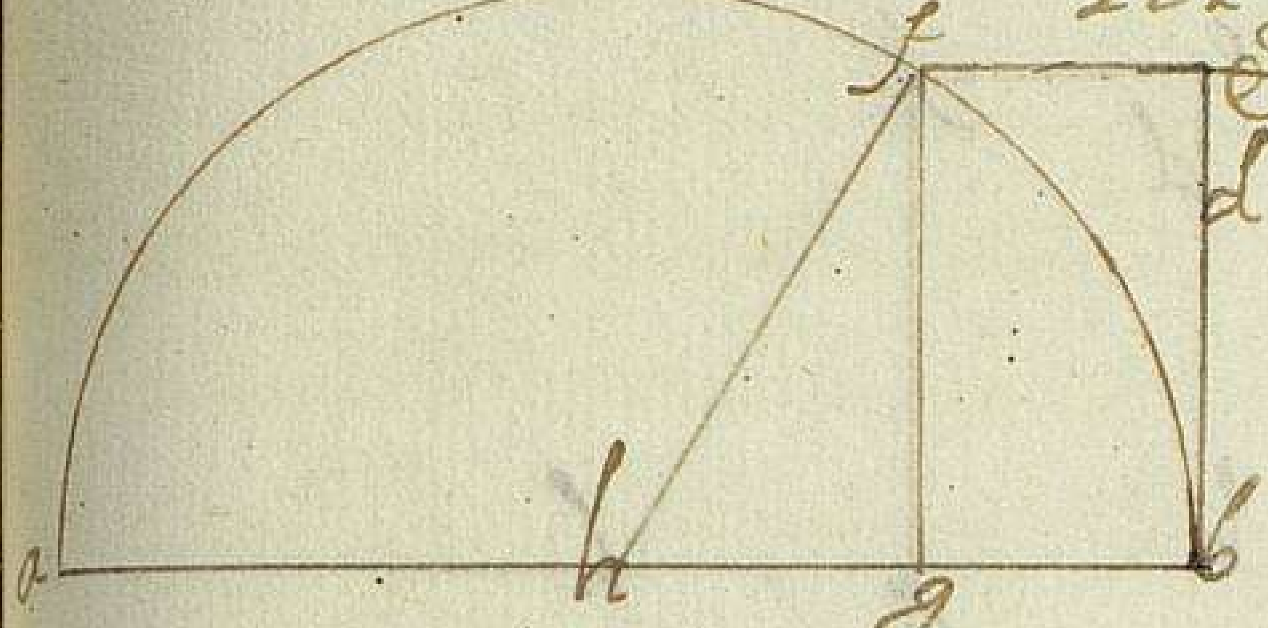
y deprimiendo por $2p$ son $\frac{pZ}{2} - Z^2 \sqcap \frac{q^3}{2p}$

y (prop. 14. lib. 6º e V) propor^l $q . . Z . . \frac{p}{2}-Z . . \frac{q^2}{2p}$,

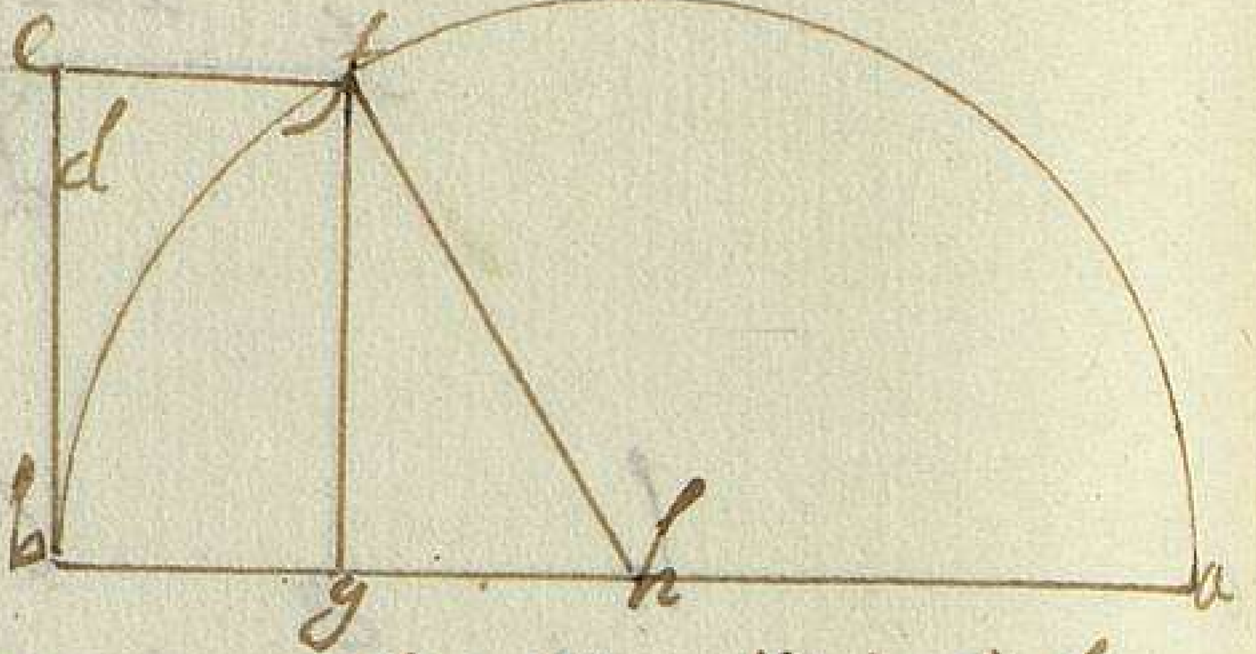
luego vuelto allar las dos rectas Z y $\frac{p}{2}-Z$ cuya suma es media, p, reciprocas a las dos rectas dadas q, y $\frac{q^2}{2p}$ que es lo que se a demonstrado: luego allada quien se abra la suma del 2º y 4º y por consiguiente la suma de los demas, y por consiguiente cada uno de los cinco como se a dicho en otras proposiciones.

+

Por geometria



Sea dada la linea ab, suma de todos, y sea el cubo, $\overset{3}{g}$, el solido (ò igual del solido) sobre el quadrado suma de los quadrados de todos, y (prop. 12. lib. 6º eu) se hagan proporcionales ab . . g : . $\overset{2}{g}$ . . bdb
y (por la 13. lib. 6º eu) se hagan . 2bd . . be . . eb . . db
luego (prop. 16. lib. 6º eu) son $\overset{3}{g}$ ——⊓—— ab:bdb
como por la misma lo son beb ——⊓—— 2bdb
Pongase (prop. 11. lib. 1º eu) bd, perpendicular sobre ab y se alargue hasta e, desde donde (prop. 31. lib. 1º eu) se tire ef, paralela a la recta ab, hasta que toque en la periferie del semicirculo descripto sobre la misma ab en el punto f, desde donde (prop. 12. lib. 1º eu) caiga fg, perpendicular sobre la misma ab, y se tire fh al centro del semicirculo. Digo que siendo por construcion, ab . . g . a $\overset{2}{g}$. bdb, luego el solido rectangulo contenido de los extremos se iguala al cubo, $\overset{3}{g}$, por lo qual dividiendo el cubo $\overset{3}{g}$, por la suma de todos ab, viene por cociente el quadrado bdb; cuio duplo es el quadrado beb, ò su igual el quadrado fgf, el qual restado del quadrado fhf (prop. 47. lib. 1º eu) resulta el quadrado hgh, cuio lado es hg que añadido, y restado de la mitad de ab, resultan los segm.tos ag, gb, Por lo qual Digo que ag, ò gb,



si la difª entre la suma del 1º 3º y 5º y la suma del 2º y 4º, Por lo qual (coro. prop. 29 fº 115 dicte) son proporcionales como la suma de todos a la suma del 2º y 4º así la suma de los quadrados de todos al Rectangulo contenido de dicha suma del 2º y 4º por la difª entre la suma del 1º 3º y 5º, y la suma del 2º y 4º, Pero el solido ō el cubo, $\overset{3}{g}$, se iguala al solido contenido de la suma de todos ab sobre el Rectº dicho: por ser proporcionales ab . . g . . $\overset{2}{g}$ . . bdb luego (prop. 16. lib. 6º eu) son $\overset{3}{g}$ ——Ω—— ab:bdb Por lo qual el solido ab:bdb se iguala al solido contenido sobre el plano de la difª entre la suma del 1º 3º y 5º y suma del 2º y 4º por la misma suma del 2º y 4º en la misma altura ab, Por lo qual la Recta bd es media proporcional entre la difª de la suma del 1º 3º y 5º y la suma del 2º y 4º, esto es quedan proporcionales como dicha difª a la Recta db, así db a la suma del 2º y 4º terminos: luego siendo proporcionales por construccion 2ab . . be . . eb . . bd y ser (prop. 16. lib. 6º eu) iguales, beb ——Ω—— 2bdb luego el duplo Rectangulo contenido de la dicha difª, y suma del 2º y 4º terminos tambien (ax. 1º eu) se iguala al quadrado beb o a su igual fgf, al Rectangulo (prop. 8ª y 17 lib. 6º eu) agb. Pues si el Rectangulo contenido de ag, y dela media gb, o el contenido debaxo de bg, y dela media ga, se iguala al quadrado bdb: luego siendo ab suma de todos, será ag ō gb el exceso conque sobrepuxa la suma del 1º 3º y 5º ala suma del 2º y 4º, que es lo que se avía de demonstrar.

Y porque algunas vezes puede suceder que la suma del segundo, y quarto termino sea maior o menor que el dicho intervalo, Para que se conozca qual delas dos lineas sea el intervalo que se busca o se pretende indagar se observará si el quadrado, bdb siguala re al Rectangulo contenido dela bg, en la mitad del segmento ga, y si se igualare en tal caso será bg, el intervalo dicho y el segmento ga será el duplo dela suma del 2º y 4º. Pero si el quadrado bdb se igualare al Rectangulo contenido dela mitad del segmto. bg, y de toda la recta ga, será ga, el dicho intervalo y el segmento bg el duplo dela suma del 2º y 4º y conocidos estos y la suma delos otros terminos se conocerán los demas por las proporciones 26 y 27 deste tratado como dellas y desus corolarios consta a folios 98, y 101.

Apendix

Dado el mismo solido, y dado el plano contenido debaxo dela suma del

220 segundo, y quarto, y del exceso con que sobre puja la suma del 1º 3º y 5º a la suma del 2º y 4º se podran allar los cinco terminos continuos proporcionales, porque dibidiendo el solido por el plano vendra al cociente la suma de todos cinco terminos, y allada que sea esta suma se puede seguir por muchas operaciones y demonstraciones geometricas la resolucion del problema propuesto como queda ya en muchas proposiciones dicho ademas de las citadas, y sus determinaciones egecutadas.

Prop. 57

Dada la suma de los quadrados de todos, y dado el solido sobre el plano contenido de la suma del 2º y 4º por la difª entre esta suma y la suma del 1º 3º y 5º, en la altura de la suma de todos allar, los cinco terminos continuos propor.

Analisis

Digo que son los siguientes $x \;.\;.\; cx \;.\;.\; c^2x \;.\;.\; c^3x \;.\;.\; c^4x$

Supongase la incognita $Z \;\sqcap\; c^3x + cx$

y supongase la conocida, $p^2 \;\sqcap\; c^8x^2 + c^6x^2 + c^4x^2 + c^2x^2 + x^2$

y supongase el solido, q^3, el contenido sobre el plano arriba dicho en la altura de la suma de todos: luego (coro. prop. 29. fº 115 de este) son proporcionales como, $p^2 \;.\;.\; q$ asi $q^2 \;.\;.\; Z$

luego (prop. 16. lib. 6º de E) son $q^3 \;\sqcap\; p^2Z$

y deprimiendo (prop. 15 del 5º de E) $\frac{q^3}{p^2} \;\sqcap\; Z$

luego vuelto pues dividiendo el solido dado

$\overset{3}{q}$, por el quadrado p^2 igual ala suma delos quadrados de todos Viene al cociente Z conocida y su prima igual ala suma del 2º y 4º terminos delos cinco continuos con lo qual se conoceran todos como ya queda dicho.

Prop. 58

Dada la suma del 1º 3º y 5º y dado el Solido Sobre el agregado delos quadrados delos tres terminos intermedios en la altura del 3º termino Allar, los cinco terminos continuos.

Analisis

Digo que son los siguientes $x \ldots cx \ldots \overset{2}{c}x \ldots \overset{3}{c}x \ldots \overset{4}{c}x$

Supongase la incognita $Z \sqcap \overset{2}{c}x$

y supongase la conocida $p \sqcap \overset{4}{c}x + \overset{2}{c}x + x$

y supongase el Solido $\overset{3}{q}$ contenido de las suma delos quadrados del 2º 3º y 4º en la altura del 3º terminos: luego (como prop. 32 f.º 121 deste) son propor.^s $p \ldots q \ldots \overset{2}{q} \ldots Z^2$

luego (prop. 16 lib. 6º eu.) iguales $\overset{3}{q} \sqcap pZ^2$

y (pro. 15. lib. 5º eu.) iguales $\ldots \frac{\overset{3}{q}}{p} \sqcap Z^2$

luego Vuelto. porque diuidiendo el cubo dado por la suma dada Viene al cociente el quadrado del tercer termino delos cinco continuos propor.^s que se buscan con lo qual quedan conozidos todos como se a dicho por las reglas dadas en diferentes proposiciones.

apendix

Deaquí Se sigue el como se puede Vuolber este Problema. Dada la suma delos quadrados delos tres terminos yntermedios, y dado el Solido sobre el quadrado del termino medio en la altura de de los tres 1.º, 3.º y 5 Allar, los cinco terminos Continuos propor.^{les}
Pues diuidiendo el Solido por el plano suma delos quadrados Viene al cosiente el termino tercero delos cinco que buscamos.

Tabla de las prop. contenidas en este libro.

+

+

+

+

+

435

GEOMETRIA